Curso 2010/11
CIENCIAS Y TECNOLOGÍAS/12
I.S.B.N.: 978-84-15287-33-9

JOSEFA PERDOMO DÍAZ

Construcción del concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria en escenarios de resolución de problemas

Directores
MATÍAS CAMACHO MARTÍN
L. MANUEL SANTOS TRIGO

SERVICIO DE PUBLICACIONES
UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

SOPORTES AUDIOVISUALES E INFORMÁTICOS
Serie Tesis Doctorales

A mis padres y hermanos.
A Jorge.
A Tata.
A Juan y Daniela.

En memoria de las sonrisas de
Mis abuelos,
René Letelier,
Fuensanta Andreu
Gregorio Gómez Perdomo

Agradecimientos

Quiero mostrar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que han estado a mi lado y han colaborado en el desarrollo de este trabajo.

Agradezco a mis directores, D. Matías Camacho Machín y D. L. Manuel Santos Trigo, el tiempo que me han dedicado, los conocimientos que me han transmitido y, sobre todo, la paciencia que han tenido conmigo.

El segundo lugar en los agradecimientos debe ocuparlo el grupo de estudiantes que participaron en esta investigación, especialmente los que nos dedicaron parte de su tiempo libre (Jordan, Stella, Wanda, Milagros, Silvia, Mar, Virginia, Alexis, Zoraida, Manuel y Alba). También a sus profesores, por facilitarnos el acceso a ellos y colaborar de manera desinteresada.

A Fernando Barrera, Ramón Depool, Carolina Guerrero, Fernando Hitt y Mireia Saboya por las discusiones que hemos mantenido, fruto de las cuales han surgido algunas de las ideas que aparecen en este documento.

A los profesores del área de Didáctica de las Matemáticas del Departamento de Análisis Matemático de esta Universidad, por el apoyo mostrado en todas las etapas de esta investigación. También a los compañeros de travesía Alexandre, Marta, Alejandro, Raquel, María, Israel y Noemi.

A Pablo Lorenzo por la ayuda en los aspectos burocráticos y tecnológicos.

A Jorge, Eugenio, Macu, Jose, Carolina Guerrero, Bea, Julio R., Raúl F., Pepe S., Fernando Q., Manuel H., Helena, Mazón y todos los “psicólogos” que me han atendido en los momentos críticos.

A Emeterio, Rafa, Erika, Fran, Fernando y Naira por seguir brindándome su amistad a pesar del abandono.

A toda mi familia, a Lala, Agapito, Juani, Chevo, Sheila e Irene y a todas aquellas personas que se han interesado por mi trabajo o que simplemente me han dedicado una sonrisa en los pasillos (¡seguro que eres uno de ellos!).

A Amalia Barreto, por su colaboración como becaria, en la realización de algunas de las trascripciones que ocupan el anexo de esta memoria.

Índice

Introducción

Distintas investigaciones en el campo de la Educación Matemática han revelado un conjunto de dificultades con las que los estudiantes se han encontrado en el proceso de aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). Se pueden citar, entre otras: dificultades para interpretar correctamente la definición formal del concepto de solución y presentar ejemplos (Raychadhuri, 2008; Villar-Liñan & Llinares-Ciscar, 1996), dificultades al analizar el comportamiento de las funciones solución cuando estas vienen expresadas de forma implícita (Artigue, 1992), errores al considerar que las soluciones de equilibrio son todas las expresiones que anulen la derivada, sean o no solución de la EDO, o problemas al relacionarlas (en el caso de las ecuaciones diferenciales autónomas) con valores numéricos y no con funciones (Guerrero, Camacho & Mejía, 2010; Rasmussen, 2001; Zandieh & McDonald, 1999). También existe relación entre la búsqueda de algoritmos y el fracaso de los estudiantes a la hora de realizar tareas en las que se requiere el uso de diferentes sistemas de representación (Artigue, 1992; Guerra-Cáceres, 2003; Habre, 2000; Rasmussen & Kwon, 2007) o el uso de conceptos de otras áreas de las matemáticas como el álgebra lineal (Rasmussen & Blumenfeld, 2007; Rasmussen & Keynes, 2003; Trigueros, 2004).

¿Dónde puede estar el origen de dichas dificultades? ¿es único o puede ser la conjunción de diferentes elementos? ¿qué se puede hacer al respecto?

El concepto de EDO está estrechamente relacionado con el concepto de derivada de una función, hasta el punto de poder considerarse como uno de los usos que conforman la red de significados asociados al concepto de derivada. Por otra parte, el concepto de derivada de una función ha sido uno de los principales temas de investigación en la línea del Pensamiento Matemático Avanzado (Artigue, 2001) y existe una amplia variedad de trabajos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de este concepto, así como las dificultades que surgen en su tratamiento. Resulta natural, entonces, pensar que parte de las dificultades de aprendizaje relacionadas con las EDO puedan estar relacionadas con la concepción y conocimientos que poseen los estudiantes sobre la derivada.

La investigación que se presenta en esta memoria está dividada en dos fases. El objetivo de la primera fase es analizar los conocimientos que los estudiantes universitarios muestran al responder preguntas y resolver problemas relacionados con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, después de haber recibido una enseñanza del concepto que comienza con la definición formal del mismo, continúa con la clasificación y posterior resolución de las ecuaciones con el método algebraico correspondiente y finaliza con un apartado dedicado a las aplicaciones. Los resultados de esa primera fase revelan que, efectivamente, se produce una discontinuidad en el aprendizaje de las matemáticas en este tipo de cursos, entre otras cosas, parece que este enfoque no favorece el establecimiento de relaciones entre el concepto de derivada y el de EDO (Camacho-Machín, Perdomo-Díaz & Santos-Trigo, 2010).

El análisis realizado permite concluir que es importante establecer conexiones entre los conceptos matemáticos, los procedimientos, la resolución de problemas o los procesos de reflexión y abstracción para que el aprendizaje se produzca de forma eficiente, en el sentido de que resulten de él conocimientos útiles para continuar con el proceso de construcción de los conocimientos matemáticos (Kilpatrick, Swafford & Findell, 2009).

Además, si nos preguntamos qué modelo de enseñanza puede favorecer que se establezcan estas conexiones entre los factores que intervienen en el aprendizaje, la Resolución de Problemas puede resultar un enfoque de enseñanza que promueva que los estudiantes consideren las matemáticas como una disciplina activa, contribuya a que se establezcan relaciones entre distintos elementos matemáticos, favorezca que el estudiante desarrolle habilidades fundamentales para las matemáticas, como examinar, representar, transformar, resolver y aplicar y se ejercite en el uso de procesos asociados al Pensamiento Matemático Avanzado como abstraer, analizar, categorizar, conjeturar, generalizar o sintetizar (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2009). Una enseñanza basada en la Resolución de Problemas contribuirá a desarrollar la competencia matemática de los estudiantes, ayudando a establecer relaciones entre los componentes descritos por Kilpatrick et al. (2009) para desarrollar lo que denomina *Mathematical Proficiency*[1]. Esos elementos comprenden la comprensión conceptual, fluidez en los procedimientos, la competencia estratégica, el razonamiento adaptativo y la predisposición productiva.

La segunda fase de esta investigación tiene como objetivo el diseño y el desarrollo en el aula de un Módulo de Enseñanza dirigido a estudiantes de primer curso de la licenciatura en Química, en el que se introducen las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en un ambiente de Resolución de Problemas, así como el análisis de los aspectos del pensamiento matemático y los procesos relacionados con la comprensión conceptual que los estudiantes muestran durante la implementación del Módulo de Enseñanza.

Esta memoria está estructurada en seis capítulos y dos anexos. El primero de los anexos (anexo A) se encuentra al final de este documento y está formado por tres de los instrumentos utilizados para recoger la información: dos cuestionarios (C-EDO y C-D) y el Módulo de Enseñanza. Se estimó conveniente añadir estos anexos al documento escrito debido a las continuas referencias que se hace a ellos a lo largo del texto. En el CD adjunto se encuentra, además de una copia de esta memoria, el anexo B, que incluye la documentación escrita por los estudiantes, las trascripciones de las grabaciones de las entrevistas y de las sesiones de clase dedicadas a la implementación del Módulo de Enseñanza y algunas tablas diseñadas para mostrar la información de manera sintetizada.

A continuación se describirán capítulo a capítulo los contenidos de la Memoria.

En el capítulo 1 se delimita el Problema de Investigación y se sitúa dentro del marco de la investigación en Educación Matemática, estableciéndose las características del estudio realizado y los objetivos que se persiguen. Además, se enuncian las preguntas de investigación y se describe el proceso seguido para responderlas. Este capítulo finaliza con la revisión de los trabajos de investigación publicados en los últimos años, relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales. Se presentan, en primer lugar, aquellos resultados que muestran las dificultades que se han encontrado, relacionadas con distintos aspectos de las Ecuaciones Diferenciales: las

[1] *Mathematical Proficiency* es el término que utiliza el National Research Council (NRC) para referirse a lo que en esta Memoria se denomina Competencia Matemática.

soluciones de equilibrio, el uso del campo de direcciones, la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales, entre otros. Para finalizar, en un apartado específico, se describe el proyecto IO-DE (Inquiry-Oriented Differential Equations) cuya propuesta de enseñanza se basa en el hecho de que las actividades que se propongan a los estudiantes deben resultarles reales, en el sentido de la Educación Matemática Realista[2], y debe crearse un ambiente de aprendizaje en el que los estudiantes puedan reinventar ideas y métodos matemáticos importantes a la vez que resuelven problemas y explican su razonamiento (Rasmussen & Ruan, 2008). Las investigaciones realizadas en el marco de este proyecto han producido numerosos y variados trabajos en los últimos años, que serán descritos en la sección 1.4.2.

El Marco Conceptual, formado por los elementos teóricos que sustentan esta investigación, se describe en el capítulo 2 de esta memoria. En él se exponen y detallan los componentes que intervienen en el desarrollo del aprendizaje de las matemáticas, los fundamentos que conducen a tomar determinadas decisiones en lo relativo al diseño del material utilizado en el experimento de enseñanza y aquellos que sirven de guía para el análisis de los datos recabados a partir de dicha experiencia. Se toman los cinco componentes del aprendizaje descritos por Kilpatrick et al. (2009), en conjunción con los conocimientos, heurísticas, estrategias de control y creencias, propuestos por Schoenfeld (1992), y la teoría de las representaciones (Hiebert & Carpenter, 1992; Duval 1993) como referente para el diseño del Módulo de Enseñanza y el análisis del conocimiento de los estudiantes. Las trayectorias de aprendizaje (Simon & Tzur, 2004) constituyen también un elemento importante para el análisis de las competencias de los estudiantes. Como escenario para el desarrollo del Módulo de Enseñanza se eligió la Resolución de Problemas, enfoque que promueve que los estudiantes consideren las matemáticas como una disciplina activa, ofrece oportunidades para establecer relaciones entre distintos elementos matemáticos y contribuye a que el estudiante desarrolle habilidades y procesos del pensamiento matemático (NCTM, 2009). La tecnología se considera un elemento de apoyo al desarrollo del aprendizaje de las matemáticas, permitiendo a los estudiantes acceder a distintos recursos, lo que puede contribuir al uso de estrategias de resolución y facilitar que el alumno explore sus ideas y pruebe sus conjeturas (Santos, 2007). En esta investigación se seleccionó la calculadora simbólica Voyage™200 como herramienta tecnológica. Por último, es necesario incorporar al Marco Conceptual un elemento que refleje la naturaleza de las matemáticas como actividad social, considerándose en este caso las interacciones que se producen entre cada estudiante y sus compañeros, los profesores, el Módulo de Enseñanza y la Voyage ™200.

En el capítulo 3 se describe la Metodología de la investigación, que responde a los estándares propios de una investigación cualitativa. Se presentan los elementos particulares de cada una de las dos fases en que se divide esta investigación: participantes, escenario en el que se ha desarrollado la investigación e instrumentos de recopilación de datos utilizados, proceso seguido para analizar los datos obtenidos y los criterios de validez que avalan los resultados mostrados en cada una de las fases de la investigación. En la sección 3.3.3 de este capítulo se describe en detalle el Módulo de Enseñanza diseñado para introducir el concepto de EDO, compuesto por tres problemas denominados *Desintegración del uranio, Contaminación de mercurio y Dinámica de poblaciones.*

[2] Traducción de “Realistic Mathematics Education” que se utilizará en esta memoria.

Los dos capítulos siguientes están dedicados al análisis de los datos obtenidos durante la investigación. En el capítulo 4 se presenta el análisis correspondiente a la primera fase de la investigación que mostrará cómo un grupo de estudiantes de las licenciaturas en Física y Matemáticas utiliza sus conocimientos matemáticos para resolver problemas que involucran conceptos y significados fundamentales relacionados con las EDO y permitirá identificar algunos elementos que influyen en la aparición de dificultades durante la resolución de dichas actividades.

El capítulo 5 está dedicado al análisis de la información obtenida en la segunda fase de la investigación, que ha sido dividido en tres partes principales. En primer lugar se analizan e interpretan las respuestas de los estudiantes que participaron en esta fase de la investigación (alumnos de un primer curso de la licenciatura en Química) a un cuestionario cuyas preguntas giran en torno a diferentes significados que se pueden asociar al concepto de derivada de una función. Este análisis se toma como punto de partida para interpretar la forma en que estos alumnos resuelven los problemas del Módulo de Enseñanza. De este último aspecto se realizaron dos análisis: uno global, en el que se describe el desarrollo de cada uno de los tres problemas del Módulo de Enseñanza, por parte de todos los estudiantes que participaron en esta fase (seis parejas y un trío); y un análisis local, en el que se detallan y analizan las rutas o trayectorias de aprendizaje seguidas por cuatro parejas, seleccionadas atendiendo a diferentes criterios. En este último análisis, se incorporan algunas aportaciones proporcionadas por una serie de entrevistas, basadas en la resolución de un problema adicional (*Investigaciones policiales*) realizadas a seis de los estudiantes.

En el capítulo 6 se presentan las conclusiones obtenidas a partir del análisis, organizadas en torno a las preguntas de investigación. El Marco Conceptual, descrito en el capítulo 2, y el análisis de los datos presentado en los capítulos 4 y 5, permiten realizar la interpretación de dichos datos. Se incluyen en este capítulo las aportaciones que esta investigación hace al campo de la Educación Matemática, en particular a la enseñanza y el aprendizaje de las EDO, y las limitaciones de la misma, así como las perspectivas que se plantean para investigaciones futuras.

Finaliza la memoria con el listado de las referencias utilizadas en su redacción.

1. Problema de Investigación

En este capítulo se establece el Problema de Investigación y se sitúa dentro del marco de la investigación en Educación Matemática, en general, y en el contexto de las investigaciones existentes en relación con la enseñanza y el aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, en particular, estableciéndose las delimitaciones de la investigación realizada. Además se formulan las preguntas de investigación y se describen las rutas seguidas para darles respuesta. En la última sección se revisan diferentes trabajos de investigación relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las EDO, en particular el proyecto IO-DE (Inquiry-Oriented Differential Equations).

1.1 Investigación en Educación Matemática en el nivel universitario.

Las investigaciones en el campo de la Educación Matemática han ido evolucionando y especializándose cada vez más, debido, en parte, a que la manera en que se conciben hoy día las matemáticas, y por tanto su aprendizaje, no es la misma que hace unos años. Esta disciplina ha pasado de ser considerada un sistema de definiciones, reglas y procedimientos, a ser definida como ciencia de los patrones, incluyendo distintos tipos de razonamiento como la modelación o la abstracción y el reconocimiento de que el conocimiento matemático se construye dentro de una comunidad que promueva y valore la participación y colaboración entre sus miembros (Schoenfeld, 1992). De esta forma, las matemáticas se han ido convirtiendo en una actividad social y de colaboración. En este sentido, Bishop (2000) señala que

> Son muchas las variables que se combinan y que hacen que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas sea algo mucho más complejo. La complejidad a la que nos enfrentamos en el momento actual representa un reto mucho mayor que el que vivieron los educadores en el pasado. (p.7)

La complejidad de la enseñanza y el aprendizaje indicada está relacionada, por ejemplo, con los aspectos políticos y económicos que giran en torno al establecimiento del currículo y la manera de transferirlo al aula, la diversidad del alumnado, en cuanto a formación pero también en cuanto a aspiraciones y expectativas, y la necesidad de adaptar la educación a los nuevos contextos educativos, donde se incluye también el uso de la tecnología, aspecto que está en continuo desarrollo. Las investigaciones en el campo de la Educación Matemática tratan de analizar estas variables e identificar nuevos aspectos que intervengan en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Para ello se realizan trabajos centrados en diferentes aspectos tales como el currículo de matemáticas, el estudiante y los procesos de aprendizaje, el profesorado y la enseñanza o las componentes sociales y culturales que influyen en la educación.

La amplitud y complejidad de los temas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas hace imprescindible el tratamiento de fenómenos claramente delimitados dentro de la problemática general. Una primera cota natural es la distinción entre niveles educativos, distinguiéndose entre primaria, secundaria o universitaria, sin olvidar la importancia de la transición entre ellos. La investigación que se presenta en esta memoria corresponde al campo de la Educación Matemática en el nivel universitario, si bien se presentan algunas observaciones que podrían ser consideradas para los últimos cursos de la enseñanza secundaria.

El interés por los aspectos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos en el nivel universitario ha ido creciendo en los últimos años, con importantes aportaciones al campo de la Educación Matemática, identificando y analizando las dificultades que los alumnos encuentran y los puntos débiles del sistema educativo, y proponiendo diferentes vías para superar estos problemas (Harel, Selden & Selden, 2006).

Una manera de clasificar las diferentes líneas de investigación existentes en el campo de la Educación Matemática consiste en hacerlo de acuerdo a la temática específica tratada, por ejemplo el uso de tecnología, la población con la que se realiza la investigación (estudiantes de distintos niveles educativos, profesorado...), la construcción de marcos teóricos, el análisis de los elementos de visualización, etc. El *Pensamiento Matemático Avanzado*[3] (PMA) es una línea de investigación, formalmente constituida a finales de los años 80 en el seno del *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME) y cuyo esfuerzo va dirigido hacia el desarrollo de investigaciones acerca de los procesos cognitivos y las formas de pensamiento que ocurren principalmente en los niveles universitarios. Gran parte de estas investigaciones hacen referencia a conceptos matemáticos y procesos cognitivos de componente matemática como *abstraer, definir, demostrar, formalizar,* entre otros (Azcárate & Camacho, 2003). La relevancia de esta línea de investigación queda de manifiesto por el lugar que ocupa en congresos como el CERME o el PME[4], en los que existe un grupo de trabajo con esta denominación.

Inicialmente, los objetivos de esta línea de investigación eran identificar los procesos cognitivos que subyacen en el aprendizaje de las matemáticas en los niveles avanzados, investigar las relaciones de esos procesos con los que intervienen en los niveles elementales y comprender las dificultades de los estudiantes relacionadas con contenidos matemáticos avanzados (Artigue et al., 2007).

La evolución, por una parte, de los marcos teóricos utilizados en la investigación en Educación Matemática en los niveles universitarios y, por otra parte, de las dimensiones institucional, social, cultura y tecnológica del contexto en que se desarrolla la enseñanza y el aprendizaje, ha promovido la diversificación de los tópicos investigados en la línea del PMA. Estas investigaciones muestran ciertas limitaciones en las concepciones de los estudiantes: discrepancias entre las definiciones formales que citan y los criterios que utilizan para comprobar que determinados ejemplos se ajustan a esas definiciones (Raychadhuri, 2007; 2008; Villar-Liñan & Llinares-Ciscar, 1996), dificultades con las representaciones gráficas y su conexión con el trabajo analítico (Artigue, 1992; González-Martín & Camacho, 2004) o la incapacidad de los estudiantes para utilizar sus recursos matemáticos, de forma eficiente, en la resolución de tareas que no fueran rutinarias para ellos (Habre, 2000). Los tópicos más estudiados en España han sido los conceptos de límite, función, derivada e integral. Algunos ejemplos de estas

---

[3] Traducción de “Advanced Mathematical Thinking”.
[4] “Congress of the European Society for Research in Mathematics Education” y “Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education” respectivamente.

investigaciones son las Tesis Doctorales de Blázquez (2000), Badillo (2004), Depool (2004), Sánchez-Matamoros (2004), González-Martín (2005), Pecharromán (2009) y Boigues (2010). Otras investigaciones enmarcadas en esta línea son: las desarrolladas en los trabajos de Moreno (2000) y Moreno y Azcárate (2003), que realizan un estudio de casos acerca de las concepciones y creencias de seis profesores universitarios sobre la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, o el análisis de libros de texto relacionados con los conceptos y procesos del PMA (Sierra, 2007; Sierra, González & López, 2003).

Otra perspectiva de investigación en el campo de la Educación Matemática que está surgiendo recientemente son las aplicaciones de la neurociencia, cuya investigación ha permitido localizar algunas partes del cerebro que participan en la resolución de diferentes actividades matemáticas y han generado una imagen dinámica de la actividad cerebral (Artigue et al., 2007). De momento, estas investigaciones no han tratado los procesos de aprendizaje propios del PMA, que son los que se consideran en esta investigación.

Los cambios no se han producido únicamente en los tópicos investigados dentro de esta línea de investigación, también han surgido diferentes interpretaciones del significado de la expresión "Pensamiento Matemático Avanzado". La discusión comienza al plantearse a qué hace referencia el término "avanzado", si al pensamiento, a las matemáticas o a ambos (Selden & Selden, 2005). De esta forma han surgido dos perspectivas, una centrada en las matemáticas, identificada en inglés con las siglas A-MT y otra enfocada hacia el pensamiento matemático, denotada AM-T (Zazkis & Applebaum, 2007). Esta es una cuestión que se retoma cada cierto tiempo y que aún no está resuelta, pero que ha dado lugar a la publicación de diversos trabajos sobre el tema. En particular, la revista *Mathematical Thinking and Learning* dedicó un monográfico, en el año 2005, a esta discusión. En este monográfico, Harel y Sowder (2005) se plantean qué significa que el pensamiento matemático sea avanzado (reescribiendo el término Pensamiento Matemático Avanzado como Pensamiento-Matemático Avanzado[5], P-MA) y estableciendo que

> El pensamiento matemático es avanzado si su desarrollo involucra al menos una de las tres condiciones para que un obstáculo sea epistemológico. El nivel de adquisición de una forma de pensamiento por parte de un individuo queda determinado por la manera en que el individuo ha superado dichos obstáculos. (Harel & Sowder, 2005, pp. 34-35)

El grupo de trabajo de PMA del CERME 6[6] incluye dentro de esta perspectiva, centrada en el pensamiento matemático, aquellas investigaciones cuyos protagonistas son los estudiantes que muestran una mayor capacidad intelectual para las matemáticas (Leikin, Cazes, Mamona-Dawns & Vanderlind, 2010).

En el marco del PMA surgieron una serie de constructos teóricos, que han ido evolucionando a medida que lo ha hecho la propia línea de investigación, y cuyo fin es tratar de describir y explicar determinadas situaciones que se producen por el vacío existente entre las matemáticas formales y los procesos cognitivos por los que pasa un individuo en el proceso de aprendizaje. Los primeros conceptos que surgieron fueron:

[5] En inglés: Advanced Mathematical-Thinking (AM-T).
[6] Celebrado en Francia a principios de 2009.

“concept image”[7] y “concept definition”, para distinguir entre la imagen de un concepto que tiene un individuo y su definición formal; obstáculo epistemológico, introducido para analizar los errores de los estudiantes, y la dualidad entre proceso y objeto.

Tall y Vinner (1981) utilizan el término “concept image” para

> Describir la estructura cognitiva completa asociada con el concepto, incluye todas las imágenes mentales y las propiedades y procesos asociados. Se construye a lo largo de los años a través de experiencias de todo tipo, variando a medida que el individuo encuentra nuevos estímulos y madura. (p. 152)

El “concept image” que haya construido un individuo puede no ser coherente y generalmente no concuerda con la definición de dicho concepto. Algunas investigaciones realizadas en torno al concepto de función muestran ejemplos de este hecho, reflejando que muchos estudiantes definen correctamente el concepto de función pero los argumentos utilizados para indicar si determinadas representaciones tabulares, gráficas, simbólicas o discursivas corresponden con funciones no se corresponden con la definición dada (Artigue, Batanero & Kent, 2007). Por ejemplo, algunos estudiantes reconocen una función constante como función si se le presentaba una representación gráfica, pero no lo consideraban como función si venía expresada por una expresión algebraica sin una variable explícita. Villar-Liñan y Llinares-Ciscar (1996) muestran algo similar en relación con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias; los estudiantes definían el concepto y luego no eran coherentes con la definición dada cuando se les pedía identificar si una serie de expresiones eran o no Ecuaciones Diferenciales Ordinarias[8].

La noción de obstáculo epistemológico, establecida por Bachelard (1938) e importada por Brousseau (1998) a la Didáctica de la Matemática, se utiliza para hacer referencia a determinados errores que cometían los estudiantes, generalmente los más resistentes, que no eran fruto de un error de conocimiento sino del uso incorrecto de un conocimiento que había sido de utilidad en determinadas situaciones. (Artigue et al., 2007). Brousseau enumera tres condiciones para que cierta parte del conocimiento pueda ser considerada como un obstáculo epistemológico: que se pueda localizar en la historia de las matemáticas; que no sea fruto de una falta de comprensión o un conocimiento erróneo sino provocado por un conocimiento que es válido en un contexto particular que genera respuestas incorrectas en otros contextos; que sea resistente (citado en Harel & Sowder, 2005).

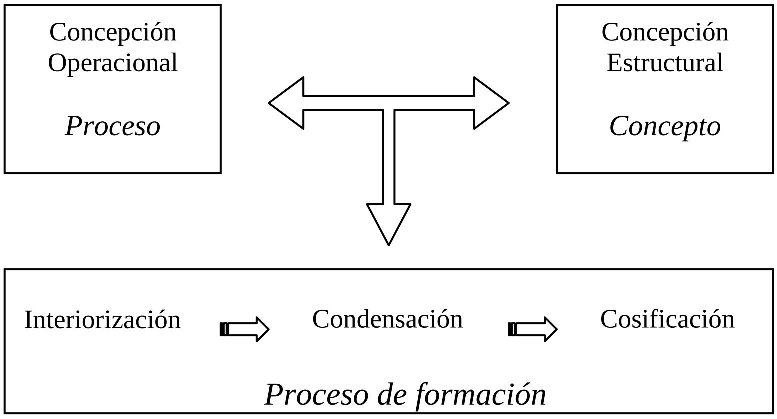
Desde otra perspectiva se considera que una de las razones por las que resulta complejo el desarrollo de conceptos matemáticos avanzados es porque dichos conceptos pueden jugar, de manera simultánea, el papel de procesos y de objetos, según el contexto en que aparezcan y el nivel de conceptualización del estudiante (Azcárate & Camacho, 2003). Es lo que se denomina la dualidad proceso-objeto. La evolución en la manera en que se trata esta dualidad de la mayoría de los conceptos asociados al PMA ha dado lugar a diferentes teorías o marcos teóricos que se describen brevemente a continuación.

---

[7] Azcárate (1992) traduce el término “concept image” como “esquema conceptual”. En esta memoria se mantendrá el uso del término en inglés.
[8] Este trabajo es analizado en detalle en la sección 1.4.1, Dificultades en el aprendizaje de las EDO.

1.1.1 La dualidad proceso-objeto

Sfard (1991) considera que un individuo puede construir dos tipos de concepciones de un mismo concepto matemático: operacionales y estructurales. La primera de ellas se refiere a la consideración del concepto como proceso y la segunda, cuando se le concibe como un objeto. Distingue tres etapas en el proceso de formación de estas concepciones (interiorización, condensación y cosificación). La interiorización y condensación serían procesos graduales que culminarían en la cosificación del concepto. La nueva entidad cosificada sería el objeto, que empieza a adquirir significado propio.



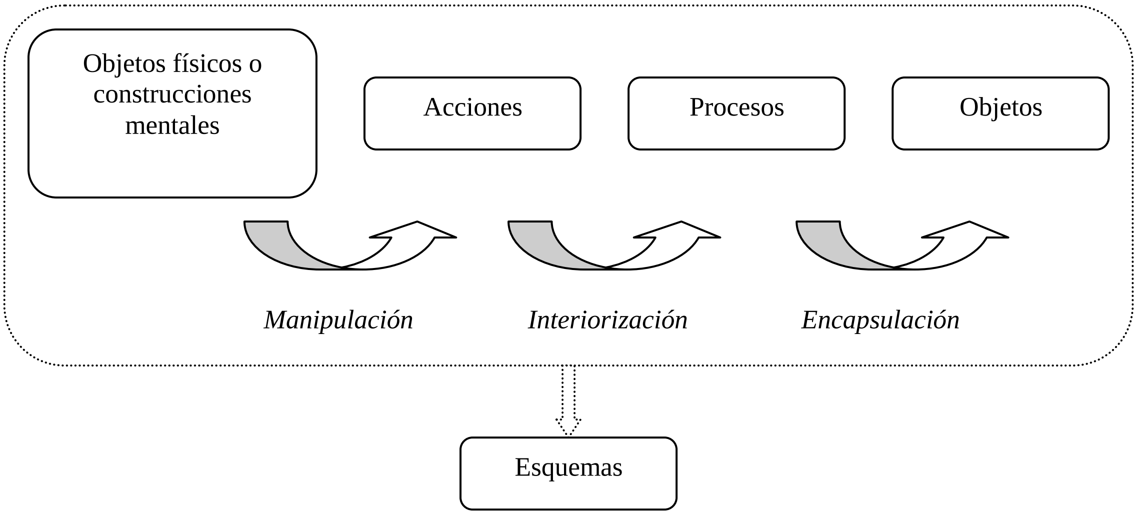
Esquema 1.1.1: Proceso de comprensión de Sfard

Un marco teórico desarrollado de acuerdo a la distinción entre proceso y objeto es la teoría APOS[9] (siglas correspondientes al esquema “action-process-object-squema”), introducida por Dubinsky y basada en la teoría de Piaget. Esta teoría trata de modelizar las construcciones mentales utilizadas en el PMA considerando que

> ... comprender un concepto matemático comienza con la manipulación de objetos físicos o mentales previamente construidos para formar *acciones*; las acciones son luego interiorizadas para formar *procesos* que son después encapsulados para formar *objetos*. Los objetos pueden ser desencapsulados de nuevo a los procesos a partir de los cuáles fueron formados. Finalmente, las acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en *esquemas* (Asiala et al., 1996, p. 8).

La teoría APOS ha ido evolucionando a medida que lo ha hecho el propio campo de investigación. En este crecimiento ha jugado un papel fundamental la creación del grupo RUMEC[10], entre cuyos objetivos se encuentra realizar un análisis teórico de los conceptos matemáticos que denominan *descomposición genética del concepto*. Este análisis se basa en la comprensión de los investigadores del concepto tratado y las experiencias que han tenido, tanto cuando lo aprendieron como cuando lo han enseñado; investigaciones previas sobre el concepto y observaciones del proceso de aprendizaje del concepto que muestran los estudiantes (Asiala et al., 1996).

[9] En español, en ocasiones, se utilizan las siglas APOE para referirse a esta teoría.
[10] Research in Undergraduate Mathematics Education Community.



Esquema 1.1.2: Conceptualización según la teoría APOS

Algunas dificultades encontradas a la hora de explicar las investigaciones realizadas bajo esta teoría, en particular en lo que concierne a la construcción de esquemas, motivaron una reconsideración de este término, distinguiéndose en la actualidad tres niveles en el desarrollo del esquema de un concepto: *Intra*, *Inter* y *Trans* (Artigue et al., 2007).

- En el nivel de desarrollo *Intra* el estudiante se centra en acciones, procesos y objetos individuales, de forma aislada con respecto a otros aspectos cognitivos de naturaleza similar.
- El nivel *Inter* se caracteriza por la construcción de relaciones y transformaciones entre esos aspectos cognitivos.
- En el nivel *Trans* el individuo construye una estructura subyacente que permite comprender las conexiones establecidas en el nivel *Inter* y da cierta coherencia al esquema de manera que el individuo puede decidir cuándo y cómo resulta útil el esquema.

Por ejemplo, Trigueros (2004) establece que el desarrollo del esquema para el concepto de solución de un sistema de ecuaciones diferenciales involucra la consideración de una función como solución, la curva solución, el proceso de encontrar la solución y su relación con conceptos de álgebra lineal. Describe además los tres niveles de desarrollo de dicho esquema de la siguiente forma:

- En el nivel Intra-solución se sitúan los estudiantes que resuelven correctamente un sistema pero no interpretan correctamente el significado de las soluciones lineales obtenidas salvo para escribir la expresión analítica de la solución general. Tampoco establecen relación entre el sistema y su solución con su representación gráfica.
- En el nivel Inter-solución, los estudiantes dan significado a las soluciones lineales obtenidas pero tienen dificultades para relacionar su concepción de la solución del sistema con las propiedades de la base de un espacio vectorial. Además no les resulta trivial identificar cuándo una representación particular se corresponde con un sistema de ecuaciones.
- En el nivel Trans-solución los estudiantes pueden resolver, interpretar y describir gráficamente diferentes sistemas de ecuaciones, relacionan las soluciones lineales de

un sistema con propiedades de dicho sistema y del espacio vectorial asociado. Los estudiantes muestran que el esquema es coherente por su habilidad para elegir el método más apropiado para resolver un sistema particular y para determinar cuándo y por qué las soluciones de un sistema forman una base de un espacio vectorial.

Con este enfoque también se han elaborado y probado diseños de enseñanza, ligados al aprendizaje cooperativo (Artigue et al., 2007). El proceso de diseño de las secuencias de enseñanza basadas en esta teoría comienza con la descomposición genética del concepto a enseñar, reflejando qué significa comprender ese concepto y cómo puede un estudiante construir o desarrollar esa comprensión. Con ese análisis se propone una descripción de las construcciones mentales específicas que un estudiante debería realizar para desarrollar su comprensión del concepto.

En el proceso de enseñanza se hace pasar a los estudiantes por situaciones donde tengan que afrontar sus lagunas conceptuales y tratar de darles sentido involucrándose en actividades como resolver problemas o responder preguntas, de forma individual o en grupo. Uno de los enfoques pedagógicos que se utiliza es el “Ciclo de Enseñanza ACE”, con el que se distinguen tres etapas en el desarrollo de las clases, cada una de una semana de duración. Durante la semana, algunas de las clases se realizan en una sala de ordenadores y el trabajo se completa fuera de clases. Los estudiantes trabajan en grupo en todas las sesiones. Los tres componentes del ciclo son: actividades, discusiones de clase y ejercicios.

Las actividades se desarrollan en las salas de ordenadores y consisten en tareas de programación diseñadas para promover construcciones mentales específicas, con base en el análisis teórico del concepto realizado previamente. El objetivo de estas actividades es que los estudiantes desarrollen una experiencia con el concepto matemático que se va a tratar en las clases posteriores.

En las discusiones de clase los estudiantes trabajan en equipo para responder, con lápiz y papel, a cuestiones basadas en las actividades que previamente se han realizado en la sala de ordenadores. El profesor guía las discusiones que se producen en los grupos con el objetivo de que los estudiantes reflexionen sobre el trabajo que realizaron con el ordenador y los relacionen con los cálculos que han hecho en clase. En algunas ocasiones el profesor interviene, introduciendo definiciones o explicaciones para integrar o aclarar los aspectos que se han discutido.

El ciclo se completa con una serie de ejercicios que se asignan a los estudiantes como trabajo de casa. El objetivo de estos ejercicios es reforzar las ideas que los alumnos han construido, que utilicen las matemáticas que han aprendido o incluso comenzar a pensar en situaciones que se abordarán más adelante.

Como ejemplos de investigaciones relacionadas con la teoría APOS y con la enseñanza y el aprendizaje de las EDO se pueden mencionar los trabajos de Donovan (2004) y Trigueros (2004). Donovan (2004) utiliza la noción de “esquema” en una investigación en la que clasifica a los estudiantes en dos grupos: aquellos que muestran una “comprensión relacional”, sabiendo lo que hacen en cada momento y por qué, y aquellos con una “comprensión instrumental”, que utilizan reglas sin razonar, cuando resuelven actividades relacionadas con las EDO de primer orden. Trigueros (2004) utiliza la teoría APOS para describir el desarrollo, por parte de un grupo de estudiantes de Económicas, de los esquemas de representación paramétrica de funciones y de solución de sistemas de ecuaciones diferenciales.

En el tratamiento de esta dualidad proceso-objeto surge la definición del término "procepto"[11] para referirse a aquellas estructuras matemáticas que pueden considerarse como un proceso y como un objeto (Gray & Tall, 1994).

> Un *procepto elemental* es la unión de tres componentes: un *proceso* que produce un *objeto* matemático, y un *símbolo* que se utiliza para representar tanto al proceso como al objeto. Un *procepto* consiste en una colección de *proceptos elementales correspondientes al mismo objeto*[12]. (p. 6)

La visión de Tall sobre el desarrollo del conocimiento matemático ha ido evolucionando de forma independiente a las teorías de Sfard o Dubinsky, en lo que al desarrollo del conocimiento matemático se refiere. Tall (2004) distingue tres vías por las que se produce este desarrollo que son distintas pero están interrelacionadas y que se corresponden con tres "mundos matemáticos". Cada individuo transita por estos tres mundos de una manera diferente.

El primer camino se basa en la *percepción* del mundo que tenga el individuo, refiriéndose a lo que el individuo piensa sobre las cosas que percibe y siente, tanto en el mundo físico como en su propio mundo mental de significados. A través de la reflexión y el uso de un lenguaje cada vez más sofisticado, el individuo puede centrarse en aspectos de su experiencia sensorial que le permita imaginarse nociones que no existan en el mundo exterior, tal como una línea perfectamente recta. Para Tall este sería el "conceptual-embodied world", que se podría interpretar como "mundo de los conceptos personificados".

El segundo mundo es el de los *símbolos* que se utilizan en aritmética, álgebra o cálculo para manipular y calcular. El paso por este mundo comienza con las acciones (como contar) que son encapsuladas como conceptos, utilizando símbolos que permitan pasar, sin esfuerzo, de los procesos para hacer matemáticas a los conceptos para pensar en matemáticas. A este mundo lo denomina "proceptual-symbolic world", que se puede interpretar como "el mundo de los proceptos".

El tercer mundo se basa en las *propiedades*, expresadas en términos de definiciones formales que se utilizan como axiomas para especificar estructuras matemáticas como "grupo", "espacio vectorial", etc. Este sería el "formal-axiomatic world" o el "mundo formal". En este mundo se activa la experiencia previa del individuo, trabajando con objetos que no resultan familiares sino con axiomas que se formulan cuidadosamente para definir estructuras matemáticas en términos de propiedades específicas. Dentro del sistema de axiomas se pueden definir nuevos conceptos y deducir sus propiedades para así construir una teoría coherente y lógica.

Tall (2007) relaciona los dos primeros mundos con las matemáticas elementales y el tercero, el "mundo formal" con el PMA. Uno de los puntos de interés en esta teoría es cómo se produce la transición hacia ese "mundo formal", que resulta tan complicada

---

[11] Traducción de la expresión "procept" que proviene de proceso (process) y objeto (object).

[12] Por ejemplo, el procepto "6" incluye el proceso de contar 6 y una colección de otras representaciones como 3+3, 2·3, 8-2, etc (Gray & Tall, 2004, p. 6)

para muchos estudiantes. Artigue et al. (2007) señalan que muchos estudiantes podrían conseguir acceder a ese mundo de las matemáticas formales trabajando previamente en los otros dos mundos definidos por Tall, el de la percepción y el de los proceptos.

Hasta el momento se ha mostrado la evolución del PMA fruto de los cambios que se han producido en la Educación Matemática a nivel interno, en lo referente a los marcos teóricos de investigación y los aspectos cognitivos del aprendizaje. Pero la investigación en Educación Matemática también se ha visto influida por la evolución de aspectos externos como los cambios pedagógicos y curriculares, el aumento en las diferencias entre los niveles de secundaria y universidad, el desarrollo de la tecnología, etc. (Artigue et al., 2007). Fruto de dicha evolución han surgido una serie de investigaciones en las que el diseño de secuencias de enseñanza tiene un papel relevante. A modo de ejemplo, presentamos dos de esas perspectivas.

1.1.2 La Teoría de las Situaciones Didácticas

Esta teoría se origina en los años 70, de la mano de Brousseau, y ha continuado evolucionando y desarrollándose a medida que lo ha hecho la Educación Matemática (Brousseau, 1998). Es el eje sobre el que se sostiene la mayoría de las investigaciones francesas en este campo. Esta teoría sitúa el papel de la institución en un lugar central en el proceso de aprendizaje, considerando que la institución debe permitir que los estudiantes construyan un conocimiento que pueda funcionar y existir de manera independiente a ella. En resumen, la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), estudia la complejidad inherente a cualquier situación que involucre la interacción estudiante-profesor-contenido (Sriraman & English, 2010).

En general, la TSD se ocupa de las relaciones que se establecen entre un individuo que está aprendiendo matemáticas y el medio que le rodea, compuesto por otros estudiantes, los conceptos que se quieren aprender y el repertorio conceptual de que disponga el estudiante.

Además, las investigaciones realizadas en el marco de la TSD constan de una parte cuyo objetivo es el diseño de problemas o ejercicios que se adapten al conocimiento y a los estudiantes, es decir, la creación de *situaciones didácticas* que contribuyan a que los estudiantes desarrollen el aprendizaje de las matemáticas generando sus propias ideas. Según los fundamentos de esta teoría, el *medio* en que se desarrolle dichas situaciones didácticas debe presentar tres características fundamentales: ser factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios, promoviendo la adaptación para el estudiante; permitir la autonomía del estudiante, a la par que se le hace sentirse responsable de su aprendizaje y conducir no sólo al saber de conocimientos matemáticos sino al propio saber matemático (Brousseau, 1998).

La Ingeniería Didáctica es una metodología de investigación apoyada por la Teoría de las Situaciones Didácticas, considerando que en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas influyen las interacciones entre el saber matemático, el sistema educativo y los estudiantes (Artigue, 1992).

Así, en el diseño de ingenierías didácticas se consideran tres aspectos fundamentales: las características del saber que se pretende poner en funcionamiento (dimensión epistemológica), las características cognitivas de los estudiantes a los que va dirigida la enseñanza (dimensión cognitiva) y las características del funcionamiento del sistema de enseñanza (dimensión didáctica).

La metodología de investigación utilizada en la Ingeniería Didáctica tiene dos características principales: su esquema experimental se basa en las realizaciones didácticas que se producen en el aula, es decir, en la concepción, realización, observación y análisis de las secuencias de enseñanza y se registran los estudios de casos, realizando una validación basada en la confrontación entre un análisis a priori y un análisis a posteriori.

A partir de la Ingeniería Didáctica se diseñan las *situaciones didácticas* utilizando los resultados de la investigación. Los estudiantes deben buscar las soluciones a una serie de problemas seleccionados por el profesor con el objetivo de enfrentar a los alumnos a una situación matemática determinada. Previamente al diseño del curso se realiza un análisis de los objetivos epistemológicos del proyecto y un estudio minucioso de las limitaciones.

Artigue (1987) diseñó una Ingeniería Didáctica que utilizó durante tres años para enseñar las EDO de primer orden a estudiantes de primer curso de universidad. Durante cada año participaron de estas clases alrededor de cien alumnos, que recibieron en torno a 35 horas de formación. En estas clases se simultaneaban las clases tradicionales con sesiones de ejercicios que debían resolverse utilizando tecnología. En un primer momento los estudiantes completaron correctamente los ejercicios en los que se consideraban dos sistemas de representación de manera simultánea como, por ejemplo, una en la que se pedía a los estudiantes que relacionaran siete ecuaciones diferenciales diferentes con las correspondientes gráficas de las curvas solución. Artigue relaciona el éxito que tuvieron los estudiantes en la realización de estas actividades con el hecho de que utilizaron distintos criterios para determinar y comprobar sus respuestas, entre los que se incluía el relacionar el signo del segundo miembro de la ecuación (en el caso de ecuaciones de la forma $y' = f(x, y)$) con las propiedades de monotonía de las funciones solución, los ceros de la función f con funciones soluciones horizontales, el valor numérico de f en un punto y la pendiente de la función solución en dicho punto.

Sin embargo, los resultados obtenidos en esta investigación reflejan una viabilidad parcial, mostrando ciertas dificultades con las demostraciones de tipo cualitativo debidas, en gran parte, por la limitación que mostraron los estudiantes en el desarrollo de capacidades relacionadas con el tratamiento del marco gráfico. Esto dio lugar a un nuevo estudio en el que se analizan las dificultades de tipo cognitivo que surgen en el tratamiento de las funciones desde un punto de vista algebraico y gráfico (Artigue, 1992).

1.1.3 La Educación Matemática Realista

Un tercer enfoque que integra la investigación con el diseño curricular es la Educación Matemática Realista[13]. Esta teoría surge en los años 70, en Holanda, de la mano de Freudenthal y algunos investigadores del IOWO (Instituto para el Desarrollo de la Educación Matemática). Tiene dos características principales: el uso de contextos

[13] Traducción de “Realistic Mathematics Education” (RME).

realistas en la enseñanza de las matemáticas, con el objeto de destacar la conexión de esta disciplina con la realidad, hacerlas cercanas a los estudiantes y relevantes para la sociedad, y el uso didáctico de modelos (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003; http://www.fi.uu.nl/en/rme/). En este enfoque los problemas preceden a la matemática abstracta, los estudiantes aprenden matemáticas examinando situaciones presentadas en un contexto experimentalmente real para ellos y recurren a su conocimiento matemático para resolverlas.

Los contextos realistas se refieren no sólo a problemas formulados en un contexto relacionado con la vida real, sino a cualquier tipo de actividad que tenga sentido para el estudiante, es decir, que resulte real para él. En este sentido, incluso las matemáticas formales pueden conformar un contexto realista, si los estudiantes a los que van dirigidas las actividades están acostumbrados a trabajar en este contexto y las actividades planteadas en el mismo tienen sentido para ellos. Freudenthal define la realidad como "aquello que el sentido común considera real" (citado por Gravemeijer, 2004, p. 2), pero añade que lo que puede resultar de sentido común para cualquier persona es diferente a lo que resulta real para un matemático.

Otro aspecto característico de la Educación Matemática Realista es el diseño de secuencias de enseñanza que supongan un desafío para los estudiantes y que promuevan que los estudiantes organicen los conocimientos claves en un nivel para poder producir nuevos conocimientos en un nivel superior (Rasmussen et al., 2006). De esta forma, las matemáticas no deben presentarse como un sistema cerrado al que los estudiantes acceden de forma pasiva, sino como una actividad o un proceso al que el estudiante debe enfrentarse, con la asistencia del profesor sólo como guía de dicho proceso. Treffers define este proceso como "proceso de matematización", distinguiendo entre "matematización horizontal" y "matematización vertical" (citado en Drijvers, 2003, p. 14). La matematización horizontal se produce al intentar esquematizar un problema con un enfoque empírico en términos estrictamente matemáticos; mientras que la matematización vertical se refiere a los procesos matemáticos, la solución del problema, la generalización de la solución y la formalización.

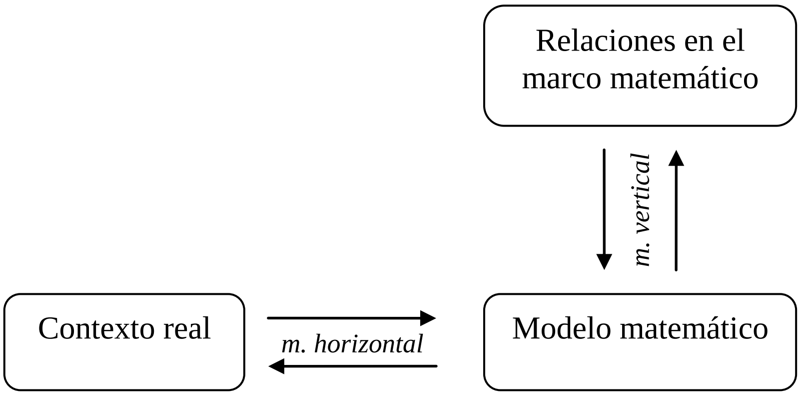


Imagen 1.1.3: Procesos de matematización horizontal y vertical (Drijvers, 2003, p.54)

El proceso de desarrollo de una secuencia de enseñanza basada en esta teoría comienza determinando una serie de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje [THA] (Simon, 1995), junto con una serie de actividades de enseñanza. Las actividades propuestas deben contemplar estos dos procesos de matematización, profundizando en uno u otro según la concepción que el diseñador tenga de las matemáticas y su relación con el mundo real, así como de lo que quiera transmitir a sus estudiantes.

Después de implementar la secuencia en el aula se realiza un análisis retrospectivo que permite revisar y refinar la trayectoria de aprendizaje que se había supuesto inicialmente. Gravemeijer (2004) describe tres heurísticas para diseñar la instrucción: el *principio de reinvención guiada*, según el cuál el modelo de enseñanza guía a los estudiantes en la construcción propia de algunos conceptos o procesos matemáticos, la *fenomenología didáctica*, considerando los problemas prácticos como posibles puntos para iniciar el proceso de reinvención, y la construcción de *modelos emergentes*, refiriéndose con ello al proceso según el cuál algo que surge como un *modelo-de* actividad matemática informal, conforme pasa el tiempo, se puede convertir en un *modelo-para* razonamientos matemáticos más formales. La transformación de un *modelo-de* a un *modelo-para* es un proceso por el que los estudiantes pasan realizando actividades de distinto tipo (situacional, referencial, general y formal).

El proyecto IO-DE[14] tiene su base en los fundamentos de la Educación Matemática Realista. Entre sus objetivos se encuentra que los estudiantes reinventen algunas de las ideas y métodos matemáticos útiles para el análisis de las EDO, buscar tareas desafiantes, que reflejen situaciones que resulten reales para los alumnos y que les sirvan de punto de partida para indagar, y en los que exista un balance entre los tratamientos analítico, numérico y gráfico del concepto (Rasmussen & Kwon, 2007).

En esta sección se ha visto que la Ingeniería Didáctica y las metodologías utilizadas en la teoría APOS y la Educación Matemática Realista presentan un aspecto común en sus procesos de diseño de secuencias de enseñanza: su carácter cíclico. Se implementa la secuencia en el aula, se recogen los datos, se analizan, y ese análisis permite revisar tanto el propio diseño del modelo de enseñanza como la teoría en la que se basa.

El grupo de investigaciones mencionadas ofrece distintas perspectivas acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en particular de aquellos conceptos y procesos relacionados con el PMA, que puede ser considerado característico de los niveles universitarios.

La mayoría de estas investigaciones, además, hace uso de la tecnología como herramienta para el desarrollo de las actividades de enseñanza propuestas. La tecnología juega un papel fundamental en el desarrollo de conceptos asociados al PMA (Camacho, Depool & Santos-Trigo, 2010; Drijvers, 2003; González-Martín, 2005) facilitando a los estudiantes el tránsito de lo discreto a lo continuo, de lo finito al infinito, de lo determinado a lo indeterminado e incluso entre distintos significados de un mismo concepto (Ferrara, Pratt & Robutti, 2006).

1.2 Delimitación del Problema de Investigación.

[14] IO-DE son las siglas, en inglés, del proyecto Inquiry-Oriented Differential Equations, liderado por Chris Rasmussen. El volumen de investigaciones que existen, en el marco de este proyecto, y su relación con la investigación que se presenta en esta memoria, hacen que se dedique la última sección de este capítulo, en exclusiva, a describir este proyecto y algunas de las investigaciones más relevantes de sus miembros (sección 1.4.2).

Las matemáticas, además de ser una disciplina con sus propias reglas de funcionamiento, es una ciencia que influye en el desarrollo de muchas otras disciplinas que necesitan de su uso para resolver problemas. Esto, unido al hecho de que la mayor parte de la docencia de matemáticas en los niveles universitarios no va dirigida hacia futuros matemáticos sino hacia profesionales que necesitarán utilizarlas como herramientas (Selden & Selden, 2001), hace que resulten de interés las investigaciones sobre la forma en que los estudiantes universitarios desarrollan y utilizan los conceptos matemáticos estudiados para resolver problemas y qué tipo de estrategias y razonamientos emplean en el proceso de resolución.

La gran amplitud del conjunto de contenidos matemáticos utilizados en la resolución de problemas de otras disciplinas científicas hace necesaria una acotación del trabajo. Los conceptos de función, límite, derivada e integral han sido ampliamente estudiados por la comunidad de investigación y se han formulado nuevas propuestas de instrucción para introducir estos conceptos en el aula que incluyen el uso de tecnología y/o el tratamiento de diferentes sistemas de representación con el fin de robustecer el conjunto de significados asociados a cada uno de los conceptos.

La enseñanza y el aprendizaje de las EDO también ha sido objeto de estudio en los últimos años. Una revisión de estas investigaciones, que se presenta en detalle en la última sección de este capítulo (sección 1.4), permite identificar una serie de dificultades que surgen a los estudiantes a la hora de resolver actividades relacionadas con las EDO: establecer una definición formal y presentar ejemplos (Villar-Liñan & Llinares-Ciscar, 1996), utilizar las definiciones en un nuevo contexto de conocimiento (Guerrero, Mejía & Camacho, 2010) o analizar el comportamiento de las funciones solución cuando estas vienen expresadas de forma implícita (Artigue, 1992); también se detectan errores relacionados con las soluciones de equilibrio como considerar que es el conjunto formado por todas las expresiones que anulen la derivada, sean o no solución de la EDO, o relacionarlas, en el caso de las ecuaciones diferenciales autónomas, con valores numéricos y no con funciones (Guerrero-Ortiz, 2008; Rasmussen, 2001; Zandieh & McDonald, 1999). También se relaciona la búsqueda de algoritmos con el fracaso de los estudiantes a la hora de realizar tareas en las que se requiere el uso de diferentes sistemas de representación (Artigue, 1992; Guerra-Cáceres, 2003; Habre, 2000) o de conceptos de otras áreas de las matemáticas como el álgebra lineal (Trigueros, 2004).

Algunas investigaciones han planteado modelos alternativos de enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Artigue (1992) propone una Ingeniería Didáctica que plantea un análisis cognitivo, epistemológico y didáctico como base para la construcción de una secuencia de enseñanza. En el caso de la Educación Matemática Realista se propone el uso de actividades “reales” para el estudiante, de manera que tengan sentido para él, y estableciendo ciertas normas de interacción en el aula que promuevan el desarrollo de argumentos y justificaciones matemáticas válidas (Rasmussen & Blumenfeld, 2007; Rasmussen & Keynes, 2003; Rasmussen & King, 2000).

Retomando la idea de Artigue (2001) de que muchas de las dificultades con las que se encuentra el estudiante pueden asociarse a las discontinuidades que se presentan en el proceso de enseñanza, surge la siguiente cuestión: ¿qué ocurre con la relación evidente entre los conceptos de derivada y de ecuación diferencial? En la mayoría de los currículum estos conceptos aparecen incluso en distintas materias, intercalando el cálculo en varias variables. ¿Qué sucede con esta discontinuidad en el aprendizaje? ¿Influirá en la comprensión del concepto de EDO? ¿Cómo podemos evitarla? ¿Sería conveniente pensar en una reestructuración del currículo? Estos interrogantes han llevado a la formulación del problema en el que se centra esta investigación.

La introducción de las EDO en las licenciaturas del ámbito científico viene caracterizada por una fuerte componente centrada en la realización de determinados procesos algebraicos que conducen a la enseñanza de diferentes métodos de resolución que llevan a la expresión algebraica de una familia de funciones. En líneas generales, se define el concepto y se pasa a la clasificación de las ecuaciones, introduciendo los métodos algebraicos de resolución específicos para cada tipo de ecuación. Esta es la base común para todos los estudios de tipo científico-tecnológico, pero existe diferencia en la profundidad con la que se trabaja, siendo una enseñanza más formal en estudios como la Licenciatura en Matemáticas, donde se enuncian y demuestran teoremas como el de existencia y unicidad de soluciones, y más algorítmica en el resto de los estudios de carácter científico, en la mayoría de los cuales la asignatura en la que se imparte este contenido contempla otros aspectos como el cálculo en varias variables o el análisis complejo.

A continuación se muestran los programas oficiales de las materias en las que se introducen las EDO en Ingeniería Técnica Industrial y en las licenciaturas de Matemáticas, Física y Química[15] (imágenes 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3, y 1.2.4 respectivamente). En el caso de la licenciatura en Matemáticas, todos los contenidos de la asignatura están relacionados con las ecuaciones diferenciales. En el caso de la asignatura de la licenciatura en Física, los contenidos relacionados con las EDO suponen algo más de la mitad del programa y en el caso de Química y la Ingeniería Técnica, los contenidos relacionados con las EDO son bastante inferiores a los que se contemplan en Matemáticas y Física. Los cuatro programas tienen en común la integración de EDO de primer orden y de segundo orden, lineales, con coeficientes constantes.

[15] Todos los programas mostrados son los correspondientes al curso 2008-2009.

En Ingeniería Técnica Industrial, se introducen las EDO en una asignatura anual de primer curso, compartiendo lugar con otros conceptos de cálculo, pero también de álgebra y geometría.

Asignatura	Código	Titulación: Ingeniería Técnica Industrial (esp. Mecánica) Nombre de la Asignatura
		FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INGENIERÍA
	Curso: Primero **Tipo de asignatura:** Troncal Cuatrimestre: Primero y Segundo 4 horas teórico-prácticas semanales en el primer cuatrimestre y 3 horas teórico-prácticas en el segundo. Además, 30 horas de prácticas con el ordenador.	
1.Propósito 2.Requisitos 3.Evaluación	1. Adquisición de la herramienta matemática básica que el alumno necesitará a lo largo de sus estudios, creando en él hábitos que desarrollen su capacidad de razonamiento y espíritu crítico. 2. Se procurará partir de un nivel mínimo de conocimientos adquiridos en la enseñanza secundaria. Con ejercicios de repaso y trabajo es posible seguir el curso. 3. Dos exámenes parciales y un examen final (con dos convocatorias) para Teoría y Problemas, lo que significará el 80% de la calificación final; y un examen de Prácticas, que representa un 20% de la misma. Además, a lo largo de cada cuatrimestre se podrá realizar una prueba de control de algunos temas relevantes. La fecha y el temario de dicha prueba se anunciarán con suficiente antelación. A los alumnos que superen dicha prueba se les añadirá hasta un punto adicional en la nota del parcial correspondiente. De cada Tema se depositarán hojas de problemas en copisterías, a disposición de los alumnos. También se pueden obtener en la página web del Departamento: http://anamat.ull.es/clases	
Temario	**PROGRAMA TEÓRICO** **Tema 1. Números reales.** Conjuntos numéricos. Operaciones básicas. Desigualdades e inecuaciones. Valor absoluto. Funciones y sus gráficas. **Tema 2. Números complejos.** Representación gráfica. Forma binómica y polar. Operaciones. **Tema 3. Sucesiones y series.** Sucesiones de números reales. Límite de una sucesión. Series. Criterios de convergencia. **Tema 4. Álgebra matricial.** Vectores. Independencia lineal. Matrices y determinantes. Sistemas de ecuaciones lineales. **Tema 5. Diagonalización de matrices.** Autovalores y autovectores. Diagonalización. Matriz de paso. Potencias de una matriz. **Tema 6. Geometría del plano y del espacio.** Geometría del plano. Cónicas. Geometría del espacio. **Tema 7. Cálculo diferencial de funciones de una variable.** Funciones elementales. Límites. Continuidad. Ceros de funciones. Concepto de derivada. Reglas de derivación. **Tema 8. Aplicaciones del cálculo diferencial.** Teorema del valor medio. Regla de l'Hôpital. Fórmula de Taylor. Máximos y mínimos. Problemas de optimización. Representación gráfica de funciones. **Tema 9. Cálculo integral de funciones de una variable.** Integral indefinida. Métodos de integración. Integral definida. Propiedades. Teorema Fundamental del Cálculo. Regla de Barrow. Regla de Simpson y regla trapezoidal. Aplicaciones geométricas y físicas de la integral. **Tema 10. Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias.** Ecuaciones de primer orden: ecuaciones de variables separadas, lineales y exactas. Ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes. Sistemas de ecuaciones diferenciales. Aplicaciones. **PROGRAMA PRÁCTICO** **Práctica 1.** Elementos básicos de Maple. **Práctica 2.** Números complejos. Polinomios. Resolución de ecuaciones. **Práctica 3.** Sucesiones y series. **Práctica 4.** Álgebra matricial. **Práctica 5.** Funciones de una variable. **Práctica 6.** Cálculo diferencial de funciones de una variable. **Práctica 7.** Cálculo integral de funciones de una variable. **Práctica 8.** Ecuaciones diferenciales ordinarias.	
Bibliografía	1. **R. Larson, R. Hostetler & B. Edwards**, "Cálculo" (8a. edición). Ed. McGraw-Hill (2006). 2. **D. C. Lay**, "Álgebra lineal y sus aplicaciones". Ed. Addison Wesley (1990). 3. **W. E. Boyce, R. C. Di Prima**, "Ecuaciones diferenciales ordinarias y problemas con valores en la frontera". Ed. Limusa- Noriega (1998). 4. **Dennis Zill**, "Cálculo diferencial e integral". Ed. Iberoamericana.	

Imagen 1.2.1: Programa de la asignatura Fundamentos Matemáticos de la Ingeniería (Ingeniería Técnica Industrial)

En la licenciatura en Matemáticas existe una asignatura dedicada en exclusiva a contenidos relacionados con las Ecuaciones Diferenciales (Análisis Matemático V). Esta asignatura se imparte en el quinto semestre y su programa es el siguiente:

Objetivos generales	La teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias es una parte de la matemática en la que se conocen con mucho detalle los resultados fundamentales que la gobiernan. Son éstos fáciles de comprender –tanto es así que se explican en cursos resumidos a otros científicos e ingenieros– y conforman una unidad conocida como "teoría de la existencia, unicidad y prolongación". El dominio de esta materia junto con los complementos de la integración elemental y la teoría de las ecuaciones lineales, son las metas principales de la asignatura.
Destrezas a adquirir	Resolución de los modelos elementales de ecuaciones. Conocimiento de los resultados generales que habilitan la existencia de soluciones. Dominio de las ecuaciones lineales. Conocimiento de los principales rasgos de las ecuaciones autónomas y de sus aplicaciones en modelización.
Presentación	La asignatura es un curso de introducción a las ecuaciones diferenciales, materia que constituye un capítulo fundamental de la matemática. Históricamente, la mecánica y otras ramas de la física se confunden también con la teoría de ecuaciones diferenciales. Confluyen en la disciplina el análisis, la topología, la geometría y el álgebra.
Contenidos	1. Integración elemental de ecuaciones. 2. Teoremas de punto fijo. Lema de Ascoli-Arzelá. 3. Teoremas de existencia. Unicidad. Prolongación de soluciones. 4. Dependencia continua y diferenciable de las soluciones con respecto a condiciones iniciales y parámetros. 5. Ecuaciones lineales. Exponencial de una matriz. 6. Ecuaciones autónomas. Órbitas. Sistemas planos: estudio de las soluciones de equilibrio. Ciclos límite: teorema de Poincaré-Bendixon.
Metodología	Exposiciones teóricas. Resolución en clases prácticas, de los ejercicios propuestos oportunamente. El alumno dispondrá de material teórico-práctico elaborado por el profesor, que estará disponible .on-lineçuando comience el curso.
Forma de evaluación	Examen Final
Bibliografía básica	M. de Guzmán. .Ecuaciones Diferenciales, Estabilidad y Control". Ed. Alhambra. Madrid, 1975. C. Fernández Pérez. .Ecuaciones Diferenciales I". Ed. Pirámide, Madrid, 1992. C. Fernández Pérez, J. Vázquez Hernández, J. M. Vegas. .Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias". Paraninfo, Madrid, 2003. W. Boyce, R. Diprima. .Ecuaciones diferenciales y problemas de valores en la frontera". Ed. Limusa-Wiley, Mexico, 1967. F. Simmons. .Ecuaciones diferenciales ordinarias, con aplicaciones y notas histórias". Mc Graw Hill, México, 1993. A. Kiseliov, M. Krasnov, G. Makarenko. "Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias". Ed. Mir, Moscú, 1973.
Otra bibliografía	E. Coddington, N. Levinson. Ordinary Differential Equations. Mc Graw Hill, New York, 1955. P. Hartman. Ordinary Differential Equations. J. Wiley, New York, 1964.
Prerrequisitos	Cálculo diferencial e integral para funciones de una y varias variables. Álgebra lineal.

Imagen 1.2.2: Programa de la asignatura Análisis Matemático V (Licenciatura en Matemáticas)

En la licenciatura en Física, las EDO se introducen por primera vez en una asignatura denominada Métodos Matemáticos IV, correspondiente al cuarto semestre. En esta materia se incluyen otros contenidos matemáticos relacionados con las funciones de variables complejas y las transformadas integrales.

1.Propósito	1. Desarrollo de las bases de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con aplicaciones. 2. Rudimentos de variable compleja con aplicaciones al cálculo integral. 3. Introducción de algunos temas analíticos de interés para la Física.
2.Requisitos	1.- Es aconsejable conocer bien los temas de Métodos Matemáticos I y II, además del cálculo integral elemental.
3.Evaluación	1.- Examen cuatrimestral. Pueden incluirse en el curso algún-os ejercicio-s que cuente-n en la evaluación final
Temario	**0.- INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES DIFERENCIALES. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.** **1.- ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES: APLICACIONES. Ecuaciones lineales de segundo orden: introducción. Soluciones fundamentales de las ecuaciones homogéneas. Independencia lineal. El problema de las ecuaciones no homogéneas: El método de los coeficientes indeterminados y el de variación de parámetros. Vibraciones mecánicas: Vibraciones libres y vibraciones forzadas.** **2.- ECUACIONES DIFERENCIALES CON COEFICIENTES VARIABLES. FUNCIONES ESPECIALES. Introducción: repaso de series de potencias. Soluciones en la vecindad de un punto ordinario. Puntos singulares regulares. Ecuaciones de Euler. Soluciones en serie en la vecindad de un punto singular regular. Funciones especiales: Polinomios y funciones de Legendre. Polinomios y funciones de Hermite. Polinomios y funciones de Laguerre. Funciones de Bessel. Función hipergeométrica.** **3.- FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA. Números complejos: conceptos básicos. Funciones analíticas: límite, continuidad, derivación y ecuaciones de Cauchy – Riemann. Funciones elementales. Integración compleja: teorema de Cauchy., fórmula integral de Cauchy. Desarrollos en serie: series de Taylor. Singularidades. Desarrollos de Laurent. Ceros polos y residuos de funciones de variable compleja. Teorema de los residuos: aplicaciones al cálculo integral.** **4.- INTRODUCCION A ALGUNOS TEMAS. Transformadas integrales: aplicaciones. Ecuaciones en derivadas parciales: ecuaciónes del calor, de ondas y del potencial. Cáculo numérico: resolución de ecuaciones algebraicas, integración numérica y resolución de ecuaciones diferenciales.**
Bibliografía	. Ayres, F. "Ecuaciones diferenciales", Ed.: McGraw-Hill, Serie Schaum. . Boyce-DiPrima, "Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera", Ed.: Limusa Wiley. . Churchill R.V. y otros, "Variables complejas y sus aplicaciones", Ed.: McGraw-Hill. . Ángel-Saff, "Fundamentos de ecuaciones diferenciales", Ed.: AW Iberoamericana. . Zill, "Ecuaciones diferenciales con aplicaciones" , Ed.: AW Iberoamericana. . Makarenko, "Problemas de ecuaciones diferenciales", Ed.: Mir. . Scheid, "Análisis numérico", Ed.: McGraw-Hill, Serie Schaum. . A. David Wunsch, "Variable compleja con aplicaciones", Ed.: AW Iberoamericana. **. Glyn James, " Matemáticas avanzadas para ingeniería" Ed.: Prentice- Hall**

Imagen 1.2.3: Programa de la asignatura Métodos IV (Licenciatura en Física)

En la licenciatura en Química, las EDO se introducen en una asignatura del segundo semestre, denominada Matemáticas II. Al igual que ocurre en la licenciatura en Física, en esta materia se estudian otros contenidos (regiones del plano y el espacio, funciones y derivabilidad en dimensiones dos y tres, etc).

Objetivos.-

General : Formar al alumno de la Licenciatura en Química en aspectos básicos de Cálculo Diferencial con funciones de varias variables, de Ecuaciones Diferenciales y de Métodos Numéricos.

Metodología.-

Los temas se desarrollan en forma resumida, dada la limitación de tiempo y la orientación instrumental de la asignatura. Por tanto, se omiten las demostraciones formales de los teoremas, enseñando sólo su uso correcto.

En todos los casos se explica el significado de teoremas y propiedades mediante ejemplos, apoyándose en consideraciones gráficas siempre que sea posible.

Programa

1) ALGUNOS MÉTODOS NUMÉRICOS: Métodos básicos de interpolación, de resolución de ecuaciones y de integración.
2) ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS: Ecuaciones principales de primer orden y de primer grado. Ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes. Algunas aplicaciones.
3) REGIONES DEL PLANO Y DEL ESPACIO: Regiones del plano definidas por inecuaciones de primer y segundo grado. Planos y cuádricas en forma canónica (o resultantes de traslaciones). Regiones del espacio definidas por inecuaciones de primer y segundo grado.
4) FUNCIONES DE DOS Y TRES VARIABLES. LÍMITES Y CONTINUIDAD: Funciones reales de dos y tres variables reales (cálculos de dominios). Gráficas y curvas de nivel de funciones de dos variables. Superficies de nivel de funciones de tres variables. Ideas sobre límites en un punto (límite ordinario, límites direccionales, límites sobre curvas). Cambios de variables y uso de infinitésimos equivalentes para calcular límites. Continuidad en un punto y en un conjunto. Continuidad de funciones elementales y definidas a trozos (casos sencillos).
5) DERIVABILIDAD Y DIFERENCIABILIDAD: Derivadas parciales de primer orden y de órdenes superiores (dos y tres variables). Funciones de clase n. Igualdad de ciertas derivadas parciales mixtas. Función diferenciable en un punto y en un conjunto (expresión de la diferencial). Todas las funciones de clase 1 son diferenciables. Cálculo aproximado de valores de una función en un entorno de un punto donde sea diferenciable. Relaciones entre continuidad, derivabilidad y diferenciabilidad. Diferenciabilidad de funciones elementales y definidas a trozos (casos sencillos).
6) GRADIENTES Y DERIVADAS DIRECCIONALES: Derivadas direccionales en un punto (dos y tres variables). Vector gradiente y su relación con las derivadas direccionales. Valores máximo y mínimo de las derivadas direccionales en un punto donde la función sea diferenciable. Relación de vectores gradientes y curvas o superficies de nivel. Recta tangente a una curva de ecuación F(x,y)=0 o plano tangente a una superficie de ecuación F(x,y,z)=0 en cualquier punto donde F sea diferenciable.
7) REGLA DE LA CADENA. DERIVACIÓN IMPLÍCITA. FUNCIONES VECTORIALES: Derivación de funciones reales compuestas (diagramas de árbol). Cambios de variables independientes en ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Funciones reales de dos y tres variables definidas implícitamente (cálculo de derivadas parciales primeras y segundas). Funciones vectoriales de una y varias variables (continuidad; derivabilidad; matrices jacobianas y determinantes jacobianos; diferenciabilidad; funciones compuestas y regla de la cadena).
8) FÓRMULA DE TAYLOR Y EXTREMOS DE FUNCIONES DE DOS Y TRES VARIABLES: Fórmula de Taylor de orden n, en un punto, para una función de dos o tres variables, con resto en forma infinitesimal. Cálculo aproximado en un entorno del punto, con estimación de una cota del error cometido. Extremos relativos de funciones de dos y tres variables (hessianos). Extremos relativos condicionados (con una sola condición).

Bibliografía

Ayres, (1997) *Cálculo diferencial e integral*. McGraw Hill.
Ayres, (1987) *Teoría y problemas de ecuaciones diferenciales. McGraw Hill*
Bradley, G. L. (1998) *Cálculo de varias variables*. Prentice Hall.
Chapra, S. C. Canale, R. P. (1998) *Métodos numéricos para ingenieros para ingenieros : con aplicaciones en computadoras personales*. McGraw Hill
Demidovich, B (1981) *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático*. MIR. Moscú.
Larson, R. E.; Hostetler, R. P. (1988) *Cálculo y Geometría Analítica*, Vols. 1 y 2. McGraw Hill.
Marsden, J. E.; Tromba, A. J. (1998) *Cálculo vectorial*. Addison-Wesley Iberoamericana.
Pita Ruiz C. (1995) *Cálculo vectorial*. Prentice Hall.
Salas, S. ; Hille, E. (1992) *Calculus con Geometría Analítica*. Reverté. Madrid
Scraton, R. E. (1987) *Métodos numéricos básicos*. McGraw Hill.
Simmons, F. (1993) *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. McGraw Hill.
Stein, S. H. (1987) *Cálculo con Geometría Analítica.*. McGraw Hill.
Steiner, E. (2001) *The Chemistry maths book*. Oxford Science Publications.
Swokowski, E. W. (1988) *Cálculo con Geometría Analítica*. Wadsworth Internacional Iberoamérica.
Thomas, G. B.; Finney, R. L. (1996) *Cálculo de Varias variables*. Prentice Hall.
Zill, D. G. (1987) *Cálculo con Geometría Analítica*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
Zill, D. G. (1987) *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
Serie SCHAUM (1995) *Cálculo Superior* . McGraw Hill.

Imagen 1.2.4: Programa de la asignatura Matemáticas II (Licenciatura en Químicas)

En el desarrollo del aprendizaje no sólo influyen los contenidos que se traten en el aula, el enfoque de la enseñanza puede limitar la comprensión de los estudiantes y el uso que estos hagan de los conceptos matemáticos. Un ejemplo de ello se puede encontrar en el estudio de casos realizado por Rasmussen y Kwon (2007) en el que los estudiantes aprendieron métodos analíticos, gráficos y numéricos para resolver cuestiones relacionadas con las ecuaciones diferenciales pero estudiaron cada uno de estos métodos de forma aislada. Como consecuencia los estudiantes no establecieron las conexiones apropiadas entre las distintas representaciones ni relacionaron las propiedades matemáticas asociadas con cada uno de ellas.

En este contexto surgen las siguientes cuestiones, ¿qué ocurre cuando los estudiantes que recibieron una formación basada en los programas presentados anteriormente, resuelven problemas relacionados con las EDO pero cuyo enunciado no coincide de forma exacta con los problemas que suelen mostrarse en clase?, ¿los estudiantes identifican las herramientas y conceptos que han aprendido y que les pueden ayudar a resolver los problemas en contextos diferentes a los presentados en el aula?, ¿qué tipos de dificultades se encuentran al resolver estas actividades? En general los estudiantes parecen sentirse cómodos únicamente cuando las situaciones que se les plantean son de clasificación y posterior resolución de ecuaciones. Pero, ¿entienden los estudiantes qué es una EDO? ¿saben qué significa que una determinada función sea solución de una EDO? o ¿qué significa resolver un problema de valores iniciales?

Estas y otras preguntas relacionadas con ellas permiten delimitar el Problema de Investigación como un problema centrado en dos aspectos básicos. De una parte se trata un problema de aprendizaje, en términos de qué es lo que saben los estudiantes que reciben por primera vez un curso de EDO centrado en el tratamiento analítico del concepto. En segundo lugar se trata un problema de enseñanza que pretende determinar si, modificando la forma habitual de enseñanza, los estudiantes son capaces de comprender el concepto de EDO de una manera que atienda a una variedad de interpretaciones más completa y flexible del concepto. Para ello se desarrollará una experiencia de aula con estudiantes de un primer curso de la licenciatura en Química, siguiendo un Módulo de Enseñanza elaborado por el equipo investigador, el cuál estará basado en un enfoque de Resolución de Problemas y en el uso de una herramienta tecnológica, en este caso la calculadora Voyage™200.

Surgen entonces dos preguntas generales que se tratarán de responder en el desarrollo de este trabajo de investigación:

- ¿Cómo puede contribuir al aprendizaje del concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria una enseñanza desarrollada en un escenario de Resolución de Problemas?
- ¿Cómo influyen en el comportamiento de los estudiantes los conocimientos previos, las interacciones y el uso de herramientas tecnológicas?

Con el fin de atender estos dos aspectos, la investigación se ha realizado distinguiendo dos fases. En la primera fase se analizan los conocimientos que emplea un grupo de estudiantes cuando resuelven actividades relacionadas con las EDO, después de haber recibido una enseñanza basada en el uso de métodos algebraicos, y detectar los elementos que influyen en la aparición de dificultades en su resolución.

La segunda fase consiste en el diseño y la experimentación de un Módulo de Enseñanza cuyo objetivo es introducir el concepto de EDO, en un primer curso de la Licenciatura en Química, como parte de la red de significados asociados al concepto de derivada y promover el uso de distintos tipos de razonamiento frente a la utilización de algoritmos para resolver problemas matemáticos.

El conjunto de conceptos y resultados matemáticos relacionados con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias es muy amplio. En esta investigación se consideran sólo un pequeño subconjunto que contempla: la definición del concepto de EDO, orden de una EDO, solución general y particular de una EDO, la clasificación de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, el problema de valores iniciales y el campo de direcciones asociado a una ecuación diferencial ordinaria (este último sólo contemplado en la primera fase de esta investigación).

1.3 Preguntas de investigación

Con el fin de atender a los problemas de aprendizaje y enseñanza señalados anteriormente, las dos preguntas generales se particularizan en cuatro preguntas de investigación, que son las siguientes:

Primera pregunta de investigación ($\mathcal{P}1$):

¿Cómo utilizan los estudiantes los conceptos matemáticos que han estudiado para resolver problemas en los que intervienen conceptos y significados relacionados con las EDO?

Segunda pregunta de investigación ($\mathcal{P}2$):

¿Cómo diseñar y desarrollar en el aula una ruta de enseñanza y aprendizaje basada en la Resolución de Problemas que promueva la construcción del concepto de EDO de forma integrada con el concepto de derivada?

Tercera pregunta de investigación ($\mathcal{P}3$):

¿Qué procesos cognitivos, heurísticas y estrategias de control se desarrollarán haciendo uso de un modelo de enseñanza para las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias basado en la Resolución de Problemas?

Cuarta pregunta de investigación ($\mathcal{P}4$):

¿Qué influencia han tenido las interacciones estudiante-estudiante, estudiante-profesor y estudiante-CAS[16] tanto en el aprendizaje de las EDO como en la propia investigación?

Con la pregunta $\mathcal{P}1$, correspondiente a la primera fase de este estudio, se pretende indagar sobre las formas de razonamiento que muestran los estudiantes que han recibido una formación del concepto de EDO centrada en la clasificación y resolución de las

[16] Siglas correspondientes a "Computer Algebra System".

mismas empleando los métodos algebraicos correspondientes. Duval (1993) señala la necesidad de utilizar diferentes sistemas de representación asociados a un mismo concepto matemático y considerar la importancia de la transformación y coordinación entre distintas representaciones. Por otra parte, una de las dificultades que muestran los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas es a la hora de utilizar sus conocimientos matemáticos para resolver problemas (Schoenfeld, 1985).

Con el objetivo de aproximarnos a responder a la primera pregunta de investigación se realizará el análisis de las respuestas de una serie de estudiantes de las licenciaturas en Física y Matemáticas a un cuestionario formado por once preguntas en las que se consideran aspectos relacionados con las EDO como solución general y particular o campo de direcciones, en contextos puramente matemáticos o situados en un contexto no matemático. Esta información se completará con el análisis de las respuestas de tres de esos estudiantes a una entrevista semi-estructurada diseñada para indagar en las concepciones de estos alumnos. Los aspectos centrales que se observan en las respuestas de los estudiantes al cuestionario son los conocimientos matemáticos que muestran para responder a las distintas cuestiones, qué sistemas de representación utilizan, cómo y si priorizan el uso de uno frente a otro y la posible influencia que tiene el contexto en que se formule la pregunta en el tipo de respuesta dada por los alumnos.

Las otras tres preguntas se relacionan con el ambiente en que se desarrolle el aprendizaje puesto que es importante la concepción de los estudiantes sobre qué son las matemáticas y qué significa aprenderlas. De los numerosos elementos que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje, algunos se han revelado como aspectos que promueven el desarrollo cognitivo de los estudiantes como la interacción (Rasmussen & Marrongelle, 2006) y el uso de tecnología (Sacristán et al, 2010). La selección y/o construcción de las actividades juega un papel fundamental en la percepción que desarrollen los estudiantes sobre la disciplina matemática.

Para responder a la pregunta $\mathcal{P}2$, correspondiente a la segunda fase de la investigación, se tendrán en cuenta los diferentes elementos que conforman el Marco Conceptual (capítulo 2), así como los resultados de las investigaciones relacionadas con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las EDO, descritas en los antecedentes (sección 1.4).

Tal y como señalan Kilpatrick et al. (2009), una comprensión profunda de las matemáticas requiere que se conecten distintas piezas del conocimiento, además de que dicha conexión es fundamental para poder seleccionar y utilizar los conocimientos necesarios en la resolución de problemas. En el desarrollo de la comprensión de los estudiantes, además de los aspectos conceptuales y la fluidez en el uso de procedimientos, influyen la habilidad para formular, representar y resolver problemas, así como la capacidad para reflexionar, explicar y abstraer.

Los procesos matemáticos utilizados por los estudiantes, así como los heurísticos y las estrategias que empleen para comprobar su propio proceso de resolución darán una visión del grado de desarrollo de estas habilidades y capacidades (Schoenfeld, 1992). La utilización de actividades con características diferentes, en cuanto a contexto de enunciado y utilización de diferentes significados del concepto de derivada, puede contribuir al desarrollo de estrategias heurísticas y metacognitivas, desterrando la tendencia a la búsqueda de patrones de resolución como única vía para resolver problemas.

La pregunta $\mathcal{P}3$ se abordará a partir del análisis del desarrollo del Módulo de Enseñanza diseñado para la introducción del concepto de EDO, por parte de los estudiantes con los que se implementó (alumnos de primer curso de la licenciatura en Química). La respuesta vendrá dada en términos de la comprensión conceptual mostrada por los alumnos, la fluidez en el uso de los procedimientos matemáticos que hayan necesitado emplear para resolver los problemas propuestos, su habilidad para reflexionar, representar y resolver problemas, su capacidad para realizar procesos del PMA como abstraer, generalizar o formalizar, el uso de heurísticos y de estrategias de control del propio proceso de resolución.

Con respecto a la pregunta $\mathcal{P}4$ de investigación, la relación que se establezca entre cada estudiante y el resto de los elementos que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje influye en la concepción que el alumno se forme de la propia disciplina y en el desarrollo de su propio aprendizaje. En los modelos de enseñanza donde el profesor tiene el rol de emisor de conocimientos y el estudiantes juega un papel de receptor, muchas veces pasivo, el análisis del proceso de aprendizaje es muy limitado e incluso puede encubrir lagunas conceptuales bajo respuestas correctas (Rasmussen & Whitehead, 2003). La interacción con otros estudiantes y con el profesor permite obtener información más detallada sobre el proceso de aprendizaje.

La grabación, en vídeo y/o audio, de las intervenciones de los estudiantes durante todas las sesiones dedicadas a la resolución de los problemas planteados en el Módulo de Enseñanza para la introducción de las EDO, permite analizar el tipo de interacción que se ha producido entre los estudiantes, con los profesores y con la Voyage^{TM}200 y la manera en que esta ha podido influir en el aprendizaje de los estudiantes.

Dando respuesta a las cuatro preguntas de investigación se estarán considerando todos los aspectos involucrados en el Problema de Investigación que se está tratando y que se presenta de forma esquematizada en la siguiente tabla:

Primera fase de la investigación	*Objetivo:* Analizar los conocimientos que emplea un grupo de estudiantes cuando resuelven actividades relacionadas con las EDO, después de haber recibido una enseñanza basada en el uso de métodos algebraicos, y detectar los elementos que influyen en la aparición de dificultades en su resolución.
	Pregunta de investigación: **$\mathcal{P}1$:** ¿Cómo utilizan los estudiantes los conceptos matemáticos que han estudiado para resolver problemas en los que intervienen conceptos y significados relacionados con las EDO?

Primera fase de la investigación

Segunda fase de la investigación	*Objetivo:* Diseñar y desarrollar en el aula un Módulo de Enseñanza para introducir el concepto de EDO en un ambiente de Resolución de Problemas y analizar los aspectos del pensamiento matemático y los procesos relacionados con la disciplina que los estudiantes muestran durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza.
	Preguntas de investigación: ***P2:*** ¿Cómo diseñar y desarrollar en el aula una ruta de enseñanza y aprendizaje basada en la Resolución de Problemas que promueva la construcción del concepto de EDO de forma integrada con el concepto de derivada? ***P3:*** ¿Qué procesos cognitivos, heurísticas y estrategias de control se desarrollarán haciendo uso de un modelo de enseñanza para las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias basado en la Resolución de Problemas? ***P4:*** ¿Qué influencia han tenido las interacciones estudiante-estudiante, estudiante-profesor y estudiante-CAS tanto en el aprendizaje de las EDO como en la propia investigación?

Segunda fase de la investigación

1.4 Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las EDO.

La evolución en la manera de caracterizar las matemáticas y su aprendizaje han resultado esenciales en el desarrollo de investigaciones en el campo de la Educación Matemática. La conceptualización de la disciplina incluye tanto aspectos generales de los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina como temas particulares relacionados con conceptos matemáticos concretos. Entre los temas de estudio se destacan aquellos relacionados con los elementos que influyen en el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes (Schoenfeld, 1992) y aquellos que hay que promover durante el proceso de enseñanza con el fin de que el aprendizaje sea exitoso (Kilpatrick et al., 2009), o con la creación de entornos de aprendizaje que introduzcan variantes en el proceso, como el uso de tecnología, la interacción entre los estudiantes o el tipo de actividades que los estudiantes deben realizar, entre otros (por ejemplo Gravemeijer, 1994; Rasmussen & Marrongelle, 2006; Sacristán et al, 2010; Santos, 2007). Otro tipo de investigaciones se encargan de analizar la influencia que estos aspectos generales tienen en el aprendizaje de conceptos matemáticos particulares, documentando qué ocurre cuando se introduce el uso de los mismos en el aula, o también, detectando dificultades relacionadas con el aprendizaje de conceptos matemáticos (por ejemplo Camacho, Depool & Santos-Trigo, 2009; Drijvers, 2003; Rasmussen & Kwon, 2007; Reyes-Rodríguez, 2009).

En esta sección se exponen algunos de los resultados más relevantes de dichas investigaciones, seleccionando aquellos que están directamente relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales y, por tanto, con el Problema de Investigación que se está tratando. Se reflejan las dificultades que distintos investigadores han encontrado en el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales por parte de los estudiantes, las características principales de las propuestas de enseñanza que se han formulado recientemente relacionadas con este concepto y la influencia que han tenido determinados aspectos de tipo cognitivo y social en el desarrollo del aprendizaje de los alumnos.

De esta manera, en un primer apartado, se revisan una serie de investigaciones que presentan las dificultades que encuentran los alumnos cuando estudian distintos aspectos de las ecuaciones diferenciales tales como: las soluciones de equilibrio, el uso del campo de direcciones, la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales, entre otros. En la segunda sección se describe el proyecto IO-DE (Inquiry-Oriented Differential Equations), cuya propuesta de enseñanza del concepto se basa en el hecho de que las actividades de enseñanza deben resultar reales a los estudiantes, en el sentido de la Educación Matemática Realista, y servir de punto de partida para que los alumnos comiencen a indagar en las respuestas. Desde esta perspectiva, los estudiantes también tienen que reinventar algunas ideas y métodos matemáticos y debe existir un balance en el tratamiento de diferentes sistemas de representación en las actividades que se propongan (Rasmussen & Kwon, 2007).

El catálogo de dificultades que distintos investigadores han detectado en el tratamiento que hacen los estudiantes de las ecuaciones diferenciales servirá para establecer los antecedentes de la primera fase de esta investigación, en la que se reflejan y analizan los conocimientos que determinados estudiantes universitarios muestran en sus respuestas a una serie de cuestiones relacionadas con las EDO y al resolver problemas que involucran el uso de este concepto.

Los elementos necesarios para el diseño del Módulo de Enseñanza con el que se introducirá el concepto de EDO en un primer curso de la licenciatura en Química vienen aportados por el análisis de las características de las propuestas de enseñanza del concepto de EDO y de otros conceptos relacionados con él y la influencia que los aspectos introducidos en dichas propuestas tienen en el proceso de aprendizaje, unido con el análisis realizado en la primera fase de la investigación. El análisis posterior de los conceptos, procesos, heurísticas y habilidades matemáticas que los estudiantes muestran durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza contribuye al desarrollo de la investigación en el campo de la Educación Matemática, mostrando las aportaciones de otra perspectiva para la introducción de conceptos matemáticos en los niveles universitarios.

1.4.1 Dificultades en el aprendizaje de las EDO

Partiendo del análisis de distintos libros de texto utilizados en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, Hernández (1995) señala algunos obstáculos cognitivos[17] relacionados con el propio concepto, con las soluciones de una ecuación diferencial y con los métodos de resolución. Una de las dificultades mencionadas por Hernández hace referencia al hecho de que, en la definición de ecuación diferencial, se utiliza la

[17] Hernández utiliza este término en el sentido que lo conciben Bachelard, Brousseau y Cornu (Hernández, 1995, p. 90).

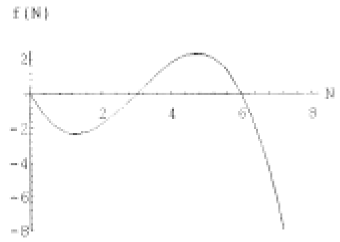
expresión $\frac{dy}{dx}$ como operador derivada de la función $y(x)$ mientras que en varios de los métodos de resolución, como al separar variables o resolver EDO exactas, la misma expresión se considera como un cociente de diferenciales. En cuanto a la solución de una EDO, el autor refleja la inconsistencia que existe al identificar este concepto con una función y posteriormente emplear expresiones que no son funciones como ejemplos de soluciones de ecuaciones diferenciales, como el caso en que dichas soluciones vienen expresadas en la forma $x = g(y)$, siendo x e y las variables independiente y dependiente, respectivamente. Por último, Hernández (1995) menciona el gran cambio que sufren los métodos de resolución al pasar de las EDO de primer orden, donde lo fundamental es calcular integrales, a las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes, que se resuelven calculando las raíces de un polinomio. Los procesos seguidos en la resolución de unas y otras también son diferentes: en el caso de las EDO de primer orden se aplica un método que conduce a la expresión de la solución y en el caso de las de segundo orden lineales se propone la función exponencial como solución de la EDO y, a partir de ella, se construye la solución general de la ecuación.

Algunos de estos obstáculos que Hernández (1995) analiza y que encuentra en los libros de texto, son detectados como dificultades que presentan los estudiantes cuando se les plantean cuestiones en las que tienen que utilizar sus conocimientos acerca de las ecuaciones diferenciales. Villar-Liñan y Llinares-Ciscar (1996) analizan los errores que cometen los estudiantes de un segundo curso de la Licenciatura en Química cuando se les plantean cuestiones de definir, ejemplificar y modelizar, relacionadas con las ecuaciones diferenciales. El objetivo de este trabajo consistía en establecer el modo en que los estudiantes son capaces de definir el concepto de ecuación diferencial y la proximidad entre esta definición y la definición formal. En esta investigación participaron un total de 100 alumnos que previamente habían cursado la materia dedicada al estudio de las ecuaciones diferenciales, de un trimestre de duración. Los resultados de esta investigación muestran que aunque sólo la décima parte de los estudiantes definió de forma precisa el concepto de ecuación diferencial, señalando como ejemplos diferentes EDO de variables separadas o lineales, casi la mitad de los alumnos propuso ejemplos correctos de ecuaciones diferenciales. Esto lleva a los autores a concluir que “el hecho de no definir una noción no es obstáculo para su identificación en un determinado contexto” y que “la imagen del concepto [de ecuación diferencial que tienen los alumnos] está muy ligada a expresiones formales, casos particulares y ejemplos concretos” (Villar-Liñan & Llinares-Ciscar, 1996, p. 99). A la hora de presentar ejemplos de ecuaciones diferenciales, la cuarta parte de los alumnos que participaron en esta investigación tiene dificultades con la notación matemática, mostrando expresiones como $\frac{\partial y}{xy} + \frac{\partial x}{y} = 0$, o no identifican correctamente las ecuaciones que ellos mismos proponen como ejemplos y sólo tres de los 100 alumnos señala algún ejemplo relacionado con las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales como la ecuación de onda o la relación entre la posición y la velocidad de un cuerpo. En el cuestionario utilizado en esa investigación también se pide a los estudiantes que respondan si un problema determinado puede ser resuelto empleando ecuaciones diferenciales; el argumento de trece de los estudiantes se basa en la comparación del problema planteado con aquellos trabajados en el aula, otros trece alumnos optan por resolver la actividad para justificar que pueden utilizarse las EDO y cuatro estudiantes interpretan de forma errónea la parte del enunciado que indica que la bola de naftalina se evapora “a un índice proporcional a su superficie”. Los resultados de esta investigación son un ejemplo de la dependencia que tienen los estudiantes de los conocimientos y de las formas en que estos son transmitidos por el profesor.

Rasmussen (2001) hace referencia a las dificultades que entraña el concepto de solución de una ecuación diferencial. Estas dificultades las asocia con el hecho de que es un espacio formado por funciones y no por valores numéricos. Esta conclusión la extrae de un estudio sobre la concepción que tienen los estudiantes acerca de las soluciones de equilibrio de una EDO, las aproximaciones numéricas y la estabilidad. Los resultados se presentan con base en las entrevistas realizadas a seis estudiantes de ciencia e ingeniería que habían recibido un curso de ecuaciones diferenciales en el que se utilizaban los sistemas de representación algebraico, gráfico y numérico.

Rasmussen (2001) habla del “dilema de la función como solución” (p. 64), refiriéndose a que el hecho de que las soluciones de una EDO sean funciones y no valores numéricos, influye en la forma en que los estudiantes interpretan las soluciones de las ecuaciones diferenciales, en general, y las soluciones de equilibrio, en particular. Una de las cuestiones que el autor plantea a los estudiantes es la siguiente:

Supongamos que una población está modelada por la ecuación $\frac{dN}{dt} = f(N)$ donde $f(N) = -4N\left(1-\frac{N}{3}\right)\left(1-\frac{N}{6}\right)$. La gráfica de f(N) se muestra debajo.



(a) ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio?
(b) ¿Cuáles de las soluciones de equilibrio son estables? ¿e inestables?
(c) Para los siguientes valores de la población inicial $N(0)$, ¿cuál es el límite de la población?
(i) $N(0)=2$, (ii) $N(0)=3$, (iii) $N(0)=4$, (iv) $N(0)=7$

Los seis alumnos que Rasmussen (2001) entrevista contestan correctamente a los dos primeros apartados de la actividad; identifican N=0, 3 y 6 como soluciones de equilibrio, observando los puntos de corte de la función $f(N)$ con el eje horizontal o igualando el segundo miembro de la EDO a cero, y estudian la estabilidad de las mismas usando un esquema como el que se muestra en la imagen 1.4.1. Pero los estudiantes no interpretan el esquema como una representación gráfica de las funciones solución de la EDO, como demuestra el hecho de que cuatro de los alumnos lo interpretaran “sólo como un test de estabilidad” (Rasmussen, 2001, p. 66); al responder en el primer apartado que las soluciones de equilibrio son 0, 3 y 6, no están pensando en funciones constantes, sino en valores en los que hay que representar una línea horizontal en el esquema para estudiar la estabilidad. Rasmussen atribuye esta interpretación de los estudiantes al hecho de que no dispongan de una expresión algebraica para las funciones solución, y menciona la necesidad de que los alumnos sean conscientes de que el resultado de su actividad matemática son funciones y no números. Otra lectura que el autor saca de las respuestas de estos estudiantes a esta pregunta es que se caracterizan por una manipulación gráfica mecánica, consecuencia de una forma de actuar y pensar en matemáticas consistente con sus experiencias en el aula.

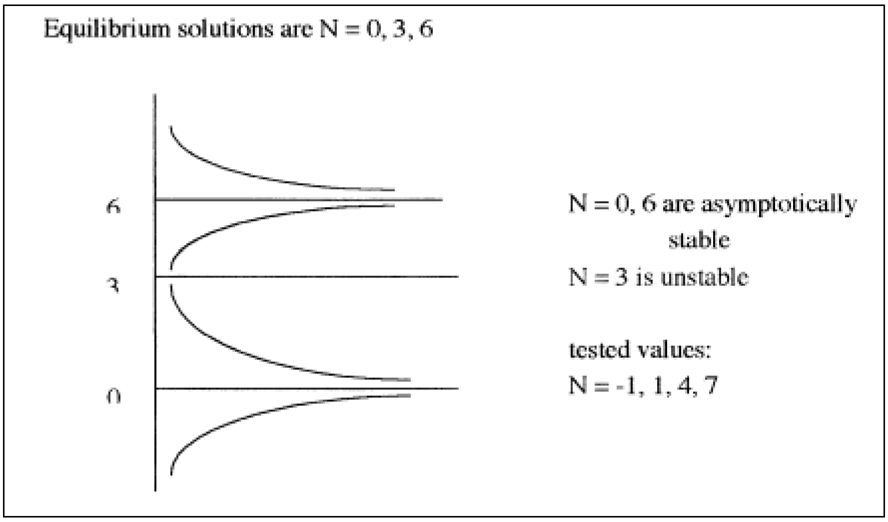


Imagen 1.4.1: Esquema para analizar la estabilidad de las soluciones de una EDO

Por otra parte, la mitad de los estudiantes que participaron en esta investigación, generalizaron de forma incorrecta el razonamiento empleado para obtener las soluciones de equilibrio, considerando que sólo debe verificarse que la derivada se anule y olvidando que, además, deben ser soluciones de la EDO. Por ejemplo, indicaban que la solución de equilibrio de la ecuación $\frac{dy}{dt} = y - t$ tiene por expresión $y = t$. Según Rasmussen en este tipo de respuestas pueden estar influyendo dos cosas: el concepto que tengan los estudiantes de qué es la solución de una ecuación diferencial y si consideran que las constantes pueden ser consideradas funciones.

Zandieh y McDonald (1999) identificaron esta misma dificultad en una investigación en la que realizaron entrevistas paralelas a dos grupos de estudiantes, con 13 y 10 alumnos. Los autores apuntan como posible causa de estos errores conceptuales al hecho de que en muchas de las actividades que realizan los estudiantes no es necesario pensar en la variable y, considerando ecuaciones de la forma $y' = f(x, y)$, como una solución o una función, por ejemplo al aplicar los métodos algebraicos de resolución de EDO, donde se limitan a considerar las variables x e y como símbolos que deben manipular conforme a unas reglas.

Guerrero, Camacho y Mejía (2010) también observaron que los estudiantes consideraban las funciones constantes sólo como números y no como funciones. Estos autores realizan una investigación con 14 estudiantes del segundo semestre de Ingeniería en Sistemas Computacionales que participaron voluntariamente en el desarrollo de cinco sesiones adicionales al curso de Ecuaciones Diferenciales que estaban recibiendo, en el que no se trataba el uso del registro gráfico como medio de solución de EDO. En las dos primeras sesiones, los estudiantes respondieron a dos cuestionarios diferentes: el primero sobre la derivada, la recta tangente a una curva, la relación entre ambos y los conceptos de EDO y solución de la misma. El segundo cuestionario presentaba a los estudiantes una adaptación de la actividad utilizada por Rasmussen (2001), con la que pretendían observar qué datos extraen los estudiantes cuando sólo disponen de información gráfica para resolver una actividad. Las otras tres sesiones se dedicaron a la resolución, por parte de los estudiantes, de dos tareas, utilizando un applet elaborado a partir de la plataforma Descartes que permitía modificar los parámetros de las EDO y mover las gráficas para posicionarlas en diferentes condiciones iniciales. Las dos tareas estaban relacionadas con la descripción del comportamiento de las soluciones de una EDO que modela la variación de una población de peces, en un lago, a lo largo del tiempo. Los resultados de esta investigación muestran que los estudiantes recuerdan las definiciones de algunos conceptos de cálculo pero les resulta imposible aplicarlas en un nuevo contexto de conocimiento, en este caso, el bosquejo de campos de direcciones y la interpretación de soluciones. Estos estudiantes también mostraron muchas dificultades para coordinar los registros gráfico y algebraico: no lograron articular el registro algebraico para describir aspectos que habían observado en la representación gráfica, les resulta difícil obtener información acerca de las soluciones de una EDO cuando no disponen de una expresión algebraica de la misma y consideran las funciones constantes sólo como números y no como funciones.

Raychaudhuri realiza una investigación, cuyos resultados muestra en dos artículos (Raychaudhuri, 2007; 2008), con seis estudiantes de un curso de introducción a las ecuaciones diferenciales donde la mayoría de los alumnos eran de ciencias o ingeniería. En este curso, la primera técnica utilizada para obtener las soluciones de una ecuación diferencial fue la analítica, utilizando los algoritmos para encontrar las fórmulas explícitas de las soluciones, seguida de un análisis cualitativo del comportamiento de las soluciones. Además se introdujeron dos teoremas de existencia y unicidad de soluciones, uno para las ecuaciones lineales y otro para las no lineales (teoremas 1 y 2 respectivamente).

Teorema 1. Si las funciones $p(t)$ y $g(t)$ son continuas en un intervalo abierto $I:\alpha < t < \beta$ que contiene al punto $t = t_0$, entonces existe una única función $y = \phi(t)$ que satisface la ecuación diferencial $y' + p(t)y = g(t)$, para cada $t \in I$, y que también satisface la condición inicial $y(t_0) = y_0$, donde y_0 es un valor inicial arbitrario.

Teorema de existencia y unicidad de soluciones para EDO lineales

Teorema 2. Si las funciones f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en el rectángulo $a < t < b$, $c < y < d$ que contiene al punto (t_0, y_0). Entonces, en algún intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$ contenido en $a < t < b$ existe una única solución $y = \phi(t)$ del problema de valores iniciales $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.

Teorema de existencia y unicidad de soluciones para EDO no lineales

Estos teoremas fueron explicados y utilizados para resolver problemas, pero no fueron demostrados. Los seis estudiantes participaron de forma voluntaria en una serie de entrevistas en las que disponían del enunciado de los teoremas. Los tópicos trabajados en dichas entrevistas fueron las ecuaciones diferenciales y sus soluciones y los teoremas de existencia y unicidad. Cada estudiante participó en cinco entrevistas que se hicieron a lo largo del semestre, excepto uno de ellos que sólo asistió a las dos primeras.

En estos trabajos el autor analiza cómo interpretan los estudiantes el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales lineales, cómo y cuando lo utilizan y cómo se modifica esa interpretación cuando los alumnos emplean el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales no lineales (Raychadhuri, 2007). En lo referente a las soluciones de las ecuaciones diferenciales, Raychadhuri (2008) analiza las construcciones de los estudiantes de este concepto, como entidad y como objeto y el papel que juegan los procesos matemáticos empleados y el contexto de trabajo en dichas construcciones.

Para analizar cómo construyen los estudiantes el concepto de solución de una EDO de primer orden, Raychadhuri (2008) considera cuatro facetas a las que pueden asociarse determinadas definiciones matemáticas: contexto, entidad, proceso y objeto. En el caso particular de las soluciones de una EDO, la definición muestra una entidad matemática (una función) en un contexto (el de las EDO) y que se convierte en objeto (solución) por medio de una serie de procesos (comprobar que satisface la EDO o resolver la ecuación). El autor distingue entre “proceso de definición” (comprobar que la función satisface la ecuación) y “proceso de generación” (resolver la EDO). Raychadhuri (2008) analiza cómo son las construcciones que los estudiantes hacen de la solución como entidad y como objeto y el papel que desempeñan, en esa construcción, el contexto y los procesos que transforman la entidad en un objeto. Para realizar este análisis compara las imágenes que los estudiantes muestran del concepto de solución de una ecuación algebraica con las imágenes sobre el concepto de solución de una ecuación diferencial. Lo primero que observa es que mientras que las ecuaciones algebraicas las asociaban con una relación entre variables, consideran una ecuación diferencial, inicialmente, como “algo que tiene y'” (p. 166) y no como una relación entre la función desconocida, una o mas de sus derivadas y la variable independiente. Este significado asociado al concepto de ecuación diferencial influye necesariamente en la entidad que los alumnos den al concepto de solución de una EDO, que se corresponde con el de una función que, en algunos casos puede ser un número y que puede ser representada gráficamente. El concepto de solución de una EDO como objeto, es visto por algunos estudiantes de los que participan en esta investigación como la función a partir de la que se origina la ecuación, mediante el proceso de derivación. De esta forma, la solución de una EDO no se considera como algo que satisface la ecuación, como ocurría en el caso de las ecuaciones algebraicas. Los estudiantes también identifican la solución de una EDO como el resultado de un proceso de integración, como muestra el hecho de que para comprobar si una expresión es solución de una EDO, resuelvan la ecuación y comparen la expresión obtenida con la dada.

Raychaudhuri (2007) construye un marco que le permite analizar el uso que hacen los estudiantes de los teoremas, en concreto, los teoremas de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales. En dicho marco distinguen entre cuatro partes del teorema: conceptos, condiciones, conclusiones y conexiones. Por ejemplo, en el teorema 1, los conceptos involucrados serían la continuidad, función y ecuación diferencial; las condiciones serían la continuidad en I, que t_0 sea un valor de I o que y_0 sea un valor arbitrario; la conclusión sería que existe solución del problema de valores iniciales y que es única. Raychadhuri añade como elemento importante para la comprensión del teorema el que se establezcan conexiones entre esos tres componentes del enunciado. Los resultados muestran que la mayoría de los alumnos entrevistados consideran que sólo puede existir una solución única del problema de valores iniciales si los coeficientes son continuos. Los razonamientos que llevan a los alumnos a considerar este hecho son: una interpretación errónea del conector si-entonces, la creencia de que no se puede obtener una función solución continua a partir de coeficientes discontinuos y de que las funciones discontinuas no son integrables en ningún intervalo. En este caso, la conexión que los estudiantes establecen entre los diferentes conceptos que forman parte del enunciado del teorema es la que determina las conclusiones a las que llegan con las condiciones que tienen. En lo referente al uso del teorema de existencia y unicidad de soluciones para una ecuación diferencial no lineal (teorema 2), el análisis de las respuestas de los seis alumnos que participan en la investigación muestra que los estudiantes sólo consideran importante que las funciones f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ sean continuas, considerándolo además un proceso matemático que deben realizar, pero ignoran la restricción que surge en el intervalo de definición de la solución del problema de valores iniciales.

Rasmussen y Ruan (2008) proponen el uso de un enunciado alternativo para el teorema 2, de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales, en el que las condiciones de continuidad de las funciones f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ se sustituyen por la condición de Lipschitz, $|f(t,y)-f(t,z)| \leq L|y-z|$ para todo $t \in (a,b)$, y todo $y, z \in (c,d)$, siendo L una constante. La investigación realizada por estos autores se enmarca dentro del proyecto IO-DE (Inquiry-Oriented Differential Equations), al que, por su relevancia en el campo de la investigación sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de las EDO, se dedica la siguiente sección. La presentación de los resultados del estudio realizado por Rasmussen y Ruan se posponen, por tanto, a la sección 2.3 de este mismo capítulo.

La tecnología se presenta como un medio para superar algunas de las dificultades que se han mencionado hasta el momento, como el hecho de que los estudiantes consideren que una determinada ecuación no tiene solución por no disponer de una expresión algebraica de la misma (Rasmussen, 2001), y como una herramienta para el análisis crítico de los métodos algebraicos de resolución de las EDO. Por ejemplo, Tall y West (1986) manifiestan algunos de los aspectos positivos que lleva consigo el uso de software para el estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, entre los que se encuentra que los estudiantes pueden visualizar la representación gráfica de familias de funciones solución de EDO como $y' = y^2 - x$, $y' = sen(xy)$ e $y' = e^{xy}$, cuya solución algebraica no puede expresarse en términos de funciones elementales. Los alumnos, a menudo, confunden el hecho de que no pueda expresarse la solución en estos términos con la no existencia de soluciones. La visualización de las representaciones gráficas recalca la existencia de las soluciones de este tipo de EDO y promueve el análisis de las soluciones, facilitando un estudio cualitativo de las mismas.

La tecnología, además, permite tratar aspectos teóricos de las ecuaciones diferenciales, mostrando, por ejemplo, bajo qué circunstancias una afirmación es válida o no. Tall (1986) presenta algunos ejemplos de ideas erróneas que el uso de software ayuda a desterrar como que los métodos algebraicos de resolución de EDO proporcionan la expresión más general de las soluciones. En numerosas ocasiones el propio método hace que se descarten soluciones al dividir por expresiones que pueden anularse. Por ejemplo, al resolver la ecuación $yy'\sec(2x) = 1 - y^2$ separando las variables se omiten las soluciones $y = \pm 1$, que no se pueden obtener a partir de la expresión "general" de la solución, $-\ln|1 - y^2| = sen(2x) + C$.

La representación gráfica del campo de direcciones asociado a una EDO y de soluciones particulares de la misma también hace que se cuestione la validez de determinadas expresiones algebraicas obtenidas como solución general de la ecuación, al utilizar algunos de los métodos estándares de resolución. Tall (1986) muestra el ejemplo de la ecuación $xy' = 3y$, cuya solución general, obtenida mediante el método de separación de variables, queda expresada de la forma $y = kx^3$, siendo k una constante arbitraria. Al representar gráficamente la solución particular correspondiente a la condición inicial $y(1) = 4$, obtiene la imagen mostrada a continuación (Imagen 1.4.2), que no se corresponde con la función $y = 4x^3$, que sería la que obtendríamos empleando el sistema de representación algebraico.

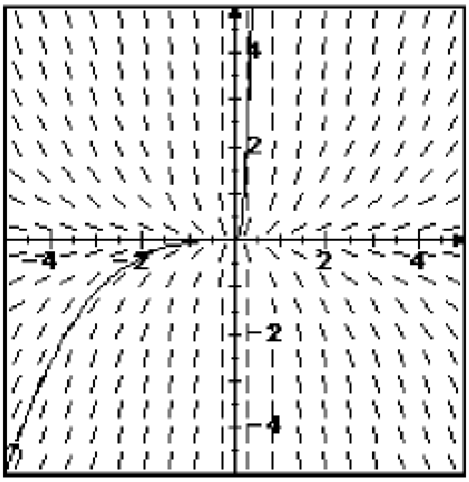


Imagen 1.4.2: Representación gráfica de la solución de $xy' = 3y$ que pasa por (1,4)

En los trabajos de Tall (1986) y Tall y West (1986) el poder del software radica en facilitar la representación gráfica de campos de direcciones asociados a las EDO y de soluciones particulares de las mismas, haciendo factible la consideración del uso del sistema de representación gráfico que sin el uso de tecnología se convierte en una tarea muy engorrosa a la que hay que dedicar mucho tiempo. Pero estos trabajos muestran varias posibilidades y motivos por los que debería utilizarse el sistema de representación gráfico, a la par que el algebraico, y una de las más poderosas es el cuestionarse las expresiones obtenidas empleando los métodos tradicionales de resolución de EDO.

La propia naturaleza de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, muchas de las cuales no se pueden clasificar dentro de los tipos establecidos o, aún pudiendo ser clasificadas y resueltas, no proporcionan una expresión algebraica de la solución fácil de analizar, motivó el desarrollo de propuestas en las que se estudian las EDO con un enfoque cualitativo, empleando argumentos geométricos. Brodetsky (1919; 1920a,b,c) formula una de esas propuestas, en un momento en el que no se disponía de herramientas tecnológicas que representaran el campo de direcciones ni resolvieran las ecuaciones. Se trataba de realizar un estudio analítico de propiedades geométricas de las soluciones de ecuaciones como $y' = x^2 + y^2$, $y' = x + e^y$, $(a^2 - x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x^2 = 0$, cuya solución, empleando métodos algebraicos, es sumamente complicada, o $y' = \frac{1}{x}$, cuya resolución algebraica conduce a numerosos estudiantes a cometer el error de considerar sólo las soluciones correspondientes a un valor positivo de la variable independiente. El método de Brodetsky consistía en establecer regiones donde las funciones solución verificaran propiedades de monotonía o concavidad, es decir, donde las derivadas primera y segunda de la función solución cumplieran ciertas condiciones de signo.

Este método fue utilizado por Hernández (1995) para introducir el estudio de las ecuaciones diferenciales con un enfoque gráfico. Hernández se apoya en el uso de software para introducir las ecuaciones diferenciales bajo un enfoque numérico, seguido del gráfico y exponiendo en último lugar el algebraico y la coordinación entre los tres sistemas[18]. Este autor lleva a cabo la investigación con dos grupos de alumnos de características diferentes: 12 graduados en ingeniería eléctrica que cursaban una maestría en esta especialidad y 20 profesores que cursaban una maestría en Educación Matemática y cómputo educativo. La evaluación de su propuesta de enseñanza la divide en dos partes; en primer lugar los estudiantes deben responder, empleando únicamente lápiz y papel, a un total de seis cuestionarios que contemplan el uso de los marcos gráfico y algebraico tanto de forma individual como conjunta, planteando cuestiones en las que los estudiantes deben relacionar diferentes expresiones y/o representaciones gráficas de familias de funciones con expresiones algebraicas de EDO y/o distintos campos de direcciones. En segundo lugar se plantea a cada uno de los grupos de estudiantes un problema de un circuito eléctrico que deben resolver, en primer lugar, analizándolo con el marco que cada estudiante elija para, posteriormente seguir un patrón de respuestas que les obliga a considerar los tres marcos y establecer relaciones entre ellos. Los resultados mostrados por los estudiantes en la primera parte de la evaluación son análogos para los dos grupos: muestran habilidad para trabajar dentro de cada uno de los marcos por separado y mayores dificultades para establecer relaciones entre los marcos gráfico y algebraico. En la segunda parte de la actividad, el grupo de profesores obtiene peores resultados que el de graduados en ingeniería. El autor atribuye esta diferencia a la pericia que muestran los últimos en el uso del software en comparación con el grupo de profesores y a que el enunciado de la actividad propuesta resultaba también más cercano para ellos.

Los resultados mostrados por Habre (2000) indican que los estudiantes que reciben una instrucción de las EDO con énfasis en el aspecto geométrico no necesariamente utilizan este registro para resolver ecuaciones. El autor analiza las respuestas de 9 de los 26 alumnos que asistían a un curso de cálculo cuyo programa está dividido en partes iguales en el estudio de cálculo de varias variables y las ecuaciones diferenciales. Los nueve alumnos participaron en una entrevista en las que se les preguntó "¿qué viene a tu mente cuando se te pide resolver una EDO?" (Habre, 2000, p. 461) para pedirles a

[18] Aunque durante la instrucción utiliza distintos software para el trabajo en cada uno de los tres marcos, finalmente opta por el uso de *Derive* como programa que integra los tres campos de trabajo: numérico, gráfico y algebraico.

continuación que resolvieran las ecuaciones $y'=2y-y^2$ e $y'+ky=-t$. La respuesta de los nueve estudiantes a la pregunta anterior fue que pensaban en comprobar si la EDO era separable, lineal o exacta y, consecuentes con esa afirmación, clasificaron las ecuaciones planteadas e intentaron resolverlas con el método algebraico correspondiente. Observó que la idea de resolver una ecuación diferencial permanecía siendo esencialmente algebraica para los estudiantes y que ninguno de ellos consiguió transferir información entre los aspectos visuales y gráficos de una EDO. A pesar de participar en un curso en el que se ponía énfasis en el tratamiento gráfico de las EDO, la primera opción de los estudiantes era resolver las ecuaciones.

Guerra-Cáceres (2003) realiza un estudio de casos con cuatro estudiantes que han recibido una formación del mismo tipo que en el trabajo de Habre (2000), encontrando que los estudiantes tienden a resolver las actividades mediante la búsqueda de un algoritmo que les permita obtener la expresión algebraica de la solución. En el cuestionario utilizado en su investigación pide a los estudiantes bosquejar la gráfica de una solución particular de cuatro ecuaciones diferenciales de la forma $y'=f(x,y)$ donde la función $f(x,y)$ se presenta en algunos casos con una expresión algebraica y en otros con una representación gráfica. En dos de las actividades los estudiantes, además, debían calcular el límite de dicha solución particular en el infinito. En todos los casos los estudiantes intentaron resolver las ecuaciones con el método de separación de variables y representar la solución particular a partir de la expresión algebraica obtenida, pero ninguno de ellos consiguió resolver correctamente las preguntas del cuestionario, presentando dificultades de tipo conceptual y simbólico relacionadas con el significado del método de separación de variables. A partir de las entrevistas realizadas a los estudiantes, el autor concluye que

> el esquema del concepto de EDO de cada estudiante se limita a un objeto algebraico en el que se relaciona una función, la variable independiente y algunas derivadas, así como una noción de resolver una ecuación que se restringe a una concepción de acción y de proceso en el registro algebraico[19] (Guerra-Cáceres, 2003, p. 4).

Además de que los estudiantes tienden a identificar las estrategias mostradas para el desarrollo de un análisis cualitativo con algoritmos, convirtiendo así las heurísticas en rutinas compartimentalizadas.

Este trabajo concluye señalando que, el uso de los métodos de resolución por parte de los estudiantes que estudian bajo esta perspectiva se limita a una manipulación algebraica que no se traduce de forma espontánea en una habilidad para el desarrollo de actividades de conversión entre diferentes representaciones, provocando así la limitación de la comprensión de los conceptos y procesos matemáticos empleados.

Rasmussen y Whitehead (2003) realizan una revisión de trabajos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las EDO cuyo resultado es la presentación de algunas estrategias, dificultades y formas de comprender de los estudiantes en relación con la coordinación de las representaciones algebraica, gráfica y numérica, la creación e interpretación de varias representaciones, incluyendo diagramas de fase y de bifurcación y el hacer

[19]Los términos "esquema", "objeto", "acción" y "proceso" empleados por este autor responden a que su estudio está enmarcado dentro de la teoría APOS que describe las construcciones mentales de los estudiantes en términos de acciones, procesos, objetos y esquemas.

predicciones justificadas sobre el comportamiento de las funciones soluciones en el infinito.

