Curso 1996/97
CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS

LOURDES RODRÍGUEZ MESA

La transformación integral y la convolución de Hankel de funciones y distribuciones

Director
JORGE JUAN BETANCOR PÉREZ

SERVICIO DE PUBLICACIONES
UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

SOPORTES AUDIOVISUALES E INFORMÁTICOS
Serie Tesis Doctorales

La presente Memoria, para optar al grado de Doctora en Ciencias Matemáticas, ha sido realizada en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna, bajo de la dirección del Dr. D. Jorge J. Betancor Pérez.

A mis padres

¡Un millón de gracias!... En primer lugar, a Jorge Betancor, porque tus buenas ideas y apoyo constante han sido fundamentales en la realización de esta Memoria; gracias porque has sido un director excepcional, con una capacidad de trabajo que siempre admiraré... y porque me has demostrado que el trabajo y el esfuerzo siempre tienen su recompensa, ¡gracias!...

También mi agradecimiento a Pepe Méndez, por todo aquel ánimo que me dio cuando apenas empezaba en el mundo de las Matemáticas... a Angel Montesdeoca, porque siempre ha estado dispuesto a "echar una mano" con el TEX y a todos los compañeros del Departamento de Análisis Matemático que hacen agradable la vida en él, y de una forma especial a Alicia, por ser una compañera de despacho genial.

Gracias también a mi familia a la que por un sinfín de razones tengo que decir: ¡Gracias!, y a ti Pablo, gracias por estar a mi lado en todo momento.

Contenido

Prólogo

La transformación integral de Hankel adopta en la literatura matemática diferentes formas. Dos de las más habituales son las que siguen

$$ {}_{\mu}(\phi)(y) = \int_0^\infty x^{2\mu+1}(xy)^{-\mu} J_\mu(xy)\phi(x)dx,\ y \in (0,\infty) \tag{1} $$

y

$$ h_\mu(\phi)(y) = \int_0^\infty \sqrt{xy} J_\mu(xy)\phi(x)dx,\ y \in (0,\infty). \tag{2} $$

Aquí J_μ representa a la función de Bessel de primera especie y de orden μ, siendo $\mu \geq -1/2$. La transformación ${}_{\mu}$ es a veces designada como transformación de Hankel-Schwartz (véase [48], [54], [55], [65], [66] y [67]), pues A.L. Schwartz obtuvo una fórmula de inversión para ${}_{\mu}$ ([65]), analizó la regularidad de la transformada ${}_{\mu}(\phi)$ de ϕ a partir de las propiedades de ϕ ([66]) y definió la convolución de Hankel de cierta clase de medidas de Borel sobre $(0,\infty)$ ([67]). Por otra parte la transformación h_μ fue la escogida por A.H. Zemanian ([79], [80] y [81]) para definir la transformación de Hankel de distribuciones pues era en algunos aspectos la que más se asemejaba a la transformación integral de Fourier. En cualquier caso la relación existente entre h_μ y ${}_{\mu}$ (obsérvese que, formalmente, $h_\mu(\phi)(y) = y^{\mu+1/2}{}_{\mu}(x^{-\mu-1/2}\phi)(y),\ y \in (0,\infty)$) hace que ambas formas de la transformación de Hankel sean equivalentes.

Esta Memoria, que consta de dos partes, se dedica al estudio de diferentes aspectos en relación con la transformación de Hankel. En la primera parte adoptamos para la transformación de Hankel la forma (1) y en la segunda la forma (2). Aunque, como es obvio en virtud de la relación anteriormente citada, sin dificultad los resultados podrían haber sido enunciados para una única forma, hemos preferido adoptar para la transformación de Hankel la definición más usual en la literatura matemática en relación con los problemas tratados en cada parte.

Pasamos a continuación a comentar el contenido de nuestra Memoria indicando los antecedentes que motivaron la consideración de cada problema.

En la primera parte incluimos únicamente el Capítulo 1.

Para cada $1 \leq p \leq \infty$, representamos por $L_{p,\mu}$ el espacio constituido por aquellas funciones f medibles sobre $(0, \infty)$ tales que

$$||f||_{p,\mu} = \left\{ \int_0^\infty |f(x)| x^{2\mu+1} dx \right\}^{1/p} < \infty, \text{ cuando } 1 \leq p < \infty$$

o

$$||f||_{\infty,\mu} = ||f||_\infty = sup\ esen\ |f| < \infty, \text{ cuando } p = \infty,$$

donde, como es usual, por *sup esen* significamos el supremo esencial con respecto a la medida de Lebesgue sobre $(0, \infty)$.

C.S. Herz (Teorema 3, [41]) probó que la transformación $_\mu$ de Hankel puede ser extendida como un operador acotado de $L_{p,\mu}$ en $L_{p',\mu}$, siempre que $1 \leq p \leq 2$ y siendo p' el exponente conjugado de p, esto es, $p' = \dfrac{p}{p-1}$, cuando $1 < p < \infty$, y $p' = \infty$, cuando $p = 1$.

Definimos, para cada $T \in (0, \infty)$, la integral parcial de Hankel $S_T(f, \mu; \cdot)$ de $f \in L_{p,\mu}$, $1 \leq p \leq 2$, por

$$S_T(f, \mu; x) = \int_0^T y^{2\mu+1} (xy)^{-\mu} J_\mu(xy) h_\mu(f)(y) dy, \ x \in (0, \infty).$$

En el Teorema 5 [41] se estableció que si $f \in L_{p,\mu}$, con $\dfrac{4(\mu+1)}{2\mu+3} < p \leq 2$, entonces $||S_T(f, \mu; \cdot) - f||_{p,\mu} \longrightarrow 0$, cuando $T \to \infty$. Además, Y. Kanjin (Corolario 2, [44]) probó que, bajo las hipótesis anteriores, $S_T(f,\mu;x) \longrightarrow f(x)$, cuando $T \to \infty$, para casi todo $x \in (0,\infty)$.

I.I. Hirschman [42] y D.T. Haimo [39] investigaron la convolución para la transformación ${}_\mu$ de Hankel sobre los espacios $L_{p,\mu}$. Concretamente, si f y $g \in L_{1,\mu}$ se define la convolución $f\#g$ de f y g como sigue

$$(f\#g)(x) = \int_0^\infty f(y)(\tau_x g)(y)d\gamma(y),\ x \in (0,\infty),$$

siendo $d\gamma(y) = \dfrac{y^{2\mu+1}dy}{2^\mu\Gamma(\mu+1)}$ y donde el operador de traslación τ_x, $x \in (0,\infty)$, viene dado por

$$(\tau_x g)(y) = \int_0^\infty g(z)D(x,y,z)d\gamma(z),\ x,y \in (0,\infty),$$

siendo $D(x,y,z) = \dfrac{2^{3\mu-1}\Gamma(\mu+1)^2}{\Gamma(\mu+1/2)\sqrt{\pi}}(xyz)^{-2\mu}A(x,y,z)^{2\mu-1}$, $x,y,z \in (0,\infty)$, donde $A(x,y,z)$ es el área del triángulo de aristas x,y,z, si el triángulo existe, y $A(x,y,z)=0$, en otro caso.

Haciendo uso de la convolución $\#$ podemos extender la definición de S_T a funciones $f \in L_{p,\mu}$, con $p>2$. Definimos, para cada $T \in (0,\infty)$, la función $\varphi_T(x) = T^{2(\mu+1)}(xT)^{-\mu-1}J_{\mu+1}(xT)$, $x,T \in (0,\infty)$. Puede probarse que si $1 \le p \le 2$ y $f \in L_{p,\mu}$ entonces

$$S_T(f,\mu;x) = (\varphi_T\#f)(x),\ \text{para cada } T \in (0,\infty) \text{ y casi todo } x \in (0,\infty).$$

Definiendo $S_T(f,\mu;\cdot) = \varphi_T\#f$, $f \in L_{p,\mu}$, $2 < p < \dfrac{4(\mu+1)}{2\mu+1}$ y $T \in (0,\infty)$, L. Colzani, A. Crespi, G. Travaglini y M. Vignati (Corolario 3.2, [24]) probaron que $S_T(f,\mu;x) \longrightarrow f(x)$, cuando $T \to \infty$, para casi todo $x \in (0,\infty)$, cuando $f \in L_{p,\mu}$ y $\dfrac{4(\mu+1)}{2\mu+3} < p < \dfrac{4(\mu+1)}{2\mu+1}$.

Recientemente, D.S. Lubinski y F. Móricz [49] y C.P. Chen y C.C. Lin [23] han dado condiciones necesarias y suficientes para que las integrales parciales de Fourier converjan a la función original en casi todo $I\!R$. Asimismo, resulta de interés la nueva prueba de T.G. Genchev [32] de la fórmula de inversión para la transformación de Fourier.

Motivados por estos trabajos previos abordamos en el Capítulo 1 el problema de la convergencia puntual de las integrales parciales de Hankel, obteniendo condiciones necesarias y suficientes para que estas integrales permitan recuperar la función original. Completamos, en algunos sentidos que son precisados en el texto, los resultados obtenidos por los autores anteriormente citados. Resulta fundamental que, como es bien conocido, (Proposición 6(b), [70]), las medias de Böchner-Riesz asociadas a una función f convergen a f en casi todo $(0, \infty)$, para cada $f \in L_{p,\mu}$, cuando $\dfrac{4\mu+2}{2\mu+3} < p \leq 2$.

También en el primer capítulo de esta Memoria introducimos nuevos espacios de funciones que denotamos espacios de Lipschitz-Hankel y de Besov-Hankel. Estos espacios se definen como los espacios de Lipschitz y de Besov sustituyendo la traslación usual por la traslación de Hankel. Inspirados en trabajos de D.V. Giang y F. Móricz ([33], [34] y [35]) caracterizamos los espacios introducidos mediante las integrales parciales de Hankel y las medias de Böchner-Riesz.

Finalizamos el capítulo probando que si una función f está en un adecuado espacio de Lipschitz-Hankel entonces la transformada de Hankel ${}_{\mu}f$ de f presenta ciertas propiedades de integrabilidad. Nuestros resultados suponen, por ejemplo, una extensión a la transformación ${}_{\mu}$ de resultados clásicos (véase, entre otros, el Teorema 84 [75]) para la transformación integral de Fourier.

La segunda parte de esta Memoria que consta de tres capítulos se dedica al estudio de la transformación h_μ y la convolución de Hankel en diferentes espacios de funciones generalizadas.

El estudio de la transformación de Hankel distribucional fue comenzado por A.H. Zemanian, quien la definió sobre funciones generalizadas de lento crecimiento (el espacio $\mathcal{H}'_\mu$, [79]) y de rápido crecimiento (el espacio β'_μ, [80]).

Posteriormente han sido muchos los autores que han investigado transformaciones de tipo Hankel en espacios de distribuciones (véanse, por ejemplo, [2], [4], [26], [27], [29], [47], [48], [54] y [55]).

Se observa que los resultados obtenidos para la transformación h_μ de Hankel guardan un paralelismo con los clásicos relativos a la transformación integral de Fourier ([68]). Así los espacios $\mathcal{H}_\mu$ y β_μ de Zemanian corresponden a los espacios $\mathcal{S}$ y $\mathcal{D}(I\!R)$ presentes en la teoría de la transformación integral de Fourier.

En los últimos años J.J. Betancor e I. Marrero, profundizando en este paralelismo, en una serie de trabajos ([8], [9], [10], [11], [12] y [52]) han desarrollado una teoría para la convolución de Hankel distribucional, la cual había sido iniciada por J. de Sousa-Pinto [69] en 1985. Estos autores caracterizan el espacio $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ de operadores de convolución sobre $\mathcal{H}'_\mu$ que desempeña en esta teoría un papel similar al jugado por el espacio $\mathcal{O}'_c$ ([68]) de operadores de convolución sobre $\mathcal{S}'$.

Teniendo los trabajos anteriores como punto de partida nos planteamos en la segunda parte de esta Memoria algunas cuestiones no tratadas en relación con la convolución generalizada de Hankel.

M. Hasumi [40] en el año 1961 estudió la transformación de Fourier y la convolución usual sobre distribuciones de crecimiento exponencial. En el Capítulo 2 abordamos el problema correspondiente para la transformación h_μ y la convolución $\#$ de Hankel. Para la resolución de la cuestión resulta fundamental el conocimiento de la técnica empleada por S.J.L. van Eijndhoven y M.J. Kerkhof en [29] donde dan una prueba correcta para un resultado de R.S. Pathak [61].

El Capítulo 3 se dedica a las ecuaciones de convolución de Hankel en espacios de funciones generalizadas de crecimiento lento y exponencial. Introducimos el concepto de hipoelipticidad para los operadores de convolución de Hankel y aquélla es caracterizada a través del crecimiento de la transformada de Hankel de tales operadores.

Con el objetivo de unificar algunos aspectos de la teoría de las funciones generalizadas, P. Mikusinski y M.D. Taylor [57], inspirados en un trabajo de R.A. Struble [72], consiguen caracterizar los espacios $\mathcal{D}'$ de Schwartz [68], $\mathcal{K}(M_p)'$ de Gelfand y Shilov [31] y de las ultradistribuciones de Beurling [45] como conjuntos de operadores que conmutan con la convolución usual. En el Capítulo 4, último de esta Memoria, describimos los espacios $\mathcal{H}'_\mu$ y $\mathcal{H}'_{\mu,M}$ mediante cierta clase de operadores que conmutan con la convolución de Hankel. Previamente necesitamos analizar la convolución y la transformación de Hankel sobre el espacio $\mathcal{H}_{\mu,M}$ y su dual $\mathcal{H}'_{\mu,M}$ que será un espacio de distribuciones cuyo crecimiento es exponencial y restringido por la función $M \in C^2[0,\infty)$ y tal que $M(0) = M'(0) = 0$, $M'(\infty) = \infty$ y $M''(x) > 0$, para cada $x \in (0,\infty)$.

Parte I

Sobre las integrales parciales de Hankel, las medias de Böchner-Riesz y los espacios de Lipschitz y de Besov-Hankel.

Capítulo 1

Las integrales parciales de Hankel, las medias de Böchner-Riesz y los espacios de Lipschitz y de Besov-Hankel

Una de las formas más usuales en las que aparece la transformación integral de Hankel en la literatura matemática (véanse, por ejemplo, [2], [39], [42], [65], [66] y [68]) es la siguiente

$$_{\mu}(f)(y) = \int_0^\infty x^{2\mu+1}(xy)^{-\mu}J_\mu(xy)f(x)dx,$$

donde J_μ representa la función de Bessel de primera especie y orden μ. A lo largo de todo este capítulo supondremos que el parámetro μ es mayor que $-1/2$ salvo que otra cosa sea especificada.

Recordamos ahora la definición de algunos espacios de funciones importantes en las investigaciones realizadas sobre la transformación $_\mu$ y a los cuales también nosotros recurriremos en el estudio abordado en este capítulo.

Sea $1 \leq p < \infty$. Denotamos por $L_{p,\mu}$ el espacio constituido por las funciones f

medibles Lebesgue sobre $(0, \infty)$ tales que

$$||f||_{p,\mu} = \int_0^\infty |f(x)|^p x^{2\mu+1} dx < \infty.$$

Es bien conocido que $L_{p,\mu}$ normado por $||\cdot||_p$ es un espacio de Banach.

Como es habitual C_0 (C_0^∞) representa el espacio de las funciones continuas (regulares) que tienen soporte compacto contenido en $(0, \infty)$. El espacio C_0^∞ (por tanto C_0) es denso en $L_{p,\mu}$, $1 \leq p < \infty$.

Por L_∞ denotaremos el espacio de las funciones medibles Lebesgue esencialmente acotadas (respecto de la medida de Lebesgue) sobre $(0, \infty)$.

C.S. Herz [41] investigó el comportamiento de la transformación $_\mu$ de Hankel sobre los espacios $L_{p,\mu}$. Ya que la función $z^{-\mu}J_\mu(z)$ es acotada sobre $(0, \infty)$ no es difícil ver que $_\mu$ aplica continuamente $L_{1,\mu}$ en L_∞. En el Teorema 3 [41] se establece que $_\mu$ puede ser extendida a $L_{p,\mu}$ como un operador acotado de $L_{p,\mu}$ en $L_{p',\mu}$, siempre que $1 \leq p \leq 2$. Aquí y en el resto de este capítulo por p' denotaremos el conjugado de p, esto es: $p' = \frac{p}{p-1}$, para $1 < p < \infty$, y $p' = \infty$, cuando $p = 1$.

El estudio de la convolución para la transformación $_\mu$ de Hankel sobre los espacios $L_{p,\mu}$ fue abordado por I.I. Hirschman [42] y D.T. Haimo [39]. Estos autores definieron la convolución de Hankel $f\#g$ de dos funciones f y g medibles Lebesgue sobre $(0, \infty)$ como sigue

$$(f\#g)(x) = \int_0^\infty f(y)(\tau_x g)(y) d\gamma(y), \; x \in (0, \infty),$$

siendo $d\gamma(y) = \dfrac{y^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} dy$ y donde el operador de traslación de Hankel τ_x, $x \in (0, \infty)$, se define por

$$(\tau_x g)(y) = \int_0^\infty D(x, y, z) g(z) d\gamma(z), \; y \in (0, \infty),$$

siempre que las integrales anteriores existan. La función núcleo $D(x, y, z)$, $x, y, z \in$

$(0, \infty)$, viene dada por

$$D(x, y, z) = \frac{2^{3\mu-1}\Gamma(\mu+1)^2}{\Gamma(\mu+1/2)\sqrt{\pi}}(xyz)^{-2\mu}A(x, y, z)^{2\mu-1},\ x, y, z \in (0, \infty),$$

siendo $A(x, y, z)$ el área del triángulo cuyas aristas miden x, y, z, si este triángulo existe, y 0, en otro caso.

La convolución $\#$ y la traslación τ_x presentan propiedades similares a las de la convolución y la traslación usuales, desempeñando ahora la transformación integral de Hankel el papel que allí desempeñaba la transformación de Fourier (véanse, [39], [42], [70] y [71], entre otros). En particular, en el Teorema 2.d [42] se establece la fórmula de intercambio

$$_\mu(f\#g) = {}_\mu(f)_\mu(g) \tag{I.1.1}$$

válida cuando f y $g \in L_{1,\mu}$. En este capítulo probaremos que (I.1.1) es también válida cuando f y g están en otros espacios de la clase $L_{p,\mu}$.

También, para cada $f \in L_{1,\mu}$ se tiene (Proposición 2.1, [52])

$$_\mu(\tau_x f)(y) = c_\mu (xy)^{-\mu} J_\mu(xy)_\mu(f)(y),\ x, y \in (0, \infty),$$

donde $c_\mu = 2^\mu \Gamma(\mu+1)$.

Para cada $T \in (0, \infty)$ y $f \in L_{p,\mu}$, $1 \leq p \leq 2$, definimos la integral parcial de Hankel $S_T(f, \mu; \cdot)$ de f por

$$S_T(f, \mu; x) = \int_0^T y^{2\mu+1}(xy)^{-\mu} J_\mu(xy)_\mu(f)(y)dy,\ x \in (0, \infty).$$

De (6) §8.5 [30] se deduce que

$$S_T(f, \mu; x) = \int_0^\infty y^{2\mu+1}(xy)^{-\mu} J_\mu(xy)_\mu(\varphi_T)(y)_\mu(f)(y)dy,\ x \in (0, \infty),$$

para cada $f \in L_{p,\mu}$, $1 \leq p \leq 2$, donde $\varphi_T(x) = T^{2(\mu+1)}(Tx)^{-\mu-1}J_{\mu+1}(Tx)$, $x, T \in (0, \infty)$. En virtud del Teorema 3 [41] podemos escribir

$$||S_T(f, \mu; x)||_\infty \leq C||_\mu(\varphi_T)_\mu(f)||_{1,\mu} \leq C||_\mu(\varphi_T)||_{p,\mu}||_\mu(f)||_{p',\mu} \leq C||f||_{p,\mu},\ f \in L_{p,\mu}.$$

Aquí y a lo largo de este capítulo C denotará una constante positiva no siempre la misma en cada aparición.

También del Teorema 2.b [42] se infiere

$$||S_T(f,\mu;\cdot)||_\infty \leq C||\varphi_T||_{p',\mu}||f||_{p,\mu},\ f \in L_{p,\mu}. \tag{I.1.2}$$

Por tanto, ya que $S_T(f,\mu;\cdot) = \varphi_T\#f$, $f \in C_0$ y que ${}_\mu(\varphi_T) \in L_{p,\mu}$ y $\varphi_T \in L_{p',\mu}$, tenemos que $S_T(f,\mu;x) = (\varphi_T\#f)(x)$, para casi todo $x \in (0,\infty)$ y para cada $f \in L_{p,\mu}$, $1 \leq p \leq 2$.

Además, al ser $\varphi_T \in L_{p',\mu}$, para cada $p < \dfrac{4(\mu+1)}{2\mu+1}$ y $T \in (0,\infty)$, de (I.1.2) se sigue que la aplicación $f \longrightarrow \varphi_T\#f$ es acotada de $L_{p,\mu}$ en L_∞, cuando $p < \dfrac{4(\mu+1)}{2\mu+1}$ y $T \in (0,\infty)$. Definimos

$$S_T(f,\mu;\cdot) = \varphi_T\#f,\ f \in L_{p,\mu},\ 2 < p < \frac{4(\mu+1)}{2\mu+1} \text{ y } T \in (0,\infty).$$

Definimos ahora las medias de Böchner-Riesz $\sigma_T^\beta(f,\mu;\cdot)$ de f. Sean $\beta > \mu + 1/2$, $T \in (0,\infty)$ y $1 \leq p \leq 2$. Se conoce como media de Böchner-Riesz $\sigma_T^\beta(f,\mu;\cdot)$ de $f \in L_{p,\mu}$ a la función

$$\sigma_T^\beta(f,\mu;x) = \int_0^T y^{2\mu+1}(xy)^{-\mu}J_\mu(xy)\Big(1-(\frac{y}{T})^2\Big)^\beta {}_\mu(f)(y)dy,\ x \in (0,\infty).$$

Procediendo como en el argumento anterior y teniendo en cuenta (33) §8.5 [30] se obtiene que

$$\sigma_T(f,\mu;\cdot) = f_{T,\beta}\#f,\ f \in L_{p,\mu},\ 1 \leq p \leq 2, \tag{I.1.3}$$

donde $f_{T,\beta}(x) = 2^\beta\Gamma(\beta+1)T^{2(\mu+1)}(Tx)^{-\mu-\beta-1}J_{\mu+\beta+1}(Tx)$, $x \in (0,\infty)$.

Adoptamos la parte derecha de (I.1.3) como definición de $\sigma_T^\beta(f,\mu;\cdot)$, para cada $f \in L_{p,\mu}$, donde $p > 2$.

La transformación ${}_\mu$ de Hankel ha sido definida sobre espacios de funciones generalizadas por diferentes autores (véanse, [2], [3], [4], [48] y [56], entre otros). G.

Altenburg [2] introdujo el espacio H de funciones constituido por aquellas funciones $\phi \in C^\infty(0,\infty)$ tales que para cada $m, k \in I\!N$

$$\gamma_{m,k}(\phi) = \sup_{x\in(0,\infty)} (1+x^2)^m \left| \left(\frac{1}{x}D\right)^k \phi(x) \right| < \infty.$$

El espacio H es dotado de la topología generada por la familia $\{\gamma_{m,k}\}_{m,k\in I\!N}$ de seminormas. De este modo H es un espacio de Fréchet. La transformación $_{\mu}$ es un automorfismo de H. Como es usual por H' denotaremos el espacio dual de H. Nótese que si $f \in L_{p,\mu}$, para algún $p \in [1,\infty)$, entonces f define un elemento de H' mediante

$$< f, \phi >= \int_0^\infty f(x)\phi(x)x^{2\mu+1}dx, \; \phi \in H.$$

En efecto, de la desigualdad de Hölder se deduce

$$| < f, \phi > | \leq ||f||_{p,\mu}||\phi||_{p',\mu} \leq C||f||_{p,\mu}\gamma_{m,0}(\phi), \; \phi \in H,$$

para cierta $m \in I\!N$ que no dependerá más que de μ.

Este capítulo lo estructuramos como sigue. Después de esta introducción, en la Sección I.1.2 establecemos condiciones sobre una función $f \in L_{p,\mu}$ para que las integrales parciales de Hankel $S_T(f,\mu;x)$ de f converjan, cuando $T \to \infty$, a $f(x)$, para casi todo $x \in (0,\infty)$. Los estudios abordados en las Secciones I.1.3, I.1.4 y I.1.5 están inspirados en los trabajos de D.V. Giang [33] y D.V. Giang y F. Móricz ([34] y [35]). En la Sección I.1.3 se introducen los espacios de Lipschitz-Hankel. Aquí la traslación de Hankel juega el papel de la traslación usual en los espacios de Lipschitz. Obtenemos una caracterización de los espacios de Lipschitz-Hankel a través de las medias de Böchner-Riesz. También se da un resultado de aproximación que involucra las integrales parciales de Hankel. En la Sección I.1.4 probamos que las integrales parciales de Hankel de una función f convergen en L_∞, cuando $T \to \infty$, a f, siempre que esta función pertenezca a un adecuado espacio de Lipschitz-Hankel. En la Sección I.1.5 se introducen los espacios que denominamos de Besov-Hankel, que son caracterizados mediante las integrales parciales de Hankel y las medias de Böchner-Riesz. Finalmente, obtenemos en la Sección I.1.6 condiciones sobre una función f (en el marco de los espacios de Lipschitz-Hankel) de las cuales se deduce la integrabilidad de la transformada de Hankel ${}_\mu f$ de f.

En esta sección obtenemos condiciones necesarias y suficientes sobre una función f medible sobre $(0,\infty)$ para que

$$\lim_{T\to\infty} S_T(f,\mu;x) = f(x), \text{ para casi todo } x \in (0,\infty).$$

Nuestro estudio está inspirado en los trabajos de D.S. Lubinsky y F. Móricz [49] y de C.P. Chen y C.C. Lin [23] quienes obtuvieron los correspondientes resultados para la transformación integral de Fourier.

Como veremos la convergencia de S_T se inferirá de la de σ_T^1. Por ello establecemos en primer lugar el siguiente resultado que es una consecuencia inmediata del Corolario 2 [70].

Lema 1.1 *Sean* $f \in L_{1,\mu}$ *y* $\mu \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. *Se tiene*

$$\lim_{T\to\infty} \sigma_T^1(f,\mu;x) = f(x), \textit{ para casi todo } x \in (0,\infty).$$

$\square$

En lo que sigue, para simplificar, denotaremos por A_f el conjunto formado por aquellos $x \in (0,\infty)$ tales que $\lim_{T\to\infty} \sigma_T^1(f,\mu;x) = f(x)$, siendo f una función de $L_{1,\mu}$ y $\mu \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Observamos que en virtud del Lema 1.1 el conjunto $(0,\infty)\setminus A_f$ tiene medida cero para cada $f \in L_{1,\mu}$ y $\mu \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Probamos ahora dos lemas de carácter técnico.

Lema 1.2 *Sea $f \in L_{1,\mu}$. Para cada $x, T \in (0,\infty)$ y $\lambda \in (1,\infty)$ definimos*

$$I_T(f,\mu,\lambda;x) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}\int_T^{\lambda T} y^{2\mu+1}(xy)^{-\mu}J_\mu(xy)\Big(1-\Big(\frac{y}{\lambda T}\Big)^2\Big){}_\mu(f)(y)dy.$$

Entonces

$$S_T(f,\mu;x) - \sigma_T^1(f,\mu;x) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}\Big[\sigma_{\lambda T}^1(f,\mu;x) - \sigma_T^1(f,\mu;x)\Big] - I_T(f,\mu,\lambda;x),$$

para cada $x, T \in (0,\infty)$ y $\lambda \in (1,\infty)$.

<u>Demostración</u>:

Sean $x, T \in (0,\infty)$ y $\lambda \in (1,\infty)$. Una sencilla manipulación conduce a

$$\begin{aligned}\sigma_{\lambda T}^1(f,\mu;x) - \sigma_T^1(f,\mu;x) = &\int_T^{\lambda T} y^{2\mu+1}(xy)^{-\mu}J_\mu(xy)\Big(1-\Big(\frac{y}{\lambda T}\Big)^2\Big){}_\mu(f)(y)dy+\\ &+\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}\int_0^T y^{2\mu+1}(xy)^{-\mu}J_\mu(xy)\Big(\frac{y}{T}\Big)^2{}_\mu(f)(y)dy =\\ &=\int_T^{\lambda T} y^{2\mu+1}(xy)^{-\mu}J_\mu(xy)\Big(1-\Big(\frac{y}{\lambda T}\Big)^2\Big){}_\mu(f)(y)dy+\\ &+\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}\Big(S_T(f,\mu;x) - \sigma_T^1(f,\mu;x)\Big),\end{aligned}$$

de donde la igualdad deseada se deduce sin dificultad. □

Lema 1.3 *Sea $f \in L_{1,\mu}$ tal que $x^{2k}f \in L_{1,\mu}$, donde $k \in \mathbb{N}$. Entonces ${}_\mu(f)$ es diferenciable k veces sobre $(0,\infty)$ y*

$$\Big(\frac{1}{x}D\Big)^l{}_\mu(f)(x) = (-1)^l{}_{\mu+l}(f)(x),\ x \in (0,\infty), \tag{I.1.4}$$

para cada $l \in \mathbb{N}$, $0 \le l \le k$. Además, si suponemos que $x^{-\mu-1/2-k}f \in L_{1,\mu+k}$ y que $x^{-\mu-1/2}f \in L_{1,\mu}$, se tiene

$$x^{\mu+1/2+l}\Big(\frac{1}{x}D\Big)^l{}_\mu(f)(x) \longrightarrow 0,\ \textit{cuando}\ x \to \infty, \tag{I.1.5}$$

para cada $l \in \mathbb{N}$, $0 \le l \le k$.

Demostración:

De acuerdo con (7) §5.1 [81], (I.1.4) sigue sin más que derivar bajo el signo integral. Por otra parte, (I.1.5) es una consecuencia de (I.1.4) y del Lema de Riemann-Lebesgue para la transformación integral de Hankel (véase p. 457, [77]). □

Señalamos aquí que resultados de naturaleza similar a los presentados en el Lema 1.3 fueron probados en [64] y [66].

Obtenemos ahora una condición necesaria y suficiente para que

$$\lim_{T\to\infty} S_T(f,\mu;x) = f(x)$$

cuando $f \in L_{1,\mu}$ y $x \in A_f$.

Proposición 1.4 *Sean $f \in L_{1,\mu}$, $x \in A_f$ y $\mu \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Entonces, $\lim_{T\to\infty} S_T(f,\mu;x) = f(x)$, si y sólo si,*

$$\lim_{\lambda\to 1^+} \limsup_{T\to\infty} |I_T(f,\mu,\lambda;x)| = 0,$$

donde $I_T(f,\mu,\lambda;x)$ es definido como en el Lema 1.2.

Demostración:

Del Lema 1.2 se deduce que

$$\begin{aligned} &\Big| |S_T(f,\mu;x) - \sigma_T^1(f,\mu;x)| - |I_T(f,\mu,\lambda;x)| \Big| \leq \\ &\leq \frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}\Big|\sigma_{\lambda T}^1(f,\mu;x) - \sigma_T^1(f,\mu;x)\Big| \end{aligned} \tag{I.1.6}$$

para cada $T \in (0,\infty)$ y $\lambda \in (1,\infty)$.

Nuestro resultado puede ser ahora inferido de (I.1.6) y del Lema 1.1. □

De la Proposisión 1.4 podemos deducir nuevas condiciones que son suficientes para asegurar que

$$\lim_{T\to\infty} S_T(f,\mu;x) = f(x),$$

para cada $x \in A_f$.

Proposición 1.5 *Sean* $\mu \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *y* $f \in L_{1,\mu}$. *Si para algún* $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\lambda \to 1^+} \limsup_{T \to \infty} \int_T^{\lambda T} y^{2(\mu+k)+1} |{}_{\mu+k}(f)(y)| dy = 0 \tag{I.1.7}$$

siendo $x^{-\mu-1/2} f \in L_{1,\mu}$, $x^{2k} f \in L_{1,\mu}$ *y* $x^{-\mu+k-3/2} f \in L_{1,\mu}$, *cuando* $k > 0$, *entonces*

$$\lim_{T \to \infty} S_T(f, \mu; x) = f(x), \text{ para cada } x \in A_f.$$

Demostración:

Supongamos primero que $k = 0$. Ya que la función $z^{-\nu} J_\nu(z)$ es acotada sobre $(0, \infty)$ para cada $\nu \geq -1/2$, tenemos

$$\left| I_T(f, \mu, \lambda; x) \right| \leq \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - 1} \int_T^{\lambda T} y^{2\mu+1} |(xy)^{-\mu} J_\mu(xy)| \left(1 - \left(\frac{y}{\lambda T}\right)^2\right) |{}_\mu(f)(y)| dy \leq$$

$$\leq C \int_T^{\lambda T} y^{2\mu+1} |{}_\mu(f)(y)| dy, \text{ para cada } x, T \in (0, \infty) \text{ y } \lambda \in (1, \infty).$$

Por tanto (I.1.7) implica que

$$\lim_{\lambda \to 1^+} \limsup_{T \to \infty} |I_T(f, \mu, \lambda; x)| = 0, \quad \text{para } x \in (0, \infty),$$

y de la Proposición 1.4 se infiere que $\lim_{T \to \infty} S_T(f, \mu; x) = f(x)$, para cada $x \in A_f$.

Sea ahora $k \in \mathbb{N}$ $(k > 0)$. En virtud de (6) §5.1 [81] integrando por partes obtenemos

$$\int_T^{\lambda T} y^{2\mu+1} (xy)^{-\mu} J_\mu(xy) \left(1 - \left(\frac{y}{\lambda T}\right)^2\right) {}_\mu(f)(y) dy =$$

$$= x^{-2\mu-1} \int_T^{\lambda T} (xy)^{\mu+1} J_\mu(xy) \left(1 - \left(\frac{y}{\lambda T}\right)^2\right) {}_\mu(f)(y) dy =$$

$$= x^{-2\mu-2} \int_T^{\lambda T} \frac{d}{dy} \left[(xy)^{\mu+1} J_{\mu+1}(xy)\right] \left(1 - \left(\frac{y}{\lambda T}\right)^2\right) {}_\mu(f)(y) dy =$$

$$= x^{-2\mu-2} \left\{ \left[(xy)^{\mu+1} J_{\mu+1}(xy) \left(1 - \left(\frac{y}{\lambda T}\right)^2\right) {}_\mu(f)(y)\right]_{y=T}^{y=\lambda T} - \right.$$

$$-\int_T^{\lambda T}(xy)^{\mu+1}J_{\mu+1}(xy)\Big[\Big(1-\Big(\frac{y}{\lambda T}\Big)^2\Big)\frac{d}{dy}({}_\mu(f)(y))-{}_\mu(f)(y)\frac{2y}{(\lambda T)^2}\Big]dy\Big\} \quad =$$

$$= x^{-2\mu-2}\Big\{-(xT)^{\mu+1}J_{\mu+1}(xT)\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}{}_\mu(f)(T)-$$

$$-\int_T^{\lambda T}(xy)^{\mu+1}J_{\mu+1}(xy)\Big(1-\Big(\frac{y}{\lambda T}\Big)^2\Big)y\Big(\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\Big)\Big({}_\mu(f)(y)\Big)dy+$$

$$+\frac{2}{(\lambda T)^2}\int_T^{\lambda T}(xy)^{\mu+1}J_{\mu+1}(xy)y{}_\mu(f)(y)dy\Big\} \quad =$$

$$= -T^{2\mu+2}(xT)^{-\mu-1}J_{\mu+1}(xT)\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2}{}_\mu(f)(T)-$$

$$-\int_T^{\lambda T}y^{2(\mu+1)+1}(xy)^{-\mu-1}J_{\mu+1}(xy)\Big(1-\Big(\frac{y}{\lambda T}\Big)^2\Big)\Big(\frac{1}{y}\frac{d}{dy}\Big)({}_\mu(f)(y))dy+$$

$$+\frac{2}{(\lambda T)^2}\int_T^{\lambda T}y^{2(\mu+1)+1}(xy)^{-\mu-1}J_{\mu+1}(xy){}_\mu(f)(y)dy,$$

para cada $x, T \in (0,\infty)$ y $\lambda \in (1,\infty)$.

Se sigue entonces del Lema 1.3 que

$$I_T(f,\mu,\lambda;x) = -T^{2\mu+2}(xT)^{-\mu-1}J_{\mu+1}(xT){}_\mu(f)(T)+$$

$$+\frac{2}{(\lambda^2-1)T^2}\int_T^{\lambda T}y^{2(\mu+1)+1}(xy)^{-\mu-1}J_{\mu+1}(xy){}_\mu(f)(y)dy + I_T(f,\mu+1,\lambda;x),$$

para cada $x, T \in (0,\infty)$ y $\lambda \in (1,\infty)$.

Repitiendo el argumento se concluye que

$$I_T(f,\mu,\lambda;x) = -T^{2\mu+2}\sum_{j=1}^{k}(xT)^{-\mu-j}J_{\mu+j}(xT){}_{\mu+j-1}(f)(T)T^{2(j-1)}+$$

$$+\frac{2}{(\lambda^2-1)T^2}\sum_{j=1}^{k}\int_T^{\lambda T}y^{2(\mu+j)+1}(xy)^{-\mu-j}J_{\mu+j}(xy){}_{\mu+j-1}(f)(y)dy + I_T(f,\mu+k,\lambda;x),$$

para cada $x, T \in (0,\infty)$ y $\lambda \in (1,\infty)$.

Analizamos ahora cada uno de los tres términos de la suma anterior.

Observamos inicialmente que, procediendo como en el caso $k = 0$ ya considerado, (I.1.7) implica que

$$\lim_{\lambda\to 1^+} \limsup_{T\to\infty} |I_T(f,\mu+k,\lambda;x)| = 0, \; x \in (0,\infty). \tag{I.1.8}$$

Además, la acotación de la función $\sqrt{z}J_\nu(z)$, $z \in (0,\infty)$, cuando $\nu \geq -1/2$, conduce a

$$\left|T^{2\mu+2}\sum_{j=1}^{k}(xT)^{-\mu-j}J_{\mu+j}(xT)_{\mu+j-1}(f)(T)T^{2(j-1)}\right| \leq$$

$$\leq Cx^{-\mu-1/2}\sum_{j=1}^{k}x^{-j}T^{j+\mu-1/2}|_{\mu+j-1}(f)(T)|, \text{ para cada } T, x \in (0,\infty).$$

Por tanto, del Lema 1.3 se infiere que

$$\lim_{T\to\infty} T^{2\mu+2}\sum_{j=1}^{k}(xT)^{-\mu-j}J_{\mu+j}(xT)_{\mu+j-1}(f)(T)T^{2(j-1)} = 0, \; x \in (0,\infty). \tag{I.1.9}$$

Finalmente, teniendo de nuevo en cuenta que la función $\sqrt{z}J_\nu(z)$ es acotada sobre $(0,\infty)$, cuando $\nu \geq -1/2$, podemos escribir

$$\frac{2}{(\lambda^2-1)T^2}\left|\sum_{j=1}^{k}\int_T^{\lambda T} y^{2(\mu+j)+1}(xy)^{-\mu-j}J_{\mu+j}(xy)_{\mu+j-1}(f)(y)dy\right| \leq$$

$$\leq \frac{Cx^{-\mu-1/2}\lambda}{(\lambda^2-1)T}\sum_{j=1}^{k}x^{-j}\int_T^{\lambda T}|_{\mu+j-1}(f)(y)|y^{\mu+j-1/2}dy \leq$$

$$\leq \frac{Cx^{-\mu-1/2}\lambda}{\lambda+1}\sum_{j=1}^{k}x^{-j}\sup_{y>T}\left|_{\mu+j-1}(f)(y)y^{\mu+j-1/2}\right| \;, \; x, T \in (0,\infty) \text{ y } \lambda \in (1,\infty).$$

Entonces el Lema 1.3 permite concluir

$$\lim_{T\to\infty}\frac{2}{(\lambda^2-1)T^2}\sum_{j=1}^{k}\int_T^{\lambda T} y^{2(\mu+j)+1}(xy)^{-\mu-j}J_{\mu+j}(xy)_{\mu+j-1}(f)(y)dy = 0 \tag{I.1.10}$$

para cada $x \in (0,\infty)$ y $\lambda \in (1,\infty)$.

Combinando (I.1.8), (I.1.9) and (I.1.10) se deduce ya que

$$\lim_{\lambda\to 1^+}\limsup_{T\to\infty}|I_T(f,\mu,\lambda;x)| = 0\,, \text{ para cada } x \in (0,\infty),$$

y el resultado deseado sigue de la Proposición 1.4. □

Proposición 1.6 *Sean* $\mu \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *y* $f \in L_{1,\mu}$. *Si*

$$\limsup_{y\to\infty} y^{2(\mu+k+1)} |_{\mu+k}(f)(y)| < \infty$$

para algún $k \in I\!N$, *siendo además* $x^{-\mu-1/2} f \in L_{1,\mu}$, $x^{2k} f \in L_{1,\mu}$ *y* $x^{-\mu+k-3/2} f \in L_{1,\mu}$, *cuando* $k > 0$, *entonces*

$$\lim_{T\to\infty} S_T(f,\mu;x) = f(x), \text{ para cada } x \in A_f.$$

Demostración:

Elegimos C e $y_0 \in (0,\infty)$ tales que

$$y^{2(\mu+k)+1} |_{\mu+k}(f)(y)| \leq \frac{C}{y},\ y \in (y_0,\infty).$$

Entonces, para cada $T \in (y_0,\infty)$ y $\lambda \in (1,\infty)$ tenemos

$$\int_T^{\lambda T} y^{2(\mu+k)+1} |_{\mu+k}(f)(y)| dy \leq C \int_T^{\lambda T} \frac{dy}{y} = C ln\lambda.$$

Luego

$$\lim_{\lambda\to 1^+} \limsup_{T\to\infty} \int_T^{\lambda T} y^{2(\mu+k)+1} |_{\mu+k}(f)(y)| dy = 0,$$

y la prueba termina recurriendo a la Proposición 1.5. □

Proposición 1.7 *Sean* $\mu \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *y* $f \in L_{1,\mu}$. *Supongamos que*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^x y^{2(\mu+k+1)} |_{\mu+k}(f)(y)| dy < \infty, \tag{I.1.11}$$

para cierto $k \in I\!N$. *Si además* $x^{-\mu-1/2} f \in L_{1,\mu}$, $x^{2k} f \in L_{1,\mu}$ *y* $x^{-\mu+k-3/2} f \in L_{1,\mu}$ *cuando* $k > 0$, *entonces* $\lim_{T\to\infty} S_T(f,\mu;x) = f(x)$, *para cada* $x \in A_f$.

