

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA
*DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA, INVESTIGACIÓN OPERATIVA Y
COMPUTACIÓN*

MODELOS DE CRECIMIENTO ECONÓMICO:
APORTACIONES DESDE LA TEORÍA DE
LOS JUEGOS DINÁMICOS

Carlos M. González Alcón

Memoria para optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas realizada bajo
la dirección del Dr. D. Joaquín Sicilia
Rodríguez.

La Laguna, mayo de 1998

JOAQUÍN SICILIA RODRÍGUEZ, CATEDRÁTICO EN ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA DE LA UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA.

CERTIFICO: Que la presente memoria, titulada: *Modelos de crecimiento económico: Aportaciones desde la Teoría de los Juegos Dinámicos* ha sido realizada bajo mi dirección por el Licenciado D. Carlos González Alcón, y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Matemáticas.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos que haya lugar, firmo el presente en

La Laguna, a siete de abril de 1998

Fdo: Joaquín Sicilia Rodríguez

Modelos de crecimiento económico: Aportaciones desde la Teoría de los Juegos Dinámicos

Tesis Doctoral de Carlos González Alcón. Julio 1998.

Resumen

El dilema entre consumo y crecimiento económico es el objeto del presente trabajo, analizado desde la teoría de los juegos dinámicos. Para ello se suponen a los agentes agrupados en generaciones que se suceden en el tiempo solapándose. Cada generación tiene un periodo activo en el que tiene control sobre el sistema y un periodo terminal de retiro. Bajo este esquema se estudian dos tipos de procesos de decisión.

1. El reparto consumo-inversión a lo largo del periodo activo de una generación cuando se consideran los distintos miembros que la forman, con diferentes intereses y control parcial sobre el sistema. Esto se realiza mediante un juego diferencial bipersonal. En él se estudian estrategias eficientes y equilibrios de Nash en ciclo abierto. Igualmente se considera el caso en el que los jugadores se proponen unas metas en el estado de la economía que pretenden alcanzar al finalizar su horizonte temporal.

2. Cada generación deja el sistema a la siguiente en un determinado estado que depende de su nivel de consumo, pero que influirá en su bienestar a lo largo de su etapa de retiro. Se propone para ello un juego de información perfecta con infinitos jugadores cada uno con un continuo de estrategias puras. Para este modelo se proponen diversas estrategias estacionarias y se dan condiciones bajo las cuales constituyen equilibrios de Nash y perfectos en los subjuegos. Se define un tipo de estrategias *sin memoria* y de estrategias *justas* y se dan procedimientos para generarlas de manera que sean equilibrios perfectos en los subjuegos. Además se demuestra la existencia de equilibrio de Nash en estrategias puras para esta clase de juegos.

Economic growth models. Contributions from the Dynamic Game Theory

Ph. D. Thesis by Carlos González Alcón. July 1998.

Abstract

The dilemma between consumption and economic growth is analyzed from the dynamic game theory point of view. The economic agents are grouped in generations that follow one another. Two generations overlap their temporal live horizon at each period. Each generation has an active period in which it controls the system and an inactive period. Within this framework two decision processes are considered.

In the first, the consumption-investment distribution through the active period of a generation when the players are two classes of agents with different interests and a partial control over the system. This is modelled as a differential game. Efficient strategies and open-loop Nash equilibria are discussed. The attention is devoted to the case in which the players want the economy to reach certain goals at the end of the temporal horizon.

In the second, each generation leaves the system to the following generation in a certain state that depends on its consumption level but which influence its well-being throughout its retirement stage. A perfect information game with an infinite number of players is proposed. The players have a continuum of pure strategies. For this model some stationary strategies are proposed and conditions are given under which these strategies constitute Nash and subgame perfect equilibria. The work defines "memoryless" and "fair" strategies and it gives some general procedures to generate subgame perfect equilibria of these types. The existence of pure strategies Nash equilibrium for these overlapping generations games is proved.

A mis padres
y hermanos

Agradecimientos

No puedo dejar de agradecer la dedicación del Profesor D. Joaquín Sicilia, que ha guiado y estimulado mi trabajo durante todo este tiempo. Su amistad, apoyo y ánimo han sido claves para poder cerrar esta etapa de mi labor investigadora.

Al Profesor D. José Antonio Álvarez, detonante de la elección del tema de la memoria y catalizador de muchas de las ideas.

Al Profesor D. Ignacio García-Jurado por su cálida acogida durante mi estancia en la Universidad de Santiago de Compostela y sus incontables detalles de amistad, así como a todo el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de dicha universidad.

Gracias también a todos los miembros del Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación, con los que he compartido a lo largo de estos años tantas cosas.

Gracias a Ángel Montesdeoca, siempre dispuesto a resolver mis dudas sobre \LaTeX ; y a Donald Knuth y Leslie Lamport por crear este sistema con el que se ha escrito la memoria.

A mis padres, hermanos y amigos, que me han sostenido con su presencia y su cariño.

Índice General

Prólogo	vii
1 Teoría de Juegos y Teoría del Control	1
1.1 Juegos en forma extensiva	1
1.2 Juegos en forma normal	3
1.3 Equilibrio de Nash y perfecto en los subjuegos	4
1.4 Juegos infinitos	7
1.5 Soluciones cooperativas. Regateo	8
1.6 Teoría del control óptimo	11
1.7 Juegos diferenciales	14
1.7.1 Equilibrios en juegos diferenciales	18
1.7.2 Cálculo de los equilibrios en ciclo abierto	21
2 Juegos de crecimiento económico	23
2.1 Juegos de capitalismo	23
2.2 El modelo de crecimiento y distribución	26
2.3 Equilibrios de Nash	27
2.3.1 Cálculo de los equilibrios	31
2.3.2 Sensibilidad de los pagos	36
2.3.3 El efecto del rango de acción sobre el consumo y la acumulación de capital: un ejemplo	39
2.4 Óptimos de Pareto	45
2.5 Conclusiones	51
3 Juegos de crecimiento con metas en el capital	55
3.1 El modelo con metas en el estado final	55
3.2 Equilibrios de Nash	58
3.2.1 Selección de equilibrios	70
3.2.2 Ejemplo	70

3.3	Óptimos de Pareto	75
3.4	Comparación de equilibrios	83
3.4.1	Ejemplo	87
3.5	Conclusiones	89
4	Un juego de generaciones sucesivas	91
4.1	Modelos de generaciones sucesivas	91
4.2	El juego de generaciones	92
4.3	Estrategias estacionarias	94
4.3.1	Estrategias que producen capital constante	95
4.3.2	Estrategias con movimientos iguales	100
4.3.3	Estrategias con pagos constantes	106
4.4	Existencia del equilibrio de Nash	110
4.5	Estrategias sin memoria perfectas en los subjuegos	112
4.6	Funciones de respuesta justas	119
4.7	Conclusiones	121
	Bibliografía	123

Un gran experto en aritmética. [...]
Que jamás pisó un campo de batalla.
Que sabe de estrategias y de guerras
lo que una cardadora.
¡Un teórico!

W. Shakespeare. *Othello*.

Prólogo

Los problemas de decisión multipersonales analizados bajo la óptica de la Teoría de los Juegos, han servido desde los comienzos de esta disciplina para modelizar situaciones que se presentan en la Economía. Ya en el título del trabajo pionero de von Neumann y Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, aparecía esta vocación de estudiar modelos del comportamiento económico, y esta característica se ha mantenido a lo largo de este medio siglo.

El desarrollo en el tiempo que presentan muchos de los procesos de decisión hace que para una mayor comprensión de estos se haya acudido a modelos dinámicos. La forma extensiva de expresar los juegos fue un primer intento de considerar su carácter temporal. Sin embargo, esta forma extensiva se encuentra con graves limitaciones cuando los jugadores pueden elegir entre un número infinito de posibles movimientos, o cuando pueden tomar decisiones en una cantidad infinita de instantes. Para afrontar algunas de estas situaciones más complejas se desarrollaron los juegos continuos y los juegos diferenciales, para los que se adaptaron los conceptos tradicionales de estrategias y equilibrios.

El objeto de este trabajo es afrontar la disyuntiva de toda sociedad entre el consumo actual de bienes a su disposición y la inversión de parte de esa riqueza con la que conseguir un bienestar futuro. Para ello trataremos con dos tipos de modelos, uno con horizonte finito y el otro con horizonte infinito.

El primer modelo retoma uno ya clásico de juego diferencial de capitalismo. Pretende adentrarse en el proceso de decisiones entre los grupos que forman una misma generación, cuando colectivamente se han propuesto unos objetivos, a fin de cumplir con las generaciones venideras.

El otro modelo tiene por jugadores las distintas generaciones de una cierta economía, que se van sucediendo unas a otras en número infinito a partir del instante

inicial considerado. Con sus decisiones cada generación es responsable del estado en que deja el sistema a sus sucesores, y en el que está interesada no sólo por motivos altruistas, sino también porque de ello depende su bienestar en el último periodo de su vida.

El contenido de la memoria lo hemos dividido en cuatro capítulos. En el primero se resumen los principales resultados que utilizaremos de la Teoría de Juegos, especialmente de los no cooperativos. Se presentan algunos resultados de la Teoría del Control Óptimo que resultan imprescindibles para poder establecer condiciones de equilibrio en juegos diferenciales, a los cuales se dedica la última sección.

Los dos siguientes capítulos abordan el proceso de decisión intrageneracional desde la perspectiva de los juegos diferenciales. Considerando un modelo de capitalismo se establecerán las políticas óptimas de consumo e inversión relativas a los jugadores.

En el capítulo segundo se amplía la variabilidad de los parámetros considerados en el estudio de la dicotomía entre crecimiento y distribución de la renta. Se estudia el equilibrio de Nash en ciclo abierto y se hace hincapié en la sensibilidad de los resultados frente a perturbaciones en los parámetros. Además se calculan los pagos no dominados del juego y las acciones que los alcanzan.

El tercer capítulo aborda la influencia sobre los resultados anteriores de la introducción de una nueva restricción en el modelo de capitalismo considerado. Esta restricción viene dada en forma de objetivos mínimos de desarrollo, los cuales se fijan como resultado de algún proceso negociador o bien por imposición externa. Estas metas de crecimiento hacen el papel de enlace con la siguiente generación. Bajo esta nueva óptica se diseñan nuevas metodologías para el cálculo de equilibrios de Nash y de óptimos de Pareto, y se confrontan con los resultados del capítulo anterior. Se analizan los respectivos pagos y se establecen condiciones bajo las cuales los equilibrios encontrados son no dominados.

El último capítulo presenta un modelo nuevo que pretende afrontar el crecimiento como proceso intergeneracional. Se trata de un juego continuo infinito ya que tiene un número infinito numerable de jugadores, cada uno con un espacio de estrategias puras continuo. Este modelo de generaciones sucesivas presenta la novedad de situar a cada generación en condiciones dependientes del comportamiento de las anteriores. Se establecen condiciones para que ciertas estrategias constituyan equilibrios de Nash y equilibrios perfectos en los subjuegos. El denominador común de estas estrategias es que producen una cierta estacionariedad en los resultados. Además se garantiza la existencia de equilibrio de Nash en este tipo de juegos. También se contempla un

tipo general de estrategia sin memoria y se caracterizan aquellas que son perfectas en los subjuegos. Se proponen, por último, algunas condiciones deseables de sencillez y equidad y se dan procedimientos para obtener estrategias que cumplan dichas condiciones.

1

Teoría de Juegos y Teoría del Control

El objetivo de este primer capítulo es presentar algunos resultados y propiedades que serán necesarios en el resto de la memoria. Después de revisar ciertas definiciones básicas de la Teoría de Juegos y los principales teoremas que hacen referencia a ellas, pasaremos a resumir muy brevemente los conceptos más elementales de la Teoría del Control. Finalmente, abordaremos un tipo de juego diferencial con horizonte finito y haciendo uso de la Teoría del Control daremos condiciones de equilibrio.

1.1 Juegos en forma extensiva

La manera más natural de describir un juego es señalar las diferentes formas en que se puede desarrollar una partida a la vista de las reglas del mismo. Esta descripción formal y completa de cómo se juega, especificando el orden de intervención de los jugadores se puede representar mediante un árbol, siempre que las alternativas de cada jugador sean finitas.

A lo largo de la presente memoria consideraremos que el azar no interviene y que debemos considerar sólo los movimientos de los jugadores. Por tanto, todas las definiciones las daremos bajo este supuesto.

Cada nodo o vértice del árbol de juego representa un movimiento de alguno de los jugadores, y las ramas que de él salen son las diferentes alternativas. Al final de cada secuencia de jugadas nos encontraremos en un nodo-hoja del que no parte ninguna

rama. Asociado con cada uno de estos nodos terminales tendremos un vector de pagos a los jugadores.

Formalizando estas ideas podemos dar las siguientes definiciones.

Definición 1.1

Un árbol de juego es un grafo acíclico dirigido con un vértice inicial al que no llega ningún arco, que llamaremos raíz. Las ramas que parten de un nodo cualquiera son las alternativas, que supondremos tienen una etiqueta. Los nodos de los que parten aristas son los movimientos; a los que únicamente les llega arista son los nodos terminales. Llamaremos partida al único camino que une la raíz con un nodo terminal.

Definición 1.2

Un juego N -personal en forma extensiva sin movimientos del azar es un árbol de juego con las siguientes especificaciones:

1. *Una partición de los movimientos en N conjuntos indexados M_1, \dots, M_N , donde M_i son los movimientos del jugador i .*
2. *Para cada conjunto M_i de movimientos del jugador i supondremos una partición $\{U_i^1, \dots, U_i^{n_i}\}$ donde a cada elemento le llamaremos conjunto de información, de manera que todos los nodos de un mismo elemento de la partición tienen un mismo número de ramas y con las mismas etiquetas. Llamaremos A_i^j a las alternativas o etiquetas que parten de todos los nodos del conjunto de información U_i^j . Además, ningún conjunto de información contiene dos nodos de una misma partida.*
3. *Cualquier partida contiene al menos un conjunto de información.*
4. *Una función de resultados $\pi(w) = (\pi_1(w), \dots, \pi_N(w))$ asigna un vector de \mathbb{R}^n a cada nodo terminal w .*

Los conjuntos de información pretenden agrupar aquellos nodos o puntos de decisión que son indistinguibles por el jugador en el momento en que tiene que decidir. En todos los puntos de un mismo conjunto de información el jugador conoce lo mismo sobre las actuaciones anteriores del resto de los jugadores y sobre su propia situación y, por supuesto, tiene las mismas posibles alternativas aunque sus posibles consecuencias puedan ser muy diversas.

Diremos que un juego es de *información perfecta* si en cada instante toda la información relevante conocida por uno de los jugadores es conocida por el resto. En este caso los conjuntos de información están constituidos por un único nodo.

Una estrategia para un jugador en un juego en forma extensiva es una regla para determinar su movimiento en cada uno de sus conjuntos de información.

Definición 1.3

Una estrategia pura σ para el jugador i en un juego en forma extensiva es una aplicación que a cada conjunto de información U_i^j de ese jugador le asocia uno de sus movimientos permitidos, esto es, $\sigma(U_i^j) \in A_i^j$.

Tendremos, por tanto, que el espacio de estrategias puras de i se puede identificar con el producto cartesiano $\prod_{j=1}^{n_i} A_i^j$. A este conjunto lo denotaremos S_i .

Llamaremos subjuego a la parte de un juego que queda por jugar a partir de un cierto instante, en el que la historia completa del juego hasta entonces es conocida por todos los jugadores. Formalmente tendremos la siguiente definición.

Definición 1.4

Un subjuego de un juego en forma extensiva es el subárbol que consiste en considerar únicamente los nodos que son hijos de un cierto nodo n o de sus sucesores, donde

1. El conjunto de información asociado a n tiene a dicho nodo como único elemento.
2. Los conjuntos de información de nodos que siguen a n están contenidos en el subárbol, es decir, siguen también a n .

1.2 Juegos en forma normal

Una forma más sencilla de definir un juego es usar la forma normal o también llamada estratégica pues abstrae el aspecto temporal del juego para centrarse en las estrategias que son utilizadas.

Definición 1.5

Un juego en forma normal viene dado por $(\mathbf{N}, (S_i)_{i \in \mathbf{N}}, (P_i)_{i \in \mathbf{N}})$, donde \mathbf{N} es el conjunto de jugadores, S_i ($i \in \mathbf{N}$) es el conjunto de estrategias puras del jugador i , y $P_i : \prod_{i \in \mathbf{N}} S_i \rightarrow \mathbb{R}$ la función de pagos del jugador i de manera que a cada elemento del producto cartesiano de los conjuntos de estrategias le asocia un número real que representa el pago final a ese jugador.

Diremos que un juego en forma normal es *finito* si el conjunto \mathbf{N} y todos los conjuntos S_i son finitos.

Dado un juego en forma extensiva puede construirse un juego en forma estratégica que lo representa. Para ello se construyen los conjuntos S_i de todas las estrategias

del juego en forma extensiva, tal como se describen en la definición 1.3, esto es, todos los elementos del producto cartesiano $\prod_{j=1}^{n_i} A_i^j$. Asociado con cada perfil de estrategias $s \in \prod_{i \in \mathbf{N}} S_i$ hay un único nodo terminal del árbol de juego, w , al que se llega al elegir cada jugador el movimiento que le indica su estrategia. Asociado a este nodo terminal tenemos el vector de pagos $\pi(w)$ que hacemos coincidir con $(P_i(s))_{i \in \mathbf{N}}$.

1.3 Equilibrio de Nash y perfecto en los subjuegos

El equilibrio de Nash (EN) es el principal concepto de solución de un juego. Por solución del juego nos referimos a una recomendación de cómo debe ser jugado, bajo el supuesto de racionalidad del resto de los jugadores. A esta recomendación se le pide que sea consistente, es decir, que ningún jugador tenga incentivos para desviarse de ella si no lo hacen los demás.

Definición 1.6

Dado un juego en forma normal $(\mathbf{N}, (S_i)_{i \in \mathbf{N}}, (P_i)_{i \in \mathbf{N}})$, un perfil de estrategias $s \in \prod_{i \in \mathbf{N}} S_i$ constituye un equilibrio de Nash en estrategias puras si para cada $i \in \mathbf{N}$

$$P_i(s) \geq P_i(s_{-i}, r), \quad \forall r \in S_i$$

donde con (s_{-i}, r) denotamos un perfil de estrategias igual a s en todas sus componentes salvo la i -ésima que es sustituida por r .

No todo juego tiene algún equilibrio de Nash en estrategias puras, aunque para ciertos juegos sí se puede garantizar su existencia. Así, tenemos el siguiente resultado debido a Kuhn (1953) para juegos en forma extensiva.

Teorema 1.1

Todo juego N -personal finito de información perfecta tiene un EN en estrategias puras.

Para la demostración de este resultado se procede por inducción hacia atrás, al estilo de la programación dinámica. En cada nodo del árbol se elige la rama que conduce a un mayor pago para el jugador al que pertenece el nodo, comenzando desde los nodos terminales hasta la raíz.

El ejemplo de la figura 1.1 representa un juego con información perfecta. Cada nodo tiene una etiqueta $n.m$ donde n es el jugador al que pertenece el nodo y m una numeración de los nodos de un mismo jugador. El jugador 1 mueve primero y elige entre dos posibles alternativas etiquetadas A y B . Con la información de la

elección hecha por el primer jugador el segundo elige entre otro par de alternativas llamadas ahora a y b . Después de este segundo movimiento se habrá alcanzado un nodo terminal con el que tenemos asociado un par de pagos.

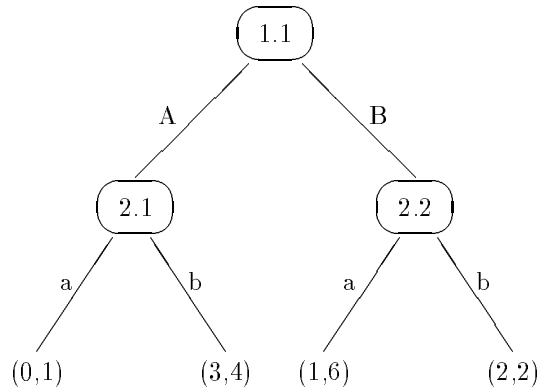


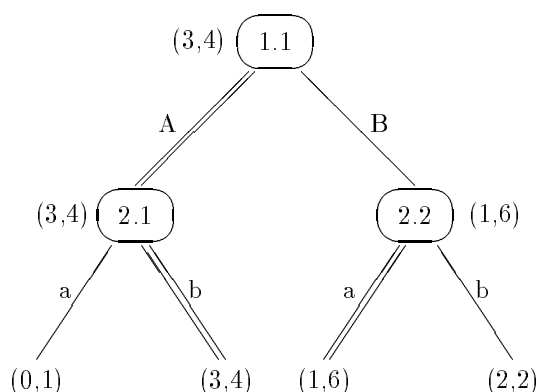
Figura 1.1

Juego en forma extensiva.

Para hallar el EN procedemos de los nodos más alejados de la raíz a los más cercanos. Cuando el jugador 2 esté en el nodo 2.1 su mejor elección será la b , pues con ella gana 4 frente a 1 que consigue si mueve a . Asociamos entonces al nodo 2.1 el pago $(3,4)$ (ver figura 1.2). Algo similar hacemos con el nodo 2.2 tomando la opción a y asignándole el pago $(1,6)$. Llegados a este punto tomamos el nodo 1.1 al que asociaremos el pago $(3,4)$ que se obtiene cuando el primer jugador elige A . Expresando los equilibrios del juego como opciones a elegir en los conjuntos de información que forman los nodos 1.1, 2.1, 2.2 tenemos que Aba y Abb son EN. Como se puede apreciar, si el jugador 1 se desvía del equilibrio moviendo B , entonces gana 1 en vez de 3 siempre que el segundo jugador mantenga la opción que le indica el equilibrio. Por otra parte, si se eligió A , el segundo jugador no consigue mejorar su pago cambiando el movimiento sugerido por el equilibrio que es b .

Si consideramos el juego anterior en forma estratégica tendremos que las estrategias puras del jugador 1 son A y B ; las del jugador 2 consistirán en los pares aa , ab , ba y bb , donde el primer elemento es la acción a tomar si el jugador se encuentra en 2.1 y el segundo su movimiento cuando está en el nodo 2.2. La matriz de pagos es la expresada en la tabla 1.1, donde los equilibrios aparecen señalados. Ahora tenemos un equilibrio más (Baa) que no encontrábamos antes con el método de inducción hacia atrás.

El teorema 1.1 nos garantiza la existencia de EN para una cierta clase de juegos. Este resultado se puede ampliar si consideramos estrategias más generales, que

**Figura 1.2**

Árbol de juego de la figura 1.1 en el que se han señalado las opciones óptimas para cada nodo y los pagos óptimos asociados. Utilizando la inducción hacia atrás los EN resultantes son los que en los nodos 1.1, 2.1 y 2.2 recomiendan utilizar A, b, a o bien A, b, b .

Tabla 1.1

Matriz de pagos del juego de la figura 1.1 en forma estratégica. Aparecen señalados los tres EN en estrategias puras.

J_1	J_2			
	aa	ab	ba	bb
A	0,1	0,1	3,4	3,4
B	1,6	2,2	1,6	2,2

llamaremos mixtas.

Definición 1.7

Dado un juego en forma normal $(\mathbf{N}, (S_i)_{i \in \mathbf{N}}, (P_i)_{i \in \mathbf{N}})$, una estrategia mixta para el jugador i es una distribución de probabilidad sobre su espacio de estrategias puras S_i .

Definiendo los pagos de una estrategia mixta como la esperanza de los pagos puede ampliarse la definición de equilibrio de Nash en estrategias puras a estrategias mixtas. Tenemos entonces el siguiente resultado más general:

Teorema 1.2 (Nash, 1950, 1951)

Todo juego finito tiene un equilibrio (en estrategias mixtas).

A continuación daremos un concepto algo más restrictivo que el equilibrio de Nash para los juegos en forma extensiva que fue introducido por Selten en 1965 (ver Selten, 1975).

Definición 1.8

Un equilibrio de Nash de un juego en forma extensiva se dice que es perfecto en los subjuegos (EPS) si induce un equilibrio de Nash en todos los subjuegos posibles del juego.

Si el juego es de información perfecta todo nodo no terminal constituye un conjunto de información. Dado cualquier nodo, el subárbol que le tiene por raíz puede considerarse un subjuego. En este caso las estrategias indican la acción a tomar en todos y cada uno de los nodos. Para que un perfil de estrategias sea perfecto en los subjuegos debe verificar que para cada subárbol posible la parte correspondiente a los nodos del subárbol en la estrategia ha de ser un EN para ese subjuego. Obsérvese que el EN induce equilibrios en los subjuegos que serían jugados en caso de seguirse el perfil de estrategias propuesto, pero no necesariamente en los otros subjuegos.

De esto y del teorema 1.1 se obtiene el siguiente resultado

Teorema 1.3

Todo juego N -personal finito de información perfecta tiene un EPS en estrategias puras.

En el ejemplo mostrado en las figuras 1.1 y 1.2, de los dos EN que se encontraron únicamente *Aba* es EPS. Efectivamente, si consideramos el subjuego que tiene como raíz el nodo 2.2, para ser EN en este subjuego ha de recomendar al jugador 2 mover *a*, aunque si se jugase el perfil de estrategias *Aba* sin desviaciones de ningún jugador, el nodo 2.2 nunca sería alcanzado.

La información perfecta del teorema 1.3 puede relajarse si se considera el equilibrio en estrategias mixtas

Teorema 1.4

Todo juego N -personal finito tiene un EPS en estrategias mixtas.

1.4 Juegos infinitos

Consideremos un juego en forma estratégica en el que los jugadores tienen un continuo de estrategias puras. Denotemos por $S_i \subseteq \mathbb{R}$ al conjunto de estrategias puras del jugador i o también llamado espacio de acción de i . El desarrollo del juego consiste en la elección de un número real de su espacio de acciones por parte de cada

jugador. Una función de pagos $P_i(x)$ indicará el pago a i cuando se elige el punto $x \in S := \prod_{i \in \mathbf{N}} S_i$.

Se puede garantizar la existencia de EN si los espacios de acciones son compactos y las funciones de pagos continuas.

Teorema 1.5

Un juego N -personal con espacios de acciones S_i ($i \in \mathbf{N}$) compactos y con funciones de pagos P_i ($i \in \mathbf{N}$) continuas en todo S admite un EN en estrategias mixtas.

Demostraciones de este resultado pueden verse en Glicksberg (1950) y Owen (1974).

Exigiendo concavidad en las funciones podemos encontrar equilibrios en estrategias puras como indica el siguiente teorema, en cuya demostración se utiliza el teorema del punto fijo de Brower y puede consultarse en Başar y Olsder (1982).

Teorema 1.6

Un juego N -personal con espacios de acciones S_i ($i \in \mathbf{N}$) compactos y convexos y con funciones de pagos P_i ($i \in \mathbf{N}$) estrictamente cóncavas en x_i para todo punto de S admite un EN en estrategias puras.

1.5 Soluciones cooperativas. Regateo

Consideremos ahora el conjunto X de pagos factibles formado por todos los posibles resultados de un juego. Si el juego viene dado en forma extensiva, X está constituido por los vectores de pagos asociados a cada nodo terminal. Si el juego está expresado en forma normal $(\mathbf{N}, (S_i)_{\mathbf{N}}, (P_i)_{\mathbf{N}})$ tendremos que $X = \{(P_i(s))_{i \in \mathbf{N}} : s \in \prod_{i \in \mathbf{N}} S_i\}$.

Si suponemos que los jugadores pueden firmar antes de comenzar el juego acuerdos vinculantes sobre las estrategias que utilizarán, el conjunto de pagos factibles constituirá el objeto de un cierto proceso de negociación. Estaremos hablando en este caso de soluciones cooperativas del juego.

Definición 1.9

Un punto del conjunto de pagos factibles $p \in X$ se dice que es un óptimo de Pareto o que es Pareto-eficiente si no existe otro pago factible q que sea mayor o igual para todos los jugadores, y para alguno mayor estrictamente. Esto es, para todo $q \in X$,

$$p_i \leq q_i, \quad \forall i \in \mathbf{N} \quad \implies \quad p = q.$$

Definición 1.10

Un pago es individualmente racional si asigna a cada jugador una cantidad que es al menos tan grande como la que puede garantizarse el jugador por sí mismo, en

ausencia de acuerdo alguno con los demás. Al vector que tiene por componentes estos pagos mínimos para cada jugador lo llamaremos punto de desacuerdo d , de manera que un pago es individualmente racional si $p \geq d$, es decir, $p_i \geq d_i \forall i \in \mathbf{N}$.

En el proceso de negociación del que antes hablábamos, aunque teóricamente se podrían alcanzar acuerdos sobre cualquier punto factible, no parece racional elegir un pago que no sea a la vez individualmente racional y óptimo de Pareto. Al conjunto de pagos que verifican estas dos propiedades lo denominaremos *conjunto de negociación*.

Para los juegos bipersonales John Nash propuso en sus trabajos de 1950 y 1953 una serie de axiomas que debieran verificar los pagos del acuerdo. Supondremos que la utilidad es transferible y, por tanto, el conjunto de pagos alcanzables es la envoltura convexa de los resultados del juego.

En el *problema de negociación* se trata de, dado un conjunto de puntos factibles X y un punto de desacuerdo $d \in X$, elegir un punto de acuerdo o solución negociada. Una solución de negociación será una función B que a cada par (X, d) le asocia un punto de X .

Los axiomas que exige Nash a las funciones de negociación son los siguientes:

1. *Invarianza frente a transformaciones lineales.* El resultado no ha de modificarse si se realizan transformaciones lineales crecientes en los pagos. Esto es, dada la transformación lineal

$$\tau(x) = (\alpha x_1 + \beta, \alpha' x_2 + \beta'), \quad \text{con } \alpha, \alpha' > 0,$$

se tiene que

$$B[\tau(X), \tau(d)] = \tau[B(X, d)]$$

2. *Racionalidad individual no dominada.* El par de pagos acordado ha de pertenecer al conjunto de negociación, es decir,

$$B(X, d) \geq d$$

$$B(X, d) \leq y \in X \implies B(X, d) = y.$$

3. *Independencia de alternativas irrelevantes.* Si $d \in Y \subseteq X$ entonces

$$B(X, d) \in Y \implies B(Y, d) = B(X, d).$$

4. *Simetría.* Si $d_1 = d_2$ y para todo $(x, y) \in X$ se tiene que $(y, x) \in X$, entonces $B(X, d)$ tiene sus dos componentes iguales.

Nash demostró que existe un único punto de acuerdo o solución negociada que satisface simultáneamente los anteriores axiomas.

Teorema 1.7 (Nash, 1950)

Existe una única función $B(\cdot, \cdot)$ que satisface los axiomas 1-4 anteriores. Además, para todo problema de negociación (X, d) se tiene que

$$B(X, d) \in \arg \max\{(x_1 - d_1)(x_2 - d_2) : x \in X, x \geq d\}.$$

La expresión maximizada recibe el nombre de producto de Nash. Si prescindimos del axioma de simetría y asignamos a cada jugador un peso de negociación w y w' podemos también encontrar una única función de manera que ahora maximiza el que llamaremos producto de Nash generalizado, esto es,

$$B(X, d) \in \arg \max\{(x_1 - d_1)^w(x_2 - d_2)^{w'} : x \in X, x \geq d\}$$

tal como se prueba en Kalai (1977).

Otros autores han propuesto diversos métodos para seleccionar pagos como Luce y Raiffa (1957), más tarde axiomatizado y modificado por Kalai y Smorodinsky (1975), o como Stahl (1972) o Rubinstein (1982), a partir de otros sistemas de axiomas (ver Roth, 1979).

Antes de comentar los juegos diferenciales, los cuales veremos en la última sección, describiremos los fundamentos de la Teoría del Control Óptimo, ya que el cálculo de los equilibrios de Nash para ciertos juegos diferenciales se reduce a resolver un problema de control óptimo.

1.6 Teoría del control óptimo

La Teoría del Control considera procesos que evolucionan en el tiempo dados generalmente como un sistema de ecuaciones diferenciales que dependen del tiempo. Esta evolución es resultado de los valores que toman ciertas variables de control en cada instante y del estado inicial del sistema. Asociado con estas variables de control y con la correspondiente evolución del sistema se tiene una función de ganancia. El objetivo es diseñar el control que maximiza la ganancia total adquirida a lo largo de toda la duración del proceso.

Llamaremos variable de estado, y lo denotaremos por $x(t)$, a la variable n -dimensional que nos describe el estado del sistema en un instante t . Los controles o variables independientes (por contraposición a las de estado que serían dependientes) en un tiempo t los denotaremos con el m -vector $u(t)$.

La Teoría del Control la utilizaremos como herramienta para el estudio de los juegos diferenciales. Nos limitaremos a considerar sistemas en los que el horizonte temporal es finito y conocido de antemano.

El problema de control óptimo con horizonte finito fijo

Se trata de encontrar una función vectorial continua a trozos $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ y una función vectorial de estado continua y continuamente diferenciable a trozos $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ definidas en el intervalo $[0, T]$ de manera que se maximice el funcional

$$J = \int_0^T g(t, x(t), u(t)) dt \quad (1.1)$$

sujeto a

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (1.2)$$

es decir

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(t, x(t), u(t)) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= f_n(t, x(t), u(t)) \end{aligned}$$

y de forma que

$$u(t) \in S, \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.3)$$

donde $T \in \mathbb{R}_+$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $S \subseteq \mathbb{R}^m$ son fijos.

Supondremos que $g(t, x, u)$ y $f_i(t, x, u)$ ($i = 1, \dots, n$) son continuas respecto de sus $1 + n + m$ variables y que $\partial f_i(t, x, u) / \partial x_j$ es continua con respecto a todos sus argumentos para $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m$.

Definiremos el *hamiltoniano* H con ayuda de una *variable de coestado* vectorial $p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$, de la siguiente forma:

$$H(t, x, u, p) = g(t, x, u) + p(t) \cdot f(t, x, u) = g + \sum_{i=1}^n p_i f_i,$$

donde el punto denota producto escalar de vectores.

El siguiente teorema, denominado *Principio del Máximo* nos ofrece condiciones necesarias de optimalidad para el problema anterior.