La noción de “esquema” también es utilizada por Donovan (2004) en un estudio de seis estudiantes en los que observa que el grupo de alumnos se divide en aquellos con una “comprensión relacional”, es decir, que saben lo que hacen y por qué, y los que presentan una “comprensión instrumental”, utilizando reglas sin razonar, de las ecuaciones diferenciales de primer orden. Los estudiantes que participaron en esta investigación fueron seleccionados de entre un grupo de alumnos que cursaban una asignatura de introducción a las ecuaciones diferenciales, para lo que se utilizó un cuestionario que se les pasó durante la primera semana de clase. A los seis alumnos seleccionados se les entrevistó en tres momentos a lo largo del curso, en relación con una serie de tareas de tres tipos diferentes. En la primera entrevista se pedía a los estudiantes que dijeran lo que quisieran acerca de una serie de imágenes en las que aparecían distintas EDO y campos de direcciones, en la segunda debían agrupar otras imágenes con los criterios que cada estudiante eligiera. En estas últimas imágenes se incluían, además de distintas ecuaciones diferenciales y campos de direcciones, expresiones algebraicas y representaciones gráficas de una serie de funciones. La tercera tarea consistía en resolver un problema no rutinario. En este artículo, Donovan (2004) presenta el ejemplo de dos estudiantes, uno de ellos con una comprensión conceptual y otro cuya comprensión es de tipo instrumental, observando que la gran diferencia entre ellos es que el estudiante que ha desarrollado una comprensión conceptual de las ecuaciones diferenciales establece relaciones entre distintos tipos de representaciones y conecta diferentes conceptos matemáticos.

Como se ha podido observar, son numerosas las dificultades con las que se encuentran los estudiantes a la hora de resolver actividades relacionadas con las EDO. Sin embargo, no existe el mismo volumen de investigaciones que propongan nuevas formas de introducir el concepto en los primeros cursos universitarios (con excepción de la Ingeniería Didáctica desarrollada por Artigue, a finales de los 90, y el proyecto IO-DE, que será descrito en detalle en la siguiente sección). ¿Por qué ocurre esto? La investigación realizada por Moreno & Azcárate (2003) sobre las concepciones y creencias de seis profesores universitarios, expertos en matemáticas, que impartían docencia a estudiantes de química, biología y veterinaria, acerca de la enseñanza de las EDO, puede ayudar a explicar por qué persiste la enseñanza tradicional en los primeros cursos universitarios. Algunas de las creencias que mostraron los profesores en esta investigación fueron: que los estudiantes aprenden ecuaciones diferenciales por imitación, memorización y esquemas de resolución vistos en clase y son incapaces de pensar, razonar y crear por ellos mismos; las definiciones son algo mecánico que tiene que aprenderse, sin pretender entender; sería más interesante interpretar un modelo matemáticamente que invertir tanto tiempo en resolver diferentes tipos de EDO utilizando algoritmos mecánicos pero resulta mucho más fácil aprender a resolver ecuaciones que reconocer un modelo por lo que los profesores optan por el primer enfoque; la utilización de ordenadores de forma sistemática obligaría a modificar el modelo de enseñanza de las EDO, dando más importancia a los métodos gráficos y numéricos. Este listado de creencias del propio profesorado encargado de plantear los modelos de enseñanza para el aprendizaje de las EDO parece mostrar que, aunque la modelización es un tema interesante, su enseñanza resulta complicada, resultando más cómodo centrarse en la parte del currículo dedicada al uso de procedimientos matemáticos.

Afortunadamente para la investigación en Educación Matemática y para la enseñanza en general, no todos los profesores opinan de la misma forma que los que intervinieron en la investigación anterior, como se verá en la siguiente sección.

1.4.2 El proyecto IO-DE.

En el apartado anterior se mostró que, aunque el estudio de las ecuaciones diferenciales con un enfoque gráfico o cualitativo produce resultados satisfactorios en el sentido de que los estudiantes responden correctamente a preguntas en las que se integran distintas representaciones, esas respuestas correctas pueden estar basadas en ideas erróneas o lagunas conceptuales. Rasmussen (2001) presenta el ejemplo de una serie de estudiantes que responden correctamente cuando se les pide obtener las soluciones de equilibrio de una EDO pero que, en una entrevista, muestran que asocian este concepto con el cálculo de los valores en los que la derivada se anula, argumento válido únicamente en el caso de las ecuaciones autónomas.

El proyecto IO-DE (Inquiry-Oriented Differential Equations) surge con el objetivo de introducir en el proceso de enseñanza un elemento que permita analizar cómo piensan o razonan los estudiantes, permitiendo contemplar no sólo su desarrollo cognitivo sino también aspectos relacionados con la clase de matemáticas. Este proyecto abarca tanto las actividades del profesor como las de los estudiantes, que aprenden matemáticas participando en discusiones, planteando y entendiendo conjeturas, explicando y justificando sus ideas y resolviendo problemas novedosos[20].

El equipo de investigación que participa en este proyecto es numeroso (algunos de sus miembros están identificados en Rasmussen & Kwon, 2007, p. 190). Trabajan en torno a tres objetivos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, enfocadas desde el punto de vista de los sistemas dinámicos. Esos objetivos son:

- Que los estudiantes reinventen muchas de las ideas y métodos matemáticos fundamentales para analizar las soluciones de las ecuaciones diferenciales.
- Buscan tareas desafiantes, que reflejen situaciones reales, que sirvan de punto de partida para que los estudiantes comiencen a indagar.
- Debe existir un balance entre el tratamiento de los enfoques analítico, numérico y gráfico. Estos enfoques deben surgir de forma más o menos simultánea en las realizaciones de los estudiantes.

Este último objetivo viene motivado por los resultados mostrados por Rasmussen y Whitehead (2003) que señalan que los enfoques gráficos y cualitativos no se convierten de forma automática en comprensión conceptual, pudiendo quedarse en actividades de manipulación mecánica análogas a las que se realizan cuando se utilizan los métodos algebraicos de resolución de EDO. Los autores proponen que se fomente que los estudiantes expliquen y defiendan sus razonamientos y conclusiones en términos matemáticos, para evitar que se limiten a aprender una serie de procedimientos

[20] Rasmussen y Kwon (2007) describen las características generales de este proyecto: investigadores participantes, teorías que lo sustentan, objetivos y ejemplos de investigaciones realizadas en el marco del mismo.

(algebraicos, gráficos...) sin ninguna conexión con otros aspectos del problema. Esta es una de las características que los investigadores pertenecientes a este proyecto han introducido en la dinámica de aula.

Este enfoque influye en el tipo de demostraciones presentadas por los estudiantes. Rasmussen y Whitehead presentan un caso en el que los estudiantes deben justificar que dos soluciones de una EDO de crecimiento logístico, con diferentes condiciones iniciales, nunca se cortan. Sin haber estudiado el teorema de unicidad, los estudiantes explican que las gráficas de las soluciones de las ecuaciones autónomas son traslaciones a lo largo del eje de abcisas, por lo que nunca habrá un valor de la variable independiente en el que las funciones se corten.

Otro ejemplo: se pregunta a los estudiantes "¿es posible que la gráfica de una solución de una ecuación diferencial autónoma oscile?". El argumento que típicamente utilizan los estudiantes para justificar que no es posible es que, en caso de que hubiera una función solución que oscilara, habría un mismo valor de y con una pendiente positiva y otra negativa, lo que no puede ocurrir en una ecuación autónoma.

Este tipo de respuestas se dieron porque en clase se prestaba especial atención a las normas relacionadas con la explicación y la justificación.

Para desarrollar los tres objetivos descritos anteriormente, dentro del proyecto IO-DE se realizan investigaciones dirigidas hacia tres áreas relacionadas entre sí:

- Adaptación de un enfoque de diseño innovador de la enseñanza en los niveles universitarios.
- Estudio sistemático del pensamiento de los estudiantes mientras construyen sus ideas e identificación del conocimiento que necesitan tener los profesores para respaldar que los estudiantes reinventen.
- Prestar atención a la producción social de significado y a las identificaciones de los estudiantes.

El proyecto IO-DE tiene su base en los fundamentos de la Educación Matemática Realista (RME), teoría basada en la idea de Freudenthal de que las matemáticas deben estar conectadas a la realidad, y una metodología de investigación en la que se conjugan el desarrollo de la propia investigación y el análisis de los resultados, creando un proceso cíclico centrado en los procesos de enseñanza y aprendizaje, prestando una atención especial a los procesos mentales de los estudiantes. Esta metodología recibe el nombre de "developmental research" (Gravemeijer, 1994) o "design research" (Drijvers, 2003).

Desde el punto de vista de la RME, los estudiantes aprenden matemáticas por un proceso de matematización de situaciones reales y de su propia actividad matemática. Freudenthal define la matematización como el proceso por el cuál se organizan los aspectos clave de la materia en un nivel para producir nueva comprensión en un nivel superior (citado en Rasmussen & Kwon, 2007, p.191). Las situaciones reales incluyen tanto problemas enunciados en un contexto no matemático como matemático, siempre que este resulte cercano para el estudiante. El proceso de matematización se caracteriza por la realización de una serie de actividades que persiguen generalizar, verificar, precisar y simplificar (Rasmussen & King, 2000).

El proyecto IO-DE considera las ecuaciones diferenciales como un mecanismo que describe cómo evoluciona y cambia una función en el tiempo. Alguno de los objetivos que se persiguen son la interpretación y caracterización del comportamiento y la estructura de las funciones soluciones de una ecuación diferencial, incluyendo su comportamiento asintótico, el número y la naturaleza de las soluciones de equilibrio y el efecto que produce la variación de parámetros en el conjunto de soluciones. La estructura de una secuencia de enseñanza de este proyecto incluye que los estudiantes construyan y usen gráficas relacionadas con las ecuaciones diferenciales autónomas, diagramas de fase unidimensionales para analizar el comportamiento de las soluciones, reinventen el diagrama de bifurcación de una EDO y se trabajen los sistemas de ecuaciones diferenciales como método apropiado para el estudio de las ecuaciones diferenciales de orden superior (Rasmussen, Kwon, Allen, Marrongelle & Burtch, 2006).

Las sesiones de clase comienzan con la introducción, por parte del profesor, de un problema sobre el que los estudiantes trabajan, a continuación, en grupo. No se presentan ejemplos de problemas similares al planteado, lo que contribuye a que los alumnos se vean inmersos en un ambiente de resolución de problemas. Los estudiantes trabajaban en grupo entre 20 y 30 minutos, mientras el profesor se va acercando a los diferentes grupos para escuchar las interpretaciones y enfoques de los estudiantes e intervenir, si es necesario, para promover que los estudiantes expliquen su forma de pensar y contribuir a que progresen en el desarrollo de la tarea. El objetivo del trabajo en grupo es ofrecer una oportunidad para el aprendizaje, más que producir un resultado final. Después del trabajo en grupo se discuten, entre toda la clase, los enfoques, interpretaciones y razonamientos de los diferentes grupos. En esta parte, los alumnos explican a sus compañeros y al profesor sus razonamientos, escuchan y tratan de dar sentido a las explicaciones de los otros, expresando su acuerdo o rechazo a las mismas.

Se presentan a continuación las secuencias utilizadas para introducir diferentes aspectos relacionados con las ecuaciones diferenciales.

Ecuaciones de velocidad de cambio

Una de las primeras decisiones a tomar cuando se diseña una secuencia de actividades con el propósito de enseñar un concepto matemático es cuál será el punto de partida del proceso, es decir, qué se va a suponer que los estudiantes saben acerca del concepto que se va a introducir y de qué manera van a introducirse las novedades. Rasmussen y King (2000), basándose en el principio de la reinvención guiada, consideran como punto de partida el considerar las ecuaciones diferenciales como ecuaciones de velocidad de cambio instantánea. Esta elección fue hecha con base en un análisis del desarrollo histórico de las ecuaciones diferenciales y de las estrategias de resolución e interpretaciones informales que mostraron los estudiantes en distintas investigaciones.

Fijado el significado con el que se pretendía introducir el concepto de EDO, en un curso de un semestre en el que participaban 12 estudiantes, Rasmussen y King diseñaron un conjunto de actividades y de programas para ser utilizados en la calculadora TI-92. Esas actividades, siguiendo el principio de la RME, se situaron en contextos variados como la biología o la epidemiología y se presentaron en tres fases:

- *Primera fase:* el profesor describe una situación en la que una enfermedad no mortal, que inmuniza y contagiosa se extiende en una comunidad cerrada, con una población fija (por ejemplo, la varicela en un colegio). Se pide a los estudiantes que representen gráficamente la relación entre la población susceptible de ser infectada, los enfermos y los que se han recuperado, con respecto al tiempo.

- *Segunda fase:* comienza con una discusión entre el profesor y los estudiantes sobre cómo obtener un sistema de ecuaciones diferenciales que represente la situación planteada. Después de plantear el sistema de ecuaciones diferenciales, el profesor presenta una actividad adaptada de un libro de texto y relacionada con la situación que se acaba de discutir.

Esta discusión resultó ser demasiado larga y poco productiva para los estudiantes, en el sentido de que parecían no entender el significado de las ecuaciones diferenciales obtenidas (Rasmussen & King, 2000, p. 165) por lo que se optó por presentar una situación más sencilla. El enunciado del nuevo problema era el siguiente:

> Una forma de modelar el crecimiento de la población de peces en un estanque es con la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = k \cdot P(t)$, midiendo el tiempo en meses. Usa esta ecuación diferencial, con un parámetro de crecimiento $k = 1$, para aproximar el número de peces que habrá en el estanque para los próximos meses si inicialmente hay
>
> (a) 200 peces (b) 400 peces (c) 0 peces.
>
> Muestra los resultados en forma de tabla y con gráficas.

Los estudiantes debían tratar de resolver este problema sin haber conocido previamente un algoritmo para este tipo de problemas. El objetivo era que los estudiantes consideraran la solución como una función continua y usaran el valor de $P'(t)$ como un promedio de la velocidad de cambio en el intervalo $(t, t + \Delta t)$.

Para la mayoría de los estudiantes no resultó trivial resolver este problema, lo que los autores consideran positivo ya que esta circunstancia hizo que se creara un ambiente de resolución de problemas y que se produjeran interacciones productivas de los estudiantes, entre ellos y con el profesor.

Algunos estudiantes optaron directamente por buscar una expresión “cerrada” de la función solución, intentando resolver la ecuación o utilizando el ensaño y error como heurística. Ninguno de los alumnos que inició este camino lo concluyó con éxito.

En su trabajo, Rasmussen y King (2000) muestran el ejemplo de un alumno que desde el comienzo distingue entre la velocidad de cambio y el cambio que se produce. Este estudiante trabaja con otros dos compañeros que, inicialmente, no parecen tener clara esta distinción. Rasmussen y King muestran cómo, a raíz de la interacción de estos dos alumnos con su compañero, el profesor y un programa diseñado específicamente para el estudio de las EDO[21], los estudiantes comenzaron a razonar en función de la velocidad, creando además una versión informal del método de Euler para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales.

[21] Este programa recibe el nombre de “Interactive Differential Equations” (IDE).

Las actividades realizadas por estos alumnos durante el desarrollo de este problema son presentados como ejemplos de actividades de "matematización horizontal" por Rasmussen, Zandieh, King y Teppo (2005) en un trabajo que propone un punto de vista del PMA desde una perspectiva práctica, considerando en su lugar la forma en que se avanza en la actividad matemática ("advancing mathematical activity"). En este trabajo, la matematización horizontal se refiere a "la formulación de problemas de forma que pueda realizarse un análisis matemático" (p. 54).

- *Tercera fase:* se pedía a los estudiantes que explicaran, usando palabras y símbolos, cómo aproximar el número de peces que habrá en el futuro en un estanque según la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = P(t)$.

Esta etapa no resultó fácil a los estudiantes puesto que requería que reflexionaran sobre su actividad previa antes de generalizar y comunicar su razonamiento.

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

La forma tradicional en que se enseña la resolución de un sistema lineal homogéneo de ecuaciones con coeficientes constantes de la forma $x' = Ax$, siendo $A = (a_{ij})$ una matriz de constantes, es comparándola con la ecuación escalar $x' = ax$, cuyas soluciones son de la forma $x(t) = Ce^{at}$, con C un número real. Si suponemos que $x = e^{\lambda t} \cdot v$ es una solución del sistema $x' = Ax$, con v un vector constante de R^n, tendremos que:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} \cdot v\right) = A \cdot e^{\lambda t} \cdot v \quad \Leftrightarrow \quad \lambda e^{\lambda t} \cdot v = A \cdot e^{\lambda t} \cdot v \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \cdot v = A \cdot v$$

ya que $e^{\lambda t} \neq 0$, de donde se obtiene que λ es un autovalor de la matriz A y v es un autovector. Por tanto, para cada autovalor real λ_j, se tendrá una solución $x^j(t) = e^{\lambda_j t} \cdot v_j$, donde v_j es el autovector asociado a cada autovalor λ_j.

En el proyecto IO-DE, que utiliza la heurística de la reinvención guiada, los estudiantes inventan su propio método para localizar filas de vectores propios y las soluciones correspondientes del sistema de dos EDO de primer orden, lineales, con coeficientes constantes (Rasmussen & Blumenfeld, 2007; Rasmussen & Keynes, 2003).

Para conseguir este objetivo se plantea a los estudiantes una serie de actividades divididas en cuatro fases: *predicción, exploración, matematización y generalización.* Estas actividades giran en torno a una situación que resulta cercana a los estudiantes, es decir, que pueden imaginar con facilidad, la oscilación de una masa sujeta a un resorte.

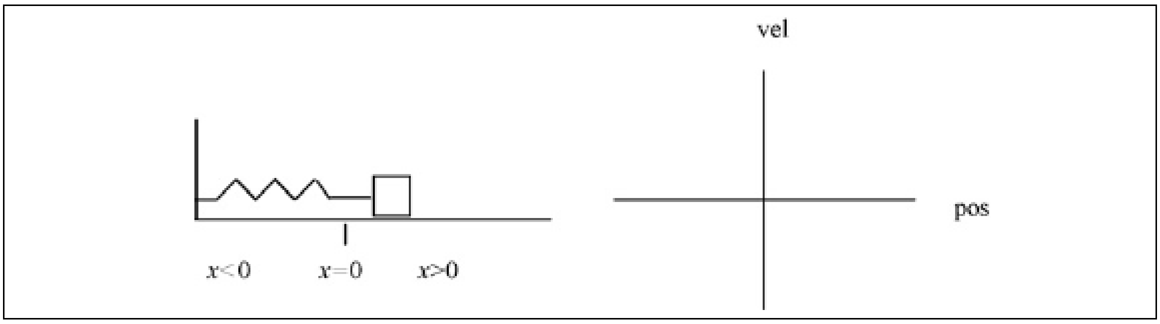


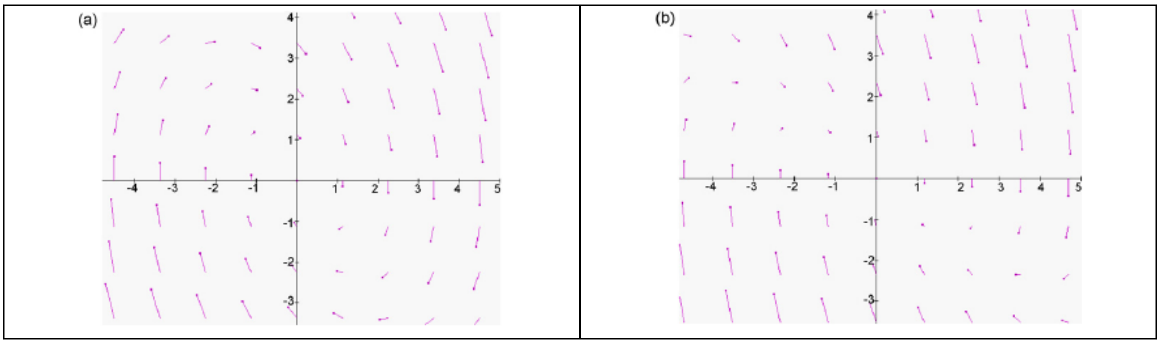
Figura 2.3.1: Oscilaciones mecánicas

- *Fase de predicción:* se pide a los estudiantes que hagan una representación gráfica o describan el movimiento de la masa en el plano velocidad-posición, para distintos valores de los parámetros como la rigidez del resorte, el peso del objeto atado al final del resorte y la fricción a lo largo de la superficie por la que se desliza el objeto.

Las respuestas más usuales incluyen curvas cerradas circulares si no hay fricción, curvas que giran en espiral en torno al origen, o variaciones incorrectas de estas donde la velocidad siempre es positiva. Muy pocos estudiantes mencionan el caso sobre-amortiguado donde la masa no oscilaría hacia delante y hacia atrás de la posición de equilibrio. Los autores atribuyen el hecho de que los estudiantes no consideren este caso a que no es un prototipo de situación que se imaginen en una oscilación.

- *Fase de exploración:* en esta fase los estudiantes deben analizar el campo de vectores asociado a un problema concreto de resorte-masa con un coeficiente de fricción variable (la masa vale 1 y la constante del resorte vale 2). Esta situación se corresponde con el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - by \end{cases}$, donde x representa la posición de la masa con respecto al punto de equilibrio, y indica la velocidad de la masa y b es el coeficiente de fricción[22].

Los estudiantes utilizaron el software *Graphing Calculator* para representar el campo de vectores asociado a este sistema, que permite, entre otras cosas, modificar el valor de la constante de fricción a la vez que se observa el efecto de ese cambio en la representación del campo de vectores.



La naturaleza abierta de la tarea invita a los estudiantes a experimentar con el programa y discutir sus observaciones con sus compañeros. Estas actividades promueven que los estudiantes establezcan relaciones entre el campo de vectores, la interpretación física del sistema, otras representaciones gráficas como las que enfrentan las variables x e y con el tiempo, y la naturaleza variable de la solución de equilibrio.

En esta fase los estudiantes observaron que, para valores grandes de b, el campo de vectores no producía espirales sino que los vectores parecían ir en línea recta. Las representaciones algebraicas permiten analizar y comprobar las conjeturas que se realizan de las pendientes de estos vectores.

[22] La forma en que los estudiantes acceden a este sistema de ecuaciones no se especifica en Rasmussen & Keynes (2003).

- *Fase de matematización:* en esta etapa de la instrucción se utiliza la formulación algebraica de la situación como una herramienta para que los estudiantes expresen sus observaciones empíricas y comprueben sus conjeturas.

Se les propuso la siguiente actividad:

Marissa toma 3 como valor del parámetro de fricción y observa que las gráficas de las soluciones en el plano posición-velocidad parece que llegan a ser absorbidas hacia el origen vía una línea recta. Ella cree que todos los vectores a lo largo de esa línea se dirigen directamente hacia el origen con una pendiente determinada. ¿Estás de acuerdo con la conjetura de Marissa? Encuentra una forma algebraica de comprobar o refutar esta conjetura. Si crees que la conjetura es cierta, (a) ¿cuál es la pendiente exacta? (b) ¿cuál es el movimiento físico correspondiente de la masa? (c) ¿cuáles son las correspondientes ecuaciones de $x(t)$ e $y(t)$?

La mayoría de los estudiantes, para calcular la pendiente de los vectores que formaban una línea recta, utilizaron sus conocimientos acerca de la expresión algebraica de las rectas que pasan por el origen, $y = mx$, y que la pendiente de los vectores es el cociente entre las dos razones de cambio, $m = \dfrac{dy/dt}{dx/dt}$. De esta forma:

$$\left.\begin{array}{l} m = \dfrac{y}{x} \\ m = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{-2x-3y}{y} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{-2x-3y}{y} \Rightarrow \frac{mx}{x} = \frac{-2x-3mx}{mx} \Rightarrow$$

$$m = \frac{-2-3m}{m} \Rightarrow m^2 + 3m + 2 = 0 \Rightarrow m = -1\,;\, m = -2$$

Este resultado sorprendió a los estudiantes que esperaban obtener una única línea recta. En la representación gráfica pudieron detectar la otra recta una vez que supieron de su existencia, gracias al sistema de representación algebraico.

A continuación se pidió a los estudiantes que pensaran en las expresiones de $x(t)$ e $y(t)$ para diferentes condiciones iniciales que cayeran sobre una de las rectas, $y = -x$ o $y = -2x$. Los alumnos sustituyeron estas expresiones en las ecuaciones diferenciales, obteniendo, para el caso en que la condición inicial estuviera en la recta $y = -x$, que:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = -x \\ \dfrac{dy}{dt} = -y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x(t) = -C_1 e^{-t} \\ y(t) = -C_2 e^{-t} \end{array}\right\}$$

Y, suponiendo que la condición inicial estuviera en el punto $(2,-2)$, se tendría que $x(t) = -2e^{-t}$ e $y(t) = 2e^{-t}$. Para el caso en que la condición inicial fuera (-2,4), situada sobre la recta $y = -2x$, obtuvieron que $x(t) = -2e^{-2t}$ e $y(t) = 4e^{-2t}$.

Los estudiantes observaron inmediatamente que su método funcionaba para cualquier condición inicial que se encontrara sobre las rectas $y = -x$ o $y = -2x$.

El reto, a continuación, era establecer la expresión para $x(t)$ e $y(t)$, cuando las condiciones iniciales no se encontraban en ninguna de estas rectas, es decir, obtener la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales.

- *Fase de generalización*: en esta fase se les planteó un enunciado en el que la condición inicial no se encontraba sobre ninguna de las dos rectas anteriores, en el punto (-4,6) y se les pidió representar cómo quedaría la solución en el plano fase.

La mayoría pensó que la representación gráfica de esta solución se iría acercando cada vez más a la recta de ecuación $y = -2x$, porque la condición inicial se encontraba más cercana a ella.

A continuación se les pidió obtener la expresión de $x(t)$ e $y(t)$ para la condición inicial (-4,6).
Los estudiantes utilizaron el hecho de que esta condición inicial es la suma de las coordenadas de las condiciones iniciales utilizadas en la fase anterior, situadas sobre las rectas $y = -x$ e $y = -2x$, para conjeturar que las expresiones de $x(t)$ e $y(t)$ también serían la suma de las expresiones obtenidas en los casos anteriores, es decir, $x(t) = -2e^{-t} - 2e^{-2t}$ e $y(t) = 2e^{-t} + 4e^{-2t}$, comprobando después que estas expresiones eran solución del sistema planteado. Al representar gráficamente estas funciones, observaron que la curva se acercaba a la recta de ecuación $y = -x$, en lugar de a la que ellos habían previsto.

Finalmente se pidió a los estudiantes que resolvieran una serie de sistemas de ecuaciones diferenciales sin relacionarlos con una situación física. Según los autores el uso de este método contribuyó a minimizar la aparición del error de concepción en el que los estudiantes consideran que los exponentes de las expresiones de $x(t)$ e $y(t)$ coinciden siempre con las pendientes de las líneas rectas.
Al finalizar esta parte se introdujo a los estudiantes en el uso de la terminología convencional de autovectores y autovalores.

Rasmussen y Blumenfeld (2007) utilizan este método para tratar los sistemas de ecuaciones diferenciales en un curso de ocho semanas en el que se trabaja este aspecto durante cinco sesiones de 50 minutos cada una. El curso iba dirigido a un grupo de 37 estudiantes de matemáticas y ciencias, de los que se entrevistaron 25. Estos autores analizan el proceso que los estudiantes siguen durante el desarrollo de las actividades descritas anteriormente con el objetivo de mostrar un ejemplo de cómo las expresiones analíticas pueden servir de sustento a la transición del "modelo-de" al "modelo-para", haciendo referencia a la heurística de los modelos emergentes utilizada por la Educación Matemática Realista. Los detalles de esta investigación no se incluyen en esta memoria puesto que se alejan del Problema de Investigación considerado.

El teorema de existencia y unicidad de soluciones
El teorema de existencia y unicidad de soluciones de un problema de valores iniciales de la forma $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ se presenta de dos formas diferentes. En un caso, las condiciones vienen establecidas en función de la continuidad de las funciones f y $\frac{\partial f}{\partial y}$

(teorema 1) y en el otro caso se expresan en términos de la condición de Lipschitz (teorema 2).

Teorema 1. Si las funciones f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en el rectángulo $a < t < b$, $c < y < d$ que contiene al punto (t_0, y_0). Entonces, en algún intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$ contenido en $a < t < b$ existe una única solución $y = \phi(t)$ del problema de valores iniciales $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.

Teorema 2. Si $f(t, y)$ es continua para $a < t < b$, $c < y < d$, y existe una constante L tal que $|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z|$ para todo $t \in (a, b)$, y todo $y, z \in (c, d)$, entonces el problema de valores iniciales $\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, donde $t_0 \in (a, b)$ e $y_0 \in (c, d)$ tiene a lo sumo una solución para todo $t \in (a, b)$ tal que $y(t) \in (c, d)$.

En la sección anterior se describió la investigación de Raychadhuri (2007) en la que se muestra que los estudiantes tienen dificultades con el uso del teorema de existencia y unicidad redactado en términos de f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ (Teorema 1). Rasmussen y Ruan (2008) proponen el uso del teorema enunciado a partir de la condición de Lipschitz, con base en la conjetura de que las condiciones de continuidad de las funciones no son consideradas por los estudiantes como información relevante, lo que puede ser la causa de las dificultades mostradas por los alumnos al utilizar el teorema 1. Rasmussen y Ruan (2008) tratan de que la condición de Lipschitz sea una descripción formal de la manipulación que los estudiantes hacen de los vectores y la explicación correspondiente de por qué las gráficas de las soluciones se intersecan o no, utilizando la expresión $\left|\frac{\partial}{\partial y} f(t, y)\right| \leq L$ en lugar de $|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z|$.

Entre las hipótesis de trabajo, de acuerdo con el enfoque de todas las investigaciones pertenecientes al proyecto IO-DE, está la consideración de que el rechazo y/o fracaso de los estudiantes en el uso de los teoremas como herramientas para la resolución de problemas no responde únicamente a aspectos cognitivos sino también sociales. En su trabajo, Rasmussen y Ruan muestran cuatro factores interrelacionados que consideran que pueden ayudar a comprender por qué los estudiantes mostraron progresos en el uso del teorema de unicidad como herramienta para presentar argumentos y resolver problemas.

La investigación de Rasmussen y Ruan fue realizada con un grupo de estudiantes de un curso introductorio de ecuaciones diferenciales con una duración de 15 semanas. Los estudiantes realizaron actividades de los cuatro tipos considerados en el caso de los sistemas de ecuaciones diferenciales: predicción, exploración, matematización y generalización.

El análisis mostrado se centra en tres estudiantes (Joe, Bill y Adam). En una entrevista realizada previamente al inicio de las clases sobre ecuaciones diferenciales, se pidió a los estudiantes que resolvieran el siguiente problema, con el objetivo de analizar los razonamientos intuitivos e informales que utilizaban los estudiantes, en relación con la unicidad de soluciones.

> Un científico obtuvo la ecuación de velocidad de cambio $dL/dt = -0.1(L-70)$ para hacer predicciones sobre la temperatura que tendrá en un futuro un líquido que esté caliente (siendo L la temperatura del líquido). Supón que un recipiente que contiene este líquido caliente tiene una temperatura inicial de 100ºF y otro recipiente contiene este líquido con una temperatura inicial de 120ºF. De acuerdo con la ecuación de velocidad de cambio, ¿habrá un momento en que los dos recipientes tengan exactamente la misma temperatura? (p. 153)

Las explicaciones dadas por Joe, durante la entrevista, mostraron por un lado que llegaba a dos tipos de conclusiones, una basada en lo que esperaba que ocurriera en el mundo real (argumento con base en lo empírico) y otra basada en su interpretación de la ecuación (argumento con base en lo matemático). Por otro lado, este alumno parecía estar considerando la velocidad de cambio como una cantidad constante y no como dependiente del valor de L.

Durante las sesiones de clase, Rasmussen y Ruan identificaron dos factores sociales y dos factores cognitivos que podían haber influido en que tanto Joe como sus dos compañeros mostraran progresos en el uso del teorema de unicidad.

Como factor social, los autores consideran aquellos relacionados con el "proceso de interacción entre los estudiantes, el profesor y las matemáticas" y como factor cognitivo, "las concepciones particulares que los estudiantes muestran" (p. 156).

A medida que fue avanzando el curso, los estudiantes mostraron cierta evolución en el tipo de justificaciones que utilizaban, desde aquellas basadas en lo empírico hacia relaciones basadas en aspectos matemáticos. La negociación de las justificaciones aceptables es uno de los factores sociales que puede contribuir al uso del teorema de unicidad de una forma eficiente. Estas normas fueron construidas a partir de la interacción entre los estudiantes y el profesor. El otro factor social que puede propiciar el progreso en el uso del teorema de unicidad como herramienta para resolver problemas en la familiarización con la terminología y el significado matemático. En este sentido, los autores consideran que el hecho de que los estudiantes pensaran en la velocidad de cambio de la velocidad de cambio en términos del criterio $\left|\frac{\partial}{\partial y} f(t,y)\right| \le L$ contribuyó a la formalización del teorema. Este factor es considerado por los autores como social porque la expresión matemática formal fue introducida por el profesor de la materia.

Entre los aspectos cognitivos, Rasmussen y Ruan señalan la importancia de identificar las teorías intuitivas o informales que utilizan los estudiantes, con el fin de proponer actividades que refinen sus ideas o las reorganicen. Otro factor cognitivo a considerar es la reorganización de una idea matemática central, que en el caso de su investigación particular fue la velocidad de cambio.

Para concluir esta sección dedicada en exclusiva a presentar las investigaciones realizadas en el marco del proyecto IO-DE se presentan los resultados de dos estudios cuantitativos que analizan la comprensión de los estudiantes de un curso tradicional en comparación con estudiantes que participaron de las clases diseñadas con base en este proyecto (Kwon, Rasmussen & Allen, 2005; Rasmussen, Kwon et al., 2006).

En Rasmussen, Kwon et al., (2006) se muestran los principales resultados de un estudio que compara las creencias, habilidades y comprensión de los estudiantes que han participado de las clases diseñadas con el proyecto IO-DE con estudiantes que han recibido una formación de las ecuaciones diferenciales con un enfoque tradicional. La investigación se realizó con estudiantes de tres universidades diferentes, en cada una de las cuales se seleccionaron dos grupos de estudiantes, uno con formación tradicional (al que los autores denotan TRAD-DE) y otro con formación según el proyecto IO-DE (a los que identifican con las siglas del proyecto).

Para analizar el aprendizaje de los estudiantes de habilidades y conceptos importantes, los investigadores utilizaron dos instrumentos: un cuestionario donde se evaluaban aspectos de tipo más rutinario (métodos analíticos de resolución, un problema numérico relacionado con el método de Euler, un problema de representación del plano fase y un problema de modelación) y otro cuestionario para evaluar la comprensión relacional de los alumnos (dos problemas centrados en el significado y la relación entre las soluciones exactas y aproximadas, dos problemas centrados en aspectos de modelación y cuatro sobre el comportamiento de las soluciones y/o el espacio de soluciones). El primer instrumento formaba parte del test de evaluación final de la materia, por lo que lo realizaron todos los alumnos; el segundo cuestionario fue voluntario.

Los resultados de la investigación muestran que los alumnos de los dos grupos (TRAD-DE e IO-DE) presentan habilidades similares para resolver las cuestiones relacionadas con aspectos de tipo más rutinario. Sólo en una de las ocho preguntas de este cuestionario hubo diferencia entre los dos grupos. Los estudiantes del grupo IO-DE obtuvieron mejor resultado con el uso del método de Euler. Los investigadores lo atribuyen al hecho de que estos alumnos reinventaron este método, no se les explicó como algo ya construido.

En el segundo cuestionario los resultados fueron más favorables al grupo IO-DE frente al grupo TRAD-DE. Desafortunadamente el artículo descrito (Rasmussen, Kwon et al., 2006) no ofrece información sobre las características de las respuestas de los estudiantes.

El trabajo realizado por Kwon et al., (2005) analiza la retención de conocimientos y habilidades matemáticas de los estudiantes de dos de los grupos participantes en la investigación anterior (Rasmussen, Kwon et al., 2006), uno de enseñanza tradicional (TRAD-DE) y otro que había participado en el proyecto IO-DE. Para ello se analizaron las respuestas de los alumnos a dos test durante el año siguiente al que recibieron el curso de ecuaciones diferenciales. El primero de los test se dividió en dos partes, una de ellas a mitad del curso y otra al final y formó parte de la evaluación del curso. El segundo test fue una reestructuración del anterior y sólo lo respondieron los estudiantes que se presentaron de forma voluntaria (20 alumnos del grupo TRAD-DE y 15 del grupo IO-DE). Las preguntas de los test incluían items que podían contestarse aplicando procedimientos analíticos, actividades de modelación y de análisis gráfico o cualitativo.

Los resultados de esta investigación muestran que no hay diferencias significativas en lo que a retención de conocimientos se refiere, cuando se analizan las respuestas de los estudiantes de los dos grupos a preguntas centradas en los procedimientos (resolver una ecuación separando variables, resolver un sistema de ecuaciones diferenciales, un problema de límites y comprobar que una función es solución de una ecuación diferencial). En las actividades del segundo test, sí se encontraron diferencias a favor del grupo IO-DE en las cuestiones relacionadas con la modelación de situaciones, pero no se encontró mucha diferencia entre los dos grupos de estudiantes en sus respuestas a las preguntas relacionadas con el análisis de representaciones gráficas o el estudio cualitativo de funciones.

2. Marco Conceptual

En este capítulo se presentan los elementos teóricos que sustentan esta investigación: los componentes que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas que se consideran, los fundamentos que conducen a tomar determinadas decisiones en lo relativo al diseño del material utilizado en el experimento de enseñanza y aquellos que sirven de guía para el análisis de los datos recabados a partir de dicha experiencia.

2.1 Introducción

Lester (2010) publicó, en el reciente libro *Theories of Mathematics Education*, un capítulo titulado *On the Theoretical, Conceptual, and Philosophical Foundations for Research in Mathematics Education.* En él señala, entre otras cosas, que para promover el desarrollo de los conceptos matemáticos es necesario comprender los procesos de aprendizaje y reflexionar sobre los distintos factores que intervienen en el mismo. El uso de un marco de referencia en la investigación proporciona una estructura para el diseño, la concepción y la visualización del estudio, además de establecer las bases que permiten identificar la información relevante y justificar las evidencias que se muestren, los cuáles conducen a la presentación de las conclusiones y finalmente a una comprensión más profunda del fenómeno que se está investigando. En este caso, y en virtud del Problema de Investigación que se aborda, el marco de referencia estará formado por aquellos elementos que permitan analizar el conocimiento matemático mostrado por los estudiantes al resolver actividades relacionadas con las EDO y diseñar un Módulo de Enseñanza para la introducción de este concepto en los primeros cursos universitarios que promueva el desarrollo de procesos cognitivos asociados al PMA como razonar, abstraer, generalizar, entre otros.

Eisenhart (1991) distingue tres tipos de marcos de investigación, con sus propias características y jugando cada uno su papel: Teórico, Práctico y Conceptual. Lester (2010) profundiza en la caracterización de los diferentes marcos y, en relación con los Marcos Teóricos señala que las investigaciones realizadas empleando un Marco Teórico dependen de una teoría formal, las preguntas de investigación se reformulan en términos de dicha teoría, los resultados de la investigación se utilizan para confirmarla, extenderla o modificarla y los investigadores deben seguir la agenda de investigación marcada por dicha teoría, aceptando los convenios de argumentación y experimentación asociados a ella. Son numerosos y muy variados los Marcos Teóricos que existen en el campo de la investigación en Educación Matemática y, en muchos casos, no resulta sencillo establecer relaciones entre ellos, con lo que se siguen desarrollando de forma independiente dentro del contexto en que se crearon. Los intentos por encontrar relaciones entre las diferentes teorías que ayuden al desarrollo de un marco más general no han resultado muy satisfactorios en ese aspecto, aunque sí resultan enriquecedores por la visión que presentan de diversas teorías (Artigue et al., 2009; Santos-Trigo & Barrera-Mora, 2007).

El Marco Práctico se fundamenta en el conocimiento práctico de los expertos y los resultados de investigaciones previas, pero sus resultados no se pueden generalizar fácilmente. Finalmente, un Marco Conceptual es “un argumento que incluye diferentes puntos de vista y culmina en una serie de razones para adoptar algunos puntos... y no otros” (Eisenhart, 1991, p. 210).

Un Marco Conceptual puede estar basado en diferentes teorías y una noción fundamental para este tipo de marcos es la de justificación; resulta fundamental explicar por qué se hacen las cosas y por qué son razonables las explicaciones e interpretaciones. El bricolaje, o como denomina Gravemeijer (1998) “bricolaje guiado por la teoría” (p. 279), es un proceso relacionado con la noción de Marco Conceptual de Eisenhart (1991). Este término hace referencia al proceso según el cuál un investigador toma ideas de diferentes fuentes y las ajusta para construir, por ejemplo, un marco de referencia para su investigación o un conjunto de actividades para el aprendizaje de un concepto matemático.

El marco de referencia utilizado en esta investigación es un Marco Conceptual constituido por aspectos de diferentes teorías y fuentes, que se explican e integran a lo largo de este capítulo.

Las investigaciones en el campo de la Educación Matemática abarcan diversas perspectivas. La investigación que se presenta en esta memoria va enfocada hacia el desarrollo de la práctica docente, presentando una visión general de las dificultades que hasta el momento se ha detectado que tienen los estudiantes en la realización de actividades relacionadas con las ecuaciones diferenciales, las propuestas de instrucción que se han formulado y el análisis de un modelo de enseñanza diseñado para introducir el concepto de ecuación diferencial en el primer curso de la Licenciatura en Químicas, en un escenario de Resolución de Problemas. Por tanto, el proceso de bricolaje que permite construir el Marco Conceptual de esta investigación debe considerar teorías relacionadas con los elementos que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas y aquellos que permitan describir la comprensión de los estudiantes.

A lo largo de este capítulo se establece qué concepción de las matemáticas como disciplina se está considerando, describiendo los elementos que intervienen en su aprendizaje (Kilpatrick et al., 2009) y aquellos que permiten describir la comprensión de los estudiantes (Duval, 1993; Schoenfeld, 1992). A continuación se describen los ingredientes seleccionados para diseñar el Módulo de Enseñanza para la introducción de las EDO en el primer curso de la licenciatura en Química: Resolución de Problemas, Interacciones y Tecnología.

2.2 La competencia matemática

En los últimos cuarenta años ha variado sustancialmente la concepción de qué es la matemática y qué significa saber matemáticas. Inicialmente, esta ciencia era considerada como un sistema de definiciones, reglas, principios y procedimientos que se debían enseñar y saber matemáticas consistía en demostrar que se conocían tales elementos (Gravemeijer, 1994). Más adelante se pasó a considerarla como “ciencia de los patrones” lo que refleja el National Research Council con las siguientes palabras:

> Las matemáticas revelan patrones ocultos que nos ayudan a comprender el mundo que nos rodea. [...] es una disciplina variada que maneja datos, mediciones y observaciones

> que provienen de la ciencia; se ocupa de la inferencia, deducción y demostración; y trabaja con modelos matemáticos de fenómenos naturales, de comportamiento humano y del sistema social. [...]El proceso de "hacer" matemáticas es más que simplemente calcular o deducir; involucra la observación de patrones, la comprobación de conjeturas y la estimación de resultados (citado en Schoenfeld, 1992, p. 343).

Se añade que las matemáticas ofrecen algo más que teoremas y teorías, mostrando diferentes tipos de razonamiento que incluyen la modelación, la abstracción, optimización, el análisis lógico, la inferencia a partir de datos y el uso de símbolos.

Los cambios más recientes consideran las matemáticas como una actividad social que se produce en un ambiente de colaboración entre distintas personas (Schoenfeld, 1992). Distintos trabajos realizados bajo esta perspectiva muestran que el conocimiento de un campo no se restringe al dominio de los conceptos propios del mismo, sino que también contempla la comprensión de las estrategias y los aspectos de tipo metacognitivo. Flavell define la metacognición como el conocimiento que una persona posee de sus propios procesos cognitivos o de cualquier cosa relacionada con ellos (citado en Schoenfeld, 1992, p. 347). Este término engloba tres categorías para su exploración: el conocimiento declarado de los individuos sobre sus propios procesos cognitivos, los procedimientos de auto-regulación, incluyendo el seguimiento y la toma de decisiones, y las creencias e influencias y sus efectos en el rendimiento.

En la actualidad se pone énfasis en lo que se denomina el "poder de las matemáticas" que involucra el razonamiento, la resolución de problemas, la conexión de ideas matemáticas y la comunicación del conocimiento (Kilpatrick et al., 2009). Los estudios se realizan en ambientes que promueven las interacciones sociales y donde los estudiantes viven la disciplina de una forma comparable a como la ven los expertos. Muchas investigaciones integran la investigación con el diseño de la instrucción, como ocurre en este trabajo.

Entre los objetivos de esta investigación se encuentra el análisis de parte del conocimiento matemático que tienen los estudiantes y el diseño de un Módulo de Enseñanza para la introducción del concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria en un primer curso de la Licenciatura en Químicas, aspectos que dependen fuertemente del concepto de las matemáticas que se considere y de qué significa entenderlas puesto que de ello dependerá el tipo de actividades que se propongan para el análisis y la enseñanza, así como la dinámica de aula que se utilice en el proceso de enseñanza.

La visión de las matemáticas en esta investigación se aparta de aquella que la considera como un mero conjunto de definiciones y procedimientos relacionados con cantidades, magnitudes y fórmulas que el alumno debe demostrar que conoce. Aprender a pensar matemáticamente significa *desarrollar un punto de vista matemático, valorando los procesos como la abstracción y la generalización, y cierta competencia en el uso de las herramientas propias de esta disciplina*. Esta perspectiva lleva consigo la consideración de determinadas características del proceso de enseñanza en el que debe contemplarse la búsqueda de soluciones, la exploración de patrones y la formulación de conjeturas y no sólo la memorización de procedimientos y fórmulas y el hacer ejercicios (Schoenfeld, 1992).

Kilpatrick et al. (2009, p. 116) proponen cinco elementos para caracterizar los aspectos que los estudiantes deben desarrollar como parte del aprendizaje de las matemáticas y que serían los aspectos cognitivos que la enseñanza debería promover[23]:

- *Comprensión conceptual*: comprensión de los conceptos matemáticos, las operaciones y las relaciones.
- *Fluidez con los procedimientos*: habilidad en la ejecución de procedimientos de forma flexible, precisa, eficiente y correcta.
- *Competencia estratégica*: habilidad para formular, representar y resolver problemas matemáticos.
- *Razonamiento adaptativo*: capacidad para pensar de forma lógica, reflexionar, explicar y justificar.
- *Predisposición productiva*: inclinación habitual para ver las matemáticas como prácticas, útiles y valiosas, acompañado de confianza en la propia eficacia y diligencia.

Para que estos elementos resulten útiles, deben permanecer interrelacionados (imagen 2.2.1), de manera que se establezcan conexiones entre ellos. Estas conexiones, tanto entre los conceptos matemáticos como entre el resto de los elementos del aprendizaje, resultan fundamentales para el desarrollo del conocimiento (Artigue et al., 2007).

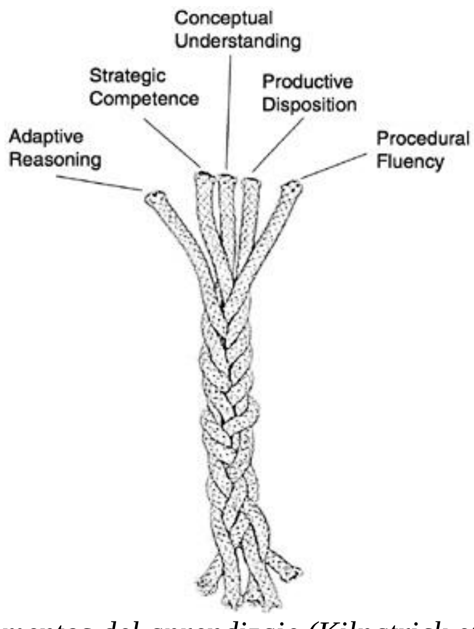


Imagen 2.2.1: Elementos del aprendizaje (Kilpatrick et al., 2009, p. 117)

En el desarrollo de estos cinco componentes del aprendizaje juegan un papel central las representaciones mentales de los estudiantes, los razonamientos empleados y la forma en que dan sentido a las actividades realizadas. La manera en que los estudiantes representan y conectan las piezas de su conocimiento es un factor clave para que puedan

[23] Kilpatrick et al. (2009) utilizan el término “mathematical proficiency” para referirse a estos cinco componentes del aprendizaje que engloban habilidad, competencia, conocimiento y facilidad para las matemáticas. El nombre original de cada uno de los elementos es: “conceptual understanding”, “procedural fluency”, “strategic competence”, “adaptive reasoning” y “productive disposition” (p. 116).

entenderlo más profundamente y puedan usarlo en la Resolución de Problemas (Kilpatrick et al., 2009).

Asumiendo que el conocimiento es algo representado internamente y de forma estructurada en cada individuo, una forma útil de describir la comprensión de un sujeto es mediante el análisis del modo en que están estructuradas estas representaciones. La *comprensión conceptual* se refiere a "la comprensión integrada y funcional de las ideas matemáticas, en lugar de considerar hechos y métodos aislados" (Kilpatrick et al., 2009, p. 118). Los estudiantes con comprensión conceptual entienden por qué una idea matemática es importante y el tipo de contexto en el que resulta útil; su conocimiento forma un todo coherente que les permite aprender nuevas ideas conectando aquellas que ya tienen. Esta comprensión favorece la retención y el que puedan ser reconstruidos los conocimientos que hayan sido olvidados.

Kilpatrick et al. (2009) consideran que un indicador de comprensión conceptual es el poder representar situaciones matemáticas de diferentes formas y saber cómo se pueden utilizar las diferentes representaciones con distintos objetivos. Las representaciones internas no son accesibles de forma directa, sin embargo, se pueden expresar y analizar a partir de las representaciones externas que producen. De la misma forma en que las representaciones externas con las que interactúa un estudiante afectan a la manera en que el estudiante representa esa relación internamente, la forma en que un estudiante genera o se relaciona con una representación externa revela información sobre cómo ha representado esa información internamente (Hiebert & Carpenter, 1992). En el caso concreto de los conceptos matemáticos, sólo se puede acceder a ellos a través de sus representaciones semióticas (Duval, 1993), por lo que dichas representaciones juegan un papel muy importante en la comprensión de los estudiantes, pudiéndose explicar el desarrollo de las competencias matemáticas en términos del uso de las mismas.

El grado de comprensión conceptual de un estudiante está relacionado con la riqueza y el alcance de las conexiones que establezca entre diferentes representaciones de una misma situación (Kilpatrick et al., 2009). Esto concuerda con la teoría de las representaciones, según la cuál el proceso de aprendizaje se produce realizando operaciones dentro de cada uno de los registros, haciendo conversiones entre los diferentes registros y discriminándolos en cada situación abordada. Por tanto, la evidencia de que el aprendizaje ha sido efectivo puede mostrarse a partir de las respuestas de los estudiantes a tareas donde se presente un mismo concepto matemático a través de diferentes sistemas de representación y se conecten diferentes registros (Barrera-Mora & Santos-Trigo, 2002; Santos-Trigo & Barrera-Mora, 2007).

El segundo elemento del aprendizaje que Kilpatrick et al. (2009) proponen considerar, la *fluidez con los procedimientos*, se refiere a "conocer los procedimientos, saber cuándo y cómo utilizarlos de manera apropiada, tener habilidad para ejecutarlos de manera flexible, precisa y eficiente" (p. 121). Los estudiantes con poca fluidez en el uso de procedimientos difícilmente pueden profundizar en su comprensión de ideas matemáticas o en la resolución de problemas puesto que necesitan dedicar mucho tiempo y atención a la ejecución de los procedimientos. Además, no se trata de aprender simplemente a ejecutar los procedimientos, sino comprenderlos, de lo contrario se necesitará más práctica para no olvidar los pasos a seguir y el procedimiento será un elemento del aprendizaje aislado del resto. Esta práctica puede conducir a los estudiantes a pensar que problemas ligeramente diferentes requieren procedimientos de resolución distintos.

El tercero de los elementos, la *competencia estratégica*, se refiere a “la habilidad para formular problemas matemáticos, representarlos y resolverlos” (Kilpatrick et al., 2009, p. 124).

En numerosas situaciones de la vida cotidiana, se plantea la necesidad de resolver un problema relacionado con las matemáticas, por tanto los estudiantes deben aprender a formularlos de manera que puedan ser resueltos utilizando los fundamentos de esta disciplina pero también necesitan conocer diferentes estrategias de resolución y saber cuándo utilizarlas. La representación, en términos matemáticos, de una situación requiere la construcción de una imagen mental de los elementos fundamentales del problema. Ser competente en el uso de estrategias conlleva construir un modelo mental de las variables y las relaciones que se describen en el problema. Para ello es necesario, en primer lugar, comprender la situación, para posteriormente generar una representación matemática del problema que refleje los elementos relevantes y descarte los que no lo son. Kilpatrick et al. (2009) consideran que un estudiante con competencia estratégica es aquel que, además de enfocar los problemas no rutinarios [24] desde diferentes puntos de vista, es capaz de seleccionar, entre distintos métodos, el más apropiado para la resolución.

Kilpatrick et al. (2009) utilizan el término *razonamiento adaptativo* para referirse a “la capacidad de pensar de manera lógica en las relaciones entre los conceptos y las situaciones” (p. 129). Debe ser un razonamiento correcto y válido, fruto de la consideración de distintas alternativas y debe incluir los conocimientos sobre cómo justificar las conclusiones. El razonamiento adaptativo o flexible incluye los razonamientos deductivos y también las explicaciones y justificaciones informales y los razonamientos basados en patrones y analogías. Según estos autores, los estudiantes desarrollan la habilidad de razonar cuando se dan tres condiciones: tienen una base conceptual suficiente, la actividad se comprende y es motivadora, y el contexto es familiar y confortable. Por otra parte, indican que una manifestación de razonamiento flexible es la habilidad para justificar el propio trabajo, lo que relaciona este elemento con la metacognición de Schoenfeld (1992).

El último de los elementos que caracterizan el aprendizaje de las matemáticas, según Kilpatrick et al. (2009) es la *predisposición productiva*, que se refiere a “la tendencia a ver el sentido de las matemáticas, percibirlas como útiles y valiosas, creer que el esfuerzo continuo por aprender matemáticas vale la pena y verse a uno mismo como un estudiante efectivo y hacedor de matemáticas” (p. 131). El desarrollo de los otros cuatro elementos redunda en que se tenga una predisposición productiva hacia la materia.

Estos cinco componentes del aprendizaje de las matemáticas son elementos que hay que considerar para la elaboración de propuestas de enseñanza pero también sirven como referente para analizar el conocimiento matemático y la competencia matemática de los estudiantes. Constituyen, por tanto, parte fundamental en las dos fases de esta investigación.

[24] Kilpatrick et al. (2009) consideran que los problemas no rutinarios son aquellos para los que el estudiante no conoce un método directo de resolución; requieren de un pensamiento productivo que permita inventar una forma de comprender y resolver el problema.

La idea central de que los cinco elementos descritos anteriormente deben estar interconectados refleja el hecho de que una comprensión profunda requiere que el estudiante conecte distintas piezas de conocimiento y que esa conexión es un factor importante a la hora de utilizar lo que saben, de forma productiva, en la Resolución de Problemas (Artigue et al., 2007).

Los conceptos de derivada de una función y de Ecuación Diferencial Ordinaria están relacionados de una forma muy estrecha, pudiendo incluso considerarse que una ecuación diferencial es uno de los usos o significados que se pueden asociar al concepto de derivada. Esta es una de las cosas que se asumen en esta investigación y que constituyen la base sobre las que se diseñan los materiales o instrumentos que se utilizarán en cada una de las dos fases de la investigación.

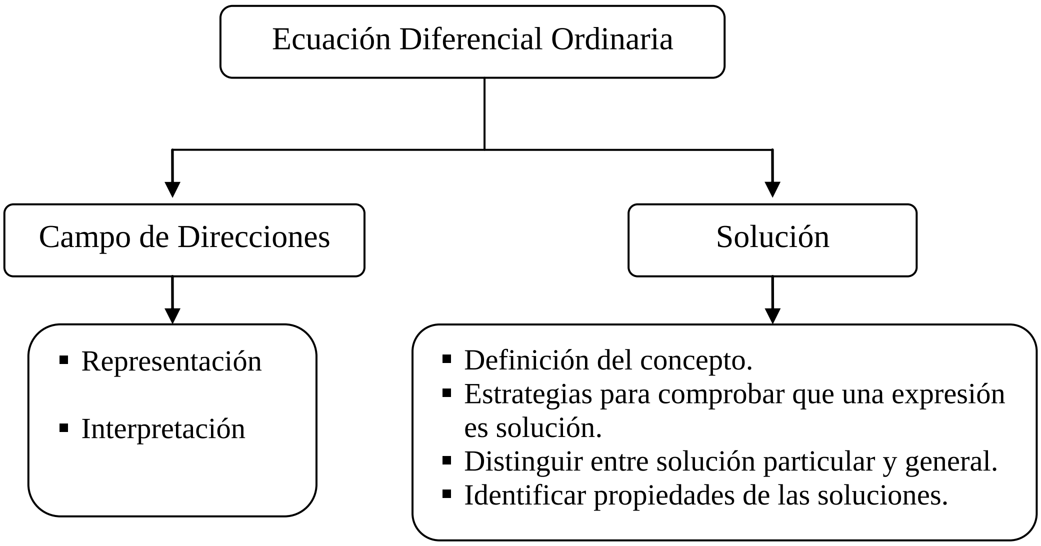
La estrecha relación entre el concepto de derivada de una función y el de Ecuación Diferencial Ordinaria, hace que se deba tener en cuenta las diferentes interpretaciones del concepto de derivada que pueden utilizar los estudiantes cuando se enfrentan a actividades relacionadas con las EDO. Al respecto, Thurston (1994) señala que cada individuo tiene una forma particular de entender los conceptos y las ideas matemáticas y que, en el caso particular del concepto de derivada de una función, hay distintos significados que se le pueden asignar como, por ejemplo:

(1) Infinitesimal: la relación entre el cambio infinitesimal en el valor de una función y el cambio infinitesimal en la función.
(2) Simbólico: la derivada de x^n es nx^{n-1}, la derivada de $\sin x$ es $\cos x$, etc
(3) Lógica: $f'(x) = d$ sí y sólo si para todo ε hay un δ tal que cuando $0 < |\Delta x| < \delta$, $\left|\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - d\right| < \varepsilon$.
(4) Geométrico: la derivada es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función, si la gráfica tiene tangente.
(5) Velocidad: la velocidad instantánea de f(t), cuando t es el tiempo.
(6) Aproximación: la derivada de una función es la mejor aproximación lineal a la función, cerca de un punto.
(7) Microscópico: la derivada de una función es el límite de lo que se observa mirando cada vez con un microscopio más potente.

(Thurston, 1994, p. 3)

Relacionado con esos significados de la derivada, el concepto de EDO puede ser estudiado utilizando los sistemas de representación algebraico, gráfico, numérico o contextual por lo que, para analizar cómo de robusto es este concepto en el conocimiento de los estudiantes, conviene observar qué sistemas de representación emplean en las tareas relacionadas con este concepto y de qué forma. Las nociones de solución de una EDO y de campo de direcciones asociado al mismo son algunos de los significados que están íntimamente relacionados con el concepto de EDO. La naturaleza gráfica del campo de direcciones y el enfoque tradicionalmente algebraico desde el que se enseñan las EDO justifican la necesidad de analizar la consistencia y estabilidad de las construcciones que emplean los estudiantes para establecer relaciones entre diferentes sistemas de representación.

Por otra parte, la comprensión del concepto de solución de una EDO se va desarrollando a medida que su definición se conjuga con otros elementos, por lo que es necesario que el alumno construya también una red de relaciones y significados asociados a este concepto (Camacho, Perdomo & Santos-Trigo, 2009). Algunos de los procesos asociados al concepto de solución de una EDO se muestran en el siguiente esquema (esquema 2.2.2). Finalmente, el concepto de campo de direcciones asociado a una EDO engloba dos procedimientos que podemos considerar diferentes desde el punto de vista cognitivo, su interpretación y su representación.



Esquema 2.2.2: Conceptos y procesos asociados con el estudio de las EDO

La descripción del aprendizaje de las matemáticas en función de cinco componentes y el análisis que se acaba de mostrar acerca de las relaciones de significado que se producen en torno al concepto de EDO permiten seleccionar los aspectos que se analizaran en la primera fase de la investigación con el objetivo de dar respuesta a la pregunta $\mathcal{P}1$ de investigación. Se describirá cómo utilizan los alumnos los conceptos matemáticos que han estudiado para resolver problemas en los que intervienen conceptos y significados relacionados con las EDO en función de los conocimientos matemáticos y sistemas de representación que utilicen para responder y la manera en que resuelven problemas contextualizados.

El objetivo de la segunda fase de la investigación parte del diseño de un Módulo de Enseñanza para la introducción de las EDO en el primer curso de la licenciatura en Química. Nuevamente se presentan los cinco elementos descritos por Kilpatrick et al. (2009) como fundamentales para la investigación. La percepción que un estudiante tenga acerca de un determinado dominio de conocimiento dependerá del ambiente en que se relacione con la materia, lo que permite considerar que existe una estrecha relación entre el modelo de enseñanza que se emplee en el aula y los futuros usos de las matemáticas que los estudiantes hagan en su trayectoria tanto académica como profesional. Los estudiantes desarrollan su sentido de las matemáticas, y su forma de usarlas, a partir de su experiencia con esta disciplina, por lo que, si se desea que los alumnos lleguen a utilizar y entender las matemáticas de una forma más significativa, las clases de matemáticas deben reflejar las matemáticas como una actividad con sentido para aquellas personas a las que van dirigidas (Schoenfeld, 1992).

¿Qué tipo de actividades matemáticas tienen sentido para los estudiantes de las disciplinas científico-tecnológicas, diferentes de las propias matemáticas? En estas disciplinas, las matemáticas son una herramienta que les permite resolver problemas propios de su quehacer científico. Por esta razón se apuesta por un modelo de enseñanza basado en la Resolución de Problemas para introducir el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria. Esto no significa que no sea importante el desarrollo de actividades relacionadas con las definiciones de los conceptos matemáticos o con demostraciones, al contrario, es indiscutible el rigor y la formalidad matemáticas que se encuentran en las definiciones y las demostraciones, así como que los procesos de razonamiento que se emplean juegan un papel fundamental en el desarrollo cognitivo de los estudiantes, pero también se debe tomar en cuenta la realidad del aula, en la que el tiempo es limitado, lo que conduce a tener que hacer elecciones de tipo didáctico, como es la selección de determinado tipo de actividades en detrimento de otras.

2.3 La Resolución de Problemas

Las personas abstraen y codifican sus experiencias y de esas codificaciones depende la manera en que se enfrenten e interpreten nuevas situaciones relacionadas con las que previamente han abstraído y codificado (Schoenfeld, 1992). Por esta razón resulta apropiado que los estudiantes de las carreras científico-tecnológicas, en particular los de Químicas, trabajen las matemáticas en un ambiente de Resolución de Problemas donde se potencie el desarrollo del trabajo autónomo y colaborativo y se diluya la percepción del profesor como elemento que presenta la materia de forma cerrada.

Esto conduce directamente a pensar en un modelo de enseñanza basado en la Resolución de Problemas, pero ¿qué significa resolver problemas?, más aún, ¿qué es un problema? Estas dos preguntas han sido el tema central de numerosas investigaciones de los últimos 20 años.

Los términos “problema” y “Resolución de Problemas” toman diferentes significados en la literatura. Como ejemplo de esto se pueden considerar dos definiciones de la palabra “problema” dadas por Webster en 1979:

(a) En matemáticas, algo que hay que hacer o que requiera hacer algo.
(b) Una pregunta... desconcertante o difícil.

(citado en Schoenfeld, 1992, p. 337)

Según la primera definición, los ejercicios rutinarios en los que los estudiantes practican una técnica matemática particular, como las reglas de derivación, los métodos de integración o de resolución de ecuaciones diferenciales de diferentes tipos, serían considerados como problemas.

Santos (2007) relaciona la definición de “problema” con la dificultad que la actividad entrañe para la persona que trata de resolverla, argumentando que algunas actividades pueden ser simples ejercicios rutinarios para algunas personas y problemas muy complicados para otras. De esta forma, el término “problema” no sería una propiedad inherente a la actividad matemática sino que dependería de la interacción entre esta y la persona que intenta resolverla, sin restringirse a una dificultad de tipo operacional.

Stanic y Kilpatrick identifican tres formas de entender la resolución de problemas: como un contexto, como una habilidad y como un arte (citados en Schoenfeld, 1992, p. 338). En la primera interpretación los problemas se utilizan para motivar los tópicos a estudiar, de forma recreativa, como una forma de desarrollar nuevas estrategias y para practicar dichas estrategias. Los autores que consideran la Resolución de Problemas como una habilidad, la entienden como una parte del currículo que hay que aprender de forma independiente al resto y evaluable también de forma independiente, considerando que dicha habilidad forma parte del conjunto de herramientas de las que debe disponer el estudiante. Desde la tercera perspectiva, que es la que se adopta en este estudio, la Resolución de Problemas se considera como el eje de las matemáticas.

La forma en que los profesores e investigadores enfocan la propuesta de utilizar la Resolución de Problemas para promover el aprendizaje no es común para toda la comunidad educativa. Unos optan por la enseñanza específica de métodos heurísticos, mientras que otros consideran que hay que seguir y reforzar los cuatro pasos propuestos por Polya: entendimiento, diseño, implementación y visión retrospectiva (Santos, 2007).

A la hora de plantearse el diseño de una secuencia de enseñanza, resulta fundamental identificar determinados elementos que ayuden a los estudiantes a desarrollar habilidades, procesos y actitudes favorables para el quehacer matemático. Schoenfeld (1992) identifica cinco aspectos de la cognición que hay que tener en cuenta tanto en el diseño de una propuesta metodológica como en el análisis del conocimiento de los estudiantes: el conocimiento base, las estrategias de resolución de problemas, el seguimiento y el control, las creencias e influencias y las prácticas educativas. Los cuatro primeros aspectos están incluidos en los elementos que Kilpatrick et al. (2009) utilizan para caracterizar el aprendizaje de las matemáticas; el último, las prácticas educativas, son el vehículo que permite actuar sobre dichos elementos.

La forma en que los alumnos acceden a un concepto matemático depende de las herramientas matemáticas que tengan disponibles y de la red de significados asociados a conceptos relacionados con aquel que se quiere introducir, es decir, con su comprensión conceptual. De esta forma, la enseñanza debe contemplar la creación o ampliación de dichas redes, así como su fortalecimiento. Por otro lado, para analizar el comportamiento de una persona ante una situación en la que tenga que utilizar las matemáticas, ya sea para interpretar cierta información o para resolver un problema, debemos conocer, en primer lugar, de qué herramientas matemáticas dispone la persona para enfrentarse a dicha situación. Cuanto más robusto sea un concepto matemático en la cognición del estudiante, más completo será el catálogo de recursos de que este disponga para resolver problemas. Ahora bien, cuanto más complejo sea el concepto matemático, más elementos deben conjugarse para proporcionarle firmeza, ya que cualquier debilidad en dichos elementos hará zozobrar los cimientos del concepto que pretendemos construir y aquellos que posteriormente requieran del uso del mismo. El análisis del conocimiento con el que parte un estudiante para el desarrollo de nuevos conceptos matemáticos engloba la comprensión conceptual y la fluidez en el uso de procedimientos matemáticos.

Una vez establecido el tipo de información de que dispone el estudiante para resolver actividades en las que se conjugan diversos elementos matemáticos, conviene establecer cómo el alumno accede a dicha información y la utiliza. Este análisis engloba aspectos relacionados con la toma de decisiones durante la resolución de las actividades. Por ejemplo, en el caso de que el estudiante no utilice una determinada estrategia, conviene determinar si no la conoce, con lo que estaríamos ante una escasez de herramientas, o la pasa por alto, lo que puede indicar dificultades de tipo metacognitivo, una falta de conexión entre sus conocimientos o que las conexiones establecidas no sean correctas. Se debe tener en cuenta que el conocimiento base del estudiante que intenta resolver problemas no necesariamente tiene que estar compuesto por conocimientos correctos, el estudiante utiliza los conocimientos que tenga, sean correctos o no (Schoenfeld, 1992). La búsqueda de estrategias para resolver problemas pasa obligatoriamente por el análisis de diferentes propuestas y con ello surge, de manera natural, la relación entre la competencia estratégica y el razonamiento adaptativo.

Las investigaciones acerca de las heurísticas o estrategias de resolución de problemas comenzaron con el trabajo de Pólya (1945) en el que se considera como heurísticas la búsqueda de analogías, de elementos auxiliares, la descomposición y recombinación, la inducción o el trabajar en sentido inverso, de atrás hacia adelante. A finales de los años 60 y durante los 70 hubo varios intentos de llevar estas heurísticas al salón de clases, pero los resultados no fueron muy satisfactorios como reflejan numerosos trabajos citados por Schoenfeld (1992, pp. 352-353). Algunos autores encontraron que los estudiantes no transferían las estrategias aprendidas a dominios diferentes de aquellos en los que fueron enseñados y otros consideran que los resultados positivos obtenidos eran pequeños comparado con el esfuerzo que debía hacerse para implementar las heurísticas en el aula. Una de las críticas que se hizo al listado de las heurísticas presentadas por Pólya es que estaban presentadas de forma que se las podía identificar cuando ya se habían utilizado pero sin aportar elementos que permitieran que las personas que no estuvieran familiarizadas con dichas estrategias las implementaran. Más adelante Heller y Hungate (1985) recomendaron cinco acciones para enseñar a utilizar las estrategias de Resolución de Problemas: hacer explícitos los procesos tácitos, lograr que los estudiantes hablen sobre los procesos, facilitar la práctica guiada, asegurarse de que los procedimientos sean bien aprendidos y enfatizar tanto la comprensión cualitativa como los procedimientos específicos.

Referente al dominio metacognitivo podemos distinguir aspectos relacionados con los procesos de auto-regulación y control y las creencias, así como su influencia en el aprendizaje de las matemáticas. Los términos “auto-regulación” y “control” surgieron en la investigación en Educación Matemática como respuesta a lo preocupante que era la situación con respecto a la forma en que los estudiantes conceptualizaban la resolución de problemas, promoviendo acciones donde se diera importancia no sólo a lo que se sabía, en lo referente a conceptos, sino al hecho de utilizar los conocimientos y cómo y cuándo se utilizaban (Lesh, 1985). El proceso de auto-regulación consiste en evaluar, de forma consciente, hasta qué punto las acciones que realizamos son correctas, con el objetivo de establecer cambios en la estrategia o el enfoque elegido, cuando sean necesarios. Desarrollar habilidades relacionadas con la auto-regulación no es fácil y, en ocasiones, conlleva el cambio de hábitos de comportamiento.

En cuanto a las creencias y la influencia que estas tienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya se ha hecho referencia a que el aprendizaje que desarrollen los estudiantes depende, en gran medida, del tipo de enseñanza recibida y que ésta, a su vez, depende de qué concepto tenga el profesor acerca de qué es la matemática y qué significa aprender matemáticas, aspecto que se ha tratado en detalle en la sección anterior. Pero, no sólo las creencias del profesor influyen en este proceso, también las del alumno puesto que de ellas depende la forma en que se enfrente a las actividades propuestas. Algunas de las creencias que han mostrado los estudiantes incluyen que los problemas de matemáticas tienen una única solución correcta, a la que se puede llegar por un único camino, el que el profesor indica en clase, y que no debe costar mucho tiempo encontrar (Schoenfeld, 1992). Esto arrastra una consecuencia negativa, que los estudiantes abandonan aquellas actividades para las que no han encontrado una solución satisfactoria en poco tiempo o que ni siquiera han conseguido plantear, e incluso descartan casi directamente aquellas actividades que no responden a un patrón conocido, que no relacionan con ninguna actividad realizada con anterioridad (Camacho-Machín, Perdomo-Díaz & Santos-Trigo, 2010).

Ha quedado reflejado en esta sección que una enseñanza basada en la Resolución de Problemas promueve que los estudiantes consideren las matemáticas como una disciplina activa, a cuyos conocimientos pueden acceder e incluso construir, perspectiva esta que contribuye a eliminar aspectos negativos, fruto de una enseñanza que presenta las matemáticas como contenidos cerrados y los problemas como un conjunto de estrategias que deben aprenderse, como la categorización de las actividades según la similitud que tengan con las presentadas por el profesor en el aula y el abandono del proceso de resolución sin haber dedicado un tiempo crítico a reflexionar sobre el mismo o a probar diferentes estrategias de resolución. Además ofrece oportunidades para establecer conexiones razonadas entre distintos elementos matemáticos ya que, en muchas situaciones, los problemas requieren de la combinación de diferentes herramientas matemáticas, dando a los estudiantes la oportunidad de combinar ideas matemáticas de una manera diferente (NCTM, 2009).

Por otra parte, el uso de esta perspectiva promueve que el estudiante desarrolle habilidades como examinar, representar, transformar, resolver y aplicar y se entrene en el uso de procesos asociados al pensamiento matemático avanzado como abstraer, analizar, categorizar, conjeturar, generalizar o sintetizar, además de ser uno de los vehículos a través del cuál los estudiantes pueden desarrollar el razonamiento matemático y dar sentido a las ideas matemáticas (NCTM, 2009).

A la hora de diseñar los problemas que se utilizarán en el Módulo de Enseñanza hay que tener en cuenta algunos aspectos: ¿qué tipo de problemas se debe plantear a los estudiantes de primer curso de la Licenciatura en Químicas? ¿cómo debe hacerse? Barrera-Mora y Santos-Trigo (2002) definen tres tipos de escenarios que se pueden utilizar a la hora de escoger o diseñar las actividades que se propongan y que hacen surgir situaciones que favorecen el desarrollo de habilidades y los procesos mencionados propios del quehacer matemático. La clasificación de las actividades en uno u otro escenario se hace atendiendo al contexto en que se enuncian: matemático, hipotético y real.

Una situación corresponde a un contexto matemático si involucra únicamente aspectos relacionados con esta disciplina. El análisis y la discusión en actividades de este tipo se realizan en el ámbito puramente matemático. En las actividades formuladas en un contexto del mundo real se identifican las variables de una situación real que se pueden examinar con recursos matemáticos, se estudia la relación entre dichas variables y se plantea un modelo matemático que represente la situación. En el contexto hipotético, la situación se construye a partir de una serie de suposiciones acerca del comportamiento de las variables, que no se basan en datos o información real.

Camacho-Machín et al. (2010) comprueban que los estudiantes no extrapolan sus conocimientos matemáticos a la Resolución de Problemas enunciados en otro contexto, de forma natural e inmediata lo que conduce a que se descarte el uso de problemas enunciados en un contexto puramente matemático durante la instrucción con los estudiantes de Químicas. Por otra parte, llevar a cabo una Metodología utilizando problemas "reales" supondría una inversión temporal enorme a la que no se puede hacer frente (Moreno, 2000). Por estas razones se ha optado por el uso de actividades enmarcadas en un contexto "hipotético", en las que se incluyen cuestiones puramente matemáticas pero que intentan conectar los conceptos abstractos con posibles situaciones reales, considerando así, que las actividades enunciadas en un contexto hipotético crean un puente entre los problemas "matemáticos" y los "reales". El contexto utilizado para enmarcar las actividades está directamente relacionado con conceptos de química y/o física, con el objetivo de hacer que estos sean cercanos para los estudiantes a los que van dirigidas.

Esta elección del contexto en que se presentarán las actividades está acorde con los fundamentos de la Educación Matemática Realista, teoría con dos características principales: el uso de contextos realistas en la enseñanza de las matemáticas, con el objeto de destacar la conexión de las matemáticas con la realidad, hacerlas cercanas a los estudiantes y relevantes para la sociedad y el uso didáctico de modelos (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003; http://www.fi.uu.nl/en/rme/). Los contextos realistas se refieren no sólo a problemas formulados en un contexto relacionado con la vida real, sino a cualquier tipo de actividad que tenga sentido para el estudiante, es decir, que resulte real para él. En este sentido, incluso las matemáticas formales pueden conformar un contexto realista, si los estudiantes a los que van dirigidas las actividades están acostumbrados a trabajar en este contexto y las actividades planteadas en el mismo tienen sentido para ellos. Freudenthal (citado por Gravemeijer, 2004, p. 2) define la realidad como "aquello que el sentido común considera real", pero añade que lo que puede resultar de sentido común para cualquier persona es diferente a lo que resulta real para un matemático.

Otro principio en el que se basa la Educación Matemática Realista, y que se considera en este trabajo, es que las matemáticas no deben presentarse como un sistema cerrado al que los estudiantes acceden de forma pasiva, sino como una actividad o un proceso al que el estudiante debe enfrentarse, con la asistencia del profesor sólo como guía de dicho proceso, lo que concuerda con la concepción de las matemáticas y lo que significa aprender matemáticas mostrada al inicio de este capítulo.

2.4 La tecnología en el aprendizaje de las matemáticas.

El desarrollo de la tecnología ha influido en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas por las oportunidades que ofrece tanto a las personas encargadas del planteamiento del modelo de enseñanza (profesores y/o educadores matemáticos) como a los estudiantes, permitiéndoles acceder a una gran variedad de recursos y estrategias que les ayuden a explorar sus ideas matemáticas y probar sus conjeturas (Santos, 2007).

El NCTM (2000) registra diferentes posibilidades que ofrece el uso de tecnología en el aula y lo reconoce como uno de los principios que deben considerarse a la hora de formular propuestas curriculares:

> Las calculadoras y los ordenadores son herramientas esenciales para enseñar, aprender y hacer matemáticas. Proporcionan imágenes visuales de ideas matemáticas, facilitan la organización y el análisis de datos y realizan cálculos con eficacia y exactitud [...] Cuando disponen de estas herramientas tecnológicas, los alumnos pueden centrar su atención en tomar decisiones, reflexionar, razonar y resolver problemas.
>
> (NCTM, 2000, p. 26)

La elección de la herramienta que se utilice en el aula influye tanto en el diseño del Módulo de Enseñanza como en la forma en que los estudiantes desarrollen su propia ruta de aprendizaje y se promueva el pensamiento matemático. La tecnología puede actuar como mediador, permitir múltiples representaciones del fenómeno matemático estudiado y mejorar la construcción y evolución de las trayectorias de aprendizaje de los estudiantes (Sacristán et al., 2010).

De acuerdo con Hershkowitz et al. (2002), para seleccionar una herramienta tecnológica adecuada hay que tener en cuenta los siguientes aspectos:

(a) Generalidad; que se pueda utilizar en diferentes áreas de contenido, su disponibilidad y su estatus cultural.
(b) Potencia para sostener la matematización; la herramienta debe tener capacidad de amplificación, reorganización y para expresar una “nueva realidad matemática”.
(c) Poder de comunicación (o de mediación semiótica); el poder de la herramienta para soportar el desarrollo del lenguaje matemático y relacionar su simbología con el sistema semiótico más común utilizado en matemáticas.

A estas consideraciones hay que añadir el diseño de la herramienta y sobre todo la forma en que presenta la información que, en algunas ocasiones, dificulta la distinción entre información relacionada con las matemáticas o no, lo que puede provocar que los estudiantes se distraigan atendiendo a mensajes que no tienen que ver con las matemáticas ni con los conceptos que están trabajando, sino con aspectos técnicos de la herramienta (Sacristán et al., 2010).

Las características técnicas de la herramienta utilizada influyen en determinados aspectos de la experiencia de aprendizaje que se desarrolle con ella, lo que debe tenerse también en cuenta a la hora de decantarse por una herramienta concreta. Por ejemplo, influye en el uso de los sistemas de representación. La herramienta tecnológica que se utilice en el aula debe permitir el uso de diferentes sistemas de representación y facilitar la transferencia de información entre distintas representaciones, aspecto fundamental en el tratamiento de conceptos matemáticos cuya naturaleza se caracteriza por su abstracción y la falta de un representante único para cada concepto (Duval, 1993). La variedad de aplicaciones implementadas en la calculadora Voyage 200 permite utilizar y explorar diferentes sistemas de representación (numérico, algebraico, gráfico, etc) y tiene la capacidad de presentar, de forma simultánea, dos de dichas aplicaciones, lo que facilita el establecimiento de relaciones entre diferentes representaciones, promoviendo así que se produzcan la conversión y transferencia entre registros que, señala Duval, son procesos básicos para una comprensión de los conceptos matemáticos.

El estudio de las matemáticas involucra tanto aspectos abstractos como procesos formales, el uso de la tecnología ayuda, en esta investigación, al desarrollo de esos procesos formales muchas veces convertidos en algoritmos que los estudiantes memorizan y olvidan con facilidad, para dar más presencia a procesos del PMA como la abstracción y la generalización.

Numerosos estudios han mostrado que el uso de herramientas tecnológicas puede ayudar en la conceptualización de problemas u objetos matemáticos (Sacristán et al., 2010) pero el simple hecho de utilizar tecnología en el aula no garantiza que los estudiantes la utilicen de una forma beneficiosa para el aprendizaje, en particular en la Resolución de Problemas. El tipo de actividad en la que se utilice la tecnología, la forma en que esté diseñada y el uso que los estudiantes hagan de ella son algunos de los factores que influyen en los resultados obtenidos empleando la herramienta, en lo que a comprensión se refiere.

La forma en que esté diseñada la actividad a utilizar provoca que la herramienta tecnológica se utilice de una forma u otra, lo que se traduce en que el uso de tecnología influya en la estructura de las rutas de aprendizaje de los estudiantes. Cuando se implementa el uso de cualquier herramienta tecnológica en el aula, los estudiantes necesariamente deben pasar por un proceso de adaptación y transformación de lo que sería un simple artefacto a una herramienta productiva para la Resolución de Problemas, evitando la limitación de su uso a la realización de procedimientos que podríamos hacer con lápiz y papel (Santos, 2007).

Existe una relación muy estrecha entre los conocimientos que posee un estudiante y la herramienta tecnológica que emplea durante el proceso de aprendizaje. La tecnología utilizada influye en los enfoques y razonamientos de los estudiantes y, por tanto, en la comprensión que esto involucra, pero, además, el propio conocimiento del estudiante es el que guía el uso de la tecnología y establece la forma en que esta se utiliza (Drijvers et al., 2010). Esto lleva a considerar la interacción entre el alumno y la herramienta tecnológica empleada en esta investigación, la calculadora simbólica Voyage 200[25], como uno de los elementos a tener en cuenta en el análisis de la trayectoria de aprendizaje de los estudiantes que participaron en ella.

En este sentido, la Teoría de la Instrumentación establece una distinción, en términos de significado, entre *artefacto* e *instrumento*. Un artefacto se define como el objeto que se utiliza como herramienta (no necesariamente físico), mientras que un instrumento incluye, además del artefacto, las técnicas y los esquemas mentales que el usuario desarrolle y aplique mientras utiliza el artefacto. Drijvers et al., (2010, p. 108) proponen la siguiente expresión para describir un instrumento y su relación con el artefacto:

$$Instrumento = Artefacto + Esquema + Técnicas$$

[25] La consideramos como un CAS en términos de lo expuesto por Guin, Ruthven & Trouche (2005).

El proceso por el que un artefacto se convierte en un instrumento es lo que se denomina génesis instrumental. En este proceso se establece una relación bilateral entre el artefacto y el usuario: el conocimiento matemático del usuario afecta al uso que se haga de la herramienta (instrumentalización) y el potencial y las restricciones de la herramienta influyen en el desarrollo cognitivo del usuario y las estrategias de resolución de problemas que emplee (instrumentación).

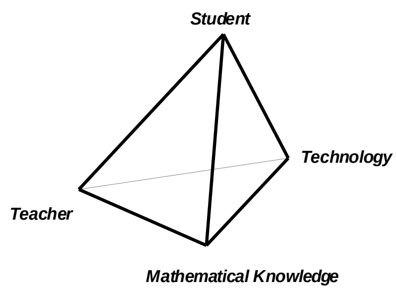
Aunque el foco de la investigación que se presenta en esta memoria no está centrado en el análisis del uso de la tecnología en el desarrollo del Módulo de Enseñanza desde el punto de vista de la Teoría de la Instrumentación, conviene señalar que el uso instrumental de la herramienta aparece guiado por los elementos que configuran tal aproximación.

2.5 Las interacciones en el aprendizaje de las matemáticas.

En esta investigación hay cuatro factores principales que pueden influir en el desarrollo cognitivo de los estudiantes, así como en su destreza a la hora de emplear heurísticas y estrategias de control de su propio proceso de solución: su compañero de trabajo (otro estudiante), los profesores[26], las actividades y la calculadora Voyage^{TM}200. A la hora de realizar el análisis del aprendizaje, el foco de atención será cada estudiante, haciendo explícitos los elementos que han influido en algún momento concreto en el desarrollo del mismo.

La sección anterior estuvo dedicada a una de las interacciones que se producen en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, la de los estudiantes con la tecnología. Pero este no es el único tipo de interacción que se produce puesto que el entorno de aprendizaje contempla otros aspectos como las actividades que se utilicen para promover el desarrollo cognitivo de los estudiantes y el rol que desempeñen tanto el profesor de la materia como el propio estudiante, con respecto a sus compañeros.

El conjunto de interacciones que se producen en esta investigación se puede presentar de forma esquematizada como las aristas de un tetraedro cuyos vértices son los diferentes elementos que entran en juego en el desarrollo del Módulo de Enseñanza: los estudiantes, los profesores, la tecnología y el conocimiento matemático (esquema 2.5.1).



Esquema 2.5.1: Tetraedro didáctico (Olive & Makar, 2010, p. 133)

[26] Considerando a los miembros del equipo de investigación que participaron en la implementación del Módulo de Enseñanza como profesores, en lo que se refiere a su interacción con los estudiantes.

En los años 80 las interacciones sociales y la enculturación surgen como asuntos centrales de la investigación en Educación Matemática y evolucionan los marcos de trabajo como el de aprendizaje cognitivo que se encarga del aprendizaje individual en un contexto social.

En el aspecto social, en esta investigación se parte de las siguientes premisas: que cada individuo es co-autor de su desarrollo personal y que su potencial cognitivo aumenta cuando colabora con otros individuos en actividades diseñadas para desarrollar el conocimiento (Cobo & Fortuny, 2000). En particular, en el campo de la Educación Matemática, un estudiante puede construir su propio conocimiento matemático y esta creación contribuye al desarrollo de un aprendizaje significativo, haciendo que el alumno adquiera habilidades como examinar, representar, transformar, aplicar y comunicar (Santos, 2007).

La forma en que se produce la interacción entre el profesor y los estudiantes puede afectar de manera profunda a las actitudes de los alumnos, pero también a los contenidos que aprenden y cómo es su comprensión (Nickerson & Bowers, 2008). Si la interacción entre el profesor y los estudiantes es unidireccional, siendo el profesor el emisor y el estudiante un pasivo receptor, puede aparecer en los alumnos la idea de que sólo aquellos que sean muy brillantes pueden hacer matemáticas o entenderlas realmente, limitándose el resto a aceptar lo que el profesor les indica, con la esperanza de llegar a entenderlo en algún momento (Rasmussen, 2001).

Por otra parte, Yackel, Rasmussen y King (2000) recalcan la utilidad de que se promueva el uso de cierto tipo de normas sociales en el proceso de aprendizaje. Los autores definen las normas sociales como aquellos aspectos de la interacción social que se producen en el aula y que se convierten en una norma. Según esta definición, en todos los modelos de enseñanza se establecen normas sociales, pero no en todos los casos las normas sociales coinciden. A partir de una comparación entre dos grupos con diferentes normas de tipo social, Yackel et al. (2000) muestran la conveniencia de promover normas como que los estudiantes expliquen sus razonamientos de forma autónoma, sin necesidad de que se les pida explícitamente, que ofrezcan explicaciones alternativas y traten de dar sentido a los razonamientos y explicaciones de sus compañeros. De esta manera, el tipo de interacción que se produzca en el aula puede contribuir al desarrollo del razonamiento flexible de los alumnos.

Para promover el desarrollo del razonamiento flexible en los estudiantes se puede tratar de establecer una serie de normas de clase según las cuales los estudiantes tengan que justificar sus afirmaciones matemáticas y explicárselas a otros. Los estudiantes necesitan justificar y explicar ideas para clarificar su razonamiento, perfeccionar su habilidad y promover su comprensión conceptual (Kilpatrick et al., 2009).

Estos aspectos pueden considerarse a la hora de implementar el Módulo de Enseñanza en el aula, optando por el trabajo en parejas o pequeños grupos, en un ambiente en el que se modifique el papel del profesor como responsable, casi exclusivo, del aprendizaje de los alumnos, y se dé esta responsabilidad a los estudiantes a través de las actividades de enseñanza.

Cobo y Fortuny (2000) identifican cuatro modelos de interacción entre una pareja de estudiantes (alternativa, guiada, relanzada y cooperativa) que influyeron de manera significativa en el desarrollo individual de habilidades cognitivas y heurísticas durante el proceso de resolución de problemas. Estos autores observaron que cuando los estudiantes trabajaban en parejas en la resolución de problemas, se generaban una serie de oportunidades de aprendizaje relacionadas con la mejora en el proceso de argumentación, las habilidades heurísticas, las formas de enfocar un problema y las formas de generar nuevas ideas dentro del proceso de resolución de problemas.

Cobo & Fortuny (2000) sostienen que cuando los estudiantes colaboran en la resolución de un problema se generan una serie de cambios en el aprendizaje, se amplía la posibilidad de que los estudiantes utilicen el proceso de argumentación, de que muestren más habilidades heurísticas para enfocar el problema y de que se generen nuevas ideas relacionadas con el proceso de resolución del problema.

En ocasiones, las cuestiones planteadas por uno de los miembros del grupo obligan a sus compañeros a ofrecer detalles explícitos de su conocimiento. En este sentido, la interacción resulta una herramienta útil para el análisis de la comprensión de los estudiantes pero también actúa como promotor de aspectos cognitivos ya que el estudiante que responde se ve obligado a revisar y estructurar su conocimiento para transmitirlo a su compañero y la persona que cuestiona una respuesta o un argumento refleja sus propios conocimientos y tiene la oportunidad de modificar aquellas ideas que había concebido de forma errónea o que simplemente no conocía.

2.6 Trayectorias de aprendizaje

Uno de los problemas principales de los que se ocupa la investigación en el campo de la Educación Matemática, junto con la comprensión de los procesos de aprendizaje, es cómo hacer que los estudiantes construyan nuevos conceptos matemáticos. La herramienta más poderosa de las que se dispone para conseguir este objetivo son las tareas o actividades que se propongan como parte de la instrucción. Al diseño o la selección de las actividades que se emplearán en el proceso de enseñanza hay que añadir, además, la necesidad de determinar qué papel desempeñan dichas actividades en el proceso de aprendizaje. En este sentido, Simon y Tzur (2004) proponen un marco de trabajo en el que se reflexione sobre las relaciones que existen entre las actividades propuestas y los efectos que se espera que dichas actividades tengan en el proceso de aprendizaje[27], lo que resulta fundamental en investigaciones como esta, en las que el diseño de actividades es uno de los objetivos. De esta forma se cubre la última de las interacciones consideradas en el tetraedro didáctico (esquema 2.5.1), la del estudiante con el conocimiento matemático.

Este proceso de reflexión resulta útil en la construcción de Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (THA) o para reflexionar acerca de los procesos hipotéticos de aprendizaje y el diseño o la selección de las tareas matemáticas que se utilizarán en la enseñanza de conceptos matemáticos.

[27] Esta propuesta está relacionada con la “abstracción reflexiva” de Piaget (Simon & Tzur, 2004, p. 94)

Una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje constituye un elemento útil para el diseño de un modelo de enseñanza, reflejando el camino que se prevé que siga el proceso de aprendizaje. Está formada por tres componentes: el objetivo del aprendizaje, las actividades y el proceso hipotético de aprendizaje, es decir, una predicción de cómo evolucionará la comprensión de los estudiantes en el contexto de las actividades propuestas (Simon, 1995)[28]. En otras palabras, la generación de una THA es el proceso que el profesor, o el investigador, sigue para establecer el plan a seguir en cuanto al desarrollo de las actividades de enseñanza, no queriendo esto decir que con una trayectoria hipotética de aprendizaje se persiga un objetivo único o que sólo exista esa trayectoria, sino que es importante que las actividades estén enfocadas hacia el desarrollo de un objetivo concreto y que el proceso de aprendizaje establecido es hipotético, en el sentido de que sólo la realización por parte de los estudiantes de las actividades propuestas indicará la manera real en que se produce el aprendizaje en el contexto creado. En este sentido la trayectoria de aprendizaje no es única, sino que es la seleccionada por el profesor o investigador como la que mejor se adapta a los objetivos de aprendizaje que pretende alcanzar (Clements & Sarama, 2004).

Para el desarrollo y la formulación de las THA se debe poner especial énfasis en proponer actividades en las que el estudiante tenga la oportunidad de expresar, representar, utilizar, comprobar y revisar o ajustar sus propias formas de pensamiento (Sacristán et al., 2010). Las propuestas de esas actividades dependen de los conocimientos del profesor o investigador, sobre diferentes aspectos: las matemáticas, sus actividades y representaciones, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y el conocimiento de los estudiantes de contenidos particulares (Simon, 1995). En base a esos conocimientos se construye la THA que se implementará en el aula.

Las THA deben considerar los distintos aspectos involucrados en el proceso de aprendizaje: la concepción que se tenga de las matemáticas como disciplina, el tipo de actividades que consideramos que promueve el aprendizaje de esta materia y el ambiente de aprendizaje en que se desarrollará. En esta investigación se ha optado por el uso de tecnología en el aula y por establecer un ambiente en el que el papel del profesor sea el de guía del proceso de aprendizaje y que sean las actividades y los propios estudiantes los protagonistas en la construcción del conocimiento.

Una vez que se implementa en el aula la Trayectoria Hipotética de Aprendizaje diseñada, el aprendizaje de los estudiantes puede seguir diferentes caminos o trayectorias, dependiendo de sus propias experiencias, el conocimiento matemático previo, las herramientas que se utilicen y el ambiente en que se produzca el aprendizaje. A la manera en que un individuo desarrolla una THA se le denomina trayectoria efectiva de aprendizaje o, simplemente, trayectoria de aprendizaje. Es fundamental que se analicen los tipos de conocimiento, los recursos y las formas de razonar que los estudiantes han mostrado a lo largo de la Trayectoria de Aprendizaje propuesta con el fin de seleccionar o diseñar nuevas tareas que desarrollen el pensamiento matemático de los estudiantes (Sacristan et al., 2010).

En resumen, el concepto de THA engloba las siguientes ideas:

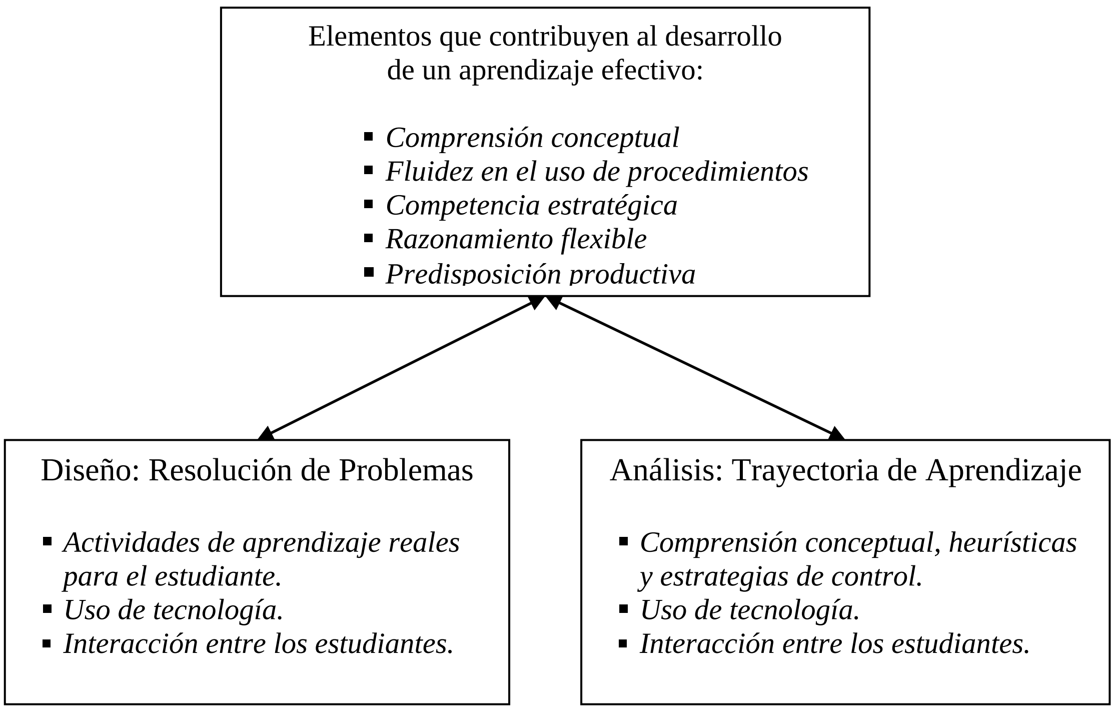
[28] Sacritán et al. (2010) utilizan el concepto de trayectoria de aprendizaje para “estructurar, organizar y discutir las prácticas y el conocimiento matemático que se deriva del uso de herramientas digitales”.

a) La generación de una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje se basa en la comprensión del conocimiento actual de los estudiantes involucrados.
b) Una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje es un vehículo para planificar el aprendizaje de conceptos matemáticos particulares.
c) Las actividades matemáticas proporcionan herramientas para promover el aprendizaje de conceptos matemáticos particulares y, por tanto, son una parte clave del proceso de enseñanza.
d) Debido a la naturaleza hipotética e inherentemente incierta de este proceso, el profesor regularmente se ve involucrado en la modificación de cada aspecto de la trayectoria hipotética de aprendizaje.

(Simon & Tzur, 2004, p. 93)

El análisis de las trayectorias de aprendizaje de los estudiantes, mostradas mientras resuelven los problemas del Módulo de Enseñanza, resultarán esenciales en nuestro trabajo para determinar su competencia matemática en términos de la comprensión conceptual de los alumnos, la fluidez en los procedimientos, la competencia estratégica, el razonamiento flexible y la predisposición productiva.

A modo de resumen, en el siguiente esquema (esquema 2.6.1) se incorporan los elementos que configuran el Marco Conceptual y se incluyen algunas de las relaciones que lo caracterizan.



Esquema 2.6.1: Elementos del Marco Conceptual

3. Metodología

Una vez definido el Problema de Investigación y las bases teóricas que sustentan este estudio, es el momento de establecer los términos en que se ha desarrollado el trabajo, es decir la Metodología que se empleó en la investigación. En este capítulo se describen las características generales de una investigación de tipo cualitativo, para continuar concretando la Metodología empleada en cada una de las dos fases de esta investigación. Finaliza el capítulo con un esquema de los aspectos principales de cada una de las fases: objetivos, participantes, instrumentos y escenario de recogida de datos.

3.1 Diseño general de la investigación.

Las características y la naturaleza del Problema de Investigación lo sitúan como un paradigma de carácter cualitativo en el campo de la Educación Matemática, enfoque que permite observar, analizar y describir fenómenos y los procesos que lo originan o modifican (Reyes-Rodríguez, 2009). Este paradigma de investigación proporciona los fundamentos apropiados cuando se busca comprender el comportamiento de los sujetos implicados en un proceso, en este caso de aprendizaje, intentando captar el proceso en su totalidad y las interacciones entre los sujetos o de los sujetos con el medio que les rodea (Álvarez-Méndez, 1986).

Existen distintos métodos de investigación en los trabajos de tipo cualitativo. Para seleccionar el que va a ser utilizado se toma como referencia el objeto de estudio, tratándolo en su complejidad y dentro de su contexto. La validez de la investigación se evalúa con referencia al objeto analizado y los hallazgos se fundamentan con base en el material empírico recabado (Flick, 2004).

Los datos cualitativos son una fuente de descripciones y explicaciones de procesos que se producen en contextos locales identificables. Dichas descripciones y explicaciones deben estar fundamentadas a través de un proceso de análisis bien documentado que permita preservar el orden cronológico en que sucedieron las cosas, ver de forma precisa qué sucesos condujeron a qué consecuencias y derivar de ello explicaciones provechosas (Miles & Huberman, 1994).

El análisis de datos en este tipo de estudios se realiza en tres etapas principales: *reducción de los datos*, *presentación de los datos* y *formulación-verificación de las conclusiones* (Miles & Huberman, 1994). Estas etapas están interrelacionadas, constituyendo un proceso continuo e iterativo.

La *reducción de datos* se refiere al proceso de seleccionar, enfocar, simplificar, abstraer y transformar los datos que aparecen en la información recabada (notas de campo, transcripciones, materiales escritos por los estudiantes, etc.). Esta acción comienza a hacerse incluso antes de empezar el proceso de análisis propiamente dicho, continúa mientras se están recopilando los datos y no finaliza hasta que el informe final está elaborado. Es un proceso que comienza en el mismo momento en que el investigador selecciona el marco conceptual que utilizará, las preguntas de investigación que guiarán su trabajo y la forma en que recopilará los datos y sigue produciéndose al redactar resúmenes de lo que ocurre en la investigación o al codificar la información que se ha recopilado.

En la primera fase de esta investigación este proceso se realiza mediante la clasificación de las preguntas planteadas a los estudiantes en diferentes tipos, dependiendo de los conceptos y procesos matemáticos involucrados, y la construcción de una serie de tablas que mostraran, de forma simplificada y de fácil acceso, los procedimientos seguidos por los estudiantes en su resolución. En la segunda fase de la investigación, se reducen los datos a la consideración de aspectos de tipo cognitivo (los conceptos matemáticos que emergen y las estrategias heurísticas y metacognitivas que utilizan los estudiantes) que son presentados también en una serie de tablas, la descripción de momentos relevantes en la interacción entre los estudiantes y con los profesores presentes en el aula, así como del uso que hacen de la calculadora Voyage™200 y la forma en que interpretan la información que dicha herramienta les proporciona.

La *presentación de los datos* consiste en organizar la información de una forma accesible y compacta, de manera que la persona que quiera analizarla pueda ver qué está ocurriendo, planteando incluso sus propias conclusiones, o continuar hacia el siguiente paso del análisis. Algunos de los elementos que Miles y Huberman (1994) presentan como útiles para el desarrollo de esta etapa son las matrices, gráficas, mapas y redes. Cabe señalar que esta etapa y la anterior no son disjuntas puesto que al decidir los elementos que se muestran en la representación seleccionada para el despliegue de los datos también se está haciendo una reducción de los mismos. En la primera fase de la investigación se opta, además de presentar en una tabla los procedimientos empleados por los estudiantes para resolver las cuestiones planteadas (anexo B.1.22), por agrupar la información conforme a los aspectos analizados (el uso de conocimientos matemáticos previos, el uso de los sistemas de representación y los problemas enunciados en un contexto real). En la segunda fase de la investigación se opta, nuevamente, por la construcción de tablas; en una de ellas se describen las respuestas de los estudiantes a un cuestionario sobre el concepto de derivada (anexo B.2.8) y en las otras se identifican los momentos en que dichos estudiantes utilizan sus conocimientos matemáticos o muestran su habilidad para representar y resolver problemas y su capacidad para reflexionar, explicar y abstraer (sección 5.4, dedicada al análisis del desarrollo del Módulo de Enseñanza por parte de cuatro de las parejas de estudiantes participantes). En esta memoria se incluyen además las copias del material escrito por los estudiantes en cada una de las dos fases de la investigación y las trascripciones de las grabaciones de cada una de las sesiones de clase dedicadas a la implementación del Módulo de Enseñanza y de las entrevistas realizadas en las dos fases de investigación (anexos B, en el CD).

La etapa dedicada a la *formulación de las conclusiones* no se considera únicamente como el resultado del proceso anterior. Desde el comienzo del estudio, el investigador observa regularidades, patrones o explicaciones que deben ser verificadas a lo largo del análisis. Esta *verificación* puede realizarse simplemente volviendo a revisar la información cuando se esté redactando las conclusiones finales, para comprobar que no hay inconsistencia en los hechos mostrados, o puede constituir un proceso más elaborado, tomando como producto final las conclusiones establecidas por consenso entre diferentes investigadores que hayan revisado la información. En las dos fases de esta investigación se utilizan ambos procesos de verificación.

Una vez realizado el análisis y establecidas las conclusiones, hay que validar el procedimiento y los resultados de la investigación. Los criterios más utilizados en los estudios de tipo cualitativo son los de *fiabilidad* y *validez*. Los métodos empleados en este tipo de investigación son específicos del problema sujeto a estudio y el contexto en que este se desarrolle, algo que hay que tener en cuenta al evaluar el proceso de investigación y los resultados reportados. Por esta razón la fiabilidad no debe entenderse como la obtención de los mismos datos y resultados después de repetir el experimento. La fiabilidad del estudio puede verse favorecida aumentando la calidad en el registro y la documentación de los datos y presentando las notas tomadas con cierta estandarización (Flick, 2004). También se puede optar por explicar la génesis de los datos de forma que se pueda distinguir claramente entre las declaraciones de los sujetos que están siendo analizados y las interpretaciones del investigador y haciendo explícitos los procedimientos seguidos durante la investigación para permitir la comparación del análisis realizado con el que puedan realizar otros investigadores.

Este cuidado en la presentación de los procesos seguidos a lo largo de la investigación es un elemento a considerar también para evaluar la validez del trabajo, permitiendo la réplica por parte de otros investigadores (fiabilidad externa). También se toman en cuenta otras cuestiones como la objetividad, credibilidad, que las conclusiones sean transferibles a otros contextos o generalizables o que el estudio resulte útil, por ejemplo, para otras investigaciones (Miles & Huberman, 1994).

Tal y como se ha indicado con anterioridad, esta investigación se ha desarrollado en dos fases principales, cada una con sus propias características en cuanto a los participantes, los instrumentos, las técnicas de recogida de datos y los métodos empleados para el análisis de los mismos.

Primera fase:
Análisis y documentación de los conocimientos que los estudiantes universitarios muestran al responder preguntas y resolver problemas relacionados con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, después de haber recibido una introducción del concepto centrada en la clasificación y posterior resolución de la ecuación con el método algebraico correspondiente.

Segunda fase:
Diseño e implementación de un Módulo de Enseñanza dirigido a los alumnos de la asignatura Matemáticas II, del primer curso de la licenciatura en Química, en el que se introducen las EDO en un ambiente de Resolución de Problemas. Aquí interesa analizar los aspectos del pensamiento matemático y los procesos relacionados con la comprensión conceptual que los estudiantes muestran a lo largo del desarrollo de los problemas que constituyen el Módulo de Enseñanza.

En las dos fases de esta investigación se presenta la información necesaria para la aplicación del criterio de fiabilidad externa, detallando las características de cada uno de los estudios en lo referente a participantes, escenario e instrumentos de recogida de datos y proceso de análisis de la información y elaboración de conclusiones. Además, como criterio de validez de los resultados mostrados en la primera fase de la investigación se especifican los trabajos que se han presentado al respecto a la comunidad investigadora, que avalan la utilidad de los resultados para el campo de la investigación en Educación Matemática.

En las tablas 3.1.1 y 3.1.2 se resume el desarrollo temporal de esta investigación, desde sus orígenes en el ámbito de la Fase de Investigación del Programa de Doctorado, hasta la elaboración de esta Memoria.

<table>
<tr><th colspan="2">Primera fase de investigación</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Fase de Investigación del Programa de Doctorado.

(septiembre 2004 - octubre 2005)</td><td>Elección de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias como tema de investigación.
Revisión de literatura sobre dificultades en el aprendizaje de las EDO.
Revisión de literatura sobre marcos teóricos utilizados para caracterizar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario.</td></tr>
<tr><td>Definición del Problema de Investigación para la primera fase.
Configuración de un Marco Conceptual basado, principalmente, en los trabajos de Duval sobre el uso de sistemas de representación.</td></tr>
<tr><td>Diseño de un cuestionario de Ecuaciones Diferenciales (C-ED).
Aplicación del cuestionario a los estudiantes de las licenciaturas en Matemáticas y Física.
Análisis de las respuestas de los estudiantes al cuestionario.</td></tr>
<tr><td>Diseño del protocolo de entrevistas de la primera fase de la investigación.
Selección de los estudiantes a entrevistar y aplicación de las entrevistas en junio de 2005.</td></tr>
<tr><td>Redacción de la memoria de la Fase de Investigación del Programa de Doctorado, defendida en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna en julio de 2005.</td></tr>
<tr><td>Redacción de la memoria para la obtención del DEA, defendido en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna en octubre de 2005.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">(noviembre 2005 - julio 2006)</td><td>Análisis preliminar de las entrevistas.</td></tr>
<tr><td>Revisión del Marco Conceptual.
Redacción del Proyecto de Tesis, presentado en la Universidad de La Laguna en julio de 2006.</td></tr>
<tr><td>(septiembre 2007 - diciembre 2007)</td><td>Revisión del análisis de las entrevistas y reestructuración del análisis de datos agrupando la información obtenida utilizando los dos instrumentos(el cuestionario y la entrevista).</td></tr>
</table>

Tabla 3.1.1: Cronología de la primera fase de la investigación

Segunda fase de investigación	
(septiembre 2006 - mayo 2009)	Revisión de la literatura relacionada con la enseñanza y el aprendizaje de las EDO, el uso de tecnología y el papel de las interacciones en el proceso de aprendizaje. Revisión del Marco Conceptual y del planteamiento metodológico de la investigación.
	Diseño de los instrumentos: manual de uso de la Voyage^{TM}200, cuestionario C-D, Módulo de Enseñanza, problema 4: Investigaciones policiales.
(junio 2009)	Aplicación del cuestionario de la derivada, implementación del Módulo de Enseñanza y aplicación del problema 4. Diseño del protocolo de entrevistas. Aplicación de las entrevistas.
(julio 2009 - enero 2010)	Análisis de los datos recopilados durante la segunda fase de la investigación. Actualización de la revisión de la literatura.
(enero 2010 - octubre 2010)	Redacción de la memoria de Tesis.

Tabla 3.1.2: Cronología de la segunda fase de la investigación

3.2 Primera fase de la investigación.

A lo largo de esta sección se presentan los elementos que configuran la primera fase de la investigación que incluye: una descripción de los participantes, el escenario y los instrumentos utilizados en la recolección de los datos, el proceso seguido para realizar el análisis y los criterios que validan los resultados de esta primera fase de la investigación. El análisis y la interpretación de los datos se presentan en el capítulo 4.

3.2.1 Participantes

En esta fase participaron veintiún estudiantes de las licenciaturas de Matemáticas y Física que estaban cursando la materia en la que se trabaja el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria. En el caso de los estudios de Matemáticas, esta es una asignatura de tercer curso, impartida en el quinto semestre y dedicada en exclusiva a las EDO (tabla 1.2.2), mientras que en Física se trata de una materia impartida durante el segundo semestre que aborda otros conceptos de cálculo como el estudio de la continuidad y derivabilidad de funciones de varias variables o el análisis complejo (tabla 1.2.3). En el momento en que se desarrolló la investigación, los estudiantes de ambas licenciaturas habían recibido la formación relativa al estudio de las EDO de primer y segundo orden. Los profesores que impartían estas materias eran completamente ajenos a esta investigación.

La observación de los apuntes utilizados por los profesores y de las hojas de problemas que se proponía a los estudiantes de cada una de las asignaturas permitió observar que la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en ambos grupos tenía en común su fuerte componente algebraica. El procedimiento seguido era clasificar las ecuaciones y aplicar el método de resolución específico para el tipo de EDO identificado. El tratamiento gráfico del concepto es escaso en el caso de Matemáticas, limitándose a la presentación del campo de direcciones asociado a una EDO como un procedimiento más, y nulo en el caso de Física. Para paliar esta diferencia a la hora de responder a las preguntas y resolver los problemas que requerían del uso del campo de direcciones, se entregó a los estudiantes de Física un documento con una breve explicación acerca de este concepto.

Otra diferencia entre estas especialidades se encuentra en la profundidad con que se tratan estos conceptos en cada una de las licenciaturas. Por ejemplo, en la licenciatura de Matemáticas se consideran aspectos que no se contemplan en los estudios de Física como la prolongación de soluciones y los teoremas de existencia y unicidad de las mismas, además de demostrarse rigurosamente las principales propiedades de las soluciones de los diferentes tipos de ecuaciones.

Las diferencias que existen entre los estudiantes de Física y Matemáticas, en cuanto a la formación recibida, no se tradujeron en diferencias significativas en sus respectivas respuestas a las cuestiones planteadas (Camacho & Perdomo, 2005a, 2005b). Esto motivó que se optara por realizar un análisis conjunto de las respuestas de los veintiún alumnos, sin distinguir entre la especialidad que estaban cursando (Camacho, Perdomo & Santos-Trigo, 2007; 2009).

3.2.2 Escenario e instrumentos para la recopilación de datos

El objetivo de esta fase de la investigación se centra en analizar el conocimiento y las formas de interpretación, que muestran los participantes, del concepto de EDO y de otras nociones relacionadas, como son su solución y el campo de direcciones asociado a la ecuación, además de observar si el contexto en que se presentan las actividades influye en la manera de utilizar el concepto de ecuación diferencial. No se influye en el proceso de enseñanza.

Se utilizaron dos instrumentos para recabar información: un cuestionario sobre ecuaciones diferenciales (C-ED) y una entrevista. En el anexo A.1 figura la relación completa de las preguntas utilizadas en esta primera fase de la investigación, así como la descripción de los objetivos que se perseguían al plantear cada una de ellas y el momento en el que fueron formuladas (cuestionario, entrevista o ambos).

El cuestionario C-ED consta de once preguntas en las que intervienen los conceptos de solución general y particular de una EDO, el campo de direcciones asociado a una EDO y la aplicación de estos conceptos en la resolución de problemas (anexo A.1, preguntas P1-P11).

Los problemas fueron propuestos y discutidos en profundidad por el equipo investigador, al objeto de relacionarlos con las componentes que determinan la comprensión y que han sido expuestas en el Marco Conceptual (capítulo 2). Las tareas propuestas son de tres tipos:

i) Problemas extraídos de libros de texto (por ejemplo, P3 y P4)
ii) Problemas utilizados en investigaciones anteriores (por ejemplo, P6)
iii) Tareas diseñadas ad-hoc para que los estudiantes utilizaran ideas y conceptos estudiados con anterioridad y que permitieran dar sentido a la resolución (por ejemplo P1, P7 o P10).

Los estudiantes respondieron a este cuestionario durante una hora de clase, de forma individual, sin intervención del profesor de la materia o de los investigadores y empleando únicamente lápiz y papel. El momento elegido para que los alumnos respondieran al cuestionario estuvo marcado por los contenidos desarrollados en el aula. Se les presentó, sin previo aviso, cuando ya habían cursado, aproximadamente, la mitad de la asignatura, que abarca contenidos como las ecuaciones en variables separadas, homogéneas, lineales, de Bernouilli, de Ricatti y exactas.

Las entrevistas se diseñaron de acuerdo a un primer análisis de las respuestas de los estudiantes al cuestionario. La estructura general es la de una *entrevista basada en tareas*[29] (Goldin, 2000) que consistió en contestar a seis preguntas que ya se habían formulado en el cuestionario (P1a, P3, P6, P7, P8, P9) y a otras cuatro, propuestas con el objetivo de indagar con mayor profundidad en el conocimiento de los estudiantes (P12, P13, P14, P15). Estas entrevistas son *semi-estructuradas* ya que están diseñadas con un tronco común, que debían resolver todos los estudiantes entrevistados, pero se considera la posibilidad de realizar preguntas adicionales que permitan concretar las acciones de los alumnos y profundizar en su razonamiento. Esas cuestiones adicionales pueden ser del tipo "¿qué has hecho?" o "¿por qué lo haces?", pero también preguntas con contenido matemático (por ejemplo calcular una integral definida o indefinida).

Las entrevistas se realizaron dos meses después de que los estudiantes terminaran el curso y cada una de ellas duró entre una hora y una hora y media. Para realizar la entrevista se seleccionó a tres de los estudiantes que participaron en la investigación (Jordan, Stella y Wanda), con base en los criterios que se describen en el siguiente apartado, dedicado al proceso de análisis de la información. Estas entrevistas fueron grabadas en vídeo, material éste que se utilizó para el análisis, junto con sus trascripciones y los documentos escritos en los que los estudiantes respondían a las diferentes preguntas. En anexo A.1 se encuentra el conjunto de preguntas utilizadas en el cuestionario C-ED y en la entrevista; en el anexo B.1 (en el CD) se adjuntan los documentos escritos que muestran las respuestas de los 21 estudiantes al cuestionario, las trascripciones de las entrevistas de Jordan, Stella y Wanda y las tablas utilizadas para mostrar los datos de manera más sintetizada.

La elección de las preguntas que se utilizaron tanto en el cuestionario como en la entrevista se hizo teniendo en cuenta las dificultades y los errores que la bibliografía analizada mostraba como presentes en la enseñanza y el aprendizaje de las EDO (Artigue, 1992; Brodetsky, 1919; Habre, 2000; Hernández, 1995; Moreno & Laborde, 2003; Rasmussen, 2001; Zandieh & McDonald, 1999) y los sistemas de representación necesarios para resolverlas. El tratamiento numérico de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias es un aspecto que corresponde a una materia posterior a la que estaban cursando los estudiantes que participaron en esta investigación, por lo que no se ha tenido en cuenta, restringiéndose el mismo a los registros algebraico y gráfico y contemplando acciones de reconocimiento, tratamiento y conversión de los sistemas (Duval, 1993).

Atendiendo a que el objetivo principal de esta fase de la investigación es el análisis de los recursos mostrados por los estudiantes al enfrentarse a problemas donde aparece el

[29] Traducción de la expresión "task-based interviews".

concepto de EDO, se han elegido ecuaciones diferenciales cuya resolución pueda hacerse empleando algoritmos propios de este concepto pero también con argumentos relacionados con el concepto de derivada de una función y las propiedades que relacionan a esta con la propia función. Todas las EDO que aparecen en el cuestionario, excepto una, se pueden resolver separando las variables y en todos estos casos, menos en uno, las integrales que hay que resolver para encontrar la expresión algebraica de las soluciones de la ecuación son inmediatas. Sólo se plantea una EDO cuya resolución, separando variables, conduce a la integral de una función racional (P8). En este problema se proporciona, además, el campo de direcciones asociado a la ecuación, lo que ayudará a determinar qué sistema de representación eligen los estudiantes para resolverla. En el caso en que los estudiantes se inclinen por la resolución de la ecuación y no consigan resolver la integral se podrá observar si intentan resolverla a través del sistema de representación gráfico y cómo lo hacen. Es una forma de provocar la necesidad del uso de este registro en la resolución de los problemas (Habre, 2000).

3.2.3 Proceso de análisis de los datos

Para facilitar el análisis de los datos se clasificaron las preguntas utilizadas en esta fase de la investigación (tanto en el cuestionario como en la entrevista) en cuatro tipos diferentes cuyas características se reflejan a continuación.

Tipo 1: Requieren del conocimiento del concepto de solución de una EDO. Consisten en comprobar si una expresión algebraica es solución particular o general de una EDO o utilizar el hecho de que lo sea y en analizar algunas propiedades generales de las soluciones de una EDO en función de los términos de la misma (P3, P4, P5 y P11).

