

**APLICACIÓN DEL MÉTODO DE MONTE CARLO EN LA SIMULACIÓN  
NUMÉRICA DE RESPUESTAS IMPULSIVAS EN SALAS.  
VALIDACIÓN Y DETERMINACIÓN DEL ERROR  
DE LA TÉCNICA DEL TRAZADO DE RAYOS**

**Tesis Doctoral presentada por Javier Giner Rubio**

**Directores: Dr. Carmelo Militello Militello y Dr. Amando García  
Rodríguez**

**UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA, OCTUBRE 1997**



**UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA**  
Departamento de Física Fundamental y Experimental  
#####-

**Carmelo Militello Militello**, Titular de Universidad del Departamento de Física Fundamental y Experimental de la UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA y **Amando García Rodríguez**, Catedrático de Universidad del Departamento de Física Aplicada de la UNIVERSITAT DE VALÈNCIA,

CERTIFICAN: Que la presente memoria

*"Aplicación del Método de Monte Carlo en la Simulación Numérica de Respuestas Impulsivas en Salas. Validación y Determinación del Error de la Técnica del Trazado de Rayos."* ha sido realizada en el Departamento de Física Fundamental y Experimental de la Universidad de La Laguna, por el licenciado en Ciencias Físicas *Javier Giner Rubio* y constituye su Tesis para optar al Grado de Doctor en Ciencias Físicas.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, autorizamos la presentación de la referida Tesis Doctoral ante la Comisión de Doctorado de la Universidad de La Laguna, firmando el presente certificado en La Laguna, a veinte de Octubre de mil novecientos noventa y siete.

Carmelo Militello Militello

Amando García Rodríguez

## **AGRADECIMIENTOS**

Quisiera expresar mi profundo agradecimiento a todas las personas que con su ayuda han hecho posible la realización de este trabajo, muy especialmente a mis Directores Dr. Carmelo Militello Militello y Dr. Amando García Rodríguez por la ilusión, constancia y conocimientos que me han transmitido.

También quisiera manifestar mi más sincera gratitud y afecto a todos los miembros del Grupo de Acústica y Vibraciones Estructurales del Departamento de Física Fundamental y Experimental y a los compañeros del Departamento de Economía Financiera y Contabilidad por el constante apoyo y ánimos recibidos.

Mención especial quiero reservar a la motivación y estímulo intelectual que han significado los comentarios e ideas del profesor y compañero Dr. Francisco Pérez Calatayud.

**A Miriam y a Mar**

# ÍNDICE

	<b>Pág.</b>
<b>INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS</b>	
INTRODUCCIÓN .....	vi
OBJETIVOS Y METODOLOGÍA .....	vi
ESTRUCTURA DEL TRABAJO .....	viii
<b>CAPÍTULO 1: ACÚSTICA DE SALAS</b>	
1.1. ACÚSTICA DE SALAS	
1.1.1. Apuntes Históricos .....	2
1.1.2. Acústica Física, Psicoacústica y Estética .....	4
1.1.3. Modelos Teóricos de la Acústica .....	5
1.2. ACÚSTICA ONDULATORIA	
1.2.1. Ecuación de Ondas .....	7
1.2.2. Ondas Planas .....	9
1.2.3. Ondas Esféricas .....	11
1.2.4. El Campo Sonoro en una Sala Cerrada .....	12
1.3. ACÚSTICA GEOMÉTRICA	
1.3.1. Partículas Sonoras .....	14
1.3.2. Distribución Direccional Temporal de la Intensidad Sonora .....	15
1.4. ACÚSTICA ESTADÍSTICA .....	17
1.5. PARÁMETROS OBJETIVOS DE ACÚSTICA DE SALAS .....	19
<b>CAPÍTULO 2: MODELOS DE SIMULACIÓN</b>	
2.1. MODELOS DE DOS DIMENSIONES	
2.1.1. Modelos de Ondas Superficiales de Agua .....	25
2.1.2. Modelos de Fotografías de Pulsos Sonoros .....	26
2.2. MODELOS DE TRES DIMENSIONES	
2.2.1. Modelos Ópticos .....	27
2.2.2. Modelos a Escala .....	28
2.2.3. Modelos Computacionales .....	29
2.3. MÉTODO DE LAS FUENTES IMAGEN	
2.3.1. Introducción .....	30
2.3.2. Árbol de Imágenes .....	31
2.3.3. Coste Computacional .....	33
2.3.4. Precisión del Método de las Imágenes .....	35

2.4. MÉTODO DEL TRAZADO DE RAYOS	
2.4.1. Introducción .....	37
2.4.2. Trazado de Rayos Puro .....	38
2.4.3. Modelos Híbridos .....	39
2.4.4. Trazado de Haces Divergentes .....	40
2.4.5. Correspondencia Continuo-Discreto .....	42
2.4.6. Aspectos Energéticos .....	44
2.4.7. Coste Computacional .....	46
<b>CAPÍTULO 3: IMPLEMENTACIÓN Y VALIDACIÓN DEL MÉTODO DEL TRAZADO DE RAYOS</b>	
3.1. DESARROLLO DE UN MODELO DE TRAZADO DE RAYOS PARA LA SIMULACIÓN ACÚSTICA DE SALAS	
3.1.1. Características del Programa .....	50
3.1.2. Algoritmo Básico .....	52
3.2. DEFINICIÓN DE LA GEOMETRÍA	
3.2.1. Nodos y Conectividades .....	55
3.2.2. Funciones de Forma .....	57
3.3. PROPIEDADES FÍSICAS DE LAS SUPERFICIES	
3.3.1. Absorción .....	60
3.3.2. Difusión .....	61
3.3.3. Especificaciones del Usuario .....	62
3.4. REFLEXIONES ESPECULARES Y DIFUSAS	
3.4.1. Intersección de los Rayos con las Superficies .....	63
3.4.2. Reflexiones Especulares .....	63
3.4.3. Reflexiones Difusas .....	64
3.4.3.1. Difusión Lambertiana .....	67
3.4.3.2. Difusión Isótropa .....	69
3.5. FUENTES SONORAS	
3.5.1. Fuentes Omnidireccionales .....	71
3.5.2. Fuentes Direccionales: Generación a través de Volúmenes de Probabilidad .....	74
3.6. RECEPTORES: SUPERFICIES Y MICRÓFONOS .....	75
3.7. CÁLCULO DE PARÁMETROS	
3.7.1. Parámetros Acústicos Globales .....	76
3.7.2. Parámetros Acústicos de Receptor .....	77

3.8. VALIDACIÓN DE LOS RESULTADOS: LA SALA RECTANGULAR	
3.8.1. Tiempo de Reverberación Medio. Absorción Homogénea .....	80
3.8.2. Tiempo de Reverberación Medio. Absorción No Homogénea .....	84
3.8.3. Parámetro Definición en un Receptor. Absorción Homogénea .....	87
3.9. RESUMEN Y CONCLUSIONES .....	88

## **CAPÍTULO 4. ERROR DEL MÉTODO DEL TRAZADO DE RAYOS EN LA DETERMINACIÓN DE LA RESPUESTA IMPULSIVA**

4.1. ERROR DE LA TÉCNICA DEL TRAZADO DE RAYOS	
4.1.1. Introducción .....	91
4.1.2. Naturaleza Estadística del Modelo .....	91
4.1.3. Antecedentes .....	93
4.1.4. Objetivos del Capítulo .....	94
4.2. EL MÉTODO DE MONTE CARLO	
4.2.1. Introducción .....	95
4.2.2. Fundamentación Teórica del Método de Monte Carlo .....	97
4.2.2.1. Estimador Media Muestral .....	99
4.2.2.2. Estimador Varianza Muestral .....	101
4.2.2.3. Distribución de la Media de una Variable Aleatoria .....	103
4.2.2.4. Convergencia del Método .....	105
4.2.2.5. Reducción de la Varianza .....	105
4.3. EL MÉTODO DE MONTE CARLO PARA EL CÁLCULO DE UNA FRACCIÓN DE ÁNGULO SÓLIDO .....	106
4.4. EL MÉTODO DE MONTE CARLO PARA EL CÁLCULO DE LA DISTRIBUCIÓN TEMPORAL DE LA ENERGÍA SONORA REFLEJADA	
4.4.1. Consideraciones Geométricas .....	109
4.4.2. Efecto de la Absorción en las Paredes .....	111
4.4.2.1. Sin Absorción en las Paredes .....	111
4.4.2.2. Con Absorción en las Paredes .....	112
4.5. ANÁLISIS DEL ERROR DE LA RESPUESTA IMPULSIVA	
4.5.1. Error Absoluto y Relativo .....	116
4.5.2. Comparación con otros Autores .....	117
4.6 SENSIBILIDAD DEL ERROR ESTADÍSTICO DE LA RESPUESTA IMPULSIVA FRENTE A DISTINTAS VARIABLES	
4.6.1. Error Relativo frente al Tiempo .....	123
4.6.2. Error Relativo frente al Radio del Receptor .....	127

4.6.3. Error Relativo frente al Coeficiente de Absorción Medio .....	128
4.6.4. Error Relativo frente al Tiempo de Integración .....	130
<b>4.7. RESUMEN Y CONCLUSIONES</b>	
4.7.1. Formulación Alternativa de la Teoría Expuesta .....	133
4.7.2. Crítica a Kullowski .....	135
4.7.3. Conclusiones .....	135
<b>CAPÍTULO 5. EL MÉTODO DE MONTE CARLO PARA EL CÁLCULO DEL ERROR EN LOS PARÁMETROS ACÚSTICOS OBJETIVOS</b>	
<b>5.1. EL MÉTODO DE MONTE CARLO PARA EL CÁLCULO DEL ERROR EN LOS PARÁMETROS ACÚSTICOS OBJETIVOS</b>	
5.1.1. Consideraciones Generales .....	139
5.1.2. Número de Vuelos .....	139
5.1.3. Potencia Reflejada .....	140
5.1.4. Varianza de la Intensidad en un Intervalo $\Delta T > \Delta t$ .....	141
5.1.5. Error en los Parámetros <i>SPL</i> y <i>D</i> .....	143
<b>5.2. VALIDACIÓN EXPERIMENTAL EN EL CÁLCULO DEL ERROR DE LOS PARÁMETROS OBJETIVOS</b> .....	144
<b>5.3. EL COEFICIENTE DE ABSORCIÓN MEDIO FRENTE AL ERROR EN LOS PARÁMETROS INTEGRALES</b> .....	148
<b>CAPÍTULO 6. ESTUDIO Y MODIFICACIÓN DE LAS CONDICIONES ACÚSTICAS DE LOS TERREROS DE LUCHA EN TENERIFE PARA SU UTILIZACIÓN EN EVENTOS CULTURALES</b>	
<b>6.1. CONDICIONES ACÚSTICAS DE LOS TERREROS DE LUCHA EN TENERIFE</b>	
6.1.1. Introducción .....	152
6.1.2. Medidas Realizadas .....	153
<b>6.2. MODELO DE SIMULACIÓN</b>	
6.2.1. Modelización .....	155
6.2.2. Comparación del Modelo con los Valores Experimentales .....	157
6.2.3. Simulación del Efecto del Público .....	158
<b>6.3. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE PROPUESTAS DE MEJORA: PANELES ABSORBENTES Y ELECTROACÚSTICA</b>	
6.3.1. Objetivos del Diseño .....	159
6.3.2. Solución Propuesta: Paneles Absorbentes en el Techo .....	161
6.3.3. Configuración Espectáculo sin Altavoces .....	161
6.3.4. Configuración Espectáculo con Altavoces Frontales .....	163



6.3.5. Configuración Lucha con Altavoces Radiales .....	165
6.3.6. Conclusiones .....	167
<b>CAPÍTULO 7. EL AUDITORIO DE TENERIFE.</b>	
<b>7.1. EL AUDITORIO DE TENERIFE</b>	
7.1.1. Objetivos del Capítulo .....	170
7.1.2. Diseño del Auditorio de Tenerife .....	170
<b>7.2. MODELO DE SIMULACIÓN</b>	
7.2.1. Modelización y Geometría .....	172
7.2.2. Coeficientes de Absorción .....	172
7.2.3. Coeficientes de Difusión .....	173
<b>7.3. ANÁLISIS DE ERRORES</b>	
7.3.1. Error en las Respuestas Impulsivas .....	174
7.3.2. Error en los Parámetros Energéticos .....	176
7.3.3. Error y Varianza de la Distribución de la Intensidad Sonora .....	177
<b>7.4. INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS</b>	
7.4.1. Tiempos de Reverberación .....	179
7.4.2. Claridad Musical .....	180
7.4.3. Factor de Energía Lateral .....	181
7.4.4. Tiempo Central .....	181
<b>7.5. DISTRIBUCIÓN ESPACIAL DE LA ENERGÍA EN UN PLANO VERTICAL .....</b>	
	183
<b>CONCLUSIONES .....</b>	187
<b>BIBLIOGRAFIA CONSULTADA .....</b>	196

# **Aplicación del Método de Monte Carlo en la Simulación Numérica de Respuestas Impulsivas en Salas. Validación y Determinación del Error de la Técnica del Trazado de Rayos**

## **INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS.**

### **Introducción.**

En la actualidad, el diseño de un auditorio o sala de conciertos representa un desafío a la imaginación del arquitecto. La búsqueda de nuevas formas y geometrías en aras de la originalidad suponen un compromiso desde el punto de vista acústico, pues al apartarnos de las formas tradicionales, la predicción del comportamiento de una sala se transforma en un complejo trabajo de investigación.

Con la revolución del computador digital se han desarrollado programas que permiten obtener una primera aproximación del comportamiento acústico de la sala. El resultado de estos programas se traduce en la presentación de ecogramas en una serie de receptores, así como de diferentes parámetros acústicos objetivos, ambos necesarios para la evaluación del recinto. Esta información da una buena idea del comportamiento de la sala aunque, inevitablemente, está ligada a las hipótesis y simplificaciones que se encuentran en la base del modelo de simulación utilizado.

En esta memoria de tesis doctoral pretendemos profundizar en algunos aspectos concernientes a la simulación por ordenador de la acústica de salas. En especial, vamos a centrar nuestra atención en el método computacional conocido como "Método del Trazado de Rayos" (*Ray Tracing Method*).

Este método tiene la ventaja de que presenta un coste computacional menor que el resto de modelos de simulación, lo que permite la obtención de la respuesta impulsional sin estrictos límites en la duración de la misma. Sin embargo, tiene la desventaja de que los resultados que ofrece no son del todo exactos sino que tienen asociado un error inevitable debido a la discretización del frente de ondas implícita.

### **Objetivos y Metodología**

El principal objetivo de esta tesis es determinar la validez y el campo de aplicación del método del trazado de rayos. Una vez establecidas las hipótesis del modelo, el estudio ha de incidir especialmente en el cálculo del error del método debido al número finito de rayos. Para ello deberá ponerse de relieve el modelo teórico de naturaleza estadística que se encuentra en la base del método. Los resultados que se obtengan serán validados y comparados con los de

otros autores encontrándose, sorprendentemente, que la calidad teórica y experimental de nuestras investigaciones supera las de otros trabajos actualmente vigentes en esta disciplina científica.

El estudio realizado se ha centrado en responder a las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son los modelos teóricos utilizados en Acústica de Salas?
- ¿Qué técnicas existen hoy día para la simulación y obtención de respuestas impulsivas y parámetros objetivos?
- ¿Cuáles son las ventajas y desventajas del método del trazado de rayos?
- ¿Cuáles son las hipótesis del método del trazado de rayos?
- ¿En qué casos es aplicable el método?
- ¿Existe un límite temporal a partir del cual el método deja de ser válido?
- ¿Cuál es el error debido al número finito de rayos y cómo se transmite al cálculo de la respuesta impulsiva y de los parámetros objetivos?

Para ello, el desarrollo de esta investigación se ha centrado en los siguientes pasos:

- recopilación de información y conocimiento de los antecedentes del problema.
- establecimiento de las hipótesis del modelo.
- implementación y desarrollo de las herramientas computacionales necesarias.
- validación del modelo en diferentes problemas.
- análisis del error estadístico del método de trazado de rayos.
- estudio de la sensibilidad del error frente a diferentes configuraciones iniciales.
- aplicación y estudio sobre distintas salas.

Es muy conveniente remarcar en qué campo de los métodos computacionales nos vamos a mover y cuál va a ser la metodología a seguir en nuestro trabajo: se trata de un desarrollo de la acústica geométrica a través de un modelo de rayos con difusión en las superficies, en el rango de longitudes de onda menores que las dimensiones típicas de las superficies de la sala y para campos sonoros incoherentes.

## Estructura del Trabajo

Esta memoria de tesis doctoral queda estructurada en 7 capítulos que, brevemente, podemos agrupar en 3 partes bien diferenciadas:

1. Una primera parte que incluye los tres primeros capítulos, el primero y el segundo que son de tipo introductorio, y el tercero que reúne el trabajo de implementación y validación del programa de simulación desarrollado.
2. Una segunda parte con los capítulos cuarto y quinto, en los que presentamos las bases teóricas del método del trazado de rayos como experimento de Monte Carlo y en los que exponemos el trabajo original de la obtención de la expresión de la varianza de la distribución direccional dependiente del tiempo de la intensidad sonora y su relación con el error de la respuesta impulsiva y los parámetros objetivos.
3. Una tercera parte compuesta por los capítulos sexto y séptimo, en los que aplicamos el programa de simulación a dos recintos de características muy diferentes: el "Terrero de Santa Úrsula" y el "Auditorio de Tenerife".

Después de una breve introducción histórica, en el Capítulo 1 hacemos un pequeño resumen de los principales modelos teóricos utilizados en Acústica de Salas, así como una descripción de algunos de los principales parámetros objetivos.

En el Capítulo 2, dada la importancia que tienen los modelos de simulación, hacemos un viaje desde los modelos de ondas superficiales en agua, hasta los modelos a escala, pasando por los modelos ópticos y computacionales. En este contexto se encuentran los dos principales métodos de simulación en Acústica Geométrica: el método de las fuentes imagen y el método del trazado de rayos. En ambos nos detendremos y evaluaremos sus características, señalando ventajas y desventajas de uno y de otro.

En el Capítulo 3 introduciremos los principales aspectos computacionales que enmarcan el desarrollo del programa de simulación utilizado en este trabajo. Cómo se modeliza la geometría, propiedades de absorción y difusión de los materiales, fuentes sonoras, receptores y cálculo de parámetros, serán algunos de los aspectos que trataremos. Por último, y utilizando como referencia el modelo teórico de la Acústica Geométrica, validaremos el programa frente a algunos problemas de solución conocida.

En el Capítulo 4 presentaremos lo que, en nuestra opinión, es el principal resultado de esta investigación: caracterizar el error del método del trazado de rayos a través de la obtención de la varianza de la distribución direccional dependiente del tiempo de la intensidad sonora. El

método de Monte Carlo y el esquema geométrico de "espacio de receptores imagen" serán las armas necesarias para llevar a cabo este objetivo.

En el Capítulo 5 aplicaremos esta teoría a la obtención de una expresión del error del método en el cálculo de parámetros objetivos. Esta parte, de gran utilidad en cualquier simulación, será validada convenientemente con datos experimentales, lo que reforzará la confianza de nuestros resultados.

Como primera aplicación práctica del programa de simulación (aunque todavía en una versión antigua), en el Capítulo 6 presentaremos el trabajo de investigación llevado a cabo para la determinación de las condiciones acústicas de los terreros de lucha en Tenerife, en especial del "Terrero de Lucha de Santa Úrsula". A través de distintas simulaciones numéricas, se propondrán diferentes propuestas de mejora concretadas especialmente en la introducción de paneles absorbentes y de electroacústica.

Por último, en el Capítulo 7 estudiaremos las características acústicas del futuro "Auditorio de Tenerife". Los resultados, acompañados de un conveniente análisis de errores, nos mostrarán la distribución espacial de los principales parámetros objetivos en la sala.

# **CAPÍTULO 1**

## **Acústica de Salas**

## 1.1. ACÚSTICA DE SALAS

### 1.1.1. Apuntes Históricos

Desde muy antiguo el hombre se ha servido de señales acústicas para comunicarse con sus semejantes y ha explotado empíricamente las propiedades acústicas de ciertos lugares para mejorar la eficacia de sus mensajes sonoros.

Aunque ya los egipcios usaban los patios de sus templos para que una gran multitud viera y oyera ceremonias religiosas (Llinares *et al.*, 1991), los Teatros y Auditorios propiamente dichos, nacieron con el Anfiteatro Griego.

En la disposición típica del Anfiteatro Griego los actores se situaban en un área central plana y el público en un área semicircular o semielíptica en pendiente con todas las localidades orientadas hacia el escenario (p.e. el "Anfiteatro Epidauró"). Con esta forma, se pretendía que se pudiera acomodar a una gran audiencia, tan cerca del escenario como fuera posible, y obtener así una distribución óptima del sonido directo y una máxima inteligibilidad del habla. El Teatro Griego proporcionaba muy poco sonido reflejado, sólo el proveniente del pavimento de piedra del área central y el reflejado por el edificio posterior a este área (Jordan, 1980).

El Anfiteatro Romano (p.e. el "Herodes Atticus" en Atenas) se desarrollaba en una rampa de mayor pendiente y con un edificio posterior al escenario capaz de proporcionar importantes reflexiones. En esta etapa, ya se empezaba a dar importancia a las reflexiones laterales del recinto. Éstas llegaban con pequeños tiempos de retraso respecto al sonido directo, lo cual servía para reforzarlo y evitar mermas en la inteligibilidad de la palabra. Las reflexiones laterales y las provenientes del edificio posterior daban una cierta impresión espacial. Se puede decir que las inquietudes acústicas no estaban ausentes en los proyectos arquitectónicos de la época y que la disposición de los diversos elementos parecía responder a reglas acústicas precisas.

Hubo de pasar más de un milenio para llegar al concepto más desarrollado de Teatro de la Italia Renacentista ("Teatro Olympico" en Vicenza). En el Renacimiento, se dio el paso del teatro al aire libre, al teatro cerrado. La disposición del escenario y del público era todavía similar a la del Teatro Romano, pero al desarrollarse en un volumen cerrado el sonido sufría múltiples reflexiones hasta convertirse en difuso, con lo que aparecía el fenómeno de la reverberación que se unía al sonido directo y a las primeras reflexiones.

Los recintos teatrales siguieron evolucionando, y se crearon nuevas formas en planta, en las que la relación entre el largo y el ancho iba aumentando, abandonándose la forma semicircular o semielíptica. Este paulatino distanciamiento entre escenario y audiencia (p.e. el "Teatro Farnese" en Parma tiene forma de herradura) dio lugar a los primeros problemas acústicos.

Al mismo tiempo, también se fue marcando una mayor diferencia entre las áreas del escenario, unas ocupadas por los actores y otras ocupadas por los acompañantes musicales.

El nacimiento de la Ópera significó un aumento del número de acompañantes musicales, que gradualmente dio lugar a toda una completa Orquesta, situada en un área separada en frente del escenario y que, posteriormente, fue situada en una altura distinta del resto de la sala, llegando a utilizarse lo que hoy día conocemos como el "pozo de orquesta". Magníficos ejemplos de teatros diseñados para la ópera son el "Metropolitan Opera of New York", o el "Teatro Colón" de Buenos Aires (Jordan, 1980). El marcado contraste acústico entre el espacio escénico y el pozo de orquesta, es decir, un gran volumen con decorados, cortinas e innumerables elementos frente a una estrecha franja de materiales reflectantes, fueron el origen de los principales problemas acústicos del Teatro Lírico respecto al balance entre cantantes y orquesta. Es en estos primeros Teatros Líricos, donde empiezan a surgir los palcos o anfiteatros, llegándose a recubrir totalmente las paredes laterales y de fondo por los mismos, haciéndose estas paredes altamente absorbentes, con menor peligro de reverberación excesiva y de ecos.

El concepto clásico de una Sala de Conciertos (*Concert Halls*) es mucho más joven que el de un Teatro. Al igual que la Orquesta Sinfónica se desarrolló a partir de los primeros pequeños grupos musicales del siglo XVIII, las primeras Salas de Conciertos se desarrollaron a partir de las pequeñas Salas de Recitales. Las primeras Salas de Recitales, de la misma manera que la mayoría de salas y recintos no musicales, tenían forma rectangular con techo horizontal y eran generalmente pequeñas. El prototipo de estas salas es el "Altes Gewandhaus" en Leipzig, construido en 1780. El tamaño de este tipo de salas fue creciendo manteniéndose su forma rectangular y su techo horizontal, aunque surgieron anfiteatros o galerías de poca profundidad que corrían paralelos a las paredes laterales y de fondo, aumentando la capacidad de las mismas sin alejarse demasiado de la orquesta. La altura del techo también aumentó para dar cabida a los anfiteatros. Algunos ejemplos de salas de conciertos del siglo XIX de calificación acústica excelente son el "Musikvereinsaal" en Viena (1870) el "St. Andrews" en Glasgow (1877) y el "Symphony Hall" en Boston (1900) (Jordan, 1980).

Desde los Teatros Medievales hasta las Salas de Conciertos Clásicos, la experiencia acumulada entre distintas formas de salas iba dando lugar a una nueva ciencia aplicada, de forma que a mediados del siglo XIX surge lo que posiblemente fuera el primer paso en el inicio de esta ciencia, con la publicación por parte del arquitecto Lachez del tratado "*Acoustique et Optique des Salles de Reunion*", en el que se describen las bases geométricas (analogías ópticas) que constituían la referencia obligada para el diseño de las salas de audición en esa época (Llinares *et al.*, 1991).



A finales del siglo pasado, Lord Rayleigh (Rayleigh, 1894), eleva esta parte de la Acústica a la categoría de ciencia aplicada, al introducir el método ondulatorio en el estudio acústico de salas. Este autor estudió los fenómenos de interferencias y fundamentalmente los de resonancias, estableciendo una base conceptual que serviría de punto de partida para el desarrollo posterior de esta ciencia.

La Acústica de Salas como ciencia moderna llega con la teoría energética de Sabine que explica el comportamiento de la energía acústica en un recinto cerrado y cómo su descenso, después de cesar la emisión de la fuente, es aproximadamente exponencial. Sabine fue asesor en el diseño del "Symphony Hall" de Boston (Recuero, 1983), considerada aún hoy en día como una de las salas de mejor acústica del mundo. A partir de sus investigaciones teóricas se crea una tradición que dura casi dos generaciones y que sintetiza toda la acústica de salas en un único parámetro, el tiempo de reverberación.

Con el interés creciente en experimentar con nuevas formas y materiales, se llega gradualmente a la conclusión de que el tiempo de reverberación no es el criterio universal que la teoría de Sabine había imaginado, y que sobre todo en salas grandes, el oyente evalúa la acústica de acuerdo con otros muchos criterios.

A lo largo del siglo XX, las investigaciones en Acústica de Salas han intentado llevar luz a diversas cuestiones de interés. La necesidad de dotar de varios usos a las salas modernas (teatro, conciertos, conferencias, cine, etc.) algunas veces contradictorios, ha dado lugar a un interés mucho mayor sobre los entresijos de esta disciplina.

### **1.1.2. Acústica Física, Psicoacústica y Estética**

En palabras del profesor L.I. Makrinenko (Makrinenko, 1994), "el principal objetivo de la Acústica Arquitectónica es poder conocer y predecir la evolución y características del campo sonoro en una sala con el fin de garantizar una buena acústica".

En esta sencilla declaración de intenciones cabe destacar tres aspectos diferentes y fundamentales en el estudio de la acústica: por un lado, se hace referencia a un conocimiento físico del problema, pero, por otro lado, con el término "buena acústica", se hace referencia al fenómeno de cómo el oyente percibe el sonido, e incluso a la evaluación subjetiva que de ese mismo sonido pueda hacer.

Este triple carácter de la acústica arquitectónica queda perfectamente delimitado por el profesor Schroeder (Ando, 1985), según el cual en el fenómeno acústico hay que distinguir tres elementos diferenciados:

- a) por un lado, el aspecto físico del problema: dada una sala con una forma y materiales en las paredes conocidos, *¿cómo viajarán las ondas sonoras en ella?*. En este sentido, veremos más tarde los distintos modelos teóricos que nos permiten abordar dicho problema aunque debemos señalar que todavía existen muchas cuestiones abiertas sobre este tema, y que incluso la medición de algunos parámetros físicos tan necesarios como la impedancia de las superficies presenta serios problemas.
- b) por otro lado, la parte psicoacústica del problema: dado un campo sonoro conocido, *¿qué oiremos?*. Desafortunadamente, todavía existen mayores dudas en este campo. No está completamente establecida una correlación entre categorías subjetivas y parámetros físicos medibles (por ejemplo, sensación de impresión espacial frente al parámetro *factor de energía lateral*, claridad en la señal frente al parámetro *definición*, etc.). Todo esto sin entrar en consideraciones sobre las preferencias del oyente.
- c) por último, el problema de la estética: dado un campo sonoro perfectamente conocido, *¿qué cualidades acústicas son preferidas por los oyentes?*. En función de la actividad que se desarrolle, por ejemplo una conferencia, un concierto barroco o una ópera, habrá que conocer cuáles son los *valores óptimos* o preferidos de los parámetros acústicos de la sala en la que se desarrolla la audición. Esta pregunta sólo tiene sentido desde el momento en que se tiene el conocimiento físico y psicoacústico del problema.

### 1.1.3. Modelos Teóricos de la Acústica

En este trabajo vamos a centrar nuestra atención exclusivamente sobre el primero de los aspectos del problema, es decir, el aspecto físico. En este sentido, cabe recordar que existen tres modelos teóricos fundamentales que describen el proceso del sonido en auditorios y salas de concierto, y que cada uno de ellos tiene sus propias ventajas y sus propias desventajas o limitaciones.

El primero de ellos, físicamente el más preciso, es la *Acústica Ondulatoria* o teoría de ondas de la acústica de auditorios. Según esta teoría, el volumen de aire del espacio de una sala es un sistema vibrante lineal de parámetros distribuidos (Morse, 1948). El desarrollo de la teoría de ondas ha llevado a una mejor comprensión de la influencias del espacio y del contorno de una sala cuando una fuente irradia una señal dentro de ella. Sin embargo, la solución analítica de la ecuación de ondas sólo es posible para salas de geometría muy sencilla y para condiciones de contorno ideales. En las salas reales, de forma más o menos complicada, aparecen dificultades prácticamente insuperables, ya que sería necesario tener en cuenta todos los detalles de la reflexión, absorción, refracción y difusión del sonido en todos los puntos de las superficies de dichas salas, así como todas las propiedades físicas de la fuente sonora.

Esto requeriría un nivel de descripción elevadísimo que, aunque fuese realizable, significaría un esfuerzo computacional tal que sobrepasaría las posibilidades de los ordenadores actuales.

El segundo modelo es la teoría de la *Acústica Geométrica*, que, como en la óptica geométrica, puede aplicarse cuando consideramos longitudes de onda pequeñas, es decir, frecuencias altas. Esta hipótesis puede aceptarse cuando las dimensiones de la sala y sus paredes son grandes comparadas con la longitud de onda. Normalmente, esta condición se da en acústica de salas (Kuttruff, 1979). Por ejemplo, para una frecuencia media de 1000 Hz, a la que corresponde una longitud de onda de 34 cm, las dimensiones lineales de las paredes y del techo, así como las distancias cubiertas por la onda sonora, son mayores que la longitud de onda en varios órdenes de magnitud. Los métodos de la acústica geométrica se utilizaron inicialmente para estudiar la distribución de las primeras reflexiones del sonido desde las paredes de la sala mediante técnicas para dibujar los frentes de onda tras sus reflexiones en todo tipo de superficies. En la actualidad, los métodos de la acústica geométrica conocidos como *método de las fuentes imagen* y *método del trazado de rayos*, han sido implementados en ordenador, lo que ha hecho posible la simulación y estudio de diversos parámetros acústicos de interés así como la obtención de la respuesta impulsiva de la sala.

El tercer modelo es la *Teoría Estadística*, que está basada en la suposición de la existencia de un campo sonoro difuso en la sala. Las principales magnitudes estadísticas utilizadas en esta teoría son el recorrido libre medio, así como el coeficiente de absorción medio. Las ecuaciones clásicas de Sabine, Eyring y Millington han pasado a ser parte fundamental en el estudio y conocimiento de la acústica de salas.

Sin embargo, esta última teoría está poco correlacionada con la forma de la sala, porque no puede tener en cuenta detalles importantes de la geometría (balcones, etc.), ni tampoco permite la caracterización del campo sonoro en un punto dado de la sala.

## **1.2. ACÚSTICA ONDULATORIA**

### **1.2.1. Ecuación de Ondas**

A modo de visión general, vamos a ver cuáles son las relaciones que gobiernan las oscilaciones de presión que se producen en un fluido después de una perturbación dada.

En todo punto de un fluido compresible, una *onda sonora* (movimiento oscilatorio de pequeña amplitud), produce alternativamente compresiones y expansiones entre las partículas que lo componen.

Para comprender lo que sucede en el fluido al paso de una onda sonora, es muy importante tener en cuenta algunas de las relaciones básicas de fluidos y, en especial de los gases. La primera de ellas es la que se conoce como *ecuación de continuidad* o de conservación de la masa:

$$\mathbf{r}_o \operatorname{div} \mathbf{v} = - \frac{\mathcal{I} \mathbf{r}}{\mathcal{I} t} \quad (1.1.)$$

donde  $\mathbf{v}$  es el vector de velocidad de las partículas del fluido,  $t$  el tiempo,  $\mathbf{r}_o$  el valor estático de la densidad del gas y  $\mathbf{r}$  el valor dependiente del tiempo de la densidad del gas. Esta ecuación relaciona la variación temporal de la densidad del gas en un punto con la variación espacial de la velocidad de las partículas.

Otra relación importante es la *ecuación de Euler* o ecuación de conservación del momento, expresada por la relación :

$$\operatorname{grad} p = -\mathbf{r}_o \frac{\mathcal{I} \mathbf{v}}{\mathcal{I} t} \quad (1.2.)$$

donde  $p$  es la presión sonora que excede la presión estática  $p_o$  (sobrepresión o depresión).

Las dos ecuaciones anteriores (1.1.) y (1.2.) son ecuaciones linealizadas del movimiento, y en ellas se está asumiendo que los cambios de las magnitudes  $p$  y  $\mathbf{r}$  son pequeños frente a los valores estáticos  $p_o$  y  $\mathbf{r}_o$ , y que el valor absoluto de la velocidad de las partículas del fluido en la onda  $\mathbf{v}$  es mucho más pequeño que el valor de la velocidad del sonido  $c$  (Landau y Lifshitz, 1991).

Cuando se trata de un gas ideal, un incremento relativo de la presión se corresponde linealmente con un incremento relativo de la densidad. Así, el paso de una onda sonora en un fluido ideal es un proceso *adiabático*, y en consecuencia se cumple la relación:

$$\frac{p}{p_o} = \mathbf{k} \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{r}_o} \quad (1.3.)$$

donde  $\mathbf{k}$  es el exponente adiabático (para el aire  $\mathbf{k} = 1.4$ ).

La velocidad de las partículas  $\mathbf{v}$  y la densidad del fluido  $\mathbf{r}$  pueden eliminarse de las ecuaciones anteriores, lo que nos lleva a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{\mathcal{I}^2 p}{\mathcal{I} x^2} + \frac{\mathcal{I}^2 p}{\mathcal{I} y^2} + \frac{\mathcal{I}^2 p}{\mathcal{I} z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\mathcal{I}^2 p}{\mathcal{I} t^2} \quad (1.4.)$$

donde:

$$c^2 = k \frac{P_o}{r_o} \quad (1.5.)$$

La ecuación diferencial (1.1.4.) gobierna la propagación de las ondas acústicas en cualquier estructura geométrica. Esta ecuación se conoce como la **ecuación de ondas** y puede utilizarse no sólo con la variable presión sonora, sino también con otras variables del campo acústico.

La solución de esta ecuación, una función  $p(\mathbf{r},t)$  dependiente de la posición  $\mathbf{r}$  y del tiempo  $t$ , dependerá de las condiciones de contorno e iniciales del problema.

Las condiciones de contorno, en general, pueden ser expresadas especificando los valores de presión  $p_{frontera}$  para todos los puntos  $\mathbf{r}_o$  que definen el contorno de la geometría y para todo  $t$ , es decir,  $p(\mathbf{r}_o,t) = p_{frontera}$ . En vez de esto, lo que normalmente se hace es expresar estas condiciones a través de una magnitud que es una propiedad de las superficies y que recibe el nombre de *impedancia de las superficies*:

$$Z = \left( \frac{p}{v_n} \right)_{superficies} \quad (1.6.)$$

donde  $v_n$  es la componente de la velocidad normal a la superficie o pared. En paredes no porosas excitadas por la vibración de un campo sonoro, esta componente de la velocidad es idéntica a la velocidad de vibración de la pared. La impedancia de la superficie, en general, es compleja y depende de la frecuencia. También depende del ángulo del sonido incidente, excepto en las superficies llamadas de *reacción local*.

Las condiciones iniciales del problema, en general, pueden expresarse como:

$$p(\mathbf{r},0) = f(\mathbf{r}) \quad \text{y} \quad \left. \frac{\partial p(\mathbf{r},t)}{\partial t} \right|_{t=0} = g(\mathbf{r}) \quad (1.7.)$$

donde  $f(\mathbf{r})$  define la distribución inicial de presiones en el espacio y  $g(\mathbf{r})$  la distribución inicial de fuentes que darán lugar al correspondiente estado transitorio o estacionario del sistema.

### 1.2.2. Ondas Planas

Las soluciones que podamos encontrar a la ecuación de ondas (1.1.4.) dependerán de las suposiciones que hagamos sobre las condiciones de contorno (1.1.6.) y las condiciones iniciales (1.7.).

Suponiendo que las cantidades acústicas dependen sólo del tiempo y de una dirección, que podemos elegir como el eje  $X$  de un sistema de coordenadas cartesianas, la ecuación de ondas se puede escribir en la forma siguiente:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (1.8.)$$

La solución general de esta ecuación diferencial es:

$$p(x,t) = F(ct - x) + G(ct + x) \quad (1.9.)$$

donde  $F$  y  $G$  son funciones arbitrarias que admiten segundas derivadas.

La función  $F(ct - x)$  representa una onda de presión viajando en la dirección  $x$ -positiva con una velocidad  $c$ , porque el valor de  $F$  permanece inalterado cuando un aumento del tiempo  $\Delta t$  se corresponde con un incremento de la coordenada  $\Delta x = c\Delta t$ .

Por la misma razón, la función  $G(ct + x)$  describe una onda de presión propagándose en la dirección del semieje  $x$ -negativa. De esta manera vemos que  $c$  representa la velocidad del sonido, que para el aire en condiciones normales es de  $340 \text{ m s}^{-1}$ .

Se pueden obtener soluciones de especial importancia especificando  $F$  y  $G$  como funciones exponenciales con argumentos imaginarios. Así, la componente de presión propagándose en la dirección de  $x$ -positiva es:

$$p(x,t) = p_A \exp[ik(ct - x)] = p_A \exp[i(\omega t - kx)] \quad (1.10.)$$

para cualquier valor arbitrario de las constantes reales  $p_A$  y  $k$  en función de las condiciones de contorno. Aquí hemos introducido la constante  $\omega$ :

$$\omega = kc \quad (1.11.)$$

que corresponde a la *frecuencia angular*, por lo que  $2\pi/\omega$  es el periodo temporal de la vibración. Valores iguales de presión sonora están separados por una distancia:

$$l = \frac{2\pi}{k} \quad (1.12.)$$

que es el periodo espacial de la onda llamado *longitud de onda*.

La ecuación (1.10.) describe una *onda plana* porque en cualquier plano perpendicular al eje  $x$  el exponente y, por tanto, la fase de vibración es constante.

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de Euler (1.2.), tenemos que la velocidad de las partículas sólo se produce en el eje  $\mathbf{X}$ , por lo que la única componente no nula del vector de velocidad  $\mathbf{v}$  es  $v_x$ , cuyo valor es:

$$v_x = \frac{p}{\rho_0 c} \quad (1.13.)$$

lo que significa que las ondas sonoras planas son *ondas longitudinales*, una conclusión que puede extenderse de hecho a cualquier solución de la ecuación de ondas (Brekhovskikh y Goncharov, 1982).

El cociente entre la presión sonora y la velocidad de las partículas del fluido recibe el nombre de *impedancia característica del medio* y en una onda plana es independiente de la frecuencia:

$$Z_c = \frac{p}{v} = \rho_0 c \quad (1.14.)$$

Obsérvese que esta magnitud es real, por lo que la presión y la velocidad de las partículas tienen la misma fase.

Para el aire a una temperatura de 20° y presión de 1 atmósfera, la densidad del aire es 1.21 kg/m<sup>3</sup> y la velocidad del sonido es 343 m/seg, lo que da para la impedancia característica normal del aire  $Z_c = 415 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$  (Kinsler, 1992).

### 1.2.2. Ondas Esféricas

Si suponemos que se produce una perturbación sonora puntual en el origen de un sistema de coordenadas, es razonable esperar una solución de la ecuación de ondas en la que todas las cantidades acústicas dependan sólo de la distancia al origen  $r$  y no dependan de la dirección. Reescribiendo la ecuación diferencial (1.1.4.) en coordenadas esféricas y suponiendo que  $p$  sólo depende de  $r$ , tenemos:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \quad (1.15.)$$

Si suponemos que no hay condiciones de contorno y que la dependencia temporal de la presión sigue una ley armónica entonces una solución de esta ecuación es:

$$p(r, t) = C \frac{\exp[i(\omega t - kr)]}{r} \quad (1.16.)$$

con una constante arbitraria  $C$ . Esta expresión representa una *onda esférica* ya que las superficies de fase constante son esferas concéntricas, cuyos centros coinciden con el origen del sistema de coordenadas  $r=0$ . Según el signo del exponente, la onda se propaga en la dirección de alejarse o acercarse al origen y su amplitud decrece con  $1/r$ .

Sustituyendo la ecuación (1.16.) en la ecuación de Euler (1.2.) obtenemos:

$$v_r = \frac{p}{\rho_0 c} \left( 1 + \frac{1}{ikr} \right) \quad (1.17.)$$

que es la componente radial de la velocidad de las partículas, y en la que podemos ver que el cociente entre presión sonora y velocidad de las partículas en una onda sonora esférica depende de la distancia  $r$  y de la frecuencia  $\omega=kc$ . Además es compleja, por lo que entre ambas cantidades habrá una diferencia de fase.

Para  $kr \gg 1$ , es decir, para distancias grandes comparadas con la longitud de onda, el cociente  $p/v_r$  tiende asintóticamente a  $\rho_0 c$ , la impedancia característica. En esta región, la onda esférica se comporta como una onda plana cuya amplitud decrece con  $1/r$  (Recuero, 1995), pudiéndose utilizar todas las relaciones válidas para ondas planas.

Por ejemplo, para una distancia de  $r=10$  m (dimensión de una sala típica), y una longitud de onda  $\lambda=3.4$  m (frecuencia 100 Hz), se encuentra que  $kr \approx 20$ ; para una longitud de onda  $\lambda=0.34$  m (frecuencia 1000 Hz) sería  $kr \approx 200$ . Por lo tanto, la aproximación anterior tendría sentido. Esta propiedad la utilizaremos en acústica geométrica.

### 1.2.3. El Campo Sonoro en una Sala Cerrada

Una manera de describir y calcular el campo sonoro en salas es encontrar y superponer soluciones de la ecuación de ondas, también llamadas *modos normales*, que satisfacen las condiciones de contorno del recinto.

En 1936, Philip M. Morse, del Instituto de Tecnología de Massachusetts, publicó "*Vibration and Sound*", en el que explicaba su teoría de los "modos normales de vibración" en recintos rectangulares (Recuero, 1983).

Como señala este autor (Morse, 1948), cuando una fuente empieza a emitir en una sala y después es apagada, podemos distinguir los siguientes procesos:

- a) una vibración transitoria, con la forma necesaria para satisfacer las condiciones iniciales en el recinto (formada por muchas ondas) en la que cada modo normal de la vibración transitoria vibra con su frecuencia propia.



- b) después de que el transitorio desaparece, tenemos una vibración de estado estacionario formada por muchas ondas estacionarias con sólo la frecuencia de la fuente, cuyas amplitudes dependen de la impedancia de la onda estacionaria en cuestión, y de la posición de la fuente en la sala.
- c) cuando la fuente sonora cesa de emitir, las ondas estacionarias permanecen en el recinto (las correspondientes a las frecuencias propias de la sala), cayendo exponencialmente de acuerdo con sus propiedades de vibración libre y, quizás, interfiriendo unas con otras (latidos). Este fenómeno es la base de la *reverberación*.

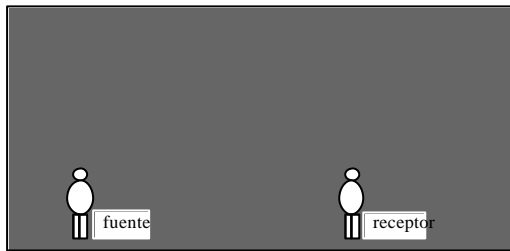
Desafortunadamente, hay muy pocos tipos de salas para los que las soluciones de las ecuaciones del campo sonoro están disponibles en forma analítica. En la mayoría de los casos prácticos, ni siquiera las condiciones de contorno pueden expresarse de una manera simple debido a que sus formas son muy irregulares y sus propiedades acústicas muy complejas (Kuttruff, 1995).

Otro problema es el tremendo número de modos que son necesarios para describir el campo sonoro en el rango de frecuencias usual, incluso en una sala de tamaño moderado. Por ejemplo, para una habitación con un volumen de 1.000 m<sup>3</sup> y un rango de frecuencias hasta 10.000 Hz el número mínimo de modos a estudiar sería más de 100 millones.

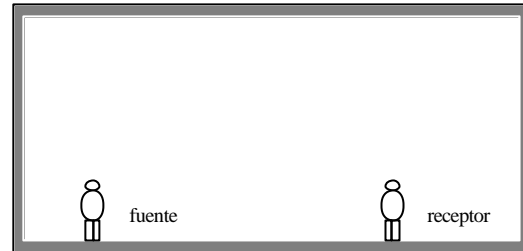
La ecuación de ondas en un recinto cerrado puede resolverse aplicando métodos numéricos:

- a) con el Método de Diferencias Finitas (*Finite Difference Method*, FDM), o con el Método de Elementos Finitos (*Finite Element Method*, FEM), el volumen de la sala y su contorno se subdividen en elementos de tamaño finito (fig. 1.1a).
- b) con el Método de los Elementos de Contorno (*Boundary Element Method*, BEM) sólo el contorno se subdivide en elementos de tamaño finito (fig. 1.1b).

Sea como fuere, la ecuación de ondas debe resolverse para cada uno de los elementos definidos, en lo que se convierte en un inmenso sistema de ecuaciones lineales. El elevadísimo número de elementos que se necesitan para un modelo preciso en banda ancha, hace que estas aproximaciones sean impracticables, excepto para casos de salas pequeñas o bajas frecuencias (Kleiner *et al.*, 1993).



**Fig.1.1 (a) FEM necesita la generación de una malla que cubra todo el volumen de la sala**



**Fig.1.1 (b) BEM necesita sólo la generación de una malla que cubra las superficies de la sala.**

Cuando se utilizan los métodos FEM o BEM, los resultados suelen obtenerse inicialmente como funciones de transferencia compleja en el dominio de la frecuencia. Estos datos pueden transformarse, si es necesario, al dominio del tiempo a través de la transformada inversa de Fourier.

El modelo teórico ondulatorio presenta serios problemas para poder responder a las principales cuestiones de interés práctico en acústica de salas. Tan sólo el cálculo de un único modo normal puede ser bastante difícil, y para estudiar el campo sonoro para diferentes tipos de señales deberíamos calcular un gran número de modos (Kuttruff, 1979).

Aún suponiendo que la herramienta computacional estuviese disponible, difícilmente tendríamos de los datos experimentales necesarios para especificar las condiciones del problema y, una vez superadas estas dificultades, la información resultante tal vez excedería de la necesaria para un juicio práctico en el estudio de una sala.

## 1.3. ACÚSTICA GEOMÉTRICA

### 1.3.1. Partículas Sonoras

En acústica geométrica de salas, el concepto de onda tiene menor importancia y es sustituido por el concepto de *rayo sonoro*. Un rayo sonoro es una idealización de una onda plana que ocupa una región finita determinada del espacio. Su composición espectral, como si de un paquete de ondas se tratase, incluye componentes monocromáticos cuyas frecuencias están comprendidas en un intervalo determinado.

Veamos las hipótesis teóricas sobre las que se construye la acústica geométrica:

**1. Propagación rectilínea del sonido.** El método geométrico se basa fundamentalmente en la propagación rectilínea de la energía. De acuerdo con el principio de Fermat, en un medio libre de obstáculos toda onda se propaga por el camino más rápido, que para una velocidad de propagación constante, es el más corto (la línea recta entre dos puntos). El concepto de rayo

sonoro es, para un medio homogéneo e isótropo, una porción significativa de energía acústica con frecuencia constante, propagándose en la proximidad de una estrecha línea recta (Llinares *et al.*, 1991).

**2. Las ondas esféricas pueden aproximarse por ondas planas.** Como vimos en la ecuación (1.17.) cuando  $kr \gg 1$ , siendo  $k$  el número de onda y  $r$  la distancia recorrida desde la fuente, una onda esférica se comporta como una onda plana cuya amplitud decrece con  $1/r$ .

**3. Los fenómenos de difracción son poco importantes o despreciables.** Suponiendo longitudes de onda pequeñas, es posible aplicar una descripción geométrica de las reflexiones. Esta suposición es plausible si las dimensiones de la sala y sus paredes son grandes comparadas con la longitud de onda del sonido.

**4. Reflexión.** Si en el recorrido de un rayo se sitúa un obstáculo, que no participa en absoluto en el movimiento ondulatorio (el movimiento excitado en él por la onda sonora es despreciable), parte de la energía acústica retorna, originando el fenómeno de la reflexión. Si la superficie del obstáculo es lisa, el rayo incidente se refleja en una sola dirección (*reflexión especular*) siguiendo las leyes de Snell. Si la superficie del obstáculo es rugosa, el rayo incidente se refleja en todas direcciones (*reflexión difusa*), de acuerdo con la ley de Lambert.

**5. Incoherencia.** Se supone incoherencia entre las diferentes ondas. En otras palabras, los fenómenos de interferencia no se toman en consideración, por lo que si varios frentes sonoros inciden en un punto al mismo tiempo, no se tienen en cuenta las relaciones entre sus fases. En su lugar, simplemente se suman sus intensidades.

Si las anteriores condiciones son válidas, podemos introducir la idea de rayos sonoros, que son líneas tales que la tangente a las mismas en un punto cualquiera coincide con la dirección de propagación, y podemos decir que el sonido se propaga a lo largo de rayos, ignorando su naturaleza ondulatoria. En consecuencia, el estudio de las leyes de propagación del sonido en estos casos, es una tarea de la acústica geométrica. Podemos decir que la acústica geométrica corresponde al límite de longitudes de onda pequeñas,  $\lambda \rightarrow 0$ .

### **1.3.2. Distribución Direccional Dependiente del Tiempo de la Intensidad Sonora.**

Partiendo de estas suposiciones, vamos a ver a continuación cuáles son las funciones o magnitudes que podemos evaluar con el método geométrico. Supongamos una fuente sonora localizada en un recinto cerrado, emitiendo un sonido impulsional, que viene a ser una compresión o rarefacción de presión avanzando en el espacio. Para nosotros, las partículas sonoras son una discretización del frente de ondas saliente de la fuente. Según encuentran obstáculos en su camino, son reflejadas en distintas direcciones, de forma que para cualquier

receptor en el espacio que ocupa un diferencial de área,  $dA$ , podemos hablar de una diferente **distribución direccional dependiente del tiempo de la intensidad sonora** (Kuttruff, 1979) caracterizada por:

$$I_t(\mathbf{j}, \mathbf{q}) \quad (1.18.)$$

donde  $\mathbf{j}$  es el ángulo polar y  $\mathbf{q}$  el ángulo azimutal que definen cualquier dirección en un sistema de referencia dado.

Así pues, la energía total por unidad de área aportada por las reflexiones llegadas durante un intervalo de tiempo  $dt$  desde un elemento de ángulo sólido  $d\Omega$  es:

$$I_t(\mathbf{j}, \mathbf{q}) dt d\Omega \quad (1.19.)$$

Cuando integramos  $I_t(\mathbf{j}, \mathbf{q})$  sobre todas las direcciones, obtenemos la **distribución temporal de la intensidad sonora reflejada**:

$$I(t) = \iint I_t(\mathbf{j}, \mathbf{q}) d\Omega \quad (1.20.)$$

Esta función es de gran importancia porque describe la naturaleza de la respuesta impulsiva de la sala. Su estudio va a dar lugar a dos modelos de simulación fundamentales: el método de las fuentes imagen (*source image method*) y el método del trazado de rayos (*ray tracing method*). Ambos métodos reconstruyen el conjunto de reflexiones o *reflectograma* que constituyen el esqueleto de la respuesta impulsiva.

Cuando integramos para todo el tiempo desde cero hasta infinito, distinguiendo para cada uno de los posibles ángulos, tenemos la *distribución direccional de estado estacionario*:

$$I(\mathbf{j}, \mathbf{q}) = \int_0^{\infty} I_t(\mathbf{j}, \mathbf{q}) dt \quad (1.21.)$$

cuya representación gráfica recibe el nombre coloquial de "diagrama de erizo" para todo tiempo, y que puede medirse perfectamente con micrófonos direccionales, o calcularse con la ayuda de un programa de simulación.

Si integramos  $I(t)$  en un intervalo  $[t, t+\Delta t]$  obtenemos la energía por unidad de área captada por el receptor durante  $\Delta t$  :

$$E(t, t + \Delta t) = \int_t^{t+\Delta t} I(t) dt \quad (1.22.)$$

Y, si integramos  $I_t(\mathbf{j}, \mathbf{q})$  para todos los ángulos y para todo el tiempo, estaremos calculando la energía total por unidad de área que recibe un receptor:

$$E = \iiint I_t(\mathbf{j}, \mathbf{q}) dt d\Omega = \int I(t) dt \quad (1.23.)$$

El valor dado por esta ecuación, cuando la señal de la fuente es de tipo impulsivo, corresponde con el *nivel de presión sonora* en el receptor (*SPL*), que solemos expresar en decibelios.

Todos los valores anteriores están referidos al área total del receptor, por lo que bastaría integrar sobre toda su área  $A$  para tener los correspondientes valores energéticos:

$$E_A = \iint_A I dA \quad (1.24.)$$

En el desarrollo que estamos siguiendo todavía no hemos expuesto el carácter de la función  $I_t(\mathbf{j}, \mathbf{q})$  y su relación con la fuente sonora, el receptor y la sala que los contiene. Esta dependencia queda manifiesta de un modo descriptivo a través de dos modelos diferentes:

- a) El modelo de fuentes imagen. Este modelo consiste en calcular todas las reflexiones a partir del espacio de *fuentes imagen* cuya posición se determina a través de sucesivas reflexiones especulares de la fuente original.
- b) El modelo de trazado de rayos. En este caso, se hallan todas las reflexiones a partir de reconstruir el frente de ondas discretizándolo a través de un cierto número de rayos sonoros que son seguidos y reflejados sucesivamente.

El carácter fenomenológico de estos dos modelos, los hace especialmente idóneos para su simulación por ordenador. En el siguiente Capítulo, estudiaremos este tema con más detenimiento.

#### 1.4. ACÚSTICA ESTADÍSTICA

Este modelo teórico se basa en la suposición de la existencia de un campo acústico *difuso* a lo largo de toda la sala. Un campo sonoro es difuso cuando:

1. La densidad de energía es la misma en cualquier punto de la sala.
2. El flujo de energía es igual para todas las direcciones.
3. El tiempo de reverberación es el mismo en toda la sala.

Con estas suposiciones, la intensidad sonora reverberante es igual para cualquier punto de la sala.

Aprovechando la conocida relación estadística del *recorrido libre medio* de una onda sonora en una sala de Kosten (1960), idéntica a la utilizada en la teoría cinética del calor de Clausius (1889), (Cremer y Müller, 1982):

$$\langle l \rangle = 4V/S \quad (1.25.)$$

donde  $V$  es el volumen de la sala, y  $S$  el área de las superficies de la sala, podemos expresar la intensidad sonora reverberante en función del tiempo cuando la fuente cesa de emitir como (Kuttruff, 1979):

$$I(t) = I_o e^{\left(\frac{4S}{4V} t \ln(1-\bar{a})\right)} \quad (1.26.)$$

donde introducimos el coeficiente de absorción media de una sala de paredes de área  $S_i$  y coeficiente de absorción  $\mathbf{a}_i$ , como:

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{1}{S} \sum_i S_i \mathbf{a}_i \quad (1.27.)$$

El tiempo de reverberación se define como el tiempo necesario para que, suprimida la fuente, el nivel de presión sonora caiga en 60 dB. En consecuencia, se deduce que:

$$T_{Eyring} = 0.161 \frac{V}{-S \ln(1 - \bar{\mathbf{a}})} \quad (1.28.)$$

que es la fórmula de Eyring y que data del año 1930 (Cremer y Müller, 1982).

Cuando el coeficiente  $\mathbf{a}$  de esta última ecuación es pequeño comparado con la unidad, podemos quedarnos con los dos primeros términos del desarrollo en serie del neperiano del denominador. Esto nos lleva directamente a la fórmula de Sabine para el tiempo de reverberación:

$$T_{Sabine} = 0.161 \frac{V}{S\bar{\mathbf{a}}} \quad (1.29.)$$

Si en el proceso de reverberación consideramos que la energía encuentra todas las superficies de la sala, una tras otra, llegamos a la expresión de Millington-Sette:

$$T_{Millington} = 0.161 \frac{V}{-\sum_i S_i \ln(1 - \mathbf{a}_i)} \quad (1.30.)$$

que difiere de la fórmula de Eyring sólo en la forma en la que los coeficientes de absorción son promediados.

En la práctica, las condiciones en que las fórmulas anteriores predicen correctamente el Tiempo de Reverberación son las siguientes:

- a) Sabine: Recintos vivos, con coeficiente de absorción medios inferiores a 0.2.
- b) Eyring: Coeficiente de absorción superior a 0.2 y absorción uniformemente distribuida.
- c) Millington: Coeficiente de absorción medio superior a 0.2 y absorción muy dispar entre los distintos materiales, siempre que no exista algún coeficiente de absorción próximo a la unidad.

Todas estas expresiones provienen de un tratamiento puramente estadístico. Así por ejemplo se está suponiendo un mismo *recorrido libre medio*  $\langle l \rangle$  para todos los rayos. Podemos analizar la influencia que las diferentes longitudes de caminos recorridos por los múltiples rayos existentes posee sobre el Tiempo de Reverberación. Recordemos que se usó el recorrido libre medio  $l$  en la deducción: obviamente, este valor posee una varianza relativa:

$$g^2 = \frac{\langle l^2 \rangle - \langle l \rangle^2}{\langle l \rangle^2} \quad (1.31.)$$

Cuanto más pequeña sea esta varianza relativa mejor será la predicción del Tiempo de Reverberación aportada por las fórmulas citadas anteriormente.

El efecto estadístico de esta varianza en el Tiempo de Reverberación es el siguiente (Kuttruff, 1979):

$$T_{Estadis.} = 0.161 \frac{V}{-S \ln(1 - \bar{a}) \left[ 1 + \frac{g^2}{2} \ln(1 - \bar{a}) \right]} \quad (1.32.)$$

por lo que el Tiempo de Reverberación resulta superior al evaluado por la fórmula de Eyring, ya que  $g^2$  es mayor o igual que cero. En definitiva, la varianza relativa del recorrido libre medio tiene en cuenta la forma de la sala.

## 1.5. PARÁMETROS OBJETIVOS DE ACÚSTICA DE SALAS

Para valorar las condiciones acústicas de una sala se han desarrollado diversos criterios objetivos, generalmente derivados de la respuesta impulsiva. Emitida una señal acústica impulsiva en la posición del hipotético orador, se registra la señal recibida en las posiciones de los oyentes; esta señal consta de una parte debida al sonido directo (la cual llega en primer

lugar) y todas las sucesivas reflexiones, las cuales llegan de múltiples direcciones y con diferente intensidad.

Desde que a comienzos de siglo, Sabine definiere el Tiempo de Reverberación de una sala (Sabine, 1922), un gran número de nuevos parámetros acústicos han sido definidos e introducidos en la Acústica de Salas. A continuación, y siempre refiriéndose a una respuesta impulsiva, veremos la definición de algunos de ellos, así como sus valores óptimos para Salas de Conciertos.

**1. Tiempo de Reverberación Clásico (*Reverberation Time - RT*).** Se define como el tiempo en que se producen 60 dB de caída siguiendo la línea recta que mejor se ajuste al intervalo -5 a -35 dB de decaimiento de la curva de Schroeder (Schroeder, 1965).

El intervalo recomendado en Salas de Concierto del parámetro *RT* es 1.4 a 2.8 s (Jordan, 1981), aunque dependiendo del tipo de música que se interprete pueden tomarse como referencia los valores de la Tabla 1.1. (Llinares *et al.*, 1991):

TABLA 1.1.  
Valores aceptables del Tiempo de Reverberación *RT*  
en Salas de Concierto según el tipo de música.

Música barroca	$RT \leq 1.5$
Música clásica	$1.5 \leq RT \leq 1.7$
Música romántica	$1.9 \leq RT \leq 2.2$
Ópera no wagneriana	$RT \leq 1.5$
Ópera wagneriana	$1.6 \leq RT \leq 2.0$

Se recomienda un aumento de un 20% a un 50% del Tiempo de Reverberación en las frecuencias bajas para dar a la música el adecuado calor.

**2. Tiempo de Reverberación Temprano (*Early Decay Time - EDT*).** Se define como el tiempo en que se producen 60 dB de caída siguiendo una línea recta que se ajuste a los primeros 10 dB en la curva de decaimiento de Schroeder (Jordan, 1970). Inicialmente había sido definido en 1965 por Atal, Schroeder y Sessler según la pendiente de los primeros 160 ms o los primeros 15 dB de caída.



El EDT está determinado fundamentalmente por las primeras reflexiones y varía con la posición de medida en forma más notable que el Tiempo de Reverberación clásico. Su intervalo óptimo, más estrecho que el del  $RT$ , es de 1.8 a 2.6 s (Jordan, 1981). Un predominio del  $EDT$  sobre el  $RT$  equivale a un predominio del campo directo y las primeras reflexiones sobre el campo reverberado.

**3. Definición (Definition - D).** Mide, en tanto por ciento, la relación entre la energía recibida durante los primeros 50 ms y la energía total que compone la respuesta impulsiva, asumiendo que la primera es beneficiosa para la inteligibilidad. Fue definido por primera vez por Thiele en 1953 (Cremer y Müller, 1982):

$$D = \frac{\int_0^{50 \text{ ms}} p^2(t) dt}{\int_0^{\infty} p^2(t) dt} \quad (1.33.)$$

donde la presión  $p(t)$  es la respuesta a una señal impulsiva y  $t=0$  coincide con la llegada del sonido directo al punto de observación. Los resultados pueden darse en banda ancha o en bandas de octava, previo filtrado de la respuesta al impulso. Para asegurar una buena inteligibilidad se recomienda que sus valores se encuentren en el intervalo 40% a 60% (Kuttruff, 1979).

