



Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Esther Padilla Expósito

*Integración numérica geométrica
con aplicación al problema de N
cuerpos.*

Geometric numerical integration with
application to the N -body problem.

Trabajo de Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Julio de 2020

DIRIGIDO POR

Domingo Hernández Abreu

Resumen · Abstract

Resumen

En la presente memoria se pretende estudiar algunos métodos numéricos que preservan algunas propiedades geométricas de las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, con aplicación al problema de N cuerpos. Inicialmente introducimos el concepto de transformaciones simplécticas, comprobando que el flujo de un sistema hamiltoniano representa una tal transformación, en particular, demostramos que en tales sistemas hamiltonianos el flujo preserva volumen y orientación. Además estudiaremos la estabilidad de los puntos de equilibrio de sistemas hamiltonianos no lineales. A continuación se pasa a analizar el problema de N cuerpos, sistema hamiltoniano cuya solución exacta es desconocida para $N > 3$, estudiando las órbitas del problema de Kepler, caso especial del problema de dos cuerpos, y estableceremos resultados como el Teorema Centro de Lyapunov que nos ayudará a probar la existencia de soluciones periódicas de pequeña amplitud para sistemas autónomos en un entorno de un punto de equilibrio y lo aplicaremos en el problema restringido de tres cuerpos. Posteriormente se introducen los métodos de Euler simpléctico y Störmer-Verlet para sistemas autónomos, particularizando a sistemas hamiltonianos, y estudiaremos algunas de sus propiedades, tales como, simetría, reversibilidad y simplecticidad. Finalmente ilustraremos mediante algunos ejemplos la conservación del hamiltoniano en intervalos de tiempo suficientemente amplios por parte de los métodos de Euler simpléctico y Störmer-Verlet, en comparación con los métodos clásicos Euler explícito y Runge.

Palabras clave: *Sistema hamiltoniano – Problema de N cuerpos – Problema de Kepler – Problema de tres cuerpos restringido – Método de Euler simpléctico – Método de Störmer-Verlet.*

Abstract

In the present manuscript we study some numerical method that preserve some geometric properties of the solution of systems of ordinary differential equations, with application to the N -body problem. First, we will study symplectic transformations, checking that the flow of Hamiltonian systems represents such a transformation. It is proved that in such Hamiltonian systems the flow preserves volume and orientation. Also we study the stability of equilibria of a non-linear Hamiltonian system. Next, we will analyze the N -body problem, a Hamiltonian system whose exact solution is unknown for $N > 3$, by studying the orbits of the Kepler problem, a special case of a 2-body problem, we will set results as the Lyapunov Center Theorem that helps us to prove the existence of periodic solutions of small amplitude for autonomous differential systems in a neighborhood of its equilibria, and we apply this to study the restricted three body problem. Later, we will introduce the symplectic Euler and Störmer-Verlet method for autonomous systems, particularly for hamiltonian systems, and we will study some properties, such as symmetry, reversibility and symplecticity. Finally some examples are presented comparing the symplectic Euler and Störmer-Verlet methods with other classical methods, like explicit Euler and Runge methods, according to the conservation of the Hamiltonian in sufficiently large time intervals.

Keywords: *Hamiltonian system – N -body problem – Kepler problem – Restricted three-body problem – Symplectic Euler method – Störmer-Verlet method.*

Contenido

Resumen/Abstract	III
1. Sistemas Hamiltonianos	1
1.1. Nociones básicas	1
1.2. Transformaciones simplécticas	2
1.3. Sistemas hamiltonianos lineales	7
1.4. Estabilidad de los equilibrios	9
2. El Problema de N Cuerpos	15
2.1. Ecuaciones del movimiento	15
2.2. Problema de los dos cuerpos	16
2.3. Bifurcación de Hopf y Teorema Centro de Lyapunov	18
2.4. Problema restringido de 3 cuerpos	22
2.5. Colapso total	26
3. El método de Störmer-Verlet y la Integración Numérica Geométrica.	29
3.1. Métodos de un paso. Error local y consistencia	29
3.2. Métodos de Störmer-Verlet y Euler simplécticos	31
3.3. Reversibilidad, simetría y simplecticidad del método de Störmer-Verlet	34
3.4. Métodos de Störmer-Verlet y Euler simplécticos para sistemas hamiltonianos	39
3.5. Ilustración numérica	44
3.5.1. La ecuación del péndulo en el plano	44
3.5.2. Problema de Kepler para un sistema de dos cuerpos	45
3.5.3. Problema restringido de tres cuerpos	48
3.5.4. Sistema solar exterior	50
Bibliografía	53
Poster	55

Sistemas Hamiltonianos

1.1. Nociones básicas

Sean $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ una función de clase C^1 definida en un abierto Ω de \mathbb{R}^d y $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. El sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.1)$$

es **autónomo** pues la variable independiente t no aparece de forma explícita en la función f . A lo largo de esta memoria \dot{x} denotará derivación respecto a t , mientras que el apóstrofo ($'$) indicará derivación respecto a la variable de estado correspondiente.

Una función no constante $I(x)$ es una **integral primera** de (1.1) si $(\nabla I(x))^T f(x) = 0$, para todo x de Ω , donde ∇ denota el operador gradiente. Esto es equivalente a decir que toda solución $x(t)$ de (1.1) satisface $I(x(t)) = cte$.

Definición 1.1.1 Sean $H : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un abierto Ω de \mathbb{R}^{2m} y $x = (q, p) \in \Omega$, siendo $q = (q_1, \dots, q_m)$ y $p = (p_1, \dots, p_m)$. Denominaremos **sistema hamiltoniano** a la ecuación autónoma $2m$ -dimensional

$$\begin{cases} \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}(q, p) \\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q, p) \end{cases} \quad j = 1, \dots, m. \quad (1.2)$$

Llamaremos **hamiltoniano** a la función escalar H de clase C^2 , $H : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$.

Además, $H(x)$ es una integral primera de (1.2) pues, como se comprueba fácilmente $(\nabla H(x))^T f(x) = 0$.

Ejemplo 1.1.1 Sea $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 . Tomando $\dot{q} = p$, tenemos que la ecuación $\ddot{q} = -U'(q)$ es equivalente al sistema hamiltoniano con un grado de libertad determinado por el hamiltoniano $H(q, p) = \frac{p^2}{2} + U(q)$, donde el término $\frac{p^2}{2}$ corresponde a la energía cinética y $U(q)$ a la energía potencial.

Ejemplo 1.1.2 El problema de Kepler para el problema de dos cuerpos puede ser descrito por un sistema hamiltoniano con dos grados de libertad, con hamiltoniano asociado $H(q, p) = \frac{\|p\|^2}{2} - U(q)$ en \mathbb{R}^4 , siendo $U(q) = -\frac{\nu}{\|q\|}$ el potencial, con $\nu \in \mathbb{R}$, y $\|\cdot\|$ la norma euclídea. Su sistema hamiltoniano correspondiente es

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\frac{\nu q}{\|q\|^3} \end{cases}$$

1.2. Transformaciones simplécticas

Reescribimos el sistema (1.2) de la siguiente forma

$$\dot{x} = X_H(x) := J\nabla H(x), \quad (1.3)$$

con $x = (q, p) \in \mathbb{R}^{2m}$, $\nabla H = (\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_m}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_m})^T$ y $J = \begin{bmatrix} O & I \\ -I & O \end{bmatrix}$, donde I denota la matriz identidad de orden m . Observamos que $J^T = J^{-1} = -J$.

Nota 1.2.1 Para cualquier función diferenciable $F : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$, dada una solución de la ecuación (1.3) tenemos que:

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) = (\nabla F(x(t)))^T X_H(x(t)) = (\nabla F(x(t)))^T J\nabla H(x(t)).$$

Definición 1.2.1 Dadas dos funciones diferenciables $F, G : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos el corchete de Poisson como

$$\{F, G\}(x) = (\nabla F(x))^T J\nabla G(x) = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial q_j}(x) \frac{\partial G}{\partial p_j}(x) - \frac{\partial F}{\partial p_j}(x) \frac{\partial G}{\partial q_j}(x) \right).$$

Si $x(t)$ es solución del sistema hamiltoniano (1.3) y F es una función diferenciable, entonces $\frac{d}{dt}F(x(t)) = \{F, H\}(x(t))$. Es más, F es una integral primera de (1.3) si $\{F, H\} = 0$. Luego, como $\{H, H\} = 0$, cualquier hamiltoniano es constante a lo largo de soluciones de su sistema hamiltoniano asociado.

Nota 1.2.2 Consideremos un cambio de variable $\varphi(y) = x$, $\varphi : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$. Sustituyendo en (1.3) tenemos que

$$\dot{x}(t) = \varphi'(y(t))\dot{y}(t) = J\nabla H\varphi(y(t)),$$

lo que implica

$$\dot{y}(t) = \varphi'(y(t))^{-1} J\nabla H(\varphi(y(t))),$$

donde φ' denota a la matriz jacobiana de φ .

Estamos interesados en aquellas transformaciones que preserven la estructura del hamiltoniano, es decir, los cambios de variable que nos hagan obtener $\dot{y} = X_{H \circ \varphi}(y)$ [1, p. 226]. Para que esto ocurra, esas transformaciones tendrán que verificar:

$$\varphi'(y(t))^{-1} J\nabla H(\varphi(y(t))) = J\nabla(H \circ \varphi)(y). \quad (1.4)$$

Notamos que $\nabla(H \circ \varphi)(y) = (\sum_{j=1}^{2m} \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_1}, \dots, \sum_{j=1}^{2m} \frac{\partial H}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_{2m}})^T = \varphi'(y)^T \nabla H(\varphi(y))$.

En particular (1.4) se verifica cuando $\varphi'(y(t))^{-1} J = J\varphi'(y(t))^T$, o bien, multiplicando por J a izquierda y derecha, cuando $J = \varphi'(y(t))^T J\varphi'(y(t))$. Surge así la siguiente definición [8, Cap. 2].

Definición 1.2.2 Una transformación diferenciable $\varphi : V \subseteq \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ en un conjunto abierto $V \subseteq \mathbb{R}^{2m}$ se dice canónica o **simpléctica** si $\forall x \in V$

$$\varphi'(x)^T J\varphi'(x) = J. \quad (1.5)$$

En lo que sigue consideramos $\varphi_t : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$, el flujo en tiempo t de la ecuación diferencial (1.3), esto es, $\varphi_t(x) = x(t; 0, x_0)$ siendo $x(t; 0, x_0)$ la solución del sistema hamiltoniano (1.3) tal que $x(0) = x_0$. Así, $\varphi_0(x_0) = x_0$.

Teorema 1.2.1 (Poincaré) [1, p.227], [2, p.184-185]. Sea $H(q, p)$ un hamiltoniano de clase C^2 definido en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{2m}$. Entonces, para cada t fijo, la aplicación φ_t , flujo de (1.3), es una transformación simpléctica.

Demostración. Para cada x fijo, como $\varphi_t(x)$ es una solución de (1.3), sabemos que verifica la ecuación $\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = X_H(\varphi_t(x))$, donde H es de clase C^2 . Derivando respecto a x obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\varphi'_t(x) = X'_H(\varphi_t(x))\varphi'_t(x), \tag{1.6}$$

esto es, la matriz jacobiana $\varphi'_t(x)$ es una solución de la ecuación lineal variacional del sistema hamiltoniano a lo largo de la solución $\varphi_t(x)$. Además, como $\varphi_0(x) = x$, esto implica que $\varphi'_0(x) = I$.

Queremos ver que φ_t es simpléctica. Para ello definimos $\alpha(t) = \varphi'_t(x)^T J \varphi'_t(x)$ y derivamos respecto a t .

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= (X'_H(\varphi_t(x))\varphi'_t(x))^T J \varphi'_t(x) + \varphi'_t(x)^T J (X'_H(\varphi_t(x))\varphi'_t(x)) \\ &= \varphi'_t(x)^T (X'_H(\varphi_t(x))^T J + J X'_H(\varphi_t(x))) \varphi'_t(x). \end{aligned}$$

Puesto que $X'_H(z) = JH''(z)$, siendo H'' la matriz Hessiana de H , con $J^2 = -I$ y $J^T J = I$, sigue que

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= \varphi'_t(x)^T (H''(\varphi_t(x))^T J^T J + J^2 H''(\varphi_t(x))) \varphi'_t(x) \\ &= \varphi'_t(x)^T (H''(\varphi_t(x))^T - H''(\varphi_t(x))) \varphi'_t(x) = 0. \end{aligned}$$

Como $\varphi'_0(x) = I$, se tiene que $\alpha(0) = J$, y entonces $\alpha(t) = J$, para todo t . Por tanto φ_t es una transformación simpléctica. \square

Definición 1.2.3 Sea $\varphi : V \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ una transformación diferenciable.

1. Diremos que φ **preserva el volumen** si $\int_{\varphi(A)} 1dy = \int_A 1dy$ para todo $A \subseteq V$ abierto acotado y medible.
2. Diremos que φ **preserva la orientación** si $\det(\varphi'(x)) > 0$, $\forall x \in V$.

Corolario 1.2.1 (Teorema de Liouville) [2, p.227]. Sea H un hamiltoniano de clase C^2 . Para cada $t \geq 0$ fijo, suficientemente pequeño, φ_t , el flujo de (1.3), preserva volumen y orientación.

Demostración. En virtud de la prueba del Teorema 1.2.1 de Poincaré tenemos que $\varphi'_t(x)^T J \varphi'_t(x) = J$, $\forall x \in V$. Luego, como $\det J \neq 0$ y $\det(\varphi'_t(x)^T) = \det(\varphi'_t(x))$, sigue que $(\det(\varphi'_t(x)))^2 = 1$, $\forall x \in V$. Como $\det(\varphi'_0(x)) = \det I = 1$, sigue de la continuidad de la aplicación $t \rightarrow \varphi_t(x)$ que $\det(\varphi'_t(x)) = 1$, para $t \geq 0$ suficientemente pequeño. Esto muestra que φ_t preserva tanto el volumen como la orientación. \square

Ejemplo 1.2.1 Consideremos el sistema hamiltoniano del oscilador armónico

$$\begin{cases} \dot{q} = p, \\ \dot{p} = -q, \end{cases} \tag{1.7}$$

con hamiltoniano asociado $H(q, p) = \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2}$. Su flujo

$$\varphi_t(q_0, p_0) = (q_0 \cos t + p_0 \sin t, -q_0 \sin t + p_0 \cos t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$$

verifica que $\det \varphi'_t(q_0, p_0) = \det \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = 1$, y φ_t preserva volumen y orientación. Además, $(\varphi'_t)^T J (\varphi'_t)^T = J$, por lo que φ_t es una transformación simpléctica.

Lema 1.2.1 (Lema de integrabilidad) Sean $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ una función continuamente diferenciable, tal que la matriz jacobiana $f'(x)$ es simétrica para todo $x \in \Omega$. Entonces para todo $x_0 \in \Omega$ existe un entorno U y una función $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \nabla H(x)$, $\forall x \in U$.

Demostración. Asumiendo sin pérdida de generalidad $x_0 = 0$, y considerando un disco alrededor de x_0 , contenido en Ω , definimos

$$H(x) = \int_0^1 x^T f(tx) dt = \sum_{j=1}^d \int_0^1 x_j f_j(tx) dt.$$

Derivando con respecto a x_k y usando la simetría $\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_i}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x_k}(x) &= \sum_{j=1}^d \int_0^1 \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_k} f_j(tx) + x_j \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(tx) \right) dt = \int_0^1 (f_k(tx) + t \sum_{j=1}^d x_j \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(tx)) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (t f_k(tx)) dt = f_k(x), \quad 1 \leq k \leq d. \end{aligned}$$

□

El siguiente teorema caracteriza localmente a los sistemas hamiltonianos en términos de la simplecticidad de su flujo [2, p.185-186].

Teorema 1.2.2 Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ una función continuamente diferenciable. Entonces, $x' = f(x)$ es localmente hamiltoniana si y solo si su flujo es simpléctico para todo $x \in U$ y para todo t suficientemente pequeño.

Demostración. La necesidad de la simplecticidad del flujo es consecuencia del Teorema 1.2.1 de Poincaré. Supongamos que el flujo φ_t es simpléctico, y probemos la existencia local de una función $H(x)$ tal que $f(x) = J\nabla H(x)$. Derivando respecto de t la relación $\varphi'_t(x_0)^T J \varphi'_t(x_0) = J$ y usando el hecho de que $\varphi'_t(x_0)$ verifica la ecuación lineal

$$\frac{d}{dt} \varphi'_t(x_0) = f'(\varphi_t(x_0)) \varphi'_t(x_0)$$

sigue que $0 = \frac{d}{dt} (\varphi'_t(x_0)^T J \varphi'_t(x_0)) = \varphi'_t(x_0)^T (f'(\varphi_t(x_0))^T J + J f'(\varphi_t(x_0))) \varphi'_t(x_0)$. Tomando $t = 0$, $0 = f'(x_0)^T J + J f'(x_0)$, y de aquí, puesto que $J^T = -J$, se obtiene que $J f'(x_0) = -f'(x_0)^T J = (J f'(x_0))^T$. Llegamos así a que $-J f'(x_0) = J^{-1} f'(x_0)$ es una matriz simétrica. Por el Lema 1.2.1 $J^{-1} f(x) = \nabla H(x)$, y $f(x) = J \nabla H(x)$, para cierta función diferenciable H definida al menos en un entorno de x_0 . □

Ya sabemos que todo sistema hamiltoniano preserva el volumen en virtud del Teorema de Liouville. No obstante esta propiedad no es exclusiva de los sistemas hamiltonianos. El teorema siguiente caracteriza qué ecuaciones diferenciales tienen un flujo que conserva el volumen [2, p.228].

Proposición 1.2.1 El flujo de una ecuación diferencial $x' = f(x)$ en \mathbb{R}^d preserva el volumen si, y solo si, $\text{div} f(x) = 0$, para todo x .

Demostración. La función matricial $X(t) = \varphi'_t(x_0)$ es la solución de la ecuación diferencial

$$\dot{X} = A(t)X, \quad X(0) = I,$$

donde $A(t) = f'(x(t))$ es la matriz jacobiana de f en $x(t) = \varphi_t(x_0)$. En particular, $Tr(A) = \text{div}f(x(t))$. Consideremos ahora la función $g(X) := \det X$. Puesto que

$$\begin{aligned} \det(X + \varepsilon AX) &= \det(I + \varepsilon A)\det(X) = (1 + \varepsilon Tr(A) + o(\varepsilon^2))\det(X), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \\ \frac{\det(X + \varepsilon AX) - \det(X)}{\varepsilon} &= (Tr(A) + o(\varepsilon))\det(X), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ tenemos para la derivada de Fréchet de g que $g'(X)[AX] = Tr(A)g(X)$. Evaluando en t $g'(X(t))[A(t)X(t)] = Tr(A(t))\det(X(t))$ y puesto que $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$, sigue que

$$\frac{d}{dt} \det X = Tr(A(t))\det(X), \quad \text{con } \det(X(0)) = 1.$$

Por lo tanto, $\det X(t) = 1, \forall t$ si, y solo si $Tr(A(t)) = 0$, esto es, $\text{div}f(x(t)) = 0, \forall t$. \square

A continuación vemos algunos ejemplos de ecuaciones que preservan el volumen y otro donde no lo hace.

Ejemplo 1.2.2 Sea la ecuación del péndulo

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -\sin q \end{cases} \tag{1.8}$$

con hamiltoniano asociado $H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 - \cos(q)$. La divergencia de $f(q, p) = \begin{pmatrix} p \\ -\sin q \end{pmatrix}$ es $\text{div}f = \frac{\partial p}{\partial q} + \frac{\partial(-\sin q)}{\partial p} = 0$. Luego, el flujo preserva el área.

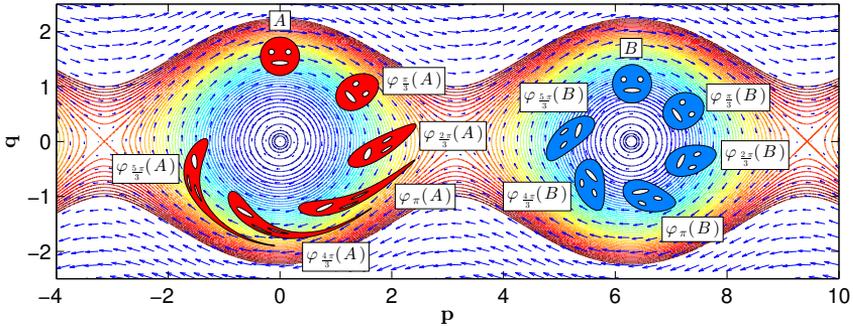


Figura 1.1: Conservación del área en la ecuación del péndulo (1.8).

Ejemplo 1.2.3 Las ecuaciones de Euler del sólido rígido

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_2}\right)yz \\ \dot{y} = \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_3}\right)xz \\ \dot{z} = \left(\frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_1}\right)xy \end{cases} \tag{1.9}$$

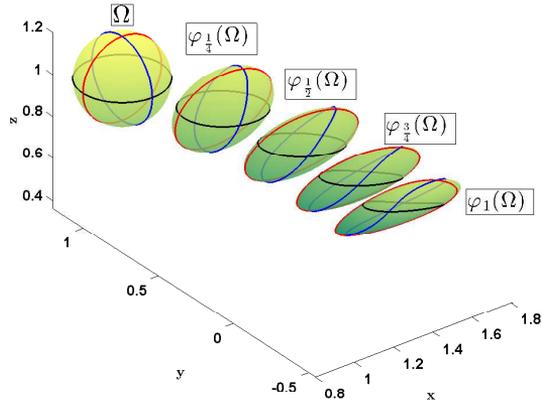


Figura 1.2: Preservación del volumen en las ecuaciones de Euler del sólido rígido (1.9).

tienen divergencia $div f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0$. Luego, el flujo preserva el volumen. Observar que esta ecuación posee dos invariantes cuadráticos $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $F_2(x, y, z) = \frac{1}{2}(\frac{x^2}{I_1} + \frac{y^2}{I_2} + \frac{z^2}{I_3})$.

Ejemplo 1.2.4 Sean las ecuaciones de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \dot{u} = u(v - 2) \\ \dot{v} = v(1 - u) \end{cases} \quad (1.10)$$

con $div f = \frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial v} = (v - 2) + (1 - u) \neq 0$. Luego, el flujo no preserva el área. Esta EDO posee el invariante $I(u, v) = \ln u - u + 2 \ln v - v$.

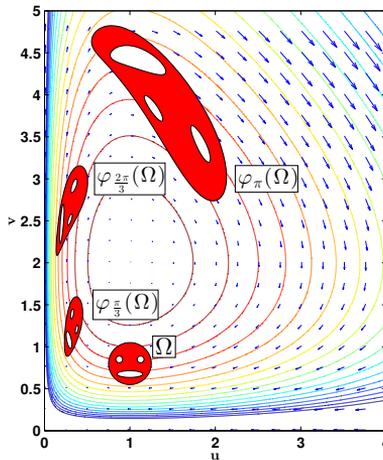


Figura 1.3: No conservación del área en las ecuaciones de Lotka-Volterra (1.10).

1.3. Sistemas hamiltonianos lineales

Sea $S \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ una matriz simétrica real, y consideremos el hamiltoniano

$$H(x) = \frac{1}{2}x^T Sx$$

siendo éste un polinomio de segundo grado, únicamente con términos cuadráticos, cuyo sistema hamiltoniano asociado será

$$\dot{x} = X_H(x) = JSx,$$

que denominaremos **sistema hamiltoniano lineal** [1, Sec. 9.2].

Definición 1.3.1 (a) Diremos que $B \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ es una **matriz hamiltoniana** si $B = JS$, donde S es una matriz simétrica.

(b) $A \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ es una **matriz simpléctica**, o **canónica**, si $A^T J A = J$.

Ejemplo 1.3.1 De (1.5) se sigue que si $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ es una transformación simpléctica, entonces $\varphi'(x)$ es una matriz simpléctica para todo $x \in V$.

Proposición 1.3.1 Una matriz B es hamiltoniana si y solo si

$$B^T J + JB = 0. \tag{1.11}$$

Demostración. Supongamos que B es una matriz hamiltoniana. Por tanto

$$B^T J + JB = S^T J^T J + JJS.$$

Como $J^T J = I$, $J^2 = -I$ y S es simétrica, $B^T J + JB = 0$.