<u>Demostración</u>:

Para cada $T \in (0,\infty)$ y $\lambda \in (1,\infty)$ tenemos

$$\int_T^{\lambda T} y^{2(\mu+k)+1} |_{\mu+k}(f)(y)| dy \leq \frac{1}{T}\left(\int_0^{\lambda T} y^{2(\mu+k+1)} |_{\mu+k}(f)(y)| dy - \right.$$

$$\left. - \int_0^{T} y^{2(\mu+k+1)} |_{\mu+k}(f)(y)| dy \right) .$$

Luego, si $L = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x y^{2(\mu+k+1)} |_{\mu+k}(f)(y)| dy$, para cada $\epsilon > 0$

$$\int_T^{\lambda T} y^{2(\mu+k)+1} |_{\mu+k}(f)(y)| dy \leq \lambda(L+\epsilon) - (L-\epsilon),$$

siempre que T sea suficientemente grande y para cada $\lambda \in (1,\infty)$.

Por tanto, la arbitrariedad de ϵ nos permite concluir que

$$\limsup_{T\to\infty} \int_T^{\lambda T} y^{2(\mu+k)+1} |_{\mu+k}(f)(y)| dy \leq (\lambda - 1)L, \text{ para } \lambda \in (1,\infty).$$

De aquí se deduce que

$$\lim_{\lambda\to 1^+} \limsup_{T\to\infty} \int_T^{\lambda T} y^{2(\mu+k)+1} |_{\mu+k}(f)(y)| dy = 0$$

y el resultado sigue de la Proposición 1.5. □

Nótese que la propiedad (I.1.11) anterior es equivalente, bajo las condiciones impuestas a la función f en la Proposición 1.6, a que se verifique

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x y^{2(\mu+k+1)} |_{\mu+k}(f)(y)| dy < \infty, \tag{I.1.12}$$

para algún $x_0 \in (0,\infty)$. La condición (I.1.12) es análoga a la que aparece en el Teorema 4 [49].

De la Proposición 6(b) [70] se infiere el siguiente lema en el que se establece la convergencia de las medias de Böchner-Riesz de $f \in L_{p,\mu}$.

Lema 1.8 *Si* $\dfrac{4\mu+2}{2\mu+3} < p \leq 2$ *entonces para cada* $f \in L_{p,\mu}$

$$\lim_{T\to\infty} \sigma_T^1(f,\mu;x) = f(x), \text{ para casi todo } x \in (0,\infty).$$

□

Procediendo como en la prueba de las proposiciones anteriores y recurriendo al Lema 1.8 en lugar de al Lema 1.1 podemos probar lo que sigue.

Proposición 1.9 *Sean* $\dfrac{4\mu+2}{2\mu+3} < p \leq 2$ *y* $f \in L_{p,\mu}$. *Entonces*

$$\lim_{T\to\infty} S_T(f,\mu;x) = f(x), \text{ para casi todo } x \in (0,\infty),$$

siempre que

$$\lim_{\lambda\to 1^+} \limsup_{T\to\infty} \int_T^{\lambda T} |_\mu(f)(y)| y^{2\mu+1} dy = 0.$$

□

Además, en las hipótesis de la Proposición 1.9, $\lim_{T\to\infty} S_T(f,\mu;x) = f(x)$ cuando $\lim_{T\to\infty} \sigma_T^1(f,\mu;x) = f(x)$.

A continuación establecemos dos consecuencias de la última proposición.

Proposición 1.10 *Sean* $\dfrac{4\mu+2}{2\mu+3} < p \leq 2$ *y* $f \in L_{p,\mu}$. *Si*

$$\limsup_{T\to\infty} \int_T^{\lambda T} y^{2(\mu+1)r-1} |_\mu(f)(y)|^r dy < \infty,$$

para algún $\lambda > 1$ *y algún* $r > 1$, *entonces*

$$\lim_{T\to\infty} S_T(f,\mu;x) = f(x), \text{ para casi todo } x \in (0,\infty).$$

<u>Demostración</u>:

De la desigualdad de Hölder se sigue

$$\int_T^{\lambda T} |_\mu(f)(y)| y^{2\mu+1} dy \leq \Big(\int_T^{\lambda T} |_\mu(f)(y)|^r y^{2\mu+1} dy\Big)^{1/r} \Big(\int_T^{\lambda T} y^{2\mu+1} dy\Big)^{1/r'} =$$

$$= \Big(\frac{\lambda^{2(\mu+1)}-1}{2(\mu+1)}\Big)^{1/r'} T^{2(\mu+1)/r'} \Big(\int_T^{\lambda T} |{}_\mu(f)(y)|^r y^{2\mu+1} dy\Big)^{1/r} \leq$$

$$\leq \Big(\frac{\lambda^{2(\mu+1)}-1}{2(\mu+1)}\Big)^{1/r'} \Big(\int_T^{\lambda T} y^{2(\mu+1)r-1} |{}_\mu(f)(y)|^r dy\Big)^{1/r}, T \in (0,\infty) \text{ y } \lambda, r \in (1,\infty).$$

Por tanto, si $\limsup_{T\to\infty} \int_T^{\lambda T} y^{2(\mu+1)r-1} |{}_\mu(f)(y)|^r dy < \infty$, para algunos λ y $r \in (1,\infty)$, entonces

$$\lim_{\lambda\to 1^+} \limsup_{T\to\infty} \int_T^{\lambda T} |{}_\mu(f)(y)| y^{2\mu+1} dy = 0,$$

y para terminar la prueba basta tener en cuenta la proposición anterior. □

Proposición 1.11 *Sean* $\frac{4\mu+2}{2\mu+3} < p \leq 2$ *y* $f \in L_{p,\mu}$. *Si* $y^{2(\mu+1)}{}_\mu(f)(y) = O(1)$, *cuando* $y \to \infty$, *entonces* $\lim_{T\to\infty} S_T(f,\mu;x) = f(x)$, *para casi todo* $x \in (0,\infty)$.

Demostración:

Es suficiente observar que existe $C > 0$ tal que

$$\int_T^{\lambda T} y^{4\mu+3} |{}_\mu(f)(y)|^2 dy \leq C ln \lambda,$$

para cada $\lambda > 1$ y T suficientemente grande, y recurrir a la Proposición 1.10. □

Señalamos que el rango de valores de p para los cuales es cierto que

$$\lim_{T\to\infty} S_T(f,\mu;x) = f(x), \text{ para casi todo } x \in (0,\infty),$$

y para cada $f \in L_{p,\mu}$, que se obtiene en las proposiciones anteriores es más amplio que el que aparece en el clásico resultado de C.S. Herz (Teorema 5, [41]).

En la siguiente proposición establecemos la convergencia en sentido distribucional de las integrales parciales de Hankel. Completamos de este modo el resultado establecido en el Corolario 3.2 [24]. Recordamos que cuando $f \in L_{p,\mu}$, siendo $2 < p < \frac{4(\mu+1)}{2\mu+1}$, definimos $S_T(f,\mu;x)$ como sigue:

$$S_T(f,\mu;\cdot) = \varphi_T \# f, \text{ donde } \varphi_T(x) = T^{2(\mu+1)}(xT)^{-\mu-1} J_{\mu+1}(xT), \; x, T \in (0,\infty).$$

Es conveniente probar primero la siguiente versión de la fórmula de intercambio para la transformación ${}_{\mu}$ de Hankel.

Lema 1.12 *Para cada* $\phi, \psi \in L_{2,\mu}$ *se tiene que*

$$(\phi \# \psi)(x) = {}_{\mu}({}_{\mu}(\phi)\,{}_{\mu}(\psi))(x), \text{ para casi todo } x \in (0, \infty). \tag{I.1.13}$$

Demostración:

Sean $\phi, \psi \in L_{2,\mu}$. Del Teorema 2.b [42] se sigue

$$||\phi \# \psi||_{\infty} \leq C||\phi||_{2,\mu}||\psi||_{2,\mu}.$$

Además, el Teorema 3 [41] conduce a

$$||{}_{\mu}({}_{\mu}(\phi)\,{}_{\mu}(\psi))||_{\infty} \leq C||{}_{\mu}(\phi)\,{}_{\mu}(\psi)||_{1,\mu} \leq C||{}_{\mu}(\phi)||_{2,\mu}||{}_{\mu}(\psi)||_{2,\mu} \leq C||\phi||_{2,\mu}||\psi||_{2,\mu}.$$

Por tanto, ambos miembros de la igualdad (I.1.13) definen aplicaciones bilineales acotadas de $L_{2,\mu}$x$L_{2,\mu}$ en L_{∞}.

Finalmente, ya que (I.1.13) es válida cuando ϕ y ψ están en C_0^{∞} (Teorema 2.d, [42]) y teniendo en cuenta que C_0^{∞} es denso en $L_{2,\mu}$, concluimos que (I.1.13) es cierta para cada $\phi, \psi \in L_{2,\mu}$. □

Proposición 1.13 *Sean* $1 \leq p < \dfrac{4(\mu+1)}{2\mu+1}$ *y* $f \in L_{p,\mu}$. *Entonces*

$$\lim_{T \to \infty} S_T(f, \mu; x) = f(x)$$

en la topología débil $*$ *de* H'.

Demostración:

Observamos inicialmente que $S_T(f, \mu; \cdot) \in L_{\infty}$, para cada $T \in (0, \infty)$ (Teorema 2.b, [42]). Por consiguiente $S_T(f, \mu; \cdot) \in H'$.

Sean $\psi \in C_0^\infty$ y $\phi \in H$.

Del Teorema 2.b [42] se deduce que $\varphi_T \# \psi \in L_{2,\mu}$, para cada $T \in (0, \infty)$. Por tanto, la igualdad de Parseval para la transformación ${}_\mu$ de Hankel y el Lema 1.12 conduce a

$$\int_0^\infty (\varphi_T \# \psi)(x)\phi(x)x^{2\mu+1}dx = \int_0^\infty {}_\mu(\varphi_T \# \psi)(x){}_\mu(\phi)(x)x^{2\mu+1}dx =$$

$$= \int_0^\infty {}_\mu(\psi)(x){}_\mu(\varphi_T)(x){}_\mu(\phi)(x)x^{2\mu+1}dx = \int_0^\infty \psi(x){}_\mu({}_\mu(\varphi_T){}_\mu(\phi))(x)x^{2\mu+1}dx =$$

$$= \int_0^\infty \psi(x)(\varphi_T \# \phi)(x)x^{2\mu+1}dx.$$

Recurriendo de nuevo al Teorema 2.b [42] se tiene

$$\Big| \int_0^\infty (\varphi_T \# f)(x)\phi(x)x^{2\mu+1}dx \Big| \leq ||\varphi_T \# f||_\infty ||\phi||_{1,\mu} \leq C||f||_{p,\mu}||\varphi_T||_{p',\mu}||\phi||_{1,\mu},$$

para cada $f \in L_{p,\mu}$, $\phi \in H$ y $T \in (0, \infty)$, y

$$\Big| \int_0^\infty f(x)(\varphi_T \# \phi)(x)x^{2\mu+1}dx \Big| \leq ||f||_{p,\mu}||\varphi_T \# \phi||_{p',\mu} \leq C||f||_{p,\mu}||\varphi_T||_{p',\mu}||\phi||_{1,\mu},$$

para cada $f \in L_{p,\mu}$, $\phi \in H$ y $T \in (0, \infty)$.

Por tanto ya que $\varphi_T \in L_{p',\mu}$, $T \in (0, \infty)$, y que C_0^∞ es denso en $L_{p,\mu}$, podemos escribir

$$\int_0^\infty f(x)(\varphi_T \# \phi)(x)x^{2\mu+1}dx = \int_0^\infty (\varphi_T \# f)(x)\phi(x)x^{2\mu+1}dx, f \in L_{p,\mu},\ \phi \in H \text{ y } T > 0.$$

Luego para cada $f \in L_{p,\mu}$ y $\phi \in H$, se tiene

$$\Big| \int_0^\infty (\varphi_T \# f)(x)\phi(x)x^{2\mu+1}dx - \int_0^\infty f(x)\phi(x)x^{2\mu+1}dx \Big| \leq$$

$$\leq \int_0^\infty |f(x)|\ |(\varphi_T \# \phi)(x) - \phi(x)|x^{2\mu+1}dx \leq$$

$$\leq ||f||_{p,\mu} \Big|\Big| \int_0^T t^{2\mu+1}(xt)^{-\mu}J_\mu(xt){}_\mu(\phi)(t)dt - \phi(x) \Big|\Big|_{p',\mu},\ T \in (0, \infty).$$

Ya que ${}_{\mu}(\phi) \in L_{p,\mu}$ y $\phi \in L_{p',\mu}$, cuando $\phi \in H$, en virtud del Teorema 3 [41] (cuando $p \leq 2$) y del Teorema 5 [41] (cuando $p > 2$) y teniendo en cuenta que ${}^{2}_{\mu}$ es la identidad sobre $\mathcal{H}$, obtenemos

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T t^{2\mu+1}(xt)^{-\mu} J_\mu(xt)_\mu(\phi)(t)dt = {}_{\mu}({}_{\mu}\phi)(x) = \phi(x),$$

en $L_{p',\mu}$, y concluimos la prueba. □

Fue probado por C.S. Herz (Teorema 5 [41]) que si $\frac{4(\mu+1)}{2\mu+3} < p \leq 2$

$$\lim_{T\to\infty} S_T(f,\mu;x) = f(x) \text{ en } L_{p,\mu}, \tag{I.1.14}$$

para cada $f \in L_{p,\mu}$. Más adelante (véase la demostración de la Proposición 1.29) probaremos que el resultado también es cierto cuando $2 < p < \frac{4(\mu+1)}{2\mu+1}$. Teniendo esto presente la prueba de la Proposición 1.13 sigue inmediatamente, basta aplicar la desigualdad de Hölder, cuando $\frac{4(\mu+1)}{2\mu+3} < p < \frac{4(\mu+1)}{2\mu+1}$. Sin embargo I.1.14 no es válido, en general, cuando $1 \leq p < \frac{4(\mu+1)}{2\mu+3}$ (véase Teorema 5 [41]).

I.I. Hirschman (Corolario 2.e, [42]) y D.T. Haimo (Corolario 2.10, [39]) establecieron que

$$\lim_{T\to\infty} S_T(f,\mu;x) = f(x), \text{ para casi todo } x \in (0,\infty), \tag{I.1.15}$$

cuando $f \in L_{1,\mu}$ y ${}_{\mu}(f) \in L_{1,\mu}$. Probamos ahora que (I.1.15) es también cierto cuando $x^{-\mu-1/2}f \in L_{1,\mu}$ y $x^{-\mu-1/2}{}_{\mu}(f) \in L_{1,\mu}$. La demostración de nuestro resultado, inspirada en la prueba dada por T.G. Genchev [32] para una fórmula de inversión para la transformación integral de Fourier, es completamente diferente a las presentadas en [39] y [42].

Proposición 1.14 *Sea $x^{-\mu-1/2}f \in L_{1,\mu}$ tal que $x^{-\mu-1/2}{}_{\mu}f \in L_{1,\mu}$. Entonces*

$${}_{\mu}({}_{\mu}(f))(x) = \lim_{T\to\infty} S_T(f,\mu;x) = f(x), \text{ para casi todo } x \in (0,\infty).$$

Demostración:

Sean $0 < a < b < \infty$. Definimos

$$\varphi_{a,b}(x) = \begin{cases} x^{-\mu-1/2} & , \text{ si } x \in (a,b) \\ 0 & , \text{ si } x \notin (a,b) \ . \end{cases}$$

De [65] se infiere que

$$\lim_{T\to\infty} S_T(\varphi_{a,b}, \mu; x) = \varphi_{a,b}(x), \text{ para casi todo } x \in (0,\infty). \tag{I.1.16}$$

Además, sin más que tener en cuenta el Teorema de Fubini obtenemos que

$$\int_0^\infty {}_\mu({}_\mu f)(x)\varphi_{a,b}(x)x^{2\mu+1}dx = \int_0^\infty ({}_\mu f)(x)_\mu(\varphi_{a,b})(x)x^{2\mu+1}dx. \tag{I.1.17}$$

También, para cada $m \in I\!N$, se tiene

$$\int_0^m {}_\mu(f)(x)_\mu(\varphi_{a,b})(x)x^{2\mu+1}dx =$$

$$= \int_0^\infty f(x)x^{2\mu+1} \int_0^m y^{2\mu+1}(xy)^{-\mu}J_\mu(xy)_\mu(\varphi_{a,b})(y)dydx.$$

Sea $m \in I\!N$. De 5.11 (8) [77] sigue

$$x^{\mu+1/2}\int_0^m y^{2\mu+1}(xy)^{-\mu}J_\mu(xy)_\mu(\varphi_{a,b})(y)dy =$$

$$= \int_a^b (xz)^{1/2}\int_0^m yJ_\mu(zy)J_\mu(xy)dydz =$$

$$= \int_a^b \frac{(xz)^{1/2}}{x^2-z^2}\Big(xmJ_{\mu+1}(xm)J_\mu(zm) - zmJ_\mu(xm)J_{\mu+1}(zm)\Big)dz, \ x \in (0,\infty).$$

Por tanto, del Lema 7 [53] se infiere que

$$\left|x^{\mu+1/2}\int_0^m y^{2\mu+1}(xy)^{-\mu}J_\mu(xy)_\mu(\varphi_{a,b})(y)dy\right| \leq C, \ x \in (0,\infty) \text{ y } m \in I\!N, m > 0.$$

Entonces, ya que $x^{-\mu-1/2}f \in L_{1,\mu}$, de (I.1.16) y (I.1.17), aplicando el teorema de la convergencia dominada, obtenemos

$$\int_0^\infty {}_\mu({}_\mu f)(x)\varphi_{a,b}(x)x^{2\mu+1}dx = \int_0^\infty f(x)\varphi_{a,b}(x)x^{2\mu+1}dx.$$

De este modo concluimos que, para cada función paso φ con soporte compacto en $(0,\infty)$ se verifica

$$\int_0^\infty x^{\mu+1/2}\Big[{}_\mu({}_\mu f)(x) - f(x)\Big]\varphi(x)dx = 0.$$

Por tanto ${}_\mu({}_\mu f)(x) = f(x)$, para casi todo $x \in (0,\infty)$. $\square$

En esta sección introducimos unos nuevos espacios de funciones que llamaremos espacios de Lipschitz-Hankel ya que la traslación de Hankel juega ahora el papel que desempeña la traslación usual en los espacios de Lipschitz. El estudio comenzado en esta sección será completado en las dos siguientes.

Sea $\alpha \in (0,1]$. Una función $f \in L_\infty$ se dirá que está en ΛH_α si

$$\sup_{x\in(0,\infty)} x^{-\alpha}||\tau_x f - f||_\infty < \infty.$$

Nuestro primer objetivo es caracterizar el espacio ΛH_α a través de las medias de Böchner-Riesz.

Previamente probamos algunos resultados que necesitaremos. El primero de ellos es una versión de la fórmula de intercambio para ${}_\mu$.

Lema 1.15 *Sean $\phi \in L_{2,\mu}$ y $\psi \in L_{1,\mu}$. Entonces*

$${}_\mu(\phi\#\psi)(x) = {}_\mu(\phi)(x)\,{}_\mu(\psi)(x), \ \textit{para casi todo } x \in (0,\infty). \tag{I.1.18}$$

Demostración:

Sabemos que (I.1.18) es válida cuando $\phi \in C_0^\infty$ y $\psi \in L_{1,\mu}$ (véase, por ejemplo, p. 658 [37]).

Por otra parte, en virtud del Teorema 3 [41] y el Teorema 2.b [42] tenemos

$$||_\mu(\phi\#\psi)||_{2,\mu} \leq C||\phi\#\psi||_{2,\mu} \leq C||\phi||_{2,\mu}||\psi||_{1,\mu},\ \phi \in L_{2,\mu} \text{ y } \psi \in L_{1,\mu},$$

donde $C > 0$ es independiente de ϕ y de ψ.

Además, si $\psi \in L_{1,\mu}$ entonces $_\mu\psi \in L_\infty$ y podemos escribir

$$||_\mu(\phi)_\mu(\psi)||_{2,\mu} \leq ||_\mu(\psi)||_\infty ||_\mu(\phi)||_{2,\mu} \leq ||_\mu\psi||_\infty ||\phi||_{2,\mu},\ \phi \in L_{2,\mu}.$$

Por tanto para cada $\psi \in L_{1,\mu}$ ambos miembros de (I.1.18) definen operadores acotados de $L_{2,\mu}$ en sí mismo. Ya que C_0 es un subespacio denso en $L_{2,\mu}$, se sigue ya que (I.1.18) es cierta para cada $\psi \in L_{1,\mu}$ y $\phi \in L_{2,\mu}$. □

Lema 1.16 *Sean $\phi \in L_{2,\mu}$ y $\beta > 0$. Entonces*

$$\phi(x)ln2 = \int_0^\infty [\sigma_{2T}^\beta(\phi,\mu;x) - \sigma_T^\beta(\phi,\mu;x)]\frac{dT}{T},\ \textit{para casi todo } x \in (0,\infty).$$

<u>Demostración</u>:

Para cada $T \in (0,\infty)$ tenemos

$$\sigma_{2T}^\beta(\phi,\mu;x) - \sigma_T^\beta(\phi,\mu;x) = \int_T^{2T} \frac{d}{dt}[\sigma_t^\beta(\phi,\mu;x)]dt,\ x \in (0,\infty).$$

Por tanto, intercambiando el orden de integración se sigue

$$\int_0^\infty [\sigma_{2T}^\beta(\phi,\mu;x) - \sigma_T^\beta(\phi,\mu;x)]\frac{dT}{T} = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\sigma_t^\beta(\phi,\mu;x)\int_{t/2}^t \frac{dT}{T}dt =$$

$$= ln2 \int_0^\infty \frac{d}{dt}\sigma_t^\beta(\phi,\mu;x)dt,\ x \in (0,\infty). \qquad \text{(I.1.19)}$$

Además, la Proposición 6 [70] afirma que

$$\lim_{T\to\infty} \sigma_T^\beta(\phi,\mu;x) = \phi(x),\ \text{para casi todo } x \in (0,\infty),$$

y no es difícil ver que

$$\lim_{T\to 0} \sigma_T^\beta(\phi,\mu;x) = 0,\ x \in (0,\infty).$$

En efecto, teniendo en cuenta el Teorema 3 [41] la desigualdad de Hölder conduce a

$$|\sigma_T^\beta(\phi,\mu;x)| \leq CT^{\mu+1}||\phi||_{2,\mu},\ x,T\in(0,\infty). \tag{I.1.20}$$

De (I.1.19) se sigue entonces el resultado deseado. □

Caracterizamos ahora las funciones en el espacio de Lipschitz-Hankel ΛH_α a través de las medias de Böchner-Riesz. El resultado obtenido recuerda otros relativos a las series o la transformación integral de Fourier (véase [33]).

Proposición 1.17 *Sean* $\phi\in L_{2,\mu}$, $0<\alpha<1$, $\beta>-1/2$ *y* $-1/2<\mu<\beta-1/2-\alpha$. *Entonces* $\phi\in\Lambda H_\alpha$ *si, y sólo si,* $T^\alpha||\sigma_T^\beta(\phi,\mu,\cdot)-\phi||_\infty$ *es acotada sobre* $(0,\infty)$.

Demostración:

Supongamos que $\phi\in\Lambda H_\alpha$. Ya que $\displaystyle\int_0^\infty f_{T,\beta}d\gamma(x)=1$, $T\in(0,\infty)$, podemos escribir

$$\sigma_T^\beta(\phi,\mu;x)-\phi(x)=\int_0^\infty f_{T,\beta}(t)[(\tau_x\phi)(t)-\phi(x)]d\gamma(t),\ T,x\in(0,\infty).$$

Por tanto, ya que las funciones $\sqrt{z}J_\nu(z)$ y $z^{-\nu}J_\nu(z)$ son acotadas en $(0,\infty)$ cuando $\nu\geq-1/2$, se tiene

$$||\sigma_T^\beta(\phi,\mu;\cdot)-\phi||_\infty\leq\int_0^\infty|f_{T,\beta}(t)|\,||\tau_x\phi-\phi||_\infty d\gamma(t)\leq\int_0^\infty t^\alpha|f_{T,\beta}(t)|d\gamma(t)\leq$$

$$\leq CT^{-\alpha}\Big(\int_0^1 u^{\alpha+2\mu+1}du+\int_1^\infty u^{\alpha+\mu-\beta-1/2}du\Big),\ T\in(0,\infty).$$

Sigue de aquí que $\displaystyle\sup_{T\in(0,\infty)}T^\alpha||\sigma_T^\beta(\phi,\mu;\cdot)-\phi||_\infty<\infty$.

Asumamos ahora que $T^\alpha||\sigma_T^\beta(\phi,\mu;\cdot)-\phi||_\infty$ es acotada sobre $(0,\infty)$.

Observamos inicialmente que $\phi\in L_\infty$. En efecto, de (I.1.20) se infiere

$$||\phi||_\infty\leq||\sigma_T^\beta(\phi,\mu;\cdot)-\phi||_\infty+||\sigma_T^\beta(\phi,\mu;\cdot)||_\infty\leq C(T^\alpha+T^{\mu+1}),\ T\in(0,\infty).$$

Definimos el incremento

$$\Delta(\phi, x, t) = (\tau_t\phi)(x) - \phi(x), \ x, t \in (0, \infty).$$

El Lema 1.16, haciendo uso del Teorema de Fubini, nos permite escribir

$$\Delta(\phi, x, t)ln2 = \int_0^\infty \Delta(\sigma_{2T}^\beta(\phi, \mu; \cdot) - \sigma_T^\beta(\phi, \mu; \cdot), x, t)\frac{dT}{T}, \tag{I.1.21}$$

para $t \in (0, \infty)$ y casi todo $x \in (0, \infty)$.

Ya que τ_t, $t \in (0, \infty)$, es un operador contractivo sobre L_∞ (p. 16, [71]) sigue

$$||\Delta(\sigma_{2T}^\beta(\phi, \mu; \cdot) - \sigma_T^\beta(\phi, \mu; \cdot), \cdot, t)||_\infty \leq$$

$$\leq 2||\sigma_{2T}^\beta(\phi, \mu; \cdot) - \sigma_T^\beta(\phi, \mu; \cdot)||_\infty, \ T, t \in (0, \infty). \tag{I.1.22}$$

Sea $T \in (0, \infty)$. Elegimos una función $\varphi \in C^\infty(0, \infty)$ tal que $\varphi(x) = 1$, $0 < x < 1$, y $\varphi(x) = 0$, $x > 2$. Es claro que $\varphi \in \mathcal{S}$ (donde, como es usual, $\mathcal{S}$ denota la clase de Schwartz) y, en virtud del Corolario 4.8 [28], $\Phi = {}_{\mu}(\varphi) \in \mathcal{S}$. Entonces del Lema 1.15 y de la unicidad de la transformación ${}_{\mu}$ sobre $L_{2,\mu}$ se sigue que

$$\tau_t[\sigma_{2T}^\beta(\phi, \mu; x) - \sigma_T^\beta(\phi, \mu; x)] - [\sigma_{2T}^\beta(\phi, \mu; x) - \sigma_T^\beta(\phi, \mu; x)] =$$

$$= \Phi_T\#(f_{2T,\beta} - f_{T,\beta})\#(\tau_t\phi - \phi)(x) =$$

$$= (\tau_t\Phi_T - \Phi_T)\#(f_{2T,\beta} - f_{T,\beta})\#\phi(x), \text{ para casi todo } x \in (0, \infty),$$

donde $\Phi_T(x) = (2T)^{2\mu+2}\Phi(2Tx)$, $x \in (0, \infty)$.

Recurriendo ahora al Teorema 2.b [42] y al Corolario 2.2 [37] obtenemos

$$||\Delta(\sigma_{2T}^\beta(\phi, \mu; \cdot) - \sigma_T^\beta(\phi, \mu; \cdot), \cdot, t)||_\infty \leq$$

$$\leq C||\sigma_{2T}^\beta(\phi, \mu; \cdot) - \sigma_T^\beta(\phi, \mu; \cdot)||_\infty \int_0^\infty |\tau_t\Phi_T(x) - \Phi_T(x)|d\gamma(x) \leq$$

$$\leq CTt||\sigma_{2T}^\beta(\phi, \mu; \cdot) - \sigma_T^\beta(\phi, \mu; \cdot)||_\infty, \ T, t \in (0, \infty). \tag{I.1.23}$$

De (I.1.21), (I.1.22) y (I.1.23) inferimos

$$\begin{aligned}||\tau_t\phi - \phi||_\infty &\leq C\Big(t\int_0^{1/t} ||\sigma_{2T}^\beta(\phi,\mu;\cdot) - \sigma_T^\beta(\phi,\mu;\cdot)||_\infty dT + \\ &+ \int_{1/t}^\infty ||\sigma_{2T}^\beta(\phi,\mu;\cdot) - \sigma_T^\beta(\phi,\mu;\cdot)||_\infty \frac{dT}{T}\Big) \leq \\ &\leq C\Big(t\int_0^{1/t} T^{-\alpha}dT + \int_{1/t}^\infty T^{-1-\alpha}dT\Big) \leq Ct^\alpha,\ t\in(0,\infty).\end{aligned}$$

Probamos así que $\phi \in \Lambda H_\alpha$. □

Observamos que de la demostración anterior puede deducirse lo siguiente

Proposición 1.18 *Sean* $\phi \in L_{2,\mu}$, $0<\alpha<1$, $\beta > -1/2$ *y* $-1/2 < \mu < \beta - 1/2 - \alpha$. *Si* $\phi \in L_\infty$ *y* $T^\alpha||\sigma_{2T}^\beta(\phi,\mu;\cdot) - \sigma_T^\beta(\phi,\mu;\cdot)||_\infty$ *está acotado en* $(0,\infty)$ *entonces* $\phi \in \Lambda H_\alpha$.

□

Damos ahora una condición necesaria para que una función en $L_{2,\mu}$ esté en ΛH_1.

Proposición 1.19 *Sean* $\phi \in \Lambda H_1 \bigcap L_{2,\mu}$ *y* $\beta > \mu + 1/2$. *Entonces, cuando* $T \to \infty$

$$||\sigma_T^\beta(\phi,\mu;\cdot) - \phi||_\infty = \begin{cases} O(T^{-1}), & \text{cuando } \beta > \mu + 3/2 \\ O(T^{2(\mu-\beta+1)}), & \text{cuando } \mu + 1/2 < \beta \leq \mu + 3/2 \end{cases}.$$

<u>Demostración</u>:

Sea $T \in (1,\infty)$. Tenemos que para cada $x \in (0,\infty)$

$$\sigma_T^\beta(\phi,\mu;x) - \phi(x) = 2^\beta\Gamma(\beta+1)T^{2(\mu+1)}\int_0^\infty [(\tau_t\phi)(x) - \phi(x)](Tt)^{-\mu-\beta-1}J_{\mu+\beta+1}(Tt)d\gamma(t).$$

Teniendo en cuenta que la función $z^{-\nu}J_\nu(z)$ es acotada sobre $(0,\infty)$ cuando $\nu \geq -1/2$, se sigue

$$T^{2(\mu+1)}\Big|\int_0^{1/T} [(\tau_t\phi)(x) - \phi(x)](Tt)^{-\mu-\beta-1}J_{\mu+\beta+1}(Tt)d\gamma(t)\Big| \leq \frac{C}{T},\ T\in(0,\infty).\quad \text{(I.1.24)}$$

También, ya que la función $\sqrt{z}J_\nu(z)$ es acotada sobre $(0,\infty)$ cuando $\nu \geq -1/2$, tenemos

$$T^{2(\mu+1)}\Big|\int_{1/T}^{T}[(\tau_t\phi)(x)-\phi(x)](Tt)^{-\mu-\beta-1}J_{\mu+\beta+1}(Tt)d\gamma(t)\Big| \leq$$

$$\leq CT^{\mu-\beta+1/2}\int_{1/T}^{T}t^{\mu-\beta+1/2}dt = C\Big(T^{2(\mu-\beta-1)}-\frac{1}{T}\Big),\ T\in(0,\infty). \tag{I.1.25}$$

Finalmente, al ser τ_t, $t\in(0,\infty)$, contractivo en L_∞ (p. 16, [71]), obtenemos

$$T^{2(\mu+1)}\Big|\int_{T}^{\infty}[(\tau_t\phi)(x)-\phi(x)](Tt)^{-\mu-\beta-1}J_{\mu+\beta+1}(Tt)d\gamma(t)\Big| \leq$$

$$\leq C||\phi||_\infty T^{\mu-\beta+1/2}\int_{T}^{\infty}t^{\mu-\beta-1/2}dt = CT^{2(\mu-\beta)+1}, T\in(0,\infty). \tag{I.1.26}$$

Para terminar la prueba basta combinar (I.1.24), (I.1.25) y (I.1.26). □

Probamos a continuación un resultado sobre aproximación de $\phi \in L_{2,\mu}\bigcap \Lambda H_\alpha$ por integrales parciales de Hankel de ϕ en una norma mixta. Antes necesitamos establecer dos resultados auxiliares.

Lema 1.20 *Sea $\phi\in L_{2,\mu}$. Entonces para cada $0<T\leq\nu$*

$$S_\nu[\sigma_T^\beta(\phi,\mu;\cdot),\mu;x] = \sigma_T^\beta(\phi,\mu;x),\ \textit{para casi todo } x\in(0,\infty).$$

<u>Demostración</u>:

Es suficiente aplicar el Lema 1.15 y tener en cuenta la fórmula (33), p.16 [30]. □

Lema 1.21 *Sean $\phi\in L_{2,\mu}$ y $T\in(0,\infty)$. Si se verifica una de las siguientes condiciones*

(i) $q\in(1,2]$ y $\mu<1/2-1/q$;

(ii) $q\in(1,2]$ y $\mu<q-2$;

(iii) $q\in[2,\infty)$ y $\mu<\dfrac{2-q}{q-1}$;

(iv) $q\in[2,\infty)$ y $\mu<1/q-1/2$,

entonces

$$\Big\{\frac{1}{T}\int_0^T |S_\nu(\phi,\mu;x)|^q d\nu\Big\}^{1/q} \leq C||\phi||_\infty,\ x,T\in(0,\infty), \tag{I.1.27}$$

donde $C>0$ *no depende de* $x,T\in(0,\infty)$.

<u>Demostración</u>:

La contractividad de τ_x, $x\in(0,\infty)$, sobre L_∞ conduce a

$$\frac{1}{T}\int_0^T \Big[\int_0^{1/T} |(\tau_x\phi)(y)\nu^{2(\mu+1)}|\,|(y\nu)^{-\mu-1}J_{\mu+1}(y\nu)|d\gamma(y)\Big]^q d\nu \leq$$

$$\leq C||\phi||_\infty^q \frac{1}{T}\int_0^T \Big(\frac{\nu}{T}\Big)^{2(\mu+1)q} d\nu = C||\phi||_\infty^q,\ T\in(0,\infty).$$

Supongamos ahora que $q\geq 2$. En virtud del Teorema 3 [41] podemos escribir

$$\frac{1}{T}\int_0^T \Big|\int_{1/T}^\infty (\tau_x\phi)(y)\nu^{2(\mu+1)}(y\nu)^{-\mu-1}J_{\mu+1}(y\nu)y^{2\mu+1}dy\Big|^q d\nu =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T \nu^{2(\mu+1)(q-1)-1}\Big|\int_{1/T}^\infty \frac{(\tau_x\phi)(y)}{y^2}(y\nu)^{-\mu-1}J_{\mu+1}(y\nu)y^{2\mu+3}dy\Big|^q \nu^{2\mu+3}d\nu \leq$$

$$\leq T^{2(\mu+1)(q-1)-2}\int_0^\infty \Big|\int_{1/T}^\infty \frac{(\tau_x\phi)(y)}{y^2}(y\nu)^{-\mu-1}J_{\mu+1}(y\nu)y^{2\mu+3}dy\Big|^q \nu^{2\mu+3}d\nu \leq$$

$$\leq CT^{2(\mu+1)(q-1)-2}\Big\{\int_{1/T}^\infty \Big|\frac{(\tau_x\phi)(y)}{y^2}\Big|^{q'} y^{2\mu+3}dy\Big\}^{q/q'} \leq$$

$$\leq CT^{2(\mu+1)(q-1)-2}||\phi||_\infty^q \Big\{\int_{1/T}^\infty y^{2\mu+3-2q'}dy\Big\}^{q/q'} \leq C||\phi||_\infty^q,\ T\in(0,\infty),$$

siempre que $\mu<\dfrac{2-q}{q-1}$.

Por tanto, las estimaciones anteriores permiten concluir que (iii) implica (I.1.27).

Tenemos ahora $q\in(1,2]$. De la desigualdad de Hölder sigue

$$\Big\{\frac{1}{T}\int_0^T |S_\nu(\phi,\mu;x)|^q d\nu\Big\}^{1/q} \leq \Big\{\frac{1}{T}\int_0^T |S_\nu(\phi,\mu;x)|^{q'} d\nu\Big\}^{1/q'}. \tag{I.1.28}$$

De (I.1.28) se deduce que (ii) implica (iii) donde q es reemplazado por q'. Por tanto (I.1.27) sigue de (ii).

Para ver que de (i) y (iv) se infiere (I.1.27) es suficiente tener en cuenta p. 180 [21] y proceder como en los casos anteriores. □

Proposición 1.22 *Sean* $\phi \in \Lambda H_\alpha \bigcap L_{2,\mu}$ *y* $0 < \alpha < 1$. *Si* $1 < q < 1/\alpha$ *y además* q *satisface una de las cuatro condiciones enunciadas en el Lema 1.21, entonces*

$$\Big|\Big|\Big\{\frac{1}{T}\int_0^T |S_\nu(\phi,\mu;x) - \phi(x)|^q d\nu\Big\}^{1/q}\Big|\Big|_\infty \leq CT^{-\alpha},\ T \in (0,\infty).$$

Demostración:

En virtud de los Lemas 1.20 y 1.21 y de la Proposición 1.17 tenemos

$$\Big\{\frac{1}{T}\int_T^{2T} |S_\nu(\phi,\mu;x) - \phi(x)|^q d\nu\Big\}^{1/q} =$$

$$= \Big\{\frac{1}{T}\int_T^{2T} |S_\nu[\phi - \sigma_T^\beta(\phi,\mu;\cdot),\mu;x] + \sigma_T^\beta(\phi,\mu;x) - \phi(x)|^q d\nu\Big\}^{1/q} \leq$$

$$\leq C\left[\Big\{\frac{1}{T}\int_T^{2T} |S_\nu[(\phi - \sigma_T^\beta(\phi,\mu;\cdot),\mu;x]|^q d\nu\Big\}^{1/q} + ||\sigma_T^\beta(\phi,\mu;\cdot) - \phi||_\infty\right] \leq$$

$$\leq C\left[\Big\{\frac{1}{T}\int_0^{2T} |S_\nu[(\phi - \sigma_T^\beta(\phi,\mu;\cdot),\mu;x]|^q d\nu + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{T}\int_0^T |S_\nu[(\phi - \sigma_T^\beta(\phi,\mu;\cdot),\mu;x]|^q d\nu\Big\}^{1/q} + ||\sigma_T^\beta(\phi,\mu;\cdot) - \phi||_\infty\right] \leq$$

$$\leq C||\sigma_T^\beta(\phi,\mu;\cdot) - \phi||_\infty \leq CT^{-\alpha}, T \in (0,\infty).$$

Por tanto, para cada $k \in I\!\!N$ y $x, T \in (0,\infty)$ se sigue

$$\frac{1}{T}\int_{T/2^{k+1}}^{T/2^k} |S_\nu(\phi,\mu;x) - \phi(x)|^q d\nu \leq CT^{-\alpha q}2^{(\alpha q - 1)k}.$$

Obtenemos entonces que

$$\frac{1}{T}\int_0^T |S_\nu(\phi,\mu;x) - \phi(x)|^q d\nu \leq C\sum_{k=0}^\infty 2^{(\alpha q-1)k}T^{-\alpha q} \leq CT^{-\alpha q},$$

para cada $x, T \in (0,\infty)$, y queda demostrado el resultado. □

Probamos en esta sección que las integrales parciales de Hankel $S_T(\phi,\mu;x)$ convergen a ϕ, cuando $T\to\infty$, en L_∞, siempre que ϕ sea una función de un espacio de Lipschitz-Hankel que definimos a continuación.

Sea $\alpha>0$. Decimos que una función $\phi\in L_{p,\mu}$ está en $\Lambda H^{\mu}_{p,\alpha}$ si $\dfrac{w_p(\phi)}{x^\alpha}\in L_{1,\mu}$, donde $w_p(\phi)=||\tau_x\phi-\phi||_p$, $x\in(0,\infty)$.

El siguiente resultado es una extensión del Lema 1.20.

Lema 1.23 *Sean $\beta>\mu+1/2$ y $\dfrac{4(\mu+1)}{2\mu+3}<p<\dfrac{4(\mu+1)}{2\mu+1}$. Entonces para cada $\phi\in L_{p,\mu}$ y $0<T\leq\nu<\infty$ se tiene*

$$S_T[S_\nu(\phi,\mu;\cdot),\mu;x]=S_\nu[S_T(\phi,\mu;\cdot),\mu;x]=S_T(\phi,\mu;x), \tag{I.1.29}$$

y

$$\sigma_T^\beta[S_\nu(\phi,\mu;\cdot),\mu;x]=\sigma_T^\beta(\phi,\mu;x), \tag{I.1.30}$$

para casi todo $x\in(0,\infty)$.

<u>Demostración</u>:

Sean $\phi\in C_0$ y $T\in(0,\infty)$. Ya que $\varphi_T\in L_{2,\mu}$, del Lema 1.15 se sigue

$${}_{\mu}(\varphi_T\#\phi)={}_{\mu}(\varphi_T)_{\mu}(\phi).$$

Luego, si $\nu\geq T$

$$S_\nu[S_T(\phi,\mu;\cdot),\mu;x]=\int_0^\nu y^{2\mu+1}(xy)^{-\mu}J_\mu(xy)_{\mu}(\varphi_T)(y)_{\mu}(\phi)(y)dy=$$

$$=\int_0^T y^{2\mu+1}(xy)^{-\mu}J_\mu(xy)_{\mu}(\phi)(y)dy=S_T(\phi,\mu;x),\ x\in(0,\infty).$$

De un modo similar podemos ver que

$$S_T[S_\nu(\phi,\mu;\cdot),\mu;x]=S_T(\phi,\mu;x),\ x\in(0,\infty).$$

Por otra parte cada uno de los miembros de la igualdad (I.1.29) define un operador lineal acotado de $L_{p,\mu}$ en sí mismo, (véase Corolario 1 [44]). Ya que C_0 es denso en $L_{p,\mu}$, (I.1.29) es válida para cada $\phi \in L_{p,\mu}$.