**4. Claridad (Clarity -  $C_{80}$  y  $C_{50}$ ).** La Claridad  $C_{80}$  es un parámetro formalmente similar a la Definición pero más indicado para caracterizar la transparencia de la música en una sala de conciertos. Fue introducido por Reichardt en 1974 (Cremer y Müller, 1982) y en él se considera beneficiosa la energía que llega en los primeros 80 ms y perjudicial la posterior:

$$C_{80} = 10 \log \left( \frac{\int_0^{80 \text{ ms}} p^2(t) dt}{\int_{80 \text{ ms}}^{\infty} p^2(t) dt} \right) \quad (1.34.)$$

El intervalo de valores óptimos cambia según los autores consultados. Para Cremer y Müller (Cremer y Müller, 1982) estos valores deben encontrarse entre  $\pm 1.6$  dB. Según Jordan (Jordan, 1981) es recomendable el intervalo  $\pm 2$  dB. Según el trabajo más detallado de Reichardt y Lehmann en 1981 (Makrinenko, 1994), dependiendo de que se trate de filas delanteras o traseras en la sala, los valores óptimos son los que aparecen en la Tabla 1.2.

El umbral de percepción para este parámetro en el rango de frecuencias medias, según Cox es de  $0.67 \pm 0.13$  dB, aunque para frecuencias bajas aumenta hasta 3.7 dB (Davies *et al.*, 1996).

Tabla 1.2.  
Valores óptimos del parámetro  $C_{80}$

Nivel de Calificación	Valores de $C_{80}$ (dB)	
	Filas delanteras	Filas traseras
Buena	De +3 a +8	De 0 a +5
Aceptable	De -2 a +3 y > +8	De +5 a +9
Inaceptable	< -2	> +9 < -5

El parámetro  $C_{50}$  se define de igual manera que el  $C_{80}$  pero cambiando el límite temporal de integración del numerador de la ecuación (1.34.) a 50 ms.

**5. Tiempo Central (*Center Time,  $T_s$* ).** Es la distancia  $T_s$  en segundos desde el origen hasta el "centro de gravedad" de la respuesta impulsiva. Fue introducido por Kürer en 1969 (Abdou y Guy, 1996) y está relacionado con la valoración subjetiva de claridad. Se calcula como:

$$T_s = \frac{\int_0^{\infty} t p^2(t) dt}{\int_0^{\infty} p^2(t) dt} \quad (1.35.)$$

Se recomienda que su valor no exceda los 140 ms (Cremer y Müller, 1982). Para frecuencias medias, el umbral de percepción de este parámetro según Cox es de 8 ms, aunque para bajas frecuencias puede aumentar hasta 46 ms (Davies et al., 1996).

**6. Tiempo de Ascenso (*Rise Time,  $T_r$* ).** Es el tiempo necesario para que la energía recibida en el receptor, una vez alcanzado el valor estacionario, decaiga a la mitad respecto al valor asíntótico final, es decir, disminuya 3 dB.

$$\int_0^{T_r} p^2 dt = \int_{T_r}^{\infty} p^2 dt \quad (1.36.)$$

Este parámetro fue introducido por Jordan en 1959 (Cremer y Müller, 1982). No disponemos de valores óptimos.

**7. Fracción de Energía Lateral (*Lateral Energy Fraction,  $LEF'$  y  $LEF$* ).** Barron y Marshall (Barron y Marshall, 1981) experimentaron con reflexiones laterales simuladas con altavoces distribuidos en una sala anecoica, y encontraron la existencia de una alta correlación

entre el atributo subjetivo que denominaron "impresión espacial" (equivalente al "ancho aparente de la fuente") y el valor de la energía lateral. En su artículo definieron el parámetro fracción de energía lateral como:

$$LEF' = \int_{5 \text{ ms}}^{80 \text{ ms}} p^2 \cos \mathbf{q} \, dt \bigg/ \int_0^{80 \text{ ms}} p^2 \, dt \quad (1.37.)$$

donde  $\mathbf{q}$  es el ángulo lateral ( $\mathbf{q} = 0$  es en el eje de los oídos) y  $p$  es la presión sonora medida en el mismo punto con un micrófono omnidireccional. Según esta expresión, el factor de energía lateral es el cociente entre la proyección, sobre el eje de los oídos, de la energía de las reflexiones que llegan entre 5 y 80 ms, y la energía total del conjunto de reflexiones entre 0 y 80 ms.

Este parámetro, fuera de las condiciones controladas de un experimento en una cámara anecoica, es muy difícil de obtener experimentalmente. Para facilitar su medida, se recomienda utilizar esta otra expresión (Jordan, 1981) (Hidaka *et al.*, 1995):

$$LEF = \int_{5 \text{ ms}}^{80 \text{ ms}} p_{\infty}^2 \, dt \bigg/ \int_0^{80 \text{ ms}} p^2 \, dt \quad (1.38.)$$

donde  $p_{\infty}$  es la presión sonora medida en un punto de la sala con un micrófono de figura de ocho (micrófono de gradiente de presión), donde el eje nulo apunta a la fuente. Como  $p_{\infty}^2$  introduce un factor de directividad de  $\cos^2 \mathbf{q}$ , la ecuación (1.38.) presenta valores menores que los de la ecuación (1.37.). El intervalo óptimo del parámetro  $LEF$  se encuentra entre el 0.2 y 0.3 (Jordan, 1981).

**8. Tiempo de Retraso (*Initial Time Delay Gap*,  $t_i$ ).** La intimidad o sensación de que la música se percibe como interpretada en una sala pequeña, está muy relacionada con el tiempo que separa la llegada del sonido directo y del primer sonido reflejado. Beranek (Beranek, 1992) ha encontrado una importante correlación entre la calidad sonora subjetiva de varios auditorios, y el hecho de que el tiempo de retraso sea corto. Como regla general, se recomienda que el tiempo de retraso debe ser menor de 20 ms en salas de concierto y de 25 ms en salas de ópera.

# **CAPÍTULO 2**

## **Modelos de Simulación**

La principal aspiración de los especialistas en Acústica Arquitectónica es poder simular el comportamiento sonoro de un teatro o auditorio, con antelación a su construcción o remodelación, con el fin de poder obtener una impresión certera de cómo sonará esa sala una vez haya sido terminada.

El conocimiento exacto de la acústica de un recinto requiere el cálculo o medida de su *respuesta impulsiva*. A partir de esta información, podemos evaluar diferentes parámetros acústicos muy relacionados con los efectos subjetivos de nuestra audición. Incluso es posible *convolucionar* esta respuesta impulsiva con cualquier señal sonora libre de reverberación, desde la conferencia de un orador hasta el concierto de una orquesta sinfónica, y así conseguir reproducir el sonido tal como sonaría en la sala.

Actualmente podemos calcular la respuesta impulsiva de una sala a través de modelos numéricos en una *simulación por ordenador*, o bien midiéndola directamente en *modelos a escala* contruidos a tal efecto.

Se han desarrollado diferentes métodos para reproducir e investigar la propagación, reflexión y difracción de las ondas sonoras. En este capítulo describiremos los más importantes, tanto en modelos de dos como de tres dimensiones.

## **2.1. MODELOS DE DOS DIMENSIONES**

### **2.1.1. Modelos de Ondas Superficiales de Agua**

En esta técnica sólo se necesita un cuenco o recipiente de agua adaptado al perfil sección de la sala que se va a estudiar. El recipiente ha de ser preferentemente de algún material transparente para que pueda ser iluminado con haces paralelos de luz y así facilitar la visualización de las ondas. Al llenarlo con un cierto nivel de agua (se recomienda entre 7 u 8 mm) y generar un pequeño impulso ondulatorio (basta con sumergir rápidamente un pequeño punzón en el agua), podremos visualizar y fotografiar las pequeñas ondas superficiales que se propagarán a lo largo de todo el recipiente. El primero de los trabajos experimentales en esta línea corresponde a Scott Russel que ya en 1843 utilizó ondas superficiales de agua para sus estudios de acústica de salas (Cremer y Müller, 1982).

Los modelos de ondas superficiales en el agua tienen la ventaja de que la velocidad de propagación de los frentes de onda es muy baja, puede reducirse hasta 20 o 30 cm/seg, y pueden seguirse fácilmente con la vista, lo que hace estos modelos especialmente atractivos para demostraciones.

En estos modelos, al igual que en todos aquellos en los que se utilizan maquetas a escala, es necesario tener en cuenta que la longitud de onda  $I_m$  y la longitud  $l_m$  características del modelo deben estar en la misma proporción que las dos longitudes  $I_r$  y  $l_r$  respectivas en la escala real:

$$\frac{I_m}{l_m} = \frac{I_r}{l_r}$$

o

$$\frac{I_m}{I_r} = \frac{l_m}{l_r} = \mathbf{m}$$
(2.1.)

donde  $\mathbf{m}$  es el *factor de escala* de la maqueta (Cremer y Müller, 1982). Para la profundidad del recipiente señalada anteriormente, la longitud de onda se encuentra aproximadamente entre 1 y 2 cm. Si la maqueta, por ejemplo, presenta una reducción de escala de 1:100 estaremos simulando el comportamiento de una onda sonora de longitud de onda real entre 1 y 2 m (frecuencia real alrededor de 300 Hz). Si queremos simular frecuencias reales mayores, deberemos hacer la maqueta más grande; y así por ejemplo si la escala fuese 1:50 podríamos analizar frecuencias reales del orden de los 600 Hz.

Para simular la absorción sonora de las superficies o para eliminar reflexiones no deseadas, se pueden utilizar cintas de fieltro pegadas en los contornos del recipiente, de manera que las ondas de agua queden absorbidas.

El hecho de que la velocidad de propagación de las ondas superficiales en el agua depende de la longitud de onda (Cremer y Müller, 1982), da lugar a inevitables fenómenos de dispersión que restan nitidez en la visualización de esta propagación.

### 2.1.2. Modelos de Fotografías de Pulsos Sonoros

Toepler mostró en 1864 la interacción que se produce entre la luz y el campo acústico. Cuando un haz de rayos de luz paralelos atraviesa perpendicularmente un campo sonoro definido en un plano, la parte del frente de ondas sonoro que tangencialmente intersecta con los rayos de luz, refracta la luz produciendo dos líneas visibles cercanas, una luminosa y otra oscura. En una pantalla de proyección, podemos obtener una imagen visual del frente de ondas sonoro que puede ser estudiada directamente o fotografiada para su posterior estudio. Esta técnica de visualización se conoce con el nombre de "método de rayado de Toepler" (*schlieren* en alemán) y, ya fue utilizado por W.C. Sabine en 1913 cuando adaptó esta técnica de fotografiar pulsos para estudiar el avance de ondas en modelos de dos dimensiones (horizontal y vertical) del "New Theater" en New York, del "Square Theater" en Boston y del "Harris Theater" en Minneapolis (Knudsen, 1970).

Como pulsos sonoros se utilizan chispas eléctricas de muy corta duración, del orden de  $10^{-6}$  seg, para conseguir que el tiempo de exposición sobre la pantalla sea muy corto y la imagen no quede borrosa. Para iluminar, también se suele utilizar una chispa eléctrica de corta duración, de manera que el intervalo de tiempo entre ambas señales determinará qué instante del avance del frente de ondas se fotografiará, consiguiéndose un efecto estroboscópico con la secuencia intermitente de exposiciones.

La maqueta debe ser más pequeña que las utilizadas para ondas superficiales de agua, sobre todo para evitar la atenuación durante la propagación de las altas frecuencias que emite la señal eléctrica.

La claridad con que quedan representadas las ondas sonoras reflejadas, incluso para pequeños obstáculos, y la precisión de las imágenes obtenidas para visualizar y estudiar diferentes fenómenos de difracción y difusión, hacen de este método una herramienta muy interesante para el análisis detallado de salas y auditorios en estudios de acústica ondulatoria.

El principal inconveniente de esta técnica, al igual que la anterior, es que sólo pueden utilizarse para el estudio de problemas en dos dimensiones, es decir, para estudiar la propagación de ondas sonoras en un plano.

## **2.2. MODELOS DE TRES DIMENSIONES**

### **2.2.1. Modelos Ópticos**

Las leyes de propagación de la ondas sonoras y las ondas luminosas son similares. La principal diferencia radica en la magnitud de las velocidades de propagación. Para el rango de frecuencias visible y longitudes características de salas, la luz se comporta básicamente como rayos luminosos, y los fenómenos de difracción son poco importantes. Por lo tanto, los modelos a pequeña escala de salas con fuentes luminosas y espejos ópticos pueden reemplazar a fuentes sonoras y reflectores acústicos, sobre todo en el rango de frecuencias altas. Esta técnica, se utiliza sobre todo para calcular la orientación que deberá darse a posibles reflectores que vayan a ponerse en las paredes o en el techo de un teatro.

En 1936, Vermeulen y De Boer (Cremer y Müller, 1982) no sólo utilizaron los modelos de rayos de luces para obtener los caminos de las reflexiones geométrica, sino que también intentaron calcular la distribución de intensidad sonora en función de la variación de brillo de las reflexiones de luz. Desafortunadamente para este experimento, el brillo de la luz de los rayos disminuye con el coseno del ángulo de incidencia y desaparece para ángulos de incidencia próximos a  $90^\circ$ . No se comporta como la intensidad sonora incidente, dado que el coeficiente de absorción sonora de una superficie aumenta con el ángulo de incidencia, pero

para una onda rasante se produce un cambio drástico en esta situación, produciéndose una reflexión casi total (Cremer y Müller, 1982).

En 1953, R.W. Leonard (Knudsen, 1970) utilizó esta técnica en modelos de dos dimensiones para diseñar el auditorio de música "Schoenberg Hall" en California, obteniendo excelentes resultados al conseguir una adecuada distribución uniforme de reflexiones provenientes del techo.

La desventaja de estos métodos es que no pueden proporcionar ninguna información sobre el tiempo de retraso asociado con una reflexión, algo que es de gran importancia para el estudio de salas. Esta limitación deberá suplirse con el dibujo de los rayos sobre los planos del edificio, por ejemplo. Tampoco pueden dar información sobre tiempos de reverberación y otros parámetros acústicos, por lo que su utilidad queda reducida al diseño inicial de reflectores acústicos.

### 2.2.2. Modelos a Escala

De los modelos mencionados hasta ahora, sólo los modelos ópticos se utilizan todavía en la actualidad, tanto por su sencillez como por su adecuación para la resolución de problemas de tres dimensiones.

Dentro de los modelos de tres dimensiones, las maquetas a escala obtuvieron un importante auge desde su aparición, a mediados de los años 30, hasta la actualidad, en que su importancia se está viendo desplazada por el importante desarrollo de las técnicas de simulación por ordenador.

En este método, las ondas sonoras son radiadas en la maqueta de la sala con longitudes de onda  $l_m$  que deben estar relacionadas con la longitud de onda en la sala real  $l_r$ , de la misma manera que el cociente entre las dimensiones del modelo  $l_m$  y la sala original  $l_r$ , tal como vimos en la ecuación (2.2.1.).

Si la maqueta contiene aire, la relación anterior se seguirá cumpliendo para cualquier longitud de onda o frecuencia emitida por la fuente sonora, ya que al tratarse del mismo gas, la velocidad de propagación del sonido es la misma en el modelo y en la realidad.

Con un factor de escala 1:10, por ejemplo, todas las frecuencias utilizadas en el modelo deberán ser 10 veces mayor que las de la sala original, y así el rango 63-4.000 Hz es desplazado a 630-40.000 Hz.

En 1934, Spandock realizó las primeras investigaciones en este campo de trabajo con modelos tridimensionales de tres salas conocidas, escaladas en 1:5, para lo que utilizó



frecuencias de 2.500 y 4.000 Hz en la maqueta, lo que correspondía a las frecuencias de 500 y 800 Hz, respectivamente, en la sala real (Knudsen, 1970). Junto con sus colaboradores en Munich, continuaron posteriormente estas investigaciones con modelos a escala 1:10. Reproduciendo grabaciones sonoras con la velocidad de la cinta aumentada con el factor de escala del modelo, y grabándolas con el mismo método, se puede conseguir reproducir, ya a velocidad normal, cómo sonará la música o el habla en la sala real que la maqueta intenta simular.

Jordan en 1941, Reichardt en 1955 ó Lochner y Burger en 1964, llevaron a cabo algunos de los principales trabajos pioneros en los que se fundamenta esta técnica (Knudsen, 1970), aplicándose al estudio de la influencia de diferentes aspectos arquitectónicos, de aislamiento y de acondicionamiento en salas o auditorios, consiguiéndose simular de manera objetiva el campo sonoro, para cualquier frecuencia.

El principal inconveniente de este método radica en el elevado coste de la construcción de las maquetas, y sobre todo en la dificultad de la selección y obtención de materiales absorbentes adecuados, tales que en el rango de frecuencias del modelo presenten un comportamiento similar al de los materiales reales. Por otro lado, la reducción de escala obliga a pasar al campo de ultrasonidos, lo que conlleva utilizar micrófonos y analizadores de elevado coste. Además, como la atenuación sonora del aire húmedo influye en los resultados de altas frecuencias, puede hacerse necesario utilizar maquetas llenas de aire seco, lo que aumenta el coste y dificultad de estas técnicas.

### **2.2.3. Modelos Computacionales**

Dentro del ámbito de la Acústica Geométrica, se han desarrollado varios modelos por ordenador de indudable interés y utilidad. Como señalábamos en el primer Capítulo de esta memoria, la Acústica Geométrica está basada en una solución especial de la ecuación de ondas sólo válida cuando la longitud de onda del sonido es pequeña comparada con las dimensiones características de las superficies del problema, y grande respecto a su rugosidad y curvatura. Si esta condición se cumple, las ondas sonoras de presión pueden tratarse como ondas de luz, y en tal caso, todas las reflexiones son especulares (Lehnert y Blauert, 1992).

Estos modelos presentan el inconveniente de que no pueden incluir efectos característicos de la propagación de ondas, como la difracción o interferencias de ondas. A priori, esto podría significar una descalificación de la validez de estos modelos. Sin embargo, en la mayoría de los casos, la Acústica Geométrica puede darnos respuestas muy satisfactorias a los problemas planteados.

Dos son los algoritmos básicos que se conocen en el modelado de campos sonoros utilizando la Acústica Geométrica: el método de las imágenes y el método del trazado de rayos. Ambos métodos han sido aplicados al estudio de la acústica de salas desde inicios de los años 30, y su validez ha sido contrastada con otros métodos en multitud de ocasiones. El primero de ellos es de tipo determinístico, pero tiene el inconveniente de que requiere un excesivo tiempo de cálculo, además de que sólo puede aplicarse a superficies planas. El segundo es de tipo estadístico, lo que significa que sus resultados están ligados a un cierto error, pero tiene la ventaja de que puede contemplar reflexiones en superficies curvas, incluso tener en cuenta el importante efecto de la difusión.

## 2.3. MÉTODO DE LAS FUENTES IMAGEN

### 2.3.1. Introducción

El Método de las Imágenes o Método de las Fuentes Imagen (*Source Image Method*), está basado en la Acústica Geométrica y sólo puede aplicarse para salas de paredes planas y con modelos de reflexiones especulares geométricas.

Según este modelo, una fuente sonora situada frente a una pared rígida genera una onda reflejada cuya dirección e intensidad sonora son idénticas a las de la onda directa de una fuente virtual situada al otro lado de la pared, y que empezó a emitir al mismo tiempo que la original. Por supuesto, en los correspondientes cálculos se debe tener en cuenta la absorción de la pared, disminuyendo el valor de la intensidad sonora en el factor correspondiente.

De esta manera, y siguiendo el mismo proceso para todas las superficies, se pueden encontrar todas las reflexiones de primer orden para cualquier receptor en la sala. Este proceso se repite para cada una de las fuentes imagen obtenidas, dando lugar a las fuentes imagen responsables de las reflexiones de segundo orden, y así sucesivamente.

En un principio, la aplicación de este método estaba limitada a geometrías muy simples, por ejemplo, al estudio de salas rectangulares, en las que el cálculo de las posiciones de las fuentes imagen es muy sencillo. Borish (Borish, 1984) ha desarrollado un algoritmo del método de las imágenes aplicable a poliedros irregulares en general. Con ello, el método ha pasado a utilizarse también en el estudio de auditorios y teatros, aunque el problema del elevado tiempo de cálculo necesario lo hace prácticamente inaplicable para hallar reflexiones de orden superior.

### 2.3.2. Árbol de Imágenes

Vamos a demostrar a continuación cómo el número de fuentes imagen hasta el orden  $i$  de una sala con  $n$  paredes aumenta exponencialmente con  $i$ .

Inicialmente, la fuente original puede dar lugar a  $n$  imágenes de 1er. orden (si todas las paredes son visibles desde la fuente):

$$\text{Número de imágenes de 1er. orden} = n \quad (2.2.)$$

Cada una de estas  $n$  imágenes, como un nuevo frente de ondas que es, puede reflejarse en cada una de las  $n-1$  paredes restantes:

$$\text{Número de imágenes de 2º orden} = n(n-1) \quad (2.3.)$$

De nuevo, para cada una de estas fuentes imagen el proceso se repite:

$$\text{Número de imágenes de 3er. orden} = n(n-1)(n-1) = n(n-1)^2 \quad (2.4.)$$

Por lo tanto, en general, se tiene:

$$\text{Número de imágenes de orden } i = n(n-1)^i \quad (2.5.)$$

El número total de imágenes posibles hasta un orden  $i$ -ésimo será:

$$N_{IMAGENES} = \sum_{k=0}^{i-1} n(n-1)^k = n \frac{1 - (n-1)^i}{1 - (n-1)} = n \frac{1 - (n-1)^i}{2 - n} \quad (2.6.)$$

que es lo mismo que:

$$N_{IMAGENES} = \frac{n}{n-2} [(n-1)^i - 1] \quad (2.7.)$$

En consecuencia, el número total de imágenes  $N_{IMAGENES}$  crece exponencialmente con el tiempo ya que éste es proporcional al orden de reflexión  $i$ .

Una manera sencilla de disponer las fuentes imagen generadas es mediante los índices de las paredes que han intervenido en su generación. Así cada fuente imagen representa un eslabón de la cadena definida por sus subíndices, tal como aparece en el siguiente esquema:

$$S \rightarrow S_{n_1} \rightarrow S_{n_1 n_2} \rightarrow \dots \rightarrow S_{n_1 n_2 \dots n_{i-1}} \rightarrow S_{n_1 n_2 \dots n_i}$$

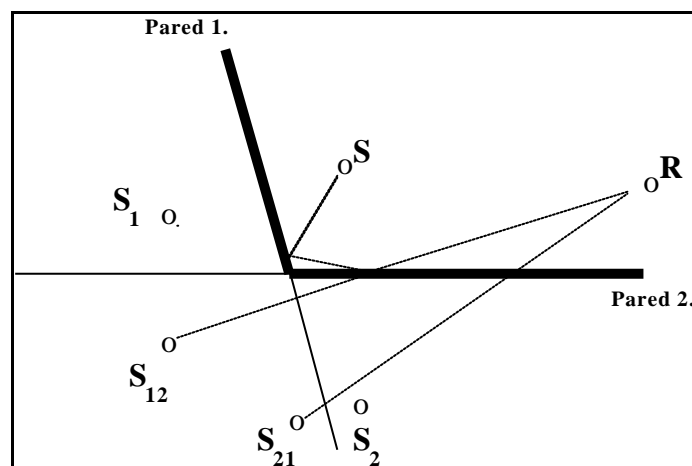
done  $S$  es la fuente original y  $n_k \neq n_{k \pm 1}$  puede tomar valores entre 1 y el número de paredes  $n$ . Desde el punto de vista del cálculo, resulta muy adecuado interpretar la secuencia anterior

como una rama particular dentro de una estructura de árbol en la que cada nodo tiene  $n-1$  subnodos.

Por otra parte, para cada una de estas fuentes imagen hay que plantear un "test de visibilidad" (Borish, 1984) en función de la posición del receptor, porque ocurrirá que la mayor parte de estas fuentes virtuales no son visibles desde el receptor y habrá que eliminarlas. Si recordamos que el número de reflexiones producidas en una sala desde un tiempo inicial 0 hasta un tiempo final  $t$  es proporcional a  $t^3$  (Kuttruff, 1979) nos damos cuenta de la cantidad de fuentes imagen innecesarias.

Este test de visibilidad debe repetirse para cada uno de los receptores considerados. El algoritmo consiste en seguir en forma inversa el camino relacionado con la secuencia de índices que caracteriza cada fuente imagen. Empezando desde el punto receptor, y finalizando en la fuente original ("recorrido hacia atrás" o *back tracing*), habrá que comprobar que todas las fuentes imagen son visibles desde el receptor.

En la figura 2.1. se muestra la aplicación del test de visibilidad para una imagen de segundo orden. Obsérvese que el punto receptor R elegido está conectado con las fuentes imagen  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_{12}$  pero no con la fuente  $S_{21}$ .



**Fig. 2.1.** Las fuentes  $S$ ,  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_{12}$  sí son visibles desde el receptor  $R$ . La fuente  $S_{21}$ , en cambio, no lo es.

Tal como se aprecia en la figura 2.1., la fuente  $S_{12}$  tiene por último índice un 2 porque fue obtenida reflejando  $S_1$  en la pared 2. Evaluamos el camino entre el receptor  $R$  y la fuente  $S_{12}$ : como el punto de intersección de la línea que une  $R$  y  $S_{12}$  y el plano 2 está contenido dentro del polígono que define la pared, la fuente imagen se considera visible. Ahora hay que repetir el mismo proceso entre la fuente  $S_{12}$  y su predecesora  $S_1$ : considerando ahora el punto de intersección recién calculado como nuevo receptor y comprobándolo con la fuente

predecesora  $S_1$  en la cadena de fuentes imagen, queda validado este camino. Por último, repetimos el proceso entre  $S_1$  y la fuente original.

Este procedimiento se repite hasta que termina en la fuente original. Si al menos uno de los puntos de intersección calculados no se encuentra dentro de los límites reales de la pared correspondiente, como ocurre con  $S_{21}$ , la fuente imagen no es visible, y puede omitirse para este receptor.

### 2.3.3. Coste Computacional

Una vez construido el árbol de fuentes virtuales hasta el orden de reflexión  $i$ , habrá que comprobar cuáles son visibles desde la posición del receptor. Para cada receptor, habrá que aplicar el test de visibilidad en cada una de las  $N_{\text{IMAGENES}}$ .

La parte crucial de este test es comprobar si la recta o rayo que une receptor y fuente imagen interseca con la superficie involucrada según los subíndices de la fuente imagen. Por supuesto, la intersección deberá darse dentro de los límites físicos que definen la pared.

Este tipo de operación, hallar el punto de intersección entre una recta y un plano, es fundamental en las simulaciones de acústica geométrica, tanto en el método de las imágenes, como en el método de trazado de rayos. Por ello, vamos a detenernos en calcular, de forma aproximada, cuál es el esfuerzo computacional que requiere esta operación básica.

Supongamos una recta definida por un punto de partida  $\mathbf{r}_o$  y la dirección de un vector unitario  $\mathbf{v}$ . Supongamos también, un plano definido por 1 punto  $\mathbf{p}_o$  y 2 vectores  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  (fig. 2.2.). El conjunto de puntos  $\mathbf{x}$  definidos por la recta y el plano puede expresarse a través de las ecuaciones paramétricas correspondientes:

$$\begin{aligned} \text{Recta: } \mathbf{x} &= t \mathbf{v} + \mathbf{r}_o \\ \text{Plano: } \mathbf{x} &= \mathbf{a} a + \mathbf{b} b + \mathbf{p}_o \end{aligned} \quad (2.8.)$$

donde  $t$  es un parámetro que puede tomar cualquier valor positivo, y  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  dos parámetros que toman valores entre 0 y 1, siendo  $\mathbf{a} + \mathbf{b} \leq 1$  cuando la pared es triangular, y sin restricción cuando se trata de un paralelogramo.

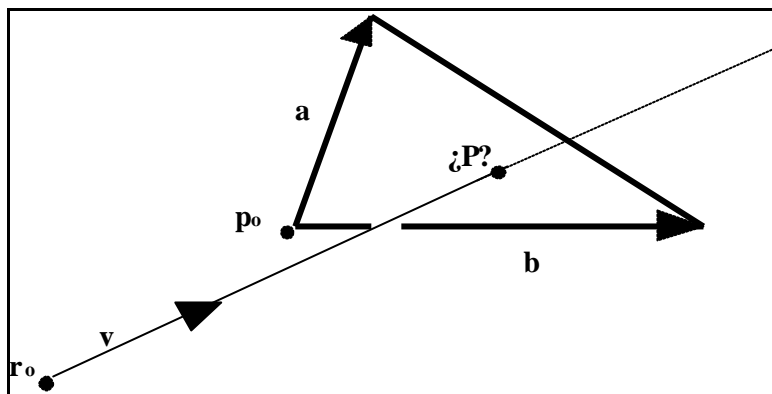


Fig. 2.2. Intersección en **P** entre un rayo y un plano.

Hallar el punto de intersección **P** significa resolver el sistema de ecuaciones que se deriva de la ecuación vectorial (2.9.):

Hallar **a**, **b**, **t** de la ecuación vectorial: (2.9.)

$$\mathbf{a} \mathbf{a} + \mathbf{b} \mathbf{b} - t \mathbf{v} = \mathbf{p}_o - \mathbf{r}_o$$

con lo que se obtiene **P**:

$$\mathbf{P} = \mathbf{a} \mathbf{a} + \mathbf{b} \mathbf{b} + \mathbf{p}_o \quad (2.10.)$$

La intersección tendrá lugar cuando el determinante formado por los vectores **a**, **b** y **v** sea no nulo. En ese caso, deberán calcularse los parámetros **a**, **b**, **t** a través de, por ejemplo, los 3 determinantes correspondientes a la regla de Cramer. Además, se necesitarán 3 comparaciones para determinar si se encuentran en los intervalos permitidos. Si aproximamos a 6 el número de operaciones necesarias para calcular un determinante, pues se trata de 6 sumas de productos, y tenemos en cuenta que construir el punto solución **P** significa realizar 3 operaciones más, vemos que el número necesario de operaciones para saber si la intersección recta-plano está contenida dentro de un área es:  $4 \times 6 + 3 + 3 = 30$  operaciones.

En un ordenador de 100 MHz, suponiendo de manera muy optimista que cada operación consume 3 ciclos de reloj, podremos calcular, aproximadamente, 1 millón de intersecciones por segundo. El tiempo elemental necesario para calcular cada intersección será  $t_{intersección} = 10^{-6}$  seg.

Suponiendo una sala de  $n = 30$  paredes, volumen de 15.000 m<sup>3</sup>, y recorrido libre medio de  $l = 13.3$  m, para obtener una respuesta impulsiva de duración 400 ms, se necesitará alcanzar un orden de reflexión mínimo de 10. El número de fuentes imagen será:

$$N_{IMAGENES(i=10)} = \frac{30}{30-2} \left[ (30-1)^{10} - 1 \right] = 4.5 \cdot 10^{14} \quad (2.11.)$$

Otra cuestión es cuántos de estos tests se requieren para encontrar una fuente invisible. En promedio, podríamos decir que la mitad de la longitud de la cadena, que en este caso sería  $i/2 = 10/2$ .

Así, el coste computacional del algoritmo sería aproximadamente:

$$t_{METODO\_IMAGENES} = t_{interseccion} \cdot \frac{i}{2} \cdot N_{IMAGENES} \quad (2.12.)$$

que para el caso del ejemplo tomaría el valor:

$$t_{METODO\_IMAGENES} = 10^{-6} \cdot \frac{10}{2} \cdot 4.5 \cdot 10^{14} = 2.3 \cdot 10^9 \text{ seg} \quad (2.13.)$$

es decir, aproximadamente 71 años. Como vemos, el tiempo de cálculo requerido es demasiado elevado, y además hay que tener en cuenta que sólo estaríamos estudiando un orden de reflexión  $i=10$ , lo que puede suponer introducir un error importante, ya que nada impide que la geometría de la sala dé lugar a ordenes de reflexión mucho mayores dentro del intervalo de tiempo de 400 ms estudiado.

Digamos finalmente que si la sala tuviese 500 superficies el tiempo de cálculo se dispararía a 30 billones de años.

### 2.3.4. Precisión del Método de las Imágenes

Como vemos, el método de las imágenes sólo es útil para respuestas impulsivas muy cortas en las que se requiere una alta precisión temporal. También puede aplicarse para salas con muy bajo número de paredes  $n$ , como por ejemplo, una sala de forma rectangular en la que no es necesario realizar el test de visibilidad debido a que todas las fuentes son visibles. Pero en general su aplicación es imposible.

El hecho inevitable de tener que limitarse a un orden de reflexión normalmente bajo, nos lleva a establecer tres intervalos de la respuesta impulsiva: un primer intervalo en el que se conocen todas las imágenes posibles y en el que el método es perfecto. Un segundo intervalo en el que algunas imágenes todavía no se han obtenido porque serían de un orden superior, y en el que el método ya puede inducir a errores. Un tercer intervalo en el que no se dispone de ninguna fuente imagen y se desconoce la respuesta impulsiva (Juricic y Santon, 1973).

La principal ventaja de este método es que el receptor puede ser tan pequeño como se quiera, incluso un punto, ya que sólo tenemos que aplicar la ley  $1/r^2$  a cada una de las fuentes que son visibles desde el receptor. Además, se trata de un método determinístico en el que no hay ningún tipo de error estadístico (Kullowski, 1982).

Como vimos en el capítulo anterior, desde el punto de vista de la Acústica Geométrica, el cálculo de la respuesta impulsiva  $I(t)$  se basa en una integración de la distribución direccional dependiente del tiempo de la intensidad sonora  $I_t(\mathbf{j}, \mathbf{q})$ :

$$I(t) = \iint I_t(\mathbf{j}, \mathbf{q}) d\Omega \quad (2.14.)$$

El método de las imágenes identifica esta distribución de reflexiones, de manera que cada fuente imagen visible es responsable de una reflexión. El hecho de que las superficies sean planas, hace que sea posible caracterizar de forma discreta la distribución direccional dependiente del tiempo de la intensidad sonora y así, la intensidad  $I_k$  asociada a una fuente situada a una distancia  $R_k = ct_k$  del receptor será:

$$I_k = \frac{P}{4\pi R_k^2} \prod_{j=1}^k (1 - \mathbf{a}_j) \quad (2.15.)$$

siendo  $P$  la potencia de emisión de la fuente original y  $\mathbf{a}_j$  el coeficiente de absorción de la pared  $j$ -ésima que se encuentra entre la fuente imagen y el receptor.

El reflectograma simulado en el receptor  $I$  vendrá dada por la secuencia ordenada en el tiempo de las  $N$  reflexiones visibles desde el receptor,  $I_k$  ( $k=1, \dots, N$ ):

$$I = \{I_k\}_{k=1}^N \quad (2.16.)$$

La respuesta impulsiva  $I(t)$ , distribución temporal de la intensidad sonora reflejada, se obtiene sumando aquellas reflexiones llegadas en un mismo tiempo  $t$ .

El hecho de que el receptor pueda suponerse puntual y la identificación completa de todas las reflexiones hasta un orden, suponen una gran ventaja del método. Esta circunstancia permite obtener la máxima precisión posible, dentro de la Acústica Geométrica, en la determinación de la respuesta impulsiva, aunque sólo suele aplicarse para un pequeño intervalo inicial del ecograma.

En resumen, podemos decir que el Método de las Imágenes necesita un tiempo de cálculo demasiado elevado cuando se quieren simular respuestas impulsivas de duración normal, debido a que el número de fuentes imagen virtuales aumenta exponencialmente con la longitud de la respuesta impulsiva. Además no puede tener en cuenta procesos difusivos en las reflexiones de las paredes, limitándose al modelo especular. Tampoco puede aplicarse para superficies no planas.



## 2.4. MÉTODO DEL TRAZADO DE RAYOS

### 2.4.1. Introducción

El Método del Trazado de Rayos (*Ray Tracing Method*) está basado también en la Acústica Geométrica, por lo que presenta las limitaciones inherentes de esta teoría, aunque a diferencia del Método de las Imágenes, sí puede tener en cuenta la difusión en las reflexiones cuando el sonido incide sobre superficies rugosas. Estos efectos son muy importantes, sobre todo para longitudes de onda pequeñas, y pueden cambiar por completo el valor de parámetros tan importantes como el Tiempo de Reverberación. En capítulos posteriores estudiaremos estos efectos.

La forma de proceder en este método es muy sencilla. Supongamos que el sonido es radiado desde una fuente sonora en forma de *rayos* o *partículas sonoras*. Cada una de estas partículas lleva una cierta energía por unidad de tiempo, es portadora de parte de la potencia emisora de la fuente, y siguiendo trayectorias rectilíneas, se propaga a la velocidad del sonido. Cada vez que intersecta con una pared u obstáculo del recinto se refleja desviándose hacia una nueva dirección. Su energía disminuye en función del coeficiente de absorción de la pared.

Por medio de ciertos detectores, *micrófonos*, los rayos pueden ser detectados en una u otra región de la sala. Toda la información que transmiten puede ser anotada para un posterior análisis: tiempo de impacto, dirección de incidencia, fracción de potencia de la fuente emisora, etc. Después de trazar todas las partículas y procesar los datos de la simulación, se puede reconstruir la respuesta impulsiva medida en el detector especificado.

Las variaciones más comunes en las que se utiliza el Método del Trazado de Rayos son:

1. Trazado de Rayos Puro.
2. Modelos Híbridos.
3. Métodos de Haces Divergentes.

### 2.4.2. Trazado de Rayos Puro (*Pure Ray Tracing*)

Bajo este nombre se agrupan aquellos modelos en los que, a partir de una discretización del frente de ondas emitido por la fuente, se utilizan los rayos sonoros directamente como portadores de energía. Debido a que la probabilidad de que un rayo interseccione con un punto es cero, este modelo necesita de receptores no puntuales. Los receptores no pueden ser puntos, sino que deben ser superficies o volúmenes finitos. El primer trabajo referenciado en el que aparece una descripción y aplicación de este método es el de Krokstad, Strom y Sorsdal (Krokstad *et al.*, 1968). En este trabajo se hace una exposición muy clara de las

hipótesis del modelo. Para distintas salas, se presentan los ecogramas energéticos calculados para distintos receptores planos, así como también gráficas ilustrativas de la evolución en el tiempo de los impactos de los rayos sonoros sobre el patio de butacas. Más tarde, Schroeder (Schroeder, 1970) calcula con esta técnica el tiempo de reverberación de distintas salas demostrando la utilidad del método y poniendo de relieve las excesivas simplificaciones que conlleva el uso de la teoría acústica estadística, y plantea las bases para la simulación y auralización de sonido en salas virtuales. En 1973, Haviland y Thanedar (Haviland y Thanedar, 1973) utiliza el Método del Trazado de Rayos para obtener la respuesta impulsiva en presión de una sala rectangular utilizando distintas señales en la fuente. También es muy interesante el estudio presentado por Juricic y Santon (Juricic y Santon, 1973) donde hacen una comparación entre el método de las imágenes y el del trazado de rayos y presentan diferentes validaciones experimentales en salas, siguiendo sus investigaciones en posteriores trabajos (Santon, 1976) (Santon, 1980). En la misma línea, Embrechts (Embrechts, 1982) simula con esta técnica la directividad del campo sonoro y aplica la técnica de la reducción de la varianza para mejorar sus resultados. Es de destacar la interesante aportación de Kullowski (Kullowski, 1982) (Kullowski, 1984) que presenta un tratamiento estadístico del método más formal que los anteriores autores, aunque todavía dejando varias cuestiones por responder.

En la actualidad, son varios los autores que siguen, bastante fielmente, la filosofía de estas técnicas (Heinz, 1993) (Dalenbäck, 1995). Sin embargo, desde mediados de los ochenta las tendencias han ido tomando un carácter mixto, mezclando diversas técnicas entre sí (como veremos a continuación), o introduciendo diferentes hipótesis atrevidas sobre el carácter de las reflexiones y la propagación de los rayos. Por ejemplo, Ondet y Barbry (Ondet y Barbry, 1989) utilizan un modelo de rayos cuya propagación viene dada por una distribución de caminos o distancias generado según un proceso de Poisson, y que intenta modelizar el espaciamiento y densidad de muebles o máquinas principalmente en fábricas. Las reflexiones son de tipo especular para distancias asociadas a las paredes y de difusión uniforme aleatoria para distancias asociadas entre elementos interiores.

### **2.4.3. Modelos Híbridos (*Híbrid Ray Tracing*)**

Vorländer (Vorländer, 1989) presenta una aplicación del Método del Trazado de Rayos (puro) para optimizar computacionalmente el Método de las Imágenes. Los rayos son enviados desde la fuente y seguidos por toda la sala, conforme van reflejándose, hasta un cierto tiempo máximo  $t_{max}$ . Cuando pasan por el área asociada al receptor, son anotados en un fichero, junto con la secuencia de índices de las paredes seguidas en las reflexiones. Cada una de esta secuencia de índices equivale a una fuente imagen que es visible desde el receptor, y que puede calcularse fácilmente. Por supuesto, muchos rayos darán lugar a la misma imagen, por lo que para evitar repeticiones, es recomendable antes de anotar un rayo, comprobar que

su secuencia de índices no ha sido anotada previamente (cada rayo equivale a una reflexión o fuente imagen).

Este método, tal como ha sido enunciado, no es aplicable a receptores puntuales. La extensión finita del detector esférico hace que algunos rayos sean anotados y relacionados con fuentes imagen que en realidad no son visibles desde el centro de la esfera. Esto significa que en la lista de fuentes imagen hay algunas fuentes incorrectas. Si se quiere corregir este efecto para tener un resultado asociado a un receptor puntual, habrá que aplicar un proceso de "recorrido hacia atrás" desde el receptor hasta la fuente (*back tracing*), siguiendo en forma inversa el camino relacionado con la secuencia de índices anotada, y aplicando el "test de visibilidad" en cada paso, tal como fue explicado en el Apartado 2.3.

El principal inconveniente de los modelos híbridos está en la inevitable pérdida de imágenes que se produce asociada al número finito de rayos empleado y al área de las superficies del recinto. Esto es debido a que el método, en realidad, consiste en una manera eficiente de encontrar fuentes imagen visibles en la inmensidad del árbol de fuentes imagen, aunque nada impide que ciertas fuentes imagen queden por encontrar (sobre todo imágenes relacionadas con superficies de área pequeña). Habrá ramas del árbol que quedarán por explorar con la consiguiente falta de energía asociada a las fuentes perdidas. Es por ello, que los modelos híbridos se aplican, principalmente, para calcular la parte temprana de los ecogramas. Pasado un cierto límite temporal, la pérdida de imágenes que se produce es tal que las respuestas impulsivas quedan falseadas con una cierta convexidad hacia abajo, lejos del decaimiento lineal esperado.

Por un argumento geométrico básico, la relación entre el número de rayos mínimo  $N_{min}$  que debe lanzar la fuente, el tiempo máximo  $t_{max}$  a estudiar, y el área de la superficie más pequeña  $A_{min}$ , es:

$$N_{min} = 4 \mathbf{p} (c t_{max})^2 / A_{min} \quad (2.17.)$$

En los principales programas comerciales, se utiliza el modelo híbrido para calcular la parte inicial de la respuesta impulsiva de un cierto receptor o micrófono, y la cola reverberante es calculada mediante métodos estadísticos: "Odeon" (Naylor, 1993), "Epidauro" (Maercke y Martin, 1993), "Raynoise" (Leonato, 1994).

#### 2.4.4. Trazado de Haces Divergentes (*Diverging Beam Tracers*)

Con este nombre se agrupan diversos modelos con la característica común de que cada rayo tiene asociado un haz de base divergente, ya sea un cono circular, una pirámide, etc. Este tipo

de modelos, en general, están diseñados para cumplir el objetivo de acelerar el cálculo, a costa de una inevitable falta de precisión en los resultados.

Por ejemplo, se puede establecer un "cono de detección" alrededor del rayo que permita "alumbrar" a varios de los receptores definidos en el modelo por el usuario. Dentro del esquema de modelo híbrido, Maercke y Martin (Maercke y Martin, 1993) asignan a cada rayo el eje de un estrecho cono circular. Después de cada reflexión del rayo, son varios los receptores afectados por la fuente imagen correspondiente a la misma secuencia de paredes señalada por la historia del rayo. Este método es potencialmente el mismo que el de Vorländer, pero utilizar conos en vez de rayos permite tratar los receptores como puntos, sin ralentizar demasiado el cálculo.

El principal problema de esta técnica es que la reflexión de cada uno de los conos se calcula simplemente a través de la reflexión del rayo eje, debido a la dificultad que entraña este cálculo en las áreas con intersecciones entre paredes. En nuestra opinión, esta simplificación descalifica totalmente la validez del modelo porque enturbia los resultados enormemente. Por ejemplo, lanzando 100.000 rayos y después de 1 seg, el área asociada a un rayo que incide normalmente es de 15 m<sup>2</sup> y, si la incidencia es con un ángulo de 80°, el área asociada es de  $15/\cos(80^\circ) = 85$  m<sup>2</sup>. A la vista de estos valores resulta difícil creer que la reflexión de un cono pueda sustituirse por la de un rayo.

El modelo presenta también el problema de que los haces cónicos no pueden llenar por completo la esfera emisora, lo que obliga a los autores a utilizar conos que se solapan con funciones de densidad de la energía de tipo gaussiano para poder normalizar en los haces.

Otros autores como Lewers (Lewers, 1993) o Farina (Farina, 1995) utilizan haces piramidales alrededor de los rayos, en vez de haces cónicos, lo que evita el problema del solapamiento. Pero, de igual manera, el error que se puede introducir al utilizar haces como si fueran rayos es muy grande, porque las reflexiones pierden definición si tenemos en cuenta que las bases de los haces crecen rápidamente (sin límite en el caso de incidencia rasante).

En los modelos de haces que acabamos de ver, la divergencia esférica se tiene en cuenta, no por una menor densidad de puntos o rayos (que es la base del trazado de rayos puro) sino por un simple factor  $1/r^2$  que se aplica al área asociada a la base de cada haz. Es evidente que esta manera de proceder introduce serios errores en la simulación porque, de forma ficticia, se extiende a un área (la base del haz) las propiedades calculadas para un rayo y que sólo servirían para un punto.

Incluso se produce otro problema grave de subestimación progresiva de la parte tardía de la respuesta impulsiva, debido al incremento de la base del haz, que llega a ser más grande que

la sala: el modelo no tiene en cuenta la energía que se pierde cuando el área asociada a la base del haz sobrepasa los contornos característicos de la sala (Farina, 1995).

Todos los modelos de haces divergentes, para corregir este error, añaden una cola reverberante a la primera parte de la respuesta impulsiva. Esta es la principal característica de la mayor parte de programas comerciales. En ellos, las reflexiones tempranas se calculan determinísticamente con el método preciso establecido por Vorländer, o con haces divergentes, mientras que la cola reverberante se completa mediante una aproximación estadística.

Por ejemplo, el programa "Odeon" (Naylor, 1993) establece una distancia entre imagen y receptor, a partir de la cual la información del modelo es simplemente sustituida por una cola reverberante igual para toda la sala. Este tipo de tratamiento se basa principalmente en la suposición de que los detalles de las reflexiones individuales no son de interés y de que el campo reverberante en la sala es homogéneo. El programa "Epidaure" (Maercke y Martin, 1993) también utiliza este tipo de simplificaciones generando colas reverberantes ficticias a partir de un cierto tiempo estadístico. El programa "Raynoise" limita el análisis a 15 reflexiones como máximo, lo que evidentemente impide analizar respuestas impulsivas largas (Vela, 1996).

En nuestra opinión, al igual que en la de otros muchos autores (Dalenbäck, 1995), los modelos de haces divergentes que incurren en este tipo de simplificaciones son contrarios al objetivo inicial de una correcta modelización, más aún si van a ser objeto de una posterior auralización. Por ejemplo, los asientos situados debajo de un balcón no deberían tener en absoluto la misma cola reverberante que otros situados en la parte principal de la sala. En estos modelos se pierde muchísima información.

Así y todo, existen modelos de haces divergentes que sí respetan la particularidad sonora reverberante de cada punto de la sala. Lewers (Lewers, 1993) utiliza haces piramidales junto con un modelo dinámico de intercambio de radiación para poder contemplar el efecto de la difusión, donde las superficies de la sala actúan como segundas fuentes que reemiten parte de la energía incidente en forma difusa. De forma dinámica se genera un campo reverberante diferenciado.

También es muy interesante el trabajo de Heinz (Heinz, 1993), en el que la parte temprana del ecograma se calcula mediante un modelo híbrido sin difusión según el algoritmo de Vorländer, mientras que la parte tardía se calcula mediante un ray tracing puro con difusión lambertiana, esquema que recoge las principales virtudes de los dos métodos, imágenes y rayos.

Actualmente se está cuestionando también el modelo de primeras reflexiones totalmente especulares obtenidas con el método de las imágenes (Dalenbäck, 1995), porque aunque la precisión espacial-temporal es muy alta, la inevitable falta de difusión puede ser origen de impresiones deficientes en el proceso de auralización.

#### 2.4.5. Correspondencia Continuo-Discreto

El esquema analítico de este modelo discreto debe ser equivalente al que expusimos en el Capítulo 1 para obtener el campo sonoro en un receptor según la interpretación de la acústica geométrica.

Necesitamos encontrar una expresión discreta para la ecuación que definía el campo sonoro en un receptor de área  $S$  como:

$$I(t) = \iint_{\Omega} I_t(\mathbf{j}, \mathbf{q}) d\Omega \quad (2.18.)$$

donde  $I(t)$  es la intensidad del instante  $t$  como suma de las reflexiones  $I_t(\mathbf{j}, \mathbf{q})$  llegadas en cualquier dirección  $\Omega$  en el instante  $t$ . Cada una de estas reflexiones lleva la información de la señal emitida por la fuente.  $I_t(\mathbf{j}, \mathbf{q})$  es la función que reconstruye el modelo, y será la base de nuestro fichero de rayos, donde para cada receptor tendremos anotadas una parte muestral de todas las reflexiones llegadas a esas coordenadas espaciales.

Recordemos que  $I(t)$  corresponde con la respuesta impulsional de la sala cuando la excitación o señal de la fuente es un impulso. Si se trata de una señal impulsional caracterizada por un *tiempo de pulso*  $t_p$ , podemos decir que el producto de  $I_t(\mathbf{j}, \mathbf{q})$  por  $t_p$  es la energía por unidad de área aportada por la reflexión en cuestión. De esta manera, las reflexiones llegadas al mismo tiempo configuran la dependencia direccional de la energía que está llegando al receptor en ese instante.

El método del trazado de rayos, por razones evidentes de tipo computacional, necesita discretizar el frente de ondas en rayos sonoros. Así pues, este método no reproduce completamente la función distribución direccional dependiente del tiempo  $I_t(\mathbf{j}, \mathbf{q})$ , sino que sólo obtiene una *muestra* de la misma. La correspondencia continuo-discreto la obtenemos de la secuencia de valores:

$$\{i_i(t_i, \mathbf{j}_i, \mathbf{q}_i)\}_{i=1}^n = \{i_i\}_{i=1}^n \quad (2.19.)$$

donde  $i_i(t_i, \mathbf{j}_i, \mathbf{q}_i)$  es el rayo recibido en un tiempo de llegada  $t_i$ , unos ángulos de incidencia  $\mathbf{j}_i, \mathbf{q}_i$ , con una energía por unidad de tiempo y de área  $i_i$  de la que es portador. Llamamos  $n$

al número de rayos recibidos en el receptor diferenciados entre si por el subíndice  $i$ . A partir de ahora cada uno de ellos será designado por  $i_i$ , siendo  $i=1, \dots, n$ .

La función  $I(t)$ , distribución temporal de la intensidad sonora reflejada, se obtiene sumando aquellas reflexiones llegadas en un mismo tiempo  $t$ . Para obtener su equivalencia en el campo discreto, necesitamos un conjunto de intervalos de tiempo  $\Delta t_k$ , donde  $k=1, 2, \dots, K$  siendo  $K$  el número de intervalos, en los que obtener la intensidad promedio de los  $n_k$  rayos recibidos en el intervalo  $k$ -ésimo.

Así, si llamamos  $i_{i,k}$  a los rayos recibidos durante  $\Delta t_k$ , donde cada uno aporta energía durante  $\Delta t_{i,k}$  (suponemos que  $\Delta t_{i,k}$  es un tiempo muy pequeño comparado con  $\Delta t_k$  para evitar intersecciones entre diferentes intervalos) podemos definir la *intensidad promedio*  $i_k$  en  $\Delta t_k$  como:

$$I_k = \frac{1}{\Delta t_k} \sum_{i=1}^{n_k} i_{i,k} \Delta t_{i,k} \quad (2.20.)$$

En el caso particular de que todos los intervalos  $\Delta t_{i,k}$  fueran de igual duración, y coincidan con  $\Delta t_k$ , no haría falta multiplicar y dividir por el intervalo de tiempo. La intensidad promedio en  $\Delta t_k$  simplemente sería:

$$I_k = \sum_{i=1}^{n_k} i_{i,k} \quad (2.21.)$$

La secuencia de valores:

$$\{I_k\}_{k=1}^K \quad (2.22.)$$

es el *ecograma* que corresponde con  $I(t)$  y que visualizamos en el programa de simulación.

#### 2.4.6. Aspectos Energéticos

La suma entre rayos con diferentes ángulos de incidencia se hace simplemente de forma escalar. Recordemos que estamos con la suposición de campo incoherente, y que seguimos una descripción a través de la intensidad sonora, no a través de la presión sonora. No tenemos en cuenta la fase porque la suposición anterior significa que interferencias constructivas se compensan con interferencias destructivas, y así la superposición de dos rayos, de dos frentes de ondas de presiones  $p_1$  y  $p_2$ , equivale simplemente a un nuevo frente de ondas de intensidad proporcional a la suma de cuadrados de presiones. La intensidad resultante es  $i_1 + i_2$ , es decir, la suma escalar de las intensidades de los rayos.

Supongamos que la fuente sonora, de tipo impulsivo, viene caracterizada por una potencia emitida  $W_o$  en vatios durante el tiempo que dura el pulso  $t_p$  (fig.2.3.):

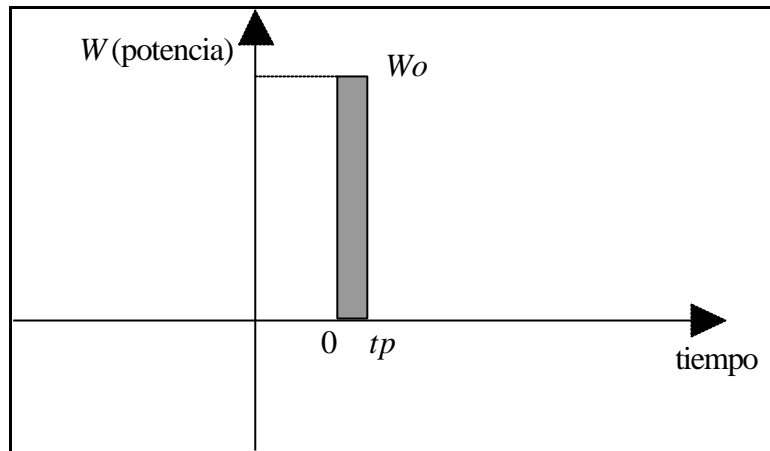


Fig. 2.3. Fuente sonora de tipo impulsivo.

La función *potencia emisora de la fuente*  $W(t)$  puede definirse a través de la función escalón unitario o de Heaviside  $h(t)$  (Andrews y Shivamoggi, 1988):

$$W(t) = W_o u(t - t_p)$$

donde

$$u(t - t_p) = h(t) - h(t - t_p) = \begin{cases} 1, & t < t_p \\ 0, & t > t_p \end{cases} \quad (2.23.)$$

Supongamos que  $N$  partículas sonoras o rayos abandonan la fuente sonora, y todas ellas disponen de la misma energía por unidad de tiempo  $w_i(t)$ :

$$w_i(t) = \frac{W(t)}{N} = \frac{W_o}{N} u(t - t_p) \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N \quad (2.24.)$$

Cada una de estos rayos sufrirá reflexiones en los tiempos  $t_{r1}, t_{r2}, \dots, t_{rk}$ , en las que irá disminuyendo su energía según los coeficientes de absorción  $\mathbf{a}_{r1}, \mathbf{a}_{r2}, \dots, \mathbf{a}_{rk}$ . Llamemos  $p_i(t)$  a la energía por unidad de tiempo del rayo viajando, que será una función como  $w_i(t)$  pero reducida:

$$p_i(t) = w_i(t) [1 - \mathbf{a}_{r1} h(t - t_{r1})] [1 - \mathbf{a}_{r2} h(t - t_{r2})] \dots [1 - \mathbf{a}_{rk} h(t - t_{rk})] \quad (2.25.)$$

Un receptor cualquiera podrá detectar el paso de estos rayos, no sólo una vez, sino varias veces, según se vayan reflejando. En principio, en los receptores, como micrófonos que son, no hay absorción de energía.



Vamos a calcular la energía captada durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$  entre dos tiempos  $t_k$  y  $t_{k+1}$ . Supongamos que el número de rayos que aportan energía durante este intervalo es  $n_k$ .

La energía que aporta cada rayo, a partir del momento de llegada  $t_i$ , con  $i=1, \dots, n_k$ , durante el tiempo que afecta al intervalo de medida, será la energía total que suministra al receptor:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} p_i(t - t_i) dt \quad (2.26.)$$

La suma para todos los rayos, promediada en el intervalo temporal considerado, será la *energía por unidad de tiempo recibida en el receptor durante el intervalo  $t_k, t_{k+1}$* :

$$E_k = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{n_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} p_i(t - t_i) dt \quad (2.27.)$$

y dividiendo por el área  $A$  del receptor tenemos la *intensidad medida en el receptor durante el intervalo  $t_k, t_{k+1}$* :

$$I_k = \frac{1}{A \Delta t} \sum_{i=1}^{n_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} p_i(t - t_i) dt \quad (2.28.)$$

En el caso de que todos los rayos que aportan energía al intervalo  $k$ -ésimo llegasen al mismo tiempo  $t_k$  y que el tiempo de pulso de la fuente sonora  $t_p$  coincidiese con  $\Delta t$ , la expresión anterior quedaría más sencilla, correspondiendo simplemente a la suma de potencias de los rayos detectados en el intervalo  $k$ -ésimo:

$$I_k = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{n_k} p_i \quad (2.29.)$$

Este tipo de expresiones son similares a las utilizadas por otros autores. Por ejemplo, Kullowski (Kullowski, 1982), asocia una energía impulsional  $e_{i,k}$  a cada rayo, de manera que la energía  $\mathbf{e}_k$  recibida en el intervalo  $k$ -ésimo es:

$$\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{n_k} e_{i,k} \quad (2.30.)$$

Juricic y Santon (Juricic y Santon, 1973) utilizan la intensidad direccional de emisión, por lo que la intensidad recibida es:

$$w' = \sum_{j=1}^N I(\mathbf{q}_j, \mathbf{f}_j) a(\mathbf{q}_j, \mathbf{f}_j) D w'_j \quad (2.31.)$$

donde  $\Delta w_j$  es el ángulo sólido asociado a cada uno de los  $j=1, \dots, N$  rayos emitidos con intensidad de emisión  $I(\mathbf{q}_j, \mathbf{f}_j)$  y absorción según el factor  $\mathbf{a}(\mathbf{q}_j, \mathbf{f}_j)$ .

#### 2.4.7. Coste Computacional del Método

El tiempo de cálculo del método del trazado de rayos será proporcional al *número de vuelos* que haya que trazar en el modelo.

Veamos cuál es el tiempo necesario para analizar un vuelo:

- Dado un rayo caracterizado con un punto origen y una dirección de salida, tal como vimos en la figura 2.2, habrá que encontrar la pared en la va a intersectar. Esto requiere el estudio de la posible intersección en cada una de las paredes,  $n_{PAREDES}$ . En principio, se podría pensar que la búsqueda puede detenerse en el momento en que se encuentre una superficie que permita una intersección válida. Sin embargo, cuando la sala es convexa, pueden aparecer distintas paredes en las que se den intersecciones válidas, por lo que habrá que examinar todas las paredes, y elegir aquella intersección que se haya dado con un menor tiempo. El coste computacional de esta búsqueda será proporcional al número  $n_{PAREDES}$ . Al igual que vimos en el método de las imágenes, evaluar una intersección, significa realizar por lo menos 30 operaciones, en las que se invierte un tiempo básico que llamamos  $t_{1intersección}$ .
- Habrá que evaluar si el rayo es detectado por alguno de los  $n_{RECEPTORES}$ . Para ello, será necesario examinar todos y cada uno de los receptores. En el caso de receptores esféricos y por simplificar, podemos aproximar también en 30 el número de operaciones necesarias para el cálculo en cada receptor, invirtiéndose un tiempo elemental  $t_{1receptor} \approx t_{1intersección}$ , similar al que acabamos de señalar.
- También tendremos que evaluar la nueva dirección del rayo tras la reflexión, lo que puede llevarnos un tiempo elemental aproximado de  $t_{1reflexion} \approx t_{1intersección}$ .

Así, el tiempo de cada reflexión o vuelo será:

$$t_{1vuelo} = n_{paredes} * t_{1interseccion} + n_{receptores} * t_{1interseccion} + t_{reflexion} \quad (2.32.)$$

Esta operación se repetirá para el número total de vuelos que se realicen. Por término medio, cada rayo seguirá reflejándose el número de reflexiones por unidad de tiempo medio de la sala  $\langle n \rangle$ , multiplicado por el tiempo máximo de estudio  $t_{MAX}$ :  $\langle n \rangle t_{MAX}$ .

Multiplicando por el número de rayos  $N$  inicialmente emitido, y por el tiempo de cada vuelo, tendremos el tiempo total empleado por el método para procesar  $N$  rayos durante un  $t_{MAX}$  en una sala de  $\langle n \rangle$  reflexiones por segundo:

$$t_{METODO\_RAY\_TRACING} = t_{1vuelo} * N * \langle n \rangle * t_{MAX} \quad (2.33.)$$

El coste computacional del método del trazado de rayos es proporcional al tiempo de estudio  $t_{MAX}$  requerido para el cálculo de la respuesta impulsional. Recordemos que el método de las imágenes presentaba una dependencia exponencial con este tiempo. Es por esto que el método del trazado de rayos suele utilizarse más que el de las imágenes.

Calculemos el tiempo de computación necesario para resolver el ejemplo que propusimos en el Apartado 2.3.3. Recordemos que teníamos 30 superficies, y que el tiempo necesario para evaluar una intersección era  $t_{1intersección}=10^{-6}$  seg. Supongamos que utilizamos 100 receptores. Según la ecuación (2.32.) el tiempo necesario para evaluar un vuelo es:

$$t_{1vuelo} = 30 \cdot 10^{-6} + 100 \cdot 10^{-6} + 10^{-6} = 131 \cdot 10^{-6} \text{ seg.} \quad (2.34.)$$

Como la sala tiene un recorrido libre medio de  $l = 13.3$  m, el número medio de reflexiones será  $\langle n \rangle = c/l = 25.6$  cada segundo. Suponiendo un  $t_{MAX} = 0.4$  seg y un número inicial de rayos  $N = 200000$  rayos, podemos decir según la ecuación (2.33.), que el tiempo requerido por el método es:

$$t_{METODO\_RAY\_TRACING} = 131 \cdot 10^{-6} \cdot 200000 \cdot 25.6 \cdot 0.4 = 268 \text{ seg.} \quad (2.35.)$$

En menos de 5 minutos tendríamos la respuesta impulsional de la sala. Y si quisiéramos estudiar un ecograma más largo, el tiempo sencillamente aumentaría de forma lineal: 0.8 seg de ecograma necesitarían menos de 10 minutos. Esta es una gran ventaja del método del trazado de rayos.