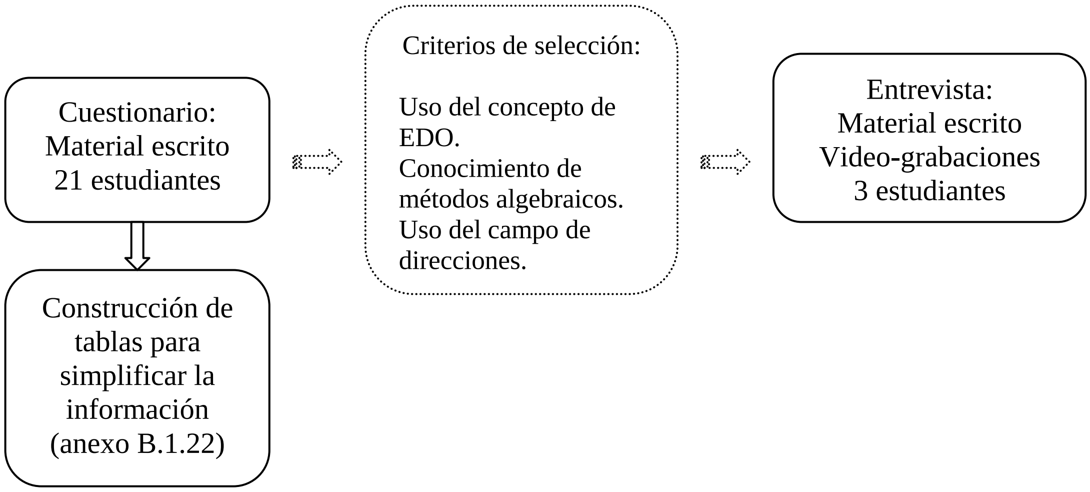
Tipo 2: Su resolución se puede abordar haciendo uso de conocimientos matemáticos estudiados con anterioridad o empleando métodos algebraicos sencillos (P1, P2 y P12). Conllevan la representación gráfica de funciones elementales, pero no se ven involucrados ni la construcción o interpretación del campo de direcciones ni la interpretación de datos desde y hacia un contexto matemático.

Tipo 3: Cuestiones para cuya completa resolución es necesaria la representación y/o interpretación del campo de direcciones asociado a una EDO (P6, P8, P10, P14 y P15).

Tipo 4: Preguntas en las que es necesario interpretar información proporcionada en términos algebraicos o gráficos, en un contexto o viceversa (P7, P9 y P13).

El análisis de la información obtenida a lo largo de esta primera fase de la investigación se divide en dos partes. En primer lugar se examinaron las respuestas que los alumnos participantes suministraron a los once problemas del cuestionario. En este análisis se detectaron ciertas regularidades en los procedimientos empleados para resolver las actividades, haciéndose un vaciado de esta información en una serie de tablas (anexo B.1.22) que sirvieron para *seleccionar y reducir* la información, cubriendo así la primera etapa del análisis de datos característica de los estudios de tipo cualitativo (Miles & Huberman, 1994). Un ejemplo de las tablas confeccionadas se presenta a continuación (tabla 3.2.1); en ella se refleja la forma en que los estudiantes respondieron a las preguntas de tipo 2 en las que debían resolver una serie de ecuaciones diferenciales, la mayoría de las cuáles no requieren del conocimiento de métodos algebraicos específicos de resolución, pudiendo utilizar únicamente el significado del concepto de derivada para obtener las funciones que solicita el ejercicio.

Posteriormente, para analizar con mayor profundidad las respuestas de los alumnos, se seleccionaron tres estudiantes para participar en la entrevista semi-estructurada. Durante la entrevista los estudiantes tuvieron la oportunidad de extender sus razonamientos, justificaciones y aclaraciones. La elección de estos estudiantes, cuyos seudónimos son Jordan, Stella y Wanda, se hizo teniendo en cuenta tres aspectos principales: uso del concepto de derivada y sus diferentes significados, el conocimiento de métodos algebraicos específicos de resolución de EDO y las realizaciones relacionadas con el campo de direcciones asociado a una ecuación diferencial.



Esquema del proceso de análisis

La *presentación de los datos* se realizó por una parte, utilizando diversas tablas con la información obtenida de las respuestas de los estudiantes al cuestionario y, por otra parte, agrupando la información de acuerdo a la pregunta de investigación correspondiente: en una primera parte se analiza la forma en que los estudiantes utilizan sus conocimientos previos, relacionados con las actividades, para abordar las diferentes preguntas; seguidamente se describe el tipo de representación que utilizan para finalmente exponer las particularidades en el modo en que los alumnos resuelven aquellos problemas cuyo enunciado refleja un contexto real. Esta organización de la información se hace explícita en el siguiente capítulo de esta memoria, donde se presenta el análisis de los datos de la primera fase de la investigación (capítulo 4).

Actividades de Tipo 2		Estudiantes
14 estudiantes emplean sus conocimientos acerca de la derivada de una función para resolver casos sencillos.	7 alumnos no utilizan algoritmos de resolución de EDO.	Stella, Betty, Laure, Helen, Jason, Eddy, Franklin
	2 alumnos conocen métodos de resolución de EDO, pero no saben cuándo usarlos.	Rosy, Gaby
	5 estudiantes utilizan los algoritmos de resolución de forma apropiada.	Wanda, Carena, Melvin, Jeremy, Berenice
7 alumnos resuelven todas las EDO empleando algoritmos.	2 estudiantes no seleccionan correctamente el método a utilizar.	Mary, Sam
	5 alumnos distinguen entre los métodos útiles en cada situación.	Jordan, Roger, Angie, Edna, Silvana

Tabla 3.2.1: Estrategias de resolución de problemas mostradas por los estudiantes al resolver las tareas de Tipo 2

La *formulación de conclusiones* se realizó a partir de la información resumida en las tablas de procedimientos empleados por los estudiantes y aquellas manifestaciones de los alumnos entrevistados que contribuían a contextualizar y profundizar en sus formas de enfrentarse a la resolución de problemas, *verificándolas* en el momento de escribir el informe final, regresando a los datos y confrontando la información entre los miembros del equipo de investigación.

3.2.4 Criterios de validez

Para evaluar los procedimientos y resultados mostrados en esta primera fase de la investigación se utilizan dos de los criterios mencionados en la sección anterior: fiabilidad y validez, describiendo en detalle el proceso seguido en la investigación, incluyendo toda la información necesaria para que pueda realizarse el análisis por otras personas y presentando los resultados en distintas reuniones y congresos, así como redactando artículos para su publicación en revistas de interés para la comunidad de investigadores en Educación Matemática.

La descripción detallada del proceso seguido en el análisis y la inclusión de las respuestas de los estudiantes al cuestionario C-ED y de las transcripciones de las entrevistas en los anexos de esta memoria (anexos B.1) hacen que se pueda someter este estudio a un proceso que compruebe la fiabilidad externa del mismo. Por otra parte también se valora la importancia del trabajo para la comunidad de investigadores en este área con la presentación de los resultados en diferentes reuniones y congresos y la publicación de distintos artículos (Camacho & Perdomo, 2005a, 2005b; Camacho, Perdomo & Santos-Trigo, 2007; 2009; Camacho-Machín et al, 2010). Estos elementos determinan la validez de los resultados mostrados en esta primera fase de la investigación.

3.3 Segunda fase de la investigación

En la primera fase de esta investigación se detectaron ciertas dificultades en el aprendizaje del concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria relacionadas con la falta de relación con el concepto de derivada y el escaso desarrollo, por parte de los estudiantes, de procesos cognitivos y estrategias que resulten efectivas en la resolución de problemas. Esto hizo que se planteara la necesidad de una reflexión sobre la manera de introducir el concepto de EDO en los primeros cursos universitarios. Esta reflexión se traduce en el diseño de un Módulo de Enseñanza que se implementa con estudiantes de un primer curso de la licenciatura en Química.

Esta sección está dedicada a la descripción de los principales elementos de esta fase de la investigación: los participantes, el escenario en que se desarrolló la investigación, los instrumentos, el proceso seguido para el análisis de los datos, en cuanto a conocimientos, capacidades y habilidades que muestran los estudiantes en la resolución de los problemas propuestos y los criterios que se emplearon para la evaluación de esta segunda fase de la investigación. La descripción detallada de los tres problemas que constituyen el Módulo de Enseñanza se presenta en la sección 3.3.3.

3.3.1 Participantes

Esta fase de la investigación se dirigió a los estudiantes de la asignatura *"Matemáticas II",* correspondiente al 1er curso de la licenciatura en Química. El grupo estaba formado por 15 alumnos que asistían regularmente a clase y que, para el desarrollo de los tres problemas que conforman el Módulo de Enseñanza, se agruparon en seis parejas y un trío, conforme a sus propios criterios de selección de compañeros. En la tabla 3.3.1 se presenta la distribución de los estudiantes, empleando seudónimos para referirnos a ellos.

Trío 1	*Pareja 2*	*Pareja 3*	*Pareja 4*	*Pareja 5*	*Pareja 6*	*Pareja 7*
Sonia Alberto Juan	*Manuel Gabriel*	*Milagros Silvia*	*Nicanor Mar*	*Virginia Carmen*	*Alexis Zoraida*	*Nieves Naomi*

Tabla 3.3.1: Esquema de las parejas y tríos de participantes

Todos los estudiantes que participaron en esta experiencia habían cursado la materia "*Matemáticas I"* cuyo currículo lo forman, principalmente, los contenidos relativos al cálculo diferencial e integral de funciones de una variable y habían cubierto prácticamente todos los contenidos de la asignatura *"Matemáticas II"*, funciones de varias variables, diferenciación parcial y extremos de funciones de dos y tres variables (tabla 1.2.4). Las últimas sesiones de clase correspondían al estudio de las ecuaciones diferenciales. Uno de los principales motivos para la elección de este grupo de estudiantes fue que el profesor de la materia era uno de los miembros del equipo de investigación, lo que facilitó el acceso a los alumnos y que, ante la propuesta de participar en la investigación, los estudiantes accedieron a colaborar.

Ninguno de los estudiantes del grupo conocía la herramienta tecnológica elegida para la realización de las actividades, la calculadora Voyage 200, aunque sí tenían experiencia con el uso de tecnología digital y conocimiento de determinados programas de cálculo simbólico que habían tenido ocasión de utilizar en otras asignaturas. Esta circunstancia hacía indispensable que se dedicara una sesión de clase a la presentación de la Voyage™200 a los alumnos y la introducción a su uso.

En el desarrollo de la parte experimental de esta fase participaron tres investigadores, encargados de asistir a los estudiantes cuando estos lo requerían, guiándoles en el trabajo que estaban realizando, y tomando nota de aquellas circunstancias que se consideraban relevantes para la investigación, en particular, los aspectos que pudieran estar asociados con una modificación, a corto plazo, de las tareas propuestas.

3.3.2 Escenario e instrumentos para la recopilación de datos

En esta sección se explica de forma general el desarrollo de esta fase de la investigación: el proceso de diseño del Módulo de Enseñanza utilizado para la introducción del concepto de EDO, su estructura, las características generales de su implementación en el aula y los instrumentos utilizados para obtener los datos necesarios para responder a las preguntas de investigación.

La segunda fase de la investigación comenzó con el diseño del Módulo de Enseñanza. Para ello había que reflexionar sobre distintos aspectos: cómo se introducirían los conceptos matemáticos, con que nivel de formalidad, qué tipo de actividades se propondría a los estudiantes, cuales serían los papeles del profesor y de los estudiantes con respecto al proceso de aprendizaje, cómo sería la dinámica de aula a seguir, etc.

Una de las primeras decisiones tomadas fue que el Módulo de Enseñanza debería contribuir a robustecer la red de significados que los estudiantes asocian al concepto de derivada, introduciendo las EDO a través de su relación con dicho concepto, como un significado más de esa red conceptual. Esta opción está respaldada por los resultados obtenidos en la primera fase de la investigación (capítulo 4) donde se observó que algunas de las dificultades mostradas por los estudiantes que participaron en esa fase de la investigación podrían haberse evitado utilizando el concepto de derivada y los diferentes significados asociados a este concepto, en lugar de limitarse a pensar en métodos algebraicos de resolución de EDO (Camacho-Machín et al., 2010). De esta manera se trata de eliminar una de las discontinuidades que se producen en el aprendizaje de las matemáticas (Artigue, 2001), tratando de hacer más natural la transición entre conceptos matemáticos tan cercanos como el de derivada de una función y Ecuación Diferencial Ordinaria. Desde este punto de vista, la alternativa pedagógica que se plantea consiste en no partir de definiciones formales sino construir los conceptos matemáticos de manera que resulten familiares para los estudiantes, para lo que conviene relacionarlos con conceptos conocidos por ellos, y sirvan para sentar las bases para un desarrollo matemático posterior (Raychadhuri, 2008). Por esta razón, los problemas diseñados para constituir el Módulo de Enseñanza giran en torno al concepto de derivada.

Una vez elegido el punto de partida del proceso de enseñanza, había que decidir qué tipo de actividades se plantearía a los estudiantes. Apoyados en los planteamientos de Gravemeijer (1994), se consideró que las actividades de enseñanza deben ser reales para los estudiantes, en el sentido de que deben estar situadas en contextos que sean familiares a los alumnos, sean matemáticos o no matemáticos. En este sentido, se consideró que una buena opción sería que los problemas a resolver durante las sesiones de clase describieran una situación relacionada con la línea profesional elegida por los alumnos, la Química.

Existen muchos problemas relacionados con la Química que se resuelven o analizan utilizando las ecuaciones diferenciales. En este caso se eligieron los siguientes modelos, uno para cada problema: desintegración de elementos químicos, problema de mezclas y dinámica de poblaciones. Problemas de este tipo aparecen en la mayoría de los libros de texto y son utilizados con mucha frecuencia para presentar a los alumnos ejemplos de situaciones que pueden analizarse utilizando las EDO. En esta investigación se utilizan como vehículo para introducir el concepto.

Los tres problemas utilizados en el Módulo de Enseñanza llevan por título *Desintegración del uranio*, *Contaminación de mercurio* y *Dinámica de poblaciones*, haciendo alusión al modelo que se presenta. Se describen en la sección 3.3.3 de este capítulo.

Por otra parte, la resolución de un problema pasa por diferentes etapas entre las que se encuentran el análisis y la comprensión de la situación planteada y la resolución del problema particular. Además debe promoverse en los estudiantes de los niveles universitarios, como es el caso que ocupa a esta investigación, el desarrollo de procesos propios del pensamiento matemático avanzado como la abstracción y la generalización y motivar que los estudiantes controlen su propio proceso de solución. Todos estos elementos permiten distinguir cinco etapas en la resolución de problemas: análisis de la situación, comprensión de la situación, solución del problema particular, planteamiento y solución del caso general y análisis retrospectivo del proceso de solución (Santos, 2007).

La primera fase de investigación mostró que los estudiantes no consideran estas etapas de resolución de forma autónoma sino que, en la mayoría de los casos, la heurística utilizada es la búsqueda de un algoritmo de resolución o de una situación análoga que se haya resuelto previamente. Por esta razón dos de los tres problemas diseñados para formar el Módulo de Enseñanza hacen explícitas estas cinco etapas de resolución.

Barrera-Mora y Santos-Trigo (2002) describen cada una de estas etapas para un problema específico que plantea una situación de suministro de medicamento. La primera etapa (análisis de la situación) tiene como objetivo que los estudiantes identifiquen los datos y la información importante que se presenta en la situación planteada. En la segunda etapa (comprensión de la situación) los estudiantes comienzan a analizar la situación en términos matemáticos, en algunos casos, utilizando diferentes representaciones de los datos como gráficas, tablas, etc. La siguiente etapa consiste en resolver la situación particular planteada, para a continuación considerar situaciones más generales, plantearlas y resolverlas (etapa denominada planteamiento y solución del caso general). La última etapa consiste en plantear actividades con las que los estudiantes deban realizar un análisis del proceso de resolución que han seguido. En esta investigación se optó por solicitar a los alumnos que presentaran un informe en el que reflejaran determinados aspectos de la resolución del problema.

Además de los tres problemas que conforman el Módulo de Enseñanza, en esta fase de la investigación se diseñaron y utilizaron otros materiales. La relación de instrumentos es la siguiente:

- Un manual de uso de la calculadora Voyage™200 (anexo B.2.9).
- Un cuestionario en el que se reflejan diferentes significados del concepto de derivada (C-D) (anexo A.2.D).
- Tres problemas que forman el Módulo de Enseñanza, compuestos por un conjunto de preguntas o pequeñas actividades (anexos A.2.U, A.2.M y A.2.P).
- La tarea denominada Investigaciones policiales.
- Un protocolo para las entrevistas.
- Copia de la documentación escrita por cada estudiante al responder al C-D[30].
- Copia de la documentación escrita por cada grupo de estudiantes durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza.
- Producciones en la calculadora simbólica Voyage™200 de cada uno de los grupos de estudiantes, durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza.
- Grabación (en vídeo y/o audio) del diálogo de cada grupo de estudiantes durante cada una de las sesiones en que se desarrolló el Módulo de Enseñanza.
- Trascripción de las grabaciones anteriores, correspondientes a cuatro de las parejas de estudiantes.

[30] El material recopilado en esta fase de la investigación se presenta en el CD (anexo 2) separado según el grupo de estudiantes al que corresponde.

- Copia de la documentación escrita por cada estudiante al responder al problema Investigaciones Policiales.
- Trascripción de las entrevistas de seis estudiantes.

El trabajo con los estudiantes se llevó a cabo en un total de trece sesiones de clase, de una hora cada una, al final del segundo semestre del curso. Una vez finalizadas estas sesiones, se seleccionó a una serie de estudiantes para participar en una entrevista. Los criterios seguidos para esta elección fueron sus respuestas a las preguntas del cuestionario de la derivada y su trabajo en pareja durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza, aspectos estos que se concretarán en el apartado en que se describe el proceso que se siguió para el análisis.

De las trece sesiones de clase utilizadas, la primera se dedicó a la presentación de la Voyage 200 y la segunda y la última se emplearon para que los estudiantes respondieran de forma individual al cuestionario de la derivada y al problema 4, Investigaciones policiales. Por tanto, al Módulo de Enseñanza propiamente dicho se dedicaron 10 sesiones de una hora cada una (Tabla 3.3.2). En estas diez sesiones los estudiantes debían resolver los tres problemas del Módulo de Enseñanza, que se describen en detalle en la sección 3.3.3, especificando los objetivos perseguidos con cada uno de ellos[31].

	1 sesión	*Introducción a la Voyage 200*	
	1 sesión	*Cuestionario de la derivada*	Individual
Módulo de enseñanza	**1 sesión**	*Problema 1: Desintegración del uranio*	En grupo
	5 sesiones	*Problema 2: Contaminación de mercurio*	
	4 sesiones	*Problema 3: Dinámica de poblaciones*	
	1 sesión	*Problema 4: Investigaciones policiales*	Individual
		Entrevista	Individual

Tabla 3.3.2: Temporalización

Las actividades del Módulo de Enseñanza se realizaron en grupos de dos o tres estudiantes (tabla 3.3.1), en un ambiente de interacción social (Schoenfeld, 1992). Cada sesión comenzaba con un breve resumen, por parte del profesor, de las actividades realizadas durante la sesión anterior. A continuación se entregaba a los estudiantes la documentación necesaria para el desarrollo de la actividad y una calculadora. Estos comenzaban a trabajar en grupo, siendo el papel de los profesores presentes en el aula el de asesor, ante situaciones de duda, y provocador de discusiones y situaciones de reflexión. El profesor encargado de la materia realizaba otras intervenciones, dirigidas a todo el grupo de estudiantes, cuyo objetivo era el de formalizar los conceptos matemáticos que iban surgiendo[32]. La siguiente imagen muestra cómo estaba distribuida el aula (imagen 3.3.3).

[31] Empleando la terminología propia del “design-research”, cada uno de los problemas que conforman el módulo de enseñanza podría considerarse un “micro-ciclo” de enseñanza que, unidos con el cuestionario de la derivada y el problema 4, conformarían un ciclo completo de enseñanza.
[32] Se puede encontrar más información de estas intervenciones en las tablas 3.3.6, 3.3.7 y 3.3.8.

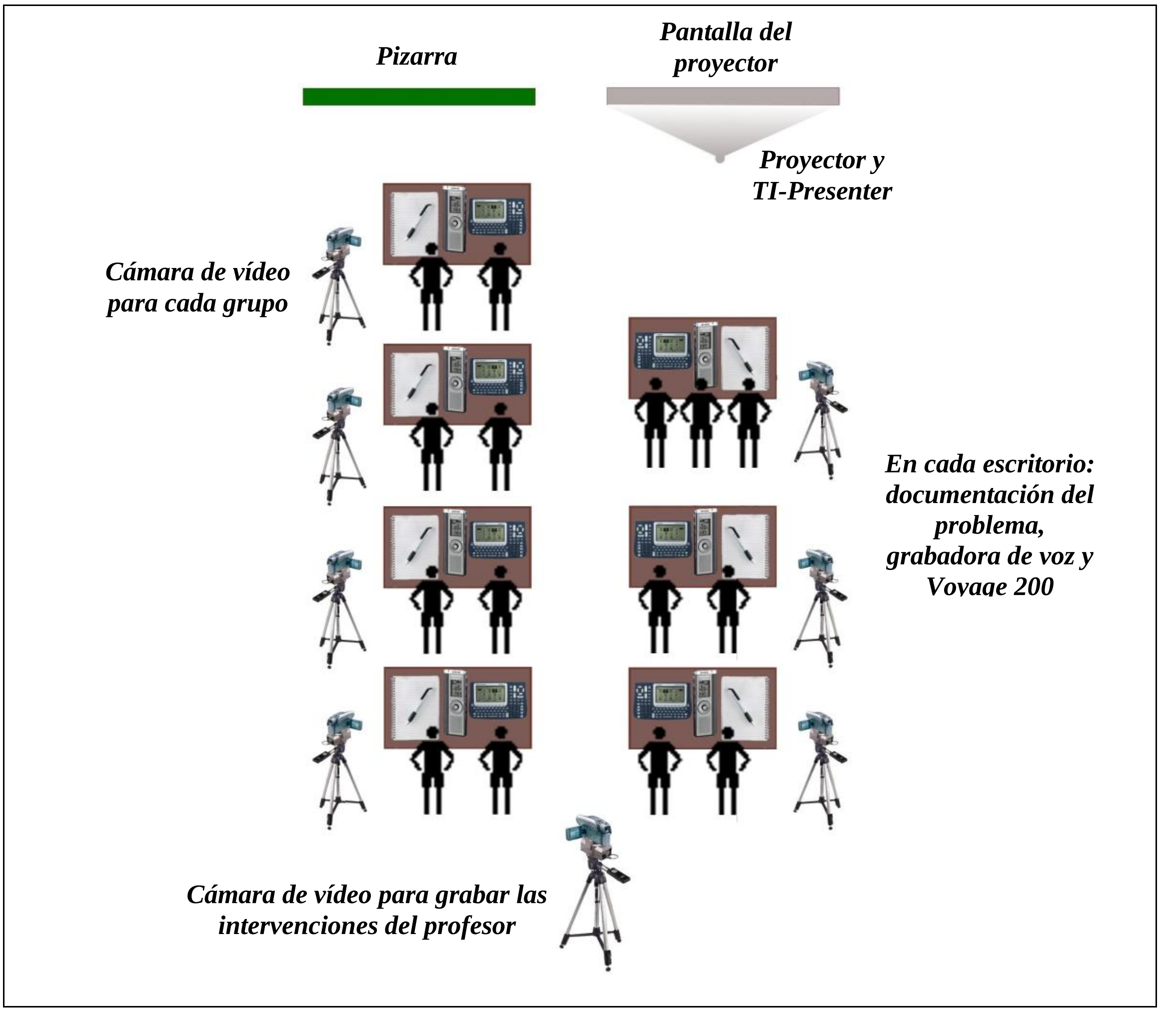


Imagen 3.3.3: Distribución del aula

A continuación se describe, de forma general, cómo se desarrollaron las distintas sesiones.

<u>Primera sesión: Introducción a la Voyage™200</u>

El objetivo de la actividad realizada durante la primera sesión era que los alumnos conocieran la herramienta tecnológica con la que iban a trabajar y que ninguno de ellos había utilizado con anterioridad. En esta sesión se entregó a cada grupo una calculadora y un manual de uso de la misma, construido específicamente para este trabajo (anexo B.2.9). Este documento es una adaptación del manual oficial, creado por *Texas Instruments*, en el que se han reflejado los aspectos básicos de la Voyage™200 y los usos principales que se le van a dar durante las sesiones de clase (realización de operaciones, representación gráfica, teclas específicas,...). En el manual se incluye una sección dedicada exclusivamente a la resolución de ecuaciones diferenciales con el objetivo de que los alumnos puedan acceder con facilidad a la información que necesiten durante el desarrollo de las actividades. Durante esta sesión el profesor explicó el uso de la calculadora a los estudiantes mientras ellos iban realizando las actividades que se indicaban en el manual. Todas las acciones que el profesor realizó con la Voyage 200 se proyectaron a través del adaptador de vídeo TI-Presenter™ (Imagen 3.3.4), lo que permitió que los estudiantes vieran lo que el profesor estaba haciendo en la calculadora en cada momento.

Imagen 3.3.4: Voyage 200 y TI-Presenter™

Segunda sesión: Cuestionario de la derivada

En la segunda sesión se pidió a los estudiantes que respondieran a un cuestionario centrado en el concepto de derivada (anexo A.2.D), en el que se incluían preguntas relacionadas con distintos significados asociados a dicho concepto (Thurston, 1994). Los alumnos debían contestar al cuestionario de forma individual y usando únicamente lápiz y papel. El objetivo era establecer parte de la red de significados que los estudiantes asociaban al concepto de derivada, considerando éste como punto de partida para la construcción del concepto de EDO (Camacho-Machín et al., 2010) y analizar cómo lo utilizaban en la resolución de problemas.

El cuestionario de la derivada consta de once preguntas, que incluyen problemas cuyo enunciado se presenta en un contexto puramente matemático (preguntas 1, 4, 5, 6 y 9) ó relacionado con otras disciplinas científicas (preguntas 7, 8, 10 y 11), lo que permite analizar si los estudiantes extrapolan sus conocimientos matemáticos a otras ciencias. Las preguntas 2 y 3 son generales y abiertas y permitirán observar la coherencia entre los significados que los estudiantes asocian al concepto de derivada y la definición y aplicaciones que dan de dicho concepto.

En el diseño del cuestionario se tomaron en cuenta diferentes usos del concepto de derivada, además del contexto en que se enunciaban las preguntas. El estudio de la primera fase de investigación reveló que una de las dificultades que tenían los estudiantes a la hora de resolver actividades relacionadas con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias era la consideración simultánea de diferentes usos de la derivada (como regla algebraica, como pendiente de la recta tangente a la función en un punto, etc.[33]), lo que indicaba que la red de significados asociada a este concepto era insuficiente para afrontar la creación de un nuevo concepto matemático íntimamente relacionado con él, las EDO.

Los resultados de esa investigación hicieron que se considerara este aspecto como fundamental en el diseño de un Módulo de Enseñanza para la introducción del concepto de EDO. El diseño de dicho módulo de aprendizaje parte de la hipótesis de que los estudiantes que participan en esta experiencia poseen ciertos conocimientos acerca del concepto de derivada, fruto de la instrucción matemática que han recibido con anterioridad a este curso, y que conformarán la base sobre la que construyan el concepto matemático que se pretende introducir, las EDO. El objetivo del cuestionario de la

[33] En Thurston (1994) y Tall (2007) aparece un listado de diferentes usos que se pueden hacer del concepto de derivada.

derivada es establecer el punto de partida real de la trayectoria de aprendizaje de estos estudiantes.

Tal y como se indicó en el Marco Conceptual (sección 2.2) Thurston (1994) hace explícitos una serie de significados diferentes que se pueden asociar al concepto de derivada de una función. Estos significados no pretenden ser únicos, sino que son planteados como ejemplo de las diferentes formas en que se puede interpretar un concepto matemático. En la configuración del cuestionario C-D se han considerado cuatro de esos usos, que presentamos a continuación, junto con la definición dada por Thurston. Todos estos significados del concepto de derivada están estrechamente ligados entre sí, formando parte de la red de significados asociado al concepto.

(a) *Simbólico*: la derivada de x^n es nx^{n-1}, la derivada de $sen(x)$ es $\cos(x)$, la derivada de $f \circ g$ es $f' \circ g \cdot g'$, etc.
(b) *Geométrico*: la derivada es la pendiente de una recta tangente a la gráfica de la función, si la gráfica tiene una tangente.
(c) *Infinitesimal*: (*el límite de)* el cociente entre el cambio infinitesimal de los valores de una función y el cambio infinitesimal en la variable independiente.
(d) *Razón*: la velocidad instantánea de f(t), cuando t es el tiempo.

Algunos ejemplos de las preguntas del cuestionario con el significado de la derivada asociado a cada una de ellas son las siguientes:

P1. Deriva las siguientes funciones:

a. $f(x) = (-x^3 + 3x) \cdot e^{\frac{x^2-3}{2}}$

b. $g(t) = \dfrac{\ln(2t-5)}{2t-5}$

Significado simbólico

P4. Dada la función $f(x) = 3x$, ¿existe una función cuadrática $g(x)$ que sea tangente a f en el punto $x = 1$? En caso afirmativo, representa gráficamente cuál es la situación en dicho punto.

Significado geométrico

P9. ¿Qué relación tiene el siguiente límite con la derivada de la función exponencial en un punto? $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{x+h} - e^x}{h}$

Significado infinitesimal

P10. La función que representa la posición de un vehículo conforme pasa el tiempo es $f(t)=t^2$*, calcula la velocidad a la que va en el instante t = 1.5. ¿Esa velocidad es constante?*

Significado de razón

A la hora de analizar las respuestas de los estudiantes a las preguntas de este cuestionario se observó que surgían otros significados del concepto de derivada de una función diferentes a los que se habían previsto. Algunos de ellos podrían englobarse dentro de los usos mostrados por Thurston (1994) pero la manera en que los alumnos los consideraban hicieron que se interpretaran como significados diferentes.

De la tercera a la duodécima sesión: Módulo de Enseñanza

En las siguientes diez sesiones los estudiantes trabajaron en parejas o tríos en la resolución de los tres problemas que conforman el Módulo de Enseñanza para la introducción de las EDO. En estos problemas, los estudiantes se enfrentan a una situación hipotética (Barrera-Mora & Santos-Trigo, 2002) enunciada en un contexto cercano al área de los estudios que estaban cursando, licenciatura en Química. Tal y como se mencionó anteriormente, la dinámica que se siguió fue la siguiente: se entregó a cada grupo la documentación relativa al problema que se iba a resolver (anexos A.2.U, A.2.M y A.2.P), así como una calculadora Voyage 200, y estos comenzaban a trabajar, interactuando entre ellos y utilizando a los profesores presentes en el aula, única y exclusivamente para aclarar dudas. El profesor encargado de la materia realizó determinadas intervenciones, dirigidas a todo el grupo, en el transcurso de estas sesiones. Algunas de esas intervenciones tenían como objetivo la formalización de los conceptos matemáticos que iban surgiendo a lo largo de los problemas y otras a marcar el tiempo de desarrollo de las actividades, con el fin de homogeneizar la situación de los diferentes grupos y que todos pudieran ir avanzando con un ritmo similar. En la sección 3.3.3, dedicada a la descripción de estos problemas, se incluye una serie de tablas en la que figuran las intervenciones hechas por los profesores y la naturaleza de las mismas (Tablas 3.3.6, 3.3.7 y 3.3.8).

Decimotercera sesión: Problema 4, Investigaciones Policiales.

En la última sesión se entregó a los estudiantes el enunciado de un cuarto problema, *"Investigaciones policiales",* que debían resolver de forma individual, utilizando lápiz y papel y la Voyage™200, si lo estimaban conveniente. La resolución de este problema por parte de los estudiantes se tomó como base para personalizar el protocolo de entrevista de los alumnos que participaron en la misma.

El problema 4 presenta una situación que los estudiantes deben abordar de forma autónoma ya que, además de tener que resolverla individualmente, no se les proporcionan preguntas que les guíen en la resolución, tal y como se hacía en los tres problemas anteriores.

El objetivo con el que se plantea esta actividad es conocer cómo abordan la resolución de problemas cada uno de los estudiantes, de forma individual, ya que, durante todo el experimento de enseñanza la información que se ha obtenido es de un trabajo colectivo. Las respuestas de los estudiantes a esta actividad permitirán disponer de información que refleje las estrategias de resolución de problemas que utiliza cada alumno después de haber recibido una enseñanza centrada en la resolución de problemas, además de indagar en el uso que hacen de los diferentes conceptos matemáticos que se han introducido a lo largo de la instrucción.

Investigaciones policiales

A la atención del Colegio Oficial de Químicos de Canarias.

Nos han llegado referencias sobre sus trabajos relacionados con el estudio de situaciones de variación y nos interesaría que colaborara con nosotros en el diseño de un modelo que nos permita esclarecer determinados hechos delictivos.
En estos momentos estamos analizando un caso que paso a relatarle. En la medianoche del sábado pasado se halló a un sujeto muerto en la habitación de un hotel. Nuestros científicos procedieron a tomar datos entre los que cabe destacar que la temperatura corporal del cadáver era de 26.7ºC y que la temperatura de la habitación se mantuvo constante en 15.5ºC. Dos horas después la temperatura del sujeto era de 23.9ºC.
Nos interesaría saber la hora a la que se produjo la defunción. Además nos gustaría disponer de un modelo general que nos permita conocer cómo evoluciona la temperatura de un cuerpo a lo largo del tiempo, dependiendo de la temperatura del medio que lo rodea, suponiendo que ésta pueda mantenerse constante.

Ayuda: Para resolver este problema necesitas conocer la "*Ley de enfriamiento de Newton"* que afirma que: *La rapidez con que cambia la temperatura de un cuerpo es directamente proporcional a la diferencia entre la temperatura del medio que la rodea y la temperatura del cuerpo.*

Enunciado del problema 4: Investigaciones policiales

Todas las sesiones de clase y las entrevistas fueron grabadas, en vídeo y/o audio. También se grabaron las operaciones que los estudiantes hicieron con la Voyage ™200 a la largo de toda la experiencia y se fotocopiaron, diariamente, los documentos escritos por cada alumno.

La siguiente tabla muestra un esquema-resumen del escenario en que se desarrollaron las diferentes sesiones de clase y el material que se obtuvo de cada una de ellas (Tabla 3.3.5). En el anexo B.2 se adjunta una copia de la documentación escrita por cada estudiante o su grupo y de las trascripciones de las grabaciones de cuatro de las parejas participantes en la investigación, aquellas de las que se realiza un análisis detallado de su proceso de resolución. El material está distribuido según los grupos de estudiantes formados para trabajar durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza.

	Escenario	*Materiales*
Cuestionario de la derivada	Individual Lápiz y papel	Documentación escrita de cada estudiante.
Problema 1: Desintegración del uranio *Problema 2: Contaminación de mercurio* *Problema 3: Dinámica de poblaciones*	En grupo Lápiz y papel Voyage™200	Documentación escrita por cada grupo. Operaciones con la Voyage™200. Grabaciones en vídeo y/o audio del trabajo en grupo.
Problema 4: Investigaciones policiales	Individual Lápiz y papel Voyage™200 Entrevista	Documentación escrita por cada estudiante en la sesión previa a la entrevista. Operaciones con la Voyage™200 en la sesión previa a la entrevista. Documentación escrita por cada estudiante durante la entrevista. Operaciones con la Voyage™200 durante la entrevista. Grabaciones de la entrevista de cada alumno.

Tabla 3.3.5: Esquema del escenario y los materiales recopilados en la fase 2

3.3.3 Descripción del Módulo de Enseñanza.

En esta última sección de este capítulo describiremos en detalle los tres problemas que conforman el Módulo de Enseñanza: Desintegración del uranio, Contaminación de mercurio y Dinámica de poblaciones.

Los resultados de la primera fase de la investigación (capítulo 4) muestran que la discontinuidad que se produce en el proceso de enseñanza de las matemáticas, en el caso particular del paso del concepto de derivada al de ecuación diferencial, provoca que algunos estudiantes consideren estos conceptos como entes independientes y tengan dificultades a la hora de establecer relaciones entre los mismos que les permitan realizar con éxito actividades propias de la disciplina matemática como la resolución de problemas (Camacho-Machín, Perdomo-Díaz & Santos-Trigo, 2010).

Con el objetivo de evitar esta discontinuidad e introducir el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria partiendo de su relación con el concepto de derivada, los problemas propuestos en el Módulo de Enseñanza incluyen una serie de cuestiones relacionadas con distintos significados asociados al concepto de derivada de una función. De esta forma se pretende provocar que los alumnos consideren el concepto de EDO como un nuevo significado del concepto de derivada de una función, y lo incluyan en la red de significados del mismo.

Problema 1: Desintegración del uranio

Esta actividad se desarrolló durante la tercera sesión de clase y en ella se presenta una situación basada en el fenómeno de la descomposición de los elementos químicos (anexo A.2.U). La situación planteada varía a medida que los estudiantes van respondiendo, con el fin de estimular que se establezcan relaciones entre distintas situaciones reales y diferentes expresiones matemáticas, relacionadas siempre con el concepto de derivada. La actividad finaliza con una parte centrada en el contexto matemático, no relacionada de forma explícita con la situación planteada inicialmente, utilizada para introducir los conceptos de Ecuación Diferencial Ordinaria, orden y solución de la misma.

Las preguntas que se plantean a lo largo de este problema se formularon en función de unos objetivos que se presentan a continuación, junto con algunas de las cuestiones que sirven de ejemplo:

- Expresar situaciones en términos matemáticos (proceso de representación)

Supongamos, de momento, que dicho número de átomos no varía. ¿Cómo expresarías esta situación en términos matemáticos? *¿Se te ocurre alguna otra posibilidad?* *Ayuda: Puede expresarse en términos de la función o en términos de su derivada.*

- Reflexionar sobre la situación real particular y sus posibles expresiones matemáticas.

¿Puede ser que u'(t) sea igual a t? Justifica tu respuesta. *Ayuda: Recuerda el significado de la variable t en la situación planteada.* *¿Puede ocurrir que u'(t) sea igual a -t?* *¿Puede ocurrir que u'(t) sea igual a -t*^{2}*?* *Indica al menos otras dos posibilidades para la expresión de u'(t).*

- Relacionar diferentes enunciados con distintas expresiones algebraicas (proceso de interpretación).

¿Qué diferencia habría entre el enunciado del problema cuando u'(t)=-1 y u'(t) =-2? *Ayuda: Piensa en cuál de los casos el uranio disminuye más rápidamente.* *¿Qué diferencia habría entre el enunciado del problema cuando u'(t)=-1 y u'(t) =-t?*

- Introducir los conceptos de Ecuación Diferencial Ordinaria, orden de una EDO y solución de una EDO.

Completa la siguiente tabla escribiendo una función cuya derivada satisfaga lo indicado en cada fila:

U'(t)	u(t)	u'(t)	u(t)
-1		-t	
-2		$-t^2$	
-3		$\frac{-t}{2}$	

Este primer problema del Módulo de Enseñanza se centra, principalmente, en cuestiones sobre cómo expresar matemáticamente distintas situaciones que pueden darse en el mundo real y acerca de los significados que tendrían, en ese mundo real, diferentes expresiones matemáticas. Se contempla este proceso en ambos sentidos, lo que se ha denominado "representación" e "interpretación". Con el fin de que estas acciones lleguen a simultanearse, en el sentido de promover que los estudiantes no las vean como entes disjuntos, se plantean una serie de preguntas acerca de la posibilidad de que una misma situación real pudiera estar representada por diferentes expresiones matemáticas (*¿Puede ocurrir que u'(t) sea igual a -t?, ¿Puede ocurrir que u'(t) sea igual a* $-t^2$*?*).

Durante la sesión de clase que se dedicó a resolver esta actividad se consideró necesaria la intervención del profesor hacia todo el grupo, en un momento en que se detectó que un gran número de estudiantes se estaban dedicando fundamentalmente a la búsqueda de una expresión algebraica para la función que indica el número de átomos de uranio que hay en un cuerpo a medida que pasa el tiempo, sabiendo únicamente que dicha cantidad disminuye. La intervención del profesor se centró en explicar a los estudiantes que, en ese momento, no disponían de información suficiente para obtener dicha expresión. Esta actuación del profesor no estaba programada, siendo fruto de la observación, realizada por el profesor y las investigadoras que se encontraban en el aula, del desarrollo de la actividad por parte de los estudiantes.

Al término de esta sesión se produjo la primera intervención programada del profesor hacia todo el grupo cuyo objetivo era introducir el concepto de EDO a través de la actividad que los estudiantes acababan de realizar, tomando sus respuestas a las tablas finales como ejemplos de soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

<table>
<tr><td rowspan="4">Una sesión</td><td>Los alumnos trabajan en parejas.</td></tr>
<tr><td>Intervención no programada del profesor aclarando los objetivos de la actividad</td></tr>
<tr><td>Los alumnos trabajan en parejas.</td></tr>
<tr><td>Intervención programada del profesor: explicación del concepto de EDO.</td></tr>
</table>

Tabla 3.3.6: Desarrollo del Problema 1, "Desintegración del uranio"

El problema 1 del Módulo de Enseñanza concluye con la introducción, por parte del profesor, de los conceptos Ecuación Diferencial Ordinaria, solución de una EDO y orden de una EDO, formalizando así el concepto matemático que se pretende introducir con este Módulo de Enseñanza. Los resultados de la última parte del problema 1 se presentaron como ejemplos, estableciendo la relación entre el concepto de EDO y el de derivada. En el problema 2, *Contaminación de mercurio*, se presenta una situación cuyo tratamiento requiere del uso de estos y otros conceptos matemáticos, contribuyendo así al establecimiento de redes de significado entre diferentes conceptos matemáticos y su uso en la resolución de problemas.

Problema 2: Contaminación de mercurio

Este problema (anexo A.2.M) se desarrolla durante las cinco sesiones siguientes y su característica principal es que en él se hacen explícitas determinadas etapas que favorecen el desarrollo de procesos relacionados con la resolución de problemas (Barrera-Mora & Santos-Trigo, 2002):

- Comprensión de la situación
- Análisis de la situación
- Solución de casos particulares
- Planteamiento y solución de casos generales
- Análisis retrospectivo del proceso de solución.

El objetivo principal de esta actividad es que los estudiantes reconozcan estas etapas de resolución e identifiquen las características generales de cada una de ellas, a la vez que desarrollan su habilidad para formular, representar y resolver problemas matemáticos y su capacidad para reflexionar, explicar y abstraer, lo que Kilpatrick et al. (2009) denominan *competencia estratégica* y *razonamiento con capacidad de adaptación*.

La distinción entre estas etapas, haciéndolas explícitas a los estudiantes, responde a algunas de las dificultades mostradas por los alumnos durante la resolución del problema 1 del Módulo de Enseñanza (*Desintegración del uranio*). Este tipo de acciones confieren un carácter cíclico al proceso de construcción de los materiales utilizados en el proceso de enseñanza, puesto que continuamente se revisan los problemas previstos, en función de lo que se haya observado en el aula durante el desarrollo del problema anterior. Algo similar sucede con el "Design Research", metodología de investigación en la que el proceso de enseñanza de un determinado concepto está en continua revisión, basándose en los resultados obtenidos en la implementación de un modelo concreto (Drijvers, 2003). En el caso de esta investigación, la revisión se ha realizado durante la implementación del módulo y no sólo al final, como ocurre en el "Design Research".

En el aspecto conceptual, se establece la clasificación de las EDO de primer orden, se presenta el método algebraico de resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de variables separadas y se definen las condiciones iniciales y el problema de Cauchy.

En este problema se propone a los estudiantes una actividad inicial que consiste en la elaboración de un informe en el que expliquen cuál es la situación a la que se están enfrentando, qué datos consideran relevantes y cómo creen que pueden resolver el problema. Con esta actividad inicial se pretende que los estudiantes dediquen un tiempo a reflexionar sobre la situación que se les plantea y observar qué tipo de cosas proponen para resolverlo, técnicas matemáticas u otro tipo de estrategias relacionadas con su formación como químicos. En definitiva, el objetivo de esta actividad inicial es conseguir una primera visión de cómo han entendido la situación los estudiantes y cómo la reflejan en el papel.

Las dos primeras etapas de la actividad tienen como finalidad que los estudiantes comprendan la situación y la analicen desde un punto de vista matemático. Para ello se incluyen preguntas que obligan a los estudiantes a reflexionar sobre el enunciado planteado (por ejemplo "*¿Cuánto mercurio se ha introducido en el estanque un minuto después?", "¿Y dos minutos después?", "¿Y tres minutos y medio después?"*) y que les guían hacia la escritura de la EDO que modela la situación (por ejemplo, *"Indica la cantidad de mercurio que se introduce en el estanque por minuto"; "Indica la cantidad de mercurio que sale del estanque, por minuto"*).

La tercera y cuarta etapas consisten en la resolución de casos particulares y generales, respectivamente y la quinta en la elaboración de un nuevo informe en el que se refleje un análisis retrospectivo del proceso de solución desarrollado.

En la tercera etapa se incluyen cuestiones cuyo objetivo es que los estudiantes reflexionen sobre los conceptos matemáticos definidos (por ejemplo, *"¿Qué elementos aparecen en la ecuación que hacen afirmar que se trata de una EDO y que ese es su orden?"*) para pasar a resolver el problema particular haciendo uso de la Voyage 200 como herramienta para analizar la situación desde un punto de vista algebraico, resolviendo la ecuación, y gráfico, representando la función solución. Esta fase concluye con el planteamiento de pequeñas tareas con las que se persigue que los estudiantes reflexionen acerca del proceso seguido para resolver el caso particular (por ejemplo, *"Si la concentración máxima de mercurio que permite el Ministerio de Sanidad y Consumo es de 0'04 gramos por litro, ¿en qué instante de tiempo se deberá cerrar la entrada y la salida de solución al estanque?"*).

La etapa 4, planteamiento y solución de casos generales, está dividida en cuatro apartados análogos, en los que se van considerando y generalizando todos los elementos que influyen en la situación planteada: la cantidad de mercurio que se introduce en el estanque, la velocidad a la que entra y sale la disolución, el volumen del depósito y la cantidad inicial de mercurio que hay en el estanque. Cada uno de estos apartados finaliza con una serie de cuestiones cuyo objetivo es el análisis del modelo parcialmente generalizado que se acaba de obtener. Se termina esta etapa con una actividad cuyo objetivo es establecer si los estudiantes interrelacionan los dos contextos y han contestado a las cuestiones anteriores de forma razonada, para ello se utilizan dos depósitos con características diferentes y se hacen preguntas acerca del tiempo que tardan en alcanzar una concentración determinada.

Supongamos que tenemos dos depósitos, el primero con un volumen de 60.000 litros en el que introduce una solución con 0'2 gramos de mercurio por litro, y el segundo con un volumen de 45.000 litros en el que se introduce una solución con 0'6 gramos de mercurio por litro.

Si en cada depósito tenemos una cantidad inicial de 250 gramos de mercurio y las soluciones entran y salen de ambos depósitos a una velocidad de 3 litros por minuto,

- *¿En cuál de los depósitos se alcanza antes una concentración de mercurio de 0'1gr/l?*

- *¿En qué instante de tiempo se alcanza?*

En cada uno de los cuatro apartados de la etapa 4 de esta actividad se incluye una cuestión en la que los estudiantes deben representar gráficamente distintas funciones correspondientes a diferentes situaciones análogas a la presentada inicialmente y se formula una serie de preguntas acerca de dichas representaciones. El objetivo de esta parte de la actividad es introducir el sistema de representación gráfico como elemento de resolución de este tipo de problemas. La última actividad de esta etapa nos permitirá establecer qué sistema de representación utilizan los estudiantes al resolver actividades análogas a las que se han resuelto empleando tanto el sistema gráfico como el algebraico.

Utilizaremos el análisis retrospectivo de este episodio como elemento indicativo de lo razonado de los procedimientos empleados por los estudiantes. Nos servirá para determinar si realmente han comprendido los razonamientos que se han empleado y han conectado de forma correcta los dos contextos de trabajo: el de la situación real planteada y el matemático.

Esta es la primera tarea de nuestro Módulo de Enseñanza en la que los estudiantes trabajan con la calculadora Voyage 200, que puede ser empleada para resolver ecuaciones diferenciales, representar funciones gráficamente, calcular límites, etc.

1ª sesión	El profesor introduce conceptos matemáticos.
	Los alumnos trabajan en parejas
2ª sesión	Los alumnos trabajan en parejas
	El profesor presenta la EDO que modela la situación, estableciendo así el final de la Etapa 2, y establece la clasificación de las EDO de primer orden.
	Los alumnos trabajan en parejas
	El profesor clasifica la EDO que modela la situación y explica el método algebraico de resolución de ecuaciones de variables separadas, así como el uso de la Voyage 200 para resolver ecuaciones diferenciales.
3ª sesión	Puesta en común de las respuestas a las dos primeras etapas de la actividad[34].
	El profesor clasifica y resuelve la EDO que modela la situación (con el método algebraico y con la Voyage 200)
	Los alumnos trabajan en parejas
	El profesor explica los conceptos *"solución general"* y *"condiciones iniciales"*.
	Los alumnos trabajan en parejas
4ª sesión	Los alumnos trabajan en parejas
	Intervención del profesor para aclarar la relación existente entre la concentración de mercurio y la cantidad de dicha sustancia en el depósito.
	Los alumnos trabajan en parejas
5ª sesión	Intervención del profesor: puesta en común de las respuestas a la etapa 3 e introducción a la etapa 4.
	Los alumnos trabajan en parejas.
	Intervención del profesor: puesta en común de las respuestas a la primera tabla de la etapa 4.

Tabla 3.3.7: Desarrollo del Problema 2, "Contaminación de mercurio"

Durante las cinco sesiones en las que los estudiantes trabajan en este problema se producen varias intervenciones del profesor hacia todo el grupo, algunas para explicar conceptos matemáticos y otras relacionadas con aspectos concretos del problema con el

[34] Esta intervención se produce al detectar que muchos estudiantes no habían seguido el ritmo de resolución esperado y, como consecuencia, no habían comprendido algunos de los resultados presentados por el profesor ante todo el grupo.

objetivo principal de marcar el ritmo de resolución del mismo por parte de los estudiantes. Estas últimas intervenciones coinciden con el inicio de alguna sesión, el fin de alguna etapa o alguna pregunta que el equipo de investigación haya detectado que supone cierta dificultad para muchas de las parejas de estudiantes. No estaban establecidas a priori, venían marcadas por la actuación de los alumnos en la resolución de la actividad. En la tabla anterior (tabla 3.3.7) reflejamos los momentos en los que se produjeron dichas intervenciones.

Problema 3: Dinámica de poblaciones

En líneas generales, este problema tiene la misma estructura que el anterior, partiendo de un enunciado formulado en un contexto hipotético relacionado con la formación de los estudiantes con los que estamos trabajando y estableciendo cinco etapas de resolución. Las diferencias entre los problemas 2 y 3 son, sobre todo, de tipo cognitivo, aunque también se ha optado por simplificar las preguntas que se presentan en cada una de las etapas de resolución con el fin de observar si los estudiantes formulan preguntas adicionales por su cuenta.

El problema *"Dinámica de poblaciones"* tiene dos características principales, por un lado la importancia que se da al sistema de representación gráfico y por otro, la interpretación del concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria que se utiliza. Mientras que en el problema anterior se resolvía la EDO y se analizaba la solución particular de la misma que modelaba la situación, el problema 3 se centra en el estudio de una ecuación que depende de un parámetro y, además, en un principio, no se dispone de condiciones iniciales que permitan obtener una solución particular. Esto hace que el estudio de las soluciones de la EDO sea más complicado, incluso desde el punto de vista gráfico puesto que las soluciones dependerán del valor de dos constantes con lo que no se pueden representar gráficamente empleando la calculadora Voyage 200. La opción que queda es, por tanto, utilizar la ecuación diferencial para obtener información acerca de la monotonía de la función que nos interesa, surgiendo así una nueva interpretación del concepto, relacionada directamente con el significado geométrico de la derivada. De esta manera estamos considerando uno de los factores que Rasmussen & Ruan (2008) consideran que contribuye al progreso de los razonamientos de los estudiantes, los cambios en la interpretación de los conceptos matemáticos.

Otra diferencia entre este problema del Módulo de Enseñanza y el anterior es que no se plantea, explícitamente, una actividad inicial en la que los estudiantes deban realizar un informe sobre cuál es la situación planteada, qué datos tienes y cómo creen que pueden resolverla. Se ha optado por no incluirla con el objetivo de observar si los estudiantes realizan esta actividad aunque no esté contemplada de forma explícita.

El control y la verificación de las respuestas y de los procesos seguidos son aspectos fundamentales de la resolución de problemas (Schoenfeld, 1992) que los estudiantes generalmente no muestran de forma autónoma, como pudo observarse en el análisis del desarrollo por parte de los estudiantes del problema 2 del módulo. Por esta razón se incluyen en el problema 3, *Dinámica de poblaciones*, algunas cuestiones específicas acerca de este proceso fundamental para la resolución de problemas y, por tanto, para el desarrollo del aprendizaje de las matemáticas.

A raíz de que las preguntas de la etapa 1, comprensión de la situación, del problema anterior no parecían cumplir con su objetivo, se formularon las preguntas de este problema en términos del significado de determinados conceptos involucrados en la situación planteada, como la tasa de natalidad y mortalidad. Una de las dificultades que se encontraron los estudiantes al realizar la etapa 2 del problema *"Contaminación de mercurio"* fue que no reflexionaron lo suficiente acerca del significado de "proporción" de un elemento en una disolución y la relación entre esta y la cantidad de dicho elemento. Por esta razón se consideró fundamental hacer explícitas determinadas preguntas acerca del significado de los conceptos involucrados en la situación planteada (por ejemplo, "¿Qué significa que la tasa de nacimiento es de 410 peces por cada mil?", "¿Qué significa que la tasa de mortalidad es de 220 peces por cada mil?").

La resolución de la etapa 3 de este episodio concluye con una serie de actividades cuyo objetivo es que los estudiantes formulen conjeturas y las comprueben.

- *Analiza para qué valores de P la población*

  (a) *Aumenta*

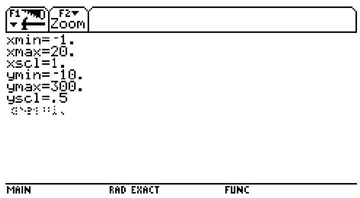
  (b) *Disminuye*

  (c) *Se mantiene constante*

- *¿Qué sucede con la población a lo largo del tiempo?*

Consideremos el caso particular b=0'001.

- *Representa gráficamente la función* $P(t) = \dfrac{19}{100b}$ *con los siguientes parámetros de la aplicación "Window".*



- *Representa gráficamente la función que indica el número de doradas que hay en el recinto en cualquier instante de tiempo, si en dicho recinto, al inicio, había 100 peces.*

- *Representa gráficamente la función que indica el número de doradas que hay en el recinto en cualquier instante de tiempo, si en dicho recinto, al inicio, había 280 peces.*

Con la imagen que has obtenido, comprueba si se cumplen las respuestas que has dado en las dos cuestiones anteriores.

Estos dos procesos matemáticos, de formulación y comprobación de conjeturas, son también los componentes principales de la etapa de planteamiento y resolución del caso general, en este problema (etapa 4). En esta etapa los estudiantes formulan conjeturas acerca del comportamiento de la población de peces, dependiendo del signo de la tasa de crecimiento, que pueden comprobar mediante la representación gráfica de algunos ejemplos proporcionados en el enunciado del problema.

- *Supongamos que a es un valor negativo. Calcula el valor al que se aproxima la cantidad de peces a medida que pasa el tiempo.*

Representemos gráficamente un ejemplo de esta situación.

- *Representa gráficamente la función que indica el número de peces que hay en un recinto en cualquier instante de tiempo, si en dicho recinto, al inicio, había 280 peces, la tasa de crecimiento de dicha especie es -0'19 y el término de competencia es 0'001.*

Al igual que en el problema anterior, se plantea una etapa de análisis retrospectivo del proceso de solución cuya redacción, por parte de los estudiantes, permitirá observar qué procesos y resultados han considerado más relevantes en el desarrollo del problema.

Las intervenciones del profesor hacia todo el grupo, durante las sesiones dedicadas al desarrollo del problema 3, están relacionadas únicamente con el propio problema. No se introduce ningún concepto matemático nuevo, aunque surge la necesidad de aclarar a los estudiantes cómo utilizar una Ecuación Diferencial Ordinaria para analizar la monotonía de una función. En la siguiente tabla se muestra un esquema del desarrollo de las cuatro sesiones dedicadas a la resolución, por parte de los estudiantes, de este problema.

1ª sesión	Los alumnos trabajan en parejas
	El profesor resuelve la EDO para el caso en que el término de competición, b, es cero, con el método algebraico.
	Los alumnos trabajan en parejas
2ª sesión	Los alumnos trabajan en parejas
	El profesor resuelve la EDO para el caso en que el término de competición, b, es distinto cero, con el método algebraico y con la calculadora Voyage 200.
	Los alumnos trabajan en parejas
3ª sesión	Intervención del profesor para situar a los alumnos en el mismo punto. Se resumen los resultados de la etapa 3 hasta las representaciones gráficas para el caso b=0.001 y la comprobación de las conjeturas previas.
	Los alumnos trabajan en parejas
4ª sesión	Los alumnos trabajan en parejas
	El profesor explica la "ecuación logística" y "función logística". Comprobación de que una función es solución de una EDO.

Tabla 3.3.8: Problema 3, Dinámica de poblaciones.

3.3.4 Proceso de análisis de los datos

En la segunda fase de la investigación el objetivo es responder a tres preguntas ($\mathcal{P}2$, $\mathcal{P}3$ y $\mathcal{P}4$; sección 1.3), la primera de las cuáles ya ha sido parcialmente contestada al comienzo de esta sección, al indicar bajo qué condiciones se diseñó el Módulo de Enseñanza para la introducción del concepto de EDO en el primer curso de la Licenciatura en Química.

Este apartado comienza concretando qué aspectos del aprendizaje se analizaron para responder a estas preguntas de investigación, lo que se corresponde con la fase de selección y reducción de la información presente en las investigaciones de tipo cualitativo, pasando después a explicarse el proceso seguido para realizar el análisis de la gran cantidad de información recabada y establecer la conclusiones.

Atendiendo a las preguntas y al marco de investigación descritos en el primer y segundo capítulo de esta memoria, respectivamente, en el análisis de los datos se consideraron aspectos cognitivos, que engloban los conocimientos matemáticos que los estudiantes muestran y aquellos a los que acceden por la interacción con su compañero o con los profesores, así como las estrategias tanto heurísticas como metacognitivas que utilizan, ya sea por propia iniciativa o inducidos por otros elementos. De esta forma se está considerando el conjunto de conocimientos, habilidades y competencias que el Kilpatrick et al. (2009) presenta como fundamentales para el desarrollo del aprendizaje de las matemáticas, relacionados a su vez con la idea de Schoenfeld (1985; 1992) de que en el aprendizaje toman parte los recursos de los estudiantes, en lo referente a conocimiento y heurísticas, pero también las estrategias de control del propio proceso de resolución y las creencias acerca de la disciplina matemática.

Puesto que el Módulo de Enseñanza se implementó en un ambiente de interacción entre los estudiantes, también se observaron aquellos aspectos de tipo social que influyeron en su desarrollo. Los aspectos de tipo social hacen referencia a las interacciones que se producen en el aula (Rasmussen & Ruan, 2008), que en este caso son entre los estudiantes y entre cada estudiante y los profesores presentes en el aula y los materiales utilizados en la instrucción. Rasmussen y Ruan (2008) identifican dos factores sociales que intervienen, en particular, en el uso de los teoremas como herramientas para resolver problemas: la negociación de justificaciones aceptables y la familiarización con la terminología y los significados matemáticos. Otros aspectos de tipo social que influyen en la forma en que se desarrolla el aprendizaje es el rol que cada estudiante juegue en su propio proceso de aprendizaje, es decir, la conducta y actitud que tenga hacia su compañero, los profesores y la materia.

Por último se consideró el uso que hacen los estudiantes de la calculadora Voyage 200 y de las respuestas que esta les proporciona. Se observó de qué forma la Voyage 200 contribuye a que los estudiantes utilicen distintos recursos y estrategias para explorar sus ideas, probar sus conjeturas y verificar los resultados obtenidos (Santos, 2007).

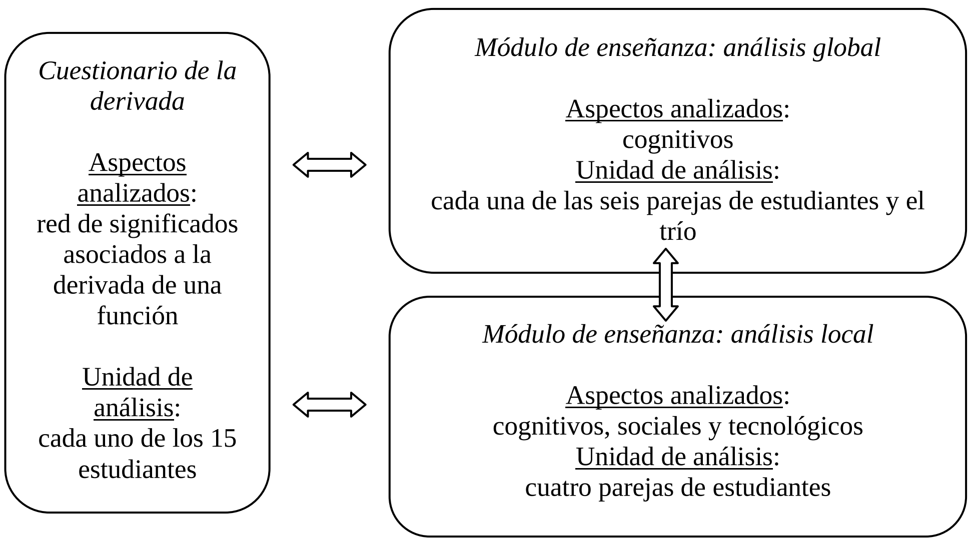
Una vez identificados los elementos que se observaron en esta segunda fase de la investigación, conviene explicar el proceso seguido para realizar el análisis de los datos.
Durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza, los estudiantes trabajaron en parejas o grupos de tres, pero también hay dos sesiones de clase en las que la resolución de las

tareas propuestas se hizo de forma individual, al inicio y al final de las sesiones dedicadas al estudio de las EDO. Estas tareas individuales son esenciales para la descripción del proceso de aprendizaje de cada estudiante ya que establecen los conocimientos con los que el alumno parte para la construcción de los nuevos saberes, de los que depende directamente el desarrollo del Módulo de Enseñanza que muestre (Schoenfeld, 1992).

En primer lugar se analizaron las respuestas de los estudiantes al cuestionario de la derivada, con el fin de establecer el catálogo de conocimientos y recursos para la resolución de problemas de que dispone cada uno de los miembros de los grupos que se han formado para el desarrollo del Módulo de Enseñanza. Las componentes de tipo social y tecnológico no aparecen en este análisis puesto que esta actividad fue desarrollada de forma individual y en un ambiente de uso exclusivo de lápiz y papel. Se consideraron, por tanto, los aspectos de tipo cognitivo, los conceptos matemáticos que emergen, centrándose en los diferentes usos del concepto de derivada que emplean los estudiantes para responder al cuestionario y el tipo de relaciones, si las hubiera, que establecen entre distintos significados de un mismo concepto matemático.

Seguidamente se analizan los aspectos cognitivos observados durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza (comprensión conceptual, fluidez en el uso de procedimientos matemáticos y heurísticas empleadas). En esta etapa, la unidad de análisis son los siete grupos de estudiantes que se formaron para trabajar en los problemas del Módulo de Enseñanza (las seis parejas y el trío). A esta parte del análisis se le ha denominado “análisis global” puesto que considera los aspectos mostrados por los estudiantes de una manera generalizada, sin mostrar detalles, de cada uno de los tres problemas del Módulo (Desintegración del uranio, Contaminación de mercurio, Dinámica de poblaciones).

Ante la necesidad de detallar el análisis global con el objetivo de poder dar respuestas lo más precisas posible a las preguntas de investigación, se realizó un análisis de los aspectos cognitivos, sociales y tecnológicos que surgieron durante las diez sesiones de clase en las que los estudiantes trabajaron en los problemas del Módulo de Enseñanza. De forma esquematizada, el proceso de análisis puede ser representado de la siguiente forma:



Esquema 3.3.9: Esquema del proceso de análisis

Para realizar este análisis, denominado "análisis local", se seleccionaron cuatro de las parejas de estudiantes (Milagros y Silvia; Nicanor y Mar; Virginia y Carmen; Alexis y Zoraida). Estas cuatro parejas se consideraron como las más significativas puesto que el material de que se dispone para el análisis es más completo que en el caso de los otros grupos (algunos de los estudiantes no asistieron con frecuencia a clase, algunas parejas no discutían sobre el problema por lo que se dispone de poco material grabado de ellas; todos los estudiantes entrevistados, excepto uno, forman parte de alguna de estas parejas). Por otra parte, el análisis global refleja que las otras dos parejas (Gabriel y Ginés; Nieves y Naomi) y el trío (Sonia, Alberto y Juan) no muestran ninguna característica que no haya sido observada en las parejas seleccionadas, no aportando elementos novedosos a la descripción del proceso.

El análisis de los datos de cada pareja se presenta por separado, distinguiendo entre los procesos mostrados en cada uno de los cinco instrumentos de análisis (cuestionario de la derivada, los tres problemas del Módulo de Enseñanza y el problema 4, Investigaciones policiales, utilizado para la entrevista) y finalizando con una tabla en la que figuran los elementos del aprendizaje de las matemáticas mostrados por cada uno de los miembros de la pareja o por los dos (Tabla 3.3.10). Esos elementos incluyen: comprensión conceptual, fluidez en el uso de procedimientos matemáticos, heurísticas empleadas durante la resolución de los problemas y estrategias de control mostradas para verificar las respuestas dadas y el proceso de resolución empleado. Las tablas utilizadas son como las que se muestran a continuación, en la fila central se muestran los elementos que los dos miembros de la pareja han mostrado.

	Comprensión conceptual	*Fluidez en los procedimientos*	*Heurísticas*	*Estrategias de control*
Alumno A				
Aspectos comunes				
Alumno B				

Tabla 3.3.10: Esquema que muestra los elementos matemáticos utilizados por cada pareja

El protocolo para las entrevistas se construyó a partir de un primer análisis del material de cada uno de los estudiantes lo que le confiere un carácter individual, si bien están basadas en una componente que coincide para todos los alumnos, las preguntas del cuestionario de la derivada y la actividad *"Investigaciones policiales"*. Este protocolo contempla diferentes aspectos. En una primera parte se observa el proceso de resolución del problema 4, en busca de evidencias del aprendizaje mostrado durante el desarrollo de los tres problemas del Módulo de Enseñanza. Para ello se entrega a cada alumno, al comienzo de la entrevista, el documento escrito que ellos mismos habían elaborado durante la última sesión del Módulo de Enseñanza, así como otro documento en el que figuraban las acciones que habían realizado con la calculadora Voyage 200 para resolver la actividad propuesta. Después de un tiempo para que leyeran los documentos entregados, se les pedía que explicaran y analizaran en voz alta lo que ellos mismos habían hecho[35].

El resultado de todo el proceso anterior es que los estudiantes, con ayuda o no del investigador que realizó la entrevista, detectaban los errores que habían cometido, si es que había alguno, e intentaban corregirlos; terminaban la actividad, si no lo habían hecho y mostraban en voz alta sus razonamientos, lo que permite conocer el proceso seguido por los estudiantes para resolver el problema.

Al finalizar el desarrollo de la actividad principal de esta entrevista, se formula a los estudiantes una serie de preguntas, relacionadas con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Las preguntas que se formulan a los estudiantes son del tipo: *¿cómo explicarías a alguien lo que es una EDO y para qué sirve?, ¿qué es un problema de valores iniciales?, ¿qué problema de valores iniciales has resuelto en este problema?, ¿qué describen las soluciones general y particular de una EDO?, ¿cómo podemos saber si una situación puede ser modelada a través de una EDO?...*

La *formulación de conclusiones* se fue realizando por etapas, a partir de la información resumida en las tablas anteriores, para finalizar estableciendo el progreso de cada uno de los estudiantes a lo largo del módulo de instrucción. Estas conclusiones se fueron *verificando* en el momento de escribir el informe final, regresando a los datos y confrontando la información con otros miembros del equipo de investigación.

3.3.5. Criterios de validez

Al igual que en la primera fase de la investigación, utilizamos los criterios de fiabilidad y validez para evaluar los procedimientos y resultados mostrados en esta segunda fase.

Se describe de forma detallada el proceso seguido en el diseño, la implementación, la recopilación de datos y el análisis de los mismos y se incluyen en los anexos de esta memoria las transcripciones tanto de las conversaciones mantenidas entre los miembros de un grupo y con los profesores en cada una de las sesiones de clase, como de las entrevistas (anexo B.2), lo que hace posible que se pueda someter este estudio a un proceso que compruebe la fiabilidad externa del mismo.

Para finalizar este capítulo y tratar de esquematizar la información recogida en el mismo se presentan los esquemas 3.3.11 y 3.3.12 que incluyen los objetivos, participantes, instrumentos y escenarios en que se han utilizado dichos instrumentos correspondientes a cada una de las dos fases de esta investigación.

[35] En algunos casos no se les entregó documentación sino que se les pidió directamente que resolvieran la actividad en voz alta. Esto se hizo con los estudiantes que, en el documento escrito, no habían presentado casi nada.

Primera fase de la investigación	
Objetivo	Analizar y documentar los conocimientos que emplea un grupo de estudiantes cuando resuelven actividades relacionadas con las EDO, después de haber recibido una formación basada en el uso de métodos algebraicos, y detectar los elementos que influyen en la aparición de dificultades en su resolución.
Participantes	21 estudiantes de las licenciaturas en Física y Matemáticas. *Características*: habían recibido formación relativa a la clasificación y posterior resolución (empleando métodos algebraicos) de EDO de primer y segundo orden.
Instrumento	Cuestionario con 11 preguntas
Escenario	Los estudiantes responden al cuestionario en una sesión de clase en la que los alumnos trabajan de forma individual, con lápiz y papel.
Instrumento	Entrevista a 3 de los estudiantes. Se utilizan seis preguntas del cuestionario anterior y se incluyen otras cuatro.
Escenario	Las entrevistas se realizan de forma individual a cada uno de los tres estudiantes entrevistados.

Esquema 3.3.11: Elementos de la primera fase de investigación

Segunda fase de la investigación	
Objetivo	Diseño e implementación de un Módulo de Enseñanza para introducir el concepto de EDO en un ambiente de Resolución de Problemas y analizar los aspectos del pensamiento matemático y los procesos relacionados con la disciplina que los estudiantes muestran durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza.
Participantes	15 estudiantes (seis parejas y un trío). *Características*: habían cursado la asignatura correspondiente al cálculo diferencial e integral de las funciones de una variable y la parte de la materia correspondiente a las funciones de varias variables, diferenciación parcial y extremos de funciones de dos y tres variables.
Instrumento	Cuestionario de la derivada
Escenario	Los estudiantes responden al cuestionario en una sesión de clase en la que los alumnos trabajan de forma individual, con lápiz y papel.
Instrumento	Módulo de enseñanza formado por tres problemas: Desintegración del uranio, Contaminación de mercurio y Dinámica de poblaciones. *Se dispone de*: material escrito, imágenes de la Voyage™200 y trascripción de las grabaciones de cada sesión.
Escenario	Se entregó a cada grupo la documentación relativa al problema que se iba a resolver, así como una calculadora Voyage 200, y estos comenzaban a trabajar, interactuando entre ellos y utilizando a los profesores presentes en el aula, única y exclusivamente para aclarar dudas.
Instrumento	Problema 4: Investigaciones policiales - Trascripciones
Escenario	En primer lugar los estudiantes tratan de resolver este problema de forma individual, utilizando lápiz y papel y la calculadora Voyage™200. Sus respuestas son utilizadas para diseñar y realizar la entrevista posterior a seis de los quince alumnos.

Esquema 3.3.12: Elementos de la segunda fase de investigación

4. Análisis e interpretación de datos: Primera fase de la investigación.

En el capítulo anterior se expuso la Metodología y se presentaron los instrumentos y el procedimiento seguido para analizar los datos de cada una de las dos fases en que se divide esta investigación. En este capítulo se describen en detalle los instrumentos utilizados en la primera fase de la investigación y se analizan los datos recopilados en la misma.

El objetivo de la primera fase de la investigación, tal y como se señala en el capítulo 1, consistía en analizar los conocimientos que emplea un grupo de estudiantes cuando resuelven actividades relacionadas con las EDO, después de haber recibido una enseñanza basada en el uso de métodos algebraicos, y detectar los elementos que influyen en la aparición de dificultades en su resolución. Se trataba, en definitiva de detectar los elementos que influyen en la aparición de dificultades durante la resolución de dichas actividades y observar si los sistemas de representación que utilizan y el contexto en que se presentan influye en la manera de utilizar el concepto de EDO.

En un modelo de enseñanza en el que las EDO se introducen a través de su definición formal y de los métodos de clasificación y posterior resolución analítica, la pregunta de investigación que nos habíamos planteado se enunciaba en los siguientes términos: ¿Cómo utilizan los estudiantes los conceptos matemáticos que han estudiado para resolver problemas en los que intervienen conceptos y significados relacionados con las EDO?

Los datos que se analizan para contestar a esta primera pregunta de investigación provienen de dos instrumentos diferentes: el cuestionario C-ED y la entrevista semi-estructurada (anexo A.1).

Los estudiantes entrevistados (Jordan, Stella y Wanda) fueron seleccionados atendiendo a varios aspectos: el uso que hacían del concepto de derivada y sus diferentes significados, su fluidez en el uso de los métodos algebraicos específicos de resolución de EDO y, finalmente, la clase de respuestas relacionada con el campo de direcciones asociado a una ecuación diferencial.

La presentación de los resultados de esta primera fase de la investigación se hace distinguiendo tres aspectos: la forma en que los estudiantes utilizan sus conocimientos previos para abordar las diferentes preguntas; el tipo de representación que utilizan y las particularidades en el modo en que los alumnos resuelven aquellos problemas cuyo enunciado presenta una situación hipotética, basada en un contexto real (Barrera-Mora & Santos-Trigo, 2002).

Kilpatrick et al. (2009) destacaron que el aprendizaje de conceptos matemáticos requiere que los estudiantes desarrollen estrategias y habilidades para resolver problemas en distintos contextos, reflexionando, seleccionando y discriminando, de su catálogo de recursos, las herramientas necesarias en cada momento y, dado que el objetivo de esta primera fase se plantea en torno al análisis del uso que hacen los estudiantes de Matemáticas y Física de los conceptos matemáticos que han estudiado y los sistemas de representación algebraico y gráfico para responder a varias cuestiones que involucren conceptos y significados relacionados con las EDO, describiremos aquí la red de representaciones y significados asociados con el concepto de EDO y se tratará de establecer las relaciones entre ellos (Hiebert & Carpenter, 1992).

La selección de los estudiantes

El análisis de las respuestas de todos los estudiantes al cuestionario C-ED permitió observar ciertos patrones de comportamiento que condujeron a la organización de sus respuestas, atendiendo a varios aspectos: los procedimientos empleados por los estudiantes para comprobar si una función es solución de una EDO y para obtener la expresión de la solución general, las heurísticas que utilizaron para resolver determinadas actividades, los procesos matemáticos mostrados en las actividades relacionadas con el campo de direcciones asociado a una EDO y con enunciados basados en un contexto real (anexo B.1.22).

Como resultado de este primer análisis de la información se seleccionaron los tres estudiantes que participaron en las entrevistas. Un elemento clave para su selección resultó ser el uso que hacían del concepto de EDO y de campo de direcciones asociado al mismo y su conocimiento de los métodos algebraicos de resolución de ecuaciones diferenciales. A continuación se muestran algunas de sus respuestas que permiten observar las diferencias entre sus conocimientos y dificultades a la hora de responder a diferentes preguntas del cuestionario.

▪ Stella, en el momento que realiza el cuestionario, no conoce ningún método específico de resolución de EDO y utiliza los significados algebraico y geométrico de la derivada para resolver algunas actividades, así como el significado de la integración como operación inversa de la derivación. En cuanto al campo de direcciones, Stella lo interpreta pero no lo representa (Imagen 4.1).

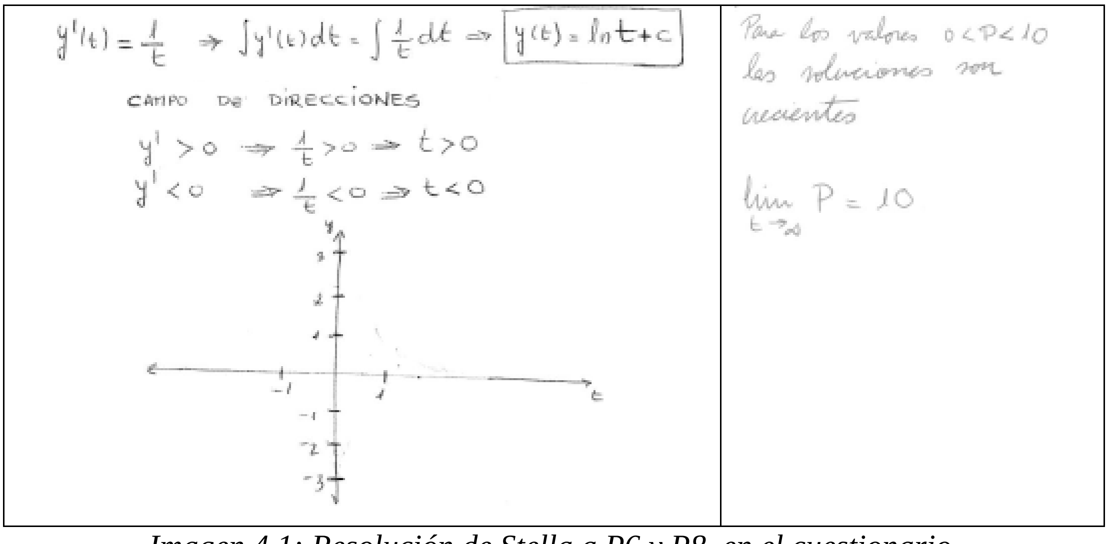
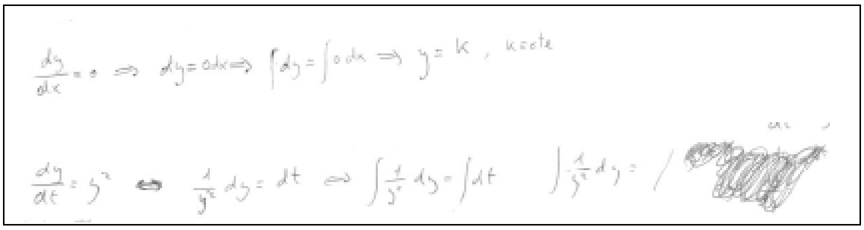


Imagen 4.1: Resolución de Stella a P6 y P8, en el cuestionario.

▪ Jordan utiliza el método de separación de variables para resolver todas las ecuaciones del cuestionario, aunque presenta dificultades con la integración de funciones elementales que le hacen resolver de forma incorrecta muchas de las actividades (Imagen 4.2). No muestra ningún indicio de relacionar las ecuaciones diferenciales con el concepto de derivada. En cuanto al campo de direcciones, ni lo representa ni lo interpreta, no realiza ninguna de las actividades relacionadas con el campo de direcciones.

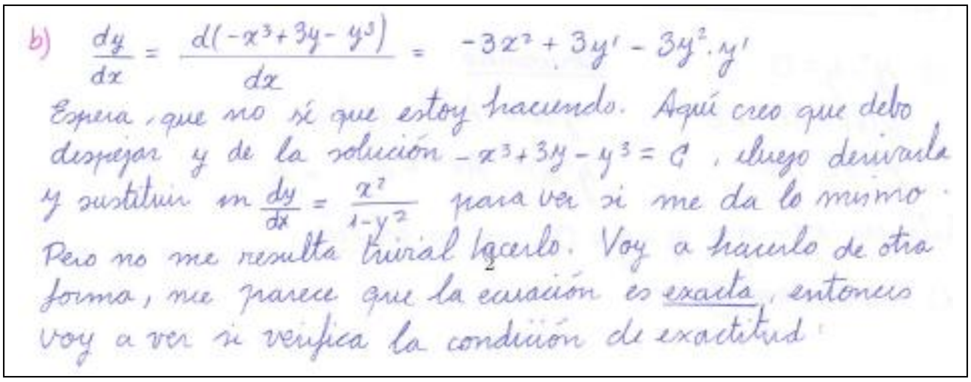


$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow dy = 0dx \Rightarrow \int dy = \int 0 dx \Rightarrow y = K$, K cte

$\frac{dy}{dt} = y^2 \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} dy = dt \Leftrightarrow \int \frac{1}{y^2} dy = \int dt \quad \int \frac{1}{y^2} dy = /$

Imagen 4.2: Respuestas de Jordan a P1a y P2b, en el cuestionario

▪ Wanda conoce varios algoritmos de resolución para las EDO de primer orden y utiliza diferentes significados del concepto de derivada para resolver algunas ecuaciones diferenciales del cuestionario. Además representa e interpreta correctamente el campo de direcciones asociado a una EDO. Sin embargo ha mostrado algunas dificultades durante sus respuestas al cuestionario como, por ejemplo, al interpretar una función implícita como posible solución de una ecuación diferencial (Imagen 4.3).



b) $\frac{dy}{dx} = \frac{d(-x^3+3y-y^3)}{dx} = -3x^2 + 3y' - 3y^2 \cdot y'$

Espera, que no sé que estoy haciendo. Aquí creo que debo despejar y de la solución $-x^3+3y-y^3 = C$, luego derivarla y sustituir en $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2}$ para ver si me da lo mismo. Pero no me resulta trivial hacerlo. Voy a hacerlo de otra forma, me parece que la ecuación es exacta, entonces voy a ver si verifica la condición de exactitud.

Imagen 4.3: Parte de la respuesta de Wanda a P3b, en el cuestionario

A continuación se describe el análisis de la primera fase en los términos indicados. A lo largo del análisis se hará referencia a la clasificación de las preguntas del cuestionario presentada en la sección 3.2.3 (Tipos 1, 2, 3 y 4) y se utilizarán las entrevistas para profundizar sobre algunos de los aspectos analizados.

4.1 El uso de conocimientos matemáticos previos

La estrecha relación que existe entre el concepto de derivada de una función y el de Ecuación Diferencial Ordinaria hace que se preste atención a las diferentes interpretaciones del concepto de derivada que los estudiantes muestran y utilizan para responder a diferentes cuestiones relacionadas con las EDO. Por otra parte, comprender el concepto de solución de una EDO demanda establecer una red de significados y procesos asociados al concepto, algunos de estos últimos relacionados con el concepto de solución de una EDO que ya se han expuesto en el esquema 2.2.2 y en el que se explicitan también dos procesos relacionados con el campo de direcciones: su representación y su interpretación.

Uno de los elementos que configuran el Marco Conceptual es lo que se interpreta como aprendizaje de los conceptos matemáticos, y que ha sido estructurado en cinco componentes. Para observar las componentes relacionadas con la fluidez en el uso de procedimientos matemáticos y la comprensión de los conceptos de derivada y de EDO, así como las relaciones que se establecen entre dichos significados, se analizan las respuestas de los estudiantes a las preguntas de Tipo 2 (preguntas P1, P2 y P12), dado que ofrecen información sobre la interpretación que hacen del concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria y si relacionan este concepto con alguno de los significados asociados a la derivada de una función (Thurston, 1994). Estas cuestiones permiten observar si los estudiantes usan los conocimientos matemáticos adquiridos con anterioridad al estudio de las EDO para resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias simples y también analizar los métodos que emplean cuando resuelven casos más complicados. Todas las ecuaciones que se presentan en estas actividades son de variables separables, con ellas se analiza si los estudiantes emplean el algoritmo estándar de resolución de este tipo de EDO para obtener la solución y si lo hacen correctamente.

Las respuestas de los estudiantes a las cuestiones clasificadas dentro del Tipo 1 (preguntas P3, P4, P5, P11) giran en torno al concepto de solución de una EDO, desde el significado del propio concepto, hasta las diferentes formas en que se puede comprobar que una expresión algebraica es solución de una EDO, pasando por la identificación de determinadas propiedades de las mismas. Los conceptos matemáticos involucrados en estas actividades son función explícita e implícita, derivada, ecuación diferencial y solución de la misma.

El concepto de solución de una EDO es señalado por algunos autores como fuente de dificultades durante el proceso de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales (por ejemplo Hernández, 1995; Rasmussen, 2001; Raychaudhuri 2008; Zandieh & McDonald, 1999). El esquema mental de los estudiantes acerca del concepto de solución de una ecuación se ve modificado, desterrándose la idea de que este espacio está formado únicamente por valores numéricos, para incluir en el mismo el conjunto de las funciones derivables. A esto hay que añadir que, el hecho de que las soluciones de una EDO sean funciones hace que los obstáculos que se producen en el aprendizaje de este concepto se transfieran al ámbito de las soluciones de una EDO (Rasmussen, 2001; Zandieh & McDonald, 1999). Raychadhuri (2008) considera que la dificultad con el concepto de solución de una EDO no se restringe al hecho de que éstas sean funciones y no valores numéricos. Este autor señala que los estudiantes pueden construir el “objeto” solución de una EDO empleando dos procesos que denomina “de definición” y “de generación”. El proceso de definición consiste en comprobar que una función es solución de una EDO realizando las sustituciones necesarias en la ecuación y verificando que se cumple la igualdad. El proceso de generación sería comprobar que una función es solución de una EDO resolviendo la ecuación y verificando que la expresión obtenida coincide con la función candidata a solución. Raychadhuri (2008) sostiene que, algunas de las dificultades que los estudiantes tienen con el concepto de solución de una ecuación diferencial son fruto de las dificultades que tienen para llevar a cabo uno de los dos, o ambos, procesos que conducen a la construcción del “objeto” solución.

Atendiendo a las respuestas mostradas en las actividades P1 y P2 (de tipo 2), los alumnos pueden ser clasificados en dos grandes grupos. Por un lado se encuentran aquellos que emplean conocimientos anteriores al estudio de las ecuaciones diferenciales para resolver alguna de las actividades y por otro lado están los que resuelven todas las ecuaciones con algún método específico empleado en la resolución de EDO (Tabla 4.1.1).

<table>
<tr><th colspan="2">Actividades de Tipo 2</th><th>Estudiantes</th></tr>
<tr><td rowspan="3">14 estudiantes emplean sus conocimientos acerca de la derivada de una función para resolver casos sencillos.</td><td>7 alumnos no utilizan algoritmos de resolución de EDO.</td><td>Stella, Betty, Laure, Helen, Jason, Eddy, Franklin</td></tr>
<tr><td>2 alumnos conocen métodos de resolución de EDO, pero no saben cuándo usarlos.</td><td>Rosy, Gaby</td></tr>
<tr><td>5 estudiantes utilizan los algoritmos de resolución de forma apropiada.</td><td>Wanda, Carena, Melvin, Jeremy, Berenice</td></tr>
<tr><td rowspan="2">7 alumnos resuelven todas las EDO empleando algoritmos.</td><td>2 estudiantes no seleccionan correctamente el método a utilizar.</td><td>Mary, Sam</td></tr>
<tr><td>5 alumnos distinguen entre los métodos útiles en cada situación.</td><td>Jordan, Roger, Angie, Edna, Silvana</td></tr>
</table>

Tabla 4.1.1: Estrategias de resolución de los estudiantes en las actividades de Tipo 2

El primer grupo de estudiantes (14 alumnos) parece interpretar el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria como una ampliación del concepto de derivada de una función, es decir, utilizan su interpretación de los conceptos de derivada de una función y ecuación para establecer el conjunto de las soluciones de una EDO, mientras que el segundo grupo de estudiantes (7 alumnos) podría estar concibiendo el concepto de EDO como un ente matemático independiente, con sus propias reglas de tratamiento y resolución.

Stella, que pertenece al primer grupo, utiliza las reglas algebraicas de la derivada para resolver las actividades P1 y P2, hecho confirmado en la entrevista, dado que en el cuestionario no utiliza ningún método específico para resolver las EDO y sólo indica una solución particular para cada ecuación, excepto para $y'(t) = y^2$. En la entrevista se pudo comprobar que tiene dificultades para darse cuenta de que existen infinitas funciones cuya derivada coincide; manifiesta que no sabe representar más que una solución de la ecuación $\frac{dy}{dx} = 0$ y sólo por la insistencia del investigador consigue expresar la solución general de la ecuación $y'(t) = k$.

Stella (S): Pues entonces, si la derivada vale una constante cualquiera, puedo suponer que la función es ... de grado uno, por ejemplo. [Escribe $y(t) = kt$]

[...]

Investigador: ¿Sabrías dibujar alguna solución más?

S: ¿Con lo que me costó esta? ¿Otra? Uhm, que la derivada sea una constante... También sería $y(t) = kt + p$ [...] Esto también es constante [señala la p], pues la derivada sería esa [señala la ecuación diferencial].

Wanda muestra evidencias de conocer algunos algoritmos de resolución de EDO y utiliza diferentes interpretaciones del concepto de derivada para resolver algunas ecuaciones diferenciales en el cuestionario. Esta alumna utiliza la relación entre el significado geométrico de la derivada y las ecuaciones diferenciales planteadas en estas actividades durante la entrevista. Su primera acción es resolver P1a empleando las reglas de derivación (uso simbólico de la derivada, según Thurston, 1994) y P12 separando las variables. Al pedirle que compare las tres ecuaciones presentes en P1a y P12 es cuando exterioriza su visión de la derivada de una función como pendiente de la recta tangente a la función en un punto.

> *Wanda:* [...] aquí lo que te están pidiendo [P1a] es una función $y(x)$ de manera que su pendiente fuera constante durante todo el intervalo, fuera siempre 0. En estas [P12] lo que te están pidiendo es una... ¡aquí tengo un fallo [P12a], porque depende de la k! Realmente lo que me sale son curvas de manera que su pendiente, es decir, la recta tangente a la curva en cada punto, pues sea k. Si la k fuera positiva me saldría las rectas hacia arriba, ahora, si la k fuera negativa sería unas rectas hacia abajo, igual que me salieron aquí [P12b] [...] Y, en el caso de que la k fuera 0, me daría lo mismo que aquí [P1a].

Se observa además, cómo una visión más completa del concepto de derivada ha contribuido a enriquecer la solución a la ecuación $y'(t) = k$ que Wanda presentó en un primer momento, donde sólo consideraba los valores positivos de la constante k.

Jordan, que pertenece al segundo grupo de alumnos, utiliza el método de separación de variables para resolver todas las ecuaciones del cuestionario pero tiene dificultades con la integración de funciones elementales, lo que le hacer resolver muchas actividades de forma incorrecta (Imagen 4.2). Este alumno no muestra evidencias de relacionar el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria con el de derivada.

De los procedimientos mostrados por los estudiantes para resolver las actividades P3 y P4 (de tipo 1) se puede inferir que hay alumnos para los que el significado de solución de una EDO se ve restringido al resultado del proceso de resolución de la misma (empleando lo que Raychadhuri, 2008, denomina “proceso de generación” del objeto solución). Este es el caso de nueve alumnos que optaron por resolver la ecuación para comprobar si una función era solución de la misma (Anexo B.1.22, Tabla 2). Otros estudiantes conciben el concepto de solución de una ecuación diferencial como el conjunto de funciones que sustituidas en la ecuación, junto con sus derivadas, la convierten en una identidad (construcción del objeto solución empleando el “proceso de definición”, según Raychadhuri, 2008). Entre estos alumnos se encuentra Jordan, que opta por la derivación para comprobar que una función es solución en P3a, sin embargo no contesta al apartado b.

En la entrevista se puede comprobar que la dificultad con que se encuentra para realizar estas actividades está relacionada con el proceso de derivación. Jordan reconoce la expresión implícita de la función dada en P3b, pero no deriva correctamente en ninguno de los dos apartados de esta actividad. En el primer apartado reconoce que no sabe cómo derivar la función y muestra dudas en la aplicación de la regla de la cadena para derivar la función implícita, derivación que también hace de forma incorrecta.

Investigador (I): ¿Qué problema encuentras?
Jordan (J): La derivación de la función.
I: ¿No se te ocurre cómo hacerla?
J: Yo creo que es por esto de los logaritmos, pero...
[...]
Jordan (J): [...] Bueno, si derivamos aquí [la expresión implícita] respecto de x, si esto lo tengo bien,

$$0 + \frac{3dy}{dx} - 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

[...] tendremos esto

$$3\frac{dy}{dx}(1-y^2)=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}(1-y^2)=0$$

y [...] sustituyendo aquí [...] tendremos $x^2 = 0$. Yo creo que es falso.
[...]
I: Hiciste un comentario, dijiste "si esto lo tengo bien". ¿Dudas de que lo tengas bien?
J: No, este paso, el de la regla de la cadena. Yo creo que lo tengo bien.

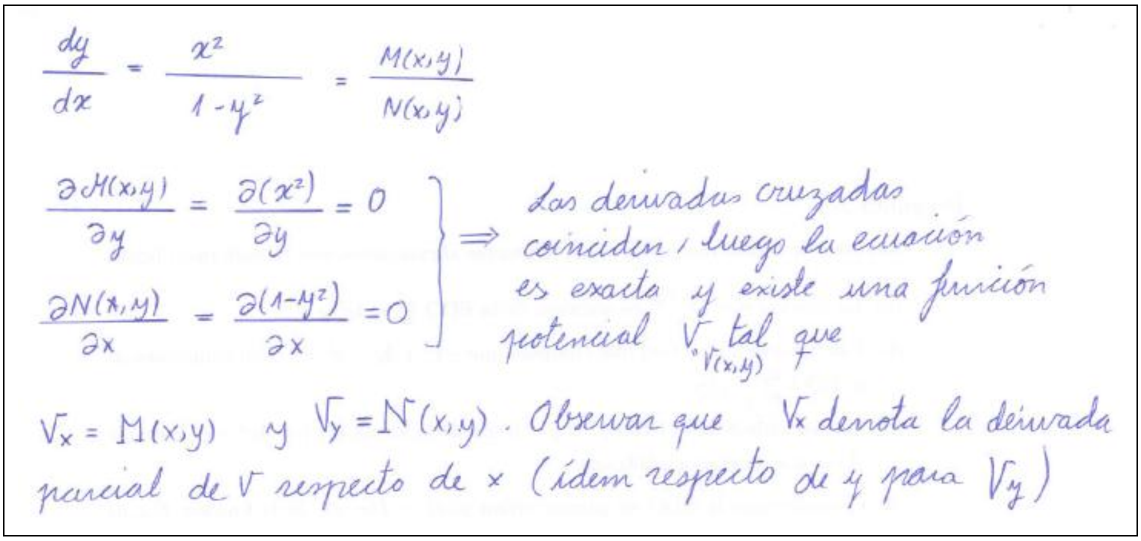
Jordan sólo se plantea resolver la ecuación diferencial cuando el investigador incide en ello durante la entrevista. Esto muestra que este alumno reconoce los dos procesos que le permiten comprobar si una función es solución de una EDO. Sin embargo refleja falta de reflexión y autonomía en la consideración de distintas formas de abordar el problema, elementos estos fundamentales para el desarrollo del aprendizaje de las matemáticas (Kilpatrick et al., 2009).

I: ¿Y necesitas calcular la derivada de esa función obligatoriamente para responder?
J: A lo mejor no es tan difícil, pero [...] tienes que hacerla.
I: ¿Se te ocurre otra manera de abordar el problema o no la hay?
J: Calcular las soluciones de esta ecuación [*la EDO*]
I: ¿Te serviría?
J: Si obtenemos todas las soluciones, [...] podemos saber si está esta.

Stella, en el momento que realiza el cuestionario, sólo considera la derivación como procedimiento para comprobar que una función es solución de una EDO, pero, al igual que Jordan, tampoco deriva la función dada de forma implícita, lo que nos hace suponer que este concepto puede constituir un obstáculo para el desarrollo de esta actividad. En la entrevista, Stella contesta a estas actividades resolviendo las ecuaciones. Para ella, como para otros doce estudiantes, el concepto de solución de una ecuación diferencial tiene varios significados. No obstante, se ha podido observar que la expresión implícita de una función carece de significado para Stella, por la respuesta que da, en la entrevista, cuando se le pide que resuelva P3b derivando la función.

Stella: Es que el apartado b es raro... Entonces f(x), ¿qué es?, f(x) puede ser cualquier cosa, cualquier función en x, pero claro, como te dicen que cumplen esto [$-x^3+3y-y^3=C$] Si cumple esto [$-x^3+3y-y^3=C$], ¿significa que f(x) es igual a esto?

En Wanda también se observa que la función implícita puede constituir un obstáculo en el desarrollo de la tarea P3b. En este caso no sería por una ausencia de significado de la expresión, sino por una concepción errónea. Wanda considera que la expresión implícita de una función es de la forma $F(x,y)$, y así lo refleja al derivar mientras está contestando al cuestionario (Imagen 4.3), siendo lo correcto la derivación de la expresión $F(x, y) = C$ con respecto de x. Esta alumna, al no saber qué hacer con la expresión obtenida al derivar, opta por resolver la ecuación, clasificándola como exacta. La respuesta es incorrecta puesto que comete un error al aplicar el algoritmo de resolución de este tipo de ecuaciones (Imagen 4.1.2).



$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial(x^2)}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial(1-y^2)}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

las derivadas cruzadas coinciden, luego la ecuación es exacta y existe una función potencial $V_{(x,y)}$ tal que

$V_x = M(x,y)$ y $V_y = N(x,y)$. Observar que V_x denota la derivada parcial de V respecto de x (ídem respecto de y para V_y)

Imagen 4.1.2: Wanda aplica incorrectamente el algoritmo para las EDO exactas

En el momento en que se llevó a cabo la entrevista, Wanda considera la derivación de la función como primera opción para resolver la actividad, pero lo descarta nuevamente al encontrarse con la expresión implícita de la función. Posteriormente clasifica la EDO como exacta, apoyándose en cómo recuerda que era la expresión de las soluciones de estas ecuaciones, pero no recuerda cómo comprobar si dicha ecuación es exacta y cómo calcular la expresión de la función potencial. Este es un ejemplo de la carencia de significado de los algoritmos en las realizaciones mostradas por los estudiantes.

> *Wanda*: ¿Cómo saber si algo es solución de algo? Pues deberíamos sustituir la y de aquí [señala la expresión implícita] en esta [señala la ecuación] y ver si verifica la ecuación diferencial. Lo que pasa es que despejar de aquí no es sencillo porque tiene y^3 y la y [...] Cuando ves una cosilla de este estilo [la EDO] y ves una respuesta de este estilo [la función implícita]... Me suena a las ecuaciones, creo que se llamaban exactas, no estoy segura, y las soluciones te van a quedar una función potencial igual a una constante. No recuerdo bien por qué, ni cómo [...]

Roger, Wanda y Angie parecen tener una comprensión más robusta del concepto de solución de una EDO, en comparación con el resto de sus compañeros, lo que se traduce en un enriquecimiento de las estrategias heurísticas empleadas para resolver las actividades de Tipo 1. Roger utiliza la relación que existe entre el número de constantes de integración que aparecen en la expresión algebraica de la solución general de una EDO con el orden de la misma para resolver P4 y Wanda y Angie presentan contraejemplos para demostrar la falsedad de la afirmación hecha en P5 (Imagen 4.1.3).

<table>
<tr><td colspan="2">Un conjunto de soluciones de la ecuación $y''-y=0$, más completa sería $y=Ae^{x}+Be^{-x}$, A,B son constantes arbitrarias.

Roger</td></tr>
<tr><td>No en general. Esto se verifica en ecuaciones lineales según recuerdo pero hay casos, por ejemplo, en vbles separados en los que la solución es una fracción en la que el denomina-dor se nos anula y no puede decirse que esté definida en todo $\mathbb{R}^2$.

Wanda</td><td>Contraejemplo
$y'(x)=y^2$ (Pregunta 4, apartado (d))

Angie</td></tr>
</table>

Imagen 4.1.3: Procedimiento empleado por Roger en P4 y Wanda y Angie en P5

La interpretación geométrica de la derivada, como pendiente de la recta tangente a la función en un punto, es la base sobre la que se construye el concepto de campo de direcciones. En el análisis de las respuestas de los estudiantes a las cuestiones anteriores, hemos podido observar que muy pocos alumnos relacionan el concepto de EDO con este significado de la derivada, lo que se traduce en un aumento de fracasos en la resolución de las actividades de Tipo 3. Aproximadamente la mitad de los alumnos no responde a los problemas cuyo enunciado comienza con la interpretación o construcción de un campo de direcciones, P8 y P10 respectivamente, aún cuando han estudiado los elementos necesarios para abordarlas empleando tanto el sistema de representación gráfico como el algebraico (anexo B.1.22, Tabla 5).

En el momento en que los alumnos contestaron al cuestionario, doce de ellos no mostraban signos de un mínimo conocimiento de los procesos de representación e interpretación de un campo de direcciones. Uno de estos estudiantes, Jordan, mostró, durante la entrevista, que era capaz de interpretar este concepto, no así de representarlo. Este cambio se debe posiblemente a que el alumno respondió al cuestionario durante el curso, mientras que la entrevista se realizó después de haberlo terminado y por lo tanto había desarrollado ciertos recursos.

Dependiendo de la Ecuación Diferencial Ordinaria considerada, se puede extraer diversa información de su expresión, como la expresión algebraica de la función solución o su monotonía. Varios alumnos, entre ellos Jordan, otorgan al concepto de ecuación diferencial un único rol, el de algo que hay que resolver. Eso es lo que hace este alumno en todas las actividades de tipo 3 que se le plantean en la entrevista, intentar resolver la ecuación. En ningún momento hace referencia a la monotonía de la función, lo que podría ser la causa de que no consiguiera representar ningún campo de direcciones correctamente. Sólo intenta representar el de la actividad P15 y lo hace a partir de la solución del problema que ya había representado previamente después de resolver la EDO.

Stella, al responder a P6 en el cuestionario, utiliza la ecuación diferencial tanto para obtener la expresión algebraica de la función solución como para analizar la monotonía de la misma (Imagen 4.1.4), pero no representa el campo de direcciones. En la entrevista se limita a resolver la ecuación, lo que nos lleva a pensar que en el cuestionario estaba intentando aplicar un algoritmo que no consiguió recordar del todo. Este algoritmo adquiere significado para ella en la entrevista, haciendo aflorar el significado geométrico de la derivada y representando el campo de direcciones correctamente.

Investigador (I): Esto que te acabo de dar es lo que tú hiciste. Aparecen una serie de cálculos ahí donde dice campo de direcciones. ¿Sabrías decirme qué hiciste ahí?

CAMPO DE DIRECCIONES

$y' > 0 \Rightarrow \frac{1}{t} > 0 \Rightarrow t > 0$

$y' < 0 \Rightarrow \frac{1}{t} < 0 \Rightarrow t < 0$

Stella (S): Aquí analizo la derivada, si es positiva o negativa [...]

$y' = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{t} \Rightarrow t = 1$

$y' = 2 \Rightarrow 2 = \frac{1}{t} \Rightarrow 2t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

$y' = 3 \Rightarrow 3 = \frac{1}{t} \Rightarrow 3t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$

$y' = -1 \Rightarrow -1 = \frac{1}{t} \Rightarrow -t = 1 \Rightarrow t = -1$

$y' = -2 \Rightarrow -2 = \frac{1}{t} \Rightarrow -2t = 1 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$

$y' = -3 \Rightarrow -3 = \frac{1}{t} \Rightarrow -3t = 1 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$

y aquí empiezo a calcular la derivada [...] Calculo cuánto vale el parámetro t según los valores de la derivada.

I: Y, ¿cómo utilizarías esos cálculos para dibujar el campo de direcciones?

S: Sería como que, en t=1, la derivada se supone que es la recta tangente a la curva en ese punto, entonces, en t=1, la curva tiene pendiente 1, algo así, en t=1 tiene pendiente 1, pues sería así [...] En t=1/2 tiene pendiente 2, más inclinada todavía y en t=1/2 [...] Que, la verdad, yo sabía que esto era la pendiente de la curva o no sé qué, pero no sabía qué era [...] Y aquí igual con pendiente contraria.

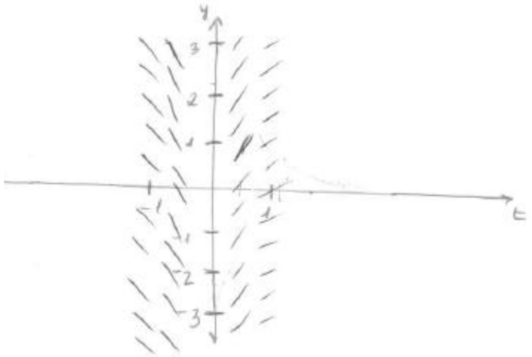


Imagen 4.1.4: Uso del campo de direcciones

En cuanto a la información que se puede obtener de un campo de direcciones asociado a una ecuación, hemos observado que la que más dificultades produce a los estudiantes es la representación de soluciones de la ecuación diferencial que verifiquen una cierta condición. En el cuestionario, ni Jordan ni Stella consiguieron extraer ningún tipo de información del campo de direcciones de la actividad P8, sin embargo, en la entrevista consiguieron responder a las preguntas de este problema relacionadas con la monotonía de la función y su comportamiento en el infinito, haciendo uso únicamente del campo de direcciones. Stella no logró representar las soluciones particulares solicitadas en la actividad, parece confundir la ecuación diferencial con sus soluciones.

Stella (S): ¿qué significa que P(0) vale 0? Que se anula cuando la ecuación vale cero, si pero...
Investigador (I): ¿Qué significa que P(-2)=12?
S: que cuando tú sustituyes en la ecuación, en la t pones -2, te da doce.
I: ¿Qué te da doce?
S: La ecuación, el resultado de... No sé... Esto es como si tuviéramos, por ejemplo un polinomio, entonces cuando en vez de x pones -2, si es, por ejemplo, x cuadrado más uno, pues si pones eso te da un valor. Pues igual pero con P, se supone.
I: ¿Sabrías dibujar esa solución?
S: No

Como se ha señalado al inicio de este análisis, la tercera parte de los estudiantes que participaron en esta investigación resuelven todas las ecuaciones diferenciales planteadas utilizando algoritmos. La mayoría de ellos clasifican estas ecuaciones como de variables separables, pero también aparecen respuestas en las que se utilizan métodos de resolución propios de otros tipos de EDO (Imagen 4.1.5).

$$\left.\begin{array}{l} y' = \cos x \\ y(x_0) = y_0 \end{array}\right\} \quad y(x) = y_0\, e^{\int_{x_0} dt \cdot 0} + \int_{x_0}^{x} \cos \tau \, d\tau = y_0 + (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0).$$

Eileen

$$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \quad y' - y = 0 \Rightarrow \quad \lambda - 1 = 0; \quad \lambda = 1 \qquad y_h = c_1 e^{x}$$

Jeremy

Imagen 4.1.5: Algoritmos usados para resolver P1b y P2a

La entrevista ha permitido constatar que, en algunos casos, los métodos algebraicos de resolución de EDO carecen de significado para los estudiantes. Wanda, durante el cuestionario, utiliza correctamente tanto sus conocimientos acerca de la derivada de una función como del método de separación de variables para resolver las ecuaciones presentes en las actividades de Tipo 2. Durante la entrevista muestra los mismos recursos, empleando las reglas algebraicas de derivación para resolver la ecuación $\frac{dy}{dx} = 0$, y separando las variables para poder resolver las ecuaciones $y'(t) = k$ e $y'(x) = -1$, como ya hemos señalado anteriormente. Sin embargo muestra dudas acerca de la validez matemática de las operaciones que realiza.

Wanda (W): [...] Separo otra vez la variable. Esto la verdad es que no estaría muy correcto pero... integro por separado...

Investigador (I): Acabas de decir que algo no es correcto

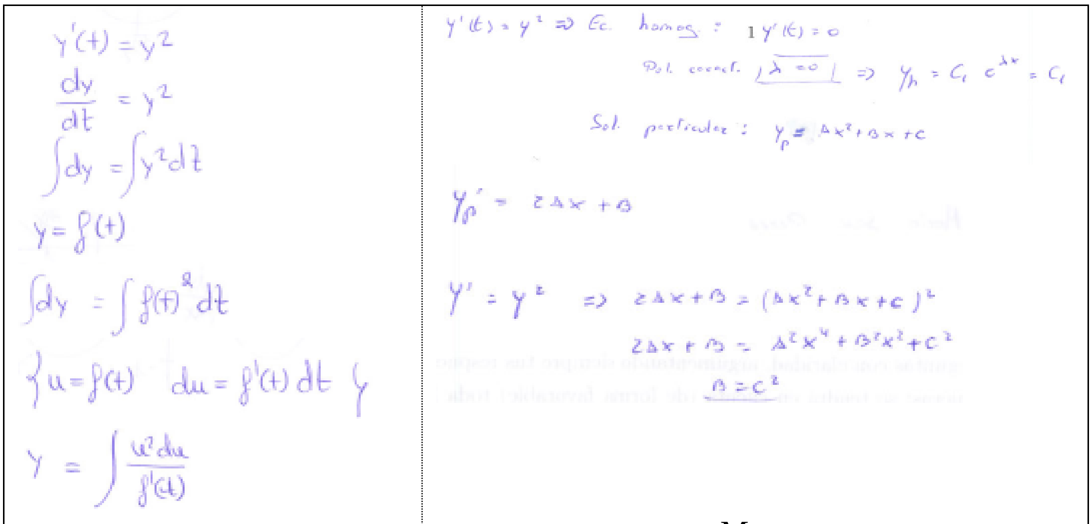
W: Si, que formalmente, a la hora de escribirlo, no me parece correcto esto [señala la expresión $dy = -dx$] [...] Recuerdo vagamente que había que buscar unas determinadas funciones que verificaran unas condiciones y el profesor algunas veces decía "bueno, así se resolvería de una manera un poco burda, sabes, así, rápida". Es como una manera rápida de hacerla. [...]

I: ¿Y por qué crees que separar las diferenciales no tiene sentido matemáticamente hablando?

W: Yo veo esto [señala dy/dx] y sé que es una derivada, [...] o sea, una variación de la función y con respecto a la variable x. Sin embargo, el diferencial de y y el diferencial de x descolgados por separado no... no le veo sentido separados...

La tendencia por el uso de algoritmos conduce a Wanda a utilizar procesos que para ella carecen de sentido matemático como primera opción para resolver estas actividades, relegando a un segundo plano los conocimientos que posee acerca de la derivada y su relación con las ecuaciones diferenciales.

En las respuestas de los estudiantes a este tipo de preguntas también se puede observar que no es suficiente conocer algoritmos para la resolución de ecuaciones diferenciales, también se requiere de ciertos recursos y estrategias para determinar cuándo emplearlos. Cuatro estudiantes, si bien han mostrado conocer varios algoritmos para la resolución, no han desarrollado la habilidad para seleccionar el más apropiado en cada caso, al resolver algunas ecuaciones separando las variables pero no resolver correctamente P2b (Imagen 4.1.6). Para Schoenfeld (1985) esto es debido a una deficiencia en el uso de las estrategias metacognitivas que tienen los estudiantes que les impide elegir la estrategia adecuada para la resolución de la actividad.



Rosy | Mary

Imagen 4.1.6: Respuestas de Rosy y Mary a P2b

Los resultados de este análisis indican que, en general, los estudiantes no hacen uso de la relación existente entre los conceptos de derivada y de Ecuación Diferencial Ordinaria para comprender, reflexionar y resolver cuestiones que involucran ideas básicas de ecuaciones diferenciales ordinarias. La tendencia de los estudiantes es reducir el estudio de las EDO a la búsqueda de un algoritmo que resuelva tipos particulares de ecuaciones, lo que limita sus posibilidades para abordar los problemas. Esto concuerda con resultados obtenidos en otras investigaciones, algunas de las cuales incluso trataban de fomentar el uso de distintos sistemas de representación para el estudio de las EDO (Guerra-Cáceres, 2003; Habre, 2000; Rasmussen & Whitehead, 2003).

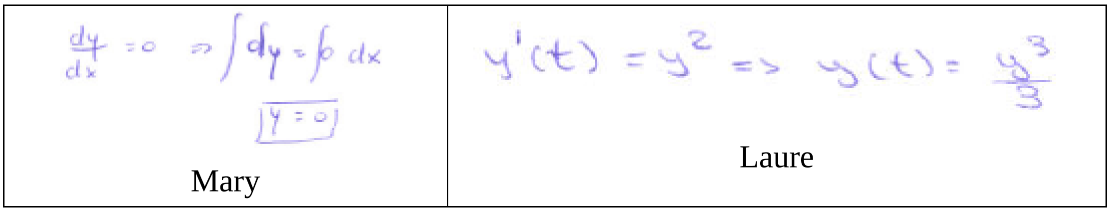
También hay evidencias de que los estudiantes tienen dificultades para identificar diferentes significados asociados con el concepto de solución de una EDO. Por ejemplo, cometen errores al identificar las soluciones generales de una ecuación. Se observó, además, que para comprobar si una función era solución de una EDO, los alumnos optaban por resolver la ecuación y comprobar la expresión obtenida con la función dada ó derivaban la expresión de la función candidata a solución y sustituían en la ecuación, pero no las dos opciones. De hecho, algunos estudiantes no recordaban cómo aplicar la regla de la cadena para derivar una función implícita y, como consecuencia, no pudieron comprobar si una determinada función dada de forma implícita era o no solución de una EDO.

4.2 El uso de los sistemas de representación

Para Hiebert y Carpenter (1992), las representaciones externas que los estudiantes realicen en el trabajo con los conceptos matemáticos y la resolución de problemas juegan un papel central en la identificación y exploración de las relaciones matemáticas que estos establecen en el transcurso de las actividades, puesto que revelan información sobre la manera en que la información está representada internamente. Para analizar los tipos de representación que los estudiantes utilizan en sus respuestas al cuestionario, nos centramos en tres actividades cognitivas que Duval (1993) considera fundamentales en el aprendizaje de conceptos matemáticos: los tipos de representación utilizados, el tratamiento o las operaciones realizadas dentro de cada representación, y el tránsito, la conversión y las conexiones que el estudiante utiliza entre diferentes representaciones.

En relación con el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria, se constata que puede ser utilizado y examinado empleando distintos sistemas de representación (numérico, algebraico y gráfico, principalmente). Las nociones de solución de una EDO y campo de direcciones asociado a la ecuación son algunos de los significados asociados al concepto de EDO, de manera que la naturaleza gráfica del campo de direcciones y el enfoque tradicionalmente algebraico desde el que se enseñan las EDO, justifica la necesidad de analizar la consistencia y la estabilidad de las construcciones que realizan los estudiantes dentro de cada sistema de representación y en el momento de establecer relaciones entre ellos.

En esta misma fase de la investigación, se pudo comprobar que los estudiantes, en general, reconocen la expresión algebraica de una ecuación diferencial y realizan las transformaciones necesarias, dentro de este registro, para obtener la expresión algebraica de la solución. Algunas de las dificultades que se han encontrado los estudiantes en el tratamiento del sistema de representación algebraico, como ya hemos mencionado, se refieren a la inadecuada elección del método de resolución de la ecuación o a un proceso de integración incorrecto (Imagen 4.2.1).



$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \int dy = \int 0\, dx$ $\boxed{y = 0}$

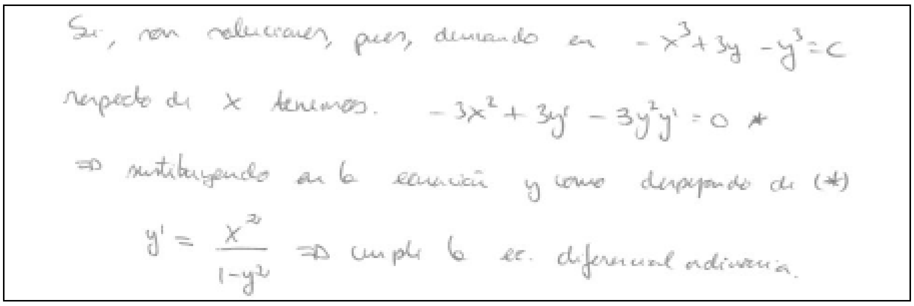
Mary

$y'(t) = y^2 \Rightarrow y(t) = \frac{y^3}{3}$

Laure

Imagen 4.2.1: Errores en la integración de funciones

Por otra parte, la expresión algebraica de la solución de una EDO como una función explícita es reconocida como representación dentro del sistema algebraico por todos los estudiantes excepto por uno, que no contesta a ninguna de las actividades englobadas dentro del tipo 1. No ocurre lo mismo con la representación de la solución como una función implícita, reconocida sólo por cuatro de los veintiún estudiantes que contestaron al cuestionario (Imagen 4.2.2).



Si, son soluciones, pues, derivando en $-x^3+3y-y^3=c$ respecto de x tenemos. $-3x^2+3y'-3y^2y'=0$ *

⇒ sustituyendo en la ecuación y como despejando de (*)

$y' = \frac{x^2}{1-y^2}$ ⇒ cumple la ec. diferencial ordinaria.

Imagen 4.2.2: Carina reconoce y transforma la función implícita

En cuanto al uso del sistema de representación gráfico, en las actividades de Tipo 2 los estudiantes se enfrentan a la representación de funciones elementales como las lineales, exponenciales, trigonométricas e hiperbólicas. Se observa que algunos estudiantes no muestran rigor a la hora de realizar las representaciones gráficas mencionadas, mostrando bosquejos de las funciones sin ningún detalle (Imagen 4.2.3).

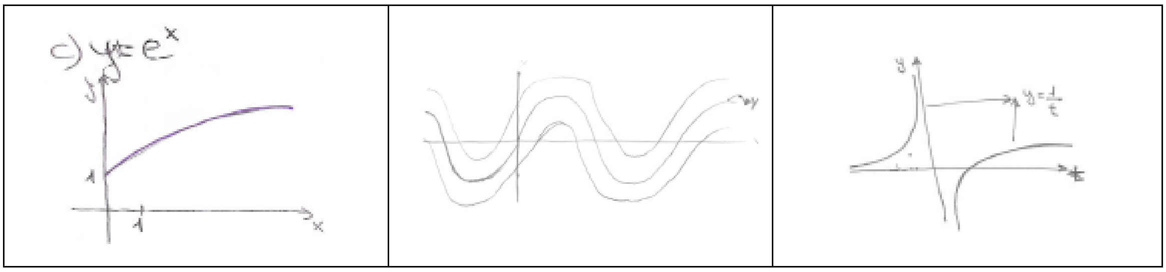


Imagen 4.2.3: Algunas representaciones gráficas de los alumnos

Otros estudiantes comenten errores a la hora de representar las funciones, hasta en el caso de las más elementales, como ocurre con Stella que representa de forma incorrecta la función $\sin x$. Esta alumna también presenta un ejemplo de dificultad en la conversión del registro algebraico al gráfico, cometiendo errores al representar gráficamente las funciones $y = ax + b$ (Imagen 4.2.4).