Para probar (I.1.30) se procede análogamente. $\square$

Lema 1.24 *Sean* $\phi \in \Lambda H^{\mu}_{p,2(\mu+1)(1/p+1)}$ *y* $\dfrac{4(\mu+1)}{2\mu+3} < p < \dfrac{4(\mu+1)}{2\mu+1}$. *Entonces existen* $C > 0$ *y* $a > 1$ *tales que para cada* $0 < T \leq \nu \leq aT$

$$||S_\nu(\phi,\mu;\cdot) - S_T(\phi,\mu;\cdot)||_\infty \leq C \int_{1/T}^{a/T} \frac{w_p(\phi)(t)}{t^{2(\mu+1)(1/p+1)}} d\gamma(t).$$

Demostración:

Sean $a > 1$ y $0 < T \leq \nu \leq aT$. Definimos la función

$$g(x) = S_\nu(\phi,\mu;x) - S_T(\phi,\mu;x),\ x \in (0,\infty).$$

Nótese que $g \in L_{p,\mu}$.

Tomamos $\beta > \mu + 1/2$. De acuerdo con el Lema 1.23, $\sigma_T^\beta(g,\mu;x) = 0$, para casi todo $x \in (0,\infty)$. Por tanto, podemos escribir

$$g(x) = g(x) - \sigma_T^\beta(g,\mu;x) = \int_0^\infty [g(x) - (\tau_t g)(x)] f_{T,\beta}(t) d\gamma(t) =$$

$$= \Big(\int_0^{1/T} + \int_{1/T}^{a/T} + \int_{a/T}^\infty \Big) [g(x) - (\tau_t g)(x)] f_{T,\beta}(t) d\gamma(t),\ \text{para casi todo } x \in (0,\infty).$$

Analizamos ahora cada una de las tres integrales de la última igualdad.

En virtud del Teorema 2.a [42] y ya que τ_t, $t \in (0,\infty)$, es un operador contractivo en L_∞, tenemos

$$\Big| \int_0^{1/T} [g(x) - (\tau_t g)(x)] f_{T,\beta}(t) d\gamma(t) \Big| \leq \int_0^{1/T} |g(x) - (\tau_t g)(x)|\, |f_{T,\beta}(t)| d\gamma(t) =$$

$$= \frac{2^\beta \Gamma(\beta+1)}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} \int_0^{1/T} (Tt)^{2\mu+1} T |(Tt)^{-\mu-\beta-1} J_{\mu+\beta+1}(Tt)|\, |g(x) - (\tau_t g)(x)| dt \leq$$

$$\leq ||g||_\infty \frac{\Gamma(\beta+1)}{2^{2\mu}\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu+\beta+2)},\ x \in (0,\infty).$$

También,

$$\Big| \int_{a/T}^{\infty} [g(x) - (\tau_t g)(x)] f_{T,\beta}(t) d\gamma(t) \Big| \leq$$

$$\leq \frac{2^\beta \Gamma(\beta+1) T^{\mu-\beta+1/2} ||g||_\infty}{2^{\mu-1}\Gamma(\mu+1)} \sup_{z>0} |z^{1/2} J_{\mu+\beta+1}(z)| \int_{a/T}^{\infty} t^{\mu-\beta-1/2} dt =$$

$$= \frac{2^\beta \Gamma(\beta+1) a^{\mu-\beta+1/2} ||g||_\infty}{2^{\mu-1}\Gamma(\mu+1)(\beta-\mu-1/2)} \sup_{z>0} |z^{1/2} J_{\mu+\beta+1}(z)|,\ x \in (0,\infty).$$

La acotación de la función $\sqrt{z} J_{\mu+\beta+1}(z)$ sobre $(0,\infty)$ nos permite elegir $a > 1$ tal que

$$\delta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{2^{2\mu}\Gamma(\mu+1)\Gamma(\mu+\beta+2)} + \frac{2^\beta \Gamma(\beta+1) a^{\mu-\beta+1/2} \sup_{z>0} |z^{1/2} J_{\mu+\beta+1}(z)|}{2^{\mu-1}\Gamma(\mu+1)(\beta-\mu-1/2)} < 1.$$

De este modo, obtenemos

$$\Big| \Big(\int_0^{1/T} + \int_{a/T}^{\infty} \Big) [g(x) - (\tau_t g)(x)] f_{T,\beta}(t) d\gamma(t) \Big| \leq \delta ||g||_\infty,\ x \in (0,\infty). \qquad \text{(I.1.31)}$$

Por otra parte, intercambiando el orden de integración, se sigue que para cada $\psi \in C_0$

$$\tau_t[S_T(\psi,\mu;\cdot)](x) = \int_0^\infty D(x,t,z) \int_0^T u^{2\mu+1} (zu)^{-\mu} J_\mu(zu)_\mu(\psi)(u) du d\gamma(z) =$$

$$= \int_0^T u^{2\mu+1}{}_\mu(\psi)(u) \int_0^\infty D(x,t,z)(zu)^{-\mu} J_\mu(zu) d\gamma(z) du =$$

$$= \int_0^T u^{2\mu+1} (ux)^{-\mu} J_\mu(ux)_\mu(\tau_t\psi)(u) du = S_T(\tau_t\psi,\mu;x),\ t,x \in (0,\infty).$$

Ya que S_T y τ_t son operadores acotados en $L_{p,\mu}$ concluimos que

$$\tau_t[S_T(\phi,\mu;\cdot)](x) = S_T(\tau_t(\phi),\mu;x),\ t \in (0,\infty) \text{ y casi todo } x \in (0,\infty). \qquad \text{(I.1.32)}$$

Luego, de (I.1.32) inferimos

$$||\tau_t g - g||_\infty = ||S_\nu(\phi - \tau_t\phi,\mu;\cdot) - S_T(\phi - \tau_t\phi,\mu;\cdot)||_\infty \leq$$

$$\leq ||S_\nu(\phi - \tau_t\phi, \mu, \cdot)||_\infty + ||S_T(\phi - \tau_t\phi, \mu; \cdot)||_\infty,\ t \in (0, \infty). \qquad \text{(I.1.33)}$$

Además, del Teorema 2.b [42] se deduce

$$||S_T(\phi - \tau_t\phi, \mu; \cdot)||_\infty \leq C||\varphi_T||_{p',\mu}||\phi - \tau_t\phi||_{p,\mu} \leq$$

$$\leq CT^{2(\mu+1)/p}||\phi - \tau_t\phi||_{p,\mu},\ t \in (0, \infty). \qquad \text{(I.1.34)}$$

Combinando (I.1.33) y (I.1.34) obtenemos

$$||\tau_t g - g||_\infty \leq CT^{2(\mu+1)/p}||\phi - \tau_t\phi||_{p,\mu},\ t \in (0, \infty),$$

y entonces

$$\Big|\int_{1/T}^{a/T}[g(x) - (\tau_t g)(x)]f_{T,\beta}(t)d\gamma(t)\Big| \leq \int_{1/T}^{a/T}||g - \tau_t g||_\infty|f_{T,\beta}(t)|d\gamma(t) \leq$$

$$\leq C\int_{1/T}^{a/T}T^{2(\mu+1)(p+1)/p}||\phi - \tau_t\phi||_{p,\mu}t^{2\mu+1}dt \leq$$

$$\leq C\int_{1/T}^{a/T}\frac{w_p(\phi)(t)}{t^{2(\mu+1)(1/p+1)}}d\gamma(t). \qquad \text{(I.1.35)}$$

De (I.1.31) y (I.1.35) concluimos que

$$||g||_\infty \leq C\int_{1/T}^{a/T}\frac{w_p(\phi)(t)}{t^{2(\mu+1)(1/p+1)}}d\gamma(t).$$

□

Nuestro próximo resultado establece la convergencia en L_∞ de $S_T(\phi, \mu; \cdot)$ a ϕ, cuando $T \to \infty$, siempre que ϕ sea adecuada, y completa otros conocidos (Teorema 3.1 [24], Teorema 5 [41] y Corolario 1 [44]).

Proposición 1.25 *Sean* $\phi \in \Lambda H^\mu_{p,2(\mu+1)(1/p+1)}$ *y* $\dfrac{4(\mu+1)}{2\mu+3} < p < \dfrac{4(\mu+1)}{2\mu+1}$. *Entonces*

$$||S_T(\phi, \mu; \cdot) - \phi||_\infty \longrightarrow 0,\ \textit{cuando}\ T \to \infty.$$

Demostración:

Sea $0 < T \leq \nu$. Elegimos $n \in I\!N$ de manera que $a^n T \leq \nu \leq a^{n+1}T$, donde a es la constante positiva obtenida en el Lema 1.24. De este último lema se infiere

$$||S_\nu(\phi,\mu;\cdot) - S_T(\phi,\mu;\cdot)||_\infty \leq ||S_\nu(\phi,\mu;\cdot) - S_{a^nT}(\phi,\mu;\cdot)||_\infty +$$
$$+\sum_{k=0}^{n-1} ||S_{a^{(k+1)}T}(\phi,\mu;\cdot) - S_{a^kT}(\phi,\mu;\cdot)||_\infty \leq$$
$$\leq C\int_0^\infty \frac{w_p(\phi)(t)}{t^{2(\mu+1)(1/p+1)}}d\gamma(t).$$

Entonces el Lema 1.23 permite escribir

$$||S_\nu(\phi,\mu;\cdot) - S_T(\phi,\mu;\cdot)||_\infty \leq C\int_0^\infty \frac{w_p[S_\nu(\phi,\mu;\cdot) - S_T(\phi,\mu;\cdot)](t)}{t^{2(\mu+1)(1/p+1)}}d\gamma(t).$$

Además, ya que τ_t es un operador contractivo en $L_{p,\mu}$ (p.16, [71]), del Teorema 5 [41] y el Corolario 1 [44] sigue

$$w_p[S_\nu(\phi,\mu;\cdot) - S_T(\phi,\mu;\cdot)](t) \leq 2(||S_\nu(\phi,\mu;\cdot) - \phi||_{p,\mu} +$$
$$+||S_T(\phi,\mu;\cdot) - \phi||_{p,\mu}) \longrightarrow 0, \text{ cuando } \nu, T \to \infty,$$

para cada $t \in (0,\infty)$.

Por tanto, ya que en virtud del Corolario 1 [44]

$$w_p[S_\nu(\phi,\mu;\cdot) - S_T(\phi,\mu;\cdot)](t) \leq Cw_p(\phi)(t), \ t \in (0,\infty),$$

concluimos que

$$||S_\nu(\phi,\mu;\cdot) - S_T(\phi,\mu;\cdot)||_\infty \longrightarrow 0, \text{ cuando } \nu, T \to \infty.$$

Basta recurrir ahora al Corolario 3.2 [24] para terminar la prueba. □

Introducimos ahora los espacios de funciones que llamaremos de Besov-Hankel ya que su definición recuerda a los espacios de Besov usuales ([35] y [46]).

Sean $\alpha > 0$ y $1 \leq p, r < \infty$. Una función $\phi \in L_{p,\mu}$ está en el espacio de Besov-Hankel $BH_\alpha^{p,r}$ si

$$\int_0^\infty \Big(\frac{w_p(\phi)(t)}{t^\alpha}\Big)^r \frac{dt}{t} < \infty,$$

donde como en la Sección I.1.4 $w_p(\phi)(t) = ||\tau_t\phi - \phi||_{p,\mu}, t \in (0, \infty)$.

En esta sección caracterizamos los espacios $BH_\alpha^{p,r}$ mediante las integrales parciales de Hankel y las medias de Böchner-Riesz.

Necesitamos probar primero dos resultados. El primero de ellos es una extensión del Lema 1.16 y puede ser probado de un modo similar.

Lema 1.26 *Sean $\beta > \mu + 1/2$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces para cada $\phi \in L_{p,\mu}$*

$$\phi(x)ln2 = \int_0^\infty [\sigma_{2T}^\beta(\phi, \mu; x) - \sigma_T^\beta(\phi, \mu; x)]\frac{dT}{T}, \textit{ para casi todo } x \in (0, \infty).$$

□

Lema 1.27 *Sean $\alpha, \beta \in I\!R$, $-1/2 < \mu < \beta - \alpha - 1/2$ y $1 \leq p < \infty$. Si ϕ es una función localmente integrable sobre $(0, \infty)$ entonces*

$$\Big\{\int_0^\infty |t^{\alpha+\mu-\beta+1/2}\int_{1/t}^\infty z^{\mu-\beta-1/2}\phi(z)dz|^p\frac{dt}{t}\Big\}^{1/p} \leq C\Big\{\int_0^\infty |t^{-\alpha}\phi(t)|^p\frac{dt}{t}\Big\}^{1/p}. \quad \text{(I.1.36)}$$

Demostración:

Tras un cambio de variables obtenemos

$$G(t) = t^{\alpha+\mu-\beta+1/2}\int_{1/t}^\infty z^{\mu-\beta-1/2}\phi(z)dz = t^\alpha\int_1^\infty z^{\mu-\beta-1/2}\phi(\frac{z}{t})dz,\ t \in (0, \infty).$$

Sea $1 < p < \infty$. El Teorema de Fubini y la desigualdad de Hölder conducen a

$$\int_0^\infty |G(t)|^p\frac{dt}{t} \leq \int_0^\infty |G(t)|^{p-1}\int_1^\infty t^{\alpha-1}z^{\mu-\beta-1/2}|\phi(\frac{z}{t})|dzdt =$$

$$= \int_1^\infty \int_0^\infty |G(t)|^{p-1} t^{\alpha-1} z^{\mu-\beta-1/2} |\phi(\frac{z}{t})| dt dz \leq$$
$$\leq \int_1^\infty z^{\mu-\beta-1/2} \Big\{ \int_0^\infty |G(t)|^{(p-1)p'} \frac{dt}{t} \Big\}^{1/p'} \Big\{ \int_0^\infty |t^\alpha \phi(\frac{z}{t})|^p \frac{dt}{t} \Big\}^{1/p} dz.$$

Una sencilla manipulación permite concluir ya (I.1.36) en este caso.

Finalmente, si $p = 1$, (I.1.36) sigue inmediatamente sin más que intercambiar el orden de integración. □

A continuación caracterizamos los espacios de Besov-Hankel a través de las medias de Böchner-Riesz.

Proposición 1.28 *Sean $0 < \alpha < 1$, $-1/2 < \mu < \beta - \alpha - 1/2$, $1 \leq p, r < \infty$ y $\phi \in L_{p,\mu}$. Las tres propiedades que siguen*

(i) $\phi \in BH_\alpha^{p,r}$,

(ii) $T^\alpha ||\sigma_T^\beta(\phi, \mu; \cdot) - \phi||_{p,\mu} \in L_r((0,\infty), \frac{dT}{T})$,

(iii) $T^\alpha ||\sigma_{2T}^\beta(\phi, \mu; \cdot) - \sigma_T^\beta(\phi, \mu; \cdot)||_{p,\mu} \in L_r((0,\infty), \frac{dT}{T})$,

son equivalentes.

Demostración:

$(i) \Rightarrow (ii)$. Supongamos que $\phi \in BH_\alpha^{p,r}$. La desigualdad de Minkowski generalizada conduce a

$$||\sigma_T^\beta(\phi, \mu; \cdot) - \phi||_{p,\mu} \leq \int_0^{1/T} |f_{F,\beta}(z)| w_p(\phi)(z) d\gamma(z) + \int_{1/T}^\infty |f_{T,\beta}(z)| w_p(\phi)(z) d\gamma(z) \leq$$
$$\leq C\Big(T^{2\mu+2} \int_0^{1/T} w_p(\phi)(z) z^{2\mu+1} dz + T^{\mu-\beta+1/2} \int_{1/T}^\infty z^{\mu-\beta-1/2} w_p(\phi)(z) dz \Big) \leq$$
$$\leq C\Big(T \int_0^{1/T} w_p(\phi)(z) dz + T^{\mu-\beta+1/2} \int_{1/T}^\infty z^{\mu-\beta-1/2} w_p(\phi)(z) dz \Big),\ T \in (0,\infty).$$

Entonces del Lema 6 [35] y del Lema 1.27 podemos inferir

$$\Big\{ \int_0^\infty [T^\alpha ||\sigma_T^\beta(\phi, \mu; \cdot) - \phi||_{p,\mu}]^r \frac{dT}{T} \Big\}^{1/r} \leq C\Big(\Big\{ \int_0^\infty [T^{\alpha+1} \int_0^{1/T} w_p(\phi)(z) dz]^r \frac{dT}{T} \Big\}^{1/r} +$$

$$+\Big\{\int_0^\infty [T^{\alpha+\mu-\beta+1/2}\int_{1/T}^\infty z^{\mu-\beta-1/2}w_p(\phi)(z)dz]^r \frac{dT}{T}\Big\}^{1/r}\Big) \leq$$
$$\leq C\Big\{\int_0^\infty \Big(\frac{w_p(\phi)(z)}{z^\alpha}\Big)^r \frac{dz}{z}\Big\}^{1/r} < \infty.$$

De este modo hemos establecido (ii).

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Es claro.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Definimos el operador Δ como sigue

$$\Delta(\phi, x, t) = (\tau_t\phi)(x) - \phi(x), \ x, t \in (0, \infty).$$

Ya que τ_t, $t \in (0, \infty)$, es un operador acotado (contractivo, p.16 [71]) de $L_{p,\mu}$ en sí mismo, $\tau_t\phi \in L_{p,\mu}$, para cada $t \in (0, \infty)$, de acuerdo con el Lema 1.26 podemos escribir

$$\Delta(\phi, x, t)ln2 = \int_0^\infty [(f_{2T,\beta} - f_{T,\beta})\#(\tau_t\phi - \phi)](x)\frac{dT}{T}, \text{ para cada } t \in (0, \infty), \quad \text{(I.1.37)}$$

y para casi todo $x \in (0, \infty)$.

Además, si $\psi \in L_{1,\mu}$ y $\varphi \in L_{p,\mu}$, entonces

$$\tau_t(\psi\#\varphi) = \psi\#(\tau_t\varphi) = (\tau_t\psi)\#\varphi, \ t \in (0, \infty). \quad \text{(I.1.38)}$$

Para probar (I.1.38) es suficiente observar que cada término de la igualdad define un operador bilineal acotado de $L_{1,\mu}$ x $L_{p,\mu}$ en $L_{p,\mu}$ (véanse, p.16 [71] y Teorema 2.b [42]) y que (I.1.38) es válido cuando ψ y φ están en C_0, siendo C_0 un subespacio denso en $L_{p,\mu}$, $1 \leq p < \infty$.

De (I.1.37) y (I.1.38) se sigue que

$$\Delta(\phi, x, t)ln2 = \int_0^\infty \Delta(\sigma_{2T}^\beta(\phi, \mu; \cdot) - \sigma_T^\beta(\phi, \mu; \cdot), x, t)\frac{dT}{T}, \quad \text{(I.1.39)}$$

para cada $t \in (0, \infty)$ y para casi todo $x \in (0, \infty)$.

La contractividad de τ_t, $t \in (0, \infty)$, sobre $L_{p,\mu}$, implica

$$||\Delta(\sigma_{2T}^\beta(\phi, \mu; \cdot) - \sigma_T^\beta(\phi, \mu; \cdot), \cdot, t)||_{p,\mu} \leq 2||\sigma_{2T}^\beta(\phi, \mu; \cdot) - \sigma_T^\beta(\phi, \mu; \cdot)||_{p,\mu}, \quad \text{(I.1.40)}$$

para cada $t, T \in (0, \infty)$.

También tenemos que

$$||\Delta(\sigma_{2T}^{\beta}(\phi,\mu;\cdot) - \sigma_{T}^{\beta}(\phi,\mu;\cdot),\cdot,t)||_{p,\mu} \leq CtT||\sigma_{2T}^{\beta}(\phi,\mu;\cdot) - \sigma_{T}^{\beta}(\phi,\mu;\cdot)||_{p,\mu}, \qquad \text{(I.1.41)}$$

para $t, T \in (0, \infty)$. Ya que $\Delta(\sigma_{2T}^{\beta}(\phi,\mu;\cdot) - \sigma_{T}^{\beta}(\phi,\mu;\cdot),\cdot,t)$ y $\sigma_{2T}^{\beta}(\phi,\mu;\cdot) - \sigma_{T}^{\beta}(\phi,\mu;\cdot)$ definen operadores acotados de $L_{p,\mu}$ en sí mismo, para cada $T, t \in (0, \infty)$, para probar la desigualdad (I.1.41) es suficiente verificarla sobre C_0. Esto fue probado en la demostración de la Proposición 1.17.

Combinando (I.1.39), (I.1.40), (I.1.41) y teniendo en cuenta la desigualdad de Minkowski generalizada obtenemos

$$w_p(\phi)(t) \leq C\Big\{\int_0^{1/t} t||\sigma_{2T}^{\beta}(\phi,\mu;\cdot) - \sigma_{T}^{\beta}(\phi,\mu;\cdot)||_{p,\mu}dT +$$

$$+\int_{1/t}^{\infty} ||\sigma_{2T}^{\beta}(\phi,\mu;\cdot) - \sigma_{T}^{\beta}(\phi,\mu;\cdot)||_{p,\mu}\frac{dT}{T}\Big\},\ t \in (0,\infty).$$

Entonces del Lema 4 [35] se infiere

$$\Big\{\int_0^{\infty}\Big(\frac{w_p(\phi)}{t^{\alpha}}\Big)^r\frac{dt}{t}\Big\}^{1/r} \leq C\Big\{\int_0^{\infty}(T^{\alpha}||\sigma_{2T}^{\beta}(\phi,\mu;\cdot) - \sigma_{T}^{\beta}(\phi,\mu;\cdot)||_{p,\mu})^r\frac{dT}{T}\Big\}^{1/r},$$

y probamos así (i). □

A continuación caracterizamos los espacios de Besov-Hankel mediante las integrales parciales de Hankel.

Proposición 1.29 *Sean* $0 < \alpha < 1$, $\dfrac{4(\mu+1)}{2\mu+3} < p < \dfrac{4(\mu+1)}{2\mu+1}$, $1 \leq r < \infty$ *y* $\phi \in L_{p,\mu}$. *Entonces las tres propiedades que siguen*

(i) $\phi \in BH_{\alpha}^{p,r}$,

(ii) $T^{\alpha}||S_T(\phi,\mu;\cdot) - \phi||_{p,\mu} \in L_r((0,\infty), \frac{dT}{T})$,

(iii) $T^{\alpha}||S_{2T}(\phi,\mu;\cdot) - S_T(\phi,\mu;\cdot)||_{p,\mu} \in L_r((0,\infty), \frac{dT}{T})$,

son equivalentes.

Demostración:

Elegimos $\beta > \mu + \alpha + 3/2$. Nótese que $\beta > 1$.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Sea $T \in (0, \infty)$. Observamos inicialmente que

$$S_T(\sigma_T^\beta(\phi, \mu; \cdot), \mu; x) = \sigma_T^\beta(\phi, \mu; x), \text{ para casi todo } x \in (0, \infty). \tag{I.1.42}$$

Para probar (I.1.42) es suficiente ver que se verifica cuando ϕ es reemplazada por una función $\psi \in C_0$, ya que C_0 es denso en $L_{p,\mu}$ y S_T y σ_T^β son operadores acotados de $L_{p,\mu}$ en sí mismo. (I.1.42) sigue entonces sin más que tener en cuenta que del Teorema 2.d [42] se deduce que

$${}_{\mu}(\sigma_T^\beta(\psi, \mu; \cdot)) = {}_{\mu}(f_{T,\beta})_{\mu}(\psi), \psi \in C_0.$$

La familia $\{S_T\}_{T \in (0,\infty)}$ de operadores de $L_{p,\mu}$ en sí mismo es acotada (Corolario 1 [44]). Aplicando (I.1.42) obtenemos

$$||S_T(\phi, \mu; \cdot) - \phi||_{p,\mu} \leq ||S_T(\sigma_T^\beta(\phi, \mu; \cdot) - \phi, \mu; \cdot)||_{p,\mu} + ||\sigma_T^\beta(\phi, \mu; \cdot) - \phi||_{p,\mu} \leq$$

$$\leq C||\sigma_T^\beta(\phi, \mu; \cdot) - \phi||_{p,\mu}.$$

Por tanto (ii) puede ser deducido de la Proposición 1.28.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Es claro.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Comenzamos probando que para cada $T \in (0, \infty)$ y casi todo $x \in (0, \infty)$

$$\frac{2\beta}{T^{2\beta}} \int_0^T (T^2 - t^2)^{\beta - 1} t S_t(\phi, \mu; x) dt = \sigma_T^\beta(\phi, \mu; x). \tag{I.1.43}$$

Si $\psi \in C_0$ intercambiando el orden de integración obtenemos

$$\frac{2\beta}{T^{2\beta}} \int_0^T (T^2 - t^2)^{\beta - 1} t S_t(\psi, \mu; x) dt =$$

$$= \frac{2\beta}{T^{2\beta}} \int_0^T (T^2 - t^2)^{\beta - 1} t \int_0^t y^{2\mu+1} (xy)^{-\mu} J_\mu(xy)_{\mu}(\psi)(y) dy dt =$$

$$= \frac{2\beta}{T^{2\beta}} \int_0^T y^{2\mu+1} (xy)^{-\mu} J_\mu(xy)_{\mu}(\psi)(y) \int_y^T (T^2 - t^2)^{\beta - 1} t dt dy =$$

$$= \int_0^T y^{2\mu+1}(xy)^{-\mu}J_\mu(xy)(1-(\frac{y}{T})^2)^\beta {}_{\mu}(\psi)(y)dy = \sigma_T^\beta(\psi,\mu;x),\ T,x\in(0,\infty).$$

Sabemos que el término a la derecha de la igualdad (I.1.43) define un operador acotado de $L_{p,\mu}$ en sí mismo. Esta misma propiedad la tiene el término a la izquierda de (I.1.43). En efecto, de la desigualdad de Minkowski generalizada se sigue

$$\Big|\Big|\frac{2\beta}{T^{2\beta}}\int_0^T (T^2-t^2)^{\beta-1}tS_t(\phi,\mu;\cdot)dt\Big|\Big|_{p,\mu} \leq$$

$$\leq \frac{2\beta}{T^{2\beta}}\int_0^T (T^2-t^2)^{\beta-1}t||S_t(\phi,\mu;\cdot)||_{p,\mu}dt \leq C||\phi||_{p,\mu}.$$

Por tanto, ya que C_0 es denso en $L_{p,\mu}$, (I.1.43) es cierta.

Recurriendo de nuevo a la desigualdad de Minkowski generalizada y atendiendo al Lema 5 [35], obtenemos

$$\Big\{\int_0^\infty [T^\alpha||\sigma_{2T}^\beta(\phi,\mu;\cdot)-\sigma_T^\beta(\phi,\mu;\cdot)||_{p,\mu}]^r\frac{dT}{T}\Big\}^{1/r} \leq$$

$$\leq 2\beta\Big\{\int_0^\infty [T^{\alpha-2\beta}\int_0^T (T^2-t^2)^{\beta-1}t||S_{2t}(\phi,\mu;\cdot)-S_t(\phi,\mu;\cdot)||_{p,\mu}dt]^r\frac{dT}{T}\Big\}^{1/r} \leq$$

$$\leq 2\beta\Big\{\int_0^\infty [T^{\alpha-1}\int_0^T ||S_{2t}(\phi,\mu;\cdot)-S_t(\phi,\mu;\cdot)||_{p,\mu}dt]^r\frac{dT}{T}\Big\}^{1/r} \leq$$

$$\leq C\Big\{\int_0^\infty [T^\alpha||S_{2T}(\phi,\mu;\cdot)-S_T(\phi,\mu;\cdot)||_{p,\mu}]^r\frac{dT}{T}\Big\}^{1/r}.$$

La prueba termina aplicando la Proposición 1.28. □

En p. 115 [75] se presentan algunos resultados relativos a la integrabilidad de la transformada de Fourier de funciones que satisfacen una condición de Lipschitz. En esta sección probaremos que la transformada de Hankel ${}_{\mu}(\phi)$ de ϕ está en $L_{1,\mu}$ cuando ϕ pertenece a adecuados espacios de Lipschitz-Hankel. Aquí, como en la Sección I.1.4, por $\Lambda H_{p,\alpha}^\mu$ representaremos el espacio formado por aquellas funciones $\phi\in L_{p,\mu}$ tales que $\dfrac{w_p(\phi)}{x^\alpha}\in L_{1,\mu}$, donde $w_p(\phi)(x)=||\tau_x\phi-\phi||_p$, $x\in(0,\infty)$.

Haremos uso del siguiente resultado que es una consecuencia del conocido Teorema de interpolación de Marcinkiewicz.

Lema 1.30 *Sea* $1 < p \leq 2$. *Para cada* $\phi \in L_{p,\mu}$ *tenemos*

$$\int_0^\infty x^{2(\mu+1)(p-2)}|_\mu(\phi)(x)|^p d\gamma(x) \leq C \int_0^\infty |\phi(x)|^p d\gamma(x).$$

<u>Demostración</u>:

El procedimiento seguido es similar al empleado en el Teorema 1 [1]. Definimos el operador

$$(T\phi)(x) = x^{2(\mu+1)}{}_\mu(\phi)(x), \; x \in (0,\infty).$$

En virtud del Teorema 3 [41] T es un operador de tipo fuerte $(2,2)$ entre los espacios $((0,\infty), d\gamma)$ y $((0,\infty), \dfrac{d\gamma}{x^{4(\mu+1)}})$.

Además, ya que la función $z^{-\mu}J_\mu(z)$ es acotada sobre $(0,\infty)$ podemos escribir

$$\int_{\{x\in(0,\infty):T\phi(x)>\lambda\}} \frac{d\gamma}{x^{4(\mu+1)}} \leq \frac{1}{2^\mu\Gamma(\mu+1)} \int_{C(\frac{\lambda}{||\phi||_{1,\mu}})^{1/(2\mu+2)}}^\infty x^{-2\mu-3}dx \leq C\frac{||\phi||_{1,\mu}}{\lambda}, \; \lambda \in (0,\infty).$$

Por tanto T es un operador de tipo débil $(1,1)$ entre los espacios considerados.

El resultado sigue ahora del Teorema de interpolación de Marcinkiewicz. $\square$

Proposición 1.31 *Sean* $1 < p \leq 2$ *y* $-1/2 < \mu < \dfrac{2p-2}{2-p}$. *Si* $\phi \in \Lambda H^\mu_{p,2(\mu+1)(1/p+1)}$ *entonces* ${}_\mu(\phi) \in L_{1,\mu}$.

<u>Demostración</u>:

Sea $\phi \in \Lambda H^\mu_{p,2(\mu+1)(1/p+1)}$. Ya que $\phi \in L_{p,\mu}$ tenemos que

$${}_\mu(\tau_x\phi - \phi)(y) = [c_\mu(xy)^{-\mu}J_\mu(xy) - 1]_\mu(\phi)(y),$$

para cada $x \in (0,\infty)$ y para casi todo $y \in (0,\infty)$, donde $c_\mu = 2^\mu\Gamma(\mu+1)$.

Entonces, del Lema 1.30 se sigue

$$\int_0^\infty y^{2(\mu+1)(p-2)} |_\mu(\phi)(y)|^p |c_\mu (xy)^{-\mu} J_\mu(xy) - 1|^p d\gamma(y) \leq$$

$$\leq C \int_0^\infty |(\tau_x \phi)(y) - \phi(y)|^p d\gamma(y) \leq C w_p(\phi)(x)^p, \; x \in (0,\infty).$$

Además, existen $a, \delta \in (0,\infty)$ tales que

$$|c_\mu z^{-\mu} J_\mu(z) - 1| \geq a z^2, \text{ para cada } 0 < z < \delta.$$

Por tanto, se tiene que

$$x^{2p} \int_0^{\delta/x} y^{2(\mu+1)(p-2)} |_\mu(\phi)(y)|^p y^{2p} d\gamma(y) \leq C w_p(\phi)(x)^p, \; x \in (0,\infty),$$

y de la desigualdad de Hölder se sigue

$$\int_0^{\delta/x} y^{\frac{2(\mu+1)(p-2)}{p}+2} |_\mu(\phi)(y)| d\gamma(y) \leq \Big\{ \int_0^{\delta/x} |_\mu(\phi)(y)|^p y^{2(\mu+1)(p-2)+2p} d\gamma(y) \Big\}^{1/p} \cdot$$

$$\cdot \Big\{ \int_0^{\delta/x} d\gamma(y) \Big\}^{1/p'} \leq C \frac{w_p(\phi)(x) \delta^{2(\mu+1)/p'}}{x^{2+\frac{2(\mu+1)}{p'}}}, \; x \in (0,\infty).$$

Integrando el primero y el último término de la desigualdad anterior sobre $(0,\infty)$ respecto de la medida $x^{\frac{2}{p}(\mu+1)(p-2)+1} dx$ obtenemos ya el resultado deseado. □

La siguiente propiedad es análoga a la recogida por E.C. Titchmarsch (Teorema 84 [75]) para la transformación integral de Fourier.

Proposición 1.32 *Sean* $1 < p \leq 2$ *y* $\phi \in L_{p,\mu}$. *Si* $w_p(\phi)(x)/x^\alpha \in L_\infty$ *entonces* $_\mu(\phi) \in L_{q,\mu}$ *siempre que* $\dfrac{p}{p-1} > q \geq \dfrac{2(\mu+1)p}{\alpha p + 2(\mu+1)(p-1)}$.

<u>Demostración</u>:

Seguimos un procedimiento similar al empleado en la prueba de la Proposición 1.31.

Ya que $\phi \in L_{p,\mu}$, en virtud del Teorema 3 [41] tenemos

$$\Big\{ \int_0^\infty |_\mu(\phi)(y)|^{p'} |c_\mu (xy)^{-\mu} J_\mu(xy) - 1|^{p'} d\gamma(y) \Big\}^{1/p'} \leq$$

$$\leq C\Big\{\int_0^\infty |(\tau_x\phi)(y)-\phi(y)|^p d\gamma(y)\Big\}^{1/p},\ x\in(0,\infty),$$

donde $c_\mu = 2^\mu\Gamma(\mu+1)$.

Además para cierta $\delta > 0$

$$x^2\Big\{\int_0^{\delta/x} |{}_\mu(\phi)(y)|^{p'} y^{2p'} d\gamma(y)\Big\}^{1/p'} \leq Cw_p(\phi)(x) \leq Cx^\alpha,\ x\in(0,\infty). \qquad \text{(I.1.44)}$$

Sea $\dfrac{p}{p-1} > q \geq \dfrac{2(\mu+1)p}{\alpha p + 2(\mu+1)(p-1)}$. Definimos la función

$$\psi(t) = \int_1^t |{}_\mu(\phi)(y)|^q y^{2q} d\gamma(y),\ t>1.$$

De la desigualdad de Hölder y de (I.1.44) sigue

$$\psi(t) \leq \Big\{\int_1^t |{}_\mu(\phi)(y)|^{p'} y^{2p'} d\gamma(y)\Big\}^{q/p'}\Big\{\int_1^t d\gamma(y)\Big\}^{1-q/p'} \leq Ct^{(2-\alpha)q+2(\mu+1)(1-q/p')},\ t>1.$$

Por tanto, podemos escribir

$$\int_1^t |{}_\mu(\phi)(y)|^q d\gamma(y) = \int_1^t y^{-2q}\psi'(y)dy = t^{-2q}\psi(t) + 2q\int_1^t y^{-2q-1}\psi(y)dy \leq$$

$$\leq C(t^{-\alpha q+2(\mu+1)(1-q/p')}+1),\ t>1. \qquad \text{(I.1.45)}$$

Finalmente recurriendo de nuevo al Teorema 3 [41] obtenemos

$$\int_0^1 |{}_\mu(\phi)(y)|^q d\gamma(y) \leq \Big\{\int_0^1 |{}_\mu(\phi)(y)|^{p'} d\gamma(y)\Big\}^{q/p'}\Big\{\int_0^1 d\gamma(y)\Big\}^{1-q/p'} \leq$$

$$\leq C||\phi||_{p,\mu}. \qquad \text{(I.1.46)}$$

Las desigualdades (I.1.45) y (I.1.46) permiten concluir la prueba. □

Una inmediata consecuencia de la Proposición 1.32 es la que sigue.

Corolario 1.33 *Sean* $1 < p \leq 2$ *y* $\phi \in L_{p,\mu}$. *Si* $\alpha \geq 2(\mu+1)/p$ *y* $w_p(\phi)(x)/x^\alpha \in L_\infty$ *entonces* ${}_\mu(\phi) \in L_{1,\mu}$.

□

Parte II

Sobre la convolución distribucional de Hankel.

Esta segunda parte de la Memoria está dedicada al estudio de ciertos aspectos en relación con la convolución distribucional de Hankel.

Como ya fue comentado en la introducción del Capítulo 1 fueron I.I. Hirschman [42] y D.T. Haimo [39] quienes introdujeron e investigaron una operación de convolución para la transformación integral de Hankel. Ellos consideraron la transformación de Hankel definida por

$$ {}_{\mu}(\phi)(y) = \int_0^\infty x^{2\mu+1}(xy)^{-\mu} J_\mu(xy)\phi(x)dx, \; y \in (0,\infty), \tag{II-1}$$

donde, como es usual, por J_μ representamos la función de Bessel de primera especie y de orden μ. Como en la primera, a lo largo de esta segunda parte μ será, salvo que otra cosa sea especificada, mayor que $-1/2$. Sin embargo, A.H. Zemanian [81] para estudiar la transformación integral de Hankel en espacios de distribuciones consideró la variante definida por

$$h_\mu(\phi)(y) = \int_0^\infty \sqrt{xy} J_\mu(xy)\phi(x)dx, \; y \in (0,\infty). \tag{II-2}$$

Aunque la simetría que presenta la forma (II-2) la hace en algunos casos más adecuada que (II-1), es claro que en virtud de la relación

$$h_\mu(\phi)(y) = y^{\mu+1/2}{}_{\mu}(x^{-\mu-1/2}\phi)(y), \; y \in (0,\infty),$$

los resultados que se obtengan para (II-2) tienen un análogo para (II-1) y viceversa.

Ya que nuestro objetivo es estudiar la convolución de Hankel en espacios de distribuciones adoptaremos para la transformación de Hankel la forma (II-2).

De los resultados de I.I. Hirschman [42] y D.T. Haimo [39] se deduce que la adecuada definición para la operación de convolución para h_μ es la siguiente. Denotaremos aquí por $L_{\mu,1}$ el espacio constituido por aquellas funciones f medibles sobre $(0,\infty)$ tales que $||f||_{\mu,1} = \int_0^\infty |f(x)|x^{\mu+1/2}dx < \infty$. Así, si f y $g \in L_{\mu,1}$ definimos la convolución de

Hankel $f\#g$ de f y g mediante

$$(f\#g)(x)=\int_0^\infty f(y)(\tau_x g)(y)dy,\ x\in(0,\infty),$$

donde el operador de traslación de Hankel τ_x, $x\in(0,\infty)$, es definido por

$$(\tau_x g)(y)=\int_0^\infty D(x,y,z)g(z)dz,\ x,y\in(0,\infty),$$

siendo $D(x,y,z)=\displaystyle\int_0^\infty t^{-\mu-1/2}\sqrt{xt}J_\mu(xt)\sqrt{yt}J_\mu(yt)\sqrt{zt}J_\mu(zt)dt,\ x,y,z\in(0,\infty)$.

Del Teorema 2.d [42] se infiere que la fórmula de intercambio

$$h_\mu(f\#g)=x^{-\mu-1/2}h_\mu(f)h_\mu(g) \tag{II-3}$$

es válida para cada $f,g\in L_{\mu,1}$.

La convolución $\#$ fue usada por J.M. González [36] en la resolución de ciertos problemas que involucran al operador de Bessel $S_\mu=x^{-\mu-1/2}Dx^{2\mu+1}Dx^{-\mu-1/2}$.

Fue J. de Sousa-Pinto [69] el que comenzó el estudio de la convolución distribucional de Hankel aunque sólo lo hizo para $\mu=0$ y para distribuciones de soporte compacto. Recientemente J.J. Betancor e I. Marrero ([8], [9], [10], [11], [12], [13] y [52]) y J.J. Betancor y B.J. González ([6]), han investigado la convolución $\#$ para cada $\mu>-1/2$ y en diferentes espacios de funciones generalizadas.

Recordamos ahora las definiciones y las principales propiedades de algunos espacios de funciones que surgen en los estudios de la transformación integral y la convolución de Hankel y a los cuales recurriremos con frecuencia a lo largo de esta segunda parte de nuestra Memoria.

A.H. Zemanian [79] introdujo el espacio $\mathcal{H}_\mu$ de funciones formado, para cada $\mu\in I\!R$, por las funciones ϕ complejas y regulares sobre $(0,\infty)$ tales que para cada $m,k\in I\!N$ la cantidad

$$\Gamma^\mu_{m,k}(\phi)=\sup_{x\in(0,\infty)}(1+x^2)^m\left|\left(\frac{1}{x}D\right)^k[x^{-\mu-1/2}\phi(x)]\right|$$

es finita. $\mathcal{H}_\mu$ es dotado de la topología generada por la familia $\{\Gamma^{\mu}_{m,k}\}_{m,k\in I\!N}$ de seminormas. De este modo $\mathcal{H}_\mu$ es un espacio de Fréchet. Además, la transformación h_μ de Hankel es un automorfismo de $\mathcal{H}_\mu$ siempre que $\mu \geq -1/2$ (Teorema 5.4-1, [81]). Como es usual, el espacio dual de $\mathcal{H}_\mu$ se representa por $\mathcal{H}'_\mu$.

La transformación h_μ de Hankel se define sobre $\mathcal{H}'_\mu$ como la traspuesta de la transformación clásica. Concretamente, si denotamos por h'_μ la transformación de Hankel cuando actúa sobre elementos de $\mathcal{H}'_\mu$, para cada $f \in \mathcal{H}'_\mu$, $h'_\mu f$ es el elemento de $\mathcal{H}'_\mu$ definido por

$$< h'_\mu f, \phi >=< f, h_\mu \phi >, \ \phi \in \mathcal{H}_\mu.$$

Es inmediato que h'_μ define un automorfismo sobre $\mathcal{H}'_\mu$, cuando sobre éste se considera la topología débil $*$ o la fuerte, siempre que $\mu \geq -1/2$.

Diferentes propiedades de $\mathcal{H}_\mu$ y $\mathcal{H}'_\mu$ fueron establecidas en [7] y [9].

La fórmula de intercambio (II-3) revela que en el análisis de la convolución $\#$ resulta útil conocer quienes son los multiplicadores de $\mathcal{H}_\mu$ y $\mathcal{H}'_\mu$. A.H. Zemanian (p.134, [81]) introdujo el espacio $\mathcal{O}$ constituido por las funciones f complejas y regulares sobre $(0,\infty)$ que verifican la siguiente propiedad: para cada $k \in I\!N$ existe $n = n(k)$ tal que la función $(1+x^2)^{-n}\left(\dfrac{1}{x}D\right)^k f(x)$ es acotada sobre $(0,\infty)$. Este autor probó que $\mathcal{O}$ es un espacio de multiplicadores sobre $\mathcal{H}_\mu$, esto es, para cada $f \in \mathcal{O}$ la aplicación $\phi \to f\phi$ es continua de $\mathcal{H}_\mu$ en sí mismo. En el Teorema 2.3 [7] $\mathcal{O}$ es caracterizado como el espacio de multiplicadores de $\mathcal{H}_\mu$. Las principales propiedades topológicas de $\mathcal{O}$ se establecen en [12].