En principio no puede saberse el número de rayos necesario para obtener resultados fiables aunque, en primera aproximación, podemos decir que será proporcional al número de imágenes del receptor o al número de reflexiones teórico de la sala en el intervalo de tiempo seleccionado. En última instancia, el número de rayos dependerá de factores tales como las posiciones de la fuente y el receptor, de la absorción, difusión y geometría de la sala, e incluso del tiempo de integración del ecograma.

Como veremos en el Capítulo 4, hemos encontrado la manera de cuantificar el error de estimación que introduce el método a causa de utilizar un número finito de rayos. Así, de manera automática, cada respuesta impulsional o parámetro acústico tendrá asociado un valor de fiabilidad que nos permitirá saber cuándo el número de rayos utilizados es suficiente.

## **CAPÍTULO 3**

# **Implementación y Validación del Método del Trazado de Rayos**

### 3.1. DESARROLLO DE UN MODELO DE TRAZADO DE RAYOS PARA LA SIMULACIÓN ACÚSTICA DE SALAS

Como hemos visto en el Capítulo anterior, las técnicas de trazado de rayos vienen utilizándose en el área de acústica desde los trabajos pioneros de Krokstad (Krokstad *et al.*, 1968) hasta los más recientes de Heinz (Heinz, 1994) o Lam (Lam, 1996). Esta técnica también ha tenido un gran desarrollo en el campo de las representaciones de imágenes por ordenador (Glassner, 1993). Sin embargo, debido a las diferentes longitudes de onda a considerar en el método del trazado de rayos, las limitaciones para la simulación de un campo acústico son mucho mayores que las necesarias para representar el campo visual. Difícilmente podamos reproducir sólo con técnicas de trazado de rayos la forma en que oiremos una determinada partitura en un recinto. En cualquier caso, esta técnica resulta muy útil como una primera aproximación al estudio del comportamiento de la sala y fundamentalmente en la localización de problemas de primer orden como ecos, focalizaciones, etc.

Desde un punto de vista educativo y de investigación hemos considerado indispensable contar con una herramienta de este tipo, de desarrollo propio, con funciones de programación claras y abiertas a una continua validación. Una herramienta que, lejos de las "cajas negras" que constituyen los programas comerciales, nos permitiese experimentar con total libertad sobre distintas hipótesis, opciones y configuraciones.

#### 3.1.1. Características del Programa

El programa permite:

- a. Definir superficies planas y curvas a través de un mapeo isoparamétrico. Cada superficie tiene asociadas diferentes propiedades de absorción en varias octavas.
- b. Localizar micrófonos omnidireccionales en puntos de interés. Los micrófonos permiten estudiar la evolución espacio temporal de la energía dentro del recinto.
- c. Especificar distintos tipos de fuentes sonoras, omnidireccionales y direccionales. Éstas a su vez pueden comportarse generando una distribución equiespaciada de rayos (igual incremento de ángulo sólido) o una distribución aleatoria.
- d. Definir superficies en las que se ubicarán los receptores (audiencia) especificando las dimensiones y características de los mismos.
- e. Definir volúmenes de contorno para agrupar superficies o receptores y facilitar su búsqueda.

- f. Procesar los resultados obtenidos ajustando la potencia de las fuentes y proveerlas de distintos retardos.
- g. Asociar propiedades de difusión a las superficies, pudiendo seguir un modelo lambertiano, un modelo isótropo, o simplemente especular.

El programa, para varias frecuencias, proporciona dos tipos de resultados:

1. *Parámetros acústicos globales de la sala.* A partir del cálculo del recorrido libre medio y de las áreas de absorción, el programa ofrece resultados relacionados con la teoría estadística como son el tiempo estadístico de la sala y los tiempos de reverberación de Sabine, Eyring, Millington y Estadístico.
2. *Parámetros acústicos dependientes de la posición.* Para cada uno de los receptores definidos por el usuario, el programa muestra los valores calculados de distintos parámetros acústicos: tiempos de reverberación  $RT$  y  $EDT$ , definición  $D$ , claridades  $C_{50}$  y  $C_{80}$ , tiempo central  $T_s$ , tiempo de ascenso  $T_r$ , factores de energía lateral  $LEF$  y  $LEF'$ , etc. Con un menú desde la pantalla (fig. 3.1.) el usuario puede seleccionar el parámetro que desea visualizar así como la octava de frecuencia en la que aparecerá.

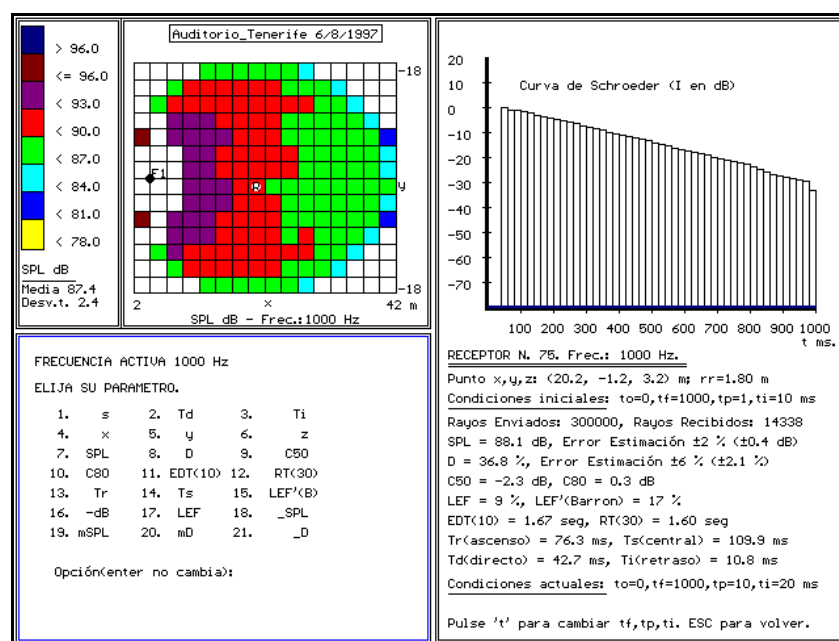


Fig.3.1. Pantalla típica del programa.

Podemos desplazarnos sobre los receptores representados y obtener para cualquiera de ellos la correspondiente respuesta impulsiva energética (intensidad en  $\text{watts}/\text{m}^2$  o dB frente al tiempo en ms) junto con una lista de los parámetros calculados. Esto permite evaluar visualmente la calidad de resultados e identificar problemas de focalización, ecos o reflexiones

tardías. El *ecograma* obtenido depende del tiempo de duración del pulso emitido por la fuente y del tiempo de integración asumido para el micrófono o receptor y distingue, en diferentes colores, la energía aportada por la onda directa (rojo), primeras reflexiones (azul), segundas reflexiones (celeste) y sucesivas (blanco). También puede visualizarse la correspondiente *curva integrada de Schroeder* (fig. 3.1.).

### 3.1.2. Algoritmo Básico

El esquema a seguir en el proceso de simulación es el siguiente:

**1)Especificaciones usuario:**

- geometría
- coeficientes de absorción/difusión
- tipo de fuente
- nº de rayos, tiempo final, etc.
- receptores

β

**2)Trazado de rayos:**

- emisión y seguimiento
- almacenamiento en fichero de los rayos incidentes.

β

**3)Análisis:**

- ordenación de los rayos por receptor y tiempo
- cálculo de parámetros acústicos para todos los receptores.

β

**4)Presentación gráfica:**

- visualización evolución rayo
- mapas de parámetros
- reflectogramas
- ecogramas mediante ajuste del tiempo del pulso de la fuente y del tiempo de integración

Desde el punto de vista del cálculo, el rayo es una estructura con varios campos, tal como aparece en la Tabla 3.1. Según evoluciona en el tiempo y va siendo reflejado en las superficies, toda la información pertinente es modificada y actualizada.

TABLA 3.1.  
Campos de información de la estructura RAYO.

```
typedef struct
{
  VECTOR v;    /* dirección del rayo */
  VECTOR p;    /* punto de salida */
  float w250, w500, w1000, w2000;    /* potencia a distintas frec. */
  float t;     /* tiempo de viaje */
  int r;       /* número de reflexiones sufridas */
  int ns;     /* última superficie con que intersectó */
  int ne;     /* último elemento con que intersectó */
  float ri;   /* número identificativo de rayo */
}
RAYO;
```

La potencia inicial del rayo es la correspondiente al cociente entre la potencia de la fuente y el número de rayos a emplear, datos introducidos por el usuario. En cada reflexión, la potencia va disminuyendo según el coeficiente de absorción medio de la superficie encontrada, para distintas bandas de frecuencia.

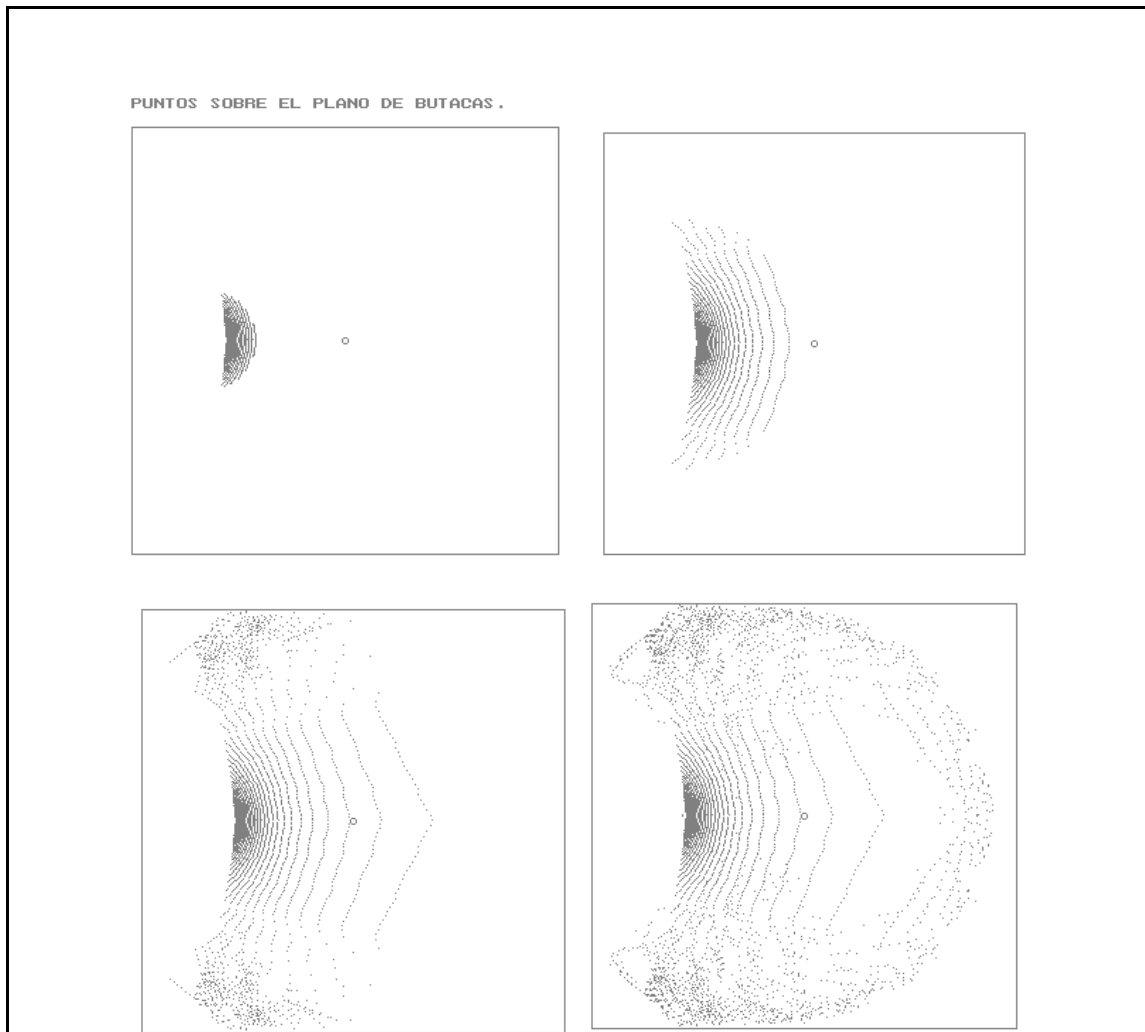
Para cada frecuencia el coeficiente de absorción puede ser distinto, según especifique el usuario. Sería muy sencillo incorporar al programa una posible dependencia del coeficiente de absorción con el ángulo de incidencia del rayo con la superficie.

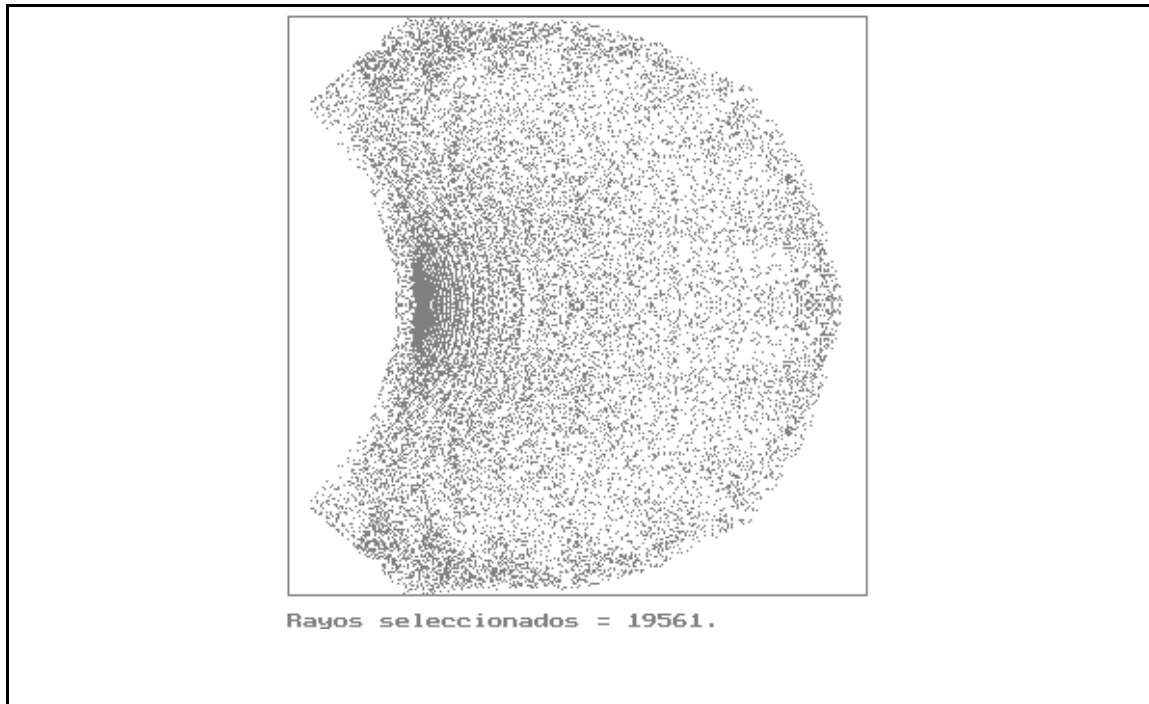
Para simular las reflexiones en el interior de la sala a partir de un punto emisor o fuente sonora, buscamos todas las posibles intersecciones del rayo saliente con las superficies definidas en forma analítica. Aquella que se dé para la cara interior de una superficie y con un tiempo menor es la correcta. Todo rayo incidente en una superficie en la que queremos medir, receptor o micrófono, es anotado en un fichero, de forma que posteriormente esta información



es procesada para la obtención de los correspondientes ecogramas y el cálculo de todos los parámetros acústicos.

La ventaja de almacenar la información de todos los rayos de interés es la facilidad de su posterior tratamiento. Una aplicación interesante es visualizar la distribución espacial de la energía sonora avanzando sobre los posibles receptores del patio de butacas. En las siguientes gráficas para diferentes tiempos (fig. 3.2.), se muestra el impacto de los rayos sobre los receptores del patio de butacas de un auditorio de planta semicircular.





**Fig. 3.2.** Evolución temporal de los rayos incidentes sobre el patio de butacas de una sala.

## 3.2. DEFINICIÓN DE LA GEOMETRÍA

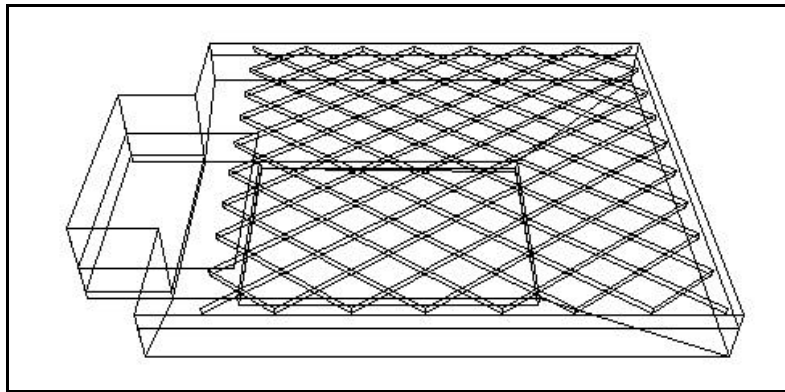
### 3.2.1. Nodos y Conectividades

La geometría del recinto de estudio se introduce a través de un mapeo isoparamétrico que nos permite definir superficies de 3, 4 y 8 nodos.

Hemos hecho la siguiente clasificación de superficies:

1. *Triángulo* : superficie plana, 3 nodos.
2. *Paralelogramo*: superficie plana, 4 nodos.
3. *Trapezoide*: superficie plana, 4 nodos.
4. *Tejas*: superficie curva, 4 nodos.
5. *Ocho\_nodos*: superficie curva, 8 nodos.

Las superficies planas se obtienen mediante interpolación de los nodos a través de funciones de forma lineales, mientras que las superficies curvas, muy útiles para reproducir por ejemplo bóvedas, se obtienen mediante funciones de forma cuadráticas. En la siguiente figura (fig. 3.3.), se muestra un ejemplo de una geometría diseñada a partir de superficies planas de tipo paralelogramo.



**Fig. 3. Ejemplo de una geometría definida a través de superficies planas de 3 nodos.**

A efectos prácticos, los nodos y las conectividades que definen la geometría son valores numéricos que deben aparecer en respectivos ficheros tipo ASCII que son leídos al comienzo del programa.

El fichero de nodos (ver ejemplo en la Tabla 3.2.) es una simple descripción de las coordenadas que corresponden a cada uno de los puntos.

**TABLA 3.2.**

Nodos que definen una geometría. Ejemplo Sala Rectangular 30x20x10 m<sup>3</sup>.

NumNodo	XĪ [0,30]	YĪ [-10,10]	ZĪ [0,10]
1	0.0	-10.0	0.0
2	0.0	-10.0	10.0
3	30.0	-10.0	10.0
4	30.0	-10.0	0.0
5	0.0	10.0	0.0
6	0.0	10.0	10.0
7	30.0	10.0	10.0
8	30.0	10.0	0.0

El fichero de conectividades (ver ejemplo en la Tabla 3.3.) contiene básicamente las conectividades o definiciones de cada superficie, mediante una simple secuencia de los nodos que la constituyen. Además, para cada superficie, se especifica qué tipo de absorción o material le corresponde y qué tipo de geometría va a representar (es decir, triángulo, paralelogramo, etc.).

**TABLA 3.3.**

Conectividades que definen una geometría. Ejemplo Sala Rectangular 30x20x10 m<sup>3</sup>.

Número de superficies_objetos: 6
----------------------------------

Número de grupos (sin contar el cero): 0							
GRUPO 0							
Nombre Volumen: ESPACIO							
Tipo Volumen: 0							
Esquina Inferior: 0.0 0.0 0.0							
Esquina Superior: 0.0 0.0 0.0							
Número de Superficies: 6							
Nombre de Superficies: PARALELOGRAMO							
Tipo de Superficies: 1							
Lados Efectivos: 2							
Número Conectividad	N1	N2	N3	N4	Tipo Absorción	Tipo Geometría	Observaciones
1	1	4	8	5	1	PARALELOGRAMO	SUELO
2	2	6	7	3	2	PARALELOGRAMO	Techo
3	1	2	3	4	3	PARALELOGRAMO	Pared_LAT_Y-
4	8	7	6	5	4	PARALELOGRAMO	Pared_LAT_Y+
5	2	1	5	6	5	PARALELOGRAMO	Pared_PEQ_X-
6	4	3	7	8	6	PARALELOGRAMO	Pared_PEQ_X+

Los ficheros de conectividades disponen también de especificaciones del tipo que nosotros hemos llamado *grupos de superficies* (Giner y Militello, 1996). Las superficies quedan clasificadas por estos *grupos* con el fin de facilitar la búsqueda y localización de reflexiones en el posterior seguimiento de rayos. Los *grupos* vienen definidos por *volúmenes de contorno*, que no son más que cajas rectangulares definidas por dos esquinas. Las superficies que no quedan dentro de ningún grupo, bien por su gran tamaño, bien por la simplicidad de la geometría, han de ser evaluadas siempre, y deben aparecer en el grupo inicial numerado con un 0. Esta pequeña especificación permite optimizar considerablemente el tiempo de cálculo del programa.

### 3.2.2. Funciones de Forma

Supongamos un sistema de coordenadas cartesianas global ( $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{z}$ ) sobre el que disponemos de puntos  $N_i = (x_i, y_i, z_i)$ , que llamamos *nodos* o puntos, y que son los que agrupados en secuencias ordenadas definen las *conectividades* o superficies.

En nuestro trabajo, como decíamos anteriormente, hemos utilizado elementos de 3, 4 y 8 nodos, (fig. 3.4.), y como todas las superficies quedan confinadas en espacios de dos dimensiones, hemos relacionado las coordenadas globales ( $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ ) con un sistema de coordenadas naturales de variables  $r, s$  donde  $-1 \leq r \leq 1$  y  $-1 \leq s \leq 1$ .

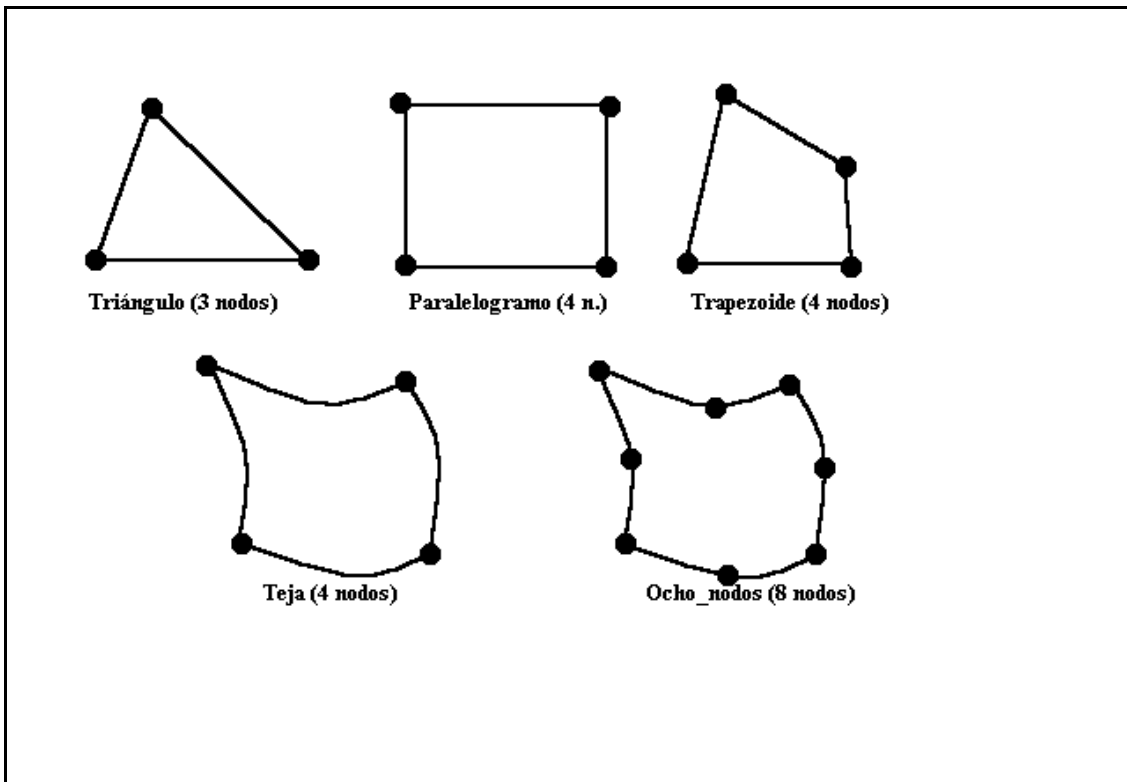


Fig. 3.4. Distintos tipos de superficies definidos.

En general, cada superficie vendrá definida por un número  $q$  de nodos (3,4 u 8 nodos), llamémoslos  $N_i = (x_i, y_i, z_i)$  con  $i=1, \dots, q$ , y por  $q$  funciones de forma o de interpolación  $h_i = h_i(r, s)$  con  $i=1, \dots, q$ , definidas en el sistema de coordenadas naturales de la superficie, en el que las variables  $r, s$  varían entre -1 y 1. Así las funciones paramétricas  $x(r, s)$ ,  $y(r, s)$ ,  $z(r, s)$ , que definen por completo la superficie, son:

$$x = \sum_{i=1}^q h_i x_i \quad , \quad y = \sum_{i=1}^q h_i y_i \quad , \quad z = \sum_{i=1}^q h_i z_i \quad (3.1.)$$

La propiedad fundamental de las funciones de interpolación  $h_i$  es que su valor en el sistema de coordenadas natural es 1 en el nodo  $i$  y 0 en todos los demás nodos. Utilizando estas condiciones, las funciones  $h_i$  correspondientes a la disposición de cada punto nodal específico se pueden calcular de forma sistemática.

Otro tipo de procedimiento podría consistir en la resolución del sistema de ecuaciones de la interpolación polinómica correspondiente y el cambio de sistema de coordenadas (Zienkiewicz, 1977).

En el siguiente ejemplo, las funciones de forma para elementos triangulares (figuras planas de 3 nodos) pueden deducirse de la siguiente figura (fig. 3.5.), en la que **n1**, **n2**, **n3** son los puntos que definen el plano  $P$  de la figura triangular en el espacio  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ .

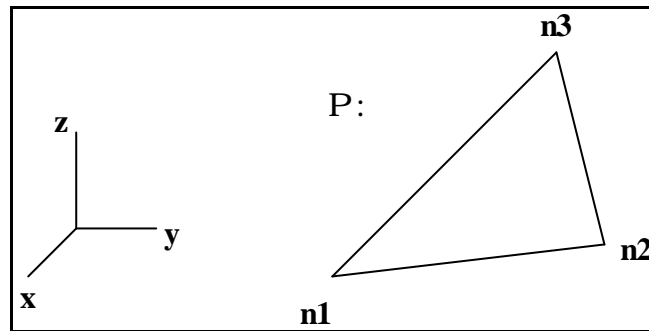


Fig. 3.5. Superficie triangular definida por 3 nodos.

La relación vectorial paramétrica que define el plano del triángulo, llamémosla  $\mathbf{t}(r,s)$ , donde  $r$ ,  $s$  son dos parámetros que pueden tomar valores entre 0 y 1, es:

$$\Pi: \mathbf{t}(r,s) = \mathbf{n1} + r(\mathbf{n2} - \mathbf{n1}) + s(\mathbf{n3} - \mathbf{n1}) \quad (3.2.)$$

Agrupando términos:

$$\Pi: \mathbf{t}(r,s) = (1 - r - s) \mathbf{n1} + r \mathbf{n2} + s \mathbf{n3} \quad (3.3.)$$

tenemos las funciones de forma para el triángulo:

$$\mathbf{t}(r,s) = h_1 \mathbf{n1} + h_2 \mathbf{n2} + h_3 \mathbf{n3} \quad (3.4.)$$

siendo:

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 - r - s \\ h_2 &= r \\ h_3 &= s \end{aligned} \quad (3.5.)$$

Si  $r,s$  varían entre -1 y 1 tenemos de igual forma las funciones de forma para un paralelogramo, ya que éste queda perfectamente definido por 3 puntos o nodos. Así queda claro cuáles son las funciones de forma del triángulo y del paralelogramo.

Un trapecoide, figura plana de 4 nodos con los lados no paralelos entre si, analíticamente lo representamos como dos triángulos planos.

Para modelizar elementos curvos, necesitaremos, al menos, de una interpolación parabólica.

Los elementos curvos de 4 nodos que hemos llamado "tejas" (fig. 3.4.) necesitarán de las siguientes funciones de forma:

$$\begin{aligned}
h_{4N,1} &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s) \\
h_{4N,2} &= \frac{1}{4}(1-r)(1+s) \\
h_{4N,3} &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \\
h_{4N,4} &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s)
\end{aligned} \tag{3.6.}$$

Los elementos curvos más generales, los de 8 nodos, necesitarán de 8 funciones de forma. Éstas son las que detallamos a continuación en las ecuaciones (3.7.) y (3.8.) (Zienkiewicz, 1977). Las 4 primeras son :

$$\begin{aligned}
h_{8N,1} &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s)(r+s-1) \\
h_{8N,2} &= \frac{1}{4}(1-r)(1+s)(-r+s-1) \\
h_{8N,3} &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s)(-r-s-1) \\
h_{8N,4} &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s)(r-s-1)
\end{aligned} \tag{3.7.}$$

y las 4 siguientes:

$$\begin{aligned}
h_{8N,5} &= \frac{1}{2}(1-r^2)(1+s) \\
h_{8N,6} &= \frac{1}{2}(1-s^2)(1-r) \\
h_{8N,7} &= \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s) \\
h_{8N,8} &= \frac{1}{2}(1-s^2)(1+r)
\end{aligned} \tag{3.8.}$$

Mediante esta interpolación de los nodos, los elementos pueden tener sin ninguna dificultad, contornos curvos.

### 3.3. PROPIEDADES FÍSICAS DE LAS SUPERFICIES

La absorción y la difusión son dos de los principales efectos macroscópicos que pueden caracterizar una superficie de un recinto.

Cada una de las superficies que aparece en el fichero de conectividades, tiene asociado un número que identifica al "tipo de material" que se supone que recubre a dicha superficie.

Este "tipo de material" tiene unas propiedades de absorción y de difusión que el usuario debe especificar en dos ficheros de texto aparte.

### 3.3.1. Absorción

En uno de dichos ficheros, el usuario especifica los coeficientes de absorción  $\alpha$  de cada uno de estos tipos de material, para las frecuencias de 250, 500, 1000 y 2000 Hz, que son las que actualmente contempla el programa. En la tabla 3.4. damos un ejemplo de estos datos.

TABLA 3.4.  
Especificación Coeficientes de Absorción (ejemplo).

Número	Tipo	250 Hz.	500 Hz.	1000 Hz.	2000 Hz.	Comentario
	<b>Material</b>					
1		0.45	0.85	0.98	0.98	/*Audiencia*/
2		0.04	0.06	0.07	0.08	/*Escenario*/
3		0.25	0.10	0.09	0.08	/*Madera_Techo*/
4		0.02	0.03	0.05	0.05	/*Lynoleum*/
5		0.25	0.10	0.09	0.08	/*Madera_Pared*/
6		0.0	0.0	0.0	0.0	/*sin_uso*/

### 3.3.2. Difusión

Desde el punto de vista de la acústica geométrica una reflexión difusa puede ser total o parcial (Kuttruff, 1979):

- total, cuando la distribución direccional de la energía reflejada o dispersada no depende en absoluto de la dirección del sonido incidente. El coeficiente de difusión  $d$  toma el valor igual a 1.
- parcial, que es el modelo que más se aproxima a la realidad, y que se da cuando la reflexión es en parte especular y en parte difusa. El coeficiente de difusión  $d$  está comprendido entre 0 y 1, y especifica el porcentaje de difusión que corresponde a cada reflexión.

El usuario debe especificar, en otro fichero, los coeficientes de difusión  $d$  de los mismos tipos de materiales definidos en el fichero de coeficientes de absorción.

Para poder experimentar con más libertad, hemos optado por unos coeficientes de difusión variables con el orden de reflexión, como puede apreciarse en la tabla 3.5. Por ejemplo,  $d(1)$  es el porcentaje de energía en primera reflexión que será dispersada según el modelo elegido. El último,  $d(5)$ , es el porcentaje de energía en quinta o sucesivas reflexiones que será reflejada en forma difusa.



Esta técnica de hacer depender el coeficiente de difusión con el orden de reflexión se utiliza de forma implícita en otros programas de simulación conocidos. Por ejemplo, el programa "Odeon" hace las reflexiones totalmente difusas a partir de la 5ª reflexión, lo que en nuestro modelo equivale a tomar unos coeficientes de difusión del tipo  $d(1) = d(2) = d(3) = d(4) = 0$ ,  $d(5) = 1$ .

TABLA 3.5.  
Coeficientes de Difusión de las Superficies (ejemplo)

Núm. Tipo Material	$d(1)$	$d(2)$	$d(3)$	$d(4)$	$d(5 \text{ o } +)$	Comentario
1	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	/*Audiencia*/
2	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	/*Escenario*/
3	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	/*Madera_Techo*/
4	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	/*Lynoleum*/
5	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	/*Madera_Pared*/
6	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	/*sin_uso*/

### 3.3.3. Especificaciones del Usuario

Todo el conjunto de especificaciones del usuario viene regido por el *fichero de condiciones iniciales*, en donde aparecen, por ejemplo, los nombres de los ficheros que acabamos de comentar, información sobre las fuentes, modelo de difusión utilizado, etc. A modo de ejemplo, en la siguiente tabla 3.6. se presenta el fichero de condiciones de la sala rectangular que estamos considerando en nuestro ejemplo.

TABLA 3.6.  
Fichero de Condiciones Iniciales (ejemplo)

```

*****E/S*****
leyenda= A1:Abs_Hom|Lamb_Tot
fichero_resultados= c:\javi\Aa96box\A1\abox
fichero_texto= 0
fichero_control= 0
preguntar_escala= 0
fichero_nodos= c:\javi\Aa96box\A1\ABOX_COR.SET
fichero_superficies= c:\javi\Aa96BOX\A1\ABOX_CON.SET
fichero_coef_absorc= c:\javi\Aa96BOX\A1\ABHO_ABS.SET
fichero_coef_difusion= c:\javi\aa96box\A1\abox_dif.set
*****ANALISIS*****
rr= 1.5 m., to=0, tf= 2000, tp= 5, ti= 10 ms.
Tipo_de_difusion_en_las_reflexiones= LAMBERTIANA
*****RECEPTORES*****
n_receptores= 24
fichero_receptores= c:\javi\Aa96BOX\A1\AB24_REC.SET
radio_receptores= 1.5
tipos_sup_receptor= 1
abs_total_receptor= 0

```

```
receptores_control= 10
*****RAYOS*****
n_max_reflexiones= 100
E_min(w/m2)= 1.0E-15
t_max_rayo(ms.)= 2000
*****FUENTES*****
n_fuentes= 1
punto_fuente(metros)= 4.0 0.0 2.0
tipo_fuente= OMNI
potencia_fuente(watios)= 1
n_rayos_fuente= 60000
tiempo_inicio_fuente(ms.)= 0
*****CONDICIONES*****
hallar_superf(Ds_1)= 0
hallar_punto(Ds_2)= 1
modo_resultados= 1
modo_exhaustivo= 1
*****MICROFONOS*****
n_microfonos= 0
punto_m.= 3.00 3.12 1.12
r_microfonos= 2.475
```

### 3.4. REFLEXIONES ESPECULARES Y DIFUSAS

#### 3.4.1. Intersección de los Rayos con las Superficies.

La intersección de un rayo con superficies planas es de cálculo inmediato y se realiza tal como indicamos en el Apartado 2.3.4.

Para calcular la intersección del rayo que viaja con las superficies curvas de 4 u 8 nodos hemos optado por una discretización de éstas en triángulos planos. Esta operación se lleva a cabo de dos formas distintas:

- una primera discretización, poco fina, para determinar si la superficie es de intersección o no, y que nos permite descartar unas de otras rápidamente.
- una segunda discretización, más fina que la anterior, únicamente sobre las superficies que han sido seleccionadas. En este paso se calcula el punto de intersección, que será el nuevo punto de apoyo del rayo cuando se refleje. También se calcula la normal a la superficie en dicho punto, necesaria para calcular la nueva dirección del rayo.

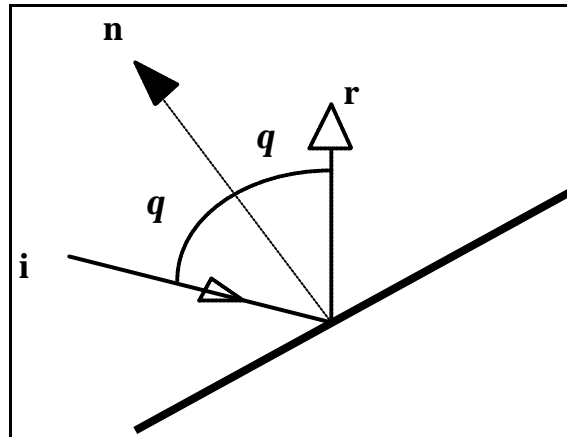
Ambas discretizaciones, cuando proceden, son especificadas por el usuario en el fichero de configuración, y el coste computacional es óptimo dada la simplicidad del algoritmo y la velocidad de procesamiento de los ordenadores personales actuales.

Estamos evaluando la posibilidad de calcular esta intersección mediante la resolución numérica de un sistema de ecuaciones no lineales. Esta mejora se introducirá en una versión posterior del programa.

#### 3.4.2. Reflexiones Especulares

La reflexión especular de una onda incidente puede darse para ciertas longitudes de onda y para ciertas condiciones o características de la superficie receptora. El caso ideal sería una superficie con total ausencia de rugosidades para evitar la difusión, de dimensiones infinitas o muy grandes para evitar los fenómenos de difracción, y una onda incidente plana de longitud de onda lo más pequeña posible en comparación con las dimensiones de la superficie.

Si así fuera, tendríamos reflexiones totalmente especulares, siguiendo la ley de Snell, tal como se indica en la figura 3.6.



**Fig. 3.6. Reflexión especular. El ángulo de reflexión coincide con el ángulo de incidencia.**

siendo  $\mathbf{n}$  el vector normal a la superficie,  $\mathbf{i}$  el vector del rayo incidente, y  $\mathbf{r}$  el vector del rayo reflejado. Los tres vectores han de ser coplanarios. Si  $q$  es el ángulo de incidencia, tenemos que, el vector reflejado  $\mathbf{r}$  será la suma vectorial de la componente coplanaria del vector incidente y de la opuesta a la componente perpendicular del mismo. Así:

$$\mathbf{r} = [\mathbf{i} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i})\mathbf{n}] - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{i})\mathbf{n} \quad (3.9.)$$

de donde tenemos que el vector reflejado  $\mathbf{r}$  cumple:

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} - 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{i})\mathbf{n} \quad (3.10.)$$

expresión que también es válida para el caso de que  $\mathbf{n}$  estuviese orientado hacia la otra cara de la superficie, porque significaría que el producto escalar  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}$  es positivo y tendríamos el mismo efecto de sustracción en la componente coplanaria y de vector opuesta en la perpendicular.

El producto escalar  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}$  nos es de gran utilidad porque nos permite saber por cuál de los lados de la superficie se realiza la intersección: cuando  $\mathbf{n}$  está orientado hacia el interior de la superficie  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}$  es negativo y cuando lo está hacia el exterior  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}$  es positivo.

### 3.4.3 Reflexiones Difusas

Un patrón de difusión determinado viene especificado, principalmente, por un diagrama de directividad de la intensidad reflejada, es decir, por una función  $I(r, \mathbf{q}, \mathbf{j})$  que recoge la información de cómo la superficie difunde la energía que refleja.

Veamos la manera de generar reflexiones según un patrón de difusión determinado. Supongamos que conocemos los ángulos de reflexión azimutal  $\mathbf{q}$  y polar  $\mathbf{j}$ . Éstos se

obtendrán a partir de funciones de densidad de probabilidad que vendrán dadas por las diferentes distribuciones direccionales de la intensidad sonora que queramos implementar.

Para calcular el vector  $\mathbf{r}$ , reflexión del rayo incidente definido por el vector  $\mathbf{i}$ , veamos la figura 3.7. La superficie de incidencia, que tiene por normal el vector  $\mathbf{n}$ , tiene los vectores directores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ .

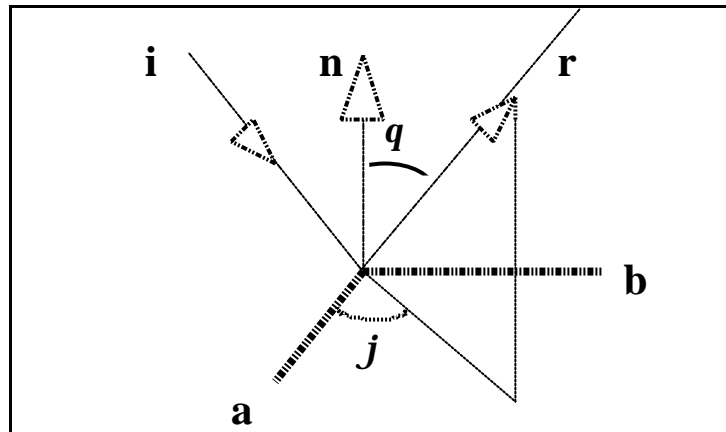


Fig. 3.7. Reflexión difusa. El ángulo de reflexión no depende del ángulo de incidencia.

El vector reflejado  $\mathbf{r}$  es una combinación del triedo  $\mathbf{n}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ , siendo  $\mathbf{a} = \mathbf{i} \times \mathbf{n}$ , y  $\mathbf{b} = \mathbf{n} \times \mathbf{a}$ . Podemos calcularlo, en función de los ángulos  $q$  y  $j$ , a partir de la suma de dos vectores perpendiculares. El vector que da lugar a la componente normal al plano es:

$$\cos q \mathbf{n} \quad (3.11.)$$

y el vector que da lugar a la componente en el plano  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ :

$$\sin q (\cos j \mathbf{a} + \sin j \mathbf{b}) \quad (3.12.)$$

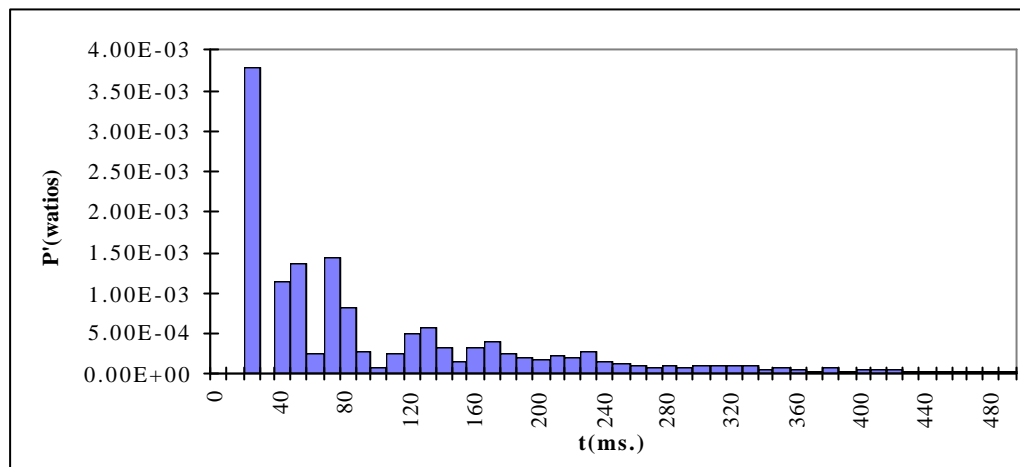
quedando el vector reflejado  $\mathbf{r}$  como:

$$\mathbf{r} = \cos q \mathbf{n} + \sin q (\cos j \mathbf{a} + \sin j \mathbf{b}) \quad (3.13.)$$

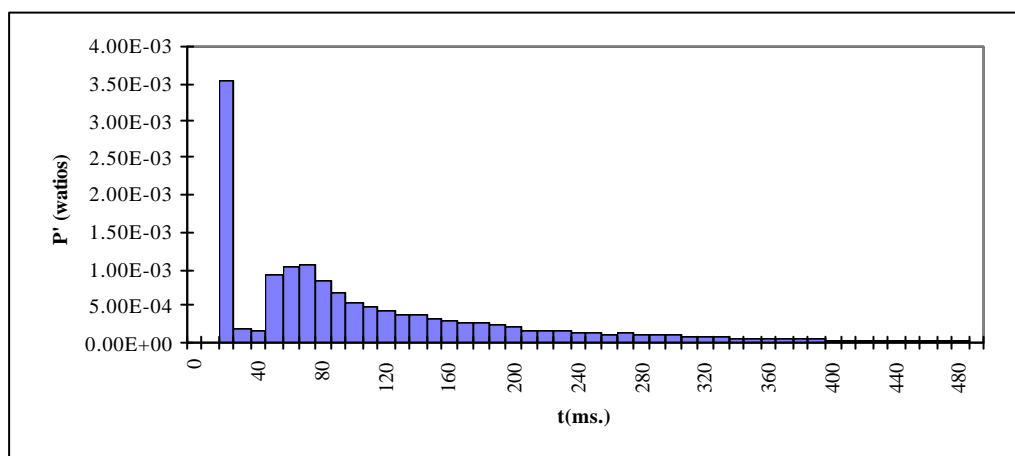
Si  $\mathbf{n}$  estuviese orientado hacia el exterior de la superficie, lo cambiaríamos por el vector opuesto  $-\mathbf{n}$ .

El efecto de introducir difusión en el modelo es fundamental para una correcta simulación. Parámetros tan importantes como el Tiempo de Reverberación y, por supuesto, todos los parámetros de la "estructura fina de la reverberación", pueden verse muy influidos por esta propiedad macroscópica presente en todos los materiales arquitectónicos. A continuación, y a

modo de demostración, presentamos el efecto de suponer ausencia de difusión (fig. 3.8.) o difusión lambertiana total (fig. 3.9.) en las reflexiones en una sala rectangular.



**Fig. 3.8. Ecograma en la sala rectangular con reflexiones especulares.**



**Fig. 3.9. Ecograma en la sala rectangular con reflexiones difusas.**

La poca ergodicidad de la sala rectangular dificulta el *mezclado* de los rayos cuando se utilizan reflexiones especulares, en cambio, la suposición de difusión suaviza los resultados. También hay que destacar cómo, el "hueco" de los 30 ms. en la fig. 3.8., desaparece en la fig. 3.9. por el hecho de que la difusión habilita "nuevos caminos".

En los dos Apartados siguientes vamos a ver dos patrones de difusión diferentes, la difusión lambertiana y la difusión isótropa, modelos actualmente implementados en el programa.

### 3.4.3.1. Difusión Lambertiana

El modelo de difusión para reflexiones sonoras en superficies más utilizado es el modelo de *difusión de Lambert* (Kuttruff, 1979), en el que cada punto o diferencial de superficie  $dS$  emite en todas direcciones de forma tal que la intensidad sonora reflejada medida a una distancia  $r$  de la superficie es proporcional al coseno del ángulo de emisión:

$$I(r, \mathbf{q}) = B_o dS \frac{\cos \mathbf{q}}{pr^2} \quad (3.14.)$$

donde  $B_o$  es la energía incidente por unidad de área de la pared y por unidad de tiempo.

En el modelo de rayos podemos formular la ley anterior de una forma un poco diferente: la probabilidad de que un rayo sea reflejado en un determinado elemento de ángulo sólido  $d\Omega$  centrado sobre un ángulo  $\mathbf{q}$  sobre el elemento de área  $dS$ , es:

$$p(\mathbf{q}) = \cos \mathbf{q} \quad , \quad \mathbf{q} \in [0, p/2] \quad (3.15.)$$

de manera que la dirección del rayo reflejado es completamente independiente de la dirección de incidencia del rayo y de su historia previa. Así pues, los ángulos de emisión de los rayos deben elegirse según la función de densidad de probabilidad (3.15.) que da prioridad a las direcciones de la cresta de la semiesfera, es decir, a la dirección de la normal a la superficie.

Para generar una distribución de valores aleatorios con esta función de densidad se utilizó el *método de transformación* (Press *et al.*, 1992). A partir de números aleatorios de distribución uniforme y de la inversa de la función de distribución acumulada correspondiente, podemos obtener números aleatorios con la función de densidad deseada.

La función de distribución acumulada  $P(\mathbf{q})$  de la función de densidad  $p(\mathbf{q})$  es:

$$P(\mathbf{q}) = \int_{-\infty}^{\mathbf{q}} p(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \int_{-\infty}^{\mathbf{q}} \cos(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \sin(\mathbf{q}) \quad (3.16.)$$

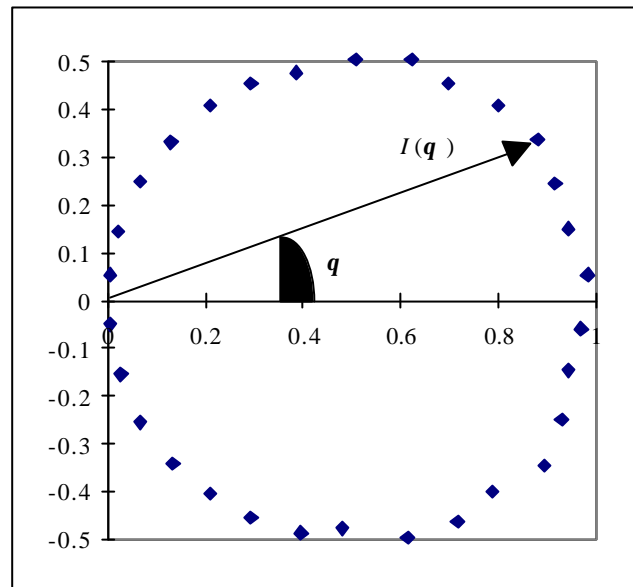
por lo que su inversa:

$$P^{-1}(x) = \arcsin(x) \quad (3.17.)$$

donde  $x$  es una variable aleatoria uniforme entre 0 y 1, genera una distribución de valores aleatorios con la distribución lambertiana.

Por supuesto, el ángulo polar  $\mathbf{j}$  se distribuye de forma uniforme entre 0 y  $2p$ , para lo que se tomaron valores aleatorios equiprobables, sin ningún tipo de modificación adicional.

Para comprobar el funcionamiento correcto del algoritmo de simulación del modelo de difusión lambertiana se calculó el diagrama de intensidad resultante para 30.000 rayos reflejados en una superficie con difusión lambertiana total (fig. 3.10.). Para posibilitar la gráfica, se tomaron incrementos de ángulo  $\Delta=6^\circ$  para todos los ángulos  $\mathbf{q}$  de un intervalo  $[-\mathbf{p}/2, \mathbf{p}/2]$  donde  $0^\circ$  es la normal al plano.



**Fig. 3.10. Difusión lambertiana. Validación del modelo de generación de vectores aleatorios para la simulación.**

Hay que tener en cuenta que la ley de Lambert (3.14.), se refiere a la intensidad sonora emitida para cada ángulo, por lo que si sólo sumamos la energía de los rayos comprendidos en un intervalo  $\delta$ , no estaremos representando la intensidad sonora, sino la energía emitida.

Si estamos interesados en determinar la energía sonora por unidad de tiempo en el área de un ángulo sólido definido por los valores  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$  y  $\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2$ , tendremos que plantear la integral:

$$Energia\_Emitida = \iint_{\Omega_{1,2}} I(r, \mathbf{q}) d\Omega = \int_{j_1}^{j_2} \int_{q_1}^{q_2} B_0 dS \frac{\cos \mathbf{q}}{pr^2} r^2 \sin \mathbf{q} d\mathbf{j} d\mathbf{q} \quad (3.18.)$$

que tiene por resultado:

$$Energia\_Emitida = (\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1) \frac{B_0 dS}{2p} \sin 2\mathbf{q}_c \sin 2\Delta \quad (3.19.)$$

donde  $\mathbf{q}_c$  es el ángulo central y  $\Delta$  el incremento del mismo.

Teniendo en cuenta que el área asociada al mismo incremento de ángulo sólido es:



$$Area = \iint_{\Omega_{1,2}} r^2 d\Omega = \int_{j_1}^{j_2} \int_{q_1}^{q_2} r^2 \sin q \, dq \, dj = 2(j_2 - j_1) r^2 \sin q_c \sin \Delta \quad (3.20.)$$

tenemos que la energía emitida en un segundo por unidad de área, la intensidad, será:

$$Intensidad = \frac{B_o \, dS}{4 \, p \, r^2} \frac{\sin 2q_c \sin 2\Delta}{\sin q_c \sin \Delta} = \frac{B_o \, dS}{p \, r^2} \cos q_c \cos \Delta \quad (3.21.)$$

que también presenta una dependencia con el coseno del ángulo y que en el límite cuando  $\Delta$  tiende a cero, reproduce la ley de Lambert.

Cuando hablamos de rayos o partículas sonoras, el numerador de la anterior ecuación será la energía que distribuyan los rayos emitidos desde el  $dS$ , es decir, el producto del número de rayos emitidos en la fracción de ángulo sólido por la energía que lleva cada rayo:

$$Energia = N(q_c, \Delta) \text{ Fraccion\_de\_energia\_de\_cada\_rayo} \quad (3.22.)$$

donde  $N(q_c, \Delta)$  es el número de rayos emitidos alrededor del ángulo central  $q_c$  con incremento  $\Delta$ .

Para cada incremento de ángulo se contabilizó la energía incidente según la ecuación (3.22.), y se dividió por el área asociada al ángulo según la ecuación (3.20.). Así se obtuvo el resultado esperado de que la intensidad resultante sigue la ley de Lambert (fig. 3.10.).

### 3.4.3.2. Difusión Isótropa

Como ejercicio teórico hemos considerado el caso ideal de un modelo de distribución isótropa, basado en la suposición de que la energía se reparte uniformemente para todos los ángulos después de la reflexión.

La función de densidad de probabilidad del ángulo de reflexión es:

$$p(q) = \sin(q) \quad (3.23.)$$

Esta forma tiene en cuenta el efecto de que, en coordenadas esféricas, los ángulos de la base dan lugar a una mayor superficie que los ángulos de la cresta de la semiesfera: dichos ángulos presentan un área proporcional al seno del ángulo central correspondiente,  $\sin(q)$ .

Para generar números aleatorios con esta función de densidad de probabilidad, calculamos la función de distribución de probabilidad acumulada:

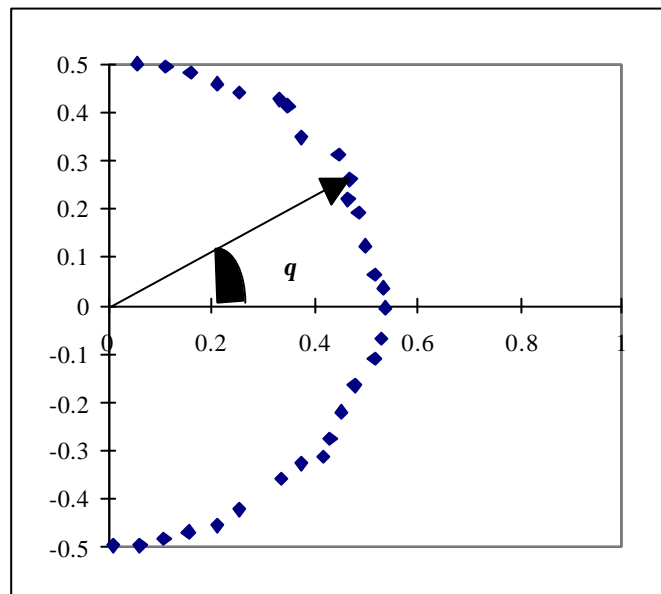
$$P(\mathbf{q}) = \int_{-\infty}^{\mathbf{q}} p(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \int_{-\infty}^{\mathbf{q}} \sin(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = 1 - \cos(\mathbf{q}) \quad (3.24.)$$

por lo que la función:

$$P^{-1}(x) = \arccos(1 - x) \quad (3.25.)$$

donde  $x$  es una variable aleatoria uniforme entre 0 y 1, genera una distribución de valores aleatorios con la distribución uniforme deseada.

Esta forma de difusión ha sido comprobada en el modelo, representando a intervalos de ángulo  $\Delta=6^\circ$  la intensidad emitida desde un punto cualquiera, siguiendo esta ley. Así, utilizando el mismo número de rayos que en el ejemplo anterior hemos obtenido el resultado que reproducimos en la figura 3.11.:



**Fig. 3.11. Difusión isótropa. Validación del modelo de generación de vectores aleatorios para la simulación.**

### 3.5. FUENTES SONORAS

Como es natural, todo el proceso que estamos describiendo depende en gran medida de la fuente sonora que se esté simulando en el modelo, lo que vendrá determinado por el modo en que se emitan los rayos. Hemos desarrollado los algoritmos necesarios para la simulación de fuentes puntuales omnidireccionales y direccionales:

- El objetivo de las fuentes omnidireccionales es el reparto isotrópico de la energía.

- El objetivo de las fuentes direccionales es simular el diagrama de directividad correspondiente. Sus características se especifican a través de dos curvas cardioides, una en el plano horizontal y otra en el plano vertical.

### 3.5.1. Fuentes Omnidireccionales

La simulación de las fuentes omnidireccionales puede hacerse según dos modelos de generación de rayos:

#### a) Determinístico

Dado un número de rayos  $N$  requerido por el usuario, se genera una colección de vectores isotrópicos a partir de "fraccionar" la esfera unitaria en pequeñas áreas iguales de valor  $4\pi/N$ . De esta sencilla manera se obtiene una distribución equiespaciada de rayos con igual incremento de ángulo sólido entre ellos.

La ventaja de la fuente determinística es que se consigue una buena definición del frente de ondas saliente, y una buena convergencia de los resultados.

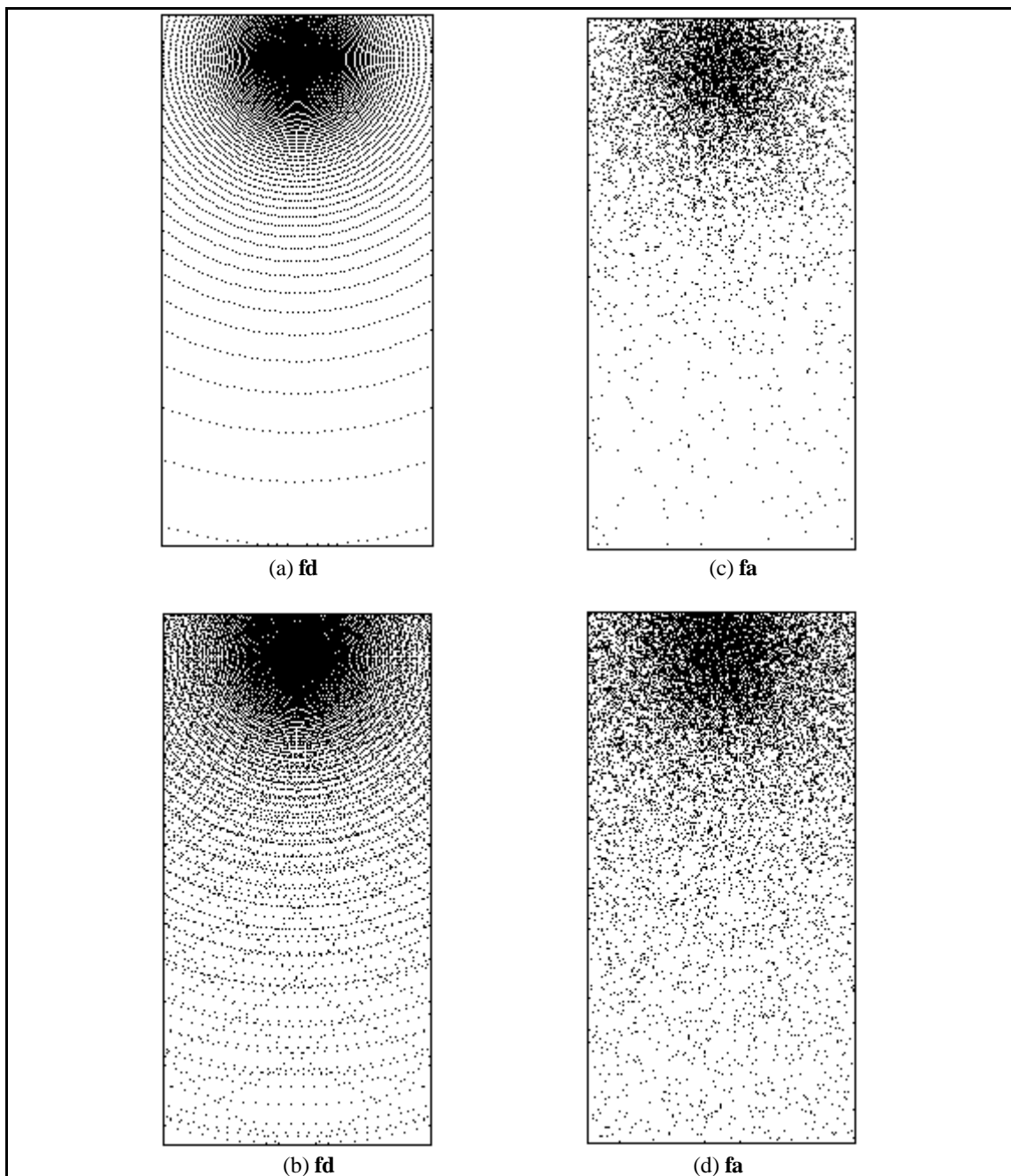
El inconveniente es que, a priori, el usuario desconoce el número de rayos  $N$  que debe utilizar en la simulación para conseguir resultados suficientemente creíbles. Con una fuente determinística, el modelo no tendrá información hasta que no se hayan trazado todos los rayos  $N$  especificados. En el caso de que sea necesario emitir más, supongamos  $N' > N$ , no pueden aprovecharse los rayos ya lanzados porque no están convenientemente relacionados con el conjunto inicial, y por lo tanto el experimento tendría que volver a repetirse desde el comienzo.

#### b) Aleatorio

Los rayos se emiten según direcciones aleatorias siguiendo un patrón isótropo, para lo que se puede utilizar la función de densidad de probabilidad (3.25.) que vimos al estudiar la difusión isótropa.

La ventaja de esta manera de operar es que el usuario no necesita preocuparse por cuál es el número de rayos  $N$  suficiente para alcanzar unos resultados correctos. El proceso puede seguir y seguir, manteniéndose el carácter uniforme en la distribución de rayos, hasta que de manera automática, la simulación termine cuando se haya alcanzado un cierto grado de convergencia en los resultados.

Por supuesto, independientemente del modelo de emisión de los rayos, determinístico o aleatorio, si ya se ha alcanzado la convergencia, los resultados han de ser los mismos.