Recíprocamente, si se verifica (1.11):

$$B^T J + JB = 0 \Rightarrow -JB = B^T J = B^T (-J)^T = (-JB)^T.$$

Llegamos a que $-JB$ es una matriz simétrica. Tomando $S = -JB$ y multiplicando a ambos lados por J , tenemos que $JS = -JJB = B$. Luego, B es una matriz hamiltoniana. \square

Proposición 1.3.2 Sea B una matriz hamiltoniana. Entonces la matriz exponencial e^{Bt} es simpléctica para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. Consideremos la función $\beta(t) = (e^{Bt})^T J e^{Bt}$. Como B es hamiltoniana, nos queda que $\beta(t) = (e^{JSt})^T J e^{JSt}$, siendo $\beta(0) = J$.

Tenemos que ver que $\beta(t) = J, \forall t \in \mathbb{R}$. Derivando $\beta(t)$,

$$\begin{aligned} \beta(t)' &= (JS e^{JSt})^T J e^{JSt} + (e^{JSt})^T J J S e^{JSt} \\ &= (e^{JSt})^T S^T J^T J e^{JSt} + (e^{JSt})^T J^2 S e^{JSt} \\ &= (e^{JSt})^T S (e^{JSt}) - (e^{JSt})^T S (e^{JSt}) = 0 \end{aligned}$$

teniendo en cuenta las igualdades $S^T = S, J^T J = I$ y $J^2 = -I$. Luego $\beta(t)$ es constante, y $\beta(t) = J$, para todo t . Por tanto, e^{Bt} es simpléctica. \square

Proposición 1.3.3 Sea B una matriz hamiltoniana. Si λ es un autovalor de B , entonces $-\lambda, \bar{\lambda}$ y $-\bar{\lambda}$ son autovalores de B , con la misma multiplicidad que λ . Es más, si 0 es un autovalor de B , entonces éste tiene multiplicidad par.

Demostración. Como B es una matriz hamiltoniana

$$B^T J + JB = 0 \Rightarrow B = J^{-1}(-B^T)J.$$

De aquí tenemos que las matrices B y $-B^T$ son semejantes; por tanto, tienen el mismo polinomio característico, es decir, tienen los mismos autovalores con la misma multiplicidad. Esto es, si λ es un autovalor de B , $-\bar{\lambda}$ también lo es y con la misma multiplicidad de λ . Obsérvese que $B^T = B^*$ al ser B real. Además, tenemos que $\bar{\lambda}$ y $-\lambda$ también lo son y con la misma multiplicidad de λ . En particular, los autovalores de B distintos de cero vienen dados en grupos de dos o cuatro. Finalmente, si $\lambda = 0$ es un autovalor de B necesariamente tiene multiplicidad par, pues B tiene $2m$ autovalores. \square

Lema 1.3.1 [5, p. 35-36]. Si A es una matriz simpléctica entonces $\det(A) = 1$.

Demostración. Si A es una matriz simpléctica, entonces $A^T J A = J$. Tomando determinantes a ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned} \det(A^T J A) &= \det(A) \Rightarrow \det(A^T) \det(J) \det(A) = \det(J) \\ &\Rightarrow \det(A)^2 = 1 \Rightarrow \det(A) = \pm 1. \end{aligned}$$

Consideremos la matriz $A^T A + I$. Sabemos que $A^T A$ es simétrica y definida positiva, por tanto los autovalores de $A^T A + I$ son reales y mayores que 1, y como el determinante es el producto de sus autovalores $\det(A^T A + I) > 1$. Al ser $\det(A) = \pm 1$, $\det(A) \neq 0$, entonces A es invertible. Luego,

$$A^T A + I = A^T A + A^T A^{-T} = A^T (A + A^{-T}) = A^T (A + J A J^{-1})$$

aplicando en la última igualdad que A es simpléctica.

Denotaremos a los cuatro subbloques $m \times m$ de A como

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \text{ donde } A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} \in \mathbb{R}^{m \times m}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} A + J A J^{-1} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O & I \\ -I & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & -I \\ I & O \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{22} & -A_{21} \\ -A_{12} & A_{11} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} + A_{22} & A_{12} - A_{21} \\ -A_{12} + A_{21} & A_{11} + A_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tomando $C = A_{11} + A_{22}$ y $D = A_{12} - A_{21}$, donde C y D son reales, sigue que

$$A + J A J^{-1} = \begin{bmatrix} C & D \\ -D & C \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I & I \\ iI & -iI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C + iD & O \\ O & C - iD \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} I & -iI \\ I & iI \end{bmatrix},$$

con $i = \sqrt{-1}$. Luego,

$$\begin{aligned} 0 < 1 < \det(A^T A + I) &= \det(A^T (A + J A J^{-1})) \\ &= \det(A) \det(A + J A J^{-1}) \\ &= \det(A) \det(C + iD) \det(C - iD) \\ &= \det(A) \det(C + iD) \det(\overline{C + iD}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \det(A) \det(C + \imath D) \overline{\det(C + \imath D)} \\ &= \det(A) |\det(C + \imath D)|^2 \end{aligned}$$

pues $\det \begin{bmatrix} I & I \\ \imath I & -\imath I \end{bmatrix} = (-2\imath)^m$ y $\det \begin{bmatrix} I & -\imath I \\ I & \imath I \end{bmatrix} = (2\imath)^m$. Concluimos que $\det(A) > 0$ y por tanto $\det(A) = 1$. \square

Proposición 1.3.4 *Sea A una matriz simpléctica. Si λ es un autovalor de A , entonces $(\lambda)^{-1}$, $\bar{\lambda}$ y $(\bar{\lambda})^{-1}$ son autovalores de A , con la misma multiplicidad. Es más, si 1 y -1 son autovalores de A , entonces cada uno de ellos tiene multiplicidad par.*

Demostración. Por el Lema 1.3.1, $\det(A) = 1$. Luego A es invertible, y $A^T = JA^{-1}J^{-1}$, es decir, A^{-1} y A^T son matrices semejantes, por lo tanto tienen los mismos autovalores con la misma multiplicidad. Si λ es autovalor de A , λ^{-1} lo es de A^{-1} y por tanto de A^T , y como A y A^T tienen los mismos autovalores, también lo es de A con la misma multiplicidad de λ . Además, como A es real, $\bar{\lambda}$ y $(\bar{\lambda})^{-1}$ también son autovalores con la misma multiplicidad de λ .

Como $\det(A) = 1$, esto implica que la multiplicidad de $\lambda = -1$ debe ser par. Puesto que los autovalores $\lambda \neq \pm 1$ forman grupos de cuatro, esto muestra que la multiplicidad de $\lambda = 1$ debe ser también par, pues A tiene dimensión $2m$. \square

Nota 1.3.1 De la Proposición 1.3.3 se sigue que una ecuación lineal $\dot{x} = Bx$, donde B es una matriz hamiltoniana, no es asintóticamente estable. Además para que dicha ecuación sea estable todos los autovalores de B deben ser imaginarios puros con bloques de Jordan diagonales.

1.4. Estabilidad de los equilibrios

En esta sección estudiaremos la estabilidad de los puntos de equilibrio de sistemas hamiltonianos no lineales [1, Sec. 9.3].

Definición 1.4.1 *Sea $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 .*

- (a) *Diremos que un punto $x_0 \in \mathbb{R}^d$ es un **equilibrio** o punto crítico de la función F si $\nabla F(x_0) = 0$.*
- (b) *Un equilibrio x_0 de F es **no degenerado** si la matriz Hessiana $F''(x_0)$ es no singular.*

Definición 1.4.2 *El **índice** de una aplicación bilineal $B : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es la dimensión máxima de un subespacio $V \subseteq \mathbb{R}^d$ en el cual B es definida negativa.*

Nota 1.4.1 Para un hamiltoniano $H : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$, en el caso de la matriz Hessiana no singular $H''(x_0)$, interpretada como aplicación bilineal $H''(x_0)[u, v] = u^T H''(x_0)v$, al ser simétrica real, el índice coincide con el número de autovalores negativos.

Proposición 1.4.1 (Lema de Morse) [6, p. 4-7], [10, p. 248-249]. *Sea $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 y $x_0 \in \mathbb{R}^d$ un equilibrio no degenerado de F . Entonces existe un cambio de variable $g : B(0, \rho) \subset \mathbb{R}^d \rightarrow V$ continua, donde V es un entorno de x_0 , tal que $g(0) = x_0$ y*

$$(F \circ g)(y_1, \dots, y_d) = F(x_0) - \sum_{i=1}^{\lambda} y_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^d y_i^2 \tag{1.12}$$

para cada $(y_1, \dots, y_d) \in B(0, \rho)$, donde λ es el índice de $F''(x_0)$.

Demostración. Primero observamos que si (1.12) se verifica, entonces es claro que λ debe ser el índice de F en x_0 . Veamos que el cambio de variable es posible. Asumimos sin pérdida de generalidad que $x_0 = 0$. En un entorno U_0 de x_0 , tal vez mediante cambio de variable local en caso necesario, tendremos que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(0) \neq 0.$$

Podemos escribir la función F como:

$$F(x_1, \dots, x_d) = F(0) + \int_0^1 \frac{F}{dt}(tx_1, \dots, tx_d) dt = F(0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^d \frac{\partial F}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_d) x_i dt.$$

Tomando $f_i(x_1, \dots, x_d) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_d) dt$ tenemos

$$F(x_1, \dots, x_d) = F(0) + \sum_{i=1}^d x_i f_i(x_1, \dots, x_d)$$

donde, por ser x_0 un punto crítico, $f_i(0) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(0) = 0$. Repetimos este proceso ahora para las funciones f_i . Entonces

$$f_j(x_1, \dots, x_d) = \sum_{i=1}^d x_i h_{ij}(x_1, \dots, x_d)$$

con h_{ij} una función de clase C^0 , de tal modo que

$$F(x_1, \dots, x_d) = F(0) + \sum_{i,j=1}^d x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_d).$$

Podemos reorganizar la suma anterior poniendo $\bar{h}_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$, con $\bar{h}_{ij}(0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_j(0)}{\partial x_i \partial x_j}$. Así,

$$F(x_1, \dots, x_d) = F(0) + \sum_{i,j=1}^d x_i x_j \bar{h}_{ij}(x_1, \dots, x_d), \text{ con } \bar{h}_{ij} = \bar{h}_{ji}.$$

Como el punto crítico es no degenerado, la matriz (\bar{h}_{ij}) es no singular. Siguiendo un proceso análogo al de diagonalización de formas cuadráticas, podemos diagonalizar esta expresión de F considerando el siguiente desarrollo.

Puesto que $\bar{h}_{11}(0) \neq 0$, en virtud del Teorema de la Función Inversa podemos considerar el siguiente cambio de variable en un entorno $U_1 \subset U_0$ suficientemente pequeño

$$v_1 := |\bar{h}_{11}|^{1/2} (x_1 + \sum_{i=2}^d x_i \bar{h}_{i1} / \bar{h}_{11})$$

$$v_i := x_i, \quad 2 \leq i \leq d.$$

Elevando al cuadrado la expresión de v_1 obtenemos que

$$F(v_1, \dots, v_d) = F(0) \pm v_1^2 + \sum_{i,j=2}^d v_i v_j \tilde{h}_{ij}(v_1, \dots, v_d)$$

con $\tilde{h}_{ij} = \tilde{h}_{ji}$ y donde el signo \pm está determinado por el signo de \bar{h}_{11} en el entorno U_1 de 0. Supongamos ahora por inducción que hemos continuado el proceso hasta $i = r - 1$ con $r \geq 2$, así que en un cierto entorno U_{r-1} de 0, tal vez renombrando las funciones \tilde{h}_{ij} , tenemos que

$$F(v_1, \dots, v_d) = F(0) \pm v_1^2 \pm \dots \pm v_{r-1}^2 + \sum_{i,j=r}^d v_i v_j \tilde{h}_{ij}(v_1, \dots, v_d), \text{ con } \tilde{h}_{ij} = \tilde{h}_{ji},$$

donde cada signo positivo o negativo está determinado por el signo de \tilde{h}_{ii} en 0, $1 \leq i \leq r - 1$. Ahora, tal vez mediante previo cambio de variables lineal, dado que $\tilde{h}_{rr}(0) \neq 0$, podemos considerar, nuevamente en virtud del Teorema de la Función Inversa, el cambio de variables local definido en un entorno $U_r \subset U_{r-1}$

$$y_i := v_i, \quad i \neq r$$

$$y_r := |\tilde{h}_{rr}|^{1/2} (v_r + \sum_{i=r+1}^d v_i \tilde{h}_{ir} / \tilde{h}_{rr}).$$

Después de elevar las variables al cuadrado y sustituyendo tenemos, tal vez renombrando las funciones \tilde{h}_{ij} , que

$$F(y_1, \dots, y_d) = F(0) \pm y_1^2 \pm \dots \pm y_r^2 + \sum_{i,j=r+1}^d y_i y_j \tilde{h}_{ij}(y_1, \dots, y_d),$$

obteniendo por inducción el resultado después de determinar los signos de los términos cuadráticos y ordenarlos según el signo más o menos. \square

Corolario 1.4.1 *Si $x_0 \in U$ es un punto crítico no degenerado de F , entonces x_0 es un punto crítico aislado.*

Demostración. Es consecuencia directa del lema de Morse, teniendo en cuenta que mediante un cambio de variable local F se transforma en $F(x_0) - \sum_{i=1}^{\lambda} y_i^2 + \sum_{i=\lambda+1}^d y_i^2$ que solo tiene un punto crítico $y = 0$. \square

Teorema 1.4.1 *Sea $H : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltoniano de clase C^2 . Si x_0 es un equilibrio de H con $H''(x_0)$ matriz Hessiana definida (positiva o negativa), entonces x_0 es un punto estable, pero no asintóticamente estable, de la ecuación (1.3).*

Demostración. Sea x_0 un equilibrio de H con matriz Hessiana definida. Como la matriz Hessiana $H''(x_0)$ es definida (positiva o negativa) sabemos que el índice es 0, si es definida positiva, o $2m$, si es definida negativa.

Por el Lema de Morse (Proposición 1.4.1) existe $g : B(0, \rho) \subset \mathbb{R}^{2m} \rightarrow V$ cambio de variable, donde V es un entorno de x_0 tal que $g(0) = x_0$ y $(H \circ g)(y_1, \dots, y_{2m}) = H(x_0) \pm \sum_{i=1}^{2m} y_i^2$ para cada $(y_1, \dots, y_{2m}) \in B(0, \rho)$.

Esto nos muestra que para c suficientemente cercano a $H(x_0)$, con $c > H(x_0)$ para $H''(x_0)$ definida positiva y $c < H(x_0)$ para $H''(x_0)$ definida negativa, los conjuntos de nivel $V_c = \{x \in V : H(x) = c\}$ son difeomorfos a esferas $2m$ -dimensionales que se colapsan en el punto x_0 cuando $c \rightarrow H(x_0)$.

Por otro lado, como H es constante a lo largo de las soluciones de su sistema hamiltoniano asociado, cualquier solución $\varphi_t(x)$ con condición inicial $x \in V_c$ permanece en V_c para todo $t \in \mathbb{R}$. Además, como V_c es compacto, el intervalo maximal de cualquier solución es \mathbb{R} . Esto concluye la prueba. \square

Nota 1.4.2 No es necesario que $H''(x_0)$ sea definida para poder asegurar la estabilidad de un equilibrio x_0 , como podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.4.1 Consideremos el hamiltoniano

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}[(q_1^2 + p_1^2) - (q_2^2 + p_2^2)].$$

El flujo del sistema hamiltoniano asociado

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = p_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} \\ \dot{q}_2 = -p_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} \\ \dot{p}_1 = -q_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \\ \dot{p}_2 = q_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{q} = \nabla_p H \\ \dot{p} = -\nabla_q H \end{cases}$$

con equilibrio $x_0 = (0, 0, 0, 0)^T$ y matriz jacobiana

$$X'_H(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

es estable pues consiste en dos osciladores armónicos. De hecho, $\sigma[X'_H(x)] = \{i, -i\}$ con cada uno de los autovalores dobles. Sin embargo,

$$H''(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ no es definida.}$$

Observar que

$$JH''(x_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = X'_H(x_0).$$

Ahora consideremos el caso en el que $H''(x_0)$ es no definida en general. Para estudiar la estabilidad de un equilibrio x_0 es conveniente considerar los autovalores de $X'_H(x_0) = JH''(x_0)$ [1, p. 232-234].

Definición 1.4.3 Los autovalores de la matriz hamiltoniana $X'_H(x_0) = JH''(x_0)$ se denominan **exponentes característicos** del sistema hamiltoniano $\dot{x} = X_H(x)$ en x_0 .

Introducimos el *producto simpléctico* como la aplicación [5, p. 37]

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^{2m} \times \mathbb{C}^{2m} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\longrightarrow \langle u, v \rangle = u^* J v \end{aligned}$$

Proposición 1.4.2

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es bilineal: $\forall u, v \in \mathbb{C}^{2m}$
 - a) $\langle \lambda u, v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle$,
 - b) $\langle u, \lambda v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$,

- c) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle,$
- d) $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle.$
- 2. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es antihermitiana: $\langle u, v \rangle = -\overline{\langle v, u \rangle}, \forall u, v \in \mathbb{C}^{2m}.$
- 3. En particular si $u, v \in \mathbb{R}^{2m}$
 - a) $\langle u, v \rangle = -\langle v, u \rangle,$
 - b) $\langle u, u \rangle = 0.$
- 4. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es no degenerada. Si existe $v \in \mathbb{C}^{2m}$ tal que $\langle u, v \rangle = 0, \forall u \in \mathbb{C}^{2m},$ entonces $v = 0.$

Demostración. 1. a) $\langle \lambda u, v \rangle = (\lambda u)^* J v = \bar{\lambda} u^* J v = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle.$

b) $\langle u, \lambda v \rangle = u^* J (\lambda v) = \lambda u^* J v = \lambda \langle u, v \rangle.$

c) $\langle u + v, w \rangle = (u + v)^* J w = (u^* + v^*) J w = u^* J w + v^* J w = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle.$

d) $\langle u, v + w \rangle = u^* J (v + w) = u^* J v + u^* J w = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle.$

2. $\overline{\langle v, u \rangle} = \overline{v^* J u} = (v^* J u)^* = u^* J^T v = -u^* J v = -\langle u, v \rangle.$

3. Sean $u, v \in \mathbb{R}^{2m}$

a) $\langle u, v \rangle = u^* J v = u^T J v = v^T J^T u = -v^T J u = -\langle v, u \rangle.$

b) Por a), $\langle u, u \rangle = -\langle u, u \rangle$ y de aquí que $\langle u, u \rangle = 0.$

4. Sea $\{e_1, \dots, e_{2m}\}$ la base canónica de \mathbb{C}^{2m} , y pongamos $v = (v_1, \dots, v_{2m}) \in \mathbb{C}^{2m}.$

Tomando $u = e_i$ ($1 \leq i \leq m$): $\langle e_i, v \rangle = e_i^T J v = v_{m+i} = 0.$

$u = e_{m+i}$ ($1 \leq i \leq m$): $\langle e_{m+i}, v \rangle = e_{m+i}^T J v = -v_i = 0.$ Luego, $v = 0.$ □

Proposición 1.4.3 Sea $B \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ una matriz hamiltoniana. Si μ_1, μ_2 son autovalores de B , siendo $\bar{\mu}_1 + \mu_2 \neq 0$, con autovectores respectivos $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^{2m} \setminus \{0\}$, entonces $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, esto es, v_1 y v_2 son J -ortogonales.

Demostración. Usando la Proposición 1.3.1.

$$\begin{aligned} \mu_2 \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle v_1, \mu_2 v_2 \rangle = \langle v_1, B v_2 \rangle = v_1^* J B v_2 = -v_1^* B^T J v_2 = -(B v_1)^* J v_2 = -\langle B v_1, v_2 \rangle \\ &= -\langle \mu_1 v_1, v_2 \rangle = -\bar{\mu}_1 \langle v_1, v_2 \rangle. \end{aligned}$$

Luego, teniendo en cuenta que $(\mu_2 + \bar{\mu}_1) \neq 0$ por hipótesis, $(\mu_2 + \bar{\mu}_1) \langle v_1, v_2 \rangle = 0$ y $\langle v_1, v_2 \rangle = 0.$ □

Proposición 1.4.4 Sea $A \in \mathbb{R}^{2m \times 2m}$ una matriz simpléctica. Si μ_1 y μ_2 son autovalores de A , siendo $\mu_2 \bar{\mu}_1 \neq 1$, con respectivos autovectores $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^{2m} \setminus \{0\}$, entonces $\langle v_1, v_2 \rangle = 0.$

Demostración. $\mu_2 \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, A v_2 \rangle = v_1^* J A v_2 = v_1^* A^{-T} J v_2 = \langle A^{-1} v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{\mu_1} \langle v_1, v_2 \rangle.$ Luego, $(\mu_2 - (\bar{\mu}_1)^{-1}) \langle v_1, v_2 \rangle = 0$ y $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, pues $\mu_2 - (\bar{\mu}_1)^{-1} \neq 0.$ □

Teorema 1.4.2 Sea x_0 un equilibrio de $H : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$ con exponentes característicos $\pm i\lambda_1, \dots, \pm i\lambda_m$, $\lambda_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m.$ Si $|\lambda_1|, \dots, |\lambda_m|$ son no nulos y distintos dos a dos, entonces x_0 es un punto crítico estable, pero no asintóticamente estable, de la ecuación (1.3).

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\lambda_1 > \dots > \lambda_m > 0$, y sean $\omega_1, \dots, \omega_m, \bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_m \in \mathbb{C}^{2m} \setminus \{0\}$ autovectores respectivos de $B = JH''(x_0)$ asociados a $i\lambda_1, \dots, i\lambda_m, -i\lambda_1, \dots, -i\lambda_m.$ Observar que $\{\omega_j, \bar{\omega}_j\}_{j=1}^m$ forman una base de $\mathbb{C}^{2m}.$ Por la Proposición 1.4.3 $\langle \omega_j, \omega_k \rangle = 0 = \langle \omega_j, \bar{\omega}_k \rangle, \forall k \neq j,$ y $\langle \omega_j, \bar{\omega}_j \rangle = 0, \forall j = 1, \dots, m.$ Luego, puesto que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es no degenerada (Proposición 1.4.2 (4)), debe ser $\langle \omega_j, \omega_j \rangle \neq 0, \forall j = 1, \dots, m$ (si $\langle \omega_j, \omega_j \rangle = 0$ entonces por definición de base y linealidad

$\langle \omega_j, v \rangle = 0, \forall v \in \mathbb{C}^{2m}$). Sean $u_j = \operatorname{Re}(\omega_j)$, $v_j = \operatorname{Im}(\omega_j)$. Entonces $\{u_i, v_i\}_{i=1}^m$ forman una base de \mathbb{R}^{2m} y

$$Bu_j = -\lambda_j v_j, \quad Bv_j = \lambda_j u_j, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (1.13)$$

Usando la Proposición 1.4.2 (3) $\langle u_j, u_j \rangle = 0 = \langle v_j, v_j \rangle$, $1 \leq j \leq m$. Además $\langle u_j, v_j \rangle \neq 0$, pues en otro caso, si $\langle u_j, v_j \rangle = 0$ entonces

$$\langle \omega_j, \omega_j \rangle = \langle u_j + iv_j, u_j + iv_j \rangle = \langle u_j, u_j \rangle - i\langle v_j, u_j \rangle + i\langle u_j, v_j \rangle - i^2\langle v_j, v_j \rangle = 0.$$

Supongamos sin pérdida de generalidad que $\langle u_j, v_j \rangle = 1$, $1 \leq j \leq m$. Entonces, $\langle v_j, u_j \rangle = -1$, $1 \leq j \leq m$. De $\langle \omega_j, \omega_k \rangle = 0$, $j \neq k$, sigue que

$$\langle u_j, u_k \rangle + i\langle u_j, v_k \rangle - i\langle v_j, u_k \rangle + \langle v_j, v_k \rangle = 0, \quad j \neq k. \quad (1.14)$$

De $\langle \omega_j, \bar{\omega}_k \rangle = 0$, $1 \leq j, k \leq m$, sigue que

$$\langle u_j, u_k \rangle - i\langle u_j, v_k \rangle - i\langle v_j, u_k \rangle - \langle v_j, v_k \rangle = 0, \quad 1 \leq j, k \leq m. \quad (1.15)$$

Sumando (1.13) y (1.14): $\langle u_j, u_k \rangle - i\langle v_j, u_k \rangle = 0$, $j \neq k$. Restando (1.13) y (1.14): $\langle v_j, v_k \rangle + i\langle u_j, v_k \rangle = 0$, $j \neq k$. Luego,

$$\begin{aligned} \langle u_j, u_k \rangle &= \langle v_j, u_k \rangle = \langle u_j, v_k \rangle = \langle v_j, v_k \rangle = 0, \quad \forall j \neq k, \\ \langle u_j, u_j \rangle &= 0 = \langle v_j, v_j \rangle, \quad \langle u_j, v_j \rangle = -\langle v_j, u_j \rangle = 1, \quad 1 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

Definiendo $C = [u_1 | \dots | u_m | v_1 | \dots | v_m]$, lo anterior implica que $C^T J C = J$, esto es, C es simpléctica. Además, (1.12) en forma matricial indica que $BC = CJD$, siendo

$$D = \begin{pmatrix} \operatorname{diag}(\lambda_i) & O \\ O & \operatorname{diag}(\lambda_i) \end{pmatrix}.$$

Luego, como $J^2 = -I$ y $C^T J C = J$, sigue que $C^T J B C = C^T J C J D = J^2 D = -D$. Finalmente, teniendo en cuenta que $H(x) = H(x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^T H''(x - x_0) + o(\|x - x_0\|^2)$, y puesto que $H''(x_0) = -JB$, haciendo el cambio de variables $x - x_0 = Cy$,

$$H(x) = H(x_0) + \frac{1}{2}y^T D y + o(\|y\|^2) = H(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \lambda_i (y_i^2 + y_{m+i}^2) + o(\|y\|^2).$$

La prueba concluye entonces como en el Teorema 1.4.1. \square

El Problema de N Cuerpos

2.1. Ecuaciones del movimiento

Consideramos N cuerpos con masa $m_i > 0$ y vector de posición q_i , $i = 1, \dots, N$ en un sistema de referencia inercial de \mathbb{R}^3 , moviéndose bajo la influencia de la atracción gravitacional debida a la interacción de los cuerpos dos a dos.