Sea $a > 0$. El espacio $\beta_{\mu,a}$ fue definido por A.H. Zemanian [80] como el subespacio de $\mathcal{H}_\mu$ constituido por las funciones $\phi \in \mathcal{H}_\mu$ tales que $\phi(x) = 0$, $x > a$. Sobre $\beta_{\mu,a}$ se considera la topología inducida por $\mathcal{H}_\mu$. Así $\beta_{\mu,a}$ es un espacio de Fréchet. Además si $0 < a < b$ entonces $\beta_{\mu,a} \subset \beta_{\mu,b}$ y la topología que induce $\beta_{\mu,b}$ sobre $\beta_{\mu,a}$ es la propia de $\beta_{\mu,a}$. Se define $\beta_\mu = \bigcup_{a>0} \beta_{\mu,a}$ y se dota a β_μ de la topología inductiva. β_μ es un subespacio denso en $\mathcal{H}_\mu$. La transformada de Hankel $h_\mu(\beta_\mu)$ del espacio β_μ fue caracterizada en el Teorema 1 [80] cuando $\mu \geq -1/2$. De nuevo la transformación h_μ de Hankel se define sobre el espacio β'_μ dual de β_μ como la traspuesta de la transformación clásica.

La convolución $\#$ de Hankel fue investigada sobre $\mathcal{H}'_\mu$ y sobre β'_μ en [8], [9] y [52].

En [9] y [52] se caracteriza el espacio $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ de operadores de convolución sobre $\mathcal{H}'_\mu$. Este espacio resulta de especial interés en el estudio abordado en el Capítulo 3 de esta Memoria sobre ecuaciones de convolución de Hankel. Recordamos ahora la definición de $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$. Sea $m \in \mathbb{Z}$. El espacio $O_{\mu,m,\#}$ es aquél que está formado por las funciones ϕ complejas y regulares sobre $(0,\infty)$ tales que

$$\beta^k_{m,\mu}(\phi) = \sup_{x\in(0,\infty)} (1+x^2)^m x^{-\mu-1/2} |S^k_\mu \phi(x)| < \infty$$

para cada $k \in I\!N$, siendo $S_\mu = x^{-\mu-1/2} D x^{2\mu+1} D x^{-\mu-1/2}$. $O_{\mu,m,\#}$ es un espacio de Fréchet cuando se considera sobre él la topología asociada a la familia de seminormas $\{\beta^k_{m,\mu}\}_{k\in I\!N}$. Es claro que $\mathcal{H}_\mu$ está contenido en $O_{\mu,m,\#}$. Definimos el espacio $\mathcal{O}_{\mu,m,\#}$ como la clausura de $\mathcal{H}_\mu$ en $O_{\mu,m,\#}$. Tenemos que $\mathcal{O}_{\mu,m+1,\#}$ está continuamente contenido en $\mathcal{O}_{\mu,m,\#}$. El espacio $\mathcal{O}_{\mu,\#} = \bigcup_{m\in} \mathcal{O}_{\mu,m,\#}$ es dotado de la topología inductiva y $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ es el dual de $\mathcal{O}_{\mu,\#}$. En la Proposición 2.5 [9] se prueba que si $T \in \mathcal{H}'_\mu$ y $T\#\phi(x) =< T, \tau_x\phi >$, para cada $x \in (0,\infty)$ y $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, entonces $T\#\phi \in \mathcal{H}_\mu$, para cada $\phi \in \mathcal{H}_\mu$, si, y sólo si, $T \in \mathcal{O}'_{\mu,\#}$. Ello permite definir la convolución $T\#S$ de $T \in \mathcal{H}'_\mu$ y $S \in \mathcal{O}'_{\mu,\#}$ como sigue

$$< T\#S, \phi >=< T, S\#\phi >, \ \phi \in \mathcal{H}_\mu.$$

De este modo $T\#S \in \mathcal{H}'_\mu$ y además se satisface la siguiente versión distribucional de la fórmula de intercambio (II-3)

$$h'_\mu(T\#S) = x^{-\mu-1/2} h'_\mu(S) h'_\mu(T), \ T \in \mathcal{H}'_\mu \text{ y } S \in \mathcal{O}'_{\mu,\#}.$$

Conviene señalar aquí que $S \in \mathcal{O}'_{\mu,\#}$ cuando, y sólo cuando, $x^{-\mu-1/2}h'_\mu(S) \in \mathcal{O}$ (Proposición 4.2, [52]). Las principales propiedades topológicas de los espacios $\mathcal{O}_{\mu,\#}$ y $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ pueden ser encontradas en [12] y [13].

En el estudio sobre la convolución $\#$ en β'_μ ([8]) es introducido el espacio $\mathcal{E}_\mu$ constituido por aquellas funciones ϕ complejas regulares sobre $(0,\infty)$ tales que existe el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}D\right)^k[x^{-\mu-1/2}\phi(x)]$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Después de dar una caracterización del espacio $\mathcal{E}'_\mu$ dual de $\mathcal{E}_\mu$ como subespacio de β'_μ (Proposición 4.4, [8]) se establece que $\#$ es una operación cerrada en $\mathcal{E}'_\mu$ (Corolario 4.10, [8]).

Nos proponemos en la segunda parte de esta Memoria estudiar algunas cuestiones en relación con la transformación integral y la convolución de Hankel no tratados hasta el momento. Concretamente estudiamos la transformación h_μ y la convolución $\#$ sobre espacios de distribuciones de crecimiento exponencial (Capítulo 2), ecuaciones de convolución de Hankel sobre espacios de distribuciones de crecimiento lento y exponencial (Capítulo 3) y caracterizamos los duales de ciertos espacios de funciones transformables Hankel mediante $\#$- operadores (Capítulo 4).

A lo largo de esta parte C siempre denotará una constante positiva adecuada aunque no necesariamente la misma en cada aparición.

Nos resultarán muy útiles las siguientes propiedades de las funciones J_μ de Bessel y $H_\mu^{(1)}$ de Hankel que pueden ser encontradas, por ejemplo, en [29] y en p. 139 [50],

$$(i)\ |z^{-\mu}J_{\mu+n}(z)| \leq Ce^{|Im\, z|},\ z \in \mathbb{C} \text{ y } n \in \mathbb{N} \tag{II-4}$$

$$(ii)\ |z^{1/2}H_\mu^{(1)}(z)| \leq Ce^{-Im\, z},\ z \in \mathbb{C} \text{ y } |z| > 1, \tag{II-5}$$

$$(iii)\ |z^{\mu}H_\mu^{(1)}(z)| \leq C,\ |z| \leq 1, \tag{II-6}$$

$$(iv) \text{ Si } \mu \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \text{ entonces } |z^{1/2}H_\mu^{(1)}(z)| \leq Ce^{-Im\, z},\ z \in \mathbb{C}. \tag{II-7}$$

Capítulo 2

La convolución de Hankel sobre espacios de distribuciones con crecimiento exponencial

M. Hasumi [40] estudió la transformación integral de Fourier sobre distribuciones de crecimiento exponencial en la década de los 60. Sin embargo todavía no había sido estudiada la transformación integral h_μ de Hankel sobre funciones generalizadas de aquella naturaleza. En este capítulo abordamos esta cuestión. En la Sección II.2.2 introducimos dos espacios de Fréchet de funciones que denotaremos por $\mathcal{X}_\mu$ y $\mathcal{Q}_\mu$ entre los que la transformación de Hankel es un isomorfismo. En la prueba de este resultado desempeñan un papel fundamental las funciones de Hankel $H_\mu^{(i)}$, $i = 1, 2$, de primera especie y orden μ (véanse [29] y [38]). La transformación h_μ es definida sobre los correspondientes espacios duales $\mathcal{X}'_\mu$ y $\mathcal{Q}'_\mu$ como la traspuesta de la transformación h_μ clásica. La Sección II.2.3 se dedica al estudio de la convolución $\#$ de Hankel sobre el espacio $\mathcal{X}'_\mu$ de distribuciones de crecimiento exponencial. Obtenemos resultados similares a los conseguidos en [52] para distribuciones de crecimiento lento.

$\mathcal{X}_\mu$ $\mathcal{Q}_\mu$

En esta sección introducimos nuevos espacios de funciones entre los cuales la transformación integral de Hankel h_μ resulta ser un isomorfismo. Estudiamos también las principales propiedades topológicas de estos espacios.

El espacio $\mathcal{X}_\mu$ está constituido por aquellas funciones ϕ complejas y regulares sobre $(0,\infty)$ tales que

$$\gamma^\mu_{m,k}(\phi) = \sup_{x\in(0,\infty)} e^{mx}\left|\left(\frac{1}{x}D\right)^k (x^{-\mu-1/2}\phi(x))\right| < \infty,$$

para cada $m,k \in I\!N$. Consideramos sobre $\mathcal{X}_\mu$ la topología generada por la familia $\{\gamma^\mu_{m,k}\}_{m,k\in I\!N}$ de seminormas. Siguiendo los métodos habituales (véase p. 131, [81]) no es difícil probar que $\mathcal{X}_\mu$ es un espacio de Fréchet. Además, recurriendo a la Proposición 4.1.5 [62], puede establecerse que $\mathcal{X}_\mu$ es un espacio nuclear procediendo, por ejemplo, como en la Proposisión 4.2 [7].

Como veremos, resulta útil disponer de otras familias de seminormas sobre $\mathcal{X}_\mu$ que definan sobre él la misma topología que $\{\gamma^\mu_{m,k}\}_{m,k\in I\!N}$. En particular, para cada $p \in [1,\infty]$, el sistema $\{\eta^{\mu,p}_{m,k}\}_{m,k\in I\!N}$ de seminormas donde

$$\eta^{\mu,p}_{m,k}(\phi) = ||e^{mx}x^{-\mu-1/2}S^k_\mu\phi(x)||_p,\ \phi\in\mathcal{X}_\mu,$$

para cada $m,k \in I\!N$, siendo S_μ el operador de Bessel $x^{-\mu-1/2}Dx^{2\mu+1}Dx^{-\mu-1/2}$, es equivalente a $\{\gamma^\mu_{m,k}\}_{m,k\in I\!N}$. Aquí $||\cdot||_p$ representa la norma en el espacio de Lebesgue $L_p(0,\infty)$, para cada $p\in[1,\infty]$. Esto puede ser establecido siguiendo las pautas marcadas en el Lema 2.2 [9].

Además es claro que $\mathcal{X}_\mu$ está contenido en $\mathcal{H}_\mu$ y que la topología de $\mathcal{X}_\mu$ es más fina que la que induce sobre él la de $\mathcal{H}_\mu$. El operador de Bessel S_μ define una aplicación lineal y continua de $\mathcal{X}_\mu$ en sí mismo.

Denotaremos por $\mathcal{O}_\mathcal{X}$ el espacio de los multiplicadores de $\mathcal{X}_\mu$, esto es, una función f definida sobre $(0,\infty)$ está en $\mathcal{O}_\mathcal{X}$ cuando $f\phi \in \mathcal{X}_\mu$ para cada $\phi \in \mathcal{X}_\mu$. Siguiendo un procedimiento análogo al desarrollado en el Lema 2.2 y el Teorema 2.3 [7] y en [78] podemos probar lo siguiente.

Proposición 2.1 *Una función f definida sobre $(0,\infty)$ está en $\mathcal{O}_\mathcal{X}$ si, y sólo si, f satisface las dos propiedades que siguen*

(i) f es regular sobre $(0,\infty)$, y

(ii) para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $m = m(k)$ para la cual la función $e^{-mx}\left(\frac{1}{x}D\right)^k f(x)$ está acotada sobre $(0,\infty)$.

$\square$

Observamos que la Proposición 2.1 justifica que no aparezca el parámetro μ cuando nos refiramos al espacio de multiplicadores de $\mathcal{X}_\mu$, pues el espacio de multiplicadores de $\mathcal{X}_\mu$ es el mismo cualquiera que sea μ. Además $x^{-\mu-1/2}\phi \in \mathcal{O}_\mathcal{X}$, para cada $\phi \in \mathcal{X}_\mu$.

El espacio dual de $\mathcal{X}_\mu$ será representado, como es usual, por $\mathcal{X}'_\mu$. $\mathcal{O}_\mathcal{X}$ es también el espacio de multiplicadores sobre $\mathcal{X}'_\mu$.

Argumentos habituales basados en el teorema de extensión de Hahn-Banach y dualidad permiten probar la siguiente representación para los elementos de $\mathcal{X}'_\mu$. (En [5] y [9] pueden encontrarse resultados similares para el espacio $\mathcal{H}'_\mu$).

Proposición 2.2 *Sea T un funcional sobre $\mathcal{X}_\mu$. Entonces $T \in \mathcal{X}'_\mu$ si, y sólo si, existen $r \in \mathbb{N}$ y $r+1$ funciones $f_k \in L_\infty(0,\infty)$, $k = 0, ..., r$, teniéndose que*

$$T = \sum_{k=0}^{r} S_\mu^k(e^{rx}x^{-\mu-1/2}f_k).$$

$\square$

El espacio $\mathcal{Q}_\mu$ es el formado por las funciones Φ complejas que satisfacen las dos propiedades que siguen

(i) $z^{-\mu-1/2}\Phi(z)$ es una función entera, par, y

(ii) para cada $m, k \in I\!N$

$$w_{m,k}^{\mu}(\Phi) = \sup_{|Im\ z|\leq m} (1+|z|^2)^k |z^{-\mu-1/2}\Phi(z)| < \infty.$$

Nótese que, para cada $m, k \in I\!N$, $w_{m,k}^{\mu}$ es una norma sobre $\mathcal{Q}_\mu$. Dotamos a $\mathcal{Q}_\mu$ de la topología asociada a la familia $\{w_{m,k}^{\mu}\}_{m,k\in I\!N}$ de normas. Así, $\mathcal{Q}_\mu$ es un espacio de Fréchet y nuclear.

Introducimos también el espacio $\mathcal{O}_\mathcal{Q}$ constituido por las funciones F complejas, enteras y pares tales que para cada $m \in I\!N$ existe $k = k(m) \in I\!N$ para el cual

$$\sup_{|Im\ z|\leq m} (1+|z|^2)^{-k}|F(z)| < \infty.$$

$\mathcal{O}_\mathcal{Q}$ es un espacio de multiplicadores para $\mathcal{Q}_\mu$, ya que la aplicacióm $\Phi \longrightarrow F\Phi$ es continua de $\mathcal{Q}_\mu$ en sí mismo para cada $F \in \mathcal{O}_\mathcal{Q}$. Además $z^{-\mu-1/2}\mathcal{Q}_\mu \subset \mathcal{O}_\mathcal{Q}$. El espacio dual de $\mathcal{Q}_\mu$ lo denotaremos $\mathcal{Q}'_\mu$.

A continuación estableceremos el resultado principal de esta sección.

Teorema 2.3 *La transformación integral h_μ de Hankel es un isomorfismo de $\mathcal{X}_\mu$ en $\mathcal{Q}_\mu$. Además la inversa de h_μ tiene la misma forma.*

Demostración:

Sea $\phi \in \mathcal{X}_\mu$. Definimos $\Phi = h_\mu(\phi)$. En virtud de (II-4) para cada $m \in I\!N$ podemos escribir

$$\int_0^\infty |(xz)^{-\mu}J_\mu(xz)|x^{\mu+1/2}|\phi(x)|dx \leq C\int_0^\infty e^{x|Im\ z|}x^{\mu+1/2}|\phi(x)|dx \leq$$

$$\leq C \sup_{x\in(0,\infty)} |e^{(m+1)x}x^{-\mu-1/2}\phi(x)|\ ,\ \text{cuando } |Im\ z| \leq m.$$

De aquí se deduce que $z^{-\mu-1/2}\Phi(z)$ es una función entera. Además para ver que $z^{-\mu-1/2}\Phi(z)$ es par basta tener en cuenta que $z^{-\mu}J_\mu(z)$ es una función par.

Por otra parte, ya que $\mathcal{H}_\mu$ contiene a $\mathcal{X}_\mu$, del Lema 5.4-1 [81] sigue que

$$(1+|z|^2)^k|z^{-\mu-1/2}\Phi(z)| \leq C(1+|z|^{2k})|z^{-\mu-1/2}\Phi(z)| =$$
$$= C(|z^{-\mu-1/2}\Phi(z)| + |z^{-\mu-1/2}\int_0^\infty \sqrt{zx}J_\mu(zx)S_\mu^k\phi(x)dx|) \leq$$
$$\leq C\left\{\eta_{m+1,0}^{\mu,\infty}(\phi)+\eta_{m+1,k}^{\mu,\infty}(\phi)\right\},\ m,k\in I\!N \text{ y } |Im\ z|\leq m.$$

Por tanto, para cada $m,k\in I\!N$, se tiene que

$$w_{m,k}^\mu(\Phi)\leq C\left\{\eta_{m+1,0}^{\mu,\infty}(\phi)+\eta_{m+1,k}^{\mu,\infty}(\phi)\right\}.$$

Probamos así que la transformación h_μ es continua de $\mathcal{X}_\mu$ en $\mathcal{Q}_\mu$.

Sea ahora $\Phi\in\mathcal{Q}_\mu$. Ya que Φ es absolutamente integrable sobre $(0,\infty)$ podemos definir

$$\phi(x)=\int_0^\infty \sqrt{xy}J_\mu(xy)\Phi(y)dy,\ x\in(0,\infty),$$

siendo la integral absolutamente convergente (basta recordar que $\sqrt{z}J_\mu(z)$ es acotada sobre $(0,\infty)$). Además, de acuerdo con (7) §5.1 [81], para cada $k\in I\!N$ y $x\in(0,\infty)$ se tiene

$$\left(\frac{1}{x}D\right)^k(x^{-\mu-1/2}\phi(x))=(-1)^k\int_0^\infty (xy)^{-\mu-k}J_{\mu+k}(xy)y^{2k+\mu+1/2}\Phi(y)dy. \qquad \text{(II.2.1)}$$

La integral en (II.2.1) es absolutamente convergente para cada $x\in(0,\infty)$. Procediendo como en la prueba del Lema 6.1 [29] de (II.2.1) se sigue que

$$\left(\frac{1}{x}D\right)^k(x^{-\mu-1/2}\phi(x))=\frac{(-1)^k}{2}\int_{-\infty}^\infty (x(\xi+i\eta))^{-\mu-k}H_{\mu+k}^{(1)}(x(\xi+i\eta))\cdot$$
$$\cdot(\xi+i\eta)^{2k+\mu+1/2}\Phi(\xi+i\eta)d\xi,$$

para cada $x\in(1,\infty)$, $\eta\in(0,\infty)$ y $k\in I\!N$. Aquí $H_\mu^{(1)}$ denota la función de Hankel de primera especie y de orden μ (p. 73, [77]).

En virtud de (II-5), al ser $|x(\xi+i\eta)|>\eta$, cuando $x\in(1,\infty)$, obtenemos

$$\left|\left(\frac{1}{x}D\right)^k(x^{-\mu-1/2}\phi(x))\right|\leq Ce^{-\eta x}\int_{-\infty}^\infty |\xi+i\eta|^k|\Phi(\xi+i\eta)|d\xi, \qquad \text{(II.2.2)}$$

para cada $x \in (1, \infty)$, $\eta \in (0, \infty)$ y $k \in I\!N$, donde C representa una constante positiva que depende sólo de η.

Elegimos ahora $l \in I\!N$ tal que $l > \mu + 3/2$. Entonces de (II.2.2) se infiere para cada $m, k \in I\!N$

$$\left| e^{mx} \Big(\frac{1}{x} D\Big)^k (x^{-\mu-1/2}\phi(x)) \right| \leq Ce^{-x} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi + i(m+1)|^k |\Phi(\xi + i(m+1))| d\xi \leq$$

$$\leq C \int_{-\infty}^{\infty} |\xi + i(m+1)|^{\mu+1/2-l} |\xi + i(m+1)|^{k+l} |(\xi + i(m+1))^{-\mu-1/2} \Phi(\xi + i(m+1))| d\xi \leq$$

$$\leq C w^{\mu}_{m+1,k+l}(\Phi) \text{ , para cada } x \in (1, \infty). \qquad \text{(II.2.3)}$$

Por otra parte, para cada $x \in (0, 1)$ y $m, k \in I\!N$, tenemos

$$\left| e^{mx} \Big(\frac{1}{x} D\Big)^k (x^{-\mu-1/2}\phi(x)) \right| \leq e^m \int_0^{\infty} |(xy)^{-\mu-k} J_{\mu+k}(xy)| |y^{2k+\mu+1/2} \Phi(y)| dy \leq$$

$$\leq C w^{\mu}_{1,k+n}(\Phi), \qquad \text{(II.2.4)}$$

donde $n \in I\!N$ es escogido de manera que $n > \mu + 1$.

Combinando (II.2.3) y (II.2.4) concluimos que h_μ es una aplicación continua de $\mathcal{Q}_\mu$ en $\mathcal{X}_\mu$.

Para terminar la prueba basta observar que, al estar $\mathcal{X}_\mu$ contenido en $\mathcal{H}_\mu$, $h_\mu^2 = Id$, sobre $\mathcal{X}_\mu$ y $\mathcal{Q}_\mu$. □

Una consecuencia inmediata del Teorema 5.4-1 [81] y del Teorema 2.3 anterior es lo siguiente.

Corolario 2.4 *El espacio $\mathcal{Q}_\mu$ está continuamente contenido en el espacio $\mathcal{H}_\mu$.*

□

Definimos la transformación h_μ de Hankel sobre los espacios $\mathcal{X}'_\mu$ y $\mathcal{Q}'_\mu$ como la traspuesta de la transformación h_μ. Como es usual, cuando la transformación de Hankel actúa sobre los espacios duales la denotaremos por h'_μ. De este modo, la transformada de Hankel $h'_\mu T$ de $T \in \mathcal{X}'_\mu$ ($\mathcal{Q}'_\mu$) es el elemento de $\mathcal{Q}'_\mu$ ($\mathcal{X}'_\mu$) definido por

$$< h'_\mu T, \phi > = < T, h_\mu \phi >, \ \phi \in \mathcal{Q}_\mu \ (\mathcal{X}_\mu).$$

Del Teorema 2.3 se deduce lo que sigue.

Teorema 2.5 *La transformación h'_μ de Hankel es un isomorfismo de $\mathcal{X}'_\mu$ ($\mathcal{Q}'_\mu$) sobre $\mathcal{Q}'_\mu$ ($\mathcal{X}'_\mu$) cuando consideramos sobre $\mathcal{X}'_\mu$ y $\mathcal{Q}'_\mu$ la topología débil $*$ o la topología fuerte.*

□

$\mathcal{X}_\mu$

$\mathcal{X}'_\mu$

Comenzamos analizando el comportamiento de la traslación y la convolución de Hankel sobre el espacio $\mathcal{X}_\mu$.

Proposición 2.6 *Para cada $x \in (0, \infty)$, la traslación de Hankel τ_x define una aplicación lineal y continua de $\mathcal{X}_\mu$ en sí mismo.*

Demostración:

Sea $x \in (0, \infty)$. Ya que $\mathcal{H}_\mu$ contiene a $\mathcal{X}_\mu$, de (2.1) [52] se sigue

$$(\tau_x \phi)(y) = h_\mu[t^{-\mu-1/2}(xt)^{1/2} J_\mu(xt) h_\mu(\phi)(t)](y), \ y \in (0,\infty) \text{ y } \phi \in \mathcal{X}_\mu. \qquad \text{(II.2.5)}$$

Por tanto, en virtud del Teorema 2.3 para ver que τ_x es continua de $\mathcal{X}_\mu$ en sí mismo es suficiente probar que la función $\Phi_x(z) = (xz)^{-\mu} J_\mu(xz), z \in \mathbb{C}$, está en $\mathcal{O}_Q$.

Es claro que Φ_x es una función entera y par. Además, de (II-4) se infiere que

$$|\Phi_x(z)| \leq C e^{x|Im\ z|}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Luego, para cada $k \in I\!N$, la función $\Phi_x(z)$ está acotada en la banda $|Im\ z| \leq k$. De este modo concluimos que $\Phi_x \in \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}$. □

Proposición 2.7 *La convolución # de Hankel define una aplicación bilineal y continua de $\mathcal{X}_\mu$ x $\mathcal{X}_\mu$ en $\mathcal{X}_\mu$.*

Demostración:

Del Teorema 2.d [42] (véase también Proposición 2.2 [52]) se deduce que la fórmula de intercambio

$$h_\mu(\phi\#\psi) = x^{-\mu-1/2}h_\mu(\phi)h_\mu(\psi), \tag{II.2.6}$$

es válida para cada $\phi, \psi \in \mathcal{X}_\mu$.

Además la aplicación definida por $(\Phi, \Psi) \longrightarrow z^{-\mu-1/2}\Phi\Psi$ es continua de $\mathcal{Q}_\mu$ x $\mathcal{Q}_\mu$ en $\mathcal{Q}_\mu$.

Basta ahora aplicar el Teorema 2.3 para terminar la prueba. □

La Proposición 2.6 permite definir la convolución de Hankel $T\#\phi$ de $T \in \mathcal{X}'_\mu$ y $\phi \in \mathcal{X}_\mu$ como sigue

$$(T\#\phi)(x) = < T, \tau_x\phi >, \; x \in (0, \infty). \tag{II.2.7}$$

Nótese que si f es una función localmente integrable sobre $(0, \infty)$ tal que $e^{-mx}f \in L_{\mu,1}$, para algún $m \in I\!N$, entonces f define un elemento de $\mathcal{X}'_\mu$ mediante

$$< T_f, \phi > = \int_0^\infty f(x)\phi(x)dx, \; \phi \in \mathcal{X}_\mu.$$

En este caso, tenemos para cada $\phi \in \mathcal{X}_\mu$

$$(T_f\#\phi)(x) = < T_f, \tau_x\phi > = \int_0^\infty f(y)(\tau_x\phi)(y)dy, \; x \in (0, \infty).$$

En este sentido la definición (II.2.7) supone una generalización de la convolución clásica de Hankel.

Si $T \in \mathcal{X}'_\mu$ y $\phi \in \mathcal{X}_\mu$, en general, no podemos garantizar que $T\#\phi \in \mathcal{X}_\mu$. En efecto, definimos el elemento T de $\mathcal{X}'_\mu$ como sigue

$$< T, \phi >= \int_0^\infty x^{\mu+1/2}\phi(x)dx, \ \phi \in \mathcal{X}_\mu.$$

Esto es, $T = T_{x^{\mu+1/2}}$, con la notación anterior. Para cada $\phi \in \mathcal{X}_\mu$, de (2) §2 [42] inferimos

$$< T, \tau_x\phi >= \int_0^\infty t^{\mu+1/2} \int_0^\infty D(x,y,t)\phi(y)dydt =$$

$$= \int_0^\infty \phi(y) \int_0^\infty D(x,y,t)t^{\mu+1/2}dtdy = \frac{x^{\mu+1/2}}{2^\mu\Gamma(\mu+1)} \int_0^\infty y^{\mu+1/2}\phi(y)dy, \ x \in (0,\infty).$$

Por tanto, para cada $\phi \in \mathcal{X}_\mu$

$$e^x x^{-\mu-1/2} < T, \tau_x\phi > \longrightarrow \infty, \text{ cuando } x \to \infty,$$

y $T\#\phi \notin \mathcal{X}_\mu$.

En la siguiente proposición probamos que $x^{-\mu-1/2}(T\#\phi)$ es un multiplicador para $\mathcal{X}_\mu$, para cada $T \in \mathcal{X}'_\mu$ y $\phi \in \mathcal{X}_\mu$.

Proposición 2.8 *Si $T \in \mathcal{X}'_\mu$ y $\phi \in \mathcal{X}_\mu$ entonces $x^{-\mu-1/2}(T\#\phi) \in \mathcal{O}_\mathcal{X}$.*

Demostración:

Sean $T \in \mathcal{X}'_\mu$ y $\phi \in \mathcal{X}_\mu$. En virtud de la Proposición 2.2 existen $r \in I\!N$ y $r+1$ funciones $f_k, k = 0, 1, ..., r$, esencialmente acotadas tales que

$$T = \sum_{k=0}^r S_\mu^k(e^{rx}x^{-\mu-1/2}f_k).$$

Por consiguiente, para probar que $x^{-\mu-1/2}(T\#\phi) \in \mathcal{O}_\mathcal{X}$ es suficiente ver que

$$x^{-\mu-1/2}(S_\mu^k[e^{rx}x^{-\mu-1/2}f]\#\phi) \in \mathcal{O}_\mathcal{X}$$

para cada $r, k \in I\!N$ y $f \in L_\infty(0,\infty)$.

Sean $r, k \in I\!N$ y $f \in L_\infty(0,\infty)$. De la Proposición 2.1 (*ii*) [52] y de (II.2.5) se deduce, definiendo $T = S_\mu^k[e^{rx}x^{-\mu-1/2}f]$, que

$$(T\#\phi)(x) =< T, \tau_x\phi >= \int_0^\infty f(y)e^{ry}y^{-\mu-1/2}\tau_x(S_\mu^k\phi)(y)dy =$$

$$= (-1)^k x^{\mu+1/2}\int_0^\infty f(y)e^{ry}y^{-\mu-1/2}h_\mu\left[(xt)^{-\mu}J_\mu(xt)h_\mu(\phi)(t)t^{2k}\right](y)dy,\ x \in (0,\infty).$$

Sea $n \in I\!N$. Aplicando (7) §5.1 [81] obtenemos

$$\left(\frac{1}{x}D\right)^n[x^{-\mu-1/2}(T\#\phi)(x)] = (-1)^{n+k}\int_0^\infty f(y)e^{ry}y^{-\mu-1/2}\cdot$$

$$\cdot h_\mu\left[t^{2(n+k)}(xt)^{-\mu-n}J_{\mu+n}(xt)h_\mu(\phi)(t)\right](y)dy,\ x \in (0,\infty).$$

Entonces,

$$\left|\left(\frac{1}{x}D\right)^n[x^{-\mu-1/2}(T\#\phi)(x)]\right| \leq$$

$$\leq C \sup_{y\in(0,\infty)}\left|e^{(r+1)y}y^{-\mu-1/2}h_\mu[t^{2(n+k)}(xt)^{-\mu-n}J_{\mu+n}(xt)h_\mu(\phi)(t)](y)\right|,\ x \in (0,\infty).$$

Además, de acuerdo con el Teorema 2.3 y ya que la función $z^{-\mu}J_\mu(z)$ está en $\mathcal{O}_Q$ (sigue de (II-4)), existen $m, l \in I\!N$ tales que

$$\left|\left(\frac{1}{x}D\right)^n[x^{-\mu-1/2}(T\#\phi)(x)]\right| \leq$$

$$\leq Cw_{m,l}^\mu[t^{2(k+n)}(xt)^{-\mu-n}J_{\mu+n}(xt)h_\mu(\phi)(t)],\ x \in (0,\infty). \qquad \text{(II.2.8)}$$

También de (II-4) se deduce

$$w_{m,l}^\mu[(xt)^{-\mu-n}J_{\mu+n}(xt)t^{2(k+n)}h_\mu(\phi)(t)] \leq$$

$$\leq Cw_{m,l+k+n}^\mu(h_\mu(\phi))e^{mx},\ x \in (0,\infty). \qquad \text{(II.2.9)}$$

Señalamos que la constante C no depende de $x \in (0,\infty)$.

Recurriendo de nuevo al Teorema 2.3 y combinando (II.2.8) y (II.2.9) concluimos que

$$\left|\left(\frac{1}{x}D\right)^n[x^{-\mu-1/2}(T\#\phi)(x)]\right| \leq Ce^{mx},\ x \in (0,\infty).$$

Por tanto $x^{-\mu-1/2}(T\#\phi) \in \mathcal{O}_\mathcal{X}$. □

Observamos que realmente en la demostración anterior probamos algo más que la propiedad enunciada en la Proposición 2.8. Concretamente se establece que si $T \in \mathcal{X}'_\mu$ existe $m \in I\!N$ tal que para cada $\phi \in \mathcal{X}_\mu$ y cada $n \in I\!N$ la función

$$e^{-mx}\Big(\frac{1}{x}D\Big)^n[x^{-\mu-1/2}(T\#\phi)(x)]$$

es acotada sobre $(0,\infty)$.

En virtud de la Proposición 2.8 si $T \in \mathcal{X}'_\mu$ y $\phi \in \mathcal{X}_\mu$ entonces $T\#\phi$ define un elemento de $\mathcal{X}'_\mu$ mediante

$$< T\#\phi, \psi >= \int_0^\infty (T\#\phi)(x)\psi(x)dx, \ \psi \in \mathcal{X}_\mu.$$

Proposición 2.9 *Si $T \in \mathcal{X}'_\mu$ y $\phi \in \mathcal{X}_\mu$, entonces*

$$< T\#\phi, \psi >=< T, \phi\#\psi >, \ \psi \in \mathcal{X}_\mu, \tag{II.2.10}$$

siendo válida la fórmula de intercambio

$$h'_\mu(T\#\phi) = x^{-\mu-1/2}h'_\mu(T)h_\mu(\phi). \tag{II.2.11}$$

Además para cada $T \in \mathcal{X}'_\mu$ la aplicación $\phi \longrightarrow T\#\phi$ es continua de $\mathcal{X}_\mu$ en $\mathcal{X}'_\mu$, cuando consideramos sobre $\mathcal{X}'_\mu$ la topología fuerte.

Demostración:

Sean $T \in \mathcal{X}'_\mu$ y ϕ y $\psi \in \mathcal{X}_\mu$. Tenemos que

$$< T\#\phi, \psi >= \int_0^\infty (T\#\phi)(x)\psi(x)dx = \int_0^\infty < T, \tau_x\phi > \psi(x)dx.$$

Por tanto, ya que $(\tau_x\phi)(y) = (\tau_y\phi)(x)$, $x, y \in (0,\infty)$, habremos probado (II.2.10) desde que veamos que

$$\int_0^\infty < T, \tau_x\phi > \psi(x)dx =< T(y), \int_0^\infty (\tau_x\phi)(y)\psi(x)dx > . \tag{II.2.12}$$

Dividiremos nuestra prueba en dos partes.

(I) Se tiene que

$$\lim_{a\to\infty}\int_a^\infty (\tau_x\phi)(y)\psi(x)dx = 0, \tag{II.2.13}$$

y

$$\lim_{a\to 0}\int_0^a (\tau_x\phi)(y)\psi(x)dx = 0, \tag{II.2.14}$$

en el sentido de la convergencia en $\mathcal{X}_\mu$.

Probamos ahora (II.2.13). Para demostrar (II.2.14) puede procederse de un modo similar.

Sea $a\in(0,\infty)$. Es obvio que

$$\int_a^\infty (\tau_x\phi)(y)\psi(x)dx = (\psi_a\#\phi)(y),\ y\in(0,\infty),$$

donde

$$\psi_a(x) = \begin{cases} \psi(x), & x>a \\ 0, & x\leq a\ . \end{cases}$$

Además, en virtud del Teorema 2.d [42] tenemos

$$h_\mu(\psi_a\#\phi) = x^{-\mu-1/2}h_\mu(\psi_a)h_\mu(\phi). \tag{II.2.15}$$

Nótese que

$$z^{-\mu-1/2}h_\mu(\psi_a)(z) = \int_a^\infty (zt)^{-\mu}J_\mu(zt)t^{\mu+1/2}\psi(t)dt,\ z\in\mathbb{C},$$

es una función entera y par. También, para cada $m\in\mathbb{N}$, recordando (II-4) podemos escribir

$$\begin{aligned} |z^{-\mu-1/2}h_\mu(\psi_a)(z)| &\leq \int_a^\infty |(zt)^{-\mu}J_\mu(zt)|t^{\mu+1/2}|\psi(t)|dt \leq \\ &\leq C\int_a^\infty e^{mt}t^{\mu+1/2}|\psi(t)|dt<\infty,\ |Im\ z|\leq m. \end{aligned} \tag{II.2.16}$$

Por tanto $z^{-\mu-1/2}h_\mu(\psi_a)\in\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}$. Del Teorema 2.3 y de (II.2.15) se sigue entonces que $\psi_a\#\phi\in\mathcal{X}_\mu$.

Además de (II.2.16) se deduce que para cada $m, k \in \mathbb{N}$

$$w^\mu_{m,k}[z^{-\mu-1/2}h_\mu(\psi_a)h_\mu(\phi)] \leq Cw^\mu_{m,k}(h_\mu(\phi))\int_a^\infty e^{mt}t^{\mu+1/2}|\psi(t)|dt \leq$$

$$\leq Cw^\mu_{m,k}(h_\mu(\phi))\gamma^\mu_{m+1,0}(\psi)\int_a^\infty e^{-t}t^{2\mu+1}dt \longrightarrow 0, \text{ cuando } a \to \infty.$$

Hemos probado que $z^{-\mu-1/2}h_\mu(\psi_a)h_\mu(\phi) \longrightarrow 0$, cuando $a \to \infty$, en $\mathcal{Q}_\mu$.

El Teorema 2.3 junto a (II.2.15) nos permiten deducir (II.2.13).

(II) Sea $0 < a < b < \infty$. Entonces

$$\int_a^b < T, \tau_x\phi > \psi(x)dx =< T(y), \int_a^b (\tau_x\phi)(y)\psi(x)dx > . \tag{II.2.17}$$

Para probar (II.2.17) utilizaremos una técnica basada en sumas de Riemann. Sea $m \in \mathbb{N} - \{0\}$. Definimos $x_n = a + n\frac{b-a}{m}$, $n = 0, 1, ..., m$. Teniendo en cuenta que T es lineal se sigue

$$\int_a^b < T, \tau_x\phi > \psi(x)dx = \lim_{m\to\infty} < T(y), \frac{b-a}{m}\sum_{n=1}^m (\tau_y\phi)(x_n)\psi(x_n) > .$$

Por tanto, (II.2.17) quedará establecida desde que probemos que

$$\lim_{m\to\infty}\frac{b-a}{m}\sum_{n=1}^m (\tau_y\phi)(x_n)\psi(x_n) = \int_a^b (\tau_y\phi)(x)\psi(x)dx, \tag{II.2.18}$$

donde la convergencia es entendida en $\mathcal{X}_\mu$.

Por otra parte del Teorema 2.d [42], (II.2.5) y el Teorema 2.3, se infiere que (II.2.18) es equivalente a que

$$\lim_{m\to\infty}\frac{b-a}{m}\sum_{n=1}^m t^{-\mu-1/2}h_\mu(\phi)(t)(tx_n)^{1/2}J_\mu(tx_n)\psi(x_n) =$$

$$= t^{-\mu-1/2}h_\mu(\phi)(t)h_\mu(\psi_{a,b})(t), \tag{II.2.19}$$

en el sentido de la convergencia en $\mathcal{Q}_\mu$, donde $\psi_{a,b}$ es la función definida por

$$\psi_{a,b}(t) = \begin{cases} \psi(t) , & t \in (a,b) \\ 0 , & t \notin (a,b) \end{cases} .$$

Conviene observar que las funciones $(zx_n)^{-\mu}J_\mu(zx_n)$, $n=0,1,...,m$ y $z^{-\mu-1/2}h_\mu(\psi_{a,b})$ están en $\mathcal{O}_Q$.

Procedemos ahora a probar (II.2.19).

Sean $k,l\in I\!N$. De (II-4) se deduce que

$$I_m(z)=(1+|z^2|)^k\left|z^{-\mu-1/2}h_\mu(\phi)(z)\left(\frac{b-a}{m}\sum_{n=1}^{m}(zx_n)^{-\mu}J_\mu(zx_n)x_n^{\mu+1/2}\psi(x_n)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_a^b (zx)^{-\mu}J_\mu(zx)x^{\mu+1/2}\psi(x)dx\right)\right|\leq C(1+|z|^2)^k|z^{-\mu-1/2}h_\mu(\phi)(z)|\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{b-a}{m}\sum_{n=1}^{m}e^{x_n|Im\ z|}|x_n^{\mu+1/2}\psi(x_n)|+\int_a^b e^{x|Im\ z|}x^{\mu+1/2}|\psi(x)|dx\right)\leq$$

$$\leq C(1+|z|^2)^k|z^{-\mu-1/2}h_\mu(\phi)(z)|,\ \text{cuando}\ |Im\ z|\leq l. \tag{II.2.20}$$

Aquí la constante C no depende de $m\in I\!N-\{0\}$.

Sea $\epsilon>0$. De (II.2.20) se sigue que para toda $m\in I\!N-\{0\}$

$$I_m(z)<\epsilon,\ \text{para}\ |Im\ z|\leq l\ \text{y}\ |Re\ z|>M, \tag{II.2.21}$$

para cierta $M>0$.

Por otra parte, existe $m_0\in I\!N-\{0\}$ tal que para cada $m\in I\!N$, siendo $m\geq m_0$, tenemos

$$\left|\frac{b-a}{m}\sum_{n=1}^{m}(zx_n)^{-\mu}J_\mu(zx_n)x_n^{\mu+1/2}\psi(x_n)-\int_a^b(zx)^{-\mu}J_\mu(zx)x^{\mu+1/2}\psi(x)dx\right|<\varepsilon, \tag{II.2.22}$$

para cada $z\in\mathbb{C}$ tal que $|Re\ z|\leq M$ e $|Im\ z|\leq l$.

De (II.2.21) y (II.2.22) inferimos ya que (II.2.19) y de esta manera queda probado (II.2.17).

Haciendo uso de (I) y (II) pasamos a probar (II.2.12).

Para cada $0<a<b<\infty$ podemos escribir

$$\int_0^\infty <T,\tau_x\phi>\psi(x)dx-<T(y),\int_0^\infty(\tau_x\phi)(y)\psi(x)dx>=$$

$$= \int_0^a < T, \tau_x\phi > \psi(x)dx + \int_a^b < T, \tau_x\phi > \psi(x)dx + \int_b^\infty < T, \tau_x\phi > \psi(x)dx -$$

$$- < T(y), \int_0^a (\tau_x\phi)(y)\psi(x)dx > - < T(y), \int_a^b (\tau_x\phi)(y)\psi(x)dx > -$$

$$- < T(y), \int_b^\infty (\tau_x\phi)(y)\psi(x)dx > =$$

$$= \int_0^a < T, \tau_x\phi > \psi(x)dx + \int_b^\infty < T, \tau_x\phi > \psi(x)dx - < T(y), \int_0^a (\tau_x\phi)(y)\psi(x)dx > -$$

$$- < T(y), \int_b^\infty (\tau_x\phi)(y)\psi(x)dx > .$$

Ya que el último término de esta igualdad tiende a cero cuando $a \to 0^+$ y $b \to \infty$, concluimos la validez de (II.2.12).