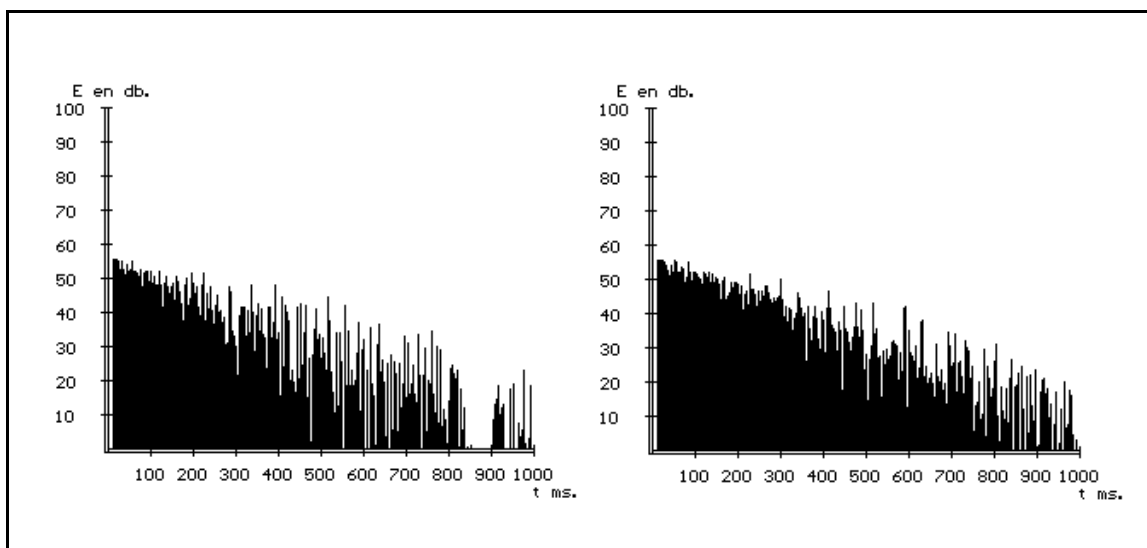
**Figura 3.12. Efecto de la utilización de distintos tipos de fuente.**

En el caso de la sala rectangular, hemos comparado el efecto de la utilización de una fuente omnidireccional determinística **fd** y otra con generación aleatoria e isotrópica de las direcciones de los rayos, **fa** (Giner *et al.*, 1994). En la Fig. 3.12. mostramos el impacto de los rayos en el piso de una sala rectangular, con la fuente situada en uno de los extremos de la sala. Ambas fuentes emiten 30.000 rayos.

La Fig. 3.12a muestra la distribución de rayos directos y la Fig. 3.12b la distribución de rayos directos y de primera reflexión sobre el piso obtenidas con la fuente determinística **fd**. Las Fig 3.12c y 3.12d muestran lo mismo para la fuente aleatoria **fa**. Se observa claramente como la

fuente aleatoria logra una distribución más uniforme de rayos, eliminando la existencia de direcciones preferenciales puestas de manifiesto por los círculos concéntricos de las Figs. 3.12a. y 3.12b.

En la Fig. 3.13. se observan dos reflectogramas obtenidos en la sala mencionada para un mismo micrófono. Se utilizó una distribución homogénea de absorción,  $\bar{\alpha} = 0.3$ . El ecograma de la Fig.3.13a fue obtenido con la **fd**. El de la Fig. 3.13b con la **fa**. El tiempo del pulso y el de integración se suponen iguales a cero para mostrar la distribución temporal de los rayos. La Fig. 3.13b muestra una distribución más uniforme. El vacío presente al final del reflectograma de la Fig. 3.13a se debe a la existencia de direcciones preferenciales en la fuente, es decir, falta de isotropía direccional.



(a) fuente determinística

(b) fuente aleatoria

**Figura 3.13. Efecto de la utilización de distintos tipos de fuente en un reflectograma.**

Este es un contraejemplo de cómo puede haber casos en los que, para un mismo número de rayos, sea conveniente utilizar fuentes aleatorias frente a las determinísticas, sobre todo en salas de simetría elevada. La falta de ergodicidad de algunos recintos puede exagerarse cuando los rayos se emiten en forma determinística.

De cualquier manera es el usuario el que tiene la libertad de especificar el tipo de fuente que quiere utilizar. En el fichero de configuración inicial debe señalar las coordenadas espaciales de la fuente, su potencia emisora, su tiempo de retardo y si es de tipo determinístico (OMNI) o aleatorio (RAN\_ISO).

### 3.5.2. Fuentes Direccionales: Generación a través de Volúmenes de Probabilidad

Para generar fuentes direccionales (altavoces), se desarrolló una aplicación específica cuya salida son vectores que siguen unas ciertas especificaciones y que son guardados en un fichero. Este fichero puede utilizarse posteriormente desde el programa principal con sólo escribir su nombre en la línea "tipo\_fuente" del fichero de condiciones iniciales. Para explicar los elementos de la estructura "altavoz" debemos definir su orientación y su diagrama de directividad.

#### a) Orientación

Hay que tener en cuenta que:

1. el recinto donde se encuentra el altavoz queda descrito por un sistema coordenado  $x,y,z$  donde  $x$  e  $y$  definen un plano paralelo al piso del local y el eje  $z$  es perpendicular al mismo y apunta hacia arriba.
2. el altavoz queda descrito por un sistema  $x',y',z'$ , donde  $x'$  apunta al frente del altavoz,  $z'$  hacia la parte superior del mismo, de manera que  $x'z'$  definen un plano sagital vertical. Para un observador situado por detras del altavoz, con su mirada en la direccion de  $x'$ , el eje  $y'$  coincide con su mano izquierda.

El usuario debe especificar el ángulo que forma el eje  $z'$  con el eje  $z$  (es positivo cuando el giro es hacia arriba). También debe especificar el ángulo (en cilíndricas) que forma el plano  $xz$  con el  $x'z'$  (es positivo cuando el giro es en el sentido de las agujas del reloj).

#### b) Diagrama de Directividad

Para la generación de vectores aleatorios se puede seguir la idea ya expuesta de utilizar funciones de densidad de probabilidad  $p(\mathbf{q})$  que cumplan la condición de que, una vez integrada la energía de todos los rayos emitidos sobre cada ángulo sólido, resulte una intensidad en la forma que se especifique en el diagrama de directividad.

Otra manera de implementar estas distribuciones es a través de figuras geométricas en el espacio que representen el diagrama de directividad requerido. De esta manera, generando vectores aleatorios dentro de una esfera de radio unidad, sólomente se aceptarán aquellos vectores cuyo radio sea menor que el radio de la figura especificada.

Esta manera de operar tiene la característica de que la intensidad de emisión del altavoz en cada dirección será proporcional al volumen del ángulo sólido correspondiente. Como este volumen es proporcional al cubo del radio de la figura en esa dirección, la figura del diagrama de directividad deberá corregirse con la raíz cúbica del radio.

El programa genera un figura de revolución sobre el sistema de referencia  $x',y',z'$ . Esta figura presenta un máximo en la dirección frontal ( $r=1$ ). El usuario debe especificar los ángulos horizontal y vertical, con sus radios correspondientes, para que se de una cierta caída de intensidad. Por ejemplo, para especificar una caída de 3 dB a  $60^\circ$  en el plano horizontal, el usuario deberá dar un radio  $r=0.5^{1/3}$  para ese ángulo. También hay que especificar el radio posterior de la figura, de manera que se ajuste al diagrama de directividad del altavoz que se quiere simular.

### 3.6. RECEPTORES: SUPERFICIES Y MICRÓFONOS

Para comprobar el efecto de distintos tipos de receptores, evaluamos los niveles de presión sonora (SPL) para una sala rectangular con absorción homogénea,  $\bar{\alpha} = 0.41$ , y comparamos los valores obtenidos en 2 tipos distintos de receptores:

1. superficies planas de  $1\text{m}^2$  adosadas al suelo de la sala
2. esferas de radio 0.62 m situadas a una altura de 1 m, a lo largo de toda la sala.

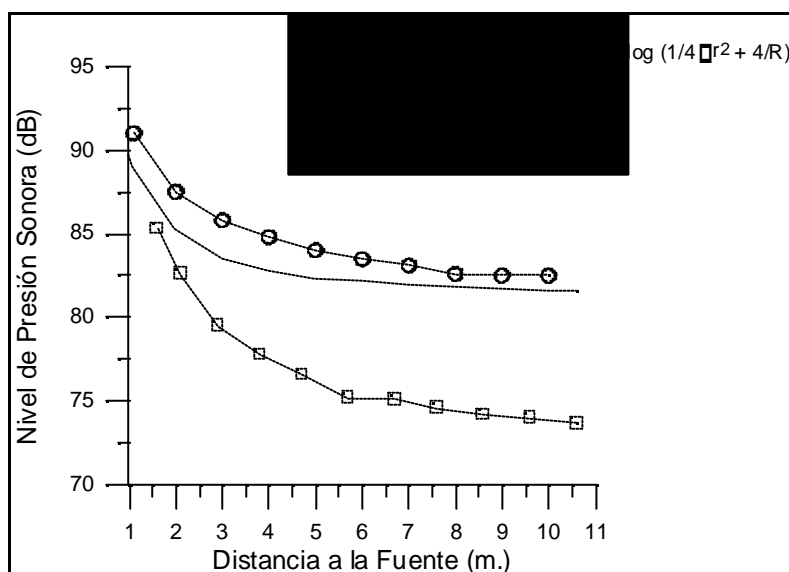


Figura 3.14. Comparación entre receptores esféricos y planos.

En la Fig. 3.14 puede observarse cómo los receptores esféricos presentan valores más cercanos (error medio 1.5 dB) a los predichos por la ecuación clásica para el nivel sonoro (Beranek y Ver, 1992) (Verbrandt y Jonckheere, 1989):

$$L_p = L_w + 10 \log ( 1/4 p r^2 + 4/R ) \quad (3.26.)$$

siendo:

- $L_w$  la potencia de la fuente.
- $r$  la distancia entre fuente y receptor.
- $R=S \ln(1-\bar{\alpha})/(1-\bar{\alpha})$  la constante de la sala.
- $S$  la superficie total de la sala.

Los receptores planos presentan una gran dependencia con su orientación respecto a la posición de la fuente, mientras que los esféricos dan resultados más aceptables.

### 3.7. CÁLCULO DE PARÁMETROS

#### 3.7.1. Parámetros Acústicos Globales

El programa permite calcular uno de los principales datos para caracterizar una sala: el "recorrido libre medio". A partir del trazado de rayos, calculamos la longitud media de los vuelos  $\langle l \rangle$  como:

$$\langle l \rangle = \frac{1}{N_v} \sum_{i=1}^{N_v} l_i \quad (3.27.)$$

donde  $N_v$  es el número de vuelos registrados, cada uno de longitud  $l_i$ . Señalar que, en general,  $N_v$  es un número mucho mayor que  $N$ .

Aprovechando la conocida relación estadística de Kosten o Clausius (Cremer, 1982):

$$\langle l \rangle = 4V/S \quad (3.28.)$$

donde  $V$  es el volumen de la sala, y  $S$  el área de las superficies de la sala, podemos saber aproximadamente el volumen  $V$ .

Como señalábamos en el Capítulo 1, a partir del recorrido libre medio y de los coeficientes de absorción de las superficies de la sala, podemos evaluar directamente los tiempos de reverberación de Sabine, Eyring y Millington. Para cada una de las frecuencias de estudio, el programa presenta estos resultados.

La varianza del recorrido libre, es necesaria para calcular el Tiempo de Reverberación Estadístico. El cálculo de  $\langle l^2 \rangle$  se realiza de igual manera que  $\langle l \rangle$  en la ecuación (3.27.):

$$\langle l^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_v} l_i^2 \quad (3.29.)$$



### 3.7.2. Parámetros Acústicos de Receptor

Para cada receptor disponemos de la información suministrada por la secuencia, ordenada en el tiempo, de todos los rayos recibidos  $\{p_{i,k}\}$ , donde  $i=1,\dots,n_k$  siendo  $n_k$  el número de rayos recibidos en el intervalo  $k$ -ésimo, y  $k=1,\dots,K$  donde  $K$  es el número de intervalos del histograma.

Cada rayo es portador de una potencia  $p_{i,k}$ , para un tiempo de llegada  $t_i$  y con unos ángulos de incidencia  $\mathbf{q}_i, \mathbf{j}_i$ .

Suponiendo que la fuente emite un impulso rectangular entre los instantes  $t=0$  y  $t=t_p$  (normalmente 1 ms.), y que el micrófono receptor tiene un tiempo de integración  $\Delta t$  (normalmente 10 ms.), podemos calcular la *intensidad promedio*  $I_k$  del receptor en el intervalo  $k$ -ésimo como:

$$I_k = \frac{1}{\Delta t A} \sum_{i=1}^{n_k} p_{i,k} t_p \quad (3.30.)$$

donde, repetimos,  $k=1,\dots,K$  siendo  $K$  el número de intervalo del ecograma y  $n_k$  el número de rayos recibidos en el intervalo  $k$ -ésimo.

La secuencia de valores:

$$\{I_k\}_{k=1}^K \quad (3.31.)$$

es la *respuesta impulsiva* o *ecograma* en intensidad del receptor.

A partir de  $\{p_{i,k}\}$  o de  $\{I_k\}$  podemos analizar diversos parámetros objetivos, tal como vimos en el Capítulo 1. Cuando  $\{I_k\}$  se calcula con un tiempo de integración  $\Delta t$  suficientemente bajo y un tiempo de pulso  $t_p$  también muy pequeño, puede utilizarse para el cálculo de parámetros de la estructura fina de la reverberación. De lo contrario no, porque deja de ser representativo de una respuesta impulsional. En general, y siempre que es posible, hemos implementado el cálculo de los parámetros acústicos a través de la secuencia ordenada de rayos  $\{p_{i,k}\}$ , lo que equivaldría a un tiempo de pulso y un tiempo de integración muy pequeños.

En los parámetros que señalamos a continuación siempre se ha considerado que la onda directa incide en un tiempo  $t=0$ .

- Definición  $D$ :

$$D = \frac{\sum_{i}^{t < 50 \text{ ms}} p_{i,t}}{\sum_{i}^{t < \infty} p_{i,t}} \quad (3.32.)$$

- Claridad  $C_{50}$ :

$$C_{50} = 10 \log \frac{\sum_{i}^{t < 50 \text{ ms}} p_{i,t}}{\sum_{i}^{50 < t < \infty} p_{i,t}} \quad (3.33.)$$

- Claridad  $C_{80}$ :

$$C_{80} = 10 \log \frac{\sum_{i}^{t < 80 \text{ ms}} p_{i,t}}{\sum_{i}^{80 < t < \infty} p_{i,t}} \quad (3.34.)$$

- Tiempo Central  $T_s$  :

$$T_s = \frac{\sum_{i}^{t < \infty} t_i p_{i,t}}{\sum_{i}^{t < \infty} p_{i,t}} \quad (3.35.)$$

- Tiempo de Ascenso  $T_r$  :

$$\sum_{i}^{t < T_r} p_{i,t} = \frac{1}{2} \sum_{i}^{t < \infty} p_{i,t} \quad (3.36.)$$

- Nivel sonoro  $SPL$ , suma de la potencia suministrada por todos los rayos incidentes:

$$SPL = 10 \log \left( \frac{1}{A} \sum_{i} p_i \right) \quad (3.37.)$$

- Factor de Energía Lateral  $LEF$  (utilizando micrófono de gradiente de presión):

$$LEF = \frac{\sum_{i}^{5 < t < 80 \text{ ms}} p_{i,t} \cos^2 \mathbf{q}_i}{\sum_{i}^{0 < t < 80 \text{ ms}} p_{i,t}} \quad (3.38.)$$

- Factor de Energía Lateral  $LEF'$  (según la definición de Barron):

$$LEF' = \frac{\sum_i^{5 < t < 80 \text{ms}} P_{i,t} \cos \mathbf{q}_i}{\sum_i^{0 < t < 80 \text{ms}} P_{i,t}} \quad (3.39.)$$

- La curva integrada de Schroeder (Schroeder, 1967), definida por:

$$S(t) = \int_t^{t_z} p(t) dt \quad 0 \leq t \leq t_z \quad (3.40.)$$

donde  $p(t)$  es la respuesta impulsiva de la sala (potencia frente a tiempo) y  $t_f$  la duración de la respuesta impulsiva, puede calcularse, a través de  $\{I_k\}$  como:

$$S_k = \sum_{i=K}^k I_i \quad k = 1, \dots, K \text{ (n. de intervalos)} \quad (3.41.)$$

- $EDT$  y  $RT$ . A partir de la curva integrada discretizada de Schroeder  $\{S_k\}$ , podemos evaluar los tiempos de reverberación. La norma UNE 74-043-87 de "Medida del tiempo de reverberación en auditorios"<sup>1</sup>, equivalente a la norma internacional ISO 3382, recomienda ajustar una recta a la curva de decaimiento. En el programa, hemos optado por el siguiente método: mínimos cuadrados desde el inicio hasta el 80% del final del ecograma. Con esta recta se buscan los tiempos  $t_{10}$  y  $t_{30}$  en los que el ecograma ha caído 10 y 30 dB respectivamente. De nuevo, entre el origen y estos tiempos se vuelve a aplicar mínimos cuadrados con lo que se obtienen dos nuevas pendientes que determinan el  $EDT$  y el  $RT$ .
- $t_l$  Tiempo de retraso. Es el retraso entre la onda directa y la primera reflexión. Como muchas veces, el sonido directo viene acompañado de pequeñas reflexiones provenientes del suelo, imponemos que el mínimo tiempo de retraso sea de 10 ms.

### 3.8. VALIDACIÓN DE LOS RESULTADOS: LA SALA RECTANGULAR

Con el fin de comprobar la calidad de los resultados que ofrece el programa desarrollado, hemos aplicado el modelo de simulación a tres problemas diferentes en los que conocemos sus soluciones correspondientes. Éstos son:

---

<sup>1</sup>La norma UNE 74-043-87, en el apartado 3.1.2.2 *Valoración*, dice: "el registro del decaimiento debe valorarse en un intervalo de 30 dB. En el caso de un campo acústico estacionario, este intervalo debe extenderse de 5 a 35 dB por debajo del nivel inicial. En este intervalo, se ajustará una recta tanto como sea posible a la curva de decrecimiento. La pendiente de esta recta determina el tiempo de reverberación."

- hallar el Tiempo de Reverberación  $RT(30)$  medio para los receptores de una sala rectangular con distribución de absorción homogénea. Comparar el resultado obtenido con el tiempo que predice la teoría del Tiempo de Reverberación Estadístico.
- hallar el Tiempo de Reverberación  $RT(30)$  medio para los receptores de una sala rectangular con distribución de absorción no homogénea. Comparar este resultado con el que se obtiene a través de la solución de la ecuación integral de difusión (Kuttruff, 1995).
- hallar el Coeficiente de Definición  $D$  en un receptor en una sala rectangular con distribución de absorción homogénea. Comparar este resultado con el que se obtendría a través de la aplicación del método de las imágenes.

### 3.8.1. Tiempo de Reverberación Medio en una Sala Rectangular: Distribución de Absorción Homogénea

Hemos analizado el caso de una sala rectangular de dimensiones 30x20x10 m, en la que se supone un coeficiente de absorción igual para todas las paredes  $\mathbf{a} = 3/11 \approx 0.273$ . Con un volumen  $V=6000 \text{ m}^3$  y un área total  $S=2200 \text{ m}^2$ , los tiempos de reverberación de Sabine y Eyring son:

$$T_{Sabine} = 0.161 \frac{V}{S\mathbf{a}} = 1.61 \text{ seg} \quad (3.42.)$$

$$T_{Eyring} = 0.161 \frac{V}{-S \ln(1 - \mathbf{a})} = 1.38 \text{ seg} \quad (3.43.)$$

Por tratarse de una sala con absorción homogénea el tiempo de reverberación de Millington coincide con el de tiempo de Eyring.

Estos tiempos de reverberación se han obtenido suponiendo que todos los caminos de la energía en la sala tienen una misma longitud, el recorrido libre medio  $\langle l \rangle$ . Por ello, es recomendable utilizar el Tiempo de Reverberación Estadístico que tiene en cuenta la varianza relativa del recorrido libre de la sala,  $\mathbf{g}^2$ . A partir de la ecuación de Kosten podemos aproximar que el recorrido libre medio de la sala es  $\langle l \rangle = 4V/S = 10.90 \text{ m}$ . Sin embargo, carecemos de una expresión analítica que permita calcular la varianza relativa del recorrido libre,  $\mathbf{g}^2$ , lo que nos impide calcular el Tiempo de Reverberación Estadístico sin la ayuda del ordenador.

Nuestro programa no tiene este inconveniente, porque como indicábamos en el Apartado 3.7. al hablar de los parámetros acústicos globales, el trazado de rayos permite calcular el recorrido libre medio de la sala, así como su varianza relativa. Como los coeficientes de absorción de las superficies son conocidos y sus áreas correspondientes se calculan fácilmente a partir de la geometría, el programa puede calcular todos los tiempos de reverberación, incluido el estadístico.

Se lanzaron 60000 rayos, con la fuente centrada en una esquina, a 4 m de la pared y a 2 m del suelo, y se obtuvo el siguiente fichero de resultados:

TABLA 3.7.  
Fichero de Resultados con Parámetros Globales.

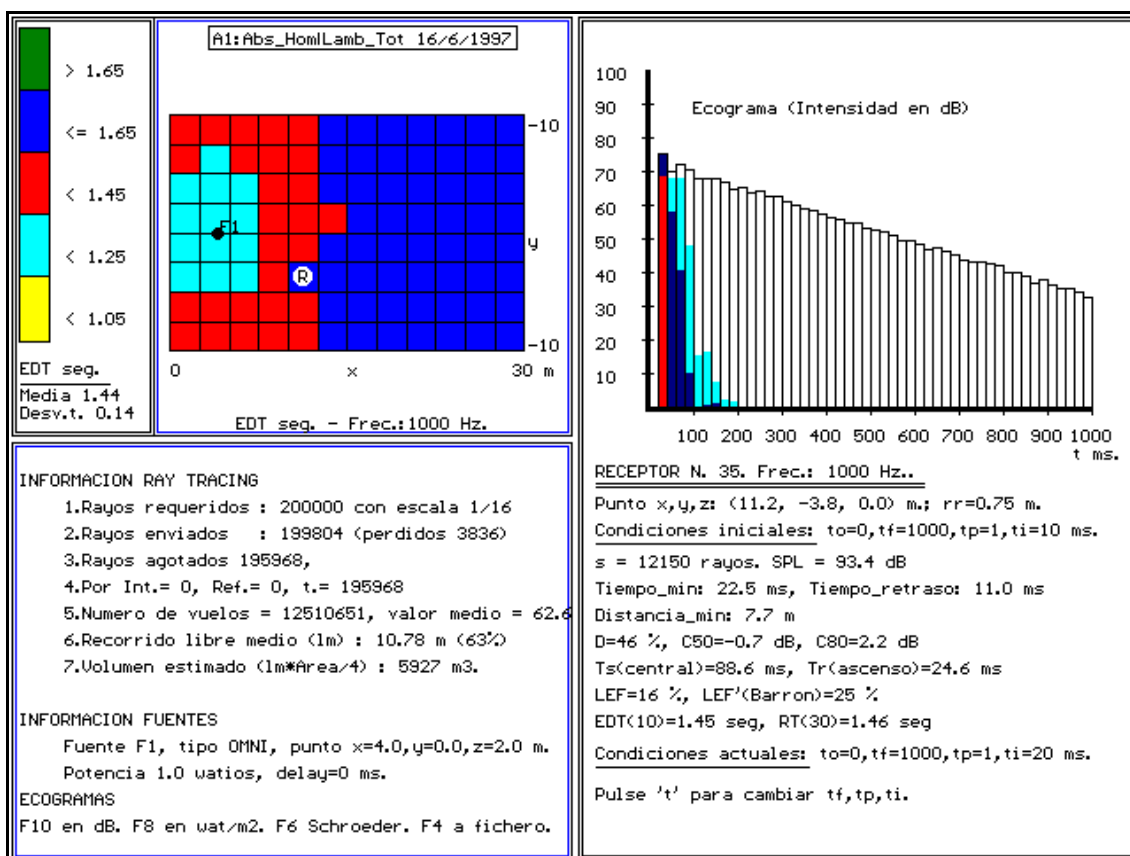
1.Rayos requeridos : 60000 con escala 1/14
2.Rayos enviados : 59895 (perdidos 1121)
3.Rayos agotados 58774,
4.Por Int.= 0, Ref.= 0, t.= 58774
5.Numero de vuelos = 3751281 (perdidos 1121)
6.Recorrido libre medio (lm) : 10.88 m, Gamma=62%
Número de colisiones medio: 31.3
7.Volumen estimado (lm*Area/4) : 5986 m3.
8.Rayos llegados al patio de butacas : 1013663
9.Rayos llegados a los 24 receptores : 318282
10.Rayos llegados a los 0 micrófonos : 0
11.Áreas del recinto: rea total = 2200 m2.
Área[1] = 600 m2.    Área[2] = 600 m2.    Área[3] = 300 m2.
Área[4] = 300 m2.    Área[5] = 200 m2.    Área[6] = 200 m2.
12.Energía absorbida por superf. no receptores : 0.699
13.Energía absorbida por superf. receptores : 0.298
14.Cof.ab.m.: 0.273, 0.273, 0.273, 0.273
15.T(Sabine) : 1.60, 1.60, 1.60, 1.60 seg.
16.T(Statis) : 1.46, 1.46, 1.46, 1.46 seg.
17.T(Eyring) : 1.37, 1.37, 1.37, 1.37 seg.
18.T(Milli.) : 1.37, 1.37, 1.37, 1.37 seg.
19.Tiempo para campo estadístico, Test : 155 mseg.

Como vemos en la línea 6 de la tabla anterior, el valor del recorrido libre medio obtenido por el programa, 10.88 m, coincide con el predicho por la ecuación de Kosten. A partir de él, lógicamente, también coinciden los tiempos de reverberación de Sabine, Eyring y Millington calculados por el programa (líneas 15, 17 y 18) con los tiempos de reverberación de la teoría estadística, ecuaciones (3.42.) y (3.43.). Pero, además, tenemos el resultado de que el recorrido libre de los rayos tiene una desviación relativa del 62%, y que por lo tanto, la varianza relativa es  $g^2=0.62^2$ . Con este dato, podemos calcular el tiempo de reverberación estadístico:

$$T_{Estadis.} = 0.161 \frac{V}{-S \ln(1 - \bar{a}) \left[ 1 + \frac{g^2}{2} \ln(1 - \bar{a}) \right]} = 1.46 \text{ seg} \quad (3.44.)$$

resultado que podemos considerar como el valor "teórico" que más se ajusta al tiempo de reverberación real de la sala.

Se dispusieron 96 receptores a lo largo de toda la sala, estando la fuente situada en el punto (4, 0, 2) m, figura 3.15. Se lanzaron 200 mil rayos, según una fuente omnidireccional equiespaciada, y se impuso la condición de difusión totalmente lambertiana en las reflexiones de los rayos. Los receptores son semiesferas de radio 0.75 m situadas sobre el suelo de la sala. En cada uno de ellos se midió el Tiempo de Reverberación  $RT(30)$ .



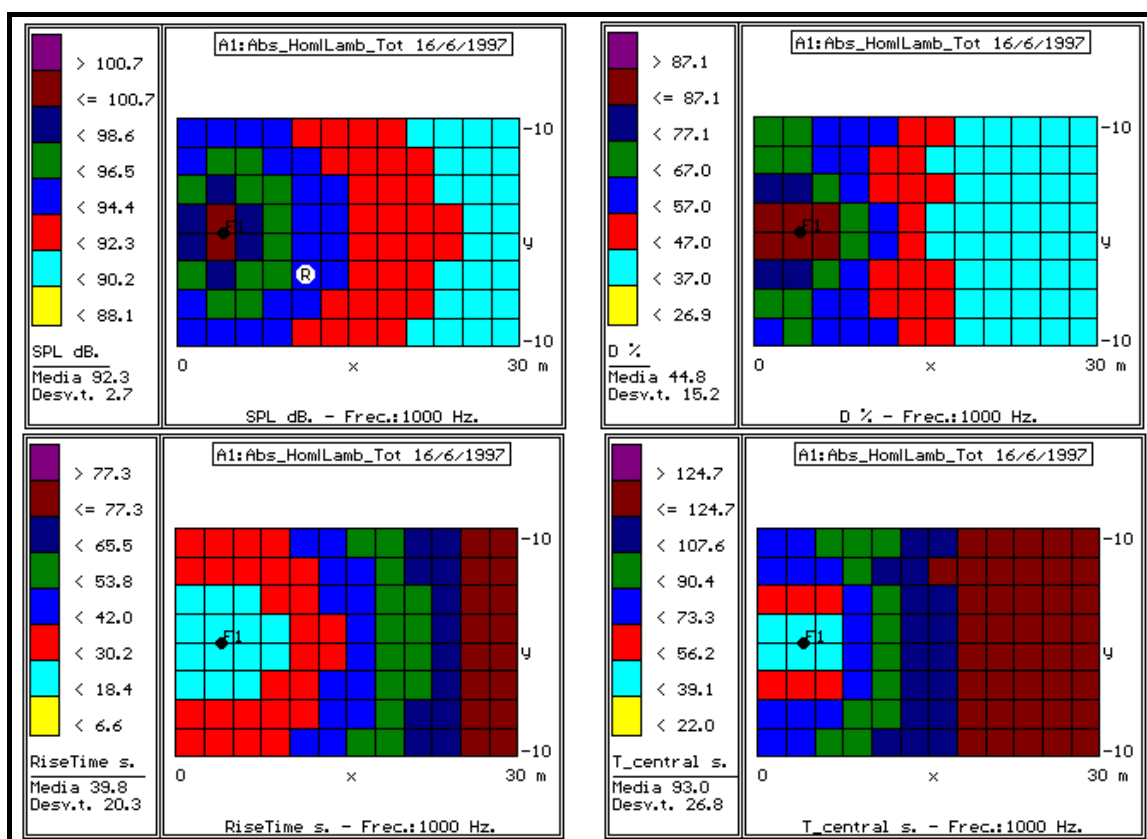
**Fig. 3.15. Parámetro EDT y Ecograma Energético de un Receptor. Sala Rectangular: Absorción Homogénea y Difusión Lambertiana.**

El resultado fue un valor de Tiempo de Reverberación medio igual a 1.46 seg, con una desviación típica de tan sólo 0.02 seg. Este es un excelente resultado, pues coincide con el valor del Tiempo de Reverberación Estadístico  $T_{Estadis.}$  de la ecuación (3.44.). Además, la homogeneidad de resultados obtenidos entre receptores está de acuerdo con la teoría de que en condiciones de campo difuso se espera que el tiempo de reverberación sea casi constante a lo largo de toda la sala. No ocurre así con el  $EDT$ , parámetro que se ve muy influido por el

campo directo de la fuente sonora, y del que no disponemos de los valores teóricos esperados. En la figura 3.15. presentamos la distribución espacial de los valores calculados del parámetro *EDT*.

También presentamos, como ejemplo, el ecograma energético correspondiente al receptor n° 35 señalado con una R en la figura. Es de destacar que la intensidad en dB cae linealmente, en escala lineal exponencialmente, tal como cabe esperar. El programa distingue en colores el orden de reflexión correspondiente de la energía incidente (primeros intervalos del ecograma). En rojo se presenta la parte de energía aportada por la onda directa, en azul oscuro la parte de energía proveniente por primeras reflexiones, en azul celeste segundas reflexiones, y en blanco la energía de posteriores reflexiones.

En la figura 3.16. presentamos la distribución espacial de los valores de otros parámetros de interés: nivel de presión sonora *SPL*, coeficiente de definición *D*, tiempo de ascenso  $T_r$  y tiempo central  $T_s$ .



**Fig. 3.16. Parámetros SPL, D,  $T_r$ ,  $T_s$  de la Sala Rectangular. Absorción Homogénea y Difusión Lambertiana.**

### 3.8.2. Tiempo de Reverberación Medio en una Sala Rectangular: Distribución de Absorción No Homogénea.

La teoría estadística se basa en la hipótesis de la existencia de un campo difuso. Normalmente esta hipótesis no se cumple por lo que se hace necesario recurrir a otras técnicas, tal como vamos a ver a continuación.

Se estudia la misma geometría que en el Apartado anterior, pero con absorción total en el suelo y nula en las demás paredes, de manera que el coeficiente de absorción medio sigue siendo el mismo  $\alpha=3/11\approx 0.273$ . Aunque supongamos que las reflexiones en las superficies siguen el modelo lambertiano, el campo sonoro de esta sala no es difuso, y el valor del Tiempo de Reverberación Estadístico anterior (1.46 seg), excede al valor correcto.

La explicación a este hecho es la que apunta el profesor Kuttruff (Kuttruff, 1995) (Kuttruff, 1996). Es evidente que el flujo de energía hacia el contorno no es el mismo en todas partes: un punto en el suelo recibe energía reflejada del techo y de las paredes laterales, es decir, de todas las posibles direcciones de incidencia, pero un punto en el techo recibirá sonido desde un ángulo sólido mucho menor debido a que la audiencia no reemite sonido. Así, el suelo (o audiencia) absorberá más energía de lo que lo haría en un campo sonoro difuso, y por eso el tiempo de reverberación es más corto que el tiempo predicho por la teoría estadística.

El profesor Kuttruff plantea la solución teórica al problema a través de la ecuación integral:

$$B(\mathbf{r}, t) = \iint_S B(\mathbf{r}, t - R/c) \mathbf{r}(\mathbf{r}') K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dS' \quad (3.45.)$$

donde  $B(\mathbf{r}, t)\mathbf{r}(\mathbf{r}')dS'$  es la energía re-radiada por  $dS'$ .

Suponiendo un proceso difusivo regido por la ley de Lambert:

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\cos \mathbf{q} \cos \mathbf{q}'}{p R^2} \quad (3.46.)$$

y a través de un cálculo iterativo, el autor citado obtiene un tiempo de reverberación de 1.22 seg.

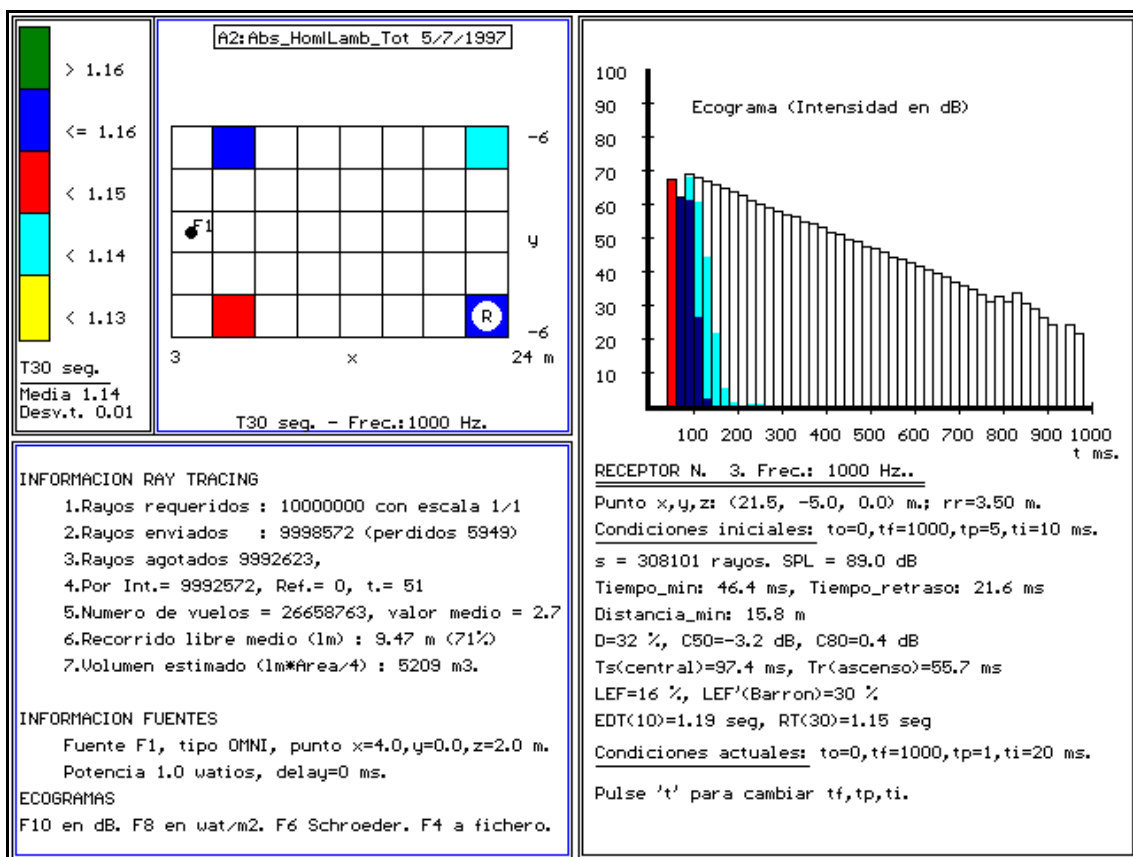
Hay que señalar que la distribución de absorción influye enormemente en el número de rayos necesario para obtener buenos ecogramas. Esto supuso un problema a la hora de realizar la simulación, debido a las extremas condiciones de esta sala (suelo totalmente absorbente, resto totalmente reflectante). Así encontrábamos que para un número de rayos normal  $N=100.000$ , los ecogramas simulados mostraban energía cero a partir de los 100 ms. Y que para  $N=1.000.000$ , los ecogramas se desvanecen, repentinamente, cerca de  $t=1$  seg. Esto es



debido a que, para esta configuración, la intensidad simulada en los intervalos de los ecogramas es proporcional a la densidad de rayos presente en cada intervalo de tiempo  $\Delta t$ . Luego, la densidad de rayos en el tiempo decae tan rápidamente como la energía. La razón de decaimiento de la energía en la sala aproximadamente es (Cremer, 1978):

$$E = E_o e^{-\frac{13.8}{T}t} = E_o e^{-\frac{13.8}{1.22}t} = E_o 10^{-5t} \quad (3.47.)$$

Así por ejemplo utilizando  $N=10^6$  rayos, cuando haya transcurrido 1 seg, sólo quedarán viajando 10 rayos, lo que no es una buena densidad de rayos. Para tener 10000 rayos, por ejemplo, necesitaría lanzar  $10^9$  rayos, lo que es impracticable.



**Fig. 3.17. Parámetro RT(30) y Ecograma Energético de un Receptor.  
Sala Rectangular: Absorción no Homogénea y Difusión Lambertiana.**

Por esta razón, la simulación de la sala en las condiciones actuales, se realizó con un número de rayos mucho mayor que el anterior  $N=10^7$  rayos. Para ganar en velocidad, y no siendo necesario llenar de receptores todo el suelo, se escogieron sólo 4 receptores de radio 3.5 m. En la figura 3.17. vemos la distribución espacial del parámetro  $RT(30)$ , así como el ecograma energético de uno de los receptores.

El tiempo de reverberación  $RT(30)$  de los 4 receptores, así como sus coordenadas, son los que aparecen en la Tabla 3.8. El valor medio es 1.14 seg, con una desviación típica muy baja, 0.01.

TABLA 3.7.  
 $RT(30)$  de la Simulación.

Receptor	x	y	z	RT(30)
1	7.5	-5.0	0.0	1.14
2	7.5	5.0	0.0	1.15
3	22.5	-5.0	0.0	1.15
4	22.5	5.0	0.0	1.13

Este valor de 1.14 seg o similar se obtuvo en repetidas ocasiones y para distintas configuraciones: distinto número de rayos, distinto radio de receptor, distinto tiempo final del ecograma, distinta posición de la fuente, etc. Y por ello se le tiene bastante confianza. Hay una pequeña diferencia, 0.06 seg., frente al resultado presentado por el profesor Kuttruff. Desconocemos cuál puede ser la causa de tal discrepancia, aunque consideramos que no es de gran importancia.

Podemos decir que nuestro modelo genera los resultados esperados a los problemas planteados. Además permite, de forma natural, plantear otras hipótesis de trabajo con las que no se puede aplicar el método de la ecuación integral. Nos estamos refiriendo, en general, a procesos de difusión no lambertianos.

Y en particular, a modelos de reflexiones parcialmente difusas, que son los modelos que más se ajustan a la realidad, y que no es posible plantearlos por esta ecuación. Recordemos que incluso el cálculo del campo estacionario se ve muy influido por las primeras reflexiones, por lo que es muy importante disponer de técnicas de cálculo que puedan tener en cuenta procesos de difusión parcial.

Esta experiencia nos sugiere en qué medida el tiempo de reverberación se ve influido por el proceso de difusión en las reflexiones de las paredes. ¿Depende de la ley de difusión?. En principio parece que sí, y muchos autores estudian el tema (Joyce, 1975) (Polack, 1992) (Dalenbäck, 1995) (Lam, 1996a) (Lam, 1996b), pero la teoría estadística clásica nunca los ha mencionado, como si se tratase de un tema menor. Se dice que se requiere un campo difuso en toda la sala, lo que nos lleva a pensar que la ley de Lambert es la ideal. Pero eso no quita que puedan utilizarse otras, ni que la ley de Lambert sea la que se ajuste más a la realidad.

Nuestro modelo puede investigar estos procesos con total libertad, simplemente definiendo la ley de difusión, tal como hicimos en las ecuaciones del Apartado 3.4.

### 3.8.3. Parámetro Definición en un Receptor en una Sala Rectangular: Distribución de Absorción Homogénea

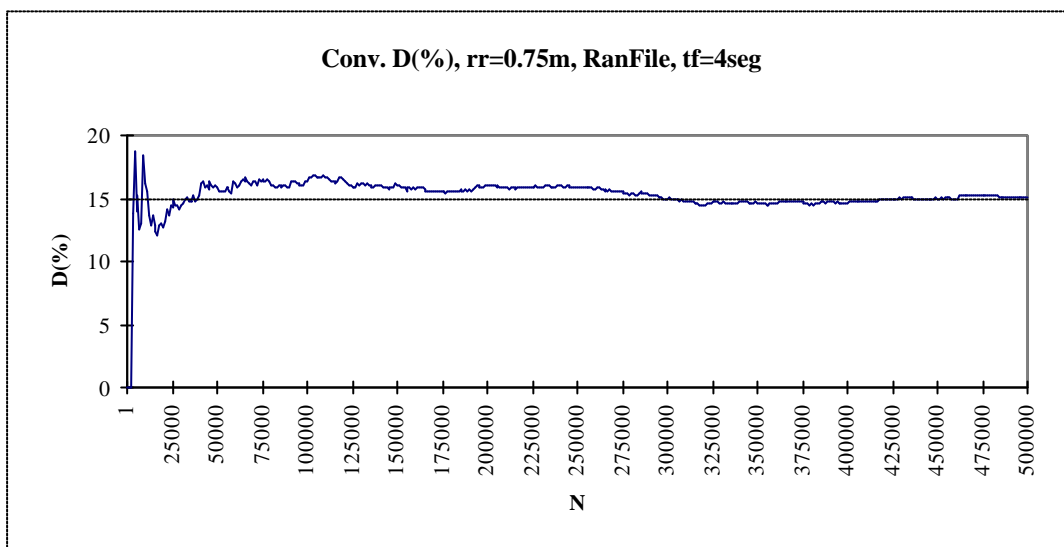
Otra prueba de validación interesante a la que hemos sometido al programa ha sido la que detallamos a continuación. Recordemos que, desde el punto de vista de la acústica geométrica, el método de las imágenes nos proporciona la posibilidad de saber exactamente la intensidad sonora en un punto de una sala. Y como apuntábamos en el Apartado 2.3, el excesivo número de imágenes necesarias que hay que considerar lo hace impracticable en la mayor parte de los casos reales. No es así para la sala rectangular, en la que todas las imágenes son visibles desde cualquier punto, y por lo tanto el número de imágenes sólo crece con el cubo del tiempo, y no exponencialmente. Así y todo, la aplicación del método de las imágenes a la sala rectangular requiere una cierta complejidad que algunos autores han estudiado.

El equipo de Krokstad (Kristiansen, Krokstad y Follestad, 1993) presenta un algoritmo propio para hallar la posición de las fuentes imagen y, por lo tanto, para determinar la intensidad sonora en cualquier punto de la sala. En su artículo, calculan el valor del parámetro definición  $D$  para una sala rectangular de dimensiones 27.5x41.2x34.4 m, fuente en el punto (10.3, 34.4, 13.7) m, receptor en el punto (17.2, 3.4, 20.6) m y coeficiente de absorción medio igual para todas las paredes  $\alpha=0.19$ . Con estas condiciones, obtienen que el parámetro definición converge hacia el valor  $D = 15\%$ . Este resultado, es el mismo que el obtenido por Allred y Newhouse en 1988, utilizando un algoritmo diferente del método de las imágenes.

Con el fin de comprobar el correcto funcionamiento del programa hemos estudiado el mismo problema que los autores citados. Para ello, hemos definido la geometría, introducido los coeficientes de absorción y especificado las posiciones de la fuente y del receptor. El receptor, no pudiendo ser puntual, ha sido definido como una esfera de radio bastante pequeño,  $r_r = 0.75$  m. Se utilizó una fuente aleatoria isotrópica, con la que se lanzaron hasta 500.000 rayos. Para que el modelo sea comparable con el método de las imágenes, se utilizaron reflexiones totalmente especulares en las superficies.

Con todas estas especificaciones, se obtuvo el resultado de la figura 3.18. En ella se puede apreciar cómo el modelo de rayos converge al mismo resultado que el método de las imágenes,  $D=15\%$ .

Obsérvese que se ha tenido que lanzar un número muy elevado de rayos para que el modelo convergiera, debido a que se ha utilizado un radio de receptor relativamente pequeño. Como veremos en el Capítulo 4, el error del método es mayor para radios de receptor más pequeños.



**Fig. 3.18. Convergencia del parámetro D.**

Por último hay que señalar que, a pesar del inevitable esfuerzo computacional requerido (el programa, en un Pentium 100 MHz, tardó aproximadamente hora y media) nuestro método es aplicable a cualquier tipo de sala, mientras que los métodos deterministas citados anteriormente sólo son aplicables a la sala rectangular.

### 3.9. Resumen y Conclusiones

En todas las pruebas planteadas el programa genera los resultados esperados. Tanto en el cálculo de tiempos de reverberación como en el cálculo de parámetros de estructura fina, el modelo de simulación es muy satisfactorio. Por supuesto, siempre teniendo como referente el modelo teórico de la Acústica Geométrica.

A diferencia del resto de modelos computacionales, el método del trazado de rayos es el único que presenta un coste computacional tolerable. A cambio, la exactitud de sus resultados viene ligada al número de rayos utilizado en el modelo.

Otra ventaja del método del trazado de rayos es que permite simular procesos de difusión totales y parciales si tenemos en cuenta que a partir del momento de que un rayo sufre una reflexión difusa, deja de ser especular y, como en un proceso irreversible, pasa a formar parte de la energía difusa de la sala (Kuttruff, 1979). Por supuesto, lo ideal sería un modelo de difusión basado en el fraccionamiento de la energía del rayo incidente en otros rayos de energía más pequeña, pero esto supondría un coste computacional exponencial imposible de asumir con los ordenadores actuales.

## **CAPÍTULO 4**

### **Error del Método del Trazado de Rayos en la Determinación de la Respuesta Impulsiva**

## 4.1. ERROR DE LA TÉCNICA DEL TRAZADO DE RAYOS

### 4.1.1. Introducción

La técnica del trazado de rayos ha ganado gran difusión en la simulación por ordenador para la obtención de la respuesta impulsiva acústica de salas y auditorios. Sin embargo, en muchos casos, los usuarios olvidan que las técnicas de trazado de rayos tan sólo proporcionan una solución aproximada a una ecuación diferencial de difícil resolución e intentan extrapolar sus resultados más allá de las limitaciones propias del método. El bajo coste de los ordenadores personales y las representaciones impresionantes de los resultados han hecho perder, muchas veces, la visión de las restricciones y propiedades del método.

En este Capítulo vamos a mostrar, a través de consideraciones geométricas y estadísticas, cómo la aplicación directa del método de Monte Carlo a nuestro problema nos permite hallar una expresión sencilla para la determinación de la confianza estadística de los resultados a medida que incrementamos el número de rayos. Para ello, utilizaremos el modelo teórico de "espacio de receptores imagen", según el cual, el cálculo de la energía acústica que llega a un receptor pasa por el cálculo del "ángulo sólido" que subtende sobre el punto de la fuente emisora. Las comillas en "ángulo sólido" obedecen a que no hablamos del receptor sólo sino de las múltiples imágenes de éste. Al final del Capítulo presentaremos una validación de los resultados obtenidos con la metodología propuesta.

### 4.1.2. Naturaleza Estadística del Modelo

Actualmente, en acústica geométrica, existen dos métodos diferentes para el cálculo del campo sonoro en una sala:

1. el método de las imágenes (*source image method*), en el que se pueden utilizar receptores de tipo puntual, y que da una representación exacta de la propagación de la onda desde la fuente hasta el punto de medición. Es de solución exacta, pero su elevado coste computacional lo hace impracticable para el cálculo de respuestas impulsivas de duración razonable en acústica de salas.
2. el método del trazado de rayos (*ray tracing method*), que está basado en una partición o discretización de la energía de las ondas esféricas que emite una fuente, en elementos llamados rayos sonoros. Debido a que la probabilidad de que un rayo intersecte con un punto es cero,

esta técnica necesita receptores no puntuales. La calidad de sus resultados está ineludiblemente ligada al grado de exactitud en la discretización, entre otros, al número de rayos.

¿Qué error se introduce con la técnica del trazado de rayos?

Suponiendo que se cumplen las hipótesis de que el campo sonoro es incoherente y de que las longitudes de onda presentes son pequeñas en comparación con las dimensiones típicas de la sala (acústica geométrica), existe un error inherente al método debido a que sustituimos una estructura continua (el frente de ondas) por una discreta.

Se define el error de la técnica del trazado de rayos como "la diferencia entre el valor de la intensidad sonora calculada por el método del trazado de rayos y el valor que se obtendría utilizando un método exacto" (Kullowski, 1982). Este error se refiere a *la credibilidad* de los resultados calculados por medio de la técnica del trazado de rayos, resultados que están ligados a un error estadístico inevitable. Es muy importante resaltar en este punto que la técnica del trazado de rayos es un modelo numérico para simular el campo sonoro según la teoría de la acústica geométrica. Y por ello, para validar la calidad de la simulación deberemos comparar los resultados del modelo con los resultados teóricos que se obtendrían según la acústica geométrica. No se trata de comparar el modelo con medidas experimentales pues esto significaría un objetivo diferente que no es nuestro propósito: estudiar el rango de aplicación y de validez de la acústica geométrica.

Desafortunadamente, incluso siendo nuestro referente la teoría de la acústica geométrica, desconocemos el resultado exacto de la mayoría de los problemas de interés, por lo que el error de la técnica del trazado de rayos, en general, no ha podido ser medido de una forma satisfactoria. Según todos los autores consultados, la manera de comprobar la credibilidad de los resultados de sus programas de simulación es a través de encontrar una convergencia suficiente en los resultados al aumentar el número de rayos utilizados. Esta forma de operar consiste en comparar los resultados obtenidos para un número inicial de rayos emitidos, y una cantidad mucho mayor, por ejemplo el doble, el triple, diez veces más, etc. Cuando la diferencia entre estadios sucesivos es pequeña, se supone que el modelo ha convergido y que los resultados obtenidos finalmente son los correctos. En nuestra opinión, esta manera de analizar el error del modelo de simulación supone un esfuerzo computacional muy elevado, debido a que requiere la comparación entre diferentes soluciones del programa. Además, debe considerarse como una forma sólo *cualitativa* de analizar la credibilidad de los resultados porque, en realidad, no se puede extrapolar el grado de precisión de la simulación a partir de un reducido número de

soluciones. En general, esta manera de operar no permite cuantificar el error de la estimación del modelo de simulación para un número determinado de rayos.

La técnica del trazado de rayos permite obtener un diagrama de la variación de la intensidad sonora respecto al tiempo, bien para toda una sala o parte de ella. Normalmente se supone que este diagrama está compuesto sólo por rayos que penetran en una esfera transparente al sonido, de un radio y una posición del centro determinados. Por motivos prácticos evidentes, el diagrama presenta una discretización en pequeños intervalos de tiempo  $\Delta t$  entre los tiempos inicial y final. La energía en cada intervalo es igual a la suma de un número aleatorio de porciones elementales de energía transportadas por rayos individuales. Así pues, el método del trazado de rayos es un método de naturaleza estadística.

La técnica del trazado de rayos puede considerarse como una forma del método de Monte Carlo que se aplica para calcular los valores de la curva de decaimiento sonoro en sucesivos intervalos de un histograma. Un error de la técnica del trazado de rayos es equivalente a un error de un resultado obtenido mediante el método de Monte Carlo.

#### 4.1.3. Antecedentes

Varios han sido los autores que han planteado el problema de esta manera, y que han intentado evaluar el error de la técnica del trazado de rayos como si de un experimento de Monte Carlo se tratase.

La primera vez que se aplicó el método de Monte Carlo en el campo de la acústica, según cita de Haviland (Haviland, 1973), fue en 1958 por Allred y Newhouse para el cálculo del recorrido libre medio de salas utilizando rayos distribuidos aleatoriamente. Más tarde, Schroeder (Schroeder, 1970) utilizó este método para la determinación del tiempo de reverberación en salas. Ninguno de estos autores abordó la cuestión del error de las estimaciones obtenidas.

Haviland (Haviland, 1973) aplicó el método de Monte Carlo para el cálculo de la respuesta impulsiva de una sala, incluyendo un análisis del error de la estimación. Dado que los resultados de un experimento de Monte Carlo son variables estadísticas es necesario conocer su valor medio y desviación estándar para poder caracterizarlos. Si el experimento se repite para  $m=1, \dots, M$  bloques de rayos, cada uno consistente en  $N_m$  rayos, podremos evaluar el valor medio de los experimentos así como su desviación estándar. Haviland aplica esta técnica al igual que Juricic y Santon (Juricic y Santon, 1973).



Muchos autores han estudiado la influencia del trazado de grandes cantidades de rayos, como una forma de obtener resultados *más creíbles*: Schroeder (Schroeder, 1970), Santon (Santon, 1976), Vorländer (Vorländer, 1989), Naylor (Naylor, 1993). Sin embargo, encontrar una expresión analítica general de la cantidad de rayos mínima necesaria para obtener unos resultados suficientemente creíbles es una tarea sin resultado satisfactorio, porque difícilmente puede concretarse en una fórmula algo que depende de tantos y tan diversos factores como son la posición del receptor, la posición de la fuente, la geometría, la absorción de la sala, la difusión, etc.

El autor más importante actualmente en la investigación del error del método del trazado de rayos es Kullowski (Kullowski, 1982). Su trabajo "*Error investigation for the ray tracing technique*", un clásico en la bibliografía de acústica de salas, es citado por multitud de autores, entre ellos el creador de los modelos híbridos, Vorländer (Vorländer, 1989). Incluso especialistas relacionados con dos de los principales programas comerciales ("Odeon" y "Epidaure"), también nombran este importante trabajo (Naylor, 1993) (Maercke, 1993). Kullowski estudia a través de diferentes métodos la manera de determinar un número apropiado de rayos para alcanzar unos ciertos niveles de convergencia. Define una desviación estándar en función de la energía de los rayos e intenta relacionarla con el error de las estimaciones del método. Sin embargo, al igual que en los trabajos de otros autores, *la credibilidad* de sus resultados debe considerarse en un sentido cualitativo, pues sólo hace referencia a la convergencia de los estimadores que define. Ninguno de los métodos actuales hace posible la determinación de la magnitud del error de las estimaciones en función del número de rayos utilizados.

#### 4.1.4. Objetivos del Capítulo

En este Capítulo vamos a obtener una expresión analítica que permita *cuantificar*, en cada momento del proceso, el error asociado a la técnica del trazado de rayos, lo que nos va a permitir evitar los costosos tests de convergencia habituales. Este error, lo obtendremos a partir de la teoría del método de Monte Carlo, en función de la varianza asociada al estimador intensidad sonora de la respuesta impulsiva simulada numéricamente.

En el Apartado 4.2. haremos una breve introducción a los fundamentos teóricos del método de Monte Carlo. En el Apartado 4.3. aplicaremos esta técnica al cálculo de una fracción de ángulo sólido sobre una esfera, resultado que posteriormente aplicaremos cuando hablemos del "espacio de receptores imagen de una sala". En el Apartado 4.4. deduciremos la expresión analítica que determina el error de estimación en el cálculo de la distribución temporal de la energía sonora

reflejada. Por último, en los apartados 4.5. y 4.6. compararemos los resultados obtenidos con los de otros autores, y presentaremos cómo el análisis realizado permite establecer una serie de recomendaciones muy útiles a la hora de elegir entre distintas configuraciones iniciales del modelo.

## 4.2. EL MÉTODO DE MONTE CARLO

### 4.2.1. Introducción

El método de Monte Carlo es el nombre con que se designa un procedimiento de simulación basado en la utilización de números aleatorios. Es una técnica numérica para la resolución de problemas de tipo general, cuya estructura de cálculo tiene la forma de un proceso estocástico, entendiendo como tal una secuencia de estados cuya evolución está determinada por sucesos aleatorios (Kalos y Whitlock , 1986).

Esta técnica puede aplicarse tanto a problemas *determinísticos* (la solución, si existe, es exacta) como a problemas estadísticos o *no determinísticos* (la solución, si existe, viene caracterizada por un valor medio, una varianza, etc.).

De cualquier manera la solución que aporta este método, sea cual sea el problema considerado, es de tipo aproximado y por lo tanto susceptible de caracterizarse como cualquier variable estadística.

El nombre de Monte Carlo sugiere ideas relacionadas con los juegos de azar. En efecto, esta técnica puede resultar muy adecuada para resolver problemas de naturaleza aleatoria, como por ejemplo calcular la probabilidad de ganar o perder en una partida de cartas. Pensemos en el juego del solitario: si podemos establecer unas reglas lógicas de juego para cualquier situación que se pueda dar en el transcurso de una partida, podremos simular el desarrollo de una partida cualquiera; si repartimos las cartas de una forma aleatoria (siguiendo una distribución de probabilidad uniforme), y repetimos el experimento muchas veces, podremos encontrar la probabilidad de que una partida cualquiera termine en éxito, simplemente contando el número de veces que se gana o se pierde. Suponiendo que en cada partida apostamos una cantidad de dinero determinada, podremos saber cuánto vamos a ganar o perder "en término medio" en una serie de partidas. Y como el número de éstas es limitado, el método de Monte Carlo también nos dirá con qué desviación respecto a ese valor medio, desviación que será tanto mayor cuanto menor sea el número de partidas jugadas.

Veamos un ejemplo de aplicación del método a un problema determinístico. Supongamos que queremos calcular el área  $S$  que subtiende una función  $g(x)$  sobre el eje horizontal  $X$ , entre dos rectas verticales  $x=a$ ,  $x=b$  (figura 4.1.).

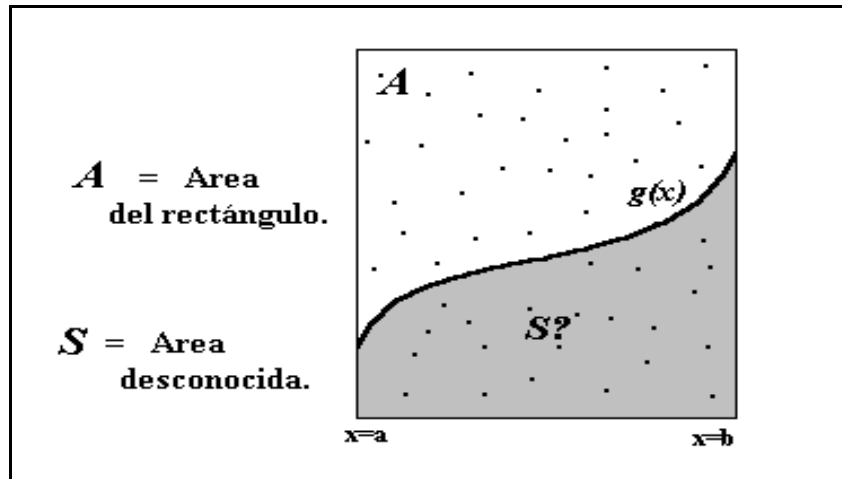


Fig. 4.1. Integración por el método de Monte Carlo. Los puntos aleatorios son elegidos dentro del área  $A$  de valor conocido.

Estamos buscando el valor de la integral definida:

$$S = \int_a^b g(x) dx \quad (4.1.)$$

que sería la solución analítica, completamente exacta, a nuestro problema. Desgraciadamente no siempre existe tal solución analítica, y es en esos casos cuando debemos acudir a métodos numéricos para obtener valores aproximados de la solución buscada. La integración a través del método de Monte Carlo consiste en elegir una región del plano de área conocida  $A$  que incluya el área de estudio  $S$ . Por ejemplo, elegimos un rectángulo (fig. 4.1.), y sobre él lanzamos  $N_A$  puntos aleatorios elegidos según una distribución uniforme. Una parte de ellos,  $N_S$ , quedarán por debajo de la curva de la función, impactando en  $S$ . Así, el área buscada  $S$ , puede aproximarse a través de la fracción de puntos aleatorios que quedaron debajo de  $g(x)$  multiplicada por el área total  $A$ :

$$S \approx \frac{N_S}{N_A} A \quad (4.2.)$$

La exactitud del valor obtenido, para una región fijada  $A$ , será mayor cuanto mayor sea el número de puntos lanzados  $N_A$ .

Una manera muy adecuada de operar para un valor de  $N_A$  dado, consistiría en repetir el experimento de Monte Carlo varias veces y sobre los resultados obtenidos en cada caso presentar el valor medio de  $S$  acompañado de su correspondiente desviación típica.

Otra posibilidad consiste en ir aumentando el número de puntos aleatorios y detenerse cuando la diferencia porcentual entre un estadio y el anterior sea menor que un nivel de precisión predeterminado.

Estas ideas, ya presentes hace una par de siglos<sup>1</sup>, alcanzaron un enorme impacto en las investigaciones de física nuclear en la década de los años cuarenta; sin embargo, ha sido preciso esperar a que se produjera el desarrollo de las técnicas de computación por ordenador para que investigadores de otros campos científicos se hayan planteado su aplicación en los mismos.

#### 4.2.2. Fundamentación Teórica del Método de Monte Carlo

La técnica de resolución de integrales que hemos visto en el ejemplo anterior también recibe el nombre de "resolución por cuadratura". Es un caso particular de una forma más general de abordar el problema que consiste en promediar una función cuya variable independiente sigue una distribución de probabilidad determinada.

Por ejemplo, para resolver la integral anterior podríamos haber utilizado la siguiente estrategia: el área buscada  $S$  es el producto de  $b-a$  (base del área de estudio) por la altura media de la figura, el valor medio o valor esperado de  $g(x)$ ,  $E[g(x)]$  o  $\int_a^b g(x)f(x)dx$  indistintamente.

En consecuencia, podemos escribir:

$$S = (b - a) E[g(x)] = (b - a) \int_a^b g(x)f(x)dx \quad (4.3.)$$

$$\text{donde } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

---

<sup>1</sup> En 1777, Comte de Buffon describió el siguiente experimento: una aguja de longitud  $L$  se lanza aleatoriamente sobre un plano horizontal rayado con líneas rectas a una distancia  $d < L$  entre ellas, ¿cuál es la probabilidad  $P$  de que la aguja intersekte a alguna de tales líneas?. Mediante simulación obtuvo  $P=2L/pd$ . Algunos años después Laplace sugirió que esta idea podría servir para encontrar el valor de  $p$ .

de manera que podemos considerar  $x$  como una variable aleatoria que sigue una distribución de probabilidad uniforme  $f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$ . De esta manera, para resolver la integral en el campo discreto, podemos tomar  $N$  valores equiprobables  $x_i$  en los que evaluamos la función  $g(x)$ . El valor medio de  $g(x)$  para la muestra elegida es la media aritmética de los  $g(x_i)$ :

$$S \approx (b - a) G_N$$

siendo (4.4.)

$$G_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i)$$

De un modo más general, supongamos que queremos evaluar un hipervolumen  $W$  contenido en otro mayor  $V$ . Esto equivale a integrar sobre todo el espacio definido por  $V$  pero contando sólo aquellos puntos  $\mathbf{x}$  que quedan dentro de  $W$ , donde  $\mathbf{x}$  es un vector  $n$ -dimensional.