Teorema 1.8

Sea $u^*(t)$ un control continuo a trozos definido en $[0, T]$ que resuelve el problema (1.1)–(1.3) y sea $x^*(t)$ la trayectoria del sistema asociada al uso de ese control. Entonces existe una función vectorial continua y continuamente diferenciable a trozos $p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$, de manera que para cada $t \in [0, T]$ se tiene que $u^*(t)$ maximiza $H(t, x^*(t), u, p(t))$ para $u \in S$, esto es

$$H(t, x^*(t), u^*(t), p(t)) \geq H(t, x^*(t), u, p(t)), \quad \forall u \in S.$$

En los puntos en los que $u^*(t)$ es continua, para $i = 1, \dots, n$, se tiene

$$\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H^*}{\partial x_i}$$

donde

$$\frac{\partial H^*}{\partial x_i} = \frac{\partial H}{\partial x_i}(t, x^*(t), u^*(t), p(t))$$

y además

$$p_i(T) = 0, \quad \text{para cada } i = 1, \dots, n.$$

Problema de control óptimo con horizonte finito fijo (versión general)

Como en el problema anterior se trata de encontrar una función de control continua a trozos $u(t)$ y una función de estado asociada continua y continuamente diferenciable a trozos $x(t)$ definidas en el intervalo $[0, T]$, de manera que maximice un funcional como el descrito en (1.1) al que añadiremos ahora una función q dependiente del estado del sistema en el instante final:

$$J = \int_0^T g(t, x(t), u(t)) dt + q[x(T)], \quad (1.4)$$

sujeto a las ecuaciones que definen la dinámica del sistema y su estado inicial

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad (1.5)$$

$$x(0) = x_0 \quad (1.6)$$

y a las que adjuntamos ciertas condiciones sobre el estado final alcanzado en forma de igualdades o desigualdades

$$\begin{aligned} r_j[x(T)] &= 0 & \text{para } j = 1, \dots, n' \\ r_j[x(T)] &\geq 0 & \text{para } j = n' + 1, \dots, n'' \end{aligned} \quad (1.7)$$

junto con la condición anterior

$$u(t) \in S \subseteq \mathbb{R}^m, \quad \text{para todo } t \in [0, T]. \quad (1.8)$$

Supondremos que las funciones r_j ($j = 1, \dots, n''$) y q son de clase C^1 .

Teorema 1.9

Sea el problema descrito en (1.4)–(1.8), si u^* es un control óptimo con $x^*(t)$ la trayectoria de estado asociada, entonces existe una constante p_0 y una función vectorial continua y continuamente diferenciable a trozos $p(t)$, de forma que para todo $t \in [0, T]$ existen escalares $\gamma_1, \dots, \gamma_{n''}$ de manera que

$$(p_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n''}) \neq (0, 0, \dots, 0),$$

para cada $t \in [0, T]$ resulta que $u^*(t)$ maximiza $H(t, x^*(t), u, p(t))$ para $u \in S$ y, excepto en los puntos de discontinuidad de $u^*(t)$, se cumple que

$$\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(t, x^*(t), u^*(t), p(t)) \quad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

Además $p_0 = 1$ o bien $p_0 = 0$, y se satisfacen las siguientes condiciones de trasversalidad

$$p_i(T) = p_0 \frac{\partial q[x^*(T)]}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n''} \gamma_j \frac{\partial r_j[x^*(T)]}{\partial x_i} \quad \text{para } i = 1, \dots, n,$$

donde

$$\gamma_j \geq 0 \quad (= 0 \text{ si } r_j[x^*(T)] > 0), \quad j = n' + 1, \dots, n''$$

y el hamiltoniano viene dado por

$$H(t, x, u, p) = p_0 g(t, x, u) + p(t) \cdot f(t, x, u).$$

Téngase en cuenta que para la búsqueda del control óptimo hay que añadir las condiciones (1.5)–(1.8) del problema a las exigidas por el teorema. En adelante supondremos que $p_0 = 1$. Los problemas en los cuales $p_0 = 0$ son en cierto sentido degenerados, puesto que las condiciones exigidas por el teorema no cambian cuando reemplazamos la función g del funcional objetivo por cualquier otra.

El siguiente teorema nos ofrece condiciones suficientes para la optimalidad del problema de control.

Teorema 1.10

Sean u^* y x^* un perfil de controles y su variable de estado asociada, admisibles para el problema (1.4)-(1.8). Si a las condiciones del teorema 1.9 para $p_0 = 1$ añadimos que

$$\max_{u \in S} H(t, x, u, p)$$

exista y sea cóncava en x , y

$$\sum_{k=1}^{n''} \gamma_k r_k(x)$$

sea cuasicóncava en x , entonces se puede afirmar que u^* es óptimo del problema.

Comentaremos a continuación en qué consisten los juegos diferenciales y cómo calcular los equilibrios para estos juegos.

1.7 Juegos diferenciales

Al igual que en la Teoría del Control expuesta en la sección anterior, los juegos diferenciales presentan también sistemas dinámicos expresados como sistemas de ecuaciones diferenciales que son conducidos mediante ciertas variables o controles.

Estas variables de control las supondremos dependientes de diferentes controladores (jugadores), cada uno de los cuales alcanza una ganancia dependiente de los controles utilizados y del comportamiento del sistema a lo largo de todo el horizonte temporal.

Los juegos diferenciales fueron introducidos por Rufus Isaacs en una serie de trabajos para la Rand Corporation en los años 1954-55. Fueron revisados, ampliados y publicados algo más tarde (Isaacs, 1965). En él se definen como

“juegos en los que los jugadores se enfrentan con largas sucesiones — pueden ser continuas o discretas— de decisiones que se enlazan juntamente imponiendo un modelo perceptible y calculable.”

Este tipo de juegos pueden verse como juegos en forma extensiva en los que los jugadores tienen más alternativas entre las que elegir, y que además pueden elegir las con una frecuencia mucho mayor. En realidad suelen trabajar con un continuo, tanto de posibles acciones como de instantes en los que decidir los controles a usar.

Al igual que en los juegos clásicos en forma extensiva hay tres elementos “clave” que hemos de identificar: las estrategias, los movimientos y los conjuntos de información.

Siguiendo a Başar y Olsder (1982) daremos la siguiente definición.

Definición 1.11

Un juego diferencial de duración fija viene expresado por los siguientes elementos

1. Un conjunto de índices $\mathbf{N} = \{1, \dots, N\}$ llamado conjunto de jugadores.
2. Un intervalo temporal $[0, T]$ que es especificado a priori y que denota la duración del juego.
3. Un conjunto infinito S_0 con alguna estructura topológica, llamado espacio de trayectorias del juego. Sus elementos son denotados como $\{x(t), 0 \leq t \leq T\}$ y constituyen las trayectorias de estado permitidas en el juego. Además, para cada $t \in [0, T]$ fijo, $x(t) \in S^0$, donde S^0 es un subconjunto de \mathbb{R}^n .
4. Un conjunto infinito U_i con alguna estructura topológica, definido para cada $i \in \mathbf{N}$ y que es llamado espacio de acciones de control del jugador i , cuyos elementos $\{u_i(t), 0 \leq t \leq T\}$ son las posibles funciones de control o controles del jugador i . Además existe un conjunto $S_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$ ($i \in \mathbf{N}$) de manera que para cada $t \in [0, T]$ se tiene que $u_i(t) \in S_i$.
5. Una ecuación diferencial

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)) \quad (1.9)$$

$$x(0) = x_0, \quad (1.10)$$

cuya solución describe la trayectoria de estado del juego correspondiente a la N -upla de funciones de control $\{u(t), 0 \leq t \leq T\}$ ($i \in \mathbf{N}$) y al estado inicial del sistema x_0 .

6. Una función de conjunto $\eta_i(\cdot)$ definida para cada $i \in \mathbf{N}$ como

$$\eta_i(t) = \{x(s), 0 \leq s \leq \varepsilon_i^t\}, \quad 0 \leq \varepsilon_i^t \leq t$$

donde ε_i^t es no decreciente en t , y $\eta_i(t)$ determina la información sobre el estado del sistema conseguida y recordada por el jugador i en el instante $t \in [0, T]$. La especificación de $\eta_i(\cdot)$ caracteriza la estructura de información del jugador i , y la colección de todas, con $i \in \mathbf{N}$, la estructura de información del juego.

7. Una σ -álgebra N_i^t en S_0 generada para cada $i \in \mathbf{N}$ por los conjuntos cilíndricos $\{x \in S_0, x(s) \in B\}$ donde B es un boreliano de S_0 y $0 \leq s \leq \varepsilon^t$. Llamaremos a N_i^t álgebra de información de i .

8. Una clase preespecificada γ_i de aplicaciones

$$\gamma_i : [0, T] \times S_0 \longrightarrow S_i$$

con la propiedad de que $u_i(t) = \gamma_i(t, x)$ es N_i^t -medible (es decir, se adapta al álgebra de información N_i^t). γ_i es el espacio de estrategias del jugador i y cada uno de sus elementos γ_i es una estrategia permisible para ese jugador.

9. Un funcional $g_i : [0, T] \times S^0 \times S_1 \times \cdots \times S_N \longrightarrow \mathbb{R}$ definido para cada $i \in \mathbf{N}$ de manera que

$$J_i(u_1, \dots, u_N) = \int_0^T g_i(t, x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)) dt \quad (1.11)$$

esté bien definido para cada $u_j(t) = \gamma_j(t, x)$, $\gamma_j \in \Gamma_j$ ($j \in \mathbf{N}$) y para cada $i \in \mathbf{N}$. J_i es el funcional de pago del jugador i en el juego diferencial de duración determinada.

Para que el juego diferencial que acabamos de presentar esté bien definido debemos imponer algunas restricciones adicionales en algunos de sus términos. En particular deberemos imponer condiciones a f y γ_i ($i \in \mathbf{N}$) de manera que la ecuación diferencial (1.9)–(1.10) tenga una única solución para cada N -upla $\{u_i(t) = \gamma_i(t, x), i \in \mathbf{N}\}$ con $\gamma_i \in \Gamma_i$.

La anterior definición no es la más general que podría darse. La duración del juego podría no ser fija sino variar con las estrategias de los jugadores. También podría no existir una medida “cuantitativa” que refleje las preferencias de los jugadores. También se puede considerar un funcional objetivo más general añadiendo un término que depende únicamente del estado del sistema en el instante final T

$$J_i(u_1, \dots, u_N) = \int_0^T g_i(t, x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)) dt + q_i[x(T)]$$

donde $q_i : S^0 \longrightarrow \mathbb{R}$ para cada $i \in \mathbf{N}$.

En ocasiones los jugadores tienen una medida cualitativa de los resultados del juego e inducen los llamados *juegos cualitativos* o *juegos de clase*, en contraposición de los *juegos de grado* o *cuantitativos*. En esos juegos —como, por ejemplo, los de persecución en los que podemos considerar como resultado el que la presa sea alcanzada o por el contrario que consiga huir— pueden ser transformados en juegos cuantitativos asignando un pago final de cero a las trayectorias y estrategias que lleven a estados no preferidos, y un pago positivo a las restantes.

Las estructuras de información de las que habla el punto 6 de la definición anterior reciben distintos nombres dependiendo de la forma que presenten:

1. ciclo abierto u open-loop: $\eta_i(t) = \{x_0\}, t \in [0, T]$
2. ciclo cerrado o close-loop: $\eta_i(t) = \{x(s), 0 \leq s \leq t\}, t \in [0, T]$
3. de retroalimentación o feedback: $\eta_i(t) = \{x(t)\}, t \in [0, T]$.

Las distintas estructuras de información nos delimitan la clase de estrategias que se detallan en el punto 8. En las estrategias en ciclo abierto los jugadores reciben información de una única fuente: su reloj. Por tanto toman sus decisiones atendiendo exclusivamente al instante de tiempo en que se encuentran y a la información de que disponían ya antes de comenzar el juego.

Con las estrategias feedback los jugadores conocen en todo momento el estado actual del sistema, pero no recuerdan cómo se ha alcanzado dicho estado. Las de ciclo cerrado suponen información perfecta: cada acción de los jugadores puede considerarse función de la trayectoria completa del sistema desde el momento inicial hasta el presente.

El siguiente teorema nos proporciona un conjunto de condiciones suficientes para garantizar la existencia de una única trayectoria de estado para cada N -upla de estrategias $\{\gamma_i \in \Gamma_i, i \in \mathbf{N}\}$, las cuales implican un juego diferencial bien definido dentro del esquema proporcionado por la definición dada de juego diferencial.

Teorema 1.11

Sea $S_0 = C^n[0, T]$, esto es, el espacio de funciones n veces diferenciables con continuidad en el intervalo $[0, T]$. Entonces, si

- i. $f(t, x, u_1, \dots, u_N)$ es continua en $t \in [0, T]$ para cada $x \in S^0, u_i \in S_i$ con $i \in \mathbf{N}$;
- ii. $f(t, x, u_1, \dots, u_N)$ es uniformemente Lipschitz en x, u_1, \dots, u_N , es decir, para algún $k > 0$ se verifica que

$$\begin{aligned} & \|f(t, x, u_1, \dots, u_N) - f(t, \bar{x}, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N)\| \\ & \leq k \cdot \max_{0 \leq t \leq T} \left\{ \|x(t) - \bar{x}(t)\| + \sum_{i \in \mathbf{N}} \|u_i(t) - \bar{u}_i(t)\| \right\}, \\ & \text{con } x(\cdot), \bar{x}(\cdot) \in C^n[0, T]; \quad u_i(\cdot), \bar{u}_i(\cdot) \in S_i \quad (i \in \mathbf{N}); \text{ y} \end{aligned}$$

- iii. para $\gamma_i \in \Gamma_i, i \in \mathbf{N}$, $\gamma_i(t, x)$ es continua en t para cada $x(\cdot) \in C^n[0, T]$ y uniformemente Lipschitz en $x(\cdot) \in C^n[0, T]$,

entonces la ecuación diferencial que describe la dinámica del sistema

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)), \quad x(0) = x_0$$

admite una única solución, es decir, una única trayectoria de estado para cada $\gamma_i \in \Gamma_i, i \in \mathbf{N}$ de manera que $u_i(t) = \gamma_i(t, x)$ y además esta trayectoria única es continua.

1.7.1 Equilibrios en juegos diferenciales

Los conceptos de equilibrio de Nash y perfecto en los subjuegos introducidos para juegos finitos son igualmente válidos para juegos diferenciales si los llevamos a una forma normal que sea equivalente. Para ello comenzamos con la forma extensiva dada en la definición 1.11. Supuestas las condiciones del teorema 1.11 y para cada N -upla fija de estrategias $\{\gamma_i \in \Sigma_i, i \in \mathbf{N}\}$ obtenemos una única solución de la ecuación diferencial funcional (1.9)-(1.10) y determinamos el correspondiente vector de controles $u_i(\cdot) = \gamma_i(\cdot, x), i \in \mathbf{N}$. Al sustituir en (1.11) junto con la única trayectoria de estado correspondiente se obtiene una N -upla $\{J_i, i \in \mathbf{N}\}$ para cada elección de estrategias por parte de los jugadores. Por tanto, tenemos las aplicaciones

$$P_i : \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_N \longrightarrow \mathbb{R} \quad (i \in \mathbf{N})$$

para cada estado inicial x_0 , que llamaremos funcional de pago del jugador i en el juego diferencial en forma normal. Estos funcionales de pago, junto con los espacios de estrategias $\{\Sigma_i, i \in \mathbf{N}\}$ de los jugadores constituyen la descripción en forma normal equivalente del juego diferencial.

Con ayuda de esta forma normal definiremos el concepto de equilibrio en los juegos diferenciales

Definición 1.12

Dado un juego diferencial que responde a la definición 1.11 y el juego en forma normal asociado mediante el funcional de pago que denominamos P_i ($i \in \mathbf{N}$), una N -upla de estrategias $\{\gamma_i^* \in \Sigma_i, i \in \mathbf{N}\}$ constituye un equilibrio de Nash en ciclo abierto (ciclo cerrado) si y sólo si las siguientes desigualdades se satisfacen para todo $\{\gamma_i \in \Sigma_i, i \in \mathbf{N}\}$:

$$P_i(\gamma_1^*, \dots, \gamma_{i-1}^*, \gamma_i, \gamma_{i+1}^*, \dots, \gamma_N^*) \geq P_i(\gamma_1^*, \dots, \gamma_{i-1}^*, \gamma_i, \gamma_{i+1}^*, \dots, \gamma_N^*), \quad \forall i \in \mathbf{N} \quad (1.12)$$

donde como se definió anteriormente,

$$P_i(\gamma_1, \dots, \gamma_N) = J_i(u_1, \dots, u_N),$$

con $\gamma_i(\cdot)$ una estrategia en ciclo abierto (ciclo cerrado) para cada $i \in \mathbf{N}$.

El siguiente resultado se recoge en Başar y Olsder (1982) y en Sandell (1974).

Lema 1.1

El equilibrio de Nash en ciclo abierto es un caso especial de equilibrio de Nash en ciclo cerrado.

Como hemos hecho anteriormente para los juegos en forma extensiva también ahora podemos considerar nuevos juegos que resultan de desechar un cierto periodo inicial del desarrollo de un juego.

Definición 1.13

Un subjuego de un juego diferencial viene dado por el par (t_0, x_0) , donde t_0 es el instante de comienzo del juego (debe substituirse el instante inicial $t = 0$ por t_0 cada vez que aparece en la definición 1.11) y x_0 es el estado del sistema en el instante t_0 .

Definición 1.14

Una N -upla de estrategias $\{\gamma_i^* \in \Gamma_i, i \in \mathbf{N}\}$ constituye un equilibrio de Nash feedback para un juego diferencial si satisface la condición de Nash (1.12) para todo posible instante y estado iniciales.

Nótese que una N -upla de estrategias constituya un equilibrio en ciclo abierto para el juego que comienza en $t = 0$ con un estado inicial x_0 no implica necesariamente que sea también equilibrio para un juego que comience en otro instante con otro estado. El equilibrio en ciclo abierto no es perfecto para los subjuegos. Lo mismo podría razonarse con los equilibrios en ciclo cerrado.

Sin embargo, de la definición de equilibrio feedback podemos afirmar que constituye un equilibrio para todo posible subjuego y, por tanto, que es perfecto en los subjuegos.

En Fershtman (1987) se describe una clase de juegos para los que los equilibrios en ciclo abierto son también feedback. Resumiremos a continuación los resultados que utilizaremos nosotros.

Sin hacer referencia a la estructura de información podemos representar un juego diferencial como (N, J, S, f, Y) donde N es el número de jugadores, $J = (J_1, \dots, J_N)$ el vector de funcionales de pagos, $S = (S_1, \dots, S_N)$ el conjunto de controles factibles, f la función que describe la cinética del sistema, e Y un conjunto de posibles condiciones iniciales de tiempo y estado (t_0, x_0) .

En esta definición se ha añadido un elemento que no apareció anteriormente con el que se permite restringir el conjunto de posibles soluciones iniciales. Cuando este conjunto no esté restringido y pueda incluir todos los posibles (t_0, x_0) lo representaremos con (N, J, S, f, sr) . Puesto que los subjuegos de un juego diferencial vienen dados por un juego con las mismas características pero que comienza en un (t_0, x_0) particular, el conjunto de condiciones iniciales Y restringe el conjunto de posibles subjuegos. Un subjuego puede comenzar únicamente en puntos que se encuentren en Y .

Proposición 1.1 (Fershtman, 1987)

Sea el juego (N, J, S, f, sr) . En este juego existe un EN en ciclo abierto que es un caso especial de EN feedback si y sólo si existe una N -upla de controles (u_1^*, \dots, u_N^*) que constituye un equilibrio en ciclo abierto para toda posible condición inicial.

Corolario 1.1

El equilibrio en ciclo abierto no es perfecto en los subjuegos a no ser que sea también un equilibrio feedback degenerado.

Con equilibrio feedback degenerado nos estamos refiriendo a un perfil de estrategias que en realidad sólo dependen del tiempo y no del estado del sistema. Definimos a continuación la equivalencia (en ciclo abierto) entre juegos.

Definición 1.15

Dos juegos diferenciales $G = (N, J, S, f, Y)$ y $G' = (N, J', S', f', Y')$ son equivalentes si cada N -upla de estrategias que constituye un equilibrio de Nash en ciclo abierto para G es también equilibrio de Nash en ciclo abierto para G' .

Consecuencia directa de la definición de equivalencia y de la proposición 1.1 tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.2 (Fershtman, 1987)

Los EN en ciclo abierto del juego diferencial (N, J, S, f, sr) , si existen, son también EN feedback si, y sólo si, existe una condición inicial $y \in sr$ tal que para todo $z \in sr$ el juego (N, J, S, f, z) es equivalente a (N, J, S, f, y) .

Obsérvese que la proposición anterior indica también que si un EN en ciclo abierto es EN feedback degenerado, las estrategias en equilibrio no dependen de las condiciones iniciales.

A continuación Fershtman considera una clase de juegos que tienen estructura exponencial en las variables de estado. Estos tienen los funcionales objetivo de la forma

$$J_i = \int_0^T g_i(u, t) \exp(-\lambda_i x) dt$$

y la ecuación cinética

$$\dot{x} = f(u, t),$$

con $u_i \in S_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}$, $g_i(u, t) \in \mathbb{R}$ para cada u y t , y con x_0 cualquier valor de \mathbb{R}^n .

Para este tipo de juegos se demuestra el siguiente resultado

Proposición 1.3 (Fershtman, 1987)

Para el juego anterior, si existe un EN en ciclo abierto para el juego que comienza en $x_0 = 0$, entonces esas estrategias en ciclo abierto constituyen también un EN feedback para el juego (N, J, S, f, sr) .

1.7.2 Cálculo de los equilibrios en ciclo abierto

Supongamos una estructura de información en ciclo abierto, esto es, en la que las estrategias consideradas vienen expresadas como función únicamente del tiempo y del estado inicial del sistema. Sea (u_1^*, \dots, u_N^*) un equilibrio de Nash. La propiedad de Nash (1.12) nos afirma que $\gamma_i(\cdot, x_0) = u_i^*(\cdot)$ maximiza en u_i el funcional

$$J_i(u_1^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_N^*)$$

sujeto a la ecuación de estado

$$\dot{x}(t) = f(t, x, u_1^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_N^*), \quad x(0) = x_0.$$

El anterior es un problema estándar de control óptimo para el jugador i puesto que u_j^* ($j \in \mathbf{N}, i \neq j$) son controles en ciclo abierto y por tanto no dependen de u_i . Tenemos entonces el problema

$$\begin{aligned} \max_{u_i} \quad & \left\{ J_i(u_1^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_N^*) \right. \\ & \left. = \int_0^T g_i(t, x, u_1^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_N^*) dt \right\} \\ \text{sujeto a} \quad & \dot{x}(t) = f(t, x, u_1^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_N^*) \\ & x(0) = x_0 \\ & u_i(t) \in S_i \subseteq \mathbb{R}^{m_i}, \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Aplicando el Principio del Máximo visto en los teoremas 1.8 y 1.9 y definiendo el hamiltoniano con ayuda de una variable de coestado $p_i = (p_i^1, \dots, p_i^n)$

$$H_i(t, x, u, p) = g_i(t, x, u) + p_i \cdot f(t, x, u)$$

tendremos que $u_i^*(\cdot)$ es un control óptimo si $u_i^*(t)$ maximiza el hamiltoniano para cada t de $[0, T]$, es decir,

$$H_i(t, x^*, u^*, p) \geq H_i(t, x^*, u_1^*, \dots, u_{i-1}^*, u, u_{i+1}^*, \dots, u_N^*, p) \quad \forall u \in S_i.$$

Además, en los puntos donde u_i^* es continua se tiene que

$$\dot{p}_i^j(t) = -\frac{\partial H_i(t, x^*, u^*, p)}{\partial x_j} \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

y también que $p_i^j(T) = 0$, ($j = 1, \dots, n$).

Utilizando el mismo razonamiento para cada uno de los jugadores tendremos el siguiente teorema que nos da condiciones para que un perfil de controles sea EN en ciclo abierto.

Teorema 1.12

Dado un juego diferencial, el conjunto de controles $u^ = (u_1^*, \dots, u_N^*)$ con trayectoria de estado asociada $x = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ es un equilibrio de Nash en ciclo abierto si existen funciones vectoriales $p_i = (p_i^1, \dots, p_i^n)$ ($i \in \mathbf{N}$) continuas y continuamente diferenciables a trozos de manera que para cada $t \in [0, T]$*

$$u_i^*(t) = \arg \max_{u \in S_i} H_i(t, x^*(t), u_1^*(t), \dots, u_{i-1}^*(t), u(t), u_{i+1}^*(t), \dots, u_N^*(t), p_i(t))$$

donde

$$H_i(t, x(t), u(t), p(t)) = g_i(t, x(t), u(t)) + p_i(t) \cdot f(t, x(t), u(t)),$$

en los puntos donde u_i^* es continua

$$\dot{p}_i^j(t) = - \frac{\partial H_i(t, x^*(t), u^*(t), p(t))}{\partial x_j} \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

y además

$$p_i^j(T) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n,$$

donde la trayectoria de estado x^* asociada a u^* ha de satisfacer el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x}^*(t) = f(t, x^*(t), u^*(t))$$

con la condición inicial $x^*(0) = x_0$.

Con este último resultado finalizamos este primer capítulo, en donde se han recogido aquellas definiciones y propiedades que de una forma u otra se necesitan para el seguimiento de los restantes capítulos.

Analizaremos a continuación modelos de crecimiento económico desde el enfoque y con las herramientas que nos proporciona la Teoría de los Juegos.

2

Juegos de crecimiento económico

En el presente capítulo se estudia la dicotomía entre crecimiento y distribución de la renta, planteada como un conflicto entre agentes económicos en el entorno de los juegos diferenciales de capitalismo. Se analizan los equilibrios de Nash en ciclo abierto extendiéndolos a cualquier combinación de parámetros, y se calculan también el conjunto de pagos no dominados del juego.

2.1 Juegos de capitalismo

Como hace notar Matti Pohjola en su breve recopilación de trabajos sobre juegos diferenciales de capitalismo (Pohjola, 1987) la primera aproximación al problema de la distribución desde el punto de vista de la Teoría de Juegos fue propuesta por Phelps y Pollak en su trabajo de 1968. Estos autores ven ya el crecimiento económico y la distribución como un conflicto intergeneracional.

Sin embargo, es Kelvin Lancaster en 1973 el primero en aplicar la teoría de los juegos diferenciales a modelos de crecimiento y distribución. Formuló un juego diferencial de dos jugadores considerando los tópicos de la acumulación y la distribución de los beneficios entre las clases sociales, estudiados por los clásicos como Malthus, Ricardo o Marx.

Lancaster considera dividida la sociedad en dos clases que, con una terminología quizás algo desfasada, llama *trabajadores* y *capitalistas*, los cuales serán los correspondientes jugadores del juego. Supone una economía unisectorial cuyo output en cierto instante puede o ser consumido o bien ser añadido al stock de capital existente.

Los trabajadores pueden controlar su tasa de consumo en el output total dentro de unos ciertos límites. Por su parte los capitalistas disponen de toda la renta sobrante para consumir o invertir, de acuerdo con la proporción que asignen en cada momento. Todo lo que no consuman será reinvertido en el sistema, con lo que aumentará su capacidad de producción. El juego se desarrolla en un horizonte temporal finito y conocido, donde el pago a los jugadores corresponde con el consumo total que tendrán a lo largo de dicho horizonte temporal.

Sobre este modelo Lancaster calcula los equilibrios de Nash en ciclo abierto (que resultan ser también equilibrios feedback) y los compara con la solución cooperativa que se obtiene cuando ambos jugadores conjuntamente procuran maximizar la suma de los consumos. Como es de esperar los resultados cooperativos superan a los no cooperativos: la competencia produce una pérdida de bienestar y esto da título a su artículo: "The dynamic inefficiency of capitalism".

Diversos autores han continuado el estudio de los juegos de capitalismo, incluyendo nuevas hipótesis y desarrollando nuevas versiones del modelo original de Lancaster. En la tabla 2.1 se resumen algunas contribuciones a este tipo de juegos, que comentamos a continuación.

Tabla 2.1
Diversas estrategias estudiadas en la literatura sobre juegos de capitalismo.

estructura de información	soluciones no cooperativas		soluciones cooperativas	
	Nash	Stackelberg	Pareto	regateo de Nash
ciclo abierto	Lancaster(73)	Pohjola(83a)	Lancaster(73)	Pohjola(84)
	Hoel(78)	Gradus(89)	Hoel(78)	Rincón(94)
	Pohjola(83b)	De Zeeuw(92)	Gradus(89)	
	Gradus(89)	Soto&M(96)	Pohjola(85)	Rincón(94)
feedback	Başar,H&R(85)	Başar,H&R(85)	Haurie&P(87)	Haurie&P(87)
	Haurie&P(87)		Rincón(94)	Kaitala&P(90)
	Rincón(94)			Seierstad(93)
	Soto(94)			Soto(94)

Michael Hoel (1978) estudió el efecto de considerar como función de utilidad de los jugadores los consumos descontados en el tiempo, lo que hace que la ecuación que rige la dinámica del sistema pase a ser no lineal. Pohjola (1985) introdujo un horizonte infinito, funciones de utilidad no lineales y una restricción de empleo pleno.

Algunos estudios han afrontado soluciones para reducir la pérdida de bienestar debida a la falta de cooperación entre los jugadores. Así, Pohjola (1983b) demuestra que dejar que recaiga en los propios trabajadores parte del control sobre las inversiones mejora el bienestar de ambos jugadores. Buhl y Machaczek (1985) siguiendo esta línea consideran las implicaciones derivadas de que los trabajadores tengan la propiedad del capital. De esta forma se reduce la posible ineficiencia pues las decisiones de los trabajadores están menos ligadas al comportamiento de los capitalistas.

Por otra parte, Pohjola (1983a) comparó la solución de Nash hallada por Lancaster con la solución de Stackelberg en ciclo abierto. Este artículo fue comentado más tarde por Aart de Zeeuw (1992) mostrando que la solución hallada por Pohjola no es completa y que existen infinitos equilibrios de Stackelberg, aunque las conclusiones sobre los consumos permanecen siendo ciertas. Efectivamente Pohjola afirma que aunque ambos jugadores prefieren esta formulación ninguno quiere actuar de líder. No ocurre lo mismo, sin embargo, cuando modificamos la estructura de información del juego. Así, Başar, Haurie y Ricci (1985) muestran que ambos jugadores prefieren que los capitalistas lideren la economía en un equilibrio de Stackelberg con retroalimentación.

Las soluciones cooperativas también se han estudiado en este contexto, pues Lancaster compara el equilibrio de Nash que halla con el máximo de lo que él llama *función de bienestar social*, y que no es sino la suma de los consumos de ambos jugadores. Hoel (1978) hace lo mismo pero considerando en lugar de la suma toda la frontera de Pareto del conjunto de pagos posibles.

Pohjola (1984) estudió la solución de regateo de Nash y las amenazas óptimas que pueden anunciar los jugadores con el fin de conseguir alguna ventaja en la solución negociada.

Rincón (1994) y Soto (1994) consideran un modelo modificado en el que los capitalistas controlan la oferta de trabajo, además de la inversión, y donde la función de producción es de tipo Coob-Douglas. Después de estudiar los equilibrios feedback de Nash pasan a estudiar diversas soluciones cooperativas. Rincón calcula primero la frontera de Pareto para después plantear las soluciones negociadas de Nash y la de mínimos cuadrados que alcanzan dicha frontera. Soto por su parte estudia estrategias en amenaza que aunque no son eficientes constituyen un equilibrio perfecto en los subjuegos.

Seierstad (1993) define estrategias *gatillo* de dos tipos diferentes y demuestra que además de ser perfectas para los subjuegos, obtienen pagos más eficientes que las de Nash.

Soto y Macarro (1996) consideran el modelo de Kaitala y Pohjola (1990) pero

conservando el horizonte finito de Lancaster. Utilizando una función de producción Coob-Douglas calculan los equilibrios de Stackelberg en ciclo abierto.

Pasamos a describir a continuación el modelo de crecimiento y distribución, formalizando la dinámica del sistema y las funciones de pago de los jugadores.

2.2 El modelo de crecimiento y distribución

Consideraremos una economía unisectorial en la que los agentes sociales se hallan divididos en dos grupos que llamaremos *trabajadores* y *capitalistas* de acuerdo con sus intereses sociales y económicos. El estado del sistema en cada instante t viene dado por el stock o acumulación de capital $K(t)$. Un determinado nivel de capital produce un output o producción de la economía expresado mediante una función del capital $f(K)$. Supondremos que esta función de producción es positiva, creciente, continua y continuamente diferenciable. Para el cálculo efectivo de los equilibrios supondremos que esta función es lineal: $A \cdot K(t) + B$, con $A, B \geq 0$, del tipo de las usadas por Rebelo (1991).

En cada instante los trabajadores pueden controlar con una variable $u_1(t)$ la proporción del output total que se destinará a sus salarios. Esta variable supondremos que se encuentra en todo momento dentro de un intervalo $[a, b] \subseteq [0, 1]$, dado por la estructura social en que se encuentra el sistema. Consideraremos que para la propia supervivencia del sistema estos límites no deben ser superados. En el modelo original de Lancaster-Hoel se asume que $b > \frac{1}{2}$. Nosotros prescindiremos de esta restricción que no nos parece suficientemente justificada. El consumo instantáneo de los trabajadores lo notaremos por $C_1(t)$ y viene dado por

$$C_1(t) = u_1(t)f[K(t)].$$

Por su parte los capitalistas disponen de todo el output no consumido por los trabajadores bien para su propio consumo o bien para invertirlo en el sistema. Con la variable $u_2(t)$ controlan la proporción destinada a la inversión. El resto, $C_2(t)$, constituye su consumo:

$$C_2(t) = [1 - u_1(t)][1 - u_2(t)]f[K(t)].$$

En el modelo de Lancaster-Hoel esta variable se mueve libremente en todo el intervalo $[0, 1]$. Extenderemos nuestro estudio a intervalos generales $[c, d] \subseteq [0, 1]$.

La dinámica del sistema viene dada por la variación en la acumulación de capital que se produce por la inversión. Esto nos conduce a la ecuación diferencial:

$$\dot{K}(t) = I(t) = [1 - u_1(t)]u_2(t)f[K(t)]. \quad (2.1)$$

Los jugadores buscan maximizar su utilidad a lo largo de un horizonte temporal finito y predeterminado $[0, T]$. Siguiendo a Hoel (1978) esta utilidad la identificaremos con el consumo pero aplicando un factor de descuento positivo que denotaremos por τ para los trabajadores y κ para los capitalistas. De esta manera tenemos que la función de pagos de cada uno de los jugadores es

$$J_1 = \int_0^T e^{-\tau t} C_1(t) dt = \int_0^T e^{-\tau t} u_1(t) f[K(t)] dt \quad (2.2)$$

$$J_2 = \int_0^T e^{-\kappa t} C_2(t) dt = \int_0^T e^{-\kappa t} [1 - u_1(t)][1 - u_2(t)] f[K(t)] dt. \quad (2.3)$$

Con todo lo anterior tenemos descrito un juego diferencial de dos personas de suma no nula. Únicamente queda por fijar un estado del sistema en el instante inicial $t = 0$:

$$K(0) = K_0. \quad (2.4)$$

El juego consiste en encontrar para cada jugador una función de control $u_i(t)$ a lo largo del intervalo $[0, T]$ que varíe en $[a, b]$ para los trabajadores y en $[c, d]$ para los capitalistas, y de forma que se maximice (2.2) y (2.3) respectivamente, sujeto a la dinámica del sistema descrita por (2.1) y a una condición inicial dada en (2.4).

El comportamiento de los jugadores puede ser descrito mediante estrategias, esto es, mediante funciones que indican la acción a tomar por el jugador dada la información que este tiene del desarrollo de la partida y del estado del sistema hasta el presente. A diferentes *estructuras de información* les corresponde diferentes reacciones y por tanto diversas estrategias. Nosotros supondremos a lo largo de esta memoria que los jugadores únicamente conocen el estado inicial del sistema. Por tanto, los equilibrios que encontraremos serán del tipo open-loop o de ciclo abierto: los jugadores fijan su comportamiento al comienzo del juego, y no lo cambiarán por las acciones del otro jugador.