Sea ahora $\Psi \in \mathcal{Q}_\mu$. De (II.2.10) y de la fórmula de intercambio ((II.2.6) es válida para cada $\phi, \psi \in \mathcal{H}_\mu$) se deduce

$$< h'_\mu(T\#\phi), \Psi > = < T\#\phi, h_\mu\Psi > = < T, \phi\#h_\mu\Psi > =$$

$$= < h'_\mu(T), h_\mu(\phi\#h_\mu\Psi) > = < x^{-\mu-1/2}h'_\mu(T)h_\mu(\phi), \Psi > .$$

De este modo (II.2.11) queda probado.

Finalmente, teniendo en cuenta la Proposición 2.7 y (II.2.10) concluimos que, para cada $T \in \mathcal{X}'_\mu$, la aplicación $\phi \longrightarrow T\#\phi$ es continua de $\mathcal{X}_\mu$ en $\mathcal{X}'_\mu$, cuando sobre $\mathcal{X}'_\mu$ se considera la topología fuerte. $\Box$

A continuación introducimos un subespacio $\mathcal{X}'_{\mu,\#}$ de $\mathcal{X}'_\mu$ que tiene como propiedad fundamental la siguiente: $T\#\phi \in \mathcal{X}_\mu$, para cada $T \in \mathcal{X}'_{\mu,\#}$ y $\phi \in \mathcal{X}_\mu$. Este espacio $\mathcal{X}'_{\mu,\#}$ desempeña en nuestra teoría el papel que juegan el espacio $\mathcal{O}'_c$ en el estudio de la convolución sobre el espacio de distribuciones temperadas (véase p. 314, [76]) y el espacio $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ en la teoría de la convolución de Hankel sobre $\mathcal{H}'_\mu$ ([52]). Concluimos definiendo la convolución $\#$ de Hankel sobre $\mathcal{X}'_\mu$ x $\mathcal{X}'_{\mu,\#}$.

Sea $m \in \mathbb{Z}$. Representamos por $X_{\mu,m,\#}$ el espacio formado por las funciones ϕ complejas y regulares sobre $(0,\infty)$ tales que

$$\alpha_{m,\mu}^k(\phi) = \sup_{x\in(0,\infty)} |e^{mx}x^{-\mu-1/2}S_\mu^k\phi(x)| < \infty,$$

para cada $k \in I\!N$. $X_{\mu,m,\#}$ es dotado de la topología generada por la familia $\{\alpha_{m,\mu}^k\}_{k\in I\!N}$ de seminormas. Procediendo como en el Lema 6.3-1 [81] podemos probar que $X_{\mu,m,\#}$ es completo y, por tanto, Fréchet. Es claro que $\mathcal{X}_\mu$ está contenido en $X_{\mu,m,\#}$. Definimos el espacio $\mathcal{X}_{\mu,m,\#}$ como la clausura de $\mathcal{X}_\mu$ en $X_{\mu,m,\#}$. De este modo $\mathcal{X}_{\mu,m,\#}$ es también un espacio de Fréchet. Además $\mathcal{X}_{\mu,m+1,\#}$ está continuamente contenido en $\mathcal{X}_{\mu,m,\#}$.

Obtenemos ahora una representación para los elementos de $T \in \mathcal{X}'_{\mu,m,\#}$ sobre $\mathcal{X}_\mu$.

Proposición 2.10 *Sea $m \in \mathbb{Z}$. Si $T \in \mathcal{X}'_{\mu,m,\#}$ entonces existen $r \in I\!N$ y $r+1$ funciones $f_k \in L_\infty(0,\infty)$, $k = 0, 1, ..., r$, tales que*

$$T = \sum_{k=0}^{r} S_\mu^k[x^{-\mu-1/2}e^{(m+2)x}f_k]$$

sobre $\mathcal{X}_\mu$.

Demostración:

Sea $T \in \mathcal{X}'_{\mu,m,\#}$. Existen $n \in I\!N$ y $C > 0$ para los cuales se tiene

$$| < T, \phi > | \leq C \max_{0\leq k\leq n} \alpha_{m,\mu}^k(\phi), \ \phi \in \mathcal{X}_{\mu,m,\#}. \qquad \text{(II.2.23)}$$

Sean $\phi \in \mathcal{X}_\mu$ y $k \in I\!N$. Supongamos en primer lugar que $m \in I\!N$. Para cada $x \in (0,\infty)$ tenemos

$$x^{-\mu-1/2}S_\mu^k\phi(x) = \int_\infty^x \frac{d}{dt}[t^{-\mu-1/2}S_{\mu,t}^k\phi(t)]dt.$$

Entonces

$$|e^{mx}x^{-\mu-1/2}S_\mu^k\phi(x)| \leq e^{mx}\int_x^\infty \left|\frac{d}{dt}[t^{-\mu-1/2}S_{\mu,t}^k\phi(t)]\right|dt \leq$$

$$\leq \int_0^\infty e^{mt}\Big|\frac{d}{dt}[t^{-\mu-1/2}S^k_{\mu,t}\phi(t)]\Big|dt = \int_0^1 e^{mt}t^{-2\mu-1}\Big|\int_0^t u^{\mu+1/2}S_\mu^{k+1}\phi(u)du\Big|dt+$$

$$+\int_1^\infty e^{mt}t^{-2\mu-1}\Big|\int_t^\infty u^{\mu+1/2}S_\mu^{k+1}\phi(u)du\Big|dt \leq$$

$$\leq \int_0^1 e^{mt}\int_0^t u^{-\mu-1/2}|S_\mu^{k+1}\phi(u)|du\, dt+$$

$$+\int_1^\infty e^{-t}t^{-2\mu-1}\int_t^\infty e^{(m+1)u}u^{\mu+1/2}|S_\mu^{k+1}\phi(u)|du\, dt \leq$$

$$\leq C\left(\int_0^\infty u^{-\mu-1/2}|S_\mu^{k+1}\phi(u)|du + \int_0^\infty e^{(m+2)u}u^{-\mu-1/2}|S_\mu^{k+1}\phi(u)|du\right),\ x\in(0,\infty).$$

Luego

$$\alpha^k_{m,\mu}(\phi) \leq C\int_0^\infty e^{(m+2)u}u^{-\mu-1/2}|S_\mu^{k+1}\phi(u)|du. \tag{II.2.24}$$

Supongamos ahora que $m\in\mathbb{Z}$, siendo $m\leq -1$. Podemos escribir

$$|e^{mx}x^{-\mu-1/2}S^k_\mu\phi(x)| \leq \int_0^\infty \Big|\frac{d}{dt}[e^{mt}t^{-\mu-1/2}S^k_\mu\phi(t)]\Big|dt \leq$$

$$\leq |m|\int_0^\infty e^{mt}t^{-\mu-1/2}|S^k_\mu\phi(t)|dt + \int_0^\infty e^{mt}\Big|\frac{d}{dt}[t^{-\mu-1/2}S^k_\mu\phi(t)]\Big|dt \leq$$

$$\leq |m|\int_0^\infty e^{mt}t^{-\mu-1/2}|S^k_\mu\phi(t)|dt + \int_0^\infty e^{mt}t^{-2\mu-1}\int_0^t u^{\mu+1/2}|S_\mu^{k+1}\phi(u)|du\, dt \leq$$

$$\leq C\left(\int_0^\infty e^{mt}t^{-\mu-1/2}|S^k_\mu\phi(t)|dt + \int_0^\infty e^{(m+1)t}t^{-\mu-1/2}|S_\mu^{k+1}\phi(t)|dt\right),\ x\in(0,\infty).$$

Por tanto,

$$\alpha^k_{m,\mu}(\phi) \leq C\left(\int_0^\infty e^{mt}t^{-\mu-1/2}|S^k_\mu\phi(t)|dt + \int_0^\infty e^{(m+1)t}t^{-\mu-1/2}|S_\mu^{k+1}\phi(t)|dt\right). \tag{II.2.25}$$

De (II.2.23), (II.2.24) y (II.2.25) concluimos que

$$|<T,\phi>| \leq C\max_{0\leq k\leq r}\int_0^\infty e^{(m+2)t}t^{-\mu-1/2}|S^k_\mu\phi(t)|dt\ ,\ \phi\in\mathcal{X}_\mu, \tag{II.2.26}$$

para ciertos $C>0$ y $r\in I\!N$.

La representación deseada para T puede ser ahora obtenida de (II.2.26) haciendo uso del teorema de extensión de Hahn-Banach y teniendo en cuenta que el dual de

$L_1(0,\infty)$ es $L_\infty(0,\infty)$ (véanse, por ejemplo, (p.214, [76]), [5] y [9], donde se prueban representaciones para ciertos espacios de distribuciones). $\square$

Denotaremos por $\mathcal{X}_{\mu,\#}$ el espacio $\bigcup\limits_{m\in} \mathcal{X}_{\mu,m,\#}$ dotado de la topología inductiva. Como es usual representaremos por $\mathcal{X}'_{\mu,\#}$ el espacio dual de $\mathcal{X}_{\mu,\#}$. Nuestro próximo objetivo es caracterizar los elementos de $\mathcal{X}'_\mu$ que pertenecen a $\mathcal{X}'_{\mu,\#}$.

Teorema 2.11 *Sea $T \in \mathcal{X}'_\mu$. Las propiedades que a continuación enunciamos son equivalentes.*

(i) $T \in \mathcal{X}'_{\mu,\#}$.

(ii) $x^{-\mu-1/2}h'_\mu(T) \in \mathcal{O}_Q$.

(iii) Para cada $m \in I\!N$ existen $r \in I\!N$ y $r+1$ funciones f_k, $k = 0, ..., r$, continuas sobre $(0,\infty)$ y tales que

$$T = \sum_{k=0}^{r} S_\mu^k f_k \tag{II.2.27}$$

y $e^{mx}f_k$ es acotada sobre $(0,\infty)$, para cada $k = 0, ..., r$.

(iv) Para cada $m \in I\!N$ existen $r \in I\!N$ y $r+1$ funciones f_k, $k = 0, ..., r$, continuas y acotadas sobre $(0,\infty)$ verificando (II.2.27) y siendo $e^{mx}f_k \longrightarrow 0$, cuando $x \to \infty$, para cada $k = 0, ..., r$.

(v) Para cada $m \in I\!N$ existen $r \in I\!N$ y $r+1$ funciones f_k, $k = 0, ..., r$, continuas y acotadas sobre $(0,\infty)$ tales que (II.2.27) es válida y que $e^{mx}f_k \in L_1(0,\infty)$, para cada $k = 0, ..., r$.

Demostración:

(i) $\Rightarrow$ *(ii)*. Sea $T \in \mathcal{X}'_{\mu,\#}$. Entonces $T \in \mathcal{X}'_{\mu,m,\#}$, para cada $m \in \mathbb{Z}$. Sea $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m < -2$. La Proposición 2.10 garantiza la existencia de $r \in I\!N$ y $r+1$ funciones $f_k \in L_\infty(0,\infty)$, $k = 0, 1, ..., r$, tales que

$$T = \sum_{k=0}^{r} S_\mu^k[x^{-\mu-1/2}e^{(m+2)x}f_k], \text{ sobre } \mathcal{X}_\mu.$$

Definimos $g_k(x) = e^{(m+2)x}x^{-\mu-1/2}f_k$, $k = 0, 1, ..., r$. El Teorema de Fubini permite escribir

$$< h'_\mu T, \Phi >=< T, h_\mu(\Phi) >= \sum_{k=0}^{r}(-1)^k \int_0^\infty g_k(x)h_\mu[y^{2k}\Phi(y)](x)dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{r}(-1)^k \int_0^\infty y^{\mu+1/2+2k}\Phi(y) \int_0^\infty g_k(x)x^{\mu+1/2}(xy)^{-\mu}J_\mu(xy)dxdy, \ \Phi \in \mathcal{Q}_\mu.$$

Por tanto se tiene que

$$y^{-\mu-1/2}(h'_\mu T)(y) = \sum_{k=0}^{r}(-1)^k y^{2k} \int_0^\infty g_k(x)x^{\mu+1/2}(xy)^{-\mu}J_\mu(xy)dx, \text{ sobre } \mathcal{Q}_\mu. \tag{II.2.28}$$

Sea ahora $n \in I\!N$. Consideramos la representación (II.2.28) asociada a $m = -n-3$. Entonces, de acuerdo con (II-4) concluimos que para cada $n \in I\!N$

$$|y^{-\mu-1/2}(h'_\mu T)(y)| \leq C(1 + |y|^{2r}), \text{ cuando } |Im\ y| \leq n.$$

De este modo probamos que $y^{-\mu-1/2}h'_\mu(T) \in \mathcal{O}_\mathcal{Q}$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sea $m \in I\!N$. Definimos $\theta = h'_\mu T$. Sabemos que $z^{-\mu-1/2}\theta \in \mathcal{O}_\mathcal{Q}$. Entonces, para cada $l \in I\!N$ existen $C_l > 0$ y $n_l \in I\!N$ tales que

$$|z^{-\mu-1/2}\theta(z)| \leq C_l(1 + |z|^2)^{n_l}, \ |Im\ z| \leq l.$$

Definimos la función $v(z) = (M^2 + z^2)^{-k}\theta(z)$, $|Im\ z| \leq m+1$. Hemos escogido $k, M \in I\!N$ de manera que $M > m+1$ y $k > n_{m+1} + \mu + 1$. De este modo v es absolutamente integrable sobre $(0, \infty)$ y por tanto $h'_\mu v = h_\mu v$. Además, teniendo en cuenta el Lema 5.4-1 [81], podemos escribir

$$T = h'_\mu\theta = h'_\mu((M^2 + z^2)^k v(z)) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j M^{2(k-j)}S^j_\mu h_\mu(v) = \sum_{j=0}^{k} S^j_\mu f_j\ ,$$

donde $f_j = \binom{k}{j}(-1)^j M^{2(k-j)}h_\mu v$, para cada $j = 0, ..., k$. Es claro que, al ser v absolutamente integrable sobre $(0, \infty)$, f_j es continua sobre $(0, \infty)$ para cada $j = 0, ..., k$.

Para establecer (iii) debemos probar que $e^{mx}h_\mu(v)(x)$ es una función acotada sobre $(0,\infty)$. Observamos inicialmente que $e^{mx}h_\mu(v)(x)$ es acotada sobre $(0,1]$ ya que $v \in L_1(0,\infty)$. Por otra parte, procediendo como en la prueba del Lema 6.1 [29] obtenemos

$$h_\mu(v)(x) = \frac{1}{2}x^{\mu+1/2}\int_{-\infty}^{\infty}(x(\xi+i\eta))^{-\mu}H_\mu^{(1)}(x(\xi+i\eta))(\xi+i\eta)^{\mu+1/2}v(\xi+i\eta)d\xi \quad \text{(II.2.29)}$$

para cada $x \in (1,\infty)$ y $0<\eta<M$. De la propiedad (II-5) y de (II.2.29) se deduce que

$$|e^{mx}h_\mu(v)(x)| \leq Ce^{-x}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\xi+i(m+1)|^{\mu+1/2}}{(1+|\xi+i(m+1)|^2)^{k-n_{m+1}}}d\xi\cdot$$

$$\cdot \sup_{|Im\ z|\leq m+1}|(1+|z|^2)^{k-n_{m+1}}z^{-\mu-1/2}v(z)|,\ x\in(1,\infty).$$

Concluimos así, ya que $k > n_{m+1}+\mu+1$, la acotación de $e^{mx}h_\mu(v)$ sobre $(1,\infty)$.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ and $(iv) \Rightarrow (v)$ pueden ser probadas sin dificultad.

$(v) \Rightarrow (i)$. Tenemos que ver que $T \in \mathcal{X}'_{\mu,m,\#}$ para cada $m \in \mathbb{Z}$.

Sea $m \in \mathbb{Z}$. Tomamos $n \in I\!N$ de manera que $n \geq -m+1$. Existen $r \in I\!N$ y $r+1$ funciones f_i, $i=0,...,r$, continuas y acotadas sobre $(0,\infty)$, y tales que

$$T = \sum_{i=0}^{r} S_\mu^i f_i,$$

y $e^{nx}f_i \in L_1(0,\infty)$, $i=0,...,r$.

Entonces se tiene

$$< T,\phi >= \sum_{i=0}^{r}\int_0^\infty f_i(x)S_\mu^i\phi(x)dx,\ \phi\in\mathcal{X}_\mu. \quad \text{(II.2.30)}$$

Por tanto,

$$|< T,\phi >| \leq \sum_{i=0}^{r}\int_0^\infty |e^{nx}f_i(x)|x^{\mu+1/2}e^{(-m-n)x}e^{mx}x^{-\mu-1/2}|S_\mu^i\phi(x)|dx \leq$$

$$\leq C\sum_{i=0}^{r}\alpha_{m,\mu}^i(\phi),\ \phi\in\mathcal{X}_\mu. \quad \text{(II.2.31)}$$

Ya que $\mathcal{X}_\mu$ es un subespacio denso de $\mathcal{X}_{\mu,m,\#}$, de (II.2.31) se sigue que T puede ser extendido a $\mathcal{X}_{\mu,m,\#}$ como un elemento de $\mathcal{X}'_{\mu,m,\#}$. Este elemento de $\mathcal{X}'_{\mu,m,\#}$ tiene también la representación (II.2.30) sobre $\mathcal{X}_{\mu,m,\#}$.

Completamos así la demostración del teorema. □

Del Teorema 2.3 y en virtud de las Proposiciones 4.5 y 4.6 [8] se deduce que $\mathcal{E}'_\mu$ está contenido en $\mathcal{X}'_{\mu,\#}$. Además es claro que $\mathcal{X}_\mu$ es un subespacio de $\mathcal{X}'_{\mu,\#}$.

Probamos a continuación que los elementos de $\mathcal{X}'_{\mu,\#}$ definen operadores de convolución en $\mathcal{X}_\mu$.

Proposición 2.12 *Sea $S \in \mathcal{X}'_{\mu,\#}$. Entonces la aplicación $\phi \longrightarrow S\#\phi$ es continua de $\mathcal{X}_\mu$ en sí mismo.*

<u>Demostración</u>:

De la Proposición 2.9 se sigue que

$$h'_\mu(S\#\phi) = x^{-\mu-1/2}h'_\mu(S)h_\mu(\phi), \text{ para cada } \phi \in \mathcal{X}_\mu.$$

Entonces los Teoremas 2.3 y 2.11 permiten concluir que $h'_\mu(S\#\phi) \in \mathcal{Q}_\mu$, para cada $\phi \in \mathcal{X}_\mu$, y que la aplicación $\phi \longrightarrow h'_\mu(S\#\phi)$ es continua de $\mathcal{X}_\mu$ en $\mathcal{Q}_\mu$. Finalmente, teniendo en cuenta que sobre $\mathcal{Q}_\mu$ la transformación h'_μ se reduce a la transformación h_μ clásica, recurriendo de nuevo al Teorema 2.3 obtenemos que la aplicación $\phi \longrightarrow S\#\phi$ es continua de $\mathcal{X}_\mu$ en sí mismo. □

La Proposición 2.12 permite definir la convolución $T\#S$ de $T \in \mathcal{X}'_\mu$ y $S \in \mathcal{X}'_{\mu,\#}$ como sigue: si $T \in \mathcal{X}'_\mu$ y $S \in \mathcal{X}'_{\mu,\#}$ la convolución $T\#S$ de T y S es el elemento de $\mathcal{X}'_\mu$ definido por

$$< T\#S, \phi >=< T, S\#\phi >, \; \phi \in \mathcal{X}_\mu.$$

Nótese que, en virtud de la Proposición 2.9, la definición de la convolución sobre $\mathcal{X}'_\mu$ x $\mathcal{X}'_{\mu,\#}$ que acabamos de dar es una generalización de la definición dada para la convolución sobre $\mathcal{X}'_\mu$ x $\mathcal{X}_\mu$.

En la siguiente proposición establecemos la fórmula de intercambio de la transformación h'_μ de Hankel y la convolución sobre $\mathcal{X}'_\mu$ x $\mathcal{X}'_{\mu,\#}$.

Proposición 2.13 *Sean $T \in \mathcal{X}'_\mu$ y $S \in \mathcal{X}'_{\mu,\#}$. Entonces*

$$h'_\mu(T\#S) = x^{-\mu-1/2} h'_\mu(T) h'_\mu(S) .$$

<u>Demostración</u>:

Basta observar que, de acuerdo con las Proposiciones 2.9 y 2.12, se tiene

$$< h'_\mu(T\#S), \Phi > = < T\#S, h_\mu(\Phi) > = < T, S\#h_\mu(\Phi) > =$$

$$< h'_\mu(T), h_\mu(S\#h_\mu(\Phi)) > = < h'_\mu(T), x^{-\mu-1/2} h'_\mu(S)\Phi > =$$

$$= < x^{-\mu-1/2} h'_\mu(T) h'_\mu(S), \Phi > \ , \ \Phi \in \mathcal{Q}_\mu.$$

□

Del Teorema 2.11 y la Proposición 2.13 se deduce que la convolución # es cerrada en $\mathcal{X}'_{\mu,\#}$.

Proposición 2.14 *Sean $R, S \in \mathcal{X}'_{\mu,\#}$ entonces $R\#S \in \mathcal{X}'_{\mu,\#}$.*

□

Las principales propiedades algebraicas para la convolución # sobre $\mathcal{X}'_\mu$ se recogen a continuación.

Proposición 2.15 *Sean $T \in \mathcal{X}'_\mu$ y $R, S \in \mathcal{X}'_{\mu,\#}$. Se tienen*

(i) $(T\#R)\#S = T\#(R\#S)$.

(ii) $R\#S = S\#R$.

(iii) $S_\mu(T\#R) = (S_\mu T)\#R = T\#(S_\mu R)$.

(iv) Si por δ_μ denotamos a la funcional sobre $\mathcal{X}_\mu$ definida por

$$< \delta_\mu, \phi >= 2^\mu \Gamma(\mu+1) \lim_{x\to 0^+} x^{-\mu-1/2}\phi(x), \ \phi \in \mathcal{X}_\mu,$$

entonces $\delta_\mu \in \mathcal{X}'_{\mu,\#}$ y $R\#\delta_\mu = R$.

Demostración:

Las propiedades (i), (ii) y (iii) siguen inmediatamente de la Proposición 2.13. Para probar (iv) es suficiente tener en cuenta que $y^{-\mu-1/2}h'_\mu(\delta_\mu) = 1$. □

Capítulo 3

Ecuaciones de convolución de Hankel en espacios de distribuciones

En este capítulo estudiamos algunos aspectos relativos a las ecuaciones de convolución de Hankel en $\mathcal{H}'_\mu$ y $\mathcal{X}'_\mu$.

En la Sección II.3.2 se dan condiciones necesarias y suficientes sobre $S \in \mathcal{O}'_{\mu,\#}$ para que la ecuación de convolución

$$u\#S = v$$

tenga solución para cada $v \in \mathcal{H}'_\mu$, o en otras palabras, para que $\mathcal{H}'_\mu\#\mathcal{O}'_{\mu,\#} = \mathcal{H}'_\mu$. Abordamos también el problema cuando $\mathcal{H}'_\mu$ y $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ son reemplazados por $\mathcal{X}'_\mu$ y $\mathcal{X}'_{\mu,\#}$, respectivamente. En la Sección II.3.3 obtenemos una condición necesaria y suficiente para que $S \in \mathcal{O}'_{\mu,\#}$ sea hipoelíptica en $\mathcal{H}'_\mu$, esto es, para que u esté en $\mathcal{O}_{\mu,\#}$ siempre que $u \in \mathcal{H}'_\mu$ y $u\#S \in \mathcal{O}_{\mu,\#}$. La hipoelipticidad de $S \in \mathcal{X}'_{\mu,\#}$ se trata en la Sección II.3.4 obteniéndose una condición necesaria para que $S \in \mathcal{X}'_{\mu,\#}$ sea hipoelíptica en $\mathcal{X}'_\mu$.

En esta sección, teniendo como punto de partida los trabajos de S. Sznajder y Z. Zielezny ([73] y [74]) y D.H. Pahk y B.K. Sohn [60], obtenemos condiciones necesarias y suficientes para resolver ecuaciones de convolución de Hankel en los espacios $\mathcal{H}'_\mu$ y $\mathcal{X}'_\mu$ de distribuciones.

Recientemente J.J. Betancor e I. Marrero ([10] y [52]) han estudiado ecuaciones de convolución sobre $\mathcal{H}'_\mu$. El subespacio $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ de $\mathcal{H}'_\mu$ de operadores de convolución en $\mathcal{H}'_\mu$ fue caracterizado en la Proposición 4.2 [52]. El resultado que a continuación enunciamos fue establecido en [10].

Proposición 3.1 *(Teorema 3.1, [10]). Sea $S \in \mathcal{O}'_{\mu,\#}$. Las dos condiciones que siguen son equivalentes.*

(i) Para cada $k \in \mathbb{N}$ existen $m, n \in \mathbb{N}$ y una constante positiva M tal que

$$\max_{0\leq l\leq m} sup\left\{\left|\left(\frac{1}{t}D\right)^l[t^{-\mu-1/2}h'_\mu(S)(t)]\right| : t \in (0,\infty), |x-t| \leq (1+x^2)^{-k}\right\} \geq$$

$$\geq (1+x^2)^{-n}, \ \textit{siempre que } x \in (M,\infty).$$

(ii) Si $T \in \mathcal{O}'_{\mu,\#}$ y $S\#T \in \mathcal{H}_\mu$ entonces $T \in \mathcal{H}_\mu$.

□

Probaremos en la siguiente proposición que, si $S \in \mathcal{O}'_{\mu,\#}$, la existencia de solución en $\mathcal{H}'_\mu$ para la ecuación de convolución

$$u\#S = v, \tag{II.3.1}$$

para cada $v \in \mathcal{H}'_\mu$, implica las condiciones (i) y (ii) en la Proposición 3.1.

Proposición 3.2 *Sea $S \in \mathcal{O}'_{\mu,\#}$. Si $\mathcal{H}'_\mu\#S = \mathcal{H}'_\mu$ entonces se satisfacen las condiciones (i) y (ii) enunciadas en la Proposición 3.1.*

Demostración:

Es suficiente probar que la propiedad (ii) que aparece en la Proposición 3.1 se da cuando $\mathcal{H}'_\mu \# S = \mathcal{H}'_\mu$.

Observamos inicialmente que la aplicación

$$\begin{aligned} F : \mathcal{H}'_\mu &\longrightarrow \mathcal{H}'_\mu = \mathcal{H}'_\mu \# S \\ u &\longrightarrow u\# S \end{aligned}$$

es la traspuesta de la aplicación

$$\begin{aligned} G : \mathcal{H}_\mu &\longrightarrow S\#\mathcal{H}_\mu \subset \mathcal{H}_\mu \\ \phi &\longrightarrow S\#\phi. \end{aligned}$$

Entonces, del Corolario establecido en la página 92 de [25] se sigue que G es un isomorfismo. En particular, la aplicación $G^{-1} : S\#\mathcal{H}_\mu \to \mathcal{H}_\mu$ es continua.

Supongamos ahora que $T \in \mathcal{O}'_{\mu,\#}$ es tal que $T\#S \in \mathcal{H}_\mu$. Nuestro objetivo es probar que $T \in \mathcal{H}_\mu$.

Elegimos una sucesión $(\varphi_k)_{k=0}^\infty$ de funciones regulares sobre $(0,\infty)$ de manera que las siguientes condiciones

(i) $\displaystyle\int_0^\infty x^{\mu+1/2}\varphi_k(x)dx = c_\mu$, donde $c_\mu = 2^\mu\Gamma(\mu+1)$,

(ii) $0 \leq \varphi_k(x)$, $x \in (0,\infty)$, y

(iii) $\varphi_k(x) = 0$, $x \notin \left(\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{1}{k}\right)$,

se satisfacen para cada $k \in \mathbb{N}$.

Como se recoge en la página 1148 [9] tenemos que

$$\varphi_k\#\phi \longrightarrow \phi\ , \text{ cuando } k \to \infty, \tag{II.3.2}$$

para cada $\phi \in \mathcal{H}_\mu$ y donde la convergencia es entendida en $\mathcal{H}_\mu$.

Además, de la Proposición 4.7 [52] se deduce

$$S\#(T\#\varphi_k) = (S\#T)\#\varphi_k = (T\#S)\#\varphi_k, \text{ para cada } k \in \mathbb{N}. \tag{II.3.3}$$

Ya que $T\#\varphi_k \in \mathcal{H}_\mu$, para cada $k \in I\!N$, y teniendo en cuenta que G^{-1} es continua, de (II.3.2) y (II.3.3) se deduce que $(T\#\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ converge en $\mathcal{H}_\mu$. De (II.3.2) inferimos también que

$$T\#\varphi_k \longrightarrow T, \text{ cuando } k \to \infty, \tag{II.3.4}$$

en $\mathcal{H}'_\mu$, cuando consideramos sobre $\mathcal{H}'_\mu$ la topología débil $*$ (o la topología fuerte). En efecto, en virtud de la Proposición 3.5 [52] podemos escribir

$$< T\#\varphi_k, \phi >=< T, \varphi_k\#\phi >, \text{ para cada } \phi \in \mathcal{H}_\mu \text{ y } k \in I\!N.$$

Basta ahora tener en cuenta (II.3.2) para obtener (II.3.4).

Ya que la convergencia en $\mathcal{H}_\mu$ implica la convergencia en $\mathcal{H}'_\mu$, cuando se considera la topología fuerte de $\mathcal{H}'_\mu$, concluimos que $T \in \mathcal{H}_\mu$. $\Box$

En el Capítulo 2 de esta Memoria fue definida y estudiada la convolución de Hankel sobre distribuciones de crecimiento exponencial. Allí fueron introducidos los espacios $\mathcal{X}_\mu$ y $\mathcal{X}_{\mu,\#}$ y sus correspondientes espacios duales $\mathcal{X}'_\mu$ y $\mathcal{X}'_{\mu,\#}$. Los elementos de $\mathcal{X}'_{\mu,\#}$ definen operadores de convolución sobre $\mathcal{X}'_\mu$, esto es: para cada $S \in \mathcal{X}'_{\mu,\#}$ la aplicación $\phi \longrightarrow S\#\phi$ es continua de $\mathcal{X}_\mu$ en sí mismo.

A continuación establecemos una condición necesaria para que $S \in \mathcal{X}'_{\mu,\#}$ sea tal que la ecuación (II.3.1) admita solución para cada $v \in \mathcal{X}'_\mu$.

Proposición 3.3 *Sea $S \in \mathcal{X}'_{\mu,\#}$. Si $\mathcal{X}'_\mu\#S = \mathcal{X}'_\mu$ entonces S satisface la siguiente propiedad: $T \in \mathcal{X}_\mu$ siempre que $T \in \mathcal{X}'_{\mu,\#}$ y $T\#S \in \mathcal{X}_\mu$.*

Demostración:

Este resultado puede ser probado de un modo similar a como fue demostrada la Proposición 3.2. Es suficiente probar que si $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ es una sucesión de funciones regulares sobre $(0,\infty)$ verificando las tres condiciones citadas en la prueba de la Proposición 3.2

(i) $\int_0^\infty x^{\mu+1/2}\varphi_k(x)dx = c_\mu$, donde $c_\mu = 2^\mu\Gamma(\mu+1)$,

(ii) $0 \leq \varphi_k(x)$, $x \in (0,\infty)$, y

(iii) $\varphi_k(x) = 0$, $x \notin \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$,

para cada $k \in I\!N$, entonces, para cada $\phi \in \mathcal{X}_\mu$ se tiene que

$$\varphi_k \# \phi \longrightarrow \phi, \text{ cuando } k \to \infty,$$

en $\mathcal{X}_\mu$.

En virtud del Teorema 2.3, y de la fórmula de intercambio (Teorema 2.d, [42]) basta probar que, para cada $\Phi \in \mathcal{Q}_\mu$

$$z^{-\mu-1/2}h_\mu(\varphi_k)\Phi \longrightarrow \Phi, \text{ cuando } k \to \infty, \tag{II.3.5}$$

en $\mathcal{Q}_\mu$.

Sea $\Phi \in \mathcal{Q}_\mu$. Nuestro objetivo es probar (II.3.5) donde $(\varphi_k)_{k=0}^\infty$ es una sucesión de funciones regulares sobre $(0,\infty)$ verificando φ_k las condiciones (i), (ii) y (iii) para cada $k \in I\!N$. Ya que $\int_0^\infty t^{\mu+1/2}\varphi_k(t)dt = c_\mu$, para cada $k \in I\!N$, podemos escribir

$$z^{-\mu-1/2}h_\mu(\varphi_k)(z) - 1 = \int_0^\infty (zt)^{-\mu}J_\mu(zt)t^{\mu+1/2}\varphi_k(t)dt - 1 =$$

$$= \int_{1/(k+1)}^{1/k} \left[(zt)^{-\mu}J_\mu(zt) - \frac{1}{c_\mu}\right]t^{\mu+1/2}\varphi_k(t)dt, \text{ para cada } k \in I\!N \text{ y } z \in \mathbb{C}.$$

Sea K un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ y $\epsilon > 0$. Existe $t_0 > 0$ tal que

$$\left|(zt)^{-\mu}J_\mu(zt) - \frac{1}{c_\mu}\right| < \epsilon, \text{ para cada } 0 < t < t_0 \text{ y } z \in K.$$

Por tanto

$$\left|z^{-\mu-1/2}h_\mu(\varphi_k)(z) - 1\right| \leq \int_{1/(k+1)}^{1/k} \left|(zt)^{-\mu}J_\mu(zt) - \frac{1}{c_\mu}\right|t^{\mu+1/2}\varphi_k(t)dt < \epsilon c_\mu,$$

para cada $z \in K$ y $k \in I\!N$ siendo $k \geq k_0$, para cierto $k_0 \in I\!N$.

Además, del Lema 4 [47] se infiere que

$$\left|z^{-\mu-1/2}h_\mu(\varphi_k)(z)-1\right| \leq \int_0^\infty (|(zt)^{-\mu}J_\mu(zt)|+1)t^{\mu+1/2}\varphi_k(t)dt \leq$$

$$\leq Ce^{|Im\, z|}\int_0^\infty t^{\mu+1/2}\varphi_k(t)dt = Cc_\mu e^{|Im\, z|},\ z\in\mathbb{C} \text{ y } k\in\mathbb{N}.$$

Nótese que la constante C no depende de $k\in\mathbb{N}$.

De aquí se deduce que para cada $m\in\mathbb{N}$ existe $\alpha>0$ tal que

$$\frac{1}{1+|z|^2}|z^{-\mu-1/2}h_\mu(\varphi_k)(z)-1|<\epsilon,\ \text{para cada } k\in\mathbb{N},\ |Re\, z|>\alpha \text{ y } |Im\, z|\leq m.$$

Por tanto podemos concluir que para cada $m\in\mathbb{N}$ existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{1+|z|^2}|z^{-\mu-1/2}h_\mu(\varphi_k)(z)-1|<\epsilon,\ \text{para cada } k\in\mathbb{N},\ k\geq k_0 \text{ y } |Im\, z|\leq m.$$

Si $m,n\in\mathbb{N}$ podemos entonces escribir que

$$w^\mu_{m,n}\Big(\Phi(z)[z^{-\mu-1/2}h_\mu(\varphi_k)(z)-1]\Big)\leq$$

$$\leq \sup_{|Im\, z|\leq m}(1+|z|^2)^{n+1}|z^{-\mu-1/2}\Phi(z)| \sup_{|Im\, z|\leq m}\frac{1}{1+|z|^2}\left|z^{-\mu-1/2}h_\mu(\varphi_k)(z)-1\right| \longrightarrow 0,$$

cuando $k\to\infty$.

Probamos así (II.3.5). □

Damos ahora una condición para $S\in\mathcal{X}'_{\mu,\#}$ que garantiza la existencia de solución en $\mathcal{X}'_\mu$ para la ecuación (II.3.1) cualquiera que sea $v\in\mathcal{X}'_\mu$.

Proposición 3.4 *Sea $S\in\mathcal{X}'_{\mu,\#}$. Si existen tres constantes positivas N, r y C tales que*

$$\sup_{z\in\mathbb{C},\ |z|\leq r}|(\xi+z)^{-\mu-1/2}h'_\mu(S)(\xi+z)|\geq\frac{C}{(1+|\xi|^2)^N},\ \xi\in\mathbb{R}, \tag{II.3.6}$$

entonces $\mathcal{X}'_\mu\#S=\mathcal{X}'_\mu$.

<u>Demostración</u>:

De acuerdo con el Corolario establecido en la página 92 [25] para ver que $\mathcal{X}'_\mu \# S = \mathcal{X}'_\mu$ es suficiente probar que la aplicación lineal

$$\begin{aligned} G : \mathcal{X}_\mu &\longrightarrow S\#\mathcal{X}_\mu \subset \mathcal{X}_\mu \\ \phi &\longrightarrow S\#\phi \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Nótese, en primer lugar, que, como $S \in \mathcal{X}'_{\mu,\#}$, la aplicación G es continua (Proposición 2.12). Además, G es inyectiva. En efecto, podemos escribir

$$G(\phi) = h_\mu(z^{-\mu-1/2}h'_\mu(S)h_\mu(\phi)),\ \phi \in \mathcal{X}_\mu.$$

Por tanto, si $G(\phi) = 0$ entonces $h'_\mu(z^{-\mu-1/2}h'_\mu(S)h_\mu(\phi)) = 0$, en $(0,\infty)$, y el Teorema 2.3, conduce a que $z^{-\mu-1/2}h'_\mu(S)h_\mu(\phi) = 0$, sobre $\mathbb{C}$. Basta ahora tener en cuenta que $z^{-\mu-1/2}h'_\mu(S)$ no es idénticamente nula para concluir que $h_\mu(\phi) = 0$, sobre $\mathbb{C}$. Recurriendo de nuevo al Teorema 2.3, obtenemos que $\phi = 0$, sobre $(0,\infty)$.

Para terminar la prueba debemos probar que la aplicación

$$\begin{aligned} G^{-1} : S\#\mathcal{X}_\mu &\longrightarrow \mathcal{X}_\mu \\ S\#\phi &\longrightarrow \phi \end{aligned}$$

es continua, o lo que es lo mismo (véanse la Proposición 2.9 y el Teorema 2.3) debemos demostrar que la aplicación

$$\begin{aligned} F : z^{-\mu-1/2}h'_\mu(S)\mathcal{Q}_\mu &\longrightarrow \mathcal{Q}_\mu \\ z^{-\mu-1/2}h'_\mu(S)\Phi &\longrightarrow \Phi \end{aligned}$$

es continua.

Sea $\Phi \in \mathcal{Q}_\mu$ y definamos $\Psi = z^{-\mu-1/2}h'_\mu(S)\Phi$. Sea $m \in \mathbb{N}$. En virtud del Lema 3.2 [43] obtenemos

$$|z^{-\mu-1/2}\Phi(z)| \leq \sup_{|z-s|<4(m+r)} |s^{-\mu-1/2}h'_\mu(S)(s)s^{-\mu-1/2}\Phi(s)|\cdot$$

$$\cdot \frac{\sup_{|z-s|<4(m+r)} |s^{-\mu-1/2}h'_\mu(S)(s)|}{\left[\sup_{|z-s|<m+r} |s^{-\mu-1/2}h'_\mu(S)(s)|\right]^2}, \; z \in \mathbb{C}. \tag{II.3.7}$$

Además, de (II.3.6) se sigue cuando $|Im\ z| \leq m$

$$\sup_{|z-s|<m+r} |s^{-\mu-1/2}h'_\mu(S)(s)| = \sup_{|s|<m+r} |(z+s)^{-\mu-1/2}h'_\mu(S)(z+s)| \geq$$

$$\geq \sup_{|s|<r} \left|(Re\ z+s)^{-\mu-1/2}h'_\mu(S)(Re\ z+s)\right| \geq \frac{C}{(1+|Re\ z|^2)^N} \geq \frac{C}{(1+|z|^2)^N}. \tag{II.3.8}$$

Por otra parte, del Teorema 2.11, se deduce que

$$\sup_{|Im\ s|\leq 5m+4r} (1+|s|^2)^{-n}|s^{-\mu-1/2}h'_\mu(S)(s)| < \infty,$$

para cierto $n \in I\!N$. Entonces

$$\sup_{|z-s|<4(m+r)} |s^{-\mu-1/2}h'_\mu(S)(s)| = \sup_{|s|<4(m+r)} |(s+z)^{-\mu-1/2}h'_\mu(S)(s+z)| \leq$$

$$\leq C \sup_{|s|<4(m+r)} (1+|s+z|^2)^n \leq C(1+|z|^2)^n, \; |Im\ z| \leq m. \tag{II.3.9}$$

Combinando ahora (II.3.7), (II.3.8) y (II.3.9) se consigue

$$|z^{-\mu-1/2}\Phi(z)| \leq C(1+|z|^2)^{n+2N} \sup_{|s|<4(m+r)} |(z+s)^{-\mu-1/2}\Psi(z+s)|, \; |Im\ z| \leq m. \tag{II.3.10}$$

Sea ahora $k \in I\!N$. (II.3.10) implica que

$$\sup_{|Im\ z|\leq m} (1+|z|^2)^k|z^{-\mu-1/2}\Phi(z)| \leq$$

$$\leq C \sup_{|Im\ z|\leq m} (1+|z|^2)^{n+2N+k} \sup_{|s|<4(m+r)} |(z+s)^{-\mu-1/2}\Psi(z+s)| \leq$$

$$\leq C \sup_{|Im\ z|\leq m} \sup_{|s|<4(m+r)} (1+|z+s|^2)^{n+2N+k}|(z+s)^{-\mu-1/2}\Psi(z+s)| \leq$$

$$\leq C \sup_{|Im\ z|\leq 5m+4r} (1+|z|^2)^{n+2N+k}|z^{-\mu-1/2}\Psi(z)|.$$

Queda así probado que F es continua y, por tanto, que G es un isomorfismo. $\square$

$\mathcal{H}'_\mu$

Numerosos autores (véanse, por ejemplo, [58], [59], [73], [74], [82] y [83]) han investigado la hipoelipticidad de ecuaciones de convolución (usual) en ciertos espacios de distribuciones.

En esta sección damos condiciones necesarias y suficientes para que una ecuación de convolución de Hankel sea hipoelíptica en el espacio $\mathcal{H}'_\mu$.

Sea $S \in \mathcal{O}'_{\mu,\#}$. Decimos que S (o la ecuación de convolución de Hankel $u\#S = v$) es hipoelíptica en $\mathcal{H}'_\mu$ si se verifica la siguiente propiedad: si $u \in \mathcal{H}'_\mu$, $v \in \mathcal{O}_{\mu,\#}$ y $u\#S = v$ entonces $u \in \mathcal{O}_{\mu,\#}$. Nótese que, como estableceremos a continuación, inversamente si $u \in \mathcal{O}_{\mu,\#}$ y $v = u\#S$ entonces v está en $\mathcal{O}_{\mu,\#}$. Para probar este resultado debemos establecer previamente los siguientes lemas.