Si definimos la siguiente función escalar  $g(\mathbf{x})$ :

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} V & \text{si } \mathbf{x} \text{ esta incluido en } W \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (4.5.)$$

y una función de densidad de distribución uniforme  $f(\mathbf{x})$ :

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{V} & \text{si } \mathbf{x} \text{ esta incluido en } V \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (4.6.)$$

que vemos que cumple las propiedades:

$$f(\mathbf{x}) \geq 0 \quad , \quad \int_V f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1 \quad (4.7.)$$

entonces el valor medio de  $g(\mathbf{x})$  según  $f(\mathbf{x})$  es  $W$ :

$$\langle g(\mathbf{x}) \rangle = \int_V g(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{V} \int_W V d\mathbf{x} = W \quad (4.8.)$$

Ya tenemos identificada la integral general que queremos resolver, incluso queda claro que puede interpretarse como el valor medio de una función. Además, esta función tendrá una varianza determinada. A continuación vamos a concretar, ya en el campo discreto, cuáles serán los "estimadores muestrales" de la media y la varianza.

#### 4.2.2.1. Estimador Media Muestral

La anterior expresión puede evaluarse de la siguiente forma: tomar una serie de  $N$  variables aleatorias  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$  desde  $f(\mathbf{x})$ , es decir, una muestra que sigue la distribución de probabilidad  $f(\mathbf{x})$ , y evaluar la anterior integral como un sumatorio:

$$G_N = \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}_i) f(\mathbf{x}_i) \Delta \mathbf{x}_i = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}_i) \Delta \mathbf{x}_i = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}_i) \frac{V}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}_i) \quad (4.9.)$$

Por tanto, la media aritmética  $G_N$  es una aproximación de  $\langle g(\mathbf{x}) \rangle$ .  $G_N$  recibe el nombre de *estimador media muestral*:

$$G_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}_i) \quad (4.10.)$$

La aproximación es tanto mejor cuantos más puntos se elijan en la discretización, verificándose en el límite cuando  $N \rightarrow \infty$  que la media muestral  $G_N$  converge al valor esperado  $\langle g(\mathbf{x}) \rangle$  (Kalos y Whitlock, 1986):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} G_N = \langle g(\mathbf{x}) \rangle \quad (4.11.)$$

La expresión (4.10.) nos muestra que  $G_N$  es combinación lineal de  $N$  variables aleatorias y, por lo tanto, puede caracterizarse por un valor esperado, una varianza, etc. El valor esperado de  $G_N$  coincide con el valor esperado de  $g(\mathbf{x})$  debido a la linealidad de la operación:

$$\langle G_N \rangle = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}_i) \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle g(\mathbf{x}_i) \rangle = \langle g(\mathbf{x}) \rangle \quad (4.12.)$$

$G_N$ , media aritmética de  $g(\mathbf{x})$ , es una variable estadística cuyo valor esperado  $\langle G_N \rangle$  coincide con el valor esperado de  $g(\mathbf{x})$ ,  $\langle g(\mathbf{x}) \rangle$ .

Se dice que el estimador  $G_N$  es un *estimador centrado o insesgado* de  $g(\mathbf{x})$ . Más generalmente, una expresión  $G$  es un estimador insesgado de una cantidad, por ejemplo  $\int g(x)f(x)dx$ , si su media coincide con tal cantidad.

Como sabemos, una medida de la dispersión de un estadístico es su varianza o momento de orden dos respecto a la media. La varianza de  $g(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{s}^2$  o  $Var[g(\mathbf{x})]$  indistintamente, es:

$$\mathbf{s}^2 = Var[g(\mathbf{x})] = \int_V g^2(\mathbf{x})f(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \langle g(\mathbf{x}) \rangle^2 \quad (4.13.)$$

y recordemos dos propiedades importantes del operador varianza que se deducen de su definición (López, 1988). Primera, que siendo  $\mathbf{x}$  una variable aleatoria y  $I$  una constante, entonces:

$$Var[I\mathbf{x}] = I^2 Var[\mathbf{x}] \quad (4.14.)$$

y segunda, que la varianza de una suma algebraica de variantes estocásticamente independientes es igual a la suma aritmética de las varianzas de esas variantes:

$$Var[\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2] = Var[\mathbf{x}_1] + Var[\mathbf{x}_2] \quad (4.15.)$$

La varianza de  $G_N$  nos informará del intervalo de error que afecta a este estimador. Veamos cuál es su valor:

$$Var[G_N] = Var\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}_i)\right] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N Var[g(\mathbf{x}_i)] = \frac{Var[g(\mathbf{x})]}{N} \quad (4.16.)$$

es decir:

$$Var[G_N] = \frac{\mathbf{s}^2}{N} \quad (4.17.)$$

Así, a medida que  $N$ , el número de muestras de  $\mathbf{x}$ , aumenta, la varianza del valor medio  $G_N$  disminuye como  $1/N$ . La aplicación del método de Monte Carlo para la evaluación de integrales se basa en este hecho.

#### 4.2.2.2. Estimador Varianza Muestral

¿Qué estimador de  $\mathbf{s}^2 = Var[g(\mathbf{x})]$  vamos a utilizar? Recordemos que por definición:

$$\mathbf{s}^2 = \int_V (g(\mathbf{x}) - \langle g(\mathbf{x}) \rangle)^2 f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.18.)$$

expresión que cumple:

$$\mathbf{s}^2 = \langle g^2(\mathbf{x}) \rangle - \langle g(\mathbf{x}) \rangle^2 \quad (4.19.)$$

Para una muestra aleatoria simple, la varianza muestral  $s_N^2$  es:

$$s_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (g(\mathbf{x}_i) - G_N)^2 \quad (4.20.)$$

o lo que es lo mismo:

$$s_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g^2(\mathbf{x}_i) - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}_i) \right)^2 \quad (4.21.)$$

donde el subíndice  $N$  nos recuerda que la calidad de este estadístico queda necesariamente ligada al número de muestras utilizadas.

A continuación vamos a analizar algunas de las propiedades de este estadístico. Recordemos que el estadístico  $G_N$  cumple que  $\langle G_N \rangle = \langle g(\mathbf{x}) \rangle$ . Veamos cuál es el valor esperado de  $s_N^2$ :

$$\left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g^2(\mathbf{x}_i) - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}_i) \right)^2 \right\rangle = \langle g^2 \rangle - \frac{1}{N^2} \left\langle \sum_{i=1}^N g^2(\mathbf{x}_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N g(\mathbf{x}_i) g(\mathbf{x}_j) \right\rangle \quad (4.22.)$$

Utilizando la propiedad de que la esperanza matemática de un producto de variantes estocásticamente independientes  $\langle g(\mathbf{x}_i) g(\mathbf{x}_j) \rangle$  es el producto de las esperanzas de esas variantes  $\langle g(\mathbf{x}_i) \rangle \langle g(\mathbf{x}_j) \rangle$  (López, 1988), obtenemos que la anterior expresión se convierte en:

$$\left( 1 - \frac{1}{N} \right) \langle g^2 \rangle - \frac{N(N-1)}{N^2} \langle g \rangle^2 = \frac{N-1}{N} \text{Var}[g(\mathbf{x})] \quad (4.23.)$$

De este modo hemos llegado a demostrar que:



$$\langle s_N^2 \rangle = \frac{N-1}{N} \mathbf{s}^2 \quad (4.24.)$$

En consecuencia, el valor medio de  $s_N^2$  es menor que  $\mathbf{s}^2$ , aunque la diferencia tiende a cero al aumentar  $N$ . Este hecho pone de manifiesto que  $s_N^2$  es un estimador sesgado de  $\mathbf{s}^2$ , lo que podríamos haber evitado utilizando la *cuasivarianza muestral* o *varianza muestral corregida* (Peña, 1992) definida por:

$$S_N^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (g(x_i) - G_N)^2 \quad (4.25.)$$

que cumple:

$$S_N^2 = \mathbf{s}^2 \frac{N}{N-1} \quad \text{y} \quad \langle S_N^2 \rangle = \langle \mathbf{s}^2 \rangle \quad (4.26.)$$

Utilizando este estadístico como estimador de la varianza, podemos expresar la varianza de  $G_N$  como:

$$Var[G_N] = \frac{\mathbf{s}^2}{N} = \frac{S_N^2}{N} = \frac{\mathbf{s}^2}{N-1} = \frac{1}{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g^2(x_i) - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(x_i) \right)^2 \right] \quad (4.27.)$$

Por supuesto, para que esta estimación tenga sentido, es preciso suponer que la muestra es suficientemente grande, con el fin de poder tomar como valor de  $\mathbf{s}^2$  el valor de su estimador centrado  $S_N^2$ .

#### 4.2.2.3. Distribución de la Media de una Variable Aleatoria

Adicionalmente cabe señalar que, para cualquier valor fijado de  $N$ , hay una función de densidad de probabilidad que describe los valores que  $G_N$  toma en la simulación de Monte Carlo. De acuerdo con el teorema central del límite (Kalos y Whitlock, 1986), cuando  $N \rightarrow \infty$ , esa distribución tiende asintóticamente a la distribución normal:

$$f(G_N) = \frac{1}{\sqrt{2\mathbf{p}(\mathbf{s}^2/N)}} \exp \left[ -\frac{N(G_N - \langle g \rangle)^2}{2\mathbf{s}^2} \right] \quad (4.28.)$$

A medida que tomamos muestras de tamaño  $N$  mayor, para un número  $N$  suficientemente grande ( $N \gg 1$ ), el estimador media muestral  $G_N$  queda en intervalos más y más estrechos cerca del valor esperado  $\langle g \rangle$  y podemos predecir la probabilidad de desviaciones respecto a la media, medidas en unidades de  $s/\sqrt{N}$ . Esta es la desviación estándar de la anterior distribución y, dado el significado de "error" que tiene la diferencia  $G_N - \langle g \rangle$ , en ocasiones también la llamaremos *error estándar e*:

$$e = s/\sqrt{N} \quad (4.29.)$$

Aprovechando las propiedades de la distribución normal, podemos establecer diferentes intervalos de confianza para el estimador  $G_N$ . Así por ejemplo,  $G_N$  está dentro de un error estándar de  $\langle g \rangle$  el 68.3% de las veces, dentro de dos errores estándar el 95.4% de las veces, y dentro de tres errores estándar el 99.7% de las veces.

Cuando la varianza poblacional de  $g(\mathbf{x})$ ,  $s^2$ , es desconocida, como sucede en nuestro caso, la forma que acabamos de ver para determinar el intervalo de confianza no es aplicable porque depende de  $s$ . Cuando  $s^2$  se desconoce puede analizarse la distribución muestral de  $G_N$  según una distribución "t de Student" con  $N-1$  grados de libertad, de media  $\langle g \rangle$  y varianza igual a la varianza muestral corregida dividida por  $N$ ,  $S_N^2/N$  (López, 1988). Así, por ejemplo, si fijáramos un intervalo de confianza del 95% para una muestra de tamaño  $N=10$ , y obtuviéramos la correspondiente "t de Student" con 9 grados de libertad, veríamos que el estimador  $G_N$  se encuentra dentro del intervalo  $\langle g \rangle \pm 2.262 S_N/\sqrt{N}$  con una probabilidad del 95%. Para valores de  $N$  grandes, la distribución "t de Student" converge a una distribución normal con lo que a efectos prácticos volvemos al caso anterior sin más que sustituir  $s^2$  por  $S_N^2$ .

El teorema central del límite es muy potente porque da una distribución específica para los valores de  $G_N$ , pero sólo puede aplicarse asintóticamente. El valor que debe tener  $N$  para poder aplicar el teorema central del límite depende del problema considerado. Si para el problema en particular existe el momento central tercero  $m_3$  de  $g$ , entonces el teorema central del límite se satisface cuando (Kalos y Whitlock, 1986):

$$|m_3| \ll s^3 \sqrt{N} \quad (4.30.)$$

Sin el teorema central del límite, en general, hay otra acotación del error no tan fuerte, que es la desigualdad de Chebychev (López, 1988), y que también nos da una idea de cuán desviado se encuentra el valor observado  $G_N$  de la media real. La desigualdad de Chebychev es:

$$P\left\{|G - \langle G \rangle| \geq \left[\frac{\text{Var}[G]}{\mathbf{d}}\right]^{1/2}\right\} \leq \mathbf{d} \quad (4.31.)$$

donde  $\mathbf{d}$  es un número positivo. Esta desigualdad a veces recibe el nombre de *primer teorema fundamental de Monte Carlo* porque da una estimación de la posibilidad de obtener una gran desviación en un cálculo de Monte Carlo. Supongamos por ejemplo que  $\mathbf{d}=0.01$  (un 1%). Entonces la anterior desigualdad se convierte en:

$$P\left\{|G - \langle G \rangle| \geq 10[\text{Var}[G]]^{1/2}\right\} \leq 0.01 \quad (4.32.)$$

o, utilizando (4.17.) cuando  $\text{Var}[G]=\mathbf{s}^2/N$ :

$$P\left\{|G - \langle G \rangle| \geq 10 \mathbf{s} / \sqrt{N}\right\} \leq 0.01 \quad (4.33.)$$

En consecuencia, la estimación realizada se encuentra dentro de 10 desviaciones estándar con una probabilidad del 99%. Luego hay que hacer que dichas desviaciones estándar sean muy pequeñas, es decir,  $N$  muy grande, para hacer nuestra acotación significativa.

Si tomamos  $\mathbf{d}=0.05$  (un 5%), con un 95% de probabilidad, nuestra estimación se encuentra dentro de  $1/0.05=4.47$  veces  $\mathbf{s}/\sqrt{N}$ . Recordemos que con la suposición del teorema central del límite sólo era 1.96 veces la desviación estándar.

#### 4.2.2.4. Convergencia del Método

Hemos visto que el método que estamos estudiando disminuye la varianza de la estimación (es decir, su error), al mismo ritmo que la raíz cuadrada de  $N$ , el número de puntos del muestreo. En esencia, cada nuevo punto muestreado se añade linealmente a una suma que será la función promedio, y también linealmente a una suma de cuadrados que será la varianza. El error estimado vendrá dado por la raíz cuadrada de esta varianza:

$$\text{Var}[G_N] = \frac{\mathbf{s}^2}{N} \quad , \quad \text{error} = \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{N}} \quad (4.34.)$$

De cualquier modo, este tipo de convergencia con la raíz cuadrada no es inevitable. El principal contraejemplo se basa en utilizar unos puntos de muestreo tales que queden en una red cartesiana, eligiendo cada uno de ellos una sola vez, en cualquier orden. El método de Monte Carlo entraría ahora en un esquema de cuadratura determinística, cuyo error decrece al menos tan rápido como

$N^{-1}$  (incluso más rápido si la función tiende a cero suavemente en los contornos de la región de estudio, o es periódica en dicha región).

El problema que se plantea con una selección de este tipo (una rejilla) consiste en la necesidad de tener que decidir *a priori*, cuán fina será la rejilla, cuál será el número  $N$  de puntos a estudiar. Además, estamos obligados a completar todos los puntos del muestreo. Con una rejilla no es conveniente seguir el recurso de "promediar hasta" que se alcance un cierto criterio de convergencia o de finalización.

Es interesante dejar planteada esta cuestión para poder tener en cuenta que existen esquemas intermedios entre muestreos totalmente aleatorios, y muestreos totalmente determinísticos. En este sentido mencionar las *secuencias de números cuasi-aleatorios*, como las secuencias de Sobol (Press *et al.*, 1992) que son secuencias de valores aleatorios de una longitud determinada  $N$ , pero que tienen la interesante propiedad de distribuirse a lo largo de un espacio  $N$ -dimensional de una manera más uniforme que simples números aleatorios no correlacionados.

#### 4.2.2.5. Reducción de la Varianza

Ya que el error del estimador es proporcional a la varianza de la función que se muestrea,  $Var[g(\mathbf{x})]$ , se nos brinda una magnífica posibilidad de *reducir la varianza* del método eligiendo de forma adecuada  $g(\mathbf{x})$  y  $f(\mathbf{x})$ , dejando siempre constante el producto  $g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$  que es el integrando de la integral estudiada. En ciertos problemas, como una integración en el espacio, el hecho de aumentar el número de puntos de muestreo en aquellas zonas en las que existe más posibilidad de obtener información puede contribuir a reducir la varianza. Por supuesto, aumentar el número de puntos en ciertas regiones, significa disminuirles el peso relativo que podían tener inicialmente. En esencia habría que cambiar la función  $g(\mathbf{x})$  por la función entre corchetes de la siguiente expresión:

$$G = \int g(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \left[ \frac{g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})}{f'(\mathbf{x})} \right] f'(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.35.)$$

donde  $f'(x)$  es una nueva función de densidad de probabilidad. Obsérvese que la función que reemplaza a  $g(\mathbf{x})$  ha de presentar una varianza menor con lo que se aumentará la precisión del método de Monte Carlo.

### 4.3. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE MONTE CARLO AL CÁLCULO DE UNA FRACCIÓN DE ÁNGULO SÓLIDO

En este Apartado aplicaremos el método de Monte Carlo para calcular una fracción de ángulo sólido subtendido sobre el punto central de una esfera, resultado que posteriormente utilizaremos cuando hablemos del "espacio de receptores imagen de una sala".

Supongamos que tenemos una esfera y unas manchas, continuas o discontinuas, que se extienden sobre la superficie de la misma ocupando un cierto ángulo sólido  $\Omega_k$ . Supongamos que queremos saber la fracción de ángulo sólido subtendido por estas superficies respecto del dominio global  $4\mathbf{p}$  y para ello deseamos aplicar el método de Monte Carlo. Por supuesto, es fundamental que tengamos alguna metodología que nos permita distinguir si un punto sobre la superficie de la esfera pertenece a una mancha o no.

Primero debemos identificar la integral que deseamos resolver. Aplicando la estrategia vista en el Apartado anterior, podemos interpretar la fracción de ángulo sólido  $F_k$  buscada como el valor medio de una función  $g$  según una función de densidad de probabilidad  $f$ :

$$F_k = \langle g \rangle = \int_{\Omega} g f d\Omega \quad (4.36.)$$

donde  $g$  es una función definida para todos los ángulos sólidos  $\Omega$  como:

$$g = \begin{cases} 1 & \text{en } \Omega_k \\ 0 & \text{en } (\Omega - \Omega_k) \end{cases} \quad (4.37.)$$

y  $f$  es una función de densidad de probabilidad uniforme que nos permite normalizar la integral:

$$f = 1/4\mathbf{p} \text{ en } \Omega, \text{ y cumple } \int_{\Omega} f d\Omega = 1 \quad (4.38.)$$

Con estos valores la integral ((4.50.)) se reduce a:

$$F_k = \frac{1}{4\mathbf{p}} \int_{\Omega_k} d\Omega = \frac{\Omega_k}{4\mathbf{p}} \quad (4.39.)$$

con lo que la identidad queda satisfecha.

También podemos calcular la varianza o momento de orden dos respecto a la media de la función  $g$ :

$$\text{Var}[g] = \mathbf{s}^2 = \int_{\Omega} (g - \langle g \rangle)^2 f d\Omega = \langle g^2 \rangle - \langle g \rangle^2 \quad (4.40.)$$

que, para las definiciones dadas, toma el valor de:

$$\mathbf{s}^2 = \frac{\Omega_k}{4p} - \left( \frac{\Omega_k}{4p} \right)^2 \quad (4.41.)$$

o también:

$$\mathbf{s}^2 = F_k - F_k^2 \quad (4.42.)$$

El método de Monte Carlo nos dice que una aproximación de la integral ((4.50.)) puede obtenerse generando una serie de valores aleatorios muestreados según  $f$  y evaluando  $g$  para cada uno de esos puntos. La media aritmética de todos los valores  $g_i$  es una estimación de la integral buscada:

$$F_k' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i \quad \text{o} \quad F_k' = \frac{N_k}{N} \quad (4.43.)$$

donde:

- $N$  es la cantidad total de puntos muestreados.
- $N_k$  la cantidad de puntos que han impactado en la región del espacio donde la función  $g$  es no nula.

Para el caso que nos ocupa, la varianza muestral es:

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i^2 - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i \right)^2 \quad \text{o} \quad s^2 = \frac{N_k}{N} - \left( \frac{N_k}{N} \right)^2 \quad (4.44.)$$

Recordemos que el estimador  $F_k'$  es una variable estadística de media  $F_k$ :

$$\langle F_k' \rangle = F_k \quad (45.)$$

que cuando  $N \rightarrow \infty$  converge a  $F_k$  según:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F_k' = F_k \quad (4.46.)$$

y que presenta una varianza:

$$\text{Var}[F_k'] = \frac{s^2}{N} \quad (4.47.)$$

Como desconocemos  $s^2 = \text{Var}[g]$ , podemos aproximarlo por el estimador varianza muestral corregida  $S^2$ , o directamente por el estimador varianza muestral  $s^2$  (cuando  $N$  es relativamente grande):

$$\text{Var}[F_k'] \approx \frac{s^2}{N} \quad (4.48.)$$

Así, a medida que el número de muestras utilizadas aumenta, la varianza muestral  $s^2$  se estabiliza en un valor, pero la varianza de  $F_k'$  disminuye como  $1/N$ .

Si tomamos el error proporcional a la desviación típica, éste disminuye como  $1/\sqrt{N}$ . Esta es la idea central del método de Monte Carlo para la evaluación de integrales. El valor de la integral y una cota del error pueden obtenerse mediante la siguiente expresión:

$$F_k = F_k' \pm \sqrt{\text{Var}[F_k']} = F_k' \pm \frac{s}{\sqrt{N}} \quad (4.49.)$$

#### **4.4. EL MÉTODO DE MONTE CARLO PARA EL CÁLCULO DE LA DISTRIBUCIÓN TEMPORAL DE LA ENERGÍA SONORA REFLEJADA**

##### **4.4.1. Consideraciones Geométricas**

La intensidad sonora que incide en un receptor se puede calcular como la suma de las aportaciones de la fuente sobre cada *receptor imagen* (fig. 4.2.) tal como plantean Juricic y Santon (Juricic y Santon, 1973), Kullowski (Kullowski, 1982), Borish (Borish, 1984) o Vorländer (Vorländer, 1989). En este modelo, equivalente al de las fuentes imagen, el punto central es la fuente sonora y a su alrededor tenemos las diferentes imágenes del receptor que recibirán la energía acústica emitida por la fuente.

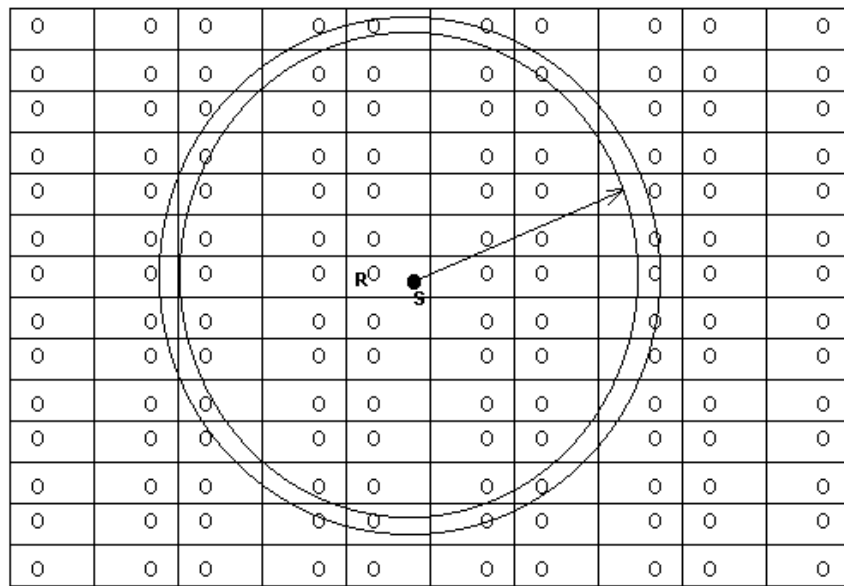
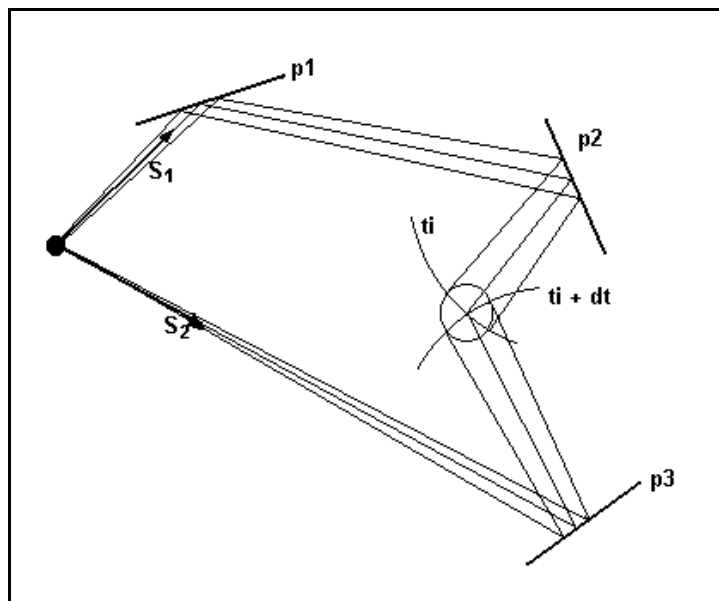


Fig. 4.2. Espacio de receptores imagen en una sala rectangular.

Para un tiempo dado inicial  $t_i$  y un tiempo final  $t_f = t_i + dt$  únicamente los receptores que se encuentren dentro de la corona circular correspondiente contribuirán a la respuesta impulsiva.

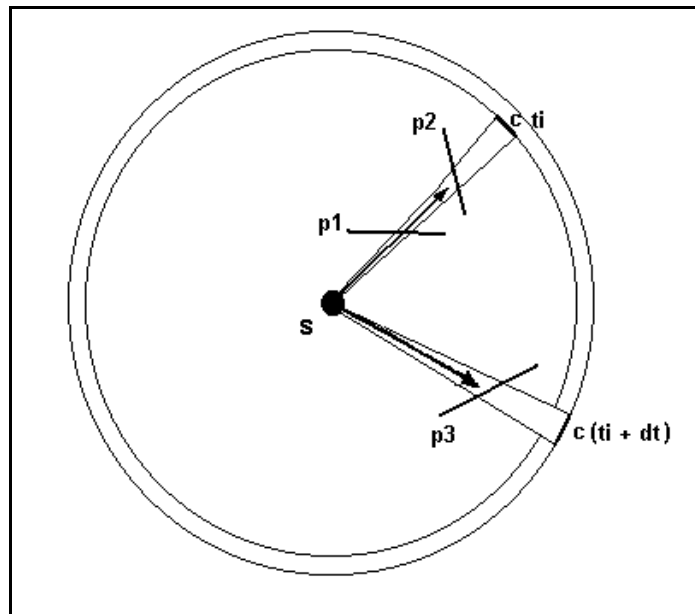
Supongamos un receptor esférico de radio  $R$ , una fuente puntual omnidireccional y tres paredes totalmente reflejantes (fig. 4.3.). Para un tiempo  $t_i$ , sobre el centro del receptor incide un haz sonoro  $S_1$  que previamente fue reflejado sobre las superficies  $p_1$  y  $p_2$ . Para otro tiempo  $t_i + dt$ , otro haz sonoro  $S_2$  que había sido reflejado en  $p_3$  también impacta en el receptor.





**Fig. 4.3. Incidencia en un receptor de dos haces sonoros  $S_1$ ,  $S_2$  que siguieron diferentes caminos.**

Podemos rectificar los caminos seguidos por los rayos sonoros para adecuarlos al esquema de *espacio de imágenes de receptores* planteado en la figura 4.2. Teniendo en cuenta la reflexión especular obtendremos una representación como la de la figura 4.4. Cada haz sonoro impacta una imagen espacial distinta del receptor según su dirección de búsqueda  $S_1$  o  $S_2$ .



**Fig. 4.4. Equivalencia de la figura 2 en el espacio de imágenes del receptor.**

Si elegimos un  $dt$  suficientemente corto que nos asegure que, para una dirección de búsqueda dada  $S$ , no impactamos al mismo receptor más de una vez, las diferentes imágenes del mismo receptor subtenderán distintos ángulos sólidos respecto de la fuente sonora.

Receptores encontrados en tiempos posteriores subtenderán ángulos sólidos menores, aunque el número de éstos aumentará al mismo ritmo, compensándose ambos efectos.

#### **4.4.2. Efecto de la Absorción en las Paredes**

Partiendo de la interpretación geométrica que nos brinda el modelo de "espacio de receptores imagen", debemos averiguar qué fracción de la potencia acústica total emitida ha sido recibida por el receptor en el intervalo  $dt$  (intervalo  $k$ -ésimo).

A continuación, veremos el cálculo del estimador potencia recibida en un receptor, así como su error asociado, para dos casos diferentes: sala sin absorción en las paredes y sala con absorción.

#### 4.4.2.1. Sin Absorción en las Paredes

En el supuesto de que el coeficiente de absorción de las paredes sea cero, el cálculo de la energía acústica llegada a un receptor, puede reducirse al cálculo del "ángulo sólido" que subtenden los múltiples receptores imagen sobre el punto emisor.

Consideramos que cada una de las  $n_r$  imágenes del receptor subtiende sobre la fuente un ángulo sólido  $\Omega_s$ , donde  $s=1, \dots, n_r$ , y que la suma de todos equivale a un ángulo total  $\Omega_k$ . Calculamos por el método de Monte Carlo la potencia  $P_k$  recibida por el receptor. Estamos buscando el valor de la integral:

$$P_k = \int_{\Omega} g f d\Omega \quad (4.50.)$$

donde:

$$g = \begin{cases} P_o & \text{en } \Omega_k \\ 0 & \text{en } (\Omega - \Omega_k) \end{cases} \quad \text{y} \quad f = 1 / (4\mathbf{p}) \quad \text{en } \Omega \quad (4.51.)$$

Con estos valores, la integral (4.50.) se reduce a:

$$P_k = \frac{P_o}{4\mathbf{p}} \int_{\Omega_k} d\Omega = P_o \frac{\Omega_k}{4\mathbf{p}} \quad (4.52.)$$

que, obviamente, es lo que deseábamos obtener. Por el método de Monte Carlo la integral (4.50.) puede ser aproximada por:

$$P'_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i = P_o \sum_{s=1}^{n_r} \frac{N_s}{N} = P_o \frac{N_k}{N} \quad (4.53.)$$

donde:

- $n_r$  es el número de imágenes del receptor encontradas por el método.
- $N_s$  es el número de rayos que impacta una de las imágenes del receptor ( $s=1, \dots, n_r$ ).
- $N_k$  es el número total de rayos que impactaron en imágenes del receptor:  $N_k = \sum N_s$ .
- $N$  es el número total de rayos emitidos.

Nótese que para un receptor interceptado en tiempos posteriores la fracción  $N_s/N$  es menor, teniéndose así en cuenta el efecto de divergencia esférica de la fuente. Aunque por otro lado, el número de imágenes  $n_r$  aumenta en la misma proporción, compensándose ambos efectos (la energía alcanza un nivel estacionario). La expresión (4.53.) demuestra nuestra afirmación de que el cálculo de la potencia que llega a un receptor en un intervalo de tiempo equivale al cálculo de la fracción de ángulo sólido subtendido por las imágenes de nuestro receptor, ponderado con la potencia total de la fuente.

#### 4.4.2.2. Con Absorción en las Paredes

Cada imagen del receptor es observada desde la fuente a través de las paredes del recinto (fig. 4.4.). Estas paredes constituyen un filtro, modulando la cantidad de energía que llega a cada imagen. En algunos casos pueden fraccionar la imagen, como sucede en el caso de paredes incompletas o intersecciones de paredes. Si cada pared tiene un mismo material absorbente (no confundir con absorción uniforme en todo el recinto) el ángulo sólido subtendido por cada receptor imagen tendrá asociado un coeficiente de reflexión  $r = 1 - a$ . Podemos considerar, como caso general, que dicho coeficiente es, para un cierto intervalo de tiempo, función de la dirección original de cada rayo  $S$  emitido por la fuente.

Para hallar la respuesta impulsiva de la sala en un receptor cualquiera, hay que calcular la distribución temporal de la potencia sonora reflejada (Kuttruff, 1979):

$$P(t) = \iint_{\Omega} P_t(\mathbf{q}, \mathbf{j}) d\Omega \quad (4.54.)$$

donde  $P_t(\mathbf{q}, \mathbf{j})$  es la distribución direccional dependiente del tiempo de la potencia sonora reflejada.

Si suponemos que la fuente está caracterizada por una potencia sonora  $P_o$  podemos decir que la fracción de potencia que alcanza a cada receptor imagen es:

$$P_s = P_o r_s \frac{\Omega_s}{\Omega} \quad (4.55.)$$

para  $s=1, \dots, n_r$ , donde  $\Omega_s$  es el ángulo que subtiende el receptor imagen y  $\Omega=4\pi$ . El coeficiente de reflexión  $r_s$  es un número menor que uno, que se reduce aún más al aumentar el número de reflexiones antes de llegar al receptor. Su efecto, en ocasiones, puede considerarse como equivalente a reducir el tamaño del receptor.

Así pues, aplicando el método de Monte Carlo, vamos a calcular el valor medio de una función  $g$  (la distribución direccional temporal de la potencia sonora) a través de un muestreo uniforme según una función  $f$  en el espacio de direcciones, tal que:

$$g = \begin{cases} P_o \mathbf{r}_s & \text{en } \Omega_s \\ 0 & \text{en } (\Omega - \Omega_s) \end{cases} \quad \text{y} \quad f = 1 / (4\mathbf{p}) \quad \text{en } \Omega \quad (4.56.)$$

para  $s=1,2,\dots,n_r$  porque cada imagen de receptor representa un camino diferente de la energía (podrían considerarse detalles más finos pero no cambian la exposición general del problema).

Con estos valores, y llamando  $P_t$  a la potencia que recoge el receptor en el instante  $t$  a través de todas sus imágenes, la integral (4.54.) se reduce a:

$$P_t = \int_{\Omega} g f \, d\Omega = \frac{1}{4\mathbf{p}} \int_{\Omega_1, \dots, \Omega_s, \dots, \Omega_{n_r}} P_o \mathbf{r}_s \, d\Omega \quad (4.57.)$$

y resulta que:

$$P_t = P_o \sum_{s=1}^{n_r} \frac{\Omega_s}{4\mathbf{p}} \mathbf{r}_s \quad (4.58.)$$

En realidad,  $P_t$  es un valor instantáneo. Si promediamos la potencia sonora en un intervalo de tiempo  $[t_k, t_k + \Delta t]$  obtenemos la potencia promedio del intervalo  $k$ -ésimo  $P_k$ :

$$P_k = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_k}^{t_k + \Delta t} P_t \, dt \quad (4.59.)$$

Si llamamos  $P_k'$  a la estimación de  $P_k$  en el intervalo de tiempo  $k$ -ésimo a través de las  $N$  muestras, tenemos que es:

$$P_k' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i = P_o \sum_{s=1}^{n_r} \frac{\mathbf{r}_s N_s}{N} \quad (4.60.)$$

La anterior expresión podemos reescribirla en función de los rayos recibidos, sin distinguir en qué imagen están, y comprobar que el estimador  $P_k'$  corresponde con la suma de las potencias de los rayos que inciden. La potencia de cada uno de los  $N$  rayos emitidos es:

$$p_i = \frac{P_o}{N} \mathbf{r}_i \quad (4.61.)$$

por lo que podemos ver el estimador  $P_k'$ , expresión **¡Error!No se encuentra el origen de la referencia.**, como la suma de la potencia que llevan los rayos:

$$P_k' = \sum_{i=1}^{N_k} p_i = \sum_{i=1}^{N_k} \frac{P_o}{N} \mathbf{r}_i \quad (4.62.)$$

donde  $N_k$  es el total de rayos que han incidido en el receptor (en sus imágenes) y  $p_i$  la potencia de la que es portador cada rayo.

Para pasar del cálculo de la potencia al de la energía media durante el intervalo consideraremos un pulso de duración  $t_p \ll dt$ . Proponemos también que el número de imágenes del receptor encontradas en un intervalo  $t_i - t_p$  no difieren demasiado de las que encontraremos en un tiempo  $t_i + t_p$  de manera que la energía adicional contabilizada por un lado compense la no contabilizada por el otro. Con esta hipótesis en mente la energía captada en el intervalo viene dada por:

$$E_k' = \frac{P_o t_p}{4\mathbf{p}} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \frac{4\mathbf{p}}{N} = P_o t_p \sum_{s=1}^{n_r} \frac{\mathbf{r}_s N_s}{N} = P_k' t_p \quad (4.63.)$$

De forma análoga, para hablar de intensidad sería necesario dividir la potencia suministrada por la fuente por el área del receptor  $A$ , así:

$$I_k' = \frac{P_k'}{A} \quad (4.64.)$$

Dado a que el paso de potencia a energía sólo requiere multiplicar por el factor  $t_p$ , y el paso a intensidad sólo requiere dividir por el área del receptor, en lo que sigue de exposición nos referiremos a unas magnitudes u otras indistintamente.

Como apuntamos anteriormente, la expresión (4.4.62.) de  $P_k'$  es un estimador muestral de  $P_p$ , y para evaluar su precisión necesitamos evaluar  $Var(g)$ , que para el caso que nos ocupa es:

$$Var(g) = \frac{1}{4\mathbf{p}} \int_{\Omega_1, \dots, \Omega_{n_r}} (P_o \mathbf{r}_s)^2 d\Omega - \langle g \rangle^2 \quad (4.65.)$$

que se reduce a:

$$Var(g) = \sum_{s=1}^{n_r} (P_o \mathbf{r}_s)^2 \frac{\Omega_s}{4\mathbf{p}} - \left( \sum_{s=1}^{n_r} P_o \mathbf{r}_s \frac{\Omega_s}{4\mathbf{p}} \right)^2 \quad (4.66.)$$

El cálculo de  $Var(g)$ , en el intervalo  $k$ -ésimo, lo hacemos a través de su estimador  $s_k^2$  que para las  $N$  muestras es:

$$s_k^2 = \sum_{s=1}^{n_s} (P_o \mathbf{r}_s)^2 \frac{N_s}{N} - \left( \sum_{s=1}^{n_s} P_o \mathbf{r}_s \frac{N_s}{N} \right)^2 \quad (4.67.)$$

o en función de los rayos, sin distinguir en qué receptor imagen incidieron:

$$s_k^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_k} (P_o \mathbf{r}_i)^2 - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N_k} P_o \mathbf{r}_i \right)^2 \quad (4.68.)$$

donde  $N_k$  es el total de rayos que han incidido en el receptor en el intervalo  $k$ -ésimo, o:

$$s_k^2 = N \sum_{i=1}^{N_k} p_i^2 - \left( \sum_{i=1}^{N_k} p_i \right)^2 \quad (4.69.)$$

Una vez evaluada esta cantidad, podemos decir que la varianza del estimador  $P_k'$  es:

$$Var(P_k') = \frac{s_k^2}{N} = \sum_{i=1}^{N_k} p_i^2 - \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^{N_k} p_i \right)^2 \quad (4.70.)$$

Recordemos que deberíamos haber utilizado la varianza muestral corregida  $S^2$ , pero que la diferencia entre ésta y la varianza muestral es muy pequeña,  $S^2 = s^2 N/(N-1)$ .

## 4.5. ANÁLISIS DEL ERROR DE LA RESPUESTA IMPULSIVA

### 4.5.1. Error Absoluto y Relativo

Cada intervalo del histograma o respuesta impulsiva está compuesto por la energía de los rayos, que son variables estadísticas. El análisis que acabamos de ver en el Apartado anterior deberemos aplicarlo a cada uno de todos los intervalos de la respuesta impulsiva. De esta manera, la secuencia de valores de la curva que caracteriza el decaimiento sonoro vendrá definida por la intensidad recibida  $I'_k$  con su correspondiente secuencia de desviaciones estándar  $r'_k$  del estimador  $I'_k$  ( $k=1,2, \dots,K$ ; donde  $K$  es el número de intervalos del histograma) según:

$$I_k = I'_k \pm r'_k \quad (4.71.)$$

siendo:

$$r'_k = \sqrt{\frac{s_k^2}{N}} \quad (4.72.)$$

y  $s_k^2$  la varianza calculada según la ecuación (4.69.) del método anterior.

El *coeficiente de variación relativa de Pearson* (Peña, 1992) o raíz cuadrada de la varianza relativa del estimador  $I'_k$  es:

$$m'_k = \frac{r'_k}{I'_k} \quad (4.73.)$$

que en esta exposición tiene el significado de "error estadístico relativo". Nos ayudará a medir el error porcentual de la estimación.

El error estándar absoluto  $r'_k$  también podemos presentarlo en decibelios, del mismo modo que otros autores (Kullowski, 1982), si tenemos en cuenta que en cada intervalo del histograma los límites de variación son:

$$10 \log \frac{I'_k + r'_k}{I_o} \quad \text{y} \quad 10 \log \frac{I'_k - r'_k}{I_o} \quad (4.74.)$$

donde  $I_o$  es la intensidad de referencia  $10^{-12}$  w/m<sup>2</sup>.

De esta manera, la amplitud del rango de variación en decibelios,  $\Delta r'_k$ (dB), es igual a:

$$\Delta r'_k \text{ (dB)} = 10 \log \frac{I'_k + r'_k}{I'_k - r'_k} \quad (4.75.)$$

O en función del error relativo  $m'_k$  :

$$\Delta r'_k \text{ (dB)} = 10 \log \frac{1 + m'_k}{1 - m'_k} \quad (4.76.)$$

por lo que  $m'_k$  en función de  $\Delta r'_k$ (dB) es:

$$m'_k = \frac{10^{\frac{\Delta r'_k \text{ (dB)}}{10}} - 1}{10^{\frac{\Delta r'_k \text{ (dB)}}{10}} + 1} \quad (4.77.)$$

#### 4.5.2. Comparación con otros Autores

Como señalábamos en el Apartado 4.1.2. al revisar los antecedentes del problema, Kullowski es el autor que más directamente ha abordado la cuestión del error y el que más ha sido referenciado. Este autor propone estudiar *la dispersión de la energía de los rayos* a través de una desviación estándar, que como señala él mismo, puede calcularse de muchas formas. La energía recibida en el intervalo  $k$ -ésimo es (Kullowski, 1982):

$$\mathbf{e}_{k(Kullowski)} = \sum_{i=1}^{n_k} e_{i,k} \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4.78.)$$

y su desviación estándar:

$$s_{k(Kullowski)}^2 = \frac{n_k^2}{n_k - 1} \left[ \sum_{i=1}^{n_k} (e_{i,k})^2 - \frac{1}{n_k} \left( \sum_{i=1}^{n_k} e_{i,k} \right)^2 \right] \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4.79.)$$

donde  $n_k$  es el número de rayos recibidos en el receptor y  $e_{i,k}$  es la energía del rayo  $i$ -ésimo ( $i = 1, \dots, n_k$ ).

Con el fin de comparar (4.79.) con (4.69.) aproximamos  $n_k - 1 \approx n_k$  y la expresión anterior queda como:

$$s_{k(Kullowski)}^2 = n_k \sum_{i=1}^{n_k} (e_{i,k})^2 - \left( \sum_{i=1}^{n_k} e_{i,k} \right)^2 \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (4.80.)$$

resultado que presenta la misma estructura formal que la expresión (4.69.) propuesta por nosotros, pero que difiere totalmente de ella ya que el primer sumando aparece multiplicado por  $n_k$  (número de muestras que impactan en el receptor o sus imágenes) en vez de  $N$  (número total de muestras utilizadas en la simulación). Son expresiones distintas.

La primera pregunta que podemos hacernos al respecto es cuál es el significado de la desviación estándar utilizada por Kullowski. Si tenemos en cuenta que la energía media de los rayos interceptados en el intervalo  $k$ -ésimo es:

$$\langle e_k \rangle = \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} e_{i,k} \quad (4.81.)$$



podemos reescribir la ecuación (4.79.) en la forma:

$$s_{k(Kullowski)}^2 = n_k^2 [\langle e_k^2 \rangle - \langle e_k \rangle^2] \quad (4.82.)$$

Esta varianza mide la semejanza de la energía de los rayos incidentes en el receptor en un intervalo de tiempo. Cuando todos los rayos incidentes tienen la misma energía (gráficamente podemos decir que pertenecen a un mismo frente de ondas) el valor de esta varianza es cero. En algunos momentos del artículo mencionado se da a entender que esta expresión es una medida del error estadístico, idea que se ilustra con gráficas en las que se puede ver cómo el error asociado con esta varianza aumenta muy rápidamente con el tiempo. Sin embargo, el error de los intervalos iniciales del histograma, en los que sabemos que existe una mayor homogeneidad entre la energía de los rayos, es muy pequeño. Indirectamente, la varianza definida por Kullowski implica que no hay error en la estimación cuando todos los rayos tienen la misma energía, principalmente en los intervalos iniciales del histograma. Esto es incorrecto conceptualmente, porque, como sabemos, sólo utilizando un número infinito de rayos podríamos alcanzar un error cero. Por otro lado, la expresión de Kullowski mide un error "desmesurado" en los intervalos posteriores del histograma, es decir, cuando la energía de los rayos es dispar entre sí. Esto también es incorrecto, porque mide como error algo natural en el fenómeno que estamos simulando, que el campo sonoro pasa a ser difuso. Y finalmente, hemos de objetar que Kullowski no justifica el origen conceptual de la varianza que utiliza, lo que directamente la invalida como fuente de información sobre el error.

Veamos un ejemplo numérico que ponga de relieve la diferencia que estamos señalando. Supongamos que la onda directa de una fuente omnidireccional de 1 watio incide sobre un receptor esférico de radio 1 m situado a una distancia de 10 m. La energía incidente es proporcional a la fracción de ángulo sólido:

$$I = \frac{p \, 1^2}{4p \, 10^2} = \frac{1}{400} = 0.0025 \text{ w m}^{-2} \quad (4.83.)$$

Supongamos que utilizamos 10.000 rayos. De acuerdo con el método de Monte Carlo, el receptor recibirá la misma fracción de rayos, en término medio, lo que correspondería a un número de 25 rayos. El método tiene un error inherente debido a que el número de rayos interceptado es una variable estadística que se distribuye normalmente alrededor de 25, y será de 23, 27, 24 o 25 por ejemplo. Así y todo, podemos decir que la estimación  $I'$  será muy cercana al valor correcto  $I$ .

Mientras que la expresión de Kullowski (4.79.) indica una varianza nula:

$$s_{Kullowski}^2 = 0 \quad (4.84.)$$

la expresión (4.69.) que hemos obtenido y que mide la varianza de la distribución direccional de la intensidad sonora, siendo  $N=10.000$  y  $N_k=25$  (por ejemplo, porque perfectamente podría ser 27, o 23, un valor cercano a éste) en cambio toma el valor:

$$s^2 = 0.00249375 \text{ w}^2 \text{ m}^{-4} \quad (4.85.)$$

y como se trata de la varianza requerida por el método de Monte Carlo, podemos pasar a evaluar el error relativo correspondiente a la estimación,  $m$ :

$$m = \frac{r}{I} = \frac{\sqrt{s^2/N}}{I} = \frac{0.00049937}{0.0025} = 0.20 \quad (4.86.)$$

El estimador  $I'$  que obtengamos en el método con esta discretización de 10000 rayos, tendrá un margen de error del 20% sobre el valor correcto  $I = 0.0025 \text{ w m}^2$ . Éste es un error grande, pero es un resultado lógico porque estamos usando relativamente pocos valores,  $N=10.000$ , para muestrear una fracción de espacio pequeñísima,  $1 \text{ m}^2$  sobre  $400 \text{ m}^2$ , y el error es inevitable.

Lo que sí es cierto, es que sea cual sea la distribución de energía de los rayos, ambas varianzas convergen para  $N$  grande a su valor teórico. Esa convergencia es la que Kullowski aprovecha en su artículo para estimar el error, aunque sólo sea de forma cualitativa.

Para seguir mostrando la utilidad de nuestro análisis de errores, presentamos el siguiente ejemplo: en una sala rectangular de  $30 \times 20 \times 10 \text{ m}$  ( $x \in [0,30]$ ,  $y \in [-10,10]$ ,  $z \in [0,10]$  m) evaluar el estimador intensidad promedio  $I_k'$  del intervalo temporal comprendido entre 80 y 90 ms frente al número total de rayos enviados  $N$ . Suponemos que la fuente está en el punto  $(4, 0, 2) \text{ m}$ , el receptor de radio 1.5 m está en el punto  $(12.5, -2.5, 0) \text{ m}$ , el coeficiente de absorción es el mismo para todas las superficies  $a=0.273$ , y las reflexiones son totalmente especulares. El tiempo de reverberación estadístico es 1.46 seg.

En el intervalo temporal de estudio (entre 80 y 90 ms), el estimador intensidad promedio  $I'$  converge al valor  $1.3 \times 10^{-5} \text{ w/m}^2$ , tal como puede observarse en la figura 4.4.

El análisis estadístico que hemos introducido nos permite evaluar "en todo momento" una estimación del error asociado a la anterior magnitud. Para cualquier número de rayos enviados, podemos calcular el error relativo  $m'$  a través de la ecuación (4.73.), con lo que obtenemos la figura 4.5.

Señalar que para 20.000 rayos enviados el error relativo es aproximadamente del 20%, lo que según la ecuación (4.76.) equivale a un rango de variación de amplitud 1.7 dB. En cambio, para el máximo número de rayos enviados, 200.000, el error relativo desciende a 7%, que según la ecuación (4.76.) equivale a un rango de variación de amplitud 0.6 dB.

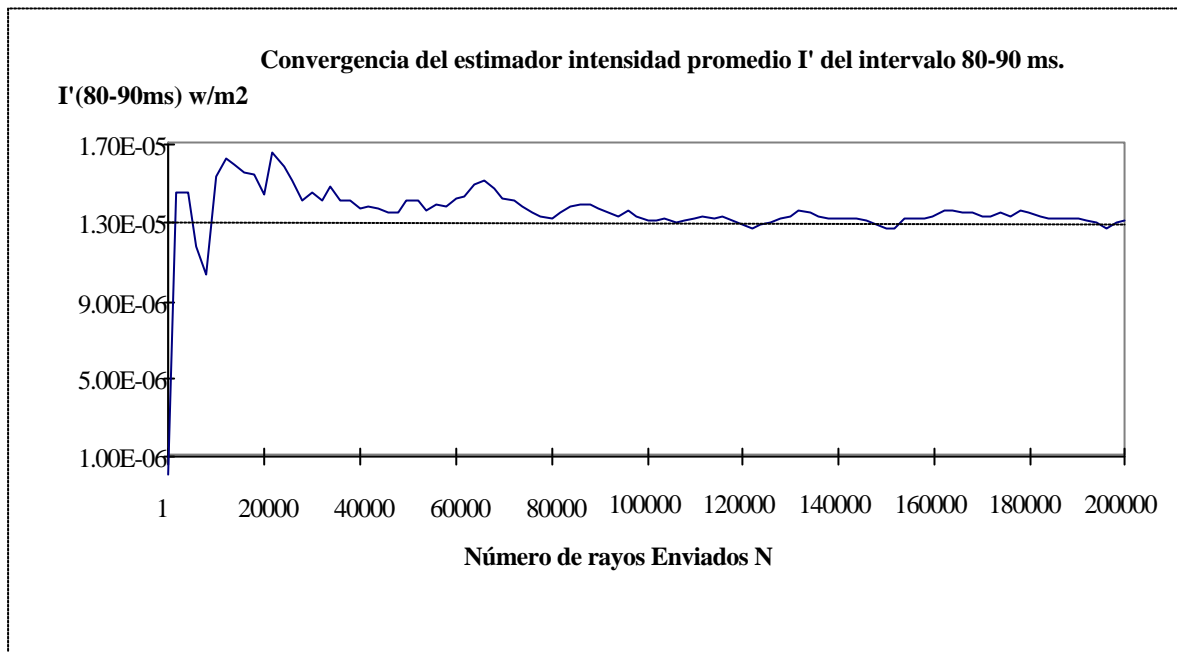
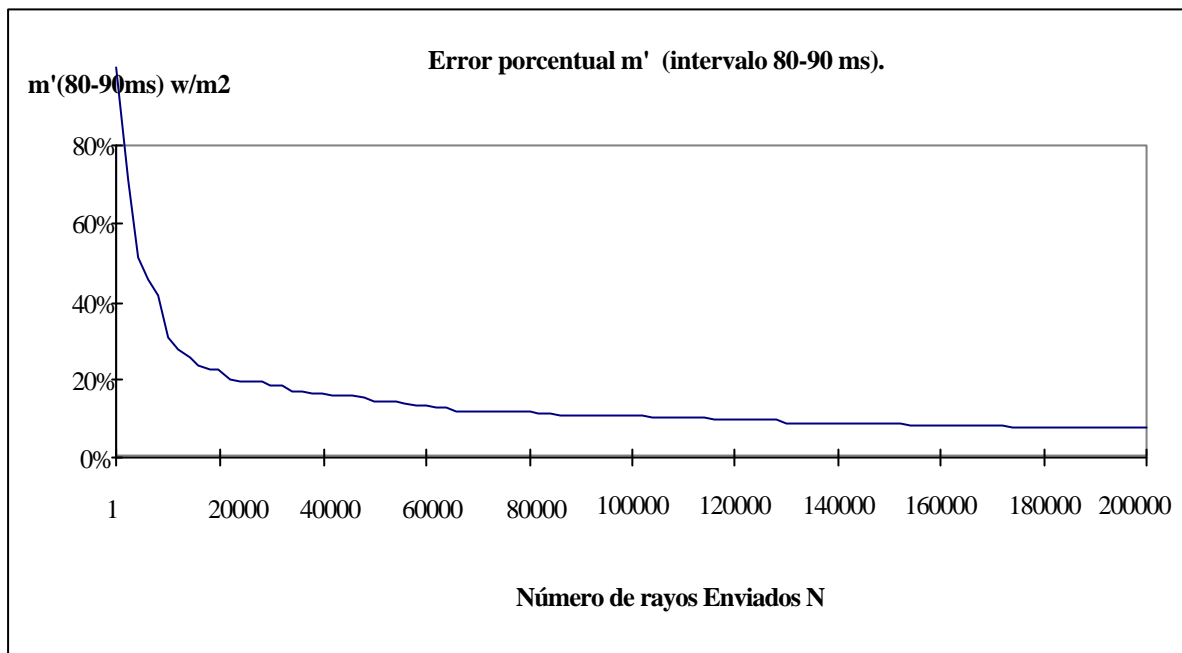
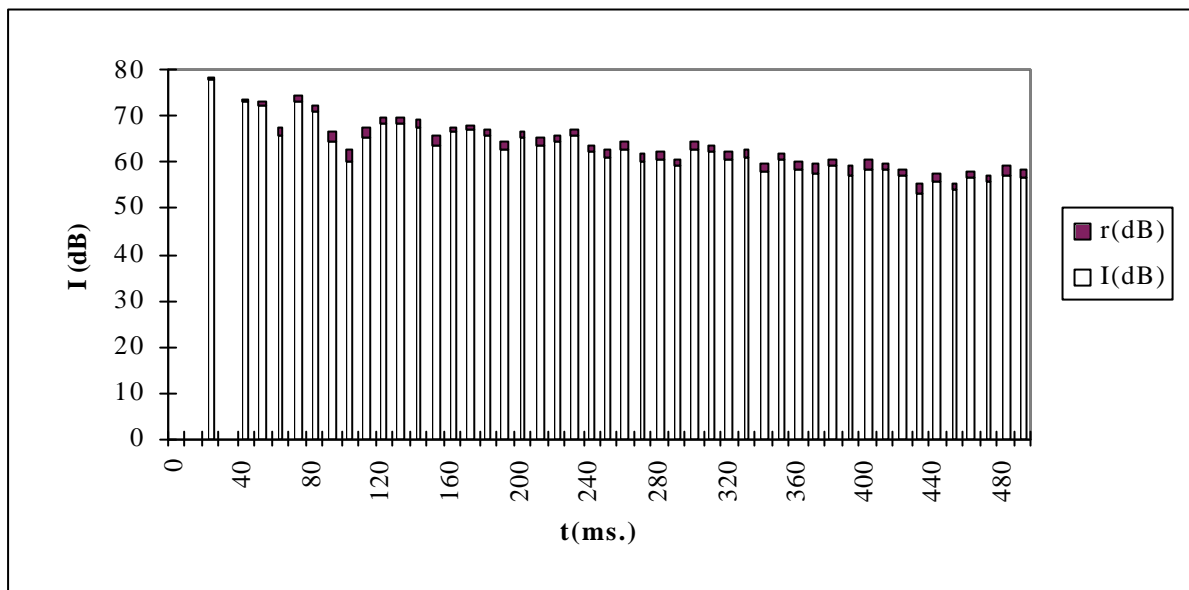


Fig. 4.4. Convergencia del estimador Intensidad Promedio  $I'$  de un intervalo frente a  $N$ .



**Fig. 4.5.** Disminución del Error Relativo  $m'$  de la Intensidad  $I'$  en un intervalo frente a  $N$ .

En la figura 4.6. representamos el valor en decibelios de la intensidad promedio para los intervalos de tiempo comprendidos entre 0 y 500 ms ( $\Delta t = 10$  ms,  $N = 200.000$  rayos). En rojo, y para cada uno de los intervalos, aparece la estimación correspondiente del error relativo expresado en dB según la ecuación (4.76.). Es asombroso comprobar cómo el error se mantiene en valores relativamente pequeños y que, aunque guarda una pequeña dependencia frente al tiempo, no aumenta tanto como el artículo de Kullowski sugiere.



**Fig. 4.6. Intensidad y error asociado a cada uno de los intervalos (en dB).**

Este resultado es totalmente explicable desde el punto de vista de la teoría de Monte Carlo, tal como la hemos expuesto hasta ahora. El error es proporcional a la varianza de la distribución direccional de la energía sonora medida en cada intervalo. No existe un error creciente en el tiempo debido a una mayor imprecisión del método de rayos. Éste puede darse en los intervalos iniciales igual que en los finales, y dependerá de la dificultad del método para muestrear la función que se está buscando. Volviendo a la interpretación geométrica del Apartado 4.4.1. podemos decir que el error se verá influido principalmente por las tres razones siguientes:

- Ausencia de Imágenes. La ausencia de imágenes del receptor significa un mayor escalonamiento en la función de distribución (para pocos ángulos sólidos la función es diferente de cero) por lo que la varianza es mayor y el error también. Ésto es lo que ocurre en los instantes iniciales en los que, para ciertos intervalos, sólo habrán unas pocas imágenes del receptor y el error será grande.

- Distribución de Absorción no Homogénea. La distribución de absorción sonora en la sala es la responsable de que pueda aumentar mucho la diferencia de valores de energía entre imágenes del receptor, y por lo tanto, la varianza y el error. Si se está estudiando una sala con una distribución de absorción muy dispar el error aumentará con el tiempo. En cambio, si la sala presenta una distribución de absorción homogénea, el error no ha de aumentar desmesuradamente con el tiempo.
- La Geometría. El hecho de que haya ciertas direcciones en las que el número de reflexiones es mayor, implica que la varianza de la distribución direccional de la energía aumente, y por lo tanto el error. Por ejemplo, tendrá más error una sala rectangular alargada que otra que guarde una mejor proporción entre sus dimensiones.

#### **4.6 SENSIBILIDAD DEL ERROR ESTADÍSTICO DE LA RESPUESTA IMPULSIVA FRENTE A DISTINTAS VARIABLES**

Ahora que sabemos cuál es la causa del error en las estimaciones del método del trazado de rayos, la varianza de la distribución direccional de la intensidad sonora, podemos hacer un análisis de sensibilidad del error estadístico frente a distintas variables o configuraciones iniciales. En los tres Apartados siguientes veremos cómo esta magnitud evoluciona frente al tiempo, cómo se ve afectada por el radio del receptor, y cómo le influye el tiempo de integración de la simulación.

##### **4.6.1. Error Relativo frente al Tiempo**

Existe la creencia generalizada de que el error de estimación del método del trazado de rayos aumenta considerablemente con el tiempo. En su ya citado artículo, Kullowski presenta los resultados de cómo aumentan rápidamente los valores de error asociados a su desviación estándar. Pero recordemos que éstos no son significativos del error de la estimación, sino que sólo son una medida de la difusión del campo.

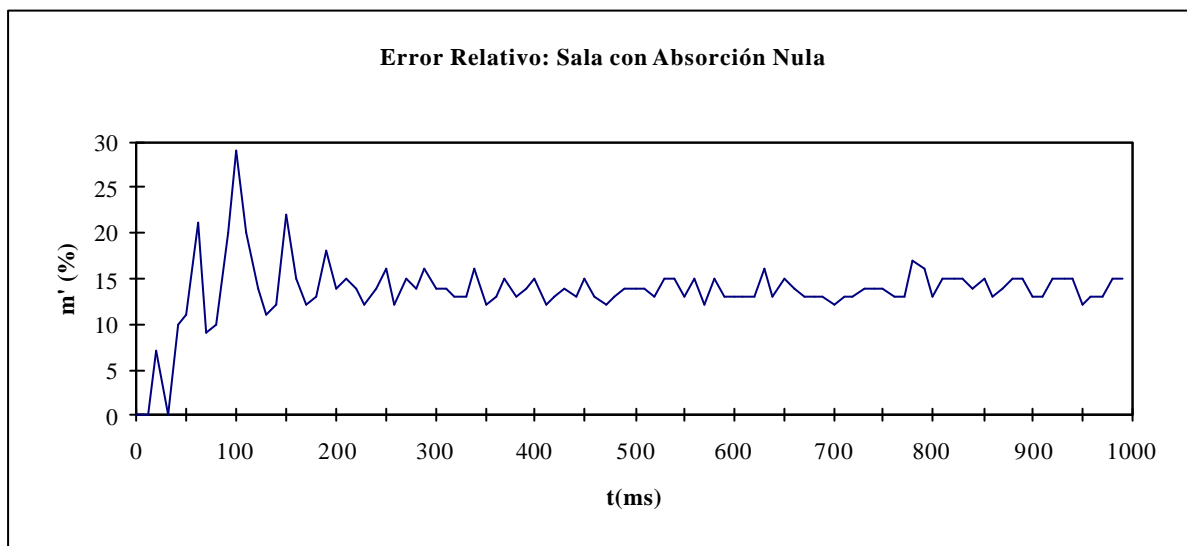
¿Aumenta realmente el error estadístico con el tiempo? Y si es así, ¿en qué medida?. Para responder a estas preguntas vamos a distinguir cuatro casos diferentes: absorción nula en las reflexiones, absorción igual para todos los rayos, absorción homogénea en la sala y absorción no homogénea en la sala.

##### **A) Absorción nula en las reflexiones**

Suponiendo que no hay absorción en las reflexiones, el ecograma medido en el receptor tendrá valores constantes de intensidad, sobre todo pasados los instantes iniciales. El error estadístico no va a depender del tiempo porque la fracción de ángulo sólido que subtiende el espacio de receptores imagen se mantiene constante. El ángulo sólido de cada imagen disminuye con  $1/t^2$ , pero el número total de éstas  $\Delta N_r$ , para un dado  $\Delta t$  e independientemente de la forma de la sala, aumenta con  $t^2$  (Kuttruff, 1979):

$$\Delta N_r = 4p \frac{c^3 t^2}{V} \Delta t \quad (4.87.)$$

siendo  $V$  el volumen de la sala y  $c$  la velocidad del sonido. Ambos efectos se compensan. El método de Monte Carlo tiene que evaluar la misma fracción de ángulo sólido para cualquier intervalo de tiempo, por lo que el error estadístico no debe aumentar en absoluto.