Este tipo de estructura de información nos permite definir estrategias de forma sencilla pues una vez fijado el estado inicial del sistema, K_0 , se pueden expresar como funciones dependientes sólo del tiempo $u_1 : [0, T] \rightarrow [a, b]$ o bien $u_2 : [0, T] \rightarrow [c, d]$.

En las siguientes secciones calcularemos los equilibrios de Nash y el conjunto de pagos no dominados asociados al juego descrito anteriormente. Para ello utilizaremos la Teoría del Control Óptimo y las condiciones presentadas en el primer capítulo.

2.3 Equilibrios de Nash

El cálculo del equilibrio de Nash supone la maximización de dos funcionales objetivo, buscando las acciones que maximizan el pago de un jugador mientras se considera

fijo el comportamiento del otro. Definiremos por tanto dos hamiltonianos (uno para cada jugador) formados por el integrando de las funciones objetivo más una variable de coestado p_i ($i = 1, 2$) multiplicada por la tasa de variación instantánea de la variable de estado dada por la inversión (2.1). De esta forma el hamiltoniano de los trabajadores resulta ser

$$\begin{aligned} H_1(t, K, u_1, u_2, p_1) &= e^{-\tau t} f[K(t)]u_1(t) \\ &+ p_1(t)[1 - u_1(t)]u_2(t)f[K(t)], \end{aligned} \quad (2.5)$$

y el de los capitalistas

$$\begin{aligned} H_2(t, K, u_1, u_2, p_2) &= e^{-\kappa t} [1 - u_1(t)][1 - u_2(t)]f[K(t)] \\ &+ p_2(t)[1 - u_1(t)]u_2(t)f[K(t)]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

El Principio del Máximo de Pontryagin nos afirma que dado el control del segundo jugador u_2 , el control del primero que maximice su objetivo J_1 debe maximizar a su vez el hamiltoniano H_1 en cada instante del intervalo temporal, sujeto a las restricciones dadas por la dinámica del sistema y de la variable de coestado. Un resultado análogo con u_2 y H_2 se tiene para el segundo jugador admitiendo un control dado del primero. Bajo el supuesto de que tanto los integrandos de las funciones de pagos como la función que define la tasa de variación de la variable de estado sean continuamente diferenciables en $[0, T]$, podemos dar condiciones suficientes para el equilibrio.

Dado un par de estrategias (u_1^*, u_2^*) , denotaremos por $K^*(t)$ el valor de la variable de estado en t cuando se utilizan los controles (u_1^*, u_2^*) . Las condiciones para que el par (u_1^*, u_2^*) sea un equilibrio de Nash nos las ofrece el teorema 1.12 y pueden expresarse de la siguiente forma:

E1. $\dot{K}^*(t) = f[K^*(t)][1 - u_1^*(t)]u_2^*(t);$

E2. $K^*(0) = K_0;$

E3. existen un par de funciones $p_1, p_2: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas y continuamente diferenciables a trozos tales que

$$\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H_i}{\partial K}(t, K^*, u_1^*, u_2^*, p_i), \quad (i = 1, 2);$$

en todo punto $t \in [0, T]$ en el que la derivada esté definida;

E4. $u_1^*(t) = \arg \max_{u_1 \in [a, b]} H_1(t, K^*, u_1, u_2^*, p_1), \quad \forall t \in [0, T],$
 $u_2^*(t) = \arg \max_{u_2 \in [c, d]} H_2(t, K^*, u_1^*, u_2, p_2), \quad \forall t \in [0, T];$

E5. $p_i(T) = 0$, $i = 1, 2$.

De la observación de las expresiones que toman los hamiltonianos y de la condición E4 podemos deducir cuáles son los pares de controles válidos en el equilibrio. El resultado es el siguiente:

Lema 2.1

En cada instante $t \in [0, T]$, un par de control óptimo $(u_1(t), u_2(t))$ puede ser (a, c) , (a, d) , (b, c) o bien (b, d) .

Demostración. El hamiltoniano de los trabajadores es una función lineal en u_1 con pendiente $[e^{-\tau t} - p_1(t)u_2(t)]f[K(t)]$. Así, dado u_2 y puesto que la producción $f[K(t)]$ es siempre positiva, el máximo de H_1 que requiere la condición E4 se alcanza en

$$u_1(t) = \begin{cases} a, & \text{si } e^{-\tau t} - p_1(t)u_2(t) < 0 \\ \text{cualquier } u \in [a, b], & \text{si } e^{-\tau t} - p_1(t)u_2(t) = 0 \\ b, & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

De igual manera, cuando maximizamos el hamiltoniano de los capitalistas dado u_1 encontramos que es una función lineal de u_2 con pendiente $[1 - u_1(t)][p_2(t) - e^{-\kappa t}]f[K(t)]$. Puesto que $u_1(t) \in [a, b] \subseteq [0, 1]$ tenemos que $1 - u_1(t) \geq 0$. Las acciones óptimas de los capitalistas, dado u_1 , serán en cada instante

$$u_2(t) = \begin{cases} c, & \text{si } p_2(t) - e^{-\kappa t} < 0 \\ \text{cualquier } u \in [c, d], & \text{si } p_2(t) - e^{-\kappa t} = 0 \\ d, & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

Por lo tanto, para cada instante t , una de las siguientes cuatro combinaciones de controles es óptima (aunque pueda haber otras si alguna de las condiciones se da con igualdad):

- (i) $u_1(t) = a$, $u_2(t) = c$, cuando $e^{-\tau t} \leq p_1(t)c$ y $e^{-\kappa t} \geq p_2(t)$;
- (ii) $u_1(t) = a$, $u_2(t) = d$, cuando $e^{-\tau t} \leq p_1(t)d$ y $e^{-\kappa t} \leq p_2(t)$;
- (iii) $u_1(t) = b$, $u_2(t) = c$, cuando $e^{-\tau t} \geq p_1(t)c$ y $e^{-\kappa t} \geq p_2(t)$;
- (iv) $u_1(t) = b$, $u_2(t) = d$, cuando $e^{-\tau t} \geq p_1(t)d$ y $e^{-\kappa t} \leq p_2(t)$.

Con esto queda demostrado el resultado. \square

A la vista del lema anterior podemos asegurar que el equilibrio será de tipo *bang-bang*, es decir, tomará (salvo tal vez en un conjunto finito de puntos) uno de los valores extremos de los intervalos de acciones de los jugadores.

Equilibrios feedback

En Fershtman (1987) se identifican algunas clases de juegos diferenciales en los que las estrategias en equilibrio de Nash en ciclo abierto son también equilibrios de Nash de tipo feedback degenerados, es decir, juegos en los que las estrategias feedback dependen únicamente del tiempo y no de la variable de estado.

Los equilibrios feedback son n -uplas (una para cada jugador) de reglas de decisión de manera que verifiquen la condición de Nash para cada subjuego posible, que vendrá expresado por un par (t, K_t) , donde $t \in [0, T]$ es el instante de inicio del subjuego y K_t el valor de la variable de estado en ese instante. Puesto que el equilibrio feedback constituye un equilibrio para cada subjuego, podemos asegurar que será perfecto en los subjuegos. Por lo tanto, en la clase de juegos identificados por Fershtman los equilibrios open-loop son perfectos en los subjuegos.

Diremos que dos juegos son equivalentes si los equilibrios de Nash de uno son equilibrios de Nash del otro también. Sea el juego con función de pagos de la forma

$$J_i = \int_0^T g_i(u, t) \exp(-\gamma_i K) dt, \quad i = 1, 2, \quad (2.7)$$

de manera que $u = (u_1, u_2)$ es el vector de funciones de control de los jugadores, la variable de estado K se mueve con la cinética de la ecuación

$$\dot{K} = h(u, t), \quad (2.8)$$

y la condición inicial $K(0) = K_0$ puede tomar cualquier valor de \mathbb{R} . Fershtman demuestra que este tipo de juegos es equivalente a cualquier otro juego con estas mismas características pero con la variable de estado inicial fijada a un valor. De esta forma se ve cómo los equilibrios de Nash de estos juegos son también feedback.

Recordemos que para el cálculo de los equilibrios hemos supuesto que la función de producción es lineal, $f[K(t)] = AK(t) + B$, donde A y B son no negativos.

El juego de capitalismo que estamos tratando es de la forma

$$J_i = \int_0^T g_i(u, t)(AK + B) dt, \quad i = 1, 2,$$

con $\dot{K} = h(u)(AK + B)$. Haciendo el cambio en la variable de estado $L = \ln(AK + B)$ tenemos que nuestro juego lo podemos expresar como

$$\bar{J}_i = \int_0^T g_i(u, t) \exp L dt, \quad i = 1, 2,$$

siendo $\dot{L} = Ah(u)$, que es del tipo mostrado en (2.7) y (2.8). Por tanto, en este juego de crecimiento económico, los equilibrios de Nash open-loop serán también feedback y por consiguiente perfectos en los subjuegos. Estos equilibrios no dependen del valor inicial que toma la variable de estado.

2.3.1 Cálculo de los equilibrios

Describamos a continuación el proceso a seguir para determinar los equilibrios.

Retomando las condiciones para que un par (u_1, u_2) sea equilibrio de Nash, tenemos que la condición E5 nos afirma que las variables de coestado se deben anular en el instante final T . El hecho de que $p_1(T) = 0$ nos elimina las combinaciones de control (i) y (ii) como óptimas en T . Por otra parte, $p_2(T) = 0$ hace que (iv) tampoco resulte ser óptimo en un entorno del instante final. Queda, por tanto, que los controles usados por los jugadores en T son los dados por la combinación (iii): $(u_1 = b, u_2 = c)$.

Una vez conocidos los controles que se utilizan y el valor que toma la variable de coestado en un determinado punto, la ecuación diferencial dada por E3 nos permite conocer la expresión exacta que toma la variable de coestado. En nuestro caso tendremos que, en un cierto intervalo $[\bar{t}, T]$ en el que se utiliza (iii), las variables p_1 y p_2 han de ser solución de las ecuaciones

$$\dot{p}_1(t) = -Abe^{-\tau t} - p_1(t)A(1-b)c,$$

$$\dot{p}_2(t) = -A(1-b)(1-c)e^{-\kappa t} - p_2(t)A(1-b)c,$$

y cumplir las condiciones iniciales dadas por E5: $p_1(T) = 0$, $p_2(T) = 0$. Esto nos lleva a las expresiones

$$p_1(t) = \frac{Ab}{\tau - A(1-b)c} (\exp(-\tau t) - \exp\{[A(1-b)c - \tau]T - A(1-b)ct\}), \quad (2.9)$$

$$p_2(t) = \frac{A(1-b)(1-c)}{\kappa - A(1-b)c} (\exp(-\kappa t) - \exp\{[A(1-b)c - \kappa]T - A(1-b)ct\}). \quad (2.10)$$

El instante \bar{t} en el que se deja de utilizar (iii) será aquel en el que cesen de verificarse las condiciones de optimalidad del par de control. Para hallarlo resolveremos en t las ecuaciones $e^{-\tau t} = p_1(t)c$ y $e^{-\kappa t} = p_2(t)$. Llamaremos t_1 y t_2 a las soluciones respectivas de las ecuaciones anteriores, si existen y se encuentran en el intervalo $[0, T]$; en otro caso, les damos el valor cero. No es difícil ver que siempre serán menores que T y que, por tanto, basta con tomar

$$t_1 = \max \left\{ T - \frac{1}{A(1-b)c - \tau} \ln \left(\frac{Ac - \tau}{Abc} \right), 0 \right\}, \quad (2.11)$$

$$t_2 = \max \left\{ T - \frac{1}{A(1-b)c - \kappa} \ln \left(\frac{A(1-b) - \kappa}{A(1-b)(1-c)} \right), 0 \right\}. \quad (2.12)$$

El instante \bar{t} será el primero en que deje de verificarse una cualquiera de las condiciones. Como en nuestro razonamiento nos estamos moviendo hacia atrás, este instante será

$$\bar{t} = \max\{t_1, t_2\}.$$

Una vez llegados a este punto hemos de decidir cuál es el par de control que se utiliza en un cierto intervalo con extremo superior en el instante \bar{t} . Como conocemos los valores de las variables de coestado en \bar{t} y las nuevas ecuaciones diferenciales, volvemos a obtener las expresiones de p_1 y p_2 y el instante en el que el nuevo control deja de ser óptimo. Procederemos de esta manera hasta alcanzar el instante inicial $t = 0$. Este procedimiento puede concretarse en el algoritmo de la figura 2.1.

Para aplicar el algoritmo es de utilidad la tabla 2.2. En ella se recogen, para cada combinación de controles, expresiones del capital y de las variables de coestado obtenidas resolviendo las correspondientes ecuaciones diferenciales. La constante Q es la adecuada en cada caso para que K , p_1 y p_2 sean funciones continuas en $[0, T]$.

Tabla 2.2

Condiciones, capital y variables de coestado para los cuatro pares de control.

par de control/ condiciones	función de capital $K(t)$	$p_1(t)$ $p_2(t)$
(i) $\equiv (u_1 = a, u_2 = c)$ $\begin{cases} e^{-\tau t} \leq p_1(t)c \\ e^{-\kappa t} \geq p_2(t) \end{cases}$	$e^{A(1-a)ct}Q - \frac{B}{A}$	$\frac{Aa}{\tau - A(1-a)c}e^{-\tau t} + e^{-A(1-a)ct}Q$ $\frac{A(1-a)(1-c)}{\kappa - A(1-a)c}e^{-\kappa t} + e^{-A(1-a)ct}Q$
(ii) $\equiv (u_1 = a, u_2 = d)$ $\begin{cases} e^{-\tau t} \leq p_1(t)d \\ e^{-\kappa t} \leq p_2(t) \end{cases}$	$e^{A(1-a)dt}Q - \frac{B}{A}$	$\frac{Aa}{\tau - A(1-a)d}e^{-\tau t} + e^{-A(1-a)dt}Q$ $\frac{A(1-a)(1-d)}{\kappa - A(1-a)d}e^{-\kappa t} + e^{-A(1-a)dt}Q$
(iii) $\equiv (u_1 = b, u_2 = c)$ $\begin{cases} e^{-\tau t} \geq p_1(t)c \\ e^{-\kappa t} \geq p_2(t) \end{cases}$	$e^{A(1-b)ct}Q - \frac{B}{A}$	$\frac{Ab}{\tau - A(1-b)c}e^{-\tau t} + e^{-A(1-b)ct}Q$ $\frac{A(1-b)(1-c)}{\kappa - A(1-b)c}e^{-\kappa t} + e^{-A(1-b)ct}Q$
(iv) $\equiv (u_1 = b, u_2 = d)$ $\begin{cases} e^{-\tau t} \geq p_1(t)d \\ e^{-\kappa t} \leq p_2(t) \end{cases}$	$e^{A(1-b)dt}Q - \frac{B}{A}$	$\frac{Ab}{\tau - A(1-b)d}e^{-\tau t} + e^{-A(1-b)dt}Q$ $\frac{A(1-b)(1-d)}{\kappa - A(1-b)d}e^{-\kappa t} + e^{-A(1-b)dt}Q$

Figura 2.1

Algoritmo para el cálculo del equilibrio de Nash en ciclo abierto.

Paso 0 Inicialización

Sea T el instante final. Hacer $t_0 \leftarrow T$, $p_1(t_0) \leftarrow 0$ y $p_2(t_0) \leftarrow 0$. Ir al paso 1.

Paso 1 Control óptimo

Si $e^{-\kappa t_0} > p_2(t_0)$
hacer $u_2(t_0) \leftarrow c$;

En otro caso,
hacer $u_2(t_0) \leftarrow d$;

Si $e^{-\tau t_0} > p_1(t_0)u_2(t_0)$
hacer $u_1(t_0) \leftarrow a$;

En otro caso,
hacer $u_1(t_0) \leftarrow b$.

Ir al paso 2.

Paso 2 Variables de coestado

Calcular las variables de coestado $p_1(t)$ y $p_2(t)$ resolviendo las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{p}_1(t) &= -\frac{\partial H_1}{\partial K} \\ \dot{p}_2(t) &= -\frac{\partial H_2}{\partial K},\end{aligned}$$

con las condiciones de contorno dadas por los valores ya conocidos $p_1(t_0)$ y $p_2(t_0)$. Ir al paso 3.

Paso 3 Instante de cambio de control

Sean t_1 y t_2 las soluciones respectivas de las ecuaciones

$$\begin{aligned}e^{-\tau t} &= p_1(t)u_2(t_0), \\ e^{-\kappa t} &= p_2(t).\end{aligned}$$

Si no existe solución para alguna de ellas, o bien la solución es mayor que t_0 , dar al correspondiente instante de tiempo el valor cero. Ir al paso 4.

Paso 4 Hacer $t' \leftarrow \max\{t_1, t_2\}$.

Si $t' > 0$

hacer $t_0 \leftarrow t'$, $p_1(t_0) \leftarrow p_1(t')$, $p_2(t_0) \leftarrow p_2(t')$ e ir al paso 1

En otro caso, parar.

Mediante la utilización del algoritmo anterior podemos obtener el equilibrio asociado con cada combinación de parámetros del juego. El desarrollo nos lleva a los dos resultados siguientes.

Proposición 2.1

Sea $Ac \leq \tau$ y sean p_2 y t_2 los dados en (2.10) y (2.12). La secuencia óptima de controles que forma un equilibrio de Nash en ciclo abierto es

1. (iii), si $A(1 - b) \leq \kappa$;
2. (ii)-(iii), si $A(1 - b) > \kappa$ y $p_1(t_2)d \geq e^{-\tau t_2}$;
3. (ii)-(iv)-(iii) en otro caso.

Demostración.

1. Cuando $Ac \leq \tau$ y $A(1 - b) \leq \kappa$, las expresiones de t_1 y de t_2 dadas en (2.11) y (2.12) nos llevan a tener el logaritmo de un número negativo. De esta manera no habrá un cambio en las condiciones bajo las cuales es óptimo el par de control (iii) y, por tanto, este será el par utilizado a lo largo de todo el horizonte $[0, T]$.

Nos encontramos en una situación de estancamiento económico en la que los trabajadores eligen como estrategia óptima la participación máxima en la renta ($u_1(t) = b$) y los capitalistas carecen de incentivos para invertir y lo hacen al mínimo posible ($u_2(t) = c$).

2. Supongamos ahora que $A(1 - b) > \kappa$. En este caso $\bar{t} = t_2$, y en este instante se verifica que $\exp(-\kappa t_2) = p_2(t_2)$ y que $\exp(-\tau t_2) > p_1(t_2)c$. Antes de t_2 se usa el control (iv) si $\exp(-\tau t_2) > p_1(t_2)d$, y el (ii) en caso contrario.
3. Si el control utilizado es el (iv), puede darse un nuevo cambio de controles en un instante anterior $t_3 < \bar{t}$, en el que $\exp(-\tau t_3) = p_1(t_3)d$. Para encontrar t_3 , consultamos en la tabla 2.2 la expresión que toma p_1 :

$$p_1(t) = \frac{Ab}{\tau - A(1 - b)d} e^{-\tau t} + e^{-A(1-b)dt} Q_1,$$

donde el valor de Q_1 lo determina $p_1(t_2)$, que puede ser calculado con ayuda de la expresión dada en (2.9). Obtenemos entonces

$$Q_1 = Ab \left[\left(\frac{1}{\tau - A(1 - b)c} - \frac{1}{\tau - A(1 - b)d} \right) \exp(-\tau t_2) - \right.$$

$$t_3 = \frac{1}{\tau - A(1-b)d} \ln \left(\frac{\tau - Ad}{Q_1 d [\tau - A(1-b)d]} \right). \quad (2.13)$$

Suponiendo que la anterior expresión de t_3 tiene sentido y se encuentra entre 0 y t_2 , el par de control (ii) se utiliza en el intervalo $[0, t_3)$.

Con esto queda completada la demostración. \square

El resultado anterior es una generalización de los expuestos en Lancaster (1973) y en Hoel (1978). En el primero de los artículos se toma $c = 0$ $d = 0$ y $\tau = \kappa = 0$. Hoel también hace $c = 0$ y $d = 0$ pero aunque si bien considera factores de descuento, utiliza una función de producción genérica lo que no le permite hallar explícitamente los instantes de cambio de control. Como los anteriores autores toman siempre $c = 0$, no se encuentran con el caso en que $Ac > \tau$. Para esta situación obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.2

Sea $Ac > \tau$, y sean p_2 , t_1 y t_2 los dados en (2.10), (2.11) y (2.12). Las sucesiones de controles que forman un equilibrio de Nash en ciclo abierto son

1. (ii)-(i)-(iii) si $t_1 > t_2$ o bien $A(1-b) \leq \kappa$;
2. Si $A(1-b) > \kappa$ y además $t_1 \leq t_2$, los equilibrios son
 - (a) (ii)-(iv)-(iii) cuando $p_1(t_2)d < e^{-\tau t_2}$, y
 - (b) (ii)-(iii) cuando $p_1(t_2)d \geq e^{-\tau t_2}$.

Demostración.

1. Siendo $Ac > \tau$ y $A(1-b) \leq \kappa$ tenemos que $\bar{t} = t_1$. Además se verifica también que $\exp(-\tau t_1) = p_1(t_1)c$ y $\exp(-\kappa t) > p_2(t)$, $\forall t \in [t_1, T]$. Antes de t_1 se utilizará, por tanto, el control (i). Las variables de coestado son de la forma

$$p_1(t) = \frac{Aa}{\tau - A(1-a)c} e^{-\tau t} + e^{-A(1-a)ct} Q_2,$$

$$p_2(t) = \frac{A(1-a)(1-c)}{\kappa - A(1-a)c} e^{-\kappa t} + e^{-A(1-a)ct} Q_3.$$

Las constantes Q_2 y Q_3 se despejan con ayuda de los valores $p_1(t_1)$ y $p_2(t_1)$, de acuerdo con las expresiones dadas en (2.9) y (2.10), resultando

$$\begin{aligned} Q_2 &= \left(\frac{1}{c} - \frac{Aa}{\tau - A(1-a)c} \right) \exp\{[A(1-a)c - \tau]t_1\}; \\ Q_3 &= A(1-b)(1-c) \left[-\frac{\exp\{[A(1-b)c - \kappa]T + A(b-a)ct_1\}}{\kappa - A(1-b)c} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\kappa - A(1-b)c} - \frac{1}{\kappa - A(1-a)c} \right) \exp\{[A(1-a)c - \kappa]t_1\} \right]. \end{aligned}$$

Otro cambio de control se producirá cuando deje de verificarse la condición $e^{-\kappa t} > p_2(t)$ en algún punto anterior a t_1 . Para determinar este nuevo instante, que denotaremos t_4 , resolvemos la ecuación $p_2(t) = e^{-\kappa t}$, de la cual se obtiene

$$t_4 = \frac{1}{\kappa - A(1-a)c} \ln \left(\frac{\kappa - A(1-a)}{Q_2[\kappa - A(1-a)c]} \right). \quad (2.14)$$

Si la expresión dada en (2.14) tiene sentido y se encuentra entre 0 y t_1 , el control (ii) se utilizará en el intervalo $[0, t_4)$; a continuación (i) durante $[t_4, t_1)$ y finalmente (iii) en $[t_1, T]$. En otro caso el control (i) se utiliza a lo largo de $[0, t_1)$ y (iii) en $[t_1, T]$.

2. Supongamos ahora que $A(1-b) > \kappa$. Lo que ocurra en este caso dependerá de cuál de los dos instantes, t_1 ó t_2 , sea mayor. Si $t_1 > t_2$, la primera parte de esta demostración nos indica la sucesión de controles a utilizar. Si por otra parte $t_1 \leq t_2$, las secuencias que forman el equilibrio de Nash son aquellas ya dadas en los casos 2 y 3 de la proposición 2.1.

Con esto queda concluida la demostración. \square

La tabla 2.3 resume las secuencias de controles que constituyen equilibrios de Nash en ciclo abierto para cada posible combinación de parámetros, con indicación del punto de cambio. Los instantes de cambio t_1, t_2, t_3 y t_4 se recogen en (2.11), (2.12), (2.13) y (2.14).

2.3.2 Sensibilidad de los pagos

La Teoría del Control nos ofrece herramientas para estudiar la sensibilidad de los pagos obtenidos respecto a la modificación de los parámetros del juego cuando un único jugador cambia su estrategia.

Consideremos que los integrandos de las dos funciones objetivo, así como la función que expresa la dinámica del sistema, dependen no sólo de la variable de estado,

Tabla 2.3

Estrategias óptimas en equilibrio de Nash de ciclo abierto. Denotamos P al producto $p_1(t_2)d$, y p_1, t_1, t_2, t_3 y t_4 son los dados en (2.9), (2.11), (2.12), (2.13) y (2.14).

		$\tau < Ac$		$\tau \geq Ac$	
		$P < e^{-\tau t_2}$	$P \geq e^{-\tau t_2}$	$P < e^{-\tau t_2}$	$P \geq e^{-\tau t_2}$
$A(1-b) > \kappa$	$t_1 \leq t_2$	$ii - i^v - i^{t_2} iii$	$ii - i^{t_2} iii$		
	$t_1 > t_2$			$ii - i^v - i^{t_2} iii$	$ii - i^{t_2} iii$
$A(1-b) \leq \kappa$			$ii - i^{t_4} i^{t_1} iii$		iii

los controles de los jugadores y el tiempo sino también de un vector de parámetros (que denotaremos por w). Supongamos además que dichas funciones tienen derivadas parciales continuas respecto a la variable de estado y a los parámetros.

Para cada vector de parámetros w podemos definir

$$J_1(w) := \sup \left\{ \int_0^T e^{-\tau t} C_1(K, u_1, u_2^*, t, w) dt : (K(t), u_1(t)) \text{ admisible} \right\}$$

$$J_2(w) := \sup \left\{ \int_0^T e^{-\kappa t} C_2(K, u_1^*, u_2, t, w) dt : (K(t), u_2(t)) \text{ admisible} \right\},$$

donde (u_1^*, u_2^*) es el equilibrio de Nash del juego con vector de parámetros w . El par $(K(t), u_1(t))$ es admisible dado u_2^* si, con las condiciones iniciales del problema, la acumulación de capital sigue el comportamiento especificado por la función $K(t)$ cuando se utilizan los controles (u_1, u_2^*) .

Bajo condiciones adecuadas (ver, por ejemplo, Seierstad y Sydseater, 1986), dado un vector de parámetros \bar{w} se puede asegurar que J_i está definida en un entorno de \bar{w} y que es diferenciable en el punto \bar{w} , siendo

$$\frac{\partial J_i(\bar{w})}{\partial w_j} = \int_0^T \frac{\partial H_i(t, K^*, u_1^*, u_2^*, p_i, \bar{w})}{\partial w_j} dt. \quad (2.15)$$

Para aplicar este resultado en nuestro análisis consideraremos como parámetros los valores extremos de los intervalos de acción de los jugadores: $[a, b]$ y $[c, d]$. Llamaremos v_1 y v_2 a los controles de los jugadores y consideraremos que se mueven siempre en $[0, 1]$. De esta forma tenemos que

$$\begin{aligned} u_1(t) &= a + (b - a)v_1(t), \\ u_2(t) &= c + (d - c)v_2(t). \end{aligned}$$

Las estrategias en equilibrio para este nuevo juego son del mismo tipo que las encontradas para el juego original, donde ahora v_i alcanza el valor cero o uno cuando u_i llega al extremo inferior y superior de su intervalo, respectivamente.

De esta forma se puede estudiar cómo influyen sobre sus propios pagos las modificaciones del margen de acción de un jugador suponiendo que el otro mantiene la estrategia asignada en el equilibrio. Para esto calculamos primero el equilibrio de Nash asociado con los parámetros iniciales del juego. De este obtenemos los controles óptimos, la trayectoria del stock de capital y las variables de coestado. Para estudiar el influjo de los cambios en el intervalo de los trabajadores consideramos un nuevo hamiltoniano $\hat{H}_1(t, K, v_1, v_2, p_2, a, b, c, d)$ que se obtiene sustituyendo las nuevas expresiones de u_1 y u_2 dadas más arriba en la expresión de H_1 de (2.5). La derivada de \hat{H}_1 con respecto al parámetro deseado (a o b) se evalúa para cada instante de tiempo en los controles y valores del capital y de la variable de coestado que nos indica el equilibrio. De esta manera, la variación que sufrirá el consumo de los trabajadores vendrá dada como la integral en el tiempo de esa derivada, según nos indica (2.15). Algo análogo podría hacerse con el consumo de los capitalistas si modifican su intervalo, o si se modifica cualquier otro parámetro (A, B, τ, κ, K_0)

Se comprueba de forma inmediata que las derivadas de las funciones objetivo son no negativas respecto de los extremos superiores de los intervalos y no positivas respecto de los inferiores. Por tanto, aumentar la libertad de movimiento de un jugador cuando el otro se mantiene en su estrategia será siempre ventajoso para él pues aumentará su consumo.

Sin embargo, no parece del todo completo el análisis anterior en el que uno de los jugadores queda inmovilizado en su estrategia cuando el juego ha cambiado. En este sentido, sería más adecuado estudiar la modificación de los consumos cuando al modificar el parámetro correspondiente ambos jugadores se mueven a un nuevo equilibrio de Nash. Este estudio se aborda con ayuda de un ejemplo en la siguiente sección.

2.3.3 El efecto del rango de acción sobre el consumo y la acumulación de capital: un ejemplo

La tabla 2.3, muestra una secuencia de controles óptimos para cada posible configuración, con una indicación del instante en el que se producen los cambios en las variables de control. Para clarificar los resultados, vamos a considerar un ejemplo en el que fijaremos los valores de los parámetros que definen el estado inicial de la economía. Analizaremos cómo afecta a los resultados la modificación del intervalo de discrecionalidad.

Supongamos un estado de partida de la economía caracterizado por los valores dados a continuación:

$$\begin{aligned} A &= 0.4, & B &= 0.01, & T &= 8 \text{ periodos,} \\ \tau &= 0.06, & \kappa &= 0.05. \end{aligned}$$

Siguiendo el enfoque esbozado anteriormente consideramos una primera fase en la que los jugadores establecen los límites a su intervalo de discrecionalidad. Supongamos que el intervalo (que denotaremos con el subíndice cero) establecido para los trabajadores es $[a_0, b_0] = [0.405, 0.495]$ y para los capitalistas $[c_0, d_0] = [0.1, 0.8]$.

En la segunda fase se desarrolla el juego propiamente dicho. Dadas las condiciones iniciales de la economía y establecido el marco institucional anterior, los jugadores alcanzarán un equilibrio de Nash con la combinación de controles: *(ii)-(iv)-(iii)*, donde los cambios de pares de controles se realizan en los instantes $t_3 = 1.4$ y $t_2 = 2$.

A continuación modificamos los intervalos de discrecionalidad de los jugadores y observamos las desviaciones de consumos y capital final de los nuevos equilibrios, respecto de la situación original.

Comencemos por considerar que las decisiones de los capitalistas se mantienen acotadas en el intervalo $[c_0, d_0]$ y, sin embargo, se modifican simultáneamente las cotas de participación de los trabajadores en la renta. Nos encontramos entre un valor máximo de participación ($a = b = 1$), con una acumulación de capital mínima, y un valor de participación nula ($a = b = 0$), con una acumulación máxima (ver figura 2.2A).

En esta dinámica, el nivel de consumo de los trabajadores tendrá un máximo local en $[0, 0.5]$, y uno global cuando $b = 1$ y a tome cualquier valor. Por su parte, para los capitalistas, el consumo tenderá a ser mayor según disminuya la participación de los trabajadores en la renta, y será máximo cuando $a = b = 0$ (figuras 2.2B y 2.2C).

En las figuras 2.3A y 2.3B puede analizarse la modificación independiente de cada uno de los extremos del intervalo. Primero mantenemos la cota superior en b_0

y variamos la inferior en $[0, b_0]$. Esto supone una mejora en los consumos de ambos jugadores y en la acumulación de capital cuando disminuye esa cota inferior y un empeoramiento cuando aumenta, es decir, cuando se estrecha el margen de actuación de los trabajadores. Por el contrario, si mantenemos la cota inferior a igual a a_0 y permitimos moverse la superior en $[a_0, 1]$ obtendríamos los resultados mostrados en la figura 2.3B. Un estrechamiento del margen de acción de los trabajadores supone una muy ligera disminución de su consumo y un aumento de más del 20% en el stock de capital final y en el consumo de los capitalistas. Cuando aumentamos la cota máxima de participación, si este aumento en su libertad de movimiento no es suficientemente grande (menor que 0.65), resulta que se traduce en una disminución de su consumo (y también del de los capitalistas y del capital final). Si es grande el aumento se consigue entonces un pago mayor que el original, aunque el de los capitalistas y el capital final disminuyen drásticamente.

Este desplazamiento de la cota superior supone un cambio en la estrategia de equilibrio, como se puede ver en la figura 2.4A. Cuando el intervalo de participación de los trabajadores en la renta se mantiene entre 0.405 y 0.54 la combinación de controles de equilibrio es *(ii)-(iv)-(iii)*. Para valores de b comprendidos entre 0.54 y 0.87 el equilibrio de Nash viene dado por *(ii)-(iii)*, aunque a partir de 0.6 el instante de cambio vale 0 y, por tanto, se reduce a *(iii)*. Finalmente queda *(iii)* (participación máxima de los trabajadores e inversión mínima) entre 0.87 y 1.

En definitiva, se analiza la interacción entre las decisiones de los trabajadores y los capitalistas y se observa cómo a medida que la cota superior b de los trabajadores aumenta, crecen los incentivos para pasar de la participación mínima a a la máxima b , mientras los capitalistas pierden todo incentivo para invertir.

Realicemos un estudio similar manteniendo las cuotas de participación de los trabajadores $[a_0, b_0] = [0.405, 0.495]$ y modificando el intervalo de discrecionalidad de los capitalistas. Recordemos que c supone la parte de la renta dirigida institucionalmente a la inversión y la diferencia entre 1 y d es el mínimo dedicado al consumo de los capitalistas. Por tanto, tenemos que si $c = d = 0$ la acumulación de capital es nula, y cuando $c = d = 1$ la acumulación es máxima (ver figura 2.2D) Lógicamente el consumo de los trabajadores será tanto mayor cuanto más se acerquen c y d a uno (figura 2.2E). Por el contrario, el consumo de los capitalistas será mayor según c se acerque a cero y d a uno (figura 2.2F).

El análisis de la evolución de cada una de las cotas manteniendo la otra fija, nos lleva a los gráficos 2.3C y 2.3D. Si aumentamos la parte mínima de renta que deberá ser dedicada a la inversión aumentarán tanto el capital final acumulado como el consumo de los trabajadores, mientras que disminuye el de los capitalistas. Por otro lado, cuando disminuimos d y, por tanto, reducimos el margen de inversión de los

capitalistas, ambos jugadores pierden en consumo y se acumula menos capital. El fenómeno contrario se observa cuando se incrementa d .

Finalmente queremos hacer notar que se puede obtener mejores pagos para ambos jugadores, manteniendo la misma acumulación de capital en el instante final, si se modifican simultáneamente las dos cotas de su intervalo de discrecionalidad. De esta forma, si nos movemos en el plano ab a lo largo de la curva de nivel del capital final que pasa por el punto original $(0.405, 0.495)$, señalada en la figura 2.2 con trazo punteado, el consumo de los capitalistas permanece prácticamente constante, pero el de los trabajadores experimenta cierto aumento según nos acercamos al punto extremo $(a = 0, b = 0.55)$, indicado en el dibujo con un punto grueso. Por su parte, cuando los capitalistas se mueven en el plano cd por la curva de nivel indicada hacia el punto $(c = 0, d = 0.91)$ ambos jugadores obtienen consumos sustancialmente superiores.