Lema 3.5 *Sea $S \in \mathcal{O}'_{\mu,\#}$. Entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ existen $k \in \mathbb{N}$ y $k+1$ funciones f_p, $p = 0, ..., k$, continuas sobre $(0, \infty)$ tales que*

$$S = \sum_{p=0}^{k} S_\mu^p f_p \tag{II.3.11}$$

y $(1+x^2)^m x^{-\mu-1/2} f_p$ es acotada sobre $(0,\infty)$, para cada $p = 0, 1, ..., k$. (II.3.12)

<u>Demostración</u>:

Basta hacer una pequeña modificación en la prueba de la Proposición 4.2 [52]. $\square$

El espacio $\mathcal{O}_{\mu,\#}$ puede ser visto como un subespacio de $\mathcal{H}'_\mu$ ya que cada $f \in \mathcal{O}_{\mu,\#}$ define un elemento de $\mathcal{H}'_\mu$ mediante

$$< f, \phi >= \int_0^\infty f(x)\phi(x)dx, \ \phi \in \mathcal{H}_\mu.$$

Lema 3.6 *Sean $f \in \mathcal{O}_{\mu,l,\#}$, para cierto $l \in \mathbb{Z}$ y $S \in \mathcal{O}'_{\mu,\#}$. Entonces*

$$f\#S = \sum_{p=0}^{k} S_\mu^p(f\#f_p), \text{ sobre } \mathcal{H}_\mu,$$

donde $(f_p)_{p=0}^{k}$ es la familia de funciones asociada según el Lema 3.5 a $m \in \mathbb{N}$ siendo $m > |l| + \mu + 1$.

Demostración:

Sea $\phi \in \mathcal{H}_\mu$. Ya que $S = \sum_{p=0}^{k} S_\mu^p f_p$ podemos escribir

$$< f\#S, \phi >=< f, S\#\phi >= \int_0^\infty f(x) \sum_{p=0}^{k} \int_0^\infty f_p(y)(\tau_x S_\mu^p \phi)(y) dy dx =$$

$$= \sum_{p=0}^{k} \int_0^\infty f_p(y) \int_0^\infty f(x) \tau_y(S_\mu^p\phi)(x) dx dy.$$

La inversión del orden de integración está justificada ya que

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |f_p(y)|\, |f(x)| \int_0^\infty D(x,y,z) |S_{\mu,z}^p \phi(z)| dz dx dy =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty |f_p(y)|\, |S_{\mu,z}^p\phi(z)| \int_{|z-y|}^{z+y} D(x,y,z) x^{\mu+1/2} x^{-\mu-1/2} |f(x)| dx dz dy \leq$$

$$\leq C \int_0^\infty \int_0^\infty |f_p(y)|\, |S_{\mu,z}^p\phi(z)| (1+(z+y)^2)^{|l|} (zy)^{\mu+1/2} dz dy \leq$$

$$\leq C \int_0^\infty y^{\mu+1/2}(1+y^2)^{|l|} |f_p(y)| dy \int_0^\infty z^{\mu+1/2} (1+z^2)^{|l|} |S_{\mu,z}^p \phi(z)| dz < \infty,$$

al ser $m > |l| + \mu + 1$.

Cambiando de nuevo el orden de integración obtenemos

$$< f\#S, \phi >= \sum_{p=0}^{k} \int_0^\infty (S_\mu^p \phi)(x) \int_0^\infty f_p(y)(\tau_x f)(y) dy dx.$$

De este modo queda probado el Lema. □

Lema 3.7 *Sea $l \in \mathbb{Z}$. Si g es una función continua sobre $(0,\infty)$ tal que $(1+x^2)^\alpha x^{-\mu-1/2}g(x)$ es acotada sobre $(0,\infty)$, para algún $\alpha > |l|+\mu+1$, y $f \in \mathcal{O}_{\mu,l,\#}$ entonces $f\#g \in \mathcal{O}_{\mu,\#}$.*

Demostración:

Sea $\beta \in I\!N$. Procediendo como en la prueba del Lema 3.1 [6] podemos ver que los operadores τ_x y S_μ conmutan, para cada $x \in (0,\infty)$, sobre $\mathcal{O}_{\mu,\#}$. Por tanto, podemos escribir

$$S_\mu^\beta(f\#g)(x) = \int_0^\infty g(y)\tau_x(S_\mu^\beta f)(y)dy, \; x \in (0,\infty).$$

Además procediendo como en la prueba del lema anterior, obtenemos

$$|S_\mu^\beta(f\#g)(x)| \leq \int_0^\infty |g(y)|\,|\tau_x(S_\mu^\beta f)(y)|dy \leq$$

$$\leq \int_0^\infty |g(y)| \int_0^\infty D(x,y,z)|(S_\mu^\beta f)(z)|dzdy \leq$$

$$\leq C \sup_{z\in(0,\infty)} |(1+z^2)^l z^{-\mu-1/2}(S_\mu^\beta f)(z)| \int_0^\infty |g(y)|(1+(x+y)^2)^{|l|}(xy)^{\mu+1/2}dy \leq$$

$$\leq C \sup_{z\in(0,\infty)} |(1+z^2)^l z^{-\mu-1/2}(S_\mu^\beta f)(z)| \cdot$$

$$\cdot (1+x^2)^{|l|}x^{\mu+1/2}\int_0^\infty |g(y)|y^{\mu+1/2}(1+y^2)^{|l|}dy, \; x \in (0,\infty). \tag{II.3.13}$$

Por tanto $f\#g \in O_{\mu,-|l|,\#}$.

Además, existe $(\phi_j)_{j=0}^\infty \subset \mathcal{H}_\mu$ tal que $\phi_j \longrightarrow f$, cuando $j \to \infty$, en $O_{\mu,l,\#}$, y de (II.3.13) se sigue que $\phi_j\#g \longrightarrow f\#g$, cuando $j \to \infty$, en $O_{\mu,-|l|,\#}$. En virtud de la Proposición 2 [13], $\phi_j\#g \in \mathcal{O}_{\mu,\eta,\#}$, $j \in I\!N$, para algún $\eta \in \mathbb{Z}$, $\eta < -|l|$. Entonces, ya que $\mathcal{O}_{\mu,\eta,\#}$ es completo, $f\#g \in \mathcal{O}_{\mu,\#}$. □

Lema 3.8 *Sea $f \in \mathcal{O}_{\mu,\#}$. Entonces*

$$< f, S_\mu\phi >= \int_0^\infty (S_\mu f)(x)\phi(x)dx, \; \phi \in \mathcal{H}_\mu.$$

Demostración:

Existen $l \in \mathbb{Z}$ y una sucesión $(\phi_j)_{j=0}^{\infty} \subset \mathcal{H}_\mu$ tal que $\phi_j \longrightarrow f$, cuando $j \to \infty$, en $O_{\mu,l,\#}$. Entonces tenemos

$$\int_0^\infty (S_\mu \phi_j)(x)\phi(x)dx = \int_0^\infty \phi_j(x)(S_\mu\phi)(x)dx, \; j \in I\!N \text{ y } \phi \in \mathcal{H}_\mu,$$

y tomando límites cuando $j \to \infty$, concluimos que

$$\int_0^\infty (S_\mu f)(x)\phi(x)dx = \int_0^\infty f(x)(S_\mu\phi)(x)dx, \; \phi \in \mathcal{H}_\mu.$$

□

De los lemas anteriores inferimos lo siguiente.

Proposición 3.9 *Sean $f \in \mathcal{O}_{\mu,\#}$ y $S \in \mathcal{O}'_{\mu,\#}$. Entonces $f\#S \in \mathcal{O}_{\mu,\#}$.*

Demostración:

Sea $l \in \mathbb{Z}$ tal que $f \in \mathcal{O}_{\mu,l,\#}$. Elegimos $m \in I\!N$ siendo $m > |l| + \mu + 1$. El Lema 3.6 permite escribir

$$f\#S = \sum_{p=0}^{k} S_\mu^p(f\#f_p), \text{ sobre } \mathcal{H}_\mu,$$

donde, para cada $p = 0, 1, ..., k$, f_p es una función continua sobre $(0, \infty)$ tal que $(1 + x^2)^m x^{-\mu-1/2} f_p$ es acotada sobre $(0, \infty)$. Finalmente de los Lemas 3.7 y 3.8 se concluye que $f\#S$ está en $\mathcal{O}_{\mu,\#}$. □

Introducimos ahora una propiedad que caracterizará a los elementos de $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ que son hipoelípticos en $\mathcal{H}'_\mu$.

Decimos que $S \in \mathcal{O}'_{\mu,\#}$ satisface la propiedad (HE) si existen B y $M > 0$ tales que $|h'_\mu(S)(y)| \geq y^{-B}$, para cada $y \geq M$.

Probaremos que la propiedad (HE) es necesaria y suficiente para que un elemento S de $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ sea hipoelíptico en $\mathcal{H}'_\mu$.

El siguiente resultado nos permitirá probar la necesidad de la condición (HE).

Lema 3.10 *Supongamos que* $(\xi_j)_{j=1}^\infty \subset (0,\infty)$ *y que* $(a_j)_{j=1}^\infty \subset \mathbb{C}$*, siendo* $\xi_1 > 1$, $\xi_j - \xi_{j-1} > 1$*, para cada* $j = 2, 3, ...,$ *y* $|a_j| = O(\xi_j^\gamma)$*, cuando* $j \to \infty$*, para cierto* $\gamma > 0$*. Denotamos por* δ_μ *el elemento de* $\mathcal{H}'_\mu$ *definido por*

$$< \delta_\mu, \phi >= c_\mu \lim_{x\to 0^+} x^{-\mu-1/2}\phi(x),\ \phi \in \mathcal{H}_\mu,$$

donde $c_\mu = 2^\mu\Gamma(\mu+1)$*. Entonces* $\sum_{j=1}^\infty a_j\tau_{\xi_j}\delta_\mu \in \mathcal{H}'_\mu$*. Además si* $T = h'_\mu\Big(\sum_{j=1}^\infty a_j\tau_{\xi_j}\delta_\mu\Big)$ *se tiene que* $T \in \mathcal{O}_{\mu,\#}$ *si, y sólo si,* $|a_j| = O(\xi_j^{-\nu})$*, cuando* $j \to \infty$*, para cada* $\nu \in \mathbb{N}$*.*

<u>Demostración</u>:

La serie $\sum_{j=1}^\infty a_j\tau_{\xi_j}\delta_\mu$ converge en $\mathcal{H}'_\mu$, cuando consideramos en $\mathcal{H}'_\mu$ la topología débil $*$. En efecto, para cada $\phi \in \mathcal{H}_\mu$ y $\xi \in (0,\infty)$ teniendo en cuenta (2.1) [10], obtenemos

$$< \tau_\xi\delta_\mu, \phi >= c_\mu \lim_{x\to 0^+} x^{-\mu-1/2}(\tau_\xi\phi)(x) =$$

$$= c_\mu \lim_{x\to 0^+} h_\mu[(xt)^{-\mu}J_\mu(xt)h_\mu(\phi)(t)](\xi) = \phi(\xi). \qquad \text{(II.3.14)}$$

Por tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$< \sum_{j=1}^n a_j\tau_{\xi_j}\delta_\mu, \phi >= \sum_{j=1}^n a_j\phi(\xi_j),\ \phi \in \mathcal{H}_\mu,$$

y, ya que $|a_j| = O(\xi_j^\gamma)$, cuando $j \to \infty$, para algún $\gamma > 0$, la sucesión $\Big(\sum_{j=1}^n a_j\phi(\xi_j)\Big)_{n=1}^\infty$ converge, para cada $\phi \in \mathcal{H}_\mu$. Además

$$\Big| < \sum_{j=1}^\infty a_j\tau_{\xi_j}\delta_\mu, \phi > \Big| \leq C\Gamma^\mu_{m,0}(\phi),\ \phi \in \mathcal{H}_\mu,$$

donde $m \in \mathbb{N}$ es tal que $2m - \gamma - \mu - 3/2 > 0$. Concluimos que $\sum_{j=1}^\infty a_j\tau_{\xi_j}\delta_\mu \in \mathcal{H}'_\mu$.

De (II.3.14) se deduce que

$$< T, \phi >=< \sum_{j=1}^\infty a_j\tau_{\xi_j}\delta_\mu, h_\mu\phi >= \sum_{j=1}^\infty a_jh_\mu(\phi)(\xi_j) = \sum_{j=1}^\infty a_j\int_0^\infty \sqrt{x\xi_j}J_\mu(x\xi_j)\phi(x)dx =$$

$$=< \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sqrt{x\xi_j} J_\mu(x\xi_j), \phi(x) >, \ \phi \in \mathcal{H}_\mu.$$

Probamos así que $T = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sqrt{x\xi_j} J_\mu(x\xi_j)$.

En virtud de la acotación de la función $\sqrt{z}J_\mu(z)$ sobre $(0,\infty)$ no es difícil probar que si $|a_j| = O(|\xi_j|^{-\nu})$, cuando $j \to \infty$, para cada $\nu \in I\!N$, entonces para cada $\beta \in I\!N$ la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j(-\xi_j^2)^\beta \sqrt{x\xi_j} J_\mu(x\xi_j),$$

que define el elemento $S_\mu^\beta T$ de $\mathcal{H}'_\mu$ converge uniformemente sobre $(0,\infty)$. Además ya que $z^{-\mu}J_\mu(z)$ es acotada sobre $(0,\infty)$ se sigue que la función $x^{-\mu-1/2}S_\mu^\beta T$ es acotada sobre $(0,\infty)$. Por tanto, $T \in O_{\mu,\#}$. Además, $T \in \mathcal{O}_{\mu,\#}$. En efecto, sea λ una función regular sobre $(0,\infty)$ tal que $\lambda(x) = 1$, $x \in (0,1)$; $\lambda(x) = 0$, $x \in (2,\infty)$; y $\lambda(x) \geq 0$, $x \in (0,\infty)$. Definimos $\lambda_n(x) = \lambda(\frac{x}{n})$, $x \in (0,\infty)$ y $n = 1,2,\ldots$. Entonces $\lambda_n T \in \mathcal{H}_\mu$, para cada $n \in I\!N$. Probamos ahora que $\lambda_n T \longrightarrow T$, cuando $n \to \infty$, en $O_{\mu,-1,\#}$. Sea $\beta \in I\!N$. Tenemos que

$$x^{-\mu-1/2}S_\mu^\beta[\lambda_n(x)T(x) - T(x)] = x^{-\mu-1/2}S_\mu^\beta(T(x))(\lambda_n(x)-1)+$$

$$+\sum_{j=\beta}^{2\beta} c_j x^{2j-2\beta} \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} \Big(\frac{1}{x}D\Big)^i (x^{-\mu-1/2}T(x)) \Big(\frac{1}{x}D\Big)^{j-i} (\lambda_n(x)) =$$

$$= x^{-\mu-1/2}S_\mu^\beta(T(x))(\lambda_n(x)-1)+$$

$$+\sum_{j=\beta}^{2\beta} c_j \sum_{i=0}^{j-1} x^i \Big(\frac{1}{x}D\Big)^i (x^{-\mu-1/2}T(x)) x^{2j-2\beta-i} \Big(\frac{1}{x}D\Big)^{j-i} (\lambda_n(x)) =$$

$$= x^{-\mu-1/2}S_\mu^\beta(T(x))(\lambda_n(x)-1)+$$

$$+\sum_{j=\beta}^{2\beta} c_j \sum_{i=0}^{j-1} x^i \Big(\frac{1}{x}D\Big)^i (x^{-\mu-1/2}T(x)) n^{i-2\beta} \Big[u^{2j-2\beta-i} \Big(\frac{1}{u}D\Big)^{j-i} (\lambda(u))\Big]\Big|_{u=\frac{x}{n}}, \ x \in (0,\infty).$$

Sea ahora $\epsilon > 0$. La acotación de la función $z^{-\mu}J_\mu(z)$ sobre $(0,\infty)$ permite obtener $x_0 > 0$ tal que

$$\frac{1}{1+x^2}x^{-\mu-1/2}|S_\mu^\beta(T(x))(\lambda_n(x)-1)| \leq C\frac{1}{1+x^2}\sum_{j=1}^\infty |a_j|\xi_j^{2\beta+\mu+1/2}|\lambda(\frac{x}{n})-1| < \epsilon,$$

para $n \in I\!N - \{0\}$ y $x \in (x_0,\infty)$.

También se tiene

$$\frac{1}{1+x^2}\sum_{j=\beta}^{2\beta}|c_j|\sum_{i=0}^{j-1}\left|x^i\Big(\frac{1}{x}D\Big)^i(x^{-\mu-1/2}T(x))n^{i-2\beta}\Big[u^{2j-2\beta-i}\Big(\frac{1}{u}D\Big)^{j-i}(\lambda(u))\Big]\Big|_{u=\frac{x}{n}}\right| \leq$$

$$\leq \frac{C}{n}\sum_{j=\beta}^{2\beta}\sum_{i=0}^{j-1}\sum_{l=1}^\infty |a_l|\xi_l^{2i+\mu+1/2-i},\ n \in I\!N - \{0\} \text{ y } x \in (0,\infty),$$

y para $n \geq x_0$, $\lambda_n(x) = 1$, para $x \in (0, x_0)$, y, por tanto,

$$x^{-\mu-1/2}|S_\mu^\beta(T(x))(\lambda_n(x)-1)| = 0,\ x \in (0,x_0) \text{ y } n \geq x_0.$$

Concluimos de las estimaciones anteriores que

$$\sup_{x\in(0,\infty)}\frac{1}{1+x^2}x^{-\mu-1/2}|S_\mu^\beta[\lambda_n(x)T(x)-T(x)]| \longrightarrow 0,\ \text{cuando } n \to \infty.$$

Supongamos ahora que $T \in \mathcal{O}_{\mu,\#}$. Sean $\phi \in \mathcal{H}_\mu$ y $k \in I\!N$. De acuerdo con (2.1) [10] y teniendo en cuenta el Lema 3.8 y (II.3.14) se sigue

$$< x^{-\mu-1/2}\sqrt{xh}J_\mu(xh)S_\mu^kT(x), \phi(x) >=< S_\mu^kT(x), h_\mu(\tau_h h_\mu\phi)(x) >=$$

$$=< h'_\mu(S_\mu^kT), \tau_h(h_\mu\phi) >=< (-x^2)^k(h'_\mu T)(x), \tau_h(h_\mu\phi)(x) >=$$

$$= \sum_{j=1}^\infty a_j < \delta_\mu, \tau_{\xi_j}((-x^2)^k\tau_h(h_\mu\phi)(x)) >= \sum_{j=1}^\infty a_j(-\xi_j^2)^k\tau_{\xi_j}(h_\mu\phi)(h) =$$

$$= \int_0^\infty \sqrt{xh}J_\mu(xh)(S_\mu^kT)(x)x^{-\mu-1/2}\phi(x)dx,\ h \in (0,\infty).$$

Ya que $x^{-\mu-1/2}\phi(x)(S_\mu^kT)(x)$ es absolutamente integrable sobre $(0,\infty)$, el Lema de Riemann-Lebesgue generalizado para la transformación de Hankel (14.41 [77]) conduce a

$$\sum_{j=1}^\infty a_j(-\xi_j^2)^k\tau_{\xi_j}(h_\mu\phi)(h) \longrightarrow 0\ ,\ \text{cuando } h \to \infty\ . \tag{II.3.15}$$

Elegimos ahora una función $\phi \in \mathcal{H}_\mu$ tal que $\phi \not\equiv 0$, $h_\mu(\phi)(x) = 0$, $x \geq 1$, y $h_\mu(\phi) \geq 0$. (No es difícil ver que una función como ésta existe). Entonces, si $x, y \in (0,\infty)$ y $x-y > 1$ se tiene

$$\tau_x(h_\mu\phi)(y) = \int_{x-y}^{x+y} (h_\mu\phi)(z)D(x,y,z)dz = \int_1^\infty (h_\mu\phi)(z)D(x,y,z)dz = 0. \qquad \text{(II.3.16)}$$

Además, si $x \geq 1/2$ de (3) §13.45 [77] inferimos

$$\tau_x(h_\mu\phi)(x) = \int_0^{2x} (h_\mu\phi)(z)D(x,x,z)dz =$$

$$= \frac{x^{1-2\mu}}{2^{3\mu-1}\Gamma(\mu+1/2)\sqrt{\pi}} \int_0^{2x} z^{\mu-1/2}(4x^2-z^2)^{\mu-1/2}(h_\mu\phi)(z)dz =$$

$$= \frac{1}{2^{3\mu-1}\Gamma(\mu+1/2)\sqrt{\pi}} \int_0^1 z^{\mu-1/2}\Big(4-\Big(\frac{z}{x}\Big)^2\Big)^{\mu-1/2}(h_\mu\phi)(z)dz.$$

Por tanto

$$\tau_x(h_\mu\phi)(x) \longrightarrow \frac{2^{-\mu}}{\Gamma(\mu+1/2)\sqrt{\pi}} \int_0^1 z^{\mu-1/2}(h_\mu\phi)(z)dz, \text{ cuando } x \to \infty. \qquad \text{(II.3.17)}$$

Nótese que $\displaystyle\int_0^1 z^{\mu-1/2}(h_\mu\phi)(z)dz \in (0,\infty)$, al ser $\mu > -1/2$.

Por otra parte, en virtud de (II.3.16) tenemos para cada $l = 1, 2, ...$

$$\sum_{j=1}^\infty a_j(-1)^k\xi_j^{2k}\tau_{\xi_j}(h_\mu\phi)(\xi_l) = a_l(-1)^k\xi_l^{2k}\tau_{\xi_l}(h_\mu\phi)(\xi_l).$$

Por tanto de (II.3.15) y (II.3.17) se sigue que $a_l\xi_l^{2k} \longrightarrow 0$, cuando $l \to \infty$. De este modo concluimos la prueba. □

Probamos ahora que la propiedad (HE) permite caracterizar los elementos de $\mathcal{O}'_{\mu,\#}$ que son hipoelípticos.

Proposición 3.11 *Sea $S \in \mathcal{O}'_{\mu,\#}$. S es hipoelíptico en $\mathcal{H}'_\mu$ si, y sólo si, S satisface (HE).*

Demostración:

Supongamos primero que S no verifica (HE). Entonces, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $\xi_j \in (0, \infty)$ para el cual

$$\xi_j^{-\mu-1/2}|h'_\mu(S)(\xi_j)| \leq \xi_j^{-j}$$

siendo $\xi_1 > 1$ y $\xi_j - \xi_{j-1} > 1$, $j = 2, 3, \ldots$.

Consideramos $u \in \mathcal{H}'_\mu$ tal que $h'_\mu(u) = \sum_{j=1}^{\infty} \tau_{\xi_j}\delta_\mu$. Nótese que $\sum_{j=1}^{\infty} \tau_{\xi_j}\delta_\mu$ está en $\mathcal{H}'_\mu$. De acuerdo con el Lema 3.10 $u \notin \mathcal{O}_{\mu,\#}$. Además, de la Proposición 4.5 [52] se deduce

$$h'_\mu(u\#S) = x^{-\mu-1/2}h'_\mu(u)h'_\mu(S) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^{-\mu-1/2}h'_\mu(S)(\xi_j)\tau_{\xi_j}\delta_\mu.$$

El Lema 3.10 implica ahora que $u\#S \in \mathcal{O}_{\mu,\#}$. Por tanto S no es hipoelíptico en $\mathcal{H}'_\mu$.

Asumamos ahora que $S \in \mathcal{O}'_{\mu,\#}$ satisface la propiedad (HE). Consideramos una función ϕ definida sobre $(0, \infty)$ y tal que

$$\phi(x) = \begin{cases} x^{\mu+1/2}, & \text{para } 0 < x < M \\ 0, & \text{para } x \geq M+1, \end{cases}$$

donde M es la constante positiva que aparece en la definición de la propiedad (HE). Definimos también

$$P(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 < x \leq M \\ \dfrac{x^{\mu+1/2} - \phi(x)}{x^{-\mu-1/2}h'_\mu(S)(x)}, & \text{para } x > M. \end{cases}$$

Sabemos que $x^{-\mu-1/2}h'_\mu(S)(x)$ es un multiplicador de $\mathcal{H}_\mu$. Por tanto, ya que S satisface la propiedad (HE), P es regular sobre $(0, \infty)$. Además $x^{-\mu-1/2}P$ es un multiplicador de $\mathcal{H}_\mu$. Para probar este hecho es suficiente tener en cuenta que $x^{-\mu-1/2}h'_\mu(S)(x)$ es un multiplicador de $\mathcal{H}_\mu$ (Proposición 4.2, [52]), que S satisface la propiedad (HE) y recordar la caracterización de los multiplicadores de $\mathcal{H}_\mu$ (Teorema 2.3, [7]).

Tenemos que

$$x^{-\mu-1/2}P(x)h'_\mu(S)(x) = x^{\mu+1/2} - \phi(x), \; x \in (0, \infty). \tag{II.3.18}$$

Aplicando en (II.3.18) la transformación de Hankel obtenemos

$$Q\#S = \delta_\mu - \psi$$

donde $Q = h'_\mu(P) \in \mathcal{O}'_{\mu,\#}$ (Proposition 4.2, [52]) y $\psi = h_\mu(\phi) \in \mathcal{H}_\mu$ (Lema 8, [79]).

Supongamos ahora que $u\#S = v$ donde $u \in \mathcal{H}'_\mu$ y $v \in \mathcal{O}_{\mu,\#}$. Entonces, en virtud de la Proposición 4.7 [52], se sigue

$$u = u\#\delta_\mu = u\#(Q\#S) + u\#\psi = (u\#S)\#Q + u\#\psi = v\#Q + u\#\psi.$$

Ya que $u\#\psi \in \mathcal{O}_{\mu,\#}$ (Proposición 2, [13]) y que $v\#Q \in \mathcal{O}_{\mu,\#}$ (Proposition 3.9), concluimos que $u \in \mathcal{O}_{\mu,\#}$. De este modo queda probada la hipoelipticidad de S. □

De la prueba de la proposición anterior se deduce también lo que sigue.

Corolario 3.12 *Sea $S \in \mathcal{O}'_{\mu,\#}$. Si existen $Q \in \mathcal{O}'_{\mu,\#}$ y $\psi \in \mathcal{H}_\mu$ para las cuales $Q\#S = \delta_\mu - \psi$, entonces S es hipoelíptica en $\mathcal{H}'_\mu$.*

□

$\mathcal{X}'_\mu$

Sea $S \in \mathcal{X}'_{\mu,\#}$. Se dice que S (o que la ecuación de convolución $u\#S = v$) es hipoelíptica en $\mathcal{X}'_\mu$ cuando $u \in \mathcal{X}_{\mu,\#}$ siempre que $u \in \mathcal{X}'_\mu$ y $u\#S \in \mathcal{X}_{\mu,\#}$.

En esta sección probamos que la propiedad (HE) es necesaria para que $S \in \mathcal{X}'_{\mu,\#}$ sea hipoelíptica.

La siguiente proposición puede ser demostrada de un modo similar a como fue probada la Proposición 3.9. Observamos inicialmente que si $f \in \mathcal{X}_{\mu,\#}$ entonces f define un elemento de $\mathcal{X}'_{\mu,\#}$ mediante

$$< f, \phi >= \int_0^\infty f(x)\phi(x)dx, \ \phi \in \mathcal{X}_\mu.$$

Proposición 3.13 *Si* $f \in \mathcal{X}_{\mu,\#}$ *y* $S \in \mathcal{X}'_{\mu,\#}$ *entonces* $f\#S \in \mathcal{X}_{\mu,\#}$.

$\square$

El lema que probamos a continuación es análogo al Lema 3.10.

Lema 3.14 *Sea* $\mu \geq 1/2$. *Supongamos que* $\xi_1 > 1$ *y* $\xi_j > 2\xi_{j-1}, j = 2,3,...,$ *y que* $(a_j)_{j=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ *es tal que* $|a_j| = O(\xi_j^\gamma)$, *cuando* $j \to \infty$, *para algún* $\gamma > 0$. *Entonces* $\sum_{j=1}^\infty a_j \tau_{\xi_j}\delta_\mu \in \mathcal{Q}'_\mu$. *Además si* $T = h'_\mu(\sum_{j=1}^\infty a_j \tau_{\xi_j}\delta_\mu)$ *entonces* $T \in \mathcal{X}_{\mu,\#}$ *si, y sólo si,* $|a_j| = O(\xi_j^{-\nu})$, *cuando* $j \to \infty$, *para cada* $\nu \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Ya que $\mathcal{Q}_\mu \subset \mathcal{H}_\mu$ (Corolario 2.4), del Lema 3.10 se deduce que la serie $\sum_{j=1}^\infty a_j \tau_{\xi_j}\delta_\mu$ converge en $\mathcal{Q}'_\mu$ cuando en $\mathcal{Q}'_\mu$ consideramos la topología débil $*$ (o la fuerte). Entonces, del Teorema 2.3 se sigue que

$$T = h_\mu\Big(\sum_{j=1}^\infty a_j \tau_{\xi_j}\delta_\mu\Big) = \sum_{j=1}^\infty a_j \sqrt{x\xi_j} J_\mu(x\xi_j) \in \mathcal{X}'_\mu.$$

La convergencia de la serie es entendida en la topología débil $*$ o fuerte.

Además, si $|a_j| = O(\xi_j^{-\nu})$, cuando $j \to \infty$, para cada $\nu \in \mathbb{N}$, tenemos que $T \in \mathcal{X}_{\mu,\#}$. En efecto, ya que la función $\sqrt{z}J_\mu(z)$ está acotada en $(0,\infty)$ la serie que define T converge uniformemente en $(0,\infty)$. También, para cada $\phi \in \mathcal{X}_\mu$

$$< T,\phi >= \sum_{j=1}^\infty a_j \int_0^\infty \sqrt{x\xi_j} J_\mu(x\xi_j)\phi(x)dx = \int_0^\infty \sum_{j=1}^\infty a_j \sqrt{x\xi_j} J_\mu(x\xi_j)\phi(x)dx.$$

Para cada $\beta \in \mathbb{N}$, se tiene

$$x^{-\mu-1/2} S_\mu^\beta T(x) = \sum_{j=1}^\infty a_j (-1)^\beta \xi_j^{2\beta+\mu+1/2} (x\xi_j)^{-\mu} J_\mu(x\xi_j), \ x \in (0,\infty).$$

Ya que $z^{-\mu}J_\mu(z)$ es acotada se sigue que $T \in O_{\mu,\#}$. Procediendo como en el Lema 3.10 podemos probar que $T \in \mathcal{X}_{\mu,\#}$.

Supongamos ahora que $T \in \mathcal{X}_{\mu,\#}$. Sean $\phi \in \mathcal{X}_\mu$ y $k \in I\!N$. Podemos escribir

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j(-\xi_j^2)^k \tau_{\xi_j}(h_\mu\phi)(h) = \int_0^\infty \sqrt{xh} J_\mu(xh)(S_\mu^k T)(x) x^{-\mu-1/2}\phi(x)dx \longrightarrow 0, \quad \text{(II.3.19)}$$

cuando $h \to \infty$.

Definimos $\phi(x) = e^{-x^2} x^{\mu+1/2}$, $x \in (0,\infty)$. De acuerdo con (10) §8.6 [30]

$$h_\mu(\phi)(y) = \frac{y^{\mu+1/2}}{2^{\mu+1}} e^{-y^2/4},\ y \in (0,\infty).$$

Por tanto, ya que $h_\mu(\phi) \in \mathcal{X}_\mu$, $\phi \in \mathcal{Q}_\mu$ (Teorema 2.3). Nótese también que $h_\mu(\phi)(y) y^{-\mu-1/2} > 0$, $y \in (0,\infty)$.

Sea $m \in I\!N$. Tenemos

$$\tau_x(h_\mu\phi)(y) = \int_{|x-y|}^{x+y} D(x,y,z) h_\mu(\phi)(z)dz \leq$$

$$\leq C(xy)^{\mu+1/2}(1+|x-y|^2)^{-m},\ x,y \in (0,\infty). \quad \text{(II.3.20)}$$

Además para cada $x \in (0,\infty)$

$$\tau_x(h_\mu\phi)(x) = \int_0^{2x} D(x,x,z) h_\mu(\phi)(z)dz =$$

$$= \frac{x^{1-2\mu}}{2^{3\mu-1}\Gamma(\mu+1/2)\sqrt{\pi}} \int_0^{2x} z^{\mu-1/2}((2x)^2 - z^2)^{\mu-1/2} h_\mu(\phi)(z)dz =$$

$$= \frac{2^{-\mu}}{\Gamma(\mu+1/2)\sqrt{\pi}} \int_0^{2x} z^{\mu-1/2}\Big(1 - \Big(\frac{z}{2x}\Big)^2\Big)^{\mu-1/2} h_\mu(\phi)(z)dz.$$

Por tanto,

$$\tau_x(h_\mu\phi)(x) \longrightarrow \frac{2^{-\mu}}{\Gamma(\mu+1/2)\sqrt{\pi}} \int_0^\infty z^{\mu-1/2}(h_\mu\phi)(z)dz\ ,\ \text{cuando } x \to \infty. \quad \text{(II.3.21)}$$

Sean k y $l \in I\!N$. De (II.3.20) se deduce

$$\Big|\sum_{j=1}^{\infty} a_j(-1)^k \xi_j^{2k}(\tau_{\xi_j}h_\mu\phi)(\xi_l)\Big| \geq |a_l|\xi_l^{2k}(\tau_{\xi_l}h_\mu\phi)(\xi_l) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{\infty} |a_j|\xi_j^{2k}(\tau_{\xi_j}h_\mu\phi)(\xi_l) \geq$$

$$\geq |a_l|\xi_l^{2k}(\tau_{\xi_l}h_\mu\phi)(\xi_l) - C\xi_l^{\mu+1/2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{\infty}|a_j|\xi_j^{2k+\mu+1/2}(1+|\xi_j-\xi_l|^2)^{-m} \geq$$

$$\geq |a_l|\xi_l^{2k}(\tau_{\xi_l}h_\mu\phi)(\xi_l) - C\xi_l^{\mu+1/2}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{\infty}|a_j|\xi_j^{2k+\mu+1/2}|\xi_j-\xi_l|^{-m}. \tag{II.3.22}$$

Al ser $|a_j| = O(\xi_j^\gamma)$, cuando $j\to\infty$, para algún $\gamma>0$, tenemos

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{\infty}|a_j|\xi_j^{2k+\mu+1/2}|\xi_j-\xi_l|^{-m} \leq C\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{\infty}\xi_j^{2k+\gamma+\mu+1/2}|\xi j-\xi_l|^{-m}. \tag{II.3.23}$$

Teniendo en cuenta que

$$\xi_j - \xi_{j-1} \geq 2\xi_{j-1} - \xi_{j-1} = \xi_{j-1} \geq 2^{j-1},\ j = 2,3,...,$$

obtenemos

$$|\xi_j - \xi_l| \geq 2^{l-1}\ ,\ \text{para cada } j = 1,2,...,\ \text{y } j \neq l.$$

Por tanto, tomando $m \in I\!N$ verificando $m \geq 2(2k+\gamma+\mu+1/2)$ se sigue

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{\infty}\xi_j^{2k+\gamma+\mu+1/2}|\xi_j-\xi_l|^{-m} \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{\infty}|\xi_j-\xi_l|^{-1}\left|1-\frac{\xi_l}{\xi_j}\right|^{-(2k+\gamma+\mu+1/2)}|\xi_j-\xi_l|^{-(2k+\gamma+\mu+1/2)} \leq$$

$$\leq C2^{-l} \tag{II.3.24}$$

Combinando (II.3.22), (II.3.23) y (II.3.24) inferimos que

$$\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq l}}^{\infty}a_j(-1)^k\xi_j^{2k}(\tau_{\xi_j}h_\mu\phi)(\xi_l)\right| \geq \xi_l^{\mu+1/2}\Big(|a_l|\xi_l^{2k-\mu-1/2}\tau_{\xi_l}(h_\mu\phi)(\xi_l) - C2^{-l}\Big). \tag{II.3.25}$$

De (II.3.19), (II.3.21) y (II.3.25) se concluye ya que $|a_l|\xi_l^{2k-\mu-1/2} \longrightarrow 0$, cuando $l\to\infty$. □

Podemos establecer ahora, procediendo como en la prueba de la Proposición 3.11, que la propiedad (HE) es necesaria para que $S\in\mathcal{X}'_{\mu,\#}$ sea hipoelíptica en $\mathcal{X}'_\mu$.

Proposición 3.15 *Sean* $\mu \geq 1/2$ *y* $S \in \mathcal{X}'_{\mu,\#}$. *Si* S *es hipoelíptica en* $\mathcal{X}'_\mu$ *entonces* S *satisface la propiedad (HE).*

$\square$

Una condición suficiente para que $S \in \mathcal{X}'_{\mu,\#}$ sea hipoelíptica en $\mathcal{X}'_\mu$ es la existencia de $Q \in \mathcal{X}'_{\mu,\#}$ y $\phi \in \mathcal{X}_\mu$ de manera que $Q\#S = \delta_\mu - \phi$.

Esto puede ser probado como el resultado correspondiente en $\mathcal{H}'_\mu$.

Capítulo 4

Espacios de #-operadores y funciones generalizadas transformables Hankel

Nuestro objetivo en esta sección es desarrollar para ciertos espacios de funciones y distribuciones transformables mediante h_μ, una teoría que corresponde a la presentada por P. Mikusinski y M.D. Taylor [57] para los espacios $\mathcal{D}'$ y $\mathcal{K}(M_p)'$.

Introducimos el espacio $\mathcal{C}_\mu$ constituido por las funciones complejas f continuas sobre $(0,\infty)$ para las que existe

$$\lim_{x\to\infty} x^{-\mu-1/2} f(x).$$

$\mathcal{C}_\mu$ es dotado de la topología generada por la familia $\{w_k^\mu\}_{k\in I\!N-\{0\}}$ de seminormas, donde

$$w_k^\mu(f) = \sup_{x\in(0,k)} |x^{-\mu-1/2} f(x)|, \; f \in \mathcal{C}_\mu \text{ y } k \in I\!N - \{0\}.$$

De este modo $\mathcal{C}_\mu$ es un espacio de Fréchet.

Sea ahora H un espacio de Fréchet de funciones donde el operador de traslación de Hankel τ_x, $x \in (0,\infty)$, está definido. Decimos que una función $f \in \mathcal{C}_\mu$ está en el #-dual de H (para abreviar escribimos $f \in \mathcal{H}^\#$) si para cada $\phi \in H$ se verifican las dos propiedades que siguen

(*i*) $\int_0^\infty |f(y)|\,|(\tau_x\phi)(y)|dy < \infty$, para cada $x \in (0,\infty)$, y

(*ii*) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-\mu-1/2}\int_0^\infty |f(y)|\ |(\tau_x\phi)(y)|dy = \alpha_\mu \int_0^\infty |f(y)|\ |\phi(y)|dy < \infty$, donde $\alpha_\mu = \dfrac{1}{2^\mu\Gamma(\mu+1)}$.

Una aplicación F lineal de H en $H^\#$ es un #-operador si

$$F(\phi\#\psi) = F(\phi)\#\psi, \text{ para cada } \phi,\psi \in H.$$

El espacio de #-operadores sobre H lo representamos por $\mathcal{G}(H)$. Decimos que una sucesión $(F_n)_{n=0}^\infty \subset \mathcal{G}(H)$ converge a $F \in \mathcal{G}(H)$ si para cada $\phi \in H$, $F_n(\phi) \longrightarrow F(\phi)$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{C}_\mu$.

En la Sección II.4.2 de este capítulo identificamos (vía isomorfismo) los espacios $\mathcal{G}(\beta_\mu)$ y β'_μ, dual de β_μ. En la Sección II.4.3 introducimos el espacio $\mathcal{H}_{\mu,M}$ de Fréchet caracterizando su transformada de Hankel. También estudiamos la convolución de Hankel sobre $\mathcal{H}'_{\mu,M}$ y los resultados obtenidos nos permiten demostrar en la Sección II.4.4 que $\mathcal{H}'_{\mu,M}$ y $\mathcal{G}(\mathcal{H}_{\mu,M})$ son isomorfos.

β'_μ

En esta sección caracterizamos el espacio β'_μ, dual de β_μ, como el espacio de #-operadores sobre β_μ.

Comenzamos describiendo $\beta_\mu^\#$, el #-dual de β_μ.

Proposición 4.1 $\beta_\mu^\# = \mathcal{C}_\mu$.

Demostración:

Sean $f \in \mathcal{C}_\mu$ y $\phi \in \beta_{\mu,a}$, con $a > 0$. En virtud del Corolario 3.3 [8], $\tau_x\phi \in \beta_{\mu,a+x}$, para cada $x \in (0,\infty)$. Por tanto tenemos que

$$\int_0^\infty |f(y)|\,|(\tau_x\phi)(y)|dy = \int_0^{a+x} |f(y)|\,|(\tau_x\phi)(y)|dy < \infty,\ x \in (0,\infty).$$

Además

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-\mu-1/2}(\tau_x\phi)(y) = \alpha_\mu\phi(y), \tag{II.4.1}$$

uniformemente en $y \in (0,\infty)$. En efecto, de (1.2) [9] sigue

$$x^{-\mu-1/2}(\tau_x\phi)(y) = h_\mu[(xt)^{-\mu}J_\mu(xt)h_\mu(\phi)(t)](y),\ x,y\in(0,\infty).$$

La función $h_\mu(\phi)$ está en $\mathcal{H}_\mu$ (Teorema 5.4-1, [81]) y ya que las funciones $\sqrt{z}J_\mu(z)$ and $z^{-\mu}J_\mu(z)$ son acotadas sobre $(0,\infty)$ podemos escribir para cada $b\in(0,\infty)$ y $m\in I\!N$

$$\int_b^\infty |\sqrt{yt}J_\mu(yt)(xt)^{-\mu}J_\mu(xt)|\,|h_\mu(\phi)(t)|dt \leq$$

$$\leq C\gamma^\mu_{m,0}(h_\mu(\phi))\int_b^\infty \frac{t^{\mu+1/2}}{(1+t^2)^m}dt,\ x,y\in(0,\infty).$$

De aquí se deduce que para cada $\epsilon>0$ existe $b_0>0$ tal que

$$\Big|\int_{b_0}^\infty \sqrt{yt}J_\mu(yt)[(xt)^{-\mu}J_\mu(xt)-\alpha_\mu]h_\mu(\phi)(t)dt\Big| < \epsilon,\ x,y\in(0,\infty). \tag{II.4.2}$$

Además, teniendo en cuenta que $\lim\limits_{z\to 0^+} z^{-\mu}J_\mu(z)=\alpha_\mu$, para cada $\epsilon>0$ podemos encontrar $\delta>0$ tal que

$$\Big|\int_0^{b_0} \sqrt{yt}J_\mu(yt)[(xt)^{-\mu}J_\mu(xt)-\alpha_\mu]h_\mu(\phi)(t)dt\Big| < \epsilon, \tag{II.4.3}$$

para cada $y\in(0,\infty)$ y $0<x<\delta$.