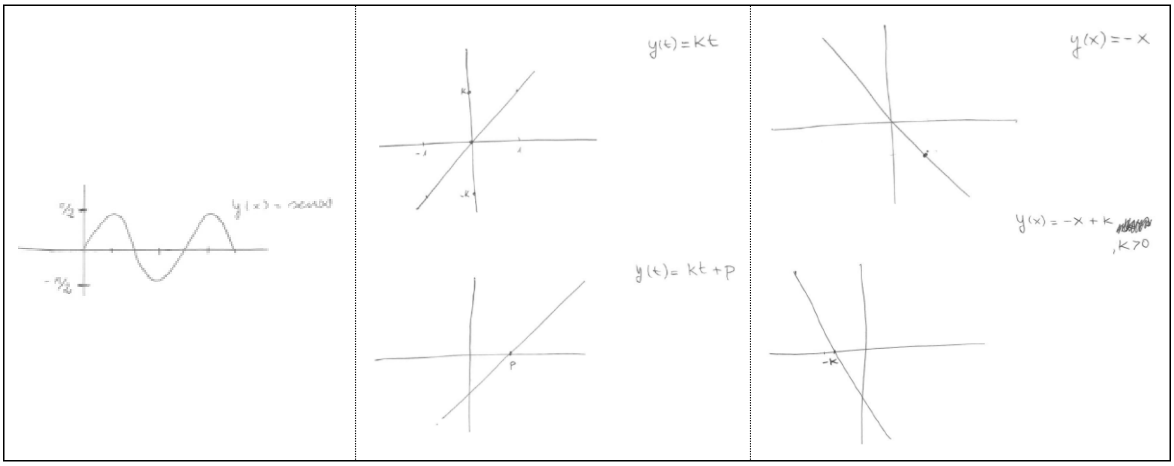


Imagen 4.2.4: Errores en el tratamiento del registro gráfico y la conversión entre registros (Stella)

Otro dato que podría estar indicando una falta de coordinación entre registros es el hecho de que Betty, para resolver la ecuación $\frac{dy}{dx} = \cos x$ se limite a analizar el signo de la derivada, sin establecer alguna conexión con la gráfica correspondiente (Imagen 4.2.5).

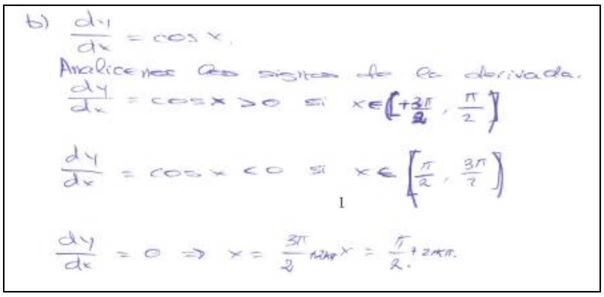


Imagen 4.2.5: Betty no coordina los sistemas de representación gráfico y algebraico

La pregunta P6 del cuestionario, que también fue incluida en la entrevista con el objetivo de crear contradicciones en aquellos alumnos que resolvieran de forma incorrecta la integral de la función logarítmica, Jordan muestra un ejemplo de la importancia que tiene la actividad de conversión entre diferentes registros de representación. Jordan resuelve la EDO de esta actividad separando las variables pero, a la hora de integrar la función logarítmica, comete el error de no considerar el valor absoluto del argumento, con lo que esta solución estaría definida únicamente para valores positivos de la variable independiente, en este caso t. El alumno manifiesta a continuación que no sabe representar el campo de direcciones asociado a esta ecuación. Aunque representa una función correspondiente a $t = -1$, no la admite como solución de la EDO.

I: Antes me dijiste que para $t = -1$, el logaritmo no está definido, con lo que no se podía dibujar la solución. Y ahora, con el campo de direcciones, la has dibujado, ¿qué significa eso para ti?
J: [...] Si tuviera solución la ecuación diferencial, sería así *[señala el dibujo]* pero después si el problema es que la solución, digamos, no estuviera definida, pues no la podríamos dibujar.
I: Entonces, eso que dibujaste para $t = -1$, ¿es solución o no es solución de la ecuación diferencial?
J: Yo creo que no
I: ¿Por qué?
J: Porque no verifica esa solución [$y = \ln t + C$]

Otro ejemplo de la falta de coordinación entre registros, y los errores que esto conlleva, lo muestra Jordan, en su resolución de la actividad P8, durante la entrevista. Este alumno representa gráficamente las soluciones que cumplen que $P(0) = 0$ y $P(-2) = 12$, siguiendo el trazo del campo de direcciones (Imagen 4.2.6). Esto le conduce al error de considerar que la función que en el instante inicial vale 0, es creciente, cuando la ecuación diferencial nos dice que se trata de una solución de equilibrio.

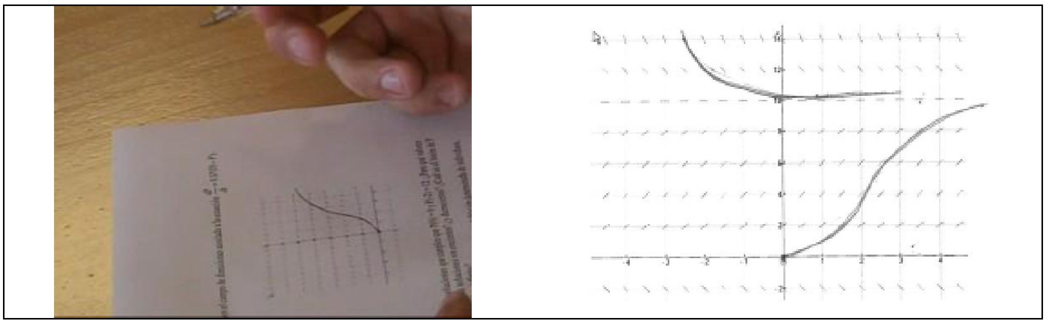


Imagen 4.2.6: Jordan interpreta el campo de direcciones

No obstante, Jordan también es un ejemplo de cómo el uso de diferentes sistemas de representación contribuye al desarrollo de estrategias heurísticas de resolución de problemas. Este alumno intentó resolver la actividad P8, en la que se presenta simultáneamente una EDO y su campo de direcciones asociado, resolviendo la ecuación. Dicha resolución conduce a la integración de una función racional, cuyo algoritmo no recuerda, lo que le hace replantearse la situación, esta vez enfrentándose al campo de direcciones representado. Se observa que el uso del sistema de representación gráfico le permite resolver la actividad correctamente, algo que no hubiera conseguido solamente con el registro algebraico, en el que debía recordar al menos dos algoritmos, el de resolución de la EDO y el de integración de funciones racionales.

Jordan (J): ¿para qué valores positivos de P las soluciones son crecientes? Aquí arriba [*para P*>10] son decrecientes y aquí debajo [*para 0*<*P*<10] crecientes.
J: ¿Cuál es el límite de P cuando t tiende a infinito? Las dos tenderían a 10.

En esta parte del análisis se han mostrado evidencias de que los estudiantes no utilizan representaciones gráficas para explorar significados y relaciones matemáticas y tienen dificultades para establecer relaciones entre distintos tipos de representaciones. Como muestran otras investigaciones (Camacho, Depool & Santos-Trigo, 2009; González-Martín & Camacho, 2004), el uso de representaciones gráficas produce cierto rechazo entre los estudiantes, especialmente cuando está relacionado con un concepto relativamente nuevo para ellos, como es el caso del campo de direcciones asociado a una EDO. En esta investigación, en particular, se ha observado que los estudiantes tienen dificultades para relacionar la monotonía de una función con su derivada y el comportamiento gráfico.

4.3 Los problemas contextualizados.

Las actividades de Tipo 4 utilizadas en el cuestionario C-ED se caracterizan porque tratan sobre la relación de conceptos matemáticos con la resolución de problemas enunciados en un contexto no matemático. En dos de las actividades clasificadas dentro de este tipo los estudiantes necesitan interpretar cierta información dada algebraica o gráficamente como relativa a una población determinada (P7 y P9). La otra pregunta (P13), formulada únicamente a los estudiantes entrevistados, persigue establecer el tipo de problemas que los alumnos consideran que pueden ser resueltos empleando el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria.

Estas actividades producen cierta modificación en la forma en que los estudiantes utilizan los conceptos matemáticos y parece que adquieren otro significado para los alumnos cuando se les presentan bajo un contexto real. En algunos casos sólo influye en la manera en que se presenta la información o se resuelven las ecuaciones, pero en otros produce que se resuelvan estas actividades de forma incorrecta. En la siguiente imagen podemos comparar cómo una estudiante (Edna) resuelve las ecuaciones diferenciales en distintos tipos de actividades (Imagen 4.3.1). Mientras que las ecuaciones de las actividades P1b (Tipo 2) y P6 (Tipo 3) las resuelve planteando problemas de valores iniciales o de Cauchy y empleando fórmulas específicas de resolución, en el problema enunciado con un contexto de población, P7 (Tipo 4), no utiliza este enfoque e incluso resuelve la EDO de forma incorrecta al no considerar la constante de integración.

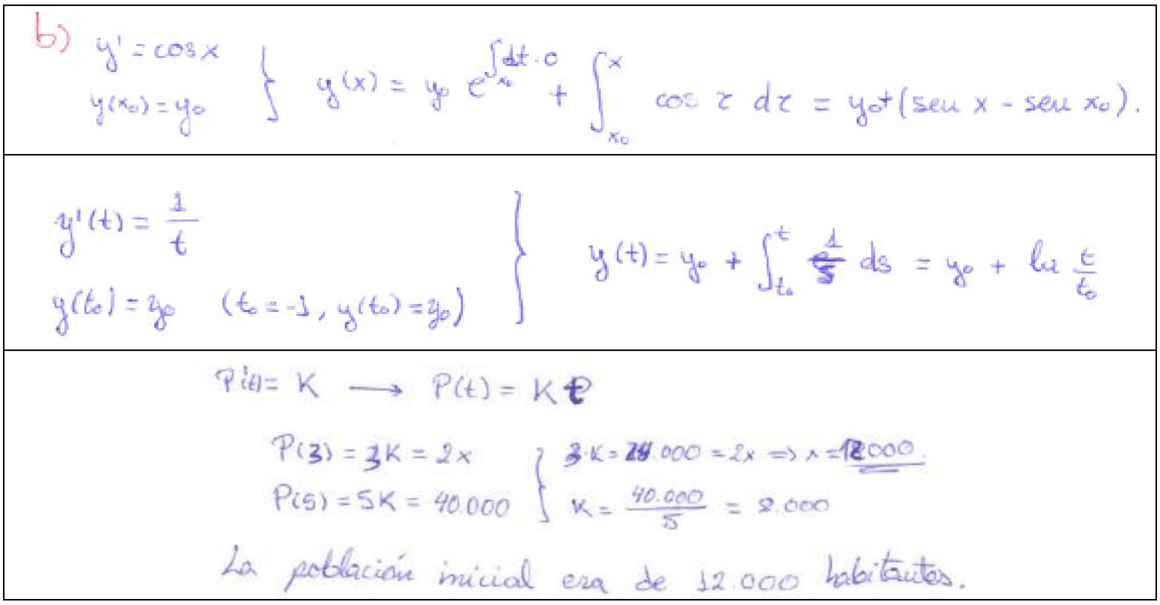


Imagen 4.3.1: *Resolución de Edna a las EDO en P1b, P6 y P7*

Situaciones análogas podemos encontrar al analizar de forma general las respuestas de los cuestionarios de otros estudiantes como Melvin, Wanda y Angie. El caso de Mary es especialmente significativo ya que emplea el método de variables separadas para resolver algunas ecuaciones del cuestionario pero, sin embargo, no resuelve la EDO que aparece en la actividad P7, limitándose a relacionar los datos del enunciado con el concepto de diferencial. El contexto de la pregunta ha influido en el tratamiento que esta alumna ha hecho (Imagen 4.3.2). Mary no responde a P9. Esta pregunta se basa en la resolución de la actividad P8 (Tipo 3) lo que puede haber influido en el hecho de que Mary no contestara puesto que, para resolver P8 optó por el método algebraico que le condujo a una expresión que no le permite responder rápidamente a ninguna de las dos actividades, ni a P8 ni a P9, ya que para ello debía estudiar la monotonía de la función solución de la EDO (Imagen 4.3.2). La elección del sistema de representación influye claramente en la resolución de la actividad P8 y eso se traduce en las respuestas a la actividad P9.

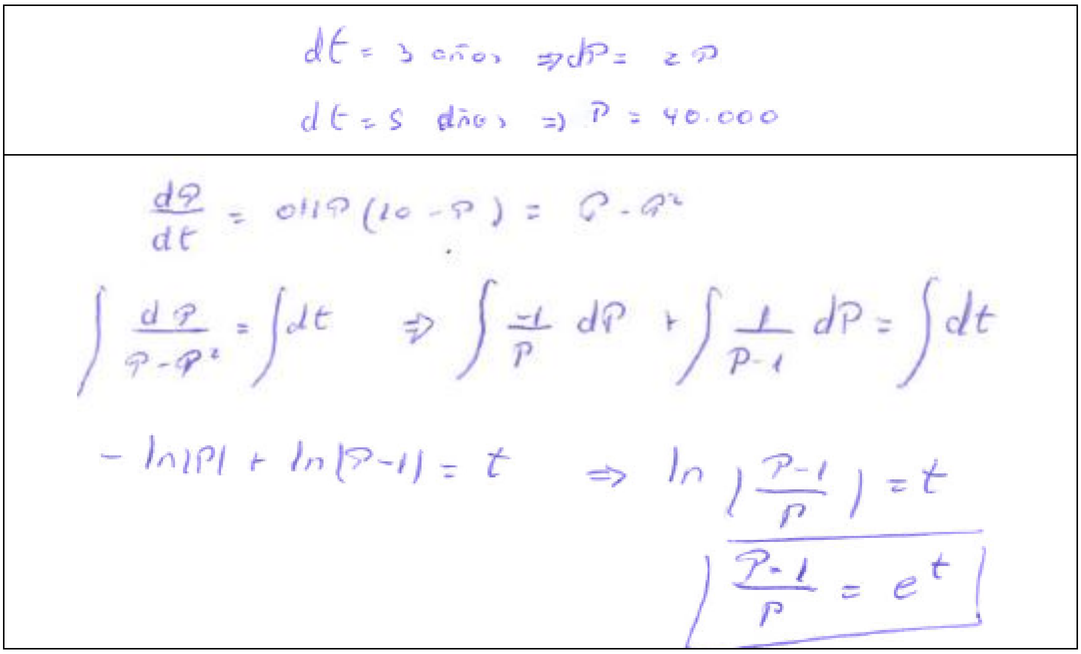


Imagen 4.3.2: *Respuesta de Mary a P7 y P8*

Algo análogo podríamos decir de Laure que, aunque no utilizó en ningún momento la separación de variables para resolver ecuaciones diferenciales, obtuvo soluciones particulares de las ecuaciones considerando la integración como operación inversa de la derivación. La actividad P7, sin embargo, la resuelve empleando una regla de tres (Imagen 4.3.3). El razonamiento proporcional está tan arraigado en la cognición de los estudiantes que son incapaces, en ocasiones, de distinguir en qué tipo de problemas resulta útil, mostrando así un desarrollo insuficiente de la competencia estratégica, elemento fundamental para la resolución de problemas (Kilpatrick et al., 2009).

La diferencia entre Mary y Laure es que la última considera resuelta la actividad P7 y la escasez de estrategias metacognitivas que la lleven a comprobar la solución que ha obtenido hace que no se plantee otra posible resolución. Para ella el problema está resuelto y bien resuelto. En el caso de Mary, no llega a resolverlo, lo que refleja que no sabe cómo relacionarlo con la ecuación diferencial que le da el enunciado.

5 años ⟶ 40.000

3 años ⟶ 2P

$\frac{3 \cdot 40000}{5} = 24000 = 2P \Rightarrow P = 12.000$ habitantes

Imagen 4.3.3: Respuesta errónea de Laure a P7

La tercera parte de los estudiantes que participaron en esta fase de la investigación no respondieron a las actividades del cuestionario cuyo enunciado presentaba un contexto real (Tipo 4), ni siquiera lo plantearon, aún cuando se les proporcionaba la EDO que modelaba la situación. Todos estos estudiantes, además, habían resuelto la actividad P1 en la que aparecen ecuaciones análogas a la de P7, lo que nos hace suponer que la razón por la que no resuelven esta actividad es el contexto en que se presenta y no la ecuación diferencial que deben resolver. Stella es una de las estudiantes que no contestó a ninguna de las actividades de Tipo 4 durante el cuestionario. En la entrevista pudimos observar que esta alumna tiene dificultades para relacionar información dada en términos matemáticos con la expresada en otros contextos, lo que constituye la base de las actividades que estamos considerando. Stella, durante la entrevista, manifiesta explícitamente que no sabe cómo interpretar la información de tipo matemático en términos de un contexto relacionado con la población.

Stella: [...] Entiendo el problema, pero no sé cómo escribirlo.
Investigador: ¿Qué estás pensando?
Stella: En cómo traducir esto matemáticamente [señala las condiciones dadas en el enunciado del problema]. Es que se supone que la ecuación diferencial define el crecimiento de la población. Uhmmm... a ver, yo entiendo como que... a ver cómo te digo... como cuando estábamos en el colegio, si tuviéramos el tiempo inicial y tenemos en principio x poblaciones, entonces, si le sumamos 3 años al tiempo, pues se supone que la población es 2x y, si le sumamos 5 años al tiempo, pues se supone que será igual a 40.000 habitantes, pero vamos, ahora cómo lo relaciono yo con la ecuación diferencial...
Investigador: ¿No sabes cómo utilizar la ecuación diferencial?
Stella: Me parece como que la ecuación dice lo que crece pero...
Investigador: ¿Qué necesitas saber para aplicar todo lo que dijiste de pasados tres años y cinco años?, ¿qué necesitarías para utilizar esas condiciones que te da el problema?
Stella: No sé.
Investigador: La dejamos un poquito y después la retomamos.

Inicialmente la dificultad la tiene con el uso de la ecuación diferencial en la actividad P7, obstáculo este que queda salvado cuando se le presentan simultáneamente las actividades P1, P7 y P10 en las que las ecuaciones utilizadas son del mismo tipo. En este momento Stella resuelve la ecuación diferencial que modela la situación en la actividad P7, pero no establece la relación entre la solución obtenida y los datos de la actividad.

Investigador: ¿Te parece que los tres son prácticamente el mismo problema? [P1, P7 y P10]
Stella: Si
Investigador: ¿Sabrías resolver ahora la pregunta tres? [P7]
Stella: La pregunta tres... Pues va a ser que no.
Investigador: ¿Por qué?
Stella: [...] Porque es que sigo sin saber relacionarlo. Yo puedo resolver la ecuación diferencial y pondría que $P(t) = k \cdot t$, ¿o $k \cdot t + C$?, pues ya no sé. Pero bueno, que en cualquier caso, yo me pregunto, si la población se doblara en tres años, ¿eso qué quiere decir?, ¿se supone que eso se rige por esta ecuación?, ¿se supone que si yo pongo t igual 3, esto es 2 por 3?, ¿o se supone que es k por 2 por 3? O sea, se supone que P(3) es igual a 6k y después, en el otro caso, P(5) igual a 5..., ¿se supone que pongo aquí 5k igual a 40000?, y después ¿qué hago?, ¿saco k?, pero k ¿qué es? Es que no sé.
Investigador: ¿Para ti qué significa esa expresión que escribiste ahí, $P(t) = k \cdot t$?
Stella: Pues significaría... Bueno, pues, significaría que si pongo... un tiempo concreto... ¡Ay!, ¡a ver cómo te lo digo!, que sería ¡no sé!

Stella se encuentra una dificultad análoga al intentar contestar a la actividad P9 en la que debe relacionar la información que ella misma ha obtenido, interpretando el campo de direcciones, acerca de la monotonía de las soluciones de la ecuación $\frac{dP}{dt} = 0.1P(10 - P)$ y su comportamiento en el infinito. Al término de la discusión encontramos que Stella no interpreta el significado de la variable dependiente, P, fuera del contexto matemático.

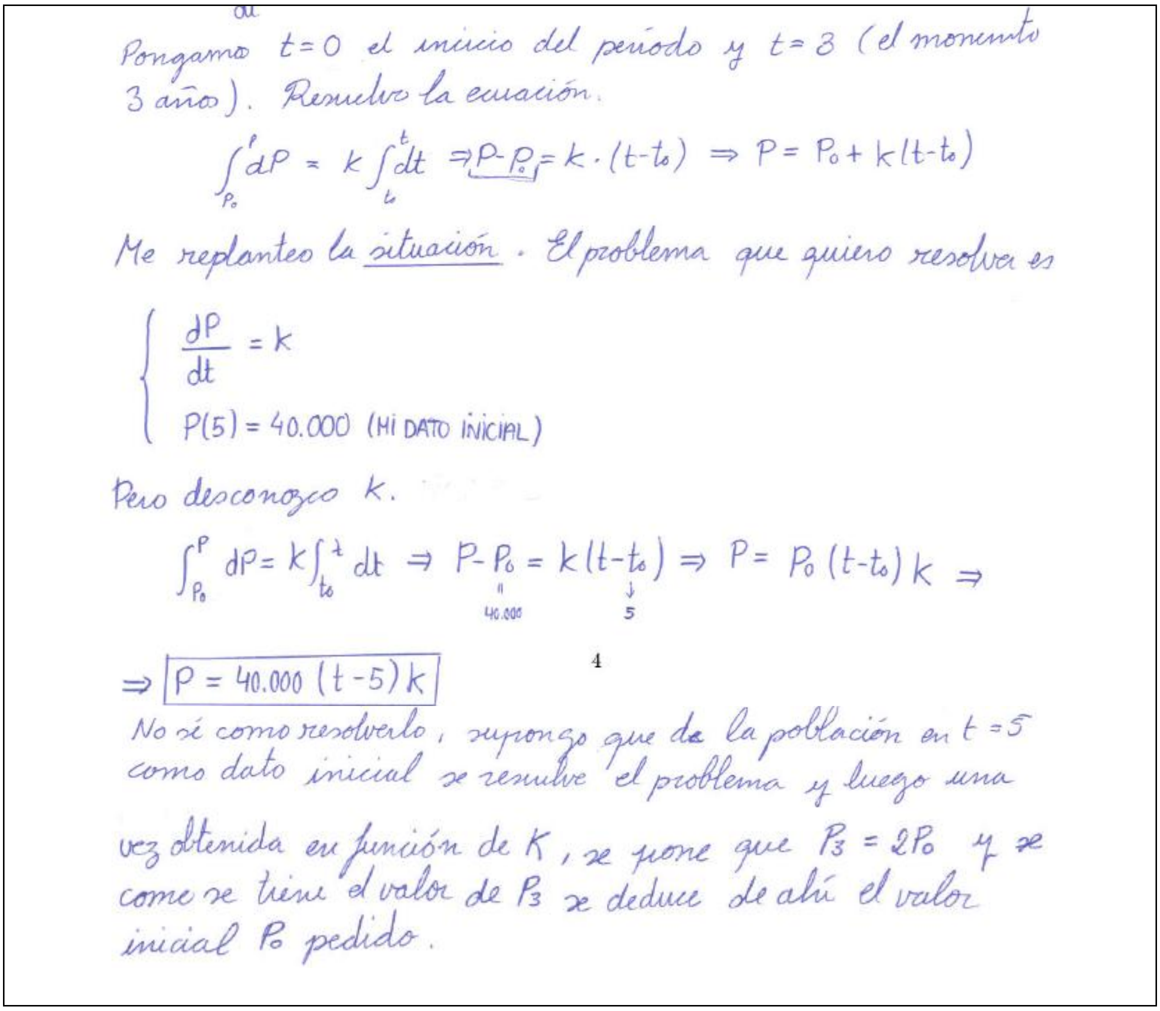
Stella: Pues, según el campo de direcciones, de cero hasta diez las soluciones son crecientes. Y decrecientes, pues, se supone que de diez para arriba y de cero para abajo.
Y, ¿cuál es el límite cuando t tiende a infinito? Uhm... t tiende a infinito [...] Cuando t tiende a más infinito, entonces se va por aquí [señala el eje de abcisas positivo] Pues digo yo que será el diez este... Hay que pensar mucho... Pues yo digo que diez porque fue lo que primero me vino a la cabeza.
Investigador: ¿De dónde sacaste ese diez?
Stella: De aquí, de esta asíntota [cuando P vale diez], de donde vienen las dos direcciones. Aquí las dos vienen a esta.
[...]
Investigador: Y eso, en el contexto de una población, ¿qué significaría?
Stella: Es que no sé, porque, ¿se supone que esto modeliza el crecimiento de una población? [...] Pues, no sé.
Investigador: ¿Ninguno de los apartados, ni el crecimiento ni el límite?
Stella: Es que no sé cómo se puede... es que no lo entiendo.
Investigador: ¿Qué no entiendes?
Stella: Que aquí crezca, que aquí decrezca. No sé decir cómo sería el comportamiento de la población. De cero a diez crece, crece qué. Y de más de diez, decrece y, de menos de cero ¿también decrece?, menos de cero, qué significa.
Investigador: ¿Qué es menos de cero? [...] ¿Qué representa el eje horizontal en ese campo de direcciones?
Stella: El tiempo, ¿no?
Investigador: ¿Y el vertical?
Stella: La P, la ecuación P.
Investigador: ¿Qué ecuación?
Stella: El valor de P. Yo te estoy diciendo, como el eje X y el eje Y, cuando la x es un valor, la y es otro valor, según cómo venga en función de x.

Stella no razona acerca del tipo de problemas que se pueden resolver empleando el concepto de EDO, ni siquiera los relaciona con los problemas planteados en el cuestionario. Considera que este aspecto es algo que debe memorizar a partir de los ejemplos mostrados por el profesor en el aula.

¿En qué problemas aplicados crees que puedes utilizar una EDO para modelizarlo? Señala algunos ejemplos.

Stella: pues yo sabía, pero yo para la memoria soy fatal. Yo sé que nos lo cuentan en clase, pero como nunca vemos aplicaciones de las cosas sino simplemente vemos cómo se resuelven... Yo siempre me pregunto para qué sirven. Las ecuaciones diferenciales sé que sirven para cosas y el profesor nos dijo para qué servían pero yo, sinceramente, no me acuerdo.

El resto de los estudiantes resuelve la ecuación diferencial de la actividad P7, pero algunos tienen dificultades para interpretar los datos que proporciona el enunciado en un lenguaje matemático (Anexo B.1.22, Tabla 4). Wanda es una de las estudiantes que más preguntas del cuestionario resuelve de forma correcta, una de las que no resuelve bien es P7, y en sus comentarios se refleja claramente que la dificultad que tiene es al trasladar la información que proporciona el enunciado del problema al lenguaje matemático. Esta alumna identifica los datos del problema y resuelve correctamente la EDO, pero no encuentra la manera de utilizar los datos de forma conjunta con la solución obtenida (Imagen 4.3.4).


Pongamo t=0 el inicio del periodo y t=3 (el momento 3 años). Resuelvo la ecuación.

$$\int_{P_0}^{P} dP = k\int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow P-P_0 = k\cdot(t-t_0) \Rightarrow P = P_0 + k(t-t_0)$$

Me replanteo la situación. El problema que quiero resolver es

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = k \\ P(5) = 40.000 \text{ (MI DATO INICIAL)} \end{cases}$$

Pero desconozco k.

$$\int_{P_0}^{P} dP = k\int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow P-\underset{40.000}{P_0} = k(t-\underset{5}{t_0}) \Rightarrow P = P_0\,(t-t_0)\,k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P = 40.000\,(t-5)\,k}$$

No sé como resolverlo, supongo que da la población en t=5 como dato inicial se resuelve el problema y luego una vez obtenida en función de K, se pone que $P_3 = 2P_0$ y se como se tiene el valor de P_3 se deduce de ahí el valor inicial P_0 pedido.

Imagen 4.3.4: Resolución de Wanda a P7, en el cuestionario.

En la entrevista esta alumna manifiesta que los problemas con enunciados de este tipo le resultan muy complicados, mostrando cierto rechazo a los mismos. Finalmente, en la entrevista, lo resuelve de forma correcta. La actividad P9 no parece provocarle este tipo de reacción lo que puede deberse a que está basada en un problema anterior cuyo enunciado se restringe al contexto matemático, terreno en el que Wanda ha mostrado su competencia. Para Wanda resulta más dificultoso el tránsito de un contexto no matemático a un contexto matemático que al revés, la interpretación de elementos matemáticos en un contexto no matemático. La diferencia entre esta alumna y Stella radica en que, esta última, no consigue establecer ninguna relación entre el contexto matemático y cualquier otro contexto.

Wanda: ¡Estos no son lo mío! Me cuesta un montón plantearlos. En la mayoría de las asignaturas necesito un montón de práctica para poder asimilar los problemas, es decir, para ver un problema y decir ¡ah, este es de esto! No soy una persona de idea feliz. A lo mejor no con la teoría que me enseñan en clase. A lo mejor hasta sabiendo poco soy más capaz de resolver problemas que sabiendo mucho, porque sabiendo mucho le buscas las cuatro patas al gato y ...

[La estudiante resuelve la actividad correctamente]

Investigador: ¿Cuál crees que era el problema que tenías con ese ejercicio al principio?
Wanda: A lo mejor es que no supe aprovechar el dato este. Y ves, lo que te estaba diciendo antes, a lo mejor sin saber mucho del asunto, pues resulta que eres capaz de verlo. Y a lo mejor ni siquiera utilizando ecuaciones diferenciales sino, por tus propios medios, sacar la solución, no teniendo conocimientos de ello.

De los diez estudiantes que interpretan de forma correcta, en términos matemáticos, la información dada en la actividad P7, sólo uno resuelve correctamente la actividad P9, que tiene la dificultad añadida de que, previamente, hay que interpretar el campo de direcciones asociado a una EDO o estudiar la monotonía de la función solución de dicha ecuación. Hasta el momento hemos constatado que hay alumnos para los que los conceptos matemáticos conforman un espacio cerrado e independiente, en el que no se establecen relaciones con otros contextos. Este es el caso de Stella. Por otra parte, hay alumnos, como Wanda, que, aunque reconocen la existencia de las relaciones entre diferentes contextos, tienen dificultades para transformar información al contexto matemático, llegando incluso a sentir cierto rechazo hacia aquellas actividades en las que se consideren estos aspectos. Nos encontramos finalmente con aquellos estudiantes que no tienen dificultades para realizar transformaciones entre información presentada en diversos contextos, siempre que no existan otros elementos, dentro de la actividad a resolver, que les impidan hacerlo. Este es el caso de Jordan, que resolvió de forma correcta la actividad P7 pero que, en el cuestionario, ni siquiera abordó P9. La causa de esto es la dependencia de esta actividad con el problema P8, centrado en el análisis de un campo de direcciones. En el cuestionario de Jordan se puede observar que no realiza ninguna de las actividades que involucran este concepto y, en la entrevista, comprobamos que es un concepto que no domina, como ya hemos señalado anteriormente. No obstante, en la entrevista se anima a interpretar el campo de direcciones que se le presenta en P8 al no conseguir resolver la EDO de forma algebraica. Acto seguido responde a las preguntas formuladas en P9.

Jordan: Si la población estuviese en un principio en 0 individuos seguiría creciendo hasta que llegara a un máximo de 10, bueno, se va acercando todos los años a 10, pero no llegaría. Y, si ya estuviese por encima de 10, pues lo que haría, iría bajando hasta acercarse

De Jordan podemos decir que enfoca las actividades de tipo 4 desde un punto de vista puramente matemático, aunque presenta los resultados en términos del contexto en que se enuncia la actividad. Un reflejo de esto lo podemos ver en el fragmento de entrevista trascrito anteriormente en el que, en la actividad P9, indica que aumenta el número de individuos en una población en la que inicialmente no había ningún sujeto. Esta respuesta es la traducción directa de la representación gráfica que el estudiante muestra para las soluciones de la ecuación $\frac{dP}{dt} = 0.1P(10-P)$ con dato inicial $P(0)=0$, fruto de la falta de coordinación entre los sistemas de representación gráfico y algebraico (Imagen 4.3.5). En este caso, el evaluar su respuesta a la actividad P9 le podía haber llevado a corregir su error en P8, sin embargo, la falta de estrategias metacognitivas hace que se mantenga la respuesta matemática errónea y que ese error se extienda al contexto de la población.

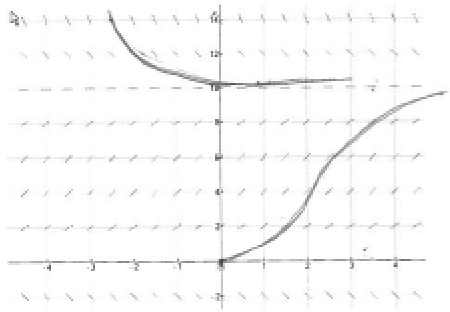


Imagen 4.3.5: Parte de la resolución de Jordan a la actividad P8

En la resolución de este tipo de actividades, de los cinco elementos que se han considerado en el Marco Conceptual que conforman el aprendizaje de las matemáticas, el que mayor presencia tiene, además de la comprensión conceptual, es la competencia estratégica. La tercera parte de los estudiantes que participaron en esta investigación no han desarrollado esta competencia, lo que se deduce del hecho de que, habiendo mostrado conocer algunos procesos para resolver EDO, no los utilizan para abordar estas actividades, sin mostrar siquiera indicios de haber reflexionado al respecto.

Por otra parte, se ha observado que el contexto en que se plantea la pregunta ha influido en la forma en que los estudiantes resuelven estas actividades, pues hay alumnos que, claramente, utilizan procesos matemáticos diferentes para resolver EDO análogas que se han presentado en distintos contextos. La parte en la que más estudiantes mostraron dificultad fue en los procesos de representación de información dada en un contexto no matemático a los sistemas algebraico y gráfico.

4.4 A modo de conclusión

Los resultados de esta investigación muestran que con una enseñanza de las EDO basada en la clasificación y resolución algebraica de las mismas, los estudiantes puede que consigan disponer de los recursos conceptuales necesarios para resolver los problemas planteados (derivación, integración, representación gráfica de funciones, propiedades de las funciones y sus derivadas, algoritmos de resolución de ecuaciones diferenciales,...) pero no acceden a ellos ni los utilizan de manera eficiente. Se ha comprobado, además, que la enseñanza de algoritmos supone un aprendizaje que no perdura en el tiempo si este no se refuerza con los razonamientos que producen dicho algoritmo.

Esto hace pensar en la necesidad de que se establezcan condiciones de aprendizaje en las que se ayude a los estudiantes a reflexionar y razonar acerca de los diferentes significados que están asociados a un concepto matemático particular, las relaciones entre ellos y cómo surgen nuevos conceptos a partir de él. En este sentido, es importante que los estudiantes tomen conciencia de los recursos que poseen y de que estos pueden ser utilizados en diferentes tipos de situaciones o problemas.

En este sentido, el simple hecho de introducir el concepto a través de distintos sistemas de representación no garantiza tampoco el éxito en el aprendizaje, como muestran Rasmussen y Kwon (2007, p. 191) que señalan que, en un estudio de casos de una clase de ecuaciones diferenciales, “los estudiantes estaban aprendiendo métodos analíticos, gráficos y numéricos de forma compartimentalizada” y, como consecuencia, no establecían conexiones entre los significados y las propiedades matemáticas asociadas con cada uno de los enfoques.

Kilpatrick et al. (2009) caracterizan los elementos del aprendizaje que hay que activar y desarrollar en los estudiantes: comprensión conceptual, fluidez con los procedimientos, competencia estratégica, razonamiento adaptativo y predisposición productiva. El reto es, entonces, determinar cuál es el ambiente en que debe producirse el aprendizaje para conseguir que los alumnos adquieran estas habilidades y capacidades, además de conocimientos matemáticos, lo que constituye el principal objetivo de la segunda fase de la investigación.

5. Análisis e interpretación de datos: Segunda fase de la investigación.

En este capítulo se analizan los datos recopilados durante la segunda fase de la investigación, utilizando los instrumentos descritos en las secciones 3.3.2 y 3.3.3, de la Metodología de Investigación. En primer lugar se analizan las respuestas de los estudiantes que participaron en esta fase a un cuestionario centrado en el concepto de derivada (sección 5.2). A continuación se realiza un análisis global del desarrollo, en el aula, del Módulo de Enseñanza (sección 5.3). El capítulo finaliza con la descripción de las trayectorias de aprendizaje de cuatro de las parejas (sección 5.4), con el objetivo de profundizar en el análisis global.

5.1 Introducción

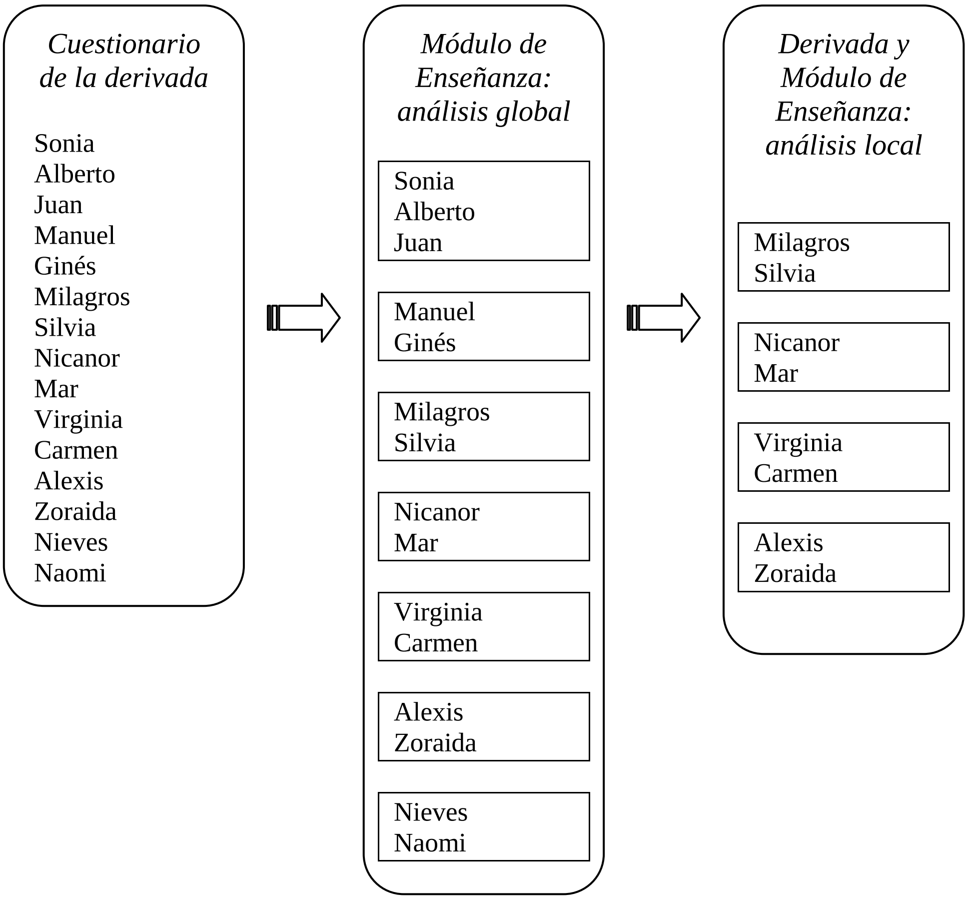
La segunda fase de la investigación tenía como objetivo diseñar y desarrollar en el aula un Módulo de Enseñanza para introducir el concepto de EDO en un ambiente de Resolución de Problemas y analizar los aspectos del pensamiento matemático y los procesos relacionados con la disciplina que los estudiantes muestran durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza. Esto es, además del diseño del Módulo de Enseñanza para la introducción del concepto de EDO en un primer curso de la licenciatura en Química, se trata de observar en qué medida las actividades propuestas en dicho Módulo promueven el desarrollo de las habilidades y capacidades cognitivas de los estudiantes, tal y como se describe en el Marco Conceptual de la investigación (sección 2.2): la comprensión conceptual, la fluidez en el uso de procedimientos matemáticos, las formas de razonamiento, el uso de heurísticas y las estrategias de control de su propio proceso de resolución. También se observa el papel que ha desempeñado la interacción de los estudiantes, entre ellos y con la calculadora Voyage™200, en el proceso de aprendizaje y en el desarrollo del Módulo de Enseñanza.

El análisis e interpretación que se hará, viene dirigido por la intención de dar respuesta a las preguntas $\mathcal{P}2$, $\mathcal{P}3$ y $\mathcal{P}4$ de investigación. Los instrumentos utilizados, tal y como se describen en las secciones 3.3.2 y 3.3.3, fueron: las respuestas de cada uno de los estudiantes al cuestionario C-D, los documentos escritos por cada grupo durante la resolución de los tres problemas del Módulo de Enseñanza, las trascripciones de las intervenciones de los estudiantes durante las 10 sesiones dedicadas al Módulo de Enseñanza y el documento escrito y las trascripciones de las entrevistas a seis de los alumnos[36] (tabla 3.3.5).

Se pueden distinguir tres etapas diferentes en el procedimiento seguido para analizar la información obtenida a partir de todos los instrumentos mencionados anteriormente

[36] Todo este material se encuentra en el CD adjunto (anexo B.2). Aunque no se incluyen en los anexos, también se recopilaron imágenes de las acciones de los estudiantes en la Voyage 200.

(esquema 3.3.9). En el siguiente esquema (5.1.1) se muestran los pseudónimos de los alumnos participantes.



Esquema 5.1.1: Tres etapas del análisis de la segunda fase de la investigación

En primer lugar se analizaron las respuestas del grupo de estudiantes al cuestionario de la derivada. A partir de este análisis se establecieron una serie de perfiles o tipologías de comportamiento. Posteriormente se analizó el trabajo de los estudiantes durante el desarrollo en el aula de los problemas que conforman el Módulo de Enseñanza. En esta parte del análisis se describen los conceptos matemáticos y los procesos cognitivos asociados al Pensamiento Matemático Avanzado (representar, conceptualizar, abstraer, formalizar, analizar, categorizar, conjeturar, generalizar, sintetizar, etc.) que los estudiantes (agrupados en seis parejas y un grupo de tres) muestran en la resolución de cada uno de los tres problemas que conforman el Módulo. Se contemplan así varios de los elementos relacionados con la comprensión que han quedado establecidos en el Marco Conceptual de la Investigación. Se ha denominado a este análisis, análisis global.

En tercer lugar se presenta un análisis más detallado del proceso de resolución de los problemas del Módulo por parte de cuatro de las parejas participantes: Milagros y Silvia, Nicanor y Mar, Virginia y Carmen y Alexis y Zoraida. Estas parejas fueron seleccionadas teniendo en cuenta:

- El perfil de actuación mostrado por cada uno de los miembros de las mismas en el cuestionario de la derivada.

- El desarrollo del Módulo de Enseñanza
- La información que cada una de las parejas ha aportado.

Este análisis, denominado análisis local, sirve para mostrar ejemplos de diferentes aspectos cognitivos y procedimentales de las respuestas de los estudiantes, así como las habilidades y capacidades mostradas en su desarrollo. Tal y como señala Schoenfeld (1992), después de hacer una revisión de numerosas investigaciones, estos tres componentes ofrecen una descripción del conocimiento de los estudiantes

> ...hay un acuerdo general sobre la importancia de cinco aspectos de la cognición: el conocimiento base, las estrategias de resolución de problemas, el monitoreo y control, las creencias y afectos y la práctica. (p. 348)

5.2 El concepto de Derivada

En el aprendizaje del concepto de EDO, el concepto de derivada de una función se puede considerar como parte de la red de significados asociados al propio concepto (Camacho-Machín et al., 2010) y por tanto la concepción que los estudiantes tengan de la derivada influirá en el desarrollo posterior del Módulo de Enseñanza, en el que se introduce el concepto de EDO a partir de su relación con este concepto.

Se ha indicado con anterioridad que una de las bases sobre la que se construye el Módulo de Enseñanza es la consideración de que los conceptos matemáticos que forman parte de la mente de un individuo no deben constituirse como entes aislados sino como una red de significados interrelacionados. De los componentes de esa red depende el significado que el individuo de al concepto y el uso que haga del mismo en la resolución de problemas.

En el cuestionario utilizado (anexo A.2.D) para analizar el concepto de derivada se tuvieron en mente los distintos significados asociados al concepto de derivada de una función (Tall, 2007; Thurston, 1994). El análisis de las respuestas de los estudiantes que participaron en la investigación a las preguntas de este cuestionario permitirá establecer parte del catálogo de recursos de que dispone cada uno de ellos, previamente al desarrollo del Módulo de Enseñanza, incluyendo qué significados asocian al concepto, qué relaciones establecen entre esos significados y de qué manera los utilizan para resolver problemas.

Con el fin de facilitar el seguimiento de este análisis y la comprobación de la información proporcionada se incluye, en el anexo B.2 (en el CD), una copia de las respuestas de los alumnos al cuestionario de la derivada y una tabla en la que se describen dichas respuestas y se hace un breve resumen de los significados de la derivada a los que hicieron referencia en algún momento.

El proceso de análisis de las respuestas de los estudiantes a las preguntas de este cuestionario se realiza al objeto de detectar los diferentes significados que asocian al concepto de derivada. Este análisis concluye con la descripción de cuatro perfiles de actuación general (o tipologías) de los estudiantes que, unido con el análisis global, que se presenta en la sección 5.3, permite seleccionar a las cuatro parejas de alumnos cuya trayectoria de aprendizaje se presenta en la sección 5.4 de este capítulo.

En la primera pregunta de este cuestionario se pide a los alumnos derivar dos funciones, $f(x)=(-x^3+3x)e^{\frac{x^2-3}{2}}$ y $g(t)=\frac{\ln(2t-5)}{2t-5}$, para lo que tienen que emplear distintas reglas de derivación (del producto, de un cociente, regla de la cadena,…). Una vez aplicadas dichas reglas, el estudiante tiene la autonomía de decidir si simplifica o no la expresión obtenida. Para realizar correctamente este tipo de actividades únicamente se requiere considerar la derivada como una serie de procedimientos o, como señala Thurston (1994), como un símbolo.

El análisis de las respuestas de los alumnos (anexo B.2.8) refleja que cinco estudiantes (Alberto, Manuel, Ginés, Mar y Zoraida) cometen algún error al aplicar alguna de las reglas de derivación. En el caso de Alberto, no deriva correctamente el cociente de funciones; Manuel, Ginés y Mar se equivocan en la derivación de la función exponencial, no aplicando la regla de la cadena; y Zoraida comete algunos errores al derivar funciones polinómicas y al aplicar la regla de la cadena (Imagen 5.2.1).

$$g'(t)=\frac{\frac{2}{2t-5}-2}{(2t-5)^2}$$

Error en la derivación de un cociente (Alberto)

$$f'(x)=(-3x^2+3)e^{\frac{x^2-3}{2}}+(-x^3+3x)\cdot\frac{(x^2-3)}{2}e^{\frac{x^2-3}{2}}$$

$$f'(x)=e^{\frac{x^2-3}{2}}\left[-3x^2+3+\frac{(x^2-3)}{2}(-x^3+3x)\right]$$

Error al aplicar la regla de la cadena (Mar)

$$f'(x)=(-3x+3)e^{\frac{x^2-3}{2}}+(-x+3x)e^{\frac{x^2-3}{2}}\frac{2x}{2}$$

$$g'(t)=\frac{\frac{1}{2t-5}(2t-5)-2\ln(2t-5)}{(2t-5)^2}$$

Error al derivar polinomios y al aplicar la regla de la cadena (Zoraida)

Imagen 5.2.1: Errores en el proceso de derivación

Los otros 10 alumnos aplican correctamente las reglas de derivación que se requieren en esta primera pregunta del cuestionario, aunque dos de ellos (Sonia y Juan) derivan la expresión $\frac{x^2-3}{2}$ aplicando la regla para un cociente, cuando su cálculo puede realizarse considerándola como el producto de una constante por un polinomio.

Se detectaron otros siete significados diferentes que los alumnos asociaban al concepto de derivada, además del simbólico, que ha sido expuesto en primer lugar. Esos significados son los siguientes:

- *Definición formal:* siete estudiantes asocian la derivada con su definición formal, como el límite del cociente incremental, $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.
- *Pendiente:* once alumnos relacionan la derivada de una función con la pendiente de una recta. Lo correcto es que esa recta sea tangente a la curva en el punto en que se calcula la derivada.
- *Monotonía:* diez alumnos relacionan la descripción de la monotonía de una función con su derivada. Este significado está estrechamente relacionado con el anterior, aunque ninguno de los estudiantes muestra signos de establecer esta conexión.
- *Puntos críticos:* normalmente este aspecto se contempla junto con el estudio de la monotonía de una función. Sin embargo, Alexis, en su respuesta al cuestionario, no muestra indicios de relacionar la derivada con el estudio de la monotonía de una función pero sí establece la relación con los máximos y mínimos.
- *Aumento-Disminución:* sólo un estudiante, Manuel, utiliza la derivada para indicar aumento. Aunque este significado también está íntimamente ligado a los dos anteriores, las respuestas de los alumnos reflejan que no establecen relación entre enunciados que contemplen este aspecto de tres formas diferentes: calcular la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto (pregunta 5), describir la derivada de una función dada en forma gráfica (pregunta 6) e indicar que una cantidad aumenta a velocidad constante (pregunta 11).
- *Variación:* seis alumnos manifiestan que la derivada indica la variación de una función o de una cantidad, con respecto a una variable, o con respecto al tiempo.
- *Velocidad:* este significado también está íntimamente relacionado con el anterior, pero, al igual que ocurría con la pendiente de la recta tangente a la curva y la monotonía de la función, no todos los estudiantes llegan a establecer la relación, como se verá más adelante. Ocho de los 15 alumnos reconocen que la derivada puede utilizarse para indicar velocidad.

Hay que tener en cuenta que el hecho de que se reconozca un uso determinado de la derivada de una función no necesariamente implica que se utilice correctamente; un estudiante puede reconocer el uso de la derivada como un elemento para describir la monotonía de una función, pero no hacerlo correctamente, por ejemplo, porque no recuerde el criterio de la primera derivada que se utiliza para ello y no lo relaciona con la pendiente de la recta tangente a la función en un punto.

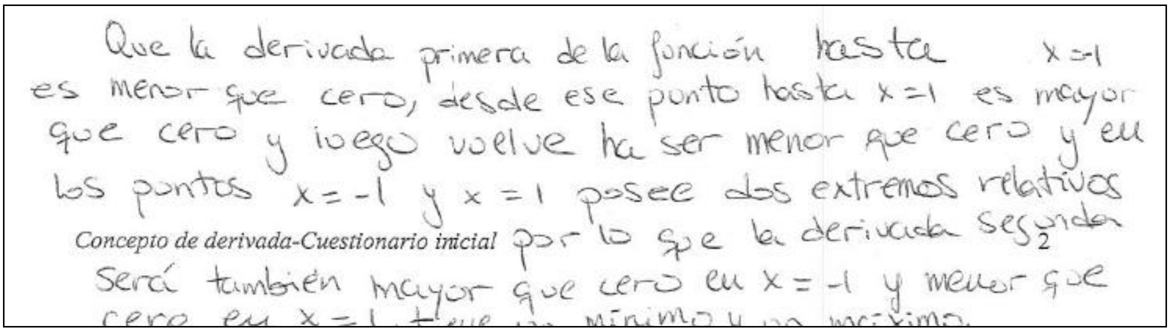
Como ya se ha visto anteriormente, los 15 estudiantes que respondieron a este cuestionario reconocen el uso de la derivada como procedimiento algebraico, a lo que Thurston (1994) se refiere como considerar la derivada como un símbolo. Agruparemos a los estudiantes haciendo uso de los otros siete significados de la derivada que se han observado en sus respuestas (tabla 5.2.2). En un primer grupo se sitúan los alumnos que no reconocen otro uso de la derivada que no sea la aplicación de las reglas de derivación o que sólo reconozcan un significado diferente al simbólico. En el segundo grupo se ubica a aquellos que identifican dos o tres de los significados de la derivada señalados anteriormente, además del simbólico, y finalmente, un tercer grupo lo forman aquellos que reconocen más de tres usos diferentes del concepto de derivada, además del simbólico. A continuación del nombre de cada estudiante, entre paréntesis, se enumeran los significados que cada uno de ellos han evocado en algún momento.

	Significados asociados a la derivada (además del simbólico)	*Estudiantes*
Grupo 1 (3 alumnos)	Ninguno	Sonia
	Uno	Nieves (monotonía) Silvia (pendiente)
Grupo 2 (7 alumnos)	Dos	Juan (pendiente, velocidad) Carmen (definición formal, monotonía) Virginia (definición formal, monotonía)
	Tres	Alberto (pendiente, monotonía, variación) Ginés (definición formal, pendiente, velocidad) Zoraida (pendiente, monotonía, velocidad) Naomi (pendiente, monotonía, velocidad)
Grupo 3 (5 alumnos)	Cuatro	Mar (definición formal, pendiente, monotonía, velocidad)
	Cinco	Manuel (pendiente, monotonía, variación, aumento-disminución, velocidad) Milagros (definición formal, pendiente, monotonía, variación, velocidad) Nicanor (definición formal, pendiente, monotonía, variación, velocidad) Alexis (definición formal, pendiente, puntos críticos, variación, velocidad)

Tabla 5.2.2: Clasificación de los alumnos según los significados asociados a la derivada

En la tabla 5.2.2 se puede observar que, a pesar de haber recibido formación relativa al concepto de derivada, incluso en varias variables, el conjunto de significados asociados a dicho concepto no es homogéneo para todos los estudiantes, encontrándonos con casos muy dispares como los del grupo 1 en comparación con los del grupo 3, aunque el mayor número de estudiantes se concentra en el segundo grupo, con el reconocimiento de dos o tres significados de la derivada, además de como procedimiento algebraico. No obstante, no hay que olvidar que el hecho de reconocer determinado uso de la derivada no significa que dicho significado se utilice en la resolución de problemas y, en caso de hacerlo, que sea de forma correcta.

El significado de pendiente de la recta tangente a la función en un punto es el que ha mostrado un número mayor de estudiantes (once alumnos), seguido del que considera la derivada para describir la monotonía de una función (diez estudiantes). Aunque estos dos significados de la derivada están íntimamente relacionados, varios estudiantes muestran indicios de no establecer conexión alguna entre ellos. Por ejemplo, Carmen (grupo 2) describe la derivada de la función presentada en la pregunta 6 basándose en la monotonía de su representación gráfica, utilizando de forma correcta el criterio de la primera derivada (Imagen 5.2.3); sin embargo no responde a la pregunta 5, donde debe calcular la pendiente de la recta tangente a una función.



Que la derivada primera de la función hasta x=-1 es menor que cero, desde ese punto hasta x=1 es mayor que cero y luego vuelve ha ser menor que cero y en los puntos x=-1 y x=1 posee dos extremos relativos por lo que la derivada segunda será también mayor que cero en x=-1 y menor que cero en x=1, tiene un mínimo y un máximo.

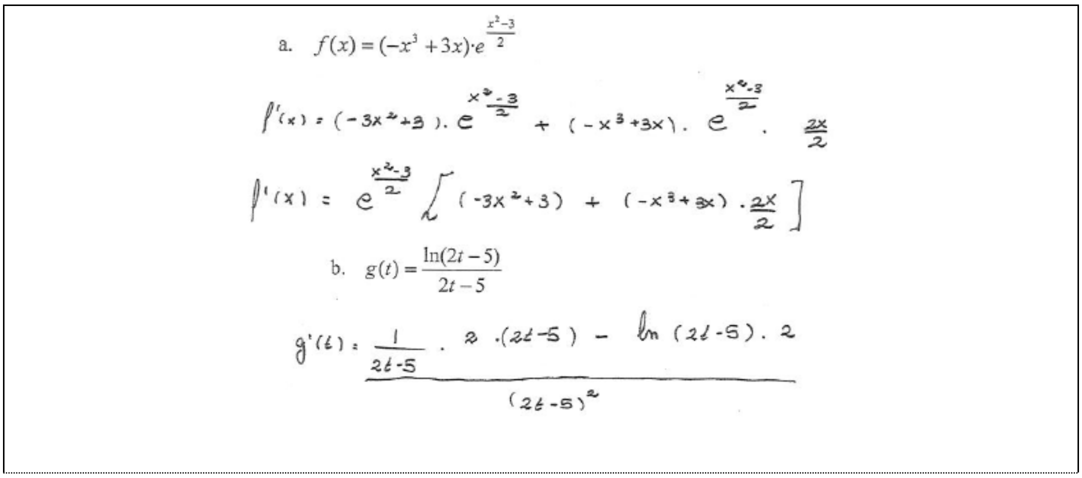
Concepto de derivada-Cuestionario inicial 2

Imagen 5.2.3: Respuesta de Carmen a la pregunta 6

Con Zoraida (grupo 3) ocurre al contrario: calcula correctamente la pendiente de la recta tangente a una función (pregunta 5) pero su respuesta a la pregunta 6, “La derivada en el mínimo será decreciente a su izquierda y creciente a su derecha” (anexo B.2.4.DZ, en el CD adjunto), parece reflejar que confunde la función con su derivada.

Sonia (grupo 1) es la única de los 15 estudiantes cuyas respuestas no reflejan la asociación del concepto de derivada con otra cosa que no sea la aplicación de las reglas de derivación. Incluso cuando se le pide explicar el significado del concepto (pregunta 2) e indicar un problema donde se pueda utilizar (pregunta 3), las respuestas de esta alumna están relacionadas con el cálculo de las derivadas sucesivas de la función, empleando las reglas de derivación. Esta alumna manifiesta que “la derivada es una función obtenida mediante una serie de procesos” que se emplea, por ejemplo, “en los problemas [relacionados] con el desarrollo de Taylor” (anexo B.2.7.DS, en el CD adjunto).

El resto de las alumnas que se encuentran en el grupo 1, aunque reconocen otro uso del concepto de derivada, no lo utilizan correctamente en todos los casos posibles. Nieves indica que la derivada puede utilizarse en “problemas de crecimiento y decrecimiento” pero no responde correctamente a la pregunta 6, lo que indica que quizás no recuerde el criterio de la primera derivada para describir la monotonía de una función; mientras que Silvia utiliza correctamente todas las reglas de derivación necesarias para resolver la pregunta 1, mostrando así su fluidez a la hora de utilizar los procesos de derivación, y resuelve correctamente la pregunta 5, utilizando la relación entre la derivada y la pendiente de la recta tangente a la función en un punto. Sin embargo no emplea este uso de la derivada para responder a las preguntas 4 y 6 (Imagen 5.2.4).



a. $f(x) = (-x^3+3x)\cdot e^{\frac{x^2-3}{2}}$

$f'(x) = (-3x^2+3)\cdot e^{\frac{x^2-3}{2}} + (-x^3+3x)\cdot e^{\frac{x^2-3}{2}} \cdot \frac{2x}{2}$

$f'(x) = e^{\frac{x^2-3}{2}} \left[(-3x^2+3) + (-x^3+3x)\cdot\frac{2x}{2} \right]$

b. $g(t) = \frac{\ln(2t-5)}{2t-5}$

$g'(t) = \frac{\frac{1}{2t-5}\cdot 2\cdot(2t-5) - \ln(2t-5)\cdot 2}{(2t-5)^2}$

$$g'(t) = \frac{\frac{4t-10}{2t-5} - \ln(2t-5)\cdot 2}{(2t-5)^2}$$

Pregunta 1

$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 1 = 4$ pendiente de la recta

Pregunta 5

La derivada será creciente o decreciente dependiendo del lugar donde nos situemos en la gráfica.

Pregunta 6

Imagen 5.2.4: Respuestas de Silvia a las preguntas 1, 5 y 6

En el grupo 2 podemos mencionar otros ejemplos significativos. Ginés reconoce la definición formal de la derivada y asocia el concepto de derivada con una recta tangente y con la velocidad, sin embargo no utiliza de forma correcta ninguno de estos significados. Este alumno manifiesta que la derivada es “la recta tangente a la función” (anexo B.2.6.DG). En la pregunta 9, relaciona el límite del cociente incremental con la definición de la derivada aunque no de forma clara como refleja el hecho de que necesite calcular dicho límite (Imagen 5.2.5). La respuesta de Ginés a esta pregunta ha permitido observar que este alumno, además de mostrar poca fluidez en el procedimiento de derivación, también tiene dificultades en el cálculo de límites.

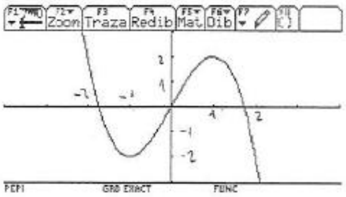
9. ¿Qué relación tiene el siguiente límite con la derivada de la función exponencial en un punto? $\lim\limits_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h}$

Con la definición de la derivada, y en este caso es indeterminado y se debe comprobar si existe el límite.

Imagen 5.2.5: Respuesta de Ginés a la pregunta 9

Virginia calcula la función derivada para responder a la pregunta 5 del cuestionario, relacionada con el significado de la derivada de una función como pendiente de la recta tangente a la función en un punto, pero no sabe qué hacer a continuación; lo mismo le ocurre al tratar de responder a la pregunta 10 (la derivada como velocidad instantánea). En la pregunta 6 muestra que sabe de la existencia de un criterio de la derivada para describir la monotonía de una función, pero parece no recordarlo de forma correcta ni lo deduce a partir del significado geométrico de la derivada (Imagen 5.2.6).

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 1$ *Pregunta 5*	$f'(t) = 2t$ *Pregunta 10*



Entre los puntos -2 y 2 encontramos un máximo y un mínimo (relativos), es decir en $(-1,-2)$ hay un mínimo, entonces la derivada va a ser nega-tiva; y en $(1,2)$ hay un máximo, la derivada va a ser positiva (hablamos de las primeras derivadas).
Al calcular las derivadas segundas, tendremos que la función será convexa ~~en ... $x = 0$ y $x =$~~ en una zona y cóncava en otra, eso es lo que nos indica la 2ª derivada.

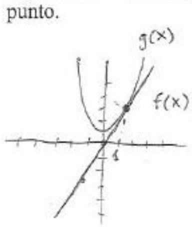
Pregunta 6

Imagen 5.2.6: Respuesta de Virginia a las preguntas 5, 6 y 10.

En el último grupo de estudiantes, donde se ha situado a aquellos alumnos que relacionan el concepto de derivada con más de tres significados (además del simbólico) nos encontramos con casos como el de Alexis, que utiliza los distintos significados de la derivada que reconoce en preguntas concretas del cuestionario y no en todas las que podría usarlo. Por ejemplo, la relación entre la derivada y la velocidad la utiliza correctamente para responder a la pregunta 10, pero no para indicar que la cantidad de peces aumenta a velocidad constante (pregunta 11); calcula la pendiente de la recta que aparece en la pregunta 5 utilizando que es tangente a la curva en el punto de coordenadas (3,0) y calculando la derivada en el punto de tangencia, pero no emplea este significado para responder a las preguntas 4 y 6 (anexo B.2.4.DA y anexo B.2.8).

Finalmente, hay otro grupo de estudiantes que relaciona algunos de los significados asociados a la derivada para resolver problemas. Nicanor responde a la pregunta 4 buscando una función cuadrática $g(x)$ que cumpla ciertas condiciones que la hacen ser tangente a la función $f(x) = 3x$ en el punto (1,3) (Imagen 5.2.7). Es de suponer que dicha función la ha obtenido por tanteo puesto que no presenta evidencia del uso de ningún otro proceso.

4. Dada la función $f(x) = 3x$, ¿existe una función cuadrática $g(x)$ que sea tangente a f en el punto $x = 1$? En caso afirmativo, representa gráficamente cuál es la situación en dicho punto.



$f'(x) = 3$ Por tanto $g'(1) = 3$ y $g(1) = 3$

Por ejemplo la función $g(x) = x^2 + x + 1$ cumple estos requisitos

Imagen 5.2.7: Respuesta de Nicanor a la pregunta 4

Otra característica de este grupo de alumnos es que fueron, junto con Zoraida (grupo 2) y con la excepción de Alexis, los únicos que plantearon y resolvieron de forma casi correcta la pregunta 11 en la que debían indicar que la cantidad de peces, $p(t)$, que había en un estanque aumentaba a velocidad constante. Esta información debían presentarla de dos maneras: con la función y con su derivada. Manuel, Milagros, Nicanor y Mar indican que la derivada tiene que ser constante, aunque sólo Manuel especifica que debe tener signo positivo, y proponen una expresión para la función $p(t)$. Manuel, Milagros y Mar proponen una expresión particular; Nicanor presenta una opción más general (Imagen 5.2.8). En esta pregunta, sin haber recibido formación al respecto, estos cuatro estudiantes han resuelto una Ecuación Diferencial Ordinaria, el caso más sencillo que se puede plantear, $y'(x) = k$, donde k es una constante.

$p(t) = p_0 + vt$ donde p_0 es la cantidad de peces inicial y v la velocidad a la que aumentan. $p'(t) = v = cte.$ Luego aumenta a velocidad constante *Nicanor*
$p(t) = K.t$ $V(t) = p'(t) = K$ *Milagros*
$f(t) = nt \longrightarrow f'(t) = n$ la función tendría una dependencia simple con el tiempo y la velocidad (derivada) no tiene dependencia ~~tie~~ temporal, sino que es una constante. *Mar*
Cantidad de peses que hay en un lago $P(t)$ · $P(t)$ aumenta a $v = cte \Longrightarrow \frac{\partial P(t)}{\partial t} = \oplus cte$ En términos de una función $f(P) = P \cdot t$ Concepto de derivada-Cuestionario inicial 3 Como me dice que es a veloc. constante $f(P) = \lvert P \rvert \cdot t$ Para que *Manuel*

Imagen 5.2.8: Respuestas a la pregunta 11

Esta actividad puede compararse con el problema P7 propuesto en la primera fase de la investigación (anexo A.1). Los estudiantes que participaron en esa fase de la investigación ya habían recibido formación acerca de las EDO de primer y segundo orden, sin embargo, un tercio de los 21 alumnos ni siquiera planteó la situación presentada en el enunciado de P7 en términos matemáticos, aún cuando se les proporcionaba la expresión de la EDO. El hecho de que cuatro de los 15 estudiantes que participaron en la segunda fase de la investigación propusieran una posible expresión matemática para la derivada de una función y la propia función en el problema 11 del cuestionario de la derivada avala la hipótesis de que este tipo de problemas pueden ser abordados desde los diferentes significados del concepto de derivada, sin requerir del concepto de EDO de manera formal.

A partir del análisis realizado se pueden establecer cuatro perfiles o tipología de comportamiento que describen el conocimiento que han mostrado estos estudiantes del concepto de derivada y que se utilizará como referente en el seguimiento de las rutas de aprendizaje de las cuatro parejas seleccionadas para realizar el análisis local.

Se tiene, por tanto, un primer perfil, en el que se sitúan seis estudiantes (Sonia, Nieves, Silvia, Juan, Virginia, Carmen) que se caracterizan por reconocer, a lo sumo, dos significados asociados al concepto de derivada de una función y utilizar las reglas de derivación con fluidez. En el perfil 2 se sitúan dos alumnos (Naomi y Alexis) que relacionan el concepto de derivada con tres o más significados y muestran fluidez al utilizar las reglas de derivación. Esta última característica es la que distingue a los estudiantes del perfil 2 con los de perfil 3, que cometen algunos errores al utilizar las reglas de derivación. En el perfil 3 también se sitúan dos estudiantes (Alberto y Ginés). Finalmente, en el perfil 4 se sitúan cinco estudiantes (Milagros, Nicanor, Zoraida, Manuel y Mar) que reconocen tres o más significados asociados a la derivada y los utilizan para plantear y resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de manera informal (cuando aún no se había introducido el concepto). La tabla 5.2.9 resume la caracterización descrita.

Perfil	*Estudiantes*		*Características*
1	Sonia Nieves Silvia	Juan Virginia Carmen	Reconocen, a lo sumo, dos significados asociados a la derivada, diferentes del simbólico. Utilizan las reglas de derivación con fluidez.
2	Naomi Alexis		Reconocen tres o más significados asociados a la derivada, diferentes del simbólico. Utilizan las reglas de derivación con fluidez.
3	Alberto Ginés		Reconocen tres o más significados asociados a la derivada, diferentes del simbólico. Cometen errores al utilizar las reglas de derivación.
4	Milagros Nicanor Zoraida Manuel Mar		Reconocen tres o más significados asociados a la derivada, diferentes del simbólico. Plantean y resuelven una EDO, de manera informal, utilizando el concepto de derivada. Milagros y Nicanor utilizan las reglas de derivación con fluidez; Zoraida, Manuel y Mar cometen algunos errores.

Tabla 5.2.9: Perfiles de los estudiantes atendiendo a las respuestas al cuestionario C-D

5.3 Análisis global del desarrollo del Módulo de Enseñanza

Una vez resuelto el cuestionario de la derivada, los estudiantes se agruparon formando seis parejas y un trío para trabajar de forma conjunta en la resolución de los problemas que conforman el Módulo de Enseñanza.

El Módulo de Enseñanza está formado por tres problemas (*Desintegración del uranio, Contaminación de mercurio y Dinámica de poblaciones*), cada uno de ellos compuesto por una serie de preguntas y/o actividades relacionadas con una situación hipotética, enunciada en un contexto real, en el sentido que lo entiende la Educación Matemática Realista (Gravemeijer, 2004). La descripción detallada de estos problemas y de la forma en que se implementó el Módulo de Enseñanza en el aula se presentaron en la sección 3.3 del capítulo dedicado a la Metodología de la investigación.

El proceso de desarrollo en el aula para las diez sesiones de clase dedicadas a la implementación del Módulo de Enseñanza fue similar: se entregaba a los alumnos la documentación relativa al problema que se estuviera considerando y estos trabajaban en parejas o tríos en su resolución. Los profesores presentes en el aula aclaraban dudas que fueran surgiendo a los estudiantes. Cada uno de los grupos disponía de una calculadora Voyage™200, que podían utilizar si lo consideraban necesario. En todas las sesiones hubo al menos una intervención del profesor hacia todo el grupo, cuya naturaleza se resume en las tablas 3.3.6, 3.3.7 y 3.3.8.

Durante las 10 sesiones dedicadas a la implementación del Módulo de Enseñanza, se grabaron en vídeo y en audio las intervenciones en el grupo (parejas y trío) de los alumnos (véase la distribución en el aula, imagen 3.3.3). La información que se analiza en esta sección proviene de estas grabaciones, de la documentación escrita aportada por cada grupo, y de las imágenes captadas del uso que cada grupo hizo de la Voyage ™200[37]. Para el análisis local, que se desarrollará en la sección 5.4, se transcribieron las grabaciones de las intervenciones de los estudiantes durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza y se utilizó, además, el material recopilado en las entrevistas (documentación escrita, uso de la calculadora y trascripción de la entrevista).

Los aspectos del desarrollo del Módulo de Enseñanza observados para realizar este análisis se basan en los elementos considerados en el Marco Conceptual como fundamentales para el aprendizaje de las matemáticas, relacionados a su vez con el catálogo de recursos, heurísticas, estrategias metacognitivas y creencias acerca de las matemáticas establecido por Schoenfeld (1992). Esos aspectos incluyen las relaciones que los estudiantes establecen entre distintos conceptos matemáticos, la fluidez que muestran utilizando procedimientos matemáticos, las heurísticas que emplean para resolver el problema y su capacidad para reflexionar, explicar o abstraer.

El análisis de las heurísticas y de los procesos de reflexión, abstracción y de la forma en que explican sus razonamientos requiere de la observación y estudio detallado de las grabaciones (en audio y/o video) de las sesiones de clase, por lo que en este primer análisis de la información se describirán los aspectos más generales observados, dejando

[37] Todo el material escrito que se utilizó para el análisis de datos se encuentra en el anexo B.2 (en el CD).

para la siguiente sección (sección 5.4) el análisis detallado de estos aspectos en relación con cada una de las parejas seleccionadas (análisis local).

5.3.1 Problema 1: Desintegración del uranio

Como inicio del Módulo de Enseñanza, los estudiantes debían resolver un problema relacionado con el fenómeno de la descomposición de elementos químicos (anexo A.2.U). Este problema comienza con una serie de preguntas en las que los estudiantes deben establecer relaciones entre distintas situaciones y diferentes expresiones matemáticas, relacionadas principalmente con el concepto de derivada. Las respuestas a estas preguntas conllevan el uso de los procesos de representación, en lenguaje matemático, de información dada en un contexto no matemático e interpretación de los resultados obtenidos en el contexto matemático en términos de la situación real planteada. Finaliza con una parte centrada en el contexto matemático, no relacionada de forma explícita con la situación planteada inicialmente, cuyo objetivo es que los estudiantes utilicen sus conocimientos de derivadas e integrales para obtener expresiones de funciones cuya derivada sea una función dada y utilizarla como ejemplo para introducir los conceptos de Ecuación Diferencial Ordinaria y solución de la misma.

El cuestionario de la derivada (C-D, anexo A.2.D) presentaba algunas preguntas con estas mismas características: por ejemplo, las preguntas 7, 8, 10 y 11 están relacionadas con los procesos de representación e interpretación de información entre el contexto matemático y el de la situación hipotética planteada. En las respuestas de los estudiantes a la pregunta 11 de este cuestionario, además, se pudo observar que cinco alumnos (tabla 5.2.9) presentaban una solución particular de una ecuación de la forma $y' = k$, con k una constante cualquiera e $y(t)$ una función del tiempo, cuando el concepto de EDO aún no había sido introducido por el profesor.

En el desarrollo de este problema del Módulo de Enseñanza influyó el hecho de ser la primera tarea que se proponía a los estudiantes con características diferentes a las que estaban acostumbrados a trabajar en las clases de matemáticas. Inicialmente, el diseño del problema provoca inseguridad en algunos alumnos. Este es el caso, por ejemplo, de Milagros y Silvia que recurren en dos ocasiones a los profesores presentes en el aula para confirmar su respuesta a la primera pregunta del problema (¿cómo indicarías que la cantidad de átomos de uranio 238 que hay en un material depende del tiempo que haya pasado?) (Trascripción B.2.1.TU, intervenciones [1,7]). La sesión dedicada a la realización de esta tarea por parte de los estudiantes se puede describir como un proceso de asimilación de la nueva forma de entender las matemáticas, modificando la creencia de que los problemas matemáticos deben resolverse en poco tiempo y con expresiones de las soluciones que sólo pueden ser valores numéricos o expresiones algebraicas cerradas (Schoenfeld, 1992).

El diseño de este problema permite que pueda resolverse sin emplear la calculadora Voyage™200, de hecho, ninguno de los grupos de estudiantes la utilizó.

Los aspectos de tipo conceptual que surgieron durante el desarrollo de este problema fueron el uso de los conceptos de función y derivada para indicar dependencia del tiempo, la relación entre tipos de dependencia y distintas funciones, el uso de la derivada para expresar aumento o disminución de cierta cantidad y velocidad de cambio, la existencia de infinitas funciones cuya derivada coincide y las relaciones entre ellas.

- Cuatro parejas utilizaron el concepto de derivada para indicar dependencia del tiempo: Ginés y Manuel; Nicanor y Mar; Carmen y Virginia; Alexis y Zoraida.
- Cinco grupos utilizaron el concepto de función para indicar dependencia del tiempo: Sonia, Alberto y Juan; Milagros y Silvia; Nicanor y Mar; Carmen y Virginia; Nieves y Naomi.
- Relaciones entre tipos de dependencia y distintas funciones:
  - Una cantidad que no varía, relacionada con una función constante: Sonia, Alberto y Juan; Alexis y Zoraida; Nieves y Naomi.
  - Una cantidad que disminuye, relacionada con una función de la forma $f(t) = f_0 - f(t')$: Sonia, Alberto y Juan; Milagros y Silvia; Nicanor y Mar.
  - Una cantidad que disminuye, relacionada con una función de la forma $f(t) + f'(t) = k$, siendo k una constante: Alexis y Zoraida.
- Cinco parejas utilizaron el concepto de derivada para expresar aumento o disminución de una cantidad: Ginés y Manuel; Milagros y Silvia; Nicanor y Mar; Carmen y Virginia; Nieves y Naomi. De todos estos estudiantes, sólo Manuel había hecho uso de la derivada en este sentido para responder a las preguntas del cuestionario de la derivada (ver sección 5.2).
- Seis grupos usaron el significado de la derivada como velocidad de cambio: Sonia, Alberto y Juan; Ginés y Manuel; Milagros y Silvia; Nicanor y Mar; Carmen y Virginia; Alexis y Zoraida. La mayoría de estos alumnos habían asociado el significado de velocidad con el concepto de derivada en sus respuestas al cuestionario de la derivada (Juan, Ginés, Manuel, Milagros, Nicanor, Mar, Alexis y Zoraida).
- Cinco parejas mostraron reconocer la existencia de infinitas funciones cuyas derivadas coinciden y relacionarlas mediante una constante: Milagros y Silvia; Nicanor y Mar; Carmen y Virginia; Alexis y Zoraida; Nieves y Naomi.

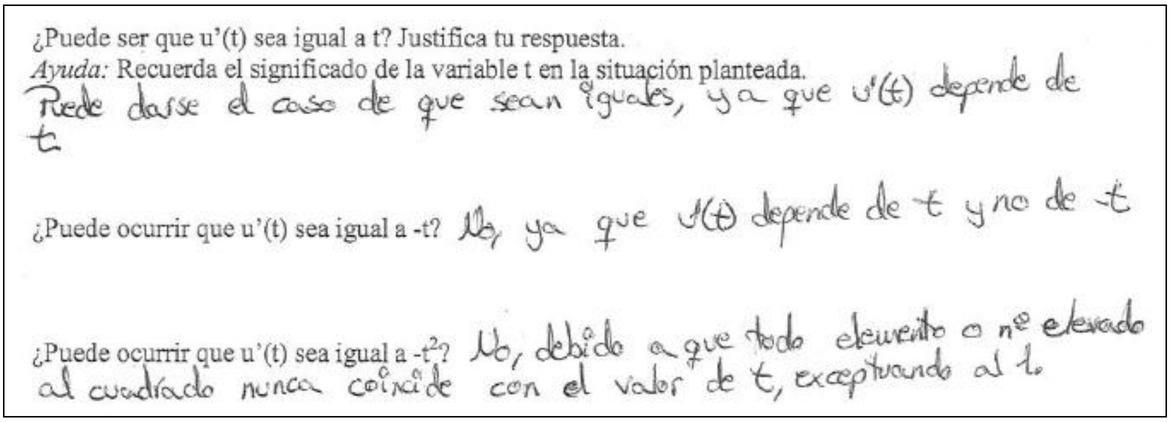
Los procedimientos matemáticos que los alumnos deben usar con fluidez en el desarrollo de este problema son la derivación y la integración. Sonia, alumna que forma el trío junto con Juan y Alberto, no termina de completar las tablas que se presentan al final del problema, en las que los estudiantes deben indicar algunos ejemplos de funciones cuya derivada coincida con una dada. Esto nos hace suponer que Sonia tiene dificultades con los procesos de derivación e integración. La inexistencia de grabación (por la ausencia en el aula del resto del grupo) no nos permite comprobar si es así. Las parejas formadas por Ginés y Manuel, Nieves y Naomi, al igual que Milagros[38], muestran dudas con respecto a la propiedad de la derivación que indica que $(f + C)' = f'$, siendo f una función derivable y C una constante cualquiera. El resto de las parejas (Nicanor y Mar; Virginia y Carmen; Alexis y Zoraida) utilizan estos procedimientos con fluidez.

En este problema también tienen una presencia significativa los procesos de representación e interpretación de información dada en un contexto no matemático al lenguaje matemático y viceversa[39]. En el proceso de representación se observó que distintos grupos asociaban la disminución de cierta cantidad con una resta (Sonia, Alberto y Juan; Milagros y Silvia; Nicanor y Mar; Alexis y Zoraida). Con la aparición del concepto de derivada, surge otra expresión matemática para indicar disminución,

[38] Esta parte del problema la resuelve Milagros sola puesto que su compañera, Silvia, se ausenta del aula.
[39] Relacionados con los procesos de "matematización horizontal y vertical" de Treffers (citado en Drijvers, 2003, p. 14).

más precisa que la anterior, en el sentido de que no hay que considerar los posibles cambios de signo del término que aparezca restando.

Las preguntas que han ofrecido mayor dificultad para los estudiantes son aquellas que se han denominado de interrelación porque su respuesta requiere conectar diferentes significados en el contexto matemático con distintas situaciones. Por ejemplo, la pregunta *¿puede ser que $u'(t)$ sea igual a t?* requiere que los estudiantes reflexionen acerca del significado que tiene, en el contexto matemático, esa relación de igualdad y transferir el significado de esa relación de igualdad al contexto de la situación planteada. La pareja formada por Nieves y Naomi no responde a estas cuestiones; Alexis y Zoraida y Sonia (que ha resuelto esta parte del problema 1 sola por la ausencia de sus compañeros) utilizan razonamientos incorrectos para responder a estas preguntas. Por ejemplo, en el caso de Sonia, la alumna muestra un error de comprensión del significado de la expresión $u(t)$ en términos de la dependencia e independencia de las variables. Esta alumna explica que $u'(t)$ no puede ser igual a $-t$ porque $u'(t)$ depende de t y no de $-t$. Responde a las otras preguntas relacionadas con este proceso en términos similares (Imagen 5.3.1).


¿Puede ser que u'(t) sea igual a t? Justifica tu respuesta.
Ayuda: Recuerda el significado de la variable t en la situación planteada.
Puede darse el caso de que sean iguales, ya que u'(t) depende de t.

¿Puede ocurrir que u'(t) sea igual a -t? No, ya que u'(t) depende de t y no de -t

¿Puede ocurrir que u'(t) sea igual a -t²? No, debido a que todo elemento o nº elevado al cuadrado nunca coincide con el valor de t, exceptuando al 1.

Imagen 5.3.1: Interpretación de Sonia de la expresión $u(t)$

El resto de las parejas respondieron correctamente empleando la relación entre el signo de la derivada y la monotonía de una función, en términos del aumento o la disminución de cierta cantidad.

Carmen y Virginia necesitan responder previamente a la pregunta *¿qué diferencia habría entre el enunciado del problema cuando $u'(t) = -1$ y $u'(t) = -2$?*, lo que refleja que la consideración de casos particulares les ha ayudado en la búsqueda de respuestas a cuestiones generales, aunque los estudiantes no han utilizado esta heurística de forma autónoma, sino inducidos por la propia actividad. Nicanor y Carmen consiguen responder a estas preguntas después de haber contestado a otra cuestión, "en este contexto, ¿qué significa que u'(t) sea positiva?"

Esto confirma la necesidad que tienen determinados estudiantes de considerar explícitamente unas fases iniciales de análisis y comprensión de la situación planteada, en la que se contemplen algunos casos particulares, como paso previo al establecimiento de relaciones más generales. La observación directa de esta circunstancia en el aula reafirmó la elección hecha en el diseño del segundo problema del Módulo de Enseñanza, *Contaminación de mercurio*, introduciendo de forma explícita cuatro etapas de resolución: análisis y comprensión de la situación, resolución del caso particular y análisis retrospectivo del proceso de solución (Santos, 2007). La etapa de planteamiento y solución de casos generales se plantea con el objeto de desarrollar habilidades en los estudiantes relacionadas con los procesos del Pensamiento Matemático Avanzado como la abstracción y la generalización (Artigue et al., 2007).

En cuanto a las heurísticas, algunos de los estudiantes compararon distintas preguntas del problema con cuestiones anteriores, buscando así la manera de adaptar la respuesta a nuevas situaciones; o con preguntas posteriores, intentando encontrar una referencia de la respuesta que se esperaba que dieran. También se detectaron algunos casos en los que los alumnos recurren a los conocimientos adquiridos en otras asignaturas, en este caso de física, buscando una forma de expresar la función que indica el número de átomos de uranio que hay en un material en cualquier instante de tiempo. Por ejemplo, al tener que expresar que el número de átomos de uranio que hay en un material disminuye con el tiempo, algunos de los estudiantes sienten la necesidad de buscar una expresión algebraica para la función que indica el número de átomos de uranio. Para ello recurren a distintos tipos de razonamientos. Por ejemplo, Milagros y Silvia suponen que pueden adaptar la ecuación que relaciona la velocidad y la posición de un cuerpo, $x = x_0 + v_0 t$, a la situación planteada, llegando a la conclusión de que el número de átomos que hay en el material puede quedar representado por la función $u(t) = u_0 - u'(t) \cdot t$ (ver Trascripción B.2.1.TU, intervenciones [31,58]). Alexis y Zoraida también establecen una analogía entre la situación planteada y otras situaciones tratadas en otras materias.

Por último, en referencia al primer problema del Módulo de Enseñanza, se han observado diferentes tipos de interacción entre estudiantes. En algunos casos dicha interacción ha jugado el papel de herramienta de comprobación y regulación del proceso de resolución, a través de las preguntas y observaciones que los estudiantes formulaban entre ellos (por ejemplo en la pareja formada por Milagros y Silvia). En otros casos, los estudiantes aceptan las respuestas dadas por su compañero o compañera, sin cuestionarlas, aunque esta no haya venido acompañada de un argumento que la sustente. Este es el caso, por ejemplo, de Alexis y Zoraida, pareja en la que Alexis juega el papel central, sobre todo al comienzo del problema (ver Transcripción B.2.4.TU, intervención [14,26]).

Para continuar con el análisis del desarrollo, por parte de los estudiantes de Química, del Módulo de Enseñanza interesan, sobre todo, dos aspectos: los diferentes usos que cada pareja ha hecho del concepto de derivada durante el desarrollo de este primer problema del Módulo y la fluidez que han mostrado al utilizar procedimientos matemáticos. En conjunto se han detectado cuatro formas diferentes de utilizar la derivada de una función:

- para indicar que dicha función depende del tiempo
- para referirse al aumento y/o disminución de cierta cantidad
- como velocidad de cambio
- como expresión asociada a infinitas funciones que tienen en común dicha derivada.

De la comparación entre este análisis y el realizado en la sección anterior se puede extraer que la red de significados asociados a la derivada que muestra la pareja formada por Virginia y Carmen se ha ampliado. En el cuestionario C-D, estas alumnas utilizaron únicamente la definición formal del concepto de derivada y su uso para describir la monotonía de una función (anexo B.2.8). En el transcurso del primer problema del Módulo de Enseñanza, Virginia y Carmen han añadido cuatro usos diferentes al conjunto de significados asociados a la derivada, enriqueciendo así el catálogo de recursos disponibles para la resolución de problemas (Schoenfeld, 1992).

El trío formado por Sonia, Alberto y Juan y tres parejas (Manuel y Ginés; Nicanor y Mar; Alexis y Zoraida) no muestran diferencias significativas con respecto a lo observado en el cuestionario de la derivada.

Naomi, que en el cuestionario de la derivada mostró relacionar el concepto de derivada con el de velocidad, no aporta ese conocimiento al desarrollo del primer problema del Módulo, lo que corrobora el hecho de que asociar dos ideas no garantiza que dicha relación se utilice de forma correcta en la resolución de problemas.

Aspectos Conceptuales	*Uso de procesos y procedimientos matemáticos*	*Heurísticas*
Utilizar el concepto de función para indicar dependencia del tiempo. Relaciones entre tipos de dependencia y distintas funciones: ▪ Una cantidad que no varía con una función constante. ▪ Una cantidad que disminuye, con una función de la forma $f(t) = f_0 - f(t')$. ▪ Una cantidad que disminuye, con una función de la forma $f(t) + f'(t) = k$, siendo k una constante. Utilizar el concepto de derivada para indicar dependencia del tiempo. Utilizar el concepto de derivada para expresar aumento o disminución de una cantidad. Usar el significado de la derivada como velocidad de cambio. Reconocer la existencia de infinitas funciones cuyas derivadas coinciden y relacionarlas mediante una constante.	Una estudiante no muestra fluidez en el uso de los procedimientos de derivación e integración. Algunos estudiantes muestran dudas al aplicar la propiedad $(f + C)' = f'$, siendo f una función derivable y C una constante cualquiera. La mayoría de los alumnos muestran fluidez en el uso de los procedimientos de derivación e integración. Proceso de abstracción. Proceso de generalización.	Comparación de una pregunta con cuestiones anteriores. Comparación de una pregunta con cuestiones posteriores. Recurrir a conocimientos adquiridos en otras materias.

Tabla 5.3.2: Esquema de los aspectos observados en el desarrollo del problema 1

Por último, el análisis del progreso de Milagros y Silvia necesita concretarse puesto que son dos alumnas que, en el cuestionario de la derivada, mostraron características muy diferentes en cuanto a la variedad de significados que asociaban al concepto. En el primer problema del Módulo de Enseñanza esta pareja utilizó la derivada de tres formas diferentes. Conviene analizar el papel que cada una de ellas, por separado, ha jugado en el uso de dichos significados. Por esta razón, la pareja formada por Milagros y Silvia es una de las seleccionadas para realizar el análisis local, en el que se describen las trayectorias de aprendizaje de cuatro parejas (sección 5.4).

La tabla 5.3.2 muestra un esquema de los aspectos conceptuales que los estudiantes mostraron durante el desarrollo del primer problema del Módulo de Enseñanza, las heurísticas que consideraron y la fluidez que mostraron en el uso de procedimientos matemáticos.

5.3.2 Problema 2: Contaminación de mercurio

En este problema, la situación que se plantea trata de un depósito que inicialmente sólo contiene agua y en el que se introduce una disolución de mercurio a cierta velocidad. Esta disolución se mezcla con el agua del depósito, del que sale un compuesto con cierta cantidad de mercurio. La velocidad de entrada y salida de las disoluciones son iguales. La variación de la cantidad de mercurio dentro del depósito puede representarse, entonces, mediante una Ecuación Diferencial Ordinaria de variables separables. El diseño del problema guía a los estudiantes hacia la obtención de esta EDO, se les pide que la clasifiquen y la resuelvan y se les formula distintas preguntas y plantean pequeñas actividades en las que tienen que utilizar tanto la expresión de la ecuación diferencial, como de su solución y otros conceptos matemáticos (anexo A.2.M).

Una de las características que distingue a este problema del anterior es su estructura. En el desarrollo del problema 1, *Desintegración del uranio*, se observó que algunos estudiantes requerían del estudio de casos particulares como paso previo para responder a determinadas cuestiones. Por otra parte, estos alumnos no se planteaban el uso de esta heurística de forma autónoma sino que fue una acción inducida por el propio problema. En el problema 2 del Módulo de Enseñanza se hacen explícitas cinco etapas que favorecen el desarrollo de procesos relacionados con la resolución de problemas: comprensión y análisis de la situación planteada, solución del caso particular, planteamiento y solución de casos generales y análisis retrospectivo del proceso de solución (Barrera-Mora & Santos-Trigo, 2002). Se propone, además, una actividad inicial en la que los estudiantes deben identificar en el enunciado la información que consideren relevante y proponer alguna manera de abordar el problema.

La presentación de los resultados del análisis del trabajo de los 15 estudiantes de Química en el problema 2 se divide en distintas partes:

- En primer lugar se describen los aspectos más relevantes observados durante la redacción del informe correspondiente a la actividad inicial.
- A continuación se presenta la información relativa a las dos primeras etapas de resolución, comprensión y análisis de la situación, que concluye con la representación de la situación en términos matemáticos, utilizando una EDO para indicar la variación de mercurio que se produce en el depósito.
- Se sigue con el análisis del proceso de resolución seguido por los estudiantes en el caso particular planteado, etapa 3, y en el desarrollo de la etapa 4, en la que se plantea y resuelve el caso general.

- Se concluye analizando cómo reflejan los estudiantes dicho proceso de resolución y, en general, las relaciones matemáticas, en la redacción del informe final, correspondiente a la etapa de análisis retrospectivo del proceso de solución.

<u>*Actividad inicial*</u>

La actividad inicial propuesta en este problema consiste en la elaboración, por parte de los estudiantes, de un informe en el que se explique la situación planteada, qué datos consideran relevantes y cómo creen que pueden resolver el problema. El objetivo es conseguir una primera visión de cómo han entendido la situación los estudiantes, cómo seleccionan la información que les interesa y cómo la reflejan en el papel, obteniendo así información sobre lo que Kilpatrick et al. (2009) denominan "competencia estratégica".

A pesar de ser una actividad que se propone de forma explícita en el enunciado del problema, hay una pareja que no realiza este informe (Manuel y Ginés. Nieves y Naomi redactan un informe con muy poca coherencia (Imagen 5.3.3). Además, esta pareja, al igual que el trío formado por Sonia, Alberto y Juan, no identifica correctamente toda la información relevante para la resolución del problema. Nieves y Naomi manifiestan que "el dato principal que hay que tener en cuenta es el volumen del estanque, la concentración inicial y el volumen que sale por minuto" (anexo B.2.5.M, en el CD).

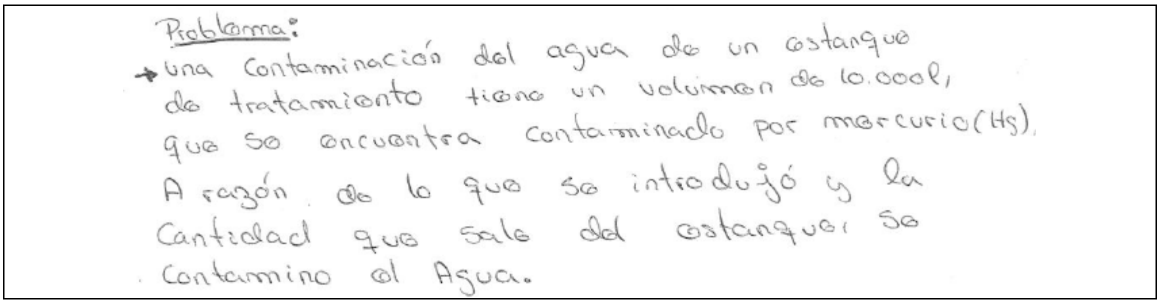
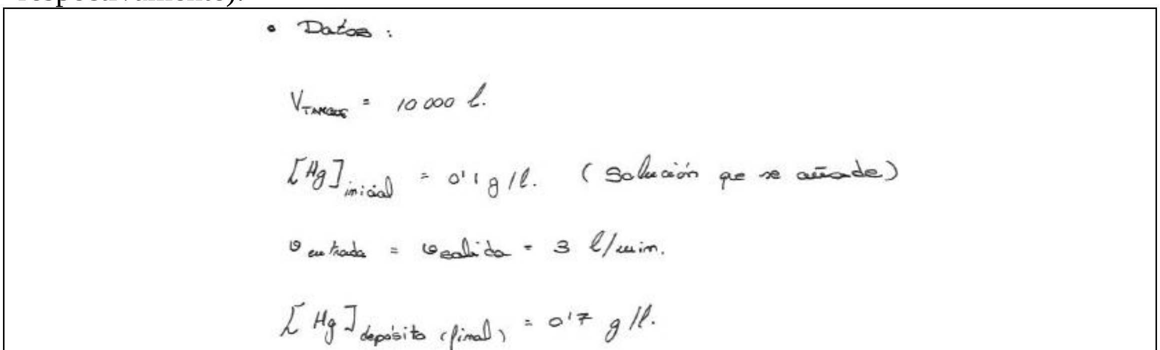

Problema:
→ una contaminación del agua de un estanque
de tratamiento tiene un volumen de 10.000 l,
que se encuentra contaminado por mercurio (Hg).
A razón de lo que se introdujó y la
cantidad que sale del estanque, se
contamino el Agua.

Imagen 5.3.3: Actividad inicial redactada por Nieves y Naomi

Otras parejas, como Milagros y Silvia, Virginia y Carmen o Alexis y Zoraida presentan los datos del problema en forma de listado (Imagen 5.3.4). La redacción del informe por parte de estas parejas refleja diferencias. Alexis y Zoraida se limitan a re-escribir el enunciado, sin aportar elementos diferentes, mientras que Milagros y Silvia van más allá en su redacción mostrando que, además de leer el enunciado, están reflexionando acerca de la situación que se está produciendo, manifestando por ejemplo que el volumen que hay dentro del depósito se mantiene constante, dato que no viene indicado de forma explícita en el enunciado del problema (anexos B.2.4.M y B.2.1.M, respectivamente).


• Datos:

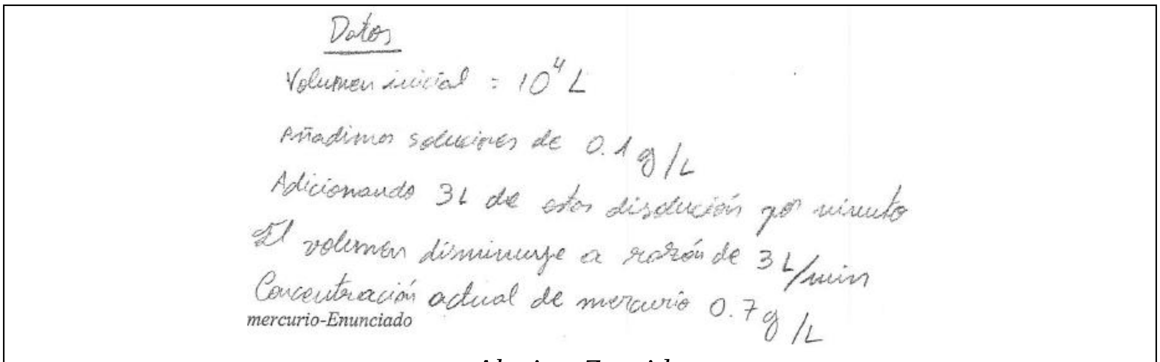
$V_{TANQUE} = 10\,000$ l.

$[Hg]_{inicial} = 0'1$ g/l. (Solución que se añade)

$v_{entrada} = v_{salida} = 3$ l/min.

$[Hg]_{depósito\ (final)} = 0'7$ g/l.

Milagros y Silvia


Datos
Volumen inicial = 10^4 L
Añadimos soluciones de 0.1 g/L
Adicionando 3L de estas disolución por minuto
El volumen disminuye a razón de 3 L/min
Concentración actual de mercurio 0.7 g/L
mercurio-Enunciado

Alexis y Zoraida

Imagen 5.3.4: Presentación de los datos por parte de dos parejas

Un último aspecto observado en las distintas redacciones de esta actividad inicial presentadas por los estudiantes es que algunos grupos identificaban el problema a resolver con un problema químico, disminuir la concentración de mercurio en el estanque, y no con un problema matemático. Esto ocurre con el trío formado por Sonia, Alberto y Juan y las parejas Milagros y Silvia, Virginia y Carmen y Alexis y Zoraida (Imagen 5.3.5). No obstante, esta última pareja hace alusión al uso del contexto matemático como propuesta para resolver el problema, empleando las “rectas de calibrado”, aunque estas no son aplicables en esta situación[40]. Sólo otra pareja hace alusión a que se trata de resolver un problema matemático. Nicanor y Mar indican que:

> “habría que definir una función que de cuenta de la cantidad de mercurio en el agua en cada momento [...] otra que indique la cantidad que sale [...] Hallar la variación de estas dos ecuaciones para obtener otra que nos de la concentración de mercurio por litro en cada momento.” (anexo B.2.2.M)

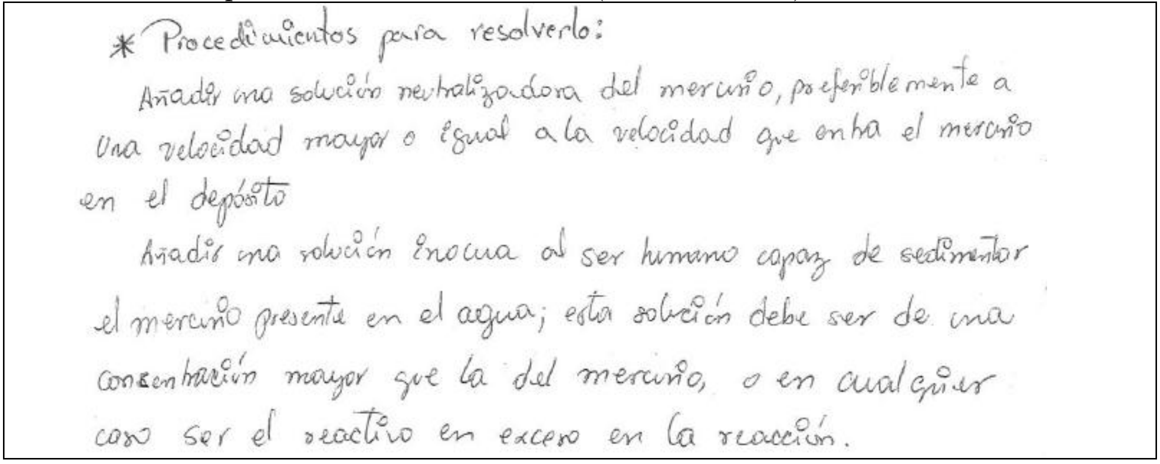

* Procedimientos para resolverlo:
Añadir una solución neutralizadora del mercurio, preferiblemente a una velocidad mayor o igual a la velocidad que entra el mercurio en el depósito
Añadir una solución inocua al ser humano capaz de sedimentar el mercurio presente en el agua; esta solución debe ser de una consentración mayor que la del mercurio, o en cualquier caso ser el reactivo en exceso en la reacción.

Imagen 5.3.5: Sonia, Alberto y Juan piensan en un problema químico

<u>*Comprensión y análisis de la situación*</u>

Una vez redactado el informe propuesto como actividad inicial, los estudiantes pasan a responder a una serie de cuestiones sobre la situación que se les plantea y la manera de expresar cierta información en lenguaje matemático. Estas dos primeras etapas del problema, comprensión y análisis de la situación, tienen como finalidad que los estudiantes traten la situación planteada desde un punto de vista matemático. Para ello se incluyen cuestiones como *¿cuánto mercurio se ha introducido en el estanque un*

[40] Este aspecto será analizado en detalle en la sección 5.4, en la que se presentan las rutas de aprendizaje de cuatro parejas, entre ellas la formada por Alexis y Zoraida.

minuto después?, ¿y dos minutos después?, ¿y tres minutos y medio después? y se les guía en el camino para obtener la expresión algebraica de la ecuación diferencial que representa la variación de la cantidad de mercurio que se produce en el depósito con actividades como indicar la cantidad de mercurio que se introduce y que sale del estanque por minuto. La mayoría de las preguntas que se plantean en estas dos etapas están relacionadas con el proceso de representación de información en el lenguaje matemático, proceso que se observó en la primera fase de esta investigación, que no resultaba trivial para los estudiantes y que resulta fundamental en la resolución de problemas. El proceso de representación también fue considerado en el problema 1 del Módulo de Enseñanza, Desintegración del uranio.

De todas las preguntas que se plantean a lo largo de estas dos etapas de resolución del problema, hay tres que resultan fundamentales en la observación del proceso mediante el cual los estudiantes representan información dada en un contexto real, empleando la notación matemática. Definida la función $p(t)$ para indicar la cantidad de mercurio que hay en el estanque en cualquier instante de tiempo t, se pide a los alumnos que indiquen la cantidad de mercurio que se introduce y que sale del estanque por minuto y expresar la variación de la cantidad de dicho elemento que se produce en el estanque.

La cantidad de mercurio que se introduce en el estanque en cualquier instante de tiempo se obtiene de forma casi directa del enunciado del problema en el que se indica la velocidad a la que se introduce la disolución y la proporción de mercurio en esta. Algunas parejas dudaron para responder a esta cuestión, pero todos terminaron por contestar de forma correcta. La estrategia más empleada por los estudiantes para responder o para comprobar que la respuesta era correcta fue el uso de las unidades de medida como referencia.

La expresión de la cantidad de mercurio que sale del estanque por minuto depende de la proporción de este elemento que haya en la mezcla que se produce dentro del depósito, lo que a su vez depende de la función $p(t)$. Esta cuestión no resultó fácil para los estudiantes. Los que consiguieron expresar de forma correcta la cantidad de mercurio que sale del depósito se apoyaron en las unidades de medida para obtener la respuesta (Manuel y Ginés; Milagros y Silvia; Nicanor y Mar; Virginia y Carmen; Nieves y Naomi). Los otros dos grupos no consiguieron establecer la expresión matemática correcta para la cantidad de mercurio que sale del estanque por minuto. Sonia, Alberto y Juan sostienen que la cantidad de mercurio que entra en el depósito es exactamente igual a la cantidad que sale, cuando lo que coincide son las velocidades de entrada y salida de las disoluciones correspondientes. Alexis y Zoraida sustituyen la función $p(t)$ en la expresión de la concentración de mercurio dentro del depósito, $\frac{p(t)}{10000}$, por el valor 0’3, correspondiente a la cantidad de mercurio que se introduce en el estanque por minuto.

En el momento de expresar la variación de la cantidad de mercurio que se produce dentro del depósito se observa que cuatro grupos, aunque relacionan el significado de derivada con el de variación de una cierta cantidad, no utilizan dicha relación para indicar la variación de la cantidad de mercurio que se produce en el estanque. Estos grupos (Sonia, Alberto y Juan; Nicanor y Mar; Alexis y Zoraida; Nieves y Naomi) no obtienen la expresión de la EDO que modela la situación, siendo esta aportada por el profesor para que continuaran con el desarrollo del problema. Las parejas formadas por Manuel y Ginés y Virginia y Carmen obtuvieron la expresión correcta de la ecuación diferencial estableciendo la relación entre el concepto de derivada y la variación de la cantidad de mercurio y de esta con la diferencia entre el mercurio que entra y el que sale del estanque. Milagros y Silvia, aunque relacionaron la variación con el concepto de derivada, con $p'(t)$, lo igualaron a la expresión $\frac{p(t)}{10000} + 0'3 - \frac{3p(t)}{10000}$, correspondiente al mercurio que hay dentro del depósito y no a la variación de dicha cantidad.

En el análisis de las respuestas de los estudiantes de Química al cuestionario de la derivada (sección 5.2) se observó que en todos los grupos excepto en dos, al menos uno de sus miembros reconocía la relación entre la derivada y la variación de una función. En esos grupos resulta natural que dicha relación se mantenga durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza, en particular, durante la resolución del problema 2, puesto que forma parte del catálogo de recursos de que dispone el grupo para resolver problemas. Las dos parejas que, en el cuestionario de la derivada, no mostraron establecer esta relación fueron Virginia y Carmen y Nieves y Naomi. Estas cuatro estudiantes vieron ampliada la red de significados asociados al concepto de derivada con el trabajo en el problema 2 del Módulo, puesto que ambas relacionaron la variación de la cantidad de mercurio que hay en el estanque con $p'(t)$. En el caso de Virginia y Carmen, además, obtuvieron la expresión correcta de la EDO que modela la situación.

Para concluir con éxito estas primeras etapas de la resolución del problema, obteniendo la expresión de la EDO que modela la situación es necesario realizar correctamente el proceso de representación, en términos matemáticos, de la cantidad de mercurio que entra en el estanque por unidad de tiempo, la cantidad que sale y la variación de dicha cantidad que se produce dentro del depósito, además de relacionar estas tres expresiones considerando que la variación de la cantidad de mercurio dentro del depósito se corresponde con la diferencia entre las cantidades de dicha sustancia que entran y salen del mismo. De estos procesos, los más dificultosos para los estudiantes han sido la representación, en términos matemáticos, de la cantidad de mercurio que sale del estanque y el establecer la relación entre $p'(t)$, como representación de la variación de la cantidad de mercurio en el estanque, y la diferencia entre las cantidades que entran y salen del depósito. En el siguiente esquema (esquema 5.3.6) se muestra esta situación, indicando con líneas discontinuas los procesos que más dificultad han entrañado.

Representación de la cantidad de mercurio que entra en el depósito

Representación de la cantidad de mercurio que sale del depósito

Variación de la cantidad de mercurio = Cantidad que entra - Cantidad que sale

Representación de la variación de la cantidad de mercurio que hay en el depósito

Esquema 5.3.6: Procesos de representación necesarios para obtener la EDO que modela la situación del problema 2

Con el fin de homogeneizar el momento, dentro de la resolución del problema, en que se encontraban los diferentes grupos de estudiantes, se concluyó la etapa 2, análisis de la situación, con la presentación, por parte del profesor, de la EDO que modela la situación [41]. De esta forma todos los estudiantes disponían de la ecuación $p'(t) = 0'3 - 0'0003p(t)$ para continuar con el desarrollo del problema. A continuación, el profesor presentó a los estudiantes la clasificación de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden, avanzando así en la formalización del concepto.

<u>*Solución de casos particulares*</u>

La tercera etapa del problema 2 del Módulo de Enseñanza (*Contaminación de mercurio*) comienza con una serie de cuestiones planteadas con el objetivo de que los estudiantes reflexionen sobre los conceptos matemáticos introducidos formalmente por el profesor hasta ese momento (EDO, orden y clasificación de las EDO de primer orden). Para ello se plantean preguntas como *¿qué elementos aparecen en la ecuación que hacen afirmar que se trata de una EDO y que ese es su orden?* A continuación se resuelve el problema particular planteado, haciendo uso de la calculadora Voyage™200 como herramienta para analizar la situación desde un punto de vista algebraico, resolviendo la ecuación, y gráfico, representando la función solución. Esta etapa concluye con el planteamiento de pequeñas tareas con las que se persigue que los estudiantes reflexionen acerca del proceso seguido para resolver el caso particular. Un ejemplo de este tipo de actividad es:

> *Si la concentración máxima de mercurio que permite el Ministerio de Sanidad y Consumo es de 0'04 gramos por litro, ¿en qué instante de tiempo se deberá cerrar la entrada y la salida de solución al estanque?*

El análisis del desarrollo de esta etapa por parte de los estudiantes permite observar cómo han asimilado los conceptos introducidos por el profesor (Ecuación Diferencial

[41] El resumen de las intervenciones del profesor hacia todo el grupo, en el desarrollo del problema 2, se encuentra en la tabla 3.3.7.

Ordinaria de primer orden y su clasificación) y qué elementos consideran que identifican los objetos con los que están trabajando, mostrando así aspectos de la comprensión conceptual de los alumnos. La inclusión de pequeñas actividades dentro de esta etapa permite observar cómo se enfrentan los estudiantes a la resolución de problemas y ver si los procesos y razonamientos empleados en el resto del problema han sido fruto de la reflexión o no. Con el análisis del desarrollo de los estudiantes de esta etapa de resolución del problema 2, se dispondrá de indicios acerca de lo que Kilpatrick et al. (2009) denominan la competencia estratégica, así como de los razonamientos empleados por los estudiantes y de la fluidez con que utilizan procedimientos matemáticos.

Todos los estudiantes identifican la expresión $p'(t) = 0'3 - 0'0003p(t)$ como una EDO de primer orden. Algunos la clasifican como una ecuación de variables separables y otros como lineal (Imagen 5.3.7).

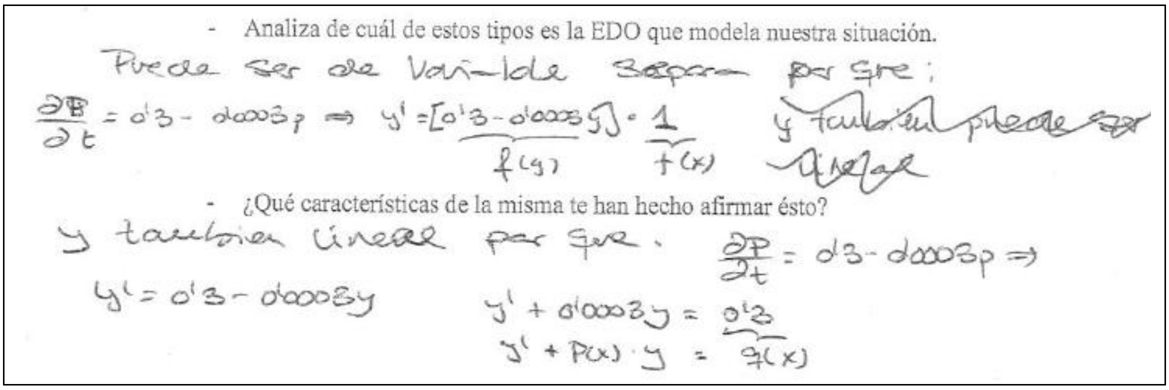
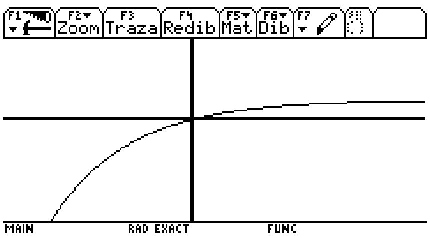


Imagen 5.3.7: Razonamiento de Manuel y Ginés para clasificar la EDO

A continuación los estudiantes resuelven la EDO y el problema de valores iniciales correspondiente a la condición inicial $p(0) = 0$ (inicialmente no hay mercurio dentro del depósito). Continúan representando gráficamente la función solución particular ($p(t) = -1000 \cdot e^{-0.0003t} + 1000$) y respondiendo a una serie de preguntas sobre el comportamiento de dicha función y su interpretación en el contexto de la situación hipotética planteada.



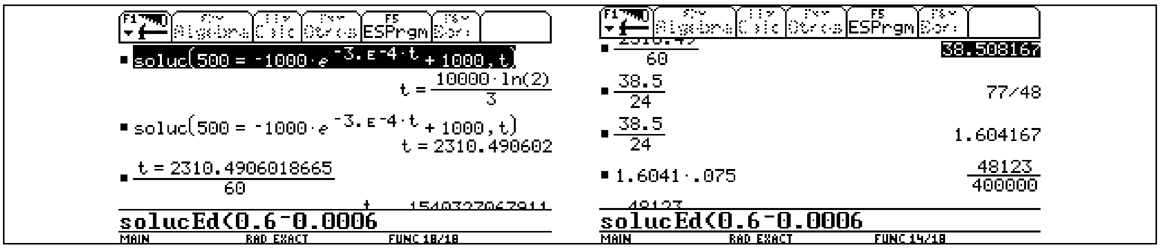
Representación gráfica de la función $p(t) = -1000 \cdot e^{-0.0003t} + 1000$

Tres de los grupos no reconocen la presencia de una asíntota horizontal en la representación gráfica de la función solución y responden que la cantidad de mercurio sigue aumentando de forma indefinida (Sonia, Alberto y Juan; Manuel y Ginés; Alexis y Zoraida). Estos grupos, además de la pareja formada por Nieves y Naomi, calculan el límite de la función $p(t)$, cuando $t \to \infty$, con la calculadora Voyage™200. Las parejas formadas por Nicanor y Mar y Virginia y Carmen también utilizan la tecnología para el cálculo del límite, pero comprueban el resultado obtenido volviéndolo a calcular con lápiz y papel. Milagros y Silvia no han requerido la ayuda de la tecnología para calcular este límite, confiando y demostrando su fluidez en el cálculo del límite de funciones.

La mayor dificultad que han tenido los estudiantes en el desarrollo de esta parte del problema se ha presentado a la hora de distinguir entre la cantidad de mercurio que hay dentro del estanque en un cualquier instante de tiempo, $p(t)$, y la concentración de dicho elemento que hay en la disolución, $\frac{p(t)}{10000}$. Sólo dos parejas (Milagros y Silvia; Nicanor y Mar) reflexionan lo suficiente acerca de la situación planteada y el significado de la expresión $p(t)$. El resto de las parejas y el trío confunden los dos significados, obligando a que el profesor realice una intervención dirigida a todo el grupo con el fin de aclarar este aspecto (tabla 3.3.7).

En la actividad final de esta etapa, propuesta con el fin de analizar si los estudiantes interpretan correctamente el significado de las expresiones matemáticas utilizadas a lo largo del proceso de solución del caso particular, se observó lo siguiente[42]. Manuel y Ginés, habían calculado previamente el número de días que se tarda en alcanzar una concentración de 0.05gr/l de mercurio dentro del depósito, utilizando la expresión algebraica de la función $p(t)$ (Imagen 5.3.8). Este cálculo lo utilizan a continuación, de forma incorrecta, para calcular el tiempo que se tardaría en alcanzar una concentración de 0.04gr/l de mercurio, empleando una regla de tres. Finalmente, vuelven a la opción de utilizar la expresión de $p(t)$, pero no sustituyen el valor correcto de la función. Este proceso de resolución indica que esta pareja no establece relaciones entre los elementos matemáticos utilizados y la situación hipotética planteada, además de manifestar que necesitan desarrollar su capacidad de reflexión acerca del uso de conceptos matemáticos.

Aunque Sonia, Alberto y Juan inicialmente optaron por utilizar una regla de tres para resolver esta actividad, el resultado obtenido les hizo darse cuenta de que la solución propuesta no era correcta, optando entonces por considerar la expresión de $p(t)$. Esto refleja la importancia que tiene, en el proceso de solución de problemas, el control del propio proceso de resolución, tal y como manifiesta Schoenfeld (1992). El resto de las parejas (Milagros y Silvia; Nicanor y Mar; Virginia y Carmen; Alexis y Zoraida; Nieves y Naomi) utilizan de forma correcta el significado de la función $p(t)$ en el contexto de la situación hipotética planteada y responden correctamente a esta última actividad de la etapa de solución del caso particular.



42 El enunciado de dicha actividad es: *Si la concentración máxima de mercurio que permite el Ministerio de Sanidad y Consumo es de 0'04 gramos por litro, ¿en qué instante de tiempo se deberá cerrar la entrada y la salida de solución al estanque?*

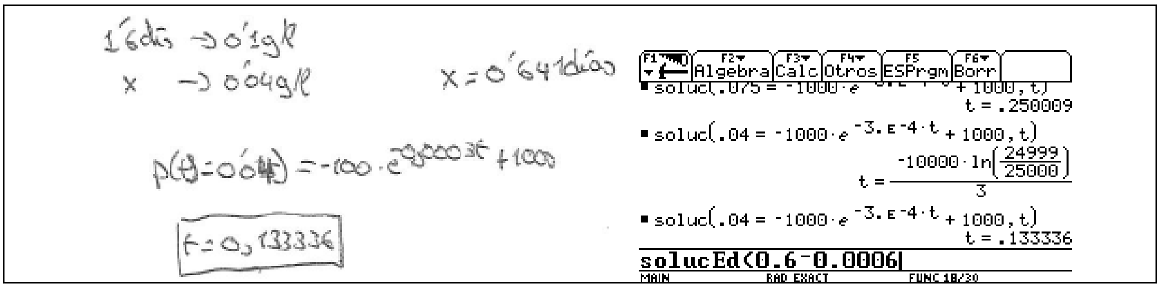


Imagen 5.3.8: Proceso de resolución de Manuel y Ginés

<u>*Planteamiento y solución de casos generales*</u>

La situación que se plantea en el enunciado del problema 2, Contaminación de mercurio, depende de cuatro parámetros: la cantidad de mercurio que se introduce en el estanque, la velocidad a la que entra y sale la disolución, el volumen del depósito y la cantidad inicial de mercurio que hay en el estanque. En la cuarta etapa de resolución del problema, correspondiente al planteamiento y solución de casos generales, se modifica cada uno de estos parámetros hasta llegar a un planteamiento general de la situación. La etapa se divide en cuatro apartados, cada uno de ellos dedicado a uno de los parámetros que se quiere generalizar y que finalizan con una serie de cuestiones cuyo objetivo es el estudio del modelo parcialmente generalizado que se acaba de obtener. En cada uno de estos apartados se incluye una cuestión en la que los estudiantes deben representar gráficamente distintas funciones correspondientes a diferentes situaciones y se formula una serie de preguntas acerca de dichas representaciones. El objetivo de esta parte de la actividad es introducir el sistema de representación gráfico como recurso en la resolución de problemas. Se termina esta etapa con una actividad cuyo objetivo es establecer si los estudiantes interrelacionan los dos contextos y han contestado a las cuestiones anteriores de forma razonada, utilizando para ello dos depósitos con características diferentes y preguntándoles acerca del tiempo que tardan en alcanzar una concentración determinada.