Por la segunda ley de Newton, que nos dice que la aceleración $m_i \ddot{q}_i$ que experimenta el i -ésimo cuerpo es proporcional a la suma de las fuerzas que actúan sobre éste, y la ley de gravitación universal de Newton, estableciendo que la magnitud de la fuerza en el cuerpo i ejercida por un cuerpo j es proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre éstos, donde la dirección de la fuerza viene dado por un vector unitario que va del cuerpo i al j , $\frac{(q_i - q_j)}{\|q_i - q_j\|}$, obtenemos las ecuaciones del movimiento del sistema de N cuerpos

$$m_i \ddot{q}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_i m_j (q_j - q_i)}{\|q_i - q_j\|^3} = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (2.1)$$

siendo G la constante de gravitación universal y

$$U = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{G m_i m_j}{\|q_i - q_j\|} \quad (2.2)$$

de modo que $-U$ representa la energía potencial del sistema. Definiendo $p = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^{3N}$, como $p_i = m_i \dot{q}_i$, el momento lineal del i -ésimo cuerpo, podemos reescribir las ecuaciones del movimiento como el sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{p_i}{m_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_i m_j (q_j - q_i)}{\|q_i - q_j\|^3} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \quad (2.3)$$

siendo su hamiltoniano asociado

$$H = T - U, \quad (2.4)$$

donde T es la energía cinética

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|\dot{q}_i\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{m_i} \|p_i\|^2. \quad (2.5)$$

Por tanto, podemos describir el movimiento del sistema de N -partículas con un sistema hamiltoniano de $6N$ ecuaciones diferenciales de primer orden. Observar que $U = U(q_1, \dots, q_N)$ deja de estar definido en el conjunto de colapso

$$\Delta = \bigcup_{1 \leq i < j \leq N} \Delta_{ij}, \quad \Delta_{ij} = \{(q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{3N} : q_i = q_j\}. \quad (2.6)$$

Veamos a continuación que (2.3) admite 10 integrales de movimiento cuando $N > 2$.

Sean $L = p_1 + \dots + p_N$ el momento lineal total y $C = m_1 q_1 + \dots + m_N q_N$ el centro de masas del sistema, de modo que $\dot{L} = 0$, siendo el momento lineal constante, y $\dot{C} = L$. Integrando esta última expresión tenemos que $C = L_0 t + C_0$, donde L_0 y C_0 son constantes de integración dependientes de las condiciones iniciales del problema. Así, tenemos 6 integrales del movimiento, las tres componentes de L_0 y las tres componentes de C_0 .

Sabemos que el momento angular del sistema

$$A = q_1 \times p_1 + \dots + q_N \times p_N \quad (2.7)$$

es constante, pues

$$\dot{A} = \sum_{i=1}^N (\dot{q}_i \times p_i + q_i \times \dot{p}_i) = \sum_{i=1}^N q_i \times m_i \dot{q}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_i m_j q_i \times (q_j - q_i)}{\|q_i - q_j\|^3} = 0.$$

Luego, sus tres componentes también son integrales del movimiento. Y recordemos que el hamiltoniano asociado al sistema H , o energía total del sistema, es otra integral del movimiento.

De esta forma, para todo $N > 2$ podemos obtener para el problema de N cuerpos espacial 10 integrales del movimiento. Para el problema en el plano tenemos 6 integrales: las 2 componentes del momento lineal, 2 del centro de masas, 1 del momento angular y 1 para la energía total del sistema [5, p. 67-68].

2.2. Problema de los dos cuerpos

En esta sección estudiaremos el movimiento relativo de dos cuerpos de masas m_1 y m_2 , viendo finalmente que siempre describe una cónica. Esta observación la dio por primera vez Newton al integrar geoméricamente las ecuaciones del problema [7, p. 147-149].

De (2.1) para $N = 2$ tenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} m_1 \ddot{q}_1 = \frac{G m_1 m_2}{\|q_1 - q_2\|^3} (q_2 - q_1) \\ m_2 \ddot{q}_2 = \frac{G m_1 m_2}{\|q_1 - q_2\|^3} (q_1 - q_2) \end{cases}. \quad (2.8)$$

Si dividimos la primera y segunda ecuación entre m_1 y m_2 respectivamente, y a continuación las restamos tenemos que:

$$\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2 = -G(m_1 + m_2) \frac{(q_1 - q_2)}{\|q_1 - q_2\|^3}.$$

Tomando $r = q_1 - q_2$ vector de posición de la masa m_1 respecto de la masa m_2 y $\mu = G(m_1 + m_2)$, podemos escribir (2.8) como la ecuación

$$\ddot{r} = -\mu \frac{r}{\|r\|^3}, \quad (2.9)$$

conocida como el problema de Kepler. Éste considera dos cuerpos, uno fijo con masa superior al otro, y describe el movimiento del cuerpo de masa inferior.

Veamos que podemos reducir el problema a un problema en el plano, para ello definimos $A = r \times \dot{r}$ como el momento angular. Sabemos que si el momento angular es constante, entonces el movimiento es plano. De (2.9)

$$\dot{A} = (r \times \dot{r})' = \dot{r} \times \dot{r} + r \times \ddot{r} = 0,$$

esto implica que $A = r \times \dot{r} = e$, siendo e un vector constante, y $r \cdot e = 0$. Por tanto, el movimiento es plano.

Así, al reducir el problema al plano podemos usar coordenadas polares $\rho = \rho(t)$, $\theta = \theta(t)$. Tomamos los vectores unitarios

$$\vec{u}_\rho = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \quad (2.10)$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} \quad (2.11)$$

en función de los vectores de la base cartesiana, formando una base del sistema de coordenadas polares. La expresión de los vectores de la base cartesiana en función de la base polar será:

$$\vec{i} = \cos \theta \vec{u}_\rho - \sin \theta \vec{u}_\theta \quad (2.12)$$

$$\vec{j} = \sin \theta \vec{u}_\rho + \cos \theta \vec{u}_\theta. \quad (2.13)$$

Escribimos el vector de posición como $r = \rho \vec{u}_\rho$, lo derivamos respecto del tiempo y sustituimos la derivada de (2.10), obtenemos:

$$\dot{r} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta.$$

Derivando esta expresión y sustituyendo la derivada de (2.11), tenemos que:

$$\ddot{r} = (\ddot{\rho} - \rho(\dot{\theta})^2) \vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta.$$

Si sustituimos r y \dot{r} en la ecuación del problema de Kepler (2.9)

$$(\ddot{\rho} - \rho(\dot{\theta})^2) \vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) \vec{u}_\theta = -\frac{\mu}{\rho^2} \vec{u}_\rho$$

e igualamos coeficientes, llegamos a las ecuaciones

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 &= -\frac{\mu}{\rho^2} \\ \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} &= 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

De la segunda ecuación tenemos que $I := \rho^2 \dot{\theta}$ es una constante del movimiento.

Nota 2.2.1 El área \mathcal{A} barrida por la órbita entre los instantes t_0 y t (de ángulos correspondientes θ_0 y θ) se expresa en la forma:

$$\mathcal{A}(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{2} \rho(\theta_1)^2 d\theta_1.$$

Como ρ y θ son funciones de t , la velocidad areolar $\dot{\mathcal{A}}(\theta(t))$ resulta ser

$$\dot{\mathcal{A}} = \frac{1}{2}\rho^2(t)\dot{\theta}(t).$$

Así, la conservación de I proporciona una prueba de la segunda ley de Kepler.

Veamos ahora que el movimiento relativo en el problema de dos cuerpos queda definido por la ecuación de una cónica. Partiendo de $I = \rho^2 \frac{d\theta}{dt}$ tenemos que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{I}{\rho^2}. \quad (2.15)$$

Poniendo $\rho = \rho(\theta)$ en la órbita:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{I}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta} \quad \text{y} \quad \frac{d^2\rho}{dt^2} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d\rho}{d\theta} \frac{I}{\rho^2} \right) \frac{I}{\rho^2}. \quad (2.16)$$

Sustituyendo (2.15) y (2.16) en la primera ecuación del sistema (2.14) tenemos que

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{I}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta} \right) \frac{I}{\rho^2} = -\frac{\mu}{\rho^2} + \frac{I^2}{\rho^3}.$$

Luego

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta} \right) = -\frac{\mu}{I^2} + \frac{1}{\rho} \quad \text{y} \quad -\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{\mu}{I^2} + \frac{1}{\rho}.$$

Tomando $u = \frac{1}{\rho}$ obtenemos la ecuación diferencial de segundo orden $u'' + u = \frac{\mu}{I^2}$ cuya solución general es $u = c_1 \cos(\theta) + c_2 \sin(\theta) + \frac{\mu}{I^2}$. Tomando $c_1 = B \cos(\omega)$, $c_2 = B \sin(\omega)$, tenemos que $u = B \cos(\theta - \omega) + \frac{\mu}{I^2}$, y deshaciendo el cambio $\mu = \frac{1}{\rho}$, obtenemos

$$\rho = \frac{k}{1 + \varepsilon \cos(\theta - \omega)},$$

la ecuación de una cónica de excentricidad $\varepsilon = kB$, con $k = \frac{I^2}{\mu}$, siendo una parábola para $\varepsilon = 1$, una hipérbola cuando $\varepsilon > 1$, una circunferencia cuando $\varepsilon = 0$, o una elipse si $0 < \varepsilon < 1$. Estos dos últimos casos dan lugar a órbitas cerradas, teniendo de forma directa soluciones periódicas. En el problema de N cuerpos para $N > 2$ tales soluciones periódicas serán más difíciles de establecer. Esto nos lleva a estudiar la existencia de soluciones periódicas en la siguiente sección.

2.3. Bifurcación de Hopf y Teorema Centro de Lyapunov.

A continuación estableceremos dos resultados importantes que nos ayudarán a estudiar la existencia de soluciones periódicas de pequeña amplitud para sistemas autónomos (1.1) en el entorno de un punto de equilibrio x_0 cuando (1.1) admite una integral primera definida en los alrededores de x_0 .

Teorema 2.3.1 (Teorema de Hopf) [9]. *Sea $\dot{x} = f(x, \mu)$ un sistema de ecuaciones diferenciales d -dimensional autónomo, dependiente de un parámetro $\mu \in \mathbb{R}$, $f(x, \mu)$ dos veces diferenciable respecto de ambos argumentos y asumamos que cumple que*

$f(0, \mu) = 0, \forall \mu$. Supongamos que para $\mu = 0$, la matriz $f'_x(0, 0)$ tiene dos autovalores imaginarios puros $\pm \beta i$ cumpliendo las condiciones de no resonancia:

$$\pm k i \beta \notin \sigma(f'_x(0, 0)), \quad k \in \mathbb{N}, k \neq 1. \quad (2.17)$$

Si $\alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ es la continuación del autovalor $i\beta$, con $\alpha(0) = 0$ y $\beta(0) = \beta$, asumimos además la condición de transversalidad

$$\alpha'(0) \neq 0. \quad (2.18)$$

Entonces, existen $\mu = \mu(\epsilon)$ y $T = T(\epsilon)$ funciones diferenciables dependientes de un parámetro ϵ con $\mu(0) = 0$ y $T(0) = 2\pi\beta^{-1}$ tales que existen soluciones periódicas no constantes $x(t, \epsilon)$ de $\dot{x} = f(x, \mu)$ con periodo $T(\epsilon)$ que colapsan en el origen cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Demostración. Haciendo un cambio lineal de coordenadas y cambiando la variable independiente t por $\tau = \beta(\mu)t$, transformamos la ecuación $\dot{x} = f(x, \mu)$ en

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (a(\mu) + i)x_1 + f_1(x_1, x_2, y, \mu) \\ \dot{x}_2 = (a(\mu) - i)x_2 + f_2(x_1, x_2, y, \mu) \\ \dot{y} = B(\mu)y + g(x_1, x_2, y, \mu) \end{cases}, \quad (2.19)$$

donde $a(\mu) = \frac{\alpha(\mu)}{\beta(\mu)}$, f_1, f_2 y g contienen términos de orden dos o superior en las variables x_1, x_2, y e y es un vector real de dimensión $(d - 2)$. Además $B(\mu) = B(0) + O(\mu)$ es una matriz real cuadrada de orden $d - 2$, y por (2.17) ningún entero imaginario es autovalor de $B(0)$. Las soluciones reales de (2.19) solamente se dan cuando $x_1 = \bar{x}_2$ y por lo tanto en tal caso se cumple la siguiente condición

$$\overline{f_1(x_1, x_2, y, \mu)} = \bar{f}_2(x_2, x_1, y, \mu).$$

Observamos también que las funciones f_1, f_2 y g y sus primeras derivadas parciales se anulan cuando $x_1 = x_2 = 0, y = 0$.

Dado $\epsilon \neq 0$, introducimos el cambio de variables

$$\mu_1 = \frac{1}{\epsilon}\mu, \quad \xi_j = \frac{1}{\epsilon^2}x_j, \quad \eta = \frac{1}{\epsilon^2}y$$

en el sistema (2.19) y obtenemos

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = i\xi_1 + \epsilon\mu_1 a'(0)\xi_1 + O(\epsilon^2) \\ \dot{\xi}_2 = -i\xi_2 + \epsilon\mu_1 a'(0)\xi_2 + O(\epsilon^2) \\ \dot{\eta} = B(0)\eta + O(\epsilon). \end{cases} \quad (2.20)$$

En nuestra búsqueda de soluciones periódicas con periodo próximo a 2π podemos observar que para $\epsilon = 0$ debemos tomar $\eta = 0$ mientras ξ_1, ξ_2 pueden tomar condiciones iniciales arbitrarias. Restringiéndonos a las condiciones iniciales $\xi_1(0) = \xi_2(0) = 1$, se obtiene la solución 2π -periódica $\xi_1 = e^{it}, \xi_2 = e^{-it}, \eta = 0$. Para $\epsilon \neq 0$, podemos esperar encontrar una solución periódica próxima de periodo $T = 2\pi(1 + \epsilon\delta)$ si podemos satisfacer la condición de periodicidad

$$\xi_j(T) - \xi_j(0) = 0, \quad j = 1, 2, \quad \eta(T) - \eta(0) = 0.$$

Considerando $\xi_1(0) = \xi_2(0) = 1$ y $\eta(0) = \eta_0$ llegamos a las siguientes ecuaciones de bifurcación

$$\begin{cases} 0 = \Gamma_1 := \frac{1}{2\pi\epsilon}(\xi_1(T) - 1) = i\delta + a'(0)\mu_1 + O(\epsilon) \\ 0 = \Gamma_2 := \frac{1}{2\pi\epsilon}(\xi_2(T) - 1) = -i\delta + a'(0)\mu_1 + O(\epsilon) \\ 0 = \Gamma := \eta(T) - \eta_0 = (e^{2\pi B(0)} - I_{d-2})\eta_0 + O(\epsilon) \end{cases}, \quad (2.21)$$

donde el desarrollo para Γ_1 (de forma análoga para Γ_2) se obtiene de (2.20) dado que $\xi_1(T(\epsilon)) = e^{(\epsilon\mu_1 a'(0) + iT(\epsilon))} + O(\epsilon^2) = (e^{iT(\epsilon)} - 1)e^{\epsilon T(\epsilon)\mu_1 a'(0)} + e^{\epsilon T(\epsilon)\mu_1 a'(0)} + O(\epsilon^2)$. Para $\epsilon = 0$ este sistema tiene como única solución $\delta = 0$, $\mu_1 = 0$ y $\eta_0 = 0$. Como $a'(0) \neq 0$ por (2.18), la matriz jacobiana

$$\frac{\partial(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma)}{\partial(\delta, \mu_1, \mu_2)}$$

tiene rango máximo d para $\epsilon = 0$. En virtud del Teorema de la función implícita las ecuaciones de bifurcación (2.21) pueden ser resueltas para $|\epsilon| \neq 0$ suficientemente pequeño para obtener δ , μ_1 y η_0 como función de ϵ . \square

Nota 2.3.1 Si $f(x, \mu)$ es de clase C^r , resp. analítica, se obtiene que la familia de órbitas periódicas dependientes del parámetro ϵ son de clase C^{r-1} , resp. analíticas, [9].

Antes de abordar el Teorema centro de Lyapunov veamos la siguiente propiedad en la que se basará su demostración [7, p. 135-138].

Lema 2.3.1 *Sea $I(x)$ integral primera de (1.1) mientras $x = x(t)$ es solución periódica de $\dot{x} = f(x) + \mu\nabla I(x)$ para algún $\mu \in \mathbb{R}$. Entonces x también es solución de (1.1).*

Demostración. Sea $x = x(t)$ una solución periódica de $\dot{x} = f(x) + \mu\nabla I(x)$. Tomando $\beta(t) = I(x(t))$, donde I es integral primera de $\dot{x} = f(x)$, sigue que $\beta(0) = I(x(0)) = I(x(T)) = \beta(T)$ y $\beta(t)$ es periódica. Además

$$\dot{\beta}(t) = (\nabla I)^T \dot{x} = (\nabla I)^T (f + \mu\nabla I) = (\nabla I)^T f + \mu\|\nabla I\|^2 = \mu\|\nabla I\|^2,$$

donde ∇I y f están evaluadas en $x(t)$. Como $\beta(T) - \beta(0) = \int_0^T \dot{\beta} dt = 0$ sigue que $\dot{\beta} = \mu\|\nabla I\|^2 = 0$ y $\mu\nabla I(x(t)) = 0$. Concluimos que x es solución de (1.1). \square

Teorema 2.3.2 (Teorema Centro de Lyapunov) *Sea $x = 0$ un equilibrio de (1.1) donde $f \in C^2$, $f'(0)$ es no singular, con $\pm\omega_0 i$ como autovalores simples verificando las condiciones de no resonancia:*

$$\pm k\omega_0 i \notin \sigma(f'(0)), \quad k \in \mathbb{N}, k \neq 1.$$

Supongamos además que (1.1) admite una integral primera $I = I(x)$ de clase C^2 con matriz hessiana $I''(x)$ tal que $\det I''(0) \neq 0$. Entonces (1.1) admite una familia de soluciones periódicas $x = x(t, s)$, en un entorno de $s = 0$, de periodo $T(s) = \frac{2\pi}{\omega(s)}$, donde $\omega(s)$ es C^1 con $\omega(0) = \omega_0$. Además, dicha familia bifurca de $x = 0$ en $s = 0$.

Demostración. Vamos a probar que la ecuación

$$\dot{x} = f(x, \mu) := f(x) + \mu\nabla I(x) \quad (2.22)$$

satisface las hipótesis del Teorema 2.3.1 de bifurcación de Hopf. En primer lugar, definiendo $h(x) = (\nabla I(x))^T f(x) \equiv 0$, resulta que:

$$\nabla h(x) = f'(x)^T \nabla I(x) + I''(x)f(x). \quad (2.23)$$

Por tanto, $0 = f'(0)^T \nabla I(0)$ y de aquí, $\nabla I(0) = 0$ y $x = 0$ es un punto crítico de (2.22). Ahora, con $f(x, \mu) = f(x) + \mu \nabla I(x)$ escribimos $f'(0, \mu) = f'(0) + \mu I''(0) := A + \mu B$, cuyos autovalores son de la forma $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$.

Respecto a las hipótesis del Teorema 2.3.1, solo resta verificar la condición de transversalidad (2.18).

De (2.23) definimos $G(x) = \nabla h(x) = G_1(x) + G_2(x)$, con $G_1(x) = f'(x)^T \nabla I(x)$ y $G_2(x) = I''(x)f(x)$. Entonces, puesto que $f(0) = 0 = \nabla I(0)$, tenemos que $G'_1(0) = f'(0)^T I''(0) = A^T B$ y $G'_2(0) = I''(0)f'(0) = BA = B^T A$, con $B = B^T$ pues I es C^2 . Puesto que $G \equiv 0$, $A^T B + B^T A = 0$. Mediante cambio de coordenadas lineal podemos asumir para A la forma de Jordan real

$$A = \begin{pmatrix} S & O \\ O & R \end{pmatrix}, \quad \text{donde } S = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^T = -S \quad \text{y } R \in \mathbb{R}^{(d-2) \times (d-2)},$$

mientras que $B = \begin{pmatrix} U & M \\ M^T & C \end{pmatrix}$ y $M \in \mathbb{R}^{2 \times (d-2)}$ con $U^T = U \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y $C^T = C \in \mathbb{R}^{(d-2) \times (d-2)}$. Luego, la igualdad $A^T B = -BA$ implica

$$\begin{pmatrix} S^T U & S^T M \\ R^T M^T & R^T C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -US & -MR \\ -M^T S & -CR \end{pmatrix}.$$

Así, si $U = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{12} & \delta_{22} \end{pmatrix}$, como $SU = US$, esto implica que $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta$ y $\delta_{12} = 0$, con $\delta \neq 0$, pues $I''(0)$ es regular.

De la ecuación $SM = MR$, si escribimos $M = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ con $X, Y \in \mathbb{R}^{1 \times (d-2)}$, obtenemos:

$$\begin{cases} XR = -\omega_0 Y \\ YR = \omega_0 X \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} R^T X^T = -\omega_0 Y^T \\ R^T Y^T = \omega_0 X^T. \end{cases}$$

De aquí se obtiene que $R^T(X^T \pm iY^T) = (\pm i\omega_0)(X^T \pm iY^T)$. Como $\pm i\omega_0$ es autovalor simple de A , entonces $\pm i\omega_0 \notin \sigma(R)$ y debe ser que $X^T = Y^T = 0$. Tenemos así,

$$A + \mu B = \begin{pmatrix} S + \mu U & 0 \\ 0 & R + \mu C \end{pmatrix}$$

y las perturbaciones $\lambda_0(\mu)$ de los autovalores $\pm i\omega_0$ son $\lambda_0(\mu) = +\delta\mu \pm \omega_0 i$, con $\lambda'(0) = \delta \neq 0$, siendo cierta la condición de transversalidad (2.18). \square

Teorema 2.3.3 *Sea $H : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$ un hamiltoniano de clase C^2 tal que $H(0) = 0$, $\nabla H(0) = 0$ y $H''(0)$ es definida positiva. Supongamos además que $JH''(0)$ tiene m pares de autovalores $\pm \nu_k i$, $\nu_k > 0$, tales que $\frac{\nu_k}{\nu_l} \notin \mathbb{N}$, para $k \neq l$, siendo $J = \begin{bmatrix} O & I \\ -I & O \end{bmatrix}$. Entonces para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, el sistema hamiltoniano (1.3) admite m soluciones periódicas distintas de períodos próximos a $\frac{2\pi}{\nu_k}$, $1 \leq k \leq m$, en la superficie $H(x) = \epsilon$.*

Demostración. Como consecuencia del Teorema 2.3.2 de Lyapunov podemos obtener para cada ν_k la existencia de una familia $x_k(t, a)$ de soluciones periódicas del sistema hamiltoniano (1.3), de clase C^1 en a y de períodos próximos a $\frac{2\pi}{\nu_k}$.