De (II.4.2) y (II.4.3) inferimos (II.4.1).

Se sigue entonces que

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-\mu-1/2}\int_0^\infty |f(y)|\,|(\tau_x\phi)(y)|dy = \lim_{x\to 0^+} x^{-\mu-1/2}\int_0^{a+1} |f(y)|\,|(\tau_x\phi)(y)|dy =$$

$$= \alpha_\mu\int_0^\infty |f(y)|\,|\phi(y)|dy.$$

Probamos así que $f\in\beta^\#_\mu$. $\square$

En la siguiente proposición caracterizamos la convergencia en β_μ mediante #-operadores sobre β_μ.

Proposición 4.2 *Sea $(\phi_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en β_μ. Entonces $\phi_n \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, en β_μ, si, y sólo si, $F(\phi_n) \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{C}_\mu$, para cada $F \in \mathcal{G}(\beta_\mu)$.*

Demostración:

Recurrimos al teorema del grafo cerrado para probar que si $\phi_n \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, en β_μ, entonces $F(\phi_n) \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{C}_\mu$, para cada #-operador F sobre β_μ. Sean $F \in \mathcal{G}(\beta_\mu)$ y $(\psi_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en β_μ. Supongamos que para ciertas $\psi \in \beta_\mu$ y $f \in \mathcal{C}_\mu$ tenemos

$$\psi_n \longrightarrow \psi, \text{ cuando } n \to \infty, \text{ en } \beta_\mu,$$

$$\text{y } F(\psi_n) \longrightarrow f, \text{ cuando } n \to \infty \text{ en } \mathcal{C}_\mu.$$

Nuestro objetivo es probar que $F(\psi) = f$.

Para cada $\varphi \in \beta_\mu$ se tiene

$$F(\psi_n)\#\varphi = F(\varphi)\#\psi_n \longrightarrow F(\varphi)\#\psi = F(\psi)\#\varphi, \text{ cuando } n \to \infty, \text{ en } \mathcal{C}_\mu.$$

En efecto, ya que $\psi_n \longrightarrow \psi$, cuando $n \to \infty$, en β_μ, existe $a \in (0, \infty)$, tal que $\psi_n \in \beta_{\mu,a}$, para cada $n \in I\!N$ y $\psi \in \beta_{\mu,a}$. Teniendo en cuenta nuevamente el Corolario 3.3 [8], podemos escribir para cada $n \in I\!N$ y $m \in I\!N - \{0\}$

$$\left|x^{-\mu-1/2}[F(\varphi)\#(\psi_n - \psi)](x)\right| \leq \int_0^{a+m} |F(\varphi)(y)|\, |x^{-\mu-1/2}\tau_x(\psi_n - \psi)(y)|dy \leq$$

$$\leq C \sup_{y\in(0,\infty)} \left|h_\mu[(xt)^{-\mu}J_\mu(xt)h_\mu(\psi_n - \psi)(t)](y)\right|, \text{ para cada } x \in (0, m). \qquad \text{(II.4.4)}$$

De (II.4.4) y ya que h_μ es un isomorfismo de $\mathcal{H}_\mu$ y que $(xt)^{-\mu}J_\mu(xt)$, $t \in (0, \infty)$, es un multiplicador de $\mathcal{H}_\mu$ uniforme en $x \in (0, m)$, inferimos

$$\sup_{x\in(0,m)} x^{-\mu-1/2}|[F(\varphi)\#(\psi_n - \psi)](x)| \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \to \infty,$$

para cada $m \in I\!N - \{0\}$, o lo que es lo mismo, $F(\varphi)\#\psi_n \longrightarrow F(\varphi)\#\psi$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{C}_\mu$.

Por otra parte, si $\varphi \in \beta_{\mu,b}$, siendo $b > 0$, para cada $m \in I\!N - \{0\}$ tenemos

$$\sup_{x\in(0,m)} |x^{-\mu-1/2}[F(\psi_n) - f)\#\varphi](x)| \leq \int_0^{b+m} |(F(\psi_n) - f)(y)|x^{-\mu-1/2}|(\tau_x\varphi)(y)|dy \leq$$

$$\leq C \sup_{x\in(0,b+m)} y^{-\mu-1/2}|(F(\psi_n) - f)(y)|, \; n \in I\!N.$$

Luego, al ser $F(\psi_n) \longrightarrow f$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{C}_\mu$, se sigue que $F(\psi_n)\#\varphi \longrightarrow f\#\varphi$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{C}_\mu$.

Concluimos entonces que $F(\psi)\#\varphi = f\#\varphi$, $\varphi \in \beta_\mu$.

Además, de (II.4.1) se deduce

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-\mu-1/2} \int_0^\infty (F(\psi) - f)(y)(\tau_x\varphi)(y)dy = \alpha_\mu \int_0^\infty (F(\psi) - f)(y)\varphi(y)dy = 0,$$

para cada $\varphi \in \beta_\mu$. Por tanto $F(\psi) = f$.

Supongamos ahora que $(\phi_n)_{n=0}^\infty$ es una sucesión en β_μ tal que $F(\phi_n) \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{C}_\mu$, para cada $F \in \mathcal{G}(\beta_\mu)$.

No es difícil probar que $\phi_n \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, en β_μ si, y sólo si, se verifican las dos propiedades que siguen

(i) existe $a > 0$ tal que $\phi_n \in \beta_{\mu,a}$, para cada $n \in I\!N$, y

(ii) para cada $k \in I\!N$ y $m \in I\!N - \{0\}$

$$\sup_{x\in(0,m)} |x^{-\mu-1/2} S_\mu^k \phi_n(x)| \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

En virtud de la Proposición 2.2 [52], para cada $k \in I\!N$, la aplicación F_k definida por

$$\begin{aligned} F_k : \beta_\mu &\longrightarrow \mathcal{C}_\mu \\ \phi &\longrightarrow S_\mu^k \phi \end{aligned}$$

es un #-operador en β_μ. Por tanto, nuestra hipótesis implica que la propiedad (ii) anterior es cierta.

Supongamos que $\phi_n \not\longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, en β_μ. Esto implica que (i) no se verifica o, lo que es lo mismo, que existe una sucesión creciente $(x_n)_{n=0}^\infty \subset (0, \infty)$ y una sucesión creciente $(q_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{N}$ tales que $x_n \longrightarrow \infty$, cuando $n \to \infty$, $|\phi_{q_n}(x_n)| > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\phi_{q_k}(x_n) = 0$, para cada $n, k \in \mathbb{N}$, siendo $k < n$.

Sea $(c_n)_{n=0}^\infty$ una sucesión en $(0, \infty)$.

Definimos una aplicación F sobre β_μ como sigue

$$F(\phi)(x) = \sum_{n=0}^\infty (\tau_x \phi)(x_n) c_n, \ \phi \in \beta_\mu \text{ y } x \in (0, \infty),$$

F está en $\mathcal{G}(\beta_\mu)$. En efecto, sea $\phi \in \beta_{\mu,a}$, donde $a \in (0, \infty)$. Observamos que si $m \in \mathbb{N} - \{0\}$, para cada $x \in (0, m)$ el número de sumandos no nulos que aparecen en la suma que define $F(\phi)(x)$ es finito. Además el número máximo de sumandos no nulos en $F(\phi)(x)$ no depende de $x \in (0, m)$. Esta afirmación sigue ya que $\tau_x \phi \in \beta_{\mu, a+m}$, para cada $x \in (0, m)$ (Corolario 3.3 [8]). De (II.4.1) se deduce entonces que

$$\lim_{x \to 0^+} x^{-\mu - 1/2} F(\phi)(x) = \alpha_\mu \sum_{n=0}^\infty \phi(x_n) c_n.$$

Además $F(\phi)$ es una función continua sobre $(0, \infty)$. Por tanto $F(\phi) \in \mathcal{C}_\mu$.

Por otra parte, si $\phi, \psi \in \beta_\mu$, ya que $(\tau_x \phi)(y) = (\tau_y \phi)(x)$, $x, y \in (0, \infty)$, y que $\tau_x(\phi \# \psi) = (\tau_x \phi) \# \psi$, $x \in (0, \infty)$, podemos escribir

$$F(\phi \# \psi)(x) = \sum_{n=0}^\infty \tau_{x_n}(\phi \# \psi)(x) c_n = \sum_{n=0}^\infty [(\tau_{x_n} \phi) \# \psi](x) c_n =$$

$$= \Big[\Big(\sum_{n=0}^\infty (\tau_{x_n} \phi) c_n\Big) \# \psi\Big](x) = (F(\phi) \# \psi)(x), \ x \in (0, \infty). \tag{II.4.5}$$

Para justificar la tercera igualdad en (II.4.5) recurrimos de nuevo al Corolario 3.3 [8]. Si $\phi, \psi \in \beta_{\mu,a}$, siendo $a > 0$, entonces para cada $x \in (0, \infty)$ se tiene

$$\Big[(\tau_{x_n} \phi) \# \psi\Big](x) = \int_0^{a+x} (\tau_{x_n} \phi)(z)(\tau_x \psi)(z) dz.$$

Además de §2 [42] sigue

$$(\tau_{x_n} \phi)(z) = \int_{|x_n - z|}^{x_n + z} D(x_n, z, t) \phi(t) dt = 0,$$

cuando $x \in (0, \infty)$, $z \in (0, a + x)$ y n es suficientemente grande. Por tanto, para cada $x \in (0, \infty)$, $\Big[(\tau_{x_n}\phi)\#\psi\Big](x) = 0$, siempre que n sea suficientemente grande. Queda así (II.4.5) establecido.

También, para cada $k \in I\!N$

$$\lim_{x \to 0^+} x^{-\mu-1/2} F(\phi_{q_k})(x) = \alpha_\mu \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{q_k}(x_n) c_n,$$

lo que implica que para cada $k \in I\!N$, $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in (0,1)} |x^{-\mu-1/2} F(\phi_{q_k})(x)| &\geq \alpha_\mu \Big| \sum_{n=0}^{k} \phi_{q_k}(x_n) c_n \Big| \geq \\ &\geq \alpha_\mu \Big(|\phi_{q_k}(x_k)| c_k - \sum_{n=0}^{k-1} |\phi_{q_k}(x_n)| c_n \Big). \end{aligned} \tag{II.4.6}$$

Lo desarrollado hasta ahora es válido para cualquier sucesión $(c_n)_{n=0}^{\infty} \subset (0, \infty)$. Si escogemos la sucesión $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ de manera que

$$c_k > \frac{|}{|\phi_{q_k}(x_k)|} \Big(k + \sum_{n=0}^{k-1} |\phi_{q_k}(x_n)| c_n \Big), \; k = 1, 2, ...,$$

tenemos $F \in \mathcal{G}(\beta_\mu)$, siendo , en virtud de (II.4.6),

$$F(\phi_{q_k}) \not\to 0, \text{ cuando } k \to \infty, \text{ en } \mathcal{C}_\mu.$$

Concluimos de este modo la demostración. □

Probamos ahora que los espacios $\mathcal{G}(\beta_\mu)$ y β'_μ pueden ser identificados.

Proposición 4.3 *Los espacios $\mathcal{G}(\beta_\mu)$ y β'_μ son isomorfos.*

Demostración:

Definimos la aplicación

$$\begin{aligned} J : \mathcal{G}(\beta_\mu) &\longrightarrow \beta'_\mu \\ F &\longrightarrow J(F) : \beta_\mu \longrightarrow \mathbb{C} \\ &\qquad \phi \longrightarrow J(F)(\phi) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\alpha_\mu} x^{-\mu-1/2} F(\phi)(x) \end{aligned}$$

Veamos que J es un isomorfismo algebraico y secuencial.

Sea $F \in \mathcal{G}(\beta_\mu)$. Si $(\phi_n)_{n=0}^\infty \subset \beta_\mu$ converge a 0 en β_μ entonces, de la Proposición 4.2 se sigue que $F(\phi_n) \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{C}_\mu$. Por tanto $J(F)(\phi_n) \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$. Concluimos así que $J(F)$ está en β'_μ.

Es claro que la aplicación J es lineal. Además si $F \in \mathcal{G}(\beta_\mu)$ y $J(F) = 0$, para cada $\phi, \psi \in \beta_\mu$ de (II.4.1) inferimos

$$J(F)(\phi\#\psi) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\alpha_\mu} x^{-\mu-1/2} F(\phi\#\psi)(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\alpha_\mu} x^{-\mu-1/2} (F(\phi)\#\psi)(x) =$$

$$= \frac{1}{\alpha_\mu} \lim_{x\to 0^+} \int_0^\infty F(\phi)(y) x^{-\mu-1/2} (\tau_x\psi)(y) dy = \int_0^\infty F(\phi)(y)\psi(y) dy = 0.$$

Ya que $F(\phi) \in \mathcal{C}_\mu$, obtenemos que $F(\phi) = 0$, para cada $\phi \in \beta_\mu$. Probamos así que J es uno a uno.

También J es sobre. En efecto, sea $f \in \beta'_\mu$. Definimos una aplicación F sobre β_μ como sigue

$$F(\phi)(x) = (f\#\phi)(x) = < f, \tau_x\phi >, \; x \in (0,\infty) \text{ y } \phi \in \beta_\mu.$$

Sea $\phi \in \beta_{\mu,a}$, donde $a > 0$. Vamos a ver que $F(\phi) \in \mathcal{C}_\mu$. Sea $m \in \mathbb{N} - \{0\}$. Sabemos que $\tau_x\phi \in \beta_{\mu,a+m}$, para cada $x \in (0,m)$, (Corolario 3.3, [8]). En virtud de la Proposición 2.3 [8] existen $r \in \mathbb{N}$ y $r+1$ funciones $f_k \in L_\infty(0, a+m)$, $k = 0, 1, ..., r$, tales que

$$< f, \tau_x\phi > = \sum_{k=0}^r \int_0^{a+m} f_k(y) y^{-\mu-1/2} S_\mu^k(\tau_x\phi)(y) dy =$$

$$= \sum_{k=0}^r \int_0^{a+m} f_k(y) y^{-\mu-1/2} (\tau_x S_\mu^k\phi)(y) dy, \; x \in (0,m). \tag{II.4.7}$$

De (II.4.1) y (II.4.7) inferimos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x^{-\mu-1/2} < f, \tau_x\phi > &= \alpha_\mu \sum_{k=0}^{r} \int_0^{a+m} f_k(y) y^{-\mu-1/2} S_\mu^k \phi(y) dy = \\ &= \alpha_\mu < f, \phi > . \end{aligned} \tag{II.4.8}$$

Además $f\#\phi$ es continua en $(0,\infty)$.

El Corolario 4.2 [8] permite escribir

$$F(\phi)\#\psi = (f\#\phi)\#\psi = f\#(\phi\#\psi) = F(\phi\#\psi), \;\; \phi, \psi \in \beta_\mu.$$

Por tanto $F \in \mathcal{G}(\beta_\mu)$.

Finalmente de (II.4.8) se sigue que

$$J(F)(\phi) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\alpha_\mu} x^{-\mu-1/2} F(\phi)(x) =< f, \phi >, \;\; \phi \in \beta_\mu.$$

Sea ahora $(F_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{G}(\beta_\mu)$ tal que $F_n \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{G}(\beta_\mu)$. Esto quiere decir que $F_n(\phi) \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{C}_\mu$, para cada $\phi \in \beta_\mu$. Luego, para cada $\phi \in \beta_\mu$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\alpha_\mu} x^{-\mu-1/2} F_n(\phi)(x) = J(F_n)(\phi) \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \to \infty,$$

o lo que es lo mismo, $J(F_n) \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, en la topología débil $*$ de β'_μ. Probamos así que J es secuencialmente continua.

Para ver que J^{-1} es secuencialmente continua es suficiente observar que si $f_n \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, en β'_μ, entonces $f_n\#\phi \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{C}_\mu$, para cada $\phi \in \beta_\mu$. Esto puede ser probado recurriendo a la Proposición 2.11 [8] y procediendo como en (II.4.7). □

$\mathcal{H}_{\mu,M}$

En esta sección analizamos la transformación y la convolución de Hankel sobre un espacio que denotaremos $\mathcal{H}_{\mu,M}$ y que recuerda a los espacios $\mathcal{K}(M_p)$ de I.M. Gelfand y G.E. Shilov [31]. Algunos de los resultados obtenidos en esta sección se asemejan a los que establecimos en el Capítulo 2 de esta Memoria. El estudio que desarrollamos aquí nos permitirá caracterizar en la próxima sección el espacio dual de $\mathcal{H}'_{\mu,M}$ de $\mathcal{H}_{\mu,M}$ mediante el espacio de #-operadores sobre $\mathcal{H}_{\mu,M}$.

Denotaremos por K al siguiente conjunto de funciones

$$K = \Big\{M \in C^2([0,\infty)),\ M(0) = M'(0) = 0,\ M'(\infty) = \infty \text{ y } M''(x) > 0,\ x \in (0,\infty)\Big\}.$$

Para cada $M \in K$ representamos por $M^{\times}$ la función dual en el sentido de Young de M (véase, por ejemplo, p.18, [31]). En [29] se recogen algunas propiedades útiles de la clase K.

Sea $M \in K$. Decimos que una función ϕ compleja y regular sobre $(0,\infty)$ está en $\mathcal{H}_{\mu,M}$ si para cada $m, k \in I\!N$ la cantidad

$$\gamma_{m,k}^{\mu,M}(\phi) = \sup_{x\in(0,\infty)} e^{M(mx)}\Big|\Big(\frac{1}{x}D\Big)^k[x^{-\mu-1/2}\phi(x)]\Big|$$

es finita. El espacio $\mathcal{H}_{\mu,M}$ es dotado de la topología generada por la familia $\{\gamma_{m,k}^{\mu,M}\}_{m,k\in I\!N}$ de seminormas. De este modo $\mathcal{H}_{\mu,M}$ es un espacio de Fréchet. No es difícil probar que el espacio $\mathcal{H}_{\mu,M}$ está continuamente contenido en el espacio $\mathcal{H}_\mu$. Además β_μ es un subespacio denso de $\mathcal{H}_{\mu,M}$. Si definimos para cada $m, k \in I\!N$ y $\phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$

$$\eta_{m,k}^{\mu,M}(\phi) = \sup_{x\in(0,\infty)} e^{M(mx)}x^{-\mu-1/2}|S_\mu^k\phi(x)|,$$

la familia $\{\eta_{m,k}^{\mu,M}\}_{m,k\in I\!N}$ de seminormas genera sobre $\mathcal{H}_{\mu,M}$ la misma topología que $\{\gamma_{m,k}^{\mu,M}\}_{m,k\in I\!N}$. Para probar esta propiedad basta proceder como en la Proposición 27 §IV [63].

El espacio $\mathcal{Q}_{\mu,M}$ está formado por las funciones complejas Φ que satisfacen las siguientes dos propiedades

(i) $z^{-\mu-1/2}\Phi(z)$ es una función entera y par, y

(ii) para cada $k \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N} - \{0\}$

$$p_{m,k}^{\mu,M}(\Phi) = \sup_{z \in \mathbb{C}} (1 + |z|^2)^k |z^{-\mu-1/2}\Phi(z)| e^{-M(\frac{|Im\ z|}{m})} < \infty.$$

Sobre $\mathcal{Q}_{\mu,M}$ consideramos la topología asociada a la familia $\{p_{m,k}^{\mu,M}\}_{m \in \mathbb{N}-\{0\}, k \in \mathbb{N}}$ de normas y este espacio es de Fréchet.

Probamos a continuación que la transformación integral h_μ de Hankel es un isomorfismo de $\mathcal{H}_{\mu,M}$ en $\mathcal{Q}_{\mu,M^{\text{X}}}$. El procedimiento seguido para la demostración es similar al desarrollado en la prueba del Teorema 2.3 (véase también [29]).

Teorema 4.4 *La transformación h_μ de Hankel es un isomorfismo de $\mathcal{H}_{\mu,M}$ sobre $\mathcal{Q}_{\mu,M^{\text{X}}}$. Además $h_\mu^{-1} = h_\mu$.*

<u>Demostración</u>:

Sea $\phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$. Teniendo en cuenta (5.3.b) [29] podemos escribir

$$\int_0^\infty |(zt)^{-\mu} J_\mu(zt)|\ |t^{\mu+1/2}\phi(t)| dt \leq C \int_0^\infty e^{t|Imz|} t^{\mu+1/2} |\phi(t)| dt, \ z \in \mathbb{C}.$$

Por tanto, si $|Im\ z| \leq k$ entonces del Lema 2.4 [29] se sigue

$$\int_0^\infty |(zt)^{-\mu} J_\mu(zt) t^{\mu+1/2}\phi(t)| dt \leq C \int_0^\infty e^{kt} t^{\mu+1/2} |\phi(t)| dt \leq$$

$$\leq Ce^{M^{\text{X}}(k+1)} \gamma_{1,0}^{\mu,M}(\phi).$$

Probamos así que la función $z^{-\mu-1/2} h_\mu(\phi)(z)$ admite una extensión holomorfa al plano complejo $\mathbb{C}$.

Ya que $z^{-\mu} J_\mu(z)$ es una función par, también lo es la función $z^{-\mu-1/2} h_\mu(\phi)(z)$.

De acuerdo con el Lema 5.4-1 [81], recordando que $\mathcal{H}_{\mu,M}$ es un subespacio de $\mathcal{H}_\mu$, tenemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$

$$z^{2k} z^{-\mu-1/2} h_\mu(\phi)(z) = (-1)^k \int_0^\infty (zt)^{-\mu} J_\mu(zt) t^{\mu+1/2} S_\mu^k \phi(t) dt, \ z \in \mathbb{C}.$$

Teniendo en cuenta de nuevo (5.3.b), el Lema 2.4 y (2.2) [29], se sigue

$$|z^{2k}z^{-\mu-1/2}h_\mu(\phi)(z)| \leq C\int_0^\infty e^{t|Im\ z|}t^{\mu+1/2}|S_\mu^k\phi(t)|dt \leq$$

$$\leq Ce^{M^{\mathrm{X}}(\frac{|Im\ z|}{m})}\int_0^\infty e^{M(mt)}t^{\mu+1/2}|S_\mu^k\phi(t)|dt \leq$$

$$\leq Ce^{M^{\mathrm{X}}(\frac{|Im\ z|}{m})}\eta_{m+1,k}^{\mu,M}(\phi)\int_0^\infty e^{-M(t)}t^{2\mu+1}dt,\ k\in I\!N, m\in I\!N-\{0\} \text{ y } z\in\mathbb{C}.$$

Obtenemos así

$$p_{m,k}^{\mu,M^{\mathrm{X}}}(h_\mu\phi) \leq C\sum_{i=0}^k \eta_{m+1,i}^{\mu,M}(\phi),\ m\in I\!N \text{ y } k\in I\!N-\{0\},$$

y queda probado que la transformación h_μ es continua de $\mathcal{H}_{\mu,M}$ en $\mathcal{Q}_{\mu,M^{\mathrm{X}}}$.

Sea ahora $\Phi\in\mathcal{Q}_{\mu,M^{\mathrm{X}}}$. De acuerdo con el Lema 6.1 [29]

$$t^{-\mu-1/2}h_\mu(\Phi)(t) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty (t(\xi+i\eta))^{-\mu}H_\mu^{(1)}(t(\xi+i\eta))\Phi(\xi+i\eta)(\xi+i\eta)^{\mu+1/2}d\xi,\ t\in(0,\infty), \qquad \text{(II.4.9)}$$

para cada $\eta\in(0,\infty)$. Aquí la función $H_\mu^{(1)}$ denota la función de Hankel de primera especie y de orden μ.

Sea $k\in I\!N$. Inferimos de (5.1.b) [29] que para cada $t,\eta\in(0,\infty)$,

$$\Big(\frac{1}{t}D\Big)^k[t^{-\mu-1/2}h_\mu(\Phi)(t)] =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2}\int_{-\infty}^\infty (t(\xi+i\eta))^{-\mu-k}H_{\mu+k}^{(1)}(t(\xi+i\eta))\Phi(\xi+i\eta)(\xi+i\eta)^{2k+\mu+1/2}d\xi$$

Supongamos que $\mu\geq 1/2$. De (5.3.c) [29] se deduce

$$\Big|\Big(\frac{1}{t}D\Big)^k(t^{-\mu-1/2}h_\mu(\Phi)(t))\Big| \leq C\Bigg(\int_{|t(\xi+i\eta)|\leq 1,\ \xi\in I\!R}|\Phi(\xi+i\eta)|\ |\xi+i\eta|^{-\mu+1/2}t^{-2\mu-2k}d\xi+$$

$$+\int_{|t(\xi+i\eta)|>1,\ \xi\in I\!R}e^{-t\eta}t^{-\mu-k-1/2}|\Phi(\xi+i\eta)|\ |\xi+i\eta|^k d\xi\Bigg),\ t,\eta\in(0,\infty).$$

Por tanto, si $t \geq 1$ tenemos

$$\left|\left(\frac{1}{t}D\right)^k[t^{-\mu-1/2}h_\mu(\Phi)(t)]\right| \leq C\Big(\int_{|t(\xi+i\eta)|\leq 1,\ \xi\in I\!R} e^{-t\eta}|\Phi(\xi+i\eta)|\ |\xi+i\eta|^{-\mu+1/2}d\xi +$$

$$+\int_{|t(\xi+i\eta)|>1,\ \xi\in I\!R} e^{-t\eta}|\Phi(\xi+i\eta)|\ |\xi+i\eta|^k d\xi\Big),\ \eta\in(0,\infty).$$

Si $m \in I\!N-\{0\}$, teniendo en cuenta el Lema 2.4 [29] y tomando $\eta \in (0,\infty)$ de manera que $M'(mt) = \frac{\eta}{m}$, sigue

$$\left|\left(\frac{1}{t}D\right)^k[t^{-\mu-1/2}h_\mu(\Phi)(t)]\right| \leq Cp_{m,l}^{\mu,M^{\mathrm{X}}}(\Phi)e^{-M(mt)},\ t\geq 1, \tag{II.4.10}$$

donde $l \in I\!N$ es tal que $2l > k+\mu+3/2$.

Por otra parte, si $t\in(0,1)$ de (7) §5.1 [81] se infiere

$$\left(\frac{1}{t}D\right)^k[t^{-\mu-1/2}h_\mu(\Phi)(t)] = (-1)^k\int_0^\infty (xt)^{-\mu-k}J_{\mu+k}(xt)x^{\mu+1/2+2k}\Phi(x)dx.$$

Luego, para cada $m\in I\!N-\{0\}$, ya que la función $z^{-\mu}J_\mu(z)$ es acotada sobre $(0,\infty)$, tenemos

$$\left|\left(\frac{1}{t}D\right)^k[t^{-\mu-1/2}h_\mu(\Phi)(t)]\right| \leq C\int_0^\infty x^{2\mu+1}(1+x^2)^k|x^{-\mu-1/2}\Phi(x)|dx \leq$$

$$\leq Cp_{m,l+k}^{\mu,M^{\mathrm{X}}}(\Phi)e^{-M(mt)},\ t\in(0,1), \tag{II.4.11}$$

siendo $l\in I\!N$, $l>\mu+1$.

De (II.4.10) y (II.4.11) concluimos que h_μ es una aplicación continua de $\mathcal{Q}_{\mu,M^{\mathrm{X}}}$ en $\mathcal{H}_{\mu,M}$.

Cuando $-1/2<\mu<1/2$ podemos proceder de un modo similar recurriendo a (5.3.d) [29]. $\square$

Del Teorema 5.4-1 [81] y del Teorema 4.4 se deduce que $\mathcal{Q}_{\mu,M}$ está continuamente contenido en $\mathcal{H}_\mu$.

En el siguiente lema probamos que la función $(zt)^{-\mu}J_\mu(zt)$ define un multiplicador de $\mathcal{Q}_{\mu,M}$ para cada $t\in(0,\infty)$.

Lema 4.5 *Sea $t \in (0,\infty)$. La aplicación $\Phi(z) \longrightarrow (tz)^{-\mu}J_\mu(tz)\Phi(z)$ es continua de $\mathcal{Q}_{\mu,M}$ en sí mismo.*

Demostración:

Del Lema 2.4 y (5.3.b) [29] se sigue que

$$|(tz)^{-\mu}J_\mu(tz)| \leq Ce^{t|Im\ z|} \leq Ce^{M(\frac{|Im\ z|}{l})},\ z \in \mathbb{C} \text{ y } l \in I\!N - \{0\}.$$

Por tanto, para cada $k \in I\!N$ y $m \in I\!N - \{0\}$, obtenemos de (2.2) [29]

$$(1+|z|^2)^k e^{-M(\frac{|Im\ z|}{m})}\left|(tz)^{-\mu}J_\mu(tz)\Phi(z)\right| \leq$$

$$\leq C(1+|z|^2)^k e^{M(\frac{|Im\ z|}{2m})-M(\frac{|Im\ z|}{m})}|\Phi(z)| \leq$$

$$\leq C(1+|z|^2)^k e^{-M(\frac{|Im\ z|}{2m})}|\Phi(z)|,\ z \in \mathbb{C} \text{ y } \Phi \in \mathcal{Q}_{\mu,M}.$$

Luego, para cada $k \in I\!N$ y $m \in I\!N - \{0\}$,

$$p^{\mu,M}_{m,k}((zt)^{-\mu}J_\mu(zt)\Phi(z)) \leq Cp^{\mu,M}_{2m,k}(\Phi),\ \Phi \in \mathcal{Q}_{\mu,M},$$

y demostramos el resultado enunciado. □

La segunda propiedad es útil en el estudio de la convolución de Hankel sobre $\mathcal{H}_{\mu,M}$.

Lema 4.6 *La aplicación*

$$(\Phi,\Psi) \longrightarrow z^{-\mu-1/2}\Phi\Psi$$

es bilineal y continua de $\mathcal{Q}_{\mu,M}$ x $\mathcal{Q}_{\mu,M}$ en $\mathcal{Q}_{\mu,M}$.

Demostración:

Es suficiente recurrir a (2.2) [29]. □

El comportamiento de la traslación y la convolución de Hankel sobre $\mathcal{H}_{\mu,M}$ es establecido en la siguiente proposición.

Proposición 4.7 *(a) Para cada $x \in (0,\infty)$ el operador de traslación de Hankel τ_x define una aplicación continua de $\mathcal{H}_{\mu,M}$ en sí mismo.*

(b) La convolución de Hankel es una aplicación bilineal y continua de $\mathcal{H}_{\mu,M}$ x $\mathcal{H}_{\mu,M}$ en $\mathcal{H}_{\mu,M}$.

Demostración:

(a) Se sigue del Teorema 4.4 y del Lema 4.5 ya que (2.1) [52] implica

$$(\tau_x\phi)(y) = x^{\mu+1/2}h_\mu((xt)^{-\mu}J_\mu(xt)h_\mu(\phi)(t))(y),\ x,y \in (0,\infty),$$

para cada $\phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$.

(b) De la fórmula de intercambio se deduce ((1.3), [52])

$$\phi\#\psi = h_\mu(z^{-\mu-1/2}h_\mu(\phi)h_\mu(\psi)),\ \phi,\psi \in \mathcal{H}_{\mu,M}.$$

Por tanto del Teorema 4.4 y del Lema 4.6 inferimos la continuidad de la convolución de Hankel sobre $\mathcal{H}_{\mu,M}$. □

La siguiente propiedad la necesitaremos más adelante.

Proposición 4.8 *Sea $\phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$. Entonces la aplicación T_ϕ definida por*

$$\begin{aligned} T_\phi : [0,\infty) &\longrightarrow \mathcal{H}_{\mu,M} \\ x &\longrightarrow x^{-\mu-1/2}\tau_x\phi,\ si\ x \in (0,\infty) \\ &\qquad \alpha_\mu\phi,\ si\ x = 0 \end{aligned}$$

es continua.

Demostración:

Sea $x_0 \in (0,\infty)$. De acuerdo con (2.1) [52] y el Teorema 4.4 para ver que T_ϕ es continua en x_0 es suficiente probar que

$$[(xz)^{-\mu}J_\mu(xz) - (x_0z)^{-\mu}J_\mu(x_0z)]\Phi(z) \longrightarrow 0, \tag{II.4.12}$$

cuando $x \to x_0$, con $x \in [0,\infty)$, en $\mathcal{Q}_{\mu,M^{\mathrm{X}}}$, donde $\Phi = h_\mu\phi$. Nótese que $\Phi \in \mathcal{Q}_{\mu,M^{\mathrm{X}}}$ (Teorema 4.4).

En virtud de (5.3.b) [29] podemos escribir

$$|(xz)^{-\mu}J_\mu(xz) - (x_0z)^{-\mu}J_\mu(x_0z)| \leq C(e^{x|Im\ z|} + e^{x_0|Im\ z|}) \leq$$

$$\leq Ce^{(x_0+1)|Im\ z|},\ \text{para cada } z \in \mathbb{C} \text{ y } x \in (0, x_0+1).$$

Sean $k \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N} - \{0\}$. Del Lema 2.4 y (2.2) [29] se sigue

$$(1+|z|^2)^k|z^{-\mu-1/2}\Phi(z)[(xz)^{-\mu}J_\mu(xz) - (x_0z)^{-\mu}J_\mu(x_0z)]|e^{-M^{\mathrm{X}}(\frac{|Im\ z|}{m})} \leq$$

$$\leq C(1+|z|^2)^k|z^{-\mu-1/2}\Phi(z)|e^{(x_0+1)|Im\ z|-M^{\mathrm{X}}(\frac{|Im\ z|}{m})} \leq$$

$$\leq C(1+|z|^2)^k|z^{-\mu-1/2}\Phi(z)|e^{M^{\mathrm{X}}(\frac{|Im\ z|}{2m})-M^{\mathrm{X}}(\frac{|Im\ z|}{m})} \leq$$

$$\leq C(1+|z|^2)^{-1}p_{2m,k+1}^{\mu,M^{\mathrm{X}}}(\Phi),\ \text{para cada } z \in \mathbb{C} \text{ y } x \in (0, x_0+1). \tag{II.4.13}$$

Sea $\epsilon > 0$. De (II.4.13) se deduce que existe $r > 0$ tal que para cada $x \in (0, x_0+1)$ y $|z| \geq r$

$$(1+|z|^2)^k|z^{-\mu-1/2}\Phi(z)|\ |(xz)^{-\mu}J_\mu(xz) - (x_0z)^{-\mu}J_\mu(x_0z)|e^{-M^{\mathrm{X}}(\frac{|Im\ z|}{m})} < \epsilon. \tag{II.4.14}$$

Además, ya que la función $z^{-\mu}J_\mu(z)$ es uniformemente continua en cada compacto del plano complejo, existe $\delta > 0$ tal que para cada $x \in [0,\infty)$ siendo $|x - x_0| < \delta$ y $|z| \leq r$

$$(1+|z|^2)^k|z^{-\mu-1/2}\Phi(z)|\ |(xz)^{-\mu}J_\mu(xz) - (x_0z)^{-\mu}J_\mu(x_0z)|e^{-M^{\mathrm{X}}(\frac{|Im\ z|}{m})} < \epsilon. \tag{II.4.15}$$

De (II.4.14) y (II.4.15) se sigue ya (II.4.12). $\square$

$\mathcal{H}'_{\mu,M}$

Nuestro objetivo en esta sección es caracterizar el espacio $\mathcal{H}'_{\mu,M}$, dual de $\mathcal{H}_{\mu,M}$, mediante los #-operadores sobre $\mathcal{H}_{\mu,M}$.

La Proposición 4.7 (a) nos permite definir la convolución de Hankel $T\#\phi$ de $T \in \mathcal{H}'_{\mu,M}$ y $\phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$ por

$$(T\#\phi)(x) =< T(y), (\tau_x\phi)(y) >, \; x \in (0,\infty).$$

Observamos que, en virtud de la Proposición 4.8, $T\#\phi \in \mathcal{C}_\mu$, para cada $T \in \mathcal{H}'_{\mu,M}$ y $\phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$.

En la siguiente proposición caracterizamos la convergencia de sucesiones en la topología débil $*$ de $\mathcal{H}'_{\mu,M}$ a través de la convolución de Hankel.

Proposición 4.9 *Sea $(T_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{H}'_{\mu,M}$. Entonces $< T_n, \phi > \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, para cada $\phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$ si, y sólo si, $T_n\#\phi \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{C}_\mu$, para cada $\phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$.*

Demostración:

Supongamos inicialmente que $< T_n, \phi > \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, para cada $\phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$.

Sea $\phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$ y $m \in I\!N$. De acuerdo con la Proposición 4.8 el conjunto $T_\phi[0,m]$ es compacto en $\mathcal{H}_{\mu,M}$, donde T_ϕ representa la aplicación definida en la Proposición 4.8. Del Teorema de Banach-Steinhaus se infiere que

$$\sup_{x\in[0,m]} \Big| < T_n, T_\phi(x) > \Big| = \sup_{x\in(0,m)} |x^{-\mu-1/2} < T_n, \tau_x\phi > | =$$

$$= \sup_{x\in(0,m)} x^{-\mu-1/2}|(T_n\#\phi)(x)| \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Probamos así que $T_n\#\phi \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{C}_\mu$.

Para probar la implicación inversa es suficiente observar que de la Proposición 4.8 se sigue que

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-\mu-1/2} < T_n, \tau_x\phi >=< T_n, \alpha_\mu\phi >,$$

para cada $n \in I\!N$ y $\phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$. □

A continuación describimos el #-dual $\mathcal{H}^{\#}_{\mu,M}$ de $\mathcal{H}_{\mu,M}$.

Proposición 4.10 $\mathcal{H}^{\#}_{\mu,M} = \Big\{ f \in \mathcal{C}_\mu : \dfrac{x^{\mu+1/2} f}{e^{M(px)}} \in L_1(0,\infty),$ *para algún* $p \in I\!N \Big\}$.

Demostración:

Sea $f \in \mathcal{C}_\mu$ tal que $\dfrac{x^{\mu+1/2} f}{e^{M(px)}} \in L_1(0,\infty)$, para cierto $p \in I\!N$, y sea $\phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$.

Podemos escribir para cada $x \in (0,\infty)$

$$\int_0^\infty |f(y)|\, |(\tau_x\phi)(y)| dy \leq \sup_{y\in(0,\infty)} e^{M(py)} |y^{-\mu-1/2}(\tau_x\phi)(y)| \int_0^\infty \frac{y^{\mu+1/2}|f(y)|}{e^{M(py)}} dy.$$

Por tanto, ya que $\tau_x\phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$, $x \in (0,\infty)$ (Proposition 4.7 (a)),

$$\int_0^\infty |f(y)|\, |(\tau_x\phi)(y)| dy < \infty, \; x \in (0,\infty).$$

Además, de la Proposición 4.8 se infiere que

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-\mu-1/2} \int_0^\infty |f(y)|\, |\tau_x\phi(y)| dy = \alpha_\mu \int_0^\infty |f(y)|\, |\phi(y)| dy < \infty.$$

Se concluye entonces que $f \in \mathcal{H}^{\#}_{\mu,M}$.

Supongamos ahora que $f \in \mathcal{H}^{\#}_{\mu,M}$ y que $\dfrac{x^{\mu+1/2} f}{e^{M(px)}} \notin L_1(0,\infty)$, para ningún $p \in I\!N$. Elegimos $\phi \in \beta_\mu$ de manera que $\phi \not\equiv 0$, $\phi(x) \geq 0$, sobre $(0,\infty)$, y $\phi(x) = 0$, $x > 1$.

Para cada $n \in I\!N - \{0\}$ y $p \in I\!N$ tenemos

$$\int_0^\infty |f(x)| \Big(\frac{\chi_{(0,n)} t^{\mu+1/2}}{e^{M(pt)}} \# \phi \Big)(x) dx = \int_0^\infty |f(x)| \int_0^1 \phi(y) \tau_x \Big(\frac{\chi_{(0,n)} t^{\mu+1/2}}{e^{M(pt)}} \Big)(y) dy dx.$$

También

$$\tau_x \left(\frac{\chi_{(0,n)} t^{\mu+1/2}}{e^{M(pt)}} \right)(y) = \int_0^{x+y} \frac{\chi_{(0,n)}(z) z^{\mu+1/2}}{e^{M(pz)}} D(x,y,z) dz, \; x, y \in (0,\infty).$$

Por tanto, ya que $D(x,y,z) \geq 0$, $x,y,z \in (0,\infty)$ y que $\int_0^\infty D(x,y,z)z^{\mu+1/2}dz = \alpha_\mu (xy)^{\mu+1/2}$, $x,y \in (0,\infty)$, (véase (2) §2 [42]), se sigue

$$\int_0^\infty |f(x)| \left(\frac{\chi_{(0,n)}t^{\mu+1/2}}{e^{M(pt)}} \# \phi \right)(x)dx \geq \int_0^{n-1} |f(x)| \left(\frac{t^{\mu+1/2}}{e^{M(pt)}} \# \phi \right)(x)dx =$$

$$= \int_0^{n-1} |f(x)| \int_0^1 \phi(y) \int_0^{x+y} \frac{z^{\mu+1/2}}{e^{M(pz)}} D(x,y,z)dzdydx \geq$$

$$\geq \int_0^{n-1} |f(x)| \int_0^1 \frac{\phi(y)}{e^{M[p(x+y)]}} \int_0^\infty z^{\mu+1/2} D(x,y,z)dzdydx =$$

$$= \alpha_\mu \int_0^{n-1} x^{\mu+1/2} |f(x)| \int_0^\infty \frac{\phi(y)y^{\mu+1/2}}{e^{M[p(x+y)]}} dydx \geq$$

$$\geq C \int_0^{n-1} \frac{x^{\mu+1/2}|f(x)|}{e^{M(2px)}} dx \int_0^\infty y^{\mu+1/2}\phi(y)dy,\ n \in I\!N - \{0\}.$$

En la última desigualdad hemos usado que M es una función creciente y que $\phi(x) = 0$, para cada $x > 1$.