El análisis de la etapa de generalización del problema permitirá observar el tipo de reflexiones y razonamientos que los alumnos emplean para desarrollar este proceso característico del Pensamiento Matemático Avanzado (Azcárate & Camacho, 2003). La forma en que los estudiantes se aproximen a la generalización de la situación da muestras de su habilidad en la resolución de problemas, su capacidad para abstraer y su fluidez en el uso de procedimientos matemáticos, abarcando así varios de los elementos considerados en el Marco Conceptual de esta investigación.

Algunas parejas no establecen relación entre la constante de integración que aparece en la expresión de la solución general de la EDO y la condición inicial. Así se refleja, por ejemplo con la pareja formada por Manuel y Ginés. En el último apartado de la etapa 4 del problema, relativa al planteamiento y solución de casos generales, el parámetro que se generaliza es la cantidad de mercurio que hay inicialmente en el depósito. Esta pareja de estudiantes considera que este parámetro modifica la EDO, concretamente el término que indica la cantidad de mercurio que entra y, posteriormente, resuelven la ecuación (Imagen 5.3.9). Este error puede ser la composición de dos elementos, por un lado la falta de reflexión sobre la situación planteada puesto que esta pareja había identificado el primer término de la EDO como la cantidad de mercurio que se introduce en el depósito, y por otro lado, la falta de relación entre la constante de integración y el dato inicial. Manuel y Ginés, además, para calcular el valor de la constante de integración en el caso en que el depósito tenga inicialmente P_0 gramos de mercurio en su interior, utilizan la condición $p(0)=0$, lo que puede avalar la falta de reflexión sobre el enunciado. Otros grupos que tuvieron dificultades para establecer la relación entre el cálculo de la constante de integración y la condición inicial fueron el trío, Sonia, Alberto y Juan y la pareja formada por Virginia y Carmen.

- Si en el momento de introducir la solución con mercurio en el depósito, éste tuviera dentro 100 gramos de mercurio, ¿cuáles serían la EDO y la función que modelan la situación?

$$\frac{dp}{dt} = v(100+m) - \frac{v}{V}p(t)$$

$$p(t) = Ce^{-(v/V)t} + V\cdot(100+m)$$

- ¿Y si el depósito tuviera 500 gramos de mercurio?

$$\frac{dp}{dt} = v(500+m) - \frac{v}{V}p(t)$$

Imagen 5.3.9: Proceso de generalización de Manuel y Ginés

Al comenzar esta etapa de generalización del problema, los estudiantes deben tener en cuenta los significados de cada uno de los términos de la EDO en relación con la situación hipotética planteada. Seis de los grupos pasaron por este proceso de reflexión antes de plantear ecuaciones más generales, pero Alexis y Zoraida emplearon un argumento de linealidad para generalizar las ecuaciones (Imagen 5.3.10). La intervención de uno de los profesores presentes en el aula les hizo reflexionar sobre el proceso que habían seguido para plantear cada una de las EDO.

Cantidad de mercurio que se introduce en el depósito (gr/l)	EDO que modela la situación	Solución de la EDO
0.1	$\frac{dp}{dt} = 0.3 - 0.0003p(t)$	$p(t) = C\cdot e^{-0.0003t} + 1000$
0.2	$\frac{dp}{dt} = 0.6 - 0.0006p(t)$	$p(t) = Ce^{-3t/5000} + 1000$
0.3	$\frac{dp}{dt} = 0.9 - 0.0009p(t)$	$p(t) = Ce^{-9t/10000} + 1000$
0.4	$\frac{dp}{dt} = 1.2 - 0.0012p(t)$	$p(t) = Ce^{[illegible]} + 1000$
...		
m	$\frac{dp}{dt} = 3m - 0.0003m\,p(t)$	$p(t) = Ce^{-3m/} + 1000$

Imagen 5.3.10: Proceso de generalización de Alexis y Zoraida

Para completar la primera tabla incluida en esta etapa, la mayoría de los grupos optaron por resolver una o dos filas y buscar el patrón que les permitía expresar las ecuaciones y funciones que les faltaban. De estos grupos, dos parejas (Nicanor y Mar; Virginia y Carmen) comprobaron cada una de las expresiones que proponían como solución, resolviendo cada EDO con la calculadora. Sólo dos parejas (Alexis y Zoraida; Nieves y Naomi) resolvieron cada uno de los casos por separado, sin buscar un patrón, lo que denota escasez de recursos para la resolución de problemas, en lo que a heurísticas se refiere.

La etapa 4 de este problema finaliza con una actividad en la que los estudiantes deben comparar dos situaciones análogas. El proceso que los estudiantes sigan para resolver esta actividad reflejará, en parte, si han comprendido el significado de los conceptos matemáticos que han surgido y la relación de estos con la situación particular planteada. El enunciado de la actividad es el siguiente:

> Supongamos que tenemos dos depósitos, el primero con un volumen de 60.000 litros en el que introduce una solución con 0'2 gramos de mercurio por litro, y el segundo con un volumen de 45.000 litros en el que se introduce una solución con 0'6 gramos de mercurio por litro.
>
> Si en cada depósito tenemos una cantidad inicial de 250 gramos de mercurio y las soluciones entran y salen de ambos depósitos a una velocidad de 3 litros por minuto,
>
> - ¿En cuál de los depósitos se alcanza antes una concentración de mercurio de 0'1gr/l?
> - ¿En qué instante de tiempo se alcanza?

El primer dato significativo es que tres de los grupos (Sonia, Alberto y Juan; Alexis y Zoraida; Nieves y Naomi) no resuelven esta actividad durante la sesión de clases y tampoco en casa, habiéndoles dado la oportunidad de hacerlo. Esto refleja la manera en que se involucran en la materia, factor que influye claramente en el desarrollo del aprendizaje de la disciplina.

Manuel y Ginés cometen un error al sustituir los datos, vuelven a confundir la concentración de mercurio con la cantidad de dicho elemento, $p(t)$, que hay en el estanque en cualquier instante de tiempo. A este error hay que añadirle el hecho de que no obtuvieron la expresión correcta de la función que modela la situación general al no relacionar la constante de integración con el dato inicial (Imagen 5.3.9). Milagros y Silvia cometen un error de sintaxis en el contexto matemático, que las lleva a realizar operaciones incorrectas. El error consiste en la ausencia del uso de paréntesis (Imagen 5.3.11). Las parejas formadas por Nicanor y Mar y Virginia y Carmen muestran suficiente habilidad en el proceso de generalización, capacidad de reflexionar y habilidad para resolver problemas, estableciendo relaciones entre distintos conceptos matemáticos y entre estos y diferentes situaciones hipotéticas.

$$\Rightarrow p(t) = \underbrace{P_0 - Vm} \cdot e^{-\frac{c}{v}t} + V \cdot m$$

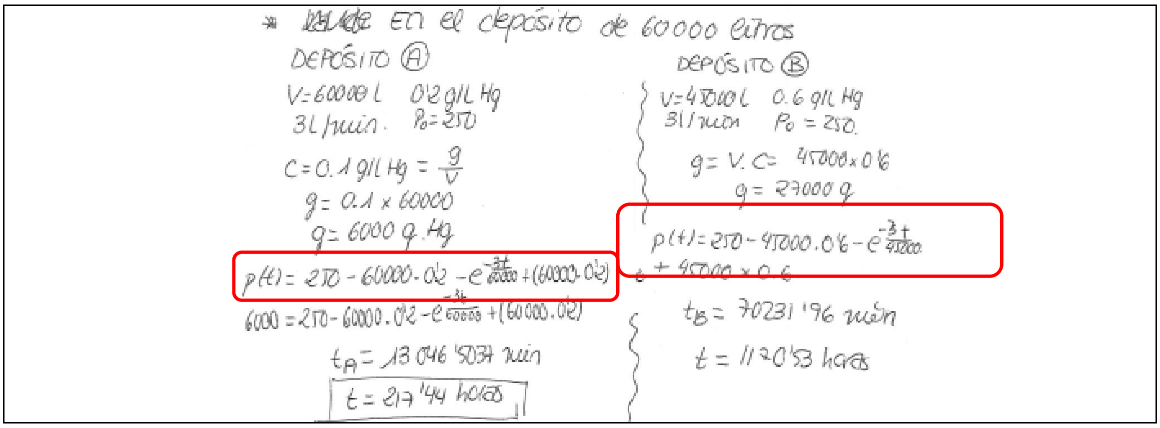


Imagen 5.3.11: Errores de procedimiento de Milagros y Silvia

<u>*Análisis retrospectivo del proceso de solución*</u>

El informe entregado por los estudiantes con el análisis retrospectivo de este problema, última etapa, puede utilizarse como un elemento más que refleja si los estudiantes han resuelto el problema de forma razonada o simplemente se han dejado guiar a ciegas por las preguntas que se planteaban y los comentarios de los profesores. Su análisis servirá para determinar la forma en que han comprendido los razonamientos que se han empleado y han conectado los dos contextos de trabajo: el de la situación hipotética planteada y el matemático.

El informe redactado por Sonia, Alberto y Juan refleja que no han identificado los factores que intervienen en la situación y que influyen en la EDO y su solución, obviando el dato correspondiente a la velocidad a la que sale la mezcla del depósito. Este dato es el que hace que se obtenga una EDO de variables separadas ya que, en el caso en que la velocidad de entrada y salida de la disolución no coincide, se obtiene una ecuación diferencial lineal. Este grupo no distingue entre la ecuación diferencial y su solución (esto mismo le ocurre a Virginia y Carmen[43]) y no relaciona la constante de integración con el dato inicial. Además relaciona $p(t)$ con la concentración de mercurio que hay dentro del estanque y no con la cantidad de dicho material, como es el caso (Imagen 5.3.12).

Naomi, Nieves y Manuel entregaron un informe individual. Manuel y Nieves sólo reflejan la parte correspondiente al caso particular. Manuel identifica los datos relevantes que intervienen en la situación, elementos que no explicita Nieves. La pareja de Nieves, Naomi, menciona los parámetros que influyen en el caso general, excepto la cantidad inicial de mercurio que haya en el depósito cuando comience a introducirse el líquido. Finalmente, las parejas formadas por Milagros y Silvia y Nicanor y Mar entregan unos informes muy completos, reflejando tanto el caso particular como el general, indicando los factores que intervienen en la situación hipotética y modifican la formulación matemática de la misma. Existe una diferencia en cuanto a la redacción de los informes de estas parejas, relativa al papel de la EDO en el proceso de resolución. Milagros y Silvia indican que para resolver la situación, "analizan la variación de la cantidad de mercurio con el tiempo", obteniendo una EDO. Nicanor manifiesta que "la cantidad de mercurio presente en el estanque era la variación entre la cantidad de mercurio que se introducía en el estanque y la que salía de él", mientras Mar señala que

[43] En la siguiente sección se detalla el proceso de resolución de cuatro de las parejas, en particular de Virginia y Carmen (sección 5.4.3).

“para hallar la concentración de mercurio en el depósito hay que determinar qué cantidad de mercurio sale y entra del depósito en cada tiempo, y hallar su variación”. Desde el punto de vista del significado que cada una de estas parejas ha dado a la EDO, Milagros y Silvia consideran la ecuación diferencial como una forma de expresar información de la que disponen, mientras que Nicanor y Mar parecen verlo como algo que hay que calcular.

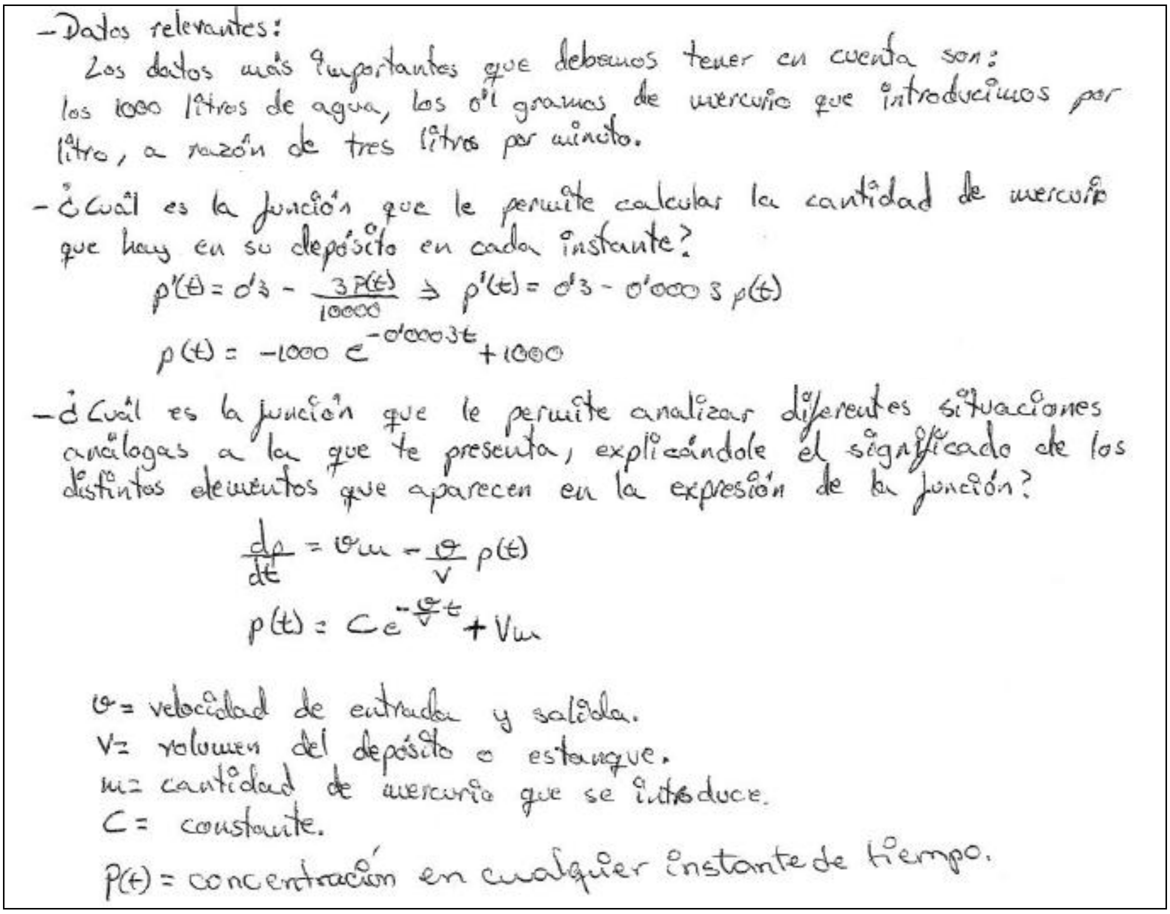

- Datos relevantes:
Los datos más importantes que debemos tener en cuenta son: los 1000 litros de agua, los 0'1 gramos de mercurio que introducimos por litro, a razón de tres litros por minuto.
- ¿Cuál es la función que le permite calcular la cantidad de mercurio que hay en su depósito en cada instante?
$$p'(t) = 0'3 - \frac{3P(t)}{10000} \Rightarrow p'(t) = 0'3 - 0'0003\, p(t)$$
$$p(t) = -1000\, e^{-0'0003t} + 1000$$
- ¿Cuál es la función que le permite analizar diferentes situaciones análogas a la que te presenta, explicándole el significado de los distintos elementos que aparecen en la expresión de la función?
$$\frac{dp}{dt} = vm - \frac{v}{V} p(t)$$
$$p(t) = Ce^{-\frac{v}{V}t} + Vm$$
v = velocidad de entrada y salida.
V = volumen del depósito o estanque.
m = cantidad de mercurio que se introduce.
C = constante.
p(t) = concentración en cualquier instante de tiempo.

Imagen 5.3.12: Parte del análisis retrospectivo de Sonia, Alberto y Juan

Son varias las parejas que durante el desarrollo de esta actividad optan por utilizar su propia calculadora, una calculadora científica, para realizar operaciones de cálculo numérico, aún cuando estas pueden realizarse con la Voyage™200. Esta circunstancia hace pensar que no todos los estudiantes se sienten cómodos con el uso de la herramienta seleccionada, encontrándose todavía en un período de adaptación del trabajo con la calculadora Voyage™200. La mayoría de las parejas utiliza la Voyage™200 para resolver las EDO que surgen a lo largo del problema. Sólo dos grupos, el trío formado por Sonia, Alberto y Juan y la pareja formada por Manuel y Ginés intentan resolver alguna de las ecuaciones empleando lápiz y papel y el método de separación de variables.

Aunque hubo varias intervenciones, por parte del profesor, dirigidas a homogeneizar y, en caso necesario, agilizar el desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes, no todos los alumnos consiguieron seguir el ritmo. Este es el caso de la pareja formada por Alexis y Zoraida, que no terminaron de resolver el problema, aún cuando se les propuso que lo acabaran en casa. Esta pareja sólo realizó las actividades propuestas dentro de este problema correspondiente a las tres primeras etapas y a la primera parte de la etapa 4, *solución de casos generales.* No se dispone por tanto de información de esta pareja relacionada con el *análisis retrospectivo del proceso de solución*. En la siguiente sección, donde se presenta un análisis más concreto de la ruta de aprendizaje de cuatro parejas seleccionadas, se podrán observar algunas características de la pareja formada por Alexis y Zoraida que pueden haber influido en el hecho de que no finalizaran el problema 2 del Módulo de Enseñanza.

Un aspecto general que se observó en el desarrollo de este problema por parte de los estudiantes es que la mayoría no verificaba sus respuestas. El proceso de verificación que los matemáticos profesionales realizan de forma autónoma (Carlson, Bloom & Glick, 2008) no se produce en los estudiantes. Este aspecto se toma en consideración a la hora de diseñar la presentación definitiva del problema 3 del Módulo de Enseñanza, *Dinámica de poblaciones*, incluyendo una serie de cuestiones que promovieran que los alumnos comprobaran las respuestas obtenidas. De esta forma se influye, además, en el desarrollo de estrategias metacognitivas o de control, relevantes en el proceso de resolución de problemas, tal y como se refleja en el Marco Conceptual de esta investigación.

La siguiente tabla muestra el resumen de los aspectos observados en el desarrollo del problema 2 del Módulo de Enseñanza, incluyendo los elementos conceptuales, los procesos y procedimientos matemáticos y las heurísticas mostrados por los estudiantes durante el proceso de resolución del problema.

Aspectos Conceptuales	*Uso de procesos y procedimientos matemáticos*	*Heurísticas*
Considerar que el problema planteado es de carácter químico y no matemático. Establecer relaciones entre diferentes representaciones matemáticas de una misma situación hipotética. Uso de la función derivada para indicar variación de cierta cantidad. Reconocimiento de la presencia de una asíntota horizontal en la representación gráfica de una función.	Clasificación de una EDO. Resolución de una EDO. Cálculo de límites. Proceso de generalización. Proceso de abstracción. Proceso de representación. Proceso de interpretación.	Consideración de las unidades de medida como referente para realizar operaciones. Búsqueda de patrones.

Tabla 5.3.13: Esquema de los aspectos observados en el desarrollo del problema 2

5.3.3 Problema 3: Dinámica de poblaciones

El problema 3 del Módulo de enseñanza (*Dinámica de poblaciones*) presenta la misma estructura general que el anterior, en lo que se refiere a la inclusión de cinco etapas de resolución, ahora bien, se distingue del anterior en que no se incluye la actividad inicial, se hace hincapié en el desarrollo del proceso de verificación de respuestas y se introduce un nuevo significado asociado al concepto de EDO, relacionado con el significado geométrico de la derivada (Thurston, 1994) y su uso para estudiar la monotonía de funciones.

En el problema 2, *Contaminación de mercurio*, los estudiantes necesitaban resolver la EDO para continuar con el problema. Incluso en la etapa 4, planteamiento y solución de casos generales, una vez obtenida la ecuación, se resolvía el problema de valores iniciales correspondiente y se trabajaba con la función solución de dicho problema. En el problema 3, *Dinámica de poblaciones*, la expresión algebraica de la función que se obtiene al resolver la EDO que modela la situación no arroja información suficiente para responder a las preguntas que se formulan. Se requiere el análisis de la propia EDO, utilizando la derivada como elemento que describe el aumento o la disminución de cierta cantidad, relacionado con lo que Thurston (1994) denomina significado geométrico de la derivada. Este uso del concepto ya se tuvo en cuenta en el diseño del cuestionario de la derivada y en el problema 1 de dicho Módulo, *Desintegración del uranio*. En el cuestionario de la derivada, únicamente Manuel utilizó el concepto de derivada para indicar que cierta cantidad aumentaba (anexo B.2.8), mientras que en el problema 1, cinco parejas establecieron esta relación (Ginés y Manuel; Milagros y Silvia; Nicanor y Mar; Carmen y Virginia; Nieves y Naomi).

El análisis del desarrollo de este problema se hará de manera análoga al anterior, distinguiendo entre las fases de resolución del mismo.

Comprensión y análisis de la situación
Una de las partes que resultó más difícil para los estudiantes en el transcurso del problema 2, fue la obtención de la EDO que modelaba la situación particular $\left(p' = 0.3 - 0.0003p\right)$. De hecho, cuatro de los grupos de estudiantes fueron incapaces de determinarla (Sonia, Alberto y Juan; Nicanor y Mar; Alexis y Zoraida; Nieves y Naomi). En este problema, los estudiantes deben representar en términos matemáticos tres situaciones de variación relacionadas con una población de peces. En primer lugar se consideran únicamente las tasas de nacimiento y mortalidad de la especie, conduciendo a la expresión de la EDO $P' = 0.19P$. A continuación se introduce un término de competición, b, que da lugar a la ecuación $P' = 0.19P - bP^2$. Finalmente, en la etapa de planteamiento y solución de casos generales, etapa 4, se considera una tasa de crecimiento a, con lo que la EDO objeto de estudio se convierte en $P' = aP - bP^2$.

De estas tres ecuaciones diferenciales, las dos primeras fueron las que resultaron más difíciles de obtener por parte de los estudiantes de Química. La primera de ellas, $P' = 0.19P$, se obtiene después de analizar una tabla (tabla 5.3.14) en la que se consideraban distintos casos particulares y se expresan las tasas de nacimiento y mortalidad de la especie de forma general, indicando $P(t)$ el número de peces de dicha especie.

Número de peces	**Peces que nacen en un año**	**Peces que mueren en un año**	**Variación en el número de peces, en**

			un año
1000			
2000			
3000			
$P(t)$			

Tabla 5.3.14

Todos los estudiantes completaron correctamente los apartados correspondientes a los casos particulares pero algunos tuvieron dificultades con el proceso de generalización, necesario para completar la última fila de la tabla, y que les lleva de forma directa a la expresión de la EDO que modela esta primera situación. Este es el caso de Nieves y Naomi cuyas dificultades provienen del proceso que han seguido para completar las tres primeras filas, que podría considerarse como un proceso de tipo aditivo ya que consiste en sumar la cantidad correspondiente a la primera fila tantas veces como se requiera. Por ejemplo, para calcular el número de peces que nacen en un año, cuando la población es de 3000 peces, el proceso seguido por estas alumnas sigue el siguiente esquema:

Nº de peces:	*1000 + 1000 + 1000 = 3000*
Peces que nacen en un año:	*410 + 410 + 410 = 1230*

El mismo proceso siguen para calcular el número de peces que mueren en un año, pero no para calcular la variación del número de peces, operación que realizan restando las dos columnas anteriores. Este proceso no es generalizable de forma directa para $P(t)$ peces puesto que requiere del paso de un proceso aditivo a un proceso multiplicativo. Esta situación refleja la importancia que tiene la elección del proceso de resolución en los casos particulares para que este pueda ser generalizado. La heurística que subyace en este proceso es la búsqueda de patrones y lo que se ha observado con este ejemplo es que las características del patrón identificado influyen en que este resulte útil para conseguir el objetivo deseado y pueda ser generalizado (Santos-Trigo & Rivera-Figueroa, 2010). Tres grupos (Sonia, Alberto y Juan; Manuel y Ginés; Virginia y Carmen) utilizan un proceso de tipo multiplicativo para calcular las tasas de nacimiento y mortalidad para casos particulares pero, en el caso general, se equivocan al establecer el factor que acompaña a la expresión $P(t)$. Proponen $410P(t)$ y $220P(t)$ como expresiones de la cantidad de peces que nacen y mueren respectivamente. Otra característica que tienen en común estos tres grupos es que no comprueban si la expresión propuesta es válida, lo que denota escasez de estrategias metacognitivas, elemento importante del proceso de resolución de problemas (Schoenfeld, 1992). Nicanor y Mar tampoco comprueban las expresiones que proponen para estas dos cantidades, aunque en su caso el proceso de representación fue correcto. Las otras dos parejas restantes (Milagros y Silvia; Alexis y Zoraida) indican las expresiones generales correctas y comprueban que los casos particulares analizados con anterioridad responden al patrón presentado bajo su expresión algebraica.

Los profesores participantes en la implementación del Módulo de Enseñanza interactuaron con los grupos que habían tenido dificultades para completar la tabla correctamente, y por tanto, para expresar la EDO que modela la situación, dirigiendo sus razonamientos desde un punto de vista de la formulación de conjeturas y su verificación empleando los casos particulares conocidos. El resultado fue que los 7 grupos consiguieron establecer correctamente la EDO que modela la situación particular inicial, $P' = 0.19P$, aunque uno de ellos, el formado por Sonia, Alberto y Juan no utiliza la notación matemática correctamente (Imagen 5.3.15) mostrando que podrían tener dificultades con el significado de la expresión $\frac{df}{dt}$.

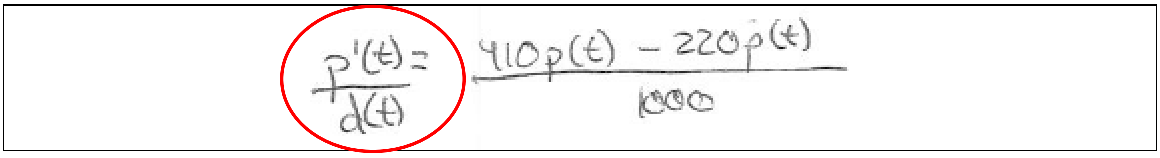
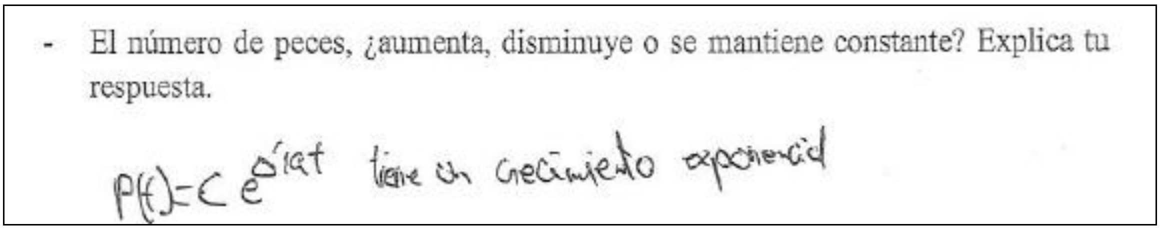


Imagen 5.3.15: Expresión incorrecta de una EDO utilizada por Sonia, Alberto y Juan

<u>Solución de casos particulares</u>

Una vez obtenida la EDO que modela la situación particular, esta se resuelve y se analiza la expresión obtenida, $P(t) = C{\cdot}e^{0.19t}$, en función de la constante de integración, C. En el problema anterior, se observó que algunos estudiantes no relacionaban el cálculo de la constante de integración con los valores iniciales de la función solución (Sonia, Alberto y Juan; Manuel y Ginés; Virginia y Carmen). Por este motivo se incluyeron en este problema dos preguntas relacionadas con este aspecto: "*Con los datos que tienes, ¿puedes calcular la constante de integración?, ¿qué necesitarías conocer para calcularla?*" En esta ocasión todos los grupos detectaron la necesidad de disponer de información sobre la población de peces en un instante de tiempo determinado para poder calcular el valor de C.

A las preguntas anteriores le sigue una cuestión cuyo objetivo es observar el tipo de razonamiento que los estudiantes emplean para analizar la monotonía de una función. Con la pregunta: "*El número de peces, ¿aumenta, disminuye o se mantiene constante?*" los estudiantes mostrarán si utilizan la EDO, $P' = 0.19P$, o la función obtenida como solución de la misma, $P(t) = Ce^{0.19t}$, para presentar sus argumentos. Cinco de los grupos responden en términos de las propiedades de la función exponencial, aunque sólo uno de ellos (Nicanor y Mar) reflexiona acerca de la influencia del signo de la constante C para que el razonamiento sea correcto. Los otros cuatro (Sonia, Alberto y Juan; Manuel y Ginés; Milagros y Silvia; Virginia y Carmen) responden que la función $P(t) = Ce^{0.19t}$ crece de forma exponencial, sin referirse de forma explícita al signo de la constante de integración (Imagen 5.3.16). En esta cuestión es importante la discusión acerca del signo de C y su relación con la monotonía de la función $P(t)$ puesto que en el caso en que la constante sea positiva la función es creciente y en caso de que sea negativa, la función $P(t)$ es decreciente. Tal y como mostró Rasmussen en su investigación, detrás de algunas respuestas correctas se pueden esconder errores de comprensión o lagunas conceptuales (Rasmussen, 2001). En este caso podría ocurrir que los alumnos que no reflexionaron acerca del signo de C consideren que todas las funciones exponenciales son crecientes.

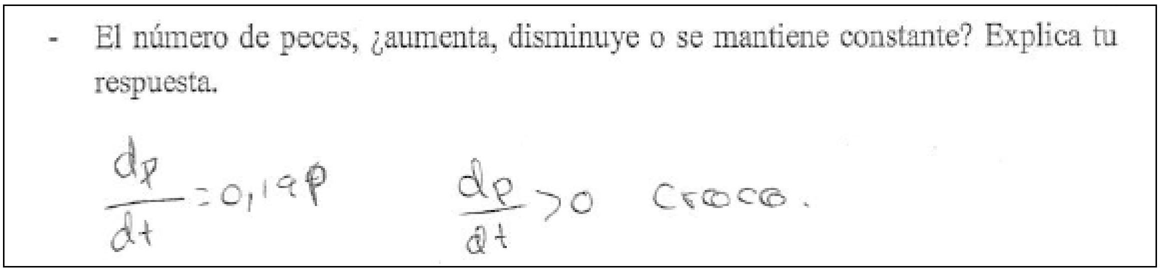


- El número de peces, ¿aumenta, disminuye o se mantiene constante? Explica tu respuesta.

$P(t)=C\,e^{0'19t}$ tiene un crecimiento exponencial

Imagen 5.3.16: Manuel y Ginés

Sólo una pareja, Nieves y Naomi, hace uso de la relación entre el signo de la derivada de una función y la monotonía de la misma (significado geométrico de Thurston, 1994) para analizar el comportamiento de la población de peces (Imagen 5.3.17).



- El número de peces, ¿aumenta, disminuye o se mantiene constante? Explica tu respuesta.

$\frac{dP}{dt}=0,19P$ $\quad \frac{dP}{dt}>0$ Crece.

Imagen 5.3.17: Nieves y Naomi

Entre las respuestas de los estudiantes a esta cuestión hay una cuyo razonamiento difiere de las demás. Alexis y Zoraida responden que el número de peces aumenta porque "es mayor la tasa de natalidad que la de mortalidad". Esta pareja no hace referencia ni a la EDO que modela la situación ni a la expresión de la función solución. Su respuesta se restringe al uso de la información proporcionada en el contexto de la situación (Rasmussen & Ruan, 2008). Detrás de esta respuesta, a priori correcta, puede encontrarse un error de concepción en el que se considera que todas las funciones exponenciales son crecientes. Aunque, en principio, la interacción entre los estudiantes debe funcionar para detectar estos posibles errores de concepción que se esconden bajo una respuesta correcta, el hecho de que los dos estudiantes acepten la respuesta propuesta impide profundizar en la concepción de los estudiantes acerca de las propiedades de la función exponencial.

La parte final de la etapa 3 de este problema resultó difícil para la mayoría de los estudiantes que requirieron de la ayuda de los profesores en numerosas ocasiones. En esta parte del problema se pedía a los alumnos que, teniendo la EDO que modela la situación hipotética planteada, en el caso que incluye el término de competición, $P' = 0.19P - bP^2$, analizaran para qué valores de P la población aumenta, disminuye y se mantiene constante, además de estudiar qué sucede con la población a lo largo del tiempo. Nieves y Naomi se apoyan continuamente en los profesores para responder a estas y otras cuestiones de esta actividad. En el caso particular del estudio de la monotonía de P, haciendo uso de la EDO, los profesores las guían de diferentes formas para que establezcan la relación correcta entre los valores de P y el aumento o la disminución de peces, pero las alumnas no reflexionan sobre lo que les dicen los profesores, limitándose a copiar lo que les explican. Este es un comportamiento que Nieves y Naomi repiten en varios momentos de las cuatro sesiones de clase dedicadas a resolver el problema 3, *Dinámica de poblaciones*. La falta de reflexión de las alumnas se refleja en que casi no existe diálogo entre ellas, salvo cuando ha intervenido previamente un profesor. La iniciativa, la confianza en los propios conocimientos y el espíritu crítico son elementos que influyen en el desarrollo del aprendizaje.

Sólo una de las parejas de estudiantes (Nicanor y Mar) utiliza la EDO para estudiar los valores de P para los que la población aumenta, disminuye o se mantiene constante y resuelven la inecuación correspondiente de forma correcta. El resto de los grupos (Sonia, Alberto y Juan; Manuel y Ginés; Milagros y Silvia; Virginia y Carmen; Alexis y Zoraida) indican la relación entre el signo de la derivada y la monotonía de la función P (Imagen 5.3.18) y para estudiar el signo de la expresión $0.19P - bP^2$, emplean la heurística del tanteo con diferentes valores de P o usan argumentos incorrectos como que $x^2 > x$ para cualquier valor de x.

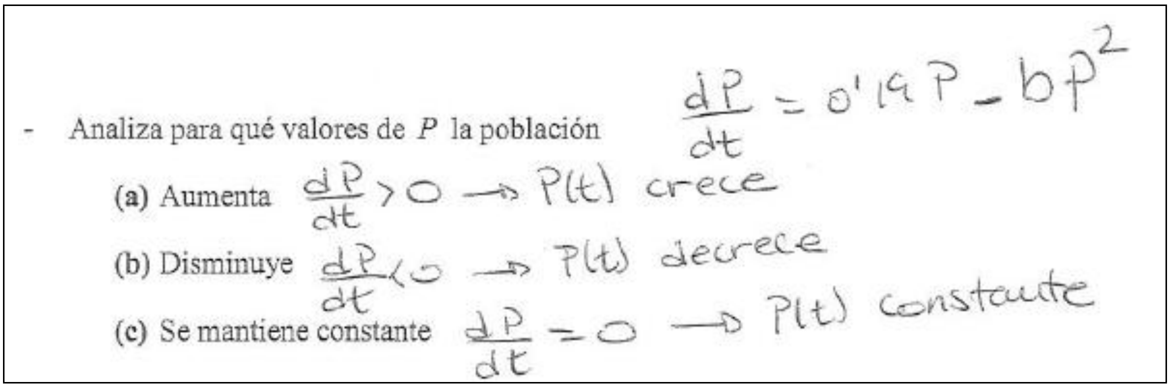


Imagen 5.3.18: Virginia y Carmen

Del escaso éxito de estas heurísticas surge un proceso que la bibliografía señala como elemento de dificultad en el estudio de las EDO (Rasmussen, 2001; Guerrero, 2008). Manuel propone representar gráficamente el segundo miembro de la EDO, la función $0.19P - bP^2$, que identifica como una parábola, y estudiar esta representación gráfica (Imagen 5.3.19). En este proceso, Manuel se encuentra con algunas dificultades que supera por medio de la interacción con una de las profesoras. Todas las dificultades mostradas por este alumno tienen como base la idea fija de que las variables que está representando son x y $f(x)$. Una vez que observa que en realidad está representando una función, P, frente a su derivada, P', responde a la cuestión planteada sin dificultad.

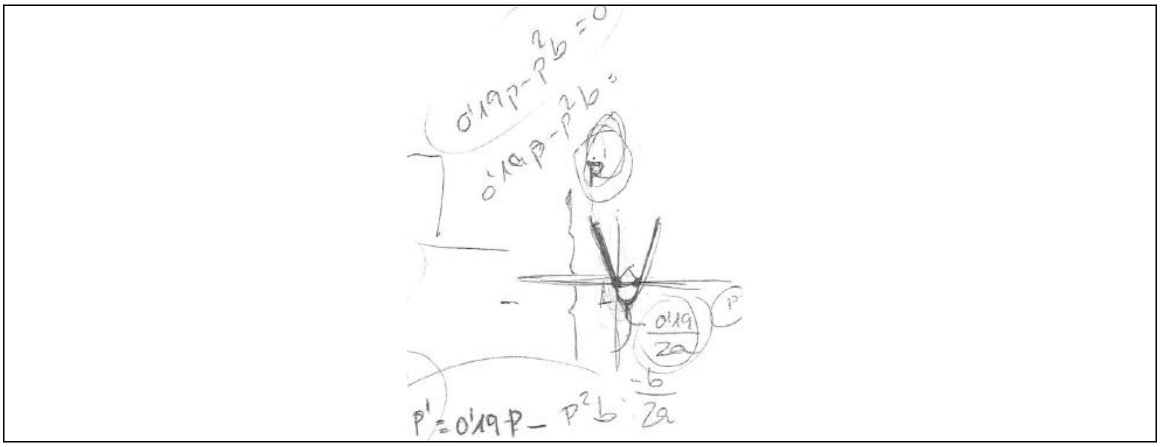


Imagen 5.3.19: Proceso de Manuel

El resto de los grupos son guiados por los profesores hacia el estudio del signo de P' mediante la resolución de las inecuaciones correspondientes. El grupo formado por Sonia, Alberto y Juan comete un error al resolver las inecuaciones relacionada con la siguiente propiedad:

$$\left.\begin{array}{c} a < b \\ \wedge \\ \lambda < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda a > \lambda b$$

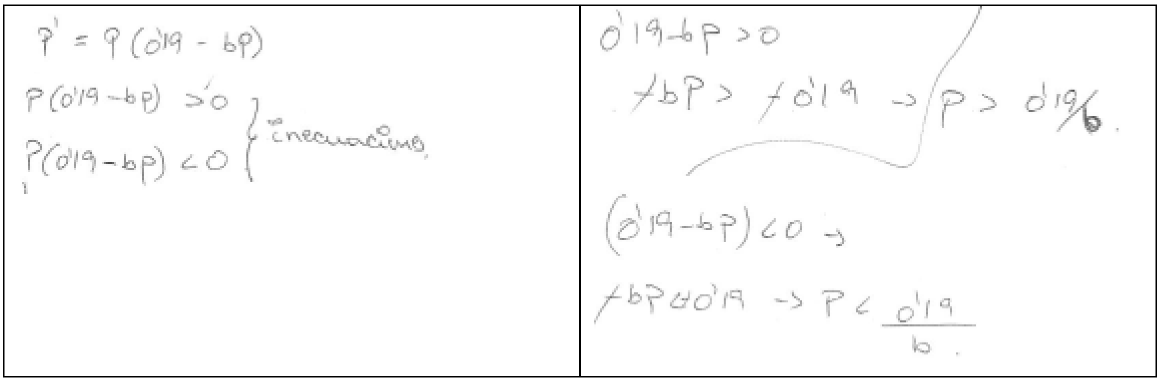


Imagen 5.3.20: Procedimiento de resolución de una inecuación de Sonia, Alberto y Juan

Con el estudio del signo de P' se obtiene que la población de peces aumenta, disminuye o se mantiene constante dependiendo de la cantidad inicial de peces de que se disponga, obteniéndose que la población de peces aumenta para $P_0 < \dfrac{0.19}{b}$, disminuye para $P_0 > \dfrac{0.19}{b}$ y se mantiene constante cuando $P_0 = 0$ ó $P_0 = \dfrac{0.19}{b}$. Calculando el límite de la función $P(t)$, cuando $t \to \infty$, se concluye que la población de peces, a medida que pasa el tiempo, se acerca al valor $\dfrac{0'19}{b}$.

La siguiente actividad requiere que se representen gráficamente tres funciones, cada una de las cuales se corresponde con una de las situaciones analizadas anteriormente. De esta forma se induce a los estudiantes a pasar por un proceso de verificación de los resultados obtenidos, empleando además la representación gráfica como un elemento que permite observar la situación planteada desde otro enfoque. Sólo tres parejas (Milagros y Silvia; Nicanor y Mar; Virginia y Carmen) realizaron estas representaciones gráficas. Nicanor y Mar, además, reflexionaron sobre la relación entre la información obtenida al analizar el signo de P' resolviendo las inecuaciones y en la representación gráfica. Las otras dos parejas (Milagros y Silvia; Virginia y Carmen) se limitan a representar las gráficas correspondientes a las situaciones particulares planteadas, sin discutir acerca de su relación con el estudio analítico anterior. El procedimiento seguido por las tres parejas para representar las funciones es el mismo y utilizan la calculadora Voyage^{TM}200 para realizar todos los cálculos (Imagen 5.3.21).

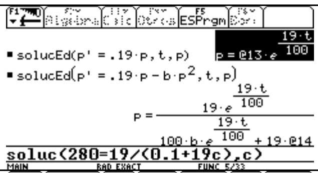
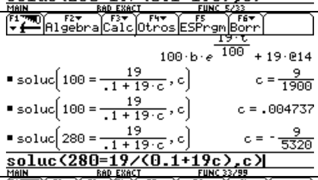
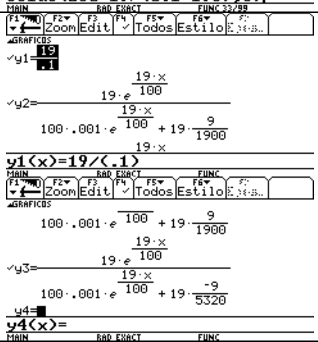
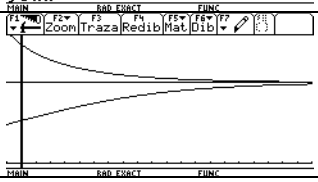
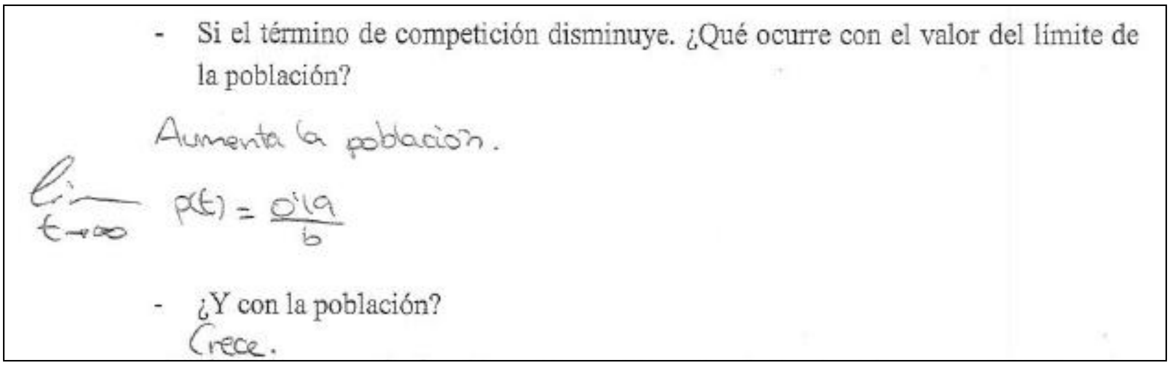
	Resuelven la EDO
	Calculan las constantes de integración utilizando las condiciones iniciales: $P(0) = 100$ y $P(0) = 280$
	Obtienen las expresiones de las soluciones particulares.
	Representan gráficamente las funciones.

Imagen 5.3.21: Proceso para representar gráficamente tres situaciones

A continuación se discute con todo el grupo sobre la influencia del término de competición en el comportamiento de la situación, con preguntas acerca de qué ocurriría con la población de peces si dicho término aumenta o disminuye. En esa discusión intervienen Alberto, Ginés, Mar y Nieves. Con las respuestas de cada uno de ellos se concluye lo siguiente:

- Si el término de competición, b, aumenta, el límite de la población disminuye. Cuando este límite se aproxime al valor cero, el comportamiento de todas las poblaciones de peces, independiente del valor inicial, será de decrecimiento.
- Si el término de competición disminuye, el límite de la población aumenta. En este caso se mantienen las tres situaciones reflejadas anteriormente: las poblaciones que inicialmente tengan una población superior al valor límite irán disminuyendo; aquellas que al inicio tengan un número de peces inferior al valor límite aumentarán y las que al comienzo tengan tantos peces como indique el valor límite, se mantendrán constantes.

Las respuestas escritas posteriormente por los estudiantes reflejan que el grupo formado por Sonia, Alberto y Juan no comprendió algunos de los razonamientos mostrados por sus compañeros, como muestra que alguna de sus respuestas sean erróneas (Imagen 5.3.22). Otras dos parejas (Manuel y Ginés; Alexis y Zoraida) ni siquiera responden a dichas preguntas, poniendo de manifiesto que no han reflexionado acerca de las mismas, conductas que influyen en el desarrollo que estas parejas muestran durante el resto del problema.


- Si el término de competición disminuye. ¿Qué ocurre con el valor del límite de la población?

Aumenta la población.

$\lim_{t \to \infty} p(t) = \frac{0'19}{b}$

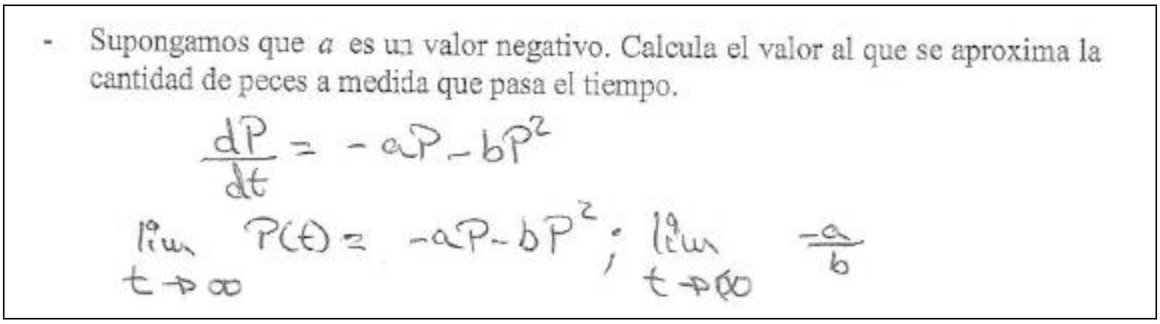
- ¿Y con la población?

Crece.

Imagen 5.3.22: Sonia, Alberto y Juan no comprendieron los razonamientos de sus compañeros

<u>*Planteamiento y solución de casos generales*</u>

En esta etapa del problema se dedica una especial atención a la formulación de conjeturas y al proceso de verificación de las mismas. La escritura de la EDO que modela la situación general, para una tasa de crecimiento a y un término de competencia b y el análisis de la situación para diferentes valores de a permite detectar aspectos de los procesos de representación utilizados por los estudiantes como la necesidad de hacer explícita la condición de valor negativo de una cantidad haciendo uso del signo “-“. Este es el caso del grupo formado por Sonia, Alberto y Juan que proponen la EDO $P' = -aP - bP^2$ para representar la variación de una población de peces con una tasa de crecimiento negativa. Esta pareja, además, ha tenido dificultades a lo largo del desarrollo de este problema con la expresión de la derivada de una función. En la imagen 5.3.23 se puede observar que no distinguen entre la función $P(t)$ y su derivada, utilizando esta última para calcular el valor al que se aproxima la cantidad de peces a medida que pasa el tiempo.


- Supongamos que a es un valor negativo. Calcula el valor al que se aproxima la cantidad de peces a medida que pasa el tiempo.

$\frac{dP}{dt} = -aP - bP^2$

$\lim_{t \to \infty} P(t) = -aP - bP^2$; $\lim_{t \to \infty} \frac{-a}{b}$

Imagen 5.3.23: Procesos de representación de Sonia, Alberto y Juan y errores en la asignación de significado

Milagros y Silvia, en esta etapa del problema, han cometido un error en la expresión de la EDO que modela la situación fruto de una interpretación incorrecta del significado de la tasa de crecimiento, a (Imagen 5.3.24).

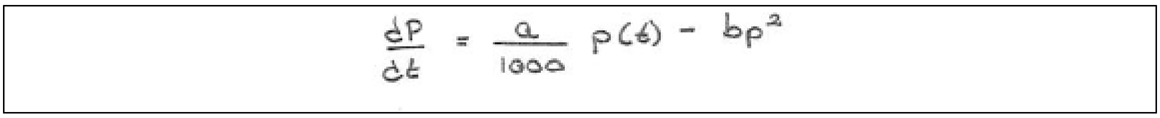
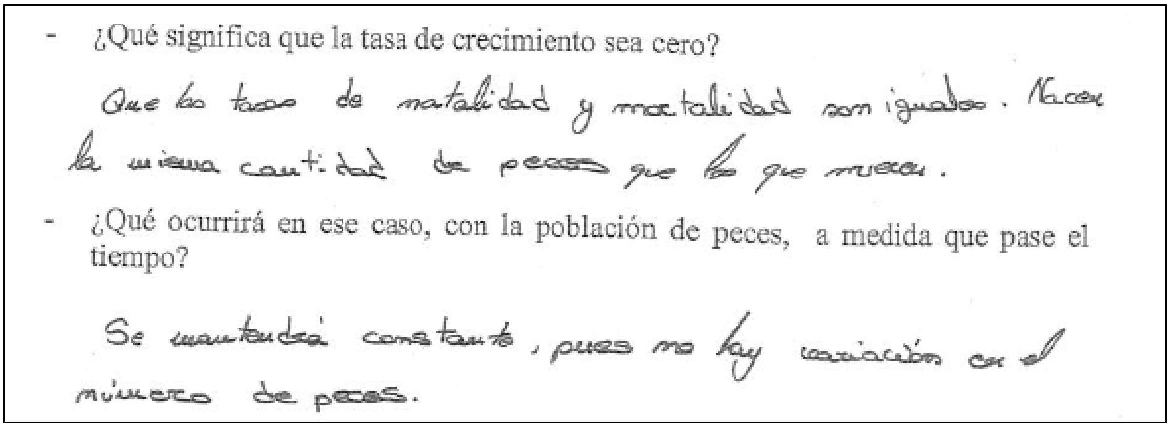

$\frac{dP}{dt} = \frac{a}{1000} p(t) - bp^2$

Imagen 5.3.24: Propuesta de EDO formulada por Milagros y Silvia

El resto de las parejas utilizan la EDO $P' = aP - bP^2$ para modelar la situación general, independientemente del signo de la tasa de crecimiento, a. El siguiente paso es la formulación de conjeturas acerca de lo que ocurrirá con la población de peces a medida que pase el tiempo en función del signo de dicha constante, a. En el caso en que $a < 0$ todos los grupos coinciden en que nacen menos peces de los que mueren y, por tanto, la población irá disminuyendo hasta alcanzar el valor cero. En el caso en que $a = 0$, cuatro grupos (Sonia, Alberto y Juan; Milagros y Silvia; Alexis y Zoraida; Nieves y Naomi) responden que la población se mantendrá constante, sin tener en cuenta el término de competición (Imagen 5.3.25). Dos parejas (Manuel y Ginés; Nicanor y Mar) responden que la población disminuirá hasta alcanzar el valor cero, tomando en cuenta el término de competición. Y una última pareja, Virginia y Carmen, también contestan que la población desaparecerá, pero basando su argumento en aspectos empíricos. Estas alumnas manifiestan que si la tasa de crecimiento es cero, significa que no nacen más peces y, como los peces que hay se irán muriendo, entonces la población terminará por desaparecer. No se refieren en ningún momento al término de competición introducido en la situación. Nuevamente estamos ante el uso de razonamientos basados en la experiencia de los estudiantes en detrimento del uso del modelo matemático empleado (Rasmussen & Ruan, 2008).



- ¿Qué significa que la tasa de crecimiento sea cero?

Que las tasas de natalidad y mortalidad son iguales. Nacen la misma cantidad de peces que los que mueren.

- ¿Qué ocurrirá en ese caso, con la población de peces, a medida que pase el tiempo?

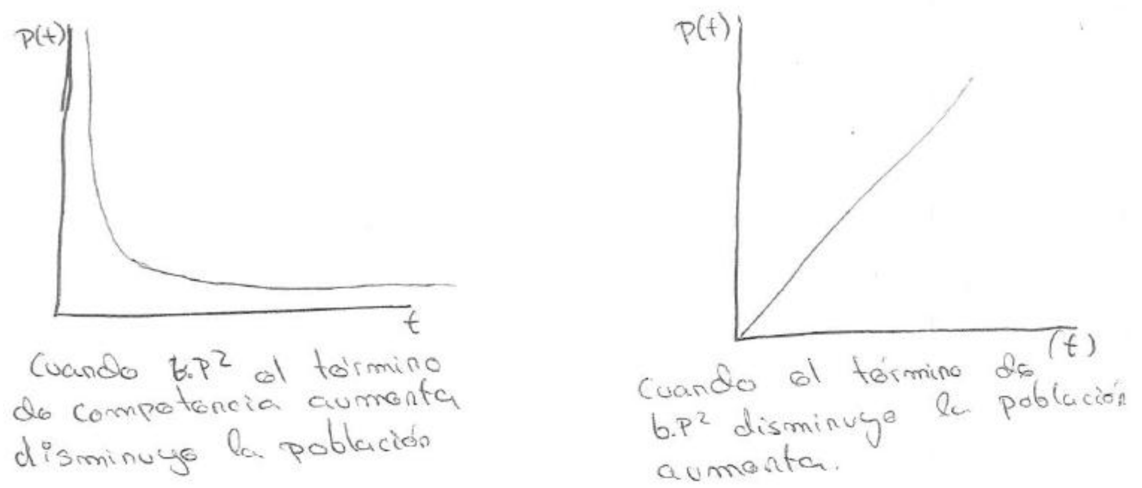
Se mantendrá constante, pues no hay variación en el número de peces.

Imagen 5.3.25: Milagros y Silvia

Nuevamente los estudiantes obvian las actividades propuestas para verificar sus conjeturas acerca de lo que ocurre con la población para distintos valores de la tasa de crecimiento. Tres grupos (Sonia, Alberto y Juan; Manuel y Ginés; Nieves y Naomi) no representan ninguna de las funciones solicitadas; dos parejas (Milagros y Silvia; Virginia y Carmen) sólo representan uno de los casos y no lo utilizan para comprobar su conjetura. Sólo dos parejas (Nicanor y Mar; Alexis y Zoraida) representan correctamente las tres funciones propuestas correspondientes a ejemplos particulares de cada uno de los casos estudiados: $a > 0$, $a = 0$ y $a < 0$. El proceso seguido por Alexis y Zoraida muestra falta de fluidez en los procesos de generalización y abstracción puesto que, pudiendo realizar todos los cálculos resolviendo una única vez la EDO, optan por repetir el mismo proceso de resolución tres veces. En ningún momento se plantean si algunos de los cálculos realizados previamente pueden servirles para otras situaciones.

<u>*Análisis retrospectivo*</u>

En la última etapa, los estudiantes deben redactar un informe que refleje por qué se ha utilizado el concepto de EDO en la resolución de este problema, plantear el caso más general del mismo e ilustrar las distintas situaciones que se pueden plantear mediante el uso de gráficas. En este informe se analizará la interpretación del problema que hacen los estudiantes en términos matemáticos. Dos de las parejas de estudiantes no realizan este informe (Manuel y Ginés; Alexis y Zoraida). La redacción del informe de las otras parejas refleja la forma en que han trabajado durante las cuatro sesiones de clase dedicadas a la resolución del problema 3 del Módulo de Enseñanza. Los grupos que no completaron las actividades del problema y no reflexionaron sobre los razonamientos que surgían en la interacción con los profesores o con el resto del grupo (Sonia, Alberto y Juan; Virginia y Carmen; Nieves y Naomi) presentaron un informe que ponía de manifiesto su falta de comprensión de la situación y su interpretación matemática. Virginia y Carmen, por ejemplo, no muestran en el informe la discusión acerca de lo que ocurre con la población a medida que pasa el tiempo según los valores de la tasa de crecimiento y el término de competición (anexo B.2.3.M). Algunos ejemplos que muestran este comportamiento se pueden ver en las representaciones gráficas que Nieves y Naomi proponen en su informe o en algunos párrafos del informe de Sonia, Alberto y Juan (Imagen 5.3.26).



Nieves y Naomi

- El valor límite para la población es cuando el número total de peces comienza a decrecer. Los números por encima de la asíntota de la función. O cuando $P > \frac{a}{b}$

Sonia, Alberto y Juan

Imagen 5.3.26: Parte de los informes de la etapa 5

El informe presentado por Nicanor y Mar refleja que no se han restringido a responder a las diferentes cuestiones planteadas desde un punto de vista matemático sino que las han relacionado con la situación hipotética planteada en el enunciado. Así señalan cuál puede ser la causa de que esté disminuyendo el número de peces, en términos de la cantidad inicial de peces introducida (Imagen 5.3.27).

Esta función, a medida que pasa el tiempo, alcanza un valor límite de $\frac{19}{100\,b}$. Se comprueba además que si P es mayor que este valor, el número de peces disminuye hasta alcanzarlo y viceversa si el número de peces inicial es menor que 0,19 b, aumenta hasta alcanzarlo.

Por tanto, la disminución en el número de doradas puede ser debido a que la población de peces sobrepasa este valor límite. Seguirá decreciendo hasta alcanzarlo. Una posibilidad de evitar esto es retirar peces del estanque hasta que su número sea menor que $\frac{0{,}19}{b}$. Entonces el número de doradas volvería a aumentar. Por ejemplo, en el caso que b fuera 0,001, la

Imagen 5.3.27: Nicanor y Mar

Milagros y Silvia, en su informe, siguen considerando que la variación del número de peces depende únicamente de las tasas de natalidad y mortalidad, no del término de competencia (imagen 5.3.28).

Hemos de señalar que en la EDO están involucrados, los siguientes factores: la variación en el número de peces, en un año (dato que a su vez depende de la tasa de natalidad y mortalidad que se nos ha proporcionado) y del término de competitividad (bp^2, que hace referencias a la competición de los peces por obtener los recursos vitales). El hecho de que esté disminuyendo la cantidad de peces puede tener su origen en la escasez de recursos vitales tales como el espacio, los alimentos, etc.

En general, para cualquier situación análoga donde únicamente se indiquen las tasas de natalidad y mortalidad, hemos establecido la siguiente EDO:

$$p'(t)= a \,.\, p(t) - bp^2\,(t),$$

siendo a la variación de peces (que a su vez depende de las tasas de natalidad y mortalidad).

Imagen 5.3.28: Parte del informe de Milagros y Silvia

Esta pareja considera la ecuación diferencial como un cálculo más y no como una manera de expresar la variación de la cantidad de peces, es decir, como una forma de interpretar la información dada en términos matemáticos. El hecho de verlo como un cálculo puede hacer que este tipo de problemas se conviertan en un proceso algorítmico para los estudiantes (Imagen 5.3.29).

Atendiendo al problema planteado por el cliente ha sido necesario la elaboracion de una EDO, que nos ha permitido modelar la situación. La realización de la EDO nos ha ayudado a estudiar la cantidad de peces y su variación a lo largo del tiempo. Los datos facilitados por el cliente tenían relación con la variación de peces en el recinto. En cambio, se nos pedía una función a partir de la cual se pudiera saber el número de peces en un instante de tiempo cualquiera, es por ellos por lo que hemos necesitado utilizar una EDO que nos permitiese relacionar la variación de peces con la información requerida.

Imagen 5.3.29

Milagros y Silvia, en el informe, sólo consideran el caso en que $a \succ 0$ y ese es el que representan gráficamente con tres gráficas disjuntas según el rango en que se encuentre el valor inicial de la población de peces (ver anexo B.2.1.M).

Aspectos Conceptuales	*Uso de procesos y procedimientos matemáticos*	*Heurísticas*
Establecer relaciones entre diferentes representaciones matemáticas de una misma situación hipotética. Uso del concepto de derivada para indicar monotonía de cierta cantidad. Interpretación del significado de la expresión $\frac{df}{dt}$. Relación entre la constante de integración y un problema de valores iniciales. Función exponencial: representación gráfica y propiedades. Uso de las inecuaciones para analizar el signo de una expresión algebraica. Considerar que $x^2 > x$, para todo x. Identificación de las variables en el sistema de representación gráfico. Representación gráfica de las funciones cuadráticas. Uso de la derivada como función de una función[44]. Representación gráfica donde una función es la variable independiente. Interpretaciones del concepto de límite. Significado de tasa.	Cálculo de límites. Proceso de generalización. Proceso de argumentación. Proceso de abstracción. Proceso de representación. Proceso de interpretación.	Búsqueda de patrones. Ensayo y error. Asociar términos lingüísticos con representaciones matemáticas. Basarse en lo empírico.

Tabla 5.3.30: Esquema de los aspectos observados en el desarrollo del problema 3

[44] En las EDO no autónomas de la forma, $\frac{dy}{dt} = f(y,t)$, la derivada es una función que depende de dos variables, una de ellas una función. En el caso de ecuaciones de la forma $\frac{dy}{dt} = f(y)$, al representar gráficamente la función derivada frente a y, la variable dependiente (en este caso y) se está convirtiendo en la dependiente. Esto provoca dificultades como han mostrado Rasmussen (2001) y Guerrero et al. (2010).

Con este análisis global del desarrollo del Módulo de Enseñanza por parte de todos los estudiantes que participaron en esta fase de la investigación, se puede observar que la forma en que se han diseñado los problemas del Módulo han contribuido a que los estudiantes utilicen diferentes significados asociados a un mismo concepto matemático (función, derivada o límite) y establezcan relaciones entre ellos mismos y con otros conceptos. También ha promovido la identificación, por parte de los alumnos, de conceptos matemáticos representados de forma gráfica y el uso de propiedades numéricas. En resumen, para el desarrollo de los problemas del Módulo de Enseñanza, los alumnos han tenido la necesidad de recurrir al conjunto de sus conocimientos matemáticos, analizar cómo utilizarlos y reflexionar sobre la conveniencia de hacerlo. Por otra parte, el propio diseño de los problemas también hizo que los alumnos utilizaran procesos relacionados con el PMA (abstracción, generalización, representación o interpretación). El estudio de las heurísticas empleadas por los alumnos requiere de un análisis más detallado del proceso de resolución puesto que, cuando se presenta la resolución de un problema, normalmente, sólo se muestran los razonamientos que se consideran que son válidos. El análisis exclusivo de la documentación escrita por los estudiantes hace que se pierda una información muy valiosa, sobre los diferentes planteamientos realizados para responder a determinada cuestión. Por esta razón se considera necesario realizar el análisis local, de las trayectorias de aprendizaje de cuatro de las parejas de estudiantes.

5.4. Análisis local del desarrollo del Módulo de Enseñanza

La sección anterior correspondía a un análisis global del desarrollo de los tres problemas que constituyen el Módulo de Enseñanza. En esta sección se describen las rutas o trayectorias de aprendizaje específicas de cuatro de las parejas de estudiantes (Milagros y Silvia; Nicolás y Mar; Virginia y Carmen; Alexis y Zoraida).

El análisis de las respuestas de los estudiantes al cuestionario C-D (sección 5.2) permite situar a estos ocho alumnos según las tipologías de comportamiento descritas en la tabla 5.2.9. En dicha tabla se observa que Virginia y Carmen se encuentran agrupadas dentro del perfil 1, cuya característica más destacada es que los estudiantes incluidos en esa categoría mostraron relacionar el concepto de derivada de una función, a lo sumo, con dos significados diferentes. En el otro extremo se sitúan Nicanor y Mar, ambos agrupados en el perfil 4, donde se encuentran los estudiantes que muestran conocer tres o más significados asociados a la derivada, además del simbólico y llegan a plantear una EDO para resolver la última actividad del cuestionario C-D, cuando aún no había sido introducido el concepto. Las otras dos parejas están formadas por estudiantes con tipologías de actuación diferentes: Milagros y Silvia se corresponden con los perfiles 4 y 1 respectivamente; mientras que Alexis y Zoraida se sitúan en los perfiles 2 y 4, respectivamente. Milagros y Silvia se diferencian en que la primera asocia el concepto de derivada de una función con cinco significados diferentes y llega a utilizar este concepto para plantear una EDO y resolverla cuando aún no se ha introducido el concepto, mientras que Silvia sólo lo relaciona con la pendiente de la recta tangente a la función en un punto (tabla 5.2.2). Las diferencias entre Alexis y Zoraida radican en que Zoraida muestra menos fluidez en el uso de las reglas de derivación pero, por otra parte, hace uso del concepto de derivada para resolver una actividad planteando una EDO e indicando sus soluciones. Tanto Alexis como Zoraida utilizan tres o más significados del concepto de derivada para responder al cuestionario C-D.

Otro de los aspectos que se consideraron para seleccionar a estas cuatro parejas fue la riqueza y diversidad de la información que proporcionaron, mostrada en parte en el análisis global (sección 5.3).

La descripción de las rutas de aprendizaje de cada una de estas parejas comienza con una breve referencia a los recursos con los que cada uno de los miembros de la pareja parte para el desarrollo del Módulo de Enseñanza. Para ello se utilizaron sus respuestas al cuestionario de la derivada (anexos B.2.1.D, B.2.2.D, B.2.3.D, B.2.4.D y B.2.8, en el CD), primer instrumento a analizar. A continuación se describe cómo han desarrollado cada una de estas parejas los tres problemas que forman el Módulo de Enseñanza. La descripción de las rutas de aprendizaje de los estudiantes mostradas en los problemas 2 y 3 (*Contaminación de mercurio y Dinámica de poblaciones,* respectivamente) se presentará dividida según las etapas de resolución que se estén describiendo, al igual que se hizo en el análisis global.

Los instrumentos utilizados para realizar este análisis se describieron en las secciones 3.3.2 y 3.3.3 de la Metodología de la investigación, incluyendo el objetivo con que se había diseñado cada uno de ellos. En el caso particular del problema 4 (*Investigaciones policiales*), una vez realizado el análisis global del desarrollo del Módulo, se consideró la necesidad de darle un uso diferente al que inicialmente se había propuesto, con el objetivo de que su análisis aportara nuevos elementos para responder a las preguntas de investigación. En ese sentido, se utilizó la resolución de los estudiantes a este problema y las entrevistas realizadas con base en dicha resolución, para profundizar en algunos de los aspectos observados en el análisis de las trayectorias de aprendizaje de cada una de las cuatro parejas.

En el análisis del proceso de resolución de los problemas mostrado por cada pareja se reflejan los aspectos relacionados con el desarrollo de la competencia matemática, tal y como ha sido definida en el Marco Conceptual. Al finalizar el análisis de los tres problemas del Módulo de Enseñanza, para cada pareja, se presenta una tabla en la que se resumen los aspectos conceptuales que han utilizado, la fluidez que muestran en el uso de los procedimientos matemáticos que han necesitado utilizar, las heurísticas empleadas para responder a diferentes cuestiones y las muestras que han dado de control del propio proceso de resolución. A medida que se van describiendo los elementos señalados, se irán presentando, además, las características generales de la interacción que se produce entre los estudiantes y con la Voyage™200.

5.4.1 Milagros y Silvia

En cuanto a la red de significados asociados al concepto de derivada, Milagros y Silvia relacionan el concepto con la pendiente de la recta tangente en un punto (asociado con lo que Thurston, 1994, denomina significado geométrico de la derivada). Silvia no muestra reconocer ningún otro uso de la derivada, mientras que Milagros añade otros cuatro significados a su red conceptual: definición formal, monotonía, variación y velocidad).

Aunque Silvia reconoce la relación entre la derivada de una función en un punto y la pendiente de la recta tangente a dicha función en ese mismo punto, como refleja el hecho de que haya resuelto correctamente la pregunta 5 del cuestionario de la derivada (Imagen 5.4.1.1), no tiene la habilidad suficiente para utilizar ese significado en preguntas como la 4 o la 6. Una posible lectura de esta circunstancia es que Silvia esté asociando este significado de la derivada a un tipo concreto de actividades, lo que muestra cierta debilidad en la comprensión conceptual del significado geométrico del concepto. De hecho, la respuesta de Silvia a la pregunta 6 contrasta con el significado que esta alumna indica de la derivada en la pregunta 2: "*la derivada es la tangente a la trayectoria, en un punto, de la función*".

$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 1 = 4$ pendiente de la recta

Pregunta 5

La derivada será creciente o decreciente dependiendo del lugar donde nos situemos en la gráfica.

Pregunta 6

Imagen 5.4.1.1: Respuestas de Silvia a las preguntas 5 y 6

La situación de Milagros es diferente, aunque asocia cinco significados diferentes al concepto de derivada de una función (definición formal, pendiente, monotonía, variación y velocidad), no todos los utiliza de forma correcta. Por ejemplo, comete un error al responder a la pregunta 9 del cuestionario, relacionando el límite del cociente incremental con el valor numérico de la derivada en un punto y no con la función derivada. Sus respuestas a las preguntas 7 y 8 reflejan que tiene dificultades con el uso de la definición formal del concepto de derivada (Imagen 5.4.1.2).

Es como varía la posición con el tiempo, es decir, la derivada de f(t).

Pregunta 7

. Es la derivada de la función f(t) en un punto determinado.

Pregunta 8

el límite es la derivada de la función en un punto

Pregunta 9

Imagen 5.4.1.2: Respuestas de Milagros a las preguntas 7,8 y 9 respectivamente

Milagros, al igual que ocurrió con Silvia, reconoce la derivada de una función en un punto como la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto, puesto que responde correctamente a la pregunta 5, pero no utiliza correctamente este significado en su respuesta a la pregunta 4, en la que debe encontrar la expresión de una función cuadrática que sea tangente a la función $f(x)=3x$ en el punto $x=1$. Las dificultades que parece tener Milagros están relacionadas con la expresión algebraica general de una función cuadrática (utiliza el caso particular $g(x)=x^2+k$), y el significado de tangencia, tanto algebraico como gráfico (Imagen 5.4.1.3).

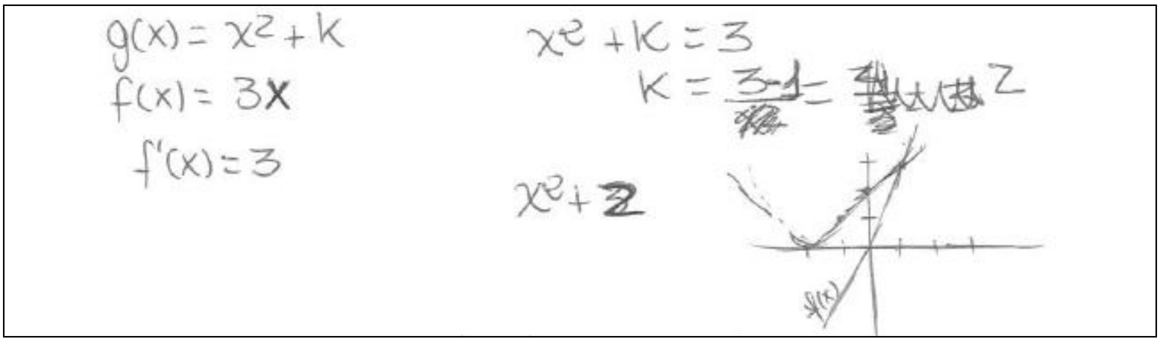


Imagen 5.4.1.3: Milagros no utiliza correctamente el significado geométrico de la derivada

Por otra parte, aunque esta alumna describe correctamente la derivada de la función representada gráficamente en la pregunta 6, empleando el criterio de la primera derivada para describir la monotonía de funciones, no muestra ningún indicio de estar relacionado este criterio con la pendiente de las rectas tangentes a la función en distintos puntos. Por último, Milagros sí utiliza correctamente la relación entre la derivada de una función y la velocidad de cambio para responder a la pregunta 11, proponiendo las expresiones $p(t)=kt$ y $p'(t)=k$ para referirse a una cantidad de peces, $p(t)$, que aumenta a velocidad constante, aunque no explicita que dicha constante sea positiva. Con esta respuesta, Milagros ya ha iniciado el camino hacia la construcción del concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria.

Las características de esta pareja, en lo que a sus respuestas al cuestionario de la derivada se refiere, se presentan de manera esquematizada en la siguiente tabla (tabla 5.4.1.4), en la que se refleja la disparidad entre ellas en cuanto a los aspectos de tipo conceptual.

	Conceptos: significados asociados a la derivada	*Procedimientos*
Silvia		Simplifica expresiones algebraicas sacando factor común.
Aspectos comunes	Pendiente[45]	Utilizan las reglas de derivación con fluidez.
Milagros	Definición formal (con errores) Monotonía Variación Velocidad	Simplifica fracciones algebraicas.

Tabla 5.4.1.4: Características de Silvia y Milagros según el cuestionario de la derivada

[45] No muestran habilidad para usarlo en la resolución de problemas.

Problema 1: Desintegración del uranio

En el análisis global (sección 5.3) se adelantaron algunas de las características del comportamiento de Milagros y Silvia frente a la resolución de los tres problemas del Módulo, en particular del problema 1, *Desintegración del uranio.* En dicha sección se establecieron los diferentes aspectos de tipo conceptual que surgieron durante la resolución de esta actividad y la fluidez que los estudiantes mostraban en el uso de los procedimientos matemáticos (principalmente la derivación y la integración).

La parte del problema en la que se debía hacer uso de estos procedimientos la realizó Milagros de manera individual, debido a que Silvia tuvo que ausentarse del aula. Milagros mostró fluidez en el uso de los procedimientos de derivación e integración, aunque dudó en la aplicación de la propiedad $(f+C)'=f'$, donde C es una constante cualquiera.

Algunos de los aspectos conceptuales que surgieron durante el desarrollo de este problema fueron: el uso del concepto de función para indicar dependencia del tiempo, la relación entre la derivada y fenómenos de aumento o disminución de una cantidad o de velocidad de cambio, la existencia de infinitas funciones con una misma derivada y la relación que existe entre ellas, así como utilizar una expresión algebraica de una función en la que aparezca una resta para indicar que una cantidad disminuye.

Este problema comienza pidiendo a los estudiantes que expresen en términos matemáticos dos situaciones: que la cantidad de átomos de uranio que hay en un material depende del tiempo que haya pasado y que no varíe. Milagros y Silvia, aunque dudan de que su respuesta sea correcta, utilizan el concepto de función para indicar la primera situación (Trascripción B.2.1.TU, intervenciones [1,7]). En este caso buscan la confirmación de su respuesta por parte de los profesores presentes en el aula. Representar en lenguaje matemático que el número de átomos no varía es un proceso que les supone mayor dificultad. Las reflexiones que hacen para responder a esta pregunta permiten observar que la dificultad está en la forma de utilizar la terminología matemática y no en un aspecto conceptual. Milagros y Silvia relacionan la situación con una función constante que no consiguen expresar en términos matemáticos, tal y como muestra el tramo de discusión que se incluye a continuación.

(18) S: El número de átomos no varía, no varía con el tiempo. ¡Es una constante! [*Silvia vuelve a repetir el argumento anterior*] (19) M: ¿Qué pongo u igual a constante? (20) S: No pongas igual a nada sino simplemente escribe que u es una constante.

Trascripción B.2.1.TU, intervenciones [18,20]

En el tiempo que esta pareja dedica a responder a esta pregunta del problema, en una ocasión observan las preguntas posteriores (Silvia) y en otra ocasión comparan con la pregunta anterior (Milagros). El primer proceso se puede considerar como una heurística de resolución, puesto que Silvia busca un indicio de qué se espera que responda. El hecho de que Milagros compare su respuesta con una pregunta anterior es una forma de comprobar si su respuesta es correcta o no, una estrategia metacognitiva (Schoenfeld, 1992).

En la trascripción de las intervenciones que hacen las dos alumnas mientras tratan de expresar en términos matemáticos que la cantidad de átomos de uranio no varía (Trascripción B.2.1.TU, intervenciones [8,20]), se puede observar que Milagros distingue entre las expresiones $f(t)$ y f, considerando que en el último caso se trata de una constante, lo que puede esconder algún error de concepción o de interpretación de la expresión algebraica de una función constante. Esto vuelve a reflejarse en la respuesta escrita que presenta a la siguiente pregunta donde se le pide que exprese de otra forma el hecho de que la función no dependa del tiempo (Imagen 5.4.1.5).


$u'(t) = 0$ o $u = K$, siendo K un número real cualquiera.

Imagen 5.4.1.5: Dos formas de representar que una función no depende del tiempo

Para introducir el uso del concepto de derivada para expresar situaciones de variación, se pide a los estudiantes que expresen de dos formas diferentes que la cantidad de uranio no varía, en términos de la función y de su derivada. Esta pregunta está íntimamente relacionada con la pregunta 11 del cuestionario de la derivada (anexo A.2.D) en la que también se pedía expresar una situación hipotética en términos matemáticos, empleando una función y su derivada. En este caso, es Silvia quién propone el uso del concepto de derivada para expresar que la cantidad de uranio no varía, aunque necesita apoyarse nuevamente en uno de los profesores presentes en el aula (Trascripción B.2.1.TU, intervenciones [21,24]). En la búsqueda de la respuesta a esta pregunta surge un comportamiento de Silvia que requiere ser analizado, correspondiente a la trascripción que se muestra a continuación.

(27)	S: Pero ¿qué sería, u(t)? […] De todas maneras sería 238, ¿no? Dice uranio 238. [*Silvia asocia el número 238, que indica un tipo de uranio, con el valor que están buscando.*]
(28)	M: ¿u=238? No, porque el 238 es dentro del uranio y aquí te dice que un mineral contiene átomos, no te dice cuántos.
(29)	S: Pero el uranio es 238.
(30)	M: Pero no hay 238 átomos de uranio en el mineral.

Trascripción B.2.1.TU, intervenciones [27,30]

En esta parte de la trascripción de la discusión, en la que están tratando de representar en lenguaje matemático que la cantidad de uranio que hay en un cuerpo permanece constante, Silvia relaciona un valor numérico que aparece en el enunciado del problema (238) con el valor de la función. Este proceso, según el cuál un individuo, para resolver un problema matemático, se centra en los valores numéricos que aparecen en su enunciado y realiza operaciones con los mismos de forma poco reflexiva, es considerado por Kilpatrick et al. (2009) como signo de no haber desarrollado suficientemente la competencia estratégica. La intervención de Milagros sirve, en este caso, de herramienta de control de la respuesta, explicando a su compañera el significado del valor numérico que aparece en el enunciado.

Los intentos que hacen para indicar que la cantidad de uranio 238 que hay en un material en cualquier instante de tiempo disminuye, están relacionados con conocimientos que han adquirido en otras materias, probablemente dedicadas a la física, pero también con el hecho de que establecen relaciones que en algunas situaciones pueden ser válidas pero que en esta no lo son (Trascripción B.2.1.TU, intervenciones [31,67]). Milagros y Silvia asocian la disminución de una cantidad con el uso de una expresión algebraica que contemple una resta, como refleja la siguiente afirmación de Silvia "va disminuyendo, eso es un menos" (Trascripción B.2.1.TU, intervención {40}). En el transcurso de la búsqueda de dicha expresión algebraica surgen argumentos empíricos, como la imposibilidad de que una expresión de la forma $u(t)-t$ sea válida porque "se le está restando el tiempo a la cantidad de uranio". Este tipo de argumentos ha sido detectado por otros investigadores en el trabajo con problemas enunciados en un contexto real, desde el punto de vista de la Educación Matemática Realista (Rasmussen & Ruan, 2008).

Milagros y Silvia concluyen finalmente esta primera parte de la actividad, en la que prevalece el proceso de representación de cierta información en el lenguaje matemático, respondiendo correctamente a todas las cuestiones. Milagros muestra que establece una relación correcta entre el signo de la derivada de una función y el significado de aumento o disminución de cierta cantidad, representada por dicha función. Silvia, por su parte, sólo ha mostrado relacionar la derivada con situaciones en las que no exista variación.

(63) P: ¿Eso no lo puedes hacer en general? El número de átomos va disminuyendo, ¿qué valores puede tomar u'(t) en esos casos?
[*El profesor las guía en la consideración de casos particulares.*]
(64) S: Negativos, ¿dices tú? [*Refiriéndose a Milagros*]
[*Milagros había leído la siguiente pregunta y había comentado que la derivada de u tomaba valores negativos.*]
(65) S: Entonces ponemos que la derivada es negativa y ya está.
[*Milagros escribe* $u'(t)<0$]
(66) S: ¿Así y ya está? [*Silvia no se siente segura con la notación matemática*]
(67) M: Si

Trascripción B.2.1.TU, intervenciones [63,67]

Una última cuestión que conviene mencionar de esta parte del problema es que hay una pregunta que motiva que las estudiantes consigan expresar de forma general que una cantidad está disminuyendo y esa pregunta tiene que ver con el planteamiento de casos particulares como heurística de resolución. Milagros y Silvia no habían conseguido expresar, en términos matemáticos, que la cantidad de uranio 238 de un cuerpo disminuía, hasta que Milagros leyó la siguiente cuestión: "*¿Qué valores puede tomar* $u'(t)$ *?*". Estas alumnas no han utilizado esta estrategia de forma autónoma, sino que su uso ha sido inducido por la actividad, y ha resultado fundamental para el desarrollo de la misma. Otras heurísticas que han surgido a lo largo del desarrollo de esta actividad es la comparación de la pregunta que se plantea en un momento determinado con otras cuestiones anteriores o posteriores.

Las siguientes preguntas de esta actividad las realiza Milagros de manera individual, ya que su compañera se ausenta del aula. Esto nos resta una componente de interacción, pero nos permite observar qué ha entendido Milagros de la primera parte de la actividad y cómo la continúa. Milagros establece correctamente qué expresiones puede tener la función $u'(t)$ y cuáles no, teniendo en cuenta cuál es la situación particular que se está considerando. Las preguntas en las que se les daba directamente las posibles opciones las contestó más rápidamente que aquella en la que la respuesta era abierta (*Indica otras dos posibilidades para la expresión de* $u'(t)$), que incluso deja sin resolver, en un primer instante, siguiendo con las otras preguntas de la actividad. En todas las preguntas de esta parte de la actividad, Milagros utiliza argumentos relacionados con el contexto en que se ha enunciado el problema (Imagen 5.4.1.6).

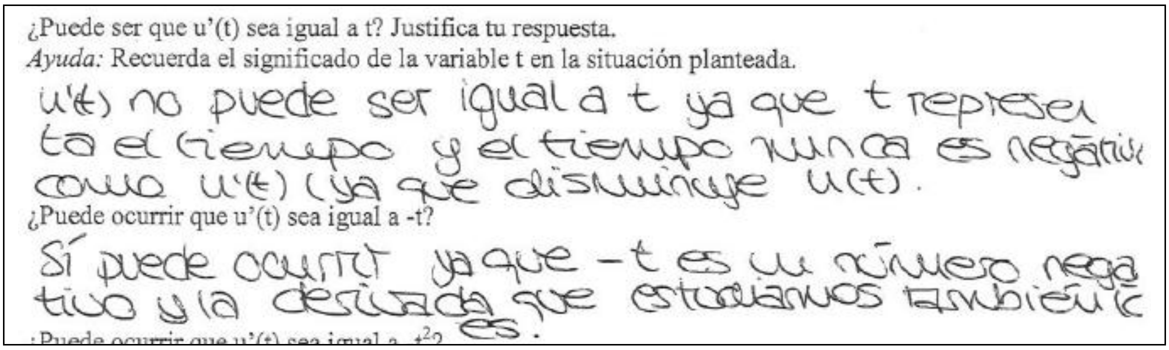

¿Puede ser que u'(t) sea igual a t? Justifica tu respuesta.
Ayuda: Recuerda el significado de la variable t en la situación planteada.
u'(t) no puede ser igual a t ya que t represen ta el tiempo y el tiempo nunca es negativo como u'(t) (ya que disminuye u(t).
¿Puede ocurrir que u'(t) sea igual a -t?
Sí puede ocurrir ya que -t es un número nega tivo y la derivada que estudiamos también lo es.

Imagen 5.4.1.6: Argumentos relacionados con el contexto de la situación planteada

En otra de sus respuestas (imagen 5.4.1.7), Milagros relaciona la derivada con la velocidad de cambio, en el sentido indicado por Thurston (1994).

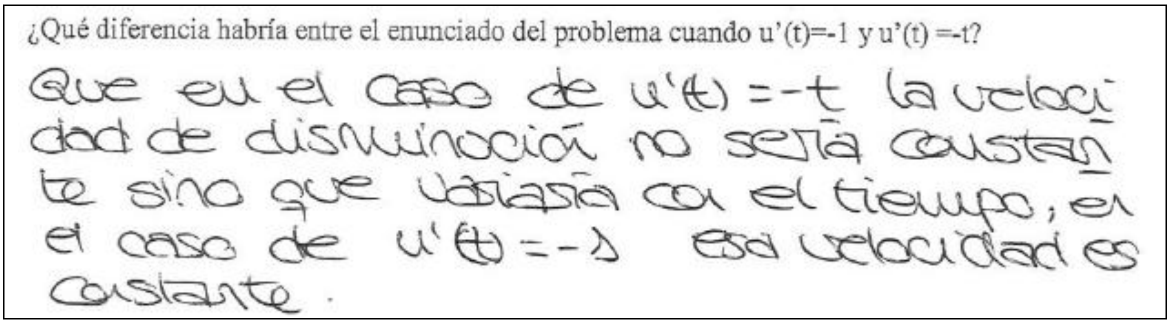

¿Qué diferencia habría entre el enunciado del problema cuando u'(t)=-1 y u'(t) =-t?
Que en el caso de u'(t) = -t la veloci dad de disminución no sería constan te sino que variaría con el tiempo, en el caso de u'(t) = -1 esa velocidad es constante.

Imagen 5.4.1.7: Milagros relaciona la derivada con la velocidad de cambio

Finalmente se ha podido constatar que Milagros no ha asimilado propiedades de la función derivada tan elementales como que $(f+C)'=f'$, siendo C una constante cualquiera, lo que muestra al dudar para indicar un segundo ejemplo de función cuya derivada sea $-t$, $-t^2$ ó $-\frac{t}{2}$, aunque finalmente lo hace de forma correcta (Imagen 5.4.1.8).

$-t$	$u_2(t) = -\frac{t^2}{3}$ $u_3(t) = 10 - \frac{t^2}{2}$
$-t^2$	$u_2(t) = -\frac{t^3}{3}$ $u_3(t) = 6 - \frac{1}{3}t^3$
$\frac{-t}{2}$	$u_2(t) = -\frac{t^2}{4}$ $u_3(t) = 15 - \frac{1}{4}t^2$

Imagen 5.4.1.8: Milagros utiliza el procedimiento de integración

Aunque no se dispone de información acerca de cómo se desenvuelve Silvia en el uso de procedimientos matemáticos durante el desarrollo de este primer problema del Módulo de Enseñanza, esta alumna, en los otros dos problemas del Módulo y en el problema 4, *Investigaciones policiales,* mostró fluidez en el uso de procedimientos como el cálculo de límites de funciones y la resolución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias empleando el método de separación de variables. Silvia, pudiendo utilizar la calculadora Voyage^{TM}200, optó por utilizar lápiz y papel para realizar estos cálculos o hacerlos de forma directa, sin necesidad de escribir (Imagen 5.4.1.9).

$$T'(t) = (T_0 - T)\,k.$$

$$\frac{dT}{dt} = (T_0 - T)k. \longrightarrow \frac{dT}{T_0 - T} = dt\,.\,k$$

$$\int \frac{dT}{T_0 - T} = k\int dt \longrightarrow -\ln(T_0 - T) + c_1 = kt + c_2.$$

$$T_0 - T = e^{-kt+c} \Longrightarrow T = T_0 - e^{-kt+c}.$$

Resolución de la EDO

S: Si el tiempo es infinito, esto sería cero ¿no? [...] Sería e elevado a menos infinito [...] Que es igual que poner uno partido por e elevado a infinito; e elevado a infinito es infinito. Algo partido por infinito, es cero. Entonces te quedaría que el tiempo… la temperatura del cuerpo es igual a la temperatura del medio.

Cálculo del límite de la función $T(t) = 15.5 + 11.2e^{-0.143841t}$, en el infinito

Imagen 5.4.1.9: Fluidez en los procedimientos matemáticos por parte de Silvia

Al inicio del desarrollo de este primer problema del Módulo de Enseñanza, Milagros y Silvia se mostraron muy inseguras en sus respuestas, algo que se vió reflejado en el hecho de que hayan requerido de la ayuda de alguno de los miembros del equipo de investigación en numerosas ocasiones durante la resolución de las primeras preguntas del problema, con el objetivo de comprobar si sus respuestas eran válidas. (Trascripción B.2.1.TU, intervenciones [1,7] $\cup$ [21,27]). En Silvia se ha detectado, además, cierta inseguridad ante el uso de expresiones algebraicas para indicar diferentes situaciones (Trascripción B.2.1.TU, intervenciones [65,66]).

(65)	S: Entonces ponemos que la derivada es negativa y ya está. [*Milagros escribe* $u'(t) < 0$]
(66)	S: ¿Así y ya está? [*Silvia no se siente segura con la notación matemática*] M: Si

Trascripción B.2.1.TU, intervenciones [65,66]

Otra característica que hay que mencionar de esta pareja es que muestran ser reflexivas, no responden a las preguntas de forma impulsiva sino que reflexionan acerca de su validez. En este sentido se puede decir que la estrategia más utilizada por esta pareja para comprobar si sus respuestas eran correctas consistió en preguntar a los diferentes miembros del equipo de investigación.

Por último, el enunciado de la mayoría de las preguntas de esta actividad persigue que los estudiantes establezcan relaciones entre diferentes expresiones algebraicas y distintas situaciones hipotéticas de un contexto químico. El hecho de que estas alumnas contesten correctamente a estas preguntas nos dice que realizan conversiones entre los contextos.

Problema 2: Contaminación de mercurio

Milagros y Silvia comienzan la resolución de este problema dividiéndose el trabajo, con lo que casi no interactúan, sólo cuándo a alguna de ellas les surge alguna duda, en cuyo caso recurren a alguno de los tres profesores presentes en el aula.

<u>*Actividad inicial*</u>

Estas alumnas, redactan un informe inicial en el que identifican la información del enunciado relevante para su resolución, mostrando que no se limitan a re-escribir el texto sino que reflexionan acerca de la situación. Esta reflexión se puede observar en frases como "manteniéndose, por tanto, el volumen constante" (Imagen 5.4.1.10). Silvia considera que "todo lo que esté en números ahí [el enunciado del problema] es relevante" (Trascripción B.2.1.TM, intervención {14}), razonamiento que en el problema anterior la llevó a considerar que la cantidad de uranio que había en el cuerpo era 238 (valor numérico que aparecía en el enunciado y que hacía referencia a un tipo de uranio). Según Kilpatrick et al. (2009) este tipo de argumentos puede ser indicativo de falta de desarrollo de la competencia estratégica.

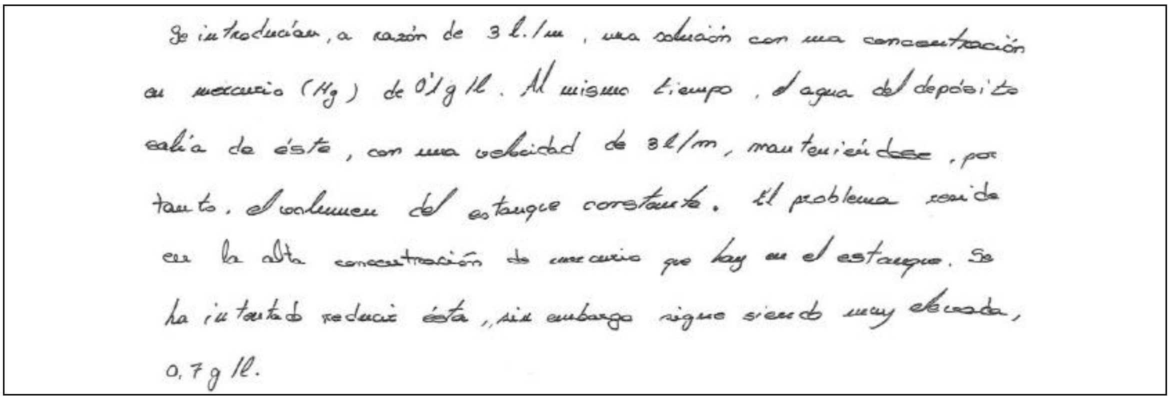

Se introducían, a razón de 3 l./m, una solución con una concentración en mercurio (Hg) de 0'1 g/l. Al mismo tiempo, el agua del depósito salía de éste, con una velocidad de 3 l/m, manteniéndose, por tanto, el volumen del estanque constante. El problema reside en la alta concentración de mercurio que hay en el estanque. Se ha intentado reducir ésta, sin embargo sigue siendo muy elevada, 0,7 g/l.

Imagen 5.4.1.10: Parte del informe inicial redactado por Milagros y Silvia

Comprensión y análisis de la situación

En el momento de plantear una forma de abordar el problema, Milagros y Silvia consideran que están ante una situación que debe ser resuelta desde el punto de vista químico, como “dejar de meter mercurio en el agua que entra” (Trascripción B.2.1.TM, intervenciones [29,40]). Aspectos como este, donde los estudiantes utilizan razonamientos empíricos en lugar de matemáticos, fueron mostrados por Rasmussen & Ruan (2008) en el transcurso de una investigación acerca del uso del teorema de existencia y unicidad de soluciones como herramienta para la resolución de problemas.

El inicio, por parte de estas estudiantes, de la etapa 2 del problema, en la que prevalece el proceso de representación de la situación hipotética en términos matemáticos, permite observar que Silvia tiene dificultades con la comprensión del concepto de función. En el desarrollo del problema anterior, esta pareja mostró dudas sobre el uso de las funciones constantes. En este problema, utilizan la expresión $\frac{p(t)}{1000}$ para indicar la cantidad de mercurio que hay dentro del estanque en cualquier instante de tiempo, lo que no es correcto, puesto que en el enunciado del problema se ha indicado que es la función $p(t)$ la que representa dicha cantidad. Este error permite detectar que Silvia no considera la expresión $\frac{p(t)}{1000}$ como una función porque indica la cantidad de mercurio y una cantidad, según esta alumna, es un valor numérico, no una función (Trascripción B.2.1.TM, intervenciones [48,54]). La conjunción de un argumento empírico, como que la cantidad de algo viene expresada por un número, con un error conceptual, mostrado también por esta pareja en el episodio anterior y que consiste en no considerar las constantes como casos particulares de funciones, ha desembocado en un nuevo error, considerar que la expresión $\frac{p(t)}{10000}$ no es una función, a pesar de reconocer que $p(t)$ sí lo es.

Mientras que en el problema anterior fue Milagros quién llevó la iniciativa ante el proceso de representación de la situación hipotética en términos matemáticos, en este problema, Silvia es quién explica a su compañera cómo expresar la cantidad de mercurio que sale del depósito, por minuto, en función de la proporción de dicho material que hay en el interior (Trascripción B.2.1.TM, intervenciones [70,78]). Como heurística, Silvia consideró las unidades de medida como referente de las operaciones que necesitaba realizar.

S: Hay que poner esto $\frac{p(t)}{10000}$ gr/l, multiplicar por no sé qué, para que se vayan [se refiere a los litros]. [...] Esta es la cantidad que sale por litro, hay que quitarlo [señalando a la magnitud litros] y poner litros por… ¿sabes?
M: La cantidad son los gramos por minuto.
S: Pues poner, un litro son tantos.
[...]
M: Tres litros por minuto salen del estanque, ya que dijimos que entran 3l/m.
S: ¿Y qué? 3 l/m pero en esos 3l/m … es que tú no lo sabes tía, tienes que utilizar esto [$\frac{p(t)}{10000}\frac{g}{l}$]. A ver… “*Indica la cantidad de mercurio que sale del estanque por minuto*”… si la cantidad en un momento dado es esta $\left[\frac{p(t)}{10000}\right]$ tienes que tener en cuenta esto y la cantidad de

agua que sale. No puedes multiplicar y ya está…
M: ¿Qué?…
S: Salen tres litros por minuto… Pero aquí te está preguntando la cantidad de mercurio, no la cantidad de agua que sale.
M: Ah, vale. Sale esa cantidad de mercurio… en cada litro… y salen tres litros por minuto. Sería esa cantidad por los litros que salen, la cantidad que sale.

Trascripción B.2.1.TM, intervenciones [70,78]

La última parte importante de la etapa 2 de este problema consiste en utilizar el proceso de representación para expresar cómo varía la cantidad de mercurio dentro del depósito. Milagros y Silvia relacionan la variación con el concepto de derivada, con $p'(t)$, la dificultad y donde cometen el error es al interpretar esta variación como la diferencia entre la cantidad de mercurio que entra en el depósito y la que sale. En lugar de esto consideraron que la variación es esa diferencia más la cantidad de mercurio que, en ese momento haya en el depósito (Trascripción B.2.1.TM, intervenciones [117,118]).

$$\cancel{\frac{p(t)}{1000}} + 0'3 - \frac{3p(t)}{10.000} = p'(t).$$

Instantes después de que Milagros y Silvia escribieran esa expresión matemática, el profesor escribe la Ecuación Diferencial Ordinaria que modela esta situación de variación $\left[p'(t) = 0.3 - 0.0003p(t)\right]$. A pesar de que no coincide con lo que ellas han obtenido, aceptan la expresión presentada por el profesor sin cuestionarla ni analizar las razones por las que su propuesta no era válida. Este es un ejemplo del efecto que el llamado "conocimiento institucional" ejerce sobre el proceso de resolución de problemas de los estudiantes. El no reflexionar sobre su error, podría hacer que volvieran a cometerlo.

Solución de casos particulares

Milagros y Silvia comienzan la etapa 3 de este problema utilizando la expresión de la ecuación dada por el profesor, $p'(t) = 0'3 - 0'0003p(t)$. En las primeras cuestiones de esta etapa, los estudiantes deben identificar si dicha ecuación se corresponde con una EDO y clasificarla. Milagros y Silvia se apoyan en los apuntes que han tomado de la explicación del profesor para indicar qué elementos de la ecuación $p'(t) = 0'3 - 0'0003p(t)$ les han llevado a afirmar que se trata de una EDO de primer orden, aunque en la siguiente trascripción de su discusión podemos ver que Silvia no ha comprendido del todo este concepto.

¿Qué elementos aparecen en la ecuación que hacen afirmar que se trata de una EDO y que ese es su orden?

S: [dirigiéndose a M] Saca la teoría que lo voy a escribir aquí.
M: Pon es una ecuación diferencial...
S: ¿Qué elementos aparecen?
M: Los elementos que intervienen son la variable independiente, la función y sus derivadas
S:[Escribe] La variable independiente de la función y sus derivadas

La variable independiente de la función y su derivada.
Y es de 1er orden pues la derivada que aparece es una derivada primera.

Trascripción B.2.1.TM, intervenciones [139,143]

El argumento empleado para la clasificación de la EDO se basa en la apariencia de la misma, no hace alusión al significado del proceso en sí, sino que compara la forma de la ecuación obtenida con las expresiones generales mostradas por el profesor al establecer la clasificación de las EDO de primer orden (Imagen 5.4.1.11).

¿Qué características de la misma te han hecho afirmar ésto? [Refiriéndose a la clasificación hecha por cada pareja]

Porque se asemeja a la expresión de una EDO de variable separable. $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$. En nuestro caso, $\frac{dp}{dt} = (0{,}3 - 0{,}0003p) \cdot 1$

Imagen 5.4.1.11: Proceso de clasificación de una EDO utilizado por Milagros y Silvia

La ecuación diferencial es resuelta por el profesor, utilizando la actividad como ejemplo que ilustra el uso del método algebraico de resolución de las ecuaciones de variables separables. Además se muestra a los alumnos cómo utilizar la calculadora Voyage™200 para resolver ecuaciones diferenciales. Milagros y Silvia copian la resolución propuesta por el profesor y practican el uso de la calculadora. De esta forma, los estudiantes han obtenido la expresión algebraica de la solución general de la EDO.

En la entrevista, Silvia muestra que no ha comprendido o no ha reflexionado sobre la definición del concepto de EDO, formalizada por el profesor antes de comenzar el desarrollo del problema 2 del Módulo de Enseñanza. Cuando se le pregunta cuál es la EDO que modela la situación planteada en el problema 4 (*Investigaciones policiales*), Silvia señala la expresión de la solución general y no la de la ecuación [$T = T_0 + 11.2 \cdot e^{-kt}$]. Indagando un poco más en su respuesta (Trascripción B.2.1.TES, intervenciones [52,57]$\cup$ [84,85]) se observó que considera que las EDO son expresiones que permiten expresar dependencia del tiempo, confundiéndola con expresiones de funciones, y la expresión algebraica de una EDO la interpreta como el resultado del procedimiento de derivación. Esta forma de interpretar una EDO también la encuentra Raychadhuri (2008) en algunos de los estudiantes con los que realiza la investigación.

I: ¿Qué es para ti esta expresión? $T'(t) = (T_0 - T) \cdot K$
S: Oh, eso es la derivada, variación de... la temperatura con respecto del tiempo. [...]
I: ¿Qué te indica que $T = T_0 + 11.2 \cdot e^{-kt}$ es una ecuación diferencial?
S: Es… no se… porque lo hemos dado… no sé [...] es la forma en la que lo hemos dado…

Trascripción B.2.1.TES, intervenciones [52,57]$\cup$ [84,85]

A continuación se les pide que calculen el valor de la constante que aparece en la expresión de la solución general, sin haber introducido el concepto de condición inicial o problema de valores iniciales. Aunque estos son conceptos definidos formalmente en el contexto matemático, los estudiantes pueden encontrarse utilizándolos sin conocer su definición formal, por la estrecha relación que guardan con conceptos matemáticos básicos. En el caso de los problemas de valores iniciales, se trata de utilizar el concepto de valor numérico de una función para determinar un parámetro de la expresión de la función, dando lugar así a una solución particular de la EDO, fruto de la condición impuesta. Milagros y Silvia han utilizado esta relación entre el valor numérico de una función y determinadas condiciones de la situación particular planteada para establecer la función, solución particular de la EDO, que modela la situación (Imagen 5.4.1.12).

Sabemos que la cantidad exacta de mercurio que hay en el depósito en el instante inicial ($t = 0$) es 0 gramos porque, en ese momento, no ha entrado nada de solución.

- Escribe esta información haciendo uso de la expresión de la función que hemos obtenido anteriormente y calcula el valor de la constante C.

Para $t=0$, $p=0$, En ese caso $\rightarrow$ $0 = C \cdot e^{0} + 1000 \Rightarrow \boxed{C = -1000}$

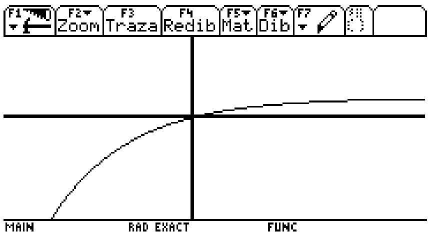
Escribe la expresión de la función que modela la cantidad de mercurio que hay en cada instante dentro del depósito y que será parte de la información que envíes a tu cliente.

$p = -1000 \cdot e^{\frac{-3t}{10000}} + 1000$.

Imagen 5.4.1.12: Milagros y Silvia usan el concepto de valor numérico de una función para obtener una solución particular de la EDO

Aunque Silvia utiliza el mismo procedimiento para calcular el valor de la constante de integración en la función que modela la situación correspondiente al problema 4, utilizado en la entrevista, no muestra la misma habilidad para utilizarlo en el cálculo de la constante de proporcionalidad de la que depende dicha expresión de la función. Silvia muestra muchas dudas sobre cómo utilizar el hecho de que exista otro dato relacionado con la temperatura del cuerpo en un instante, además de la condición inicial, para obtener el valor de la constante de proporcionalidad, siendo necesaria la ayuda del profesor para poder seguir con el desarrollo de la entrevista (Trascripción B.2.1.TES, intervenciones [30,37]).

Después de obtener la expresión de la solución particular de la EDO en el problema 2 del Módulo de Enseñanza, *Contaminación de mercurio,* los estudiantes son guiados para representar gráficamente dicha función, obtenida como solución del problema de valores iniciales, $p(t) = -1000 \cdot e^{-0'0003t} + 1000$, utilizando la Voyage™200. Las siguientes cuestiones del problema se plantean para que los estudiantes analicen dicha representación gráfica.



Representación gráfica de la función $p(t) = -1000 \cdot e^{-0.0003t} + 1000$

Inicialmente, Milagros y Silvia no reconocen la presencia de una asíntota horizontal en la gráfica, considerando que la función es estrictamente creciente (Trascripción B.2.1.TM, intervenciones [207,217]). Preguntan a Nicanor (estudiante de la pareja analizada en la sección 5.4.2) y calculan el límite de la función en el infinito, utilizando lápiz y papel. Milagros muestra más fluidez en el cálculo de límites que su compañera (Imagen 5.4.1.13).

$$\lim_{t\to+\infty} p(t) = \lim_{t\to+\infty} -1000 \cdot e^{-0{,}0003t} + 1000 = -1000 \cdot e^{-\infty} + 1000$$
$$= \boxed{1000}$$

Imagen 5.4.1.13: Procedimiento de cálculo del límite de Milagros y Silvia

Milagros y Silvia no tienen dificultad para utilizar la calculadora, pero tampoco la utilizan de forma indiscriminada, para realizar todos los cálculos, como hacen Alexis y Zoraida (sección 5.4.4). Por ejemplo, el límite de la función $p(t)$ en el infinito lo calcularon utilizando lápiz y papel, como ya hemos mostrado anteriormente. Tampoco hacen uso de la Voyage 200 como herramienta de tipo metacognitivo, que les sirva para la comprobación de los resultados obtenidos y la regulación del proceso de solución. Esta pareja confía ciegamente en los resultados mostrados por la herramienta, sin cuestionarlos, mostrando así su escasez de estrategias de auto regulación del proceso de resolución.

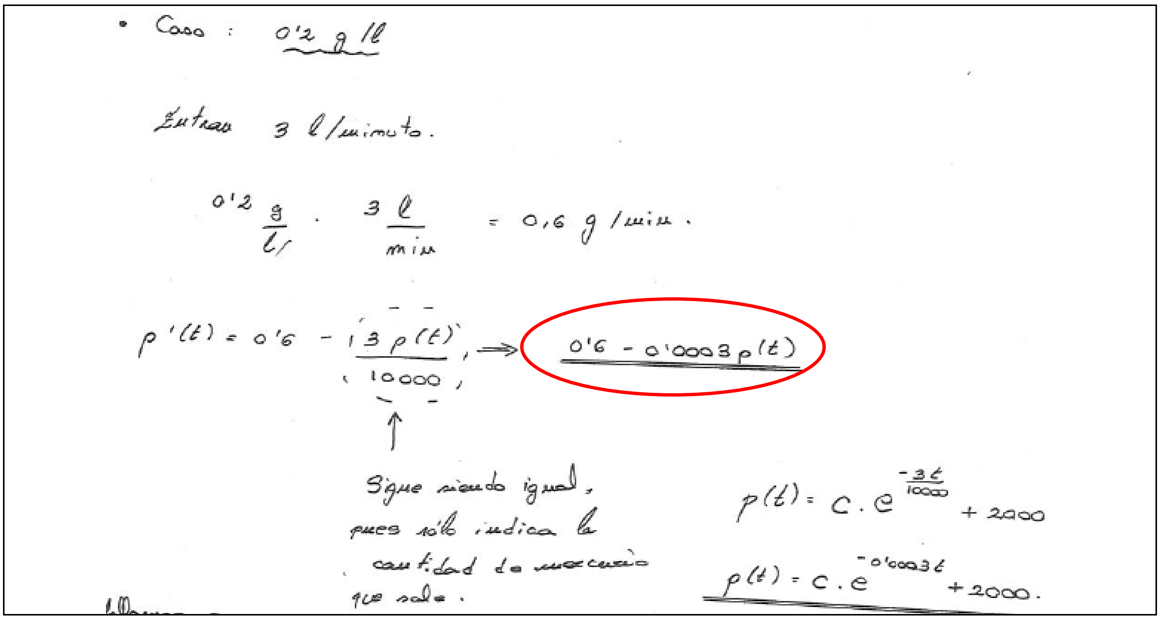
Un aspecto a destacar acerca de la relación entre esta pareja de estudiantes y la herramienta tecnológica empleada en esta investigación es que Milagros y Silvia interpretan de forma parcial la información gráfica que la Voyage 200 les proporciona acerca de la cantidad de mercurio que hay en el estanque en cualquier instante de tiempo, en el sentido de que se quedan exactamente con la parte que representa la calculadora, sin pensar que dicha representación abarca un dominio más amplio, como refleja la frase de Milagros "es que yo no veo más para allá" (Trascripción B.2.1.TM, intervenciones [207,217]).

La etapa 3 finaliza con una serie de cuestiones que tienen como objetivo determinar el grado de interrelación entre el contexto de la situación real planteada y el modelo matemático. Milagros no tiene ninguna dificultad para establecer la relación entre los enunciados de estas preguntas y las transformaciones y cálculos que necesita hacer en el contexto matemático. A Silvia le cuesta un poco más, lo que provoca que pida a Milagros explicaciones acerca de las operaciones que está haciendo (Trascripción B.2.1.TM, intervenciones [312,326]). En este caso, la interacción entre las estudiantes promueve que Milagros tenga que justificar sus argumentos y permite observar su capacidad para explicar sus razonamientos.

<u>*Planteamiento y solución de casos generales*</u>

En la etapa 4 de este problema se generaliza la situación hipotética planteada, haciendo variar cuatro de los parámetros que influyen en ella: la cantidad de mercurio que se introduce en el depósito, la velocidad a la que entra y sale la disolución, el volumen del depósito y la cantidad inicial de mercurio que hay en el depósito (anexo A.2.M). Cada uno de estos parámetros es estudiado en un apartado diferente de esta etapa del problema.

Milagros y Silvia reflexionan acerca de la relación que existe entre cada uno de los términos de la EDO planteada en el problema particular (etapa 2) y los elementos que intervienen en la situación planteada. En el primer apartado de la etapa 4 de este problema se consideran distintos valores para la cantidad de mercurio que se introduce en el depósito (0’2gr/l, 0’3gr/l, 0’4gr/l) para finalmente plantear la situación en que se introduce una cantidad m gr/l de mercurio. Milagros y Silvia identifican qué elementos de la ecuación diferencial dependen de la cantidad de mercurio que haya en la disolución que se introduce en el estanque, mostrando su capacidad de reflexión y explicando su razonamiento (Imagen 5.4.1.14 y Trascripción B.2.1.TM, intervenciones [336,342]).


• Caso: 0'2 g/l

Entran 3 l/minuto.

$$0'2\,\frac{g}{l} \cdot 3\,\frac{l}{min} = 0,6\ g/min.$$

$$p'(t) = 0'6 - \frac{3\,p(t)}{10000} \Rightarrow 0'6 - 0'0003\,p(t)$$

Sigue siendo igual, pues sólo indica la cantidad de mercurio que sale.

$$p(t) = c \cdot e^{-\frac{3t}{10000}} + 2000$$

$$p(t) = c \cdot e^{-0'0003t} + 2000.$$

Imagen 5.4.1.14: Capacidad de reflexión y explicación de Milagros y Silvia

En esta etapa del problema, Milagros y Silvia se reparten las tareas. Mientras Milagros va resolviendo las EDO de la tabla 1 con la calculadora, Silvia va escribiendo las respuestas en el documento escrito. Esto permite observar cierta falta de rigor, por parte de Silvia, a la hora de escribir la EDO que modela la situación, como podemos ver en la imagen anterior (Imagen 5.4.1.14).

Esta pareja utiliza la calculadora Voyage 200 para resolver las ecuaciones diferenciales, mientras que resuelven el problema de valores iniciales con lápiz y papel (Imagen 5.4.1.15). Resuelven los dos primeros casos, correspondientes a la introducción de 0’2gr/l y 0’3gr/l de mercurio en el estanque. Posteriormente Milagros utiliza los resultados obtenidos como patrón para establecer las soluciones de los casos siguientes, que comprueban con la calculadora ante la insistencia de Silvia. Una vez más, la interacción entre los estudiantes ha funcionado como elemento de regulación del proceso de solución. Silvia muestra haber comprendido el proceso de generalización seguido por su compañera completando ella la última fila de la tabla.

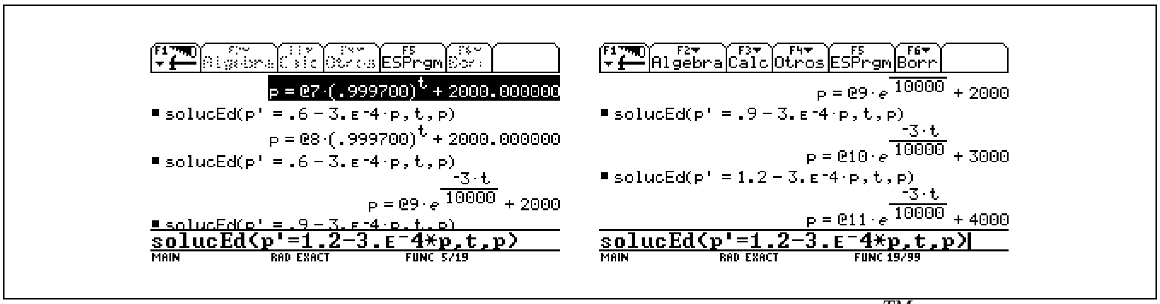


Imagen 5.4.1.15: Resolución de EDO con la Voyage^{TM}200

Sin embargo, puede estar ocurriendo que Silvia únicamente haya comprendido la parte del proceso de generalización relacionada con el procedimiento matemático, sin comprender su significado en relación con la situación hipotética planteada. La razón de que surgiera esta duda se debe al hecho de que Silvia, en la entrevista, indica que no sabe qué se le está pidiendo cuando se le habla de proponer una EDO que modele una situación más general que la indicada en el enunciado del problema 4, *Investigaciones policiales* (Trascripción B.2.1.TES, intervenciones [219,234]. No obstante, la respuesta mostrada en la entrevista también podría ser fruto de una falta de reflexión o de interés por la actividad planteada. Esta circunstancia conduce a recalcar la necesidad de utilizar actividades de evaluación del aprendizaje de los estudiantes en distintos momentos del proceso de enseñanza ya que sólo así se podrá determinar qué procesos son propios de cada alumno y cuales han sido utilizados sin comprensión. Esta información es importante no sólo para el profesor, o el investigador, sino también para los propios estudiantes, como parte de la evaluación del propio proceso de resolución y del aprendizaje, desarrollando así la componente metacognitiva de los recursos del alumno.

Regresando al problema 2 del Módulo de Enseñanza, para establecer la cantidad máxima de mercurio que se puede alcanzar en el depósito, dependiendo de la cantidad de mercurio que se introduzca con la disolución, Milagros y Silvia formulan conjeturas ("Pues va a ser siempre 1000, 2000, 3000, 4000…", trascripción B.2.1.TM, intervención {395}) que no comprueban.

Cantidad de mercurio que se introduce en el depósito (gr/l)	EDO que modela la situación	Solución de la EDO	Función que modela la situación real $p(0)=0$	Cantidad máxima de mercurio que puede haber en el depósito
0.1	$\frac{dp}{dt} = 0.3 - 0.0003p(t)$	$p(t) = C\cdot e^{-0.0003t} + 1000$	$p(t) = -1000\cdot e^{-0.0003t} + 1000$	1000 gr
0.2	$p'(t) = 0.6 - 0,0003\,p(t)$	$p(t) = C\cdot e^{-0'0003t} + 2000$	$p(t) = -2000\cdot e^{-0'0003t} + 2000$	2000 g
0.3	$p'(t) = 0,9 - 0,0003\,p(t)$	$p(t) = C\cdot e^{-0'0003t} + 3000$	$p(t) = -3000\cdot e^{-0'0003t} + 3000$	3000 g.
0.4	$p'(t) = 1'2 - 0,0003\,p(t)$	$p(t) = C\cdot e^{-0'0003t} + 4000$	$p(t) = -4000\cdot e^{-0'0003t} + 4000$	4000 g.
…				
m	$p'(t) = 3m - 0'0003\,p(t)$	$p(t) = C\cdot e^{-0'0003t} + m\cdot 10000$	$p(t) = -m\cdot 10000\cdot e^{-0'0003t} + m\,10000$	m · 10000 g.

Imagen 5.4.1.16: Tabla 1 cumplimentada por Milagros y Silvia

Milagros y Silvia no necesitan resolver todas y cada una de las EDO que surgen en la etapa 4 de este problema para indicar cuál es la función que modela la situación particular correspondiente o la cantidad máxima de mercurio que se puede alcanzar en el depósito, dependiendo de los parámetros que se modifiquen. Esta pareja ha mostrado cierta capacidad de abstracción y generalización, estableciendo conexiones entre distintas situaciones hipotéticas y su representación en el lenguaje matemático.

Silvia confunde la EDO con la función que modela la situación, aspecto que mostró también en la entrevista, como se mencionó anteriormente. Durante el desarrollo del problema 2, es Milagros quien aclara a su compañera cuál es la expresión de la EDO y cuál la de la solución, aunque no justifica su respuesta (Trascripción B.2.1.TM, intervenciones [428,432]).