Como $x_k(t, a) \sim a(\xi_k e^{i\mu_k t} + \xi_k^* e^{-i\mu_k t})$, con $a \rightarrow 0$, $\text{Ker}(JH''(0) - i\nu_k I_{2m}) = \text{span}\{\xi_k\}$, resulta que las m familias generan m órbitas distintas cuando $a \rightarrow 0$. Por otro lado:

$$H(x_k(t, a)) = H(x_k(0, a)) := h_k(a), \quad h_k(0) = 0.$$

Como $x_k(t, a)$ es de clase C^1 en a , tenemos que

$$h'_k(a) = \nabla H(x_k(0, a))^T x'_k(0, a), \quad \text{con } h'_k(0) = 0,$$

y al ser H de clase C^2 , con $H''(0)$ definida positiva,

$$h''_k(0) = (\xi_k + \xi_k^*)^* H''(0)(\xi_k + \xi_k^*) > 0.$$

Luego para cada $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, la ecuación $h_k(a) = \varepsilon$ se resuelve para una única $a = a_k(\varepsilon)$. Por tanto, la superficie $H(x) = \varepsilon$, contiene las m órbitas cerradas y distintas de las soluciones $x = x_k(t, a_k(\varepsilon))$ de (1.3) para $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

2.4. Problema restringido de 3 cuerpos.

A raíz de los resultados vistos con anterioridad, nuestro objetivo en la presente sección es probar la existencia de soluciones periódicas del problema restringido de tres cuerpos. Para ello, consideremos tres masas m_i $i = 1, 2, 3$, moviéndose libres de otras perturbaciones que no sean las interacciones gravitacionales mutuas. Su movimiento queda descrito por las ecuaciones (2.1) para $N = 3$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{q}_1 = G(m_1 m_2 \frac{q_2 - q_1}{q_{21}^3} + m_3 m_1 \frac{q_3 - q_1}{q_{31}^3}) \\ m_2 \ddot{q}_2 = G(m_1 m_2 \frac{q_1 - q_2}{q_{12}^3} + m_3 m_2 \frac{q_3 - q_2}{q_{32}^3}) \\ m_3 \ddot{q}_3 = G(m_1 m_3 \frac{q_1 - q_3}{q_{13}^3} + m_2 m_3 \frac{q_2 - q_3}{q_{23}^3}), \end{cases} \quad (2.24)$$

donde $q_{ij} = \|q_i - q_j\|$, $1 \leq i, j \leq 3$. En lo que sigue nos ocuparemos del problema restringido, es decir, asumiremos que el tercer cuerpo, al que denominaremos planetoide, tendrá masa despreciable $\epsilon \ll 1$ en comparación con los otros dos cuerpos, a los que denominaremos primarios, y que los tres cuerpos son coplanares. Dividiendo (2.24) entre GM con $M = m_1 + m_2$, y tomando $\hat{m}_i = \frac{m_i}{M}$, $i = 1, 2$, $\epsilon = \frac{m_3}{M}$, con $\hat{m}_1 = 1 - \mu$, $\hat{m}_2 = \mu$ las masas reducidas, y haciendo el cambio de escala temporal $\tau = \sqrt{GM}t$, obtenemos

$$\begin{cases} \ddot{r}_1 = \mu \frac{r_2 - r_1}{r_{21}^3} + \epsilon \frac{r_3 - r_1}{r_{31}^3} \\ \ddot{r}_2 = (1 - \mu) \frac{r_1 - r_2}{r_{12}^3} + \epsilon \frac{r_3 - r_2}{r_{32}^3} \\ \ddot{r}_3 = (1 - \mu) \frac{r_1 - r_3}{r_{13}^3} + \mu \frac{r_2 - r_3}{r_{23}^3}, \end{cases} \quad (2.25)$$

siendo $r_i(\tau) = q_i(\sqrt{GM}t)$, $r_{ij} = \|r_i - r_j\|$, $1 \leq i, j \leq 3$. Por simplicidad de notación volvemos a renombrar $\tau \equiv t$.

Nota 2.4.1 En primer lugar, analizaremos el movimiento de los tres cuerpos. Comprobaremos que el movimiento de los primarios no se ve afectado por el planetoide, y que se hayan en movimiento circular con respecto a su centro de masa:

$$r_m(t) = (1 - \mu)r_1(t) + \mu r_2(t). \quad (2.26)$$

Si hacemos $\epsilon \rightarrow 0$ obtenemos las ecuaciones del problema restringido de tres cuerpos

$$\begin{cases} \ddot{r}_1 = \mu \frac{r_2 - r_1}{r_{21}^3} \\ \ddot{r}_2 = (1 - \mu) \frac{r_1 - r_2}{r_{12}^3} \\ \ddot{r}_3 = (1 - \mu) \frac{r_1 - r_3}{r_{13}^3} + \mu \frac{r_2 - r_3}{r_{23}^3}, \end{cases} \quad (2.27)$$

pudiendo desacoplar el movimiento de los primarios del movimiento del planetoido. Observamos que las dos primeras ecuaciones corresponden al problema de dos cuerpos. Si analizamos la aceleración del centro de masas (2.26)

$$\ddot{r}_m(t) = (1 - \mu)\ddot{r}_1(t) + \mu\ddot{r}_2(t) = (1 - \mu)\mu \frac{r_2 - r_1}{r_{21}^3} + \mu(1 - \mu) \frac{r_1 - r_2}{r_{12}^3} = 0,$$

podemos ver que se desplaza con movimiento uniforme y el planetoido no perturba el sistema de los primarios. Haciendo el cambio de referencia $\hat{r}_i = r_i - r_m$ para tener como origen del sistema de referencia el centro de masas, obtenemos las mismas ecuaciones

$$\begin{cases} \ddot{\hat{r}}_1 = \mu \frac{\hat{r}_2 - \hat{r}_1}{\hat{r}_{21}^3} \\ \ddot{\hat{r}}_2 = (1 - \mu) \frac{\hat{r}_1 - \hat{r}_2}{\hat{r}_{12}^3}. \end{cases}$$

Como el nuevo centro de masas se halla en el origen, $(1 - \mu)\hat{r}_1 + \mu\hat{r}_2 = 0$ y entonces $\hat{r}_1 = -\mu(\hat{r}_2 - \hat{r}_1)$ y $\hat{r}_2 = (1 - \mu)(\hat{r}_2 - \hat{r}_1)$. Si buscamos órbitas circulares se tiene que $|\hat{r}_2 - \hat{r}_1| = a$, $a > 0$ arbitrario, la distancia entre m_1 y m_2 tiene que ser constante, y las amplitudes de los radios vectores \hat{r}_i son $|\hat{r}_1| = \mu a$ y $|\hat{r}_2| = (1 - \mu)a$. Nótese que $(\ddot{\hat{r}}_2 - \ddot{\hat{r}}_1) = -\frac{\hat{r}_2 - \hat{r}_1}{a^3}$ con lo que $\hat{r}_2 - \hat{r}_1 = a(\cos(\frac{t}{a^{3/2}}), \sin(\frac{t}{a^{3/2}}))$. Como el cambio de escala espacio-temporal $r \rightarrow \frac{r}{a}$, $t \rightarrow \frac{t}{a^{3/2}}$ deja las ecuaciones inalteradas, podemos suponer sin pérdida de generalidad $a = 1$. Por tanto, hemos comprobado que los primarios orbitan alrededor de su centro de masas con velocidad angular 1 a distancias μ y $1 - \mu$ del mismo, es decir:

$$\hat{r}_2 - \hat{r}_1 = (\cos(t), \sin(t)), \quad \hat{r}_1 = -\mu(\hat{r}_2 - \hat{r}_1), \quad \hat{r}_2 = (1 - \mu)(\hat{r}_2 - \hat{r}_1). \quad (2.28)$$

Nota 2.4.2 A continuación, nos interesa escribir las ecuaciones del movimiento como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para poder calcular sus puntos de equilibrio. Para ello definimos ahora $r = r_3 - r_m$. La ecuación (2.27) para el tercer cuerpo queda como

$$\ddot{r} = -(1 - \mu) \frac{r - \hat{r}_1}{|r - \hat{r}_1|^3} - \mu \frac{r - \hat{r}_2}{|r - \hat{r}_2|^3}. \quad (2.29)$$

Si consideramos un nuevo cambio de referencia, tomando $r = (\xi, \eta)$, $r^* = (x, y)$ las nuevas coordenadas del planetoido, relacionadas mediante

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

o bien de forma matricial $r(t) = R(t)r^*(t)$, donde $R(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$, sustituyendo esta expresión en (2.29)

$$\ddot{R}r^* + 2\dot{R}\dot{r}^* + R\ddot{r}^* = -(1 - \mu)R \frac{r^* - r_1^*}{|r^* - r_1^*|^3} - \mu R \frac{r^* - r_2^*}{|r^* - r_2^*|^3},$$

con $r_i = Rr_i^*$, $i = 1, 2$. Multiplicando por R^T a ambos lados, siendo $R^T R = -R^T \dot{R} = I$, tenemos que

$$\ddot{r}^* + 2R^T \dot{R} \dot{r}^* = r^* - (1 - \mu) \frac{r^* - r_1^*}{|r^* - r_1^*|^3} - \mu \frac{r^* - r_2^*}{|r^* - r_2^*|^3}, \quad (2.30)$$

donde $r_1^* = R^T(t)\hat{r}_1(t) = (-\mu, 0)$ y $r_2^* = R^T(t)\hat{r}_2(t) = (1 - \mu, 0)$ en virtud de (2.28), esto es, los primarios están en reposo en el nuevo sistema de coordenadas. Tomando $\rho_1 = |r^* - r_1^*| = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}$ y $\rho_2 = |r^* - r_2^*| = \sqrt{(x + \mu - 1)^2 + y^2}$ y sustituyendo en (2.30) obtenemos, usando que $R^T \dot{R} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ las ecuaciones en coordenadas x, y :

$$\begin{cases} x'' - 2y' = x - (1 - \mu) \frac{x + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{x - 1 + \mu}{\rho_2^3} \\ y'' + 2x' = y - (1 - \mu) \frac{y}{\rho_1^3} - \mu \frac{y}{\rho_2^3}. \end{cases} \quad (2.31)$$

Introduciendo las funciones $U(x, y) = \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2}$ y $\phi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + U(x, y)$, las ecuaciones (2.31) toman la forma:

$$\begin{cases} x'' - 2y' = \phi_x \\ y'' + 2x' = \phi_y, \end{cases} \quad (2.32)$$

o bien, como sistema de primer orden

$$\begin{cases} x' = p, \\ y' = q, \\ p' = 2q + \phi_x, \\ q' = -2p + \phi_y, \end{cases} \quad (2.33)$$

de modo que $I(x, y, p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) - \phi(x, y)$ es una integral primera.

Recordemos que nuestro objetivo es probar la existencia de soluciones periódicas de las ecuaciones (2.33), para este propósito calculamos sus puntos de equilibrio, que tienen la forma (x, y, p, q) con $p = q = 0$ siendo (x, y) solución del sistema

$$\begin{cases} 0 = x - (1 - \mu) \frac{x + \mu}{\rho_1^3} - \mu \frac{x - 1 + \mu}{\rho_2^3} \\ 0 = y - (1 - \mu) \frac{y}{\rho_1^3} - \mu \frac{y}{\rho_2^3}. \end{cases} \quad (2.34)$$

Distinguimos dos casos:

1. Si $y = 0$:

$$x = h(x) := \frac{(1 - \mu) \text{signo}(x + \mu)}{(x + \mu)^2} + \frac{\mu \cdot \text{signo}(x + \mu - 1)}{(x + \mu - 1)^2}. \quad (2.35)$$

Luego, x puede tomar tres posibles valores $x = n_i$, $i = 1, 2, 3$, donde $n_1 < -\mu < n_2 < 1 - \mu < n_3$. Estos puntos se denominan los puntos de Euler y se denotan por $L_i = (n_i, 0)$, $i = 1, 2, 3$. Además el signo de n_2 coincide con el de $(\frac{1}{2} - \mu)$.

2. Si $y \neq 0$, entonces de la segunda ecuación en (2.34): $1 = (1 - \mu)K_1 + \mu K_2$ donde $K_1 = \rho_1^{-3}$ y $K_2 = \rho_2^{-3}$. Luego, debe ser que $K_1 = K_2 = 1$ y la distancia de los dos primarios al planetóide es la misma en estos puntos de equilibrio. Los puntos L_i , $i = 4, 5$ se denominan puntos de Lagrange, obtenidos de resolver

$$\begin{cases} (x + \mu)^2 + y^2 = 1 \\ (x + \mu - 1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

esto es, $L_4 = (\frac{1}{2} - \mu, \frac{\sqrt{3}}{2})$ y $L_5 = (\frac{1}{2} - \mu, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Cada uno de estos puntos forman un triángulo equilátero con los dos primarios.

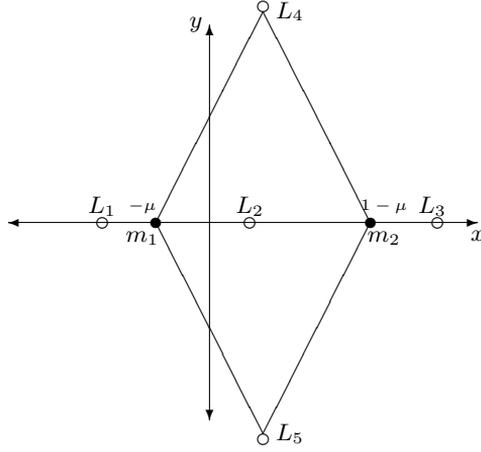


Figura 2.1: Posiciones de equilibrio para (2.31). Puntos de Euler: L_1, L_2, L_3 . Puntos de Lagrange: L_4, L_5 [7, p. 144].

Comprobemos las hipótesis del teorema centro de Lyapunov: calculamos la matriz hessiana de $I(x, y, p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) - \phi(x, y)$ en los puntos de equilibrio

$$I''(L_i) = \begin{pmatrix} -\phi_{xx}(L_i) & -\phi_{xy}(L_i) & 0 & 0 \\ -\phi_{yx}(L_i) & -\phi_{yy}(L_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -a_i & -b_i & 0 & 0 \\ -b_i & -c_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq 5.$$

Si f denota el segundo miembro de (2.33), $f = (p, q, 2q + \phi_x, -2p + \phi_y)$, su matriz jacobiana en los puntos L_j es

$$A_j = f'(L_j) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_j & b_j & 0 & 2 \\ b_j & c_j & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq 5.$$

Los autovalores de A_j son las raíces de $\det(A_j - \lambda I_4) = \lambda^4 + (\text{tr}(D_j) - 4)\lambda^2 + \det(D_j) = 0$, donde $D_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ b_j & c_j \end{pmatrix}$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \phi_{xx} &= 1 - (1 - \mu)\rho_1^{-3} + 3\rho_1^{-5}(1 - \mu)(x + \mu)^2 - \mu\rho_2^{-3} + 3\rho_2^{-5}\mu(x - 1 - \mu)^2 \\ \phi_{xy} &= 3((1 - \mu)(x + \mu)\rho_1^{-5}y + \mu\rho_2^{-5}(x + \mu - 1)y) \\ \phi_{yy} &= 1 - (1 - \mu)\rho_1^{-3} + 3y^2(1 - \mu)\rho_2^{-5} - \mu\rho_2^{-3} + 3y^2\mu\rho_2^{-5}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Para los puntos de Euler se tiene que:

$$b_j = \phi_{xy}(L_j) = 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

En segundo lugar se tiene de (2.35) que

$$h'(x) = -2((1 - \mu)|x + \mu|^{-3} + \mu|x + \mu - 1|^{-3}) < 0,$$

y como $\phi_{xx}(x, 0) = 1 - h'(x)$, luego $a_j = \phi_{xx}(L_j) = 1 - h'(x) > 0$, $j = 1, 2, 3$.

En tercer lugar, de (2.36)

$$c_j = \phi_{yy}(L_j) = 1 - (1 - \mu) \frac{1}{|x + \mu|^3} - \mu \frac{1}{|x + \mu - 1|^3}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Para el punto de Euler L_2 , $\rho_i < 1$, $i = 1, 2$, y por tanto $c_2 < 0$. Por otra parte $x\phi_{yy} > 0$ en L_1 y $x\phi_{yy} < 0$ en L_3 , y esto implica que $c_j = \phi_{yy}(L_j) < 0$, $j = 1, 2, 3$.

Luego, $I''(L_j)$ es no degenerada y además $f'(L_j)$ es no singular, $j = 1, 2, 3$. Luego, de la ecuación $\lambda^4 - (a_j + c_j - 4)\lambda^2 + (a_j c_j) = 0$, con $a_j c_j < 0$, tenemos que λ^2 toma como raíz un valor negativo que genera raíces imaginarias puras conjugadas $\lambda = \pm \omega_j i$ y otro positivo dando lugar a dos raíces reales de distinto signo. Concluimos que los puntos de Euler son inestables y como se dan las condiciones del Teorema 2.3.2 de Lyapunov podemos asegurar que el problema de los tres cuerpos admite una familia de soluciones periódicas de pequeña amplitud y periodos próximos a $\frac{2\pi}{\omega_j}$, $j = 1, 2, 3$.

En cuanto a los puntos de Lagrange L_j , $j = 4, 5$, sabemos que $\rho_i = 1$, $i = 1, 2$. Luego, de (2.36), $a_j = \frac{3}{4}$, $c_j = \phi_{yy}(L_j) = \frac{9}{4}$, $b_j = \frac{3\sqrt{3}}{2}(\frac{1}{2} - \mu)$. Entonces, $\det I''(L_j) = \det D_j = \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) > 0$, por lo que $I''(L_j)$ es no degenerada e indefinida; mientras que la ecuación característica para A_j es $\lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0$, que solo admite dos parejas de raíces imaginarias puras $\pm \omega_j i$, $\pm \omega'_j i$, cuando $\mu(1 - \mu) < \frac{1}{27}$, esto es, cuando $\mu < \frac{9 - \sqrt{69}}{18} = 0.03852 = \mu_0$. Fijando $0 < \omega_j < \omega'_j$ podemos aplicar el teorema centro de Lyapunov a ω'_j y obtenemos una familia de órbitas periódicas de periodo próximos a $\frac{2\pi}{\omega'_j}$. Sin embargo, para poder aplicar el teorema centro de Lyapunov a ω_j hace falta que se cumpla la condición de no resonancia: $\frac{\omega'_j}{\omega_j} \neq k \in \mathbb{N}$.

Supongamos que $\omega'_j = k\omega_j$. Usando las relaciones de cardano $\omega_j^2 + \omega'_j{}^2 = 1$, $\omega_j^2 \omega'_j{}^2 = \frac{27}{4}\mu(1 - \mu)$, tenemos que $\frac{k^2}{(1+k^2)^2} = \frac{27}{4}\mu(1 - \mu)$, lo que sucede si $\mu = \mu_k$ para $0 < \mu_k < \mu_0$, con $\mu_k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow +\infty$. Luego, para todos los $0 < \mu < \mu_0$ con $\mu \neq \mu_k$ el Teorema Centro garantiza la existencia de una segunda familia de órbitas cerradas de pequeña amplitud y periodos próximos a $\frac{2\pi}{\omega_j}$.

2.5. Colapso total

Finalizamos este capítulo presentando algunos resultados que relacionan el *momento de inercia*

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|q_i\|^2, \tag{2.37}$$

de un sistema de N cuerpos (2.1) con las diferentes energías del sistema. Esto permitirá obtener un interesante resultado sobre colapso total en tiempo finito [5, p. 79-80].

Lema 2.5.1 (Fórmula de Lagrange-Jacobi) *Sea \mathcal{I} el momento de inercia (2.37) y $H = T - U$ la energía total del sistema de N cuerpos (2.1), donde T es la energía cinética (2.5) y $-U$ la energía potencial (2.2). Entonces*

$$\ddot{\mathcal{I}} = 2T - U = T + H. \tag{2.38}$$

Demostración. Derivando \mathcal{I} dos veces respecto a t tenemos

$$\ddot{\mathcal{I}} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{q}_i^T \dot{q}_i + \sum_{i=1}^N m_i q_i^T \ddot{q}_i = \sum_{i=1}^N m_i \|\dot{q}_i\|^2 + \sum_{i=1}^N m_i q_i^T \left(\frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) = 2T - U$$

donde la última igualdad se obtiene teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N q_i^T \frac{\partial U}{\partial q_i} &= \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N G m_i m_j \frac{q_i^T (q_j - q_i)}{\|q_j - q_i\|^3} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^N G m_i m_j \frac{(q_i - q_j + q_j)^T (q_j - q_i)}{\|q_j - q_i\|^3} \\ &= - \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_i m_j}{\|q_j - q_i\|} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_i m_j q_j^T (q_j - q_i)}{\|q_j - q_i\|^3} \\ &= - \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_i m_j}{\|q_j - q_i\|} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_i m_j q_i^T (q_i - q_j)}{\|q_i - q_j\|^3}, \end{aligned}$$

$$\text{esto es } 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^N G m_i m_j \frac{q_i (q_j - q_i)}{\|q_j - q_i\|^3} = - \sum_{\substack{i,j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_i m_j}{\|q_j - q_i\|} = -2U. \quad \square$$

Lema 2.5.2 (Desigualdad de Sundman) Sea $c = \|A\|$, A momento angular (2.7), y $H = T - U$ la energía total del sistema (2.1). Entonces

$$c^2 \leq 4\mathcal{I}(\ddot{\mathcal{I}} - H). \quad (2.39)$$

Demostración. $c = \|\sum_{i=1}^N m_i q_i \times \dot{q}_i\| \leq \sum_{i=1}^N m_i \|q_i\| \|\dot{q}_i\| = \sum_{i=1}^N (\sqrt{m_i} \|q_i\|)(\sqrt{m_i} \|\dot{q}_i\|)$. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz y (2.38)

$$c^2 \leq \sum_{i=1}^N (\sqrt{m_i} \|q_i\|)^2 \sum_{i=1}^N (\sqrt{m_i} \|\dot{q}_i\|)^2 = \sum_{i=1}^N m_i \|q_i\|^2 \sum_{i=1}^N m_i \|\dot{q}_i\|^2 = (2\mathcal{I})(2T) = 4\mathcal{I}(\ddot{\mathcal{I}} - H). \quad \square$$

Nota 2.5.1 Dado el sistema (2.1), decimos que experimenta *colapso total* si existen $t_1 > 0$ y $q^* \in \mathbb{R}^3$ tales que $\lim_{t \rightarrow t_1^-} q_i(t) = q^*$, $1 \leq i \leq N$. Si el centro de masas está fijo en

el origen, $0 = \lim_{t \rightarrow t_1^-} C(t) = \lim_{t \rightarrow t_1^-} \sum_{i=1}^N m_i q_i(t) = (\sum_{i=1}^N m_i) q^*$, por lo que en tal caso $q^* = 0$, y de modo equivalente, el momento de inercia verifica $\lim_{t \rightarrow t_1^-} \mathcal{I}(t) = 0$.

Teorema 2.5.1 (Teorema de Sundman sobre Colapso Total) Si $\mathcal{I}(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow t_1^-$ entonces $t_1 < \infty$ y $A = 0$, siendo A el momento angular (2.7).