**Fig. 4.7. Error Relativo  $m'$  de la Intensidad frente al Tiempo en una sala rectangular.  $N=100.000$  rayos. Absorción nula en las reflexiones.**

Para mostrar lo que decimos hemos comprobado el efecto de suponer absorción nula en la sala rectangular estudiada anteriormente. Se utilizaron 100.000 rayos y se calculó la respuesta impulsiva desde 0 hasta 1000 ms con intervalos temporales de 10 ms. En la figura 4.7. puede verse cómo el error estadístico relativo  $m'_k$  de la intensidad se encuentra alrededor del 15%, para todos los intervalos de tiempo estudiados. El error relativo definido según el método de Monte Carlo no varía con el tiempo. El hecho de que haya algunos intervalos con más error relativo, sobre todo los iniciales, es debido a la ausencia de imágenes del receptor, lo que empeora la

estadística del método. En estos intervalos necesitaríamos más rayos para *copiar* mejor estas partes que están peor definidas.

Por otro lado, siendo que todos los rayos tienen la misma energía, la varianza definida por Kullowski tomaría el valor cero, lo que nos reafirma en la idea de que dicha varianza no debe considerarse como error de la estimación, pues como sabemos el error sólo es cero para un número infinito de rayos.

### **B) Absorción igual para todos los rayos**

Supongamos una sala que presenta una distribución de absorción homogénea y su geometría es tal que la absorción afecta por igual a todos los rayos recibidos en el receptor en un mismo intervalo de tiempo. Esto sólo podría ocurrir en una sala ideal, por ejemplo un elipsoide de revolución con la fuente situada en un foco, y el receptor en el otro foco: todas las reflexiones de un mismo orden llegarían al receptor al mismo tiempo y con la misma energía. En esta configuración, la intensidad media de cada intervalo, al igual que sus desviaciones estándar asociadas, disminuirán con un factor  $r$ , por lo que el error relativo se mantendrá constante. Como en el caso anterior, el error relativo no aumentará en el tiempo.

### **C) Absorción homogénea en la sala**

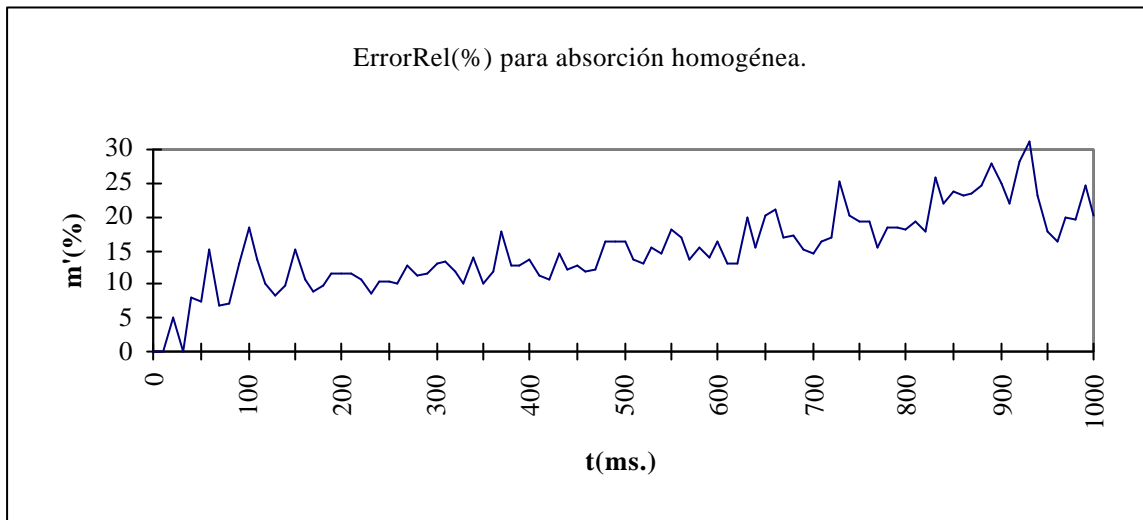
Si hay una distribución de absorción homogénea en la sala pero, como ocurre en la realidad, la geometría impide que con el tiempo la energía se distribuya por igual en todas las direcciones de la sala, tendremos una cierta dispersión de los valores de energía de los rayos. Si suponemos que la intensidad media de un intervalo toma el mismo valor que para la sala ideal que considerábamos en B, tendremos que la desviación estándar necesariamente tiene que haber aumentado, y por lo tanto el error relativo también.

En la figura 4.8. se muestra cómo el error relativo aumenta con el tiempo para la misma sala rectangular anterior, pero con distribución de absorción homogénea  $a=0.273$  (tiempo de reverberación estadístico  $T=1.46$  seg).

El error relativo va aumentando hasta alcanzar un valor cercano al 30% a los 1000 ms. En este punto, comparamos también con los resultados presentados en el trabajo de Kullowski (Kullowski, 1982), en el que para una sala de características similares, (5x10x15 m y tiempo de reverberación 1 seg. aproximadamente) vemos cómo el error asociado a su desviación estándar aumenta de forma mucho más acusada, siendo igual a 5 dB a los 500 ms (lo que corresponde a un error relativo de más del 50%), llegando incluso a los 10 dB a los 900 ms (lo que corresponde



con un error relativo del 80%). La diferencia de resultados es muy grande, y esto es debido a que nosotros hablamos de error de la estimación, validez estadística de los resultados, mientras que Kullowski presenta una desviación estándar arbitraria sólo relacionada con una medida de la difusión del campo.



**Fig. 4.8. Error Relativo  $m'$  de la Intensidad frente al Tiempo. Sala con Absorción Homogénea.**

También puede observarse que el error relativo sigue un comportamiento lineal frente al tiempo. Esta propiedad puede que sea exclusiva de la sala rectangular aunque todavía no hemos encontrado la explicación o relación geométrica que confirme esta afirmación.

#### **D) Absorción no homogénea en la sala**

A la causa apuntada en el punto anterior de que la geometría acentúa la varianza de la distribución direccional de la intensidad sonora, ahora se une el hecho de que la sala, inicialmente, ya parte de una distribución desigual de la absorción y, por lo tanto, los receptores imagen presentarán valores de intensidad muy dispares.

Por lo tanto, si la distribución de absorción de la sala es no homogénea, seguiremos teniendo una creciente dispersión de los valores de energía de los rayos con el tiempo y el error estadístico relativo aumentará. De cualquier modo, y como veremos en el Capítulo 7 sobre el "Auditorio de Tenerife", los valores típicos del error relativo de la intensidad se encuentran en valores aceptables para poblaciones de rayos normales y, en absoluto, crece tanto como Kullowski parece sugerir.

#### 4.6.2. Error Relativo frente al Radio del Receptor

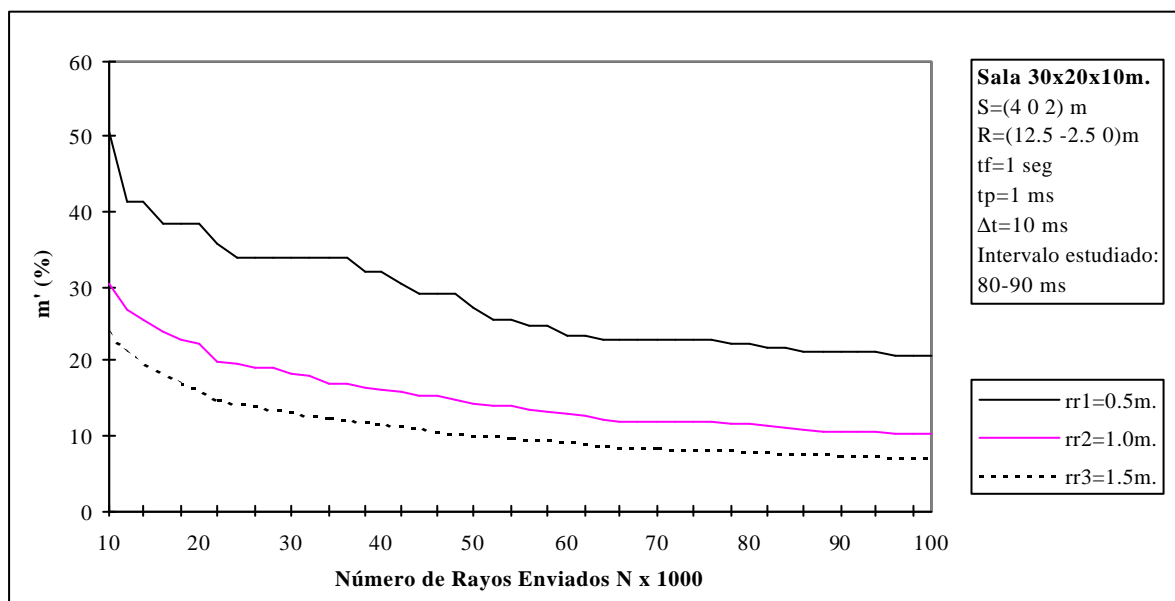
Independientemente de la absorción de las superficies de la sala y del intervalo temporal de la respuesta impulsiva, el tamaño del receptor caracteriza el tamaño de los receptores imagen correspondientes, por lo que la fracción de ángulo sólido  $F_s'$  que subtiende el espacio de imágenes del receptor será mayor cuando el receptor aumente de tamaño.

De la ecuación (4.42.) podemos calcular el error relativo de la fracción de ángulo sólido teórica  $F_s$ :

$$m(F_s) = \frac{\sqrt{\text{Var}(F_s)}}{F_s} = \sqrt{\frac{F_s - F_s^2}{F_s^2}} = \sqrt{\frac{1}{F_s} - 1} \quad (4.88.)$$

que, como vemos, disminuye al aumentar la fracción de ángulo sólido.

Así pues, podemos afirmar que al aumentar el tamaño del receptor se reduce el error relativo de la estimación. Por supuesto, siempre que el receptor pueda seguir considerándose como representativo de la sensación auditiva.



**Fig. 4.9. Error relativo del intervalo 80-90 ms frente al número de rayos enviados para 3 radios diferentes de receptor.**

Para comprobar este resultado hemos estudiado, en la sala rectangular a la que nos hemos referido anteriormente, la evolución del error estándar relativo frente al número  $N$  de rayos

enviados para distintos intervalos de tiempo y distintos radios de receptor. Efectivamente el resultado ha sido que, midiendo prácticamente los mismos valores medios de intensidad, los receptores de mayor radio introducen menor error estadístico. Como ejemplo, en la figura 4.9. se representa la variación del error relativo de la intensidad del intervalo 80-90 ms para los radios de receptor 0.5 m, 1.0 m y 1.5 m.

Esta propiedad se puede observar para cualquier intervalo temporal de la respuesta impulsiva. Obsérvese cómo el error relativo del receptor de radio 1 m es aproximadamente la mitad del error relativo del receptor de radio 0.5 m, aunque la diferencia no es tan grande entre el receptor de radio 1.5 m y el receptor de radio 1 m.

#### 4.6.3. Error Relativo frente al Coeficiente de Absorción Medio

El aumento de la absorción de la sala no modifica en absoluto la distribución de los tiempos a los que llegan las diferentes reflexiones al receptor, sino que sólo disminuye los valores de intensidad asociados a cada una de ellas.

A partir de la ecuación de la varianza muestral de la distribución temporal de la potencia sonora reflejada (4.69.):

$$s^2 = N \sum_{i=1}^{N_k} p_i^2 - \left( \sum_{i=1}^{N_k} p_i \right)^2 \quad (4.89.)$$

vemos que cuando disminuyen los valores de  $p_i$  también disminuye la varianza. Y por lo tanto el error absoluto. Este resultado coincide con el encontrado por Kullowski.

Aunque el error absoluto sea menor como acabamos de apuntar, debemos evaluar el error estándar relativo del estimador potencia muestral  $P'$ , que para cada intervalo de tiempo es:

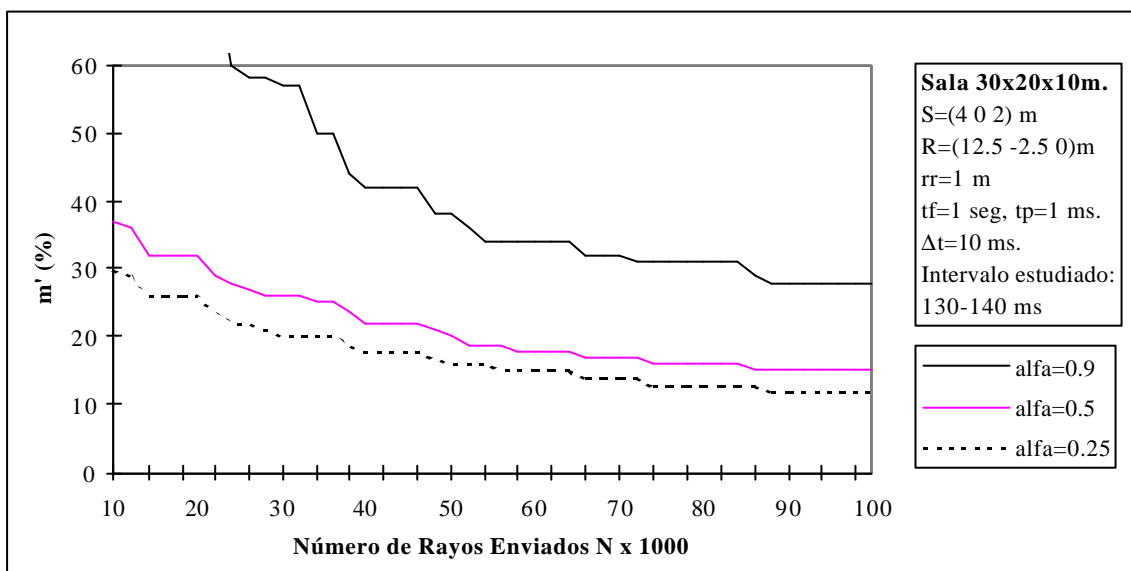
$$m(P') = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_k} p_i^2}{\left( \sum_{i=1}^{N_k} p_i \right)^2} - \frac{1}{N}} \quad (4.90.)$$

Si hubiera más absorción en la sala, y suponiendo que todos los rayos se vieran afectados por igual por la absorción de la sala, el error relativo no variaría. Si hay direcciones en las que la densidad de reflexiones es mayor y por tanto la absorción, el cociente entre los dos sumatorios de

la ecuación anterior aumenta, ya que el sumatorio del numerador decrece más despacio que el del denominador, y por lo tanto el error relativo se hace mayor.

Esta expresión pone de relieve una propiedad estadística que se encuentra en la base del método de Monte Carlo que estamos aplicando, y es que a mayor dispersión entre la energía de los rayos muestreados mayor error relativo se produce en la estimación. Estudiar una sala más absorbente que otra pero de idéntica geometría va a significar afrontar un error relativo mayor para las estimaciones de intensidad en cada uno de los intervalos de tiempo.

Efectivamente, en la sala estudiada el error estándar relativo de cada intervalo de tiempo se presenta mayor para las salas de coeficiente de absorción mayor, como puede apreciarse en la figura 4.9. para el intervalo de tiempo 130-140 ms.



**Fig. 4.9. Error relativo del intervalo 130-140 ms. frente al número de rayos para 3 coeficientes de absorción  $\alpha$  diferentes.**

En el citado trabajo de Kullowski se señala que la desviación estándar media para la respuesta impulsiva disminuye al aumentar el coeficiente de absorción. Esto puede llevar a confusión, porque es evidente que si las cantidades que se están muestreando son menores, las varianzas asociadas a ellas también lo serán. Pero en su trabajo este autor no advierte que en realidad el error estándar relativo está aumentando, y no lo puede hacer por la razón de que, como ya hemos señalado, no tiene identificada cuál es la correcta desviación estándar del estimador.

Este resultado puede extenderse de forma general a través del tiempo de reverberación  $RT$  de la sala, dado que cuanto mayor es dicho tiempo, tanto menor es la dispersión entre los valores de energía y menor es el error relativo. Salas muy reverberantes presentan ecogramas mejor definidos que cuando no lo son, lo que se traduce en la recomendación de aumentar el número de rayos cuando la sala a estudiar sea poco reverberante.

#### 4.6.4. Error Relativo frente al Tiempo de Integración

En el mismo trabajo de Kullowski se presenta el resultado experimental de que cuando aumenta el tiempo de integración de la respuesta impulsiva,  $\Delta t$ , aumenta el error del método. Según sus resultados, para una sala rectangular similar a la nuestra (5x10x15 m y tiempo de reverberación 1 seg. aproximadamente) el valor de la desviación estándar medio de la respuesta impulsiva aumenta desde 2 dB para un  $\Delta t=0.1$  ms hasta 8 dB para un  $\Delta t=10$  ms. Aunque no aparece explicado de ninguna manera en su artículo, sus resultados tienen explicación desde el momento en que la desviación estándar que utiliza mide la semejanza entre energías de los rayos, tal como comprobamos a la vista de la ecuación (4.79.). Cuanto menor sea el tiempo de integración, menos frentes de ondas estaremos capturando, y más parecida será la energía entre rayos. En el límite cuando  $\Delta t$  tiende a cero, sólo capturaríamos un frente, y la desviación de Kullowski sería cero. Sus resultados son ambiguos, porque parecen dar lugar a la interpretación errónea de que al disminuir  $\Delta t$  disminuye el error del método.

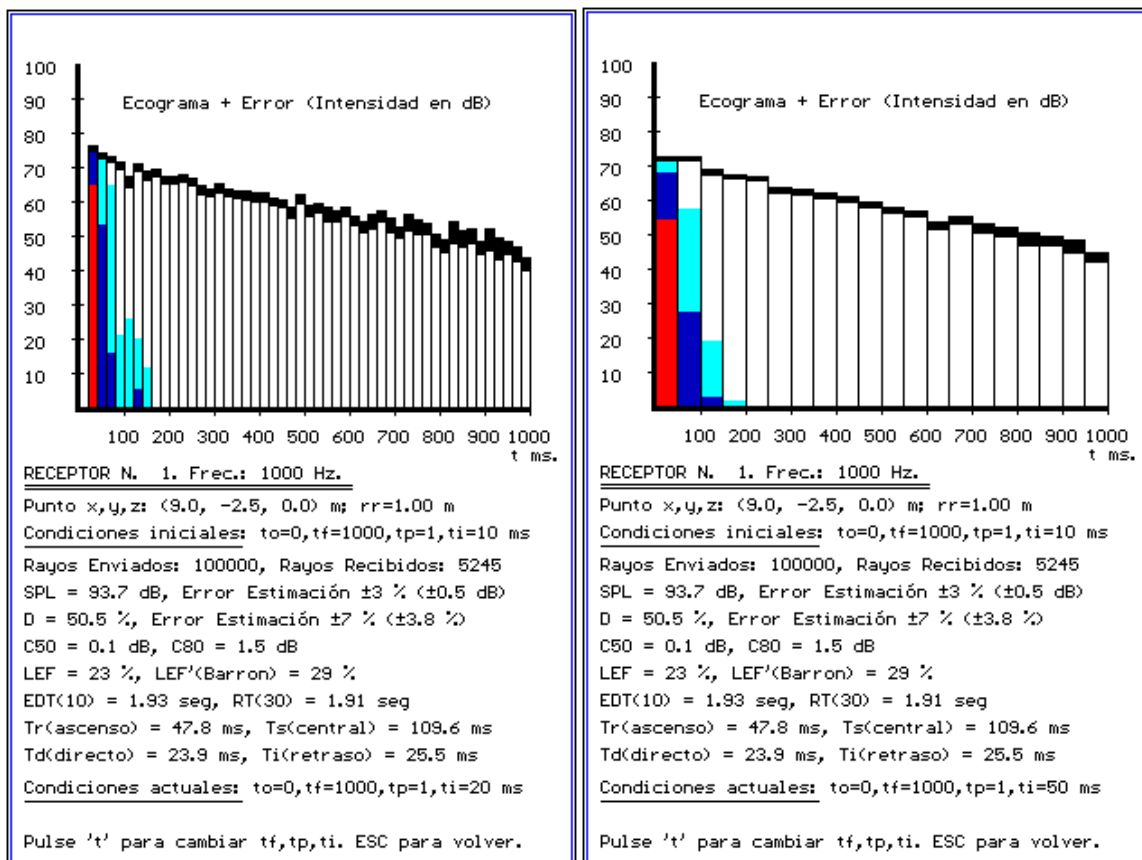
Desde el punto de vista que ahora nos interesa (error de la estimación), el *aumento de  $\Delta t$*  tiene dos efectos en la calidad de la respuesta impulsiva:

1. *los valores medios de intensidad se suavizan*: esto es debido a que la energía se reparte en un intervalo de tiempo mayor (promediamos todas las imágenes encontradas en el  $\Delta t$ ).
2. *la precisión de la estimaciones en la respuesta impulsiva mejora*: el número de rayos que intersecta el receptor en el intervalo  $k$ -ésimo,  $N_k$ , es mayor, con lo que mejora la estadística del muestreo, y como consecuencia, el error estándar relativo disminuye.

Por supuesto, el ideal es utilizar un  $\Delta t$  lo más pequeño posible, porque significa un mayor nivel de definición en la respuesta impulsiva. Pero como es lógico, el precio que hay que pagar por disponer de más información de la "misma calidad" es utilizar un número de rayos  $N$  mucho mayor. Si el número de rayos no se modifica, al disminuir  $\Delta t$  se introduce más error estadístico.

Para poner de relieve estas consideraciones, hemos calculado la respuesta impulsiva de un receptor en una sala rectangular de dimensiones 30x20x10 m, coeficiente de absorción homogéneo  $\alpha = 0.25$ , fuente isotrópica aleatoria de  $N = 100.000$  rayos y modelo de reflexiones especular.

En las figuras 4.10a. y 4.10b. representamos la respuesta impulsiva del mismo receptor para dos tiempos de integración  $\Delta t$  diferentes, 20 y 50 ms. En ambas figuras aparece representado el error relativo en dB correspondiente a cada una de las estimaciones de intensidad de los ecogramas (barras negras). Es evidente comprobar que la figura 4.10a. calculada con  $\Delta t = 20$  ms, aunque más definida, presenta un mayor error que la figura 4.10b. calculada con  $\Delta t = 50$  ms.



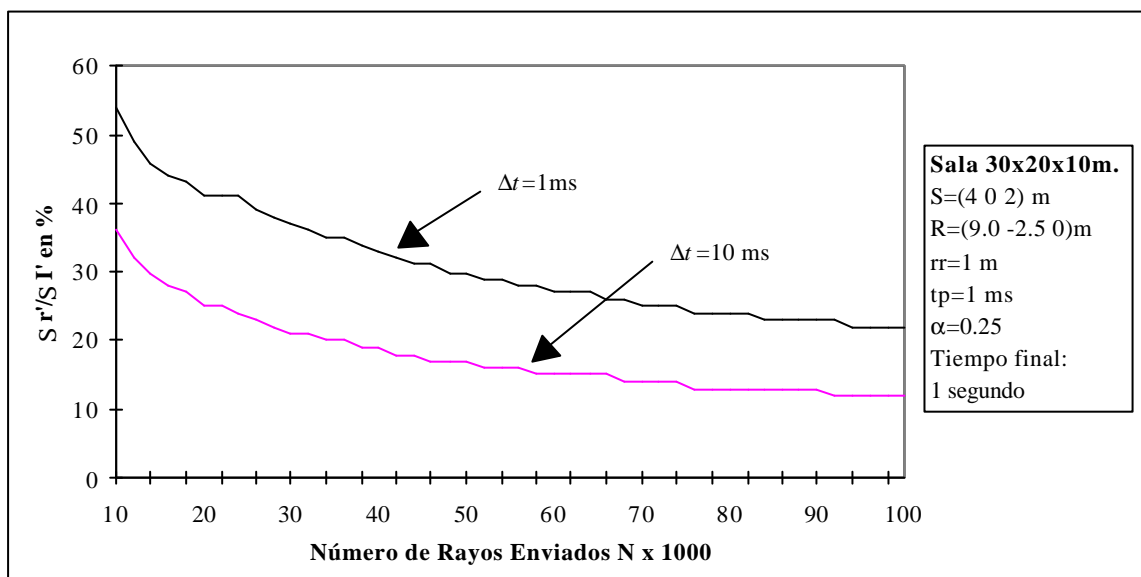
**Figs. 4.10a. y 4.10b. Respuestas Impulsivas con Tiempos de Integración  $Dt = 20$  ms, y  $Dt = 50$  ms .**

Puede ser interesante realizar un análisis de cómo varía el error de la respuesta impulsiva frente al número de rayos. Para ello definimos como magnitud característica del error global de la respuesta impulsiva la suma de errores absolutos de las estimaciones dividida por la intensidad total recibida:

$$\frac{\sum_k r_k'}{\sum_k I_k'} \quad (4.91.)$$

El denominador de este cociente es independiente del tiempo de integración, y por lo tanto, la magnitud (4.91.) es de utilidad para este análisis.

En la fig. 4.11. presentamos la variación del error global de la respuesta impulsiva, definido según (4.91.), frente al número de rayos enviados  $N$ . Se utilizaron dos tiempos de integración  $\Delta t$  diferentes: 1 ms y 10 ms.



**Fig. 4.11. Error global de la respuesta impulsiva según (4.91.) frente al número de rayos enviados para dos tiempos de integración diferentes, 1 y 10 ms.**

En la fig. 4.11. se muestra claramente que, independientemente del número de rayos, el error global asociado a la respuesta impulsiva es mucho mayor para tiempos de integración más pequeños.

#### 4.7. RESUMEN Y CONCLUSIONES

Aquí terminamos este Capítulo en el que hemos dedicado nuestro esfuerzo a encontrar una expresión capaz de medir el error de las estimaciones de la respuesta impulsiva. En el siguiente Capítulo el objetivo es analizar el error ligado al número finito de rayos en el cálculo de los

parámetros acústicos objetivos. Una comparación de resultados experimentales con los resultados que predice nuestra teoría permitirá validar y reforzar la confianza del estudio realizado.

Pero antes de finalizar queremos hacer un pequeño resumen de la teoría aquí expuesta, utilizando un enfoque más general que el visto hasta ahora.

#### 4.7.1. Formulación Alternativa de la Teoría Expuesta

El método del trazado de rayos es una técnica de naturaleza estadística. Toda la información que se puede obtener en una simulación basada en esta metodología, ya sea la intensidad en un intervalo de tiempo o el valor de cualquier parámetro objetivo, es función de la potencia, energía o intensidad transportada por cada uno de los rayos.

Cada rayo  $p_{i,k}$  es una *variable estadística* cuya valor de potencia toma distintos valores alrededor de una media  $\langle p_k \rangle$  con una varianza  $Var(p_k)$  y, más detalladamente, distribuidos con una cierta función de densidad de probabilidad relacionada con la distribución direccional dependiente del tiempo de la intensidad sonora.

Dada un conjunto inicial de  $N$  rayos, que puede ser observado en cualquier intervalo de tiempo  $k$ , podemos comprobar que su distribución sigue la función de densidad de probabilidad correspondiente, aunque debido al número finito de rayos, sólo tendremos un histograma de frecuencias.

Así por ejemplo un rayo medido en el intervalo 30-40 ms sería una variable  $p_{i,30-40}$  de la que disponemos de  $N$  observaciones,  $i=1,\dots,N$ . Si todos los rayos llevan la misma potencia el histograma de frecuencias será un escalón. En el límite cuando  $N \rightarrow \infty$  el escalón derivará en una función de densidad de probabilidad en forma de delta de Dirac, infinitos rayos con una misma intensidad todos. Si hay reflexiones, el histograma de frecuencias tendrá una forma cualquiera, y no tiene por que ser una distribución normal.

En cualquier momento, para cualquier intervalo  $k$ , podemos responder a preguntas como cuál es la suma de los  $N$  rayos  $P_k' = \sum p_{i,k}$  o cuál es el valor medio de un rayo  $\langle p_k \rangle' = 1/N \sum p_{i,k}$ . Por el teorema central del límite estos estadísticos se distribuyen normalmente alrededor de sus valores teóricos, respectivamente  $P_k$  y  $\langle p_k \rangle$ .

Si queremos saber la potencia que llega a un receptor tendremos que distinguir entre los rayos que aportan energía y los que no. Desde el punto de vista del receptor, la potencia de un rayo es:



$$p_{i,k}^r = \begin{cases} p_{i,k} & \text{si el rayo llega al receptor} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad (4.92.)$$

Ahora podemos responder a preguntas como cuál es la energía recibida  $P_k^r = \sum p_{i,k}^r$  o cuál es el valor medio de la potencia de un rayo visto desde el receptor  $\langle p_k^r \rangle = 1/N \sum p_{i,k}^r$ .

También podemos determinar la *varianza de un rayo visto desde el receptor*:

$$\text{Var}(p_k^r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (p_{i,k}^r)^2 - \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_{i,k}^r \right)^2 \quad (4.93.)$$

O también podemos saber la *varianza de la media de un rayo visto desde el receptor*:

$$\text{Var}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_{i,k}^r\right) = \frac{1}{N^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^N p_{i,k}^r\right) = \frac{1}{N} \text{Var}(p_k^r) \quad (4.94.)$$

Y por último cuál es la *varianza de la suma de  $N$  rayos vistos desde el receptor*. Esta es la pregunta en que más interesados estamos porque la intensidad en un intervalo de tiempo cualquiera es proporcional a la suma de los rayos incidentes. La varianza de la suma de  $N$  variables independientes es:

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^N p_{i,k}^r\right) = N \text{Var}(p_k^r) = \sum_{i=1}^N (p_{i,k}^r)^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N p_{i,k}^r\right)^2 \quad (4.95.)$$

luego la varianza de la suma es  $N$  veces la varianza de un rayo visto desde el receptor. Hemos llegado a la misma expresión que (4.70.), expresión que fue obtenida en el Apartado 4.4.2.2. a través de un análisis más detallado en los pasos de su deducción. Recordemos que esta varianza es la base para medir el error de la respuesta impulsional calculada con el método del trazado de rayos.

#### 4.7.2. Crítica a Kullowski

Ahora parece más fácil ver por qué Kullowski se equivocó en la desviación estándar que propuso. Recordemos que su expresión, ligeramente reescrita en nuestra notación, era:

$$s_{k(Kullowski)}^2 = n_k^2 \left[ \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} (p_{i,k})^2 - \left( \frac{1}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} p_{i,k} \right)^2 \right] \quad (4.96.)$$

Kullowski toma la varianza de un rayo medido en el receptor y la multiplica por  $n_k^2$ , el cuadrado del número de rayos interceptados en el receptor, con la intención de darle el sentido de varianza de la suma de  $n_k$  variables. Comete dos errores:

1. no se trata de medir la varianza de los rayos interceptados en el receptor, sino de medir la varianza de los rayos que salen a la búsqueda del receptor. En el método de Monte Carlo hay que tener en cuenta todas las muestras que se han utilizado desde un primer momento. Por utilizar un símil lúdico, hay que contar todas las veces que se tiran los dados, incluso aquellas en las que sale cero (si es que pudiese salir cero en los dados). Kullowski se equivoca considerando que el sumatorio  $\sum p_{i,k}^r$  tiene  $n_k$  sumandos, cuando en realidad tiene muchos más,  $N$ , ya que algunos de los rayos toman el valor cero. Y aunque esos rayos no afectan a la suma, sí afectan a la varianza porque el peso de todas las variables estadísticas es el mismo.
2. la varianza de una suma de  $n_k$  variables independientes  $x_i$  que tienen una misma varianza  $Var(x_i)$  no es  $n_k^2$  veces esa varianza, sino sólo  $n_k$  veces:

$$Var(x_1 + \dots + x_{n_k}) = n_k Var(x_i) \quad (4.97.)$$

### 4.7.3. Conclusiones

El error de las estimaciones del Método del Trazado de Rayos en un receptor está directamente relacionado con la varianza de la distribución direccional dependiente del tiempo de la intensidad sonora  $I_i(\mathbf{q}, \mathbf{j})$ .

Ésta es una función escalar de variable vectorial. El conjunto de valores que puede tomar, su conjunto imagen, determina unas magnitudes integrales totalmente exactas, como pueden ser la intensidad total recibida en el receptor, la intensidad media en el receptor por unidad de ángulo sólido o la desviación típica de la función respecto a su media.

El Método de Monte Carlo permite el cálculo de estas magnitudes a través de diferentes estimadores muestrales, principalmente, la media muestral y la varianza muestral. El estimador media muestral es un estadístico que se distribuye normalmente alrededor de la media teórica con una varianza proporcional a la varianza de la distribución direccional de la intensidad sonora e inversamente proporcional al número de muestras  $N$ .

El hecho de identificar la causa del error de las estimaciones del método del trazado de rayos, la varianza de la distribución direccional de la intensidad sonora, permite establecer una serie de hechos y recomendaciones que hay que tener en cuenta a la hora de realizar una simulación.

1. El error relativo de las estimaciones disminuye si aumenta el radio del receptor. La fracción de ángulo sólido que subtenden las imágenes del receptor es mayor y el error relativo, como demostramos en el Apartado 4.6.2., disminuye.
2. El error de las estimaciones aumenta si aumenta la absorción de la sala, aunque tenga una distribución homogénea. La varianza de distribución direccional de la intensidad sonora se ve influida por la aparición de imágenes de receptor con valores de intensidad muy dispares. La geometría de la sala define direcciones con diferentes número medio de reflexiones lo que favorece la aparición de imágenes de receptor con valores de intensidad muy diferentes.
3. Si la distribución de absorción es no homogénea el error será mucho mayor que en el caso contrario porque, independientemente del efecto que pueda tener la geometría, desde el primer momento las imágenes de receptor se encuentran dotadas de valores muy diferentes de intensidad.
4. Por extensión de los dos puntos anteriores, salas muy secas o poco reverberantes presentan una mayor dificultad de muestreo y por lo tanto una mayor indeterminación en los resultados.
5. El error relativo de las estimaciones aumenta ligeramente con el tiempo debido a un aumento de la varianza de la distribución direccional de la intensidad sonora, principalmente influido por la geometría de la sala que determina direcciones con diferente número de reflexiones.
6. Se ha comprobado de forma empírica que en la sala rectangular con absorción homogénea el crecimiento del error relativo sigue un comportamiento lineal. Todavía no hemos encontrado la relación geométrica sobre el número de colisiones medio que demuestre esta afirmación.
7. Para salas con distribución de absorción no homogénea existe una creciente dispersión de los valores de energía de los rayos con el tiempo y el error estadístico aumenta. Sin embargo, hemos constatado en salas de difícil cálculo como el Auditorio de Tenerife (Capítulo 7) que los valores típicos del error relativo de la intensidad se

encuentran en valores aceptables para poblaciones de rayos normales y que, en absoluto, crece tanto como el artículo de Kullowski parece sugerir.

8. La disminución del tiempo de integración tiene un efecto muy negativo en el error de las estimaciones del método. Ésto es debido a que permite capturar menos rayos en el receptor (el promedio temporal es más pequeño) y empeora la estadística del método.

Todas estas recomendaciones o efectos, pueden resumirse en una sólo afirmación: el error aumenta con la varianza de la distribución direccional dependiente del tiempo de la intensidad sonora.

## **CAPÍTULO 5**

### **El Método de Monte Carlo para la Determinación del Error en el Cálculo de los Parámetros Acústicos Objetivos**

## 5.1. EL MÉTODO DE MONTE CARLO PARA LA DETERMINACIÓN DEL ERROR EN EL CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS ACÚSTICOS OBJETIVOS

### 5.1.1. Consideraciones Generales

Los parámetros acústicos objetivos, al igual que los valores de intensidad de la respuesta impulsiva, son estimaciones del método de simulación y, por lo tanto, deberán caracterizarse con su correspondiente error estándar.

En una primer etapa pensamos que, ya que los parámetros acústicos pueden obtenerse a partir de la respuesta impulsiva, el error de éstos iba a ser función del error de la respuesta impulsiva.

Esta forma de operar nos planteaba la duda metodológica de cuál era el tiempo de integración  $\Delta t$  de la respuesta impulsiva adecuado para ésta tarea. Comprobábamos que cuanto mayor era el  $\Delta t$  (dentro de los límites lógicos de cada parámetro) menor era el error derivado en los parámetros. Como vimos en el Capítulo anterior, concretamente en el Apartado 4.6.4., el error de la respuesta impulsiva se ve muy influenciado por el tiempo de integración utilizado.

Sin embargo, *el error de parámetros acústicos integrales*, tales como el nivel de presión sonora *SPL* o el parámetro definición *D*, *no tiene sentido que dependa del tiempo de integración  $\Delta t$* . Por ejemplo, para evaluar el *SPL* se requiere conocer la energía interceptada por todas las imágenes del receptor sin necesidad de distinguir qué intervalo de tiempo ocupan. O para calcular el coeficiente de definición *D* necesitamos conocer la energía incidente durante los primeros 50 ms, sin necesidad de fraccionar éste periodo en pequeños subintervalos de tiempo  $\Delta t$ .

Consecuentemente nos vemos obligados a replantear el cálculo de la varianza de los estimadores de los parámetros objetivos.

### 5.1.2. Número de Vuelos

Si para un pequeño intervalo de tiempo  $\Delta t$ , el número de rayos lanzados a la búsqueda de información es  $N$ , para un intervalo de tiempo mayor  $\Delta T = t_f - t_o$ , que ocupa una parte importante de la respuesta impulsiva, el número de rayos utilizados en la búsqueda de receptores imagen será el *número de vuelos* en el intervalo  $\Delta T$ ,  $N_{\delta T}$ . Éste es un valor mucho mayor que el anterior  $N$ , y su valor es proporcional al número de colisiones medio por unidad de tiempo  $\langle n \rangle$  y a la duración del intervalo estudiado  $\Delta T$ :

$$N_{\Delta T} = N\langle n \rangle \Delta T \quad (5.1.)$$

A través de la interpretación geométrica del espacio de receptores imagen descrita en el Apartado 4.4.1., podemos considerar que el cálculo de la energía incidente en un receptor durante un intervalo de tiempo  $\Delta T = t_f - t_o$  es equivalente al cálculo del volumen de un conjunto finito de esferas que se encuentran dentro de una corona esférica de radio interior  $ct_o$  y radio exterior  $ct_f$ .

### 5.1.3. Potencia Reflejada

La función que queremos evaluar a través del Método de Monte Carlo es ligeramente diferente a la que mostrábamos en la ecuación (4.56.). Recordemos que en aquel caso la potencia total de la fuente  $P_o$  se repartía uniformemente sobre la superficie de una esfera. Y el hecho de restringirnos a un  $\Delta t$  pequeño nos situaba en las hipótesis de que sólo la potencia inicial entraba en juego (modulada con los respectivos coeficientes de reflexión), y de que sólo las  $N$  partículas sonoras iniciales participaban en la exploración del espacio de receptores imagen.

En el cálculo de parámetros acústicos objetivos en los que se utiliza un periodo de integración  $\Delta T$  grande, hay que tener en cuenta que la potencia inicial de la fuente es reflejada en las paredes y que, por lo tanto, el receptor captará varias veces la energía inicial emitida por la fuente.

Para entender mejor esta afirmación podemos pensar en el caso extremo de una sala con forma elipsoidal totalmente reflectante, en la que la fuente impulsional de potencia  $P_o$  se encuentra en uno de los focos y el receptor en el otro. En un instante de tiempo cualquiera el receptor recibirá una potencia cero o  $P_o$ , pero nunca más que la potencia inicial. En cambio, el nivel de presión sonora  $SPL$  aumentará 3 dB cada vez que toda la potencia vuelva a concentrarse en el foco del receptor y, cuanto más tiempo pase, más potencia captará el receptor.

Así pues podemos afirmar que, para un periodo de tiempo  $\Delta T = t_f - t_o$ , mayor que el necesario para recorrer el recorrido libre de la sala, la energía total en juego es proporcional al número de colisiones medio de la sala  $\langle n \rangle$ . De igual manera el número de partículas sonoras en juego a la búsqueda de receptores imagen es el número de vuelos  $N_{\delta T}$  o número total de trayectorias evaluadas en el periodo de estudio.

#### 5.1.4. Varianza de la Intensidad en un Intervalo $DT > Dt$

Hechas estas consideraciones, podemos identificar la función  $g$  objeto de estudio del Método de Monte Carlo, y la función  $f$  de normalización como:

$$g = \begin{cases} P_o \langle n \rangle \Delta T \mathbf{r}_s & \text{en } W_s \\ 0 & \text{en } (V - W_s) \end{cases} \quad \text{y} \quad f = 1 / V \quad \text{en } V \quad (5.2.)$$

para  $s=1, \dots, n_r$ , siendo  $n_r$  el número de imágenes del receptor que se encuentran dentro del espacio de búsqueda de volumen global  $V$ . Cada imagen viene caracterizada por un subvolumen  $W_s$  y por un coeficiente de reflexión  $\mathbf{r}_s = 1 - \mathbf{a}_s$ , que es función del "camino de la energía" que representa cada receptor imagen.  $P_o$  es la potencia inicial de la fuente que se refleja  $\langle n \rangle \Delta T$  veces en las paredes de la sala siendo  $\langle n \rangle$  el número de colisiones medio y  $\Delta T$  el periodo de estudio.

De esta forma, el cálculo de la energía interceptada en el receptor durante el periodo  $\Delta T$  es:

$$\begin{aligned} P_{\Delta T} &= \int_V g f \, dV \\ &= \frac{1}{V} \int_{W_1, \dots, W_s, \dots, W_{n_r}} P_o \langle n \rangle \Delta T \mathbf{r}_s \, dV \\ &= \frac{1}{V} P_o \langle n \rangle \Delta T \int_{W_1, \dots, W_s, \dots, W_{n_r}} \mathbf{r}_s \, dV \\ &= P_o \langle n \rangle \Delta T \left( \frac{W_1}{V} \mathbf{r}_1 + \dots + \frac{W_{n_r}}{V} \mathbf{r}_{n_r} \right) \end{aligned} \quad (5.3.)$$

donde vemos que cada receptor participa con la fracción de volumen correspondiente.

Recordemos que, como vimos en el Apartado 4.2.2., integrar un subvolumen incluido en otro volumen mayor es un caso particular del Método de Monte Carlo para la estimación de integrales. Por lo tanto, resolver la anterior ecuación equivale a promediar convenientemente la función de distribución  $g$  definida anteriormente.

Si llamamos  $P_{DT}'$  a la estimación de  $P_{DT}$  en el intervalo de tiempo  $DT$  a través de las  $N_{\delta T}$  partículas sonoras, encontramos en la siguiente ecuación (5.4.) un resultado idéntico al anterior donde sólo hemos cambiado las fracciones de volumen por las correspondientes fracciones de número de rayos:



$$\begin{aligned}
P'_{\Delta T} &= \frac{1}{N_{\Delta T}} \sum_{i=1}^{N_{\Delta T}} g_i \\
&= \frac{1}{N_{\Delta T}} \left( P_o \langle n \rangle \Delta T r_1 N_1 + \dots + P_o \langle n \rangle \Delta T r_{n_r} N_{n_r} \right) \\
&= P_o \langle n \rangle \Delta T \left( \frac{N_1}{N_{\Delta T}} r_1 + \dots + \frac{N_{n_r}}{N_{\Delta T}} r_{n_r} \right)
\end{aligned} \tag{5.4.}$$

Para ganar en claridad, podemos reescribir la expresión anterior en función de los rayos captados en el receptor, sin distinguir en qué imagen están.

La potencia de cada uno de los  $N$  rayos emitidos es:

$$p_i = \frac{P_o}{N} r_i \tag{5.5.}$$

Multiplicando y dividiendo (5.4.) por el número de rayos inicial  $N$  y teniendo en cuenta que el número de vuelos  $N_{\delta T}$  en  $\Delta T$  es (5.1.) llegamos al resultado esperado de que la potencia total suministrada al receptor durante  $\Delta T$  es la suma de las potencias de cada uno de los rayos:

$$\begin{aligned}
P'_{\Delta T} &= \langle n \rangle \Delta T \frac{N}{N_{\Delta T}} \left( \frac{P_o}{N} r_1 N_1 + \dots + \frac{P_o}{N} r_{n_r} N_{n_r} \right) \\
&= \langle n \rangle \Delta T \frac{N}{N_{\Delta T}} \sum_i^{N_{\Delta T}} p_i \\
&= \sum_i^{N_{\Delta T}} p_i
\end{aligned} \tag{5.6.}$$

Este resultado coincide con las definiciones que dimos en el Capítulo 3 para el cálculo de parámetros integrales a partir de la potencia de los rayos incidentes.

Ahora sólo tenemos que pasar al cálculo de la varianza muestral.

La varianza muestral  $s^2_{\Delta T}$  de la función  $g$  en el intervalo  $\Delta T$  es:

$$\begin{aligned}
s^2_{\Delta T} &= \frac{1}{N_{\Delta T}} \sum_{i=1}^{N_{\Delta T}} g_i^2 - P_{\Delta T}^2 \\
&= \frac{1}{N_{\Delta T}} \left( (P_o \langle n \rangle \Delta T r_1)^2 N_1 + \dots + (P_o \langle n \rangle \Delta T r_{n_r})^2 N_{n_r} \right) - P_{\Delta T}^2
\end{aligned} \tag{5.7.}$$

Multiplicando y dividiendo por  $N^2$  :

$$\begin{aligned}
s_{\Delta T}^2 &= (\langle n \rangle \Delta T)^2 \frac{N^2}{N_{\Delta T}} \left( \frac{(P_o \mathbf{r}_1)^2}{N^2} N_1 + \dots + \frac{(P_o \mathbf{r}_1)^2}{N^2} N_n \right) - P_{\Delta T}^2 \\
&= N_{\Delta T} \sum_{i=1}^{N_{\Delta T}} p_i^2 - \left( \sum_{i=1}^{N_{\Delta T}} p_i \right)^2
\end{aligned} \tag{5.8.}$$

podemos expresar la varianza muestral en función de la potencia de cada uno de los rayos recibidos, con lo que llegamos al resultado final de que la varianza muestral para el cálculo de parámetros integrales se obtiene multiplicando el término de la suma de cuadrados de las potencias de los rayos por el número de trayectorias o vuelos analizados  $N_{\Delta T}$ , en vez del número de rayos inicial  $N$ . Es una expresión formalmente equivalente a la (4.69.).

Conocida la varianza muestral  $s_{\Delta T}^2$  de la función  $g$  en el intervalo  $\Delta T$ , podemos pasar a calcular la varianza asociada con el estimador  $P_{\Delta T}'$ :

$$Var(P_{\Delta T}') = \frac{s_{\Delta T}^2}{N_{\Delta T}} = \sum_{i=1}^{N_{\Delta T}} p_i^2 - \frac{1}{N_{\Delta T}} \left( \sum_{i=1}^{N_{\Delta T}} p_i \right)^2 \tag{5.9.}$$

que nos permitirá determinar el error o indeterminación de nuestras estimaciones, en función del número de rayos utilizados. Es una expresión equivalente a la (4.70.).

### 5.1.5. Error en los Parámetros *SPL* y *D*

El error absoluto asociado al nivel de presión sonora (*SPL*), será:

$$r'_{SPL} = Var(P_{\Delta T}') \tag{5.10.}$$

siendo  $\Delta T = t_f - t_o$  el mayor intervalo de tiempo que pueda considerarse en el análisis, idealmente  $t_f = \infty$  y  $t_o = 0$ . Todo el espacio de receptores imagen.

El error estándar relativo será:

$$m'_{SPL} = \frac{r'_{SPL}}{SPL} \tag{5.11.}$$

Para evaluar el error en la estimación del parámetro definición  $D$  necesitamos saber el error absoluto de los primeros 50 ms de la respuesta impulsiva,  $r'_{50\text{ms}}$ :

$$r'_{P(0-50ms)} = Var(P'_{0-50ms}) \quad (5.12.)$$

y el error relativo correspondiente:

$$m'_{P(0-50ms)} = \frac{r'_{P(0-50ms)}}{P'_{0-50ms}} \quad (5.13.)$$

Por tratarse de un cociente, el parámetro definición tendrá un error estándar relativo suma de los errores relativos de numerador y denominador:

$$m'_D = m'_{P(0-50ms)} + m'_{P(0-\infty)} \quad (5.14.)$$

siendo  $m'_{P(0-50ms)}$  el error estándar relativo de la potencia de los 50 primeros ms y  $m'_{P(0-\infty)}$  el error estándar relativo de toda la potencia medida (coincide con  $m'_{SPL}$ ). El error estándar absoluto de  $D$  será:

$$r'_D = D(m'_{P(0-50ms)} + m'_{P(0-\infty)}) \quad (5.15.)$$

## 5.2. VALIDACIÓN EXPERIMENTAL EN EL CÁLCULO DEL ERROR DE LOS PARÁMETROS OBJETIVOS

Para comprobar la validez de los resultados teóricos presentados en este Capítulo, hemos analizado, para un caso particular, la distribución estadística de los parámetros  $D$  y  $SPL$ .

Para ello hemos utilizado de nuevo la sala rectangular de dimensiones 27.5x41.2x34.4 m, fuente en el punto (10.3,34.4,13.7) m, receptor en el punto (17.2,3.4,20.6) m, y coeficiente de absorción medio igual para todas las paredes  $a = 0.19$ . Como señalábamos en el Apartado 3.8.1., esta sala fue estudiada, utilizando métodos deterministas, por el equipo noruego de Krokstad (Kristiansen, Krokstad y Follestad, 1993) obteniéndose que, para las condiciones anteriores, el parámetro definición en el receptor tomaba el valor  $D = 15\%$ .

En aquel Apartado 3.8.1. comprobamos que nuestro modelo convergía al mismo resultado que el de los autores citados.

Pero además, con la teoría aquí expuesta, podemos saber para cualquier número de rayos enviados, cuál es la precisión de las estimaciones que ofrece el modelo.

Se realizaron 500 ejecuciones de  $N = 25.000$  rayos con un límite temporal de  $t_f = 2$  seg. La fuente sonora escogida fue de tipo isotrópica y aleatoria, teniendo la precaución de que cada ejecución utilizara conjuntos diferentes de rayos. En las reflexiones utilizamos el modelo especular para que los resultados fueran comparables con el método de las imágenes. El receptor elegido fue de tipo esférico con un radio de 0.75 m.

En cada una de las ejecuciones se midió el nivel de presión sonora y la definición. Los resultados fueron los que presentamos en la siguiente Tabla 5.1.:

TABLA 5.1.  
Estadísticos de los parámetros  $D$  y  $SPL$  .  
500 ejecuciones de  $N=25.000$  rayos.

	<b>D (%)</b>	<b>SPL(w/m2)</b>
<b>Media (experimental)</b>	14.99	0.002178
<b>Desviación Estándar (experimental)</b>	$\pm 3.14$	$\pm 0.0001395$
<b>Media de la Desviación Estándar Predicha con la ecuación (5.9.) (5.9.)</b>	$\pm 4.57$	$\pm 0.0001432$

El parámetro definición  $D$  toma el valor medio 14.99 % muy cercano al valor teórico. Los 500 valores obtenidos se distribuyen alrededor de la media con una desviación estándar experimental  $\pm 3.13$  %. La desviación teórica obtenida con la ecuación (5.9.) fue diferente para cada ejecución, porque en sí misma es una estimación, pero asombrosamente se distribuyó con muy poca dispersión. La media de la desviación estándar teórica tomó el valor  $\pm 4.6$  %, un poco mayor que el experimental, pero como estimación del error estadístico es aceptable.

En la figura 5.1. se observa cómo la distribución estadística del parámetro  $D$  sigue una distribución normal, tal como esperábamos.

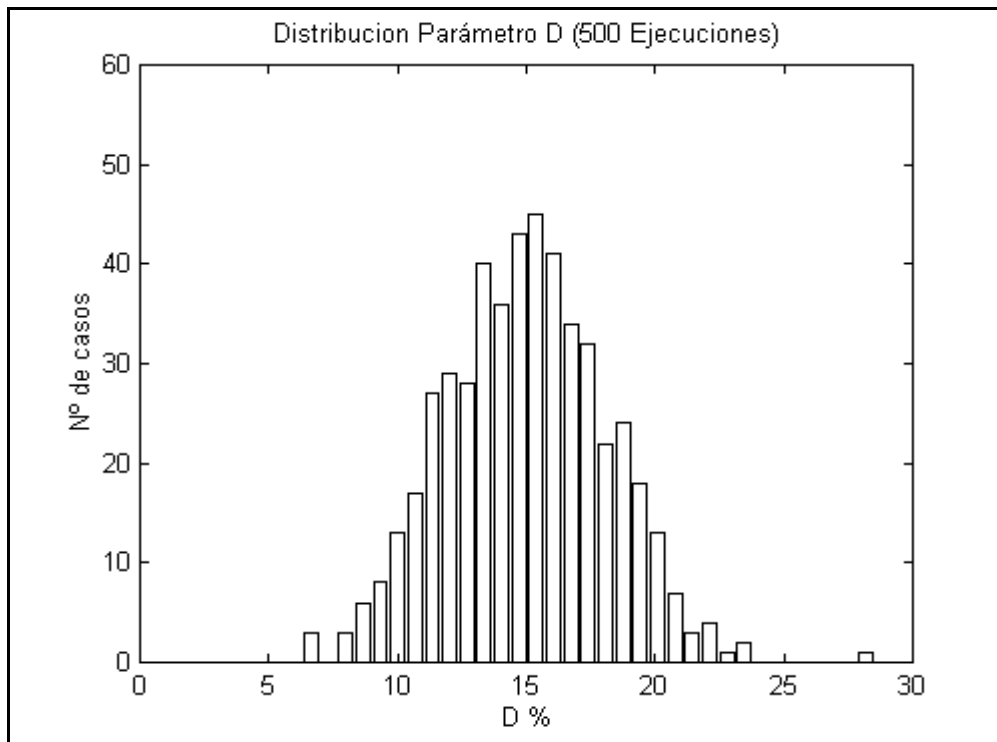


Fig. 5.1. Distribución Estadística Parámetro D (%). 500 Ejecuciones.

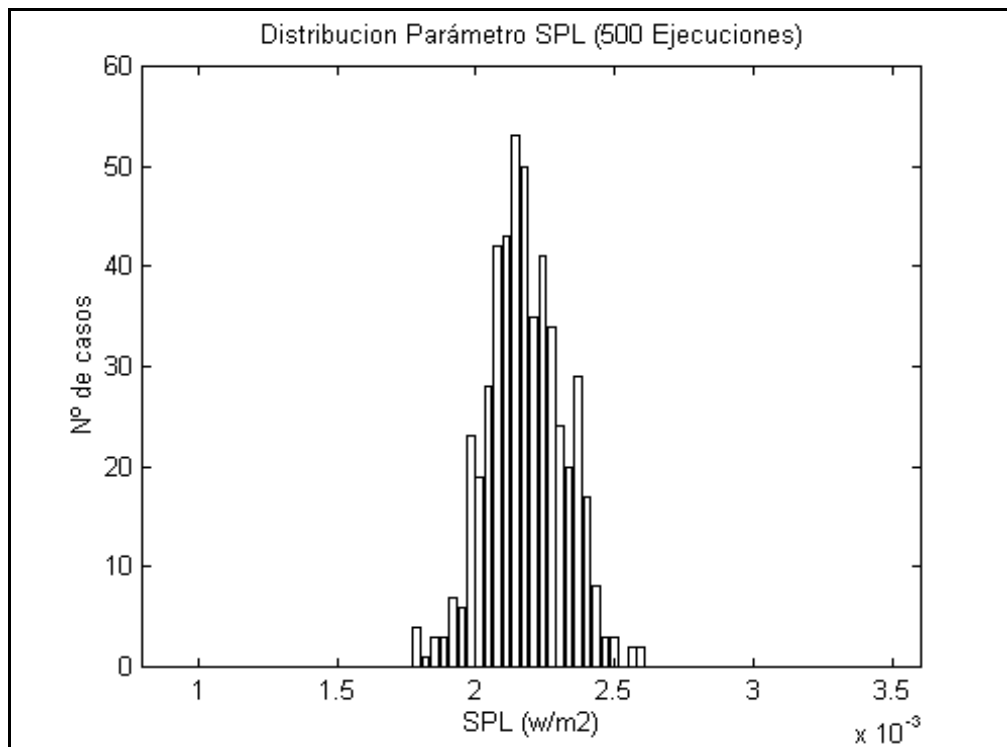


Fig. 5.2. Distribución Estadística del Parámetro SPL (w/m<sup>2</sup>). 500 ejecuciones.

Los resultados para el parámetro *SPL* son similares. Los 500 valores obtenidos se distribuyen alrededor de un valor medio de  $2.178\text{e-}3 \text{ w/m}^2$  (93.4 dB re 1pW). La desviación estándar observada de estos valores es  $\pm 1.395\text{e-}4 \text{ w/m}^2$ , y la media de la desviación teórica obtenida con la ecuación (5.9.), es prácticamente la misma  $\pm 1.432\text{e-}4 \text{ w/m}^2$ .

En la figura 5.2. puede observarse la distribución normal del parámetro *SPL* que presenta una menor desviación respecto a la media, en términos relativos, que la figura 5.1. del parámetro *D*.

Es interesante destacar la diferencia de errores relativos que existe entre ambos parámetros. Mientras que el error relativo experimental del coeficiente de definición *D* es  $m(D) = 3.14/14.99 \times 100 = 30\%$ , el error relativo experimental del nivel sonoro *SPL* es sólo  $m(SPL) = 0.00014/0.0022 \times 100 = 7\%$ . El parámetro definición se trata de un cociente y, por lo tanto, tiene un error relativo que es suma de errores relativos de numerador y denominador. El error relativo del denominador coincide con el error relativo del nivel sonoro, y ya es un 7%. El resto, 23%, es el error relativo correspondiente a la determinación de la energía de la parte temprana de la respuesta impulsiva. Siempre ocurrirá que el parámetro definición será más difícil de obtener que el parámetro nivel sonoro. Esta diferencia queda puesta de relieve en que la curva de distribución del parámetro definición tiene una mayor desviación estándar que la del nivel sonoro.

Para obtener estos resultados el ordenador estuvo trabajando durante más de dos días, por lo que resulta difícil experimentar con diferentes configuraciones. Así y todo se repitió el experimento para un número mucho mayor de rayos  $N=400.000$ , aunque limitando el número de ejecuciones a 30. Para éste número de rayos, el error predicho por la ecuación (5.9.) también se aproxima satisfactoriamente al error experimental. Los estadísticos se presentan en la Tabla 5.2.

El parámetro definición *D* toma el valor medio 15.15 %, muy cercano al valor teórico y, por supuesto, dentro de una desviación estándar  $\pm 1.04$  %. De hecho, 20 de los 30 valores obtenidos (aproximadamente el 68%) se encuentran dentro del intervalo definido por una desviación estándar. La media de las desviaciones teóricas obtenidas con la ecuación (5.9.) es prácticamente igual a la experimental,  $\pm 1.15$  %.

Los resultados para el parámetro *SPL* se distribuyen alrededor de un valor medio igual a  $2.180\text{e-}3 \text{ w/m}^2$  (93.4 dB) con una desviación estándar experimental igual a  $\pm 4.8\text{e-}5 \text{ w/m}^2$ , y una media de las desviaciones teóricas obtenidas con la ecuación (5.9.) un poco menor que la experimental,  $\pm 3.6\text{e-}5 \text{ w/m}^2$ .

TABLA 5.2.  
Estadísticos de los parámetros  $D$  y  $SPL$ .  
30 ejecuciones de  $N=400.000$  rayos.

	D (%)	SPL(w/m2)
<b>Media (experimental)</b>	15.15	0.002180
<b>Desviación Estándar (experimental)</b>	$\pm 1.04$	$\pm 0.000048$
<b>Media de la Desviación Estándar Predicha con la ecuación (5.9.)</b>	$\pm 1.15$	$\pm 0.000036$

La diferencia entre utilizar 25.000 rayos o una cantidad 16 veces mayor, 400.000 rayos, está en que, como esperábamos, el error decrece con  $1/\sqrt{N}$ . Si el error relativo del parámetro definición era del 30%, ahora es 4 veces menor, un 6% aproximadamente. Si el error relativo del parámetro nivel sonoro era del 7%, con 400.000 rayos es sólo del 2% aproximadamente. La función de distribución de probabilidad de cada uno de los estimadores ha disminuido su cola, su desviación estándar, y el error de precisión es menor.

### 5.3. EL COEFICIENTE DE ABSORCIÓN MEDIO FRENTE AL ERROR EN LOS PARÁMETROS INTEGRALES

Por último, veamos cuál es el efecto del coeficiente de absorción medio sobre el cálculo de estas expresiones integrales.

Al aumentar el coeficiente de absorción medio de la sala, en general, aumentará la varianza relativa de la distribución de la energía sonora. Y por lo tanto, *copiar* esta función será más difícil con lo que el error en la determinación de los parámetros acústicos objetivos será mayor.

Este efecto, que también se da en la determinación de la respuesta impulsiva (Apartado 4.6.3.), es puesto de manifiesto en los resultados que presentamos a continuación en la Tabla 5.3. En la misma sala rectangular 30x20x10 m del Capítulo anterior, con un número inicial de  $N=100.000$  rayos y una misma posición de fuente y receptor, hemos calculado los valores de los parámetros  $SPL'$  y  $D'$  para tres coeficientes de absorción medios diferentes  $\mathbf{a} = 0.25$ ,  $\mathbf{a} = 0.50$  y  $\mathbf{a} = 0.90$ . Junto a estos valores, y en paréntesis, indicamos el error relativo  $m'$  de cada uno de los resultados.

Tabla 5.3.  
Variación con el Coeficiente de Absorción  
de los Parámetros  $SPL'$  y  $D'$   
y de sus Errores Relativos.

<i>Coeficiente de Absorción medio</i>	$SPL'$ ( $m'_{SPL}$ )	$D'$ ( $m'_D$ )
$a = 0.25$	93.9 dB ( $\pm 3\%$ )	49.2 % ( $\pm 7\%$ )
$a = 0.50$	90.3 dB ( $\pm 4\%$ )	78.4 % ( $\pm 9\%$ )
$a = 0.90$	87.6 dB ( $\pm 7\%$ )	99.1 % ( $\pm 14\%$ )

Aumentar el coeficiente de absorción medio significa aumentar el error relativo de nuestras estimaciones. Este resultado es de gran importancia porque, al contrario de lo que se pudiera pensar, respuestas impulsivas que presentan una caída dinámica rápida con una duración corta, dan lugar a mayores imprecisiones en los cálculos derivados de la aplicación del método del trazado de rayos.

#### 5.4. Resumen y Conclusiones

Por primera vez en el campo de las simulaciones por ordenador de acústica de salas podemos ofrecer estimaciones de los principales parámetros objetivos con una cota de su precisión o error.

A través de la varianza de la distribución direccional dependiente del tiempo de la intensidad sonora, cualquier programa de trazado de rayos puro puede "tranquilizar" a sus usuarios ofreciendo una estimación del nivel de error asociado al número de rayos empleado.

Hemos comprobado experimentalmente en una sala rectangular que, para 25.000 rayos, los valores típicos de precisión del parámetro  $SPL$  se encuentran alrededor del 7%, y del parámetro  $D$  alrededor del 30%. Estos niveles descienden al 2% y al 6% respectivamente cuando se utilizan 400.000 rayos.

La expresión teórica de la varianza y del error que proponemos reproduce estos valores en la mayoría de los casos. Aunque en si misma es una estimación, la convergencia de este estadístico es mucho más rápida que la de los estimadores de los parámetros, por lo que fácilmente nos puede "alertar" sobre la insuficiencia de rayos en la simulación.