El ejemplo considerado parece poner de manifiesto que una estructura institucional muy rígida, que limite excesivamente las decisiones de los agentes, puede ofrecer peores resultados para el sistema y para los mismos agentes que otra más flexible, aunque esta última parezca proteger menos los intereses de alguno de los decisores. Con todo, se ha visto un caso (figura 2.3B) en el que aumentar los límites de uno de los jugadores conduce a un nuevo equilibrio con peores pagos para cada uno y con un menor stock de capital final.

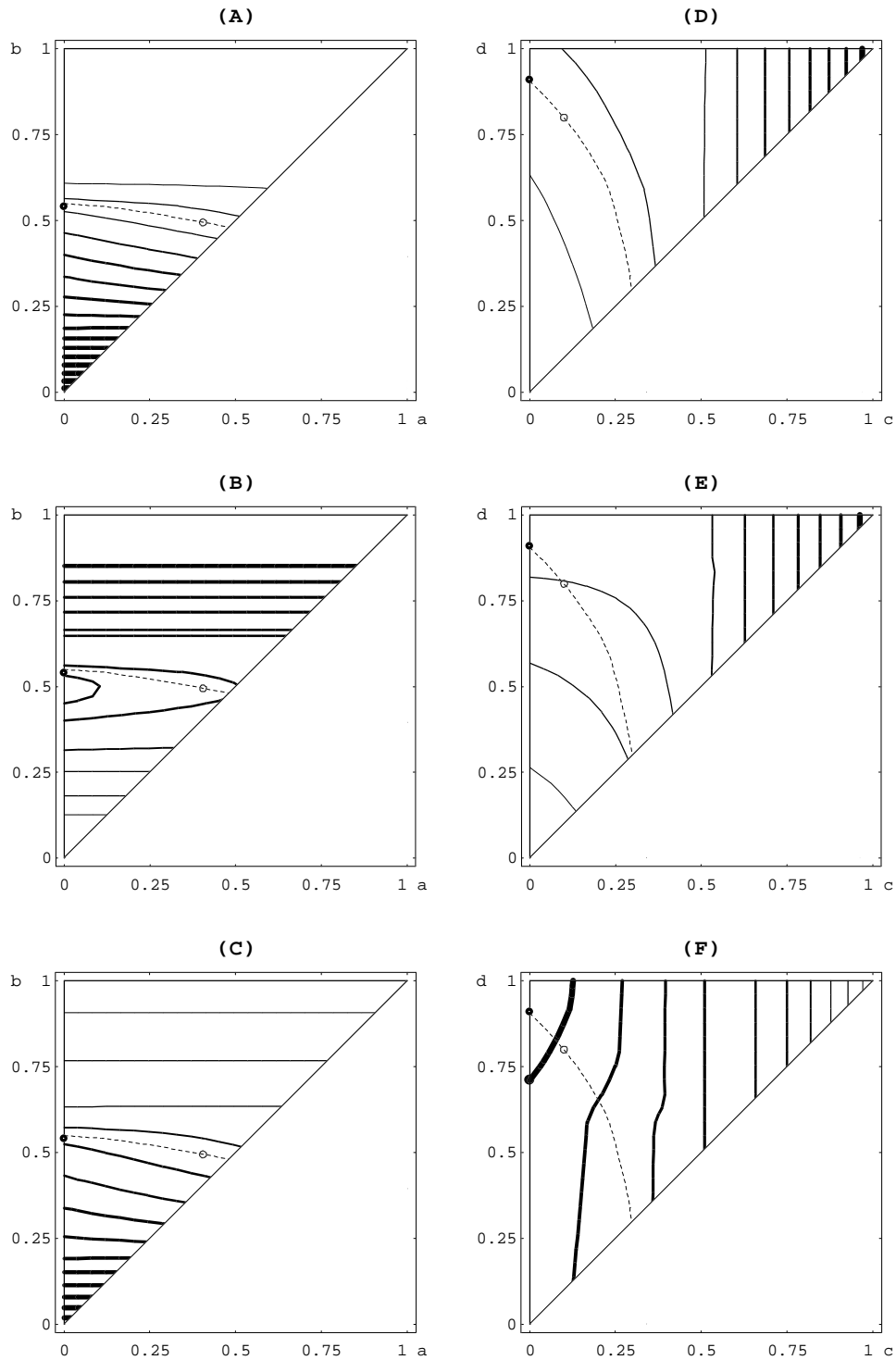


Figura 2.2

Curvas de nivel del stock de capital final alcanzado (A y D), del consumo de los trabajadores (B y E) y del consumo de los capitalistas (C y F) en el equilibrio cuando se modifican los intervalos de discrecionalidad de los trabajadores (A, B y C) o de los capitalistas (D, E y F). Las curvas más gruesas indican un mayor valor de la función. El punto blanco es el valor inicial. La línea discontinua es la curva de nivel correspondiente al capital alcanzado en el punto inicial. En el punto negro se obtienen mejores pagos en el equilibrio para ambos jugadores,

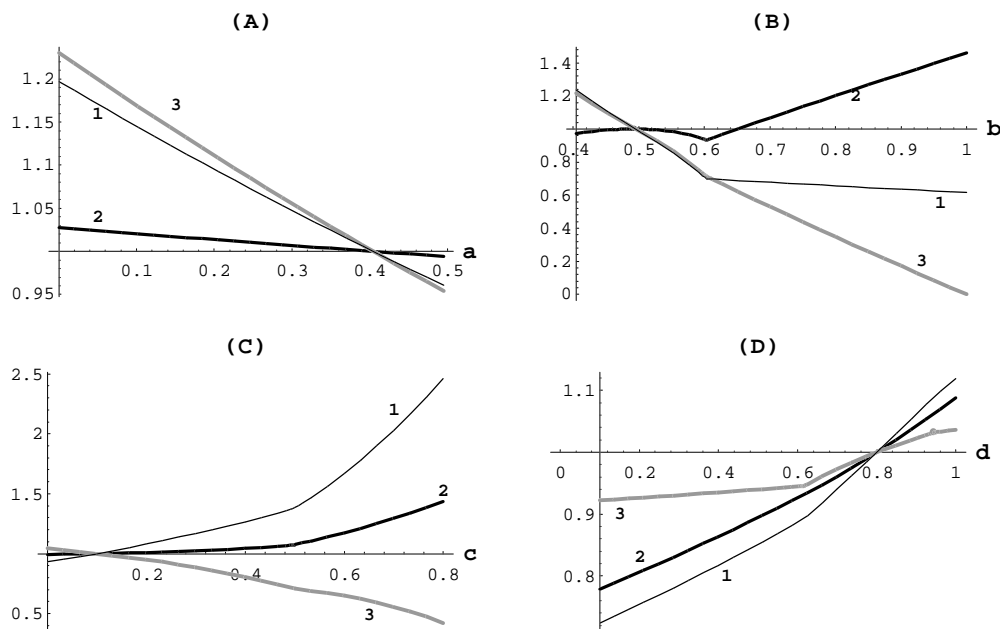


Figura 2.3

Gráficas del stock de capital (1) y los consumos de trabajadores (2) y capitalistas (3) divididos por el valor que alcanza cada uno en el punto original $[a = 0.405, b = 0.495]$, $[c = 0.1, d = 0.8]$. **(A)** en el caso en que a se mueve en el intervalo $[0, 0.495]$, con $b = 0.495$; **(B)** moviendo b en $[0.45, 1]$ con a fijo en 0.405; **(C)** c se mueve el $[0, 0.8]$ para $d = 0.8$; **(D)** $c = 0.1$ y d varía en $[0.1, 1]$.

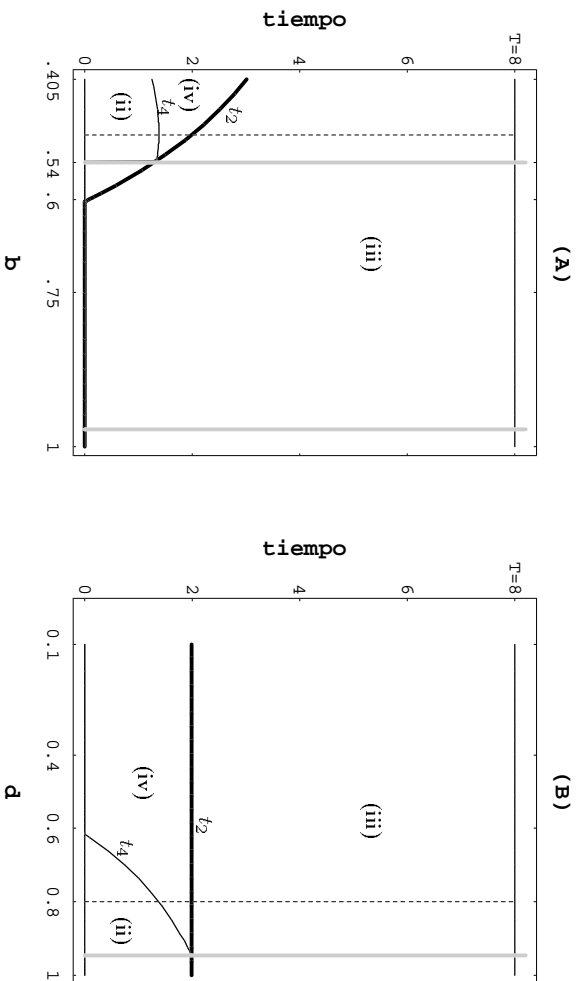


Figura 2.4

Controles utilizados a lo largo del tiempo en el equilibrio. **(A)** Para el caso de modificar b en $[0, 405, 1]$. **(B)** Caso de variar d en $[0, 1, 1]$. Las líneas gruesas en gris indican cambios en la estrategia (ver tabla 2.3). La línea punteada indica la trayectoria para los intervalos originales: se utiliza (ii) en el intervalo temporal $[0, t_4 = 1.4]$, (iv) en $[1.4, t_2 = 2]$ y (iii) en $[t_2 = 2, T = 8]$.

2.4 Óptimos de Pareto

Vamos a buscar ahora los elementos no dominados del conjunto de todos los pagos posibles en el juego descrito anteriormente. Para esto definimos una *función de bienestar social* en la que se suman los pagos a los jugadores dados por J_1 y J_2 , ponderados de acuerdo con su capacidad o poder de decisión:

$$W = \lambda J_1 + (1 - \lambda)J_2, \text{ donde } \lambda \in [0, 1].$$

Para hallar toda la frontera superior del conjunto de pagos posibles basta con resolver el problema

$$\max \quad \lambda J_1(u_1, u_2) + (1 - \lambda)J_2(u_1, u_2) \quad (2.16)$$

$$\text{sujeto a: } u_1(t) \in [a, b], u_2(t) \in [c, d] \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.17)$$

$$\dot{K}(t) = [1 - u_1(t)]u_2(t)f[K(t)] \quad (2.18)$$

$$K(0) = K_0 \quad (2.19)$$

para cada valor de λ en el intervalo $[0, 1]$.

Dado un λ , (2.16)–(2.19) expresan un problema clásico de control óptimo, puesto que hay un único objetivo. Tendremos ahora un sólo hamiltoniano (H) y una única variable de coestado (p). Aunque u_1 , u_2 , p y K son funciones del tiempo, con frecuencia no expresaremos explícitamente tal dependencia a menos que haya posibilidad de confusión. Tenemos entonces que el hamiltoniano es

$$\begin{aligned} H &= \left[\lambda u_1 e^{-\delta t} + (1 - \lambda)(1 - u_1)(1 - u_2)e^{-\delta t} \right] f(K) + p(1 - u_1)u_2 f(K) \\ &= e^{-\delta t} f(K) \left\{ \lambda u_1 + \left[p e^{\delta t} u_2 + (1 - \lambda)(1 - u_2) \right] (1 - u_1) \right\}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Al igual que en el apartado anterior consideramos una función de producción lineal $AK(t) + B$, pero ahora tomamos todo el intervalo $[0, 1]$ para los posibles controles de los capitalistas en lugar de $[c, d]$ y consideramos que los descuentos son positivos e iguales para los dos jugadores y lo denotamos por δ .

La Teoría de Control afirma que el par de controles (u_1^*, u_2^*) , con función de acumulación de capital asociada K^* , será óptimo sólo si se verifican las siguientes condiciones (ver teorema 1.10):

$$\mathbf{C1.} \quad \dot{K}^*(t) = [1 - u_1^*(t)]u_2^*(t)f[K^*(t)];$$

$$\mathbf{C2.} \quad K^*(0) = K_0;$$

C3. existe una función $p: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y continuamente diferenciable a trozos tal que

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial K}(t, K^*, u_1^*, u_2^*, p);$$

en todo punto $t \in [0, T]$ en el que la derivada esté definida;

C4. para cada $t \in [0, T]$ se tiene que

$$(u_1^*(t), u_2^*(t)) = \arg \max\{H(t, K^*, u_1, u_2, p) : u_1 \in [a, b], u_2 \in [c, d]\};$$

C5. $p(T) = 0$.

Observando la expresión del hamiltoniano dada en (2.20) podemos obtener un resultado análogo al obtenido en el lema 2.1 y, por tanto, también aquí los controles son de tipo bang-bang. Conocido el valor de la variable de coestado en un determinado instante t , definiremos la función Z

$$Z(t) := p(t)e^{\delta t}$$

y podemos saber cuál es el par de control que hace máximo el hamiltoniano en ese punto. De la expresión (2.20) y de que $f(K)$ es positiva se deduce que

$$u_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } Z(t) < 1 - \lambda \\ u \in [0, 1], & \text{si } Z(t) = 1 - \lambda \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.21)$$

y

$$u_1(t) = \begin{cases} a, & \text{si } \lambda < \max\{Z(t), 1 - \lambda\} \\ u \in [a, b], & \text{si } \lambda = \max\{Z(t), 1 - \lambda\} \\ b, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.22)$$

Las expresiones que toman u_1 y u_2 dadas en (2.21) y (2.22) nos permiten, como ya hicimos al calcular los equilibrios de Nash, restringir nuestro estudio prácticamente a cuatro pares de controles, uno de los cuales será óptimo en cada instante:

- (i) $\equiv (u_1 = a, u_2 = 0)$, cuando $\lambda, Z(t) \leq 1 - \lambda$;
- (ii) $\equiv (u_1 = a, u_2 = 1)$, cuando $\lambda, 1 - \lambda \leq Z(t)$;
- (iii) $\equiv (u_1 = b, u_2 = 0)$, cuando $Z(t) \leq 1 - \lambda \leq \lambda$;
- (iv) $\equiv (u_1 = b, u_2 = 1)$, cuando $1 - \lambda \leq Z(t) \leq \lambda$.

De esta manera tenemos que

$$p'(t) = -\frac{\partial H}{\partial K} = -f'(K)e^{-\delta t} \left\{ u_1 \lambda + (1 - u_1) \left[u_2 p e^{\delta t} + (1 - u_2)(1 - \lambda) \right] \right\} =$$

$$= -f'(K)e^{-\delta t}S(t), \quad (2.23)$$

donde

$$S(t) = u_1\lambda + (1 - u_1)[u_2Z(t) + (1 - u_2)(1 - \lambda)]. \quad (2.24)$$

Obsrvese que $S(t)$ es positiva cuando se utiliza cualquier control óptimo y entonces toma la expresión

$$S(t) := u_1\lambda + (1 - u_1) \max\{Z(t), 1 - \lambda\}. \quad (2.25)$$

A la luz de (2.21) y (2.22) se deduce que los diferentes controles usados dependen de la posición relativa entre $Z(t)$, λ y $1 - \lambda$. El siguiente resultado es de utilidad para estudiar esta relación.

Proposición 2.3

Si la función de producción es lineal, y por tanto f' es constante, en el óptimo del problema (2.16)–(2.19) la función $Z(t) = p(t)e^{\delta t}$ es monótona.

Demostración. La función Z es continua, pues p también lo es. Expresamos su derivada como

$$Z'(t) = \frac{d(p(t)e^{\delta t})}{dt} = p'(t)e^{\delta t} + p(t)\delta e^{\delta t} = -f'(K)S(t) + p(t)\delta e^{\delta t},$$

donde $S(t)$ toma la expresión dada en (2.25).

En puntos con igual valor para la función Z , la función S también toma valores idénticos. La pendiente de Z en esos puntos también será la misma si $f'(K)$ es constante. Si Z es creciente en un punto entonces no puede ser decreciente en otro punto posterior, o si es decreciente no puede pasar a ser creciente más tarde, pues esto implicaría que Z tomase el mismo valor pero con pendientes de distinto signo. Es, por tanto, una función monótona. \square

Corolario 2.1

Si $p(T) = 0$, entonces las funciones Z y p en la solución óptima del problema (2.16)–(2.19) son no crecientes.

Demostración. Puesto que f es creciente y por tanto su derivada es positiva, una mirada atenta a (2.23) y (2.25) nos permite afirmar que $p'(t) \leq 0$ y, por tanto, p es una función no creciente. Esto, junto con $p(T) = 0$ implica que $p(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, T]$. Entonces $Z(t) = p(t)e^{\delta t}$ es no negativa para todo $t < T$. Si añadimos a esto el hecho de que $Z(T) = 0$ y de que por la proposición 2.3 la función Z es monótona, tenemos que Z debe ser no creciente. \square

Dado un par de control usado en un cierto intervalo, la variable de coestado y la función de stock de capital para ese intervalo están determinadas, salvo una

constante. La tabla 2.4 muestra las expresiones que toman suponiendo una función de producción lineal $AK + B$. La constante Q depende de los valores de p y K en los extremos del intervalo en cuestión.

Tabla 2.4

Condiciones, capital y variables de coestado para los diferentes controles. La constante Q es la adecuada en cada caso para que K y p sean funciones continuas.

controles/ condiciones	función de capital $K(t)$	variable de coestado $p(t)$
(i) $\equiv (u_1 = a, u_2 = 0)$ $\begin{cases} Z(t) \leq 1 - \lambda \\ \lambda \leq 1 - \lambda \end{cases}$	Q	$A \frac{\lambda a + (1 - \lambda)(1 - a)}{\delta e^{\delta t}} + Q$
(ii) $\equiv (u_1 = a, u_2 = 1)$ $\begin{cases} Z(t) \geq 1 - \lambda \\ Z(t) \geq \lambda \end{cases}$	$e^{A(1-a)t} Q - \frac{B}{A}$	$\begin{cases} \frac{\lambda A a e^{-\delta t}}{\delta - A(1-a)} + e^{-A(1-a)t} Q, \\ \quad \text{si } \delta \neq A(1-a) \\ \frac{Q - \lambda A a t}{e^{\delta t}}, \text{ si } \delta = A(1-a) \end{cases}$
(iii) $\equiv (u_1 = b, u_2 = 0)$ $Z(t) \leq 1 - \lambda \leq \lambda$	Q	$A \frac{\lambda b + (1 - \lambda)(1 - b)}{\delta e^{\delta t}} + Q$
(iv) $\equiv (u_1 = b, u_2 = 1)$ $\lambda \leq 1 - \lambda \leq Z(t)$	$e^{A(1-b)t} Q - \frac{B}{A}$	$\begin{cases} \frac{\lambda A b e^{-\delta t}}{\delta - A(1-b)} + e^{-A(1-b)t} Q \\ \quad \text{si } \delta \neq A(1-b) \\ \frac{Q - \lambda A b t}{e^{\delta t}}, \text{ si } \delta = A(1-b) \end{cases}$

Los controles que conducen a óptimos de Pareto son sucesiones de los controles (i), (ii), (iii) y (iv) (salvo casos extremos) actuando en diferentes intervalos del horizonte temporal. ¿Cuáles son las secuencias posibles de pares de control? Para responder a esta pregunta debemos observar las expresiones de u_1 y u_2 , considerar el corolario 2.1 y distinguir los casos en los que $\lambda < \frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{2}$ y $\lambda > \frac{1}{2}$.

En caso de que $\lambda < \frac{1}{2}$, tendremos que $\lambda < 1 - \lambda$. La figura 2.5d muestra que las posibles secuencias de control han de ser compatibles con (ii)-(i). De la misma manera cuando $\lambda > \frac{1}{2}$, resulta que $1 - \lambda < \lambda$ y el control óptimo ha de ser una sucesión compatible con (ii)-(iv)-(iii) (ver fig. 2.5f). En el caso $\lambda = \frac{1}{2}$ el control posible es (ii)-(u, 0), siendo u cualquier valor de $[a, b]$, como muestra la figura 2.5e.

Como hicimos para calcular el equilibrio de Nash, también ahora debemos partir del instante final T en el que sabemos que la variable de estado toma el valor cero. Con este dato podemos saber cuál es el par de control óptimo y la expresión exacta

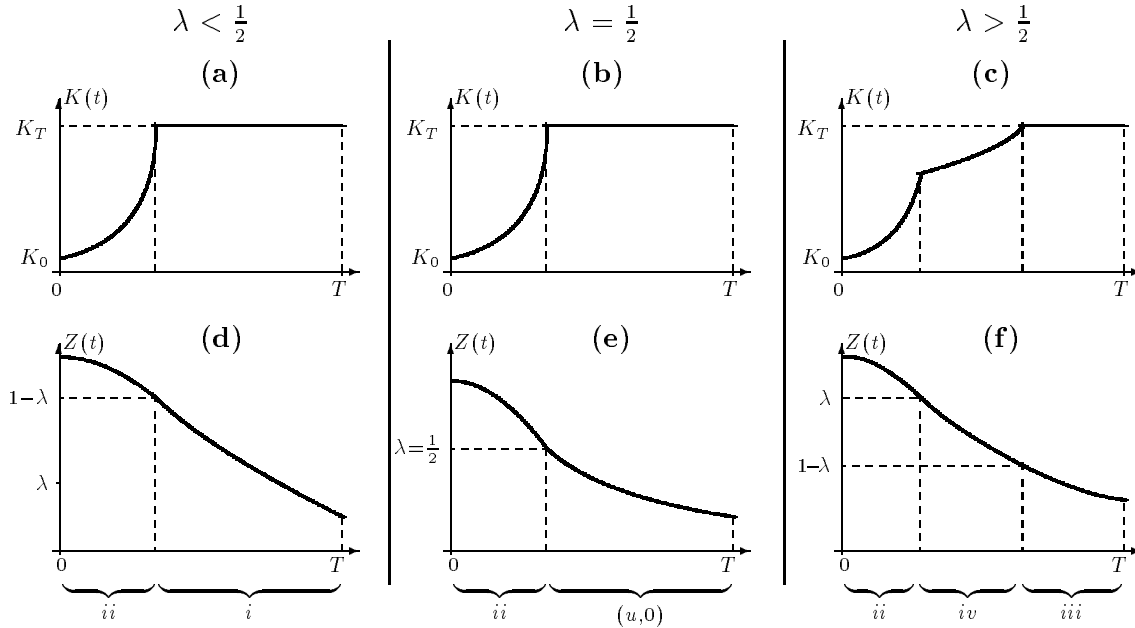


Figura 2.5

Posibles sucesiones de controles y acumulación de capital asociada cuando $Z(t)$ es no creciente, para los casos $\lambda < 1/2$ (a, d), $\lambda = 1/2$ (b, e) y $\lambda > 1/2$ (c, f).

que toma la variable de coestado. Moviéndonos hacia atrás en el tiempo calculamos el instante en el que deja de ser óptimo el control elegido y así sucesivamente vamos retrocediendo en el tiempo hasta alcanzar el instante inicial $t = 0$. El resultado se puede resumir en el siguiente teorema.

Teorema 2.1 (Hoel, 1978)

Sean J_1 y J_2 los funcionales objetivos dados en (2.2) y (2.3). Las secuencias de control que maximizan $W = \lambda J_1 + (1 - \lambda)J_2$ siendo $\lambda \in [0, 1]$ sujeto a la ecuación cinética del sistema dada en (2.1) y a la condición inicial (2.4), son las dadas en la tabla 2.5. □

Tabla 2.5

Estrategias que alcanzan pagos no dominados, para el juego con capital final libre.

$\lambda < \frac{1}{2}$	$\lambda = \frac{1}{2}$	$\lambda > \frac{1}{2}$
$ii \overset{t_1}{-} i$	$ii \overset{t_4}{-} (u, 0)$ con $u \in [a, b]$	$ii \overset{t_3}{-} iv \overset{t_2}{-} iii$

Los instantes de cambio de control no fueron calculados en Hoel (1978) pues este autor considera una función de producción genérica. Para el caso que estamos

considerando en que la función es lineal, los instantes son

$$t_i = \begin{cases} 0, & \text{si } t'_i < 0 \\ t'_i, & \text{si } 0 \leq t'_i \leq T \\ T, & \text{si } T < t'_i \end{cases} \quad (2.26)$$

para $i = 1, 2, 4$, y

$$t_3 = \begin{cases} 0, & \text{si } t'_3 < 0 \\ t'_3, & \text{si } 0 \leq t'_3 \leq t_2 \\ t_2, & \text{si } t_2 < t'_3 \end{cases} \quad (2.27)$$

donde

$$t'_1 = T + \frac{1}{\delta} \ln \left[1 - \frac{\delta(1-\lambda)}{A[\lambda a + (1-\lambda)(1-a)]} \right] \quad (2.28)$$

$$t'_2 = T + \frac{1}{\delta} \ln \left[1 - \frac{\delta(1-\lambda)}{A[\lambda b + (1-\lambda)(1-b)]} \right] \quad (2.29)$$

$$t'_3 = \begin{cases} (1 - 2\lambda + \lambda A b t_2)/(\lambda A b), & \text{si } \delta = A(1-b) \\ t_2 + \frac{1}{\delta - A(1-b)} \ln \left[\frac{\lambda(\delta - A)}{(1-\lambda)[\delta - A(1-b)] - \lambda A b} \right], & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.30)$$

$$t'_4 = T + \frac{1}{\delta} \ln(1 - \delta/A). \quad (2.31)$$

Llamaremos $K_T^{\text{libre}}(\lambda)$ al capital final acumulado cuando se utiliza la estrategia descrita anteriormente, para un juego con el capital final libre.

De entre los pagos no dominados parecen especialmente atractivos aquellos que dominan al equilibrio de Nash. Veamos a continuación un ejemplo en el que hallaremos toda la frontera de Pareto.

Ejemplo 2.1 Consideremos la economía descrita en los siguientes términos:

- función de producción: $0.2K(t) + 0.01$;
- factor de descuento: $\delta = 0.03$;
- intervalo de negociación de los trabajadores: $[a = 0.3, b = 0.8]$;
- horizonte temporal: $[0, T = 8]$.

Aplicando estos parámetros a nuestro juego se obtiene que el conjunto de pagos no dominados es el mostrado en la figura 2.6a mediante la curva ABCD. La curva AB está formada por los puntos correspondientes a $\lambda < \frac{1}{2}$, donde A es el asociado a $\lambda = 0$. La línea BC representa los pagos obtenidos por las estrategias asociadas a $\lambda = \frac{1}{2}$ que son del tipo (ii)-(u,0): el punto B corresponde a tomar $u = a$ y el C a $u = b$. Por último, la curva CD está relacionada con los valores de λ comprendidos entre $\frac{1}{2}$ y 1. El capital final obtenido $K_T^{\text{libre}}(\lambda)$ va aumentando a medida que nos trasladamos del punto A al D (ver figura 2.6b).

El equilibrio de Nash para este juego consiste en aplicar (iii) durante todo el intervalo temporal, lo que permite alcanzar el pago representado por el punto EN. En este caso el capital final coincide con el inicial, puesto que no hay inversión alguna. \square

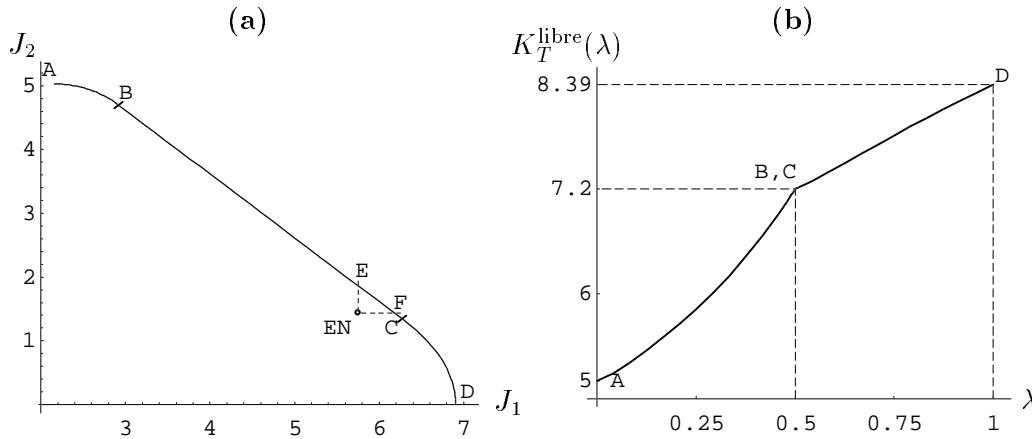


Figura 2.6

(a) Pagos no dominados para el juego con capital final libre. El arco AB corresponde a los valores de λ entre 0 y $\frac{1}{2}$; la línea BC con $\lambda = \frac{1}{2}$; y CD con λ entre $\frac{1}{2}$ y 1. El segmento EF son los óptimos de Pareto que dominan el pago del equilibrio de Nash (punto EN).

(b) El capital final obtenido para los diferentes valores de λ supuesto un capital inicial $K_0 = 5$. Las letras se refieren a los puntos de la gráfica (a).

2.5 Conclusiones

Las dos innovaciones introducidas en el modelo de Lancaster, esto es, la existencia de tasas de descuento distintas para cada uno de los jugadores y la introducción de un marco institucional que acote los controles de los jugadores, enriquecen considerablemente el análisis del juego diferencial de crecimiento económico. Del desarrollo del capítulo se pueden extraer las siguientes conclusiones.

1. En primer lugar, se pone de manifiesto que los equilibrios del juego vienen determinados por el conjunto de parámetros dados (A, B, τ, κ) y por los valores establecidos en el proceso político de acotación de la discrecionalidad del control de los jugadores (a, b, c, d). En la tabla 2.3 aparecen los siete posibles equilibrios de Nash. No se puede establecer una ordenación entre los mismos, de acuerdo con su carácter más o menos expansivo, ni es fácil deducir en qué medida los límites a los controles de los jugadores afectan a los resultados.

El hecho de que los equilibrios de Nash en ciclo abierto sean también feedback degenerados resta algo del aspecto dinámico del juego, al hacer depender las decisiones de los jugadores únicamente del tiempo, y no del estado del sistema, aunque dispongan en cada instante de esta información.

2. A lo largo del capítulo se estudia cómo la modificación del marco institucional (el intervalo de discrecionalidad) afecta a los resultados del juego. Para ello, se realiza primeramente un análisis de sensibilidad de los pagos de los jugadores respecto a las variaciones de sus rangos de actuación. Este análisis, sin embargo, resulta limitado al poder utilizarse sólo en situaciones en las que mientras un jugador modifica su intervalo de discrecionalidad, el otro sigue con su estrategia de equilibrio previa a dicha modificación. El resultado obtenido pone de manifiesto que dada la estrategia de uno de los jugadores, el jugador contrario siempre podrá mejorar sus pagos si se aumenta en cualquier sentido el rango en que puede moverse su control.

3. Dado que resulta interesante estudiar aquellas situaciones en las que existe interacción estratégica entre las decisiones de los jugadores, consideramos una determinada economía en la que se fijan las condiciones técnicas (A, B) y las preferencias por el tiempo de los jugadores (τ, κ) lo que nos permite analizar el efecto de la acotación de los controles sobre los resultados del juego. Se toman en cuenta dos situaciones. En una primera se estudia la influencia de la modificación de esas cotas sobre los consumos y sobre la acumulación de capital en el instante final. Los resultados obtenidos manifiestan, en términos generales, que una economía que restringe mucho el margen de posibles actuaciones de los agentes obtiene unos resultados subóptimos con respecto a otras con menores restricciones. Sin embargo, pueden darse situaciones, como en el ejemplo 2.1 cuando el margen superior de actuación de los trabajadores aumenta moviéndose entre 0.6 y 0.7, en las que se produce un empeoramiento general tanto para el consumo de ambos jugadores como para la acumulación de capital. Sólo a partir del 0.7 empezaría a mejorar el consumo de los trabajadores, aunque a costa de una descapitalización de la economía y de una caída que se podría calificar de dramática en el pago a los capitalistas. Esto parece indicar que existen incentivos para ampliar el margen de discrecionalidad siempre que el límite superior de la participación de los trabajadores en la renta no supere el 60%. A partir de dicho límite el sistema económico se colapsaría.

4. Se analiza la modificación de las cotas de forma que, en el nuevo equilibrio se alcance la misma acumulación de capital que se obtenía en el equilibrio de Nash correspondiente a los márgenes de actuación iniciales de los jugadores. En este caso los resultados son congruentes con los anteriores: los consumos más altos se alcanzan cuando los intervalos son relativamente amplios: $[a = 0, b = 0.58]$ para los trabajadores y $[c = 0, d = 0.91]$ para los capitalistas.

En definitiva, para una economía dada, definida por un conjunto de parámetros, el análisis realizado pone de manifiesto la posibilidad de establecer un marco institucional que sea compatible simultáneamente con los intereses de ambos jugadores.

5. Finalmente, se determinan los elementos no dominados u óptimos de Pareto del conjunto de todos los pagos posibles en el juego y se establecen los controles que los alcanzan. Como en el equilibrio de Nash, tampoco en las estrategias que alcanzan pagos no dominados es relevante el capital inicial y dependen únicamente del tiempo, una vez fijados el resto de los parámetros del juego.

3

Juegos de crecimiento con metas en el capital

Partiendo del modelo de crecimiento y distribución presentado en el capítulo anterior, incorporamos en este una restricción sobre el estado final del sistema. Se calculan para este nuevo juego los equilibrios de Nash en ciclo abierto. Esta nueva restricción conduce a un cambio notable en los resultados, ya que al exigir que se alcance al menos un capital final determinado se pasa de un único equilibrio a poder tener una cantidad no numerable de ellos. Se analiza también el conjunto de pagos no dominados, esto es, los puntos que forman la frontera de Pareto. Por último se comparan los resultados con los obtenidos en el capítulo segundo, señalando condiciones en las que los equilibrios de Nash son no dominados.

3.1 El modelo con metas en el estado final

La condición de partida (el stock de capital inicial) no resulta ser de gran importancia en el juego de crecimiento económico que hemos considerado en el capítulo anterior para saber cuál es el par de estrategias que están en equilibrio o que alcanzan los óptimos de la función de bienestar social. Aunque la Teoría del Control maneja restricciones sobre el estado final del sistema, no hemos encontrado en la literatura sobre juegos de crecimiento modelos en los que se asuma ningún tipo de restricción sobre la situación en que se deja la economía: los agentes económicos la guían a través de decisiones tomadas en su propio beneficio.