- *¿Y la cantidad máxima de mercurio que se puede alcanzar en el depósito?*

M: Esa no es la función que modela la situación [Silvia está escribiendo la EDO]
S: Pues yo juraría que aquí [tabla página anterior] pone: EDO que modela la situación
M: [Señala 4ª columna]
S: Pero… para t=0
M: Pero esto… si no diría la EDO y dice la función

Trascripción B.2.1.TM, intervenciones [428,432]

Al final del segundo apartado de la etapa 4, en la que se consideran situaciones en las que varía la velocidad a la que entra y sale la disolución del estanque, Silvia propone la EDO $p' = vm - 0.000vp$ para modelar la situación en la que la disolución entra y sale del depósito a una velocidad de v l/min con una cantidad de m gr/l de mercurio. El término vm indica la cantidad de mercurio que entra por minuto, pero ¿qué representa la expresión $0.000v$? Podría ser que Silvia estuviera utilizando el valor de v como imagen de un valor numérico y no como el significado de la velocidad, pero lo que sí parece claro es que Silvia no está considerando la expresión $0.000vp$ como el producto de la cantidad de mercurio que hay dentro del depósito en un instante de tiempo determinado por la velocidad a la que sale la disolución del estanque, que es la interpretación de este término en la situación hipotética planteada.

El procedimiento seguido por estas alumnas para desarrollar todos los apartados de la etapa 4 es similar y los resuelven correctamente. Sólo en el último apartado cometen un error al escribir la expresión de la solución particular de la EDO $\frac{dp}{dt} = v \cdot m - \frac{v}{V} p$, correspondiente a diferentes condiciones iniciales. Una vez obtenido, de forma correcta, el valor de la constante de integración correspondiente a cada una de las condiciones iniciales, Milagros y Silvia sustituyen el valor obtenido en la expresión de la función solución sin utilizar paréntesis (Imagen 5.4.1.17). Este error podría ser fruto de falta de comprensión sobre el uso de los paréntesis o de no haber reflexionado sobre la jerarquía de operaciones o sobre la expresión obtenida.

$$p(t) = C \cdot e^{-\frac{v}{V}t} + V \cdot m$$
$$t=0 \longrightarrow p(t) = 100g$$
$$100 = C \cdot 1 + Vm \Rightarrow C = 100 - Vm$$
$$p(t) = \underbrace{\cancel{C}}_{100-Vm} \cdot e^{-\frac{v}{V}t} + V \cdot m$$

Imagen 5.4.1.17: Error de Milagros y Silvia en la expresión de la solución particular

Este error en la expresión de la función solución particular les conduce a una expresión incorrecta de la cantidad máxima de mercurio que se puede alcanzar en el depósito, dependiendo de la cantidad inicial de dicho elemento que haya dentro del mismo. En los tres apartados anteriores se puede observar que la cantidad máxima de mercurio que puede alcanzarse dentro del depósito depende del volumen del depósito (V) y de la cantidad de mercurio que tenga la disolución que se está introduciendo (m). En este apartado, Milagros y Silvia obtienen que dicha cantidad, obtenida calculando el límite de la función solución cuando el tiempo tiende a infinito, depende además de P_0, que hace referencia a la cantidad inicial de mercurio que haya en el depósito (Imagen 5.4.1.18). Esto refleja que esta pareja puede no haber comprobado que los resultados obtenidos en los distintos apartados de la etapa 4 concordaban, mostrándose nuevamente necesario el uso de estrategias de control de los resultados obtenidos y los procedimientos y procesos desarrollados.

$$* \quad p(t) = 500 - Vm \cdot e^{-\frac{v}{V}t} + V \cdot m$$
$$* \quad p(t) = P_0 - Vm \cdot e^{-\frac{v}{V}t} + V \cdot m$$
$$* \quad \lim_{t \to \infty} P_0 - Vm\, e^{-\frac{v}{V}t} + Vm = P_0 + Vm$$

Imagen 5.4.1.18: Cálculo de Milagros y Silvia de la cantidad máxima de mercurio que se alcanza en el depósito

En cada uno de los cuatro apartados de la etapa 4 de esta actividad se incluye una cuestión en la que los estudiantes deben representar gráficamente distintas funciones correspondientes a diferentes situaciones análogas a la presentada inicialmente y se formula una serie de preguntas acerca de dichas representaciones. El objetivo de esta parte de la actividad es introducir el sistema de representación gráfico como elemento de análisis y reflexión en este tipo de problemas. La última actividad de esta etapa, en la que se comparan dos depósitos con características diferentes, permitirá establecer qué sistema de representación prefieren los estudiantes al resolver actividades análogas a las que se han resuelto empleando tanto el sistema gráfico como el algebraico.

Milagros y Silvia se restringen al uso del sistema de representación algebraico para resolver dicha actividad. Esta pareja identifica correctamente los datos de la actividad y sustituyen los valores, directamente, en la expresión de la solución particular que habían obtenido en el último apartado de la etapa 4. Esa expresión no era correcta (imágenes 5.4.1.17 y 5.4.1.18) y además, tampoco las trascriben correctamente al papel cuando resuelven esta actividad final, aunque en la calculadora sí utilizan la expresión que habían obtenido anteriormente (Imagen 5.4.1.19).

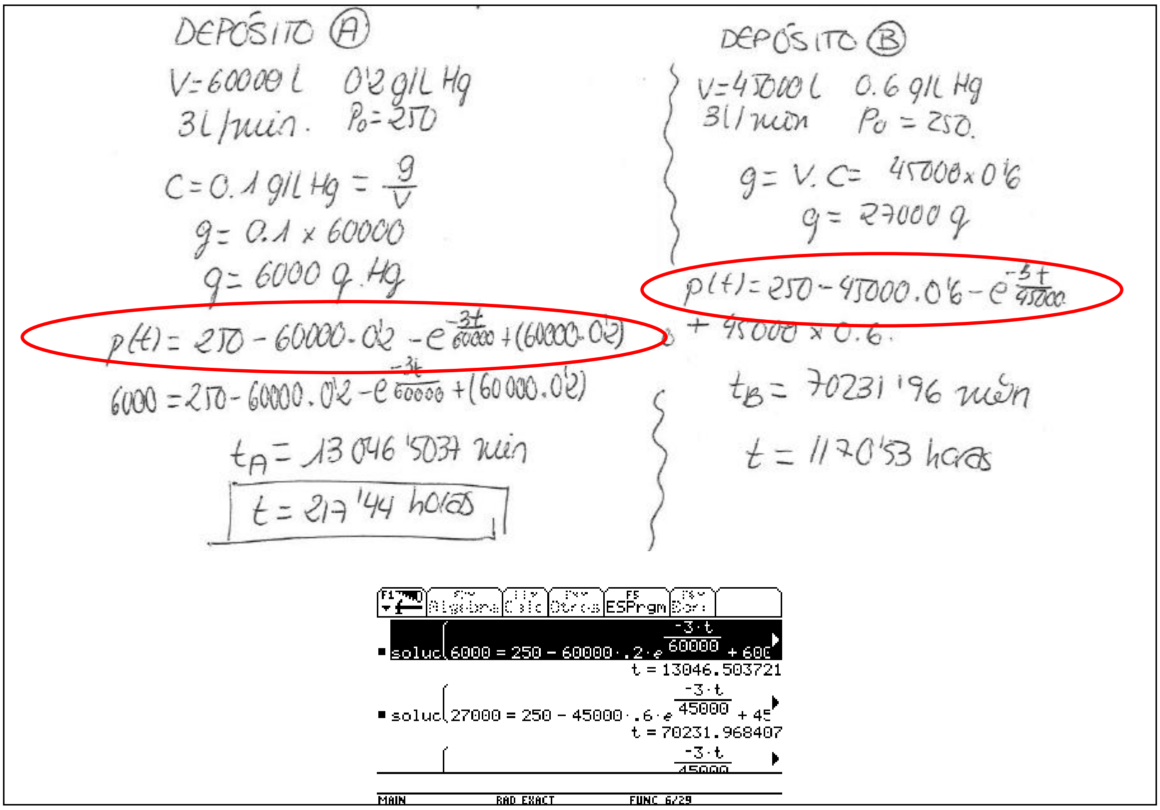


Imagen 5.4.1.19: Proceso de resolución de la actividad final de Milagros y Silvia

<u>Análisis retrospectivo</u>

La etapa final, de análisis retrospectivo del proceso de solución, muestra que esta pareja ha comprendido cómo se relacionan los diferentes conceptos matemáticos con los distintos elementos que entran en juego en la situación hipotética planteada. Además permite observar que su enfoque ha quedado centrado en las operaciones realizadas en el contexto algebraico, puesto que no hacen ninguna mención a las actividades en las que se utilizó la representación gráfica de funciones. Tampoco hacen ninguna mención al uso de la herramienta tecnológica, Voyage 200 (anexo B.2.1.M).

Problema 3: Dinámica de poblaciones

El diseño de este problema coincide con el anterior en que se distinguen cinco etapas de resolución; se distinguen en que, en este problema, se utiliza el concepto de EDO a través de su relación con el significado geométrico de la derivada (Thurston, 1994) y la descripción de la monotonía de una función. De esta forma se trata de robustecer la red de significados asociados a los conceptos de derivada y Ecuación Diferencial Ordinaria, a la vez que se refuerzan los nexos existentes entre estos dos conceptos matemáticos. Por otra parte se presta especial atención al proceso de verificación de respuestas, presentando pequeñas cuestiones en las que los estudiantes deban formular conjeturas cuya veracidad se analiza con otras actividades. Se trata de incidir en el uso de estrategias metacognitivas, como parte de los recursos a emplear en la resolución de problemas (Schoenfeld, 1992) y, con ellas, la competencia estratégica y el razonamiento adaptativo (Kilpatrick et al., 2009).

En esta pareja, la mayor parte de las aportaciones a la resolución del problema las ha hecho Milagros, formulando casi todas las conjeturas que aparecen. El papel de Silvia se limita, prácticamente, a transcribir lo que le dice su compañera, aunque formula algunas conjeturas aisladas, como se verá a lo largo de esta sección.

Comprensión y análisis de la situación

Milagros y Silvia explican de forma correcta el significado de las tasas de natalidad y mortalidad y aplican la definición utilizada para completar la tabla que figura en la etapa 2 de esta actividad (anexo A.2.P). Estas alumnas completan de forma correcta dicha tabla y comprueban la expresión general propuesta en la última fila con los resultados mostrados en las filas anteriores. Sin embargo, en la etapa 4, de planteamiento y resolución de casos generales, en la que deben plantear la EDO considerando que la tasa de crecimiento es un parámetro a, se observa que Milagros y Silvia tienen dificultades con este término, tomando como tasa de crecimiento la expresión $\frac{a}{1000}$. Esto es un ejemplo de que no supone la misma actividad de tipo cognitivo el utilizar un concepto matemático para un caso particular que para una situación general.

Esta pareja muestra diferentes procesos a la hora de completar la tabla incluida en la etapa 2: para la segunda fila duplican las cantidades mostradas en las columnas correspondientes a los peces que nacen y mueren en un año, pero no utilizan el mismo razonamiento para determinar la variación, calculándola mediante la resta de las cantidades anteriores (trascripción B.2.1.TP, intervenciones [58,61]). Una vez cumplimentada la segunda fila, observan el patrón que se sigue y lo utilizan para completar la tabla. Milagros muestra a Silvia que el patrón establecido funciona (Imagen 5.4.1.20).

M: Yo pondría p(t) entre mil por 410, porque si aquí [fila 2] es 2000 entre 1000 por 410 aquí sería p(t) entre 1000 por 410 [...] Y aquí sería igual, p(t) entre 1000 por 220. [Última columna]
S: 190 por…
M: Partido entre mil por p(t)

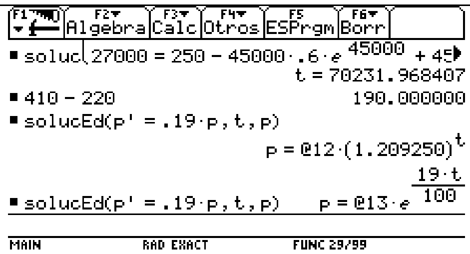
Número de peces	Peces que nacen en un año	Peces que mueren en un año	Variación en el número de peces, en un año
1000	410	220	190
2000	820	440	380
3000	1230	660	570 .
$P(t)$	$\frac{410}{1000}$ p(t)	$\frac{220}{1000}$ p (t)	$\frac{190}{1000}$ p (t)

Imagen 5.4.1.20: Proceso de generalización de Milagros y Silvia

En esta etapa, Milagros y Silvia realizan de forma correcta el proceso de representación de la situación hipotética planteada en un lenguaje matemático, estableciendo la EDO que modela la situación inicial, $p' = \frac{190}{1000} p$. Milagros utiliza la heurística de la búsqueda de patrones, mientras que Silvia consulta cada uno de los pasos que realizan con una compañera de otro grupo, Mar (sección 5.4.2).

Solución de casos particulares
La etapa 3 está dividida en dos partes: una primera parte en la que el término de competición se supone nulo, modelada por la EDO $p' = 0'19p$, y otra en la que este término toma valores distintos de cero, conduciendo a la ecuación $p' = 0'19p - bp^2$.

Milagros y Silvia optan por resolver la EDO $p' = 0'19p$ utilizando la Voyage 200. Milagros explica a su compañera por qué la constante de integración no puede ser negativa, empleando como justificación el significado de la función P(t) en el contexto de la situación planteada y en el contexto matemático, a través del análisis del signo de la función exponencial (Imagen 5.4.1.21). Durante el desarrollo de este episodio del Módulo de Enseñanza Milagros propone prácticamente todas las respuestas, siendo el papel de Silvia el de solicitar justificaciones a las afirmaciones realizadas por su compañera.



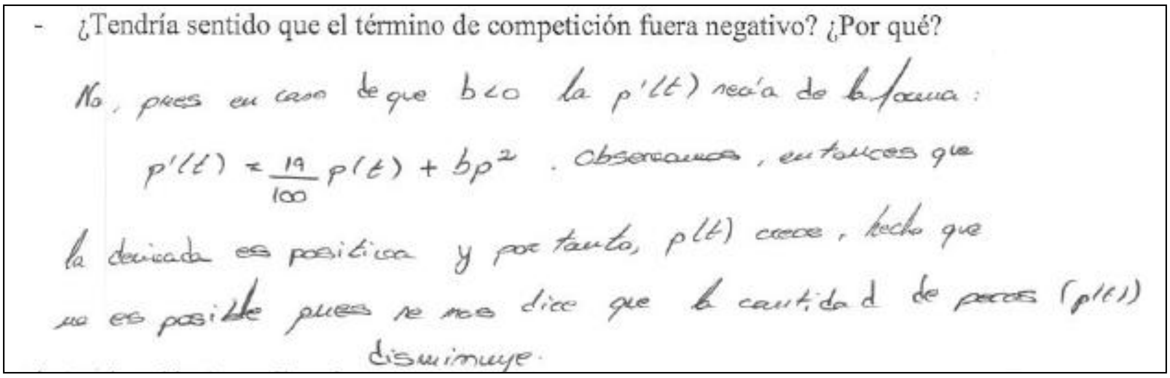
- *¿La constante de integración puede ser negativa? ¿Por qué?*

M: No
S: ¿Y por qué no?
M: Cantidad de peces… no hay cantidad de peces negativos
S: Pero si es la constante
M: Pero la P(t), si esto fuera negativo, quedaría negativa ¿y cómo te va a quedar P(t) negativa?[...] Porque entonces la cantidad de peces sería negativa, si la constante es negativa y esto es siempre positivo.

Imagen 5.4.1.21: Resolución de la EDO y reflexión acerca del signo de la constante

Estas alumnas reconocen la necesidad de algún dato adicional para poder calcular la constante de integración y establecen que, con la información que tienen hasta el momento, la población de peces aumentaría de forma indefinida. Las dos estudiantes formulan esta conjetura, pero sólo Milagros se preocupa por argumentarla. Para ello trata de representar gráficamente la función solución general de la EDO, $p(t) = Ce^{0.19t}$, algo imposible con la Voyage 200 por la falta del valor de C. Milagros entonces utiliza un argumento general acerca del comportamiento asintótico y de monotonía de las funciones exponenciales (trascripción B.2.1.TP, intervenciones [110,114]). El argumento de Milagros tiene una parte que podría esconder una concepción errónea acerca de la función exponencial. Esta alumna manifiesta que “por ser una exponencial va a seguir creciendo”, lo cuál sólo es cierto si la constante C es positiva, hipótesis que no ha utilizado de forma explícita.

Una vez introducido el término de competición en la situación hipotética planteada, se observa que, al igual que ocurrió en los problemas anteriores, Milagros y Silvia asocian un signo negativo con un valor negativo. Este es un error de concepto que les lleva a decir que la expresión $p' = 0.19p + bp^2$ tiene signo positivo, aunque están considerando el caso en que $b < 0$ (Imagen 5.4.1.22). Los argumentos para decidir si el término de competición puede o no ser negativo son contradictorios. A priori, en el enunciado de la actividad, no se fija el signo de este término. Milagros y Silvia indican que la variación de la cantidad de peces, en el caso en que $b > 0$, puede expresarse como $p' = 0.19p - bp^2$, argumentando que, en este caso, el término $-bp^2$ indica una disminución con respecto al caso anterior. El problema viene cuando se les pregunta si puede ocurrir que b tome valores negativos. Por un lado esta pareja dice que, en ese caso la EDO tendría que ser $p' = 0.19p + bp^2$, lo que es correcto, pero añade que, en ese caso "la derivada es positiva y, por tanto, P(t) crece". Este argumento no es válido, puesto que el término $+bp^2$ es negativo.


- ¿Tendría sentido que el término de competición fuera negativo? ¿Por qué?

No, pues en caso de que $b<0$ la $p'(t)$ sería de la forma:

$p'(t) = \frac{19}{100} p(t) + bp^2$. Observamos, entonces que la derivada es positiva y por tanto, $p(t)$ crece, hecho que no es posible pues se nos dice que la cantidad de peces ($p(t)$) disminuye.

Imagen 5.4.1.22: Argumento contradictorio de Milagros y Silvia

En esta etapa nos encontramos con otro ejemplo que avala la idea de Schoenfeld (1992) de que no basta con conocer los conceptos matemáticos para poder utilizarlos en la resolución de problemas, sino que es necesario adquirir una serie de habilidades en cuanto a estrategias de resolución que permitan establecer en cada momento cómo utilizar dichos conceptos. Milagros y Silvia reconocen la relación existente entre el signo de $p'(t)$ y que la cantidad de peces, $p(t)$, aumente, disminuya o se mantenga constante. Sin embargo no utilizan, de forma autónoma, la heurística apropiada para obtener los valores de p para los que se tengan cada una de las situaciones descritas. Sólo lo consiguen a partir de la interacción con una de las profesoras presentes en el aula. El procedimiento que, inicialmente, habían utilizado Milagros y Silvia para obtener los valores que hicieran que $p'(t)$ fuera positiva, negativa o igual a cero, fue el tanteo, probando con diferentes valores de p (trascripción B.2.1.TP, intervenciones [171,181]).

M: Para valores muy pequeños de P, aumenta. Para valores muy grandes de P disminuye y se mantiene constante cuando la cantidad de peces es constante. [...] Es por la función. Si pones un P muy pequeño, entonces el término negativo es muy pequeño.
I2: ¿Y eso cómo lo pueden justificar?
[...]
M: Porque tienes un cuadrado aquí, entonces, si pones números muy pequeños, al cuadrado, el término negativo, se hace muy pequeño. Entonces queda la derivada positiva.

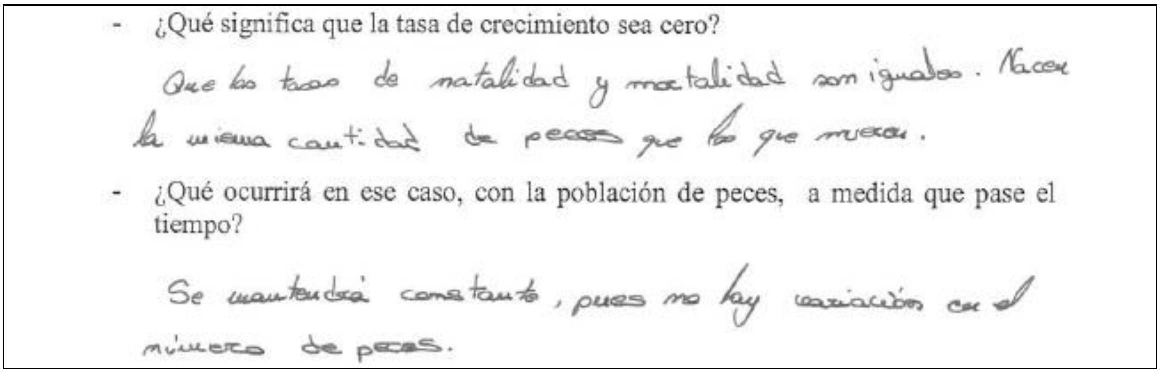
Trascripción B.2.1.TP, intervenciones [171,181]

La etapa 3 de este problema concluye con una serie de actividades cuyo objetivo es que los estudiantes formulen conjeturas y las comprueben. Milagros y Silvia no realizan ninguna de ellas. Durante el desarrollo de este problema han mostrado poca concentración, como refleja el hecho de que consideren que han contestado a determinadas cuestiones cuando en realidad no lo han hecho. Como consecuencia de esto tienen dificultades para responder a las cuestiones planteadas en la siguiente etapa, que comienzan después de que el profesor presenta al conjunto de todos los estudiantes un resumen de los resultados más relevantes de la etapa 3, de resolución de la situación particular.

Planteamiento y solución de casos generales

Milagros y Silvia comienzan la etapa 4, de planteamiento y solución de una situación general, en este caso considerando que la tasa de crecimiento de la población es a, planteando la EDO de forma incorrecta, por un error en el significado asociado al término a. Esta pareja propone el uso de la ecuación $P' = \frac{a}{1000}P - bP^2$. La interacción con uno de los profesores les permite detectar el error y plantear la EDO correcta, $P' = aP - bP^2$.

Las primeras cuestiones de la etapa 4, en las que se relaciona el signo de la tasa de variación de la cantidad de peces, a, con los futuros nacimientos y defunciones de los animales, no suponen dificultad para esta pareja, salvo en el caso en que $a = 0$. En este caso, Milagros y Silvia consideran que la población se mantendrá constante, basándose en el hecho de que “nacen la misma cantidad de peces que los que mueren”, sin tener en cuenta el término de competición, que haría que la población de peces disminuyera (Imagen 5.4.1.23). Sus problemas comienzan con las actividades siguientes, planteadas para comprobar las conjeturas realizadas y tienen su origen en que Milagros y Silvia se empeñan en resolverlas sin haber obtenido la expresión de la solución de la EDO planteada en esta etapa.


- ¿Qué significa que la tasa de crecimiento sea cero?

Que las tasas de natalidad y mortalidad son iguales. Nacen la misma cantidad de peces que los que mueren.

- ¿Qué ocurrirá en ese caso, con la población de peces, a medida que pase el tiempo?

Se mantendrá constante, pues no hay variación en el número de peces.

Imagen 5.4.1.23: Argumento erróneo de Milagros y Silvia

Esta pareja no realiza las actividades posteriores en las que se les pide representar gráficamente distintas situaciones correspondientes a casos particulares en los que la tasa de crecimiento sea positiva, negativa y nula. Estas representaciones podrían haber hecho que Milagros y Silvia reflexionaran sobre la respuesta que habían dado, comprobando que no se corresponde con lo representación obtenida. Nuevamente se observa la necesidad de promover que los estudiantes desarrollen estrategias metacognitivas que les permitan evaluar su propio proceso de resolución de problemas (Schoenfeld, 1992).

Un aspecto positivo de la trayectoria de estas alumnas en esta etapa es que Silvia relaciona el concepto de límite de la función $P(t)$ con el valor al que se aproxima la cantidad de peces a medida que pasa el tiempo. Una vez resueltas las dudas sobre la sintaxis a utilizar en la calculadora Voyage 200, Milagros y Silvia consiguen establecer dichos valores, dependiendo del signo de la tasa de variación (Imagen 5.4.1.24).

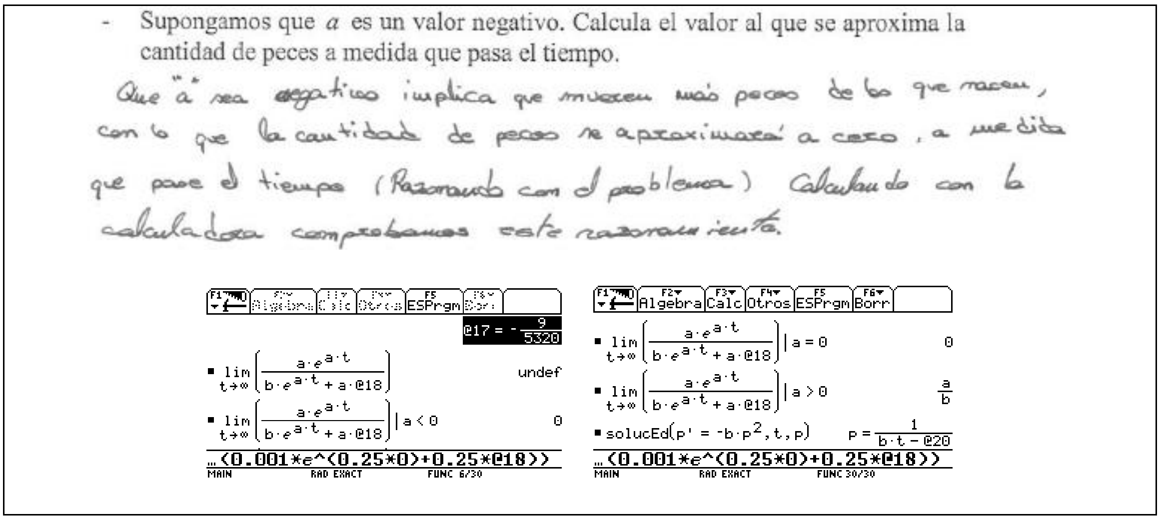


Imagen 5.4.1.24

<u>Análisis retrospectivo</u>
El informe presentado por esta pareja como respuesta a la etapa 5 del problema muestra no sólo que Milagros y Silvia han comprendido el procedimiento seguido para resolver la actividad, tanto el caso particular como la generalización, sino que, a diferencia de lo que ocurrió en el problema anterior, *Contaminación de mercurio*, otorgan un papel destacado al uso del sistema de representación gráfico para el desarrollo de esta actividad (Anexo B.2.1.P). Esto avala la consideración de que el diseño de las actividades juega un papel central en el uso de los diferentes sistemas de representación por parte de los estudiantes.

Observando únicamente el desarrollo, por parte de esta pareja, de los tres problemas que conforman el Módulo de Enseñanza se podría llegar a la conclusión de que Milagros no tiene dificultades con ninguno de los procesos matemáticos que entraron en juego en la resolución de los problemas. Sin embargo, durante la entrevista su pudo observar que esta alumna no sabe cómo comprobar que la expresión de la función obtenida para el caso general era solución de la EDO correspondiente. Milagros resuelve correctamente el caso particular, y para el estudio de una situación general plantea directamente la expresión de la función solución, partiendo de la expresión de la función en el caso particular. En este proceso comete un error, escribiendo un signo negativo donde debería ir uno positivo (imagen 5.4.1.25).

Caso particular	*Generalización*
$-\frac{1}{e^{kt}\cdot C}+15=Tc(t)$	$Tc(t)=\frac{-1}{e^{kt}C}-T_H$
$C=\frac{-1}{26.7-15}$	$C=\frac{-1}{(T_0-T_H)}$
$\frac{-1}{(23.9\cancel{2}-15)\cdot(-0.8547)}=e^{2k}$ $e^{2k}=1.31461$ $2K=\ln 1.31461$ $K=\frac{\ln 1.31461}{2}$	$k=\frac{\ln\left(\frac{-1}{(T_1-T_H)\cdot\frac{-1}{(T_0-T_H)}}\right)}{t_1}$ $K=\frac{\ln\left(\frac{T_0-T_H}{T_1-T_H}\right)}{t_1}.$

Imagen 5.4.1.25: Proceso de generalización de Milagros durante la entrevista

Cuando se le pide comprobar si la expresión obtenida es solución, es cuando muestra inseguridad. A Milagros no le resulta trivial el proceso para comprobar que una expresión algebraica es solución de una EDO para lo que precisa de la ayuda de la profesora, que consiste en compararle este concepto con el de solución de una ecuación algebraica propuesta por la estudiante. Inicialmente, Milagros interpreta la EDO como una expresión que le indica el resultado de una operación, por la analogía del razonamiento seguido con la ecuación algebraica[46]. Por eso, una vez que sustituye la expresión algebraica de $Tc(t)$ en el segundo miembro de la EDO no sabe cómo continuar. Sólo después de que se le indica que en esta EDO aparecen dos operaciones, una en cada miembro, Milagros consigue demostrar que la solución que obtuvo es la correcta.

La característica principal de la entrevista realizada a Milagros es que formula diversas conjeturas que sólo comprueba cuando se le pide de forma explícita. Una de esas conjeturas la realiza al preguntarle por la evolución de la temperatura del cuerpo a lo largo del tiempo (Trascripción B.2.1.TEM, intervenciones [170,174]).

M: Oh, en principio se enfría rápidamente pero poco a poco va disminuyendo la rapidez con la que se enfría ¿no? la…   I: ¿Y seguirá disminuyendo continuamente?   M: No, llegará gasta una cierta temperatura donde se quedará constante. O sea, cuando llega el cuerpo a la temperatura ambiente, se quedará constante la temperatura, no seguirá enfriándose   I: ¿Y qué te hace pensar eso?   M: Oh, que en la EDO lo que tenemos, cuando la temperatura del cuerpo llega a la temperatura de la habitación, temperatura ambiente, pues la variación es cero, no seguirá variando.

Trascripción B.2.1.TEM, intervenciones [170,174]

[46] Milagros explica que $x=-1/3$ es solución de la ecuación $3x+1=0$ porque "al sustituir el valor 1/3 en el primer miembro y realizar la operación, el resultado es 0".

La última frase de Milagros incluida en la trascripción anterior, podría corresponderse con un hecho mencionado por Rasmussen & Ruan (2008) cuando analizan el uso del teorema de unicidad para las soluciones de una EDO como herramienta para la resolución de problemas. El trabajo de estos autores comienza reflejando las respuestas que un estudiante da a una actividad similar al problema 4, utilizado para las entrevistas, antes de que conociera el teorema. La respuesta de este alumno la interpretan Rasmussen y Ruan como indicación de que el estudiante está considerando la EDO como una expresión de la variación pero constante, sin considerar que varía con respecto al tiempo. Esto podría ser lo que está ocurriendo con Milagros, al indicar que "cuando la temperatura del cuerpo llega a la temperatura de la habitación, temperatura ambiente, pues la variación es cero, no seguirá variando".

Esta respuesta nos da pie a pedirle a la alumna que haga una representación gráfica en la que se refleje la situación. Milagros representa una asíntota horizontal de ecuación $T(t)=15$ y una función por encima de ella, que no corta al eje de ordenadas. En este momento consideramos que la alumna no está contemplando toda la información que muestra la situación real que se intenta representar, por lo que se le formulan distintas preguntas acerca de la relación entre la representación gráfica y el problema planteado (Trascripción B.2.1.TEM, intervenciones [177, 206]).

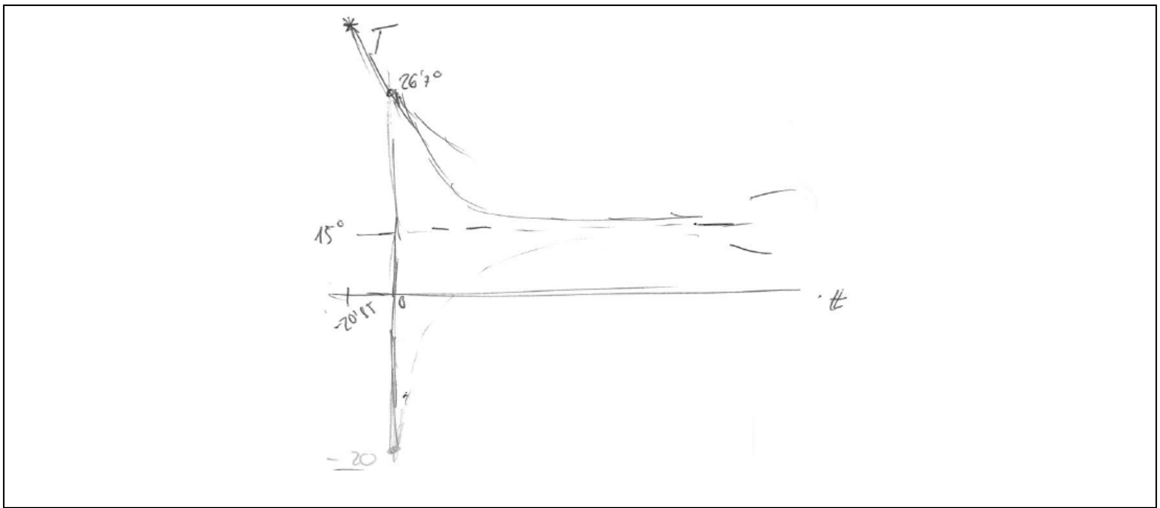


Imagen 5.4.1.26: Representación gráfica de Milagros durante la entrevista

Como conclusión de esta sección, en la que se describe la ruta de aprendizaje seguida por Milagros y Silvia durante la implementación del Módulo de Enseñanza dirigido a la introducción del concepto de EDO, se presenta una tabla en la que se muestran distintos elementos del aprendizaje de estas estudiantes, relacionados con la comprensión conceptual, la fluidez en el uso de procedimientos matemáticos y el uso de heurísticas y de estrategias de control del proceso de resolución (tabla 5.4.1.27). En dicha tabla se refleja además, cuáles de esos elementos son compartidos por las dos estudiantes que han trabajado juntas y cuales han mostrado por separado.

	Comprensión conceptual	*Fluidez en los procedimientos*	*Heurísticas*	*Estrategias de control*
Silvia	▪ Relaciona que la derivada de una función sea nula con inexistencia de variación. ▪ No considera que la expresión $\frac{p(t)}{1000}$ sea una función. ▪ Dificultades para reconocer las funciones constantes. ▪ Confunde la expresión de una EDO con una función.		▪ Compara con preguntas posteriores. ▪ Consideración de las unidades de medida como referente de las operaciones que se requieren.	▪ Compara sus respuestas con las de otros compañeros.
Aspectos comunes	▪ Uso del concepto de función para indicar dependencia del tiempo ▪ Utilizan una expresión algebraica de una función en la que aparezca una resta para indicar que una cantidad disminuye. ▪ Relacionan la derivada con el significado de variación. ▪ Valor numérico de una función. ▪ Relacionan los valores iniciales con el cálculo de la constante de integración. ▪ Asocian el signo "-" con un valor negativo.	▪ Cálculo de límites.	▪ Uso de casos particulares[47]. ▪ Dificultades con el proceso de representación. ▪ Uso de patrones. ▪ No utilizan el cálculo de límites para comprobar conjeturas realizadas con el sistema de representación gráfico.	▪ Recurren a los profesores. ▪ Comprobación, usando la VoyageTM200, de resultados obtenidos con lápiz y papel[48].
Milagros	▪ Distingue entre las expresiones $f(t)$ y f, considerando este último como constante. ▪ Relaciona la derivada con fenómenos de aumento y disminución de una cantidad y con la velocidad de cambio. ▪ Reconoce la existencia de infinitas funciones con una misma derivada. ▪ Relaciona la monotonía de la función exponencial con su expresión algebraica.	▪ Dudas a la hora de utilizar la propiedad $(f+C)'=f'$.	▪ Comparación entre expresiones algebraicas para clasificar una EDO.	▪ Compara con preguntas anteriores. ▪ Comprobación de expresiones algebraicas sustituyendo valores particulares.

Tabla 5.4.1.27: Elementos del aprendizaje mostrados por Milagros y Silvia durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza

[47] El uso de esta heurística ha sido motivado por el diseño del problema. Milagros y Silvia no lo han utilizado de forma autónoma.
[48] A instancias de Silvia.

5.4.2 Nicanor y Mar

Analizando las respuestas de esta pareja al cuestionario C-D (anexo B.2.2.DN y B.2.2.DM) se puede observar que coinciden en el uso de cuatro significados diferentes de la derivada, además de como procedimiento algebraico: definición formal, pendiente de la recta tangente, descripción de la monotonía de una función y velocidad de cambio (tabla 5.2.2). Nicanor, además, relaciona la derivada con fenómenos de variación, en general.

Nicanor y Mar muestran algunas diferencias en el uso de procedimientos matemáticos. Mientras que Nicanor utiliza correctamente las reglas de derivación, su compañera comete algunos errores al aplicar la regla de la cadena (Imagen 5.4.2.1). En cuanto a los procedimientos de simplificación, ambos simplifican fracciones algebraicas. Mar, además utiliza el procedimiento de sacar factor común para simplificar expresiones algebraicas.

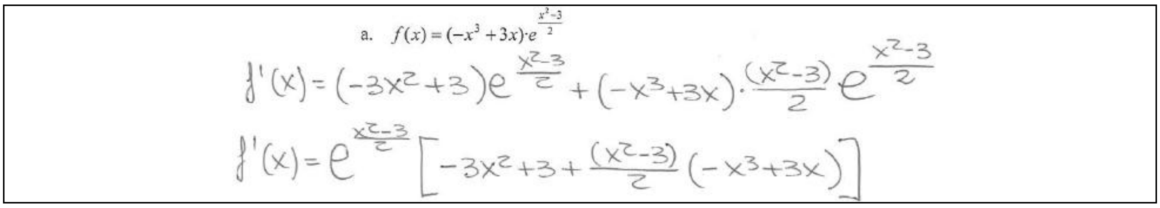


Imagen 5.4.2.1: Procedimientos matemáticos de Mar

Otra diferencia importante entre Nicanor y Mar es el grado de desarrollo conceptual de los diferentes significados asociados a la derivada que muestran y su uso en la resolución de problemas. Nicanor utiliza correctamente los diferentes usos de la derivada que reconoce en distintas actividades, no ocurre lo mismo con Mar. Esta alumna utiliza de forma incorrecta el criterio de la primera derivada para describir la monotonía de la función representada gráficamente en la pregunta 6 (Imagen 5.4.2.2) y, aunque reconoce la definición formal de la función derivada (pregunta 9) y establece correctamente la relación entre la derivada de una función en un punto y la pendiente de la recta tangente a dicha función en ese punto (pregunta 5), no utiliza esos significados para responder a otras cuestiones relacionadas, como las preguntas 7 y 8 o la pregunta 4 (anexo B.2.8).

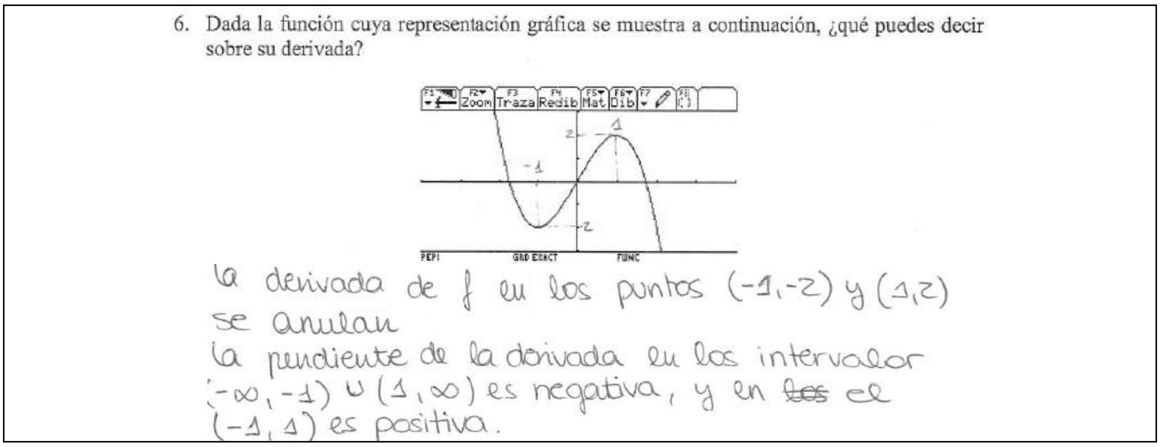
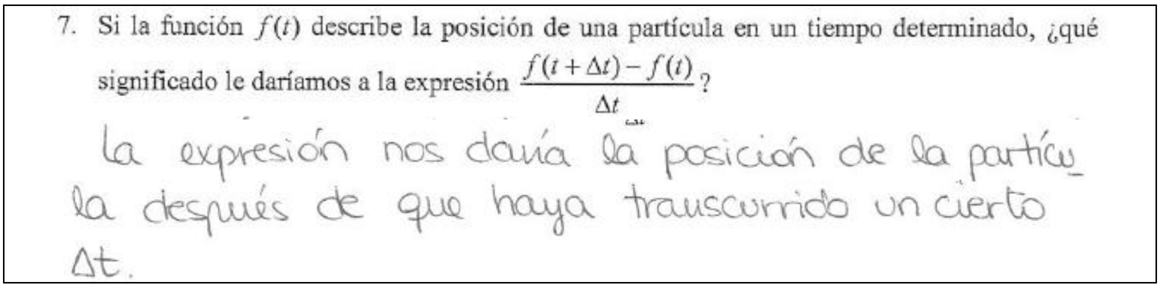


Imagen 5.4.2.2: Error en la descripción de la monotonía de la función por parte de Mar

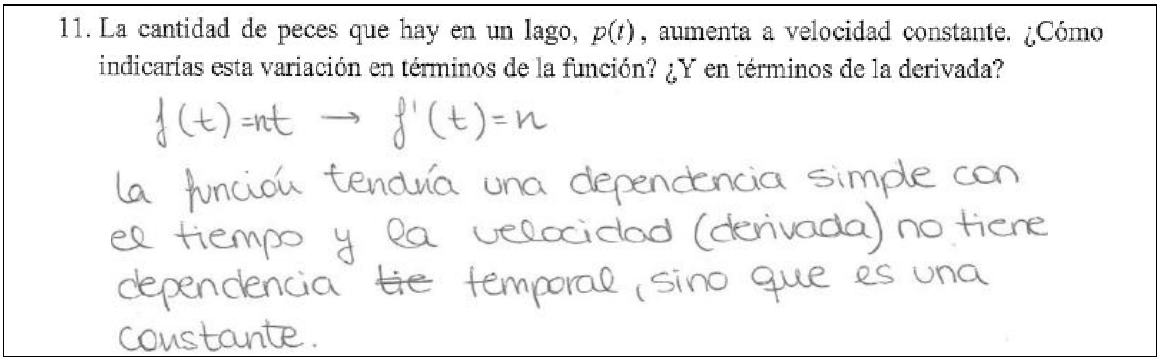
En la pregunta 4 (significado geométrico de la derivada), Mar se limita a representar gráficamente la situación. En las preguntas 7 y 8, relacionadas con la definición formal de la derivada (y también con el significado que Thurston (1994) denomina "infinitesimal"), la dificultad de Mar está relacionada con el proceso de interpretación de información expresada en términos matemáticos en un contexto no matemático (Imagen 5.4.2.3).


7. Si la función $f(t)$ describe la posición de una partícula en un tiempo determinado, ¿qué significado le daríamos a la expresión $\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$?

la expresión nos daría la posición de la partícu-la después de que haya transcurrido un cierto Δt.

Imagen 5.4.2.3: Proceso de interpretación de Mar

Algunas de las dificultades que muestra Mar con respecto al uso de diferentes significados de la derivada podrían estar relacionadas con dificultades a la hora de expresarse, de explicar sus razonamientos. Esta hipótesis está basada en la observación de algunas de las expresiones que utilizó durante la experiencia. Por ejemplo, en la entrevista esta alumna muestra establecer relaciones entre distintos significados de la derivada, por ejemplo, entre el uso del criterio de la primera derivada para describir la monotonía y la pendiente de la recta tangente, pero le cuesta explicar su razonamiento con claridad, como se observa cuando se le pregunta acerca del signo de la constante k, en relación con las representaciones gráficas que utilizó para la función $T(t)$, que indica la temperatura de un cuerpo con respecto al tiempo, y que es la solución de la EDO $T' = k(T - T_0)$, siendo T_0 la temperatura del medio en que se encuentra el cuerpo, que se mantiene constante (trascripción B.2.2.TEM, intervenciones [145,148] $\cup$ [198,199] $\cup$ [300,305]). En el cuestionario de la derivada también se puede encontrar un ejemplo de esta situación; Mar no se expresa de forma correcta, en términos matemáticos, por ejemplo, al contestar a la última pregunta donde indica que una función tiene "dependencia simple con el tiempo" para describir la expresión $f(t) = nt$ (Imagen 5.4.2.4).


11. La cantidad de peces que hay en un lago, $p(t)$, aumenta a velocidad constante. ¿Cómo indicarías esta variación en términos de la función? ¿Y en términos de la derivada?

$f(t)=nt \longrightarrow f'(t)=n$

la función tendría una dependencia simple con el tiempo y la velocidad (derivada) no tiene dependencia ~~te~~ temporal, sino que es una constante.

Imagen 5.4.2.4: Lenguaje empleado por Mar para responder a la pregunta 11

Nicanor y Mar vuelven a coincidir, utilizando de forma correcta la derivada para expresar velocidad, en sus respuestas a las preguntas 10 y 11 del cuestionario. Al igual que ocurrió con Milagros (sección 5.4.1), las respuestas de Nicanor y Mar a la pregunta 11 muestran que se han iniciado en el camino de la construcción del concepto de EDO, proponiendo expresiones como $p(t) = p_0 + vt$, en el caso de Nicanor, y $f(t) = nt$, en el caso de Mar, para referirse a la cantidad de peces, basándose en que dicha cantidad aumenta a velocidad constante. Esta pareja, tal y como ocurrió con Milagros, tampoco especifica el signo de la constante.

Las características de esta pareja, en lo que a sus respuestas al cuestionario de la derivada se refiere, se presentan de manera esquematizada en la siguiente tabla (tabla 5.4.2.5).

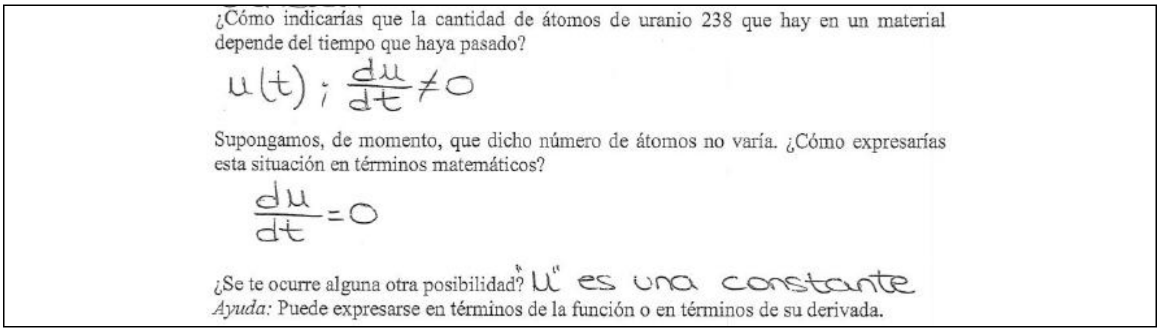
	Conceptos: significados asociados a la derivada	*Procedimientos*
Mar	Monotonía (con errores[49])	Simplifica expresiones algebraicas sacando factor común.
Aspectos comunes	Definición formal[50] Pendiente[1] Velocidad	Simplifica fracciones algebraicas.
Nicanor	Monotonía Variación	Utiliza las reglas de derivación con fluidez.

Tabla 5.4.2.5: Características de Mar y Nicanor según el cuestionario de la derivada

A continuación se describen las trayectorias o rutas de aprendizaje mostradas por esta pareja durante la resolución de los problemas que conforman el Módulo de Enseñanza.

Problema 1: Desintegración del uranio

Nicanor y Mar muestran dos opciones para expresar que una función depende del tiempo (Imagen 5.4.2.6) y se restringen al uso de la derivada para indicar que no hay variación, rehuyendo emplear la expresión algebraica de una función constante.


¿Cómo indicarías que la cantidad de átomos de uranio 238 que hay en un material depende del tiempo que haya pasado?

$u(t)$; $\frac{du}{dt} \neq 0$

Supongamos, de momento, que dicho número de átomos no varía. ¿Cómo expresarías esta situación en términos matemáticos?

$\frac{du}{dt} = 0$

¿Se te ocurre alguna otra posibilidad? "u" es una constante

Ayuda: Puede expresarse en términos de la función o en términos de su derivada.

Imagen 5.4.2.6: Proceso de representación de Mar y Nicanor

Para representar en términos matemáticos que la cantidad de uranio va disminuyendo, optan por buscar una expresión algebraica para la función $u(t)$, relacionando la disminución con una resta, aunque reconocen la relación existente entre el signo de la derivada y el aumento, la disminución o la no variación de cantidades. En su intervención (trascripción B.2.2.TU, intervención {9}), Nicanor establece la relación entre la derivada, la disminución de una cantidad y la monotonía de la función que

[49] Estos errores no los comete después durante la entrevista, donde relaciona el criterio de la primera derivada para describir la monotonía con la pendiente de la recta tangente a la función en un punto.
[50] Mar no muestra habilidad para usarlo en la resolución de problemas.

indica dicha cantidad, señalando que *"la derivada sería menor que cero si va disminuyendo. Sería una función decreciente"*. Esta observación queda relegada a un segundo plano, en favor de un argumento empírico similar al que utilizó la pareja anterior, Milagros y Silvia (trascripción B.2.2.TU, intervenciones [12,19]).

M: Sería… algo que tuviese que ser negativo
N: Sí, sería u(t) igual a un valor inicial menos... , menos la velocidad de descomposición […]
M: Bien, pues el uranio en un tiempo menos el uranio en otro tiempo...

$$u(t) = u_0 - u(t')$$

N: Um…bueno, sí, el uranio en t menos el uranio en t' sería… mayor que cero…porque va disminuyendo.

Trascripción B.2.2.TU, intervenciones [12,19]

Esto ocurre por la necesidad que tiene esta pareja de encontrar una expresión algebraica para la función $u(t)$, lo que se hubiera evitado si entre su catálogo de recursos se encontrara la heurística de considerar casos particulares. En esta trascripción de la discusión mantenida entre Nicanor y Mar se puede observar que Mar utiliza un razonamiento análogo al empleado por Silvia (estudiante de la pareja analizada en la sección 5.4.1). Esta alumna asocia el valor numérico que aparece en el enunciado del problema, que hace referencia a un tipo de uranio, con un valor particular de la función $u(t)$, mostrando, según Kilpatrick et al. (2009) una competencia estratégica poco desarrollada. Una última observación acerca de esta trascripción es que Nicanor utiliza el objetivo, representar en términos matemáticos que la cantidad de uranio disminuye, para justificar la validez de la expresión propuesta, basándose únicamente en que la función $u(t)$ debe ser positiva por indicar una cantidad.

La búsqueda de una expresión algebraica para representar la cantidad de uranio 238 ha provocado que esta pareja no respondiera correctamente a esta cuestión, a pesar de que disponen de los conocimientos matemáticos necesarios y establecen las relaciones apropiadas entre situaciones reales y el contexto matemático. Esto viene a mostrar, nuevamente, que para el correcto desarrollo de los procesos matemáticos no es suficiente con tener los conocimientos básicos necesarios, también entran en juego otros aspectos, como señalan Schoenfeld (1992) y Kilpatrick et al. (2009).

Las preguntas que se plantean a continuación en el problema tienen como objetivo que los estudiantes reflexionen acerca de la relación entre el significado de diferentes expresiones matemáticas y diferentes situaciones hipotéticas en el contexto de la desintegración del uranio. Dichas preguntas son acerca de la posibilidad de que $u'(t)$ pudiera ser igual a t, $-t$ o $-t^2$. La heurística empleada por Nicanor y Mar para responder a estas preguntas consiste, inicialmente, en pensar en la expresión que tendría la función $u(t)$, dependiendo de cuál fuera su derivada (Trascripción B.2.2.TU, intervenciones [20,25]). Aún sin haberse introducido formalmente el concepto de EDO, Nicanor y Mar ya han resuelto algunas, al igual que hicieron al responder a la pregunta 11 del cuestionario de la derivada (anexo B.2.8). Esta misma estrategia de resolución, la utiliza Nicanor para explicar a Mar la diferencia entre que la derivada de la función valga -1 o -2.

N: Hombre, esto es sencillo, porque si tienes derivada -1 sería que… que es una recta de una pendiente… -1; y si es -2, es una recta que disminuye más rápido.
[...]
N: La pendiente es mayor.

Puede observarse que la respuesta de Nicanor no hace ninguna referencia al contexto de la situación hipotética planteada, se restringe al uso de argumentos matemáticos.

En términos de las EDO, concepto que en este momento no se había introducido a los estudiantes, esta pareja dirige su atención hacia una solución particular de la ecuación diferencial $u'(t) = t$ y no a la información que la propia ecuación les brinda, en relación con la situación planteada.

De las cuatro parejas cuyas rutas de aprendizaje son analizadas en esta sección, sólo Nicanor y Mar plantean soluciones de diferentes EDO para justificar sus razonamientos, haciendo uso de sus conocimientos acerca de la derivada. Esto avala la hipótesis formulada en la primera fase de la investigación, en la que parte de las dificultades que mostraban los estudiantes al resolver ecuaciones diferenciales como las que se están considerando en este ejemplo se debían al hecho de que los estudiantes no establecían relaciones entre la ecuación diferencial y el concepto de derivada (Camacho et al., 2010).

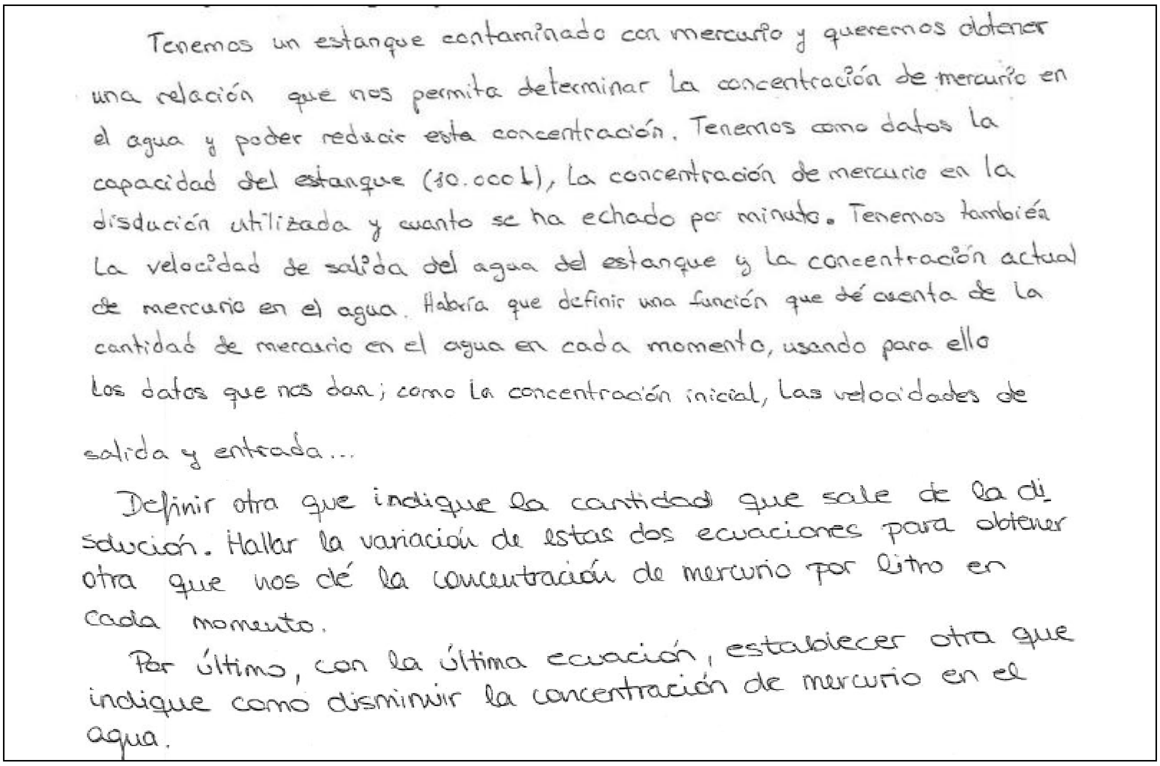
La lectura de una pregunta posterior, *"En este contexto, ¿qué significaría que $u'(t)$ sea positiva ?",* promueve que Nicanor encuentre las razones por las que $u'(t)$ no puede ser igual a t pero sí puede ser igual a $-t$ y $-t^2$, explicándoselo a su compañera, y que ambos encuentren otras posibles expresiones para la función derivada (Trascripción B.2.2.TU, intervenciones [35,44]). De la misma forma que ocurrió con Silvia y Milagros, la comparación con preguntas posteriores sirvió de heurística a Nicanor para reflexionar acerca de otras cuestiones del problema.

Como era de esperar por la trayectoria mostrada por Nicanor y Mar en sus respuestas al cuestionario de la derivada, este problema no les ha supuesto grandes dificultades. La única pregunta que contestaron de forma errónea fue la representación en términos matemáticos de la situación en la que el número de átomos de uranio 238 que hay en un mineral va disminuyendo. Esta pareja mostró tener los conocimientos necesarios para poder expresar esta situación en términos de la función $u'(t)$, pero optaron por proponer una expresión algebraica para la función $u(t)$, sin tener elementos suficientes para ello. En esta situación hubiera sido de gran ayuda la presencia de la heurística de considerar la pregunta desde distintos puntos de vista.

Problema 2: Contaminación de mercurio

Actividad inicial

Mientras que otras parejas optaron por la trascripción casi literal del enunciado del problema para elaborar la actividad inicial en la que se les pedía explicar brevemente cuál era el problema planteado, los datos que consideraban relevantes para la resolución y cómo creían que podrían resolverlo, Nicanor y Mar (de forma similar a Milagros y Silvia) utilizan esta actividad para ir familiarizándose con la situación. Consideran, inicialmente, que deben resolver dos problemas: uno de tipo matemático, encontrar una función que indique la cantidad de mercurio que hay en el estanque en cualquier instante, y un problema químico, cómo disminuir la concentración de mercurio en el depósito (Imagen 5.4.2.7 y trascripción B.2.2.TM, intervenciones [22,30]).


Tenemos un estanque contaminado con mercurio y queremos obtener una relación que nos permita determinar la concentración de mercurio en el agua y poder reducir esta concentración. Tenemos como datos la capacidad del estanque (10.000 L), la concentración de mercurio en la disolución utilizada y cuanto se ha echado por minuto. Tenemos también la velocidad de salida del agua del estanque y la concentración actual de mercurio en el agua. Habría que definir una función que dé cuenta de la cantidad de mercurio en el agua en cada momento, usando para ello los datos que nos dan; como la concentración inicial, las velocidades de salida y entrada...

Definir otra que indique la cantidad que sale de la disolución. Hallar la variación de estas dos ecuaciones para obtener otra que nos dé la concentración de mercurio por litro en cada momento.

Por último, con la última ecuación, establecer otra que indique como disminuir la concentración de mercurio en el agua.

Imagen 5.4.2.7: Actividad inicial de Nicanor y Mar

Para realizar esta actividad inicial, Nicanor y Mar se formulan preguntas relacionadas con el análisis de datos, algunas de las cuales coinciden con las formuladas en la etapa 1 de la actividad, que todavía no han leído. Esta pareja, de forma autónoma, ha comenzado a realizar actividades de análisis de la información (trascripción B.2.2.TM, intervenciones [31,37]).

Nicanor y Mar, durante la realización de la actividad inicial, incluso comienzan a plantearse la manera de resolver el problema. Con el objetivo en mente de conseguir una expresión para la concentración de mercurio que hay en el depósito, Mar reflexiona y explica a su compañero lo siguiente:

(58) M: ... Gramos por litro… o sea, aquí lo que tenemos es la ecuación de la concentración por tiempo… la velocidad… o sea, la derivada de la concentración
(59) N: Um… sí
(60) M: Y si integramos tenemos la ecuación de la concentración de mercurio dependiente del tiempo.
(61) N: ¿Cómo?
(62) M: La derivada, si integras es el camino opuesto. Vas hacia atrás.
(63) N: Sí

Trascripción B.2.2.TM

En esta trascripción se pueden observar dos aspectos fundamentales: Mar hace referencia al uso de la derivada para expresar velocidad (“velocidad... o sea, la derivada de la concentración”) y al procedimiento de integración como operación inversa a la derivación (“si integramos tenemos la ecuación de la concentración”). Como ya se observó en las respuestas de Mar al cuestionario de la derivada, primer instrumento analizado en esta sección, esta alumna comete algunos errores al expresarse en términos matemáticos. En esta intervención habla de “la ecuación de la concentración” para referirse a la expresión algebraica de la concentración como función.

Un error análogo comete Mar durante la entrevista realizada después de finalizar las sesiones de clase dedicadas al estudio de las EDO. En esa ocasión utiliza la expresión “ecuación general” para referirse a la función solución general de la EDO (trascripción B.2.2.TEM, intervención {4}). En los dos casos la confusión se produce entre los conceptos de función y ecuación, pero no se dispone de elementos para profundizar en la naturaleza del error que comete esta estudiante.

Comprensión y análisis de la situación
La etapa 2 del segundo problema del Módulo de Enseñanza no resultó trivial para los estudiantes, en particular para Nicanor y Mar. Esta pareja comienza esta etapa buscando una expresión algebraica que represente la cantidad de mercurio que puede haber en el depósito en un momento determinado. Para ello utilizan la heurística de buscar un patrón a partir de las respuestas dadas en la etapa anterior, cometiendo el error de considerar únicamente la cantidad de mercurio que se introduce en el depósito, pero no la que sale (trascripción B.2.2.TM, intervenciones [133,138]).

En la discusión que mantienen Nicanor y Mar para decidir cómo expresar la cantidad de mercurio que sale del estanque por minuto, podemos observar que Nicanor relaciona esta cantidad con una “derivada” puesto que, según señala, es la velocidad a la que sale el mercurio. Estamos ante una asociación de términos, con ausencia de significado, puesto que para establecer esta relación hay que tener en cuenta qué función es la que está variando (trascripción B.2.2.TM, intervenciones [142,147]).

M: ¿Cuánto salía? Si salen los mismos que entran y entra eso de ahí. Es esto entre 10000
N: Eso entre 10000 y derivado ¿no? porque si es la velocidad.
M:…
N: Bueno, lo de la cantidad que sale por minuto, es la velocidad a la que sale.
[...]
N: Sería 0.3t/10000
M: Sí, esa es la concentración
N: Entonces 0.0000 me pasé con los ceros
M: …Tres litros por minuto, y que lo que tenemos en el estanque… es eso ¿no?
N: Sí, 0.3 t /10000. Y derivas. Créeme

Trascripción B.2.2.TM, intervenciones [142,147]

Mar plantea una alternativa a la respuesta de Nicanor en la que utiliza la proporción de mercurio que hay dentro del estanque en cada momento y la velocidad de salida, para obtener la cantidad de mercurio que sale del estanque en cualquier instante de tiempo. Aunque el método elegido es correcto, la expresión inicial que obtienen no es válida porque toman la expresión algebraica que propusieron en la primera pregunta para la cantidad de mercurio, $p(t) = 3t$ (trascripción B.2.2.TM, intervenciones [142,147]). Para comprobar si la respuesta dada es correcta, Nicanor y Mar recurren al uso de las unidades de medida que les resulta de su operación y las que saben que tienen que obtener en virtud de la pregunta formulada. Con esta estrategia de control llegan a la conclusión de que su respuesta no es correcta.

Al igual que ocurrió con Silvia y Milagros (sección 5.4.1), esta pareja no consiguió establecer la ecuación diferencial que modela la situación planteada y que constituye el objetivo matemático principal de la etapa 2 de este problema. Lo que les ha faltado para conseguir expresar la EDO es relacionar la variación de la cantidad de mercurio con la derivada de la función $p(t)$. Nicanor y Mar continúan con la resolución del problema utilizando la expresión de la ecuación diferencial mostrada por el profesor en la pizarra, $p'(t) = 0'3 - 0'0003p$.

<u>Solución de casos particulares</u>

Ya en la etapa 3 de resolución del problema, Nicanor y Mar, reconocen la expresión $p'(t) = 0'3 - 0'0003p$ como una EDO de primer orden. Al clasificarla dudan entre considerarla como de variables separadas o lineal, ambas opciones correctas. Finalmente optan por considerarla como una EDO de primer orden lineal. Al igual que ocurrió con Milagros y Silvia (sección 5.4.1), Nicanor y Mar copian la resolución de la EDO presentada por el profesor y practican el uso de la Voyage 200 para resolver EDO. A continuación utilizan el concepto de valor numérico de una función para determinar el valor de la constante que figura en la expresión algebraica de la solución general de la EDO y obtener así la solución particular que modela la situación planteada.

Una vez representada gráficamente la solución particular, $p(t) = -1000 \cdot e^{-0.0003t} + 1000$, los estudiantes analizan dicha representación, percatándose de la existencia de una asíntota horizontal y calculando el valor límite tanto con la calculadora como con lápiz y papel, mostrando así su destreza en el cálculo de límites. En esta etapa es donde, por primera vez, entra en juego, de forma explícita, la componente tecnológica, aspecto considerado como uno de los elementos a analizar. Nicanor y Mar no muestran dificultad para utilizar la calculadora pero tampoco se restringen a esa herramienta, comprobando con lápiz y papel, algunos resultados obtenidos con la Voyage 200.

Además, tampoco no se limitan a utilizar la Voyage 200 de la forma prescrita en la actividad. Por ejemplo, al representar gráficamente la función $p(t) = -1000 \cdot e^{-0.0003t} + 1000$, el enunciado del problema les indica los parámetros de representación que deben utilizar para obtener una visión apropiada de la gráfica. Nicanor y Mar no se limitan a usar esos parámetros sino que prueban con otros, utilizando la calculadora como herramienta que permite indagar en el comportamiento de las soluciones de una EDO (trascripción B.2.2.TM, intervenciones [337,350]).

(337) N: Hay que cambiarlos
(338) M: Sí
(339) N: -8000
(340) M: ¿Y tú cómo sabes eso? ¿De dónde sacas la fórmula?
(341) N: Porque es que si no, sólo representa un fisco y te queda así
(342) M: Ah, claro, hay que hallar aquí el x mínimo y el x máximo
[...]
(347) M: O sea, era como si tuviéramos esto así [Dibuja recta] Es que la función era tan grande…

(348) N: Exacto, exacto. Teníamos sólo este trocito y te daba recto. Eso. Esto era toda la pantalla así [Trozo pequeño estirado]
(349) M: Ajam
(350) M: ¿Y cómo pondrías xmin y xmax?

Trascripción B.2.2.TM, intervenciones [337,350]

La etapa 3 finaliza con una serie de cuestiones que tienen como objetivo determinar el grado de interrelación entre el contexto de la situación real planteada y el modelo matemático, además de permitir observar si los estudiantes han comprendido el proceso de resolución que han seguido de forma guiada por la actividad y el significado de las expresiones matemáticas utilizadas. Nicanor y Mar, al igual que ocurrió con Milagros y Silvia (sección 5.4.1) resolvieron esas actividades sin dificultad (trascripción B.2.2.TM, intervenciones [441,453]), mostrando así su capacidad para reflexionar y su habilidad para resolver problemas, elementos fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas (Kilpatrick et al., 2009).

<u>*Planteamiento y solución de casos generales*</u>

En la etapa 4 de este problema se generaliza la situación hipotética planteada, haciendo variar cuatro de los parámetros que influyen en ella: la cantidad de mercurio que se introduce en el depósito, la velocidad a la que entra y sale la disolución, el volumen del depósito y la cantidad inicial de mercurio que hay en el depósito (anexo A.2.M). Cada uno de estos parámetros es estudiado en un apartado diferente de esta etapa del problema.

Nicanor y Mar reflexionan sobre qué cambiaría en la EDO y la función solución general de la misma si se modificara la cantidad de mercurio que entra en el depósito (primer apartado). No relacionan los términos de la EDO con su significado en la situación hipotética planteada (la cantidad de mercurio que entra y la que sale), sino que se limitan a utilizar un argumento de linealidad en la dependencia entre los términos de la EDO y la cantidad de mercurio que se introduce (Imagen 5.4.2.8). Este razonamiento fue empleado también por Alexis y Zoraida (sección 5.4.4).

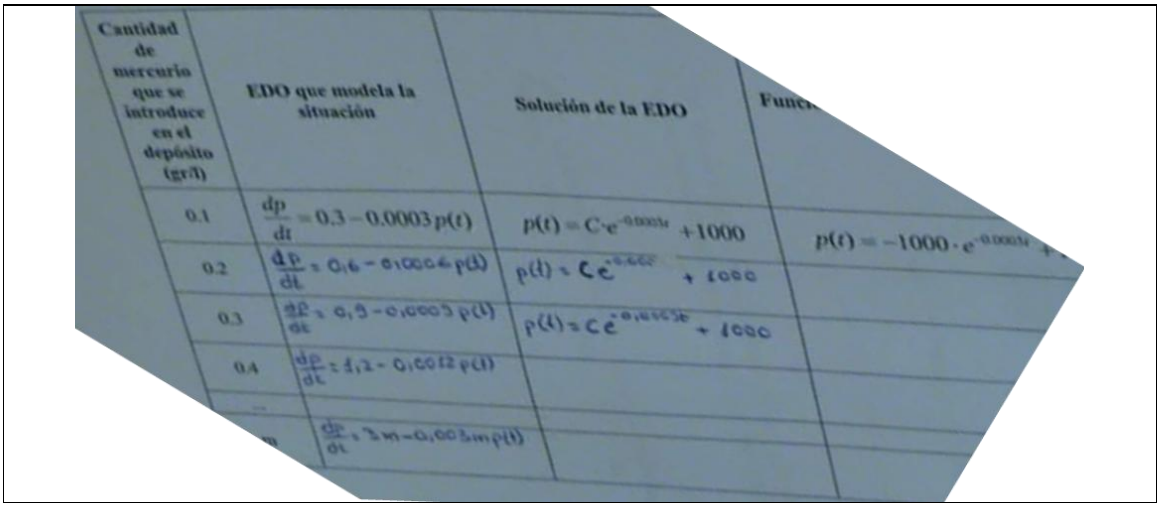


Imagen 5.4.2.8: Primeros procesos de generalización de Nicanor y Mar

Esta pareja resuelve las EDO propuestas utilizando la Voyage 200 y no se plantean resolver las ecuaciones con lápiz y papel para comprobar el resultado obtenido (Imagen

5.4.2.9). Para completar la última fila de esta tabla, correspondiente a introducir una cantidad de m gr/l de mercurio, buscan el patrón que se sigue en las filas anteriores. Resuelven correctamente los problemas de valores iniciales correspondientes a la condición $p(0) = 0$ y el cálculo de la cantidad máxima de mercurio que se puede alcanzar en el depósito, mostrando fluidez en la resolución de las ecuaciones que obtienen y en el cálculo de límites ya que no utilizan ni la Voyage 200 ni el lápiz y papel, hacen los cálculos de forma directa.

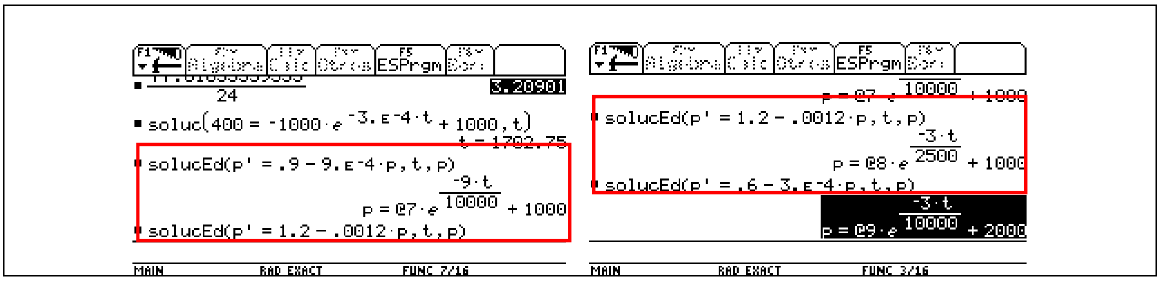


Imagen 5.4.2.9: Nicanor y Mar resuelven las EDO con la Voyage 200

A continuación representan gráficamente las funciones soluciones particulares para cada uno de los cuatro primeros casos (en los que se introducen 0’1, 0’2, 0’3 y 0’4 gr/l de mercurio en el depósito) y analizan las representaciones para responder a la pregunta “¿en cuál de los casos se alcanza una mayor concentración de mercurio en el depósito?” Nicanor ha observado en las representaciones gráficas que “todas confluyen en el 1000” mostrando que está coordinando el sistema de representación gráfico con el resultado del cálculo del límite de la función empleando el sistema de representación algebraico. Esta pareja, inicialmente, responde que en todos los casos se alcanza la misma concentración máxima pero que se alcanzará antes cuanto mayor sea la cantidad de mercurio que se introduzca en el depósito.

Resuelven el primer apartado de esta etapa sin percatarse del error que habían cometido al plantear las EDO correspondientes a este primer caso de generalización. Cuando comienzan a plantearse el segundo apartado, en el que se modifica la velocidad a la que entra y sale la disolución del depósito, Mar se percata del error que han cometido al plantear las EDO del primer apartado, señalando que el término $0'0003p$ no varía (trascripción B.2.2.TM, intervenciones [614,624]). Mar ha detectado el error porque el segundo apartado de la etapa 4 comienza mostrando la expresión de la EDO y de la función solución general de la misma para el caso en que se introducen m gr/l de mercurio en el depósito. Al no coincidir la expresión que aparece en el enunciado del problema con la que ellos habían propuesto, reflexiona sobre el error cometido. Una vez detectado el error, corrigen con rapidez sus respuestas, sin mostrar ninguna dificultad.

Los apartados b y c de esta etapa, en los que se modifican la velocidad de entrada y salida y el volumen del depósito no suponen ninguna dificultad para la pareja formada por Nicanor y Mar y la completan con fluidez. El último apartado, en el que se modifica el parámetro correspondiente a la cantidad inicial de mercurio que hay dentro del depósito, les hace dudar en un comienzo. No tardan en relacionar ese dato con el cálculo de la constante de integración que aparece en la expresión de la función solución general de la EDO y completar la tabla 4 sin dificultad.

Mar también mostró habilidad en el proceso de generalización durante la entrevista, identificando rápidamente los factores que intervenían en la situación hipotética planteada en el problema 4, *Investigaciones policiales*, y representando la EDO y la función solución que modelaban la situación general (trascripción B.2.2.TEM, intervenciones [108,116]).

Para finalizar la etapa 4 del problema se propone a los estudiantes una actividad en la que deben analizar dos situaciones análogas, con datos diferentes y compararlas. Nicanor y Mar utilizan la expresión de la función solución particular obtenida al final de la etapa. La expresión de dicha función depende de los cuatro parámetros que se han considerado en esta etapa (cantidad inicial de mercurio que se introduce, velocidad de entrada y salida de la disolución, volumen del depósito y cantidad inicial de mercurio que hay dentro del depósito). Nicanor y Mar sustituyen los valores correspondientes a cada uno de los depósitos que están considerando y responden a la actividad sin dificultad y con fluidez (Imagen 5.4.2.10).

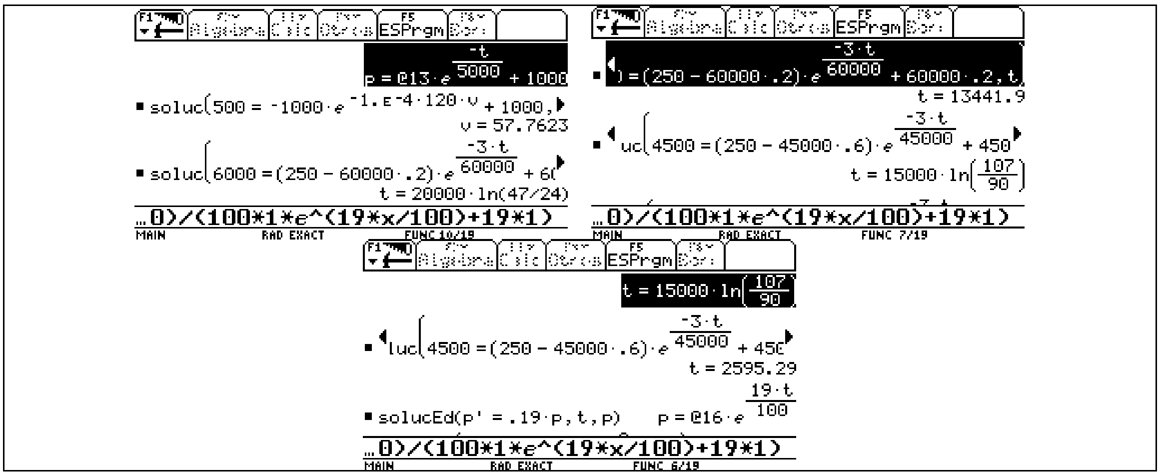
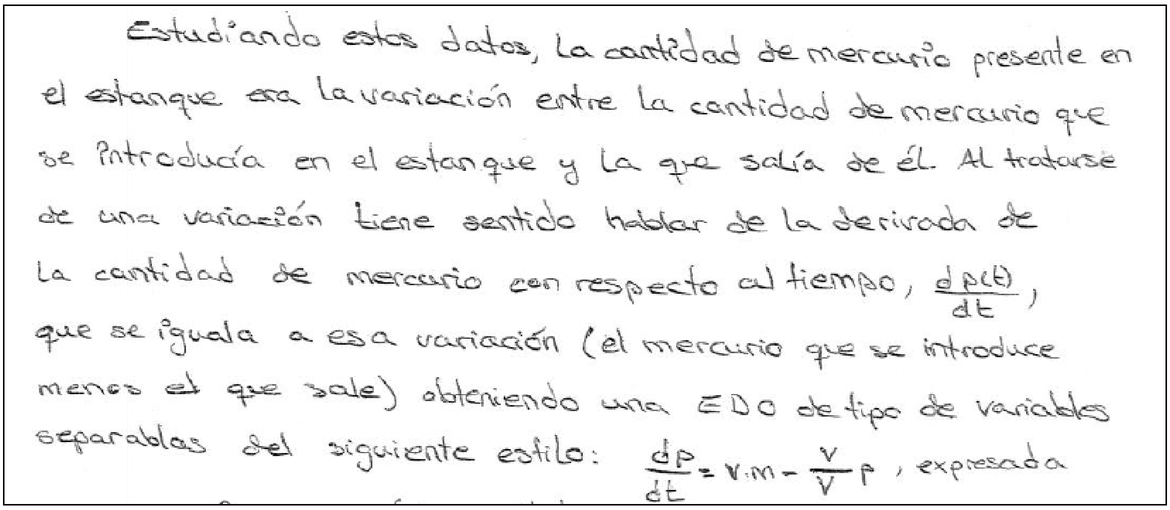


Imagen 5.4.2.10: Nicanor y Mar usan la Voyage 200 para resolver la actividad final de la etapa 4

<u>*Análisis retrospectivo*</u>

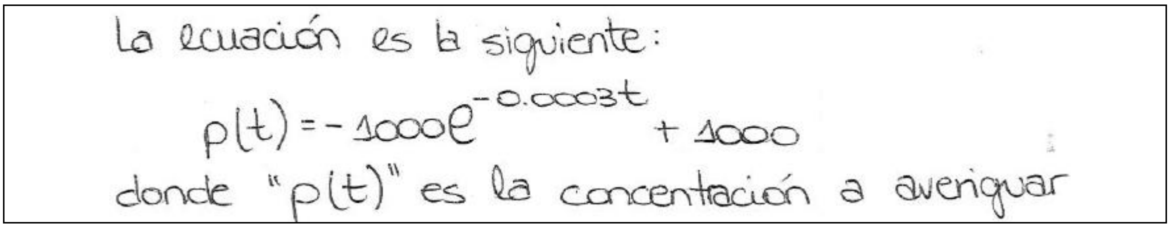
La etapa final, de análisis retrospectivo del proceso de solución, la realizan Nicanor y Mar de forma individual, por propia iniciativa. El informe redactado por cada uno de ellos (anexo B.2.2.M) muestra que esta pareja ha comprendido cómo se relacionan los diferentes conceptos matemáticos con los distintos elementos que entran en juego en la situación hipotética planteada. Su enfoque ha quedado centrado en las operaciones realizadas en el sistema de representación algebraico, puesto que no hacen ninguna mención a las actividades en las que se utilizó la representación gráfica de funciones. Tampoco hacen ninguna mención al uso de la Voyage 200.

Algunos otros aspectos que se pueden observar en la redacción de los informes son, por ejemplo, que Nicanor parece no comprender del todo cuál es la razón de que se haya utilizado una EDO para resolver este problema. En el fragmento de informe que se muestra en la imagen 5.4.2.11, Nicanor manifiesta que “la cantidad de mercurio presente en el estanque era la variación entre la cantidad de mercurio que se introducía en el estanque y la que salía de él”, confundiendo así la variación que se produce en la cantidad de mercurio que hay dentro del depósito, $p'(t)$, con la cantidad que hay, $p(t)$.


Estudiando estos datos, la cantidad de mercurio presente en el estanque era la variación entre la cantidad de mercurio que se introducía en el estanque y la que salía de él. Al tratarse de una variación tiene sentido hablar de la derivada de la cantidad de mercurio con respecto al tiempo, $\frac{dp(t)}{dt}$, que se iguala a esa variación (el mercurio que se introduce menos el que sale) obteniendo una EDO de tipo de variables separables del siguiente estilo: $\frac{dp}{dt} = v \cdot m - \frac{v}{V}p$, expresada

5.4.2.11: Parte del informe final de Nicanor

Mar, por su parte, confunde la cantidad de mercurio, $p(t)$, con la concentración de dicho elemento dentro del depósito (Imagen 5.4.2.12), algo que le ha ocurrido a varios estudiantes durante la resolución de este problema. Este aspecto fue uno de los que hizo que muchos alumnos no consiguieran responder correctamente a las preguntas de la etapa 2 y, por consiguiente, no obtener la expresión de la EDO que modela la situación.


La ecuación es la siguiente:

$$p(t) = -1000e^{-0.0003t} + 1000$$

donde "p(t)" es la concentación a averiguar

5.4.2.12: Parte del informe final de Mar

En su informe, Mar refleja la forma en que ha reflexionado para obtener la expresión de la EDO que modela la situación general (imagen 5.4.2.13), dependiendo de los cuatro parámetros considerados en el problema (cantidad de mercurio que se introduce, velocidad de entrada y salida de la disolución, volumen del depósito y cantidad inicial de mercurio que hay dentro del depósito).

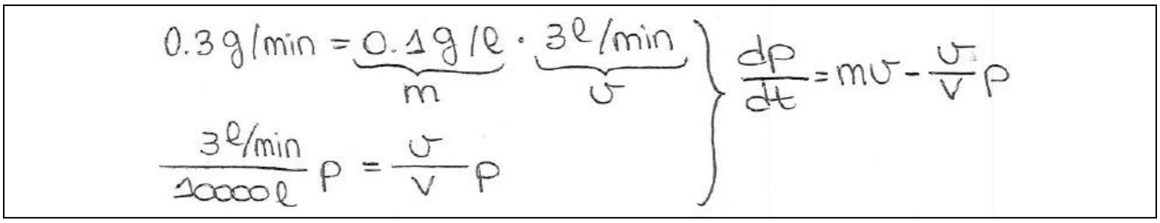

$$\left.\begin{array}{l} 0.3\,g/min = \underbrace{0.1\,g/l}_{m} \cdot \underbrace{3\,l/min}_{v} \\ \frac{3\,l/min}{10000\,l}\,p = \frac{v}{V}\,p \end{array}\right\} \frac{dp}{dt} = mv - \frac{v}{V}p$$

Imagen 5.4.2.13: Proceso de generalización mostrado por Mar en el informe final

Problema 3: Dinámica de poblaciones

Este problema fue trabajado en el aula durante 4 sesiones y, tal y como se ha indicado, su estructura es análoga al problema 2, distinguiéndose cinco etapas de resolución: comprensión y análisis de la situación, solución del caso particular, planteamiento y solución del caso general y análisis retrospectivo del proceso de solución.

Comprensión y análisis de la situación
Las etapas iniciales de este problema no supusieron ninguna dificultad para Nicanor y Mar. Esta pareja obtuvo la EDO que modelaba la situación planteada inicialmente, $p' = 0'19p$, a partir de los datos de una tabla que calcularon interpretando correctamente el significado de las tasas de nacimiento y mortalidad de la población y utilizando la búsqueda de patrones como heurística para representar el número de peces que nacen y mueren y la variación que se produce en el caso de que haya una población general de $P(t)$ peces. Aunque Nicanor y Mar generalizaron de forma correcta, no comprobaron las expresiones que habían obtenido, mostrando que el uso de estrategias de control no se encuentra en su catálogo de recursos a la hora de resolver problemas.

Solución de casos particulares
La etapa 3 de este problema comienza con el análisis de la solución general de la EDO anterior, $p = C{\cdot}e^{0'19t}$. Nicanor y Mar relacionan el cálculo de la constante C con la consideración de unas condiciones sobre el número de peces, $P(t)$, en un instante de tiempo determinado, es decir, con la resolución de un problema de valores iniciales. Además, basándose en el aspecto empírico representado por $P(t)$, argumentan que dicha constante debe ser positiva, ya que $P(t)$, por su significado, también debe tener ese signo. Preguntados acerca de la monotonía de la función solución, esta pareja responde que se trata de una función creciente, basándose en las propiedades de la función exponencial y haciendo referencia explícita al papel que el signo de C juega en ese argumento. Esta referencia al signo de la constante C para analizar la monotonía de la función $p = C{\cdot}e^{0'19t}$ no fue hecha de forma explícita por muchos de los grupos de estudiantes, por ejemplo, por Milagros y Silvia (sección 5.4.1).

A continuación, se introduce el término de competición entre especies, con lo que la EDO que modela la nueva situación toma la forma $P' = 0'19P - bP^2$, siendo $b > 0$. Se pide a los estudiantes analizar para qué valores de P la población aumenta, disminuye o se mantiene constante. Aunque varias de las parejas de estudiantes relacionaron esta pregunta con el hecho de que P' debía ser positiva, negativa o cero, respectivamente, sólo Nicanor y Mar resolvieron las inecuaciones correspondientes (Imagen 5.4.2.14).

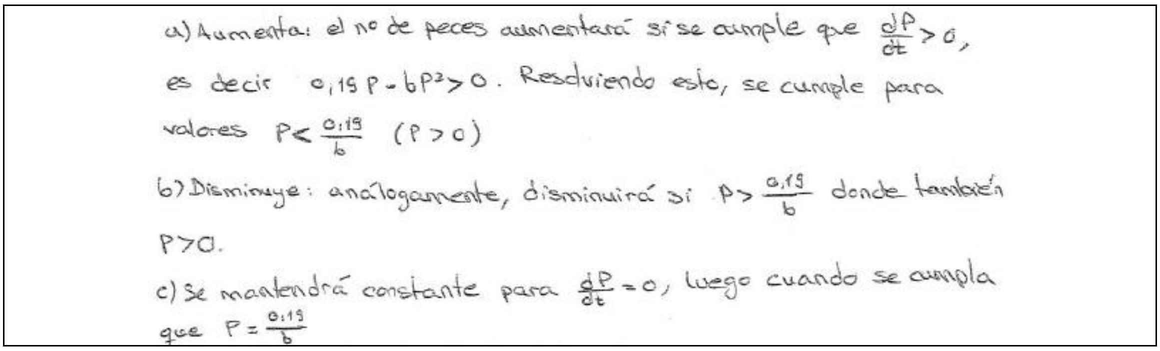

a) Aumenta: el nº de peces aumentará si se cumple que $\frac{dP}{dt} > 0$,
es decir $0{,}19P - bP^2 > 0$. Resolviendo esto, se cumple para
valores $P < \frac{0{,}19}{b}$ $(P > 0)$
b) Disminuye: análogamente, disminuirá si $P > \frac{0{,}19}{b}$ donde también
$P > 0$.
c) Se mantendrá constante para $\frac{dP}{dt} = 0$, luego cuando se cumpla
que $P = \frac{0{,}19}{b}$

Imagen 5.4.2.14: Planteamiento de las inecuaciones como proceso de resolución para estudiar el signo de la función derivada

El resto de los grupos que utilizaron el significado geométrico de la derivada para responder a esta pregunta se limitaron a indicar cuál debía ser el signo de P' (como es el caso de Virginia y Carmen, sección 5.4.3) o a probar con diferentes valores de P

para estudiar el signo de P' (utilizaron esta heurística, por ejemplo Milagros y Silvia, sección 5.4.1).

Por otra parte, para establecer qué ocurrirá con la población a medida que pasaba el tiempo, esta pareja inicialmente no piensa en el uso del concepto de límite. En lugar de esto, resuelven la EDO, $P' = 0'19P - bP^2$, usando la Voyage 200 y se limitan a responder que el comportamiento de la función solución depende de los valores de b y C, el término de competición y la constante de integración, respectivamente (Imagen 5.4.2.15). Más adelante se plantean calcular el límite de $P(t)$, cuando $t \to \infty$, pero lo descartan al obtener una indeterminación (trascripción B.2.2.TP, intervenciones [472,476]). Tal y como transcurre la discusión entre los alumnos, no puede determinarse si no continúan con el cálculo del límite porque no saben hacerlo o porque no lo consideran necesario. De cualquier forma, tampoco contemplan como alternativa el uso de la Voyage 200 para calcular este límite. Con esta situación se presenta un ejemplo de que no es suficiente disponer de una herramienta como la Voyage 200 para resolver problemas, también en necesario adquirir destreza para utilizarla y habilidad para detectar aquellas situaciones en las que puede ser de ayuda, como es el caso que se está considerando (Kilpatrick et al., 2009).

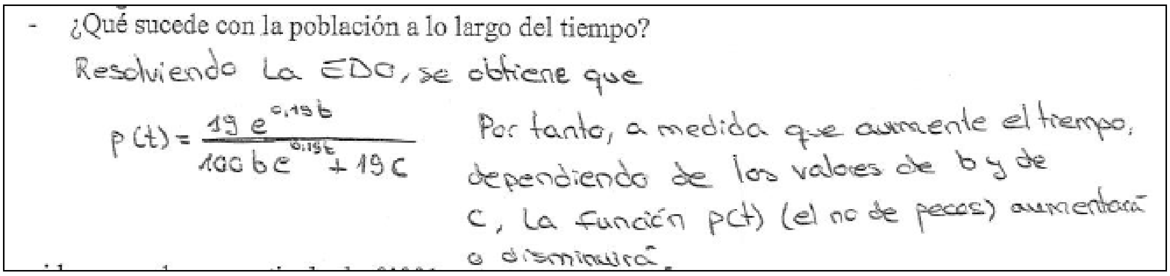


Imagen 5.4.2.15: Análisis de la expresión algebraica de la función

Luego se pide a los estudiantes que representen gráficamente tres soluciones particulares de la ecuación $P' = 0'19P - bP^2$, cada una con un dato inicial que las sitúa en apartados diferentes de la pregunta anterior. El objetivo de esta actividad es que los estudiantes analicen las representaciones gráficas realizadas y comparen con la respuesta que dieron en las preguntas anteriores. Nicanor y Mar realizan correctamente las representaciones gráficas (Imagen 5.4.2.16) y comprueban que la imagen obtenida se corresponde con la respuesta que habían dado sobre los intervalos en los que la función crece, decrece o se mantiene constante (trascripción B.2.2.TP, intervenciones [548,558]). Sin embargo no modifican su respuesta a la pregunta "¿qué sucede con la población a lo largo del tiempo?" lo que podría indicar que no han reflexionado lo suficiente sobre la representación gráfica y su conexión con esta pregunta o no han identificado la presencia de una asíntota horizontal en el sistema gráfico.

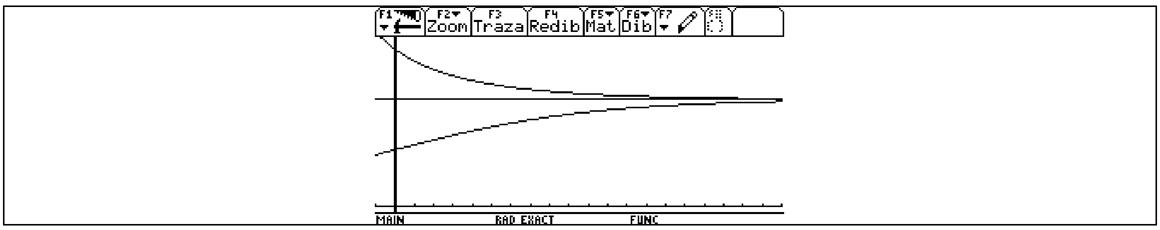


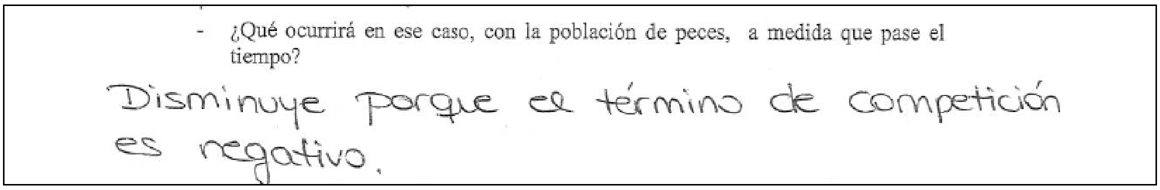
Imagen 5.4.2.16: Representación gráfica obtenida por Nicanor y Mar

Durante la entrevista a Mar surge una representación gráfica análoga a esta cuando se le pide a la alumna analizar qué ocurriría si la temperatura a la que se encuentra el cuerpo fuera inferior a la temperatura del medio que lo rodea. En ese caso Mar relaciona la representación gráfica con el valor del límite calculado previamente (trascripción B.2.2.TEM, intervenciones [151,154]), aunque el proceso de verificación no fue utilizado por la alumna de forma autónoma sino inducido por la profesora que realizó la entrevista.

Para terminar la etapa 3 del problema *Dinámica de poblaciones*, Nicanor y Mar reflexionan acerca de lo que ocurriría con la población a lo largo del tiempo, dependiendo de b (trascripción B.2.2.TP, intervenciones [562,582]).

Planteamiento y solución de casos generales

En la etapa 4, de planteamiento y solución de casos generales, Nicanor y Mar obtienen la expresión correcta de la EDO que modela una situación en la que la tasa de crecimiento de la población sea cualquier valor a, $P' = aP - bP^2$. Formulan conjeturas acerca de lo que ocurriría en el caso en que $a > 0$, $a < 0$ ó $a = 0$. A diferencia de parejas como Milagros y Silvia (sección 5.4.1), esta pareja sí responde correctamente a los tres apartados. En el que más errores han cometido los estudiantes es el caso en que $a = 0$, puesto que muchos sólo observan la parte empírica, considerando que la tasa de natalidad y mortalidad son iguales, pero no reflexionan acerca de la información que proporciona la EDO, en la que imagen el término de competición. Nicanor y Mar sí observan que, en el caso en que $a = 0$, la población disminuye (Imagen 5.4.2.17).


- ¿Qué ocurrirá en ese caso, con la población de peces, a medida que pase el tiempo?

Disminuye porque el término de competición es negativo.

Imagen 5.4.2.17: Conjetura y razonamiento de Nicanor y Mar

Al igual que se había hecho en la etapa anterior, se propone a los estudiantes que representen gráficamente tres funciones, cada una de ellas correspondiente a una de las situaciones consideradas en la formulación de conjeturas ($a > 0$, $a < 0$ ó $a = 0$). Nicanor y Mar realizan el proceso necesario para obtener esas representaciones y comprueban que las conjeturas formuladas se verifican en los casos representados gráficamente.

Análisis retrospectivo

Todos los aspectos del comportamiento de la función logística considerados en el desarrollo de este problema del Módulo de Enseñanza fueron mostrados con claridad, por Nicanor y Mar, en el informe que presentaron como parte de la etapa 5 de este problema (anexo B.2.2.P). En ese informe, esta pareja refleja los diferentes casos analizados y utiliza representaciones gráficas para mostrar cómo se comportaría la población de peces en cada uno de ellos.

Como conclusión de esta sección, en la que se describe la ruta de aprendizaje seguida por Nicanor y Mar durante la implementación del Módulo de Enseñanza, se presenta una tabla en la que se muestran distintos elementos del aprendizaje de estos estudiantes, relacionados con la comprensión conceptual, la fluidez en el uso de procedimientos matemáticos y el uso de heurísticas y de estrategias de control del proceso de resolución (tabla 5.4.2.18). En dicha tabla se refleja además, cuáles de esos elementos con compartidos por los dos estudiantes que han trabajado juntos y cuales han mostrado por separado, aunque la mayoría de los elementos han sido compartidos, tratándose de una pareja homogénea en lo que al trabajo matemático se refiere.

	Comprensión conceptual	*Fluidez en los procedimientos*	*Heurísticas*	*Estrategias de control*
Nicanor			Comparación con preguntas posteriores.	
Aspectos comunes	Uso del concepto de función y de derivada para indicar dependencia del tiempo. Utilizan una expresión algebraica de una función en la que aparezca una resta para indicar que una cantidad disminuye. Relaciona la derivada con fenómenos de aumento y disminución de una cantidad y con la velocidad de cambio. Reconoce la existencia de infinitas funciones con una misma derivada. Relaciona la derivada con la velocidad[51]. Valor numérico de una función. Relacionan la monotonía de la función exponencial con su expresión algebraica.	Cálculo de límites.	Búsqueda de patrones. Resolución de inecuaciones para estudiar el signo de una función derivada.	Uso de las unidades de medida como referencia. Comprobación de resultados obtenidos con la Voyage 200, empleando lápiz y papel[52]. Replanteamiento de situaciones a partir de resultados mostrados por la propia actividad. Uso del sistema gráfico para comprobar conjeturas[53].
Mar			Uso de las unidades de medida como referencia.	

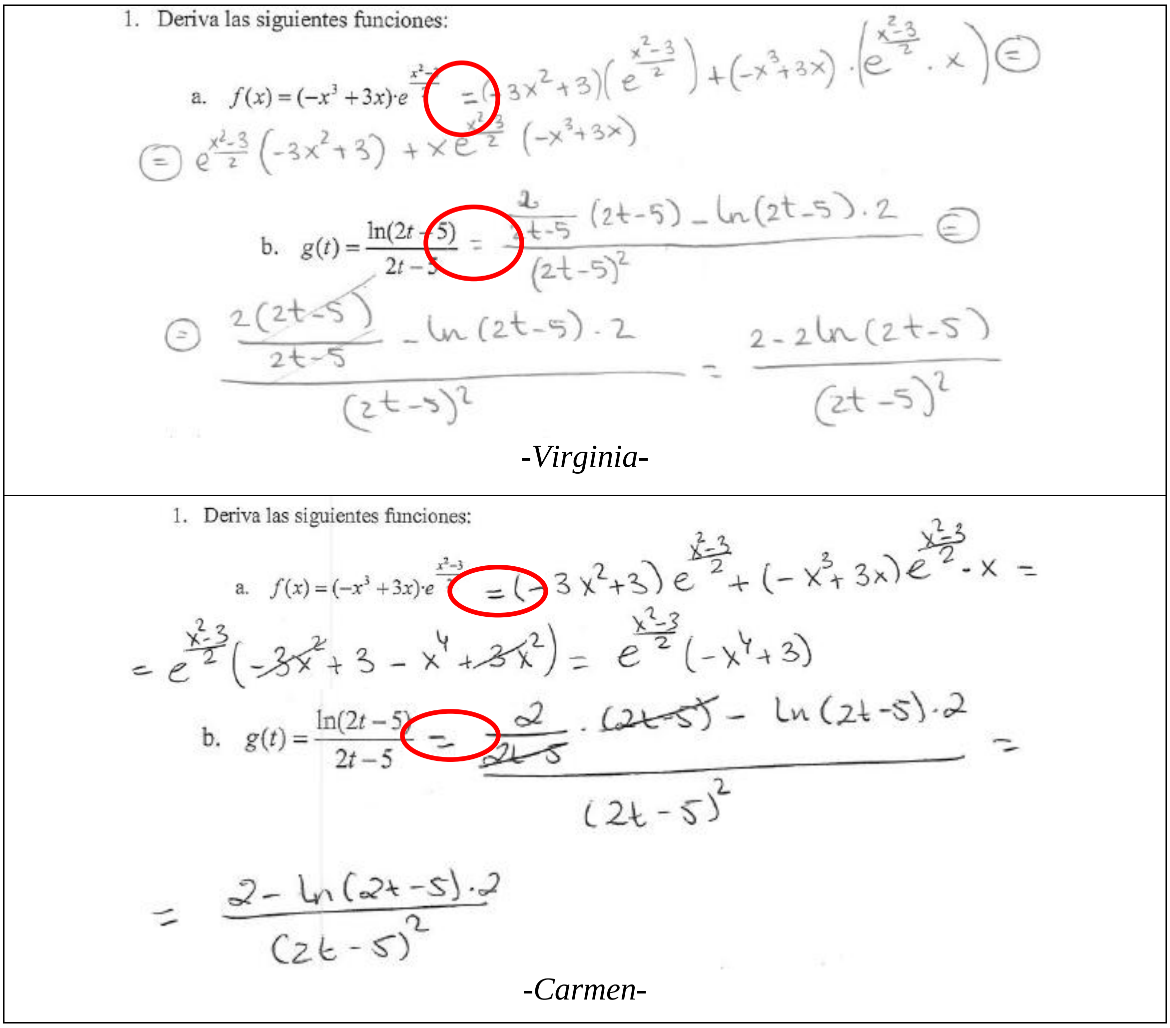
Tabla 5.4.2.18: Elementos del aprendizaje mostrados por Nicanor y Mar durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza

[51] Nicanor comete un error al respecto durante la etapa 2 del problema.
[52] No lo hacen en todas las situaciones.
[53] A instancias del problema 3 del Módulo de Enseñanza.

5.4.3 Virginia y Carmen

En esta sección se describe la ruta de aprendizaje desarrollada por una pareja cuyo perfil obtenido del análisis de las respuestas al cuestionario de la derivada coincide (tabla 5.2.9). Virginia y Carmen, además de utilizar las reglas de derivación con fluidez, reconocen dos significados diferentes asociados al concepto de derivada: su definición formal y su uso para describir la monotonía de una función (tabla 5.2.2).

Esta pareja muestra diferencias en el uso de procedimientos para simplificar expresiones algebraicas. Carmen utiliza los tres procedimientos posibles para simplificar las expresiones de las funciones derivadas obtenidas en la pregunta 1 (realizar operaciones con polinomios, simplificar fracciones algebraicas y sacar factor común), mientras que Virginia sólo utiliza uno de ellos, la simplificación de fracciones algebraicas (Imagen 5.4.3.1). En la imagen puede observarse, además, que ninguna de las dos estudiantes ha sido rigurosa en la redacción de sus respuestas, utilizando de forma incorrecta el símbolo "=".



1. Deriva las siguientes funciones:

a. $f(x)=(-x^3+3x)\cdot e^{\frac{x^2-3}{2}} = (-3x^2+3)\left(e^{\frac{x^2-3}{2}}\right)+(-x^3+3x)\cdot\left(e^{\frac{x^2-3}{2}}\cdot x\right) = e^{\frac{x^2-3}{2}}(-3x^2+3)+xe^{\frac{x^2-3}{2}}(-x^3+3x)$

b. $g(t)=\frac{\ln(2t-5)}{2t-5} = \frac{\frac{2}{2t-5}(2t-5)-\ln(2t-5)\cdot 2}{(2t-5)^2} = \frac{\frac{2(2t-5)}{2t-5}-\ln(2t-5)\cdot 2}{(2t-5)^2} = \frac{2-2\ln(2t-5)}{(2t-5)^2}$

-Virginia-

1. Deriva las siguientes funciones:

a. $f(x)=(-x^3+3x)\cdot e^{\frac{x^2-3}{2}} = (-3x^2+3)e^{\frac{x^2-3}{2}}+(-x^3+3x)e^{\frac{x^2-3}{2}}\cdot x = e^{\frac{x^2-3}{2}}(\cancel{-3x^2}+3-x^4+\cancel{3x^2}) = e^{\frac{x^2-3}{2}}(-x^4+3)$

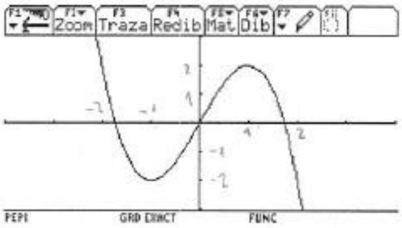
b. $g(t)=\frac{\ln(2t-5)}{2t-5} = \frac{\frac{2}{\cancel{2t-5}}\cdot\cancel{(2t-5)}-\ln(2t-5)\cdot 2}{(2t-5)^2} = \frac{2-\ln(2t-5)\cdot 2}{(2t-5)^2}$

-Carmen-

Imagen 5.4.3.1: Procedimientos de derivación y simplificación de Virginia y Carmen

El hecho de que ninguna de las dos estudiantes concluyera la pregunta 5 y la forma en que contestaron a la pregunta 6, sugiere que aunque las dos alumnas reconocen el uso de la derivada de una función para describir su monotonía, lo hacen empleando el criterio de la primera derivada, sin relacionarlo con la pendiente de la recta tangente a la función en un punto. Además, en la respuesta de Virginia a la pregunta 6 se puede observar que no recuerda el criterio de la primera derivada para describir la monotonía de una función y lo expresa de forma incorrecta (Imagen 5.4.3.2).

6. Dada la función cuya representación gráfica se muestra a continuación, ¿qué puedes decir sobre su derivada?



Entre los puntos −2 y 2 entontramos un máximo y un mínimo (relativos), es decir en (−1,−2) hay un mínimo, entonces la derivada va a ser negativa; y en (1,2) hay un máximo, la derivada va a ser positiva (hablamos de las primeras derivadas).
Al calcular las derivadas segundas, tendremos que la función será convexa ~~en~~ ~~hasta~~ ~~x = 0 y x =~~ en una zona y cóncava en otra, eso es lo que nos indica la 2ª derivada.

Imagen 5.4.3.2: Descripción incorrecta de la derivada por parte de Virginia

Por último, estas alumnas muestran dificultades con los procesos de representación e interpretación entre el contexto matemático y situaciones planteadas en otros contextos. Ninguna de las dos estudiantes responde a las preguntas 7 y 11. Las dos relacionan la expresión que aparece en la pregunta 8 con la derivada de la función, pero no indican cuál sería el significado de la función derivada en el contexto en que se ha formulado la pregunta. Por último, en la pregunta 10 vemos que Virginia intenta relacionarla con el concepto de derivada, aunque no la concluye, mientras que Carmen no relaciona la velocidad con la función derivada (Imagen 5.4.3.3)

D10. *La función que representa la posición de un vehículo conforme pasa el tiempo es $f(t) = t^2$, calcula la velocidad a la que va en el instante t = 1.5. ¿Esa velocidad es constante?*	
$f'(t) = 2t$ *-Virginia-*	$f(t) = t^2 \longrightarrow t = 1.5$ $f(1.5) = (1.5)^2$ *-Carmen-*

Imagen 5.4.3.3: Proceso de representación de Virginia y Carmen

Las características de esta pareja, en lo que a sus respuestas al cuestionario de la derivada se refiere, se presentan de manera esquematizada en la siguiente tabla (tabla 5.4.3.4).

	Conceptos: significados asociados a la derivada	*Procedimientos*
Virginia	Monotonía (con errores)	
Aspectos comunes	Definición formal	Fluidez con la derivación. Simplifica fracciones algebraicas. Dificultades con los procesos de representación e interpretación entre contextos.
Carmen	Monotonía	Simplifica expresiones algebraicas sacando factor común. Realiza operaciones con polinomios para simplificar.

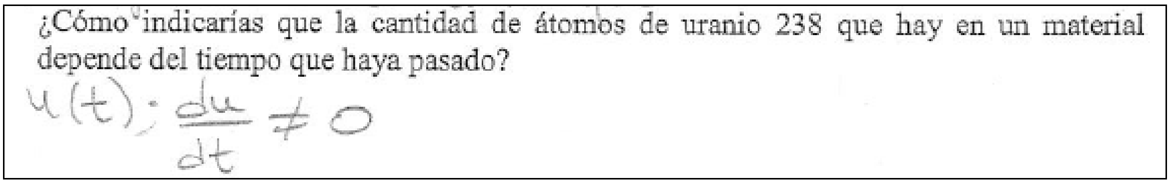
Tabla 5.4.3.4: Características de Virginia y Carmen según el cuestionario de la derivada

A continuación se describirá el trabajo que realizó esta pareja durante las diez sesiones dedicadas al desarrollo del Módulo de Enseñanza, describiendo así sus rutas o trayectorias de aprendizaje.

Problema 1: Desintegración del uranio

Durante la resolución de este problema, las dos estudiantes trabajan de forma conjunta, no se observa un dominio de una sobre la otra. A diferencia de lo que sucedía con las parejas analizadas anteriormente en lo relativo a este primer problema del Módulo, Virginia y Carmen se muestran bastante seguras en sus respuestas, avanzando con rapidez, aunque en las grabaciones se detecta que, en algún momento aislado observan lo que hace la pareja formada por Nicanor y Mar (cuya ruta de aprendizaje se describió en la sección 5.4.2).

Las parejas de estudiantes cuyas rutas de aprendizaje han sido analizadas hasta el momento (Milagros y Silvia; Nicanor y Mar) dedicaban la mayor parte de sus esfuerzos en el desarrollo del problema 1 a buscar una expresión algebraica para el número de átomos de uranio 238 que hay en un mineral en cualquier instante de tiempo, utilizando para ello expresiones que han conocido en otras asignaturas. Virginia y Carmen, no coinciden con las anteriores en este aspecto, mostrándonos desde el inicio de la actividad dos formas diferentes para expresar que una cantidad depende del tiempo (Imagen 5.4.3.5).


¿Cómo indicarías que la cantidad de átomos de uranio 238 que hay en un material depende del tiempo que haya pasado?

$u(t)$; $\frac{du}{dt} \neq 0$

Imagen 5.4.3.5: Dos formas de representar dependencia del tiempo

No ocurre lo mismo en el momento en que se les pide expresar de dos formas diferentes que el número de átomos no varíe. En este caso, estas estudiantes sólo contemplan una posibilidad, que la derivada de la función sea nula, de forma análoga a lo que hicieron Nicanor y Mar. Virginia y Carmen rechazan que esta situación pueda expresarse en términos de la función argumentando que ésta no depende del tiempo (Imagen 5.4.3.6).

Como se ha observado en otras investigaciones, el caso particular de las funciones constantes constituye un paradigma de las dificultades con que se pueden encontrar los estudiantes en el desarrollo de actividades matemáticas que involucren el concepto de función. En la sección 1.4 se vio que los estudiantes tienen dificultades para reconocer este tipo de funciones como soluciones de EDO (Guerrero et al., 2010; Rasmussen, 2001; Zandieh & McDonald, 1999). En el caso de Virginia y Carmen, parece que también supone una dificultad utilizar este tipo de funciones para expresar situaciones en contextos no matemáticos como el que se está considerando en esta actividad. De hecho, ninguna de las tres parejas cuyas rutas de aprendizaje se han analizado hasta el momento han representado la situación empleando una función constante.

Supongamos, de momento, que dicho número de átomos no varía. ¿Cómo expresarías esta situación en términos matemáticos?

$$\frac{du}{dt} = 0$$

¿Se te ocurre alguna otra posibilidad?

Ayuda: Puede expresarse en términos de la función o en términos de su derivada.

Si el nómero de átomos no varía la fonción no depende del tiempo

Imagen 5.4.3.6: Proceso de representación de situaciones de variación

Por otra parte, Virginia y Carmen utilizan el concepto de derivada para expresar situaciones de aumento, disminución o no variación de cierta cantidad (Imagen 5.4.3.7).

Volvamos ahora a la situación real, donde el número de átomos de uranio 238 que hay en un mineral va disminuyendo.

¿Cómo expresarías esta información en términos matemáticos?

$$\frac{du}{dt} < 0$$

En este contexto, ¿qué significaría que u'(t) sea positiva?

Que la fonción, es decir el nómero de átomos de uranio va aomentando

Imagen 5.4.3.7: Uso de la derivada para indicar aumento o disminución de una cantidad

Para interpretar, en el contexto de la situación planteada, diferentes situaciones mostradas en un contexto matemático relacionan una mayor disminución de la cantidad de uranio con un valor negativo inferior. En su argumento no se detecta que estén utilizando el significado de la derivada como velocidad de cambio, simplemente están haciendo una comparación numérica y una asociación de significados del tipo "(mayor) disminución - derivada (más) negativa" (trascripción B.2.3.TU, intervenciones [39,42] e imagen 5.4.3.8).

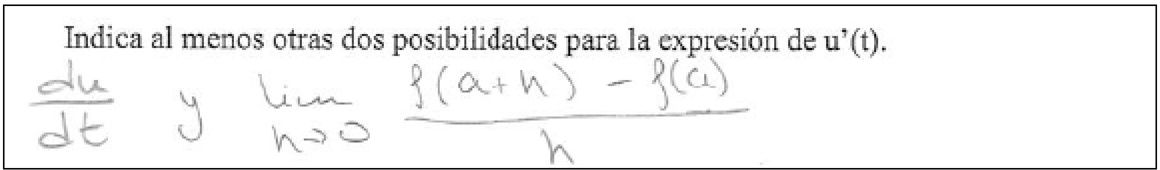
En cuanto a las heurísticas mostradas por esta pareja de estudiantes durante el desarrollo de este primer episodio del Módulo de Enseñanza, se observó que estas alumnas avanzan y retroceden continuamente a lo largo de la actividad, lo que les ha ayudado a responder a alguna pregunta, relacionándola con otra posterior o anterior.

Como elementos de control sobre las respuestas mostradas, estas alumnas se apoyan la una en la otra, preguntándose en cada momento si están de acuerdo con las respuestas dadas o no. En la última parte de la actividad, además, comprueban las soluciones dadas derivando la expresión propuesta por ellas y comparándola con la expresión de la función derivada dada (trascripción B.2.3.TU, intervenciones [73,81]).

[Proponen $-x^2/2$ como función cuya derivada es -x y pasan a comprobarlo]
V: Si yo derivo esto [se refiere a $-x^2/2$] da… ½ por menos x…
C: No, da un dos
V: Ah, vale, si
C: Tienes 1/2 y 2x y esto con esto se me va
V: Si
[...]
[Comprueban que la derivada $t^3/3$ es t^2]
V: $t^3/3$
C: 1/3 por $3t^2$ … sí

Trascripción B.2.3.TU, intervenciones [73,81]

En lo referente a los procesos de representación e interpretación, Virginia y Carmen responden correctamente a todas las preguntas en las que se debía expresar, en términos matemáticos, información referida a la situación hipotética, excepto en el caso en que debían utilizar la expresión de una función constante. En las actividades relacionadas con el proceso de interpretación de distintas expresiones matemáticas en el contexto de la situación planteada, muestran algunas dificultades que resuelven de forma autónoma analizando las respuestas a otras preguntas. Sin embargo, Virginia y Carmen, ante la petición de dos expresiones para $u'(t)$, responden sin establecer ningún tipo de relación con la situación planteada, como si se tratara de una pregunta formulada de forma aislada (Imagen 5.4.3.8).


Indica al menos otras dos posibilidades para la expresión de u'(t).

$\frac{du}{dt}$ y $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Imagen 5.4.3.8: Representaciones de la función derivada propuestas por Virginia y Carmen

En lo referente a los procedimientos matemáticos de derivación e integración, estas alumnas recurren a sus conocimientos acerca de la integral indefinida para justificar la presencia de una constante en la expresión de las funciones que tienen una derivada dada. Inicialmente, Virginia y Carmen, indican una única función para cada expresión de la derivada. Al ver que sus compañeros, Nicanor y Mar, han añadido una constante, estas alumnas se plantean la conveniencia o no de esa elección y lo justifican haciendo uso de los conocimientos matemáticos que poseen (trascripción B.2.3.TU, intervenciones [46,64]).
En lo referente a los aspectos sociales destacables de la actuación de estas alumnas, cabe mencionar el ambiente de colaboración en el que desarrollan la actividad. No existe dominio por parte de ninguna de ellas, aportando conocimientos e ideas de forma

equitativa. En el cuestionario de la derivada ya se había observado que estas alumnas presentaban un perfil similar en el terreno cognitivo, lo que se sigue manteniendo durante el desarrollo de este primer problema del Módulo de Enseñanza.

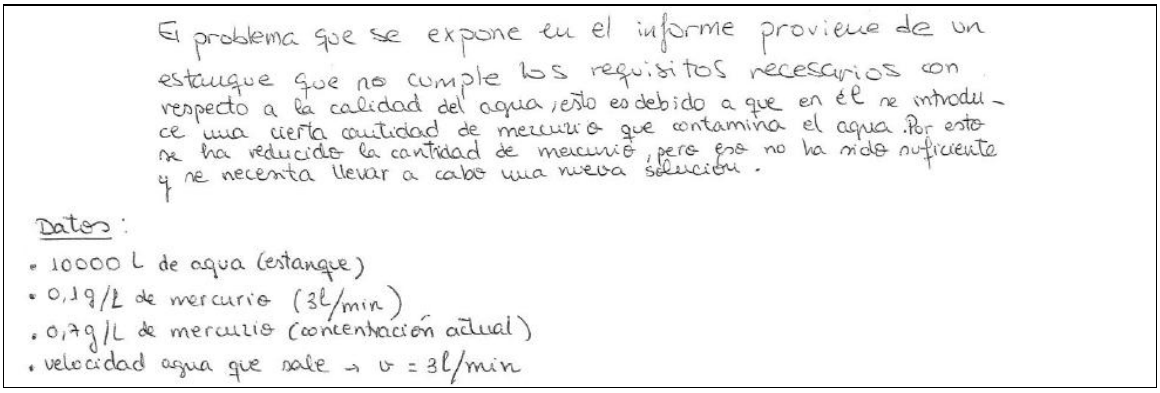
Esta pareja ha mostrado que la interacción entre dos personas con perfiles similares puede emplearse como herramienta de regulación del proceso de solución de problemas matemáticos. Virginia y Carmen se han utilizado la una a la otra como elementos para comprobar sus respuestas en diferentes momentos de la actividad.

Por otra parte, este tipo de interacción también podría esconder cierta dependencia del compañero. Esta hipótesis se formula después de haber observado en la entrevista realizada a Virginia que esta era incapaz de realizar la actividad sin obtener la aprobación, por parte de la profesora que estaba entrevistando, de cada uno de los pasos dados. Durante la entrevista, Virginia resolvió correctamente el problema 4, *Investigaciones policiales*, pero requirió el apoyo de la profesora de forma continua. Ese apoyo únicamente consistió en reafirmar sus conocimientos, puesto que Virginia mostró conocer los conceptos necesarios. En la entrevista Victoria utiliza con frecuencia frases como “y eso, ¿cómo se hace?”, “no me acuerdo”, “¿cómo era?” o “¿qué hago?”, dirigiéndose a la profesora. Esto refleja poca autonomía por su parte, puesto que, durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza, Victoria refleja muchos más conocimientos que los que muestra en la entrevista. Nuevamente estamos ante una componente mencionada por Schoenfeld (1992): las creencias del estudiante. Esta alumna parece estar convencida de que no sabe resolver este tipo de problemas, sintiendo la necesidad de que se la anime en todo momento.