## **CAPÍTULO 6**

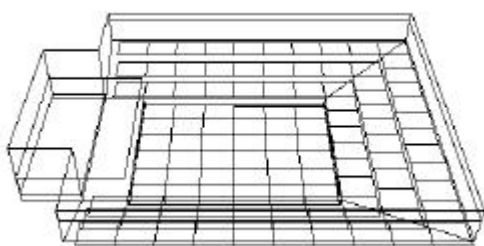
# **Estudio y Modificación de las Condiciones Acústicas de los Terreros de Lucha en Tenerife para su Utilización en Eventos Culturales**

## 6.1. CONDICIONES ACÚSTICAS DE LOS TERREROS DE LUCHA EN TENERIFE

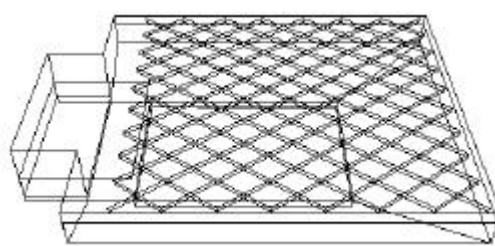
### 6.1.1. Introducción

Los terreros de lucha canaria son instalaciones deportivas para la práctica exclusiva de dicho deporte. Generalmente constituyen los únicos espacios cerrados de competencia municipal en los que existe la posibilidad de desarrollar otras actividades culturales, ie: conferencias, presentaciones musicales, danzas, gala de elección de la reina de belleza local, entre otros.

Las dimensiones de la pista reglamentaria para la práctica de la lucha, un círculo de arena de aproximadamente 20 m de diámetro, y las gradas circundantes, lo transforman en un recinto de planta cuadrada de 40x40 m<sup>2</sup>, figura 6.1., con una altura máxima en el centro de 10 m. Esta forma es acústicamente inadecuada para representaciones en las que el escenario se coloca sobre el lateral libre de gradas (izquierda fig. 6.1a.) y los espectadores ocupan el resto del recinto (cuadrados fig. 6.1a). Por otro lado, el tipo y terminación de las superficies que típicamente constituyen un recinto deportivo (hormigón, láminas metálicas, etc.) son muy reflectantes y generan tiempos de reverberación muy altos, afectando gravemente la percepción de la palabra hablada y oscureciendo la claridad musical. Con objeto de cuantificar las condiciones acústicas actuales se han realizado mediciones en el Terrero de Lucha Canaria del municipio de Santa Ursula. La similitud de formas y materiales empleados hacen estos resultados extrapolables a los demás terreros existentes en la isla.



**Fig. 6.1a. Esquema del Terrero de Sta. Ursula. Los cuadrados representan la ubicación del público en actos no deportivos.**



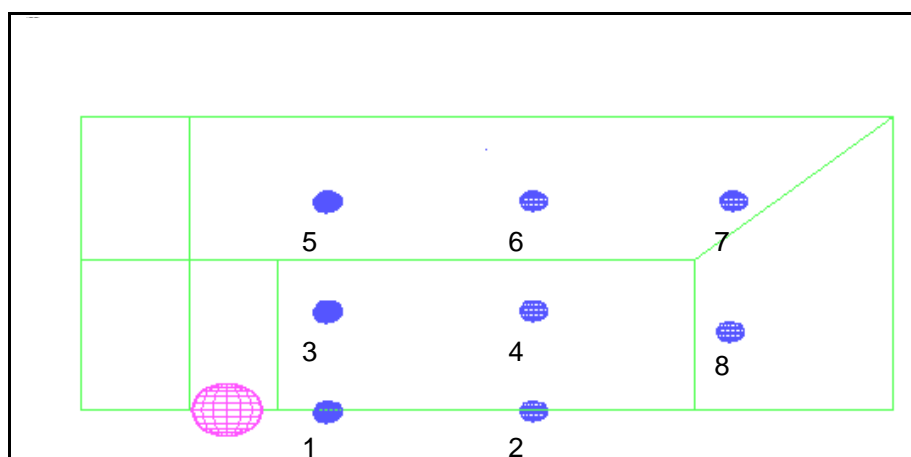
**Fig. 6.1b. Distribución de paneles absorbentes propuesta para reducir el elevado tiempo de reverberación existente.**

En este Capítulo presentamos una propuesta de modificación, figura 6.1b., basada en la incorporación de paneles absorbentes sobre el techo y la disposición de altavoces en distintas configuraciones. Este trabajo fue posible gracias a la colaboración del Cabildo de Tenerife a través de la financiación del Proyecto 226/125/94 suscrito entre el Cabildo de Tenerife y la Universidad de La Laguna.

### 6.1.2. Medidas Realizadas

Debido al volumen de las instalaciones, aproximadamente 13.000 m<sup>3</sup>, se utilizó como fuente sonora omnidireccional y puntual la detonación de cargas explosivas del tipo utilizado en pirotecnia.

La posición de la fuente y de los puntos de medición se observan en la figura 6.2. Los puntos 1, 2, 3 y 4 están situados sobre la arena, los puntos 5, 6 y 7 en una grada lateral y el punto 8 en la grada trasera.



**Fig. 6.2.** Estaciones de medición y localización de la fuente. Vista en planta del ala derecha del terrero (mirando desde el centro hacia la puerta de entrada).

Para una fuente omnidireccional emitiendo ruido blanco entre 0 y 5000 Hz, a un valor de SPL de 108 dB a 1 m de la fuente, se obtuvieron los siguientes valores de nivel de presión sonora de la Tabla 6.1. La posición de la estación de medición se refiere al sistema de coordenadas representado en la figura anterior. No se ha utilizado ninguna escala de ponderación para la medida de estos valores.

**TABLA 6.1.** Puntos de Medida y Valores de SPL

Punto	Coord. X	Coord. Y	Coord. Z	SPL en dB
1	-6.5 m.	0.0 m.	1.0 m.	92.2
2	3.5 m.	0.0 m.	1.0 m.	89.0
3	-6.5 m.	7.5 m.	1.0 m.	92.2
4	3.5 m.	7.5 m.	1.0 m.	88.8
5	-6.5 m.	15.5 m.	5.0 m.	89.0
6	3.5 m.	15.5 m.	5.0 m.	88.0
7	12.5 m.	15.5 m.	5.0 m.	88.5
8	12.5 m.	5.5 m.	5.0 m.	87.0

Los valores de SPL son concordantes con los de un recinto con un tiempo de reverberación alto. Estos valores indican claramente la preponderancia del sonido difuso sobre el sonido directo debido a la baja absorción de las superficies que constituyen el estadio. Debe notarse que para una distancia de 19 m entre el punto 1 y el punto 8 sólo hay una caída de 5 dB. El SPL medido se uniformiza a partir del centro del terrero ya que la media de los puntos 4, 5, 6, 7 y 8 está alrededor de 88.5 dB con muy poca desviación.

En las tablas 6.2., 6.3. y 6.4. se presentan los parámetros RT, C50 y C80 respectivamente medidos en cada receptor para las principales bandas de octava.

TABLA 6.2. Tiempo de Reverberación *RT* Medido (sin público).

Tiempo de Reverberación: <i>RT</i> (seg)				
PUNTO	250 Hz	500 Hz	1000 Hz	2000 Hz
1	4.010	4.187	3.688	3.110
2	4.453	4.187	3.686	3.121
3	3.895	3.994	3.609	3.083
4	4.129	4.022	3.668	3.122
5	4.541	4.091	3.642	3.089
6	3.888	4.086	3.560	3.008
7	5.035	4.298	3.716	3.075
8	4.069	4.100	3.580	3.092
<b>MEDIA</b>	<b>4.253</b>	<b>4.121</b>	<b>3.644</b>	<b>3.088</b>

TABLA 6.3. Claridad C50 Medida (sin público).

Claridad C50 (dB)				
PUNTO	250 Hz	500 Hz	1000 Hz	2000 Hz
1	-5.34	-2.89	-2.01	-0.22
2	-7.72	-8.81	-4.03	-4.02
3	-8.42	-6.99	-5.67	-5.2
4	-9.79	-8.45	-6.83	-5.71
5	-6.32	-6.08	-3.64	-2.33
6	-10.39	-6.37	-8.91	-6.49
7	-7.5	-8.31	-7.38	-5.7
8	-11.29	-8.48	-7.14	-5.5
<b>MEDIA</b>	<b>-8.35</b>	<b>-7.05</b>	<b>-5.70</b>	<b>-4.40</b>

TABLA 6.4. Claridad C80 Medida (sin público).

Claridad C80 (dB)				

<b>PUNTO</b>	<b>250 Hz</b>	<b>500 Hz</b>	<b>1000 Hz</b>	<b>2000 Hz</b>
1	-2.55	-1.31	0.03	1.07
2	-6.47	-6.38	-2.47	-1.96
3	-5.56	-5.19	-3.09	-2.72
4	-7.95	-6.72	-4.28	-2.88
5	-4.15	-4.06	-1.44	-0.56
6	-7.51	-4.52	-6.34	-3.81
7	-5.93	-5.4	-4.61	-3.69
8	-8.2	-5.12	-5.27	-3.3
<b>MEDIA</b>	<b>-6.04</b>	<b>-4.84</b>	<b>-3.43</b>	<b>-2.23</b>

Las medidas efectuadas muestran un excesivo tiempo de reverberación y como consecuencia unos valores de C80 y C50 muy bajos. Los ecogramas obtenidos y los valores de SPL medidos muestran que a medida que nos alejamos de la fuente el campo difuso predomina ampliamente sobre el sonido directo.

## 6.2. MODELO DE SIMULACIÓN

### 6.2.1. Modelización

Para poder evaluar el efecto de distintas configuraciones del recinto sobre los diferentes parámetros acústicos, hemos utilizado el programa de simulación presentado en esta trabajo aunque en una versión anterior que carece de difusión y análisis de errores.

El primer problema al que nos enfrentamos fue tener que cuantificar el coeficiente de absorción de las superficies interiores del terrero. Los materiales y acabados presentes en la sala (enlucido, hormigón, arena, vidrio) han sido identificados en las tablas de valores de coeficientes de absorción de la bibliografía consultada (Recuero, 1992); sin embargo el material del techo, construido en chapa plegada y recubierto de un material asfáltico de espesor desconocido no puede aparecer en las tablas. Para salvar esta dificultad se probaron distintos valores de coeficiente de absorción del techo, hasta obtener en el modelo, valores de tiempo de reverberación similares a los valores medios medidos presentados en la Tabla 6.2., para cada banda de octava.

Los coeficientes de absorción asignados a los distintos materiales se presentan a continuación en la Tabla 6.5.

TABLA 6.5. Coeficientes de Absorción de las Superficies.

Descripción del material	Ubicación en el Terrero	250 Hz	500 Hz	1000 Hz	2000 Hz
Hormigón enlucido	Gradas	0.01	0.02	0.02	0.02
Vidrio, 5 mm de espesor	Ventanas superiores	0.06	0.04	0.03	0.02
Arena floja seca	Piso de la pista	0.35	0.40	0.50	0.55
Hormigón rugoso	Paredes laterales (límite pista)	0.05	0.06	0.07	0.09
Pared con 2 cm de reboco	Paredes laterales y techo del escenario	0.05	0.06	0.08	0.04
Chapa metálica con tela asfáltica	Techo del Terrero	0.12	0.10	0.10	0.15

La modelización de la geometría se llevó a cabo con superficies planas de 4 nodos (paralelogramos) tal como puede apreciarse en la figura 6.3.

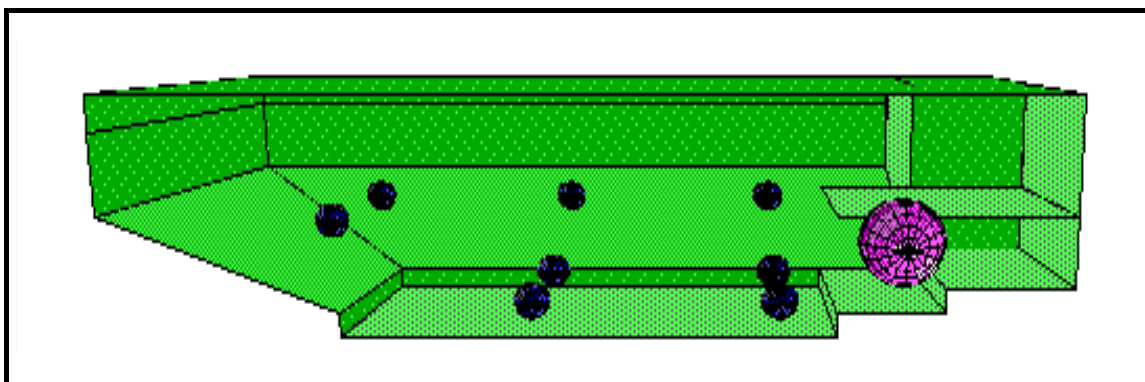


Fig 6.3. Vista en 3D de la idealización del terrero de Santa Ursula utilizado para el modelo numérico. Las esferas corresponden a la localización de las estaciones de medida y de la fuente.

Deben tenerse en cuenta algunas simplificaciones introducidas en el modelo:

1. Los escalones de las gradas fueron reemplazados por superficies planas oblicuas. Para tener en cuenta la disminución del área de absorción se incrementó el coeficiente correspondiente en un factor 1.3. El reemplazar las gradas por superficies planas nos hace predecir que tendremos problemas en reproducir los valores medidos ya que la superficie inclinada producirá, en conjunto con el techo del terrero, un ascenso ficticio de los rayos enviados por la fuente, concentrando mayor energía sobre la parte superior de las mismas. Por otro lado, cuando las gradas se llenen de público la superficie inclinada presentará mejor el efecto de los espectadores.

2. Las zonas laterales del escenario, que en la realidad son escaleras que conducen a los vestuarios, han sido reemplazados por paredes verticales ficticias con un coeficiente de absorción de 0.3 en cada banda de octava.

Los receptores se distribuyeron a lo largo del Terrero tal como aparece en la figura 6.1a. Son receptores semiesféricos de radio 1.5 m y cubren toda el área susceptible de utilizarse para ubicar la audiencia, es decir, gradas y centro del Terrero.

### **6.2.2. Comparación del Modelo con los Valores Experimentales**

Para comprobar que el modelo funciona bien se hizo un análisis cualitativo y otro cuantitativo. Por un lado se compararon los ecogramas medidos en el terrero con los ecogramas calculados por el modelo. Para ello debemos tener en cuenta que:

1. Los ecogramas medidos representan variaciones de presión sonora, mientras que los calculados representan valores de energía (proporcionales al cuadrado de la presión sonora).
2. El tiempo de integración utilizado en el ecograma medido difiere del utilizado en el software. El medido tiene menor tiempo de integración, por lo que puede detectar variaciones más finas.
3. En este tipo de comparación lo importante es la estructura general del ecograma, es decir, que el ecograma simulado represente adecuadamente los retardos y las reflexiones producidas por las superficies.
4. En la etapa de desarrollo en que se hizo el análisis, el modelo no tenía en cuenta todavía procesos de difusión. Es de esperar que los ecogramas simulados presenten "huecos" en la parte temprana que no existen en los ecogramas medidos.

Teniendo en cuenta estas consideraciones se compararon los ecogramas de las estaciones de medida 1, 5 y 8 y se pudo comprobar la dificultad que entrañaría una validación a este nivel, sobre todo sin tener en cuenta la difusión de los materiales. Así y todo, sí puede observarse una cierta correspondencia cualitativa entre los pares de ecogramas, sobre todo en las principales reflexiones primarias (Giner y Militello, 1995). De todas maneras no son resultados concluyentes y esperamos repetir el estudio bajo unas condiciones experimentales más controladas.

Se pudo comprobar que la distribución espacial del nivel de presión sonora *SPL* simulada es muy similar a la medida experimentalmente. En la figura 6.4. se muestran los valores obtenidos en la simulación para la frecuencia de 1.000 Hz con una fuente sonora de potencia 100 dB. Podemos observar que en el modelo, salvo en posiciones inmediatamente delante de la fuente, la media es muy uniforme, con desviación típica de 2 dB. La caída de *SPL* entre la fuente y la posición 1 es de 25 dB en el modelo y de 26 dB experimental. La diferencia entre el punto 1 y la media obtenida de promediar los puntos 2, 4, 5, 6, 7 y 8 es de 3.0 dB en el modelo y de 3.8 dB experimentalmente. Teniendo en cuenta las simplificaciones geométricas introducidas consideramos estos valores totalmente aceptables.

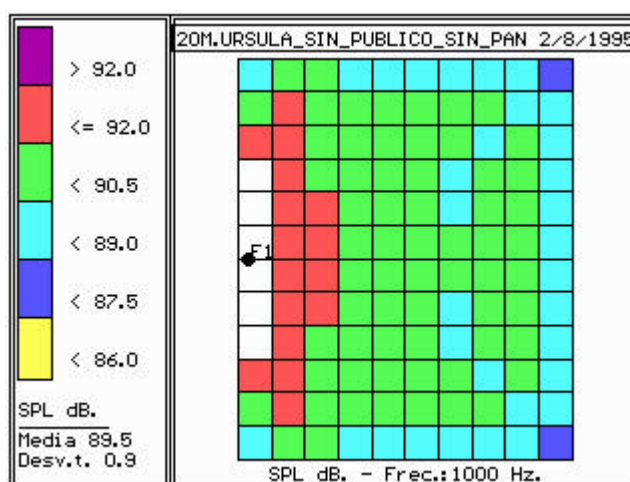


Fig. 6.4. Distribución del *SPL* (sin público).

Los valores de tiempo de reverberación *RT* medidos en el Terrero y los simulados en los receptores son muy similares, aunque recordemos que la coincidencia es forzosamente buena debido al ajuste que se realizó en el coeficiente de absorción del techo.

Los valores de C50 y C80 obtenidos en el modelo fueron ligeramente más altos que los medidos experimentalmente lo que puede deberse, entre otros aspectos, a no haber introducido difusión lo que da un mayor peso relativo a las reflexiones tempranas y por lo tanto aumenta los valores de claridad.

### 6.2.3. Simulación del Efecto del Público

Debe tenerse en cuenta que las mediciones fueron realizadas sin la asistencia de público. Debido a la dificultad práctica de realizar mediciones con la asistencia de público hemos modelado numéricamente el efecto del mismo. La presencia de público introduce absorción dentro del estadio, disminuyendo así el tiempo de reverberación y mejorando los valores de claridad.



Para simular la presencia de público hemos reemplazado los coeficientes de absorción de la arena y el del hormigón de las gradas por el de "espectadores en sala de espectáculos" (Llinares *et al.*, 1991). Los valores medios obtenidos en la simulación constan en la Tabla 6.6.

TABLA 6.6. Parámetros acústicos medios simulados (con público).

PARÁMETRO	250 HZ.	500 HZ.	1000 HZ.	2000 HZ.
RT	3.20	2.89	2.63	2.68
C50	-2.80	-2.20	-1.60	-1.50
C80	-1.24	-0.60	0.06	0.19

Los valores simulados, considerando lleno total del terrero, nos producen todavía valores altos del tiempo de reverberación teniendo en cuenta que los valores aconsejados para un local de estas dimensiones (13.000 m<sup>3</sup>) para audición verbal y música en general es de 1.2 a 1.7 seg, tal como mencionábamos en el Capítulo 1.

### 6.3. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE PROPUESTAS DE MEJORA: PANELES ABSORBENTES Y ELECTROACÚSTICA

#### 6.3.1. Objetivos del Diseño

Como indicábamos en la introducción, los Terreros son recintos deportivos destinados para la práctica de la Lucha Canaria, aunque su forma reducida y agradable los hace deseables para el desarrollo de espectáculos culturales de diversa naturaleza. Así pues, debemos distinguir las características de las dos actividades principales que tendrán lugar en estos recintos:

#### A. Uso Deportivo. Se caracteriza por:

- La acción se desarrolla en el centro del Terrero.
- Espectadores sentados sobre las gradas.
- Posibilidad de refuerzo electroacústico.
- Inteligibilidad requerida mínima.

#### B. Uso Espectáculo. Se caracteriza por:

- El escenario está sobre un lateral del Terrero.
- Espectadores sentados sobre las gradas y la arena.
- Posibilidad de refuerzo electroacústico.

- Inteligibilidad y claridad musical requerida alta.

El objetivo fundamental del diseño ha de ser la reducción del tiempo de reverberación a valores aceptables, condición necesaria para poder llevar a cabo actividades musicales o de audición verbal, y que no afecta negativamente a las actividades deportivas. Además, debido a que el reglamento de Lucha Canaria exige la utilización de refuerzo electroacústico para el seguimiento de los encuentros deportivos, hemos optado por una reducción aún mayor de los tiempos de reverberación.

Cuando se utiliza amplificación electroacústica los tiempos de reverberación de la sala deben ser bajos debido a la inevitable reverberación regenerativa creada por los medios electrónicos. Esto se debe a que el sonido amplificado por los altavoces retorna al micrófono, con un retardo proporcional a la distancia entre los mismos, y vuelve a ser amplificado, generando una reverberación ficticia. Por otro lado, en caso de ser necesario, las "mesas de mezclas de sonido" actuales permiten agregar la reverberación deseada.

Siendo la orquesta, el locutor o el solista la fuente sonora fundamental, la amplificación sonora de los altavoces puede interpretarse como "reflexiones" ficticias. Estas reflexiones pueden utilizarse para disminuir el ancho acústico de la sala y, por supuesto, para lograr un nivel de sonido uniforme en la misma.

Bajos tiempos de reverberación están asociados con valores de claridad C50 y C80 altos, normalmente mayores que cero. Sin embargo, una mala distribución de los altavoces puede generar retardos inadmisibles y oscurecer la inteligibilidad de la palabra. También pueden producir ecos si las distancias y los retardos no son adecuados. Lo mismo sucede si los altavoces están alejados de la fuente primaria. Debido a que la señal eléctrica viaja más rápido que el sonido en el aire, la emisión de un altavoz cercano llegará primero que la emitida por la fuente primaria, confundiendo nuestra percepción de la ubicación de la fuente.

Para evitar estos problemas se debe seleccionar la potencia con que emitirán los altavoces de forma de no oscurecer la fuente primaria, proveyéndoles de un retardo que les permita asemejarse a una reflexión natural.

Es por esto que, después de la distribución de altavoces, es importante verificar los valores de C50 y C80 para comprobar que no se han deteriorado y revisar los ecogramas para verificar la posible existencia de ecos.

### 6.3.2. Solución Propuesta: Paneles Absorbentes en el Techo

Al igual que otros autores al estudiar recintos de características similares (Arana y Vela, 1994), hemos optado por colocar paneles absorbente colgados del techo.

Hemos seleccionado un panel cuyo NRC es 0.80. Están previstos 616 paneles de 1.2 x 0.6 m<sup>2</sup>. Hemos optado por una distribución de los mismos formando cuadrados de aproximadamente 6 m de lado dispuestos a 45° respecto a las paredes del terrero, figura 6.1b. Consideramos que esta distribución no producirá direcciones preferenciales de propagación.

El panel seleccionado es el distribuido por Cristalería Española S.A. con el nombre de SONEBEL, modelo ESTRUCTURA 5. Los coeficientes de absorción aparecen en la siguiente Tabla 6.7.

TABLA 6.7. Coeficientes de absorción panel SONEBEL-ESTRUCTURA 5.

<b>Frecuencia</b>	<b>250 Hz</b>	<b>500 Hz</b>	<b>1000 Hz</b>	<b>2000 Hz</b>
<i>a</i>	0.61	0.66	0.84	1.08

El panel se adquiere provisto de un marco metálico de protección y herrajes que permiten suspenderlo de un cable de acero.

Para proveer mayor absorción a bajas frecuencias se han diseñado tablonces metálicos de anuncios, para uso publicitario dentro dentro del recinto, cuyos marcos proveen una separación adecuada a los muros laterales.

### 6.3.3. Configuración Espectáculo sin Altavoces

Este caso representaría, en forma aproximada, la interpretación de un solista o pequeño grupo musical actuando sin refuerzo electroacústico. Los valores obtenidos de los principales parámetros, Tabla 6.8., están dentro de los rangos considerados como óptimos. Se ha calculado que, en situaciones con lleno parcial (50%), o en casos de lucha (arena sin espectadores), los valores de T30 no superarán los 1.7 seg, pudiendo considerarse estos valores como mínimos.

TABLA 6.8.. Parámetros acústicos simulados (con público y paneles techo).

PARÁMETRO	250 HZ.	500 HZ.	1000 HZ.	2000 HZ.
T35	1.38	1.23	1.05	0.90
C50	-0.49	-0.05	0.83	1.98
C80	2.05	2.66	3.73	5.07

La figura 6.5. muestra la distribución para esta configuración de la disminución de *SPL* referida al máximo valor (receptores delanteros) en la banda de octava de 1000 Hz. Tenemos una diferencia de unos 10 dB entre los espectadores del frente y los del fondo. Este aumento en la caída de *SPL*, respecto del terrero en condiciones originales, se debe a la reducción del campo difuso.

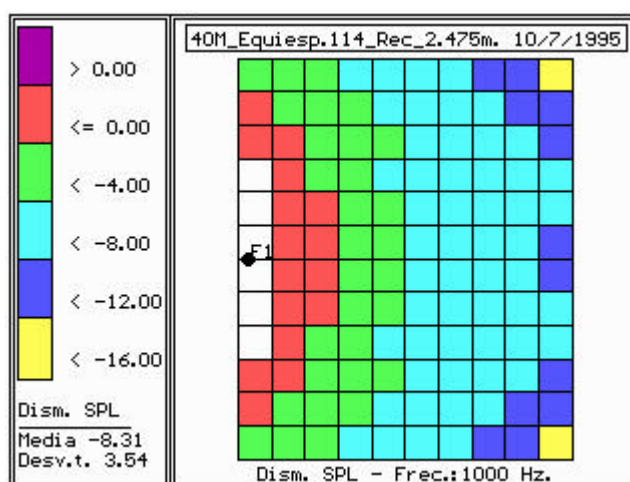
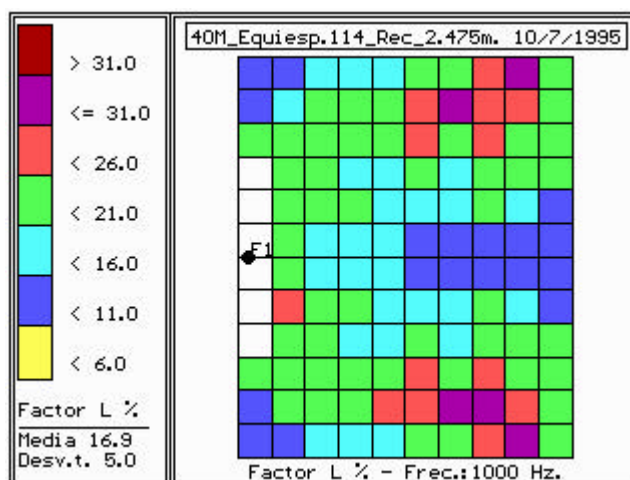


Fig. 6.5. Distribución del SPL.

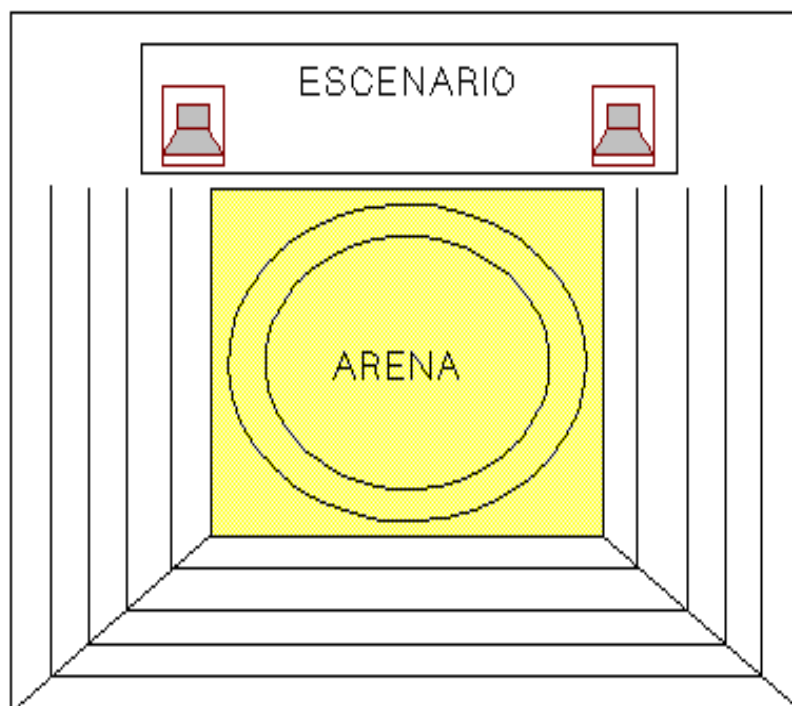
La claridad se ha beneficiado debido a la reducción del tiempo de reverberación. Sin embargo, para los oyentes dispuestos en el centro y la parte trasera, la sala será acústicamente muy ancha, tal como indica la fig. 6.6. del factor de energía lateral  $L'$ .

Fig. 6.6. Factor de Energía Lateral  $L'$  (Barron).

En la siguiente configuración estudiada, procederemos a reducir dicho "ancho" con la utilización de dos altavoces a los costados del escenario.

#### 6.3.4. Configuración Espectáculo con Altavoces Frontales

En la figura 6.7. se presenta un esquema de esta otra configuración, muy utilizada por grupos musicales o compañías de teatro. A una posible fuente central como la estudiada en el caso anterior, se añaden dos nuevos altavoces instalados directamente sobre el escenario.



**Fig. 6.7. Configuración espectáculo con dos altavoces laterales (sumados a la fuente original).**

En la simulación la fuente primaria emite a 1 wattio y los altavoces a 0.25 wattios cada uno. Estos últimos tienen una caída de 6 dB para 90° de giro sobre el plano horizontal y 50° sobre el plano vertical. Las curvas de directividad de los altavoces simulados se muestran en las figuras 6.8. y 6.9.

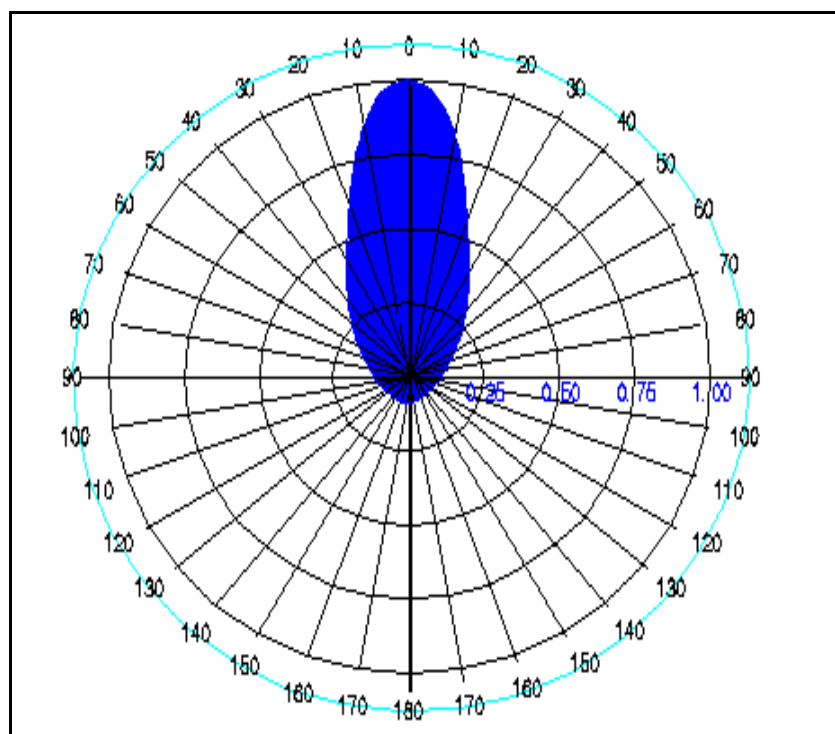


Fig. 6.8. Directividad en el plano vertical (caída de 6 dB para 50°)

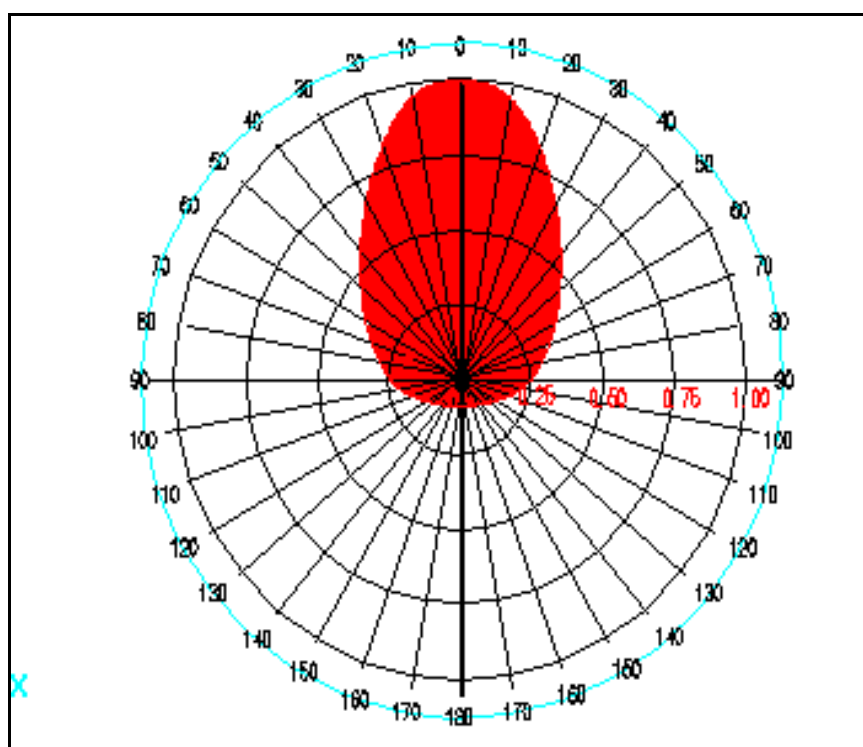


Fig. 6.9. Directividad en el plano horizontal (caída de 6 dB para 90°)

En las figuras 6.10. y 6.11. apreciamos el efecto de la instalación de los altavoces laterales mencionados, sumados a la fuente original. Vemos que la caída en el SPL se mantiene pero la

fracción lateral ha aumentado muy por encima de lo óptimo. Esto se debe a la potencia utilizada para los altavoces en la simulación. La aplicación de menor potencia en los altavoces, como hemos comprobado con otras simulaciones, permite regular este parámetro para llegar a situaciones intermedias entre las figuras de esta configuración y la anterior.

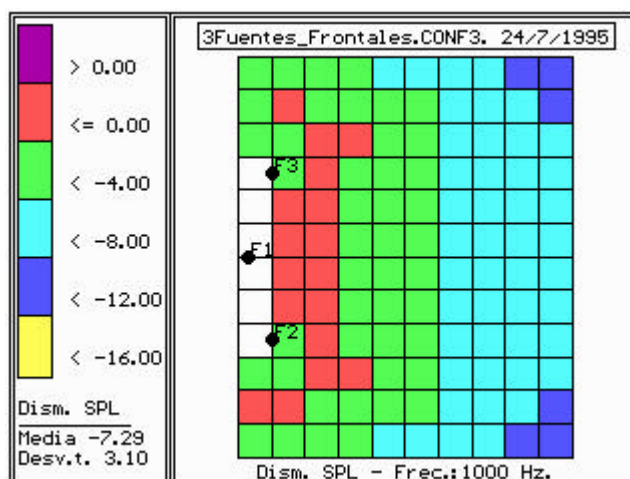


Fig. 6.10. Disminución del SPL.

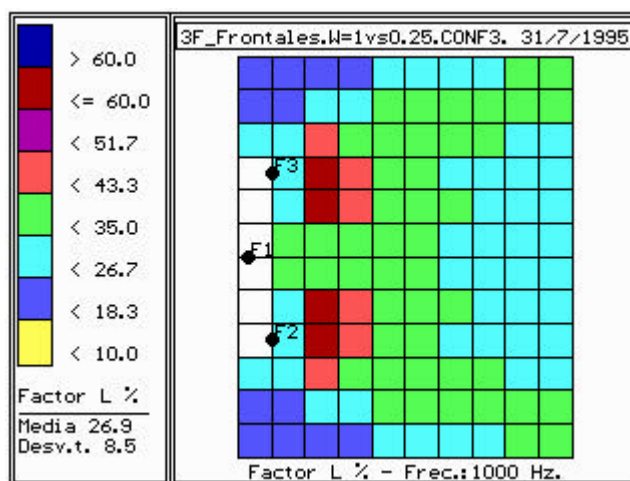


Fig. 6.11. Factor de energía lateral.

### 6.3.5. Configuración Lucha con Altavoces Radiales

En esta configuración la actividad se desarrollará en el centro del Terrero. Simulamos 4 altavoces del mismo tipo que los anteriores, colgados a 8 m de altura y orientados hacia las esquinas del terrero. En la figura 6.12. se presenta un esquema orientativo de esta configuración.

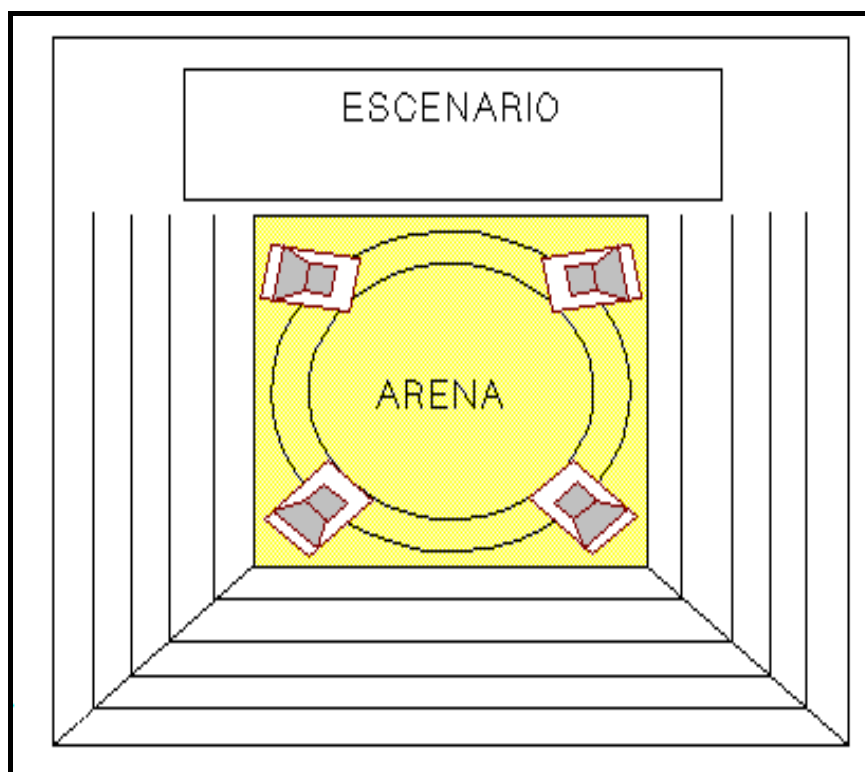


Fig. 6.12. Configuración deporte.

En la figura 6.13. presentamos los valores de caída de SPL para esta disposición a una frecuencia de 1000 Hz. En ella se puede observar cómo se consigue una distribución más uniforme en todo el espacio ocupado por las gradas (diferencias menores a 3 dB). Además se evita aumentar el nivel sonoro en la zona central donde se desarrollará la lucha y donde se ubica el micrófono del comentarista.

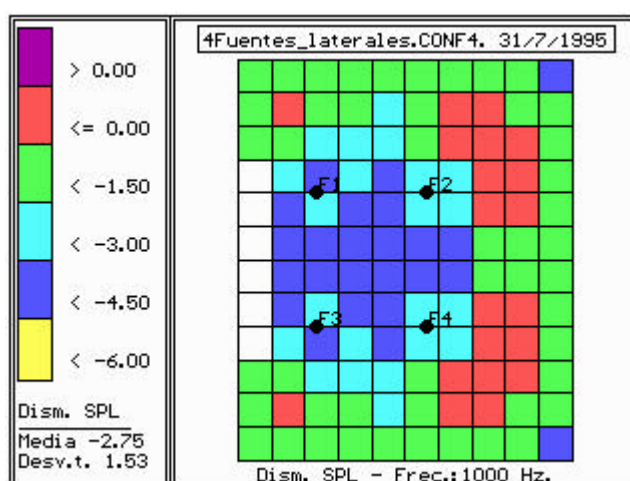
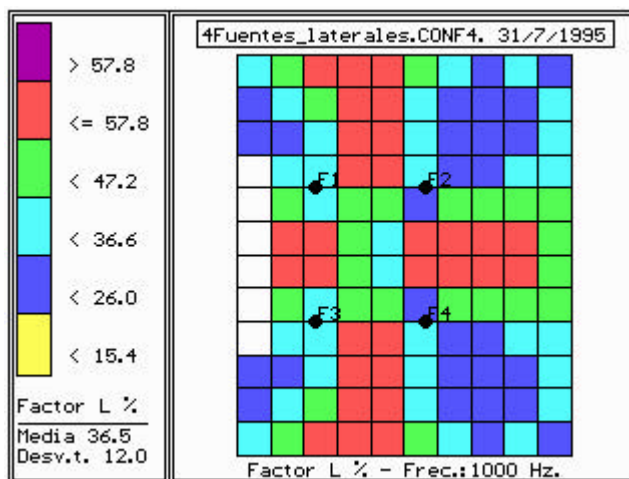


Fig. 6.13. Disminución del SPL.



Los valores de C80 registrados en las gradas tienen un valor promedio de 5 dB, y en general han aumentado considerablemente respecto a los estimados en el estado original del terrero.

La disposición radial de los altavoces genera el mismo efecto en la distribución del factor de energía lateral, figura 6.14. Su valor medio ha ascendido a 36% para esta configuración.



**Fig. 6.14. Factor de Energía Lateral.**

Hubiera sido interesante estudiar la configuración de una única fuente situada sobre el centro de la pista de arena para evitar la posibilidad de molestias debidas a la superposición retardada de las señales de los altavoces. Probablemente de muy buenos resultados también, aunque será similar a ésta si tenemos en cuenta la alta directividad de los altavoces utilizados, y el bajo tiempo de reverberación actual.

### 6.3.6. Conclusiones

Los resultados obtenidos muestran que la solución propuesta para la reducción del tiempo de reverberación es adecuada. La distribución de paneles en el techo también lo es ya que los ecogramas no presentan ramificaciones aisladas como se obtendrían en el caso de una distribución no uniforme de material absorbente. La absorción a instalar sobre las paredes laterales ha sido diseñada de forma que pueda servir de soporte a los anuncios publicitarios necesarios para el mantenimiento económico del equipo de lucha local.

Para un lleno total los resultados muestran una sala excesivamente "seca" y clara pero, como dijimos, siempre existe la posibilidad de aumentar la reverberación en forma electrónica.

La distribución de sonorización frontal es la utilizada normalmente por los grupos musicales y, como hemos visto, presenta valores acústicos óptimos después de la introducción de los

paneles. Tiene el inconveniente de que la visibilidad se ve ligeramente entorpecida por barandas y columnas.

La distribución de sonorización radial coincide con el diseño funcional del terrero. La visibilidad es buena, y cuando se utiliza para actividades no deportivas, el conjunto musical debe situarse en un lateral de la pista. La desventaja es que se pierden los asientos en la zona de la pista y un sector del público puede quedar a espaldas de los intérpretes. Pero las condiciones acústicas serán mejores, desde el punto de vista del público, ya que los resultados muestran una distribución sonora más uniforme sobre las gradas.

Debe tenerse en cuenta que las distribuciones estudiadas no son exclusivas, aunque los resultados para ambas son aceptables por separado. De hecho podrían instalarse los altavoces en forma radial, que funcionarían para los eventos de lucha u otro tipo de espectáculo, desconectar dos de ellos (o cambiarles la orientación) y agregar los altavoces sobre el escenario para espectáculos que se desarrollen sobre el mismo.

**CAPÍTULO 7**  
**El Auditorio de Tenerife**

## 7.1. EL AUDITORIO DE TENERIFE

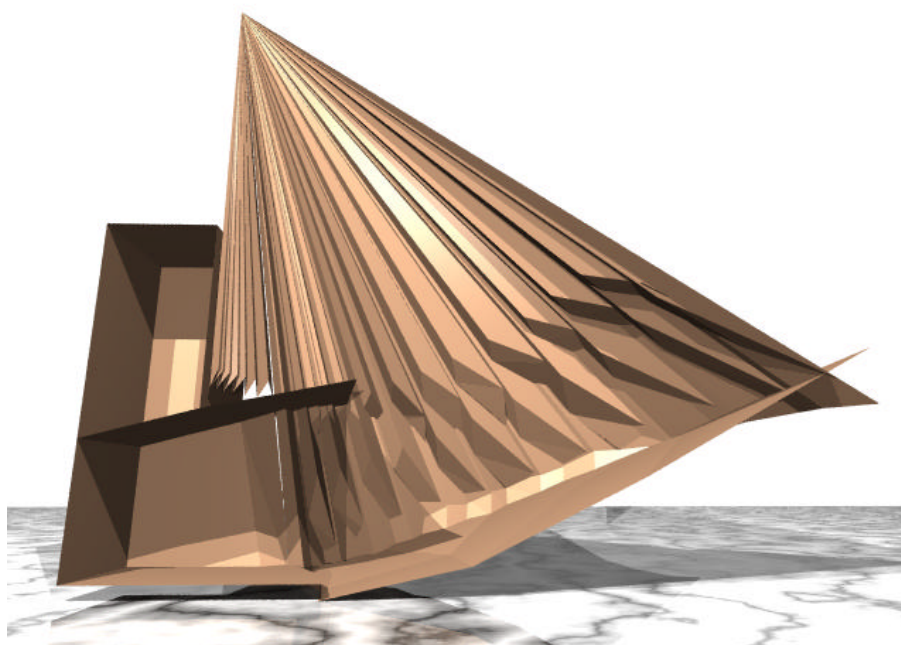
### 7.1.1. Objetivos del Capítulo

En este Capítulo queremos presentar una nueva aplicación práctica de las herramientas y teorías expuestas en esta Memoria de Tesis. Para ello hemos realizado una simulación completa sobre el proyecto arquitectónico conocido como "Auditorio de Tenerife", obra del arquitecto Santiago Calatrava, y que todavía está en fase de realización.

A diferencia del estudio realizado en el Capítulo anterior sobre el "Terrero de Santa Úrsula", en este caso sí consideraremos procesos de difusión en las reflexiones en las paredes, y sobre todo, vamos a tener en cuenta un control del error estadístico que nos informe sobre la validez de los resultados en cada uno de los receptores numéricos distribuidos sobre la sala.

### 7.1.2. Diseño del Auditorio de Tenerife

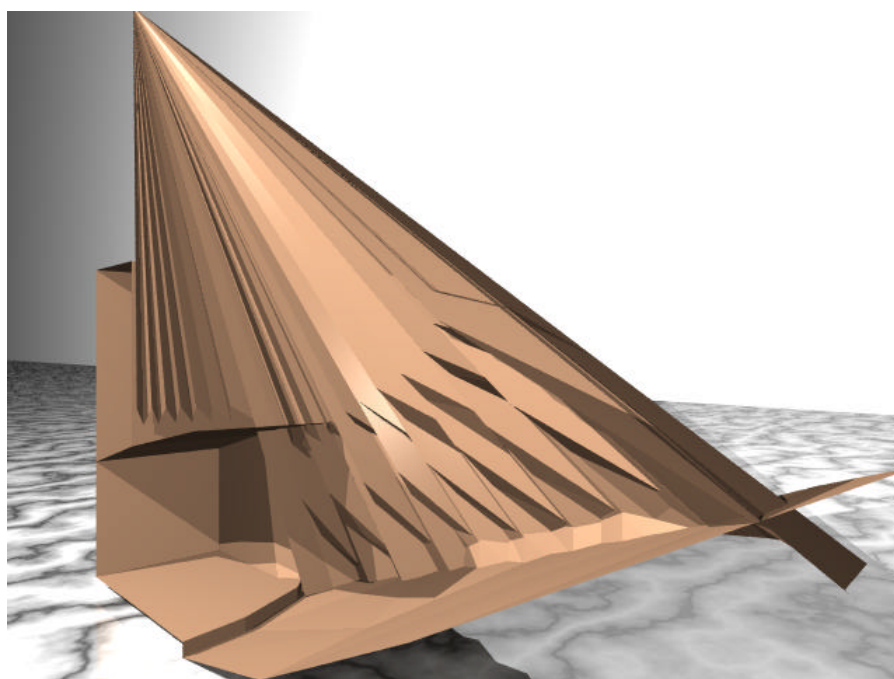
El "Auditorio de Tenerife" es una obra arquitectónica caracterizada principalmente por una original geometría en forma de cono oblicuo (ver figura 7.1.). Uno de los lados del cono queda totalmente vertical, haciendo el papel de pared trasera sobre el escenario, mientras que el otro lado forma el techo descendente del auditorio. La base inclinada de la figura corresponde con el patio de butacas, siendo éste el único emplazamiento para situar a la audiencia.



**Fig. 7.1. Auditorio de Tenerife (vista lateral).**

La forma geométrica cónica es poco usual en acústica de recintos musicales; de hecho, no tenemos constancia de ningún auditorio de estas características. Hay que destacar que, a diferencia de otros auditorios como la "Ópera de Sidney", en el "Auditorio de Tenerife" la geometría exterior e interior coinciden.

El edificio tiene una altura máxima de 40 m en la parte que va desde el escenario hasta el vértice del cono, altura que va disminuyendo a lo largo de la sala debido a la inclinación del techo. El patio de butacas, prácticamente circular, presenta un diámetro de 40 m en su eje mayor y de 35 m en su eje menor. En las figuras 7.2. y 7.3. ofrecemos diferentes perspectivas visuales que pueden ayudar a dar una idea de la majestuosidad del proyecto.

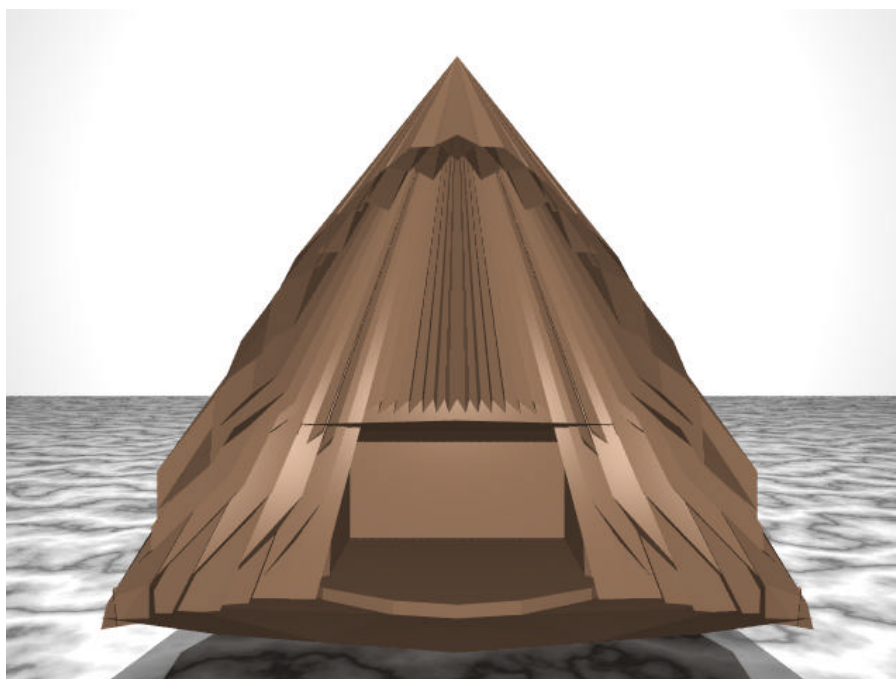


**Fig. 7.2. Auditorio de Tenerife (vista lateral inclinada).**

Inicialmente, el arquitecto proyectó un diseño de una altura ligeramente mayor, con una menor inclinación en el patio de butacas, y con una fila de palcos rodeando la sala, llegando a una capacidad que permitía albergar a casi 2.000 espectadores.

Las recomendaciones de varios expertos en acústica de salas de concierto convencieron al arquitecto para que redujera las dimensiones del auditorio hasta los valores actuales. De tener un volumen cercano a los 20.000 m<sup>3</sup>, el diseño actual presenta un volumen libre de aire activo de 16.600 m<sup>3</sup>. El número de butacas proyectado actualmente es de 1.700 butacas, aunque esa cifra puede variar ligeramente con el replanteo final. La audiencia se distribuye en 33 filas con amplio pasillo central.

Por último, cabe mencionar que el futuro auditorio ya se encuentra en fase de construcción y que se espera que las obras hayan terminado a finales del año 1.999.



**Fig. 7.3. Auditorio de Tenerife (vista trasera).**

## **7.2. MODELO DE SIMULACIÓN**

### **7.2.1. Modelización y Geometría**

Para representar numéricamente las superficies y elementos internos del auditorio se utilizaron como base elementos geométricos planos de tipo triangular. A partir de los planos del arquitecto se obtuvieron las coordenadas de los principales nodos que definen la geometría, así como las conectividades que los relacionan. La simetría de la sala simplificó el trabajo de obtención de coordenadas permitiendo generar los nodos y conectividades de una mitad del auditorio de forma automática.

El número de nodos utilizados fue 353 y el número de elementos triangulares 364.

### **7.2.2. Coeficientes de Absorción**

Debido a que el proyecto se encuentra todavía en una fase relativamente temprana, el arquitecto sólo nos ha provisto de algunas directrices generales en lo que respecta al tipo de materiales interiores del auditorio. La principal de ellas es la intención de recubrir las paredes de todo el cono superior con paneles de madera de 30 mm de espesor. Por otro lado, para

evitar que el tiempo de reverberación aumente excesivamente cuando no estén ocupadas todas las butacas de la sala, éstas deberán presentar un coeficiente de absorción alto, similar al coeficiente de absorción característico de la audiencia. En la siguiente Tabla 7.1. se presentan los coeficientes de absorción utilizados.

**TABLA 7.1. Coeficientes de Absorción de las Superficies.**

Descripción del material	Ubicación en el Auditorio	250 Hz	500 Hz	1000 Hz	2000 Hz
Madera 3 mm de espesor	Cono	0.25	0.10	0.09	0.08
Enlucido	Escenario	0.04	0.06	0.07	0.08
Lynoleum	Laterales del patio de butacas	0.02	0.03	0.05	0.05
Audiencia	Patio de butacas	0.45	0.85	0.98	0.98

### 7.2.3. Coeficientes de Difusión

No hace falta recordar que, a fecha de hoy, todavía no existen tablas de coeficientes de difusión de los principales materiales de acondicionamiento acústico. Sin embargo, está demostrada la enorme importancia que tiene esta propiedad en la evolución del campo sonoro en un recinto (Lewers, 1993) (Dälenback, 1995) (Lam, 1996). Por utilizar un símil visual, utilizar reflexiones totalmente especulares, equivale a considerar el recinto como si estuviera cubierto de espejos por todas partes. Las imágenes que recibiríamos serían fragmentos completos de la figura original, y la superposición de aquéllas, situadas en un fondo de claros y oscuros, generaría respuestas impulsivas alejadas de lo que es nuestra evidencia experimental. Las reflexiones son parcialmente difusas. Existe superposición de imágenes, pero de imágenes obtenidas por un proceso mixto de reflexión especular y reflexión difusa.

Como solución de compromiso, ante la ausencia de datos experimentales, se eligió un coeficiente de difusión  $d=0.2$  igual para todos los materiales de la sala y para todas las frecuencias de estudio. Este valor fue elegido simplemente por un criterio heurístico basado en la hipótesis de que cada tres reflexiones el 50% de la energía especular incidente pasa a ser difusa:  $(1 - d)^3 = 0.8^3 = 0.512 \approx 0.5$ .

Reconocemos que podrían haberse utilizado otros criterios. Por ejemplo, hubiese sido interesante dotar de más difusión a las reflexiones en bajas frecuencias que en altas

frecuencias, o más difusión al patio de butacas que a las superficies recubiertas de madera. Sin embargo, la ausencia de estudios al respecto y la falta de especificaciones más concretas sobre el tipo de materiales por parte del arquitecto, nos llevó a utilizar un coeficiente de difusión igual para todos los materiales y frecuencias, como primera aproximación al problema planteado.

## 7.3. ANÁLISIS DE ERRORES

### 7.3.1. Error en las Respuestas Impulsivas

La simulación se llevó a cabo en las condiciones descritas anteriormente suponiendo que el patio de butacas se encuentra ocupado por el público. Se dispusieron 170 receptores semiesféricos de radio 1.80 m sobre el patio de butacas y 2 sobre el escenario.

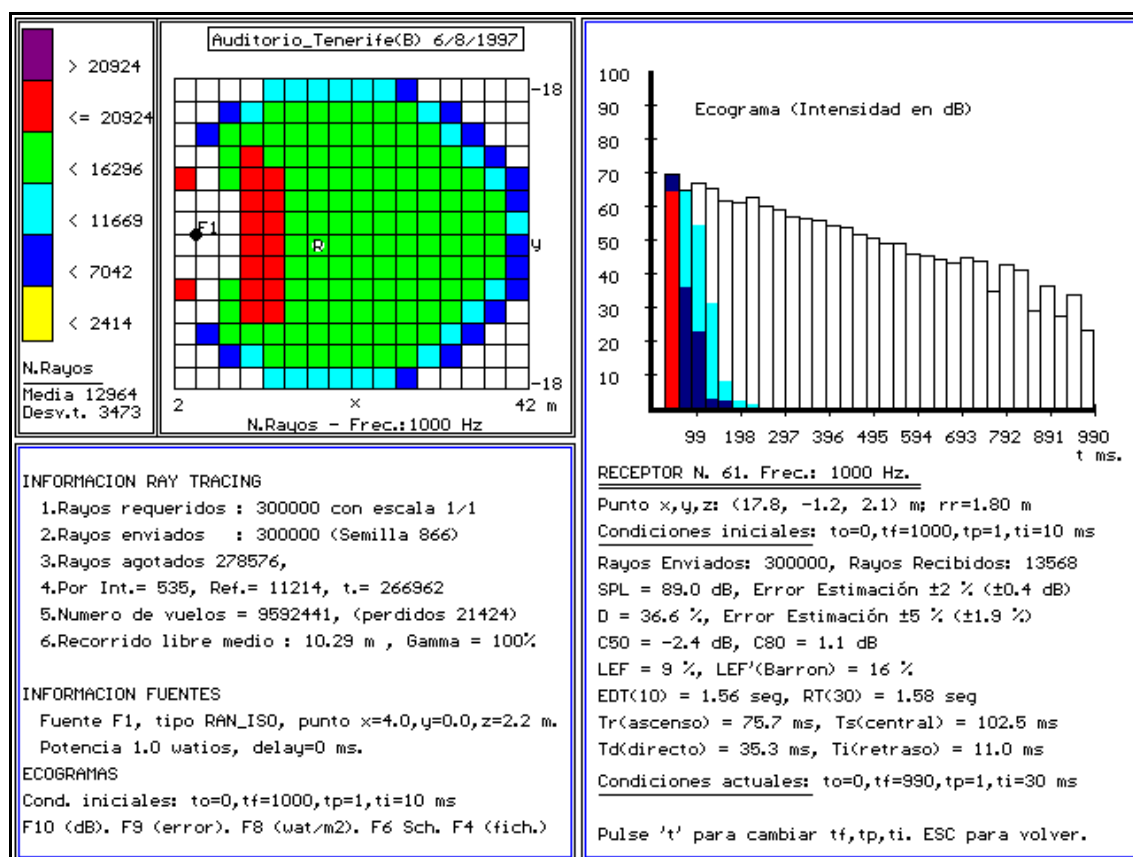


Fig. 7.4. Ecograma energético simulado (1000 Hz). El error estadístico se aprecia en el final de la cola reverberante.

El tiempo final de análisis elegido fue de 1 seg, tiempo suficiente para capturar la parte principal del decaimiento de la respuesta impulsiva. En la parte derecha de la figura 7.4. se aprecia la respuesta impulsiva de un receptor y cómo el programa distingue en rojo la energía directa, en azul oscuro las 1as. reflexiones y en azul celeste las 2as. reflexiones.



Se lanzaron  $N = 300.000$  rayos, suponiendo una fuente aleatoria isotrópica situada en el punto (4.0, 0.0, 2.2) m, figura 7.4. Este número de rayos nos asegura que, transcurrido el tiempo de análisis, el área asociada a cada rayo es menor que la menor de las áreas típicas de la sala o que la sección circular de un receptor.

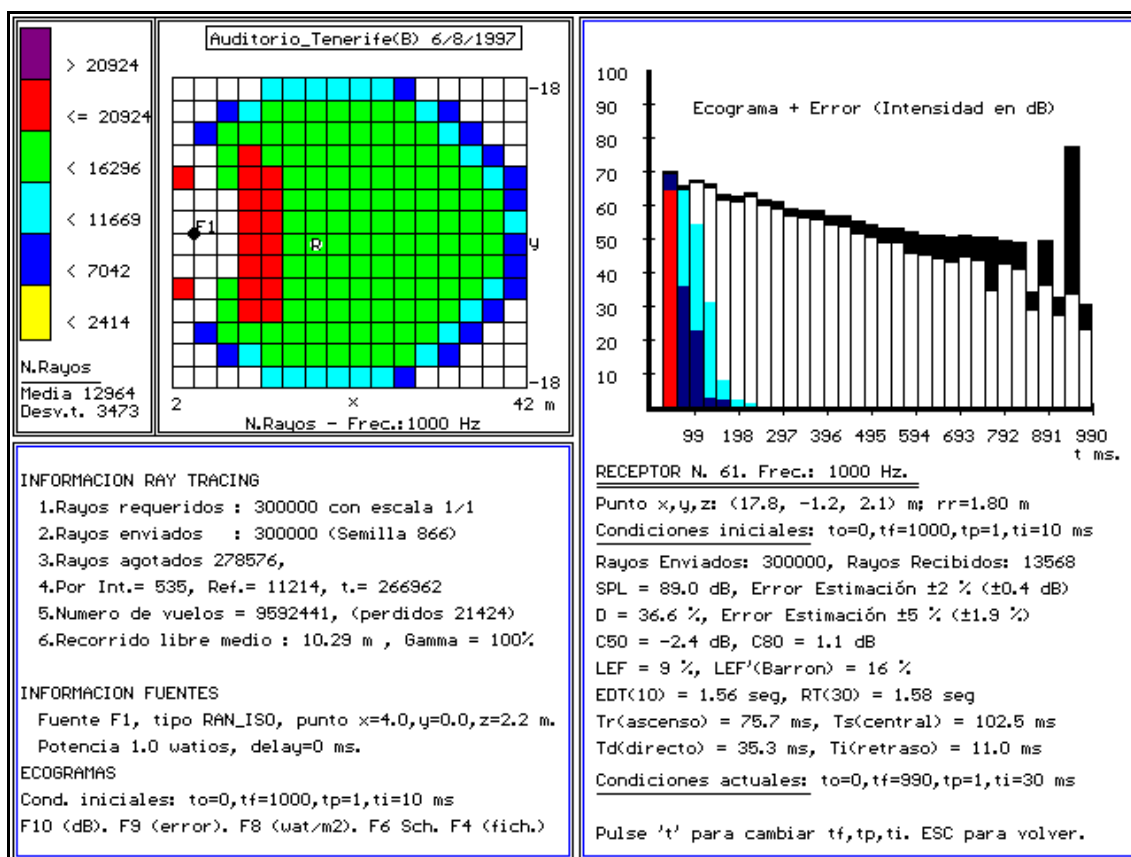
Pero recordemos que, el número de rayos por sí mismo, no es una condición suficiente para asegurar una convergencia o estabilidad del método en el cálculo de la respuesta impulsiva o de los parámetros.

Es ahí donde entra en juego el análisis de errores que hemos desarrollado. Para cada ecograma simulado y para cada parámetro calculado debemos tener una estimación del error introducido por el método del trazado de rayos. Es la única manera de tener confianza en los resultados de la simulación.