Pretendemos ahora modificar el modelo original y tener en cuenta no sólo los

consumos individuales de los jugadores, sino también el estado del sistema al finalizar el horizonte temporal fijado. Mientras que el sistema económico tiene un horizonte temporal infinito, o al menos indeterminado, los agentes tienen un tiempo de vida limitado y se suceden unos a otros. Podemos considerar que cada par de jugadores (trabajadores y capitalistas) forman una generación que hereda de la anterior un sistema económico con una capacidad productiva determinada por el stock de capital acumulado hasta la fecha que, tras un cierto tiempo, es dejado en manos de la generación siguiente. Esto supone el final de su vida activa, aunque los jugadores continúen por algún tiempo como población inactiva, ya sin control sobre el sistema. De esta manera cada generación de jugadores está interesada no sólo por el stock de capital que hereda y por su consumo durante el intervalo $[0, T]$, sino también por el capital que deja en manos de la generación posterior, del que depende su propio bienestar durante su retiro.

El propósito de este capítulo es estudiar los equilibrios de Nash en ciclo abierto y los pagos no dominados cuando se exige una determinada acumulación de capital al final del horizonte temporal. Estas metas en el capital final pueden venir impuestas por agentes externos, decididas en un juego con las diferentes generaciones como jugadores o ser negociadas entre trabajadores y capitalistas de una misma generación. El conocimiento de los pagos no dominados y de los posibles equilibrios de Nash puede resultar de utilidad para las negociaciones, si estas existen.

La política de ingresos, los convenios colectivos, los acuerdos sociales, etc son ejemplos de negociación entre trabajadores (sindicatos) y capitalistas (empresarios), con la supervisión habitual del gobierno (ver Flanagan *et al.*, 1983). Esta negociación se centra en los incrementos salariales ligados a la inversión por parte de los empresarios. Nuestro modelo pretende ser útil a la hora de encontrar la adecuada acumulación de capital de manera que sea consistente con un comportamiento racional de los jugadores, los cuales procuran maximizar sus consumos descontados a lo largo del horizonte temporal.

El proceso europeo de unificación económica sirve también de ejemplo de una situación como la referida. La Comunidad Económica Europea exige unos requisitos mínimos a los candidatos a la unión monetaria. Estos *criterios de convergencia* actúan como restricciones en el estado de las economías nacionales de los países candidatos al finalizar el plazo previsto. Una vez que la integración en el sistema único ha sido asumida por una nación como objetivo político, la negociación entre las fuerzas sociales (inversores, sindicatos, empresarios, etc) debería respetar tal decisión, rechazando todo comportamiento que impida el cumplimiento de los criterios. Por otra parte, el gobierno y los agentes sociales deben negociar los objetivos sobre el crecimiento, y para esto cada uno ha de ser capaz de prever las consecuencias del

comportamiento de los otros.

Denotaremos por K_T al mínimo stock de capital admitido al finalizar el horizonte temporal. Expresaremos, por tanto, estas metas en el stock de capital final mediante la restricción

$$K(T) \geq K_T. \quad (3.1)$$

En el juego original de Lancaster-Hoel el comportamiento de los jugadores lleva a un resultado perseguido directamente por ellos: sus respectivos pagos, y a otro no querido directamente: el stock de capital dejado a la generación siguiente como legado. Parece razonable modificar el orden anterior estableciendo una decisión colectiva sobre el capital final, y una vez dada esta condición, maximizar los pagos a los jugadores. Llamaremos a esto *juego de concertación*, en el cual los jugadores negocian previamente cuál va a ser el juego que se disponen a jugar, acordando unos objetivos y la forma de conseguirlos.

Denotaremos por $C(c_1, c_2, K_T, P)$ a este nuevo juego con comunicaciones previas y acuerdos (aunque no vinculantes) entre los jugadores. Este juego surge de un proceso de negociación (que llamaremos *pre-juego*) durante el cual se fijan algunos parámetros: el stock de capital K_T que quieren dejar a la generación siguiente, un par de controles (c_1, c_2) que conduzcan a ese capital propuesto y una penalización o multa P para las desviaciones en caso de que no se alcancen los objetivos. A los funcionales objetivo del modelo anterior dados en (2.2) y (2.3) añadiremos otro término dependiente del capital final alcanzado y de los controles utilizados:

$$J_i^C = \int_0^T e^{-\delta_i t} C_i(t) dt + F_i[K(T), u_i], \quad (i = 1, 2), \quad (3.2)$$

donde $\delta_1 = \tau$, $\delta_2 = \kappa$ y

$$F_i(K, u) = \begin{cases} 0, & \text{si } K \geq K_T \text{ o bien} \\ & K < K_T \text{ y } u(\cdot) \equiv c_i(\cdot) \\ -P, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.3)$$

La función F_i penaliza al jugador i que abandona el control propuesto c_i , utilizando en su lugar u_i , pero sólo en caso de que no se haya alcanzado un capital de al menos K_T en el instante final T . Las condiciones (2.1), (2.4) siguen siendo válidas, y consideramos que el intervalo de actuación de los capitalistas $[c, d]$ coincide con $[0, 1]$, como en el modelo de Lancaster-Hoel. Sin embargo, no se impone restricción alguna sobre $K(T)$ en el nuevo juego C .

Estudiamos en la siguiente sección los equilibrios de Nash para el juego considerado.

3.2 Equilibrios de Nash

Las funciones de pagos descritas en (3.2) y (3.3) dependen del valor de la variable de estado al final del intervalo temporal y de los controles utilizados por los jugadores. Como no son continuas encontrar los equilibrios puede resultar una tarea dura. Para evitar esta dificultad consideraremos otro juego, que denotamos por $J(K_T)$, en el cual sólo se permiten aquellas combinaciones de controles que lleven a un capital final mayor o igual que K_T . La conexión entre los equilibrios de estos dos juegos se ofrece con el siguiente resultado.

Proposición 3.1

Sean $J(K_T)$ y $C(c_1, c_2, K_T, P)$ los juegos definidos anteriormente, donde $K_T > K_0$, $P > 0$ y (c_1, c_2) es un par de controles que obtienen un capital mayor o igual que K_T en el instante final T . Los equilibrios de Nash en ciclo abierto que conducen a un capital final mayor o igual a K_T coinciden en ambos juegos si el parámetro de penalización es suficientemente grande.

Demostración. Primero veamos que cualquier equilibrio en $C(c_1, c_2, K_T, P)$ es un equilibrio también en $J(K_T)$, suponiendo que sea una estrategia admisible para este segundo juego. Esto resulta inmediato al considerar que todas las posibles desviaciones de un jugador en $J(K_T)$ pertenecen al conjunto de acciones de ese jugador en $C(c_1, c_2, K_T, P)$. Además los pagos resultan idénticos en ambos juegos, pues como se alcanza el capital requerido no se “dispara” la penalización. Por tanto, si no había desviaciones beneficiosas en el juego C , tampoco puede haberlas en J .

Por otro lado, supongamos que tenemos un equilibrio de Nash en $J(K_T)$ y consideremos una desviación unilateral de él. Si esta desviación lleva a no obtener ni siquiera el capital K_T , el jugador que se haya desviado incurrirá en una penalización P que podemos considerar suficientemente grande como para quitar todo incentivo. Sin embargo, si el capital final obtenido con la desviación $K(T)$ no es menor que K_T , resulta ser una desviación admisible en el juego J y los pagos de ambos juegos coinciden. Como el control considerado es solución de equilibrio de J , el pago de cada jugador es al menos igual al que recibe por cualquier desviación unilateral de tal jugador. Por tanto, el equilibrio considerado lo es también de $C(c_1, c_2, K_T, P)$. \square

Para este nuevo juego los equilibrios open-loop no van a ser feedback: no es posible encontrar un equilibrio feedback que dependa únicamente del tiempo, pues para el subjuego que comienza en un instante t_0 es importante el capital disponible en ese mismo instante, $K(t_0)$, ya que de él dependerá la estrategia adecuada que se debe utilizar en el intervalo $[t_0, T]$.

Utilizando la proposición 3.1 hallaremos los equilibrios del juego C que cumplen las metas propuestas calculándolos en el juego J , cuyos funcionales objetivo nos permiten aplicar las condiciones de control óptimo. Las condiciones expuestas para que un par de controles (u_1^*, u_2^*) sea un equilibrio de Nash en ciclo abierto siguen siendo válidas pero cambiando la condición E5 de la página 29 por las siguientes

E5'. *Condiciones de transversalidad*

$$p_i(T) \geq 0, \text{ siendo } p_i(T) = 0 \text{ si } K^*(T) > K_T, \quad (i = 1, 2),$$

y añadiendo la nueva restricción sobre el estado final

E6. $K^*(T) \geq K_T.$

Como antes $K^*(t)$ y $p_i(t)$ son las variables de estado y de coestado en el instante t cuando se usa (u_1^*, u_2^*) .

Pretendemos encontrar ahora las soluciones de equilibrio de $J(K_T)$. Para ello buscamos un par de funciones de control (u_1, u_2) verificando las condiciones E1–E4, E5' y E6. La condición E5' nos ofrece dos formas de encontrar estrategias óptimas que cumplan la condición final buscada E6.

1. Si suponemos que con los controles óptimos el capital final $K^*(T)$ es mayor que K_T , la condición E5' se convierte en

E5. $p_i(T) = 0 \quad (i = 1, 2),$

y entonces nos encontramos con las mismas condiciones de equilibrio que exigíamos en el juego con capital final libre del capítulo anterior, junto con la nueva condición E6':

E6'. $K^*(T) > K_T$

2. Si forzamos a que el capital final valga exactamente K_T , deberemos buscar estrategias que den valores adecuados para las variables de coestado. En este caso cambiamos E6 por la condición de igualdad

E6''. $K^*(T) = K_T$

y E5' se convierte en

E5''. $p_i(T) \geq 0 \quad (i = 1, 2).$

El proceso a seguir comienza dejando de lado E6' y considerando el capital final libre como en la sección 2.3. Se buscan entonces equilibrios que verifiquen E1–E5. Estos equilibrios (serán únicos, salvo tal vez en un conjunto finito de puntos) puede ser que verifiquen E6 obteniéndose un capital final admisible, esto es, $K^*(T) \geq K_T$. En ese caso se trata de la solución en equilibrio de Nash de $J(K_T)$. Sin embargo, si $K^*(T) < K_T$, este procedimiento no nos facilita una estrategia óptima de nuestro juego C y no es admisible para $J(K_T)$. Bajo esta suposición debemos intentar una vía alternativa en la cual se fuerce a $K(T)$ a valer exactamente K_T . De esta forma exigiremos las condiciones E1–E4, E5'' y E6''.

Ya que E5 puede no verificarse, no podemos aplicar un método como el descrito en la sección 2.3 que comenzaba por el instante final. Ahora no conocemos a priori el valor de las variables de estado en ningún punto, solamente podemos afirmar por E5'' que son no negativas en T .

El hecho de considerar $[c, d] = [0, 1]$ hace que de los cuatro posibles pares de controles que se ofrecían en el lema 2.1, el primero (i) no pueda ser óptimo nunca, pues no puede darse la condición exigida $\exp(-\tau t) \leq p_1(t)c$. Nos queda, por tanto, que los equilibrios pueden ser expresados como combinaciones de los tres posibles pares de controles (ii), (iii) y (iv). Estos pares no pueden aparecer en cualquier orden como muestra el siguiente resultado.

Proposición 3.2

Sea un juego diferencial caracterizado por los funcionales objetivos (2.2) y (2.3), la ecuación cinética (2.1), con controles $u_1 \in [a, b] \subset [0, 1]$ y $u_2 \in [0, 1]$. La tabla 3.1 muestra condiciones necesarias de precedencia entre los pares de controles (ii), (iii) y (iv) que forman equilibrios de Nash en ciclo abierto. Los controles del lado izquierdo preceden en el tiempo a los situados en la parte superior sólo si se verifican las condiciones que aparecen como entrada de la tabla.

Para la demostración del resultado será de utilidad la tabla 3.2. En ella se ofrece la función de capital y las variables de coestado que son solución de la ecuación que rige la cinética del sistema y las dadas por la condición E3, para cada posible par de controles. Podemos apreciar que dependiendo de cuál sea el par utilizado (ii), (iii) o (iv), la función de capital toma diferentes expresiones, siendo Q en cada caso una constante adecuada de manera que K sea una función continua.

Demostración. Supongamos que nos encontramos en un instante t_0 con variables de coestado $p_1(t_0)$ y $p_2(t_0)$. Veamos cuál es el par de control que se puede utilizar con anterioridad al control óptimo actual, según sea este el (ii), (iii) o el (iv).

Tabla 3.1

Condiciones necesarias para la precedencia entre pares de controles en el juego con capital final fijo. Los controles de la columna de la izquierda sólo pueden preceder a los de la parte superior si se verifican las condiciones expresadas en el interior de la tabla.

	(ii)	(iii)	(iv)
(ii)	-	$\kappa < A(1-b)$	$A(1-b) \neq \tau < A$
(iii)	$A(1-a) < \kappa$	-	$A(1-b) < \kappa$
(iv)	$A < \tau$	$\kappa < A(1-b)$	-

Caso 1: control actual (ii). Si el control óptimo actual es el (ii), entonces ha de verificarse para $t = t_0$ que

$$e^{-\tau t} \leq p_1(t) \quad (3.4)$$

$$e^{-\kappa t} \leq p_2(t). \quad (3.5)$$

Ahora bien, (ii) dejará de ser control óptimo en algún punto $t_1 < t_0$ cuando no se cumpla alguna de las dos desigualdades anteriores.

1.1 Estudiemos a continuación condiciones sobre los parámetros para que deje de verificarse la desigualdad (3.4). Por la expresión que toma p_1 cuando se utiliza (ii) y con $A(1-a) \neq \tau$ (ver tabla 3.2) tenemos que

$$p_1(t_0) = \exp[-A(1-a)t_0]Q_1 - \frac{Aa}{A(1-a) - \tau} \exp(-\tau t_0) \quad (3.6)$$

de donde podemos despejar la constante Q_1 como función de $p_1(t_0)$

$$Q_1 = \left(p_1(t_0) + \frac{Aa}{A(1-a) - \tau} \exp(-\tau t_0) \right) \exp[A(1-a)t_0]. \quad (3.7)$$

- Si $Q_1 > 0$, entonces considerando (3.4) tenemos que en t_0 se cumple que

$$\left(1 + \frac{Aa}{A(1-a) - \tau} \right) \frac{1}{Q_1} \leq \exp\{[\tau - A(1-a)]t\} \quad (3.8)$$

Para que esta desigualdad pueda invertirse en algún instante anterior a t_0 , el miembro de la izquierda ha de ser una constante positiva y la función de la derecha

Tabla 3.2

Condiciones, capital y variables de coestado para los tres posibles pares de control.

controles/ condiciones	función de capital $K(t)$	$p_1(t)$ $p_2(t)$
$(ii) \equiv (u_1 = a, u_2 = 1)$ $\begin{cases} e^{-\tau t} \leq p_1(t) \\ e^{-\kappa t} \leq p_2(t) \end{cases}$	$e^{A(1-a)t}Q - \frac{B}{A}$	$\begin{cases} e^{-A(1-a)t}Q - \frac{Aa}{A(1-a)-\tau}e^{-\tau t}, & \text{si } A(1-a) \neq \tau \\ (Q - Aat)e^{-\tau t}, & \text{si } A(1-a) = \tau \\ e^{-A(1-a)t}Q \end{cases}$
$(iii) \equiv (u_1 = b, u_2 = 0)$ $e^{-\kappa t} \geq p_2(t)$	Q	$\begin{cases} e^{-\tau t}Ab/\tau + Q \\ e^{-\kappa t}A(1-b)/\kappa + Q \end{cases}$
$(iv) \equiv (u_1 = b, u_2 = 1)$ $\begin{cases} e^{-\tau t} \geq p_1(t) \\ e^{-\kappa t} \leq p_2(t) \end{cases}$	$e^{A(1-b)t}Q - \frac{B}{A}$	$\begin{cases} e^{-A(1-b)t}Q - \frac{Ab}{A(1-b)-\tau}e^{-\tau t}, & \text{si } A(1-b) \neq \tau \\ (Q - Abt)e^{-\tau t}, & \text{si } A(1-b) = \tau \\ e^{-A(1-b)t}Q \end{cases}$

creciente. Esto supone que se verifiquen simultáneamente las siguientes condiciones, junto con la hipótesis de que Q_1 sea positiva:

$$0 < 1 + \frac{Aa}{A(1-a) - \tau}; \quad 0 < \tau - A(1-a), \quad (3.9)$$

que a su vez son equivalentes a estas otras tres

$$0 < p_1(t_0) + \frac{Aa}{A(1-a) - \tau} \exp(-\tau t_0) \quad (3.10)$$

$$A < \tau \quad (3.11)$$

$$A(1-a) < \tau. \quad (3.12)$$

Puesto que $p_1(t_0) \geq \exp(-\tau t_0) > 0$, entonces (3.11) y (3.12) implican (3.10). Como $A(1-a) < A$ entonces (3.11) implica (3.12). Por tanto, pueden darse simultáneamente las tres condiciones sólo si $A < \tau$.

- En caso de que $Q_1 < 0$ se verifica

$$\left(1 + \frac{Aa}{A(1-a) - \tau}\right) \frac{1}{Q_1} \geq \exp\{[\tau - A(1-a)]t_0\}. \quad (3.13)$$

Para invertir la desigualdad necesitamos como antes que la parte izquierda sea positiva, pero ahora la función de la derecha ha de ser decreciente. Tenemos entonces

$$p_1(t_0) + \frac{Aa}{A(1-a) - \tau} \exp(-\tau t_0) < 0 \quad (3.14)$$

$$\tau < A \quad (3.15)$$

$$\tau < A(1 - a). \quad (3.16)$$

Como $p_1(t_0) \geq \exp(-\tau t_0) > 0$ las desigualdades (3.14), (3.15) y (3.16) son incompatibles. Por tanto, la única condición que hay que exigir para que se pueda dejar de verificar (3.4) es que $A < \tau$.

• $Q_1 = 0$. Bajo este supuesto tenemos que $p_1(t)$ es proporcional a $\exp(-\tau t)$. Si en $t = t_0$ se verifica (3.4), esto continuará siendo cierto también para cualquier $t < t_0$ mientras se siga utilizando (ii).

En todo el razonamiento anterior hemos tomado la expresión de p_1 bajo el supuesto de que $A(1 - a) \neq \tau$. En caso contrario, llamando Q'_1 a la nueva constante que nos aparece, tendremos que

$$p_1(t) = (Q'_1 - Aat)e^{-\tau t}.$$

Como volvemos a tener p_1 proporcional a $\exp(-\tau t)$, aplicando el mismo razonamiento que para $Q_1 = 0$, la condición (3.4) permanecerá siendo cierta mientras se utilice (ii).

Sea t_1 la solución de $p_1(t) = \exp(-\tau t)$. Si t_1 se encuentra en $[0, t_0]$ y se cumple (3.5), es decir, $\exp(-\kappa t_1) \leq p_2(t_1)$, entonces el control que utilizamos antes de (ii) es el (iv).

1.2 Veamos ahora cuándo puede dejar de verificarse (3.5). Obsérvese que $p_2(t)$ toma, bajo el control (ii), la expresión

$$p_2(t) = \exp[-A(1 - a)t]Q_2. \quad (3.17)$$

De esta igualdad y de (3.5) tenemos que para $t = t_0$ resulta

$$\exp\{[A(1 - a) - \kappa]t\} \leq Q_2. \quad (3.18)$$

Obviamente Q_2 es siempre positiva. La desigualdad se invertirá en algún instante anterior a t_0 sólo si el miembro de la izquierda es una función decreciente en t . Por tanto debemos exigir que $A(1 - a) < \kappa$ para que (iii) preceda a (ii).

Caso 2: control actual (iii). Supongamos ahora que en el instante t_0 el control óptimo es el (iii) y que, por tanto, para $t = t_0$ se cumple

$$e^{-\kappa t} \geq p_2(t). \quad (3.19)$$

Con ayuda de la expresión que toma p_2 (ver tabla 3.2) podemos despejar la constante que aparece, obteniendo

$$Q_3 = p_2(t_0) - \frac{A(1 - b)}{\kappa} \exp(-\kappa t_0). \quad (3.20)$$

- De (3.19) nos resulta que si $Q_3 > 0$, entonces para $t = t_0$

$$\left(1 - \frac{A(1-b)}{\kappa}\right) \frac{1}{Q_3} \geq e^{\kappa t}. \quad (3.21)$$

Como por hipótesis κ es positivo, la parte derecha es creciente y la desigualdad no se invierte para ningún $t < t_0$.

- Sin embargo, si suponemos que $Q_3 < 0$, tenemos

$$\left(1 - \frac{A(1-b)}{\kappa}\right) \frac{1}{Q_3} \leq \exp(\kappa t_0), \quad (3.22)$$

que puede invertirse para algún $t < t_0$ si la constante de la izquierda es positiva, y por tanto, si se dan las dos siguientes condiciones:

$$1 - \frac{A(1-b)}{\kappa} < 0 \quad (3.23)$$

$$p_2(t_0) < \frac{A(1-b)}{\kappa} \exp(-\kappa t_0). \quad (3.24)$$

Dado que en $t = t_0$ se cumple (3.19), la condición (3.23), junto con que $\kappa > 0$ implican (3.24). Por tanto, se deja de cumplir (3.19) en algún instante $t_1 < t_0$ sólo si $\kappa < A(1-b)$. El control que se deba usar antes del instante t_1 donde se dé la igualdad dependerá de si $\exp(-\tau t_1) < p_1(t_1)$, en cuyo caso se utilizará (ii), o si por el contrario $\exp(-\tau t_1) > p_1(t_1)$, utilizándose entonces (iv).

- Con $Q_3 = 0$ la condición (3.19) no deja de ser cierta.

Caso 3: control actual (iv). Por último estudiemos el caso de utilizar (iv) en el instante t_0 . Deben cumplirse para $t = t_0$ las dos condiciones siguientes

$$e^{-\tau t} \geq p_1(t) \quad (3.25)$$

$$e^{-\kappa t} \leq p_2(t). \quad (3.26)$$

3.1 Veamos ahora bajo qué condiciones deja de cumplirse (3.25). De forma paralela al caso en que utilizábamos el control (ii) y bajo el supuesto de que $A(1-b) \neq \tau$ la constante que aparece en p_1 se puede expresar de la forma siguiente:

$$Q_4 = \left(p_1(t_0) + \frac{Ab}{A(1-b) - \tau} \exp(-\tau t_0) \right) \exp[A(1-b)t_0]. \quad (3.27)$$

- Si $Q_4 > 0$, entonces (3.25) y la expresión que toma p_1 implican que

$$\left(1 + \frac{Ab}{A(1-b) - \tau}\right) \frac{1}{Q_4} \geq \exp\{[\tau - A(1-b)]t_0\} \quad (3.28)$$

y para que cambie el signo de esta desigualdad en algún $t < t_0$ deberemos exigir las condiciones

$$0 < p_1(t_0) + \frac{Ab}{A(1-b) - \tau} \exp(-\tau t_0) \quad (3.29)$$

$$0 < 1 + \frac{Ab}{A(1-b) - \tau} \quad (3.30)$$

$$\tau < A(1-b). \quad (3.31)$$

La tercera condición implica la segunda, así que bastan la primera y la tercera. Observando en la tabla 3.2 las expresiones que puede tomar p_1 bajo los diferentes controles y utilizando que $p_1(T) \geq 0$, podemos apreciar que siempre es decreciente bajo el supuesto de que $\tau < A(1-b)$. Como sabemos que en el instante final T , p_1 es no negativa, podemos afirmar que $p_1(t_0) \geq 0$ y por consiguiente (3.31) es suficiente para asegurar que (3.29) se verifica. Basta, por tanto, exigir que $\tau < A(1-b)$ para que a (iv) le pueda preceder (ii).

• Si $Q_4 < 0$ tendremos la desigualdad (3.28) cambiada de signo. Para volver a alterar el sentido han de darse las tres condiciones siguientes:

$$p_1(t_0) + \frac{Ab}{A(1-b) - \tau} \exp(-\tau t_0) < 0 \quad (3.32)$$

$$1 + \frac{Ab}{A(1-b) - \tau} < 0 \quad (3.33)$$

$$A(1-b) < \tau. \quad (3.34)$$

Obviamente la primera condición se verifica si se cumple (3.25) y la segunda de las condiciones anteriores, pues

$$p_1(t_0) + \frac{Ab}{A(1-b) - \tau} \exp(-\tau t_0) \leq \left(1 + \frac{Ab}{A(1-b) - \tau}\right) \exp(-\tau t_0) < 0. \quad (3.35)$$

Además si se cumple (3.34), la condición (3.33) equivale a $\tau < A$. Tenemos entonces que ha de verificarse que $A(1-b) < \tau < A$. Si en el punto donde se da (3.25) con igualdad, se sigue verificando (3.26), el control que se utiliza antes de (iv) es el (ii).

• El caso $Q_4 = 0$ hace que (3.25) no deje de verificarse en ningún punto anterior a t_0 .

De igual forma si suponemos que $\tau = A(1-b)$ la expresión que toma p_1 es proporcional a $\exp(-\tau t)$ y (3.25) continuará siendo cierta mientras se utilice (iv).

Resumiendo los resultados anteriores, si $\tau < A$ pero $\tau \neq A(1-b)$ entonces puede que el control (ii) preceda al (iv).

3.2 El razonamiento para el cambio de sentido de la desigualdad (3.26) es idéntico al del caso (ii), donde podremos utilizar el control (iii) antes del (iv) sólo si $A(1-b) < \kappa$.

Con esto queda concluida la demostración. \square

De la proposición anterior podemos dividir los posibles valores de τ y de κ en tres casos cada uno:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau < A, \tau \neq A(1-b) \\ \tau = A(1-b) \\ A < \tau \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa < A(1-b) \\ A(1-b) < \kappa < A(1-a) \\ A(1-a) < \kappa \end{array} \right.$$

Esto nos lleva a nueve combinaciones diferentes, cada una con una o dos secuencias asociadas de controles. Los resultados son los expuestos en la tabla 3.3

Tabla 3.3

Posibles sucesiones de controles en equilibrio para las diferentes combinaciones de parámetros.

	$\kappa < A(1-b)$	$A(1-b) < \kappa < A(1-a)$	$A(1-a) < \kappa$
$A(1-b) \neq \tau < A$	(ii)-(iv)-(iii)	$\left. \begin{array}{l} (ii)-(iv) \\ (iii)-(iv) \end{array} \right\}$	(iii)-(ii)-(iv)
$\tau = A(1-b)$	$\left. \begin{array}{l} (ii)-(iii) \\ (iv)-(iii) \end{array} \right\}$	(iii)-(iv)	$\left. \begin{array}{l} (iii)-(ii) \\ (iii)-(iv) \end{array} \right\}$
$A < \tau$	(iv)-(ii)-(iii)	(iii)-(iv)-(ii)	(iii)-(iv)-(ii)

Para mostrar la metodología describiremos un único caso: $\tau < A$ con $\tau \neq A(1-b)$ y $\kappa < A(1-b)$. Los otros pueden calcularse de manera parecida.

Consultando la tabla 3.1 se ve que bajo las hipótesis propuestas ningún par de control puede preceder a (ii); (iii) puede ser precedido de (ii) y de (iv); antes de (iv) sólo (ii) puede ser utilizado. Así, la secuencia de control debe ser compatible con (ii)-(iv)-(iii). Deberemos alcanzar el capital final K_T utilizando dicho orden. La secuencia quedará determinada por un par de instantes $t_1, t_2 \in [0, T]$, con $t_1 \leq t_2$, de manera que (ii) es usado en $[0, t_1)$, (iv) en $[t_1, t_2)$ y (iii) en $[t_2, T]$. Los casos $t_1 = 0$, $t_1 = t_2$ ó $t_2 = T$ en los que no todos los controles se utilizan también se permiten.

La acumulación de capital es rápida bajo (ii), más moderada con (iv) y con (iii) el capital permanece constante. Un esquema de la evolución del capital se muestra en la figura 3.1.

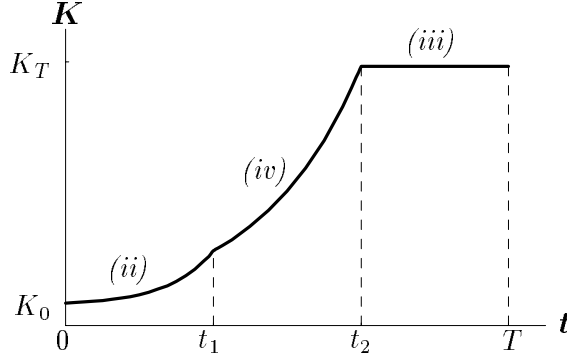


Figura 3.1

Evolución del capital en una sucesión de los controles (ii), (iv) y (iii).

El siguiente paso es calcular los valores admisibles para t_1 y t_2 de forma que se alcance K_T . El problema sólo tendrá sentido si realmente se puede obtener K_T , al menos utilizando (ii) durante todo el intervalo $[0, T]$. Esto implica que

$$(K_0 + B/A) e^{A(1-a)T} - B/A \geq K_T, \quad (3.36)$$

dado que $K_0 = K(0) = Q - B/A$. El valor máximo que puede tomar t_1 lo denotaremos por t_1^{\max} . Llamaremos \bar{t}_1 a una cota superior de este valor que también será función de K_T . El máximo valor de t_1 de forma que se alcance exactamente el capital final deseado se calcula haciendo $t_1 = t_2$. De esta manera de t_1 en adelante se usa (iii), donde el capital permanece constante. Por tanto, K_T debe ser alcanzado en t_1 . Si llamamos

$$L := \ln \left(\frac{K_T + B/A}{K_0 + B/A} \right) \quad (3.37)$$

tenemos entonces que

$$t_1^{\max} \leq \bar{t}_1 := \frac{L}{A(1-a)}. \quad (3.38)$$

El valor mínimo para t_1 depende de si K_T puede ser alcanzado utilizando únicamente (iv) y (iii). Esto es posible cuando

$$(K_0 + B/A) e^{A(1-b)T} - B/A \geq K_T. \quad (3.39)$$

Denotaremos por t_1^{\min} al menor valor que puede tomar t_1 , y por \underline{t}_1 una cota inferior de él. Si (3.39) es cierta, entonces tomaremos $\underline{t}_1 = 0$. En otro caso debemos usar

(ii) durante el menor tiempo posible y (iv) el tiempo restante. Haciendo $t_2 = T$, $K(0) = K_0$ y $K(T) = K_T$ se calcula el adecuado t_1 . Así tendremos que $\exp[A(1-b)T]Q - B/A = K_T$ y, por tanto, la constante vale $Q = (K_T + B/A) \exp[-A(1-b)T]$. Ahora, igualando las funciones de capital para (ii) y (iv) se puede despejar el valor de t_1 que debería ser

$$t_1 = \frac{L - A(1-b)T}{A(b-a)}.$$

Como consecuencia de lo anterior se debe considerar

$$t_1 := \max \left\{ 0, \frac{L - A(1-b)T}{A(b-a)} \right\} \leq t_1^{\min}. \quad (3.40)$$

Para cada $t_1 \in [t_1^{\min}, t_1^{\max}]$ existe un único t_2 de manera que $K(t_2) = K(T) = K_T$. En t_1 el capital resulta ser $K(t_1) = (K_0 + B/A) \exp[A(1-a)t_1] - B/A$. Dado que desde t_1 en adelante se utiliza (iv) hasta que se alcanza K_T la constante de la función de capital será $Q = (K_0 + B/A) \exp[A(b-a)t_1]$. Podemos despejar t_2 como función de t_1 considerando que $(K_0 + B/A) \exp[A(1-b)t_2] \exp[A(b-a)t_1] - B/A = K_T$, obteniendo

$$t_2 = \frac{L - A(b-a)t_1}{A(1-b)}. \quad (3.41)$$

Por tanto, existe una relación lineal entre t_1 y t_2 .

Nos queda todavía verificar que para cada par de instantes $(t_1, t_2(t_1))$ la sucesión de controles propuesta es un equilibrio, es decir, cumple las condiciones E1-E4, E5'' y E6''. Para ello debemos encontrar variables de coestado p_1 y p_2 tales que $p_1(t_1) = \exp(-\tau t_1)$ y $p_2(t_2) = \exp(-\kappa t_2)$. Conociendo el valor de las variables de coestado en un punto cualquiera, se pueden determinar las expresiones de p_1 y p_2 puesto que son continuas. De esta forma

$$p_1(T) = \frac{Ab}{\tau} \exp(-\tau T) + \frac{A-\tau}{A(1-b)-\tau} \exp[A(1-b)(t_1-t_2) - \tau t_1] - Ab \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{A(1-b)-\tau} \right) \exp(-\tau t_2), \quad (3.42)$$

$$p_2(T) = \frac{A(1-b)}{\kappa} \exp(-\kappa T) + \frac{\kappa - A(1-b)}{\kappa} \exp(-\kappa t_2). \quad (3.43)$$

Una nueva cota superior para t_1 puede establecerse a partir de la condición $p_2(T) \geq 0$ dada en E5'', con ayuda de la expresión (3.43) y de la relación entre t_1 y t_2 expresada en (3.41):

$$t_1 \leq \frac{1-b}{b-a} \left[\frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{A(1-b)}{A(1-b)-\kappa} \right) - T \right] + \frac{L}{A(b-a)} \quad (3.44)$$

Para cada K_T tenemos dos cotas superiores para t_1 dadas por las desigualdades (3.38) y (3.44). La desigualdad $p_1(T) \geq 0$ con la expresión (3.42) y (3.41) no nos

permite encontrar explícitamente una cota para t_1 pero es una condición que debe verificar cada valor permitido de t_1 . De esta forma tenemos que

$$t_1^{\min} = \max\{t \in [\underline{t}_1, T] : \text{verifica las desigualdades (3.44) y } p_1(T) \geq 0\} \quad (3.45)$$

$$t_1^{\max} = \min\{t \in [0, \bar{t}_1] : \text{verifica las desigualdades (3.44) y } p_1(T) \geq 0\} \quad (3.46)$$

La figura 3.2 muestra la situación de los posibles valores de t_1 .

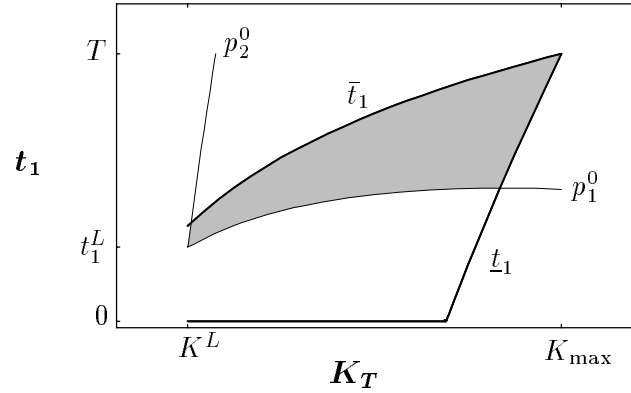


Figura 3.2

Región de posibles valores de t_1 para cada capital final propuesto K_T . El superíndice L hace referencia al equilibrio con el capital final libre. Los puntos de las curvas p_1^0 y p_2^0 son las combinaciones que consiguen que $p_1(T) = 0$ y $p_2(T) = 0$, respectivamente.