Problema 2: Contaminación de mercurio

Actividad inicial

Esta pareja, en cuanto a la redacción del informe correspondiente a la actividad inicial de este problema, coincide con la pareja formada por Milagros y Silvia (sección 5.4.1) en la presentación de los datos del problema en forma de listado y en que no relacionan el enunciado de la actividad con un problema matemático, sino químico (Imagen 5.4.3.9).


El problema que se expone en el informe proviene de un estanque que no cumple los requisitos necesarios con respecto a la calidad del agua, esto es debido a que en él se introduce una cierta cantidad de mercurio que contamina el agua. Por esto se ha reducido la cantidad de mercurio, pero eso no ha sido suficiente y se necesita llevar a cabo una nueva solución.

Datos:
- 10000 L de agua (estanque)
- 0,1g/L de mercurio (3l/min)
- 0,7g/L de mercurio (concentración actual)
- velocidad agua que sale → v = 3l/min

Imagen 5.4.3.10: Redacción de la actividad inicial por parte de Virginia y Carmen

Comprensión y análisis de la situación

Las cuestiones planteadas en la primera etapa de este problema tienen como objetivo que los estudiantes comprendan la situación a la que se están enfrentando, contemplando casos particulares de situaciones que más adelante tendrán que considerar.

Carmen y Virginia tienen dificultades para responder a uno de los apartados de esta etapa, en el que se les pide calcular cuánto mercurio se habrá introducido en el depósito pasados tres minutos y medio desde que se comenzó a verter la disolución dentro del mismo. Para responder a esta pregunta emplean una regla de tres, de la misma forma que lo hicieron en las dos preguntas anteriores[54], pero cometen distintos errores en el uso de este procedimiento matemático, fruto de las magnitudes que eligieron para realizar el cálculo. Estas alumnas optaron por considerar la relación entre los litros de disolución que se introducen por minuto y los gramos de mercurio que hay disueltos en ellos, cuando una forma más directa hubiera sido considerar la relación entre el tiempo que ha pasado y los gramos de mercurio que se han introducido en ese tiempo (trascripción B.2.3.M, intervenciones [26,50]).

A pesar de que Carmen y Virginia se dan cuenta de su error, como refleja la frase de Virginia "No lo entiendo. Si van aumentando los minutos ¿Por qué nos da menos?", no lo corrigen y siguen avanzando en la actividad, sin plantearse revisar los razonamientos ni los cálculos empleados para responder. Durante esta etapa, estas alumnas no reflexionan, aspecto fundamental para el aprendizaje de las matemáticas (Kilpatrick et al., 2009) que trataba de promoverse en esta etapa de resolución del problema.

El error cometido al responder a esta pregunta no les influye en el transcurso posterior del problema. Estas alumnas realizan de forma correcta las actividades relacionadas con el proceso de representación, mostrando reconocer el uso de la derivada para describir fenómenos de variación. Este proceso no les ha resultado fácil y han necesitado la ayuda de los profesores presentes en el aula, en una ocasión para resolverles unas dudas y en otra para confirmar que la expresión de la variación que habían propuesto era la correcta.

Las actividades que mayor dificultad tienen para Carmen y Virginia son las mismas que para las parejas analizadas anteriormente, indicar cuánto mercurio puede haber en el estanque en un instante de tiempo determinado y expresar la cantidad de mercurio que sale del estanque por minuto.

Inicialmente estas alumnas proponen la expresión $p(t) = 0'3t$ para indicar la cantidad de mercurio que puede haber dentro del estanque en cualquier instante de tiempo (al igual que hicieron Nicanor y Mar, sección 5.4.2), tomando como patrones los cálculos realizados en la etapa 1, sin percatarse que esta expresión sólo hace referencia a la cantidad de mercurio que entra, pero no considera la que sale.

La dificultad a la hora de representar la cantidad de mercurio que sale del depósito vuelve a encontrarse en la interpretación de la expresión $\frac{p(t)}{10000}$ como la concentración de mercurio que hay dentro del depósito en cualquier instante de tiempo. Carmen y Virginia se plantean un caso particular, correspondiente al primer minuto de tiempo, para intentar responder a esta pregunta, pero no consiguen centrarse en el significado de las cantidades que están manejando. La confirmación de que no se trata de un error de tipo conceptual se muestra cuando Carmen indica la expresión correcta después de una intervención del profesor en la que únicamente ha recalcado las unidades que deberían medir la respuesta a la pregunta (trascripción B.2.3.M, intervenciones [95,130]).

[54] ¿Cuánto mercurio se ha introducido en el estanque un minuto después? ¿Y dos minutos después?

El último aspecto a destacar de esta pareja, durante esta etapa inicial del problema 2 del Módulo de Enseñanza, es que sienten cierta inseguridad con la expresión que han propuesto para la variación de la cantidad de mercurio que se produce en el estanque en cualquier instante de tiempo. Reconocen la derivada como elemento matemático para expresar situaciones de variación, pero no parecen muy convencidas del argumento empírico utilizado para expresar dicha variación como la diferencia entre las cantidades de mercurio que entran y salen del depósito, aunque finalmente la aceptan.

V: ¿cómo quedaría expresada la variación en un instante t teniendo en cuenta lo que entra y lo que sale?
[...]
C: La variación es la derivada.
V: [asiente]
C: Como no sea esto [0’3] menos esto [$\frac{3p(t)}{10000}$]
V: ¿Lo que entra menos lo que sale? Pues no sé
C: ¿Le ponemos esto así? Tres por p(t)… Es que si tuviéramos esto [p(t)] sustituyo y ya está.

$$p'(t) = 0{,}3 - \frac{3p(t)}{10.000}$$

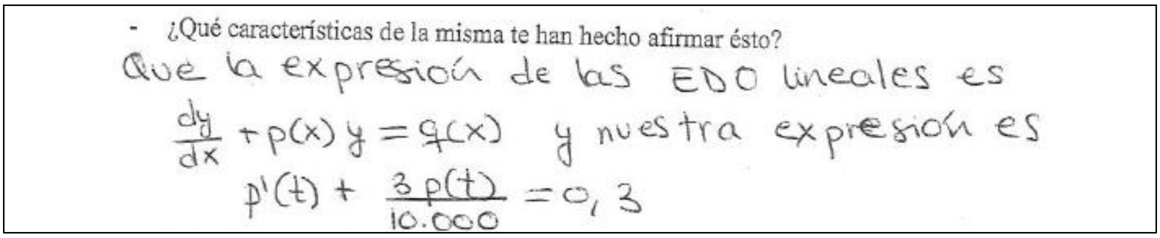
C: A lo mejor será sólo quitándole la t.
V: No, pero tienes que tener t.

Trascripción B.2.3.TM

Detrás de estas inseguridades de Carmen y Virginia también se encuentra el hecho de que no han reconocido la expresión planteada como una EDO, concepto introducido por el profesor en la sesión de clase anterior.

Estas alumnas han utilizado, como heurísticas para responder a las preguntas de esta etapa, procesos matemáticos como la regla de tres, la búsqueda de analogías entre preguntas, la consideración de casos particulares y la búsqueda de patrones. Las estrategias metacognitivas mostradas no son tan numerosas, sólo en una ocasión muestran signos de evaluación del proceso de resolución seguido pero no dieron importancia al error que habían detectado.

<u>*Solución de casos particulares*</u>
Ya en la etapa 3 del problema, centrada en la solución del caso particular, Virginia y Carmen reconocen la expresión obtenida al final de la etapa anterior como una EDO de primer orden. La clasifican como una ecuación lineal, basándose en su similitud con la expresión mostrada por el profesor al explicar la clasificación de las EDO de primer orden (Imagen 5.4.3.10).


- ¿Qué características de la misma te han hecho afirmar ésto?

Que la expresión de las EDO lineales es $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ y nuestra expresión es $p'(t) + \frac{3p(t)}{10.000} = 0{,}3$

Imagen 5.4.3.12: Virginia y Carmen clasificación la EDO como lineal

A continuación estas alumnas resuelven la EDO con la calculadora Voyage 200, sin intentar hacerlo con el método algebraico. Hay que tener en cuenta que el profesor clasifica la ecuación como de variables separadas y utiliza el método de resolución algebraico propio de estas ecuaciones. Virginia y Carmen en ningún momento modifican la clasificación que han hecho, pero tampoco preguntan si se puede o no considerarla como una EDO lineal ni cómo resolver ese tipo de ecuaciones empleando el método algebraico. A la hora de imponer las condiciones iniciales para determinar el valor de la constante de integración, es Carmen quién realiza los cálculos. Virginia parece entender las operaciones realizadas por su compañera pero no las razones por las que las hace, mostrando poca capacidad de reflexión.

$t=0 \Rightarrow p=0$

$p=C+1000\ ;\quad C=p-1000 \rightarrow C=-1000$

V: ¿Por qué es cero?
C: Porque cuando el tiempo es cero, no hay mercurio [Señala enunciado] y la p es la cantidad de mercurio.

A continuación, Virginia y Carmen representan gráficamente la función solución particular, $p(t) = -1000 \cdot e^{-0'0003t} + 1000$. Aunque no se expresan correctamente, identifican, a través de la representación gráfica de la función $p(t)$, la presencia de una asíntota horizontal y por tanto, la existencia de una cantidad de mercurio que no se puede sobrepasar y utilizan el concepto de límite para calcular ese valor. El cálculo del límite lo realizan con la calculadora Voyage 200. El uso de la herramienta no les resulta trivial y cometen varias equivocaciones hasta que dan con el resultado correcto (imagen 5.4.3.11). En ese momento, Virginia se percata de lo sencillo que hubiera sido realizar el cálculo sin la Voyage 200, mostrando además fluidez en el cálculo de límites.

Analizando la representación gráfica que modela la situación, ¿crees que hay una cantidad máxima de mercurio que puede haber en el depósito?

Sí, cuando la función tiende a ∞. Esto se puede observar en la gráfica

¿Cuál es esa cantidad?
Ayuda: Calcula el límite de la función cuando el tiempo tiende a infinito.

$\lim_{t \to \infty} \left(-1000\, e^{-3\cdot 10^{-4} t} + 1000\right) = \boxed{1000g}$

```
F1 F2 Algebra F3 Calc F4 Other F5 ESPrgm F6 Clr
■ lim(-1000·e^(-3.E-4·x) + 1000)        undef
  x→∞
■ lim(-1000·e^(-3.E-4·x) + 1000)        undef
  x→∞
■ lim(-1000·e^(-3.E-4·t) + 1000)        undef
  t→∞
■ lim(-1000·e^(-3.E-4·x) + 1000)        1000.
0.7*10000
MAIN          RAD APROX          FUNC 25/26
```

V: Mira, si esto era una chorrada [Haciéndolo ahora a mano] Esto da menos infinito… esto es cero y te queda 1000 ¿sabes?

Imagen 5.4.3.11: Dificultades (instrumentales) en el uso de la Voyage 200

Otra dificultad que se encuentran Virginia y Carmen para continuar con las actividades de esta etapa, en este caso para responder a las preguntas formuladas con el objetivo de que los estudiantes interrelacionen los dos contextos, es la identificación de las unidades en las que se mide el tiempo. Esta confusión podría ser fruto de una falta de reflexión acerca de la situación. Esta pareja, en primer lugar considera que el tiempo está dado en segundos; salen de su error cuando la profesora les hace reflexionar acerca de la relación entre el enunciado de la situación y la ecuación que están resolviendo (trascripción B.2.3.M, intervenciones [497,503]).

El resto de las actividades de esta etapa las resuelven correctamente, empleando como heurística la comparación con preguntas anteriores y entre las unidades de medida utilizadas. Estas estrategias se pueden observar, por ejemplo, en la forma en que resuelven la última pregunta de esta etapa (imagen 5.4.3.14; trascripción B.2.3.TM).

Si la concentración máxima de mercurio que permite el Ministerio de Sanidad y Consumo es de 0'04 gramos por litro, ¿en qué instante de tiempo se deberá cerrar la entrada y la salida de solución al estanque?

V: Es lo mismo, ... sustituyes
C: Sí , pero piensa que esto son gramos
V: Habría que hallar…
[Miran página anterior]
C: Los 500 estos [...] Son gramos
V: Si hallamos la concentración podemos poner eso y sustituir en t
C: Esto son gramos, y necesitamos gramos/litro
V: Entonces hallamos los gramos de concentración, sólo que se sustituye y ya está

$0.04 \frac{g}{l} \times 10000 l = 400g$. Sustituimos en la ecuación para hallar t y para ello utilizamos la calculadora:

$t = 1702{,}75 \text{ min} \cdot \frac{1h}{60 min} = \underline{28{,}38 h}$

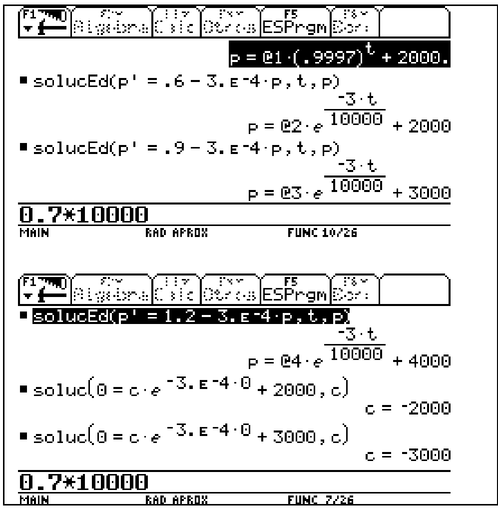
Imagen 5.4.3.12: Resolución de Virginia y Carmen de la última actividad de la etapa 3

De esta forma, Virginia y Carmen finalizan la etapa 3 del problema, en la que resuelven y analizan la situación particular planteada, y pasan a la etapa 4 en la que se plantea y resuelven generalizaciones de la situación inicial.

<u>*Planteamiento y solución de casos generales*</u>

Antes de establecer la EDO que modela la situación cuando en el depósito se introducen 0'2 ó 0'3 gr/l de mercurio, Virginia y Carmen revisan el momento en que establecieron la ecuación diferencial que modelaba el caso particular (final de la etapa 2). Esta pareja fue una de las pocas que consiguieron establecer correctamente dicha ecuación por lo que no resulta extraño que hayan expresado correctamente las ecuaciones diferenciales correspondientes a la introducción, en el estanque, de distintas cantidades de mercurio por litro.

El proceso que sigue esta pareja para completar la tabla es el siguiente: en primer lugar detectan que el paso de la tercera a la cuarta columna (de la solución general a la solución particular de la EDO) se realiza utilizando que la cantidad de mercurio que hay en el estanque, en el instante inicial, es cero y que la última columna se corresponde con el cálculo del límite de la función solución particular. Cumplimentan en primer lugar la columna correspondiente a las EDO que modelan las distintas situaciones; a continuación resuelven dichas ecuaciones usando la calculadora Voyage 200 (imagen 5.4.3.13), excepto para el caso más general (la última fila) para el que Virginia utiliza como heurística la búsqueda de patrones, comparando con los casos anteriores. La misma estrategia es la que utilizan para cumplimentar el resto de las columnas de la tabla.



V: Entonces sería, porque ¿ves? 0.2, 2000; 0.3, 3000; 0.4, 4000… va a ser m por 10000 ¿no? Entonces sería m por 10000
C: ¿Por qué?
V: Porque aquí, 0.1, 1000; 0.2, 2000; 0.3, 3000; 0.4, 4000; cualquier otro… ¿sabes? Y 0.1 por 10000 es 1000

Imagen 5.4.3.13: Resolución de las EDO usando la Voyage 200

A la hora de cumplimentar la última columna, en la que se pide la cantidad máxima de mercurio que se alcanza dentro del depósito, Virginia formula una conjetura acerca de los resultados que se obtienen y propone calcular uno de los apartados como estrategia de comprobación (trascripción B.2.3.M, intervenciones [633,639]).

Estas alumnas no tienen ninguna dificultad para cumplimentar la tabla 1 de la etapa 4, en la que se modifica la cantidad de mercurio que se introduce en el depósito por litro de disolución (Imagen 5.4.3.14).

Cantidad de mercurio que se introduce en el depósito (gr/l)	EDO que modela la situación	Solución de la EDO	Función que modela la situación real $p(0)=0$	Cantidad máxima de mercurio que puede haber en el depósito
0.1	$\frac{dp}{dt} = 0.3 - 0.0003\,p(t)$	$p(t) = C\cdot e^{-0.0003t} + 1000$	$p(t) = -1000\cdot e^{-0.0003t} + 1000$	1000 gr
0.2	$\frac{dp}{dt} = 0.6 - 0.0003\,p(t)$	$p(t) = C\cdot e^{-0.0003t} + 2000$	$p(t) = -2000\cdot e^{-0.0003t} + 2000$	2000 g
0.3	$\frac{dp}{dt} = 0.9 - 0.0003\,p(t)$	$p(t) = C\cdot e^{-0.0003t} + 3000$	$p(t) = -3000\cdot e^{-0.0003t} + 3000$	3000 g
0.4	$\frac{dp}{dt} = 1.2 - 0.0003\,p(t)$	$p(t) = C\cdot e^{-0.0003t} + 4000$	$p(t) = -4000\cdot e^{-0.0003t} + 4000$	4000 g
...				
m	$\frac{dp}{dt} = 3m - 0.0003\,p(t)$	$p(t) = C\cdot e^{-0.0003t} + m\cdot 10000$	$p(t) = -m\cdot 10.000\cdot e^{-0.0003t} + m\cdot 10000$	$m\cdot 10000$ g

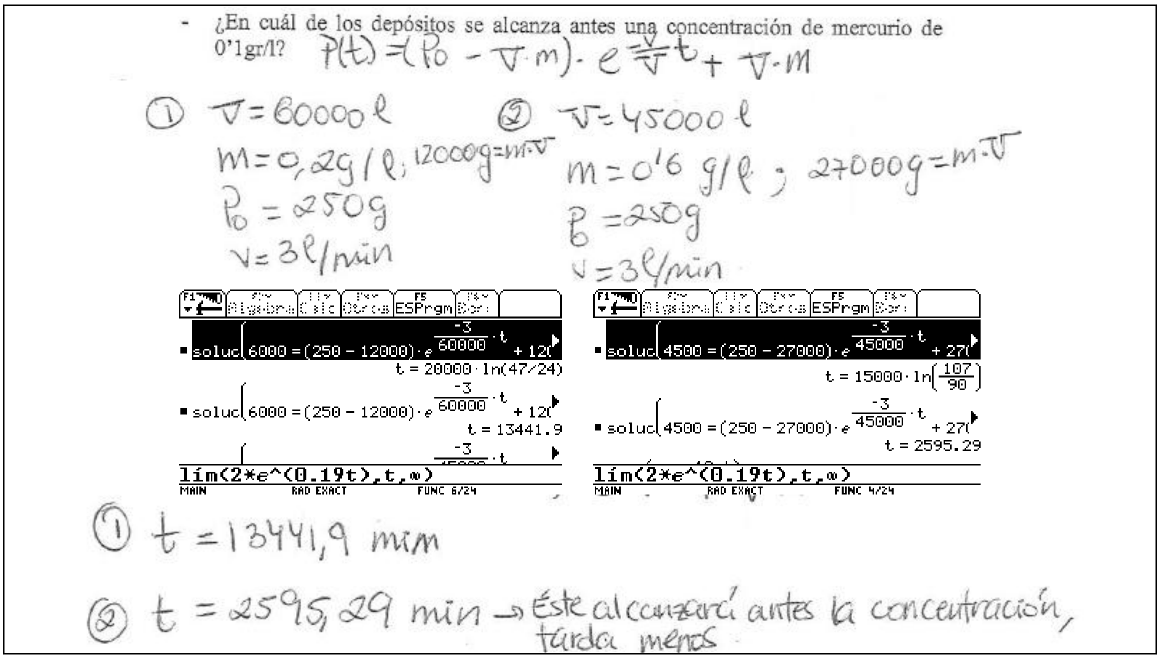
Imagen 5.4.3.14: Tabla 1 cumplimentada por Virginia y Carmen

Virginia y Carmen utilizan la misma estrategia para cumplimentar las cuatro tablas que forman parte del proceso de generalización de este episodio, aunque sólo resuelven las EDO, con la calculadora, en la primera tabla. En el resto modifican los parámetros atendiendo a la forma de los ejemplos mostrados, sin comprobar, en ningún caso, si los resultados obtenidos son correctos. Esta estrategia funciona en los tres primeros casos, pero no en el último, en el que se modifica la cantidad de mercurio que hay dentro del depósito en el instante inicial, $p(0)$. Virginia y Carmen no comenten el error de generalizar de forma arbitraria, pero tampoco consiguen establecer la solución particular de las correspondientes EDO de forma autónoma, recurriendo a la profesora. Una vez explicada la situación, Virginia y Carmen cumplimentan la última tabla sin dificultad (Imagen 5.4.3.15).

Cantidad inicial de mercurio en el depósito (gramos)	EDO que modela la situación	Solución de la EDO	Función que modela la situación real $p(0) = p_0$	Cantidad máxima de mercurio que puede haber en el depósito
0	$\frac{dp}{dt} = v.m - \frac{v}{V} p(t)$	$p(t) = C \cdot e^{-\frac{v}{V}t} + V.m$	$p(t) = -V \cdot m \cdot e^{-\frac{v}{V}t} + V \cdot m$	$V \cdot m$
100			$p(t) = (100 - V \cdot m) \, e^{-v/V\, t} + V.m$	$V.m$
500			$p(t) = (500 - V \cdot m) \, e^{-v/V\, t} + V.m$	$V.m$
...			...	...
P_0			$p(t) = (P_0 - V.m) \cdot e^{-v/V\, t} + V.m$	$V.m$

Imagen 5.4.3.15: Tabla 4 cumplimentada por Virginia y Carmen

Virginia y Carmen presentan una última muestra de que han interrelacionado los contextos resolviendo de forma correcta la última actividad de esta etapa en la que se presentan dos situaciones con parámetros diferentes y se pide calcular en cuál de ellos se alcanza una concentración de 0’1 gr/l de mercurio. Estas alumnas, como el resto de sus compañeros, optan por resolver esta actividad empleando el sistema de representación algebraico. Parten de la expresión más general de la función $p(t)$, sustituyen los parámetros por los valores correspondientes y, empleando la calculadora Voyage 200, obtienen el valor del tiempo para cada uno de los depósitos (Imagen 5.4.3.16).


- ¿En cuál de los depósitos se alcanza antes una concentración de mercurio de 0’1gr/l? $p(t) = (P_0 - V \cdot m) \cdot e^{-\frac{v}{V}t} + V \cdot m$

① $V = 60000\ l$; $m = 0{,}2\ g/l$; $120000g = m \cdot V$; $P_0 = 250g$; $v = 3\ l/min$

② $V = 45000\ l$; $m = 0'6\ g/l$; $270000g = m \cdot V$; $P_0 = 250g$; $v = 3\ l/min$

① $t = 13441{,}9$ min

② $t = 2595{,}29$ min → Éste alcanzará antes la concentración, tarda menos

Imagen 5.4.3.16: Proceso de resolución de la última actividad de la etapa 4

Se ha visto que Virginia y Carmen revisan en diferentes ocasiones los razonamientos que han empleado con anterioridad con el fin de recordar determinados procesos de resolución. Un ejemplo de esto pudo observarse al inicio de la etapa 4, en el momento en que tienen que determinar cuál será la EDO que modela una situación, análoga a la inicial, en la que varía la cantidad de mercurio presente en la disolución que se introduce en el depósito. Estas alumnas pasan, de forma autónoma, por momentos de análisis del proceso de solución, mostrando así características de tipo metacognitivo.

Análisis retrospectivo

El informe solicitado a los estudiantes en la etapa 5 del problema, con el objetivo de promover que todos pasen por esta etapa de revisión de sus producciones, revela que Virginia y Carmen han establecido relaciones incorrectas entre el contexto de la situación planteada y el contexto matemático, indicando, por ejemplo, que la ecuación diferencial es la "función que permite calcular la cantidad de mercurio que hay en el estanque en cada instante" (Imagen 5.4.3.17).

Hemos obtenido una fonción que le permite calcular la cantidad de mercurio que hay en el estanque en cada instante, esta fonción es:

$$p'(t) = 0,3 - 0,0003\, p(t)$$

Imagen 5.4.3.17: Parte del análisis retrospectivo de Virginia y Carmen

Problema 3: Dinámica de poblaciones

Comprensión y análisis de la situación

En el episodio anterior del Módulo de Enseñanza vimos que Virginia y Carmen utilizaban una estrategia para escribir expresiones generales que consistía en la búsqueda de patrones, basándose en resultados obtenidos previamente. Esta estrategia la vuelven a aplicar al comienzo de esta actividad para determinar el número de peces que nacen y mueren en un año, si en el recinto tenemos una cantidad $P(t)$. Cometen un error del que no se percatan porque no comprueban si la expresión que han propuesto funciona para los casos particulares considerados anteriormente. El profesor es quién las alerta de que han cometido un error, ante lo que proponen una nueva opción que comprueban a instancias de otra de las profesoras (Imagen 5.4.3.18).

Número de peces	Peces que nacen en un año	Peces que mueren en un año	Variación en el número de peces, en un año
1000	410	220	410 − 220 = 190
2000	820	440	380
3000	1230	660	570
$P(t)$	$P(t)\cdot 410$	$P(t)\cdot 220$	$P(t)(410-220)$ ⇒ ⊛ mal
$P(t)$	$\frac{P(t)}{1000}\cdot 410$	$\frac{P(t)}{1000}\cdot 220$	$\frac{P(t)}{1000}(410-220)$

$$P'(t) = (410-220)\,\frac{P(t)}{1000}$$

$$P'(t) = 19\,\frac{P(t)}{100}$$

Imagen 5.4.3.18: Virginia y Carmen completan la tabla y obtienen la EDO

<u>Solución de casos particulares</u>

Ya en la etapa 3 del problema, Virginia y Carmen intentan resolver la EDO obtenida, $P' = 0'19P$, con el procedimiento algebraico, separando las variables. La aplicación del método no les resulta complicada (Imagen 5.4.3.19); la dificultad surge cuando intentan resolver las integrales a las que les conduce el proceso, en especial la integral $\int \frac{dp}{p}$.

Esta pareja utiliza la Voyage 200 para resolver dichas integrales, haciendo uso del catálogo de opciones al no conocer la sintaxis, y utilizan el resultado para analizar el procedimiento que tenían que haber seguido para resolver las integrales con lápiz y papel (trascripción B.2.3.TP, intervenciones [113,150]). En el análisis de la ruta de aprendizaje de Nicanor y Mar (sección 5.4.2) se observó en un determinado momento que estos alumnos no sabían calcular un límite. En ese caso los estudiantes no optaron por utilizar la Voyage 200 y respondieron de forma incorrecta a la pregunta que se les planteaba. En el caso de Virginia y Carmen se ha visto que han recurrido, de forma autónoma, al uso de la Voyage 200 para realizar un cálculo que no recordaban. Esta pareja ha ido más allá y ha utilizado el resultado mostrado por la calculadora como apoyo para detectar dónde estaba fallando el razonamiento que estaban empleando.

$$\frac{dP}{dt} = \frac{19\,P(t)}{100}\cdot 1 \longrightarrow \int \frac{dp}{19}\,\frac{100}{p} = \int dt \longrightarrow \frac{100}{19}\int \frac{dP}{P} = \int dt$$

$$\frac{100\,\ln(|P|)}{19} = t + C \rightarrow 100\ln(P) = 19t + C \rightarrow \frac{19t}{\ldots}$$

$$; + C \rightarrow \boxed{P(t) = C \cdot e^{\frac{19t}{100}}}$$

Imagen 5.4.3.19: Virginia y Carmen resuelven la EDO con el método de separación de variables.

A partir de la expresión de la función solución general de la EDO, $P(t) = C{\cdot}e^{0'19t}$, Virginia y Carmen argumentan que la cantidad de peces aumenta, con base en las propiedades de la función exponencial. Al igual que ocurrió con Milagros y Silvia (sección 5.4.1), esta pareja no señaló de forma explícita que el signo de la constante C tuviera algún papel en el razonamiento empleado para justificar que la función $P(t) = C{\cdot}e^{0'19t}$ era creciente.

Para conocer el comportamiento de la función $P(t)$ a lo largo del tiempo, esta pareja opta por calcular el límite de la función solución, para lo que utilizan la Voyage 200 (Imagen 5.4.3.20). Para calcular ese límite necesitan indicar a la calculadora alguna restricción sobre el valor de la constante C. Virginia y Carmen, sabiendo que dicho valor es positivo, optan por asignar un valor a la constante (C=2), pero no justifican que ese cálculo sea válido para todos los valores positivos de C, ni prueban con otros valores positivos para comprobar si obtienen el mismo resultado.

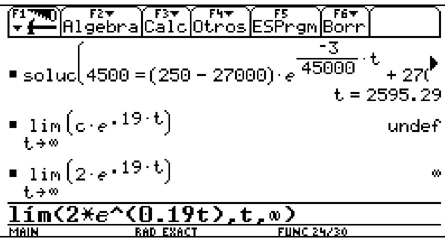


Imagen 5.4.3.20: Proceso de Virginia y Carmen para resolver la EDO $P' = 0'19P$

A continuación se introduce el término de competición entre las especies, bP^2, que los estudiantes deben considerar para reformular la expresión matemática de la variación del número de peces dentro del recinto. Virginia y Carmen proponen la ecuación $P' = 0.19P - bP^2$ como elemento matemático que describe dicha variación.

Las siguientes cuestiones del problema son relativas a la monotonía de la función $P(t)$ y su comportamiento en el infinito. En el problema 2, Contaminación de mercurio, para responder a cuestiones similares, se resolvía la EDO y se analizaba el comportamiento de la función solución. En este caso, al resolver la ecuación utilizando la Voyage 200 se obtiene la función $P(t) = \dfrac{19 \cdot e^{0'19t}}{100 \cdot b \cdot e^{0'19t} + 19 \cdot C}$ que, por depender del valor de dos constantes no puede ser representada gráficamente con la calculadora. Ninguna de las seis parejas de estudiantes, ni el trío, se plantearon analizar la monotonía de la función $P(t)$ haciendo uso de su expresión algebraica. De esta manera, la actividad propuesta cumplió con el objetivo con el que se había planteado que era que los estudiantes tuvieran que utilizar la EDO para analizar la monotonía de la función solución, relacionando nuevamente los conceptos de EDO y de derivada.

Virginia y Carmen señalan la relación entre la derivada y la monotonía de la función pero, al igual que ocurría con otros estudiantes (por ejemplo Milagros y Silvia), no supieron cómo utilizar esa información para determinar para qué valores de P el número de peces aumentaba, disminuía o se mantenía constante. Virginia y Carmen indican cuál tiene que ser el signo de la derivada para que la función $P(t)$ sea creciente, decreciente o constante, pero no plantean siquiera la inecuación a resolver (Imagen 5.4.3.21).

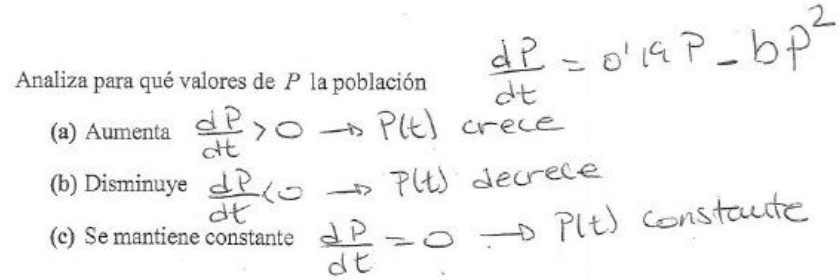


Imagen 5.4.3.21: Uso del significado geométrico de la derivada por parte de Virginia y Carmen

Esta pareja, al igual que, por ejemplo, Milagros y Silvia, realiza un análisis sobre los posibles valores de b y P que influyen en el signo de la función derivada. No se plantean en ningún momento resolver las inecuaciones correspondientes utilizando el segundo miembro de la EDO (trascripción B.2.3.TP, intervenciones [375,383]).

Como el número de estudiantes que procedieron de forma análoga a como lo hicieron Virginia y Carmen en esta pregunta era bastante numeroso (sólo Nicanor y Mar plantearon y resolvieron las inecuaciones correspondientes), se optó porque el profesor presentara el procedimiento a todo el grupo. En la etapa 4, de planteamiento y solución de casos generales, Virginia y Carmen muestran haber comprendido el procedimiento explicado por el profesor y lo emplean para estudiar los valores de P para los que la población aumenta, disminuye o se mantiene constante cuando la EDO que modela la situación es $P' = aP - bP^2$, siendo a la tasa de crecimiento de la población, que, en el caso que resuelven, es positivo (Imagen 5.4.3.22).

a) $aP - bP^2 > 0 \rightarrow P(a-bP) > 0 \rightarrow a - bP > 0 \rightarrow P < \frac{a}{b}$

b) $aP - bP^2 < 0 \rightarrow P > \frac{a}{b}$

c) $aP - bP^2 = 0 \rightarrow P = 0$

$P = \frac{a}{b}$

Imagen 5.4.3.22: Resolución de inecuaciones para estudiar el signo de la función derivada

Además de analizar la monotonía de la función $P(t)$, los estudiantes debían estudiar su comportamiento en el infinito. Aunque en el caso anterior, con la función $P(t) = C{\cdot}e^{0'19t}$, Virginia y Carmen recurren al cálculo del límite de la función para responder a una pregunta análoga a esta, en el caso de la función $P(t) = \dfrac{19{\cdot}e^{0'19t}}{100{\cdot}b{\cdot}e^{0'19t} + 19{\cdot}C}$ se limitan a responder que depende del valor de b (Imagen 5.4.3.23). Nuevamente estamos ante un ejemplo en el que los estudiantes han mostrado reconocer el uso de cierto concepto matemático, en este caso, el límite, para resolver problemas, pero no lo utilizan en todas las situaciones posibles, lo que podría ser indicativo de falta de reflexión por parte de los alumnos.

- ¿Qué sucede con la población a lo largo del tiempo?

Depende del valor de b, si este es muy pequeño la población aumenta y si es muy grande sucede lo contrario.

Imagen 5.4.3.23: Razonamiento de Virginia y Carmen sobre el comportamiento de $P(t)$

El problema continúa pidiendo a los estudiantes que representen gráficamente tres funciones, cada una de ellas es un caso particular de cada una de las situaciones analizadas en la cuestión anterior, con el objetivo de que visualicen las diferentes situaciones y, comparen la información obtenida mediante el sistema de representación gráfico con la obtenida en el sistema de representación algebraico. Virginia y Carmen manejan con soltura la calculadora Voyage 200, utilizándola para realizar numerosos cálculos, así como las representaciones gráficas solicitadas en la actividad (Imagen 5.4.3.24). Esta pareja ha resuelto este tipo de preguntas sin dificultad, pero no las ha utilizado para comprobar las conjeturas formuladas en las cuestiones anteriores, siendo este su objetivo. Virginia y Carmen representan gráficamente las funciones solicitadas pero no reflexionan acerca de la imagen que obtienen ni de su relación con el análisis de la monotonía y el comportamiento asintótico de la función $P(t)$.

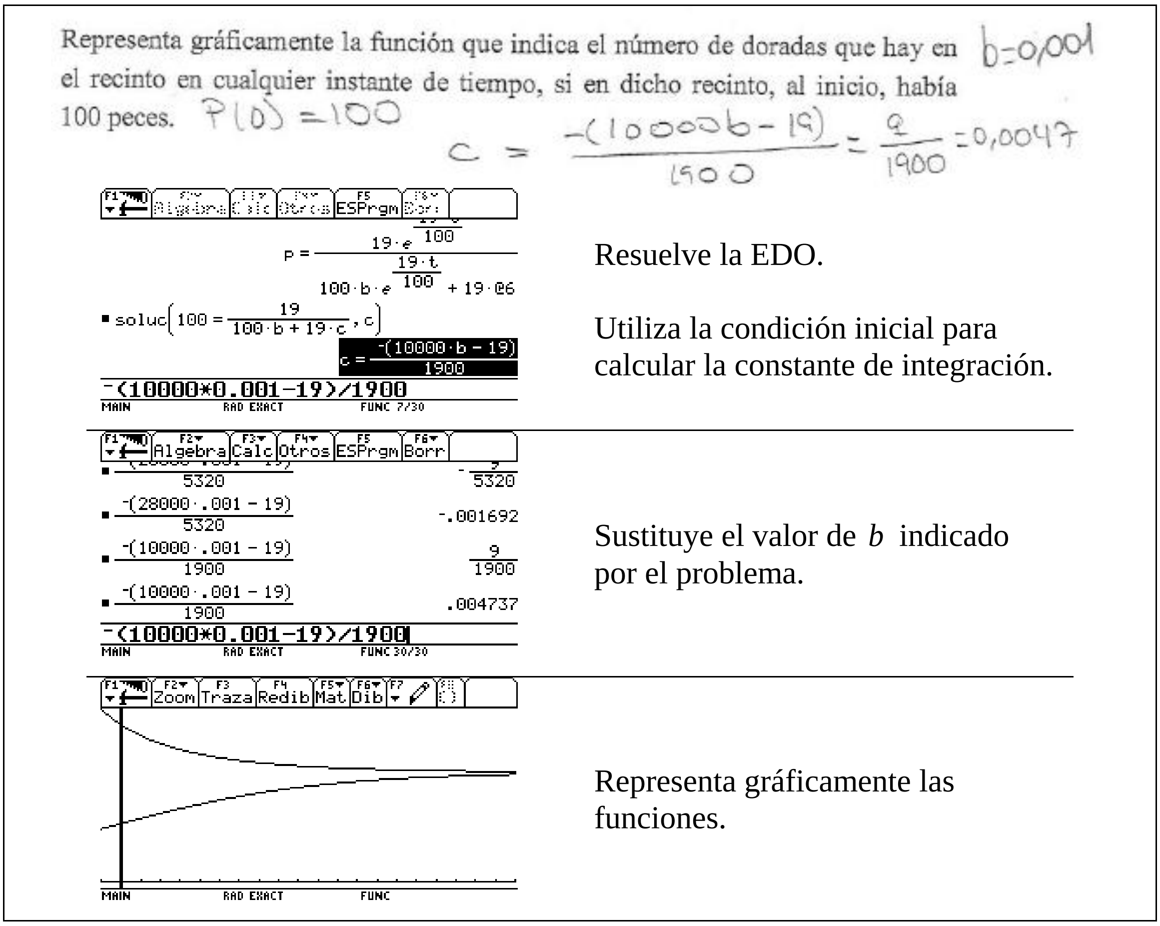
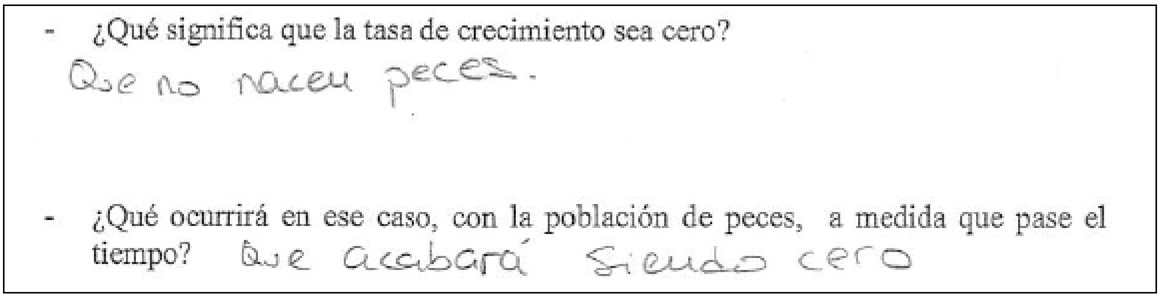


Imagen 5.4.3.24: Proceso de Virginia y Carmen para representar gráficamente dos de las funciones solución

La etapa 3 de este problema concluye con una serie de preguntas acerca de cuál sería el comportamiento de la función $P(t)$ a lo largo del tiempo si el término b aumentara o disminuyera. Virginia y Carmen no responden a esta cuestión por ellas mismas, limitándose a copiar la respuesta que el profesor y otros compañeros muestran en una de las intervenciones del profesor hacia todo el grupo.

Planteamiento y solución de casos generales

En la etapa 4, de planteamiento y solución del caso general, Virginia y Carmen obtienen la expresión correcta de la EDO que modela la situación para un valor, a, de la tasa de crecimiento de la población y formulan conjeturas acerca de la relación entre el signo de dicha constante y el comportamiento de la población a largo plazo. El caso en que $a = 0$ es el que más diversidad de respuestas presentó en todo el grupo de estudiantes (sección 5.3.3). Virginia y Carmen interpretan que esta información les dice que "no nacen peces" (lo que no es correcto), de lo que ellas deducen que el número de peces "acabará siendo cero" porque "no nacen y mueren todos" (Imagen 5.4.3.25). Este es un argumento basado en la experiencia, en el que no se refleja el uso del modelo matemático para responder, de forma análoga a determinadas respuestas de los estudiantes descritas por Rasmussen & Ruan (2008) en su investigación.


- ¿Qué significa que la tasa de crecimiento sea cero?

Que no nacen peces.

- ¿Qué ocurrirá en ese caso, con la población de peces, a medida que pase el tiempo? Que acabará siendo cero

Imagen 5.4.3.25: Virginia y Carmen utilizan razonamientos (erróneos) basados en su experiencia

Para promover que los estudiantes verifiquen las conjeturas formuladas acerca de la relación entre el signo de la tasa de crecimiento, a , y el comportamiento de la población a lo largo del tiempo, el problema incluye en su enunciado dos cuestiones para cada situación (a>0, a<0 y a=0): calcular el valor al que se aproxima la cantidad de peces a medida que pasa el tiempo y representar gráficamente una función particular como ejemplo que ilustra la situación.

Virginia y Carmen relacionan el estudio del comportamiento a largo plazo de la población de peces con el cálculo de un límite, mostrando así parte de la red de significados asociados a este concepto matemático. Sin embargo no reconocen cuál es la función cuyo límite necesitan calcular. En primer lugar utilizan el segundo miembro de la EDO, la expresión $aP - bP^2$, y luego consideran la expresión del límite obtenida en la etapa anterior, $\frac{0'19}{b}$, y sustituyen el valor 0'19 por a, incluso en la pregunta en que $a < 0$ (trascripción B.2.3.TP, intervenciones [603,613]). En esta situación se ve reflejada la necesidad de desarrollar habilidades y capacidades como reflexionar, relacionar o abstraer para resolver problemas ya que no es suficiente con mostrar comprensión conceptual, tal y como señalan Schoenfeld (1992) y Kilpatrick et al., (2009).

Las respuestas de Virginia y Carmen a las restantes cuestiones de esta etapa están influidas por el error de considerar, para todos los casos, la expresión de la solución de la EDO obtenida en la etapa 3, solución del caso particular, $P(t) = \frac{19 \cdot e^{0'19t}}{100 \cdot b \cdot e^{0'19t} + 19 \cdot C}$. Estas alumnas no se plantean, en ningún momento, resolver la EDO $P' = aP - bP^2$. Para representar gráficamente las distintas funciones que aparecen en la etapa 4 de este problema, Virginia y Carmen modifican la expresión $P(t) = \frac{19 \cdot e^{0'19t}}{100 \cdot b \cdot e^{0'19t} + 19 \cdot C}$, mostrando así un proceso de generalización pero sin reflexionar acerca de si este funciona para todos los casos o no.

Esta etapa finaliza con una actividad en la que se presentan dos recintos de peces correspondientes al caso en que la tasa de crecimiento es positiva, con condiciones iniciales distintas. Se pide representar gráficamente las funciones que modelan esta situación con el objetivo de que los estudiantes verifiquen las respuestas que han dado anteriormente en lo referente a la monotonía de las funciones solución y su comportamiento a largo plazo. Para realizar esta actividad, Virginia y Carmen resuelven la EDO correspondiente, pero un error de sintaxis en el momento de utilizar las condiciones iniciales, les lleva a representar funciones que no se corresponden con las de la situación planteada (Imagen 5.4.3.26). Esto se podría haber corregido si estas alumnas hubieran revisado la expresión obtenida en la Voyage 200. En lugar de eso, recurren a una de las profesoras presentes en el aula, lo que muestra un desarrollo de estrategias metacognitivas inferior al necesario para la resolución de problemas matemáticos.

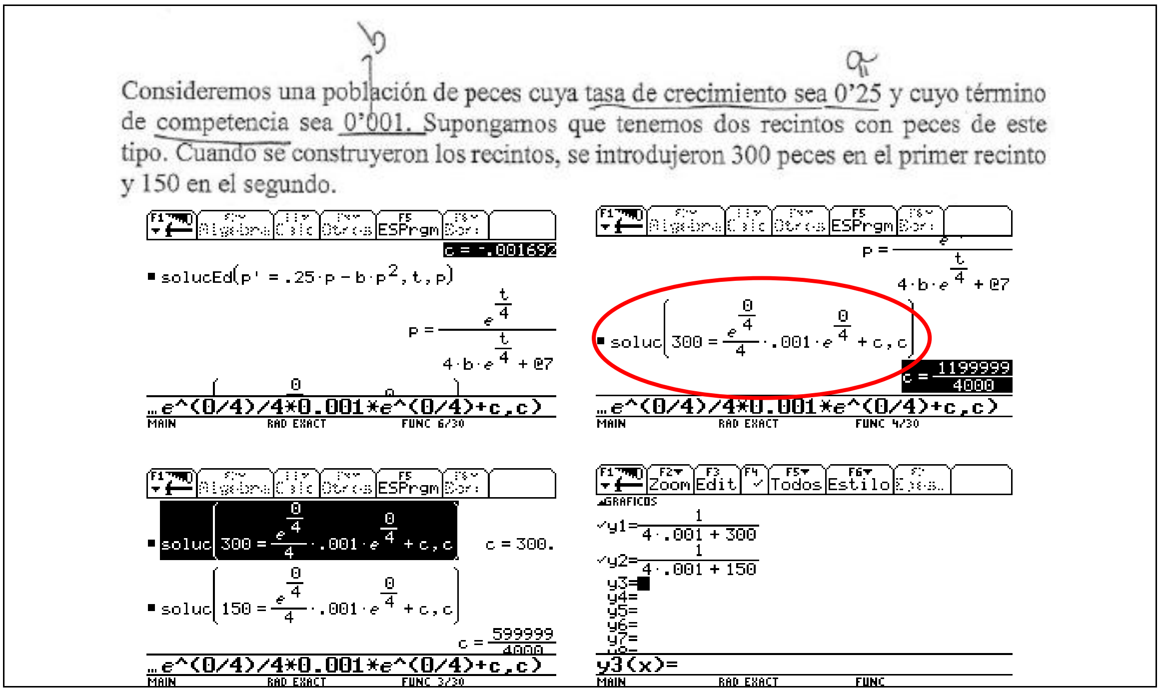


Imagen 5.4.3.26: Proceso de resolución de Virginia y Carmen que muestra un error de sintaxis al usar la calculadora Voyage 200

Durante el desarrollo de este problema se ha podido observar que Virginia y Carmen dedicaban poco tiempo a reflexionar sobre las cuestiones planteadas y la relación entre distintas preguntas. Esta circunstancia se vió reflejada en el informe que las alumnas redactan en la etapa 5 de este problema.

Análisis retrospectivo

En dicho informe, Virginia y Carmen señalan que "P se refiere a la cantidad de peces y su variación", lo que podría tratarse de un error en la redacción o en la relación entre el contexto matemático y la situación planteada. A una misma expresión, P, le están asignando dos significados diferentes, cantidad de peces y variación de dicha cantidad.

En la redacción del informe, esta pareja no distingue entre la situación particular, resuelta en la etapa 3, y la general, tratada en la etapa 4, mostrando que esta última etapa requeriría de más atención por parte de ellas puesto que no reflejan la variedad de situaciones tratadas, en cuanto a los diferentes signos de la tasa de crecimiento, *a* (Imagen 5.4.3.27).

La ecuación diferencial ordinaria que el Colegio Oficial de Químicos de Canarias ha encontrado, teniendo en cuenta el número de peces que hay en el recinto es la siguiente:

$$\frac{dP}{dt} = 0.19P - bP^2$$

Teniendo en cuenta el término de competencia y la tasa de crecimiento, habrá un momento en el que la cantidad de peces que hay en el recinto no aumenta ni disminuye, es decir, que existe cierto límite. Por lo que el valor al que se aproxime la cantidad de peces a medida que pase el tiempo, vendrá dado por:

$$\frac{a}{b}$$

Imagen 5.4.3.27: Parte del análisis retrospectivo de Virginia y Carmen

Virginia y Carmen no explican tampoco cómo evoluciona la cantidad de peces que hay en el recinto, dependiendo del número que haya en un inicio. En su informe remiten a las representaciones gráficas realizadas en la Voyage 200, pero no explican el significado de dichas representaciones.

Esta ha sido una de las pocas parejas que obtuvo las ecuaciones diferenciales correctas durante el desarrollo de los tres problemas del Módulo de Enseñanza. Sin embargo, Virginia no consigue escribir la EDO que modela la situación planteada en el problema 4, *Investigaciones policiales*, que debían resolver individualmente. Como esta alumna no consiguió ningún resultado positivo en la realización de esta actividad, previa a la entrevista, se optó por pedirle que resolviera el problema nuevamente, sin mostrarle lo que había hecho en la sesión anterior. Esto permitía analizar qué tipo de razonamientos empleaba la alumna, así como las preguntas que se formulaba y las conjeturas que hacía.

Virginia comienza analizando la situación y presentando un esquema en el que identifica los datos. Sería, según la estructura seguida en los episodios anteriores, la etapa correspondiente a la comprensión de la situación, etapa 1, (imagen 5.4.3.28).

$$T_{cuerpo_1} = 26.7\,°C \xrightarrow{2h} T_{cuerpo_2} = 23.9\,°C$$

$$T_{habitación} = 15.5\,°C \quad (cte).$$

Imagen 5.4.3.28: Identificación de datos por parte de Virginia

En la entrevista Virginia reconoce que la derivada de una función se puede utilizar para expresar fenómenos de variación, la dificultad a la hora de escribir la EDO que modela esta situación, es que no identifica la expresión "rapidez" con algo que indique variación (trascripción B.2.3.TEV, intervenciones [75,76]).

I: Tú tienes la rapidez con que cambia la temperatura de un cuerpo y esa temperatura va cambiando ¿vale? ¿Qué cosa… Qué ente matemático te sirve para indicar la forma en que va cambiando esa… algo?
V: No, eso sería la derivada ¿no? Pero la rapidez no sé cómo… No entiendo esa…

Virginia manifiesta muchas dudas para representar la ley de enfriamiento de Newton en términos matemáticos pero finalmente consigue expresar la EDO que modela la situación, tal y como muestra la imagen 5.4.3.29, donde p se refiere a la constante de proporcionalidad. Virginia no se plantea cuestiones que la ayuden a comprender la situación por propia iniciativa, es la profesora que la entrevista quién le formula distintas preguntas para que pueda desarrollar la actividad. Esto podría significar que el diseño de los problemas 2 y 3 del Módulo de Enseñanza, en los que se especifican cinco etapas de resolución, ha contribuido a que esta alumna haya podido realizar con éxito muchas de las actividades propuestas como parte de los problemas, ya que el propio problema formulaba las preguntas que Virginia no se hace a sí misma.

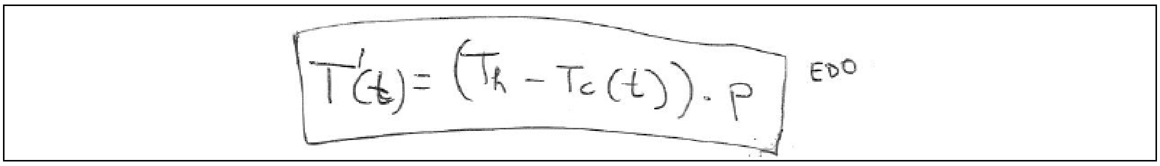


Imagen 5.4.3.29: EDO planteada por Virginia en el problema 4

En la entrevista Virginia consigue resolver esta actividad correctamente, apoyándose en la profesora como guía en el proceso de resolución, y en la calculadora Voyage 200 (Imagen 5.4.3.30).

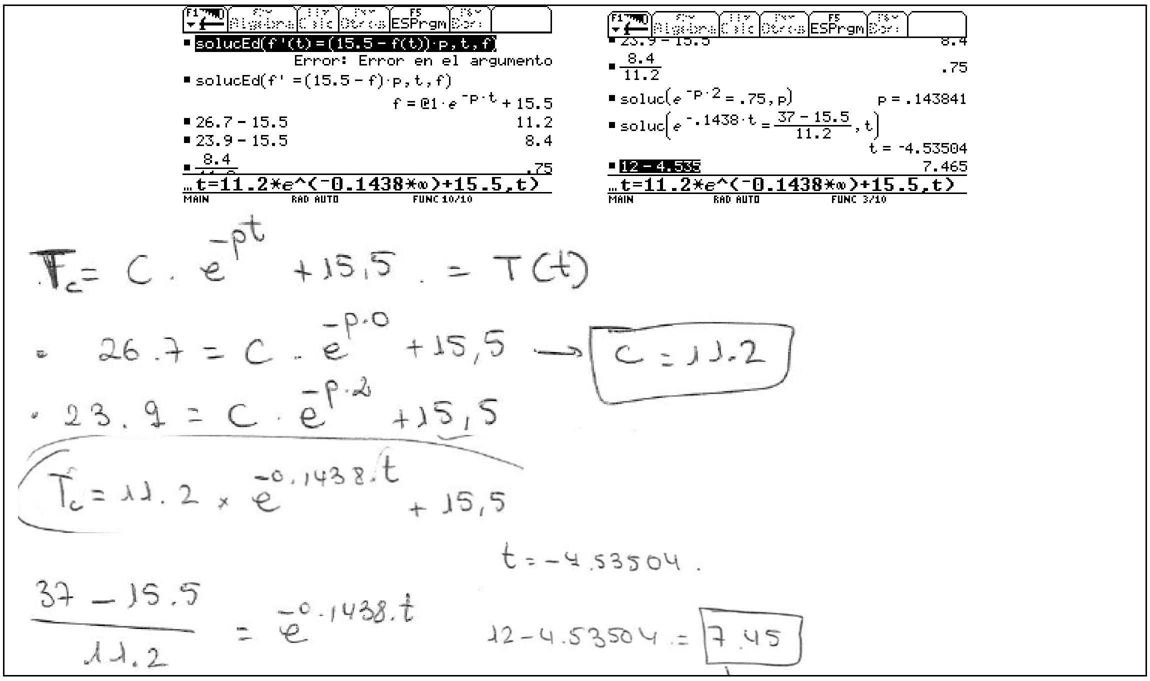


Imagen 5.4.3.30: Proceso de resolución del problema 4 mostrado por Virginia

Con el fin de indagar en las razones por las que hay tanta diferencia entre el comportamiento de Virginia durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza y la resolución del problema 4, se pregunta a la alumna al respecto. Virginia manifiesta que la interacción con su compañera la ayudaba en el proceso de representación, en lenguaje matemático, de la información dada en el contexto de la situación hipotética planteada, que ella no domina (trascripción B.2.3.TEV, intervenciones [365,367]).

V: Me cuesta un montón… me cuesta un montón coger los datos y… si tú no me hubieras ayudado yo no lo… no lo hubiera sacado ni…
I: ¿Y por qué crees que ocurre eso? ¿Por qué crees que no lo hubieras sacado?
V: Porque no sé… a lo mejor tengo los datos y tengo a lo mejor la función, pero luego de ahí ya no sé cómo… qué tengo que hacer…qué tengo que… qué es esto ¿sabes? No lo… no entiendo la… dónde tengo que poner la temperatura esta, dónde tengo que poner esta o… me cuesta un montón hacer esas cosas ¿Sabes? Necesito eso… si ya sé hacer este pues a lo mejor el siguiente me va a costar menos, porque como en… lo que decíamos antes, cuando estaba con otra chica [...] Pues era más fácil, porque a lo mejor yo le decía algo pero ella me… discutíamos más y a lo mejor ella se enteraba más que yo y yo a lo mejor no hacía tanto y tampoco me he enterado mucho.

Trascripción B.2.3.TEV, intervenciones [365,367]

En esta respuesta dada por Virginia se observa que no es consciente de que ella misma ha resuelto la actividad. Considera que la profesora la ha ayudado en algo que realmente ha hecho ella misma. Algo similar ocurre cuando le preguntamos qué es una EDO. Virginia, al inicio de la actividad, identificó la ecuación que modela la situación planteada como una EDO, describiendo las características que la definían como tal. Al preguntarle por la definición de este concepto, inicialmente contesta que no sabe, pero se le recuerda que anteriormente ha respondido a ello y, entonces, proporciona la respuesta (trascripción B.2.3.TEV, intervenciones [399,408]). Se podría decir que esta alumna es muy dependiente y necesita que alguien confirme sus respuestas continuamente. No tiene confianza en sus propios conocimientos y esto puede influir en la forma en que aborda el problema 4 inicialmente, considerándose incapaz de resolverlo.

La tabla que resume los diferentes elementos del aprendizaje que muestran estas alumnas durante el Módulo de Enseñanza (tabla 5.4.3.31) refleja qué elementos son compartidos por los dos estudiantes que han trabajado juntos y cuales han mostrado por separado, aunque la mayoría de los elementos han sido compartidos, tratándose de una pareja homogénea en lo que al trabajo matemático se refiere.

	Comprensión conceptual	*Fluidez en los procedimientos*	*Heurísticas*	*Estrategias de control*
Virginia		Cálculo de límites.		
Aspectos comunes	Uso del concepto de función y de derivada para indicar dependencia del tiempo. Relaciona la derivada con fenómenos de aumento y disminución de una cantidad y con la velocidad de cambio. Reconoce la existencia de infinitas funciones con una misma derivada. Relacionan la derivada con el significado de variación. Relacionan las propiedades de monotonía de la función exponencial con su expresión algebraica.	Método de separación de variables. Falta de fluidez en el procedimiento de integración.	Comparación con preguntas anteriores y posteriores. Uso de reglas de tres. Planteamiento de casos particulares. Búsqueda de patrones. Uso de las unidades de medida como referencia. Resolución de inecuaciones para estudiar el signo de la función derivada.	Comprobación de resultados de la integración, por medio de la derivación.
Carmen				

Tabla 5.4.3.31: Elementos del aprendizaje mostrados por Virginia y Carmen durante el desarrollo del módulo de aprendizaje

5.4.4 Alexis y Zoraida

Alexis y Zoraida coinciden en relacionar la derivada de una función con la pendiente de la recta tangente a dicha función en un punto y con la velocidad de cambio (tabla 5.2.2). Además, Zoraida, utiliza el criterio de la primera derivada para describir la monotonía de la función representada gráficamente en la pregunta 6 del cuestionario. Alexis, por su parte, reconoce la definición formal de la derivada y relaciona el concepto de derivada con fenómenos de variación y el cálculo de puntos críticos. Este es uno de los aspectos que distingue a Alexis del resto de sus compañeros, ya que aunque describe los puntos críticos de una función empleando la primera derivada, no describe la monotonía de la función. Esto indica que el alumno está empleando un algoritmo que recuerda y no lo está relacionando con la pendiente de la recta tangente a la función.

Los dos estudiantes que forman esta pareja utilizan la relación entre la derivada de una función y la pendiente de la recta tangente a la función en un punto para responder a la pregunta 5 del cuestionario, pero no para responder a la pregunta 4. Esto significa que, aunque en la red de significados que Alexis y Zoraida asocian al concepto de derivada figura la pendiente de la recta tangente a la función en un punto, estos alumnos no han desarrollado la habilidad para utilizar este significado en la resolución de problemas, lo que Kilpatrick et al. (2009) denominan “competencia estratégica”. Esto mismo ocurría, por ejemplo, con Milagros y Silvia (sección 5.4.1).

La misma situación se observa con el uso de la derivada para expresar velocidad. Alexis y Zoraida responden correctamente a la pregunta 10, pero no a la pregunta 11 (Imagen 5.4.4.1). Se observan, además, diferencias en la naturaleza de las respuestas de Alexis y Zoraida a la pregunta 10. Zoraida responde utilizando notación y argumentos propios de la disciplina matemática (una función es constante si su valor o expresión no depende de la variable independiente), aunque relaciona su respuesta con el contexto del enunciado indicando las unidades de medida de la velocidad. La respuesta de Alexis a esta actividad refleja que está razonando desde el punto de vista de un contexto físico; ha desechado el enfoque matemático, modificando incluso la notación dada en el enunciado de la actividad, donde la posición del vehículo venía dada por la función $f(t) = t^2$, y utilizando notación y argumentos propios de la Física como el cálculo de la aceleración para comprobar si la velocidad es constante.

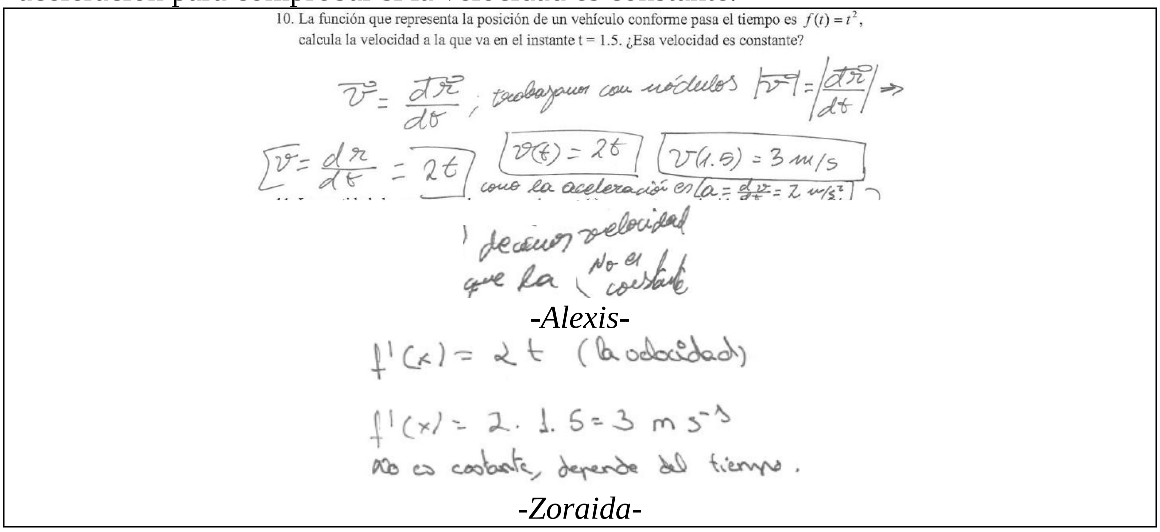
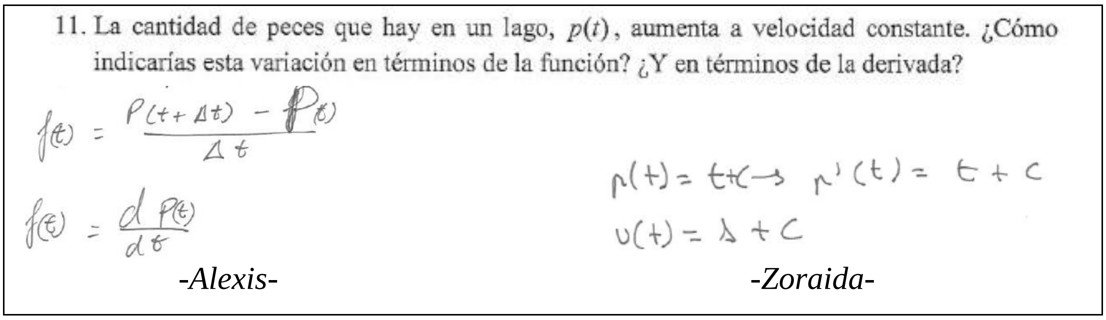


Imagen 5.4.4.1: Respuestas de Alexis y Zoraida a la pregunta 10 del cuestionario C-D



11. La cantidad de peces que hay en un lago, $p(t)$, aumenta a velocidad constante. ¿Cómo indicarías esta variación en términos de la función? ¿Y en términos de la derivada?

$$f(t) = \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$

$$f(t) = \frac{d\,P(t)}{dt}$$

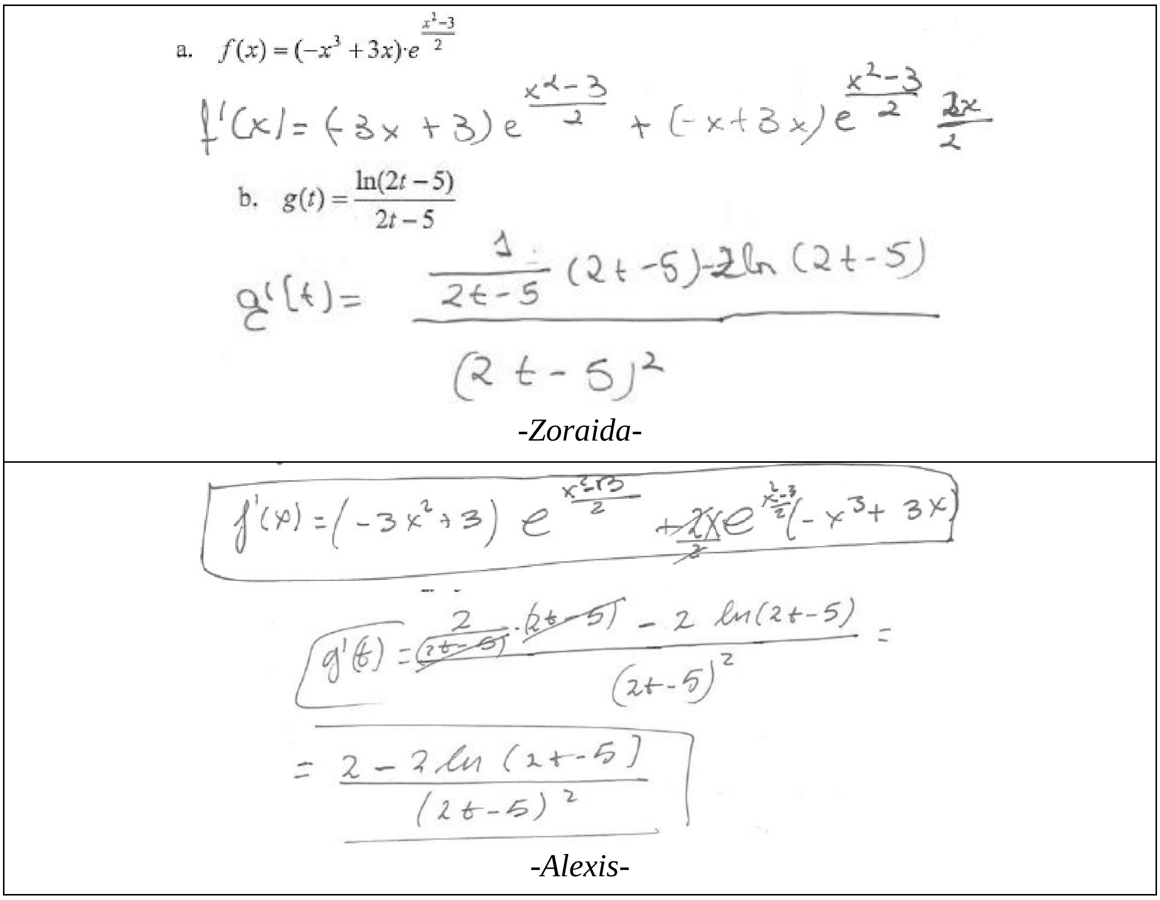
$$p(t) = t + C \rightarrow p'(t) = t + C$$

$$v(t) = \lambda + C$$

-Alexis- -Zoraida-

Imagen 5.4.4.1: Respuesta de Alexis y Zoraida a la pregunta 11 del cuestionario C-D

En cuanto al uso de los procedimientos matemáticos de derivación y simplificación, Alexis utiliza las reglas de derivación con fluidez, mientras que Zoraida comete algunos errores con la derivación de un polinomio y la aplicación de la regla de la cadena. Una vez derivadas las funciones de la pregunta 1 del cuestionario de la derivada, Zoraida no utiliza ninguno de los procedimientos posibles para simplificar las expresiones obtenidas. Alexis simplifica fracciones algebraicas, pero no realiza operaciones entre polinomios ni utiliza el procedimiento de sacar factor común (Imagen 5.4.4.2).



a. $f(x) = (-x^3+3x)\cdot e^{\frac{x^2-3}{2}}$

$$f'(x) = (-3x+3)e^{\frac{x^2-3}{2}} + (-x+3x)e^{\frac{x^2-3}{2}}\frac{2x}{2}$$

b. $g(t) = \frac{\ln(2t-5)}{2t-5}$

$$g'(t) = \frac{\frac{1}{2t-5}(2t-5) - 2\ln(2t-5)}{(2t-5)^2}$$

-Zoraida-

$$f'(x) = (-3x^2+3)\,e^{\frac{x^2-3}{2}} + \frac{2x}{\cancel{2}}\,e^{\frac{x^2-3}{2}}(-x^3+3x)$$

$$g'(t) = \frac{\frac{2}{\cancel{(2t-5)}}\cdot\cancel{(2t-5)} - 2\ln(2t-5)}{(2t-5)^2} =$$

$$= \frac{2 - 2\ln(2t-5)}{(2t-5)^2}$$

-Alexis-

Imagen 5.4.4.2: Procedimientos matemáticos de Zoraida y Alexis

Las características de esta pareja, en lo que a sus respuestas al cuestionario de la derivada se refiere, se presentan de manera esquematizada en la siguiente tabla (tabla 5.4.4.3).

	Conceptos: significados asociados a la derivada	*Procedimientos*
Alexis	Definición formal Variación Descripción de puntos críticos.	Utilizan las reglas de derivación con fluidez. Simplifica fracciones algebraicas.
Aspectos comunes	Pendiente[55] Velocidad[1]	
Zoraida	Monotonía	Comete errores en derivación de un polinomio y la aplicación de la regla de la cadena. No utiliza procedimientos de simplificación.

Tabla 5.4.4.3: Características de Alexis y Zoraida según el cuestionario de la derivada

Al responder a las preguntas del cuestionario de la derivada, Alexis no muestra establecer ninguna relación entre el criterio de la primera derivada para describir la monotonía de una función y el signo de la pendiente de la recta tangente a la función en cada uno de sus puntos, como refleja el hecho de que calcule la pendiente de la recta de la pregunta 5 del cuestionario utilizando la derivada de la función y responda erróneamente a la pregunta 6 (anexos B.2.4.D y B.2.8).

Durante la entrevista realizada a este alumno después de finalizar el Módulo de Enseñanza dirigido a la introducción del concepto de EDO, se le vuelven a hacer estas dos preguntas y, en ese momento, reflexiona y establece la relación entre una actividad y otra (trascripción B.2.4.TEA, intervenciones [662,675]).

Problema 1: Desintegración del uranio

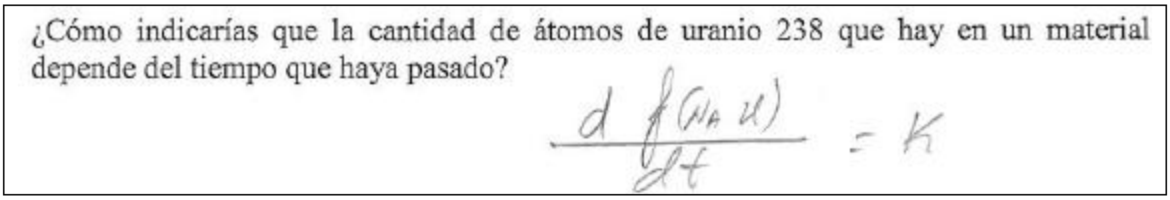
Alexis y Zoraida, durante el desarrollo del problema 1 del Módulo de Enseñanza, tuvieron dificultades relacionadas, sobre todo, con el proceso de representación de información dada en el contexto de la situación hipotética planteada en términos matemáticos. La tendencia general de esta pareja, en la primera parte de la actividad, era intentar presentar expresiones algebraicas de funciones, derivadas o ecuaciones.

El tipo de interacción que se ha producido entre Zoraida y Alexis también ha podido influir en el desarrollo de este problema. Durante la primera mitad del problema, Alexis es quién propone todas las respuestas y en muy pocas ocasiones interviene Zoraida de forma activa, presentando alternativas o preguntando a su compañero por la respuesta que él ha propuesto. Las intervenciones de Zoraida comienzan cuando aparece de forma clara la componente matemática, en preguntas que esta alumna interpreta de forma aislada al contexto de la situación en que se plantea. Al llegar a la cuestión *"Indica al menos otras dos posibilidades para la expresión de u'(t)"*, Zoraida observa que en las preguntas anteriores, Alexis ha indicado la necesidad de que dicha expresión debe ser negativa (aunque los argumentos empleados no eran correctos), aceptando que $u'(t)$ pueda ser igual a $-t$ y $-t^2$, pero no igual a t. En ese momento comienza Zoraida a proponer respuestas (por ejemplo, trascripción B.2.4.TU, intervención {41}).

[55] No muestran habilidad para usarlo en la resolución de problemas.

Prácticamente todas las respuestas de esta pareja a la primera parte de este problema son incorrectas. En este caso, al contrario de lo que ocurrió con las otras tres parejas cuyas rutas de aprendizaje se han analizado en las secciones anteriores, la interacción entre los alumnos no ha funcionado como herramienta de control del proceso de resolución.

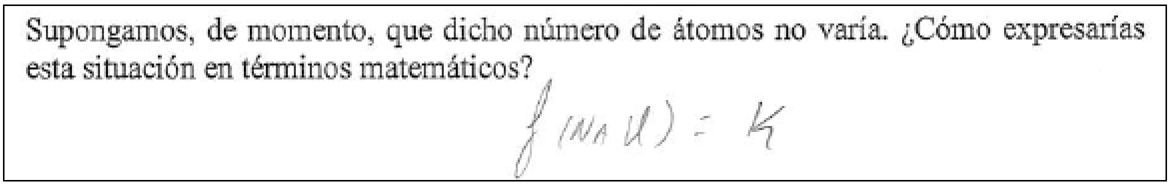
Alexis utiliza el concepto de derivada para indicar que una cantidad, en este caso el número de átomos de uranio que hay en un material, depende del tiempo. Propone una expresión de la forma $\frac{df}{dt}=k$, siendo k una constante. Esta expresión podría ser una forma particular de expresar que el número de átomos de uranio depende del tiempo si la función f representara al número de átomos. Sin embargo la propuesta hecha por Alexis (y no rechazada por Zoraida) no es correcta, a causa de una identificación errónea de las variables dependiente e independiente, el número de átomos de uranio y el tiempo, respectivamente (Imagen 5.4.4.4 y trascripción B.2.4.TU, intervenciones [1,4]).


¿Cómo indicarías que la cantidad de átomos de uranio 238 que hay en un material depende del tiempo que haya pasado?

$$\frac{d\, f(n_A u)}{dt} = K$$

Imagen 5.4.4.4: Error en el proceso de representación de Alexis y Zoraida

De las cuatro parejas seleccionadas para analizar sus rutas de aprendizaje, sólo esta utiliza la expresión algebraica de una función constante para representar una situación hipotética en la que el número de átomos de uranio que hay un material no varíe con el tiempo. Alexis responde que "el número de átomos de uranio es igual a una constante" (trascripción B.2.4.TU, intervención {12}) pero la expresión matemática que utiliza es incorrecta, nuevamente por la identificación errónea del número de átomos de uranio como variable independiente (Imagen 5.4.4.5). Esta pareja no utiliza el concepto de derivada para presentar una alternativa de representación de esta situación.


Supongamos, de momento, que dicho número de átomos no varía. ¿Cómo expresarías esta situación en términos matemáticos?

$$f(n_A u) = K$$

Imagen 5.4.4.5: Identificación errónea de las variables por parte de Alexis

Para representar la situación hipotética de que el número de átomos de uranio disminuya con el tiempo, Alexis propone una expresión de la forma $f(n_A u)-\frac{df(n_A u)}{dt}=k$, siendo k una constante. Más adelante, cuando se les pregunta sobre la posibilidad de que $u'(t)$ sea igual a t o $-t$, modifica dicha expresión, cambiando la operación por una suma. Alexis no explica por qué considera que dicha expresión es correcta ni por qué necesita modificar la operación y su compañera no cuestiona sus propuestas, lo que impide conocer el origen de esta respuesta. El hecho de que, en la siguiente pregunta, proponga una expresión de la forma e^{-kxt} para $u'(t)$ y su argumento para justificar que $u'(t)$ no pueda ser igual a t (trascripción B.2.4.TU, intervención {35}) permite conjeturar que

Alexis está utilizando resultados que ha conocido en otras materias o en cursos anteriores (este alumno es repetidor) puesto que la función e^{-kxt} es muy similar a la que se obtiene al resolver la EDO $x' = -kx$, que modela situaciones de desintegración de sustancias radiactivas (Fernández-Pérez, 1992) y Alexis menciona las ecuaciones diferenciales, cuando aún no han sido introducidas formalmente por el profesor.

Aunque en sus respuestas al cuestionario de la derivada, Zoraida relacionaba el concepto de derivada con otros significados (pendiente, velocidad, monotonía), una de sus primeras intervenciones en el desarrollo del problema 1 del Módulo de Enseñanza permitió observar errores en la comprensión del concepto de derivada por parte de esta alumna. En la segunda pregunta del problema, los estudiantes deben expresar en términos matemáticos, que el número de átomos de uranio no varía. La discusión que se produce entre Alexis y Zoraida es la siguiente (trascripción B.2.4.TU, intervenciones [5,11]):

(5)	Z: Derivada de ... sería igual que antes, ¿no? Derivada de la función, de los átomos de uranio
(6)	A: No, no, no, espérate
(7)	Z: Bueno, ahora no es derivada con respecto al tiempo.
(8)	A: Ahora no hay variación
(9)	Z: Entonces, derivada simplemente. [*Zoraida parece interpretar la derivada como un símbolo, sin ningún significado.*]
(10)	A: Derivada significa variación
(11)	Z: Es verdad

Trascripción B.2.4.TU, intervenciones [5,11]

La frase de Zoraida, “Entonces, derivada simplemente”, parece indicar que esta alumna concibe la derivada como un símbolo. Esto indicaría que las respuestas proporcionadas en el cuestionario de la derivada (anexo B.2.8) podrían ser fruto de la aplicación de procedimientos que esta alumna ha convertido en algoritmos de resolución de cierto tipo de actividades. Posteriormente, Zoraida indica que la función $u'(t)$ no podría ser igual a t “porque es una derivada”. Es su compañero, Alexis, quién le explica que el resultado de un proceso de derivación puede ser igual a t (trascripción B.2.4.TU, intervenciones [27,31]).

Las muestras de control del propio proceso de resolución que manifiestan Alexis y Zoraida son muy escasas. Una de ellas se produce por el hecho de que Zoraida no ha quedado conforme con el argumento que Alexis ha presentado para justificar que $u'(t)$ no pueda ser igual a t (trascripción B.2.4.TU, intervención {35}), basado en su experiencia (Stephan & Rasmussen, 2002). Cuando responden a una pregunta posterior, *“En este contexto, ¿qué significaría que $u'(t)$ sea positiva?”*, Zoraida encuentra una justificación que le satisface más, basada en aspectos matemáticos (trascripción B.2.4.TU, intervenciones [51,52]). A diferencia de lo que ocurría al comienzo del desarrollo del problema, cuando Zoraida apenas intervenía, la interacción entre los estudiantes ha funcionado como elemento de control de las respuestas dadas.

Otro momento en el que esta pareja comprueba sus respuestas es al final del problema, en el proceso de calcular funciones cuyas derivadas sean una serie de funciones indicadas en una tabla (anexo A.2.U). Alexis y Zoraida muestran fluidez en los procesos de integración, que es el que utilizan para completar la tabla, y el de derivación, usado para la comprobación.

A modo de conclusión, la pareja formada por Alexis y Zoraida mostraba inicialmente dificultades para expresar situaciones de dependencia en términos matemáticos, empleando el concepto de función o de derivada. La propia actividad les ha hecho ir evolucionando en este aspecto de forma que han logrado establecer relaciones entre el signo de la derivada y situaciones de variación en un contexto hipotético. A esta pareja le resulta más difícil el proceso de representación, en términos matemáticos, de una situación hipotética planteada en un contexto no matemático que la interpretación de expresiones matemáticas según una situación no matemática.

En cuanto a estrategias heurísticas y metacognitivas la balanza se inclina a favor de Zoraida, que compara continuamente actividades similares y comprueba y modifica respuestas a lo largo del problema. Alexis se nutre de esta capacidad de su compañera, siendo su principal aporte el trabajo que realiza para expresar, en términos matemáticos situaciones planteadas en otros contextos, algo que a Zoraida le resulta prácticamente imposible. Estos alumnos no se plantean, de forma autónoma, el uso de casos particulares que les ayuden a responder a determinadas cuestiones de la actividad.

Problema 2: Contaminación de mercurio

Como ya se ha señalado, la resolución de este problema del Módulo de Enseñanza ocupó un total de cinco sesiones de clase. Aunque hubo varias intervenciones, por parte del profesor, dirigidas a homogeneizar y agilizar el desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes, no todos los alumnos consiguieron seguir el ritmo. Este es el caso de la pareja cuyo trabajo se está analizando en esta sección, Alexis y Zoraida, que resolvieron hasta la primera parte de la etapa 4 de este problema, en la que se plantea y resuelve una generalización de la situación inicial. No se dispone, por tanto, de información de esta pareja relacionada con el análisis retrospectivo del proceso de solución, que ocupaba la parte final del problema (etapa 5). A lo largo del análisis se mostrarán algunas características de la interacción y el trabajo de esta pareja que pueden haber influido en el hecho de que no concluyeran la resolución del problema.

<u>*Actividad inicial*</u>

Alexis y Zoraida comienzan por presentar los datos que figuran en el enunciado de forma esquemática (aspecto en el que coinciden con Milagros y Silvia, sección 5.4.1, y Virginia y Carmen, sección 5.4.3), pasando después a re-escribir, frase a frase, la información que aparece en el texto, lo que hace que no identifiquen información relevante para comprender la situación, como es que el volumen en el interior del depósito se mantiene constante (Imagen 5.4.4.7). Hasta este momento, Alexis y Zoraida parecen dedicar poco tiempo a reflexionar sobre la situación planteada.

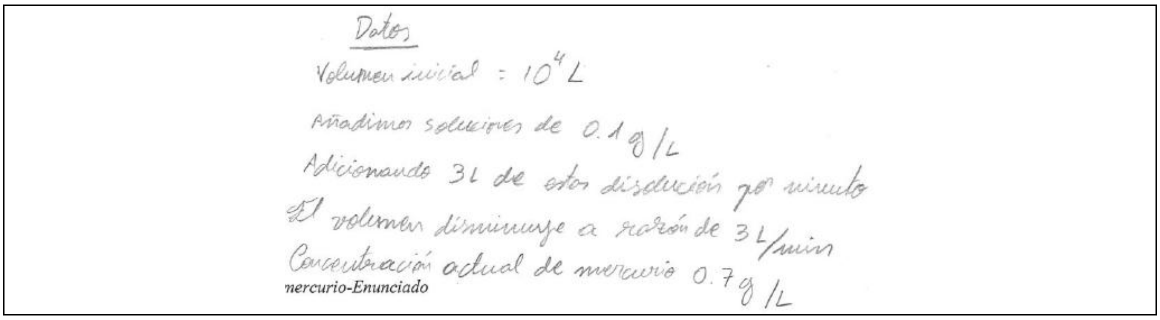

Datos
Volumen inicial = 10^4 L
Añadimos soluciones de 0.1 g/L
Adicionando 3l de estos disolución por minuto
El volumen disminuye a razón de 3 L/min
Concentración actual de mercurio 0.7 g/L
nercurio-Enunciado

Imagen 5.4.4.7: Esquema de representación de los datos de Alexis y Zoraida

Inicialmente, Alexis identifica el problema a resolver como un problema químico (“disminuir o reducir dicha concentración”). Zoraida le corrige, centrando el problema en el contexto matemático (trascripción B.2.4.TM, intervenciones [9,10]).

<u>*Comprensión y análisis de la situación*</u>
Después de responder correctamente a todas las cuestiones de la etapa 1, comprensión de la situación, Alexis y Zoraida comienzan la etapa 2 de este problema buscando una expresión algebraica para representar la cantidad de mercurio que hay dentro del estanque en cualquier instante de tiempo. Esta pareja estuvo durante casi una sesión completa de clase tratando de obtener esa expresión algebraica para $p(t)$. En ningún momento se plantean la consideración de casos particulares o el cambio de estrategia. El tiempo empleado en encontrar esta expresión algebraica fue una de las causas de que no consiguieran terminar la actividad en el tiempo previsto.

La siguiente trascripción muestra los primeros intentos de Alexis y Zoraida por encontrar una expresión algebraica para la función $p(t)$ (trascripción B.2.4.TM, intervenciones [39,49])

(39) Zoraida: p(t) es igual a...
(40) Alexis: No, no, p(t) no, “p(t) igual a” no. Aquí dice la cantidad de mercurio. [*No le ha quedado claro el significado de p(t)*] [*Relee el enunciado*]
(41) Zoraida: [*Intenta decir algo*]
(42) Alexis: ¡Espérate un momento! Sería p(t)...
(43) Alexis: Entran 3l/min, 3 litros son 0.3 gramos. Sería 0.3 por t menos diferencial de...
[Alexis expresa correctamente la cantidad de mercurio que entra en el estanque en un tiempo t.]
(44) Zoraida: Al final esto era... p(t)...
(45) Alexis llama al profesor (P)
(46) I1: ¿Te puedo ayudar yo?
(47) Alexis: No, es que...
(48) Zoraida: Alexis a ver, sería p(t)... Alexis, hay que hacer esto porque si no...
[*Zoraida sigue pensando en la actividad, mientras Alexis se limita a esperar que el profesor le atienda. Aspecto positivo del trabajo en parejas: Capta la atención de su compañero*]
(49) Zoraida: Sería 3t menos... Es que tú no sabes cuánto sale[56]. Tú sabes que sale líquido pero no sabes cuánto sale de la cantidad de mercurio. Y lo que sabes es que

[56] Evidencia de que están pensando en una expresión de la forma: cantidad que hay es igual a la diferencia entre lo que entra menos lo que sale.

luego es igual a 0.7, sabes, tienes una solución de la función, luego no sabes cuánto tiempo a pasado. [...] Vamos a pasar a la siguiente.

Trascripción B.2.4.TM, intervenciones [39,49]

En esta discusión se detectan algunas de las causas que provocan que esta pareja no avance en la resolución: Alexis no reflexiona acerca del significado que el enunciado del problema ha asignado a la función $p(t)$ (“ $p(t)$ igual a no. Aquí dice la cantidad de mercurio”); Zoraida considera que la cantidad de mercurio que hay en el depósito se corresponde con la diferencia entre la cantidad de mercurio que entra y la que sale, confundiéndola así con la variación de la cantidad de mercurio en el depósito (“Sería 3t menos... Es que tú no sabes cuánto sale”); por último Zoraida confunde la cantidad de una sustancia con concentración de dicha sustancia en una disolución (“Y lo que sabes es que luego es igual a 0.7, tienes una solución de la función), además de utilizar de forma incorrecta el término “solución” para indicar el valor numérico de una función.

Dificultades análogas a estas fueron los que hicieron que Zoraida no consiguiera plantear la EDO que modela la situación hipotética presentada en el problema 4, *Investigaciones policiales.* Durante la entrevista se observa que esta alumna tiene una concepción errónea de la proporcionalidad entre cantidades. Zoraida utiliza las expresiones $A = B$ y $A = \frac{1}{B}$ para indicar que las cantidades A y B son directa o inversamente proporcionales, respectivamente. Cuando se le pregunta sobre el significado de la proporcionalidad directa e inversa, sólo las identifica con las expresiones algebraicas anteriores (trascripción B.2.4.TEZ, intervenciones [63,70]). Este hecho, y el identificar la rapidez de cambio con la aceleración, lo que le hace escribir la expresión $a = T_m - T_{cuerpo}$, influyen en que Zoraida no obtenga la expresión correcta de la EDO que modela la situación.

Su compañero, Alexis, recurre a expresiones propias de la física que le ayudaron, en primer lugar, a escribir correctamente la ecuación diferencial a la que conduce la ley de enfriamiento de Newton y, en segundo lugar, a resolverla.

[En la entrevista]
A: No se, es el ejemplo más claro y es algo… es algo sencillo ¿no? Son dos términos. Es decir, Newton, hasta donde yo sé dijo que la fuerza es la variación del momento lineal. Si desarrollamos un poco el momento lineal es la masa por la velocidad. La mas a es una constante y sale fuera. La fuerza es directamente proporcional a la variación de la velocidad en el tiempo. Ya tengo otros dos conceptos de derivada: tanto ser derivada como ser proporcional a una derivada. Es un truco que yo tengo ¿no?

$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ $\frac{dT_c}{dt} = (T_m - T_c)\, m$	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ $d\vec{v} = \vec{a}\, dt$ $\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} a\, dt$	$\frac{dT_c}{m(T_m - T_c)} = dt$ $t = \frac{1}{m}\int \frac{dT_c}{(T_m - T_c)}$

Alexis utiliza la relación de la derivada con la expresión $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ desde el inicio de la experimentación, en el cuestionario de la derivada, hasta el final de la misma, en esta actividad y en la entrevista. Es su manera de relacionar expresiones matemáticas con diferentes significados similares (trascripción B.2.4.TEA, intervención {341}).

Tanto en el problema 1 del Módulo de Enseñanza como en este, se pudo observar que Alexis y Zoraida no consideran, de forma autónoma, el uso de casos particulares como heurística para resolver problemas. En el problema 1, *Desintegración del uranio*, hicieron uso de esta herramienta a instancias de la propia actividad. En este problema, es el profesor quién promueve que utilicen esta heurística, al explicarles que no pueden conseguir la expresión de la función que modela la situación, $p(t)$, en esta etapa puesto que aún no disponen de las herramientas necesarias (trascripción B.2.4.TM, intervenciones[90,100]).

Alexis propone la expresión $\frac{0.3}{10^4}t$ para representar la cantidad de mercurio que sale del depósito. No explica su razonamiento. Su compañera, Zoraida, no le discute la expresión propuesta, salvo por el signo, que considera que debe ser negativo por ser una cantidad que sale. De esta manera, Zoraida manifiesta haber establecido ciertas relaciones entre determinadas palabras que aparecen en el enunciado ("sale") y operaciones o símbolos matemáticos ("negativo").

En la discusión mantenida por Alexis y Zoraida para tratar de expresar la cantidad de mercurio que sale del depósito, Alexis manifiesta que "aquí (refiriéndose a la expresión $\frac{p(t)}{10000}$) lo que te están dando es la concentración [...] Te están dando una concentración, no una función". Alexis podría estar haciendo uso de un razonamiento empírico, según el cuál la concentración es un valor numérico, al igual que ocurrió con Silvia (sección 5.4.1) al considerar que la cantidad de mercurio no podía ser una función, aunque la hubieran expresado como $\frac{p(t)}{10000}$. Este tipo de razonamientos y su influencia en la resolución de problemas cuyo enunciado se basa en un contexto real han sido observados por Stephan & Rasmussen (2002).

Para finalizar la etapa 2 de este problema, los estudiantes deben representar, en términos matemáticos, la variación de la cantidad de mercurio que hay dentro del estanque. Al leer el término "variación", Alexis, inmediatamente piensa en la derivada y lo relaciona con la cantidad de mercurio que entra y sale del estanque. Finalmente optan por representar la variación únicamente como $p'(t)$ puesto que no confían en la representación que han utilizado para la diferencia entre la cantidad de mercurio que entra y la que sale.

Alexis y Zoraida terminan esta etapa de la actividad sin haber conseguido la expresión correcta de la EDO que modela la situación (trascripción B.2.4.TM, intervenciones [138,146]) debido a una interpretación inadecuada del significado de la expresión "$p(t)$" en el contexto. Estos alumnos saben que la variación depende de las cantidades que entran y salen del depósito en cada momento y que la cantidad de mercurio que sale depende de la concentración de dicho elemento que haya dentro del mismo. También conocen la expresión matemática para la concentración, $\left(\frac{cantidad}{volumen}\right)$. Lo que no han reconocido es que la expresión "$p(t)$" hace referencia a la cantidad de mercurio que hay dentro del estanque en cualquier instante de tiempo. Este hecho queda reflejado en la interacción de la pareja con uno de los miembros del equipo de investigación, después de que el profesor hubiera indicado en la pizarra cuál era la EDO que modelaba la situación[57].

En esta discusión, que se produce después de que la pareja ha dado por finalizada la etapa 2 de la actividad, se detecta que Alexis y Zoraida no habían dedicado el tiempo suficiente a reflexionar acerca de la situación planteada puesto que asumen información que no aparece en el enunciado, como reflejan las palabras de Zoraida ("salen 0'1 gr de mercurio").

En la etapa 4 de esta actividad, en la que se plantean y resuelven situaciones generales a partir de la modificación de distintos parámetros que intervienen en el problema, se detecta que Alexis y Zoraida realmente no han comprendido cómo se obtuvo la ecuación diferencial que modela la situación particular ($p' = 0'3 - 0'0003p$), ni siquiera después de que se les explicara en dos ocasiones, una por parte del profesor y otra con la intervención que se acaba de mencionar, lo que queda reflejado en el procedimiento que utilizan para expresar la EDO correspondiente a una entrada de $m\ gr/l$ de mercurio (anexo B.2.4.M).

Las características de las preguntas que conforman las etapas iniciales del problema (comprensión y análisis de la situación) hacen que no surjan estrategias de resolución muy elaboradas. Además de optar por la trascripción, casi literal, del enunciado para redactar el informe inicial, se observaron otras estrategias como el uso de las unidades de medida como recurso para identificar posibles respuestas, empleado por Alexis, o la comparación entre diferentes preguntas, estrategia que Zoraida ya había empleado en el problema anterior y que sigue utilizando como recurso en este problema (Trascripción B.2.4.TM, intervenciones [15,19])

Alexis, al final de la etapa 2, también ha considerado la posibilidad de utilizar una regla de tres para calcular cuánto mercurio habrá en el depósito después de una hora, estrategia que Zoraida rechaza esgrimiendo un argumento que su compañero no le deja finalizar (Trascripción B.2.4.TM, intervenciones [123,127]). Este argumento de linealidad lo vuelven a utilizar al comienzo de la etapa 4, *solución de casos generales*, para plantear las ecuaciones diferenciales que muestran la variación de mercurio dentro del depósito, al introducirse disoluciones con distinta concentración de mercurio. En esa ocasión, Zoraida admite el argumento como válido, siendo la interacción con uno de los investigadores lo que hace que reflexionen acerca de la validez del mismo.

Durante el desarrollo de la etapa 1 de este problema, tanto Alexis como Zoraida responden sin reflexionar, lo que les conduce a cometer errores en diferentes momentos. Esta situación desvela un aspecto positivo del trabajo en parejas que es la corrección mutua, algo que no se da con mucha frecuencia en esta pareja, por el tipo de interacción

[57] Alexis y Zoraida no cuestionan la respuesta del profesor, aún cuando no coincide con la de ellos.

que se produce entre ellos. En este sentido, la interacción entre los estudiantes funciona como mecanismo de control del proceso de resolución del problema.

¿Qué cantidad de mercurio entra en el estanque por cada litro de agua introducido?

Z: 0.3 por minuto, ¿no?
A: No, 0.1. Espera
Z: Si, sería 0.1

Indica la cantidad de mercurio que se introduce en el estanque por minuto.
Ayuda: Ten en cuenta cuántos litros de solución entran en cada minuto y cuántos gramos de mercurio hay en cada litro de la misma.

Z: [lee] 0.1
A: 0.3 [Lee la ayuda]
Z: En cada litro hay 0.1
A: Por 3 es 0.3

Diferentes momentos en los que Alexis y Zoraida se corrigen mutuamente

Solución de casos particulares
Alexis y Zoraida comienzan la etapa 3, solución de casos particulares, utilizando la expresión de la ecuación diferencial que el profesor había indicado en la pizarra, $p'(t) = 0'3 - 0'0003p(t)$. La identificaron como una EDO de primer orden argumentando que *"es una relación entre una variable, una función y su derivada, expresada como una igualdad; es de 1er orden pues el grado máximo de la derivada en la EDO es 1."* Posteriormente la clasificaron, en primer lugar, como una ecuación diferencial lineal, lo que coincide con la primera opción elegida por varias parejas, con base en la estructura con la que se les presentaron dichas ecuaciones $\left(\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)\right)$.

El reconocimiento de la ecuación como una EDO de variables separables surgió después de que el profesor la clasificara como tal en una intervención dirigida hacia todo el grupo con el objetivo de que los estudiantes observaran que, aunque muchos de ellos habían clasificado la EDO como lineal, también se podía considerar como de variables separables y esa sería la clasificación que se consideraría para introducir el método algebraico de resolución de este tipo de ecuaciones.

Aunque Alexis y Zoraida, por escrito, indican que la EDO se puede clasificar como lineal o como de variables separables, parece que no saben muy bien por qué. En el caso de Zoraida, que la había clasificado como lineal, no entiende por qué se puede considerar de variables separables; Alexis no entiende ninguna de las dos opciones, pero no le pregunta a su compañera sino que espera a que termine la clase para preguntar al profesor.

Alexis, a solas, pregunta al profesor esta duda, permitiéndonos observar que una de las dificultades con las que se encuentra es con la consideración de las constantes como funciones, aspecto en el que le guía el profesor con preguntas como "¿una constante puede ser función de una variable independiente?" (Trascripción B.2.4.TM, intervenciones [171,177]), a la que Alexis responde "una constante puede ser función de lo que sea”. Durante el desarrollo del problema 1 del Módulo de Enseñanza, Desintegración del uranio, esta pareja fue una de las pocas que utilizó la expresión algebraica de una función constante para representar una situación en la que cierta cantidad no variaba. Por tanto, este es un conocimiento del que Alexis dispone, pero que no ha tenido la habilidad de utilizarlo, de forma autónoma para clasificar la EDO.

Una vez que Alexis consigue reconocer la EDO como lineal (una de las dudas planteadas por este alumno), el profesor intenta ayudarle en el uso del método algebraico de resolución de las EDO de variables separables (otra de las dudas de Alexis). El profesor le tiene que explicar en varias ocasiones que, si bien es cierto que la característica principal de estas ecuaciones es que las variables aparecen “separadas”, esa separación es en términos de factores y no de sumandos. Una vez entendida la idea de separar las variables, Alexis se encuentra con muchas dificultades para desarrollar el procedimiento matemático (trascripción B.2.4.TM, intervenciones [186,199]).

En la siguiente sesión de clase, esta pareja vuelve a intentar resolver la EDO utilizando el método algebraico para las EDO de variables separables. Un error en la trascripción de una constante les lleva a obtener una expresión de la solución general de la EDO que no es correcta. La solución que obtienen es: $p(t)=\dfrac{C\cdot e^{-3\cdot 10^{-3}t}-1}{-1\cdot 10^{-2}}$. A continuación resuelven la EDO con la Voyage 200 y se les pide comprobar si las expresiones obtenidas usando la calculadora y empleando lápiz y papel coinciden. Alexis y Zoraida responden que dichas expresiones coinciden, pero no hay indicios de que hayan realizado ningún tipo de comprobación. La razón de esto podría ser que estos alumnos no estén comparando la expresión de la solución general de la EDO obtenida con la calculadora con la que ellos obtuvieron, $p(t)=\dfrac{C\cdot e^{-3\cdot 10^{-3}t}-1}{-1\cdot 10^{-2}}$, sino con la que el profesor había presentado en la pizarra en la sesión anterior, $p(t)=C\cdot e^{-0'0003t}+1000$, que es la que utilizan para continuar resolviendo el problema.

A continuación los estudiantes resuelven el problema de valores iniciales que les conducen a la solución particular de la EDO, $p(t)=-1000\cdot e^{-0'0003t}+1000$. A diferencia con lo que ocurría con otras parejas como Milagros y Silvia (sección 5.4.1) o Nicanor y Mar (sección 5.4.2), Alexis y Zoraida han resuelto esta pregunta del problema después de que el profesor introdujera los conceptos de condiciones iniciales, y problemas de valores iniciales, por lo que no han tenido la oportunidad de mostrar si relacionan este procedimiento con el valor numérico de una función, tal y como hicieron las parejas mencionadas anteriormente, o no.

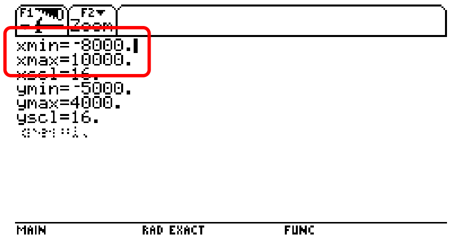
Una vez representada gráficamente la solución particular de la EDO se plantean distintas cuestiones acerca de dicha representación. Alexis y Zoraida no identifican la asíntota horizontal en la representación gráfica. En esta etapa aparece de forma explícita el concepto de límite de una función, asociado a tres representaciones diferentes desde el punto de vista cognitivo: gráfica, algebraica y relacionada con un contexto real. Esta pareja no muestra conexiones entre las representaciones gráfica y algebraica del límite de la función $p(t)$ y tampoco entre este concepto y su significado dentro de la situación planteada. Este hecho se refleja cuando Alexis y Zoraida indican que el valor máximo de mercurio que se puede alcanzar dentro del depósito es de 10.000 gr, después de haber escuchado a otros compañeros decir que había una cantidad máxima. La justificación de este valor la encuentra Zoraida, casualmente y de forma errónea, en los parámetros indicados para representar la función (imagen 5.4.4.8). La obtención de un valor diferente al calcular el límite de $p(t)$ en el infinito, no les provoca conflicto, reflejo de que no están asociando, a ese límite, el significado correspondiente a la situación planteada.

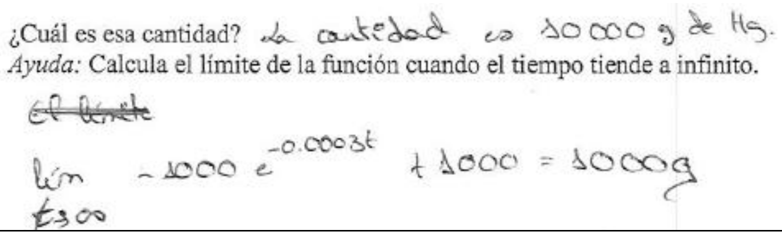
Analizando la representación gráfica que modela la situación, ¿crees que hay una cantidad máxima de mercurio que puede haber en el depósito?

Z: ¿Si o no?

A: No. Sí tiene máximo pero va creciendo hasta infinito. [...] [Escuchan comentar a otra pareja que hay una cantidad máxima.] Hombre, pues sí, di una cantidad máxima, 10000.

Z: Además, lo pone aquí, xmax=10000





¿Cuál es esa cantidad? la cantidad es 10 000 g de Hg.

Ayuda: Calcula el límite de la función cuando el tiempo tiende a infinito.

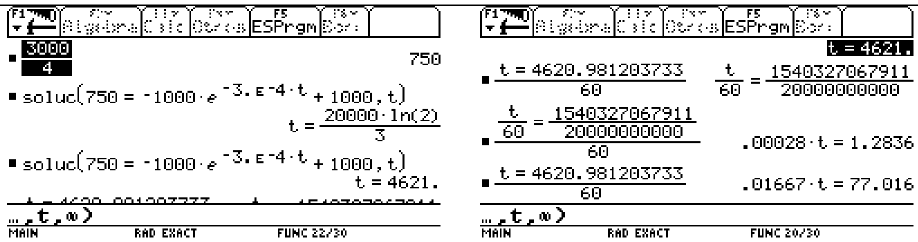
~~el limite~~

$\lim_{t \to \infty} -1000\, e^{-0.0003t} + 1000 = 1000\,g$

Imagen 5.4.4.8: Zoraida interpreta erróneamente información dada en la Voyage 200

La etapa 3 de este problema finaliza presentando una serie de actividades cuyo objetivo es analizar si los estudiantes han comprendido el proceso de resolución que han seguido hasta el momento y el significado de las expresiones matemáticas obtenidas. Dos de las preguntas que se formulan son acerca del número de días que se tardó en alcanzar la mitad de la concentración límite del estanque y las tres cuartas partes.

Alexis y Zoraida sustituyen los datos necesarios en la expresión de la solución particular de la EDO y obtienen los respectivos valores para el tiempo. Alexis nos muestra una de las pocas ocasiones en las que comprueba el resultado obtenido, comparando que el tiempo que se tarda en alcanzar las tres cuartas partes de la concentración límite del depósito es mayor que el que se tarda en alcanzar la mitad de dicha concentración límite (Trascripción B.2.4.TM, intervenciones [268,274] e imagen 5.4.4.10).



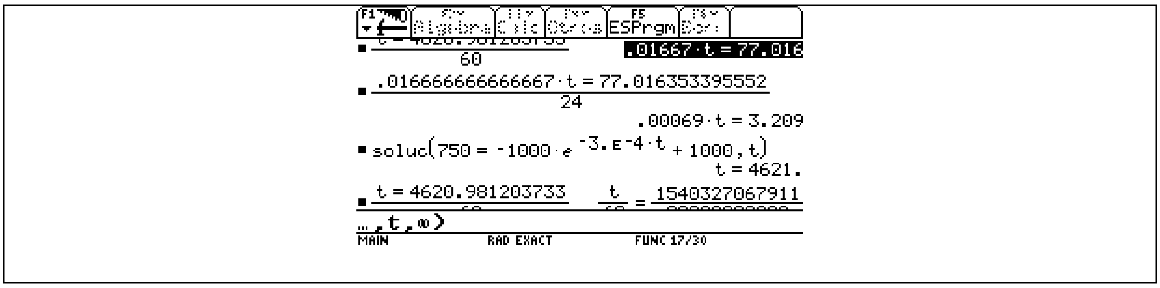


Imagen 5.4.4.10: Uso de la calculadora por parte de Alexis y Zoraida

La última pregunta de esta etapa ha permitido observar que Alexis y Zoraida puede que no estén integrando el contexto matemático con el de la situación hipotética planteada. Aunque en las preguntas anteriores han considerado que el tiempo que obtenían al resolver la ecuación venía expresado en minutos y utilizaban este hecho para realizar los cambios de unidades necesarios, su discusión durante la resolución de la última pregunta nos indica que realmente no interpretan la ecuación y la situación de forma conjunta, sino como entes aislados (trascripción B.2.4.TM, intervenciones [275,284]).

En cuanto al manejo de la herramienta tecnológica utilizada en esta experiencia, la calculadora Voyage 200, Alexis y Zoraida, cada vez que tienen que realizar algún cálculo, por muy sencillo que este sea, utilizan la calculadora, y nunca comprueban el resultado obtenido (Imagen 5.4.4.11).

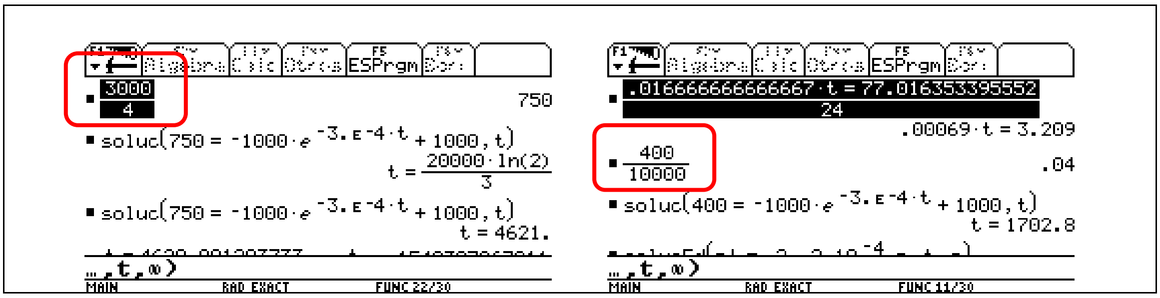


Imagen 5.4.4.11: Alexis y Zoraida utilizan la calculadora para cálculos triviales

Por otra parte, no muestran reflexión acerca del significado de la información que aparece en la calculadora. Existen al menos dos ejemplos de este uso irreflexivo de los resultados de la calculadora presentados por Alexis y Zoraida durante esta etapa de la actividad. El primero se produce cuando la pareja escucha decir a unos compañeros que hay una cantidad máxima de mercurio que se puede alcanzar en el depósito, aunque ellos no lo creían así. Zoraida encuentra un argumento a este hecho en la imagen que se les proporcionó para establecer los parámetros de representación de la pantalla, sin percatarse de que el valor requerido se refiere a la variable dependiente y el que ella toma de la pantalla de la calculadora corresponde a la variable independiente. Otro de estos momentos se produce cuando se les pide expresar en horas el tiempo que se tardó en alcanzar, dentro del depósito, la mitad de su concentración límite. Los estudiantes, al realizar el cambio de unidades de minutos a horas, empleando la calculadora, utilizaron la operación correcta pero una sintaxis errónea (imagen 5.4.4.12). Alexis y Zoraida interpretan que la calculadora les ha dado el valor del tiempo cuando, en realidad no es así.

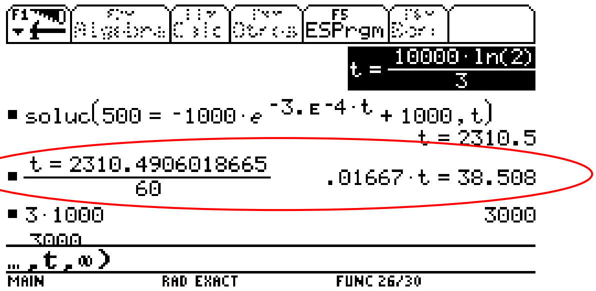


Imagen 5.4.4.12: Sintaxis errónea en la Voyage 200

<u>*Planteamiento y solución de casos generales*</u>

El análisis del proceso de resolución de los estudiantes, de su interacción y del uso que hacen de la calculadora Voyage 200, será restringido al primer y último apartados de esta etapa, correspondientes a la generalización de la cantidad de mercurio que se introduce en el estanque y de la cantidad inicial de mercurio que hay en el depósito. Esta elección se ha hecho a partir de un análisis previo que mostró que la resolución de los otros dos apartados no aportaba elementos diferentes a los observados con el primer apartado (sección 5.3.2).

En el primer apartado de esta etapa, en el que se modifica la cantidad de mercurio que se introduce en el depósito, Alexis y Zoraida comienzan intentando generalizar la expresión de la ecuación diferencial correspondiente al caso particular, $p' = 0.3 - 0.0003p$, sin detenerse a pensar en el significado de cada uno de sus términos y utilizando un argumento de linealidad, de forma análoga a como lo hicieron Nicanor y Mar en un principio (sección 5.4.2).

La EDO que plantea inicialmente esta pareja para el caso en que se introducen 0’2 gr de mercurio por litro de disolución es $p' = 0.2 - 0.0002p$. Utilizando el mismo razonamiento, obtienen que la EDO para el caso en que se introducen 0’3gr de mercurio sería $p' = 0.3 - 0.0003p$, que es la misma que se había obtenido en la etapa anterior, donde se introducían 0’1gr de mercurio. Esta situación hace reflexionar a los alumnos sobre el procedimiento seguido para obtener la ecuación diferencial y modifican las ecuaciones, esta vez utilizando un razonamiento de tipo lineal, en el sentido de que, al aparecer el número 3 en todos los términos de la EDO cuando se introducían 0’1gr de mercurio, cuando se introduzcan 0’2gr en la EDO aparecerá un 6, si se introducen 0’3gr aparecerá un 9, etc (trascripción B.2.4.TM, intervenciones [287,293]).

Alexis y Zoraida no utilizan la relación que existe entre la EDO y la variación de la cantidad de mercurio, por lo que no se dan cuenta de que hay un término que se refiere al mercurio que sale y no al que entra. Esta pareja, en este momento, está trabajando única y exclusivamente en un contexto matemático, sin establecer conexiones entre los términos de la ecuación y la situación hipotética planteada. Esta circunstancia no sorprende puesto que Alexis y Zoraida no habían conseguido expresar la EDO que modela la situación particular, objetivo de la etapa 2 de este problema.

Uno de los profesores presentes en el aula observa las ecuaciones diferenciales que han escrito estos alumnos y les pregunta sobre el razonamiento que han seguido para obtenerlas con el fin de detectar cuál ha sido el error e intentar que los estudiantes vuelvan a pensar en la situación. De la discusión mantenida entre Alexis, Zoraida y la profesora se puede comprobar que esta pareja no había reflexionado acerca del significado de los elementos que forman la ecuación y, además, no habían comprendido cuál era el significado del término $0'0003p$ (trascripción B.2.4.TM, intervenciones [326,349]).

Alexis y Zoraida tampoco saben cómo resolver el problema de valores iniciales, no identifican el cálculo de la constante de integración con el uso de las condiciones iniciales del problema, en este caso, $p(0) = 0$ (Trascripción B.2.4.TM, intervenciones [298,305]). Esto podría considerarse una muestra más de que esta pareja ha respondido a las diferentes cuestiones del problema sin reflexionar. Además en ningún momento utilizan los procedimientos empleados en las etapas anteriores para guiarse en las respuestas a esta etapa.

Para obtener la cantidad máxima de mercurio que puede haber en el depósito hacen uso del límite de $p(t)$, lo que demuestra que han asimilado la explicación que recibieron al respecto en la etapa anterior, donde no relacionaban el límite de la función $p(t)$ con la cantidad máxima de mercurio que puede alcanzarse en el depósito.

Alexis continúa trabajando con la calculadora mientras Zoraida se ocupa de completar la primera tabla, para lo que busca patrones utilizando las dos primeras filas, relacionando las respuestas que aparecen en una misma columna y dejando huecos los espacios en los que no encuentra cómo sigue el patrón, a la espera de que su compañero realice los cálculos (imagen 5.4.4.13).

Cantidad de mercurio que se introduce en el depósito (gr/l)	EDO que modela la situación	Solución de la EDO	Función que modela la situación real $p(0) = 0$	Cantidad máxima de mercurio que puede haber en el depósito
0.1	$\frac{dp}{dt} = 0.3 - 0.0003p(t)$	$p(t) = C \cdot e^{-0.0003t} + 1000$	$p(t) = -1000 \cdot e^{-0.0003t} + 1000$	1000 gr
0.2	$\frac{dp}{dt} = 0.6 - 0.0006p(t)$	$p(t) = Ce^{-3t/5000} + 1000$	$p(t) = -1000\, e^{-3t/5000} + 1000$	1000 gr
0.3	$\frac{dp}{dt} = 0.9 - 0.0009p(t)$	$p(t) = Ce^{-9t/10000} + 1000$	$p(t) = \quad e^{-9t/10000} + 1000$	
0.4	$\frac{dp}{dt} = 1.2 - 0.0012p(t)$	$p(t) = Ce^{-12t} \quad + 1000$	$p(t) = \quad e \quad + 1000$	
...				
m	$\frac{dp}{dt} = 3m - 0.0003m\, p(t)$	$p(t) = Ce^{-3m/} \quad + 1000$	$p(t) = \quad e \quad + 1000$	

Imagen 5.4.4.13: Parte de la tabla 1 cumplimentada por Zoraida

Alexis y Zoraida terminan esta actividad con la representación gráfica de las funciones que indican la cantidad de mercurio que hay dentro del depósito en cualquier instante de tiempo, cuando se introducen disoluciones con una concentración de mercurio de 0’1, 0’2, 0’3 y 0’4 gr/l (imagen 5.4.4.14). Aunque el profesor les indica que deben llevarse la actividad a casa y entregarla terminada, junto con la etapa 5, *análisis retrospectivo*, los alumnos manifiestan que no van a hacerlo puesto que no disponen de tiempo al tener que estudiar otras materias. Esto refleja cierta falta de interés en la materia por parte de los estudiantes, aspecto fundamental para el desarrollo del aprendizaje.

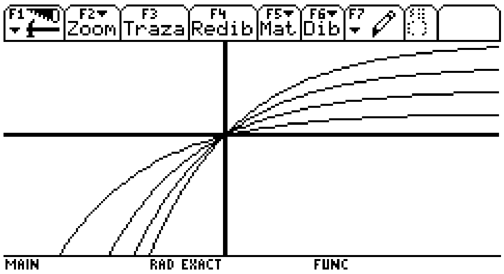


Imagen 5.4.4.14: Representación gráfica de $p(t)$ para distintas disoluciones

A modo de resumen: en esta actividad ha habido un acercamiento entre los estudiantes, aunque la interacción entre Alexis y Zoraida todavía no presenta muchas características favorables al desarrollo del aprendizaje matemático como la formulación de conjeturas, la expresión de razonamientos frente al compañero, la refutación de justificaciones de manera argumentada, etc.
La mayoría de las dificultades y de los errores que esta pareja ha cometido en el transcurso de este episodio han estado relacionadas directamente con el escaso tiempo que han dedicado a la comprensión de la situación y con su falta de reflexión a la hora de responder. El carácter irreflexivo de estos alumnos se ha transferido al ambiente tecnológico donde han utilizado los resultados mostrados por la calculadora sin analizarlos.

Algunas dificultades que estos alumnos han tenido en el transcurso de este episodio del Módulo de Enseñanza han permitido observar, además, su actitud frente los conocimientos mostrados por el profesor de la materia. Alexis y Zoraida aceptan los resultados propuestos por el profesor sin reservas, aún cuando no coincida con lo que ellos han obtenido. En numerosas ocasiones algún miembro del equipo de investigación detectó esta situación y trabajó con la pareja con el objetivo de que sus dudas quedaran resueltas. Esto fue posible gracias a la dinámica de aula utilizada.

Problema 3: Dinámica de poblaciones

Ya se ha indicado que el diseño del problema 3 del Módulo de Enseñanza es análogo al del problema 2, contemplándose en él cinco etapas de resolución: comprensión y análisis de la situación, solución del caso particular, planteamiento y solución del caso general y análisis retrospectivo del proceso de solución. La pareja formada por Alexis y Zoraida tuvo muchas dificultades para desarrollar el problema anterior, dejándolo incluso incompleto, algo que también les ocurre en este problema, en el que tampoco realizan la etapa 5 (análisis retrospectivo del proceso de solución).

Comprensión y análisis de la situación

En el proceso planteado en la etapa 2 del problema para guiar a los estudiantes en la obtención de la EDO que modela la situación, Alexis y Zoraida muestran dificultades para interpretar la expresión $P(t)$ como una función que indica la cantidad de peces que hay en los recintos de la piscifactoría en cualquier instante de tiempo, pero la interacción entre ellos les conduce a la respuesta correcta en todos los casos, llegando a plantear la ecuación diferencial que modela la situación, $P' = 0'19P$, aunque en el camino han mostrado muchas dudas.