Para ilustrar lo que estamos diciendo veamos los resultados del programa para un receptor cualquiera, por ejemplo el receptor número 61. En la figura 7.4. vemos la respuesta impulsiva calculada con un tiempo de integración  $\Delta t = t_i = 20$  ms. Este tiempo de integración fue elegido para no superar la resolución de pantalla en la ventana de tiempos elegida. Podemos apreciar cómo el decaimiento de la señal es aproximadamente lineal, aunque en los intervalos de tiempo finales existe una importante indefinición de los valores de intensidad. Unas veces por defecto y otras veces por exceso, la intensidad sonora de los intervalos finales se aleja de los valores que cabría esperar. Este es un caso típico en el que vemos la importancia del error estadístico del método.

En la figura 7.5. presentamos el mismo ecograma anterior pero añadiendo para cada intervalo la estimación, según la ecuación (4.76.) del Capítulo 4, del error relativo del método del trazado de rayos calculado en dB (barras negras de la figura). Vemos cómo el error estadístico que hemos definido detecta el error creciente en el tiempo de la respuesta impulsiva, error que crece violentamente en la cola reverberante, tal como esperábamos. Necesitaríamos utilizar muchos más rayos para disminuir este error y obtener una mejor respuesta impulsiva.

Podemos decir que el número de rayos elegido no es suficiente para obtener respuestas impulsivas suficientemente bien definidas. Por ejemplo, no tendría sentido que utilizásemos estos ecogramas para una posterior convolución y auralización. Recordemos que existen métodos de tratamiento digital de la señal para generar la respuesta impulsiva en presión a partir de la respuesta impulsiva energética utilizando impulsos guiados por procesos de Poisson (Kuttruff, 1995).



**Fig. 7.5. Ecograma energético simulado (1000 Hz). Sobre cada intervalo se da una estimación del error estadístico del método.**

### 7.3.2. Error en los Parámetros Energéticos

Por otro lado, vemos cómo en las dos figuras anteriores aparecen calculados los parámetros acústicos objetivos del receptor analizado. En particular, queremos destacar la información que ofrece el programa sobre los parámetros *SPL* y *D*.

El nivel de presión sonora *SPL* medido fue de 89.0 dB con un error relativo de estimación de  $\pm 2\%$ , equivalente a  $\pm 0.4$  dB. El parámetro definición *D* medido fue de 36.6 % con un error relativo de estimación de  $\pm 5\%$ , equivalente a un error absoluto de  $\pm 1.9\%$ :

$$SPL = 89.0 \pm 0.4 \text{ dB}$$

$$D = 36.6 \pm 1.9 \%$$

Esta información sobre el error es fundamental porque nos permite hablar del nivel de confianza de la simulación en el cálculo de los principales parámetros acústicos. Podemos decir que, aunque la respuesta impulsiva sufría un error importante, en este caso, los parámetros energéticos obtenidos sí recogen un nivel de confianza aceptable. Dentro de sus pequeños márgenes de error ( $\pm 0.4$  dB y  $\pm 1.9\%$ ), los valores de la simulación pueden

considerarse como representativos de los valores teóricos que se hubiesen obtenido siguiendo un método determinista, léase método de las imágenes.

Por otro lado, si representamos para todos los receptores el error relativo de estimación de los parámetros *SPL* y *D* (figura 7.6.) vemos cómo, en general, todos los receptores presentan unos niveles de confianza bastante aceptables.

El error relativo del parámetro *SPL* (figura 7.6.a.) toma valores comprendidos en el intervalo entre  $\pm 1\%$  y  $\pm 6\%$  ( $\pm 0.08$  dB y  $\pm 0.5$  dB respectivamente) lo que es un error prácticamente despreciable.

El error relativo del parámetro *D* (figura 7.6.b.) toma valores comprendidos en el intervalo entre  $\pm 2\%$  y  $\pm 15\%$ , siendo muy pocos los receptores que superan un error relativo del 9%. Estos valores pueden considerarse muy satisfactorios tratándose *D* de un parámetro de estructura fina y de difícil cálculo.

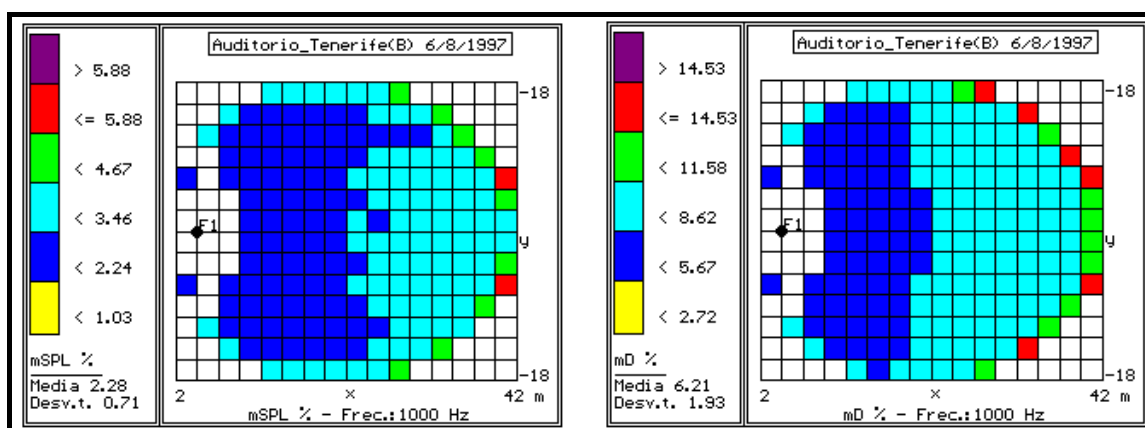


Fig. 7.6.a. Distribución Espacial del Error Relativo del Parámetro SPL. Fig. 7.6.b. Distribución Espacial del Error Relativo del Parámetro D.

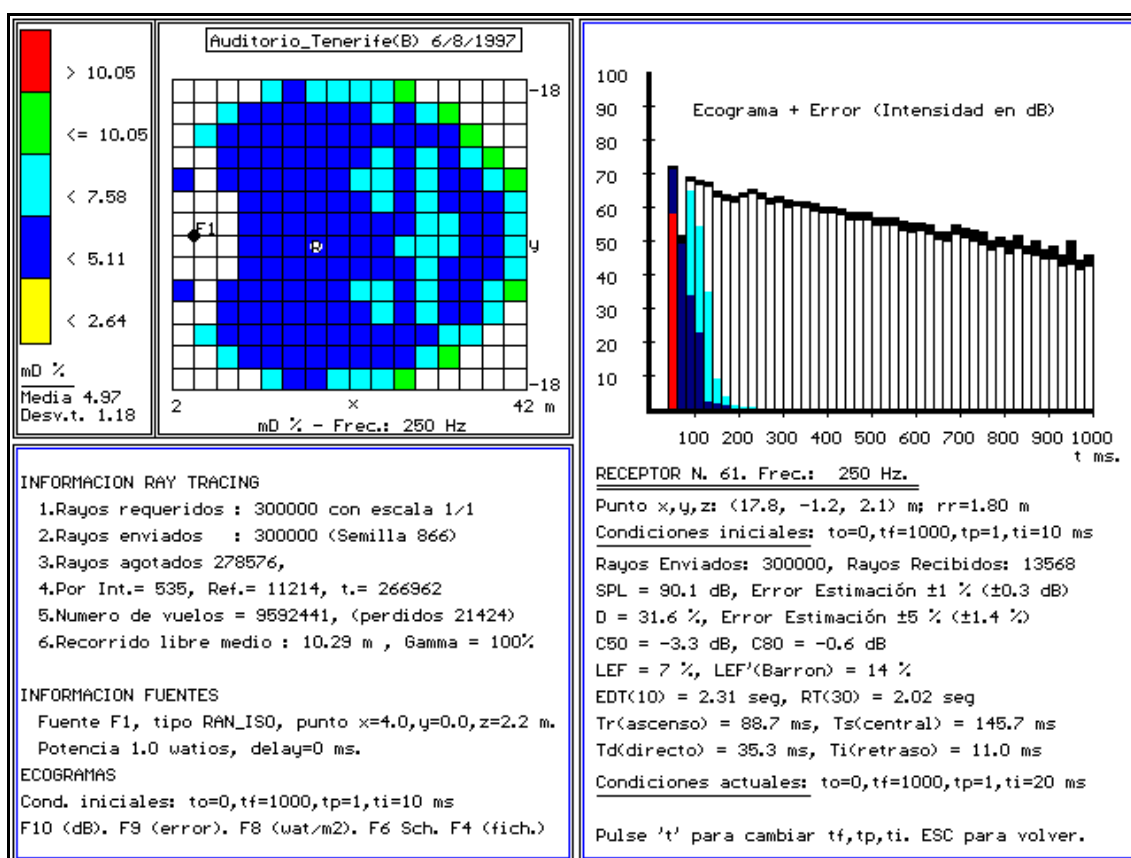
### 7.3.3. Error y Varianza de la Distribución de la Intensidad Sonora

Estos resultados son aplicables sólo para la octava de frecuencia escogida de 1.000 Hz. En la banda de 2.000 Hz los resultados son similares ya que los coeficientes de absorción de los materiales presentes en la sala son muy parecidos.

En cambio, para las bandas de frecuencia de 250 y 500 Hz, en las que la distribución de absorción espacial es más homogénea, la varianza relativa de la distribución temporal de la intensidad sonora es menor. Consecuentemente, el error también es menor.

Este efecto puede apreciarse en la figura 7.7. En ella vemos cómo para 250 Hz, tanto la respuesta impulsiva como los parámetros energéticos, presentan menores errores relativos que en 1.000 Hz, y por lo tanto, mayores niveles de confianza.

Esta afirmación no significa que para las bajas frecuencias los resultados sean más parecidos a los que mediremos en el Auditorio una vez haya sido construido. Recordemos que para bajas frecuencias las hipótesis de la Acústica Geométrica dejan de ser válidas y, por lo tanto, el modelo de simulación tendrá dificultades para reproducir la realidad. Pero, aceptando las hipótesis de partida y para el número de rayos lanzado, en este caso, la *credibilidad* del método será mayor para bajas frecuencias porque, como dijimos, la varianza de la distribución temporal de la intensidad sonora es menor.



**Fig. 7.7. Ecograma energético simulado (250 Hz).  
El error estadístico es menor en esta frecuencia.**

Por último mencionar que se ejecutó de nuevo la simulación para esta misma configuración pero con un conjunto de rayos inicial diferente. Como esperábamos, los resultados de los parámetros energéticos fueron los mismos dentro de los intervalos de estimación calculados.

Recordar que en los principales programas comerciales, que carecen de análisis de error, la única forma de medir la confianza de sus resultados es repetir la experiencia con un número de

rayos igual o, preferiblemente, mayor al inicial. En nuestra opinión, éste se trata de un método cualitativo impreciso y lento, que siempre deja en la duda de hasta dónde se ha llegado en la convergencia de los resultados.

## 7.4. INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

### 7.4.1. Tiempos de Reverberación

La variación del tiempo de reverberación con la posición de la sala es muy pequeña. En casi todos los receptores se midieron los mismos valores. En la Tabla 7.2. presentamos los tiempos de reverberación medios en cada banda de frecuencia. Estos valores se encuentran dentro de los límites aceptables en Salas de Concierto para la interpretación de música clásica y barroca, respetándose un ligero aumento en las bajas frecuencias.

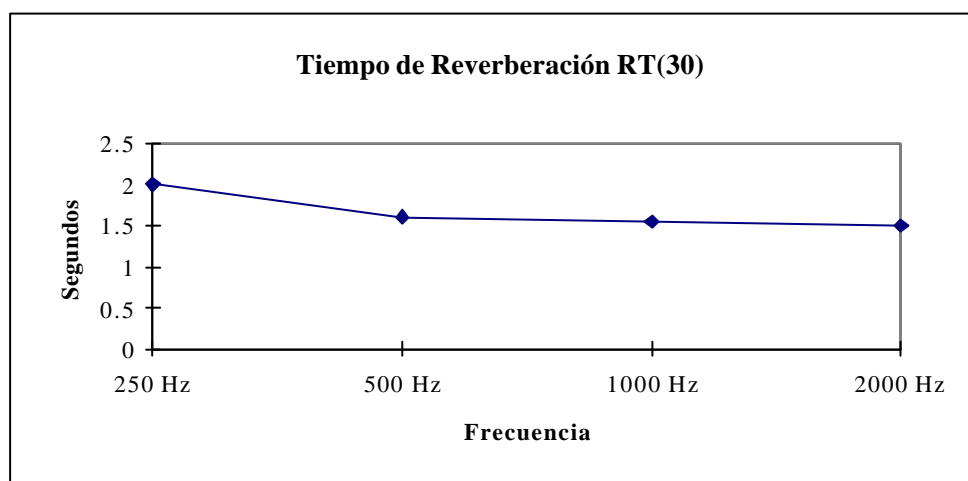


Tabla 7.2.

Tiempo de Reverberación  $RT(30)$ . Valores medios.

250 Hz	500 Hz	1000 Hz	2000 Hz
2.01 seg	1.60 seg	1.54 seg	1.51 seg

La acústica de la sala se encuentra dominada principalmente por la gran absorción del patio de butacas. Esto se pone de evidencia cuando vemos los valores de tiempo de reverberación  $RT(30)$  obtenidos, ya que presentan una fuerte correlación con los coeficientes de absorción definidos para la audiencia.

En lo que se refiere al tiempo de reverberación temprano  $EDT(10)$ , las medidas muestran, en términos generales, valores muy similares a los de  $RT(30)$  como puede observarse para las principales bandas de frecuencia en la figura 7.8.

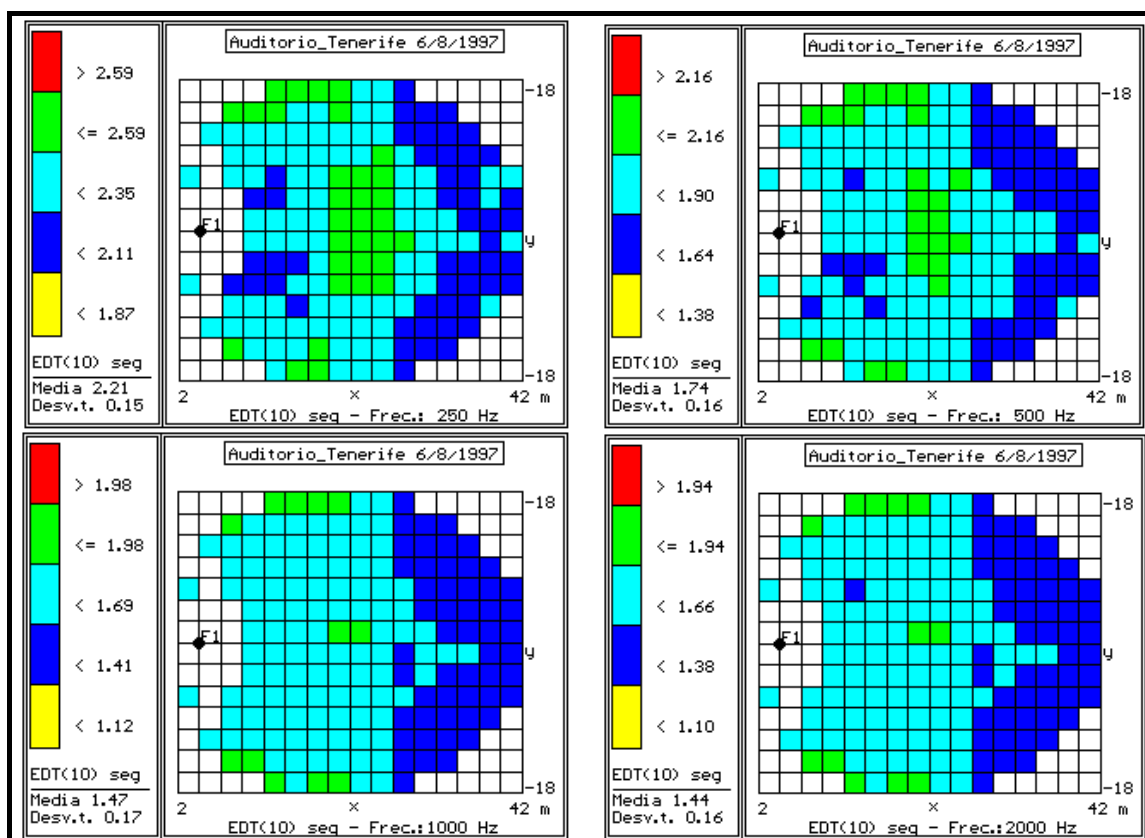


Fig. 7.8. Distribución Espacial en Frecuencia del Parámetro  $EDT(10)$ .

#### 7.4.2. Claridad Musical

Se acostumbra a utilizar el parámetro claridad  $C_{80}$  como representativo de la claridad musical. Los valores obtenidos en las medidas realizadas, figura 7.9., se encuentran mayoritariamente en los márgenes óptimos  $\pm 1.6$  dB recomendados por Cremer y Müller (Cremer y Müller, 1982). En la figura, los colores verde y azul claro representan este intervalo. Como puede observarse, en la frecuencia de 250 Hz hay una pequeña falta de claridad en los laterales traseros que podría deberse a la caída de energía sufrida por las primeras reflexiones provenientes de la madera del cono. En medias y altas frecuencias los valores de claridad pueden considerarse buenos.

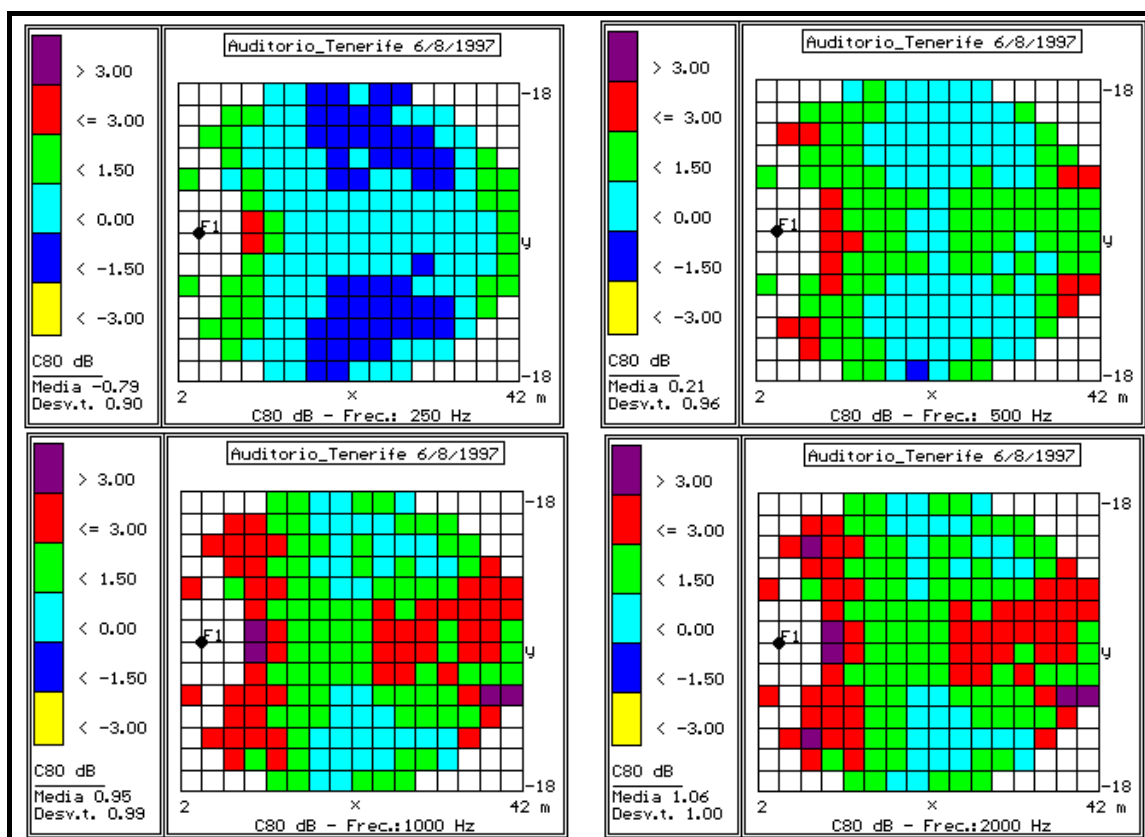


Fig. 7.9. Distribución Espacial en Frecuencia del Parámetro  $C_{80}$ .

### 7.4.3. Factor de Energía Lateral

El intervalo óptimo del parámetro  $LEF$  se encuentra entre 20% y 30% (Jordan, 1981). Como vemos en la figura 7.10., éste es el parámetro que más perjudicado se ve en el diseño actual del auditorio. El intervalo óptimo correspondería con el color verde, pero la mayor parte de los receptores muestran valores por debajo del 20%, incluso debajo del 10%. Ésto es debido a la ausencia de paredes laterales intermedias formando terrazas o anfiteatros.

Probablemente, la audiencia se verá afectada por una baja sensación de espacialidad.

### 7.4.4. Tiempo Central

Este parámetro marca también una guía sobre el balance de energía primaria y tardía. No se utiliza con mucha frecuencia. Se recomienda que su valor no exceda los 140 ms (Cremer y Müller, 1982). En la figura 7.11. vemos que los resultados son bastante buenos en la mayor parte de los receptores. En la frecuencia de 250 Hz podemos apreciar valores ligeramente elevados, lo que sin duda es debido a un tiempo de reverberación mayor en esta banda de frecuencia.

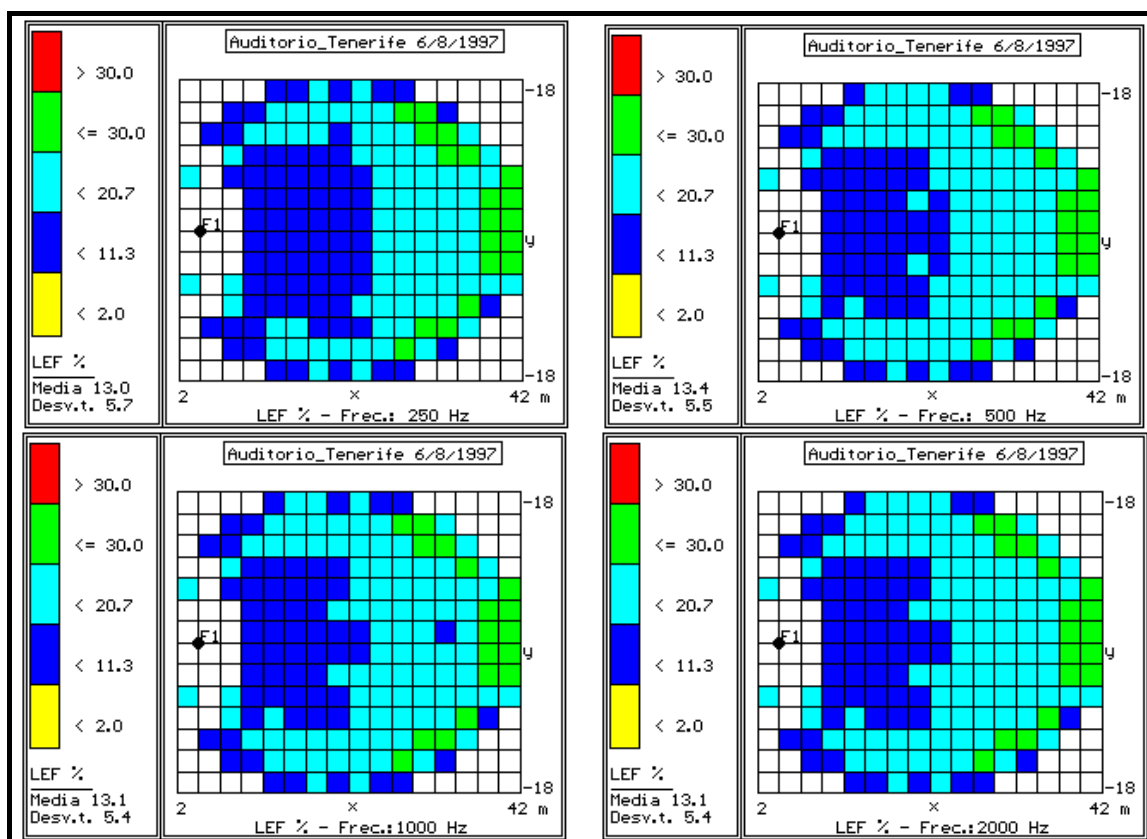


Fig. 7.10. Distribución Espacial en Frecuencia del Parámetro LEF

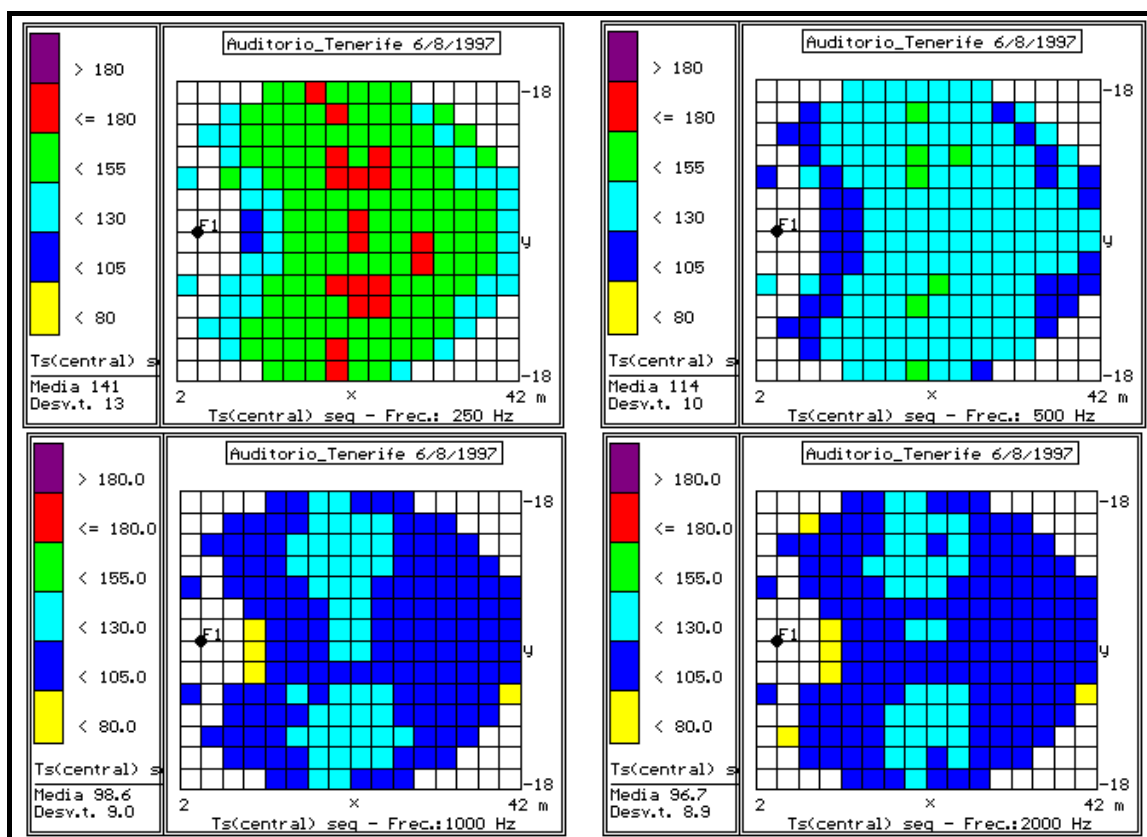


Fig. 7.11. Distribución Espacial en Frecuencia del Parámetro Tiempo Central.



## 7.5. DISTRIBUCIÓN ESPACIAL DE LA ENERGÍA EN UN PLANO VERTICAL

Durante la fase de diseño, la consultora acústica contratada por el arquitecto contempló la posibilidad de reducir el volumen de aire activo libre de la sala. Para ello, se utilizaría un falso techo de madera en la cota vertical de +35 m.

En nuestra opinión, el efecto de esta modificación iba a ser despreciable debido a que la absorción de la sala se encuentra dominada principalmente por el patio de butacas.

Para comprobar esta afirmación se realizó una simulación introduciendo el techo de madera y midiendo la intensidad sonora a lo largo de un plano vertical longitudinal en la sala. La figura 7.12. corresponde al nivel estacionario que se alcanzaría con una fuente emitiendo desde el escenario. En rojo aparece el mayor nivel de intensidad, que corresponde al punto de la fuente. En azul se muestra el menor nivel que se encuentra en la parte superior del cono. Observar cómo la figura esta truncada en esta parte debido a la tapa de madera. La energía que llega al extremo superior del cono es muy poca y, por lo tanto, el efecto de las superficies que se encuentren a esta altura será mínimo. Esta modificación no significaría cambio alguno en la acústica de la sala.

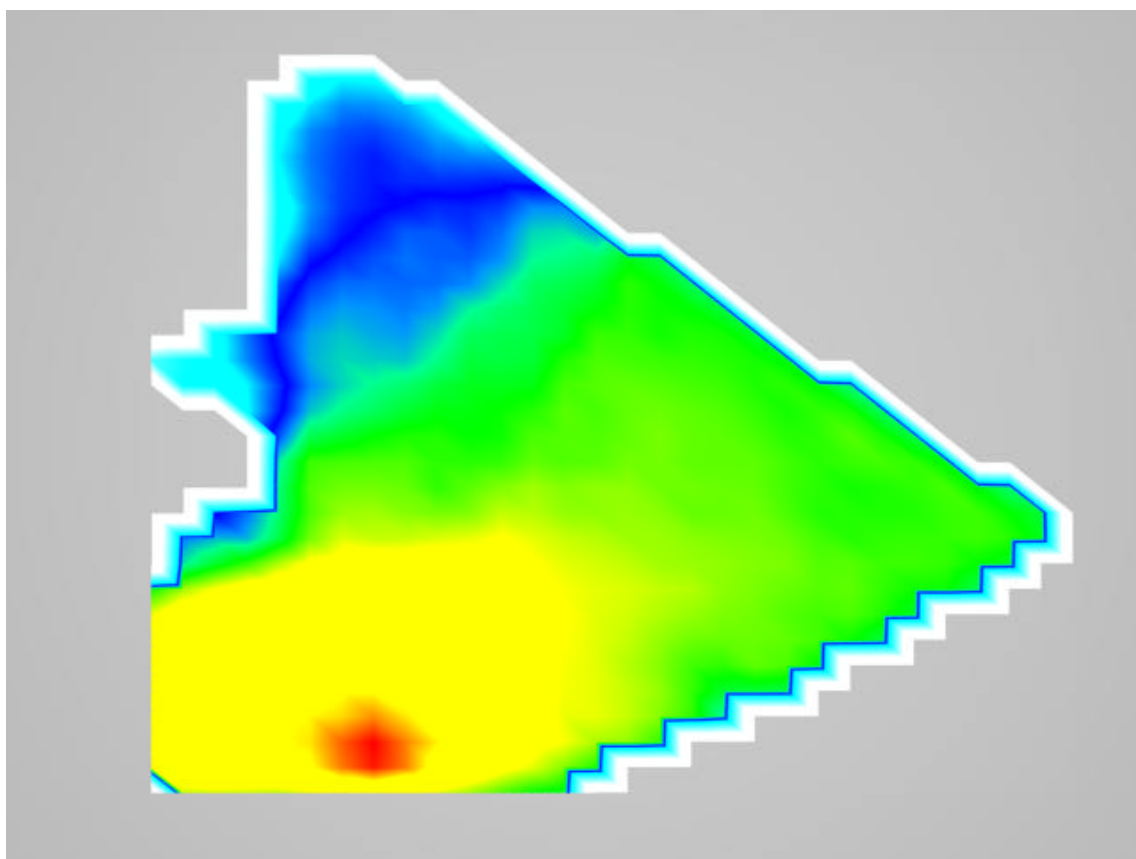
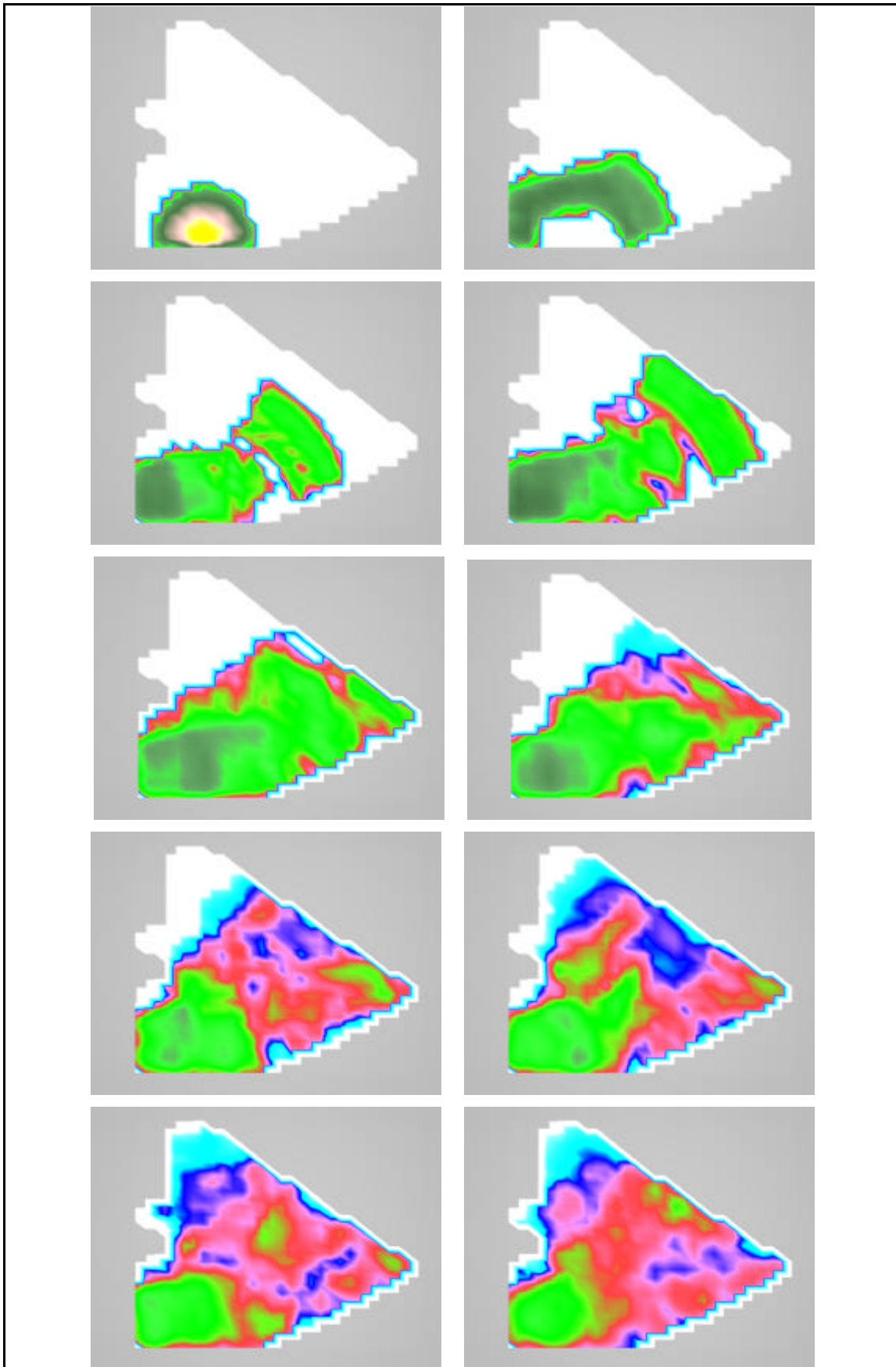


Fig. 7.12 Nivel Estacionario de Intensidad en el Plano Vertical Central.



**Fig. 7.13. Evolución Temporal de la Intensidad Sonora en el Plano Vertical Central.**  
Las imágenes fueron capturadas a intervalos de 20 ms.

Por último, en la figura 7.13. se muestra otra de las aplicaciones del programa desarrollado. Tomando ventanas de tiempo de 20 ms, podemos ver la evolución temporal de la intensidad sonora en el plano vertical central. De arriba a abajo y de izquierda a derecha vemos, en distintos momentos, cómo la energía sale de la fuente y avanza acercándose al suelo y paredes del auditorio. En la cuarta imagen ya se observa una primera reflexión de la pared que se encuentra más alejada del escenario. En las sucesivas imágenes puede verse cómo la energía sigue reflejándose de manera que los valores más altos se encuentran siempre en las cercanías del escenario y del patio de butacas. Hasta que no han pasado por lo menos 140 ms, lo que corresponde a la octava imagen, no se observa que la energía alcance la parte superior del cono, y cuando lo hace, es de una manera muy débil. Y en la última gráfica, que corresponde al intervalo de tiempo comprendido entre 180 y 200 ms, la situación no ha cambiado en absoluto.

Esto refuerza nuestra afirmación de que la introducción del falso techo de madera no sería efectivo.

Aquí terminamos el estudio realizado sobre el "Auditorio de Tenerife". Muchas son las cuestiones pendientes y, hasta que el auditorio no se construya definitivamente, no encontraremos las respuestas correctas. De cualquier modo, resulta evidente que la simulación por ordenador es una herramienta excelente para tener una primera aproximación al comportamiento acústico del recinto.

# **CONCLUSIONES**

## **CONCLUSIONES.**

Fue en Julio de 1993, hace más de 4 años, cuando iniciamos nuestra formación y aprendizaje en las técnicas por ordenador aplicadas a la Acústica de Salas.

Gracias a la confianza depositada en nosotros por el Excmo. Cabildo de Tenerife, fuimos partícipes de un acontecimiento que iba a marcar nuestra trayectoria investigadora: se ponía en marcha el ambicioso proyecto del "Auditorio de Tenerife". Como en cualquier sala innovadora de gran presupuesto, un gran número de expectativas, dudas y cuestiones surgían ante la necesidad de predecir, sobre los planos del arquitecto, la calidad acústica del recinto.

Inmediatamente percibimos la existencia de dos maneras totalmente diferentes de operar en esta disciplina científica: a) recurrir a la opinión de especialistas con probada experiencia en el acondicionamiento acústico de salas; b) utilizar las técnicas de simulación por ordenador o de maquetas a escala, para poder reproducir el fenómeno a estudiar y calcular los principales parámetros acústicos objetivos.

La primera opción tuvo que descartarse desde el momento en que encontramos que diferentes empresas acústicas de reconocida valía profesional emitían juicios diferentes sobre las consultas realizadas.

Mucho más interesante nos parecía la segunda opción, aunque presentaba serios problemas. Y el principal de ellos, aparte de la mayor o menor complejidad de las técnicas, era que nadie parecía ponerse de acuerdo sobre la validez de las técnicas de simulación actuales. La situación era todavía más difícil dentro de la variedad de los modelos por ordenador. Incluso dentro de los modelos de Acústica Geométrica, en algunos casos, parecía que el esfuerzo de las casas comerciales parecía más encaminado a la presentación de gráficos espectaculares basados en recetas mágicas, que a la de una simulación seria basada en procedimientos científicos contrastables.

En aquel momento advertimos las serias dificultades que envolvía el problema y, lo que nos parecía más grave, constatamos una ausencia total de estudios serios sobre estimaciones de la validez de los modelos de simulación por ordenador.

### **Sobre los Métodos Computacionales de Simulación**

A diferencia del resto de modelos computacionales, el Método del Trazado de Rayos es el único que presenta un coste computacional tolerable. A cambio, la exactitud de sus resultados viene ligada al número de rayos utilizado en los cálculos.

Desde el punto de vista de la Acústica Ondulatoria, el Método de los Elementos Finitos y el Método de los Elementos de Contorno no pueden aplicarse en el rango de frecuencias de audio medias y altas, debido al elevado número de nodos que requiere una malla suficientemente fina y que cubra el gran volumen de una sala de conciertos. Por lo que respecta a las frecuencias bajas, el nivel de descripción que se necesitaría en las propiedades físicas de los materiales que envuelven las superficies superaría con mucho las posibilidades experimentales de los actuales equipos de medición.

Desde el punto de vista de la Acústica Geométrica, el Método de las Imágenes es un método muy preciso, pero presenta un coste computacional elevadísimo debido a que la generación en el tiempo de fuentes imagen virtuales sigue un proceso exponencial.

Sin embargo, el tiempo de cálculo del Método del Trazado de Rayos es proporcional al número de rayos y al tiempo máximo de la simulación. Aproximadamente, presenta un coste computacional cúbico con el tiempo, proporcional al número de receptores imagen que aparecen en un intervalo de tiempo. Aunque tal vez en el pasado éste era un coste importante, actualmente los ordenadores personales pueden procesar con bastante rapidez las operaciones necesarias para reproducir respuestas impulsivas energéticas de bastante duración.

Otra ventaja importante de este método es que, a diferencia del método de las imágenes, permite modelizar procesos de difusión parciales y totales. Para ello hay que tener en cuenta que cuando un rayo sufre una reflexión difusa, la energía de la que es portadora pasa a formar parte de la energía difusa de la sala. Por supuesto, mucho más exacto sería un modelo de difusión basado en el fraccionamiento de la energía del rayo incidente en otros rayos de energía más pequeña, pero esto significaría un coste computacional exponencial imposible de tratar.

### **Sobre la Validación de los Programas de Simulación**

El programa ha sido sometido a comprobación en varios problemas teóricos y, en todas las pruebas planteadas, ha generado resultados correctos. Tanto en el cálculo de tiempos de reverberación como en el cálculo de parámetros de estructura fina, el modelo de simulación se ha comportado tal como cabía esperar.

Somos conscientes de la dificultad que entraña la validación de un modelo de simulación. Y reconocemos que, en un primer momento, estuvimos tentados de cumplir este propósito comparando los resultados del modelo con las correspondientes medidas experimentales. Pero pronto advertimos que ésta no era la manera correcta de operar, por la sencilla razón de que el modelo se basa en las hipótesis de la Acústica Geométrica, mientras que la realidad del

campo sonoro se apoya en las bases de la Teoría Ondulatoria. Aunque los resultados iniciales fueron bastante satisfactorios, como comprobamos en el caso del "Terrero de Santa Úrsula", vimos que para conseguir una verificación estricta de las cualidades de nuestro modelo no debíamos olvidar cuál era el auténtico *referente de validación* en las simulaciones del modelo.

Es muy importante resaltar que la técnica del trazado de rayos se basa en un modelo numérico para simular el campo sonoro según la Teoría de la Acústica Geométrica. Y por ello, para validar la calidad de la simulación deberemos comparar los resultados del modelo con los resultados teóricos que se obtendrían según la Acústica Geométrica. No se trata de comparar el modelo con medidas experimentales, al menos en la etapa de validación, sino de aplicar unos robustos tests que determinen, sin dejar lugar a dudas, cuál es la calidad de los resultados de la simulación.

Por supuesto, tal como indican muchos de los autores consultados, en la mayoría de los casos las diferencias entre los resultados de las medidas experimentales y de la Acústica Geométrica son muy pequeñas y, principalmente en frecuencias altas, esta teoría es aplicable. Pero tomar como referente de validación las medidas experimentales nos llevaría por un camino muy diferente que no es el objetivo de este trabajo y que emplazamos para más adelante: estudiar el rango de aplicación y la validez de la Acústica Geométrica.

### **Sobre la Naturaleza Estadística del Método del Trazado de Rayos**

La técnica del trazado de rayos permite obtener un diagrama de la variación de la intensidad sonora respecto al tiempo para un receptor. A través del modelo de "espacio de receptores imagen", podemos darnos cuenta de que este diagrama está compuesto por la energía de un número aleatorio de rayos que penetran en los receptores imagen.

Estrictamente, los rayos son *variables estadísticas* cuyo valor de intensidad en cada intervalo de tiempo toma distintos valores alrededor de una media, con una varianza determinada y con una cierta función de densidad de probabilidad.

Así pues, el método del trazado de rayos es un método de naturaleza estadística, más concretamente una forma del método de Monte Carlo, que se aplica para calcular los valores de la curva de decaimiento sonoro en sucesivos intervalos de tiempo comprendidos entre un tiempo inicial y final.

Dado que los resultados de un experimento de Monte Carlo también son variables estadísticas ya que toman diferentes valores en diferentes ejecuciones, es necesario conocer su valor medio y su desviación estándar para poder caracterizarlos.

En la bibliografía consultada se han encontrado dos maneras diferentes de caracterizar estos resultados: a) repetir el experimento para diferentes bloques de rayos iniciales de igual tamaño y evaluar el valor medio de los experimentos con su correspondiente desviación estándar, y b) repetir el experimento para diferentes bloques de rayos iniciales de tamaño cada vez mayor y esperar una convergencia suficiente en los resultados.

En nuestra opinión, la primera forma de operar requiere un esfuerzo computacional elevadísimo, debido a que se necesita la obtención de numerosas diferentes soluciones del programa. La segunda, además de costosa, se trata sólo de una forma cualitativa de analizar la credibilidad de los resultados porque, en realidad, no se puede extrapolar el grado de precisión de la simulación a partir de un reducido número de soluciones.

### **Sobre el Error del Método del Trazado de Rayos en la Determinación de la Respuesta Impulsiva**

En esta memoria de tesis doctoral presentamos el trabajo original del desarrollo de una metodología que permite evitar los costosos tests de convergencia habituales. A partir de la información suministrada por los rayos generados según una fuente de tipo aleatorio, es posible cuantificar en cada momento del proceso (número de rayos procesados) y en una sola ejecución, el error asociado al número finito de rayos en el cálculo de la respuesta impulsiva y de los principales parámetros objetivos.

El error del Método del Trazado de Rayos en la determinación de la respuesta impulsiva en un receptor está directamente relacionado con la *varianza de la distribución direccional dependiente del tiempo de la intensidad sonora  $I_t(\mathbf{q}, \mathbf{j})$* .

Ésta es una función escalar de variable vectorial. El conjunto de valores que puede tomar, su conjunto imagen, determina unas magnitudes integrales totalmente exactas, como pueden ser la intensidad total recibida en el receptor, la intensidad media en el receptor por unidad de ángulo sólido o la desviación típica de la función respecto a su media.

El Método de Monte Carlo permite el cálculo de estas magnitudes a través de diferentes estimadores muestrales, principalmente, la media muestral y la varianza muestral.

El estimador media muestral es un estadístico que se distribuye normalmente alrededor de la media teórica con una varianza proporcional a la varianza de la distribución direccional de la intensidad sonora e inversamente proporcional al número de muestras.

El hecho de identificar la causa del error de las estimaciones del método del trazado de rayos, la varianza de la distribución direccional de la intensidad sonora, permite establecer una serie



de hechos y recomendaciones que hay que tener en cuenta a la hora de realizar una simulación.

**A.** *El error relativo de las estimaciones se mantiene constante con el tiempo para salas sin absorción y aumenta con el tiempo en salas con absorción.*

**A1.** Para salas con coeficientes de absorción igual a cero en todas las superficies, el error estadístico se mantiene constante con el tiempo porque la fracción de ángulo sólido que subtende el espacio de receptores imagen no varía con el tiempo.

Para este tipo de salas, la desviación estándar propuesta por Kullowski indicaría un error igual a cero ya que todos los rayos tienen la misma energía. Esto pone en evidencia que dicha desviación no debe considerarse como error de la estimación pues, como sabemos, el error sólo es cero para un número infinito de rayos.

**A2.** Para salas con coeficiente de absorción homogéneo aumenta el error relativo. Cuando existe absorción en las reflexiones se da un aumento de la varianza de la distribución direccional de la intensidad sonora, principalmente influido por la *geometría* de la sala que determina la existencia de direcciones con diferentes número de reflexiones y, por lo tanto, diferentes valores de energía en los rayos. Se ha comprobado de forma empírica que en la sala rectangular con absorción homogénea el error relativo aumenta de forma lineal.

**A3.** Para salas con distribución de absorción no homogénea existe una creciente dispersión de los valores de energía de los rayos con el tiempo y el error estadístico relativo aumenta. De cualquier modo, y como hemos comprobado en el "Auditorio de Tenerife" (Capítulo 7), los valores del error relativo de la intensidad se encuentran en valores aceptables para poblaciones de rayos normales y, en absoluto, crece tanto como el artículo de Kullowski parece sugerir.

**A4.** Para cualquier tipo de sala en general, la *escasez de imágenes* característica de los primeros intervalos de tiempo, es la causa de un error *transitorio* incluso mayor que el que se obtiene en intervalos posteriores. La varianza relativa de la función de distribución es grande en los intervalos iniciales debido a que en la mayor parte de ángulos sólidos la función es cero, mientras que donde no es nula, alcanza valores relativamente elevados.

- B.** *El error relativo de las estimaciones aumenta cuando disminuye el radio del receptor.*

La fracción de ángulo sólido que subtienden las imágenes del receptor es menor y el error relativo aumenta, tal como demostramos en la expresión (4.88.) del Apartado 4.6.2.

- C.** *El error relativo de las estimaciones aumenta si lo hace la absorción de la sala.*

La varianza de la distribución direccional de la intensidad sonora se ve muy influida por la aparición de imágenes de receptor con valores de intensidad muy dispares.

**C1.** Aunque la sala presente una distribución espacial de absorción homogénea el error relativo de las estimaciones aumenta si aumenta la absorción de la sala. La *geometría* de la sala define direcciones con diferentes números medios de reflexiones lo que favorece la aparición de imágenes de receptor con valores de intensidad muy diferentes.

**C2.** Si la distribución de absorción es no homogénea, el error relativo será mucho mayor que en el caso contrario porque, independientemente del efecto que pueda tener la geometría, desde el primer momento las imágenes del receptor se encuentran dotadas de valores muy diferentes de intensidad.

**C3.** Por extensión de los dos puntos anteriores, salas con bajos tiempos de reverberación (absorción alta) presentan una mayor dificultad de muestreo y, por lo tanto, una mayor indeterminación en los resultados.

- D.** *El error relativo de las estimaciones aumenta al disminuir el tiempo de integración.*

La disminución del tiempo de integración tiene un efecto muy negativo en el error de las estimaciones del método. Esto es debido a que dicha disminución permite capturar menos rayos en el receptor (el promedio temporal es más pequeño) y empeora la estadística del método.

### **Sobre el Error del Método en la Determinación de Parámetros Objetivos.**

Por primera vez en el campo de las simulaciones por ordenador de acústica de salas podemos ofrecer estimaciones de los principales parámetros objetivos con una cota de su precisión o

error. Si nos restringimos al modelo de *trazado de rayos puro* hemos demostrado que es posible determinar la confianza y credibilidad de los resultados.

A través de la varianza de la distribución direccional dependiente del tiempo de la intensidad sonora, cualquier programa de trazado de rayos puro puede "tranquilizar" a sus usuarios ofreciendo una estimación del nivel de error asociado al número de rayos empleado.

Hay que señalar que el carácter mixto de los modelos híbridos (imágenes más rayos) o la excesiva simplificación de los modelos de haces divergentes (rayos cónicos) puede dificultar el cálculo de este error. En el caso de los modelos híbridos, tal vez pudiese aplicarse el método a partir de aquellos intervalos en los que el método de las imágenes no puede dar información. En el caso de los modelos de haces divergentes, como señalamos en el Capítulo 2., la simplificación que supone reflejar los haces como rayos significa alejarse bastante del referente teórico del problema.

Todas las conclusiones obtenidas en el Capítulo 4. sobre cómo influye el radio del receptor, la absorción de la sala, o el paso del tiempo pueden aplicarse también para el cálculo del error en parámetros integrales.

Para validar la teoría expuesta, hemos medido experimentalmente en una sala rectangular la desviación típica de los resultados de los parámetros *SPL* y *D*.

Para 25.000 rayos, los valores del parámetro *SPL* presentan una desviación relativa del 7%, y los del parámetro *D* una desviación relativa del 30%. Estos niveles descienden al 2% y al 6% respectivamente cuando se utilizan 400.000 rayos.

La expresión teórica de la varianza y del error que hemos propuesto reproduce estos valores con bastante aproximación, lo que refuerza nuestra confianza en la validez de la teoría expuesta.

Por último, cabe recalcar la gran ventaja que supone implementar esta medida del error en los programas de simulación. En una sola ejecución, disponemos de la información necesaria para asegurarnos una importante confianza en los resultados obtenidos o, por el contrario, alertarnos sobre la insuficiencia del número de rayos utilizados en la simulación.

**REFERENCIAS  
BIBLIOGRÁFICAS**

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- ABDOU, A. AND GUY, R.W., 1996.- "Spatial Information of Sound Fields for Room-Acoustics Evaluation and Diagnosis".- *Journal of the Acoustical Society of America*, **100**(5), pp. 3215-3227.
- ANDO, Y., 1985.- *Concert Hall Acoustics*.- Springer-Verlag. Germany.
- ANDREWS, L.C. AND SHIVAMOGGI, B.K., 1988 .- *Integral Transforms for Engineers and Applied Mathematicians*. MacMillan Publishing Company. New York.
- ARANA, M., Y VELA, A., 1994.- "Medidas de Parámetros Acústicos del Polideportivo de la Universidad de Navarra. Modelización y Ajuste con Resultados Experimentales". *Jornadas Nacionales de Acústica "Técniacústica 94"*, Valencia, pp. 157-160.
- BARRON, M. AND MARSHALL, A.H., 1981.- "Spatial Impression Due to Early Lateral Reflections in Concert Halls: the Derivation of a Physical Measure".- *Journal of Sound and Vibration* **77**(2), pp. 211-232.
- BERANEK, L.L., 1992.- "Concert Hall Acoustics".- *Journal of the Acoustical Society of America*, **92**, pp. 1-39.
- BERANEK, L.L. AND VER, I. 1992.- *Noise and Vibration Control Engineering. Principles and Applications*.- John Wiley & Sons, Inc. New York.
- BORISH, S., 1984.- "Extension of the Image Model to Arbitrary Polyhedra".- *Journal of the Acoustical Society of America*, **75** (6), pp. 1827-1836.
- BREKHOVSKIKH, L. AND GONCHAROV, V., 1985.- *Mechanics of Continua and Wave Dynamics*.- Springer-Verlag. Germany.
- CREMER, L. AND MÜLLER, H.A., 1982.- *Principles and Applications of Room Acoustics*.- Applied Science Publishers Ltd. England.
- DALENBÄCK, B.I., 1995.- "The Importance of Diffuse Reflection in Computerized Room Acoustic Prediction and Auralization".- *Proceedings of the Institute of Acoustics*, Vol. **17**: Part 1, 27-34.

- DAVIES, W.J., COX, T.J., AND LAM, Y.W., 1996.- "Subjective Perception of Seat Dip Attenuation".- *Acustica* **82**, n. 5, pp. 784-792.
- EMBRECHTS, J.J., 1982.- "Sound Field Distribution Using Randomly Traced Sound Ray Techniques".- *Acustica*, Vol. **51**, pp. 288-295.
- FARINA, A., 1995.- "Verification of the Accuracy of the Pyramid Tracing Algorithm by Comparison with Experimental Measurements of Objective Acoustic Parameters".- 15th International Congress on Acoustics, Trondheim, Norway, pp. 445-448.
- GINER, J., MILITELLO, C. Y CAPUJ, N., 1994.- "Ray Tracing para el Comportamiento Acústico de Salas".- *Revista de Acústica*, Vol. XXV, nums. 3 y 4, pp. 11-13.
- GINER, J., Y MILITELLO, C., 1995.- "Condiciones Acústicas de los Terreros de Lucha en Tenerife. Simulación Numérica de la Introducción de Electroacústica." *Tecniacústica* 95, Jornadas Nacionales de Acústica, La Coruña, pp. 23-26
- GINER, J., Y MILITELLO, C., 1996.- "Ray Tracing for Room Acoustics. Experiences and New Possibilities".- *Proceedings of Forum Acusticum 1996*, Antwerpen, Belgium.
- GLASSNER, A., 1993.- *An Introduction to Ray Tracing*.- Academic Press Limited.
- HAVILAND, J.K. AND THANEDAR, B.D., 1973.- "Monte Carlo Applications to Acoustical Field Solutions".- *JASA*, Vol. **54**, No. 6, pp. 1442-1448.
- HEINZ, R., 1993.- "Binaural Room Simulation Based on a Image Source Model with Addition of Statistical Methods to Include the Diffuse Sound Scattering of Walls and to Predict the Reverberant Tail".- *Applied Acoustics*, **38**, 145-160.
- HIDAKA, T., BERANEK, L.L., AND OKANO, T., 1995.- "Interaural cross-correlation, lateral fraction, and low-high frequency sound levels as measures of acoustical quality in concert halls".- *Journal of the Acoustical Society of Am.*, **98** (2), pp. 988-1007.
- JORDAN, V.L., 1970.- "Acoustical Criteria for Auditoriums and Their Relation to Model Techniques".- *JASA*, Vol. **47**, No. 2 (Part 1), pp. 408-412.
- JORDAN, V.L., 1980.- *Acoustical Design of Concert Halls and Theatres*.- Applied Science Publishers Ltd. England.

- JORDAN, V.L., 1981.- "A group of objective acoustical criteria for concert halls".- Applied Acoustics **14**, pp. 253-266.
- JOYCE, W.B., 1975.- "Sabine's reverberation time and ergodic auditoriums".- JASA, **58**, 643-55.
- JURICIC, H. ET SANTON, F., 1973.- "Images et rayons sonores dans le calcul numérique des échogrammes".- Acustica, Vol. **28**, pp. 77-89.
- KALOS, M.H. AND WHITLOCK, P.A., 1986.- *Monte Carlo Methods*.- Wiley and Sons. New York.
- KINSLER, L., 1992.- *Fundamentos de Acústica*. Limusa S.A. México.
- KLEINER, M., DALENBÄCK, B.I. AND SVENSSON, P., 1993.- "Auralization - An Overview".- J. Audio Eng. Soc., Vol. **41**, No. 11, pp. 861-875.
- KNUDSEN, V.O., 1970.- "Model Testing of Auditoriums".- JASA, Vol. **47**, No. 2 (Part 1), pp. 401-407.
- KRISTIANSEN, U.R., KROKSTAD, A., AND FOLLESTAD, T, 1993.- "Extending the Image Method to Higher-Order Reflections".- Applied Acoustics, **38**, pp. 195-206.
- KROKSTAD, A., STROM, S. AND SORSDAL, S., 1968.- "Calculating the Acoustical Room Response by the use of a Ray Tracing Technique".- Journal of Sound Vibration **8** (1), pp. 118-125.
- KULLOWSKI, A., 1982.- "Error Investigation for the Ray Tracing Technique".- Applied Acoustics **15**, pp. 263-74.
- KULLOWSKI, A., 1984.- "Algorithmic Representation of the Ray Tracing Technique".- Applied Acoustics, **18**, pp. 449-469.
- KUTTRUFF, H., 1979.- *Room Acoustics*.- 2nd ed. Applied Science Publishers Ltd. England.
- KUTTRUFF, H., 1995.- "Sound Field Prediction in Rooms".- 15th International Congress on Acoustics, Trondheim, Norway, pp. 26-30.

- LAM, Y.W., 1996a.- "A comparison of three diffuse reflection modeling methods used in room acoustics computer models."- JASA, vol. **100** num. 4, pp. 2181-2193.
- LAM, Y.W., 1996b.- "The dependence of diffusion parameters in a room acoustics prediction model on auditorium sizes and shapes."- JASA, vol. **100** num. 4, pp. 2193-2204.
- LANDAU, L.D. Y LIFSHITZ, E.M., 1991.- *Mecánica de Fluidos*.- Editorial Reverté, S.A. Barcelona.
- LEHNERT, H. AND BLAUERT, J., 1992.- "Principles of Binaural Room Simulation".- Applied Acoustics, Vol. **36**, Nos. 3 & 4, pp. 259 - 291.
- LEONATO, P. (INGECIBER, S.A.) 1994.- "Aplicaciones del método del haz cónico en Acústica Arquitectónica, Industrial y Medio Ambiental." Jornadas Nacionales de Acústica "Tecniacústica 94", Valencia.
- LEWERS, T., 1993.- "A Combined Beam Tracing and Radiant Exchange Computer Model of Room Acoustics".- Applied Acoustics, **38**, pp. 161-178.
- LLINARES, J., LLOPIS, A., Y SANCHO, J., 1991.- *Acústica Arquitectónica y Urbanística*.- Servicio de Publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia, SPUPV-91.640. Valencia.
- LÓPEZ, M., 1988.- *Fundamentos y Métodos de Estadística*.- Ediciones Pirámide. Madrid.
- MAERCKE, D. VAN & MARTIN, J., 1993.- "The prediction of echograms and impulse responses within the Epidaure Software".- Applied Acoustics, **38**, pp. 93-114.
- MAKRINENKO, L. I., 1994.- *Acoustics of Auditoriums in Public Buildings*.- Acoustical Society of America. USA.
- MORSE, P. M., 1948.- *Vibration and Sound*.- Ed. Mc Graw-Hill Book Company, Inc. USA.
- NAYLOR, G.M., 1993.- "ODEON-Another Hybrid Room Acoustical Model".- Applied Acoustics, **38**, pp. 131-143.
- ONDET, A. AND BARBRY, J., 1989.- "Modelling of Sound Propagation in Fitted Workshops using Ray-Tracing".- Journal of the Acoustical Society of America, **85** (2), pp. 787-96.



- PEÑA, D., 1992.- *Estadística. Modelos y Métodos*. Alianza Editorial. Madrid.
- POLACK, J.D., 1992.- "Modifying the chambers to play billiards, or the foundations of reverberation theory."- *Acustica*, **76**, 257-72
- PRESS, W.H., TEUKOLSKY, S.A., VETTERLING, W.T., FLANNERY, B.P., 1992.- *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing*.- 2nd Ed. Cambridge University Press. New York.
- RAYLEIGH, W., 1894.- *The Theory of Sound*.- Edición de 1945. Dover Publications, Inc. New York.
- RECUERO, M., 1983.- *Teorías Básicas para el Estudio de la Acústica de Recintos*. Departamento de Publicaciones de la E.U.I.T. de Telecomunicaciones de Madrid.
- RECUERO, M., 1992.- *Acústica Arquitectónica. Soluciones Prácticas*. Ed. Paraninfo. Madrid.
- RECUERO, M., 1995.- *Ingeniería Acústica*. Ed. Paraninfo. Madrid.
- SANTON, F., 1976.- "Numerical Prediction of Echograms and of the Intelligibility of Speech in Rooms"-. *JASA*, Vol. **59**, No. 6, pp. 1399-1405.
- SANTON, F., 1980.- "Traitement Acoustique de trois salles à partir d'une méthode de rayons"-. *Acustica*, Vol. **44**, pp. 46-50.
- SCHROEDER, M.R., 1965; "New Method of Measuring Reverberation Time"-. *Journal of the Acoustical Society of America*, **37**, pp. 409-412.
- SCHROEDER, M.R., 1970.- "Digital Simulation of Sound Transmission in Reverberant Spaces", *JASA*, Vol. **47**, No. 2 (Part 1), pp. 424-431.
- UNE 74-043-87.- "Medida del tiempo de reverberación de auditorios"-. Norma Internacional: ISO 3382. AENOR, 1987.
- VELA, A., 1996.- *Análisis de diferentes métodos de evaluación de la calidad acústica de un local. Aplicación al Teatro Gayarre de Pamplona*.- Tesis Doctoral de la Universitat de València.

VERBRANDT, F. AND JONCKHEERE, R.E., 1989.- "Computer Analysis of Sound Distribution in Coupled Spaces Using the Ray Tracing Technique".- Proceeding 8th FASE 1989, Zaragoza (Spain), pp. 283-286.

VORLÄNDER, M., 1989.- "Simulation of the transient and steady-state sound propagation in rooms using a new combined ray-tracing/image-source algorithm".- JASA, **86** (1), pp. 172-88.

ZIENKIEWICZ, O.C., 1977.- *The Finite Element Method*.- McGraw-Hill, London.