Deducimos pues que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty |f(x)| \left(\frac{\chi_{(0,n)}t^{\mu+1/2}}{e^{M(pt)}} \# \phi \right)(x)dx = \infty, \text{ para cada } p \in I\!N.$$

Consecuentemente existe una sucesión $(a_p)_{p\in I\!N}$ monótona creciente de números positivos de manera que

$$\int_0^\infty |f(x)| \left(\frac{\chi_{(0,a_p)}t^{\mu+1/2}}{e^{M(pt)}} \# \phi \right)(x)dx > p, \text{ para cada } p \in I\!N.$$

Además, $\tau_x\phi \geq 0$, $x \in (0,\infty)$, al ser $\phi \geq 0$ sobre $(0,\infty)$. Por ello, ya que M es una función creciente, se tiene

$$\int_a^b \frac{t^{\mu+1/2}}{e^{M(pt)}} (\tau_x\phi)(t)dt \geq \int_a^b \frac{t^{\mu+1/2}}{e^{M[(p+1)t]}} (\tau_x\phi)(t)dt,\ x \in (0,\infty) \text{ y } 0 \leq a < b.$$

Entonces, para cada $p \in I\!N$

$$\int_0^\infty |f(x)|(\psi_p \# \phi)(x)dx > p,$$

donde $\psi_p(x) = x^{\mu+1/2}$, $0 < x < a_0$, $\psi_p(x) = \dfrac{x^{\mu+1/2}}{e^{M(lx)}}$, $a_{l-1} \leq x < a_l$, $l = 1, ..., p$, y $\psi_p(x) = 0$, $x \geq a_p$. De aquí se deduce que

$$\int_0^\infty |f(x)|(\psi\#\phi)(x) = +\infty, \tag{II.4.16}$$

donde $\psi(x) = x^{\mu+1/2}$, $0 < x < a_0$, y $\psi(x) = \dfrac{x^{\mu+1/2}}{e^{M(lx)}}$, $a_{l-1} \leq x < a_l$, $l = 1, 2, ...$.

Por otra parte, $z^{-\mu-1/2}h_\mu(\psi)$ es un multiplicador en $\mathcal{Q}_{\mu,M^{\text{X}}}$. En efecto, de (5.3.b) y del Lema 2.4 [29] obtenemos para cada $m \in I\!N - \{0\}$

$$|z^{-\mu-1/2}h_\mu(\psi)(z)| \leq C \int_0^\infty e^{x|Im\ z|}x^{\mu+1/2}|\psi(x)|dx \leq$$

$$\leq Ce^{M^{\text{X}}\left(\frac{|Im\ z|}{m}\right)} \int_0^\infty e^{M(mx)}x^{\mu+1/2}|\psi(x)|dx, \ z \in \mathbb{C}.$$

De donde se sigue que

$$\sup_{z\in\mathbb{C}} e^{-M^{\text{X}}(\frac{|Im\ z|}{m})}|z^{-\mu-1/2}h_\mu(\psi)(z)| < \infty, \text{ para cada } m \in I\!N - \{0\},$$

y procediendo como en el Lema 4.5 se concluye que $z^{-\mu-1/2}h_\mu(\psi)$ es un multiplicador en $\mathcal{Q}_{\mu,M^{\text{X}}}$.

Recurriendo ahora a la fórmula de intercambio (Proposición 2.5 [51]) y al Teorema 4.4 obtenemos que $\psi\#\phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$.

Ya que $f \in \mathcal{H}^{\#}_{\mu,M}$ sigue

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^\infty |f(y)|x^{-\mu-1/2}\tau_x(\psi\#\phi)(y)dy = \alpha_\mu \int_0^\infty |f(y)|(\psi\#\phi)(y)dy < \infty.$$

Esto contradice (II.4.16) y completa la demostración. $\square$

Establecemos ahora una consecuencia de la proposición anterior.

Corolario 4.11 *Si $f \in \mathcal{H}^{\#}_{\mu,M}$ entonces $f\#\phi \in \mathcal{C}_\mu$, para cada $\phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$.*

Demostración:

Sea $f \in \mathcal{H}^{\#}_{\mu,M}$. En virtud de la Proposición 4.10 existe $p \in I\!N$ tal que $\dfrac{x^{\mu+1/2}f}{e^{M(px)}} \in L_1(0,\infty)$. Sea $\phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$. Tenemos

$$|x^{-\mu-1/2}(f\#\phi)(x) - y^{-\mu-1/2}(f\#\phi)(y)| \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \frac{z^{\mu+1/2}|f(z)|}{e^{M(pz)}}dz \sup_{z\in(0,\infty)} |e^{M(pz)}z^{-\mu-1/2}[T_\phi(x) - T_\phi(y)](z)|, \; x,y \in (0,\infty),$$

donde T_ϕ representa la aplicación definida en la Proposición 4.8. De la Proposición 4.8 se sigue que

$$\lim_{x\to y} x^{-\mu-1/2}(f\#\phi)(x) = y^{-\mu-1/2}(f\#\phi)(y), \; y \in (0,\infty).$$

Por tanto $f\#\phi$ es continua en $(0,\infty)$.

Además recurriendo de nuevo a la Proposición 4.8 podemos probar que

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-\mu-1/2}(f\#\phi)(x) = \alpha_\mu \int_0^\infty f(y)\phi(y)dy.$$

Concluimos así que $f\#\phi \in \mathcal{C}_\mu$. □

En la siguiente proposición se caracteriza la convergencia de sucesiones en $\mathcal{H}_{\mu,M}$ mediante los #-operadores sobre $\mathcal{H}_{\mu,M}$.

Proposición 4.12 *Sea $(\phi_n)_{n=0}^\infty$ una sucesión en $\mathcal{H}_{\mu,M}$. Entonces $\phi_n \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{H}_{\mu,M}$, si, y sólo si, $F(\phi_n) \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{C}_\mu$, para cada $F \in \mathcal{G}(\mathcal{H}_{\mu,M})$.*

Demostración:

Probamos en primer lugar que si $\phi_n \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{H}_{\mu,M}$, entonces $F(\phi_n) \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{C}_\mu$, para cada #-operador F sobre $\mathcal{H}_{\mu,M}$. Para ello haremos uso del teorema del grafo cerrado.

Supongamos que $(\psi_n)_{n=0}^\infty \subset \mathcal{H}_{\mu,M}$ verificando

$$\psi_n \longrightarrow \psi, \text{ cuando } n \to \infty, \text{ en } \mathcal{H}_{\mu,M}, \text{ y },$$

$$F(\psi_n) \longrightarrow f, \text{ cuando } n \to \infty, \text{ en } \mathcal{C}_\mu,$$

donde $\psi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$ y $f \in \mathcal{H}^{\#}_{\mu,M}$. Nuestro objetivo es probar que $F(\psi) = f$.

Observamos que para cada $g \in \mathcal{H}^{\#}_{\mu,M}$, $g\#\psi_n \longrightarrow g\#\psi$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{C}_\mu$. En efecto, sea $g \in \mathcal{H}^{\#}_{\mu,M}$. De acuerdo con la Proposición 4.10 existe $p \in I\!N$ tal que $\dfrac{x^{\mu+1/2}g}{e^{M(px)}} \in L_1(0,\infty)$. Entonces

$$|x^{-\mu-1/2}[g\#(\psi_n-\psi)](x)| \leq \int_0^\infty \frac{y^{\mu+1/2}|g(y)|}{e^{M(py)}}dy\cdot$$

$$\cdot \sup_{y\in(0,\infty)} |e^{M(py)}(xy)^{-\mu-1/2}\tau_x(\psi_n-\psi)(y)|, \; x \in (0,\infty). \tag{II.4.17}$$

De (1.2) [9] sigue

$$x^{-\mu-1/2}\tau_x(\psi_n-\psi)(y) = h_\mu[(xt)^{-\mu}J_\mu(xt)h_\mu(\psi_n-\psi)(t)](y), \; x,y \in (0,\infty).$$

Por tanto, ya que h_μ es un isomorfismo de $\mathcal{H}_{\mu,M}$ en $\mathcal{Q}_{\mu,M}$x (Teorema 4.4) y que $(xt)^{-\mu}J_\mu(xt)$ es un multiplicador de $\mathcal{Q}_{\mu,M}$x uniforme en $x \in (0,m)$, para cada $m \in I\!N - \{0\}$ (como se deduce de la demostración del Lema 4.5), de (II.4.17) obtenemos que

$$\sup_{x\in(0,m)} |x^{-\mu-1/2}(g\#(\psi_n-\psi))(x)| \longrightarrow 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Sea ahora $\varphi \in \beta_\mu$. Ya que F es un #-operador sobre $\mathcal{H}_{\mu,M}$ podemos escribir

$$F(\psi_n)\#\varphi = F(\varphi)\#\psi_n \longrightarrow F(\varphi)\#\psi = F(\psi)\#\varphi, \text{ cuando } n \to \infty, \text{ en } \mathcal{C}_\mu. \tag{II.4.18}$$

Además, para cada $n \in I\!N$ y $x \in (0,m)$, donde $m \in I\!N - \{0\}$, se tiene

$$|x^{-\mu-1/2}[(F(\psi_n)-f)\#\varphi](x)| \leq \int_0^{a+m} |[F(\psi_n)-f](y)|x^{-\mu-1/2}|(\tau_x\varphi)(y)|dy \leq$$

$$\leq (a+m)^{\mu+1/2}\int_0^{a+m} y^{-\mu-1/2}|[F(\psi_n)-f](y)|\,|h_\mu[(xt)^{-\mu}J_\mu(xt)h_\mu(\varphi)(t)](y)|dy.$$

Aquí $a \in (0,\infty)$ de manera que $\varphi(x) = 0$, para cada $x \in (a,\infty)$.

Luego, para cada $m \in I\!N - \{0\}$ existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{x\in(0,m)} |x^{-\mu-1/2}((F(\psi_n) - f)\#\varphi)(x)| \leq C \sup_{y\in(0,a+m)} |y^{-\mu-1/2}(F(\psi_n) - f)(y)|,\ n \in I\!N.$$

Probamos así que $F(\psi_n)\#\varphi \longrightarrow f\#\varphi$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{C}_\mu$. Esto permite, junto a (II.4.18), mostrar que $f\#\varphi = F(\psi)\#\varphi$.

También tenemos que

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-\mu-1/2} \int_0^\infty F(\psi)(y)(\tau_x\varphi)(y)dy = \alpha_\mu \int_0^\infty F(\psi)(y)\varphi(y)dy =$$

$$= \alpha_\mu \int_0^\infty f(y)\varphi(y)dy = \lim_{x\to 0^+} x^{-\mu-1/2} \int_0^\infty f(y)(\tau_x\varphi)(y)dy.$$

La arbitrariedad de $\varphi \in \beta_\mu$ y la continuidad de f y $F(\psi)$ conducen ya a que $f = F(\psi)$.

Suponemos ahora que $F(\phi_n) \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{C}_\mu$, para cada $F \in \mathcal{G}(\mathcal{H}_{\mu,M})$. Probaremos que $\phi_n \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{H}_{\mu,M}$.

De (2.2) [29] se sigue que $\phi_n \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{H}_{\mu,M}$, si, y sólo si, se verifican

(i) $(\phi_n)_{n=0}^\infty$ es acotada en $\mathcal{H}_{\mu,M}$, y

(ii) para cada $l \in I\!N - \{0\}$ y $k \in I\!N$,

$$\sup_{x\in(0,\,l)} |x^{-\mu-1/2} S_\mu^k \phi_n(x)| \longrightarrow 0,\ \text{cuando } n \to \infty.$$

Notamos que, en virtud de la Proposición 2.2 [52], para cada $k \in I\!N$, la aplicación F_k definida por

$$\begin{aligned} F_k : \mathcal{H}_{\mu,M} &\longrightarrow \mathcal{H}^\#_{\mu,M} \\ \phi &\longrightarrow S_\mu^k \phi \end{aligned}$$

está en $\mathcal{G}(\mathcal{H}_{\mu,M})$. Por tanto, de nuestra hipótesis se deduce que la condición (ii) anterior es verificada por $(\phi_n)_{n=0}^\infty$.

Asumamos que $\phi_n \not\to 0$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{H}_{\mu,M}$. De acuerdo con lo comentado esto, en nuestro caso, es equivalente a que $(\phi_n)_{n=0}^{\infty}$ no es acotada en $\mathcal{H}_{\mu,M}$. Existen entonces $m, k \in I\!N$ tales que el conjunto

$$\left\{ \sup_{x\in(0,\infty)} e^{M(mx)} x^{-\mu-1/2} |S_\mu^k \phi_n(x)| \right\}_{n\in I\!N}$$

no es acotado en $[0, \infty)$.

Ya que $\sup_{x\in(0,1)} e^{M(mx)} x^{-\mu-1/2} |S_\mu^k \phi_n(x)| \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, para cierto $w \geq 2$

$$\sup_{x\in(0,1)} e^{M(mx)} x^{-\mu-1/2} |S_\mu^k \phi_n(x)| \leq w, \; n \in I\!N.$$

Además, existen $x_1 \in (0, \infty)$ (necesariamente $x_1 \notin (0,1)$) y $n_1 \in I\!N$ tales que

$$e^{M(mx_1)} x_1^{-\mu-1/2} |S_\mu^k \phi_{n_1}(x_1)| \geq w,$$

y existe $C_1 > 0$ para la cual

$$x_1^{-\mu-1/2} |S_\mu^k \phi_n(x_1)| \leq C_1, \; n \in I\!N.$$

Supongamos en este punto que hemos encontrado, para cierto $s \in I\!N - \{0\}$, $(x_\alpha)_{\alpha=1}^s$, $(C_\alpha)_{\alpha=1}^s$ y $(\phi_{n_\alpha})_{\alpha=1}^s$, verificándose las tres condiciones que siguen para cada $\alpha = 1, 2, ..., s$

(i) $\sup_{n\in I\!N} |x_\alpha^{-\mu-1/2} S_\mu^k \phi_n(x_\alpha)| \leq C_\alpha$,

(ii) $\left| \sum_{i=1}^s e^{M(mx_i)} x_i^{-\mu-1/2} S_\mu^k \phi_{n_\alpha}(x_i) \right| \geq 1 + \sum_{j=s-\alpha+1}^{\infty} \frac{1}{2^j}$,

(iii) $e^{-M(x_\alpha)} \leq \frac{1}{\alpha^2}$,

y vamos a definir x_{s+1}, C_{s+1} y $\phi_{n_{s+1}}$ de manera que $(x_\alpha)_{\alpha=1}^{s+1}$, $(C_\alpha)_{\alpha=1}^{s+1}$ y $(\phi_{n_\alpha})_{\alpha=1}^{s+1}$ satisfagan las tres condiciones anteriores cuando s es reemplazado por $s+1$.

Elegimos $\rho_s > 0$ de manera que $e^{M(x)} \geq (s+1)^2$, para cada $x \notin (0, \rho_s)$.

Existe $C > 0$ tal que

$$e^{M[(m+1)x]} x^{-\mu-1/2} |S_\mu^k \phi_{n_i}(x)| \leq C, \; x \in (0, \infty) \text{ e } i = 1, ..., s.$$

De (2.2) [29] se sigue entonces que

$$e^{M(mx)}x^{-\mu-1/2}|S_\mu^k\phi_{n_i}(x)| \leq \frac{C}{e^{M(x)}},\ x \in (0,\infty) \text{ e } i = 1,...,s,$$

y podemos escoger ρ_s suficientemente grande para que

$$e^{M(mx)}x^{-\mu-1/2}|S_\mu^k\phi_{n_i}(x)| \leq \frac{1}{2^{s-i+1}},\ x \notin (0,\rho_s) \text{ e } i = 1,...,s.$$

Elegimos también $w \geq 2 + e^{M(mx_1)}C_1 + ... + e^{M(mx_s)}C_s$ verificando

$$e^{M(mx)}x^{-\mu-1/2}|S_\mu^k\phi_n(x)| \leq w,\ x \in (0,\rho_s) \text{ y } n \in I\!N.$$

Ya que el conjunto $\left\{ \sup\limits_{x\in(0,\infty)} e^{M(mx)}x^{-\mu-1/2}|S_\mu^k\phi_n(x)|\right\}_{n\in I\!N}$ no es acotado en $[0,\infty)$ existen $n_{s+1} \in I\!N$ y $x_{s+1} \in (0,\infty)$ para los cuales

$$e^{M(mx_{s+1})}x_{s+1}^{-\mu-1/2}|S_\mu^k\phi_{n_{s+1}}(x_{s+1})| \geq w.$$

Es obvio que $x_{s+1} \notin (0,\rho_s)$. Por tanto $e^{M(x_{s+1})} \geq (s+1)^2$ y la propiedad (iii) se da.

Escogemos $C_{s+1} > 0$ tal que $\sup\limits_{n\in I\!N} |x_{s+1}^{-\mu-1/2}S_\mu^k\phi_n(x_{s+1})| \leq C_{s+1}$. De este modo (i) es satisfecho.

Por otra parte, si $1 \leq \alpha \leq s$ podemos escribir

$$\left|e^{M(mx_1)}x_1^{-\mu-1/2}S_\mu^k\phi_{n_\alpha}(x_1) + ... + e^{M(mx_{s+1})}x_{s+1}^{-\mu-1/2}S_\mu^k\phi_{n_\alpha}(x_{s+1})\right| \geq$$

$$\geq \left|\sum_{i=1}^{s} e^{M(mx_i)}x_i^{-\mu-1/2}S_\mu^k\phi_{n_\alpha}(x_i)\right| - \left|e^{M(mx_{s+1})}x_{s+1}^{-\mu-1/2}S_\mu^k\phi_{n_\alpha}(x_{s+1})\right| \geq$$

$$\geq 1 + \sum_{j=s-\alpha+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} - \frac{1}{2^{s-\alpha+1}} = 1 + \sum_{j=(s+1)-\alpha+1} \frac{1}{2^j}.$$

Además

$$\left|e^{M(mx_1)}x_1^{-\mu-1/2}S_\mu^k\phi_{n_{s+1}}(x_1) + ... + e^{M(mx_{s+1})}x_{s+1}^{-\mu-1/2}S_\mu^k\phi_{n_{s+1}}(x_{s+1})\right| \geq$$

$$\geq e^{M(mx_{s+1})}x_{s+1}^{-\mu-1/2}|S_\mu^k\phi_{n_{s+1}}(x_{s+1})| - \sum_{i=1}^{s} e^{M(mx_i)}x_i^{-\mu-1/2}|S_\mu^k\phi_{n_{s+1}}(x_i)| \geq$$

$$\geq w - \sum_{i=1}^{s} e^{M(mx_i)}C_i \geq 2.$$

Probamos así que (ii) es cierto.

Construimos de este modo tres sucesiones $(x_\alpha)_{\alpha=1}^\infty$, $(C_\alpha)_{\alpha=1}^\infty$ y $(\phi_{n_\alpha})_{\alpha=1}^\infty$ verificando (i) y (iii) para cada $\alpha = 1, 2, ...,$ y (ii) para cada $s = 1, 2, ...$ y $\alpha = 1, 2, ..., s$.

Definimos ahora una sucesión $(F_n)_{n=1}^\infty$ en $\mathcal{G}(\mathcal{H}_{\mu,M})$ como sigue: para cada $n \in I\!N - \{0\}$ y $\phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$, $F_n(\phi)$ es dado por

$$\Big[F_n(\phi)\Big](x) = \sum_{\alpha=1}^{n} e^{M(mx_\alpha)}x_\alpha^{-\mu-1/2}\tau_{x_\alpha}(S_\mu^k\phi)(x), \; x \in (0, \infty).$$

De la Proposición 4.7 (a) y teniendo en cuenta que $\tau_x(\phi)\#\psi = \tau_x(\phi\#\psi)$, para cada $x \in (0, \infty)$ y $\phi, \psi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$, se sigue que $F_n \in \mathcal{G}(\mathcal{H}_{\mu,M})$, para cada $n \in I\!N$.

Nuestro próximo objetivo es probar que, para cada $\phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$, la sucesión $(F_n(\phi))_{n=1}^\infty$ converge en $\mathcal{C}_\mu$.

Sea $\phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$. Para cada $n, l \in I\!N - \{0\}$, de acuerdo con (1.2) [9] podemos escribir

$$x^{-\mu-1/2}|[F_{n+l}(\phi)](x) - [F_n(\phi)](x)| \leq \sum_{\alpha=n+1}^{n+l} e^{M(mx_\alpha)}(xx_\alpha)^{-\mu-1/2}|\tau_{x_\alpha}(S_\mu^k\phi)(x)| \leq$$

$$\leq \sum_{\alpha=n+1}^{n+l} e^{-M(x_\alpha)}e^{M[(m+1)x_\alpha]}x_\alpha^{-\mu-1/2}|h_\mu[(xt)^{-\mu}J_\mu(xt)h_\mu(S_\mu^k\phi)(t)](x_\alpha)| \leq$$

$$\leq \sum_{\alpha=n+1}^{n+l} \frac{1}{\alpha^2} \sup_{z\in(0,\infty)} e^{M[(m+1)z]}z^{-\mu-1/2}\Big|h_\mu[(xt)^{-\mu}J_\mu(xt)h_\mu(S_\mu^k\phi)(t)](z)\Big|, \; x \in (0, \infty).$$

Por tanto, ya que para cada $r \in I\!N - \{0\}$ la función $(xt)^{-\mu}J_\mu(xt)$ es multiplicador de $\mathcal{Q}_{\mu,M}$x uniforme en $x \in (0, r)$ (véase la demostración del Lema 4.5), $(F_n(\phi))_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{C}_\mu$. Al ser $\mathcal{C}_\mu$ un espacio de Fréchet $(F_n(\phi))_{n=1}^\infty$ converge en $\mathcal{C}_\mu$.

Definimos

$$F(\phi) = \lim_{n\to\infty} F_n(\phi), \; \phi \in \mathcal{H}_{\mu,M},$$

donde el límite es entendido en $\mathcal{C}_\mu$.

Para cada $\phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$, $F(\phi) \in \mathcal{H}^{\#}_{\mu,M}$. En efecto, sea $\phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$. En virtud de (1.2) [9], de (5.3.b) y (2.2) [29] y del Teorema 4.4, existe $l \in I\!N$ tal que

$$e^{M[(m+1)x_\alpha]}(xx_\alpha)^{-\mu-1/2}|\tau_{x_\alpha}(S_\mu^k\phi)(x)| \leq$$

$$\leq \sup_{z\in(0,\infty)} e^{M[(m+1)z]}z^{-\mu-1/2}\Big|h_\mu[(xt)^{-\mu}J_\mu(xt)h_\mu(S_\mu^k\phi)(t)](z)\Big| \leq Ce^{M(lx)}, \qquad \text{(II.4.19)}$$

para cada $x \in (0,\infty)$ y $\alpha \in I\!N - \{0\}$.

Entonces

$$\int_0^\infty \frac{x^{\mu+1/2}|[F(\phi)](x)|}{e^{M((l+1)x)}}dx \leq C\sum_{\alpha=1}^\infty \frac{1}{\alpha^2},$$

y la Proposición 4.10 implica que $F(\phi) \in \mathcal{H}^{\#}_{\mu,M}$.

Para ver que $F \in \mathcal{G}(\mathcal{H}_{\mu,M})$ nos hace falta probar que

$$F(\phi)\#\psi = F(\phi\#\psi), \text{ para cada } \phi,\psi \in \mathcal{H}_{\mu,M}.$$

Sean $\phi,\psi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$. Para cada $\beta \in I\!N - \{0\}$ podemos escribir

$$|x^{-\mu-1/2}[(F_n(\phi)-F(\phi))\#\psi](x)| \leq \int_0^\infty |(F_n(\phi)-F(\phi))(y)|x^{-\mu-1/2}|(\tau_x\psi)(y)|dy \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \frac{y^{\mu+1/2}|(F_n(\phi)-F(\phi))(y)|}{e^{M((l+1)y)}}dy\cdot$$

$$\cdot \sup_{z\in(0,\infty)} e^{M((l+1)z)}z^{-\mu-1/2}\Big|h_\mu[(xt)^{-\mu}J_\mu(xt)h_\mu(\psi)(t)](z)\Big| \leq$$

$$\leq C\sum_{\alpha=n+1}^\infty \frac{1}{\alpha^2}, \text{ para cada } x \in (0,\beta).$$

Aquí l es el número natural que aparece en (II.4.19).

Por tanto $F_n(\phi)\#\psi \longrightarrow F(\phi)\#\psi$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{C}_\mu$. Además $F_n(\phi)\#\psi = F_n(\phi\#\psi)$, $n \in I\!N - \{0\}$. Luego $F(\phi)\#\psi = F(\phi\#\psi)$.

Observamos también que para cada $l \in I\!N - \{0\}$ se tiene

$$x^{-\mu-1/2}[F(\phi_{n_l})](x) = x^{-\mu-1/2}\sum_{\alpha=1}^\infty e^{M(mx_\alpha)}x_\alpha^{-\mu-1/2}\tau_{x_\alpha}(S_\mu^k\phi_{n_l})(x), \; x \in (0,\infty),$$

de donde se sigue

$$\lim_{x\to 0^+} x^{-\mu-1/2}|[F(\phi_{n_l})](x)| = \Big|\sum_{\alpha=1}^{\infty} e^{M(mx_\alpha)} x_\alpha^{-\mu-1/2} \lim_{x\to 0^+} x^{-\mu-1/2}\tau_x(S_\mu^k \phi_{n_l})(x_\alpha)\Big| =$$

$$= \alpha_\mu \Big|\sum_{\alpha=1}^{\infty} e^{M(mx_\alpha)} x_\alpha^{-\mu-1/2} S_\mu^k \phi_{n_l}(x_\alpha)\Big| \geq \alpha_\mu,\ l \in I\!N - \{0\}.$$

Concluimos de aquí que $F(\phi_n) \not\longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, en $\mathcal{C}_\mu$, lo que contradice nuestra suposición. □

A continuación probamos que el espacio $\mathcal{G}(\mathcal{H}_{\mu,M})$ de #-operadores sobre $\mathcal{H}_{\mu,M}$ puede identificarse con $\mathcal{H}'_{\mu,M}$.

Proposición 4.13 *Los espacios $\mathcal{G}(\mathcal{H}_{\mu,M})$ y $\mathcal{H}'_{\mu,M}$ son isomorfos.*

Demostración:

Definimos la aplicación J como sigue

$$J : \mathcal{G}(\mathcal{H}_{\mu,M}) \longrightarrow \mathcal{H}'_{\mu,M}$$
$$F \longrightarrow J(F) : \mathcal{H}_{\mu,M} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\phi \longrightarrow J(F)(\phi) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\alpha_\mu} x^{-\mu-1/2} F(\phi)(x).$$

Probamos que J es un isomorfismo algebraico y secuencial.

Procediendo como en la prueba de la Proposición 4.3 podemos demostrar que J es lineal y uno a uno. Además J es sobre. En efecto, sea $f \in \mathcal{H}'_{\mu,M}$. Definimos $[F(\phi)](x) = (f\#\phi)(x) =< f(y), (\tau_x\phi)(y) >$, $x \in (0,\infty)$ y $\phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$.

De la Proposición 4.8 se deduce que $F(\phi) \in \mathcal{C}_\mu$ y que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\alpha_\mu} x^{-\mu-1/2}[F(\phi)](x) =< f, \phi >, \text{ para cada } \phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}.$$

Por otra parte, ya que $f \in \mathcal{H}'_{\mu,M}$, existen $C > 0$ y $r \in I\!N$ tales que

$$| < f, \phi > | \leq C \max_{0\leq m,k\leq r} \sup_{x\in(0,\infty)} e^{M(mx)} x^{-\mu-1/2} |S_\mu^k \phi(x)|,\ \phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}.$$

Luego, para cada $\phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$, de (5.3.b) [29] y del Teorema 4.4 se sigue

$$y^{-\mu-1/2}|(f\#\phi)(y)| \leq$$

$$\leq C \max_{0\leq m,k\leq r} \sup_{x\in(0,\infty)} e^{M(mx)}x^{-\mu-1/2}|h_\mu((yz)^{-\mu}J_\mu(yz)h_\mu(S_\mu^k\phi)(z))(x)| \leq$$

$$\leq Ce^{M(ly)},\ y \in (0,\infty),$$

para cierta $l \in I\!N$. Recurriendo ahora a la Proposición 4.10 se deduce que $F(\phi) \in \mathcal{H}^{\#}_{\mu,M}$ para cada $\phi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$.

Finalmente, procediendo como en la prueba de la Proposición 2.9, podemos mostrar que $F(\phi)\#\psi = F(\phi\#\psi)$, $\phi, \psi \in \mathcal{H}_{\mu,M}$.

Concluimos así que $F \in \mathcal{G}(\mathcal{H}_{\mu,M})$ y que $J(F) = f$.

Que J y J^{-1} son secuencialmente continuas puede ser probado de un modo similar a la propiedad correspondiente en la Proposición 4.3. □

Señalamos para terminar que los resultados obtenidos para $\mathcal{H}_{\mu,M}$ pueden conseguirse de un modo similar para los espacios $\mathcal{H}_\mu$ y $\mathcal{X}_\mu$. Concretamente los espacios $\mathcal{H}'_\mu$ y $\mathcal{X}'_\mu$ se identifican con los espacios de $\#$-operadores $\mathcal{G}(\mathcal{H}_\mu)$ y $\mathcal{G}(\mathcal{X}_\mu)$ sobre $\mathcal{H}_\mu$ y $\mathcal{X}_\mu$, respectivamente ([19]).

Bibliografía

[1] **N. Aguilera y E. Harboure**, *On the search for weighted norm inequalities for the Fourier transform*, Pacific J. Maths., 104 (1)(1983), 1-24.

[2] **G. Altenburg**, *Bessel-Transformationen in Räumen von Grundfunktionen über dem Intervall* $\Omega = (0, \infty)$ *und deren Dualräumen*, Math. Nachr., 108 (1982), 197-218.

[3] **J.J. Betancor**, *The Hankel-Schwartz transform for functions of compact support*, Rendiconti di Matematica, (VII) 7 (3-4) (1987), 399-409.

[4] **J.J. Betancor**, *A mixed Parseval's equation and a generalized Hankel transformation of distributions*, Canad. J. Math., 41 (2) (1989), 274-284.

[5] **J.J. Betancor**, *Characterizations of Hankel transformable generalized functions*, Internat. J. Math. & Math. Sci., 14 (2) (1991), 269-274.

[6] **J.J. Betancor y B.J. González**, *A convolution operation for a distributional Hankel transformation*, Studia Mathematica, 117 (1) (1995), 57-72.

[7] **J.J. Betancor e I. Marrero**, *Multipliers of Hankel transformable generalized functions*, Comment. Math. Univ. Carolinae, 33 (3) (1992), 389-401.

[8] **J.J. Betancor e I. Marrero**, *The Hankel convolution and the Zemanian spaces* β_μ *and* β'_μ, Math. Nachr., 160 (1993), 277-298.

[9] **J.J. Betancor e I. Marrero**, *Structure and convergence in certain spaces of distributions and the generalized Hankel convolution*, Math. Japonica, 38 (6) (1993), 1141-1155.

[10] **J.J. Betancor e I. Marrero**, *Some properties of Hankel convolution operators*, Canad. Math. Bull., 36 (4) (1993), 398-406.

[11] **J.J. Betancor e I. Marrero**, *Algebraic characterization of convolution and multiplication operators on Hankel-transformable function and distribution spaces*, Rocky Mountain J. Math., 25 (4) (1995), 1189-1204.

[12] **J.J. Betancor e I. Marrero**, *On the topology of Hankel multipliers and of Hankel convolution operators*, Rend. Circ. Mat. Palermo, II (XLIV) (1995), 469-478.

[13] **J.J. Betancor e I. Marrero**, *On the topology of the space of Hankel convolution operators*, J. Math. Anal. Appl., 201 (1996), 994-1001.

[14] **J.J. Betancor y L. Rodríguez-Mesa**, *Pointwise convergence and a new inversion theorem for Hankel transforms*, aceptado en Public. Math. Debrecen.

[15] **J.J. Betancor y L. Rodríguez-Mesa**, *Lipschitz-Hankel spaces and partial Hankel integrals*, aceptado en Integral Transforms and Special Functions.

[16] **J.J. Betancor y L. Rodríguez-Mesa**, *On the Besov-Hankel spaces*, aceptado en J. Math. Soc. Jpn. .

[17] **J.J. Betancor y L. Rodríguez-Mesa**, *Hankel convolution on distributions spaces with exponential growth*, Studia Mathematica, 121 (1) (1996), 35-52.

[18] **J.J. Betancor y L. Rodríguez-Mesa**, *On Hankel convolution equations in distributions spaces*, aceptado en Rocky Mountain J. Math. .

[19] **J.J. Betancor y L. Rodríguez-Mesa**, *On Hankel convolutors on certain Hankel transformable function spaces*, aceptado en Glasgow Math. J. .

[20] **J.J. Betancor y L. Rodríguez-Mesa**, *On Hankel convolutors on Zemanian Spaces*, International Conference Generalized Functions-Linear and Nonlinear problems, Novi Sad, 1996.

[21] **S. Bochner**, *Vorlesungen über Fouriersche integrale*, Chelsea, New York, 1948.

[22] **F.M. Cholewinski**, *A Hankel convolution complex inversion theory*, Mem. Amer. Math. Soc., 58 (1965).

[23] **C.P. Chen y C.C. Lin**, *Almost everywhere convergence of Fourier integrals*, Arch. Math., 64 (1995), 333-336.

[24] **L. Colzani, A. Crespi, G. Travaglini y M. Vignati**, *Equiconvergence theorems for Fourier-Bessel expansions with applications to the harmonic analysis of radial functions in euclidean and noneuclidean spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 338 (1) (1993), 43-55.

[25] **J. Diendonné y L. Schwartz**, *La dualité dans les espaces ($\mathcal{F}$) et ($\mathcal{LF}$)*, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 1 (1949), 61-101.

[26] **A. Durán**, *Gelfand-Shilov spaces for Hankel transform*, Indag. Math., 3 (1992), 137-151.

[27] **A. Durán**, *Laguerre expansions of Gelfand-Shilov spaces*, J. Approx. Theory, 74 (3) (1993), 280-300.

[28] **S.J.L. van Eijndhoven y J. de Graaf**, *Some results on Hankel invariant distribution spaces*, Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetensch., A 86 (1) (1983), 77-87.

[29] **S.J.L. van Eijndhoven y M.J. Kerkhof**, *The Hankel transformation and spaces of type W*, Reports on Appl. and Num. Analysis, 10, Dept. of Maths. and Comp. Sci., Eindhoven University of Technology, (1988).

[30] **A. Erdélyi**, *Tables of integral transforms*, II, McGraw-Hill, New York, 1953.

[31] **I.M. Gelfand y G.E. Shilov**, *Generalized functions*, Vol. 3, Academic Press, New York, 1967.

[32] **T.G. Genchev**, *A simple proof of the inversion formula for Fourier transform*, C.R. Acad. Bulg. Sci., 45 (5) (1992), 27-29.

[33] **D.V. Giang**, *Aproximation on real line by Fourier transform*, Acta Sci. Math. (Szeged), 58 (1993), 197-209.

[34] **D.V. Giang y F. Móricz**, *On the uniform and the absolute convergence of Dirichlet integrals of functions in Besov spaces*, Acta Sci. Math. (Szeged), 59 (1994), 257-265.

[35] **D.V. Giang y F. Móricz**, *A new characterization of Besov spaces on the real line*, J. Math. Anal. Appl., 189 (1995), 533-551.

[36] **J.M. González**, *Sobre el problema de Cauchy para ecuaciones en derivadas parciales que contienen alguno de los operadores tipo Bessel DP'_μ o S_μ*, Tesis Doctoral, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna, 1985.

[37] **J. Gosselin y K. Stempak**, *A weak-type estimate for Fourier- Bessel multipliers*, Proc. Amer. Math. Soc., 106 (3) (1989), 655-662.

[38] **J.L. Griffith**, *Hankel transforms of functions zero outside a finite interval*, J. Proc. Roy. Soc. New S. Wales, 86 (1995), 109-115.

[39] **D.T. Haimo**, *Integral equations associated with Hankel convolutions*, Trans. Amer. Math. Soc., 116 (1965), 330-375.

[40] **M. Hasumi**, *Note on the n- dimensional tempered ultradistributions*, Tôhoku Math. J., 13 (1961), 94-104.

[41] **C.S. Herz**, *On the mean inversion of Fourier and Hankel transforms*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 40 (1954), 996-999.

[42] **I.I. Hirschman, Jr.**, *Variation diminishing Hankel transforms*, J. Analyse Math., 8 (1960/61), 307-336.

[43] **L. Hormander**, *On the range of convolution operators*, Ann. of Math., 76 (2) (1962), 148-170.

[44] **Y. Kanjin**, *Convergence and divergence almost everywhere of spherical means for radial functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 103 (4) (1988), 1063-1069.

[45] **H. Komatsu**, *Ultradistributions*, I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec I A, 20 (1973), 25-105.

[46] **A. Kufner, O. John y S. Fučik**, *Function spaces*, Noordhoff International Publishing, Leyden, 1977.

[47] **E.L. Koh y A.H. Zemanian**, *The complex Hankel and I-transformations of generalized functions*, SIAM J. Appl. Math., 16 (5) (1968), 945-957.

[48] **W.L. Lee**, *On Schwartz's Hankel transformation of certain spaces of distributions*, SIAM J. Math. Anal., 6 (29) (1975), 109-115.

[49] **D.S. Lubinski y F. Móricz**, *Pointwise convergence of Fourier transforms*, Arch. Math., 61 (1993), 82-87.

[50] **W. Magnus, F. Oberhettinger y R.P. Soni**, *Formulas and theorems for mathematical physics*, Springer, Berlín, 1966.

[51] **I. Marrero** *La convolución generalizada y espacios de Hilbert para la transformación integral de Hankel*, Tesis Doctoral, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna, 1992.

[52] **I. Marrero y J.J. Betancor**, *Hankel convolution of generalized functions*, Rendiconti di Matematica, 15 (1995), 351-380.

[53] **P. Macaulay-Owen**, *Parseval's theorem for Hankel transforms*, Proc. London Math. Soc., 45 (1939), 458-474.

[54] **J.M.R. Méndez**, *A mixed Parseval equation and the generalized Hankel transformation*, Proc. Amer. Math. Soc., 102 (1988), 619-624.

[55] **J.M.R. Méndez**, *On the Bessel transforms of arbitrary order*, Math. Nachr., 136 (1988), 233-239.

[56] **J.M.R. Méndez y A.M. Sánchez**, *On the Schwartz's Hankel transformation of distributions*, Analysis 13 (1993), 1-18.

[57] **P. Mikusinski y M.D. Taylor**, *Toward a unified theory of generalized functions: convergence*, Math. Nachr., 161 (1993), 27-43.

[58] **D.H. Pahk**, *On the convolution equations in the space of distributions of L^p-growth*, Proc. Amer. Math. Soc., 94 (1) (1985), 81-86.

[59] **D.H. Pahk**, *Hypoelliptic convolution equations in the space $\mathcal{K}'_e$*, Trans. Amer. Math. Soc., 298 (2) (1986), 485-495.

[60] **D.H. Pahk y B.K. Sohn**, *Relation between solvability and a regularity of convolution operators in $\mathcal{K}'_p$, $p > 1$*, J. Math. Anal. Appl., 185 (1) (1994), 207-214.

[61] **R.S. Pathak**, *On Hankel transformable spaces and a Cauchy problem*, Canad. J. Math., 37 (1) (1985), 84-106.

[62] **A. Pietsch**, *Nuclear locally convex spaces*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1972.

[63] **A. M. Sánchez**, *La transformación integral generalizada de Hankel-Schwartz*, Ph. D. Thesis, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna, 1987.

[64] **I.J. Schoenberg**, *Metric spaces and completely monotone functions*, Ann. Math., 39 (1938), 811-841.

[65] **A.L. Schwartz**, *An inversion theorem for Hankel transform*, Proc. Amer. Math. Soc., 22 (1969), 713-719.

[66] **A.L. Schwartz**, *The smoothness of Hankel transforms*, J. Math. Anal. Appl., 28 (3) (1969), 500-507.

[67] **A.L. Schwartz**, *The structure of the algebra of Hankel transforms and the algebra of Hankel-Stieltjes transforms*, Canad. J. Math., XXIII (2) (1971), 236-246.

[68] **L. Schwartz**, *Théorie des Distributions*, Hermann, París, 1978.

[69] **J. de Sousa-Pinto**, *A generalized Hankel convolution*, SIAM J. Appl. Math., 16 (1985), 1335-1346.

[70] **K. Stempak**, *The Littlewood-Paley theory for the Fourier-Bessel transform*, University of Wroclaw, Preprint n° 45, 1985.

[71] **K. Stempak**, *La théorie de Littlewood-Paley pour la transformation de Fourier-Bessel*, C.R. Acad. Sci. Paris, 303 (serie I, n° 1) (1986), 15-19.

[72] **R.A. Struble**, *An algebraic view of distributions and operators*, Studia Math., 37 (1971), 103-109.

[73] **S. Sznajder y Z. Zielezny**, *Solvability of convolution equations in $\mathcal{K}_1'$*, Proc. Amer. Math. Soc., 57 (1976), 103-106.

[74] **S. Sznajder y Z. Zielezny**, *Solvability of convolution equations in $\mathcal{K}'_p$*, Pacific Journal of Math., 68 (2) (1976), 539-544.

[75] **E.C. Titchmarsh**, *An introduction to the Theory of Fourier integrals*, Oxford University Press, Oxford, 1948.

[76] **F. Treves**, *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press, New York, 1967.

[77] **G.N. Watson**, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, Cambrigde, 1959.

[78] **K. Yoshinaga**, *On spaces of distributions of exponential growth*, Bull. Kyushu Inst. Tech. (M. & N.S.), 6 (1960), 1-16.

[79] **A.H. Zemanian**, *A distributional Hankel transformation*, SIAM J. Appl. Math., 14 (1966), 561-576.

[80] **A.H. Zemanian**, *The Hankel transformation of certain distributions of rapid growth*, SIAM J. Appl. Math., 14 (1966), 678-690.

[81] **A.H. Zemanian**, *Generalized integral transformations*, Interscience Publishers, New York, 1968.

[82] **Z. Zielezny**, *Hypoelliptic and entire elliptic convolution equations in subspaces of the space of distributions (I)*, Studia Mathematica, XXVIII (1967), 317-332.

[83] **Z. Zielezny**, *Hypoelliptic and entire elliptic convolution equations in subspaces of the space of distributions (II)*, Studia Mathematica, XXXII (1969), 47-59.

Fe de erratas

- En la página 26, donde dice "y teniendo en cuenta que ${}^{2}_{\mu}$ es la identidad sobre $\mathcal{H}$" debería decir "y teniendo en cuenta que ${}^{2}_{\mu}$ es la identidad sobre H".

- En la página 36, cuando se define el espacio $\Lambda H^{\mu}_{p,\alpha}$, donde aparece $w_p(\phi) = ||\tau_x\phi - \phi||_p$ debería decir $w_p(\phi)(x) = ||\tau_x\phi - \phi||_{p,\mu}$.

- En la página 100, donde dice "Observamos inicialmente que si $f \in \mathcal{X}_{\mu,\#}$ entonces f define un elemento de $\mathcal{X}'_{\mu,\#}$", debería decir "Observamos inicialmente que si $f \in \mathcal{X}_{\mu,\#}$ entonces f define un elemento de $\mathcal{X}'_{\mu}$."

- En la página 105, cuando introducimos el espacio C_μ, en lugar de $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-\mu-1/2}f(x)$ debe aparecer $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-\mu-1/2}f(x)$.