Demostración. Sea H la energía total del sistema. Por (2.38) $\ddot{\mathcal{I}} = 2T - U = T + H$. Supongamos que $\mathcal{I}(t)$ está definido para todo $t \geq 0$ con $\mathcal{I} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|q_i\|^2 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Luego, $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{q}_i(t) = 0$, $1 \leq i \leq N$. Entonces,

$$U = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{G m_i m_j}{\|q_i - q_j\|} \rightarrow +\infty$$

y por ser H constante, $H(t) = H(0)$, $\forall t \geq 0$, sigue que también $T \rightarrow +\infty$. Así puesto que $\ddot{\mathcal{I}} = T + H$, existe $t^* > 0$ tal que $\ddot{\mathcal{I}} \geq 1$ para $t \geq t^*$. Integrando dos veces esta

desigualdad obtenemos $\mathcal{I}(t) \geq \frac{1}{2}t^2 + at + b$ para $t \geq t^*$ donde a y b son constantes. Pero esto contradice el colapso total. Luego, el colapso total se producirá en un tiempo finito.

Ahora supongamos que $\mathcal{I} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow t_1^- < \infty$ y como antes $U \rightarrow +\infty$ y $\dot{\mathcal{I}} \rightarrow +\infty$ para $t \rightarrow t_1^-$. Así, existe $t_2 < t_1$ tal que $\dot{\mathcal{I}} > 0$ para $t_2 \leq t < t_1$, con $0 < \mathcal{I}(t) < 1$, $t_2 \leq t < t_1$, $\mathcal{I}(t) \rightarrow 0$, si $t \rightarrow t_1^-$. Por el Lema 2.5.3 $\dot{\mathcal{I}}(t) \leq 0$ en $[t_2, t_1]$. Ahora multiplicamos ambos lados de la desigualdad (2.39) de Sundman $c^2 \leq 4\mathcal{I}(\dot{\mathcal{I}} - H)$ por $-\dot{\mathcal{I}}\mathcal{I}^{-1} > 0$ para obtener $-\frac{1}{4}c^2\dot{\mathcal{I}}\mathcal{I}^{-1} \leq H\dot{\mathcal{I}} - \dot{\mathcal{I}}\dot{\mathcal{I}}$, denotando $H = H(t) = H(0)$, $\forall t > 0$. Integrando esta desigualdad tenemos $\frac{1}{4}c^2 \log \mathcal{I}^{-1} \leq H\mathcal{I} - \frac{1}{2}\dot{\mathcal{I}}^2 + k \geq H\mathcal{I} + k$, donde k es una constante de integración. Así, $\frac{1}{4}c^2 \leq \frac{H\mathcal{I} + k}{\log \mathcal{I}^{-1}}$. Como $\mathcal{I} \rightarrow 0$, si $t \rightarrow t_1^-$, el lado derecho tiende a cero. Pero esto implica $c = 0$. \square

Lema 2.5.3 *Sea $g \in C^2(a, b)$ tal que $g(t) > 0$, $\ddot{g}(t) > 0$, $\forall t \in (a, b)$, y además $g(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow b^-$. Entonces $\dot{g}(t) < 0$, $\forall t \in (a, b)$.*

Demostración. Sea $t \in (a, b)$ fijo, y consideremos t_1 tal que $t < t_1 < b$. Puesto que $g \in C^2(a, b)$, sigue desarrollando por Taylor hasta orden dos alrededor de t que

$$g(t_1) = g(t + (t_1 - t)) = g(t) + \dot{g}(t)(t_1 - t) + \frac{1}{2}\ddot{g}(\tau)(t_1 - t)^2, \quad \tau \in (t, t_1),$$

y haciendo $t_1 \rightarrow b^-$ se tiene que

$$0 = g(t) + \dot{g}(t)(b - t) + \frac{1}{2}\ddot{g}(\tau)(b - t)^2, \quad \tau \in (t, b).$$

Considerando la hipótesis de positividad para g y \ddot{g} sigue inmediatamente que

$$\dot{g}(t) = -\frac{1}{b - t} \left(g(t) + \frac{1}{2}\ddot{g}(\tau)(b - t)^2 \right) < 0.$$

\square

El método de Störmer-Verlet y la Integración Numérica Geométrica.

3.1. Métodos de un paso. Error local y consistencia.

Sea el problema de valor inicial en ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad t \in [t_0, T], \quad x, f \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d, \quad (3.1)$$

siendo Ω convexo abierto. Para garantizar la existencia y unicidad de la solución $x(t)$, definida al menos en un entorno de t_0 , asumiremos que la función $f(t, x)$ verifica:

(H1) $f \in C([t_0, T] \times \overline{\Omega})$.

(H2) $\|f(t, x) - f(t, z)\| \leq L\|x - z\| \quad \forall t \in [t_0, T], \forall x, z \in \overline{\Omega}$ siendo $\|\cdot\|$ una norma arbitraria prefijada en \mathbb{R}^d .

En el desarrollo de este capítulo asumiremos que $f \in C^p([t_0, T] \times \Omega)$, para algún $p \geq 1$ determinado, a efectos de estudiar la consistencia de métodos numéricos para aproximar la solución exacta de (3.1). Sea una partición uniforme de $[t_0, T]$

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < t_N = T \quad \text{con } h := t_{n+1} - t_n, \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (3.2)$$

Observamos que si $x(t)$ resuelve (3.1) en $[t_0, T]$, entonces:

$$x(t_{n+1}) = x(t_n + h) = x(t_n) + hx'(t_n) + O(h^2) = x(t_n) + hf(t_n, x(t_n)) + O(h^2), \quad h \rightarrow 0.$$

El método de **Euler explícito** viene dado por la recurrencia

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.3)$$

Por otra parte, otros métodos básicos y populares en la integración numérica de (3.1) son el método de **Euler implícito** y la regla explícita del punto medio o método de **Runge** de orden dos, dados respectivamente por:

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.4)$$

y

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}f(t_n, x_n)), \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.5)$$

Los métodos (3.3)-(3.5) son ejemplos concretos en la amplia clase de métodos de un paso en los que se utiliza únicamente la aproximación x_n en el punto $t = t_n$ junto con un tamaño de paso h para computar una aproximación x_{n+1} en $t_{n+1} = t_n + h$.

Definición 3.1.1 *Un método de un paso aplicado con paso h en la partición (3.2) con valor inicial (t_0, x_0) para aproximar la solución de (3.1) es un método numérico por el que se genera la sucesión $\{x_n\}_{n=0}^N$ definida por*

$$x_{n+1} = \phi_h(t_n, x_n), \quad n = 0, \dots, N - 1, \tag{3.6}$$

donde $\phi_h(t, y)$ es la función de iteración del método. El método (3.6) se dice implícito cuando ϕ_h está definida implícitamente por la función f del sistema diferencial. En otro caso, se dice que el método es explícito.

Para problemas diferenciales autónomos ϕ_h es independiente de t y representa el flujo del método numérico.

Ejemplo 3.1.1 Las funciones de iteración de los métodos (3.3)-(3.5) verifican

1. Euler explícito: $\phi_h(t, x) = x + hf(t, x)$.
2. Runge: $\phi_h(t, x) = x + hf(t + \frac{h}{2}, x + \frac{h}{2}f(t, x))$.
3. Euler implícito: $\phi_h(t, x) = x + hf(t + h, \phi_h(t, x))$.

Definición 3.1.2 *Sea la ecuación diferencial (3.1) cumpliendo las hipótesis (H1) y (H2). Dado un método de un paso (3.6), se llama **error local** del método a lo largo de una curva integral $x(t)$ de (3.1) a*

$$\ell(t, h) = x(t + h) - \phi_h(t, x(t)), \tag{3.7}$$

siendo ϕ_h la función de iteración del método.

Así, el error local de un método representa el error cometido por el mismo al avanzar con paso h desde un valor de la solución exacta $(t, x(t))$.

Definición 3.1.3 *Un método de un paso (3.6) se dice **consistente** con la ecuación diferencial (3.1) bajo las hipótesis (H1) y (H2) si para toda curva integral $x(t)$*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\ell(t, h)\|}{h} = 0, \quad \text{uniformemente en } t \in [t_0, T],$$

esto es, si $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $0 < |h| < \delta$ entonces $\|\ell(t, h)\| \leq \epsilon|h|, \forall t \in [t_0, T]$.

Además, si $f \in C^p([t_0, T] \times \overline{\Omega})$, para algún $p \geq 1$, se dice que el método es **consistente de orden p** , si para toda curva integral existen constantes K y h^* tales que

$$\|\ell(t, h)\| \leq K|h|^{p+1}, \quad \forall 0 < h \leq h^*, \quad \text{uniformemente en } t \in [t_0, T].$$

En otras palabras, consistencia equivale a que $\ell(t, h) = o(h), h \rightarrow 0$, mientras que consistencia de orden p significa que $\ell(t, h) = O(h^{p+1}), h \rightarrow 0$, uniformemente en $t \in [t_0, T]$.

Ejemplo 3.1.2 El error local del método de Euler explícito es

$$\ell(t, h) = x(t, h) - x(t) - hx'(t) = \int_t^{t+h} (x'(s) - x'(t))ds.$$

En particular, $\|\ell(t, h)\| \leq h \sup_{|s-t| \leq h} \|x'(s) - x'(t)\| = h\omega_h(x')$, donde $\omega_\delta(g) := \sup_{|t-s| \leq \delta} \|g(t) - g(s)\|$ es el módulo de continuidad de tamaño δ de una función g . Así, el método es consistente, ya que $\frac{\|\ell(t, h)\|}{h} \leq \omega_h(x') \rightarrow 0, h \rightarrow 0, \forall t \in [t_0, T]$. Si además $f \in C^1$, entonces $x \in C^2$ y el método es consistente de orden 1 dado que

$$\ell(t, h) = h^2 \int_0^1 (1 - \theta)x''(t + \theta h)d\theta \quad \text{y} \quad \|\ell(t, h)\| \leq \frac{h^2}{2} \max_{t \in [t_0, T]} \|x''(t)\|.$$

Un argumento similar permite concluir que los métodos de Euler implícito y de Runge son consistentes de orden 1 y 2, respectivamente. En las siguientes secciones presentamos y estudiamos otros métodos de un paso simples que satisfacen interesantes propiedades geométricas.

3.2. Métodos de Störmer-Verlet y Euler simplécticos

En esta sección, se presentan los métodos de Störmer-Verlet y Euler simplécticos con sus propiedades de consistencia para el caso de una EDO de segundo orden especial

$$\ddot{q} = F(q), \quad q, F \in \mathbb{R}^m \tag{3.8}$$

con las condiciones iniciales $q(t_0) = q_0$ y $\dot{q}(t_0) = p_0$, donde el lado derecho de la ecuación no depende de \dot{q} .

Sea $h > 0$ el tamaño de paso. La formulación del método de Störmer-Verlet más simple la obtenemos discretizando directamente la EDO (3.8) mediante una diferencia central de orden dos para $\ddot{q}(t_n)$, esto es:

$$q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1} = h^2 F(q_n), \tag{3.9}$$

obteniendo de esta forma un método de dos pasos, pues para computar q_{n+1} se requiere previamente conocer q_n y q_{n-1} . Sin embargo, una EDO de segundo orden se puede transformar en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y dimensión doble. Por tanto, tomando $p = \dot{q}$ obtenemos el sistema

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = F(q). \end{cases} \tag{3.10}$$

Sea

$$p_n = \frac{q_{n+1} - q_{n-1}}{2h} \tag{3.11}$$

la aproximación en diferencias centrales de orden dos a $\dot{q}(t_n)$. Sustituyendo (3.11) en la formulación de dos pasos (3.9) obtenemos un método de un paso $\phi_h : (q_n, p_n) \rightarrow (q_{n+1}, p_{n+1})$ de la forma [3]

$$SV \begin{cases} q_{n+1} = q_n + h(p_n + \frac{h}{2} F(q_n)) \\ p_{n+1} = p_n + \frac{h}{2} F(q_n) + \frac{h}{2} F(q_{n+1}). \end{cases} \tag{3.12}$$

Proposición 3.2.1 *Dados q_0, q_1 y h arbitrarios, los valores $\{q_n\}_{n \geq 1}, \{p_n\}_{n \geq 1}$ definidos por (3.9) y (3.11) satisfacen (3.12).*

Demostración. De (3.11), $q_{n+1} = 2hp_n + q_{n-1}$, $n \geq 1$. Sustituyendo en (3.9) sigue que $q_n - q_{n-1} = hp_n - \frac{h^2}{2} F(q_n)$, $n \geq 1$. Luego, de (3.9):

$$q_{n+1} = q_n + (q_n - q_{n-1}) + h^2 F(q_n) = q_n + hp_n + \frac{h^2}{2} F(q_n);$$

$$h^2 F(q_n) = (q_{n+1} - q_n) - (q_n - q_{n+1}) = h(p_{n+1} - p_n) + \frac{h^2}{2} (F(q_n) - F(q_{n+1}))$$

y entonces $p_{n+1} = p_n + \frac{h}{2} (F(q_n) + F(q_{n+1}))$. □

La formulación del método de Störmer-Verlet (3.12) es numéricamente más estable que la formulación de dos pasos (3.9).

Nota 3.2.1 El método (3.12) fue introducido por C. Störmer (1907) en sus estudios sobre la aurora boreal. Fue popularizado posteriormente por L. Verlet (1967) en sus estudios de dinámica molecular (ver [4, p. 465-466], [2, p. 7-8]).

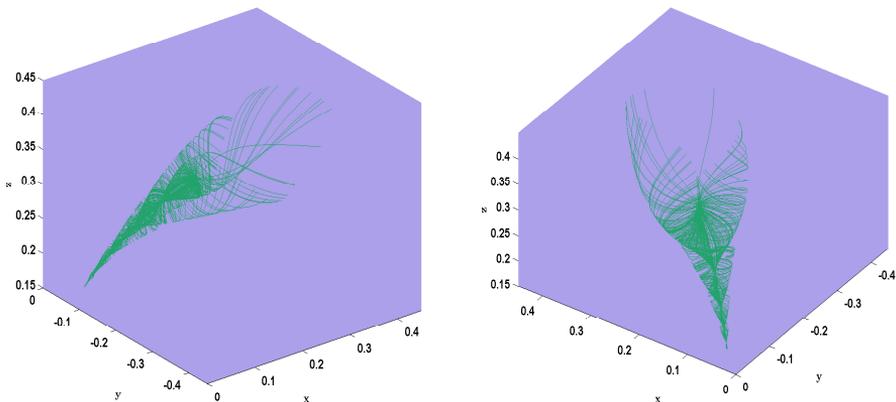


Figura 3.1: El método de Störmer-Verlet y la EDO de la aurora boreal [4, p. 465-466].

Proposición 3.2.2 El método de Störmer-Verlet (3.12) aplicado a (3.10) es consistente de orden 2.

Demostración. Sea $\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ F(q) \end{pmatrix} = f(x)$ un sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales $p_0 = p(t_0)$, $q_0 = q(t_0)$, y $F \in C^2$. Tomando

$$x_1 := \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} q_0 + h(p_0 + \frac{h}{2}F(q_0)) \\ p_0 + \frac{h}{2}F(q_0) + \frac{h}{2}F(q_1) \end{pmatrix} \quad y \quad x(t_0 + h) = \begin{pmatrix} q(t_0 + h) \\ p(t_0 + h) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

y desarrollando por Taylor

$$\begin{aligned} q(t_0 + h) &= q_0 + hp_0 + \frac{h^2}{2}F(q_0) + O(h^3), \\ p(t_0 + h) &= p_0 + hF(q_0) + \frac{h^2}{2}\ddot{p}(t_0) + O(h^3). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que derivando $\dot{p}(t) = F(q(t))$ tenemos que $\ddot{p}(t) = F'(q(t))\dot{q}(t) = F'(q(t))p(t)$, sigue que $\ddot{p}(t_0) = F'(q_0)p_0$. Ya que $q_1 = q_0 + hp_0 + O(h^2)$, se tiene que

$$F(q_1) = F(q_0) + hF'(q_0)p_0 + O(h^2).$$

Obtenemos de (3.13) que

$$\begin{aligned} q(t_0 + h) - q_1 &= (q_0 + hp_0 + \frac{h^2}{2}F(q_0) + O(h^3)) - (q_0 + hp_0 + \frac{h^2}{2}F(q_0)) = O(h^3), \\ p(t_0 + h) - p_1 &= (p_0 + hF(q_0) + \frac{h^2}{2}F'(q_0)p_0 + O(h^3)) \\ &\quad - (p_0 + \frac{h}{2}F(q_0) + \frac{h}{2}(F(q_0) + hF'(q_0)p_0 + O(h^2))) = O(h^3). \end{aligned}$$

Por tanto, el método de Störmer-Verlet es consistente de orden 2. □

Definición 3.2.1 Se llaman métodos de **Euler simplécticos SE1 y SE2** sobre la EDO (3.10) a los métodos numéricos por los que, dados $q_0, p_0 \in \mathbb{R}^m$ y $h \in \mathbb{R}$, se computan las iteraciones

$$SE1: \begin{cases} p_{n+1} = p_n + hF(q_n) \\ q_{n+1} = q_n + hp_{n+1}, \end{cases} \quad (3.14)$$

$$SE2: \begin{cases} q_{n+1} = q_n + hp_n \\ p_{n+1} = p_n + hF(q_{n+1}). \end{cases} \quad (3.15)$$

Nota 3.2.2 El método SE1 (3.14) consiste en combinar Euler explícito aplicado a $\dot{p} = F(q)$ y Euler implícito a $\dot{q} = p$, ambos con paso h . El método SE2 (3.15) combina las formulaciones de Euler explícito en $\dot{q} = p$ y de Euler implícito en $\dot{p} = F(q)$, ambos con paso h . Podemos observar que tanto SE1 como SE2 son métodos explícitos.

Proposición 3.2.3 Tanto SE1 (3.14) como SE2 (3.15) aplicado a (3.10) son métodos consistentes de orden 1.

Demostración. Sea $F \in C^1$. Tenemos $q(t_0 + h) = q_0 + hp_0 + O(h^2)$ y $p(t_0 + h) = p_0 + hF(q_0) + O(h^2)$. Ahora, para SE1, $p_1 = p_0 + hF(q_0)$ y $q_1 = q_0 + hp_1 = q_0 + hp_0 + h^2 F(q_0)$. Luego,

$$q(t_0) - q_1 = O(h^2), \quad p(t_0 + h) - p_1 = O(h^2). \quad (3.16)$$

Para SE2, $q_1 = q_0 + hp_0$ y $p_1 = p_0 + hF(q_0 + hp_0) = p_0 + hF(q_0) + O(h^2)$, y nuevamente se verifica (3.16). \square

Nota 3.2.3 Podemos observar que el método SE1 aplicado con paso $-h$ coincide con SE2, esto es, SE1 aplicado con paso $-h$ y valor inicial (q_{n+1}, p_{n+1}) genera una solución de avance (q_n, p_n) de modo que ambos satisfacen la formulación de SE2 con paso h . Como veremos posteriormente esto quiere decir que SE2 es el método adjunto de SE1.

$$SE1 \begin{cases} p_n := p_{n+1} - hF(q_{n+1}) \\ q_n := q_{n+1} - hp_n \end{cases} \Leftrightarrow SE2 \begin{cases} p_{n+1} := p_n + hF(q_{n+1}) \\ q_{n+1} := q_n + hp_n. \end{cases} \quad (3.17)$$

Proposición 3.2.4 El método de Störmer-Verlet (3.12) para avanzar con paso h desde (q_n, p_n) coincide con la composición de los métodos de Euler simpléctico SE1 y SE2 con paso $h/2$.

Demostración. Dado (q_n, p_n) y un tamaño de paso $h > 0$. Aplicando SE1 con paso $\frac{h}{2}$ se obtiene:

$$\begin{cases} p_{n+\frac{1}{2}} = p_n + \frac{h}{2}F(q_n) \\ q_{n+\frac{1}{2}} = q_n + \frac{h}{2}p_{n+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (3.18)$$

Aplicando ahora SE2 con paso $h/2$ desde $(q_{n+\frac{1}{2}}, p_{n+\frac{1}{2}})$ se obtiene:

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}p_{n+\frac{1}{2}} = q_n + h(p_n + \frac{h}{2}F(q_n)) \\ p_{n+1} &= p_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}F(q_{n+1}) = p_n + \frac{h}{2}F(q_n) + \frac{h}{2}F(q_{n+1}). \end{aligned}$$

\square

3.3. Reversibilidad, simetría y simplecticidad del método de Störmer-Verlet

Definición 3.3.1 Sea la transformación en \mathbb{R}^{2m} $\rho : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$, $\rho(q, p) = (q, -p)$, $\forall q, p \in \mathbb{R}^m$. Una EDO $\dot{x} = f(x)$ en $D \subseteq \mathbb{R}^{2m}$, D abierto, se dice reversible si

$$\rho \circ f(x) = -f \circ \rho(x), \quad \forall x \in D. \quad (3.19)$$

El flujo φ_t de una ecuación diferencial reversible satisface

$$\rho \circ \varphi_t = \varphi_{-t} \circ \rho = \varphi_t^{-1} \circ \rho. \quad (3.20)$$

En efecto, $\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}$ por la propiedad de grupo $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$. Por otra parte

$$\frac{d}{dt}(\rho \circ \varphi_t)(x) = \rho \circ f(\varphi_t(x)) = -f((\rho \circ \varphi_t)(x)),$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi_{-t} \circ \rho)(x) = -f((\varphi_{-t} \circ \rho)(x)),$$

mientras que en $t = 0$, $\rho \circ \varphi_0(x) = \rho(x) = (\varphi_{-0} \circ \rho)(x)$. Puesto que $\rho \circ \varphi_t$ y $\varphi_{-t} \circ \rho$ son soluciones del mismo problema de valor inicial, allí donde ambas estén definidas se tiene que $\rho \circ \varphi_t = \varphi_{-t} \circ \rho$.

La condición de reversibilidad en una EDO se interpreta en el sentido de que invertir la dirección inicial del vector velocidad manteniendo la posición inicial no modifica la trayectoria de la solución, únicamente invierte la dirección del movimiento (véase [3] y [2, Sec. V.1]).

Ejemplo 3.3.1 Toda EDO de la forma (3.10) es reversible. En efecto, $f(q, p) = (p, F(q))$ y $\rho \circ f(q, p) = (p, -F(q))$, mientras que $-f \circ \rho(q, p) = -f(q, -p) = -(-p, F(q)) = (p, -F(q))$.

Ejemplo 3.3.2 Una EDO $\begin{cases} \dot{q} = F_1(q, p) \\ \dot{p} = F_2(q, p) \end{cases} \quad q, p \in \mathbb{R}^m$, es reversible si, y solo si, $F_1(q, -p) = -F_1(q, p)$ y $F_2(q, -p) = F_2(q, p)$. En efecto, si denotamos $f(q, p) = (F_1(q, p)^T, F_2(q, p)^T)^T$, tenemos que

$$\begin{aligned} -f \circ \rho(q, p) &= -f(q, -p) = (-F_1(q, -p)^T, -F_2(q, -p)^T)^T \\ \rho \circ f(q, p) &= (F_1(q, p)^T, -F_2(q, p)^T)^T \end{aligned}$$

$$y \rho \circ f = -f \circ \rho \Leftrightarrow \begin{cases} F_1(q, p) = -F_1(q, -p) \\ F_2(q, p) = F_2(q, -p). \end{cases}$$

Nota 3.3.1 Este ejemplo previo nos permite identificar si un sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} \dot{q} = \nabla_p H(q, p) \\ \dot{p} = -\nabla_q H(q, p) \end{cases}$$

es reversible o no.

Ejemplo 3.3.3 1. $H(q, p) = q^2 + p^2$ es reversible pues $\begin{cases} \dot{q} = 2p \equiv F_1 \\ \dot{p} = -2q \equiv F_2. \end{cases}$

2. $H(q, p) = q^3 + p^3$ no es reversible pues $\begin{cases} \dot{q} = 3p^2 \equiv F_1 \\ \dot{p} = -3q^2 \equiv F_2. \end{cases}$

Teniendo en cuenta (3.20) presentamos la siguiente definición.

Definición 3.3.1 Una **transformación regular** $\phi : D \subseteq \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$, D abierto, se dice **reversible** si

$$\rho \circ \phi = \phi^{-1} \circ \rho. \quad (3.21)$$

Definición 3.3.2 Sea una EDO reversible $\dot{x} = f(x)$ en $D \subseteq \mathbb{R}^{2m}$. Un **método de un paso** $x_1 = \phi_h(x_0)$ se dice **reversible** si ϕ_h es una transformación reversible, esto es,

$$\rho \circ \phi_h = \phi_h^{-1} \circ \rho. \quad (3.22)$$

Nota 3.3.2 Alternativamente, un método reversible aplicado a una EDO $\dot{x} = f(x)$, con $x = (q^T, p^T)^T$, $q, p \in \mathbb{R}^m$, verifica para todo $q_0, p_0 \in \mathbb{R}^m$ y $h \in \mathbb{R}$

$$\phi_h(q_0, p_0) = (q_1, p_1) \Rightarrow \phi_h(q_1, -p_1) = (q_0, -p_0).$$

Una propiedad estrechamente ligada a la reversibilidad de un método de un paso es su simetría.