De acuerdo con todo lo anterior podemos asegurar que dado un capital final alcanzable K_T que no se logra con el equilibrio del juego sin restricciones en el capital, toda secuencia de controles (ii)-(iv)-(iii), con instantes de cambio t_1 y t_2 verificando (3.41) y (3.46), constituye un equilibrio de Nash en ciclo abierto para el juego.

Para calcular los consumos descontados J_1 y J_2 asociados con cada par factible (t_1, t_2) necesitamos conocer la función de capital. Utilizando el hecho de que es continua y los valores extremos $K(0) = K_0$, $K(T) = K_T$ tenemos

$$K(t) = \begin{cases} (K_0 + B/A) \exp[A(1-a)t] - B/A, & t \in [0, t_1] \\ (K_0 + B/A) \exp[A(b-a)t_1 + A(1-b)t] - B/A, & t \in [t_1, t_2] \\ K_T, & t \in [t_2, T] \end{cases} .$$

De esta forma los pagos toman las siguientes expresiones

$$J_1 = \int_0^{t_1} e^{-\tau t} a [AK(t) + B] dt + \int_{t_1}^T e^{-\tau t} b [AK(t) + B] dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a(AK_0 + B)}{A(1-a) - \tau} \left(e^{[A(1-a)-\tau]t_1} - 1 \right) \\
&+ \frac{b(AK_0 + B) \exp[A(b-a)t_1]}{A(1-b) - \tau} \left(e^{[A(1-b)-\tau]t_2} - e^{[A(1-b)-\tau]t_1} \right) \quad (3.47) \\
&+ \frac{b(AK_T + B)}{\tau} (e^{-\tau t_2} - e^{-\tau T}) \\
J_2 &= \int_{t_2}^T e^{-\kappa t} (1-b)[AK(t) + B] dt \\
&= (1-b)(AK_T + B)(e^{-\kappa t_2} - e^{-\kappa T})/\kappa. \quad (3.48)
\end{aligned}$$

Recordemos de nuevo que todo el proceso anterior habría de desarrollarse para cada una de las nueve combinaciones posibles de parámetros y sus secuencias de controles asociadas, tal como vienen expresadas en la tabla 3.3.

3.2.1 Selección de equilibrios

Acabamos de encontrar que cuando se exige alcanzar al menos un capital final determinado el conjunto de equilibrios, que sin esta condición era único, resulta que puede tener una cantidad no numerable de elementos. Podría resultar conveniente tener algún criterio que nos permitiese reducir el conjunto de equilibrios. Si los jugadores aceptan el criterio cooperativo de Nash, este les permite seleccionar un único equilibrio. Estaríamos entonces en un juego de regateo de Nash en el cual las desviaciones que impidan conseguir el stock de capital final son penalizadas.

Para aplicar la solución de regateo de Nash (ver sección 1.5) tomamos como punto de desacuerdo (d) el asociado con el equilibrio de Nash para el juego con capital final libre. Llamaremos E al conjunto de pagos eficientes. Si β_i denota el poder de negociación del jugador i ($i = 1, 2$), seleccionamos el punto n tal que

$$n = \arg \max \{ (x_1 - d_1)^{\beta_1} (x_2 - d_2)^{\beta_2} : (x_1, x_2) \in E, x_i \geq d_i, i = 1, 2 \}.$$

De esta manera nos quedaríamos con el único equilibrio que tiene a n como pago.

3.2.2 Ejemplo

Supongamos una economía con función de producción $f[K(t)] = 0.2K(t) + 0.001$ y factores de descuento $\tau = 0.06$ para los trabajadores y $\kappa = 0.05$ para los capitalistas. Supongamos que las rentas de los trabajadores se mueven entre el 32 y el 52% de la producción neta, esto es, $a = 0.32$, $b = 0.52$. Comenzamos con un capital

inicial $K_0 = 5$ unidades monetarias y el horizonte temporal tiene una longitud de 24 periodos ($T = 24$).

- Calculamos primero el equilibrio de Nash en el juego sin imposición alguna sobre la acumulación de capital al finalizar el horizonte, tal como se vio en la sección 2.3.

Consultamos la tabla 2.3, para el caso $Ac \leq \tau$. Por ser $c = 0$ la expresión de t_1 dada en (2.11) no tiene sentido. Con (2.12) hallamos que $t_2 = 9.286$. La variable de coestado p_1 toma la expresión $1.73 e^{-0.06t} - 1.41$ en el intervalo $[9.286, 24]$. Puesto que $p_1(t_2)d > \exp(\tau t_2)$ la sucesión de controles es (ii)-(iii). Este equilibrio conduce a un capital final de 17.69 unidades. La parte superior de la figura 3.3 muestra la evolución del capital en el tiempo cuando se aplica el equilibrio. Los pagos resultantes son de 14.62 y 11.12 para trabajadores y capitalistas, respectivamente. Estos pagos son las áreas de las regiones sombreadas de la parte inferior de la figura 3.3.

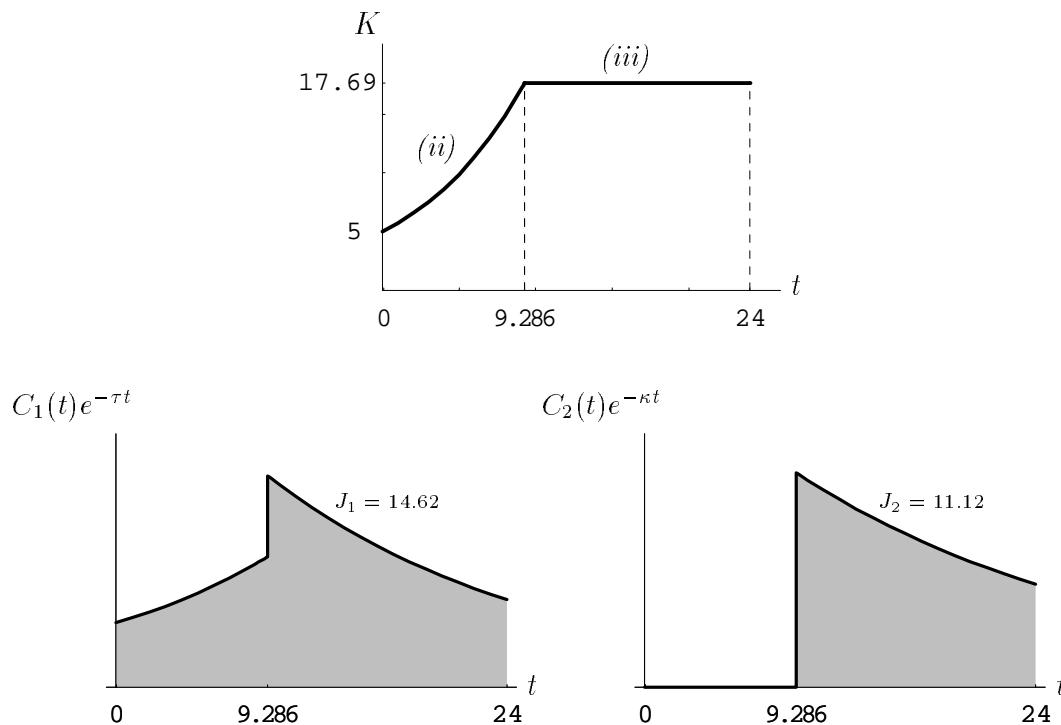


Figura 3.3

Evolución del capital y consumos descontados de trabajadores y capitalistas (caso $K(T)$ libre).

- Supongamos que los jugadores se proponen alguna meta para la acumulación final de capital. Si en el pre-juego se fijan un objetivo $K_T \leq 17.69$, la solución de

Nash es la descrita en el punto anterior: el equilibrio considerando el capital final libre.

Si K_T es mayor que 17.69 estamos en la situación estudiada en la presente sección: $\tau = 0.06 < A = 0.2$, $\kappa = 0.05 < A(1 - b) = 0.096$. En el equilibrio los trabajadores piden sus salarios más bajos hasta t_1 , y desde ahí hasta el final los más altos; los capitalistas, por su parte, comienzan invirtiendo todo el capital disponible hasta llegar al instante t_2 , en el que pasan al más alto consumo hasta el fin del horizonte temporal.

El intervalo en el cual se puede mover t_1 cambia con los diferentes valores de K_T , como muestra la figura 3.4. En la figura 3.5 se dibujan los posibles pagos de equilibrio asociados con distintos K_T . Para cada K_T se tiene un continuo de posibles pagos, excepto para los puntos extremos $K_T = 17.69$ o el mayor pago alcanzable $K_T = 130.9$, en los cuales los pagos se reducen a un único punto (d y f , respectivamente).

Puesto que los jugadores deciden proponerse un stock de capital al final del horizonte temporal y aceptar unas reglas que penalicen la no consecución de esas metas, deberían buscar el K_T que les proporcionase mejores pagos. El conjunto E de los pagos no dominados está representado en la figura 3.6 por los puntos de la línea gruesa. Ambos jugadores podrían mejorar con respecto a la solución competitiva con capital final libre. Si llamamos d al pago asociado con esta solución, los jugadores deben centrar su atención durante las negociaciones en los puntos de E que dominen a d : los situados por encima de la línea discontinua de la figura 3.6.

La solución negociada de Nash selecciona un único punto n una vez que se ha asignado un poder de negociación a cada uno de los jugadores. Asignados unos poderes de negociación a los jugadores, β_1 y β_2 , el punto n será aquel que maximiza el producto generalizado de Nash.

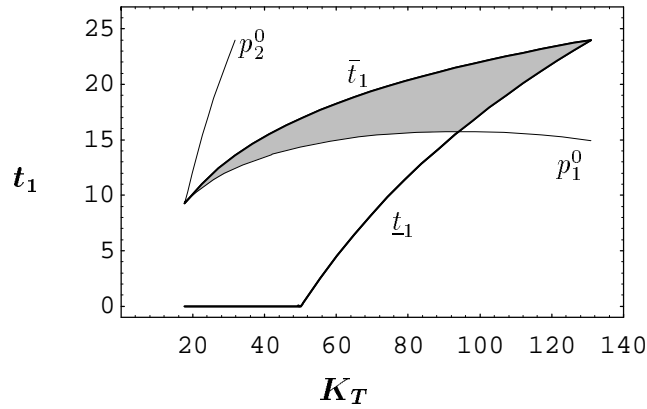


Figura 3.4

La región sombreada es la de posibles valores de t_1 para cada capital final propuesto K_T entre 17.69 y 130.9. El significado de p_1^0 y p_2^0 es el indicado en la figura 3.2

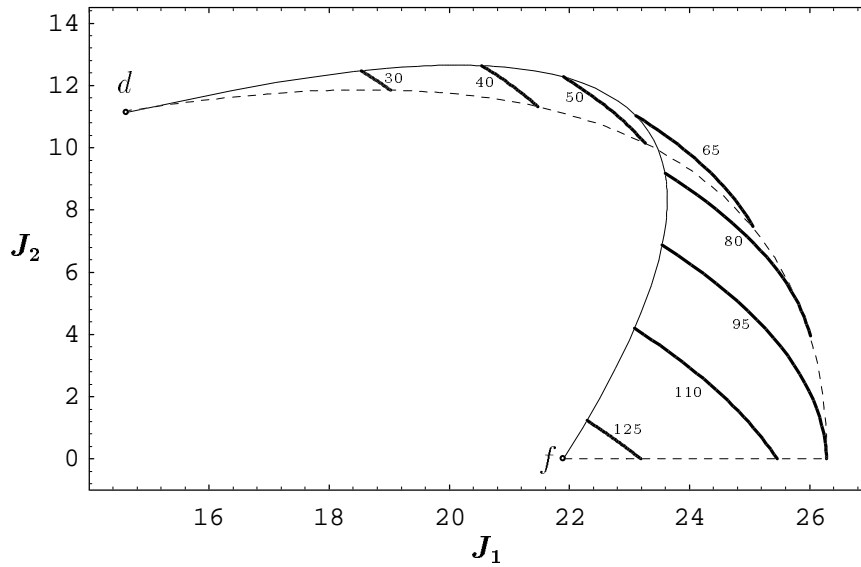


Figura 3.5

Pagos que pueden alcanzarse en el equilibrio para distintos valores de K_T . Dichos pagos varían desde el punto $d = (14.62, 11.12)$ obtenido para un capital mínimo de $K_T = 17.69$, hasta el punto $f = (21.90, 0.0)$ para $K_T = 130.9$. Las curvas anchas representan los pagos para los diversos K_T que se indican junto a cada una. Las curvas finas son los pagos obtenidos al considerar t_1^{\max} (continua) y t_1^{\min} (punteada).

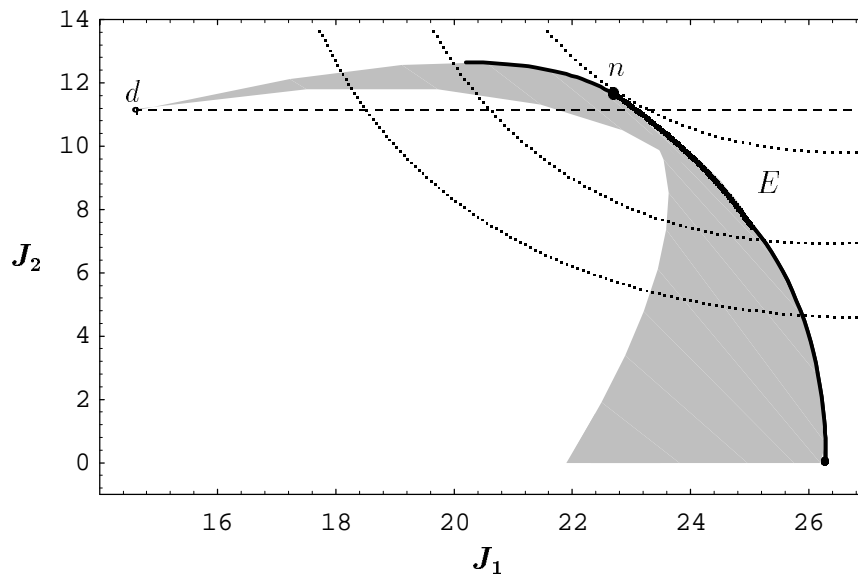


Figura 3.6

Se muestra sombreada la región de posibles pagos que se pueden obtener en un equilibrio de Nash para diferentes capitales finales. E son los puntos no dominados (curva marcada con trazo grueso). Entre los puntos de E nos quedaremos con aquellos que dominan al punto d (los situados por encima de la línea discontinua). Dados unos poderes de negociación para cada jugador, β_1 y β_2 , obtendremos un punto n , que será la solución negociada de Nash. Las curvas punteadas representan pares de pagos con el mismo producto de Nash.

3.3 Óptimos de Pareto

Calculemos ahora el conjunto de pagos no dominados para este nuevo juego en el que se quiere alcanzar al menos un capital dado en el instante final y con descuentos iguales para ambos jugadores. Como en el caso del capital libre, definimos una función de bienestar social y resolvemos el problema (2.16)–(2.19) para cada $\lambda \in [0, 1]$, pero añadiendo la restricción $K(T) \geq K_T$. Para resolverlo imponemos las mismas condiciones que en la sección 2.4, cambiando C5 por una más general:

C5'. *Condición de transversalidad*

$$p(T) \geq 0, \text{ siendo } p(T) = 0 \text{ cuando } K^*(T) > K_T;$$

y añadiendo la nueva restricción sobre el estado final

C6. $K^*(T) \geq K_T$.

Seguiremos un procedimiento similar al empleado en el cálculo de los equilibrios de Nash. Dado un λ resolvemos el problema sin imponer la restricción sobre el capital exigiendo las condiciones C1–C5, tal como hicimos en la sección 2.4. Llamamos $K_T^{\text{libre}}(\lambda)$ al capital final alcanzado aplicando el control óptimo hallado. Si en el instante final se alcanza el capital requerido, esto es, si $K_T^{\text{libre}}(\lambda) \geq K_T$, ese es el control óptimo también para nuestro problema. En caso contrario, debemos resolver el problema original pero añadiendo la restricción de igualdad

C6'. $K^*(T) = K_T$.

Para hallar los controles que alcanzan el máximo pago para este juego con el capital final fijo siguen siendo válidas las expresiones de u_1 y u_2 dadas en (2.21) y (2.22). Volvemos a tener, por tanto, determinadas secuencias de los controles (i), (ii), (iii) y (iv). A las condiciones C1–C4 y C6, hay que añadir C5' que en este caso se limita a

C5''. $p(T) \geq 0$.

Como ahora no conocemos a priori el valor de la variable de coestado en el instante final (ni en ningún otro) no podemos aplicar el corolario 2.1. Las posibles secuencias de pares de control dependerán del valor de λ y de si $Z = p(t)e^{\delta t}$ es función no decreciente o no creciente (pues por la proposición 2.3 sabemos que es monótona). Para el caso $\lambda < \frac{1}{2}$ las figuras 2.5d y 3.7d muestran que la sucesión de controles ha de ser (ii)-(i) o bien (i)-(ii), según sea Z no creciente o no decreciente.

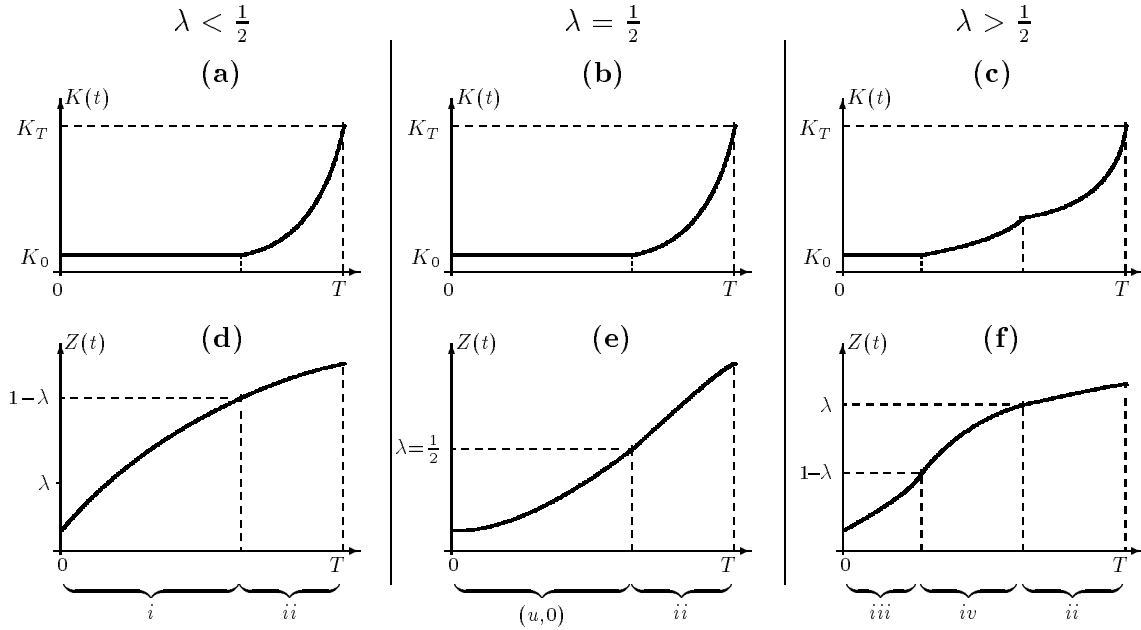


Figura 3.7

Posibles sucesiones de pares de control y acumulación de capital asociada cuando $Z(t)$ es no decreciente, para los casos $\lambda < 1/2$ (a, d), $\lambda = 1/2$ (b, e) y $\lambda > 1/2$ (c, f).

De igual manera la sucesión de controles ha de ser compatible con $(ii)-(iv)-(iii)$ o bien $(iii)-(iv)-(ii)$, como muestran 2.5f y 3.7f respectivamente, cuando $\lambda < \frac{1}{2}$. Por último si $\lambda = \frac{1}{2}$ entonces los controles son $(ii)-(u,0)$ cuando Z es no creciente y $(u,0)-(ii)$ en caso contrario (ver figuras 2.5e y 3.7e).

Hemos de diseñar controles de manera que $K^*(T) = K_T$, donde K_T es un capital final alcanzable dados los parámetros del juego. El siguiente teorema nos ofrece los controles óptimos cuando λ es menor o igual que $\frac{1}{2}$.

Teorema 3.1

Sean J_1 y J_2 los funcionales dados en (2.2) y (2.3). Sea $W = \lambda J_1 + (1 - \lambda)J_2$, donde $\lambda \in [0, \frac{1}{2}]$. Si $K_T > K_T^{\text{libre}}(\lambda)$ el par de funciones de control u_1, u_2 con $u_1(t) \in [a, b]$ y $u_2(t) \in [0, 1]$ que maximizan W sujeto a la ecuación cinética (2.1) del sistema y a la condición inicial (2.4) y final (3.1) para el capital son las dadas en la tabla 3.4.

Nótese que los controles dependen de λ y de la relación entre δ , $A(1 - a)$ y A , es decir, el descuento en el consumo, la máxima cantidad de output que puede obtenerse de la inversión y el factor de producción. Denotaremos l_c ($c = i, ii, iii, iv$) a la longitud del intervalo donde se aplica el control c .

Tabla 3.4

Estrategias que conducen a pagos del conjunto de Pareto en el juego con capital final fijo para valores de $\lambda \leq \frac{1}{2}$ tales que $K_T > K_T^{\text{libre}}(\lambda)$, donde $N = \delta - A(1 - a)$.

$\lambda < \frac{1}{2}$		$\lambda = \frac{1}{2}$	
$(1 - \lambda)N \leq \lambda Aa$	$(1 - \lambda)N > \lambda Aa$	$A > \delta$	$A < \delta$
$ii - i$	$i - ii$	$ii - (u, 0)$	$(u, 0) - ii$ con $u \in [a, b]$

Demostración. Dividiremos nuestro estudio en dos casos de acuerdo a los valores de λ .

Caso 1: $\lambda < \frac{1}{2}$. Como muestran las figuras 2.5a,d y 3.7a,d, las posibles secuencias de control han de ser compatibles con $(ii)-(i)$ o con $(i)-(ii)$. Utilizando (i) el capital permanece constante y por tanto (ii) ha de ser usado un tiempo suficiente para que se alcance K_T comenzando por un capital inicial K_0 . Con la ayuda de la expresión que toma $K(t)$ cuando se utiliza (ii) , tal como se ofrece en la tabla 2.4, puede determinarse la longitud l_{ii} del intervalo durante el cual (ii) debe ser usado. Utilizando la definición de L dada en (3.37) se encuentra sin dificultad que,

$$l_{ii} = \frac{L}{A(1 - a)}.$$

Si (ii) es usado o no en el intervalo $[0, l_{ii}]$ depende de si la función Z es no creciente o no decreciente.

Denotemos $\delta - A(1 - b)$ por N . Si $N \neq 0$ y se usa (ii) , $Z(t)$ toma la expresión

$$Z(t) = \lambda Aa/N + Q \exp(Nt),$$

donde la constante Q puede ponerse en función del instante donde $Z(t)$ se iguala a $1 - \lambda$, que es l_{ii} o bien $T - l_{ii}$. Llamaremos a este momento t^* , y tendremos que

$$Z(t) = \lambda Aa/N + (1 - \lambda - \lambda Aa/N) \exp[N(t - t^*)].$$

Para que $Z(t)$ sea creciente han de verificarse las dos condiciones siguientes:

$$N > 0 \tag{3.49}$$

$$1 - \lambda - \lambda Aa/N \geq 0; \tag{3.50}$$

o bien estas otras dos:

$$N < 0 \quad (3.51)$$

$$1 - \lambda - \lambda A/N \leq 0. \quad (3.52)$$

Sin embargo estas condiciones pueden ser simplificadas. Efectivamente, (3.49) y (3.50) equivalen a que $(1 - \lambda)N > \lambda Aa$. Por otra parte (3.51) y (3.52) no son compatibles:

$$(3.52) \iff 1 - \lambda \leq \lambda Aa/N \stackrel{(3.51)}{\iff} (1 - \lambda)N \geq \lambda Aa$$

$$\stackrel{\lambda Aa > 0}{\iff} \stackrel{1 - \lambda > 0}{\implies} N \geq 0.$$

Lo último entra directamente en conflicto con (3.51). Podemos afirmar, por tanto, que Z es no decreciente si $(1 - \lambda)N > \lambda Aa$, y no creciente si $(1 - \lambda)N < \lambda Aa$. En el caso de la igualdad $(1 - \lambda)N = \lambda Aa$ resulta que $Z(t)$ vale constantemente $1 - \lambda$, tanto bajo (i) como bajo (ii). En este caso el control óptimo toma cualquier sucesión de (i) y de (ii) de manera que el tiempo total de aplicación de (ii) sea l_{ii} . Los pagos asociados con estos controles son combinaciones lineales de los asociados con los pagos extremos (el correspondiente a $\lambda = 0$ y el que se corresponde con un λ próximo a $\frac{1}{2}$).

En el caso $N = 0$, $Z(t)$ toma la expresión $Q - \lambda Aat$, que es decreciente. La secuencia de control es (ii)-(i).

Resumiendo, se tiene que si $\lambda < \frac{1}{2}$ son controles óptimos los siguientes:

1. (i) durante $[0, T - l_{ii}]$ y (ii) en $[T - l_{ii}, T]$, siempre que $(1 - \lambda)N > \lambda Aa$;
2. (ii) en el intervalo $[0, l_{ii}]$ y (i) a lo largo de $[l_{ii}, T]$, si $(1 - \lambda)N \leq \lambda Aa$.

Caso 2: $\lambda = \frac{1}{2}$. El estudio de este caso es similar al anterior. En las figuras 2.5e y 3.7e puede verse la sucesión de controles permitidos: (ii)-(u, 0) o bien (u, 0)-(ii). Al igual que antes la acumulación de capital tiene lugar sólo bajo el control (ii), de la forma siguiente

$$K(t) = e^{A(1-a)t}Q - \frac{B}{A}.$$

Para alcanzar el stock de capital propuesto K_T , el par de control (ii) debe actuar durante un intervalo de longitud

$$l_{ii} = \frac{L}{A(1-a)}.$$

El momento de cambio de control será l_{ii} o bien $T - l_{ii}$. Para saber cuál de los dos es el adecuado estudiamos la expresión que toma Z mientras se aplica (ii). Si llamamos \hat{t} al instante de cambio, en el cual $Z(t) = \frac{1}{2}$, si $\delta \neq A(1-a)$ tenemos que

$$Z(t) = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{Aa}{\delta - A(1-a)} \right) e^{[\delta - A(1-a)](t-\hat{t})} + \frac{Aa}{\delta - A(1-a)} \right],$$

que se puede apreciar que será creciente si $\delta > A$ y decreciente cuando $\delta < A$.

En el caso $\delta = A$, resulta que si $Z(t) = \frac{1}{2}$ en algún punto, entonces $Z(t)$ es constante para todo t de $[0, T]$, ya sea utilizando (ii) como aplicando $(u, 0)$. De esta forma los dos órdenes de controles (ii)-(u, 0) y (u, 0)-(ii) podrían ser admitidos, e incluso cualquier sucesión arbitraria de estos controles de manera que la suma de las longitudes de los intervalos en los que se aplica (ii) sea l_{ii} .

Por último, si $\delta = A(1-a)$ entonces $Z(t)$ es $Q - Aat/2$, y por tanto es decreciente en t y la secuencia de controles es (ii)-(u, 0).

Los instantes t' y t'' en los que se cambia del control $(u, 0)$ al (ii) y viceversa pueden ser calculados fácilmente, pues en ambos casos (ii) debe actuar durante un intervalo de duración l_{ii} . Por tanto

$$t' = T - l_{ii} \quad \text{y} \quad t'' = l_{ii}.$$

Con esto queda completada la demostración. \square

El caso $\lambda > \frac{1}{2}$ presenta una mayor variedad de controles y debe ser estudiado con más detenimiento. Como puede apreciarse en las gráficas de las figuras 2.5c y 3.7c, únicamente hay incremento de capital bajo los pares de control (ii) y (iv), y este incremento es mayor con el primero de ellos.

El teorema 3.2 nos ofrece los controles óptimos para este caso. En su demostración utilizaremos el siguiente resultado previo.

Lema 3.1

Dado λ , sea $l_{iv,\lambda}^{\max}$ la longitud máxima del intervalo de tiempo en el cual se puede aplicar de manera óptima el par (iv). Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:

1. El mayor capital K_T^{\max} que puede ser alcanzado al finalizar el horizonte temporal es

$$K_T^{\max} = \left(K_0 + \frac{B}{A} \right) \exp[A(1-a)T] - \frac{B}{A}.$$

2. El stock de capital $K_1(\lambda)$ obtenido utilizando (iv) durante un periodo de longitud máxima $l_{iv,\lambda}^{\max}$ y (iii) durante el tiempo restante es

$$K_1(\lambda) = \left(K_0 + \frac{B}{A} \right) \exp[A(1-b)l_{iv,\lambda}^{\max}] - \frac{B}{A}.$$

3. El capital $K_2(\lambda)$ que se obtiene usando (iv) en un intervalo de longitud máxima $l_{iv,\lambda}^{\max}$ y (ii) el tiempo restante es

$$K_2(\lambda) = \left(K_0 + \frac{B}{A}\right) \exp\{A[(a-b)l_{iv,\lambda}^{\max} + (1-a)T]\} - \frac{B}{A}.$$

Demostración. Las tres expresiones anteriores pueden obtenerse fácilmente con ayuda de la tabla 2.4. Para calcular K_T^{\max} utilizaremos el par (ii) en todo el intervalo $[0, T]$, por ser este el control que alcanza una mayor velocidad en la acumulación de capital. La condición inicial $K(0) = K_0$ junto con la expresión $K(t) = \exp[A(1-a)]Q - B/A$ nos permite determinar su valor.

Del mismo modo $K_1(\lambda)$ y $K_2(\lambda)$ pueden calcularse de las expresiones del capital bajo (ii), (iii) o (iv) y de la condición inicial. Los valores de $K_1(\lambda)$ y $K_2(\lambda)$ son independientes del orden en que intervengan los controles. \square

Teorema 3.2

Sean J_1 y J_2 los funcionales dados en (2.2) y (2.3). Sea $W = \lambda J_1 + (1-\lambda)J_2$, donde $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1]$ y de manera que $K_T > K_T^{\text{libre}}(\lambda)$. El par de funciones de control u_1, u_2 con $u_1(t) \in [a, b]$ y $u_2(t) \in [0, 1]$ que maximizan W sujeto a la ecuación cinética (2.1) del sistema y a las condiciones iniciales y finales para el capital (2.4) y (3.1), son las dadas en la tabla 3.5. Los capitales K_T^{\max} , $K_1(\lambda)$ y $K_2(\lambda)$ son los dados en el lema 3.1, y t_α ($\alpha = a, b, \dots, h$) son los instantes de cambio de par de control.

Tabla 3.5

Estrategias óptimas para $\lambda > \frac{1}{2}$ y $K(T) = K_T$.

K_T	$(1-\lambda)M \leq \lambda Ab$	$(1-\lambda)M > \lambda Ab$
$[K_0, K_1(\lambda)]$	$iv - \overset{t_a}{iii}$	$iii - \overset{t_b}{iv}$
$[K_1(\lambda), K_2(\lambda)]$	$ii - \overset{t_c}{iv} - \overset{t_d}{iii}$	$iii - \overset{t_e}{iv} - \overset{t_f}{ii}$
	$A < \delta$	$\delta < A$
$[K_2(\lambda), K_T^{\max}]$	$ii - \overset{t_g}{iv}$	$iv - \overset{t_h}{ii}$

Demostración. Calculemos primero $l_{iv,\lambda}^{\max}$, la máxima longitud de un intervalo en el que se aplica el control (iv). Llamemos t_λ y $t_{1-\lambda}$ a los instantes en los que $Z(t)$ toma el valor λ y $1-\lambda$, respectivamente. Si estos dos instantes existen, entonces $l_{iv,\lambda}^{\max}$ será la distancia entre ellos, siempre que sea menor que T .

Para calcular la diferencia $t_\lambda - t_{1-\lambda}$ utilizamos la expresión de $Z(t)$ bajo (iv). Definiendo M como $\delta - A(1 - b)$ tenemos que $Z(t) = \lambda Ab/M + \exp(Mt)Q_{iv}$ si $M \neq 0$ y $Z(t) = Q'_{iv} - \lambda Abt$ cuando $M = 0$. Con ayuda de $Z(t_\lambda) = \lambda$ podemos despejar en cada caso la constante

$$Q_{iv} = (\lambda - \lambda Ab/M) \exp(-Mt_\lambda) \quad (3.53)$$

$$Q'_{iv} = \lambda(1 + Abt_\lambda) \quad (3.54)$$

Utilizando ahora $Z(t_{1-\lambda}) = 1 - \lambda$ se puede despejar en ambos casos la diferencia

$$t_\lambda - t_{1-\lambda} = \begin{cases} M^{-1} \ln [(\lambda - \lambda Ab/M)/(1 - \lambda - \lambda Ab/M)], & \text{si } M \neq 0 \\ (1 - 2\lambda)/(\lambda Ab), & \text{si } M = 0 \end{cases} \quad (3.55)$$

Cuando el interior del logaritmo sea negativo, al menos uno de los dos instantes, t_λ o $t_{1-\lambda}$, no existe. En ese caso tomamos $l_{iv,\lambda}^{\max}$ como T . Tenemos entonces

$$l_{iv,\lambda}^{\max} = \min\{|t_\lambda - t_{1-\lambda}|, T\}.$$

Los controles necesarios y su orden vienen dados por el rango donde se encuentra el valor de K_T , de acuerdo con los valores dados en el lema 3.1. Para $\lambda > \frac{1}{2}$ tenemos que el orden de los controles ha de ser compatible con (ii)-(iv)-(iii) si Z es decreciente y con (iii)-(iv)-(ii) si Z es creciente.

1. $K_T \in [K_0, K_1(\lambda)]$. El capital K_T puede ser alcanzado utilizando el control (iv) a lo sumo el tiempo máximo $l_{iv,\lambda}^{\max}$. El resto del tiempo se utiliza (iii), y no se incrementa el capital. Tendremos, por tanto, una secuencia (iv)-(iii) si Z es decreciente y (iii)-(iv) si es creciente. Veamos condiciones para que Z sea creciente, utilizando la expresión que toma dicha función cuando actúa bajo (iv) (podría hacerse igualmente con (iii) pues por la proposición 2.3 sabemos que Z es monótona). Suponiendo que $M \neq 0$ y utilizando que el cambio de control se hace cuando Z vale $1 - \lambda$ tenemos que Z es creciente cuando M y Q_{iv} tienen el mismo signo. En este caso $Q_{iv} = (1 - \lambda - \lambda Ab/M) \exp(-Mt_{1-\lambda})$ y entonces, si ambos son positivos se tiene que

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} M > 0 \\ Q_{iv} > 0 \end{array} \right\} &\iff \left. \begin{array}{l} M > 0 \\ 1 - \lambda - \lambda Ab/M > 0 \end{array} \right\} &\iff \left. \begin{array}{l} M > 0 \\ (1 - \lambda)M > \lambda Ab \end{array} \right\} \\ &\iff (1 - \lambda)M > \lambda Ab, \end{aligned}$$

y si son negativos

$$\left. \begin{array}{l} M < 0 \\ Q_{iv} < 0 \end{array} \right\} \iff \left. \begin{array}{l} M < 0 \\ 1 - \lambda - \lambda Ab/M < 0 \end{array} \right\} \iff \left. \begin{array}{l} M < 0 \\ (1 - \lambda)M > \lambda Ab \end{array} \right\}.$$

Estas dos últimas desigualdades son incompatibles entre sí.