Para obtener la expresión del número de peces que nacen y mueren en un año en el caso general, así como de la variación en el número de peces (última fila de la tabla de la etapa 2), Zoraida busca un patrón en el procedimiento seguido para completar las filas anteriores de la tabla. Además comprueba que la expresión propuesta es correcta, verificando que se cumplen los resultados de las tres primeras filas de la tabla y explicando el razonamiento a su compañero (trascripción B.2.4.TP, intervenciones [68,73])

Durante esta etapa, además, utilizan la calculadora Voyage 200 para realizar cálculos de operatoria básica que, en algunos casos, emplearon para comprobar algunas conjeturas que habían hecho, como expresar el número de peces que nacen en un año en función de $P(t)$ como $0.41P(t)$. En la imagen 5.4.4.15 se puede observar cómo Alexis y Zoraida comprueban que esta expresión funciona correctamente cuando en el recinto hay 1000 ó 2000 peces.

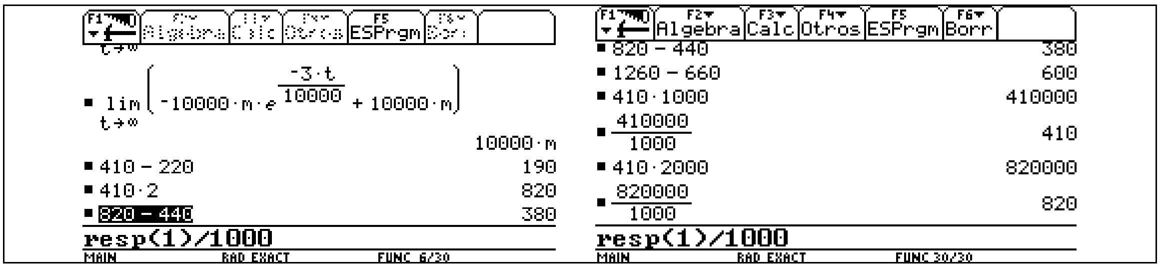


Imagen 5.4.4.15: Uso de la Voyage 200 para realizar cálculos y comprobar conjeturas

Solución de casos particulares

Durante la etapa 3 de este problema se ha vuelto a comprobar que esta pareja no se cuestiona ni los resultados mostrados por el profesor ni los obtenidos mediante el uso de la Voyage 200. Alexis y Zoraida dedican mucho tiempo a contestar a las preguntas de las dos primeras etapas, en parte porque conversan sobre aspectos ajenos al problema que están trabajando. Esto hace que se retrasen con respecto a sus compañeros y que tengan que comenzar la etapa 3 de este problema utilizando la expresión de la solución de la EDO que el profesor obtuvo al resolver esta ecuación para todo el grupo, empleando el método de separación de variables. Alexis y Zoraida aún no la habían resuelto, por lo que tomaron como válida la expresión dada por el profesor $\left(P = C \cdot e^{0'19}\right)$ y continuaron con la actividad, sin comprobar el resultado obtenido.

Más adelante, para resolver la EDO $\dfrac{dP}{dt} = 0.19P - bP^2$ utilizan la calculadora, obteniendo una expresión para la función $P(t)$ que no era la correcta, después de varios intentos, expresión que toman como válida sin cuestionarse nada (Imagen 5.4.4.16). El profesor detecta que no han obtenido la solución correcta y les explica que habían cometido un error de sintaxis. Esta intervención es la que hace que los estudiantes puedan continuar con el desarrollo del problema, sin ir arrastrando un error que les afectaría durante todo el desarrollo. Este episodio muestra la necesidad de fomentar que los estudiantes cuestionen los resultados que se les presentan, sobre todo aquellos obtenidos usando herramientas tecnológicas puesto que muchos de ellos son fruto de un error en la introducción de los datos por parte de los propios estudiantes.

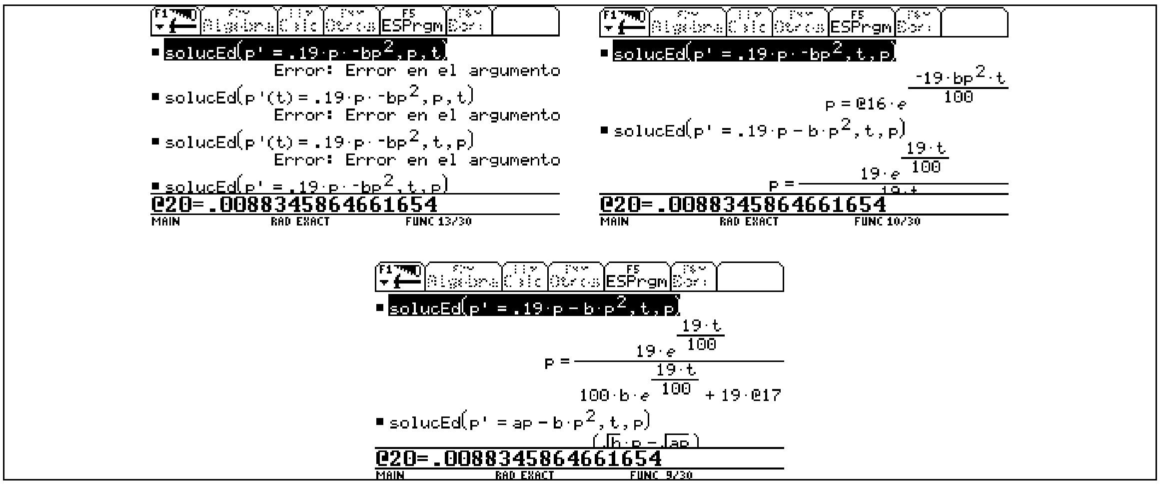


Imagen 5.4.4.16: Distintos intentos de Alexis y Zoraida para resolver una EDO

Durante la entrevista, Alexis y Zoraida tampoco verifican los resultados obtenidos. Por ejemplo, Zoraida, obtiene una cifra positiva, $t = 2.83\,horas$, como valor del tiempo que hace que falleció la persona considerada en el enunciado del problema, lo que indica falta de reflexión acerca del resultado obtenido, puesto que debería obtenerse un valor negativo al haber considerado el momento en que se encuentra el cadáver como el valor del tiempo inicial (trascripción B.2.4.TEZ, intervenciones [210,222]).

Volviendo al problema 3, ante la pregunta, referida aún al caso en que la ecuación considerada es $P' = 0'19P$, "el número de peces, ¿aumenta, disminuye o se mantiene constante?", Alexis y Zoraida utilizan un razonamiento empírico, respondiendo que "el número de peces [...] aumenta porque [...] es mayor la tasa de natalidad que la de mortalidad" (trascripción B.2.4.TP, intervenciones [165,166]). Esta es la única pareja, de entre las seis y el trío que participaron en esta fase de la investigación, que utilizó un argumento de este tipo para responder a esta pregunta. El resto de los estudiantes utilizaron argumentos relacionados con la expresión de la función solución general $\left(P = C \cdot e^{0'19t}\right)$ (sección 5.3.3).

Una vez introducido el término de competición entre las especies, esta pareja representa la nueva situación con la EDO $\frac{dP}{dt} = 0.19P - bP^2$. A continuación se les pide analizar el comportamiento de la función solución general de esta ecuación. Alexis y Zoraida relacionan el signo de la función derivada con el hecho de que la población aumente, disminuya o se mantenga constante, pero no plantean la inecuación correspondiente para obtener los valores de P en los que se produce una u otra situación. De forma análoga a como hicieron la mayoría de los otros grupos de estudiantes (por ejemplo Milagros y Silvia o Virginia y Carmen, secciones 5.4.1 y 5.4.3 respectivamente) utilizaron la heurística del tanteo según los valores de b (trascripción B.2.4.TP, intervenciones [199,222]).

A continuación esta pareja optó por resolver la EDO utilizando la Voyage 200 (Imagen 5.4.4.16) pero la expresión obtenida tampoco les ayuda a responder a esta cuestión. Una de las profesoras presentes en el aula explica a Alexis y Zoraida cómo resolver la inecuación $0'19P - bP^2 > 0$, con la que se obtienen los valores de P que hacen que la población aumente. Los alumnos resuelven los otros dos apartados.

Esta pareja va muy retrasada en su trabajo, con respecto al resto de sus compañeros, por lo que se les pide que pasen directamente a resolver la etapa 4 del problema, planteamiento y solución de casos generales. Las actividades de la etapa 3 que Alexis y Zoraida no resolvieron fueron, el análisis de la evolución de la cantidad de peces en el tiempo y las representaciones gráficas planteadas para que los alumnos verificaran la información obtenida usando el sistema algebraico. En la etapa 4 hay preguntas análogas a estas por lo que no se produce una pérdida de información relevante.

<u>*Planteamiento y solución de casos generales*</u>
En la etapa 4 de esta actividad, Alexis y Zoraida expresan de forma correcta la ecuación diferencial que modela una situación más general que la presentada inicialmente. En esta etapa se considera que la tasa de crecimiento de la población de peces es un valor constante a. La EDO que modela la nueva situación es $P' = aP - bP^2$. Resolviendo la ecuación diferencial con la Voyage 200, han obtenido la expresión de una función que les indica la cantidad de peces que hay en el estanque para los casos en los que la tasa de crecimiento sea un valor a y el término de competición sea una cantidad positiva b (Imagen 5.4.4.17).

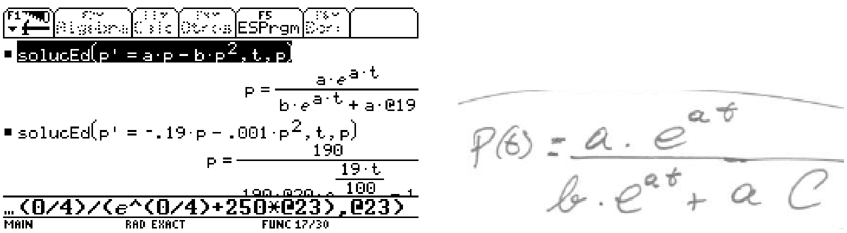


Imagen 5.4.4.17: Resolución de la EDO que modela la situación general

Sin embargo no utilizan esta expresión general de la función $P(t)$ para responder a las preguntas posteriores en las que deben representar gráficamente la función para valores concretos de a, b y condiciones iniciales. En cada uno de los apartados en los que deben hacer representaciones de casos particulares de funciones optan por resolver la EDO e imponer las condiciones iniciales para obtener la expresión de la función que posteriormente representan. Todo este proceso lo hacen siempre con la Voyage 200 (Imagen 5.4.4.18).

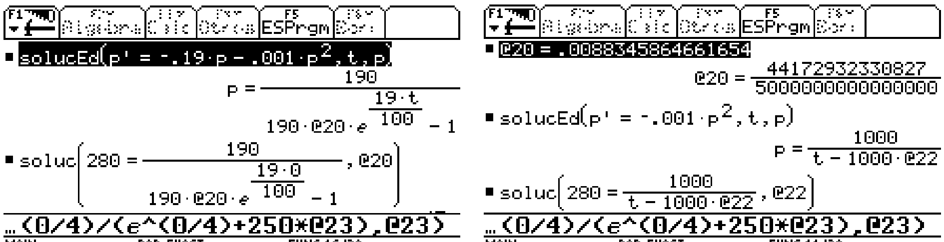


Imagen 5.4.4.18: Proceso seguido por Alexis y Zoraida para estudiar casos particulares

Una vez resuelta la EDO, los estudiantes responden a las preguntas sobre qué pasaría con la población a medida que pasa el tiempo, distinguiendo entre los siguientes casos: a>0, a<0 y a=0. Los dos primeros fueron constestados de forma análoga y correcta por todos los estudiantes, con lo que el último es el que más interesa en este análisis. Alexis y Zoraida responden que, en el caso en que la tasa de crecimiento de la población sea cero, la población “se mantendrá constante” puesto que “los que nacen y mueren es el mismo… del total ni se suma ni se resta” (trascripción B.2.4.TP, intervenciones [405,408]).

Del resto de las cuestiones que forman parte de la etapa 4 de este problema, Alexis y Zoraida sólo se detienen en aquellas en las que se les pide representar gráficamente una serie de funciones. No reflexionan sobre las preguntas acerca de la evolución de la cantidad de peces a lo largo del tiempo y, por tanto, no pueden comparar la información obtenida en el sistema de representación gráfico con ninguna otra.

El proceso seguido para obtener la representación gráfica de las funciones que se les piden es siempre el mismo: resuelven la EDO correspondiente, sustituyen la condición inicial en la expresión de la función solución general, obtienen el valor de la constante de integración y lo sustituyen, obteniendo así la expresión de la función solución del problema de valores iniciales correspondiente.

Alexis y Zoraida no hacen uso de resultados generales para resolver casos particulares, repiten el proceso de resolver la ecuación diferencial, imponer las condiciones iniciales para obtener el valor de la constante de integración y representar gráficamente la función obtenida. Esto podría indicar poca capacidad de abstracción por parte de estos estudiantes.

Alexis, durante la entrevista, sí hace uso de los procesos de abstracción y generalización, cuando se le pide analizar, utilizando el sistema de representación gráfico, las posibles situaciones que podrían darse al considerar diferentes valores de las temperaturas del medio y del cuerpo en el momento de ser encontrado (generalización del problema 4, *Investigaciones policiales*). Aunque no se expresa del todo correctamente, manifiesta que de forma general, la temperatura del cuerpo disminuirá hasta alcanzar el valor de la temperatura del medio, si la temperatura inicial a la que se encuentra está por encima de la temperatura del medio, la cuál permanece constante; la temperatura del cuerpo aumentará hasta alcanzar el valor de la temperatura del medio si en el momento inicial es menor; y se mantendrá constante si, en el instante inicial, la temperatura del cuerpo coincide con la del medio (trascripción B.2.4.TEA, intervenciones [594,596]).

El hecho de que esta pareja no realice el informe correspondiente a la etapa 5 de este problema resta información sobre la visión de Alexis y Zoraida sobre los aspectos del desarrollo de este problema del Módulo de Enseñanza. Por otra parte, refleja falta de interés en la materia por parte de estos alumnos.

Zoraida sirve de ejemplo para mostrar la necesidad de establecer nexos entre las diferentes representaciones de un mismo concepto matemático y de diferenciar claramente entre las definiciones de los conceptos y los ejemplos particulares que se muestran en cada uno de ellos. Por ejemplo, en el caso de la proporcionalidad entre cantidades, Zoraida, durante la entrevista, tomó como general una expresión particular de la proporcionalidad directa e inversa. Otro ejemplo relacionado con la distinción entre casos particulares y generales se encuentra al preguntarle a esta alumna cómo indicaría que una función depende del tiempo, siendo su respuesta un ejemplo particular de función dependiente del tiempo (trascripción B.2.4.TEZ, intervenciones [26,27]).

I: [...] ¿cómo indicarías que algo depende del tiempo?

Z: Multiplicándolo por el tiempo

En la resolución de los tres problemas que conforman el Módulo de Enseñanza, Zoraida y Alexis utilizan la calculadora Voyage 200 para realizar prácticamente todas las operaciones aritméticas y los procedimientos matemáticos. Esto dificultó el análisis de la fluidez de estos alumnos en el uso de procedimientos como la derivación, integración o el cálculo de límites.

Durante la entrevista, se pudo observar que Zoraida podría tener dificultades con el procedimiento de integración. Al resolver la EDO que modela la situación planteada en el problema 4, *Investigaciones policiales*, Zoraida obtiene la expresión mostrada a en la imagen 5.4.4.19, identificando la integral con una función logarítmica que, sin embargo, no consigue obtener hasta que se le pide que derive diferentes funciones logarítmicas. En ese momento se pudo observar que además, esta alumna podría tener dificultades para utilizar la regla de la cadena en la derivación de la función logarítmica, la conoce y sabe utilizarla, pero no detecta los momentos en que tiene que emplearla (trascripción B.2.4.TEZ, intervenciones [130,132]). Este es un nuevo ejemplo de la necesidad de desarrollar otros elementos, además de la comprensión conceptual, para poder resolver problemas matemáticos con éxito (Schoenfeld, 1992). Finalmente, Zoraida asocia la expresión $F'(x) = -\frac{1}{3-x}$ con la integral que trata de resolver y obtiene la expresión correcta de la función logarítmica. En su proceso de resolución, sin embargo, se ven indicios de falta de significado en las operaciones realizadas como muestra el hecho de que escriba la integral sin indicar la variable respecto a la que está integrando.

$$t = \frac{1}{n} \int \frac{1}{15.5 - T_{cuerpo}}$$

Imagen 5.4.4.19: Representación de la integral sin indicar la variable respecto de la que se integra

Otro ejemplo que ilustra la falta de significado que tienen para Zoraida las transformaciones algebraicas que se realizan durante un procedimiento matemático, en este caso la integración, se puede observar en la forma en que aplica la integración para resolver la EDO mostrada en la siguiente imagen (imagen 5.4.4.20).

$$\frac{dT}{dt} = (T_m - T_{cuerpo})\, n$$

$$\int \frac{dT}{dt} = \int (T_m - T_{cuerpo})\, n$$

$$\int dT = \int (T_m - T_{cuerpo})\, n\, dt$$

Imagen 5.4.4.20: Procedimiento empleado por Zoraida para resolver una EDO

La entrevista realizada a Alexis y Zoraida ha permitido detectar otros aspectos de tipo cognitivo. En un momento determinado de la entrevista (realizada de forma individual, pero con características similares para todos los estudiantes), se pide a los alumnos que comprueben que la función obtenida es solución de la EDO que modela la situación hipotética planteada en el problema 4, *Investigaciones policiales.* Tanto Zoraida como Alexis proceden de la misma forma: derivan la expresión algebraica de la función y comparan el resultado obtenido con el segundo miembro de la EDO, sin percatarse de que éste también depende de la función (trascripción B.2.4.TEZ, intervenciones [332,480]). Este hecho muestra indicios de que Zoraida y Alexis podrían estar pensando en la EDO como el resultado del procedimiento de derivación, tal y como muestra Raychadhuri (2008) en su investigación.

Referente al uso de la herramienta tecnológica, de la que esta pareja hace uso constante durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza, en la entrevista se observa que Zoraida sólo usa la Voyage 200 durante la resolución del problema 4, *Investigaciones policiales,* para realizar cálculos de operatoria básica (Imagen 5.4.4.21), dudando incluso de los resultados obtenidos cuando se le indica que hay algún error en la resolución de la actividad.

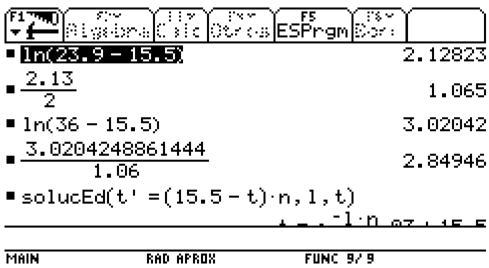


Imagen 5.4.4.21: Uso, por parte de Zoraida, de la Voyage 200 durante la entrevista

Finalmente, con ayuda de la profesora que la entrevista, utiliza la herramienta para resolver ecuaciones diferenciales y algebraicas, siéndole de gran ayuda este aspecto para comprobar las soluciones que había obtenido empleando lápiz y papel. Durante la entrevista Zoraida manifiesta, con respecto al uso de la calculadora que, *"siempre me quedo dudando a ver si el resultado está bien o mal"* aunque también reconoce que cuando utiliza la calculadora no comprueba los resultados que esta muestra, considerándolos directamente como válidos.

Alexis, por su parte, utiliza la Voyage 200 durante la entrevista, como herramienta para analizar la situación, formular conjeturas y comprobarlas (trascripción B.2.4.TEA, intervenciones [235,252]).

La siguiente frase de Zoraida, al preguntarle su opinión sobre la manera en que se desarrollaron las diez sesiones de clase dedicadas al Módulo de Enseñanza para la introducción del concepto de EDO refleja parcialmente la razón por la que ésta fue diseñada:

Z: Yo creo que, para un alumno siempre es bueno que se enfrente a los problemas él solo y que cuando ya necesite ayuda o que vea que no le sale, como se hacía en clase, que le ayuden, porque si lo hace el profesor, luego tú lo vas a hacer de memoria, no lo haces razonando. Básicamente en ese sentido si estuvo bien
I: Y... ¿algún sentido en que estuviera mal?

Z: Poco tiempo, lo de siempre, poco tiempo.

Trascripción B.2.4.TZ, intervenciones [757,761]

Finaliza esta sección con la tabla (tabla 5.4.4.23) correspondiente a Alexis y Zoraida, en la que se describen los aspectos conceptuales, procedimientos matemáticos, heurísticas y estrategias metacognitivas que han mostrado durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza y la entrevista.

	Comprensión conceptual	*Fluidez en los procedimientos*	*Heurísticas*	*Estrategias de control*
Alexis	Uso de la derivada para indicar dependencia del tiempo. Relaciona la función constante con situaciones de no variación. Utilizan una expresión algebraica de una función en la que aparezca una resta para indicar que una cantidad disminuye. Relaciona la derivada con el significado de variación. No identifica la expresión $\frac{p(t)}{10000}$ como una función.	Fluidez con la integración de funciones.	Relación con otras materias. Uso de las unidades de medida como referente. Uso de una regla de tres[58].	Comparación entre las respuestas a dos preguntas
Aspectos comunes	Dificultades para distinguir entre "cantidad de una sustancia" y "proporción en una disolución".	Fluidez con la derivación	Aplicar procedimientos. Dificultades con el proceso de representación.	Interacción entre los estudiantes.
Zoraida	La derivada como un símbolo. Relaciona aceleración con variación (de forma errónea). Relaciona proporcionalidad con igualdad (de forma errónea).	Poca fluidez con la integración de funciones.	Comparar respuestas. Comparación entre preguntas. Asociación entre palabras del enunciado y símbolos matemáticos.	Comparación entre preguntas.

Tabla 5.4.4.22: Elementos del aprendizaje mostrados por Nicanor y Mar durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza

[58] En una situación inapropiada.

6. Aportaciones, limitaciones y perspectivas de futuro

En este último capítulo se utilizan los fundamentos teóricos descritos en el Marco Conceptual y el análisis de los datos obtenidos de cada una de las fases de la investigación para dar respuesta a las cuatro preguntas de investigación. Se concluye la memoria con una valoración y reflexión finales acerca de la investigación y con el planteamiento de posibles líneas de investigación futuras.

Antes de comenzar a presentar las conclusiones de este trabajo, conviene recordar que esta investigación perseguía dos objetivos principales, por un lado analizar los conocimientos que emplea un grupo de estudiantes cuando resuelven actividades relacionadas con las EDO, después de haber recibido una enseñanza basada en el uso de métodos algebraicos, y detectar los elementos que influyen en la aparición de dificultades en su resolución. El segundo objetivo consiste en diseñar y desarrollar en el aula un Módulo de Enseñanza para introducir el concepto de EDO en un ambiente de Resolución de Problemas y analizar los aspectos del pensamiento matemático y los procesos relacionados con la disciplina que los estudiantes muestran durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza.

En relación con estos objetivos se plantearon cuatro preguntas de investigación:

***P*1:** ¿Cómo utilizan los estudiantes los conceptos matemáticos que han estudiado para resolver problemas en los que intervienen conceptos y significados relacionados con las EDO?
P2: ¿Cómo diseñar y desarrollar en el aula una ruta de enseñanza y aprendizaje basada en la Resolución de Problemas que promueva la construcción del concepto de EDO de forma integrada con el concepto de derivada?
P3: ¿Qué procesos cognitivos, heurísticas y estrategias de control se desarrollan haciendo uso de un modelo de enseñanza para las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias basado en la Resolución de Problemas?
P4: ¿Qué influencia han tenido las interacciones estudiante-estudiante, estudiante-profesor y estudiante-CAS tanto en el aprendizaje de las EDO como en la propia investigación?

En los capítulos 4 y 5 se analizaron los datos y se establecieron, de manera general, las conclusiones de la investigación, dando respuestas globales a las cuatro preguntas de investigación formuladas en el primer capítulo. El objetivo de este capítulo es sintetizar esos resultados y reflexionar sobre ellos y también sobre el Marco Conceptual y la Metodología empleadas en esta investigación. En la última sección se exponen las limitaciones del trabajo, que servirán de guía para el desarrollo de investigaciones futuras, y algunas consideraciones en torno a la continuación y proyección de la línea de investigación.

6.1 Conclusiones

La revisión de investigaciones en Educación Matemática en los niveles universitarios, conjuntamente con el análisis de investigaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria, constituyeron los elementos que permitieron delimitar el Problema de Investigación que se abordó en esta Memoria.

Las características de cada una de las fases de investigación recomiendan que las conclusiones sean presentadas por separado para cada una de ellas, sin olvidar que las conclusiones a la primera fase de la investigación influyeron tanto en el diseño como en el desarrollo de la segunda fase.

Conclusiones de la primera fase de la investigación

El análisis de los datos obtenidos en la primera fase de la investigación, unido con la revisión de las investigaciones existentes en el campo de la Educación Matemática relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las EDO, permitieron constatar que el enfoque de enseñanza habitual, en el que se introduce el concepto de EDO a partir de su definición formal y los métodos algebraicos de resolución, no favorece el desarrollo, por parte de los estudiantes, de heurísticas que permitan plantear y resolver problemas enunciados en un contexto diferente al que se les presenta como ejemplos de aula, en especial aquellos cuyo enunciado se plantea en un contexto hipotético, en el sentido que lo definen Barrera-Mora y Santos-Trigo (2002).

En particular se observó que la mayoría de los estudiantes mostraban dificultades para establecer relaciones entre el concepto de EDO y el de derivada de una función, produciéndose una discontinuidad en el aprendizaje de las matemáticas que impide la realización de actividades cuando no se recuerda el método específico para resolverlas (Camacho et al., 2009).

Muy pocos estudiantes utilizaron la relación que existe entre los conceptos de derivada de una función y EDO para reflexionar, analizar y resolver cuestiones que involucran ideas básicas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Por ejemplo, en la pregunta P7 del cuestionario C-ED, se pide determinar cuál es la población en un instante de tiempo determinado, sabiendo que su comportamiento responde a la ecuación $P' = k$, donde k es un valor constante positivo. Esta pregunta podría ser respondida fácilmente únicamente conociendo el significado de derivada de una función, sin embargo, la mayoría de los estudiantes fueron incapaces de responder correctamente. En la investigación realizada, la tercera parte de los estudiantes no respondió a ninguna de las preguntas de Tipo 4, planteadas en un contexto hipotético basado en una situación real, aún cuando el modelo matemático ya estaba propuesto de antemano.

Se ha constatado que la tendencia de los estudiantes es reducir el estudio de las EDO a la búsqueda de un algoritmo que resuelva tipos particulares de ecuaciones, limitando así sus posibilidades para abordar problemas contextualizados. Los resultados obtenidos en otras investigaciones (por ejemplo, Guerra-Cáceres, 2003; Habre, 2000; Rasmussen & Ruan, 2008; Rasmussen & Whitehead, 2003) concuerdan con los nuestros.

Por otra parte, se obtuvieron evidencias de que algunos de los estudiantes tenían dificultades para identificar diferentes significados asociados con el concepto de solución de una EDO. Por ejemplo, algunos alumnos optaron por derivar la expresión de una familia de funciones y comprobar si era solución de la ecuación cuando se les preguntaba acerca de la solución general de la ecuación (pregunta P4, anexo A.1).

A este respecto se observó también que los alumnos consideraban una única heurística para comprobar si una función es solución de una EDO (pregunta P3, anexo A.1): o resolver la ecuación y comparar la expresión obtenida con la función dada ó derivar la expresión de la función candidata a solución y sustituir en la ecuación, pero no consideraban las dos opciones. De hecho, algunos estudiantes manifestaron no recordar cómo aplicar la regla de la cadena para derivar una función implícita y, como consecuencia, no pudieron comprobar si una determinada función dada de forma implícita era o no solución de una EDO. Esto podría ser a causa de una falta de desarrollo de estrategias heurísticas de resolución y de análisis de la situación planteada desde diferentes perspectivas ó podría tratarse de una limitación de tipo conceptual, que los estudiantes únicamente asignen uno de los dos significados al concepto de solución de una EDO, tal y como ocurrió con algunos de los estudiantes con los que Raychadhuri (2008) realizó su investigación.

En lo relativo a los sistemas de representación empleados, en esta investigación se ha comprobado que, como muestran otros trabajos (por ejemplo Camacho, Depool & Santos-Trigo, 2009; González-Martín & Camacho, 2004), el uso de representaciones gráficas produce cierto rechazo entre los estudiantes, especialmente cuando está relacionado con un concepto relativamente nuevo para ellos, como es el caso del campo de direcciones asociado a una EDO. El análisis de los datos (capítulo 4) ha mostrado evidencias de que los estudiantes tienden a no utilizar representaciones gráficas para explorar significados y relaciones matemáticas y tienen dificultades para establecer relaciones entre distintos tipos de representaciones.

La representación gráfica del campo de direcciones es un proceso en el que se convierte una representación algebraica al sistema gráfico, en términos de significado. Además requiere de la interpretación de la derivada de una función en un punto como la pendiente de la recta tangente a dicha función en ese punto, lo que Thurston (1994) denomina “significado geométrico” de la derivada. De las respuestas de algunos de los estudiantes a las preguntas de Tipo 3 del cuestionario C-ED (anexo A.1) se desprende que tratan de recordar y utilizar un procedimiento algorítmico para representar el campo de direcciones asociado a una EDO y, al no recordarlo, muy pocos alumnos recurren al significado geométrico de la derivada de una función para resolver las actividades. Se concluye con esto que esta acción no puede limitarse a la codificación de un proceso puesto que hacerlo puede conducir a cometer errores cuando se resuelven cierto tipo de problemas. Se refuerza así la idea de que la enseñanza de algoritmos supone un aprendizaje que no perdura en el tiempo si este no se refuerza con los razonamientos que producen dicho algoritmo. Este aspecto ha sido destacado también por Kwon et al., (2006), que analiza en este artículo qué es lo que recordaban dos grupos de estudiantes sobre aspectos relacionados con las ecuaciones diferenciales que se les había enseñado un año antes. Sus resultados eran favorables al grupo de estudiantes cuya enseñanza no estaba basada en el aprendizaje memorístico de definiciones y procedimientos matemáticos. Como consecuencia de esto, creemos que es necesario que los estudiantes centren su atención en el comportamiento global de la función derivada y su relación con la función original, para conseguir un aprendizaje más completo del concepto.

En aquellos casos en los que los estudiantes, por un procedimiento erróneo, obtuvieron respuestas contradictorias utilizando los sistemas de representación gráfico y algebraico (por ejemplo en las preguntas P6 y P10 del cuestionario C-ED, anexo 1.1), siempre se inclinaron por considerar como válida la respuesta obtenida en el sistema algebraico, sin analizar las posibles causas de la incoherencia.

Los resultados de esta primera fase de investigación nos hacen considerar la necesidad de que se establezcan condiciones de aprendizaje en las que se ayude a los estudiantes a reflexionar y razonar acerca de los diferentes significados que están asociados a un concepto matemático particular, en nuestro caso la derivada, las relaciones entre ellos y cómo surgen nuevos conceptos a partir de él. En este sentido, es importante que los estudiantes tomen conciencia de los recursos que poseen y de que estos pueden ser utilizados en diferentes tipos de situaciones o problemas.

El hecho de introducir el concepto a través de distintos sistemas de representación, de alguna manera, no garantiza el éxito en el aprendizaje, tal y como muestran Rasmussen y Kwon (2007, p. 191) quienes señalan que, en un estudio de casos de una clase de ecuaciones diferenciales, "los estudiantes estaban aprendiendo métodos analíticos, gráficos y numéricos de forma compartimentalizada" y, como consecuencia, no establecían conexiones entre los significados y las propiedades matemáticas asociadas con cada uno de los enfoques.

Los resultados que se acaban de presentar permiten pensar en la conveniencia de reestructurar un primer curso de matemáticas en la universidad, en el que la introducción a las ecuaciones diferenciales se presente a partir de su relación con el concepto de derivada de una función, en lugar de utilizar la definición formal como punto de partida para la construcción del concepto de EDO. Así, revisando, extendiendo y articulando los distintos significados asociados con el concepto de derivada, los estudiantes pueden analizar e incluso resolver ecuaciones sencillas. De forma similar, la interpretación de la derivada como pendiente de la recta tangente puede ayudar a los estudiantes a representar el campo de direcciones asociado a una EDO particular o a analizar el comportamiento de sus soluciones sin necesidad de obtener su expresión algebraica. Es decir, cuando se presente el concepto de derivada, los estudiantes pueden discutir ciertos tipos de EDO en términos del significado del concepto de derivada, sin centrarse en la búsqueda y el uso de algoritmos particulares de resolución.

Todas estas consideraciones motivaron la segunda fase de la investigación, cuyo primer objetivo era el de diseñar un Módulo de Enseñanza para introducir el concepto de EDO en el primer curso de la licenciatura en Química.

Conclusiones de la segunda fase de la investigación

Para acercarnos a una respuesta a la segunda pregunta de investigación sobre cómo diseñar y desarrollar en el aula una ruta de enseñanza y aprendizaje, basada en la Resolución de Problemas, que promueva la construcción del concepto de EDO de forma integrada con el concepto de derivada de una función, se utilizó el proceso de "bricolaje" (Gravemeijer, 1998), tomando elementos de diferentes teorías sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y conectándolos de manera que conforman la parte del Marco Conceptual de esta investigación correspondiente al diseño del Módulo de Enseñanza.

Por supuesto, la respuesta a esta pregunta no es única y el propio proceso de "bricolaje" la hace depender de la visión que el investigador o el equipo de investigación tenga de las matemáticas y de cómo favorecer su aprendizaje. El resultado final, en lo que al diseño del modelo de enseñanza se refiere, dependerá de las teorías de enseñanza que el investigador haya considerado, de los elementos de las mismas que haya seleccionado y de la manera en que los haya conjugado.

La elección hecha en el caso particular de esta investigación, descrita en detalle en el Marco Conceptual, parte de la idea de que el proceso de enseñanza debe promover que se desarrollen cinco componentes principales (*comprensión conceptual*, *fluidez en los procedimientos*, *competencia estratégica*, un *razonamiento flexible* y una *predisposición productiva hacia la materia*), de manera interrelacionada, de forma que los estudiantes conecten distintas piezas del conocimiento (Kilpatrick et al., 2009). Se opta por la Resolución de Problemas como escenario para el aprendizaje porque favorece que el estudiante desarrolle los componentes de la comprensión matemática (NCTM, 2009). Los problemas propuestos a los estudiantes fueron enunciados en un contexto hipotético [59] relacionado con la formación académica de los alumnos, considerando así una de las premisas que establece Gravemeijer (1994), que las actividades de aprendizaje se planteen en un contexto que resulte real para el estudiante. Otros elementos considerados para formar parte del ambiente en que se desarrolla el aprendizaje son el uso de tecnología, en particular la calculadora simbólica Voyage™200, puesto que su uso permite que los estudiantes centren su atención en los procesos de reflexión, razonamiento y resolución de problemas (Santos, 2007) y puede mejorar la construcción y evolución de las rutas de aprendizaje de los estudiantes (Sacristán et al., 2010), y la modificación del papel del profesor y el alumno en el proceso de aprendizaje, dando un mayor protagonismo a este último y haciéndole responsable de su propio aprendizaje, puesto que la interacción que se produce entre los diferentes elementos que participan en el proceso de aprendizaje influye en el resultado del mismo (Nickerson & Bowers, 2008).

La tercera pregunta de investigación nos llevó a proponernos como objetivo analizar los procesos cognitivos, las heurísticas y estrategias de control que los estudiantes mostraban en el proceso de resolución de los tres problemas que conforman el Módulo de Enseñanza.

Para dar respuesta a esta cuestión se realizaron tres análisis de la información recopilada en la parte experimental de esta segunda fase: el primero de ellos se centró, en exclusiva, en el análisis de las respuestas de los quince estudiantes que participaron en la implementación del Módulo de Enseñanza, al cuestionario de la derivada (C-D). En el segundo análisis (análisis global) se examinó, de manera general, la evolución del proceso de resolución del Módulo de Enseñanza de todos los participantes, agrupados en seis parejas y un trío. El tercer y último análisis (análisis local) consistió en un

[59] Barrera-Mora y Santos-Trigo (2002) definen este tipo de contextos como aquellos que describen una situación construida a partir de una serie de suposiciones acerca del comportamiento de las variables, sin corresponderse exactamente con datos o información real.

estudio detallado de las trayectorias o rutas de aprendizaje de cuatro de las parejas de estudiantes.

El análisis de las respuestas al cuestionario de la derivada sirvió para establecer parte del catálogo de recursos de que disponían los estudiantes para enfrentarse a las nuevas situaciones que se les plantearían. En este análisis se identificaron cuatro perfiles de estudiantes, en relación con la variedad de significados que asociaban al concepto de derivada y la fluidez que mostraron con el uso del procedimiento de derivación.

El análisis global del Módulo de Enseñanza mostró los aspectos conceptuales que se observaron en cada una de las actividades propuestas, lo que podrá servir como referente para el diseño de futuras propuestas de enseñanza; mientras que el análisis local refleja aspectos del pensamiento matemático de los estudiantes, resultando útil para investigaciones relacionadas con los procesos de pensamiento y razonamiento. Tanto en el análisis global (sección 5.3) como en el análisis local (sección 5.4) se ha recurrido al uso de tablas para presentar la información de manera sintetizada. Las conclusiones relativas a la comprensión conceptual mostrada por los estudiantes se extraen de esas tablas, completando así el proceso de análisis de datos de las metodologías de tipo cualitativo (sección 3.1).

Pasamos a continuación a presentar las conclusiones derivadas del análisis de las cuatro parejas seleccionadas para profundizar en las respuestas que da este estudio a la pregunta 3 de investigación.

En lo que al desarrollo de la comprensión conceptual se refiere, la red de significados asociados al concepto de derivada se vio ampliada y fortalecida a medida que los estudiantes fueron avanzando en los problemas del Módulo de Enseñanza. La introducción del concepto de EDO a partir de su relación con la derivada de una función establece un puente entre los dos conceptos, y, además de contribuir en la construcción de un concepto matemático nuevo, fortalece conceptos que ya se encontraban en la cognición de los estudiantes. En este caso particular se vieron fortalecidos los usos de la derivada como velocidad de variación, como indicativo de la monotonía de funciones y sus correspondientes significados en un contexto real, aumento y disminución. La imagen de la derivada como un conjunto de algoritmos que se aplican para obtener una expresión algebraica se transforma en la de un concepto matemático que aporta información, pasando así de ser el resultado de un proceso a formar parte del conjunto de recursos para resolver situaciones planteadas en cualquier contexto.

Además de la relación entre los conceptos de derivada de una función y de EDO, algunos estudiantes también establecieron conexiones entre la resolución de un problema de valores iniciales y el valor numérico de una función. Mientras que varios de los estudiantes que participaron en la primera fase de investigación no resolvieron el problema de valores iniciales planteado en la pregunta P10 del cuestionario C-ED (anexo A.1), algunos alumnos de los que participaron en la segunda fase de la investigación, donde el proceso de enseñanza se desarrolla en un ambiente de resolución de problemas, resuelven problemas de este tipo utilizando conocimientos adquiridos con anterioridad, como es el caso del valor numérico de una función.

En lo relativo al concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria, de manera análoga a lo que ocurrió en la investigación realizada por Raychadhuri (2008), algunos estudiantes consideran la ecuación como el resultado del proceso de derivación y por tanto, para comprobar si una función es solución de la ecuación, lo que hacen es derivar la función y comparar la expresión obtenida con el segundo miembro de la EDO, aunque no se trate de una ecuación autónoma. Aunque, a priori, podría pensarse que este hecho puede estar relacionado con la visión que estos estudiantes tengan del concepto de ecuación algebraica, Raychadhuri (2008) muestra que no necesariamente es así. Esta discontinuidad en el aprendizaje de las matemáticas, entre las ecuaciones algebraicas y las ecuaciones diferenciales, podría ser el punto de partida de una investigación que complemente la que aquí se presenta, en la que el concepto de EDO se introduzca a partir del concepto de ecuación algebraica.

El Módulo de Enseñanza contribuyó a la visión de las matemáticas como un conjunto de elementos integrados, lo que responde a una concepción de las matemáticas en la que la Resolución de Problemas juega un papel fundamental. Aunque el objetivo del Módulo de Enseñanza era introducir el concepto de EDO a la vez que se fortalecía el de derivada de una función, no fueron estos los únicos conceptos matemáticos que se utilizaron en la resolución de los problemas del Módulo. Los estudiantes tuvieron que utilizar, por ejemplo, los conceptos de variable (dependiente e independiente), función o límite de una función. Esta circunstancia permitió, además, detectar algunas inconsistencias en la comprensión de los estudiantes. Por ejemplo, algunos alumnos utilizan el concepto de función para expresar dependencia del tiempo pero no consideran las funciones constantes para representar situaciones en las que la variación es nula. Las funciones constantes pueden ser fuente de errores en el tratamiento de las EDO como muestran Rasmussen (2001) y Zandieh y McDonald (1999), aspecto que también hay que tener en cuenta en la formulación de nuevas propuestas metodológicas.

Dos de los problemas utilizados en el Módulo de Enseñanza se diseñaron considerando las cinco etapas de resolución propuestas por Barrera-Mora y Santos-Trigo (2002): comprensión y análisis de la situación, solución de casos particulares, planteamiento y solución de casos generales y análisis retrospectivo. Esta decisión estuvo motivada, en parte, por el desarrollo que los estudiantes mostraron al resolver el primer problema del Módulo de Enseñanza, donde se pudo observar la necesidad de plantear cuestiones a los alumnos que les hicieran reflexionar acerca del proceso de resolución.

Los procesos cognitivos que los estudiantes mostraron con mayor frecuencia durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza fueron la representación, reflexión, abstracción y generalización, este último promovido por la presencia explícita, en el diseño de los problemas, de una etapa de resolución dedicada a este proceso (etapa 4).

Determinadas preguntas de las formuladas a lo largo de las diferentes actividades promovieron el proceso de reflexión de algunos alumnos a la hora de responder. La comparación entre las respuestas de los estudiantes a preguntas planteadas de diferente manera, nos ha permitido concluir que, para promover la reflexión, las preguntas deben estar formuladas de manera que no pidan una respuesta directa. Aunque la conclusión general en este aspecto sería que la forma de redactar las actividades y las preguntas que se formulen condicionan tanto las respuestas de los alumnos como su actitud frente a ellas. Si las preguntas son directas puede ocurrir que los estudiantes no piensen la respuesta. Proponiendo preguntas como *"¿Puede ocurrir que...?"*, *"¿Se te ocurre otra posibilidad...?"* se puede hacer que los alumnos que tienen tendencia a responder rápidamente, se detengan a reflexionar sobre la situación a la que se están enfrentando.

El diseño de las actividades propuestas obligó a los estudiantes a plantearse, en el momento que trataron de resolverlas, los conocimientos matemáticos que realmente tienen y aquellos que deberían tener. De este modo, salieron a relucir algunos aspectos cognitivos que no habían asimilado y que consiguieron robustecer a raíz del trabajo en este tipo de problemas. Estos aspectos cognitivos engloban tanto conocimientos matemáticos como heurísticas de resolución de problemas y aspectos metacognitivos.

Diferentes actividades de las que se incluyen en cada uno de los tres problemas que conforman el Módulo de Enseñanza hacen explícitos los procesos de representación e interpretación de la información dada en un contexto no matemático y aquella que se presenta en el lenguaje matemático. Estos procesos, en otros modelos de enseñanza, se entienden como elementos que no requieren ser enseñados, sino que son producidos de forma autónoma por los alumnos. El análisis de datos de la primera fase de investigación (capítulo 4) permitió observar que los estudiantes tienen dificultades a la hora de ejecutar este proceso de paso de un modelo real al contexto matemático y viceversa, siendo esta una acción que no se genera de forma espontánea. El análisis de las producciones de los estudiantes que participaron en la implementación del Módulo de Enseñanza muestra que es un proceso al que se debe prestar más atención, desde el punto de vista de la enseñanza y, como no, de la investigación en Educación Matemática.

En cuanto a las heurísticas utilizadas por los estudiantes durante el desarrollo del Módulo de Enseñanza, se pudo observar que determinadas preguntas que conformaban las actividades, llevaron a los estudiantes a considerar y analizar casos particulares, heurística que por sí solos no hubieran empleado. También se puede concluir del análisis, que la estructura de las actividades llevó a los estudiantes a preocuparse por la veracidad de sus respuestas, a formular conjeturas y, en menor medida, comprobarlas. Por otra parte, el desarrollo por parte de los estudiantes, sobre todo en la etapa 4 de las actividades, muestra que el diseño de las mismas promueve la búsqueda de patrones.

Se ha podido observar, derivado del análisis realizado, que otras de las estrategias utilizadas por los estudiantes cuando no se les ocurría la respuesta fue la de comparar con otras preguntas o actividades del problema que estaban trabajando, posiblemente buscando algún indicio sobre lo que se esperaba que respondieran. De manera similar utilizaron algunos estudiantes las unidades de medida de las cantidades que se consideraban, sobre todo en el problema 2 del Módulo de Enseñanza, *Contaminación de mercurio.* En algunos casos, el hecho de analizar las unidades de medida ayudó a encontrar las operaciones necesarias en determinadas situaciones y, en otros casos, sirvió como referente para comprobar que se había seguido el procedimiento adecuado.

En la tercera etapa (solución de casos particulares) del último problema del Módulo de Enseñanza, *Dinámica de poblaciones*, se observó que no basta con conocer los conceptos matemáticos para poder utilizarlos en la resolución de problemas, sino que es necesario adquirir una serie de habilidades en cuanto a estrategias de resolución que permitan establecer en cada momento cómo utilizar dichos conceptos. Schoenfeld (1992) se refiere a los aspectos metacognitivos de control. Esta situación evidencia de alguna manera que todos los grupos de estudiantes reconocen la relación existente entre el signo de $p'(t)$ y que la cantidad de peces, $p(t)$, aumente, disminuya o se mantenga constante. Sin embargo, sólo una pareja utiliza, de forma autónoma, la heurística apropiada para obtener los valores de *p* para los que se tengan cada una de las situaciones descritas. El profesor de la materia intervino ante todo el grupo, para solventar esta dificultad.

En relación con la última pregunta de investigación, sobre la influencia, en el aprendizaje y en la propia investigación, de las diferentes interacciones que se produjeron (estudiante-estudiante, estudiante-profesor y estudiante-tecnología), conviene considerar que el contrato didáctico que tradicionalmente se establece entre el profesor y los estudiantes (en el que el primero desempeña el papel de erudito en la materia), provoca en algunas ocasiones que los estudiantes acepten soluciones, procedimientos o argumentos que provengan del profesor, sin discutirlos, aún sin compartirlos. El hecho de que los estudiantes hayan trabajado en parejas y que estas hayan sido constituidas por ellos mismos ha creado un ambiente de trabajo "entre iguales" y de más confianza, haciendo que los alumnos mostraran sus razonamientos sin temor a equivocarse y fueran críticos con los razonamientos y respuestas de sus parejas. De esta forma, el modelo de interacción de los estudiantes entre ellos y con los profesores contribuyó a crear un ambiente crítico, además de favorecer la recopilación de datos acerca de la comprensión conceptual de los estudiantes, puesto que en el diálogo afloraban sus conocimientos de la materia.

Además es importante señalar el hecho de que en el desarrollo del Módulo de Enseñanza se haya permitido el avance de los estudiantes en la resolución de las actividades sin que la figura del profesor represente a alguien que presenta los contenidos y las respuestas correctas. Esto hizo que afloraran comportamientos importantes para el desarrollo del aprendizaje. Muchos alumnos no cuestionan las respuestas o los razonamientos dados por el profesor, aunque estos no coincidan con los suyos propios. Al trabajar con otro estudiante, los alumnos se sienten libres para expresar sus razonamientos, sin temor a equivocarse y cuestionan las respuestas de sus compañeros. Esto provocó, durante la investigación, situaciones de aprendizaje enriquecedoras puesto que cada alumno se enfrenta a sus propios conocimientos y los compara con los de un homólogo.

También es importante destacar que se tuvo especial atención en que los grupos formados para trabajar en la resolución de los tres problemas planteados en el Módulo de Enseñanza contaran con estudiantes con características cognitivas diferentes. En algunos casos las diferencias se referían a aspectos conceptuales, como la red de significados asociados al concepto de derivada, en otros casos uno de los miembros de la pareja mostraba mayor tendencia hacia la consideración de distintas heurísticas que su compañero o compañera. En cualquiera de los casos, los conocimientos de cada uno de los miembros de cada pareja pasaron a formar parte del conjunto de recursos utilizados por la pareja para resolver los problemas propuestos. En este sentido, la dinámica de aula seguida contribuyó a que los estudiantes compartieran y contrastaran sus conocimientos. La grabación, trascripción y posterior análisis del trabajo de cada uno de los grupos seleccionados durante las diez sesiones que se dedicaron al Módulo de Enseñanza, fue fundamental para este análisis y establecimiento de resultados.

En referencia al uso de la tecnología se puede decir que, en algunos casos, el uso de la calculadora Voyage 200 contribuyó a que los estudiantes recordaran procedimientos olvidados como, por ejemplo, el cálculo de integrales. La tecnología funcionó, en estos casos, como activador de conocimientos latentes.

Con el fin de que los estudiantes no se restringieran al uso de la calculadora, aceptando los resultados que esta muestra sin discutirlos, se simultanearon con estas actividades otras que no podían ser resueltas empleando la herramienta tecnológica. De esta forma se provocó que el estudiante sintiera la necesidad de recurrir al conjunto de sus conocimientos y ser consciente de que no todas las situaciones pueden ser resueltas empleando tecnología, o que no siempre resulta más sencillo emplear una herramienta tecnológica en lugar de realizar los cálculos o procedimientos empleando lápiz y papel.

La calculadora Voyage 200 se ha revelado como una herramienta útil en el proceso de aprendizaje, permitiendo que los estudiantes formulen conjeturas y las prueben y haciendo surgir argumentos o justificaciones matemáticas durante el proceso de resolución de problemas.

Sin haber hecho un análisis exhaustivo del comportamiento de cada uno de los estudiantes con respecto a la Voyage 200, las rutas de aprendizaje descritas en el análisis local permiten formular la hipótesis de que, entre los ocho estudiantes cuyas trayectorias se analizaron, se pueden distinguir tres perfiles de actuación con respecto a la calculadora. Algunos estudiantes utilizan la Voyage 200 para realizar absolutamente todos los cálculos (por ejemplo Alexis), lo que, en términos de la Teoría de la Instrumentación, vendría a decir que estos alumnos consideran la calculadora como un artefacto. En el lado opuesto se encontrarían aquellas personas que no se sienten cómodas con el uso de la calculadora y prefieren realizar sus cálculos con lápiz y papel (por ejemplo Milagros), considerando la herramienta como un instrumento. Finalmente estarían aquellos estudiantes que, en algunas ocasiones hacen uso de la herramienta tecnológica y en otros no.

En términos generales se puede decir que en cuanto al desarrollo general del Módulo de Enseñanza, de la misma manera que los alumnos pasan por un proceso de asimilación del uso de la tecnología cuando ésta se introduce por primera vez en el aula, también requieren de un tiempo prudencial para adaptarse a nuevos modelos de enseñanza y desterrar o modificar algunas creencias acerca de las matemáticas. En este sentido se observó que algunas parejas, al comienzo del desarrollo del Módulo de Enseñanza, buscaban con ahínco respuestas rápidas a las cuestiones planteadas. Los estudiantes tienen la creencia de que la resolución de un problema matemático no puede llevar mucho tiempo y que si no se encuentra una solución rápidamente es porque el problema está mal planteado o porque no se dispone de los conocimientos suficientes. En cualquiera de los dos casos, se debe acudir al profesor para que resuelva la situación. Schoenfeld (1992) señala que esta situación es consecuencia de una dinámica de aula en la que el papel del profesor es el de emisor de una serie de contenidos y procesos acabados e indiscutibles y el rol del estudiante es el de receptor pasivo que espera dominar esos conceptos y procedimientos en algún momento. Se pudo observar también que los alumnos, al comienzo del Módulo de Enseñanza, se centraron en la búsqueda de expresiones algebraicas, tal vez debido a estas ideas. La Metodología basada en la Resolución de Problemas trata de romper con esa creencia de los estudiantes y, a medida que fueron avanzando las sesiones de clase, se observó que los estudiantes mostraban menos dependencia de la figura del profesor y reflexionaban más sobre las cuestiones que se les planteaban antes de responder.

Algunos estudiantes no participaron de una forma activa en la resolución de las actividades lo que provocó que no llegaran a formarse una idea global y general de la actividad que habían resuelto. Sus acciones se limitaron a ir contestando a las cuestiones que se les planteaban, en ningún momento tuvieron una visión conjunta del problema, su resolución y generalización. Algunos de ellos ni siquiera llegaron a concluir las actividades propuestas, aún cuando se les dio un tiempo para hacerlas, después de finalizada la experiencia.

Se puede concluir también que las actividades propuestas en el Módulo de Enseñanza contribuyeron a que los estudiantes distinguieran el tipo de argumento que pueden emplear a la hora de responder a actividades que relacionan el contexto matemático con otros contextos. Rasmussen y Ruan (2008) nos muestran en su trabajo que algunas de las dificultades que tienen los estudiantes al trabajar en problemas enunciados en otros contextos es que utilizan argumentos empíricos para justificar sus respuestas. En esta investigación también nos encontramos con esta situación: Alexis y Silvia utilizan los significados de "$u(t)$" y "t", cantidad de uranio y tiempo, respectivamente, para señalar que no tiene sentido que las dos expresiones coincidan (en el caso de Alexis) ni restarlas (en el caso de Silvia). Argumentos de este tipo tienden a desaparecer a medida que los estudiantes avanzan en la resolución de las actividades del Módulo de Enseñanza.

Otra conclusión que se puede extraer de la investigación es que la enseñanza basada en la resolución de problemas, unido con el trabajo de los estudiantes en grupo y el cambio en el rol del profesor, han provocado que el propio alumno se enfrente a sus dificultades, haciéndolos más visibles a los ojos del profesor y/o del investigador en el campo de la Educación Matemática. Para Schoenfeld (1992), existen cinco aspectos que debemos tener en cuenta a la hora de diseñar una propuesta metodológica y analizar el conocimiento de los estudiantes: el conocimiento base, las estrategias de resolución de problemas, el control y seguimiento de las respuestas, las creencias y la práctica educativa en la que se ha visto inmerso el alumno. Una de las dificultades que presenta la investigación en el campo de la Educación Matemática, en los niveles universitarios, es el tamaño del conjunto de conocimientos que tienen los estudiantes con los que se realiza la investigación ya que estos pueden ser correctos o erróneos, pero son los que van a utilizar en la propuesta que nosotros planteemos. El resultado que las otras cuatro componentes puedan tener en el aprendizaje de los estudiantes, dependen fuertemente de que estén basadas en conocimientos correctos, pues, en caso contrario, puede contribuir al crecimiento de ese conjunto de concepciones erróneas. En este sentido, es fundamental detectar cuánto antes esos errores de los estudiantes e intentar enmendarlos construyendo un aprendizaje significativo, lejos de lo memorístico.

Ha quedado manifiesto también que la forma en que los profesores e investigadores conciben las actividades cuando las están diseñando para su uso en el aula no tiene que coincidir con lo que los estudiantes interpretan cuando están resolviendo dichas actividades. Es necesario establecer un proceso de evaluación de las actividades diseñadas y/o utilizadas en el proceso de enseñanza de conceptos matemáticos con el fin de conseguir llegar a un punto de máxima conexión entre lo planteado por la actividad y lo que se persigue obtener con su resolución. Resultan útiles los constructos Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje (Simon, 1995) y rutas o trayectorias de aprendizaje (Sacristán et al., 2010). Las THA ayudan a proponer distintas vías de acercamiento hacia la comprensión de los conceptos matemáticos que pueden construirse a partir del análisis de las trayectorias o rutas de aprendizaje mostradas por los estudiantes al participar en un modelo de enseñanza concreto (Simon & Tzur, 2004), formándose así un proceso cíclico de diseño, implementación y análisis de distintos modelos de enseñanza (Drijvers, 2003).

En relación con la investigación que se presenta en esta memoria, la descripción y análisis de las rutas de aprendizaje seguidas por los estudiantes, constituyeron un elemento esencial para el estudio sobre la comprensión del concepto de EDO.

6.2 Limitaciones y perspectivas de futuro.

Algunas de las limitaciones de este trabajo están relacionadas con aspectos institucionales. El plan de estudios de la licenciatura en Química da al concepto de EDO un peso relativo pequeño, en comparación con otras disciplinas como la Física y las Matemáticas. Esto hizo que se tuviera que adaptar el Módulo de Enseñanza de las EDO a un total de diez sesiones de clase, lo que resultó ser insuficiente para promover en los estudiantes el desarrollo de procesos cognitivos y heurísticas nuevas. Por esta razón el trabajo se vio limitado al análisis de los aspectos de la comprensión que afloraban durante el proceso de resolución de los problemas de un Módulo de Enseñanza en el que se trabajaron únicamente con dos tipos de EDO de primer orden (variables separables y lineales).

Otra limitación causada por el escaso tiempo disponible es el efecto que el nuevo modelo de enseñanza provoca en la *predisposición productiva* de los estudiantes, quinto de los elementos que Kilpatrick et al. (2009) consideran que hay que desarrollar para tener éxito en el aprendizaje de las matemáticas. Resulta prácticamente imposible modificar las creencias de los estudiantes acerca de las matemáticas en un espacio de tiempo tan corto, máxime cuando llevan muchos años estudiando la disciplina en un ambiente diferente. Esta fue una de las razones por las que, en esta investigación, no se analizaron los aspectos relacionadas con esta competencia.

Por último, se considera un aspecto que es a la vez una limitación de la investigación que se presenta en esta Memoria pero que también es una perspectiva de futuro a corto plazo. En la segunda fase de la investigación se realizó un análisis del desarrollo del Módulo de Enseñanza por parte de todo el grupo de estudiantes (análisis global); ese análisis se concretó un poco más al describir las rutas de aprendizaje de cuatro de las parejas de estudiantes (análisis local). El trabajo tomaría una dimensión aún mayor si se hiciera un último nivel de concreción, analizando la competencia matemática de cada uno de los ocho estudiantes cuyas rutas se describieron en el análisis local. De esta forma tendríamos la información de cada individuo con respecto al grupo, a la pareja y de manera individual. Para conseguir ese nivel de concreción es necesario analizar las grabaciones de las sesiones de clase y las entrevistas desde otra perspectiva, más centrada aún en cada estudiante.

De manera similar, podemos pensar en una limitación y a la vez perspectiva de futuro relacionada con el uso de la tecnología. El Problema de Investigación planteado considera el uso de la tecnología como una herramienta para favorecer la Resolución de Problemas y, en ese sentido se ha utilizado la calculadora simbólica Voyage 200 en el diseño del Módulo de Enseñanza. Ahora bien, los resultados de la investigación nos han permitido observar que los estudiantes presentan características interesantes desde el punto de vista de la Teoría de la Instrumentación. Como perspectiva de futuro se plantea la realización de un análisis detallado y centrado en el uso que hacen los estudiantes de la Voyage 200 y comprobar si los perfiles que se dijeron anteriormente que se intuían se hacen efectivos y si no es así, qué tipologías de actuación con respecto a la herramienta tecnológica nos podemos encontrar.

Por otra parte, esta investigación muestra el desarrollo de un grupo particular de estudiantes de un Módulo de Enseñanza concreto diseñado para la introducción del concepto de EDO en los primeros cursos universitarios. Los resultados mostrados podrían verse enriquecidos implementando dicho Módulo, o una adaptación del mismo, con estudiantes de otras titulaciones, lo que nos daría una visión más completa y general del funcionamiento del Módulo de Enseñanza.

En relación con las perspectivas de futuro, podemos decir que la adaptación de la investigación a un curso exclusivo de Ecuaciones Diferenciales permitiría trabajar con modelos asociados a otro tipo de ecuaciones y realizar un análisis de cada uno de los problemas, planteados desde diferentes perspectivas (numérica, algebraica y gráfica). Además daría la posibilidad de analizar en qué medida este tipo de actividades promueve el desarrollo de una predisposición productiva de los estudiantes hacia las matemáticas.

Los contenidos matemáticos que se contemplan en el Módulo de Enseñanza hacen viable la posibilidad de tratar de implementarlo en otro punto del currículo, por ejemplo en el momento en que se estudia en profundidad la derivación e integración de funciones de una variable. De esta manera las relaciones entre estos significados matemáticos podrían verse más potenciadas y el desarrollo de procesos cognitivos, heurísticas y estrategias metacognitivas propias de la Resolución de Problemas se trataría con más profundidad.

Por otra parte, la integración del Módulo de Enseñanza en un proyecto mayor que contemple todos o gran parte de los contenidos de las asignaturas de matemáticas en los niveles universitarios podría promover que los estudiantes se habituaran más rápidamente a una dinámica de aula en la que ellos sean los protagonistas y responsables de su propio aprendizaje, ambiente que favorece el desarrollo de habilidades y capacidades como la de reflexionar, explicar, abstraer o generalizar, fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y contribuye a considerar las matemáticas como algo práctico, útil y también accesible (Kilpatrick et al., 2009).

El análisis realizado en esta investigación sirve de referente para el diseño futuro de trayectorias hipotéticas de aprendizaje del concepto de EDO en los primeros cursos universitarios, diseño que se vería enriquecido con los resultados de una futura investigación como la que se acaba de señalar, pero también con el análisis crítico de otras propuestas de enseñanza para la introducción del concepto de EDO existentes.

Referencias

Álvarez-Méndez, J. M. (1986). Investigación cuantitativa / investigación cualitativa: ¿una falsa disyuntiva? En Morata (Eds.) *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa*. Madrid. 5ª edición (2005).

Artigue, M. (1987). Ingenierie didactique a propos d'equations differentielles. En J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.). *Proceedings of the eleventh international conference of Psychology of Mathematics Education,* 236-242, Montreal.

Artigue, M. (1992). Functions from an algebraic and graphic point of view: cognitive difficulties and teaching practices. En G. Harel & E. Dubinsky (Eds.). *The concept of function. Cognitive dificulties and teaching practices. Aspects of epistemology and pedagogy,* 109-132, MAA Notes 25, USA.

Artigue, M. (2001). What Can we Learn from Educational Research at the University Level? In D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*. *An ICMI Study*. Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Artigue, M., Batanero, C. & Kent, P. (2007). Mathematics thinking and learning at post-secondary level. En F. K. Lester (Eds.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 1011-1049). USA: NCTM.

Artigue, M., Cerulli, M., Haspekian, M. & Maracci, M. (2009). Connecting and Integrating Theoretical Frames: The TELMA Contribution. *International Journal of Computers for Mathematics Learning,* 14, 217-240.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *CBMS Issues in Mathematics Education,* 6, 1-32.

Azcárate, C. (1992). Estudio de los esquemas conceptuales y de los perfiles de unos alumnos de 2º de BUP en relación con el concepto de pendiente de una recta. *Epsilón,* 24, 9-22.

Azcárate, C. & Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana,* 10 (2), 135-149.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'espirit scientifique.* París : J. Vrin.

Badillo, E. (2004). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia.* (Tesis Doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Barrera-Mora, F. & Santos-Trigo, M. (2002). Cualidades y procesos matemáticos importantes en la resolución de problemas: un caso hipotético de suministro de medicamento. *Matemáticas Aplicadas y su Enseñanza. Serie Bachillerato,* 2, 8-37.

Bishop, A. (2000). Clarificando la complejidad. En *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp.7-8). Barcelona: GRAÓ.

Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en matemáticas aplicadas en Ciencias Sociales.* (Tesis Doctoral). Universidad de Valladolid, España.

Boigues Planes, F. J. (2010). *El desarrollo de un esquema sobre la integral definida en universitarios de ingeniería y medio ambiente.* (Tesis Doctoral). Universidad de Alicante, España.

Brodetsky, S. (1919). The graphical treatment of differential equations (I). *The Mathematical Gazette*, 9 (octubre), 377-382, Ed. Greenstreet, W. J.

Brodetsky, S. (1920a). The graphical treatment of differential equations (II). *The Mathematical Gazette*, 10 (enero), 3-8, Ed. Greenstreet, W. J.

Brodetsky, S. (1920b). The graphical treatment of differential equations (III). *The Mathematical Gazette*, 10 (marzo), 35-38, Ed. Greenstreet, W. J.

Brodetsky, S. (1920c). The graphical treatment of differential equations (IV). *The Mathematical Gazette*, 10 (mayo), 49-59, Ed. Greenstreet, W. J.

Brousseau, G. (1998). *Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques, 1970-1990* (editado y traducido por N. Balacheff, M. Cooper, R Sutherland, and V. Warfield). Dordrecht: Dluwer.

Camacho, M., Depool, R. & Santos-Trigo, M. (2010). Students' use of DERIVE software in comprehending and making sense of definite integral and area concepts. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 16, 35-67.

Camacho, M. & Perdomo, J. (2005a) La comprensión de las ecuaciones diferenciales ordinarias en estudiantes de primeros cursos universitarios: Un estudio preliminar. *XII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas,* pp. 879-884. Albacete, España: FESPM.

Camacho, M. & Perdomo, J. (2005b). Análisis de las respuestas de estudiantes universitarios a un cuestionario sobre el concepto de ecuación diferencial ordinaria. In M. Socas; M. Camacho; A. Morales & A. Noda (Eds.). *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática* 7, 127-140.

Camacho, M., Perdomo, J. & Santos-Trigo, M. (2007). La resolución de problemas en los que interviene el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria: Un estudio exploratorio. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo & M. T. González (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM*, pp. 87-106. Tenerife.

Camacho, M., Perdomo, J. & Santos-Trigo, M. (2009). Revisiting university students' knowledge that involves basic differential equation questions. In O. Figueras & A. Sepúlveda (Eds.). *PNA* 3(3), 123-133.

Camacho-Machín, M., Perdomo-Díaz, J. & Santos-Trigo, M. (2010). An Exploration of Students´ Conceptual Knowledge Built in a First Ordinary Differential Equation Course. (Pendiente de aceptación en el *Journal of Mathematical Behavior*).

Clements, D. & Sarama, J. (2004). Learning Trajectories in Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning,* 6(2), 81-89.

Cobo, P. & Fortuny, J. (2000). Social Interactions and Cognitive Effects in Contexts of Area-Comparison Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics*, 42, pp. 115-140.

Depool, R. (2004). *La enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral en un entorno computacional. Actitudes de los estudiantes hacia el uso de un Programa de Cálculo Simbólico (PCS).* (Tesis Doctoral). Universidad de La Laguna, España.

Donovan, J. E. II. (2004). A first-order differential equations schema. In D. E. McDougall and J. A. Ross (Eds.) *Proceedings of the 26th annual meeting of the*

North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1, 111-118. Toronto, Canadá.

Drijvers, P.H.M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter.* Tesis doctoral. Universidad de Utrecht.

Drijvers, P., Kieran, C., Marioti, M., Ainley, J., Andresen, M., Cheung, Y., Dana-Picard, T., Gueudet, G., Kidron, I., Leung, A. & Meagher, M. (2010). Integrating Technology into Mathematics Education: Theoretical Perspectives. En C. Hoyles and J. B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*, pp. 89-132.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la penseé. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM de Strasbourg 37-65.

Eisenhart, M. A. (1991). Conceptual frameworks for research circa 1991: Ideas from a cultural anthropologist. *Proceedings of the 13th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 1, pp. 202-219. Blacksburg, VA.

Fernández-Pérez, C. (1992). *Ecuaciones diferenciales-I*. Madrid: Ediciones Pirámide.

Ferrara, F., Pratt, D. & Robutti, O. (2006). The Role and Uses of Technologies for the Teaching of Algebra and Calculus. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future.* UK: Sense Publishers, pp. 237-273.

Flick, U. (2004). *Introducción a la investigación cualitativa.* (Trad. Tomás del Amo) Madrid: Morata, A Coruña: Paideia.

Goldin, G. A. (2000). A Scientific Perspective on Structured, Task-Based Interviews in Mathematics Education Research. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education,* Lawrence Erlbaum Associates, London, pp. 517-545.

González-Martín, A. (2005). *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y aprendizaje*. (Tesis Doctoral). Universidad de La Laguna, España.

González-Martín, A. & Camacho, M. (2004). Legitimization of the graphic register in problem solving at the undergraduate level. The case of the improper integral. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 479-486.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education,* 25 (5), 443-471.

Gravemeijer, K. (1998). Developmental research as a research method. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. An ICMI Study* (pp. 277-296). Gran Bretaña: Kluwer Academic Publisher.

Gravemeijer, K. (2004). *Creating opportunities for students to reinvent mathematics*. Regular Lecture presentada en el ICME 10, Copenhagen, Dinamarca.

Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 115-141.

Guerra-Cáceres, M. E. (2003). Esquemas del Concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria en un Contexto Curricular Tradicional. *Matemática, Educación e Internet* [Revista Virtual], 4(1). Disponible en: http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/index.htm

Guerrero-Ortíz, C. (2008). *Interpretación geométrica de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. Estrategias y dificultades.* (Tesis de maestría). CINVESTAV-IPN, México.

Guerrero, C., Camacho, M. & Mejía, H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), pp.341–352.

Guin, D., Ruthven, K. & Trouche, L. (Eds.) (2005). *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument.* NY: Springer.

Habre, S. (2000). Exploring Students' Strategies to Solve Ordinary Differential Equations in a Reformed Setting. *Journal of Mathematical Behavior*, 18 (4), 455-472.

Harel, G., Selden, A. & Selden, J. (2006). Advanced Mathematical Thinking. Some PME Perspectives. En A. Gutiérrez y P. Boreo (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future,* UK: Sense Publishers, pp. 147-172.

Harel, G., Sowder, L. (2005). Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 27-50.

Heller, J., & Hungate, H. (1985). Implications for mathematics instruction of research on scientific problem solving. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspective*, Hillsale, NJ: Lawrence Erlbaum, pp. 83-112.

Hernández, A. (1995). *Obstáculos en la articulación de los marcos numérico, gráfico y algebraico en relación con las EDO*. Tesis Doctoral. Cinvestav, México.

Hershkowitz, B., Dreyfus, T., Ben-Zvi, D., Friedlander, A., Hadas, N., Resnick, N., Tabach, M., & Schwarz, B. (2002). Mathematics curriculum development for computerized environments: a designer-researcher-learner-activity. En L. D. English (Ed.), *Handbook of the International Research in Mathematics Education*, pp. 657-694. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hiebert, J. & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the NCTM* (pp. 65-97).

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds.) (2009). The Strands of Mathematical Proficiency. *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics* (7th ed.) (pp. 115-155). Washington, DC: National Academy Press.

Kwon, O.N., Rasmussen, C. & Allen, K. (2005). Students' Retention of Mathematical Knowledge and Skills in Differential Equations. *School Science and Mathematics*, 105 (5), 1-13.

Leikin, R., Cazes, C., Mamona-Dawns, J & Vanderlind, P. (2010). En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* Lyon, Francia: INRP, pp. 2238-2245.

Lesh, R. (1985). Conceptual analyses of problem solving performance. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspective,* Hillsale, NJ: Lawrence Erlbaum, pp. 309-330.

Lester, F. (2010). On the Theoretical, Conceptual, and Philosophical Foundations for Research in Mathematics Education. En B. Sriraman y L. English (Eds.). *Theories of Mathematics Education* (pp. 67-85). Heidelberg: Springer.

Miles, M. B. & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative Data Analysis: An Expanded Sourcebook*. California: Sage. 2ª Edición.

Moreno Moreno, M. (2000). *El profesor universitario de matemáticas: estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. Estudio de casos.* (Tesis Doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Moreno, M. & Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias,* 21 (2), pp. 265-280.

Moreno, J. & Laborde, C. (2003). Articulation entre cadres et registres de représentation des équations différentielles dans un environnement de géométrie dynamique. *Actes du Congrès Europèen ITEM,* Reims France.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática.* (T. Fernández-Reyes, M.). Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, Sevilla, España.

Nickerson, S. & Bowers, J. (2008). Examining Interaction Patterns in College-Level Mathematics Classes: A Case Study. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the Connection. Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 179-190). The Mathematical Association of America Notes #73. Washington, DC.

Olive, J. & Makar, K. (2010). Mathematical Knowledge and Practices Resulting from Access to Digital Technologies. En C. Hoyles and J. B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain,* pp. 133-177.

Pecharromán, C. (2009). *Aprendizaje de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas.* (Tesis Doctoral). Universidad de Valladolid, España.

Rasmussen, C. (2001). New directions in differential equations. A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 55-87.

Rasmussen, C. & Blumenfeld, H. (2007). Reinventing solutions to systems of linear differential equations: A case of emergent models involving analytic expressions. *Journal of Mathematical Behavior*, 26, 195-210.

Rasmussen, C. & Keynes, M. (2003). Lines of eigenvectors and solutions to systems of linear differential equations. *Primus,* 13(4), 308-320.

Rasmussen, C. & King, K. (2000). Locating starting points in differential equations: a realistic mathematics education approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31 (2), 161-172.

Rasmussen, C. & Kwon, O. (2007). An inquiry-oriented approach to undergraduate mathematics. *Journal of Mathematical Behavior*, 26, pp. 189-194.

Rasmussen, C., Kwon, O., Allen, K., Marrongelle, K. & Burtch, M. (2006). Capitalizing on Advances in Mathematics and K-12 Mathematics Education in Undergraduate Mathematics: An Inquiry-Oriented Approach to Differential Equations. *Asia Pacific Education Review*, 7(1), 85-93.

Rasmussen, C. & Marrongelle, K. (2006). Pedagogical Content Tools: Integrating Student Reasoning and Mathematics in Instruccion. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37 (5), 388-420.

Rasmussen, C. & Ruan, W. (2008). Teaching for Understanding: A Case of Students Learning to Use the Uniqueness Theorem as a Tool in Differential Equations. In M. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the Connection. Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education.* The Mathematical Association of America Notes #73. Washington, DC.

Rasmussen, C. & Whitehead, K. (2003). Learning and Teaching Ordinary Differential Equations. In A. Selden & J. Selden (Eds.), *MAA Online Research Sampler.* (http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_7.html)

Rasmussen, C., Zandieh, M, King, K. & Teppo, A. (2005). Advancing Mathematical Activity: a Practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 51-73.

Raychadhuri, D. (2007). A layer framework to investigate student understanding and application of the existence and uniqueness theorems of differential equations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 38(3), 367-381.

Raychadhuri, D. (2008). Dynamics of a definition: a framework to analyse student construction of the concept of solution to a differential equation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(2), 161-177.

Realistic Mathematics Education. (http://www.fi.uu.nl/en/rme/). Consultada el 27 de abril de 2010.

Reyes-Rodríguez, A. V. (2009). *Aspectos del pensamiento matemático que se favorecen durante la resolución de problemas en escenarios tecnológicos*. (Tesis doctoral). CINVESTAV-IPN. México.

Sacristán, A., Calder, N., Rojano, T., Santos-Trigo, M., Friedlander, A., Meissner, H., Tabach, M., Moreno, L. & Perrusquía, E. (2010). The Influence and Shaping of Digital Technologies on the Learning-and Learning Trajectories-of Mathematical Concepts. En C. Hoyles and J. B. Lagrange (Eds.), *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain*, pp. 179-226.

Sánchez-Matamoros, G. (2004). *Análisis de la comprensión en los alumnos de Bachillerato y primer curso de Universidad sobre la noción de derivada. (Desarrollo del concepto).* (Tesis Doctoral). Universidad de Sevilla, España.

Santos, L. M. (2007). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. México D.F.: Trillas.

Santos-Trigo, M. & Barrera-Mora, F. (2007). Contrasting and Looking into Some Mathematics Education Frameworks. *The Mathematics Educator*, 10(1), 81-106.

Santos-Trigo, M. & Rivera-Figueroa, A. (2010). Prospective mathematics education students' answers to basic mathematical questions: characterizing their mathematical profiles. *Far East Journal of Mathematical Education*, 4(2), 117-140.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Orlando: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics*, pp. 334-370.

Selden, A. & Selden, J. (2001). Tertiary Mathematics Education Research and its Future. In D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study.* London: Kluwer Academic.

Selden, A. & Selden, J. (2005). Perspectives on Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 1-13.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* 22, 1-36.

Sierra, M. (2007). Evolución de la enseñanza del análisis matemático durante la segunda mitad del siglo XX en España a través de los manuales de enseñanza secundaria. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano* (pp. 691-705). México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Sierra, M., González, M.T. & López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática,* 15(1), pp. 21-50.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education,* 26 (2), 114-145.

Simon, M. & Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trayectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.

Sriraman, B. & English, L. (2010). Surveying Theories and Philosophies of Mathematics Education. En B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education*, 7-32.

Tall, D. (1986). Lies, Damn Lies... and Differential Equations. *Mathematics Teaching*, 114, 54-57.

Tall, D. (2004). Thinking throung three worlds of mathematics. En M. Holmes & A. Fuglestead (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, pp. 281-288. Bergen, Norway: Bergen University College.

Tall, D. (2007). Embodiment, symbolism and formalism in undergraduate mathematics education. *Plenaria presentada en el 10th Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education,* Febrero 22-27, San Diego, California.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12(2), 151-169.

Tall, D. & West, B. (1986). Graphic Insight into Mathematical Concepts. In G. Howson & J-P. Kahane (Eds.) *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching*, 107-119. C.U.P.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society,* 30(2), 161-177.

Trigueros, M. (2004). Understanding the meaning and representation of straight line solutions of systems of differential equations. In D. McDougall & J. Ross (Eds.) *Proceedings of the Twenty-sixth Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Toronto, Canadá, Vol. 1, pp. 127-134.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics,* 54 (1), 9-35.

Villar-Liñan, M. T. & Llinares-Ciscar, S. (1996). Análisis de errores en la conceptualización y simbolización de ecuaciones diferenciales en alumnos de químicas. *Educación Matemática,* 8 (2), 90-101.

Yackel, E., Rasmussen, C. & King, K. (2000). Social and sociomathematical norms in an advanced undergraduate mathematics course. *Journal of Mathematical Behavior,* 19, 275-287.

Zandieh, M. & McDonald, M. (1999). Student Understanding of Equilibrium Solution in Differential Equations. En F. Hitt & M. Santos (Eds.). *Proceedings of the Twenty-one Annual Meetin. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Columbus, OH:ERIC.

Zazkis, R. & Applebaum, M. (2007). Advancing mathematical thinking: Looking back at one problem. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.). *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* Larnaca: Chipre, pp. 2389-2397.

Anexo A

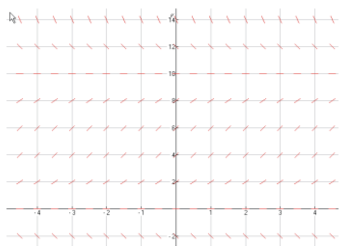
Anexo A.1: Cuestionario C-EDO

Problemas de Tipo 1	***Escenario***	***Objetivos***
P3. Contesta, de forma razonada, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. **a)** La función $y = e^{\int e^{t^2} dt}$ es solución de la EDO $\frac{dy}{dt} = 4e^{t^2} y$. **b)** Las funciones y = f(x) que cumplen que $-x^3 + 3y - y^3 = C$ son soluciones de la EDO $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2}$.	Cuestionario Entrevista	Determinar si consideran diferentes formas de expresión algebraica de las soluciones de una EDO. Analizar: ▪ La estrategia de resolución que utilizan. ▪ Si consideran estrategias alternativas de resolución en caso de encontrarse con dificultades. ▪ Si derivan correctamente funciones dadas tanto de forma implícita como explícita. ▪ Si conocen el algoritmo para resolver EDO de primer orden, de variables separadas y lo aplican correctamente.
P4. Contesta, de forma razonada, si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: "*Las soluciones de la EDO $y'' - y = 0$ son de la forma $y(x) = Ae^{x} + e^{-x}$, donde A es una constante arbitraria.*"	Cuestionario	Determinar si los estudiantes reconocen propiedades generales de las soluciones de las EDO o si usan contraejemplos para justificar sus argumentos. Analizar ▪ Las estrategias de resolución que utilizan. ▪ Si distinguen entre solución particular y general de una EDO. ▪ Si conocen los algoritmos de resolución de EDO de segundo orden, lineales y con coeficientes constantes y si los usan correctamente.
P5. Contesta, de forma razonada, si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: *"Consideremos la EDO de primer orden $y'(x) = f(x, y)$. Si la función $f(x, y)$ está definida en R^2, las soluciones de la EDO estarán también definidas en R^2."*		
P11. Si la función $Q = Ce^{kt}$ satisface la ecuación diferencial $\frac{dQ}{dt} = -0.03Q$, ¿qué propiedades cumplen los valores de C y k?	Cuestionario	Analizar las estrategias de resolución que utilizan y si consideran estrategias alternativas en caso de encontrarse con dificultades. Determinar si los estudiantes utilizan correctamente el significado algebraico del concepto de solución de una EDO.

***Anexo A.1.1*: Cuestionario C-EDO**

Problemas de Tipo 2	*Escenario*	*Objetivos*
P1. Representa gráficamente algunas soluciones de las siguientes ecuaciones: a) $\frac{dy}{dx}=0;\ \ x\in[0,2]$ b) $\frac{dy}{dx}=\cos x$	Cuestionario Entrevista	Analizar: ▪ Si transfieren conocimientos acerca del concepto de derivada de una función para obtener la expresión algebraica de la solución de las ecuaciones. ▪ Si emplean correctamente los métodos de resolución de EDO de primer orden, de variables separadas, en caso de hacerlo. ▪ Si integran correctamente. ▪ La representación gráfica de las soluciones de las ecuaciones.
P2. Representa gráficamente algunas soluciones de las siguientes ecuaciones: a) $\frac{dy}{dx}=y;\ \ x\geq 0$ b) $y'(t)=y^2$	Cuestionario	
P12. Representa gráficamente algunas soluciones de las siguientes ecuaciones: a) y'(t)=k b) y'(x)=-1	Entrevista	

Anexo A.1.1: Cuestionario C-EDO

Problemas de Tipo 3	*Escenario*	*Objetivos*
P6. Resuelve la ecuación diferencial $y'(t) = \frac{1}{t}$. Dibuja el campo de direcciones asociado a esta ecuación y una solución correspondiente a t = -1.	Cuestionario Entrevista	▪ Crear una contradicción en aquellos alumnos que resuelvan de forma incorrecta la integral de la función logarítmica. ▪ Determinar a cuál de los sistemas de representación dan mayor validez. ▪ Analizar: - El método de resolución algebraico que utilizan, en caso de hacerlo. - La representación gráfica del campo de direcciones y de la solución pedida. - La coordinación entre los sistemas de representación gráfico y algebraico.
P8. Consideremos el campo de direcciones asociado a la ecuación $\frac{dP}{dt} = 0.1P(10-P)$  Representa las soluciones que cumplen que P(0) = 0 y P(-2) = 12. ¿Para qué valores positivos de P las soluciones son crecientes? ¿y decrecientes? ¿Cuál es el límite de P cuando t tiende a infinito?	Cuestionario Entrevista	Analizar: ▪ El método elegido para resolver la actividad, así como el sistema de representación. ▪ El significado que dan a la representación del campo de direcciones asociado a una EDO. Determinar si los alumnos transfieren conocimientos acerca de la relación de la derivada de una función con la monotonía de la misma.

Anexo A.1.1: Cuestionario C-EDO

Problemas de Tipo 3	*Escenario*	*Objetivos*
P10. Dibuja el campo de direcciones de la EDO $\frac{dy}{dx}=1$ y, a partir de él, resuelve el siguiente problema de valores iniciales. $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=1\\ y(-2)=4\end{cases}$	Cuestionario	Determinar el método elegido para resolver la actividad, así como el sistema de representación.
P14. Explica en qué consiste un campo de direcciones asociado a una EDO.	Entrevista	Indagar en la imagen mental del concepto de campo de direcciones que tienen los estudiantes.
P15. Resuelve el siguiente problema de valores iniciales. Dibuja el campo de direcciones asociado a la ecuación diferencial y representa gráficamente la solución del PVI. $\begin{cases}\frac{dy}{dx}=-1\\ y(-2)=4\end{cases}$	Entrevista	Determinar el método elegido para resolver la actividad, así como el sistema de representación.

Anexo A.1.1: Cuestionario C-EDO

Problemas de Tipo 4	*Escenario*	*Objetivos*
P7. Se sabe que la población de una ciudad crece a medida que pasa el tiempo, verificando la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = K$, K>0. Si la población se ha doblado en 3 años, y en 5 años ha alcanzado la cifra de 40.000 habitantes, ¿cuántas personas vivían en la ciudad al comienzo de ese período de cinco años?	Cuestionario Entrevista	Determinar el método elegido para resolver la actividad, así como el sistema de representación. Analizar la relación que establecen los estudiantes entre esta actividad y otras en las que aparecen EDO análogas. Determinar si interpretan de forma correcta, en lenguaje matemático, información dada en lenguaje verbal, relativa a un contexto real.
P9. Si la ecuación diferencial dada en P8 modeliza una población determinada de individuos, ¿cómo interpretarías los resultados que acabas de obtener?	Cuestionario Entrevista	Determinar: ▪ Si los estudiantes interpretan correctamente los resultados obtenidos, dentro de un contexto real.
P13. ¿En qué problemas aplicados crees que puedes utilizar una EDO para modelizarlo? Señala algunos ejemplos.	Entrevista	Analizar la relación que establecen los estudiantes entre el concepto matemático y los problemas que resuelve.

Nombre y apellidos:

2. Deriva las siguientes funciones:

   a. $f(x) = (-x^3 + 3x) \cdot e^{\frac{x^2-3}{2}}$

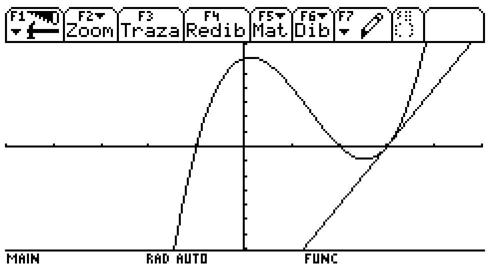
   b. $g(t) = \dfrac{\ln(2t-5)}{2t-5}$

3. Explica qué significa para ti el concepto de derivada. ¿Qué imágenes vienen a tu mente al pensar en este concepto?

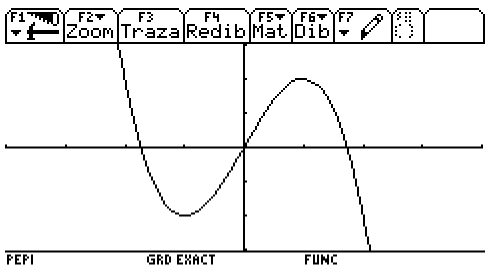
4. Indica un problema donde se utilice el concepto de derivada.

5. Dada la función $f(x) = 3x$, ¿existe una función cuadrática $g(x)$ que sea tangente a f en el punto $x = 1$? En caso afirmativo, representa gráficamente cuál es la situación en dicho punto.

6. Considera la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$, cuya gráfica se muestra a continuación. Calcula la pendiente de la recta que se muestra en la imagen, sabiendo que las dos curvas se cortan en el punto de coordenadas (3,0).



7. Dada la función cuya representación gráfica se muestra a continuación, ¿qué puedes decir sobre su derivada?



8. Si la función $f(t)$ describe la posición de una partícula en un tiempo determinado, ¿qué significado le daríamos a la expresión $\dfrac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$?

9. ¿Cuál sería el significado de la expresión anterior cuando $\Delta t \to 0$?

10. ¿Qué relación tiene el siguiente límite con la derivada de la función exponencial en un punto? $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{x+h}-e^{x}}{h}$

11. La función que representa la posición de un vehículo conforme pasa el tiempo es $f(t)=t^2$, calcula la velocidad a la que va en el instante t = 1.5. ¿Esa velocidad es constante?

12. La cantidad de peces que hay en un lago, $p(t)$, aumenta a velocidad constante. ¿Cómo indicarías esta variación en términos de la función? ¿Y en términos de la derivada?

Anexo A.2.U: Desintegración del uranio

Muchos minerales contienen uranio 238 en su composición.

El uranio es una sustancia radiactiva lo que significa que emite una cierta energía que hace que se vaya transformando en otras sustancias a medida que pasa el tiempo. Por ejemplo, el uranio 238 se va modificando hasta convertirse en plomo 206.

Por tanto si tenemos un mineral que contenga átomos de uranio 238, a medida que pasa el tiempo, el número de átomos de uranio 238 que hay en dicho material ¿sigue siendo el mismo?

¿Cómo indicarías que la cantidad de átomos de uranio 238 que hay en un material depende del tiempo que haya pasado?

Supongamos, de momento, que dicho número de átomos no varía. ¿Cómo expresarías esta situación en términos matemáticos?

¿Se te ocurre alguna otra posibilidad?
Ayuda: Puede expresarse en términos de la función o en términos de su derivada.

Volvamos ahora a la situación real, donde el número de átomos de uranio 238 que hay en un mineral va disminuyendo.

¿Cómo expresarías esta información en términos matemáticos?

¿Qué valores puede tomar u'(t)?

¿Puede ser que u'(t) sea igual a t? Justifica tu respuesta.
Ayuda: Recuerda el significado de la variable t en la situación planteada.

¿Puede ocurrir que u'(t) sea igual a -t?

¿Puede ocurrir que u'(t) sea igual a $-t^2$?

Indica al menos otras dos posibilidades para la expresión de u'(t).

¿Qué diferencia habría entre el enunciado del problema cuando u'(t)=-1 y u'(t) =-2?
Ayuda: Piensa en cuál de los casos el uranio disminuye más rápidamente.

¿Qué diferencia habría entre el enunciado del problema cuando u'(t)=-1 y u'(t) =-t?

En este contexto, ¿qué significaría que u'(t) sea positiva?

Completa la siguiente tabla escribiendo una función cuya derivada satisfaga lo indicado en cada fila:

u’(t)	u(t)	u’(t)	u(t)
-1		-t	
-2		$-t^2$	
-3		$\frac{-t}{2}$	

¿Hay alguna otra función que cumpla que su derivada es la que aparece en cada fila de la tabla?

¿Escribe al menos otras dos funciones que satisfagan cada uno de los apartados?

u’(t)	u(t)
-1	
-2	
-3	
-t	
$-t^2$	
$\frac{-t}{2}$	

Anexo A.2.M: Contaminación de mercurio

A la atención del Colegio Oficial de Químicos de Canarias

Acabamos de recibir el último informe del Ministerio de Sanidad y Consumo sobre la calidad del agua que proviene de nuestros estanques de tratamiento. Uno de ellos, el más antiguo, no cumple con los estándares recomendados.
En el estanque hay 10.000 litros de agua y estamos introduciendo en él una solución que contiene 0'1 gramos de mercurio por litro, a razón de tres litros por minuto. Con esta operación, hemos contaminado el agua del depósito, la cuál sale del estanque también a una velocidad de tres litros por minuto.
A partir del informe del Ministerio, hemos reducido la cantidad de mercurio que bombeamos en el estanque, pero me temo que no la hemos reducido lo suficiente puesto que la concentración actual es de 0'7 gramos por litro. Necesito un modelo que me permita calcular cuánto mercurio hay en el estanque en cada momento, para poder así controlar la contaminación.

Actividad inicial:

Elaborar un informe en el que se explique brevemente de qué trata el problema, cuáles son los datos del mismo que consideras relevantes para su resolución y qué procedimientos seguirías para resolverlo.

Etapa 1. Comprensión de la situación

- ¿A qué velocidad se introduce solución con mercurio en el estanque?
- ¿Qué cantidad de mercurio entra en el estanque por cada litro de agua introducido?
- ¿Cuánto mercurio se ha introducido en el estanque un minuto después?
- ¿Y dos minutos después?
- ¿Y tres minutos y medio después?
- El mercurio que entra en el depósito, ¿permanece siempre en él?
- ¿A qué velocidad sale la solución del estanque?
- ¿Qué cantidad de líquido hay siempre en el estanque?

- ¿Qué necesita el cliente?

Etapa 2. Análisis de la situación

Llamemos $p(t)$ a la cantidad de mercurio que hay en el estanque en cualquier instante t. Esta función es continua y consideraremos además que es derivable.

- ¿Qué cantidad de mercurio puede haber en el estanque en un momento determinado?

- Indica la cantidad de mercurio que se introduce en el estanque por minuto.

Ayuda: Ten en cuenta cuántos litros de solución entran en cada minuto y cuántos gramos de mercurio hay en cada litro de la misma.

- Indica la cantidad de mercurio que sale del estanque, por minuto.

Ayuda: Considera cuántos litros por minuto salen del estanque y que la proporción de mercurio que hay en el depósito en cada momento es $\frac{p(t)}{10000}$ gr/l.

Piensa cómo varía la cantidad de mercurio que hay en el depósito en cualquier instante. Esta variación depende de la cantidad de mercurio que entra y sale del estanque en cualquier instante de tiempo.

- ¿Cómo quedaría expresada la variación de la cantidad de mercurio que hay en el estanque en cada instante, t, de tiempo?

Ayuda: Recuerda qué concepto matemático conoces para indicar la variación de una función.

En este punto, ¿tenemos alguna información sobre la cantidad de mercurio que hay en el estanque en cada momento? ¿podemos decir cuánto mercurio habrá dentro de una hora?

Etapa 3. Solución de casos particulares

- La expresión que has obtenido al final de la etapa anterior, ¿es una EDO?, ¿de qué orden?

Ayuda: Revisa la información que tienes en el anexo "Fundamentos teóricos de las EDO"

- ¿Qué elementos aparecen en la ecuación que hacen afirmar que se trata de una EDO y que ese es su orden?

Las EDO de primer orden están clasificadas en distintos tipos. Debes copiar dicha clasificación en el anexo "Fundamentos teóricos de las EDO".

- Analiza de cuál de estos tipos es la EDO que modela nuestra situación.

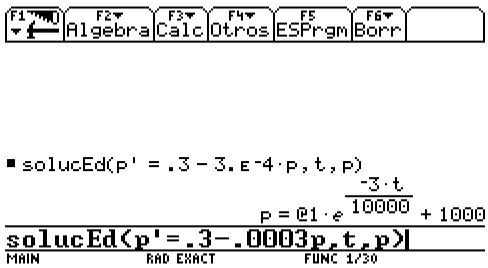
- ¿Qué características de la misma te han hecho afirmar ésto?

- ¿Necesitamos resolver la EDO para contestar a nuestro cliente?

La función que describe la cantidad de mercurio que hay en el estanque en cualquier instante de tiempo se puede presentar en diferentes “formatos”, entre ellos una gráfica o una expresión algebraica.
A continuación utilizaremos un método algebraico para resolver esta ecuación. Este mismo método nos servirá para resolver todas las EDO de este tipo.

- Resuelve la EDO utilizando la calculadora.

Para ello selecciona la aplicación “Principal”, limpia la pantalla (pulsando F1-8) y establece el modo “exacto”. A continuación escribe lo que aparece en la imagen inferior y comprueba que obtienes el mismo resultado.



- Escribe la solución que has obtenido con la calculadora.

- ¿Sabes qué significa el símbolo “□1” que aparece en la imagen superior?

- ¿Las soluciones obtenidas usando la calculadora y usando el método algebraico coinciden? Explica tu respuesta.

Para que la expresión de $p(t)$ sólo dependa del tiempo, necesitamos conocer el valor de la constante C. Esto lo podemos hacer utilizando cierta información de la que disponemos.

Sabemos que la cantidad exacta de mercurio que hay en el depósito en el instante inicial ($t = 0$) es 0 gramos porque, en ese momento, no ha entrado nada de solución.

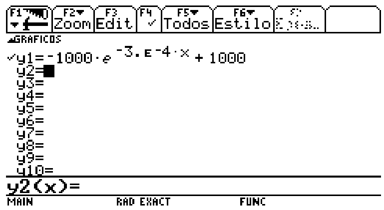
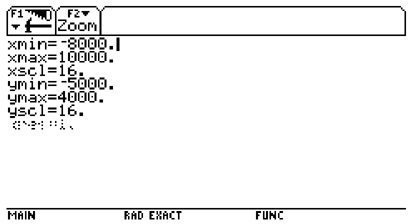
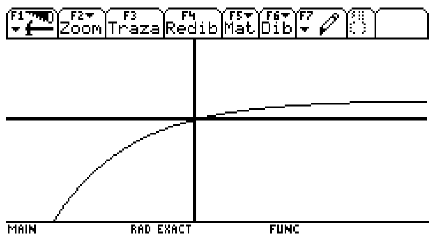
- Escribe esta información haciendo uso de la expresión de la función que hemos obtenido anteriormente y calcula el valor de la constante C.

Ayuda: Puedes utilizar la calculadora para realizar los cálculos que necesites. En el apartado “*Realización de operaciones”* que figura en el anexo de la Voyage 200 encontrarás la información necesaria para ello.

La información que acabamos de utilizar para calcular la constante C recibe el nombre de “condición inicial” y, al calcular el valor de C estamos resolviendo un “problema de Cauchy o de valores iniciales”.
Copia la definición de estos términos en el anexo “Fundamentos teóricos de las EDO”.

Escribe la expresión de la función que modela la cantidad de mercurio que hay en cada instante dentro del depósito y que será parte de la información que envíes a tu cliente.

Representa gráficamente la función que modela la situación estudiada.
Ayuda: Sigue los pasos indicados a continuación para representar gráficamente la función y comprueba que obtienes la misma imagen que te mostramos en este documento.

<table>
<tr><td>1) Escribir en la aplicación “Editor Y=” la expresión algebraica de la función que queremos representar (∞ W).
Observa que en esta aplicación de la calculadora siempre se utilizan las variables x e y para representar las variables independiente y dependiente, respectivamente.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2) Establecer los parámetros de representación en la aplicación “Window” (∞{)
Introduce los parámetros que aparecen en la imagen de al lado.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3) Ir a la aplicación “Gráficos” para que la calculadora lleve a cabo la representación gráfica deseada.</td><td>
</td></tr>
</table>

Analizando la representación gráfica que modela la situación, ¿crees que hay una cantidad máxima de mercurio que puede haber en el depósito?

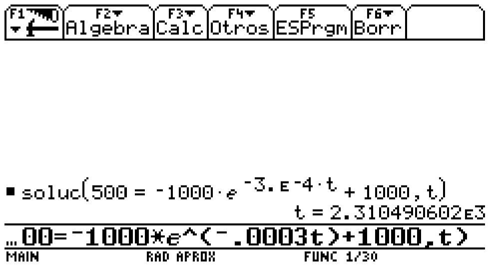
¿Cuál es esa cantidad?
Ayuda: Calcula el límite de la función cuando el tiempo tiende a infinito.

El cliente te ha dicho en su mensaje que, en este momento, la concentración de mercurio que hay en el depósito es de 0’7 gramos por litro. ¿Es eso posible?
Ayuda: Ten en cuenta la información que obtuviste en la pregunta anterior.

¿Cuál es el límite de la concentración de mercurio que puede alcanzar el depósito estudiado?

¿Cuánto tiempo se tardó en alcanzar la mitad de esa concentración límite? Expresa el resultado en horas.

Ayuda: Para realizar este cálculo, puedes utilizar el comando "*soluc*" de la calculadora. Este comando permite resolver ecuaciones de diferentes tipos. En el siguiente ejemplo se muestra la sintaxis que necesitas:



¿Cuántos días tardará en alcanzar las tres cuartas partes de esa concentración límite?

Si la concentración máxima de mercurio que permite el Ministerio de Sanidad y Consumo es de 0'04 gramos por litro, ¿en qué instante de tiempo se deberá cerrar la entrada y la salida de solución al estanque?

Etapa 4. Planteamiento y solución de casos generales.

En esta etapa se relacionarán los datos del problema con los elementos que dan lugar a la EDO, que son:

(a) La cantidad de mercurio que se introduce en el depósito.
(b) La velocidad a la que entra y sale la solución.
(c) El volumen del depósito.
(d) La cantidad inicial de mercurio que hay en el depósito.

Analizaremos cómo influyen estos elementos en la cantidad de mercurio que puede haber en un instante determinado en el depósito y en la concentración máxima de mercurio que se puede alcanzar en el depósito.

Consideramos la "cantidad de mercurio que introducimos en el depósito"

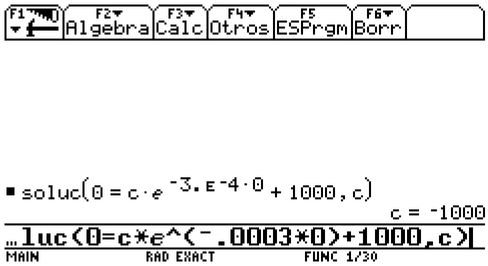
Recuerda que, en el caso original, la solución que se introducía en el depósito contenía 0'1 gramos de mercurio por litro.

- Si la cantidad de mercurio que entra en el depósito fuera de 0'2 gr/l, ¿Cuáles serían la EDO y la función que modelan la situación?

- ¿Y si fuera de 0'3 gr/l?

- Completa la siguiente tabla.

Ayuda:
Para calcular la constante de integración en cada caso, usando la calculadora, puedes ayudarte de este ejemplo:



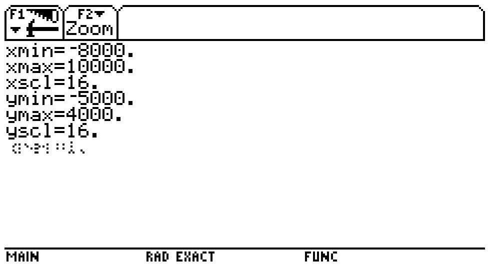
Cantidad de mercurio que se introduce en el depósito (gr/l)	**EDO que modela la situación**	**Solución de la EDO**	**Función que modela la situación real** $p(0) = 0$	**Cantidad máxima de mercurio que puede haber en el depósito**
0.1	$\frac{dp}{dt} = 0.3 - 0.0003p(t)$	$p(t) = C \cdot e^{-0.0003t} + 1000$	$p(t) = -1000 \cdot e^{-0.0003t} + 1000$	1000 gr
0.2				
0.3				
0.4				
...				
m				

Tabla 1

- La función que modela la situación, ¿depende de m?

- ¿Y la cantidad máxima de mercurio que se puede alcanzar en el depósito?

- Representa gráficamente, en una misma pantalla, las funciones que modelan la situación para los casos en los que se introducen 0.1, 0.2, 0.3 y 0.4 gramos de mercurio por litro de solución.

> *Ayuda:* Consulta el "Manual de uso de la Voyage 200" en caso necesario y utiliza los siguientes parámetros de la aplicación "Window"
>
> 
>

- En un instante de tiempo determinado, ¿en cuál de los casos se alcanza una mayor concentración de mercurio en el depósito?

- ¿Qué cantidad de mercurio debemos introducir para que la concentración máxima que se alcance sea de 0'7 gramos por litro?

Consideramos la "velocidad de entrada y salida de la solución"

En el caso inicial, la velocidad de entrada y salida de la solución al depósito era constante e igual a 3 litros por minuto.

Recuerda que tanto la EDO como su solución dependen de la cantidad de mercurio que se introduce con la solución, a la que hemos llamado ***m***.

$$\frac{dp}{dt} = 3 \cdot m - 0.0003\,p(t)$$

$$p(t) = C \cdot e^{-0.0003t} + 10000 \cdot m$$

- ¿Si la velocidad de entrada y salida de la solución fuera 2 litros por minuto, ¿Cuáles serían la EDO y la función que modelan la situación?

- ¿Y si fuera de 4 l/min?

- Completa la siguiente tabla.

Velocidad de entrada y salida de la solución	**EDO que modela la situación**	**Solución de la EDO**	**Función que modela la situación real** $p(0) = 0$	**Cantidad máxima de mercurio que puede haber en el depósito (gramos)**
2 l/min				
3 l/min	$\frac{dp}{dt} = 3 \cdot m - 0.0003 p(t)$	$p(t) = C \cdot e^{-0.0003t} + 10000 \cdot m$	$p(t) = -10000 m \cdot e^{-0.0003t} + 10000 \cdot m$	$10000 \cdot \mathrm{m}$
4 l /min				
...	...	...	...	...
v l/min				

Tabla 2

- ¿De cuáles de los elementos analizados hasta el momento depende la función que modela la situación?

- ¿Y la cantidad máxima de mercurio?

- Supongamos que m = 0.1 gr/l, representa gráficamente las funciones que modelan la situación cuando la velocidad a la que entra y sale la disolución es de 2, 3 y 4 l/min.

- De las velocidades consideradas en la tabla, ¿con cuál de ellas se alcanza más rápidamente la concentración máxima de mercurio en el depósito?

- A medida que aumentemos esa velocidad, ¿se tardará más o menos tiempo aproximarse a la concentración máxima de mercurio?

- ¿A qué velocidad tenemos que introducir la solución si queremos que, pasadas dos horas, la concentración de mercurio dentro del depósito sea de 0’05 gr/l?

Consideramos el “volumen del depósito”

En el caso inicial, el volumen del depósito era de 10000 litros, analicemos cómo cambia la situación si modificamos el volumen del depósito.

Recuerda que tanto la EDO como su solución dependen de la cantidad de mercurio que se introduce con la solución, a la que hemos llamado ***m*** y de la velocidad de entrada y salida del mercurio, que llamamos ***v.***

$$\frac{dp}{dt} = v.m - \frac{v}{10000}\,p(t)$$

$$p(t) = C \cdot e^{-\frac{v}{10000}t} + 10000.m$$

- Si el volumen fuera de 50000 litros, ¿cuáles serían la EDO y la función que modelan la situación?

- ¿Y si fuera de 70000 litros?

- Completa la siguiente tabla.

Volumen del depósito (litros)	EDO que modela la situación	Solución de la EDO	Función que modela la situación real $p(0)=0$	Cantidad máxima de mercurio que puede haber en el depósito (gramos)
10000	$\frac{dp}{dt}=v.m-\frac{v}{10000}p(t)$	$p(t)=C\cdot e^{-\frac{v}{10000}t}+10000.m$	$p(t)=-10000\cdot m\cdot e^{-\frac{v}{10000}t}+10000\cdot m$	10000 m
50000				
70000				
...	...	...	...	...
V				

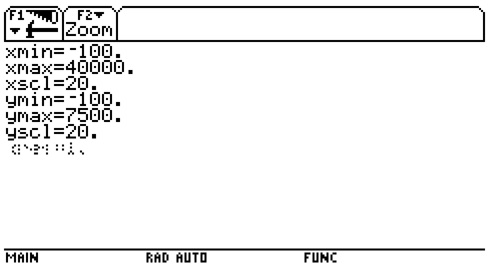
Tabla 3

- ¿De cuáles de los elementos analizados hasta el momento depende la función que modela la situación?

- ¿Y la cantidad máxima de mercurio?

- Supongamos que m = 0.1 gr /l y que la velocidad a la que entra y sale la solución de mercurio del depósito es de 3 l/min. Representa gráficamente las funciones que modelan la situación cuando tenemos depósitos de 10000, 50000, 70000 litros.

Considera los siguientes parámetros de la aplicación “*Window”*



- A medida que aumenta el volumen ¿aumenta o disminuye la cantidad máxima de mercurio que admite el depósito?

Consideramos el parámetro “cantidad inicial de mercurio que hay en el depósito”

En el caso inicial, el depósito no tenía nada de mercurio cuando comenzó a introducirse la solución. Analicemos cómo cambia la situación si modificamos la cantidad inicial de mercurio que hay en el depósito.

Recuerda que tanto la EDO como su solución dependen de la cantidad de mercurio que se introduce con la solución, a la que hemos llamado ***m,*** de la velocidad de entrada y salida del mercurio, que llamamos ***v*** y del volumen del depósito, ***V.***

$$\frac{dp}{dt} = v.m - \frac{v}{V}\,p(t)$$

$$p(t) = C{\cdot}e^{-\frac{v}{V}t} + V.m$$

- Si en el momento de introducir la solución con mercurio en el depósito, éste tuviera dentro 100 gramos de mercurio, ¿cuáles serían la EDO y la función que modelan la situación?

- ¿Y si el depósito tuviera 500 gramos de mercurio?

- Completa la siguiente tabla.

Cantidad inicial de mercurio en el depósito (gramos)	**EDO que modela la situación**	**Solución de la EDO**	**Función que modela la situación real** $p(0) = p_0$	**Cantidad máxima de mercurio que puede haber en el depósito**
0	$\frac{dp}{dt} = v.m - \frac{v}{V}\,p(t)$	$p(t) = C \cdot e^{-\frac{v}{V}t} + V.m$	$p(t) = -V \cdot m \cdot e^{-\frac{v}{V}t} + V \cdot m$	$V \cdot m$
100				
500				
...			...	...
P_0				

Tabla 4

Supongamos que tenemos dos depósitos, el primero con un volumen de 60.000 litros en el que introduce una solución con 0’2 gramos de mercurio por litro, y el segundo con un volumen de 45.000 litros en el que se introduce una solución con 0’6 gramos de mercurio por litro.

Si en cada depósito tenemos una cantidad inicial de 250 gramos de mercurio y las soluciones entran y salen de ambos depósitos a una velocidad de 3 litros por minuto,

- ¿En cuál de los depósitos se alcanza antes una concentración de mercurio de 0’1gr/l?

- ¿En qué instante de tiempo se alcanza?

Etapa 5. Análisis retrospectivo del proceso de solución

En esta etapa deberás elaborar dos informes, uno dirigido al cliente que ha requerido tus servicios y otro dirigido al Colegio Oficial de Químicos de Canarias. En dichos informes debes reflejar, al menos, la siguiente información:

Para el cliente

- Cuál es la función que le permite calcular la cantidad de mercurio que hay en su depósito en cada instante.
- Qué información puede obtener a través de dicha función y cómo puede interpretarla.
- Por qué no es posible que el depósito que él está considerando tenga una concentración de mercurio de 0’7 gr/l.
- Cuál es la función que le permite analizar diferentes situaciones análogas a la que te presenta, explicándole el significado de los distintos elementos que aparecen en la expresión de la función.

Para el Colegio Oficial de Químicos de Canarias

- Cómo has resuelto el problema planteado por el cliente, indicando por qué has necesitado utilizar una EDO para modelar la situación.
- Cómo has encontrado una solución más general y cuál es su utilidad.

Anexo A.2.P: Dinámica de poblaciones

A la atención del Colegio Oficial de Químicos de Canarias.

La piscifactoría "*La mar de bueno*" solicita sus servicios para buscar una manera sencilla de comunicar a sus inversores cómo varía la cantidad de peces que hay en uno de los recintos que utilizan para la cría de doradas.

Los últimos recuentos del número de peces que hay en uno de los recintos han mostrado que el número de peces está disminuyendo considerablemente. Los técnicos de nutrición y de epidemiología no han detectado ningún problema relacionado con la alimentación o alguna enfermedad, pero me apuntan que quizás el problema esté en la cantidad de peces que hay dentro del recinto.

Necesito que realice un estudio sobre cómo varía el número de peces que hay en el recinto a lo largo del tiempo y que analice cuál puede ser el problema.

Para presentar el informe a los inversores, sería conveniente que este se presentara en un formato de fácil comprensión como, por ejemplo, una representación gráfica que refleje cuál es la situación en cualquier instante de tiempo.

Le adjunto cierta información recogida por nuestros trabajadores que podrían serle de utilidad en su trabajo.

- La tasa de nacimiento de doradas es de 410 por cada mil, cada año.
- La tasa de mortalidad de doradas es de 220 por cada mil, cada año.

Etapa 1. Comprensión de la situación

En esta etapa contestaremos a una serie de preguntas que nos ayudarán a comprender la situación planteada. Añade cualquier otra pregunta que consideres relevante.

- ¿Qué fenómeno estamos estudiando?
- ¿Qué solicita el cliente?
- ¿Qué significa que la tasa de nacimiento es de 410 peces por cada mil?
- ¿Qué significa que la tasa de mortalidad es de 220 peces por cada mil?
- En la situación considerada, ¿qué está cambiando?

Etapa 2. Análisis de la situación

Llamemos $P(t)$ a la cantidad de peces que hay en cualquier instante.

Analicemos cómo varía el número de peces que hay en el recinto.

Número de peces	**Peces que nacen en un año**	**Peces que mueren en un año**	**Variación en el número de peces, en un año**
1000			
2000			
3000			
$P(t)$			

- Escribe la EDO que modela la situación.

Etapa 3. Solución de casos particulares

- Resuelve la EDO obtenida en la etapa anterior.
- ¿La constante de integración puede ser negativa? ¿Por qué?
- Con los datos que tienes, ¿puedes calcular el valor de la constante de integración?
- ¿Qué necesitarías conocer para poder calcularlo?
- El número de peces, ¿aumenta, disminuye o se mantiene constante? Explica tu respuesta.
- ¿Hasta que valor?
- ¿Te parece que la información obtenida a través de la representación gráfica se ajusta a lo que ocurre en la realidad?

Cuando el número de peces que hay en el recinto es muy grande, empiezan a escasear recursos como el espacio vital, los alimentos, etc. por lo que los peces comienzan a competir entre ellos. Esto hace que el número de peces sufra cierta disminución debido a esta causa. Recuerda que el dueño de la piscifactoría ya apuntaba a este hecho como la posible causa de la muerte de los peces.

De forma experimental se ha visto que el término de competición entre las especies es proporcional al cuadrado de la población en cada instante, es decir que este hecho hace que la población disminuya según el término $b \cdot P^2$.

- Teniendo en cuenta este hecho, indica la variación de la población de doradas conforme pasa el tiempo.

- ¿Tendría sentido que el término de competición fuera negativo? ¿Por qué?

- Analiza para qué valores de P la población

  (a) Aumenta

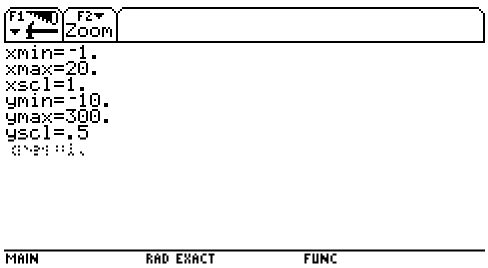
  (b) Disminuye

  (c) Se mantiene constante

- ¿Qué sucede con la población a lo largo del tiempo?

Consideremos el caso particular b=0’001.

- Representa gráficamente la función $P(t) = \dfrac{19}{100b}$ con los siguientes parámetros de la aplicación “Window”.



- Representa gráficamente la función que indica el número de doradas que hay en el recinto en cualquier instante de tiempo, si en dicho recinto, al inicio, había 100 peces.

- Representa gráficamente la función que indica el número de doradas que hay en el recinto en cualquier instante de tiempo, si en dicho recinto, al inicio, había 280 peces.

Con la imagen que has obtenido, comprueba si se cumplen las respuestas que has dado en las dos cuestiones anteriores.

- Si el término de competición aumenta, ¿qué ocurre con el valor del límite de la población?

- ¿Y con la población?

- Si el término de competición disminuye. ¿Qué ocurre con el valor del límite de la población?

- ¿Y con la población?

Ayuda: Representa la función *P(t)* considerando el término de competición igual a 0’0001 y las constantes de integración iguales a -0’00002 y 0’00006. Representa también la función constante $y(x)=\frac{0'19}{b}$.

Etapa 4. Planteamiento y solución de casos generales

La EDO con la que trabajamos en la etapa anterior era $\frac{dP}{dt}=0'19P-bP^2$.

- ¿A qué hacía referencia el término 0’19? Recuerda cómo lo calculamos.
- Supongamos ahora que la tasa de crecimiento de la población es a. Escribe la EDO que modela la situación.
- ¿Qué significa, en términos de los nacimientos y las muertes de los peces, que la tasa de crecimiento, a, sea positiva?
- ¿Qué significa que sea negativa?
- ¿Qué ocurrirá en ese caso, con la población de peces, a medida que pase el tiempo?
- ¿Qué significa que la tasa de crecimiento sea cero?
- ¿Qué ocurrirá en ese caso, con la población de peces, a medida que pase el tiempo?

Veamos si las afirmaciones que has hecho son correctas.

- Supongamos que a es un valor negativo. Calcula el valor al que se aproxima la cantidad de peces a medida que pasa el tiempo.

Representemos gráficamente un ejemplo de esta situación.

- Representa gráficamente la función que indica el número de peces que hay en un recinto en cualquier instante de tiempo, si en dicho recinto, al inicio, había 280 peces, la tasa de crecimiento de dicha especie es -0’19 y el término de competencia es 0’001.

- Supongamos que a es cero. Calcula el valor al que se aproxima la cantidad de peces a medida que pasa el tiempo.

Representemos gráficamente un ejemplo de esta situación.

- Representa gráficamente la función que indica el número de peces que hay en un recinto en cualquier instante de tiempo, si en dicho recinto, al inicio, había 280 peces, la tasa de crecimiento de dicha especie es 0 y el término de competencia es 0'001.

Supongamos ahora que la tasa de crecimiento de la población es positiva.

- Analiza para qué valores de P la población

  (a) Aumenta

  (b) Disminuye

  (c) Se mantiene constante

- ¿Qué sucede con la población a lo largo del tiempo?

Veamos si las afirmaciones que has hecho son correctas.

Consideremos una población de peces cuya tasa de crecimiento sea 0'25 y cuyo término de competencia sea 0'001. Supongamos que tenemos dos recintos con peces de este tipo. Cuando se construyeron los recintos, se introdujeron 300 peces en el primer recinto y 150 en el segundo.

- Representa gráficamente las funciones que indican la cantidad de peces que hay en cada uno de los recintos en cada instante de tiempo.

- ¿A qué valor se aproximan a medida que pasa el tiempo?

- ¿Concuerda lo que has obtenido con lo que has afirmado en las cuestiones anteriores?

Etapa 5. Análisis retrospectivo del proceso de solución

En esta etapa deberás elaborar dos informes, uno dirigido al cliente que ha requerido tus servicios y otro dirigido al Colegio Oficial de Químicos de Canarias. En dichos informes debes reflejar, al menos, la siguiente información:

Para el cliente

- Cuál es la EDO que modela la variación en el número de peces que hay dentro de su recinto.
- Qué factores están involucrados en esta variación y qué significa el término de competición que has tenido que añadir.
- Cuál puede ser la razón de que el número de peces que hay dentro del recinto esté disminuyendo.
- Si, en su caso, hay un valor límite para la cantidad de doradas que habrá en su recinto.

- Una representación gráfica de lo que ocurre con el número de peces que hay dentro del recinto, dependiendo del número inicial de peces que haya y del término de competencia.
- Una posible solución a su problema para que el número de doradas no siga disminuyendo.

Para el Colegio Oficial de Químicos de Canarias

- Por qué has necesitado utilizar una EDO para modelar la situación.
- Por qué tuviste que considerar un elemento que el cliente no te proporcionaba (el término de competición).

- Un ejemplo de cómo utilizar la información que has obtenido para resolver cualquier situación análoga a esta, en la que el cliente te indique únicamente las tasas de nacimiento y mortalidad de la especie y el término de competencia.

- Representaciones gráficas que ilustren los distintos casos que pueden presentarse dependiendo de las tasas de natalidad y mortalidad y del término de competencia.