Definición 3.3.3 Un **método de un paso** ϕ_h se dice **simétrico** si

$$\phi_{-h} \circ \phi_h(x_0) = x_0, \quad \forall x_0, \quad (3.23)$$

esto es, $\phi_h = \phi_{-h}^{-1}$.

Nota 3.3.3 No todo método de un paso ϕ_h tiene por qué ser simétrico. El método de un paso ϕ_{-h}^{-1} se denomina método adjunto de ϕ_h . Así, por ejemplo, como hemos visto en la Nota 3.2.3 los métodos de Euler simplécticos SE1 y SE2 son uno adjunto del otro.

Teorema 3.3.1 Sea un método de un paso ϕ_h aplicado a una EDO reversible tal que $\rho \circ \phi_h = \phi_{-h} \circ \rho$. Entonces, ϕ_h es reversible si, y solo si, ϕ_h es simétrico.

Demostración. ϕ_h es un método reversible si y solo si $\rho \circ \phi_h = \phi_h^{-1} \circ \rho$. Aplicando la hipótesis, sigue de modo equivalente que $\phi_{-h} \circ \rho = \phi_h^{-1} \circ \rho$. Puesto que ρ es regular, con $\rho^{-1} = \rho$ tenemos que tenemos que $\phi_{-h} = \phi_h^{-1} \circ \rho \circ \rho^{-1}$, o bien $\phi_{-h} = \phi_h^{-1}$, esto es, ϕ_h es simétrico. \square

Nota 3.3.4 Este resultado será de utilidad para estudiar la reversibilidad y simetría del método de Störmer-Verlet (3.12) sobre (3.10) ([3]).

Teorema 3.3.2 El método de Störmer-Verlet (3.12) cumple $\rho \circ \phi_h = \phi_{-h} \circ \rho$.

Demostración. El flujo numérico de Störmer-Verlet sobre (3.10) viene dado por (3.12)

$$\phi_h(q, p) = (q + hp + \frac{h^2}{2}F(q), p + \frac{h}{2}F(q) + \frac{h}{2}F(q + hp + \frac{h^2}{2}F(q))).$$

Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \rho \circ \phi_h(q, p) &= (q + hp + \frac{h^2}{2}F(q), -p - \frac{h}{2}F(q) - \frac{h}{2}F(q + hp + \frac{h^2}{2}F(q))), \\ \phi_{-h} \circ \rho(q, p) &= \phi_{-h}(q, -p) \\ &= (q + hp + \frac{h^2}{2}F(q), -p - \frac{h}{2}F(q) - \frac{h}{2}F(q + hp + \frac{h^2}{2}F(q))). \end{aligned}$$

Luego, $\rho \circ \phi_h = \phi_{-h} \circ \rho$. \square

Teorema 3.3.3 *El método de Störmer-Verlet (3.12) aplicado a (3.10) es simétrico.*

Demostración. Tenemos que $\phi_h(q_0, p_0) = (q_1, p_1)$ con $q_1 = q_0 + hp_0 + \frac{h^2}{2}F(q_0)$ y $p_1 = p_0 + \frac{h}{2}F(q_0) + \frac{h}{2}F(q_1)$. Luego, $\phi_{-h}(q_1, p_1) = (q_2, p_2)$, siendo

$$\begin{aligned} q_2 &= q_1 - hp_1 + \frac{h^2}{2}F(q_1) \\ &= q_0 + hp_0 + \frac{h^2}{2}F(q_0) - h(p_0 + \frac{h}{2}F(q_0) + \frac{h}{2}F(q_1)) + \frac{h^2}{2}F(q_1) = q_0, \\ p_2 &= p_1 - \frac{h}{2}F(q_1) - \frac{h}{2}F(q_2) = (p_0 + \frac{h}{2}F(q_0) + \frac{h}{2}F(q_1)) - \frac{h}{2}F(q_1) - \frac{h}{2}F(q_0) = p_0. \end{aligned}$$

□

Corolario 3.3.1 *El método de Störmer-Verlet (3.12) aplicado a (3.10) es reversible.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de los tres teoremas anteriores. □

Nota 3.3.5 El flujo de la EDO (3.10) preserva el volumen. Esto es consecuencia de la Proposición 1.2.1 del capítulo 1, pues la divergencia del campo vectorial correspondiente es nula:

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial p_i}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial F_i(q)}{\partial p_i} = 0.$$

Teorema 3.3.4 *Los métodos de Euler simpléctico SE1 (3.14) y SE2 (3.15) y el método de Störmer-Verlet (3.12) aplicados a (3.10) preservan el volumen.*

Demostración. Sean $\phi_h^{(SE1)}$, $\phi_h^{(SE2)}$ y $\phi_h^{(SV)}$ los flujos de los respectivos métodos de un paso

$$\begin{cases} \phi_h^{(SE1)}(q_0, p_0) = (q_0 + h(p_0 + hF(q_0)), p_0 + hF(q_0)) \\ \phi_h^{(SE2)}(q_0, p_0) = (q_0 + hp_0, p_0 + hF(q_0 + hp_0)) \\ \phi_h^{(SV)} = \phi_{h/2}^{(SE2)} \circ \phi_{h/2}^{(SE1)}. \end{cases}$$

Asociadas a la EDO (3.10) consideramos las EDOs

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} \dot{q} = 0 \\ \dot{p} = F(q) \end{cases}$$

con $\varphi_t^{[1]}(q_0, p_0) = (q_0 + tp_0, p_0)$ y $\varphi_t^{[2]}(q_0, p_0) = (q_0, p_0 + tF(q_0))$ sus respectivos flujos, que además preservan el volumen en virtud de la Proposición 1.2.1 del capítulo 1.

Veamos que

$$\phi_h^{(SE1)} = \varphi_h^{[1]} \circ \varphi_h^{[2]} \quad \text{y} \quad \phi_h^{(SE2)} = \varphi_h^{[2]} \circ \varphi_h^{[1]}. \quad (3.24)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \varphi_h^{[1]}(\varphi_h^{[2]}(q_0, p_0)) &= \varphi_h^{[1]}(q_0, p_0 + hF(q_0)) \\ &= (q_0 + h[p_0 + hF(q_0)], p_0 + hF(q_0)) \\ &= \phi_h^{(SE1)}(q_0, p_0), \\ \varphi_h^{[2]}(\varphi_h^{[1]}(q_0, p_0)) &= \varphi_h^{[2]}(q_0 + hp_0, p_0) \\ &= (q_0 + hp_0, p_0 + hF(q_0 + hp_0)) \\ &= \phi_h^{(SE2)}(q_0, p_0). \end{aligned}$$

En particular, de (3.24), se deduce que $\phi_h^{(SV)} = (\varphi_{h/2}^{[1]} \circ \varphi_{h/2}^{[1]}) \circ (\varphi_{h/2}^{[1]} \circ \varphi_{h/2}^{[2]}) = \varphi_{h/2}^{[2]} \circ \varphi_h^{[1]} \circ \varphi_{h/2}^{[2]}$. Como los flujos $\varphi^{[1]}$ y $\varphi^{[2]}$, y su composición, preservan el volumen, se obtiene que los flujos numéricos $\phi_h^{(SE1)}$, $\phi_h^{(SE2)}$ y $\phi_h^{(SV)}$ sobre (3.10) preservan el volumen. □

Nota 3.3.6 Otra propiedad interesante de los métodos SE1 (3.14), SE2 (3.15) y SV (3.12) es que todos ellos preservan las integrales primeras lineales que pueda tener la EDO (3.10) ([3]).

Teorema 3.3.5 *Los métodos SE1 (3.14), SE2 (3.15) y SV (3.12) preservan las integrales primeras lineales de (3.10).*

Demostración. Si $I(q, p) = b^T q + c^T p$ es una integral primera lineal, con $b, c \in \mathbb{R}^m$ vectores constantes, entonces $b^T p + c^T F(q) = 0, \forall p, q$, pues $(\nabla I(x))^T f(x) = 0, \forall x = (q, p)$, con $f(x) = (p^T, F(q)^T)^T$. Luego, debe ser que $c^T F(q) \equiv 0$ y $b^T p \equiv 0$, esto es $c^T F(q) = 0, \forall q$ y $b = 0$. Si (p_{n+1}, q_{n+1}) es la solución de avance por cualquiera de los métodos SE1 (3.14), SE2 (3.15) y SV (3.12), sigue que $I(q_{n+1}, p_{n+1}) = c^T p_{n+1} = c^T p_n = I(q_n, p_n), n \geq 0$. \square

Teorema 3.3.6 *Los métodos SE1 (3.14), SE2 (3.15) y SV (3.12) preservan las integrales primeras cuadráticas de la forma $I(q, p) = p^T(Cq + c)$, $C \in \mathbb{R}^{m \times m}, c \in \mathbb{R}^m$, del sistema (3.10).*

Demostración. Si $I(q, p) = p^T(Cq + c)$ es una cantidad conservada, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= [p^T C, (Cq + c)^T] \begin{pmatrix} p \\ F(q) \end{pmatrix} = p^T Cp + (Cq + c)^T F(q) \\ &= p^T Cp + F(q)^T (Cq + c), \quad \forall p, q. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Veamos que $I(q, p)$ se preserve para cada método:

- Para SE1: usando (3.14), tenemos que

$$\begin{aligned} I(q_{n+1}, p_{n+1}) &= p_{n+1}^T (Cq_{n+1} + c) = p_{n+1}^T (Cq_n + c + hCp_{n+1}) \\ &= p_{n+1}^T (Cq_n + c) + hp_{n+1}^T Cp_{n+1} \\ &= p_n^T (Cq_n + c) + h[F(q_n)^T (Cq_n + c) + p_{n+1}^T Cp_{n+1}]. \end{aligned}$$

De (3.25), $I(q_{n+1}, p_{n+1}) = p_{n+1}^T (Cq_{n+1} + c) = p_n^T (Cq_n + c) = I(q_n, p_n), n \geq 0$.

- Para SE2: usando (3.15) tenemos que

$$\begin{aligned} p_{n+1}^T (Cq_{n+1} + c) &= p_n^T (Cq_{n+1} + c) + hF(q_{n+1})^T (Cq_{n+1} + c) \\ &= p_n^T (Cq_n + c) + h[F(q_{n+1})^T (Cq_{n+1} + c) + p_n^T Cp_n], \end{aligned}$$

y SE2 preserva el invariante cuadrático en virtud de (3.25).

- SV preserva el invariante, pues es composición de SE1 y SE2 con paso $h/2$.

\square

A continuación nos centraremos en la propiedad de simplecticidad por parte de los métodos SE1, SE2 y SV ([3]).

Nota 3.3.7 Sabemos por el Teorema 1.2.2 que la EDO (3.10), con $F \in C^1(D), D \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto, tiene flujo simpléctico si, y solo si, la EDO es localmente hamiltoniana, con hamiltoniano, definido al menos localmente, dado por (salvo constante aditiva)

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^T p + U(q),$$

esto es, $\forall q_0 \in D$, existe $U_{q_0} \subset \mathbb{R}^m$ bola centrada en q_0 y $U \in C^1(U_{q_0})$ tal que $F(q) = -\nabla U(q)$. Equivalentemente, la matriz jacobiana $F'(q_0)$ es simétrica, $\forall q_0 \in D$.

Obsérvese que la función potencial U , y por tanto el hamiltoniano H , podría definirse globalmente en D si tal dominio fuese simplemente conexo. En definitiva, tenemos que el flujo φ_t de la EDO (3.10) es simpléctico si, y solo si, $F'(q)$ es simétrica, $\forall q \in D$. Recordemos que φ_t es una transformación simpléctica si

$$\varphi'_t(x_0)^T J \varphi'_t(x_0) = J, \quad \forall x_0 = (q, p) \in \Omega, \text{ siendo } J = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix}.$$

Definición 3.3.4 Sea $\dot{x} = f(x)$ una EDO en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{2m}$ abierto con flujo simpléctico. Un método de un paso $x_1 = \phi_h(x_0)$ se dice simpléctico si ϕ_h es una transformación simpléctica en Ω , esto es,

$$\phi'_h(x_0)^T J \phi'_h(x_0) = J, \quad \forall x_0 \in \Omega, \quad \text{con } J = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix}.$$

Proposición 3.3.1 La composición $\phi_h = \phi_{h_2}^{(2)} \circ \phi_{h_1}^{(1)}$ de dos métodos simplécticos $\phi_{h_1}^{(1)}$ y $\phi_{h_2}^{(2)}$, con tamaño de paso h_1 y h_2 , es nuevamente un método simpléctico.

Demostración. Usando la simplecticidad de $\phi_{h_1}^{(1)}$ y $\phi_{h_2}^{(2)}$ y que

$$\phi'_h(x_0) = \phi_{h_2}^{(2)'}(\phi_{h_1}^{(1)}(x_0))\phi_{h_1}^{(1)'}(x_0)$$

sigue que

$$\begin{aligned} \phi'_h(x_0)^T J \phi'_h(x_0) &= (\phi_{h_1}^{(1)'}(x_0))^T (\phi_{h_2}^{(2)'}(\phi_{h_1}^{(1)}(x_0)))^T J (\phi_{h_2}^{(2)'}(\phi_{h_1}^{(1)}(x_0)))(\phi_{h_1}^{(1)'}(x_0)) \\ &= (\phi_{h_1}^{(1)'}(x_0))^T J (\phi_{h_1}^{(1)'}(y_0)) = J. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.3.7 Sea la EDO (3.10), con $F \in C^1(D)$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto, y $F'(q)$ matriz simétrica en D . Los métodos SE1 (3.14), SE2 (3.15) y SV (3.12) aplicados a dicha EDO son simplécticos.

Demostración. Respecto a SE1, su flujo es $\phi_h^{(SE1)} = (q + h(p + hF(q)), p + hF(q))$. Así:

$$\phi'_h(q, p) = \begin{pmatrix} I + h^2 F'(q) & hI \\ hF'(q) & I \end{pmatrix}.$$

Luego:

$$\begin{aligned} (\phi'_h(q, p))^T J \phi'_h(q, p) &= \begin{pmatrix} I + h^2 F'(q)^T & hF'(q)^T \\ hI & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I + h^2 F'(q) & hI \\ hF'(q) & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -hF'(q)^T & I + h^2 F'(q)^T \\ -I & hI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I + h^2 F'(q) & hI \\ hF'(q) & I \end{pmatrix} = J, \end{aligned}$$

pues $F'(q)^T = F'(q)$. La simplecticidad de SE2 se deduce de forma análoga teniendo en cuenta que su flujo es $\phi_h^{SE2} = (q + hp, p + hF(q + hp))$ y

$$\phi'_h(q, p) = \begin{pmatrix} I & hI \\ hF'(q + hp) & I + h^2 F'(q + hp) \end{pmatrix}.$$

Finalmente, como SV es la composición de SE1 y SE2, por la Proposición 3.3.1 se deduce la simplecticidad de SV. □

3.4. Métodos de Störmer-Verlet y Euler simplécticos para sistemas hamiltonianos

Extendemos en esta sección la definición y propiedades de los métodos de Euler simplécticos y Störmer-Verlet cuando se aplican a sistemas hamiltonianos

$$\begin{cases} \dot{q} = \nabla_p H(q, p), \\ \dot{p} = -\nabla_q H(q, p), \end{cases} \quad (3.26)$$

con hamiltoniano $H : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$, $H \in C^2(\Omega)$ (véase [3] y [2, Sec.VI.3])

Definición 3.4.1 Dado el sistema hamiltoniano (3.26), $q_0, p_0 \in \mathbb{R}^m$ y $h \in \mathbb{R}$, los métodos de Euler simpléctico SE1 y SE2 y de Störmer-Verlet SV son

$$SE1 \quad \begin{cases} p_{n+1} = p_n - h\nabla_q H(q_n, p_{n+1}) \\ q_{n+1} = q_n + h\nabla_p H(q_n, p_{n+1}) \end{cases}, \quad n \geq 0, \quad (3.27)$$

$$SE2 \quad \begin{cases} q_{n+1} = q_n + h\nabla_p H(q_{n+1}, p_n) \\ p_{n+1} = p_n - h\nabla_q H(q_{n+1}, p_n) \end{cases}, \quad n \geq 0, \quad (3.28)$$

$$SV \quad \begin{cases} p_{n+\frac{1}{2}} = p_n - \frac{h}{2}\nabla_q H(q_n, p_{n+\frac{1}{2}}) \\ q_{n+1} = q_n + \frac{h}{2}(\nabla_p H(q_n, p_{n+\frac{1}{2}}) + \nabla_p H(q_{n+1}, p_{n+\frac{1}{2}})) \\ p_{n+1} = p_{n+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2}\nabla_q H(q_{n+1}, p_{n+\frac{1}{2}}) \end{cases}, \quad n \geq 0. \quad (3.29)$$

Nota 3.4.1 1. Si $H(q, p) = \frac{1}{2}p^T p + U(q)$, entonces el sistema hamiltoniano es de la forma (3.10), con $F(q) = -\nabla U(q)$. La definición de los métodos dada en (3.27)-(3.29) coincide con la definición dada en (3.12), (3.14) y (3.15), respectivamente.

2. A diferencia de un sistema (3.10), los métodos SE1, SE2 y SV aplicados a sistemas hamiltonianos (3.26) son en general implícitos. No obstante, en caso de hamiltonianos separables $H(q, p) = T(p) + U(q)$, (3.27), (3.28) y (3.29) resultan explícitos.
3. El método SV aplicado desde (q_n, p_n) con paso h coincide con la composición de SE1 y SE2, ambos aplicados con paso $h/2$.

$$SE1_{\frac{h}{2}} \begin{cases} p_{n+\frac{1}{2}} = p_n - \frac{h}{2}\nabla_q H(q_n, p_{n+\frac{1}{2}}) \\ q_{n+\frac{1}{2}} = q_n + \frac{h}{2}\nabla_p H(q_n, p_{n+\frac{1}{2}}) \end{cases}, \quad SE2_{\frac{h}{2}} \begin{cases} q_{n+1} = q_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2}\nabla_p H(q_{n+1}, p_{n+\frac{1}{2}}) \\ p_{n+1} = p_{n+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2}\nabla_q H(q_{n+1}, p_{n+\frac{1}{2}}) \end{cases}$$

$$(q_n, p_n) \xrightarrow{SE1_{\frac{h}{2}}} (q_{n+\frac{1}{2}}, p_{n+\frac{1}{2}}) \xrightarrow{SE2_{\frac{h}{2}}} (q_{n+1}, p_{n+1})$$

que coincide con el método SV para avanzar $(q_n, p_n) \rightarrow (q_{n+1}, p_{n+1})$ con paso h .

Proposición 3.4.1 Los métodos SE1 (3.27) y SE2 (3.28) aplicados a (3.26) son consistentes de orden 1.

Demostración. Sean $q_0 = q(t_0)$, $p_0 = p(t_0)$. Así, $q(t_0 + h) = q_0 + h\nabla_p H(q_0, p_0) + O(h^2)$ y $p(t_0 + h) = p_0 - h\nabla_q H(q_0, p_0) + O(h^2)$. Para SE1:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 - h\nabla_q H(q_0, p_1) = p_0 - h\nabla_q H(q_0, p_0) + O(h^2) \\ q_1 &= q_0 + h\nabla_p H(q_0, p_1) = q_0 + h\nabla_p H(q_0, p_0) + O(h^2) \end{aligned}$$

usando, en ambos casos, en la última igualdad que $p_1 = p_0 + O(h)$. Luego, $q(t_0 + h) - q_1 = O(h^2)$ y $p(t_0 + h) - p_1 = O(h^2)$, $h \rightarrow 0$.

Para SE2:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_0 + h\nabla_p H(q_1, p_0) = q_0 + h\nabla_p H(q_0, p_0) + O(h^2) \\ p_1 &= p_0 - h\nabla_q H(q_1, p_0) = p_0 + h\nabla_q H(q_0, p_0) + O(h^2) \end{aligned}$$

usando, en ambos casos, en la última igualdad que $q_1 = q_0 + O(h)$. Así, $q(t_0 + h) - q_1 = O(h^2)$ y $p(t_0 + h) - p_1 = O(h^2)$, $h \rightarrow 0$. \square

Proposición 3.4.2 *El método SV (3.29) aplicado a (3.26) es consistente de orden 2.*

Demostración. Debemos asumir $H \in C^3(\Omega)$. Entonces con $q_0 = q(t_0)$, $p_0 = p(t_0)$

$$q(t_0 + h) = q_0 + h\nabla_p H(q_0, p_0) + \ddot{q}(t_0)\frac{h^2}{2} + O(h^3), \quad h \rightarrow 0,$$

siendo $\ddot{q} = \frac{d}{dt}(\nabla_p H(q, p)) = H_{pq}\dot{q} + H_{pp}\dot{p} = H_{pq}\nabla_p H - H_{pp}\nabla_q H$, con

$$H_{pq} = \left(\frac{\partial H_{p_i}}{\partial q_j}\right)_{i,j=1}^m, \quad H_{pp} = \left(\frac{\partial H_{p_i}}{\partial p_j}\right)_{i,j=1}^m \quad \text{y} \quad H_{p_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad 1 \leq i \leq m. \quad (3.30)$$

Observamos que $H_{pq} = H_{pq}^T = H_{qp} = H_{qp}^T$ y $H_{pp} = H_{pp}^T$. Luego, para $h \rightarrow 0$,

$$q(t_0 + h) = q_0 + h\nabla_p H(q_0, p_0) + \frac{h^2}{2}(H_{pq}(q_0, p_0)\nabla_p H(q_0, p_0) - H_{pp}(q_0, p_0)\nabla_q H(q_0, p_0)) + O(h^3).$$

Análogamente, $\ddot{p} = -\frac{d}{dt}(\nabla_q H(q, p)) = -H_{qq}\dot{q} - H_{qp}\dot{p} = H_{pq}\nabla_q H - H_{qq}\nabla_p H$, con

$$H_{qq} = \left(\frac{\partial H_{q_i}}{\partial q_j}\right)_{i,j=1}^n = H_{qq}^T, \quad (3.31)$$

y se tiene que, para $h \rightarrow 0$,

$$p(t_0 + h) = p_0 - h\nabla_q H(q_0, p_0) + \frac{h^2}{2}(H_{pq}(q_0, p_0)\nabla_q H(q_0, p_0) - H_{qq}(q_0, p_0)\nabla_p H(q_0, p_0)) + O(h^3).$$

Veamos el desarrollo en potencias de h para (q_1, p_1) dados por SV (3.29) con paso h .

$$\begin{aligned} p_{\frac{1}{2}} &= p_0 - \frac{h}{2}\nabla_q H(q_0, p_{\frac{1}{2}}) = p_0 - \frac{h}{2}\nabla_q H(q_0, p_0) + O(h^2), \quad h \rightarrow 0, \\ q_1 &= q_0 + \frac{h}{2}\nabla_p H(q_0, p_{\frac{1}{2}}) + \frac{h}{2}\nabla_p H(q_0 + \frac{h}{2}\nabla_p H(q_0, p_{\frac{1}{2}}), p_{\frac{1}{2}}) + \frac{h}{2}\nabla_p H(q_1, p_{\frac{1}{2}}), p_{\frac{1}{2}}) \\ &= q_0 + \frac{h}{2}\nabla_p H(q_0, p_{\frac{1}{2}}) + \frac{h}{2}(\nabla_p H(q_0, p_{\frac{1}{2}}) + O(h)) \\ &= q_0 + h\nabla_p H(q_0, p_{\frac{1}{2}}) + O(h^2), \quad h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Con esto:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_0 + \frac{h}{2}\nabla_p H(q_0, p_{\frac{1}{2}}) + \frac{h}{2}\nabla_p H(q_0 + h\nabla_p H(q_0, p_{\frac{1}{2}}) + O(h^2), p_{\frac{1}{2}}) \\ &= q_0 + \frac{h}{2}\nabla_p H(q_0, p_{\frac{1}{2}}) + \frac{h}{2}(\nabla_p H(q_0, p_{\frac{1}{2}}) + hH_{pq}(q_0, p_{\frac{1}{2}})\nabla_p H(q_0, p_{\frac{1}{2}}) + O(h^2)) \\ &= q_0 + h\nabla_p H(q_0, p_{\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{2}H_{pq}(q_0, p_{\frac{1}{2}})\nabla_p H(q_0, p_{\frac{1}{2}}) + O(h^3), \quad h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

con $p_{\frac{1}{2}} = p_0 - \frac{h}{2}\nabla_q H(q_0, p_0) + O(h^2)$. Por tanto, para $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} q_1 &= q_0 + h(\nabla_p H(q_0, p_0) - \frac{h}{2}H_{pp}(q_0, p_0)\nabla_q H(q_0, p_0) + O(h^2)) \\ &\quad + \frac{h^2}{2}H_{pq}(q_0, p_0)\nabla_p H(q_0, p_0) + O(h^3) \\ &= q_0 + h\nabla_p H(q_0, p_0) + \frac{h^2}{2}(H_{pq}(q_0, p_0)\nabla_p H(q_0, p_0) - H_{pp}(q_0, p_0)\nabla_q H(q_0, p_0)) + O(h^3). \end{aligned}$$