Por tanto tendremos que cuando $(1 - \lambda)M > A\lambda b$ los controles son *(iii)*-*(iv)*, y cuando la desigualdad se da al revés el orden de los controles también se invierte. En la igualdad $(1 - \lambda)M = A\lambda b$ la función Z permanece constantemente valiendo $1 - \lambda$ y el orden de los controles es indiferente mientras se utilice *(iv)* el tiempo suficiente. Cuando $M = 0$ entonces Z es creciente.

El instante de cambio ha de permitir alcanzar K_T cuando deje de utilizarse *(iv)*. Si llamamos t_a y t_b a esos instantes para el caso Z decreciente y creciente, respectivamente, es sencillo ver que toman los valores

$$t_a = \frac{L}{A(1 - b)}, \quad (3.56)$$

$$t_b = T - t_a. \quad (3.57)$$

2. $K_T \in [K_1(\lambda), K_2(\lambda)]$. En este caso es necesario utilizar *(iv)* durante el máximo tiempo posible, y *(ii)* el necesario para llegar a K_T . El tiempo restante, hasta llegar a T se usará *(iii)*.

El mismo razonamiento del punto anterior nos permite afirmar que cuando se utiliza *(iv)* y $(1 - \lambda)M > \lambda Ab$ la función Z es creciente. Utilizando un argumento similar, se llega a que Z es creciente bajo el control *(ii)* si $A < \delta$. Puesto que $\lambda > \frac{1}{2}$ tenemos que $M > Ab$ y por tanto $(1 - \lambda)M > \lambda Ab \Rightarrow A < \delta$. Basta entonces imponer $(1 - \lambda)M > \lambda Ab$ para que la secuencia de controles sea *(iii)*-*(iv)*-*(ii)*. Los cambios de controles se hacen cuando $Z(t)$ vale $1 - \lambda$ y λ . De la misma manera cuando $(1 - \lambda)M < A\lambda b$ el orden se invierte. El cálculo de los instantes de cambio se hace a partir de las condiciones iniciales y finales y de la expresión que toma el capital bajo cada control, resultando

$$t_c = \frac{L - A(1 - b)l_{iv,\lambda}^{\max}}{A(1 - a)} \quad y \quad t_d = t_c + l_{iv,\lambda}^{\max} \quad (3.58)$$

si Z es decreciente, y si es creciente tendremos

$$t_e = t_f - l_{iv,\lambda}^{\max} \quad y \quad t_f = T - \frac{L - A(1 - b)l_{iv,\lambda}^{\max}}{A(1 - a)}. \quad (3.59)$$

3. $K_T \in [K_2(\lambda), K_T^{\max}]$. En este último caso únicamente utilizaremos los controles *(ii)* y *(iv)*, con cambio en el instante en que $Z(t) = \lambda$.

Como hicimos anteriormente, veamos condiciones para que Z sea creciente o decreciente. Utilizando $Z(t_\lambda) = \lambda$, despejamos la constante de Z bajo *(iv)* cuando $M \neq 0$

$$Q_{iv} = \lambda(1 - Ab/M) \exp(-Mt_{1-\lambda}).$$

Si M y Q_{iv} son ambos positivos

$$\left. \begin{array}{l} M > 0 \\ Q_{iv} > 0 \end{array} \right\} \iff \left. \begin{array}{l} M > 0 \\ \lambda > \lambda Ab/M \end{array} \right\} \iff \left. \begin{array}{l} M > 0 \\ M > Ab \end{array} \right\} \iff \delta > A,$$

entonces Z es creciente. También lo es si son los dos negativos pero entonces, como antes, las dos condiciones resultan incompatibles.

Cuando $M = 0$ siempre es Z decreciente. La secuencia (ii)-(iv) se utiliza cuando $\delta < A$ y la contraria si $A < \delta$. Los cambios se producen en t_g y t_h donde Z vale λ . Utilizando la función de capital se puede llegar a las expresiones

$$t_g = \frac{L - A(1 - b)T}{A(b - a)} \quad (3.60)$$

$$t_h = \frac{L - A(1 - a)T}{A(a - b)}. \quad (3.61)$$

Con esto queda concluida la demostración del teorema. \square

3.4 Comparación de equilibrios

Nuestra intención ahora es estudiar la conexión entre los equilibrios de Nash en ciclo abierto y los pagos no dominados, estudiados en el presente capítulo.

El equilibrio de Nash en el caso de que deba alcanzarse al menos un stock de capital mínimo K_T puede no ser único. Hemos visto en la sección 3.2 que si $\delta < A(1 - b)$ y K_T no se alcanza cuando se aplica el equilibrio de Nash en el juego con capital final libre, los equilibrios de Nash del juego con el capital final fijo son sucesiones de controles (ii)-(iv)-(iii), donde los instantes de cambio son llamados t_1 y t_2 . El instante t_1 se encuentra entre un valor mínimo t_1^{\min} dado en (3.45), y uno máximo t_1^{\max} descrito por (3.46); t_2 es una función lineal de t_1 dada en (3.41).

En su trabajo de 1973, Lancaster mostraba cómo en el juego original con capital final libre los pagos que se conseguían por medio del equilibrio de Nash podían no ser eficientes. En los resultados siguientes veremos que en el juego con metas en el capital final algunos equilibrios de Nash pueden ser no dominados. El siguiente teorema nos ofrece condiciones suficientes para que los pagos asociados con todos los equilibrios de Nash pertenezcan al conjunto de Pareto.

Teorema 3.3

Sea $K_T^{\text{libre}}(\lambda)$ el capital alcanzado en el instante T por la solución de Pareto para un λ dado en el juego sin restricciones en $K(T)$. Supongamos además que $\delta < A(1 - b)$. Fijado un capital final K_T , si $K_T^{\text{libre}}(\lambda) < K_T$ para todo $\lambda \in [0, 1]$, entonces

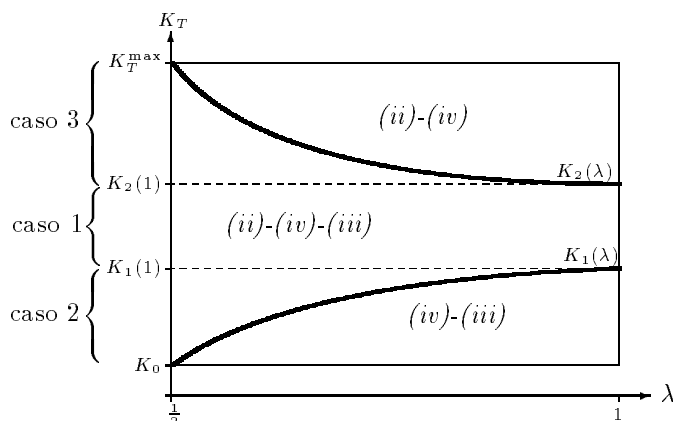


Figura 3.8

Los tres casos considerados en la demostración del teorema 3.3 y las sucesiones de controles con las que se alcanza el óptimo de Pareto de acuerdo con el valor de λ y de K_T . Las gráficas de $K_1(\lambda)$ y $K_2(\lambda)$ dividen el rectángulo $[\frac{1}{2}, 1] \times [K_0, K_T^{\max}]$ en tres regiones en cada una de las cuales se utiliza una secuencia diferente de controles para alcanzar el pago no dominado.

todos los pagos que se obtienen de aplicar equilibrios de Nash en el juego con la restricción $K(T) \geq K_T$ pertenecen al conjunto de Pareto asociado con los valores de λ comprendidos entre $\frac{1}{2}$ y 1.

Demostración. Veamos que bajo las hipótesis del teorema todos los equilibrios de Nash conducen a pagos que son óptimos de Pareto considerando $\lambda > \frac{1}{2}$. Estos puntos se obtienen aplicando las estrategias expuestas en la tabla 3.5, que para cada λ dependen de dónde se sitúe K_T con respecto a K_0 , $K_1(\lambda)$, $K_2(\lambda)$ y K_T^{\max} . Cuando λ se aproxima a $\frac{1}{2}$ por la derecha, $K_1(\lambda)$ y $K_2(\lambda)$ tienden hacia K_0 y K_T^{\max} , respectivamente (ver figura 3.8).

Cada posible valor de K_T se encontrará en uno de los siguientes tres casos, señalados en la figura 3.8:

1. Que K_T se encuentre siempre entre $K_1(\lambda)$ y $K_2(\lambda)$.
2. Que a partir de un cierto $\hat{\lambda} > \frac{1}{2}$ en adelante, K_T se sitúe entre K_0 y $K_1(\lambda)$.
3. Desde cierto $\hat{\lambda} > \frac{1}{2}$ en adelante K_T esté situado entre $K_2(\lambda)$ y K_T^{\max} .

Caso 1. La secuencia de control $(ii)-(iv)-(iii)$ es válida para todo λ . En Hoel (1976) se muestra que en el juego con capital final libre la acumulación de capital en el equilibrio de Nash en ciclo abierto es menor o igual que la acumulación asociada a la solución de Pareto. Bajo el supuesto de que $K_T^{\text{libre}}(\lambda) < K_T$, para todo λ en $[0, 1]$,

y con $\delta < A(1-b)$, como se vio en la sección 3.2 el equilibrio de Nash viene dado por (ii)-(iv)-(iii), con cambios de control en los instantes $t_1 \in [t_1^{\min}, t_1^{\max}]$ y t_2 verificando (3.45), (3.46) y (3.41). Para cada valor de t_1 dentro del intervalo admisible tenemos un t_2 determinado. Se trata de ver, pues, que existe un $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1]$ para el que el pago óptimo de Pareto asociado coincide.

Dado que la secuencia de control es la misma en ambos casos, es suficiente probar que los instantes de cambio son también los mismos: t_1 es igual a t_c y t_2 es t_d . Comencemos verificando que coincide la longitud del intervalo en el que se aplica (iv), es decir, $t_2 - t_1 = t_d - t_c$. Tomando t_1 y su relación con t_2 dada en (3.41), tenemos que

$$t_2 - t_1 = \frac{L}{A(1-b)} - \frac{A(b-a) + A(1-b)}{A(1-b)} t_1 = \frac{L - A(1-a)t_1}{A(1-b)}.$$

Si suponemos la existencia de un $\lambda > \frac{1}{2}$ tal que $t_1 = t_c(\lambda)$, entonces sustituyendo t_1 por t_c resulta la igualdad buscada:

$$t_2 - t_1 = \frac{L}{A(1-b)} - \frac{A(1-a)}{A(1-b)} \frac{L - A(1-b)l_{iv,\lambda}^{\max}}{A(1-a)} = l_{iv,\lambda}^{\max} = t_d - t_c.$$

Si para un $t_1 \in [t_1^{\min}, t_1^{\max}]$ dado, encontramos un $\lambda \in (\frac{1}{2}, 1]$ de manera que $t_c(\lambda) = t_1$, entonces podemos garantizar que el pago asociado con ese equilibrio de Nash es no dominado. Los posibles valores que pueden ser tomados por t_c se obtienen de la expresión (3.58) donde λ varía entre $\frac{1}{2}$ y 1. Más concretamente, utilizando (3.55) tenemos que $l_{iv,1/2}^{\max} = 0$ y que $l_{iv,1}^{\max} = \min\{T, \ln[(A-\delta)/(Ab)]/M\}$, de lo que resulta

$$t_c \in [t_c(\lambda = 1), t_c(\lambda = \frac{1}{2})] = \left[\frac{L - A(1-b) \ln\left(\frac{A-\delta}{Ab}\right) M^{-1}}{A(1-a)}, \frac{L}{A(1-a)} \right] \cap [0, T]. \quad (3.62)$$

Cuando λ tiende a $\frac{1}{2}$, entonces $l_{iv,\lambda}^{\max}$ tiende a cero, y por tanto la cota superior es $L/[A(1-a)]$, que coincide con una de las cotas superiores de t_1 , la dada en (3.38).

Cuando λ crece hacia 1, el instante t_c asociado decrece, de manera que todos los equilibrios de Nash cuyo t_1 está situado entre la cota inferior dada en (3.62) y t_1^{\max} conducen a pagos no dominados.

Si $t_1^{\min} > 0$ todos los equilibrios de Nash podrían pertenecer a la frontera de Pareto. Para confirmarlo sólo es necesario verificar que $t_c(\lambda = 1)$ es menor o igual que t_1^{\min} . Supongamos que no es esto así y que por lo tanto

$$\frac{L}{A(1-a)} + \frac{1-b}{1-a} \ln\left(\frac{A-\delta}{Ab}\right) M^{-1} > \frac{L}{A(b-a)} - \frac{1-b}{b-a} T.$$

De la desigualdad anterior se deduce que

$$\frac{L}{A(1-a)} - \frac{b-a}{1-a} \ln\left(\frac{A-\delta}{Ab}\right) M^{-1} < T. \quad (3.63)$$

Como hipótesis tenemos que $K_T^{\text{libre}}(\lambda) < K_T$ para todo λ . El valor de λ con una mayor acumulación de capital asociada a su óptimo de Pareto en el juego sin metas es 1. Para este valor $t_2 = T$ y $t_3 = T + M^{-1} \ln[(A - \delta)/(Ab)]$. Aplicando (ii) hasta el instante t_3 y (iv) a partir de entonces y hasta el final, se obtiene un stock de capital que ha de ser inferior a K_T :

$$\exp \left[A(1-a)T + \frac{A(b-a)}{M} \ln \left(\frac{A-\delta}{Ab} \right) \right] \left(K_0 + \frac{B}{A} \right) - \frac{B}{A} < K_T.$$

Despejando T de esta desigualdad obtenemos (3.63) cambiada de sentido. La contradicción proviene de suponer que $t_c(1) < t_1^{\min}$ no es cierto.

Casos 2 y 3. Estudiemos ahora los dos casos restantes. Una vez que K_T ha alcanzado el valor K_1 (o K_2 en el caso 3) para un $\hat{\lambda}$ dado, la estrategia de Pareto es (iv)-(iii) ((ii)-(iv), respectivamente) con cambios en t_a (o t_g). Esta estrategia es idéntica para todos los valores de λ entre $\hat{\lambda}$ y 1.

Si $K_1(\hat{\lambda}) = K_T$, puede comprobarse fácilmente que $t_c(\lambda)$ tiende a 0 cuando λ tiende a $\hat{\lambda}$. Por tanto, t_c se encuentra situado entre 0 y t_1^{\max} . Cualquier t_1 que corresponda a un equilibrio de Nash debería tener un t_c igual a él mismo, y se puede afirmar que sus pagos son no dominados.

Si $K_2(\hat{\lambda}) = K_T$, el mínimo valor que puede tomar t_c es precisamente el que hemos llamado t_g , cuya expresión coincide con t_1^{\min} . Podemos asegurar también que los pagos de cualquier equilibrio de Nash pertenecen a la frontera de Pareto. Con esto queda probado el teorema. \square

Finalmente damos el siguiente resultado que obtiene pagos de Nash no dominados bajo ciertas condiciones.

Teorema 3.4

Sea $\delta < A(1-b)$. Si existe un $\hat{\lambda} > \frac{1}{2}$ tal que $K_T^{\text{libre}}(\lambda) < K_T$ para todo $\lambda \in (\frac{1}{2}, \hat{\lambda})$, y $K_T^{\text{libre}}(\lambda) > K_T$ para todo $\lambda \in (\hat{\lambda}, 1]$, entonces los equilibrios de Nash con t_1 mayores que el $t_c(\hat{\lambda})$ dado en (3.58) obtienen pagos no dominados.

Demostración. Señalemos que $\hat{\lambda}$ es el menor valor de λ para el cual el capital final K_T es alcanzado con la solución de Pareto cuando se considera libre el $K(T)$. Con la condición $K(T) \geq K_T$, cualquier equilibrio de Nash sigue la secuencia de controles (ii)-(iv)-(iii), con cambios en t_1 y t_2 . Esta sucesión de controles y sus instantes de cambio son idénticas a la solución de Pareto si t_1 es mayor que $t_c(\hat{\lambda})$, como se mostró en el teorema 3.3. Por lo tanto, los pagos asociados con esos equilibrios de Nash pertenecen al conjunto de Pareto. \square

3.4.1 Ejemplo

Retomemos el ejemplo 2.1 de la página 50, pero considerando metas en el stock de capital final. La figura 3.9a representa simultáneamente los pagos no dominados que pueden obtenerse considerando que el capital final es libre (curva $ABCD$), que debe ser mayor o igual a 7.7 ($LMGD$), o bien que se le exige ser mayor o igual que 12 (PQR). En los dos casos con restricción sobre $K(T)$ (los dos últimos), para $\lambda < \frac{1}{2}$ existe un único par de pagos no dominados, representados respectivamente por los puntos L y P . Aquellos pagos correspondientes a $\lambda = \frac{1}{2}$ forman dos líneas (LM y PQ) paralelas a la que se obtiene en el caso libre (BC). Cuando en el caso libre consideramos el óptimo de Pareto para un $\lambda \geq 0.7056$ se alcanza un capital final mayor o igual que 7.7, esto es, $K_T^{\text{libre}}(0.7056) = 7.7$. Por tanto, ambas curvas (para capital final libre y para mayor o igual que 7.7) coinciden entre los puntos G y D , donde G es el punto asociado con $\lambda = 0.7056$ (ver fig. 3.9b).

La gráfica 3.9b representa con más detalle la parte inferior junto con los equilibrios de Nash. Para el caso $K(T) \geq 7.7$ los equilibrios de Nash son sucesiones de controles (ii)-(iv)-(iii). Aunque $\underline{t}_1 = 1.083$, este valor no consigue que $p_1(T) \geq 0$. El más bajo valor de t_1 que hace que $p_1(T)$ y $p_2(T)$ sean mayores que cero es 1.864, y esto sigue verificándose hasta $t_1^{\max} = \bar{t}_1 = 3.059$. Los cambios en los controles se producen primero en algún $t_1 \in [1.864, 3.059]$, y después en $t_2 = 10.708 - 2.5t_1$. Todos estos equilibrios dan lugar a los pagos de la curva MGN . De entre estos equilibrios, aquellos situados en el tramo MG obtienen pagos no dominados. Estos son aquellos para los cuales $t_1 \in [2.063, 3.059]$ puesto que 2.063 es precisamente el t_c asociado con el parámetro $\hat{\lambda} = 0.7056$, correspondiente al punto G . Los otros equilibrios alcanzan pagos subóptimos: son aquellos que pertenecen al tramo GN , en los cuales $t_1 \in [1.864, 2.063]$. Cuando el capital final ha de ser mayor o igual que 12, todos los pagos de los equilibrios de Nash son no dominados y coinciden con aquellos correspondientes a $\lambda > \frac{1}{2}$, es decir, la curva QR .

Para diseñar estrategias que permitan alcanzar alguno de los pagos no dominados descritos, las llamadas *estrategias gatillo* (*trigger strategies*) pueden resultar de utilidad. Para esto deberemos considerar aquellos pagos que dominan cierto equilibrio de Nash y con ese equilibrio penalizar las posibles desviaciones.

Para el caso sin restricciones en el capital final, los óptimos de Pareto que verifican la anterior propiedad son los situados en el segmento EF de la figura 2.6a. Cuando el capital ha de alcanzar al menos 7.7, cualquier punto de MGD domina algún equilibrio, pero aquellos que están situados en MG son equilibrios de Nash ellos mismos. Son lo que podríamos llamar equilibrios auto-implementables. Un resultado similar tenemos para QR cuando el capital final ha de ser mayor o igual que 12.

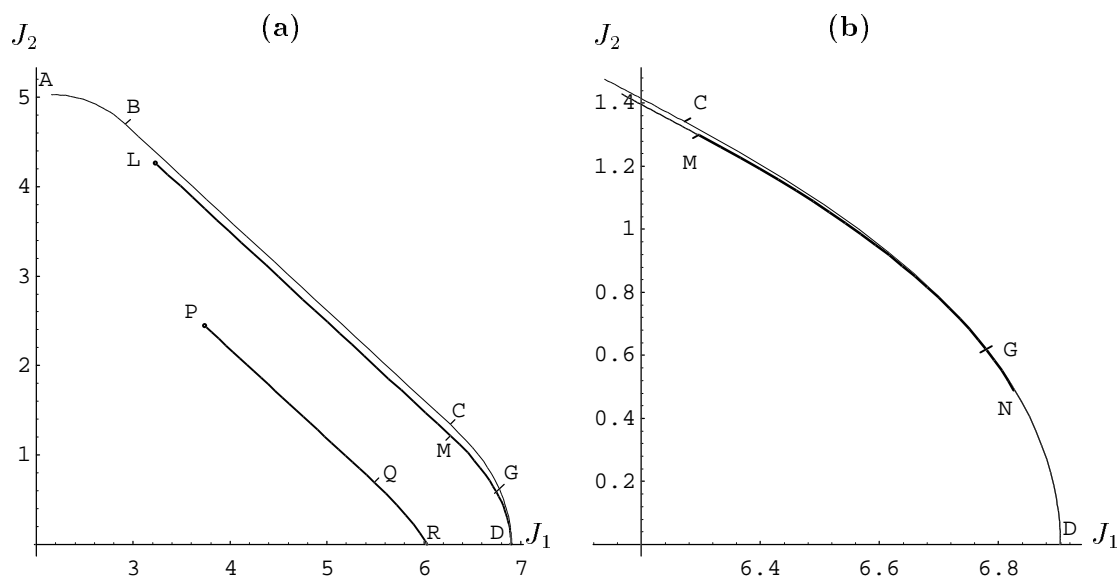


Figura 3.9

(a) Conjunto de pagos no dominados: $ABCD$ para el problema con capital final fijo; LMD para el caso en que $K(T) \geq 7.7$; y PQR si $K(T) \geq 12$.

(b) Detalle de la parte inferior de (a), donde la curva MGN representa los pagos de los equilibrios de Nash para los casos en los que el capital final ha de ser igual o mayor que 7.7.

3.5 Conclusiones

En el modelo de capitalismo de Lancaster-Hoel la acumulación de capital es un mero efecto colateral de las acciones de los jugadores. En este capítulo se ha analizado la posibilidad de que los jugadores puedan autoimponerse o que les sean impuestos por agentes externos unos mínimos en el capital final que deben alcanzar al finalizar el horizonte temporal. De esta manera se puede conseguir no sólo un mayor bienestar para las generaciones futuras (y por ende para la propia generación durante su periodo no activo) sino también mejorar los propios pagos presentes.

Se ha propuesto un juego de concertación que tiene en cuenta las metas en la acumulación de capital y que penaliza a los que se desvían de los controles propuestos. Los equilibrios de Nash en este nuevo juego se han calculado imponiendo una nueva restricción en la variable de estado del juego original. Contrariamente a lo que ocurre en el caso sin metas en el capital, estudiado en el capítulo 2, en este nuevo caso pueden existir un número infinito de equilibrios. Este hecho pide un criterio de selección que disminuya el conjunto de soluciones.

Capital final y equilibrios pueden ser seleccionados de manera que tanto el sistema como los jugadores mejoren su situación con respecto al modelo competitivo original.

La clave para que ambos jugadores obtengan mejores pagos que en el caso libre y además el sistema también se beneficie está en la comunicación y los acuerdos entre los jugadores. En el nuevo juego de concertación que hemos presentado se ha de alcanzar previamente un acuerdo sobre unos controles, y se ha de establecer un sistema de castigos a los que se desvíen del acuerdo. Todo esto requiere unas negociaciones, un proceso de comunicación que tendrá también un costo. El cambio al nuevo juego resulta ser positivo siempre que estos costos de negociación y de implementación no resulten excesivos.

En el juego con metas el aspecto dinámico está más acentuado, pues como se estudió en el capítulo anterior, para el juego con capital final libre las condiciones iniciales son irrelevantes a la hora de elegir estrategias feedback. Por su parte perdemos ahora la perfección en los subjuegos que tenían los equilibrios de Nash en ciclo abierto en el juego con capital final libre.

Por otra parte, en la sección 3.3 se han estudiado los pagos no dominados de este nuevo modelo con metas en el capital. Si este capital final exigido es menor que el que se obtiene en el equilibrio de Nash cuando la restricción es ignorada, entonces ese equilibrio puede ser utilizado para seleccionar los óptimos de Pareto que dominan sus pagos. De esta manera surgen estrategias que mejoran el pago de Nash, y en las que el equilibrio de Nash actúa como amenaza frente a las desviaciones, como se

describe en Pohjola (1983b).

Sin embargo, si la meta en el capital final no se satisface en el equilibrio de Nash con el capital libre, el equilibrio no resulta ser único. De todos ellos parecen más atractivos aquellos que se encuentran en la frontera de Pareto, si los hay. Los dos últimos teoremas de la sección 3.4 nos ofrecen condiciones para que las soluciones de Nash sean no dominadas. El primero de los teoremas nos afirma que si el objetivo de stock de capital no se alcanza nunca de forma espontánea cuando los jugadores actúan conjuntamente pero sin preocuparse del capital final, entonces todos los equilibrios de Nash del juego con metas en el capital alcanzan pagos no dominados. En esta situación el equilibrio de Nash exige una sincronización tal entre los jugadores que no es sorprendente que se alcancen resultados tan buenos como los cooperativos.

El parámetro λ utilizado para calcular los pagos no dominados puede ser interpretado como una medida del poder o importancia relativa de los trabajadores. Para ellos es más ventajoso una mayor acumulación de capital. De esta manera si el capital mínimo propuesto es alcanzado para los óptimos de Pareto asociados con valores altos de λ , el teorema 3.4 nos indica cuáles de los equilibrios de Nash son no dominados. De esta forma son ahora los óptimos de Pareto los que nos permiten seleccionar algunos equilibrios de Nash.

4

Un juego de generaciones sucesivas

Presentamos en este capítulo un nuevo modelo de generaciones sucesivas o solapadas, donde se establece un juego con una cantidad infinita de jugadores en el que cada jugador mueve una única vez a lo largo del juego. Los pagos a cada jugador dependen únicamente del comportamiento de los anteriores a él y de su inmediato sucesor. Buscamos algunos equilibrios sencillos y estacionarios, y caracterizamos cierta clase de equilibrios perfectos en los subjuegos.

4.1 Modelos de generaciones sucesivas

Mediante modelos de generaciones sucesivas o solapadas se pretende representar sistemas económicos con un horizonte temporal infinito controlados por ciertos agentes cada uno de los cuales toma sus decisiones en un periodo finito. Una *generación* agrupa a todos los agentes que comparten un mismo horizonte temporal y que serán considerados como un único decisor.

Este tipo de modelos surgen en economía a finales de los años cincuenta con Paul A. Samuelson. En su trabajo de 1958 supone que la Naturaleza ofrece una cantidad fija de cierto bien a cada generación en cada periodo. La generación dispone de ese bien para su consumo o para prestarlo a la generación con la que comparte ese periodo temporal. Con ello se busca el equilibrio general y la atención se centra en el intercambio monetario (ver también, por ejemplo, Balasko y Shell [1980, 1981] o Barro y Sala-i-Martin [1995]).

Otros autores como Salant (1991), Kandori (1992), Smith (1992) o Gossner (1996), estudian juegos en los que intervienen generaciones solapadas de jugadores. Consideran un juego de etapa N -personal, el cual es jugado repetidamente por las N generaciones que viven simultáneamente en cada periodo. El teorema Folk de los juegos repetidos (ver Sorin [1992], por ejemplo) juega un papel central en estos estudios.

Nosotros proponemos en este capítulo un nuevo modelo de generaciones sucesivas donde se plantea un juego de crecimiento económico con un número infinito de jugadores —las generaciones— los cuales intervienen una única vez cada uno y de manera consecutiva, eligiendo la proporción de sus ingresos que destinan para su consumo. El pago total a cada generación depende del estado del sistema al comienzo de su vida, de sus decisiones y de las decisiones de la siguiente generación.

En la siguiente sección se presentan las características de nuestro modelo de generaciones sucesivas. La sección segunda analiza algunas estrategias estacionarias de acuerdo con determinados criterios y establece las condiciones bajo las cuales dichas estrategias constituyen equilibrios de Nash o perfectos en los subjuegos. A continuación se ofrecen algunas caracterizaciones de una cierta clase de equilibrios sin memoria perfectos en los subjuegos en los que todos los jugadores tienen el mismo patrón de comportamiento. Por último, se seleccionan entre los equilibrios anteriores aquellos que cumplen ciertas propiedades de equidad. Para ambos casos se diseñan procedimientos para generar esos equilibrios.

4.2 El juego de generaciones

Supongamos que la evolución de una economía puede ser analizada a través de las decisiones de distintos agentes. En cada instante conviven únicamente miembros de dos generaciones: adultos de una generación junto con los ancianos de la generación previa.

La generación (o jugador) que comienza su vida como adulto en el periodo t la denotaremos por G_t . Supondremos que hereda de la anterior, G_{t-1} , un stock de capital k_t . El capital refleja el estado del sistema. A lo largo del periodo t este capital produce una cierta cantidad de manera que el stock total disponible para G_t viene dado por $S(k_t)$. La función *de stock* S representa la suma del capital más la producción obtenida utilizando ese capital durante todo el periodo. Supondremos que S es continua en $[0, \infty)$, diferenciable en $(0, \infty)$ y que verifica las siguientes propiedades, para cada capital $k > 0$:

S1. $S(k) \geq k$,

S2. $S'(k) \geq 1$, y

S3. $S''(k) \leq 0$.

Por tanto S es una función creciente, cóncava y mayor que la identidad. Las condiciones S1–S3 son verificadas, por ejemplo, añadiendo a la identidad cualquier función de producción cóncava como las de tipo Cobb-Douglas, esto es

$$S(k) = k + k^\delta + C, \quad (0 < \delta < 1, C \geq 0),$$

o también

$$S(k) = k + \frac{\beta k}{\gamma + k} + C, \quad (0 < \gamma < \beta, C \geq 0),$$

si consideramos una función de producción Michaelis-Menten.

La variable de decisión c_t es la proporción destinada por G_t al consumo en el periodo t en el que es adulto. G_t destina una cantidad a los ancianos de la generación previa G_{t-1} , que es proporcional al consumo de G_t de acuerdo con cierta constante *de enlace* $\alpha \in (0, 1)$ fijada por tradición. Esto constituye el lazo de unión entre generaciones y el porqué cada una está interesada en dejar el sistema en unas buenas condiciones de consumo para la siguiente generación. Tendremos, por tanto, que

1. G_t consume $c_t S(k_t)$ en el periodo t ,
2. G_{t-1} consume $\alpha c_t S(k_t)$ en el periodo t (con $\alpha \in (0, 1)$ fijo), y
3. la cantidad no consumida $(1 - c_t - \alpha c_t) S(k_t)$ constituye k_{t+1} . Esto formará el capital inicial para G_{t+1} en el periodo $t + 1$.

Consideraremos que el pago al jugador G_t es la suma de su consumo cuando es adulto más su consumo cuando es anciano. Así, el pago a G_t resulta

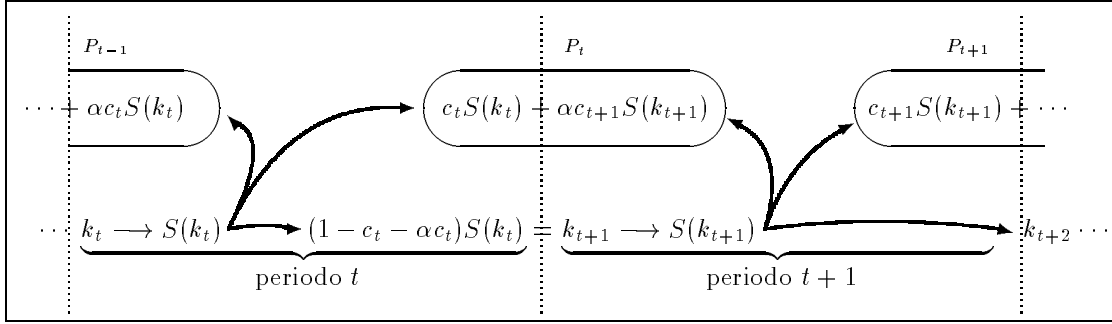
$$P_t = c_t S(k_t) + \alpha c_{t+1} S(k_{t+1}). \quad (4.1)$$

Para el primer periodo utilizaremos una generación G_0 que no tiene periodo adulto y que, por tanto, no toma decisión alguna. Denotaremos por (S, α, k_1) al juego de generaciones sucesivas descrito, donde S es la función de stock verificando S1–S3, $\alpha \in [0, 1]$ el factor de enlace y k_1 el capital inicial.

La figura 4.1 muestra un diagrama con los diferentes flujos de capital y consumos.

Supondremos además que no hay posibilidad de endeudarse y, por tanto, el capital se mantiene no negativo. Esto lleva a que

$$c_t \in \left[0, \frac{1}{1 + \alpha}\right].$$

**Figura 4.1**

Flujos en el juego. El jugador G_t vive en los periodos t y $t+1$, hereda un capital k_t en su primer periodo y consume P_t a lo largo de su vida.

La relación entre la proporción de consumo c_t y el capital dejado a la siguiente generación viene dada por

$$c_t = \frac{1}{1 + \alpha} \left(1 - \frac{k_{t+1}}{S(k_t)} \right). \quad (4.2)$$

El pago a G_t puede expresarse utilizando los tres capitales involucrados k_t , k_{t+1} y k_{t+2} de la forma siguiente:

$$P_t = \frac{S(k_t) - k_{t+1}}{1 + \alpha} + \alpha \frac{S(k_{t+1}) - k_{t+2}}{1 + \alpha}. \quad (4.3)$$

A continuación vamos a estudiar distintas estrategias que conducen a resultados estacionarios y que pueden ser expresadas de forma sencilla. Determinaremos cuándo dichas estrategias constituyen equilibrios.

4.3 Estrategias estacionarias

Podemos considerar una estrategia σ para un jugador G_t como una función sobre el conjunto de posibles decisiones de G_t , cuyo argumento es la historia completa de la partida hasta el periodo actual t . Esta historia puede ser expresada por el capital inicial k_1 junto con la trayectoria de consumos (c_1, \dots, c_{t-1}) . Sea C el intervalo $[0, (1 + \alpha)^{-1}]$, entonces σ es una aplicación $\sigma : \mathbb{R}_+ \times C^{t-1} \rightarrow C$. Si preferimos trabajar con los capitales en vez de con los consumos, la historia del juego hasta el periodo t viene dada por la sucesión de capitales (k_1, \dots, k_t) . Si K^t es el conjunto de trayectorias factibles de capitales, esto es,

$$K^t := \{(k_1, k_2, \dots, k_t) : 0 \leq k_i \leq S(k_{i-1}) \text{ para } i = 2, \dots, t\},$$

entonces las estrategias de G_t pueden ser vistas como $\sigma : K^t \rightarrow \mathbb{R}_+$ donde $\sigma(k_1, \dots, k_t) = k_{t+1} \in [0, S(k_t)]$.

Sin embargo, no todas las estrategias hacen uso explícito de la historia completa de la partida hasta el instante en que intervienen. Llamaremos estrategias *sin memoria* a aquellas que no utilizan ninguna información distinta al estado del sistema en el instante presente.