En definitiva, $q(t_0 + h) - q_1 = O(h^3)$, $h \rightarrow 0$. Finalmente

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{\frac{1}{2}} - \frac{h}{2} \nabla_q H(q_1, p_{\frac{1}{2}}) \\ &= p_{\frac{1}{2}} - \frac{h}{2} \nabla_q H(q_0 + h \nabla_p H(q_0, p_0) + O(h^2), p_0 - \frac{h}{2} \nabla_q H(q_0, p_0) + O(h^2)) \\ &= p_{\frac{1}{2}} - \frac{h}{2} (\nabla_q H(q_0, p_0) + h H_{qq}(q_0, p_0) \nabla_p H(q_0, p_0) - \frac{h}{2} H_{pq}(q_0, p_0) \nabla_q H(q_0, p_0) + O(h^2)) \end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned} p_{\frac{1}{2}} &= p_0 - \frac{h}{2} \nabla_q H(q_0, p_{\frac{1}{2}}) \\ &= p_0 - \frac{h}{2} \nabla_q H(q_0, p_0 - \frac{h}{2} \nabla_q H(q_0, p_0) + O(h^2)) \\ &= p_0 - \frac{h}{2} (\nabla_q H(q_0, p_0) - \frac{h}{2} H_{pq}(q_0, p_0) \nabla_q H(q_0, p_0) + O(h^2)) \\ &= p_0 - \frac{h}{2} \nabla_q H(q_0, p_0) + \frac{h^2}{4} H_{pq}(q_0, p_0) \nabla_q H(q_0, p_0) + O(h^3). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 - h \nabla_q H(q_0, p_0) + \frac{h^2}{2} (H_{pq}(q_0, p_0) \nabla_q H(q_0, p_0) - H_{qq}(q_0, p_0) \nabla_p H(q_0, p_0)) + O(h^3) \\ &= p(t_0 + h) + O(h^3), \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

Proposición 3.4.3 *El método de Störmer-Verlet (3.29) aplicado a (3.26) es simétrico.*

Demostración. (q_1, p_1) es la solución de avance de (3.29) con paso h desde (q_0, p_0)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} p_{\frac{1}{2}} = p_0 - \frac{h}{2} \nabla_q H(q_0, p_{1/2}) \\ q_1 = q_0 + \frac{h}{2} (\nabla_p H(q_0, p_{1/2}) + \nabla_p H(q_1, p_{1/2})) \\ p_1 = p_{1/2} - \frac{h}{2} \nabla_q H(q_1, p_{1/2}) \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} p_{\frac{1}{2}} = p_1 - \frac{(-h)}{2} \nabla_q H(q_1, p_{1/2}) \\ q_0 = q_1 + \frac{(-h)}{2} (\nabla_p H(q_1, p_{1/2}) + \nabla_p H(q_0, p_{1/2})) \\ p_0 = p_{1/2} - \frac{(-h)}{2} \nabla_q H(q_0, p_{1/2}) \end{cases} \end{aligned}$$

esto es, (q_0, p_0) es la solución de avance de (3.29) con paso $-h$ desde (q_1, p_1) . □

Nota 3.4.2 Teniendo en cuenta el Ejemplo 3.3.2, el sistema hamiltoniano (3.26) es reversible si, y solo si

$$\nabla_p H(q, -p) = -\nabla_p H(q, p) \quad \text{y} \quad \nabla_q H(q, -p) = \nabla_q H(q, p). \quad (3.32)$$

Esto se verifica en particular si $H(q, -p) = H(q, p)$.

Proposición 3.4.4 *El método SV (3.29) aplicado a un sistema hamiltoniano reversible (3.26) verifica $\rho \circ \phi_h = \phi_{-h} \circ \rho$, siendo ρ la transformación $\rho(q, p) = (q, -p)$.*

Demostración. Sean (q_0, p_0) y h dados. Tenemos $\phi_{-h} \circ \rho(q_0, p_0) = \phi_{-h}(q_0, -p_0) = (q_1, p_1)$ definido por:

$$\begin{cases} p_{\frac{1}{2}} = -p_0 + \frac{h}{2} \nabla_q H(q_0, p_{1/2}) \\ q_1 = q_0 - \frac{h}{2} (\nabla_p H(q_0, p_{1/2}) + \nabla_p H(q_1, p_{1/2})) \\ p_1 = p_{1/2} + \frac{h}{2} \nabla_q H(q_1, p_{1/2}). \end{cases}$$

Definiendo $\hat{p}_{1/2} := -p_{1/2}$, sigue usando (3.32)

$$\begin{cases} \hat{p}_{\frac{1}{2}} = p_0 - \frac{h}{2} \nabla_q H(q_0, \hat{p}_{1/2}) \\ q_1 = q_0 + \frac{h}{2} (\nabla_p H(q_0, \hat{p}_{1/2}) + \nabla_p H(q_1, \hat{p}_{1/2})) \\ -p_1 = \hat{p}_{1/2} - \frac{h}{2} \nabla_q H(q_1, \hat{p}_{1/2}). \end{cases}$$

Luego, de (3.29) $(q_1, -p_1) = \phi_h(q_0, p_0)$ y $\rho \circ \phi_h(q_0, p_0) = \rho(q_1, -p_1) = (q_1, p_1)$. \square

Corolario 3.4.1 *El método SV (3.29) aplicado a un sistema hamiltoniano reversible (3.26) es reversible.*

Demostración. Es consecuencia de las Proposiciones 3.4.3 y 3.4.4 y del Teorema 3.3.1. \square

Proposición 3.4.5 *Los métodos SE1 (3.27), SE2 (3.28) y SV (3.29) preservan las integrales primeras lineales de un sistema hamiltoniano (3.26).*

Demostración. Si $I(q, p) = b^T q + c^T p$ es una integral primera lineal, con $b, c \in \mathbb{R}^m$ vectores constantes, entonces $b^T \nabla_p H(q, p) - c^T \nabla_q H(q, p) = 0, \forall q, p$. Luego, si (q_{n+1}, p_{n+1}) denota la solución de avance por cualquiera de los métodos (3.27), (3.28), (3.29), es directo que $I(q_{n+1}, p_{n+1}) = b^T q_{n+1} + c^T p_{n+1} = b^T q_n + c^T p_n = I(q_n, p_n), n \geq 0$. \square

Proposición 3.4.6 *Los métodos SE1, SE2 y SV (3.27)-(3.29) preservan las integrales primeras cuadráticas de la forma $I(q, p) = p^T (Cq + c)$, $C \in \mathbb{R}^{m \times m}, c \in \mathbb{R}^m$, que posea el sistema hamiltoniano (3.26).*

Demostración. Si $I(q, p) = p^T (Cq + c)$ es una integral primera de (3.26), entonces

$$\begin{aligned} 0 &= (p^T C, (Cq + c)^T) \begin{pmatrix} \nabla_p H(q, p) \\ -\nabla_q H(q, p) \end{pmatrix} \\ &= p^T C \nabla_p H(q, p) - (Cq + c)^T \nabla_q H(q, p). \end{aligned} \tag{3.33}$$

Para SE1:

$$\begin{aligned} p_{n+1}^T (Cq_{n+1} + c) &= p_{n+1}^T ((Cq_n + c) + hC \nabla_p H(q_n, p_{n+1})) \\ &= p_{n+1}^T (Cq_n + c) + hp_{n+1}^T C \nabla_p H(q_n, p_{n+1}) \\ &= (p_n^T - h \nabla_q H(q_n, p_{n+1})^T) (Cq_n + c) + hp_{n+1}^T C \nabla_p H(q_n, p_{n+1}) \\ &= p_n^T (Cq_n + c) + h[p_{n+1}^T C \nabla_p H(q_n, p_{n+1}) - \nabla_q H(q_n, p_{n+1}) (Cq_n + c)]. \end{aligned}$$

Por (3.33) llegamos a que $I(q_{n+1}, p_{n+1}) = p_{n+1}^T (Cq_{n+1} + c) = p_n^T (Cq_n + c) = I(q_n, p_n), n \geq 0$. Para SE2 se comprueba de forma análoga dicha propiedad. Finalmente, SV cumple la propiedad de conservación como consecuencia de la Nota 3.4.1 (3). \square

Nota 3.4.3 La clase de invariantes cuadráticos $I(q, p) = p^T (Cq + c)$ es relevante. En particular, las componentes del momento angular total (2.7) en un sistema de N cuerpos obedecen a dicha expresión, y en particular dicho momento será preservado por los métodos SE1, SE2 y SV (3.27)-(3.29)

$$A = \sum_{i=1}^N q^{(i)} \times p^{(i)}, \quad \text{con} \quad q^{(i)} = (q_j^{(i)})_{j=1}^3, \quad p^{(i)} = (p_j^{(i)})_{j=1}^3$$

y $A = (A_1, A_2, A_3)^T$, con

$$A_1 = \sum_{i=1}^N (q_2^{(i)} p_3^{(i)} - q_3^{(i)} p_2^{(i)}), \quad A_2 = \sum_{i=1}^N (q_3^{(i)} p_1^{(i)} - q_1^{(i)} p_3^{(i)}), \quad A_3 = \sum_{i=1}^N (q_1^{(i)} p_2^{(i)} - q_2^{(i)} p_1^{(i)}).$$

Proposición 3.4.7 *Los métodos SE1, SE2 y SV (3.27)-(3.29) aplicados al sistema hamiltoniano (3.26) son simplécticos y, por tanto, preservan el volumen.*

Demostración. Denotamos (q_1, p_1) como la solución de avance con paso h de un método

de un paso ϕ_h partiendo de (q, p) . Entonces $\phi'_h(q, p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial q} & \frac{\partial q_1}{\partial p} \\ \frac{\partial p_1}{\partial q} & \frac{\partial p_1}{\partial p} \end{pmatrix}$ y

$$\begin{aligned} \phi'_h(q, p)^T J \phi'_h(q, p) &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial q_1}{\partial q}\right)^T \left(\frac{\partial p_1}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right)^T \left(\frac{\partial q_1}{\partial q}\right) & \left(\frac{\partial q_1}{\partial q}\right)^T \left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right)^T \left(\frac{\partial q_1}{\partial p}\right) \\ \left(\frac{\partial q_1}{\partial p}\right)^T \left(\frac{\partial p_1}{\partial q}\right) - \left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right)^T \left(\frac{\partial q_1}{\partial q}\right) & \left(\frac{\partial q_1}{\partial p}\right)^T \left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right) - \left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right)^T \left(\frac{\partial q_1}{\partial p}\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Veamos para cada método que $M_{11} = M_{22} = O$ y $M_{12} = -M_{21} = I$, teniendo en cuenta que $M_{21}^T = -M_{12}$.

Para SE1: $q_1 = q + h\nabla_p H(q, p_1)$, $p_1 = p - h\nabla_q H(q, p_1)$. Luego:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial q} &= I + hH_{pq} + hH_{pp} \frac{\partial p_1}{\partial q} \\ \frac{\partial q_1}{\partial p} &= hH_{pp} \frac{\partial p_1}{\partial p} \\ \frac{\partial p_1}{\partial q} &= -hH_{qq} - hH_{qp} \frac{\partial p_1}{\partial q} \Rightarrow \frac{\partial p_1}{\partial q} = -h(I + hH_{pq})^{-1} H_{qq} \\ \frac{\partial p_1}{\partial p} &= I - hH_{qp} \frac{\partial p_1}{\partial p} \Rightarrow \frac{\partial p_1}{\partial p} = (I + hH_{pq})^{-1}, \end{aligned}$$

donde $H_{qp} = H_{pq}$, H_{pp} y H_{qq} , dadas en (3.30) y (3.31), son simétricas y están evaluadas en (q, p_1) . Luego:

$$\left(\frac{\partial q_1}{\partial q}\right)^T \left(\frac{\partial p_1}{\partial q}\right) = [(I + H_{pq}) + h\left(\frac{\partial p_1}{\partial q}\right)^T H_{pp}]\left(\frac{\partial p_1}{\partial q}\right) = -hH_{qq} + h\left(\frac{\partial p_1}{\partial q}\right)^T H_{pp}\left(\frac{\partial p_1}{\partial q}\right)$$

es simétrica y por tanto $M_{11} = 0$. También $\left(\frac{\partial q_1}{\partial p}\right)^T \left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right) = h\left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right)^T H_{pp}\left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right)$ es simétrica, y entonces $M_{22} = 0$. Finalmente

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial q_1}{\partial q}\right)^T \left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right) &= [(I + hH_{pq}) + h\left(\frac{\partial p_1}{\partial q}\right)^T H_{pp}]\left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right) \\ &= I + h\left(\frac{\partial p_1}{\partial q}\right)^T H_{pp}\left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right), \quad y \\ \left(\frac{\partial p_1}{\partial q}\right)^T \left(\frac{\partial q_1}{\partial p}\right) &= \left(\frac{\partial p_1}{\partial q}\right)^T (hH_{pp})\left(\frac{\partial p_1}{\partial p}\right). \end{aligned}$$

Luego, $M_{12} = I$. Por tanto, SE1 es simpléctico.

La simplecticidad de SE2 se comprueba de forma análoga a la de SE1. Como consecuencia de la Proposición 3.3.1 y de la Nota 3.4.1 (3) sigue la simplecticidad de SV. \square

Nota 3.4.4 Finalizaremos esta sección con unas breves indicaciones acerca de la conservación del hamiltoniano H por parte de los integradores simplécticos. Aunque el hamiltoniano no es exactamente preservado por un método simpléctico, el error en el hamiltoniano se comporta como h^p , siendo p el orden del método, en intervalos temporales exponencialmente largos. Esta propiedad no se verifica para métodos no simplécticos. Más concretamente, tenemos el siguiente teorema [2, p. 367].

Teorema 3.4.1 *Sea un sistema hamiltoniano, con $H : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$ analítica en Ω abierto y ϕ_h un método de un paso de orden p simpléctico, con tamaño de paso $h > 0$. Dado $x_0 \in \Omega$, si la solución numérica permanece en un conjunto compacto $K \subset \Omega$, entonces existe $\gamma > 0$ tal que*

$$H(x_n) = H(x_0) + O(h^p), \quad \text{para } nh \leq e^{\gamma/(2h)}, \quad (3.34)$$

siendo $x_n = \phi_h^n(x_0)$, $n \geq 0$.

Nota 3.4.5 La prueba de este resultado requiere herramientas que exceden los propósitos de esta memoria [2, Cap. IX]. En general, para métodos no simplécticos se observará un crecimiento lineal respecto de la longitud del intervalo de integración del error en el hamiltoniano. En efecto, para un método de orden p arbitrario tendremos $x_{n+1} - \varphi_h(x_n) = O(h^{p+1})$, $h \rightarrow 0$, siendo φ_h el flujo del sistema hamiltoniano, con $H(\varphi_h(x_n)) = H(x_n)$. Luego, $H(x_{n+1}) - H(x_n) = H(x_{n+1}) - H(\varphi_h(x_n)) = O(h^{p+1})$, $n \geq 0$, y por tanto, para $h \rightarrow 0$

$$H(x_n) - H(x_0) = \sum_{j=0}^{n-1} (H(x_{j+1}) - H(x_j)) = O(nh^{p+1}) = O((t_n - t_0)h^p), \quad n \geq 0. \quad (3.35)$$

Ilustramos las propiedades (3.34) y (3.35) de conservación del hamiltoniano en la sección final de ilustración numérica.

3.5. Ilustración numérica

Finalizamos esta memoria comparando los métodos de Euler explícito (3.3), Runge (3.5), Euler simpléctico SE1 (3.27) y Störmer-Verlet (3.29) aplicados a paso fijo a cuatro sistemas hamiltonianos. Nuestro objetivo es estudiar la conservación del hamiltoniano $H(t) - H(0) \equiv H(x(t)) - H(x(0))$ por parte de los métodos numéricos en intervalos de tiempo suficientemente amplios.

3.5.1. La ecuación del péndulo en el plano

$$\begin{cases} \dot{q} = p, & q(0) = 0 \\ \dot{p} = -\sin q, & p(0) = 1 \end{cases}, \quad t \in [0, 200], \quad (3.36)$$

con hamiltoniano $H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 - \cos q$. Aplicando los métodos numéricos arriba citados con tamaño de paso $h = \frac{200}{2(\sqrt{10})^{j+3}}$, $j = 1, \dots, 7$, medimos el error en el hamiltoniano en los tiempos correspondientes a cada partición temporal. En la Figura 3.3 se observa que cada método preserva el hamiltoniano dentro de su orden de consistencia respectivo, esto es, $\max_{t \in [0, 200]} |H(t) - H(0)| = O(h^p)$, $h \rightarrow 0$, con $p = 1, 2$, según cada método. A efectos orientativos, en esta figura se han incluido dos rectas con trazo discontinuo con pendientes 1 y 2 a efectos de visualizar el orden de conservación del hamiltoniano como potencia de h para cada método.

En la Figura 3.4 se aprecia la evolución del error en el hamiltoniano para los cuatro métodos con $h = \frac{200}{2 \cdot 10^5}$. Para los métodos simplécticos se observa la propiedad (3.34), mientras que para los métodos no simplécticos se observa un crecimiento lineal del error con la longitud del intervalo de integración (véase (3.35)).

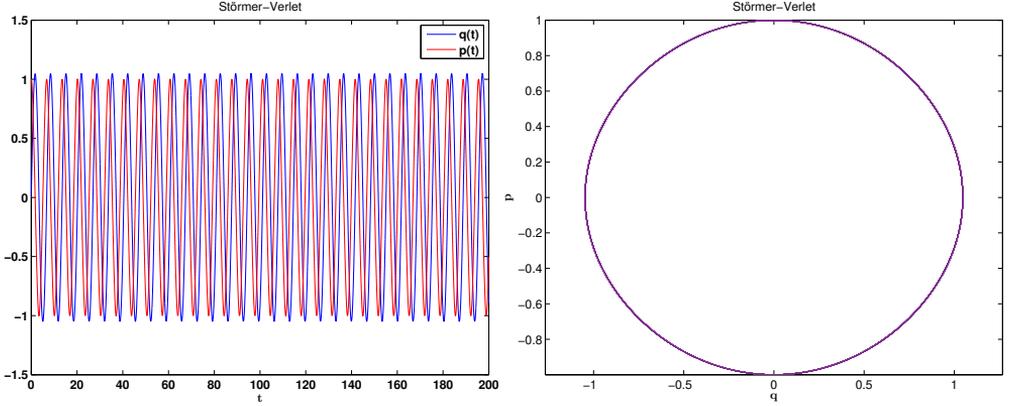


Figura 3.2: Componentes de la solución numérica (izquierda) y órbita numérica (derecha) del método de Störmer-Verlet en la ecuación del péndulo (3.36) con $h = 10^{-3}$.

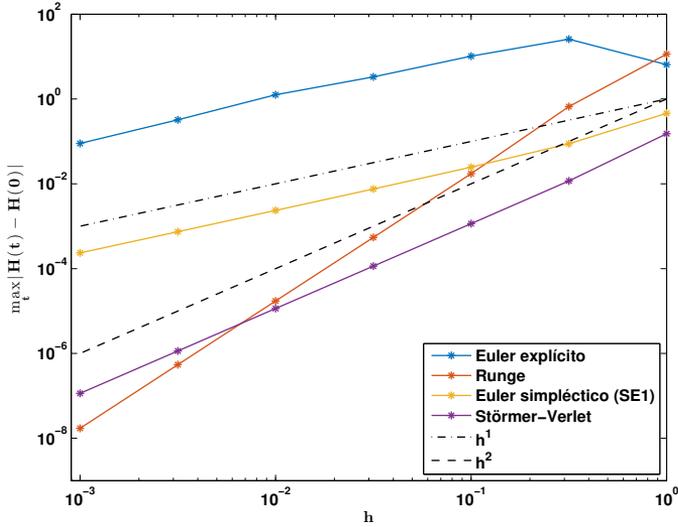


Figura 3.3: Máximo error en el hamiltoniano en función de h en la ecuación del péndulo (3.36).

3.5.2. Problema de Kepler para un sistema de dos cuerpos

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = -\frac{q_1}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}} & q_1(0) = 1 - \varepsilon, & \dot{q}_1(0) = 0, \\ \ddot{q}_2 = -\frac{q_2}{(q_1^2 + q_2^2)^{3/2}} & q_2(0) = 0, & \dot{q}_2(0) = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}, \end{cases} \quad t \in [0, 200], \quad (3.37)$$

con excentricidad $\varepsilon = 0.7$ y hamiltoniano $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}$, $p_i = \dot{q}_i, i = 1, 2$.

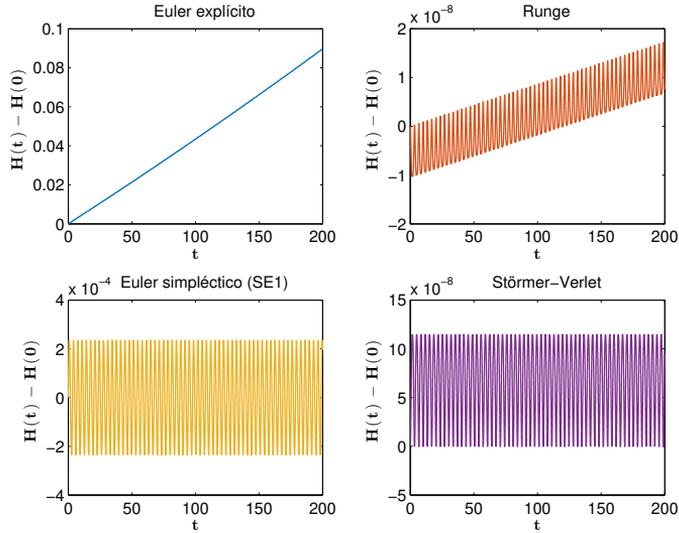


Figura 3.4: Error en el hamiltoniano para $t \in [0, 200]$, con $h = 10^{-3}$, en la ecuación del péndulo (3.36).

Nuevamente aplicamos los cuatro métodos citados al inicio de la sección con tamaño de paso fijo $h = \frac{200}{2(\sqrt{10})^{3+j}}$, $j = 1, \dots, 7$. Análogas consideraciones a las realizadas para la ecuación del péndulo (3.36) son válidas en este nuevo ejemplo respecto a la conservación del hamiltoniano.

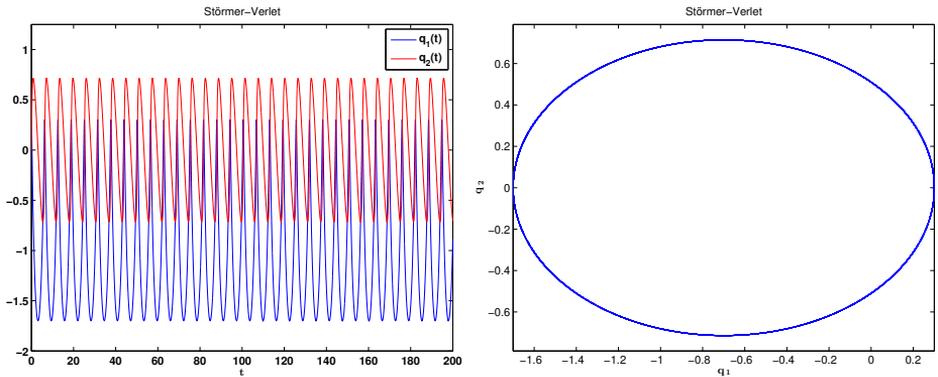


Figura 3.5: Componentes de la solución numérica (izquierda) y órbita numérica (derecha) del método de Störmer-Verlet en las ecuaciones del problema de Kepler (3.37) con $h = 10^{-3}$.

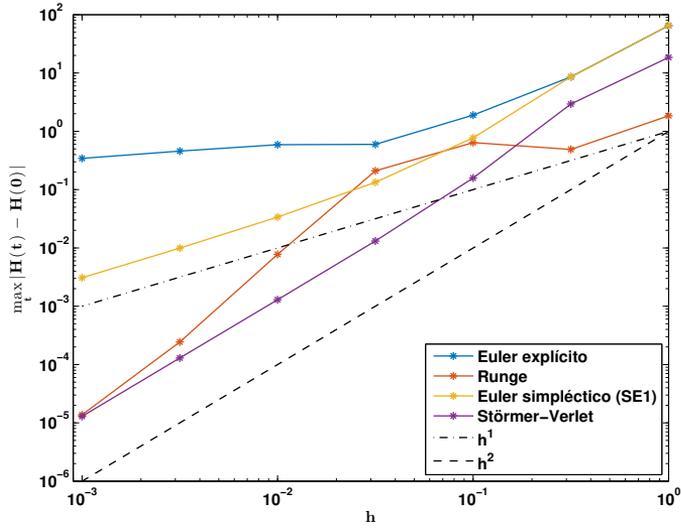


Figura 3.6: Máximo error en el hamiltoniano en función de h en las ecuaciones (3.37).

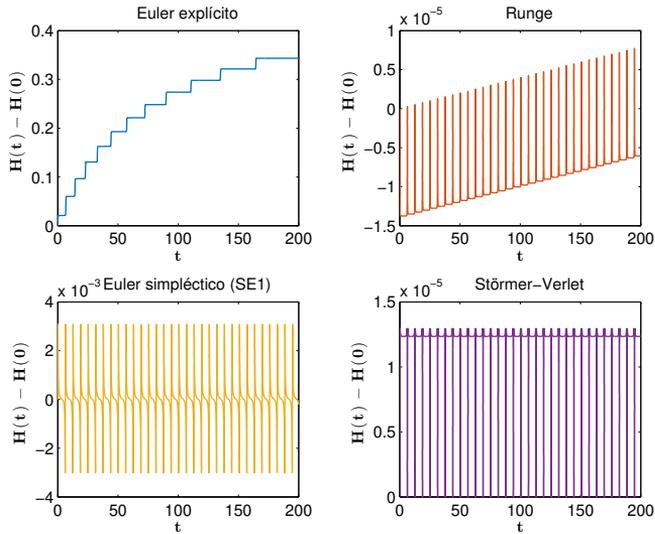


Figura 3.7: Error en el hamiltoniano para $t \in [0, 200]$, con $h = 10^{-3}$, en las ecuaciones (3.37).

3.5.3. Problema restringido de tres cuerpos

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = q_1 + 2\dot{q}_2 + U_{q_1} \\ \ddot{q}_2 = q_2 - 2\dot{q}_1 + U_{q_2} \end{cases}$$

con $U(q_1, q_2) = \frac{\mu'}{r_1^{1/2}} + \frac{\mu}{r_2^{1/2}}$, $r_1 := (q_1 + \mu)^2 + q_2^2$, $r_2 := (q_1 - \mu')^2 + q_2^2$, $\mu, \mu' \in \mathbb{R}$ constantes. Introduciendo los momentos $p_1 := \dot{q}_1 - q_2$, $p_2 := \dot{q}_2 + q_1$, se obtiene el sistema hamiltoniano.

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = q_2 + p_1 \\ \dot{q}_2 = -q_1 + p_2 \\ \dot{p}_1 = p_2 + U_{q_1} \\ \dot{p}_2 = -p_1 + U_{q_2} \end{cases} \quad (3.38)$$

con hamiltoniano $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + (q_2 p_1 - q_1 p_2) - U(q_1, q_2)$. Para este problema tomamos los parámetros y valores iniciales de [4, p. 129-130]:

$$\begin{array}{ll} \mu = 0'012277471 & \mu' = 1 - \mu \\ q_1(0) = 0'994 & \dot{q}_1(0) = 0 \\ q_2(0) = 0 & \dot{q}_2(0) = -2'00158510637908252240537862224 \end{array}$$

que producen una solución periódica con periodo $T = 17'0652165601579625588917206249$. Integramos la ecuación (3.38) a paso fijo en el intervalo $[0, 2T]$ para ocho valores de $h = (2T)/N$, con $N = 2.5 \cdot 10^{j+3}$ y 10^{j+4} , para $j = 1, 2, 3, 4$. En las Figuras 3.9 y 3.10 se muestran las propiedades de conservación del hamiltoniano para cada método.

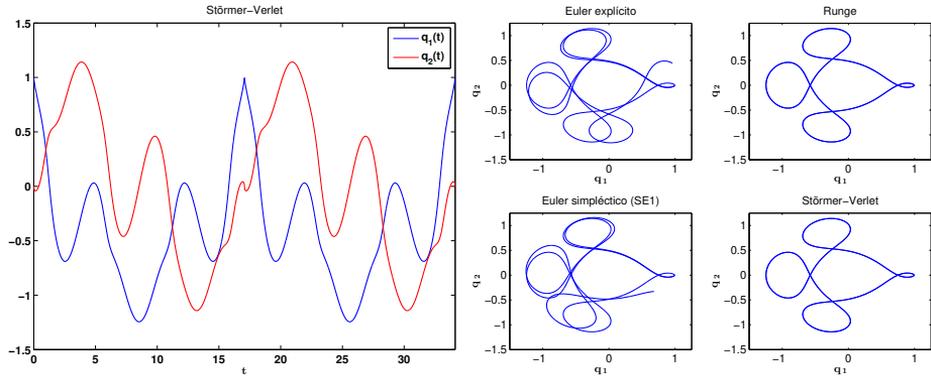


Figura 3.8: Componentes de la solución numérica del método Störmer-Verlet en las ecuaciones (3.38) (izquierda) y órbita numérica de cada método con $h = (2T)/10^8$ (derecha).

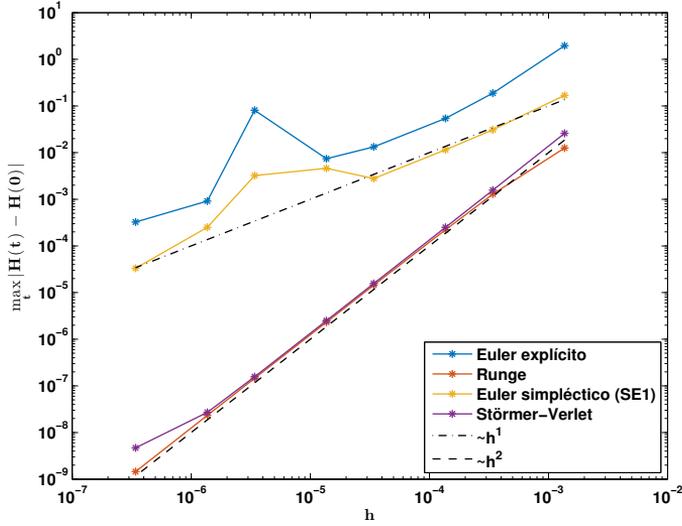


Figura 3.9: Máximo error en el hamiltoniano en función de h , cuando $h = (2T)/N$, con $N = 2.5 \cdot 10^{j+3}$ y 10^{j+4} , $j = 1, 2, 3, 4$ en las ecuaciones (3.38).

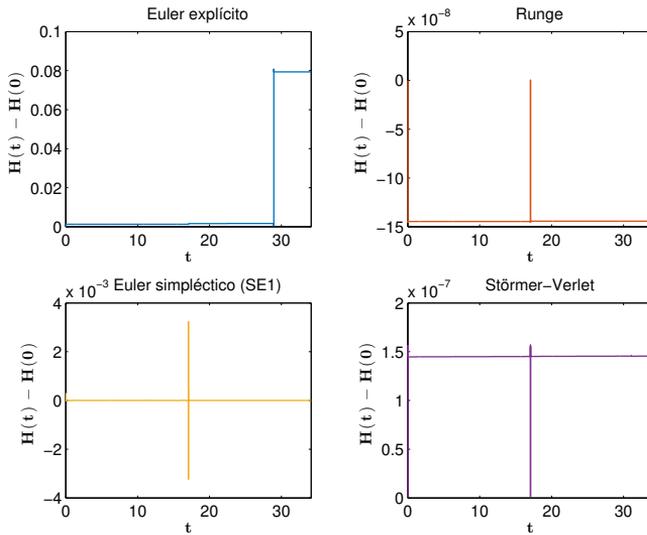


Figura 3.10: Error en el hamiltoniano en el intervalo $[0, 2T]$ para cada método con $h = (2T)/10^7$, en las ecuaciones (3.38).

3.5.4. Sistema solar exterior

Consideramos el sistema de 6 cuerpos formados por Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno, Plutón y el Sol (al que consideramos como un cuerpo que aglutina a los cuerpos del sistema interior). Se obtiene un sistema hamiltoniano con

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^5 \frac{1}{m_i} p_i^T p_i - G \sum_{i=1}^5 \sum_{j=0}^{i-1} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|}, \quad q_i, p_i \in \mathbb{R}^3, \quad 0 \leq i \leq 5. \quad (3.39)$$

Las masas m_i son masas relativas al Sol, las distancias se miden en unidades astronómicas y el tiempo se mide en días terrestres, mientras que G denota la constante de gravitación universal. De [2, p. 13-14] tomamos las masas relativas y posiciones y velocidades iniciales para cada cuerpo (que se corresponden a datos astronómicos reales con fecha 5 de septiembre de 1994 a las 0:00 horas).

Integramos el sistema hamiltoniano asociado a (3.39) a paso fijo en el intervalo de tiempo $[0, 200750]$ (aproximadamente 550 años), con un tamaño de paso $h = 365$ días. La órbita numérica para cada método se muestra en las Figuras 3.12 y 3.13. En la Figura 3.11 se muestra la evolución del error en el hamiltoniano a lo largo del tiempo.

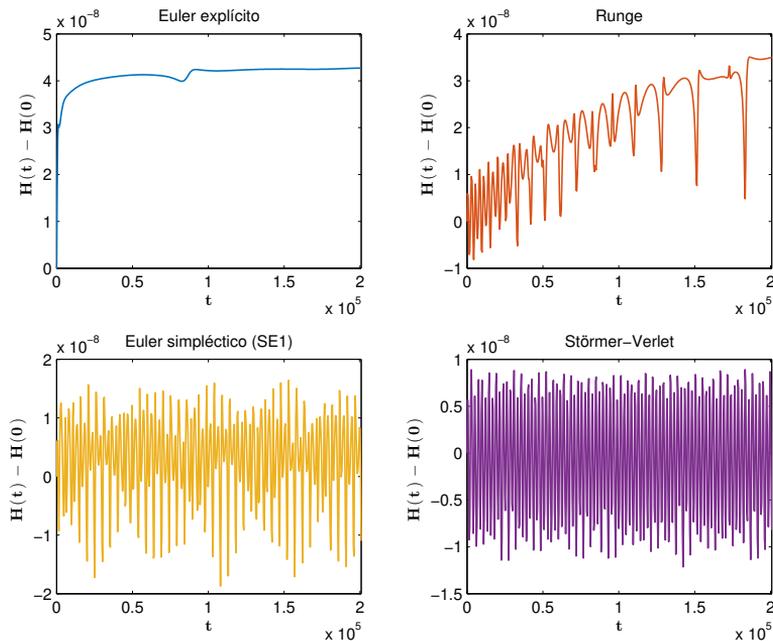


Figura 3.11: Error en el hamiltoniano para $t \in [0, 200750]$, con $h = 365$, del sistema solar exterior (3.39).

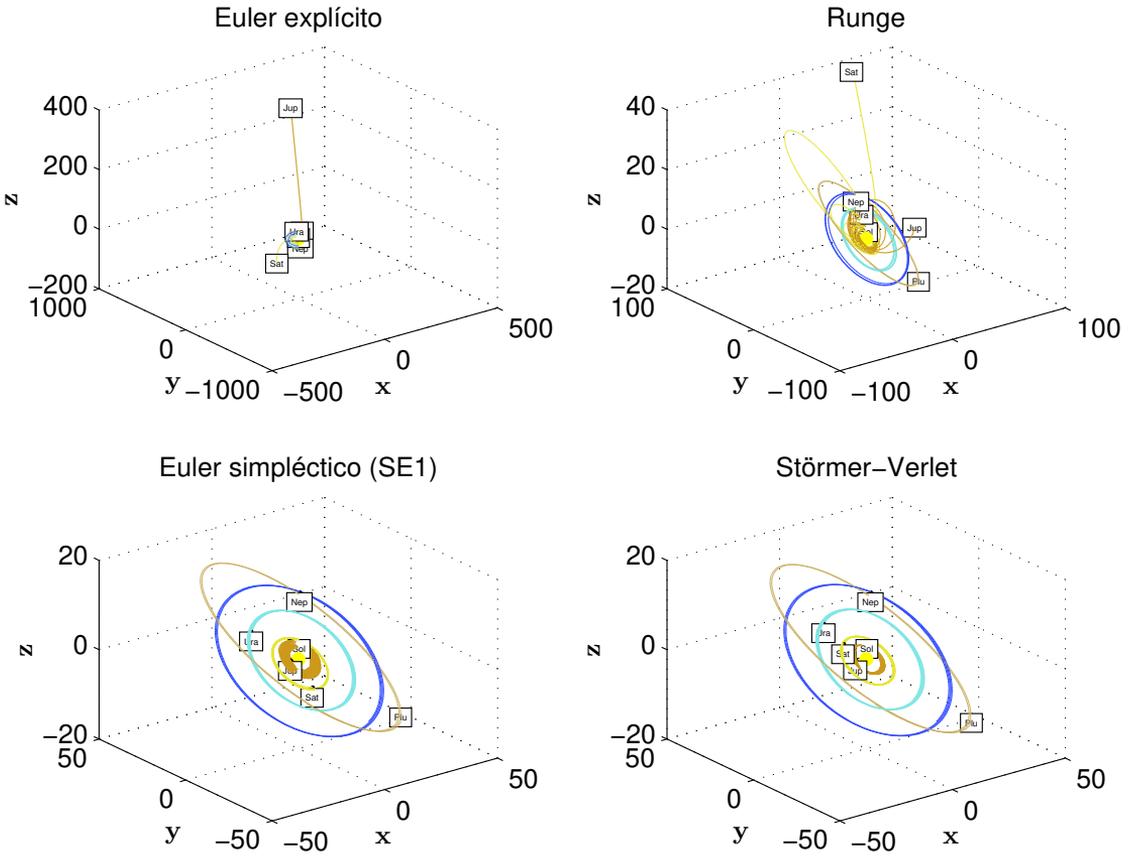


Figura 3.12: Simulación numérica del sistema solar exterior (3.39) al cabo de $T = 200750$ días, con $h = 365$ días.

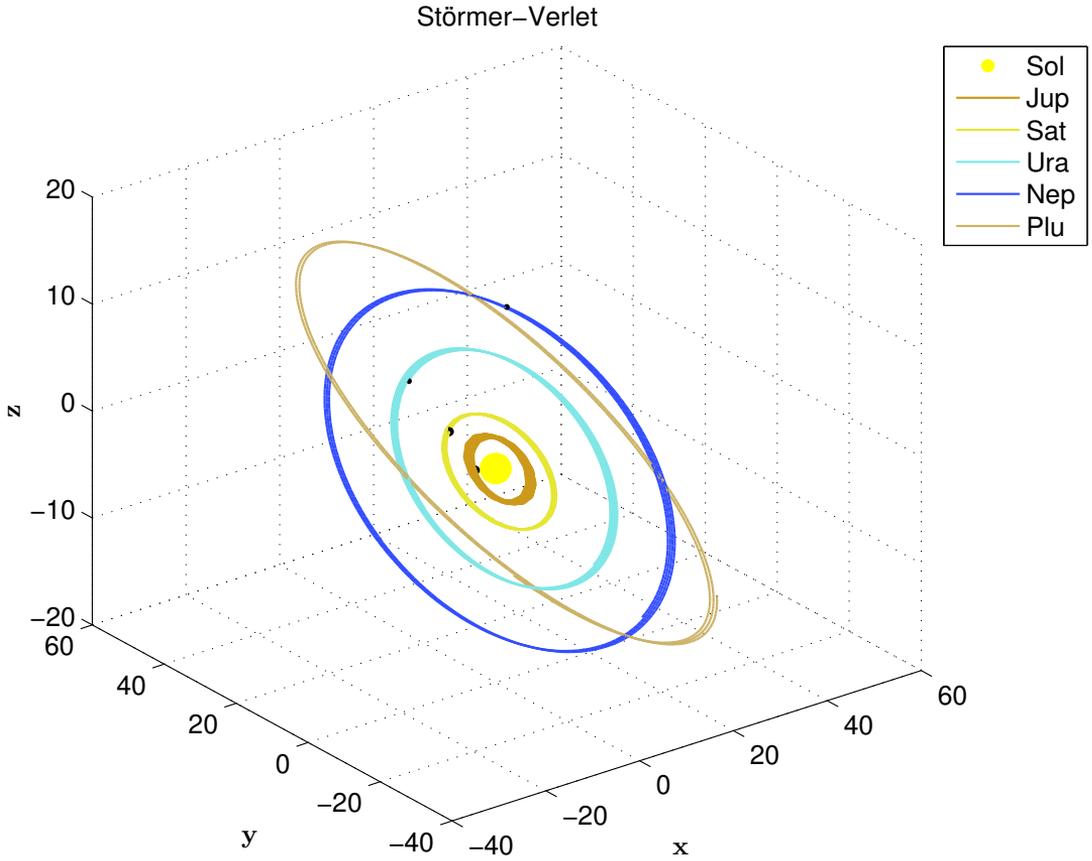


Figura 3.13: Simulación numérica con el método de Störmer-Verlet del sistema solar exterior (3.39) al cabo de $T = 200750$ días, con $h = 365$ días.

Bibliografía

- [1] L. Barreira, C. Valls, *Ordinary differential equations. Qualitative theory*, American Mathematical Society (2012).
- [2] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner, *Geometric numerical integration*, Springer-Verlag (2006).
- [3] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner, *Geometric numerical integration illustrated by the Störmer-Verlet method*, Acta Numerica 12, 399-450 (2003).
- [4] E. Hairer, S.P. Nørsett, G. Wanner, *Solving ordinary differential equations I, Nonstiff problems*, Springer-Verlag (2008).
- [5] K. Meyer, D. Offin *Introduction to hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*, Springer (2017).
- [6] J. Milnor, *Morse theory*, Princeton University Press (1963).
- [7] J. Sabina de Lis, *Análisis no lineal*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna (2005).
- [8] J.M. Sanz Serna, M.P. Calvo, *Numerical hamiltonian problems*, Chapman & Hall (1994).
- [9] D.S. Smith, *Hopf's Bifurcation Theorem and the Center Theorem of Liapunov with Resonance Cases*, J. Math. Anal. Appl. 63, 354-370 (1978).
- [10] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer-Verlag (1996).

Geometric numerical integration with application to the

N-body problem.



Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Esther Padilla Expósito

Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas

Universidad de La Laguna

alu0100889666@ull.edu.es

Abstract

In the present manuscript we study some numerical method that preserve some geometric properties of the solution of systems of ordinary differential equation, with application to the N-body problem. First, we will see the kind of transformations that preserve the Hamiltonian, volume and orientation, of a Hamiltonian system, as well as the stability of its equilibria. Next, we will analyze the N-body problem, by studying the orbits of the Kepler problem and the existence of periodic solutions of the restricted three body problem. Later, we will introduce the symplectic Euler and Störmer-Verlet method for autonomous systems, particularly for hamiltonian systems, and we will study some properties, such as symmetry, reversibility and symplecticity. Finally some examples are presented comparing the symplectic Euler and Störmer-Verlet methods with other non-symplectic classical methods, like the explicit Euler and Runge methods, according to the conservation of the Hamiltonian in sufficiently large time intervals.

1. Hamiltonian Systems

Definition 1 Let $H : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$ be a function in Ω , an open subset of \mathbb{R}^{2m} , and $x = (q, p) \in \Omega$, where $q = (q_1, \dots, q_m)$ and $p = (p_1, \dots, p_m)$. The $2m$ -dimensional autonomous differential equation

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p_j}(q, p) \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q, p) \end{cases} \quad j = 1, \dots, m$$

is called a Hamiltonian system.

The scalar differentiable function $H(q, p)$ is called the Hamiltonian or the total energy and is a first integral.

Definition 2 A differentiable transformation $\varphi : V \subseteq \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ in an open set $V \subseteq \mathbb{R}^{2m}$, is said to be symplectic if $\varphi'(x)^T J \varphi'(x) = J$ for every x in V , where $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ and I denotes the identity matrix of order m .

We consider $\varphi_t : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ the flow of a Hamiltonian system in time t .

Theorem 1 (Poincaré) Let H be a Hamiltonian of class C^2 in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{2m}$. For each fixed t , the map φ_t is a symplectic transformation.

Corollary 1 (Liouville Theorem) Let H be a Hamiltonian of class C^2 . For each sufficiently small fixed $t \geq 0$, φ_t preserves volume and orientation.

2. N-Body Problem

Consider N masses $m_i > 0$, $i = 1, \dots, N$ in an inertial reference system in \mathbb{R}^3 moving under the influence of mutual gravitational attraction, where each mass i have position vector q_i and $p_i = m_i \dot{q}_i$ is the momentum. We can describe the motion of the N-body problem as the Hamiltonian system

$$\dot{q}_i = \frac{p_i}{m_i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{Gm_i m_j (q_j - q_i)}{\|q_i - q_j\|^3} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

where the Hamiltonian is

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|\dot{q}_i\|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{Gm_i m_j}{\|q_i - q_j\|}$$

For $N > 3$ we can not calculate the exact solution of the system, however for $N = 2$ we can obtain periodic solutions and for the

restricted 3-body problem we can ensure by the Lyapunov Center Theorem the existence of periodic solutions of small amplitude.

3. The Störmer-Verlet method and the Geometric Numerical Integration

The Störmer-Verlet method SV applied to a Hamiltonian system for $n \geq 0$ is

$$\begin{cases} p_{n+\frac{1}{2}} = p_n - \frac{h}{2} \nabla_q H(q_n, p_{n+\frac{1}{2}}) \\ q_{n+1} = q_n + \frac{h}{2} (\nabla_p H(q_n, p_{n+\frac{1}{2}}) + \nabla_p H(q_{n+1}, p_{n+\frac{1}{2}})) \\ p_{n+1} = p_{n+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2} \nabla_q H(q_{n+1}, p_{n+\frac{1}{2}}) \end{cases}$$

Proposition 1 The Störmer-Verlet method applied to a Hamiltonian system is symplectic, and hence volume preserving.

Proposition 2 The Störmer-Verlet method preserves linear first integrals and quadratic first integrals of the form $I(q, p) = p^T (Cq + c)$, $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $c \in \mathbb{R}^m$.

We apply the Störmer-Verlet, the symplectic Euler, the explicit Euler and Runge methods to the system which describes the motion of the five outer planets relative to the sun and they are compared considering the conservation of the Hamiltonian.

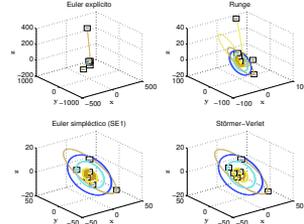


Figure 1: Numerical simulation of the outer solar system after $T = 200750$ days, with $h = 365$ days.

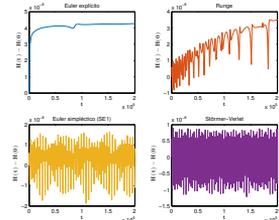


Figure 2: Hamiltonian error for the outer solar system for $t \in [0, 200750]$, with $h = 365$.

References

- [1] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner, *Geometric numerical integration*, Springer-Verlag (2006).
- [2] K. Meyer, D. Offin *Introduction to hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*, Springer (2017).
- [3] J. Sabina de Lis, *Análisis no lineal*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna (2005).