Un perfil de estrategias $(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$ asigna una estrategia a cada uno de los jugadores. El perfil de estrategias (σ, σ, \dots) en el cual todos los jugadores usan σ , supuesto que σ está bien definida para todo jugador lo denotaremos σ_N . Un perfil constituye un equilibrio de Nash (EN) cuando no existen desviaciones unilaterales beneficiosas. Diremos que σ está en equilibrio consigo misma (o simplemente que σ es un EN) cuando σ_N sea EN.

Diremos que un perfil de estrategias es un equilibrio perfecto en los subjuegos (EPS) si dado un periodo cualquiera y para toda posible historia del juego hasta ese momento, el jugador que le toca mover no tiene desviaciones beneficiosas, siempre que a partir de ese instante los siguientes movimientos se realicen conforme indica el perfil.

Estudiemos el comportamiento del sistema considerando diversas estrategias cuyos resultados son estacionarios respecto a algunas variables del sistema. Analizaremos los siguientes casos:

1. capitales constantes: $k_1 = k_2 = \dots = k_t \dots$,
2. movimientos iguales: $c_1 = c_2 = \dots = c_t \dots$, y
3. pagos constantes: $P_1 = P_2 = \dots = P_t \dots$

Mostraremos cómo es el desarrollo del sistema cuando se utiliza cada una de las condiciones anteriores. Nuestro objetivo es encontrar en cada caso condiciones para la existencia de equilibrios de Nash y equilibrios perfectos en los subjuegos.

4.3.1 Estrategias que producen capital constante

Las sucesiones de movimientos $\{c_t\}_{t=1}^{\infty}$ que obtienen un stock de capital constante k_0 a través del tiempo son aquellas en las que el capital recibido es el mismo que el dejado, esto es

$$k_0 = (1 - c_t - \alpha c_t)S(k_0)$$

para $t \in \mathbb{N}$. Por tanto, de (4.2) tenemos

$$c_t = \frac{1}{1 + \alpha} \left(1 - \frac{k_0}{S(k_0)} \right)$$

y el pago a los jugadores resulta

$$P_t = S(k_0) - k_0, \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

De lo anterior se puede afirmar que la estabilidad en el capital implica estabilidad en los consumos y en los pagos.

A continuación proponemos algunas estrategias simples que consiguen esta estabilidad en el stock de capital si todos los jugadores las siguen.

Denotemos por $A1$ el perfil de estrategias en el que cada jugador deja un capital fijo al siguiente. Si con el capital que ha heredado un jugador no es capaz de dejar el capital mencionado entonces deja lo máximo posible, no consumiendo él nada en su primer periodo. De esta forma $A1(k^*)$ puede definirse para cada jugador como ‘Dejar un capital fijo k^* , o tanto como pueda si lo primero no es posible’, es decir, $k_{t+1} = \min\{k^*, S(k_t)\}$, para todo $t \in \mathbb{N}$.

Proposición 4.1

Sea el juego (S, α, k_1) y sea $\hat{k} = \arg \max \{\alpha S(k) - k : k \geq 0\}$. El perfil de estrategias $A1(k^*)$ es un EN sólo si \hat{k} es finito, $k^* = \hat{k}$, $(1 + \alpha)\hat{k} \leq \alpha S(\hat{k})$ y se verifica alguna de las siguientes condiciones:

- (a) $\hat{k} = 0$;
- (b) $\hat{k} \leq S(k_1)$; o bien
- (c) $S(k_1) \leq \hat{k} < S[S(k_1)]$ y $\alpha k^* \leq \alpha S[S(k_1)] - S(k_1)$.

Además, $A1(\hat{k})$ es EPS siempre que se cumpla (a), o en el caso (b) cuando además $\hat{k} < S(0)$.

Demostración. Estudiemos los pagos al primer jugador G_1 cuando el siguiente sigue la estrategia propuesta por $A1(k^*)$. Las desviaciones unilaterales de G_1 conducen a una sucesión de capitales $\{k_1, k, S(k), \dots\}$ si $S(k) < k^*$, o $\{k_1, k, k^*, \dots\}$ si $S(k) \geq k^*$, con pagos $[S(k_1) - k]/(1 + \alpha)$ y $\{S(k_1) - k + \alpha[S(k) - k^*]\}/(1 + \alpha)$, respectivamente.

Sea k_s^* el mínimo $k \geq 0$ tal que $S(k) \geq k^*$. Si $k_s^* < S(k_1)$, los posibles capitales dejados por G_1 pueden ser divididos en dos intervalos: $[0, k_s^*]$ y $[k_s^*, S(k_1)]$. (Si $k_s^* \geq S(k_1)$ siempre estaremos en el primero de ellos.) Sobre el primer intervalo el

pago es lineal con respecto a k , y el máximo se alcanza en $k = 0$. Sobre el segundo el pago es proporcional a $\alpha S(k) - k$ y su máximo se alcanza en \hat{k} , o en $S(k_1)$ si $\hat{k} > S(k_1)$. Podemos considerar diferentes casos en los cuales no hay desviaciones beneficiosas (ver figura 4.2):

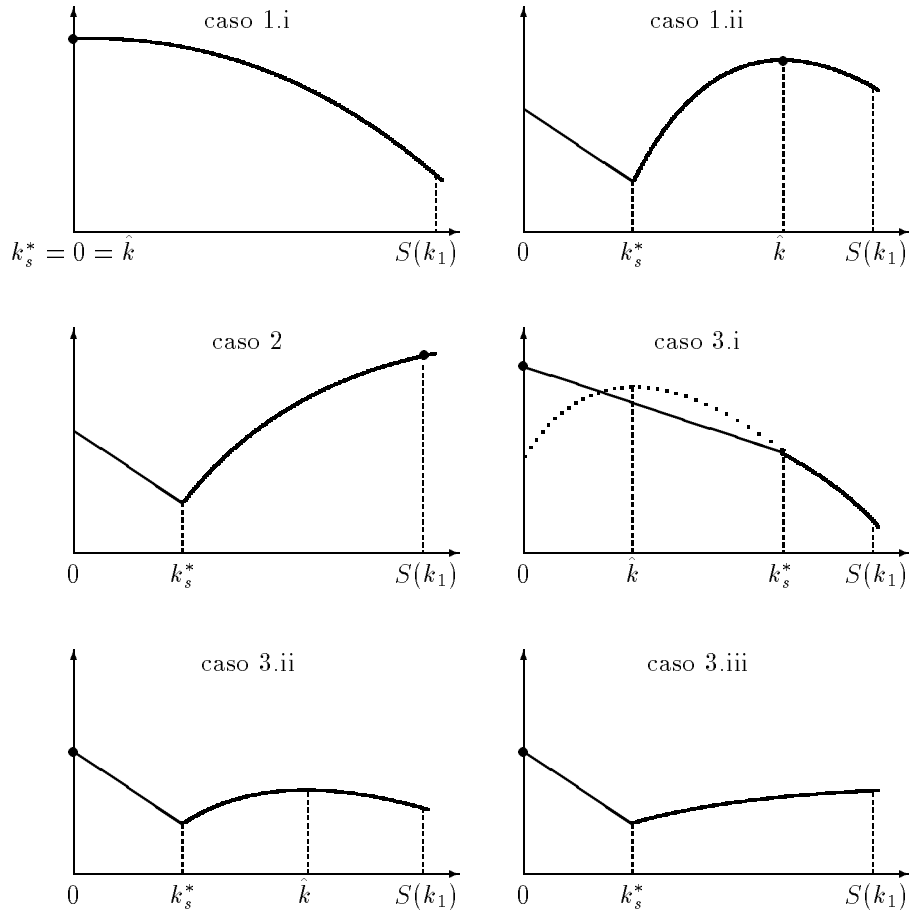


Figura 4.2

Distintos casos en la demostración de la proposición 4.1. Las gráficas representan pagos frente a capitales dejados. La parte lineal es $[S(k_1) - k]/(1 + \alpha)$ y la curva $[S(k_1) - k + \alpha(S(k) - k^*)]/(1 + \alpha)$. Los puntos gruesos señalan pagos máximos.

1. El máximo de los pagos en $[0, S(k_1)]$ se alcanza en \hat{k} . Tenemos dos posibilidades:
 - i. $\hat{k} = 0$, o bien
 - ii. $k_s^* < \hat{k} \leq S(k_1)$ y $\alpha k^* \leq \alpha S(\hat{k}) - \hat{k}$ (esto es, \hat{k} se encuentra en el intervalo factible y el pago que obtiene es mayor o igual que el que consigue el cero).

En ambos casos G_1 prefiere seguir $A1(k^*)$ sólo si $k^* = \hat{k}$. Por tanto, tendremos

$$\hat{k} = k^* = 0, \quad (4.4)$$

en el caso i; y para el caso ii,

$$k_s^* < \hat{k} \leq S(k_1) \quad \text{y} \quad \alpha\hat{k} \leq \alpha S(\hat{k}) - \hat{k}.$$

Las dos últimas desigualdades implican que

$$\hat{k} \leq S(k_1) \quad (4.5)$$

$$(1 + \alpha)\hat{k} \leq \alpha S(\hat{k}). \quad (4.6)$$

La desigualdad $k_s^* < \hat{k} = k^*$ es inmediata si $k^* > 0$.

2. El máximo es alcanzado en $S(k_1)$. Ahora

$$S(k_1) \leq \hat{k}, \quad (4.7)$$

y puesto que el pago en $k_2 = S(k_1)$ debe ser mayor que en el cero se tiene

$$k_s^* < S(k_1) \quad (4.8)$$

y

$$\alpha k^* \leq \alpha S[S(k_1)] - S(k_1). \quad (4.9)$$

El jugador G_1 quiere seguir la acción indicada por $A1(k^*)$ sólo si

$$S(k_1) \leq k^* < S[S(k_1)] \quad (4.10)$$

porque si $k^* \geq S[S(k_1)]$ su pago sería cero y cualquier desviación resultaría beneficiosa; si $k^* < S(k_1)$ entonces no le podría interesar a G_1 obedecer a $A1(k^*)$.

3. En el tercer caso el máximo pago se obtiene para $k = 0$. Podemos considerar tres posibilidades diferentes:

- i. $0 \leq \hat{k} \leq k_s^*$. De la definición de k_s^* , al hacer $k^* = 0$ obtendríamos $k_s^* = 0 = \hat{k}$ y estamos de nuevo en el caso 1.i.
- ii. $k_s^* < \hat{k} \leq S(k_1)$. Ahora el pago en \hat{k} debe ser estrictamente menor que en 0 porque la igualdad fue considerada en el caso 1. De esta manera se verifica que $\alpha[S(\hat{k}) - k^*] < \hat{k}$. Tenemos que G_1 prefiere seguir $A1(k^*)$ únicamente si $k^* = 0$, pero entonces la anterior condición se convierte en $\alpha S(\hat{k}) < \hat{k}$. De la definición de \hat{k} esto implica que $\alpha S(k) - k < 0$ para todo $k \geq 0$, pero esto es falso en $k = 0$. Por tanto en esta situación nunca estaremos ante un EN.

- iii. $S(k_1) < \hat{k}$. El pago en $S(k_1)$ debe ser menor que en 0. Esto es equivalente a que $\alpha S[S(k_1)] - S(k_1) < \alpha k^*$. De nuevo G_1 prefiere seguir a $A1(k^*)$ si $k^* = 0$. Sin embargo, tenemos que $\alpha S(k) - k$ es una función cóncava, positiva en 0 y con un máximo en \hat{k} . De esta manera no es posible que $\alpha S[S(k_1)] - S(k_1)$ tome un valor negativo en algún $S(k_1) \in (0, \hat{k})$.

Por tanto, el caso 3 nunca puede conducir a equilibrio si $\hat{k} \neq 0$, posibilidad que ya está contemplada en el caso 1.i.

¿Qué ocurre con el segundo jugador y los siguientes? En el caso 1, si G_1 obedece a $A1(\hat{k})$, deja al siguiente jugador un capital $k_2 = \hat{k}$. Dado que $\hat{k} \leq S(\hat{k})$ el jugador G_2 está en el caso 1 también, y se debería cumplir la condición (4.4) o bien la (4.5) y la (4.6) en $k_1 = \hat{k}$ para que pudiera constituir verdaderamente un equilibrio. La condición (4.5) queda ahora $\hat{k} \leq S(\hat{k})$; de (4.6) podemos asegurar que es cierta. Tenemos entonces que la mejor elección de G_2 es $k_3 = \hat{k}$, como sugiere la estrategia. Lo mismo podremos decir para cada uno de los restantes jugadores. Por tanto, $A1(\hat{k})$ es un EN. Como para $\hat{k} = 0$ la condición (4.6) también resulta cierta, quedan probados los apartados (a) y (b).

Cuando G_1 se encuentra en el caso 2 y obedece a $A1(k^*)$ el capital que hereda G_2 es $k_2 = S(k_1)$. G_2 se encuentra en el caso 1 y puesto que $\hat{k} \neq 0$ resulta que $A1(k^*)$ es EN sólo si se verifican simultáneamente

$$k^* = \hat{k}, \quad (4.11)$$

$$\hat{k} \leq S[S(k_1)], \text{ y} \quad (4.12)$$

$$(1 + \alpha)\hat{k} \leq \alpha S(\hat{k}). \quad (4.13)$$

Tenemos que (4.10) y (4.11) implican (4.8) y (4.12). Por otra parte (4.7), (4.9) y (4.11) implican (4.10). Basta entonces exigir (4.7), (4.9), (4.11) y (4.13) para asegurar que $A1(\hat{k})$ es EN. Para G_3 repetiríamos el razonamiento del párrafo anterior. Estas condiciones son las dadas en la afirmación (c) de la proposición.

Para que un equilibrio sea EPS es necesario que las condiciones anteriores se verifiquen para cualquier capital inicial k_1 . Es claro que bajo las condiciones expresadas en (a) el equilibrio será también perfecto en los subjuegos. Las condiciones expresadas en (b) se verificarán para todo k_1 si $\hat{k} \leq S(0)$. Por último, la primera condición de (c) no puede ser cierta para todo k_1 porque de S1 podemos asegurar que $S(\hat{k}) \geq \hat{k}$. Queda por tanto demostrado el resultado propuesto. \square

A continuación consideraremos otro perfil de estrategias que consiguen estabilidad en el stock de capital. Llamaremos $A2$ al perfil que sugiere a cada jugador ‘Dejar al siguiente el mismo capital que se recibió del anterior’, esto es, $k_t = k_{t-1}$, para todo $t = 2, 3, \dots$

Proposición 4.2

Dado el juego de generaciones , (S, α, k_1) , el perfil estratégico A2 es EN si el capital inicial k_1 maximiza $\alpha S(k)/(1 + \alpha) - k$; es EPS si $S(k)$ es lineal con pendiente $(1 + \alpha)/\alpha$.

Demostración. Si G_1 recibe un capital k_1 y deja otro k , la sucesión de capitales resulta $\{k_1, k, k, \dots\}$, si todos los jugadores que vienen detrás juegan como A2 sugiere. Elegimos el valor de k que maximiza el pago a G_1 :

$$\frac{S(k_1) - k}{1 + \alpha} + \alpha \frac{S(k) - k}{1 + \alpha}.$$

Puesto que k_1 está dado, el pago se hace máximo en un valor \bar{k} expresado por

$$\bar{k} := \arg \max_{k \geq 0} \left\{ \frac{\alpha}{1 + \alpha} S(k) - k \right\}.$$

De esta forma A2 puede ser EN sólo si $k_1 = \bar{k}$. Las siguientes generaciones reciben \bar{k} y su mejor respuesta es dejar \bar{k} a su sucesor si éste sigue A2. Podemos afirmar, por tanto, que A2 es equilibrio si $k_1 = \bar{k}$.

Para que el anterior razonamiento sea cierto para todo capital inicial, y de esta forma A2 sea EPS, todo capital ha de maximizar $\alpha S(k)/(1 + \alpha) - k$. Esto implica que $S(k)$ sea función lineal en k con pendiente $(1 + \alpha)/\alpha$. \square

Ejemplo 4.1 Sea el juego con función de stock $S(k) = k + 5k/(1 + k) + 3$ y constante de enlace $\alpha = 0.2$. El \hat{k} encontrado es 0.118. Como $(1 + \alpha)\hat{k} \leq \alpha S(\hat{k})$ nos encontramos en las hipótesis de la proposición 4.1. Para todo $k \geq 0$, $S(k) \geq 0.118$. El apartado (b) de la proposición 4.1 asegura que A1(0.118) es EN para todo $k_1 \geq 0$, y por tanto es un EPS. \square

Ejemplo 4.2 Supongamos que ahora $\alpha = 0.2$ y $S(k) = k + 8k/(1 + k)$. Cuando maximizamos las funciones $\alpha S(k) - k$ y $\alpha S(k)/(1 + \alpha) - k$ encontramos los óptimos para $k = 0.414$ y 0.265, respectivamente. Como antes, $(1 + \alpha)\hat{k} \leq \alpha S(\hat{k})$.

Para capitales k en el intervalo $(0.005, 0.048)$ la relación $S(k) < \hat{k} < S[S(k)]$ resulta cierta. Además, para todo capital $k > 0.015$, $S(k)$ es menor que $\alpha(S[S(k)] - \hat{k})$. Así, la proposición 4.1 en su punto (c) nos permite afirmar que A1(0.414) es EN si k_1 se encuentra en $(0.015, 0.048)$. Sin embargo, ahora el equilibrio no es perfecto en los subjuegos porque el cero queda fuera del intervalo.

Por otra parte, de la proposición 4.2, A2 es EN si $k_1 = 0.265$ pero no es EPS. \square

4.3.2 Estrategias con movimientos iguales

Analizemos lo que ocurre si todos los jugadores utilizan el mismo valor en sus variables de control, esto es, $c_t = c_0$ ($t = 1, 2, \dots$). En este caso la sucesión de capitales

sería

$$\begin{aligned}
& k_1, \\
& k_2 = [1 - (1 + \alpha)c_0]S(k_1), \\
& k_3 = [1 - (1 + \alpha)c_0]S(k_2), \\
& \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
& k_t = [1 - (1 + \alpha)c_0]S(k_{t-1}), \\
& \vdots \quad \quad \quad \vdots
\end{aligned}$$

Denotemos por d_0 a la cantidad $1 - (1 + \alpha)c_0$, que se encuentra en el intervalo $[0, 1]$ cuando c_0 se mueve en $[0, (1 + \alpha)^{-1}]$. Definiremos una función auxiliar $q_d(k) = d \cdot S(k)$. Para cualquier t tendremos que

$$k_t = d_0 S(k_{t-1}) = q_{d_0}(k_{t-1}) = q_{d_0}^{(t-1)}(k_1),$$

donde $q_d^{(n)}$ es la composición de q_d consigo misma n veces. De las hipótesis S1-S3 podemos asegurar que q_d tendrá a lo sumo un punto fijo distinto de cero. Si ese punto fijo no existiera la sucesión de capitales no convergería. Si existe la sucesión, esta converge monótonamente al punto fijo. (Ver, por ejemplo, Holmgren (1996) teorema 6.5).

Denotaremos con $B1(c^*)$ a nuestro primer perfil de estrategias que de seguirse por todos los jugadores consigue movimientos iguales. Para todo jugador consiste en ‘Consumir una proporción constante c^* ’, es decir, $c_t = c^*$ para todo $t \in \mathbb{N}$, siendo $c^* \in [0, (1 + \alpha)^{-1}]$.

Proposición 4.3

Sea (S, α, k_1) un juego de generaciones sucesivas.

- (a) Si $S(k_1) = 0$, $B1[(1 + \alpha)^{-1}]$ es EN. Si $\alpha S'(0) \leq 1$ entonces $B1[(1 + \alpha)^{-1}]$ es EPS.
- (b) Si $S(k_1) > 0$, la función S es no lineal y $c^* = [1 - k_1/S(k_1)]/(1 + \alpha)$. Entonces $B1(c^*)$ es EN si el capital inicial k_1 verifica

$$\alpha[S(k_1) - k_1]S'(k_1) = S(k_1).$$

- (c) Si la función S es lineal y $\alpha S' > 1$, entonces $B1([\alpha(1 + \alpha)S']^{-1})$ es EPS.

Demostración. Si el jugador G_1 consume una proporción c , pero su sucesor actúa como le sugiere $B1$, el pago a G_1 es $c \cdot S(k_1) + \alpha c^* \cdot S[d \cdot S(k_1)]$, donde $d = 1 - (1 + \alpha)c$. Para que $B1(c^*)$ sea un equilibrio es necesario que

$$c^* = \arg \max_{c \in C} \{c \cdot S(k_1) + \alpha c^* \cdot S[d \cdot S(k_1)]\}, \quad (4.14)$$

donde C es el intervalo $[0, (1 + \alpha)^{-1}]$. Además, dado $d^* = 1 - (1 + \alpha)c^*$, la igualdad (4.14) debe ser cierta no sólo para k_1 sino también para todo capital posterior $k_2 = q_{d^*}(k_1)$, $k_3 = q_{d^*}^{(2)}(k_1)$, etc.

Puesto que la expresión maximizada en (4.14) es diferenciable, el máximo ha de ser alcanzado en un extremo de C o en un punto estacionario.

Supongamos primero que el óptimo de (4.14) se alcanza en el extremo superior del intervalo. (Obsérvese que el extremo inferior proporciona un pago nulo que será siempre subóptimo). Entonces $c^* = (1 + \alpha)^{-1}$ y por consiguiente $d = 0$. La secuencia de capitales resulta ser $\{k_1, 0, 0, \dots\}$ y el pago a G_1

$$P_1 = \frac{S(k_1) + \alpha S(0)}{1 + \alpha}.$$

De la concavidad de la expresión entre llaves en (4.14) como función de c y puesto que el óptimo se alcanza en el extremo superior de C , se puede afirmar que la pendiente en $c = (1 + \alpha)^{-1}$ es no negativa. Así

$$S(k_1) - \alpha(1 + \alpha)c^* \cdot S(k_1) \cdot S'[d \cdot S(k_1)]|_{d=0} \geq 0,$$

y esto es equivalente a que se verifique alguna de las siguientes relaciones:

$$\alpha S'(0) \leq 1, \quad (4.15)$$

o bien

$$S(k_1) = 0. \quad (4.16)$$

La condición (4.16) implica una situación degenerada de la economía que no puede salir de un equilibrio colapsado: $k_1 = 0$ y $S(0) = 0$. Cualesquiera que sean las acciones de los jugadores los consumos son nulos.

Sin embargo, si se da (4.15), como esto es independiente del capital inicial k_1 , la situación es la misma para todos los jugadores con cualquier capital. Esto nos asegura que el perfil estratégico $B1[(1 + \alpha)^{-1}]$ es EPS con unos capitales resultantes $\{k_1, 0, 0, \dots\}$. Queda entonces probada la afirmación (a).

Supongamos ahora, por el contrario, que el óptimo de (4.14) se alcanza en un punto estacionario interior c^* del intervalo factible C . La derivada respecto de c debe ser cero en ese punto:

$$S(k_1) - \alpha(1 + \alpha)c^* \cdot S(k_1) \cdot S'[d \cdot S(k_1)]|_{d=d^*} = 0, \quad (4.17)$$

lo cual nos proporciona un c^* verificando la igualdad

$$S'[(1 - (1 + \alpha)c^*) \cdot S(k_1)] = \frac{1}{\alpha(1 + \alpha)c^*}. \quad (4.18)$$

Además hemos de suponer que el óptimo se alcanza en el mismo punto para los diferentes capitales que vayan apareciendo más tarde. El miembro de la derecha de (4.18) es constante y por tanto, a menos que S sea lineal, de S3 tenemos que $S'(k)$ es estrictamente decreciente y no puede tomar el mismo valor en diferentes puntos k_2, k_3, \dots . Esto nos lleva a afirmar que, salvo en el caso lineal, todos los capitales que se van obteniendo han de ser idénticos:

$$dS(k_t) = k_t \implies c = \frac{1}{1 + \alpha} \left(1 - \frac{k_t}{S(k_t)} \right), \quad \forall t \in \mathbb{N}. \quad (4.19)$$

Suponiendo que S es no lineal, $B1(c^*)$ es EN si

$$c^* = \frac{1}{1 + \alpha} \left(1 - \frac{k_1}{S(k_1)} \right)$$

y, de (4.18), k_1 debe verificar también

$$\alpha S'(k_1) = \frac{S(k_1)}{S(k_1) - k_1}.$$

Finalmente, para demostrar la afirmación dada en (c) suponemos que $S(k)$ es lineal y la función $c \cdot S(k_1) + \alpha c^* \cdot S[d \cdot S(k_1)]$ tiene derivada nula respecto a c en todo k_1 . Si $S(k_1) > 0$, lo anterior es cierto cuando $c^* = [\alpha(1 + \alpha)S']^{-1}$; si $S(k_1) = 0$, es verdad para todo c^* . Entonces (4.17) es cierto para todo k_1 , y así $B1(c^*)$ es EPS. De esta manera la proposición queda demostrada. \square

Consideremos otra estrategia sencilla que denotaremos por $B2$ en la cual cada jugador mueve imitando a su predecesor. Más explícitamente, $B2(\bar{c})$ para la primera generación consiste en ‘Consumir una proporción \bar{c} ’, y para las siguientes ‘Consumir la misma proporción que la precedente’; de esta manera $c_1 = \bar{c}$ mientras que $c_t = c_{t-1}$ ($t = 2, 3, \dots$). Tenemos el siguiente resultado:

Proposición 4.4

Sea el juego de generaciones sucesivas (S, α, k_1) .

- (a) Si $S(0) = 0$, $B2[(1 + \alpha)^{-1}]$ es un EN cuando $k_1 = 0$ y es EPS siempre que además $\alpha S'(0) \leq 1$.
- (b) $B2[(1 + \alpha)^{-1}]$ es EN si $S(k_1) + \alpha S(0) \geq \alpha S'(0)$ y $\alpha S'(0) \leq 1 + \alpha$; es EPS si además $\alpha S'(0) = 1 + \alpha$.
- (c) Si $S(k) = bk$ y $\alpha b > 1$, $B2(\bar{c})$ es EPS, siendo $\bar{c} = [1 + (\alpha b)^{-1}]/[2(1 + \alpha)]$.
- (d) $B2(\bar{c})$ constituye un EN con $\bar{c} = [1 - k_1/S(k_1)](1 + \alpha)^{-1}$ si se verifica que $\alpha[S(k_1) - k_1]S'(k_1) = (1 + \alpha)S(k_1)$.

Demostración. La primera generación elige una proporción c y suponemos que la segunda sigue sus pasos. La secuencia de capitales resulta $\{k_1, k_2 = dS(k_1), k_3 = dS[dS(k_1)], \dots\}$ donde $d = 1 - (1 + \alpha)c$. Si $B2(\bar{c})$ es EN entonces \bar{c} debe maximizar el pago de G_1 , esto es,

$$\bar{c} = \arg \max_{c \in C} \{cS(k_1) + \alpha cS[dS(k_1)]\}. \quad (4.20)$$

Obsérvese que, en general, el máximo dependerá de k_1 .

Al igual que en la demostración del resultado anterior, podemos considerar dos casos: el máximo se alcanza en un punto extremo de C (casos a y b); o en un punto interior (casos c y d).

Bajo la primera hipótesis el punto extremo será $c = (1 + \alpha)^{-1}$ porque en el extremo inferior $\bar{c} = 0$ el jugador G_1 obtiene un pago nulo. De S2 y S3 se puede ver con facilidad que la función de pagos $cS(k_1) + \alpha cS[dS(k_1)]$ es cóncava con respecto a c . El hecho de que el máximo sobre C se alcance en el extremo superior implica que la derivada en $\bar{c} = (1 + \alpha)^{-1}$ es no negativa:

$$S(k_1) + \alpha S(0) - \alpha S(k_1)S'(0) \geq 0. \quad (4.21)$$

Por otra parte, para el jugador G_2 ha de verificarse una relación similar

$$S(k_2) + \alpha S(0) - \alpha S(k_2)S'(0) \geq 0. \quad (4.22)$$

Puesto que $k_2 = 0$ cuando G_1 sigue $B2[(1 + \alpha)^{-1}]$, $\bar{c} = (1 + \alpha)^{-1}$ será la mejor elección para G_2 también si (4.22) es cierta para $k_2 = 0$, y eso implica

$$S(0) = 0, \quad (4.23)$$

o bien

$$\alpha S'(0) \leq 1 + \alpha. \quad (4.24)$$

Tendremos por tanto dos casos:

(a) Si se da (4.23), $B2[(1 + \alpha)^{-1}]$ es EN cuando $k_1 = 0$. En caso contrario, si $k_1 > 0$, de (4.21) tendremos que $\bar{c} = (1 + \alpha)^{-1}$ es la mejor elección para G_1 cuando $\alpha S'(0) \leq 1$. Puesto que esto es independiente del valor de k_1 , la estrategia es EPS en este caso.

(b) Si son ciertas las desigualdades (4.21) y (4.24), $B2[(1 + \alpha)^{-1}]$ es EN. Será EPS si (4.21) se verifica para todo $k_1 \geq 0$. Esto implica que

$$S(k) \geq \frac{\alpha S(0)}{\alpha S'(0) - 1}, \quad \forall k \geq 0.$$

Puesto que S es creciente (propiedad S2) se puede afirmar que la anterior desigualdad es cierta si y sólo si se cumple para $k = 0$:

$$S(0) \geq \frac{\alpha S(0)}{\alpha S'(0) - 1} \implies \alpha S'(0) \geq 1 + \alpha.$$

Bajo este supuesto $B2[(1 + \alpha)^{-1}]$ es EPS.

Estudiemos ahora el segundo supuesto en el que el máximo de (4.20) se alcanza en un punto interior del intervalo C , que llamaremos \bar{c} . Como la expresión maximizada es diferenciable, su derivada en \bar{c} ha de ser cero:

$$S(k_1) + \alpha S[\bar{d}S(k_1)] - \alpha(1 + \alpha)S(k_1)\bar{c}S'[\bar{d}S(k_1)] = 0; \quad (4.25)$$

y de la concavidad la desigualdad (4.21) cambia su sentido.

El siguiente jugador se encuentra en una situación similar, con $k_2 = \bar{d}S(k_1)$. $B2(\bar{c})$ es EN sólo si $cS(k_2) + \alpha cS[dS(k_2)]$ tiene un máximo en \bar{c} . En este punto nos encontramos con dos posibilidades: (4.25) es cierta para todo $k_1 > 0$, o bien $k_2 = k_1$, es decir, $k_1 = \bar{d}S(k_1)$. En el primer caso supondremos que S es lineal.

(c) S lineal: $S(k) = a + bk$, con $b \geq 1$. La derivada del pago con respecto a c resulta

$$a + bk + \alpha[a + bd(a + bk)] - \alpha(1 + \alpha)(a + bk)bc. \quad (4.26)$$

Queremos encontrar un valor de c de manera que (4.26) sea igual a cero para todo k . Entonces, las dos siguientes relaciones han de darse simultáneamente:

$$b + \alpha b^2 d - \alpha(1 + \alpha)b^2 c = 0 \quad (4.27)$$

$$a + \alpha a + \alpha abd - \alpha(1 + \alpha)abc = 0. \quad (4.28)$$

Puesto que $b \neq 0$, (4.27) nos permite despejar

$$c = \frac{1}{2(1 + \alpha)} \left(1 + \frac{1}{\alpha b}\right), \quad (4.29)$$

pero si $a \neq 0$ tenemos de (4.28) que

$$c = \frac{1}{2(1 + \alpha)} \left(1 + \frac{1}{\alpha b} + \frac{1}{b}\right). \quad (4.30)$$

Como (4.29) y (4.30) no son compatibles, puede asegurarse que $a = 0$ y entonces $S(k) = bk$ y $c = [1 + (\alpha b)^{-1}]/[2(1 + \alpha)]$. La condición $\alpha b > 1$ garantiza que $c < (1 + \alpha)^{-1}$. Puesto que la anterior argumentación es independiente del capital inicial k_1 , el equilibrio encontrado es perfecto en los subjuegos.

(d) S no lineal. Si $k_2 \neq k_1$, entonces el máximo de los pagos se alcanza en un punto distinto de \bar{c} . Si forzamos a que los capitales k_1 y k_2 sean idénticos, la situación para G_2 es la misma que para G_1 , y el óptimo se alcanza en el mismo punto. A la vista de esto podemos imponer (4.25) y la condición de capitales constantes:

$$[1 - (1 + \alpha)\bar{c}]S(k_1) = k_1.$$

Expresando \bar{c} y \bar{d} como funciones de k_1 y sustituyendo en (4.25) tenemos la siguiente restricción sobre k_1 :

$$(1 + \alpha)S(k_1) - \alpha[S(k_1) - k_1]S'(k_1) = 0,$$

donde consideramos \bar{c} como $(1 + \alpha)^{-1}[1 - k_1/S(k_1)]$. Con esto queda probado el resultado. \square

Las dos últimas estrategias estudiadas, $B1$ y $B2$, producen en el caso no lineal una sucesión de capitales constantes a partir del segundo periodo. En algunos casos lineales la sucesión de capitales tiende a una constante, o bien a infinito si la función S tiene una pendiente suficientemente grande.

Ejemplo 4.3 Consideremos el juego con $\alpha = 0.2$ y $S(k) = k + 3k/(1 + k) + 3$. Puesto que $\alpha S'(0) = 0.8 = 1 - \alpha < 1$ la proposición 4.3(a) nos asegura que $B1(5/6)$ es EPS. \square

Ejemplo 4.4 Si ahora tomamos $S(k) = k + 5k/(1 + k) + 3$ con la misma constante de enlace del ejemplo anterior entonces $\alpha S'(0) = 1.2 = 1 + \alpha$, y por la proposición 4.4(b) tenemos que $B2(5/6)$ es EPS. \square

Ejemplo 4.5 Modificando de nuevo la función de stock, con $S(k) = k + 20k/(1 + k) + 3$ podemos resolver en k las ecuaciones $\alpha[S(k) - k]S'(k) = S(k)$ y $\alpha[S(k) - k]S'(k) = (1 - \alpha)S(k)$ que tienen como solución $k = 1.1284$ y $k = 0.9178$. Tomando los anteriores como capitales iniciales se puede calcular el parámetro $[1 - k_1/S(k_1)]/(1 + \alpha)$. Tenemos entonces que $B1(0.7695)$ y $B2(0.7766)$ son EN cuando los capitales iniciales son 1.1284 y 0.9178, respectivamente. \square

Ejemplo 4.6 Sea ahora $\alpha = 0.8$ y la función lineal $S(k) = 1.9k + 1$. Como $\alpha S' = 1.32 > 1$, el perfil de estrategias $B1(c)$ es EPS para $c = \alpha(1 + \alpha)S' = 0.365$. La sucesión de capitales converge al punto $k = 0.977$. En la figura 4.3a se muestran los capitales que se van obteniendo a partir de uno inicial $k_1 = 10$.

Si consideramos $S(k) = 1.9k$, de la proposición 4.4(c) se puede asegurar que $B2(0.46)$ es EPS. Ahora la sucesión de capitales tiende a cero como muestra la fig. 4.3b. \square

4.3.3 Estrategias con pagos constantes

Por último, consideraremos perfiles que de seguirse por todos los jugadores consiguen que los pagos recibidos resulten idénticos. Llamaremos $C1(p^*)$ al perfil de estrategias

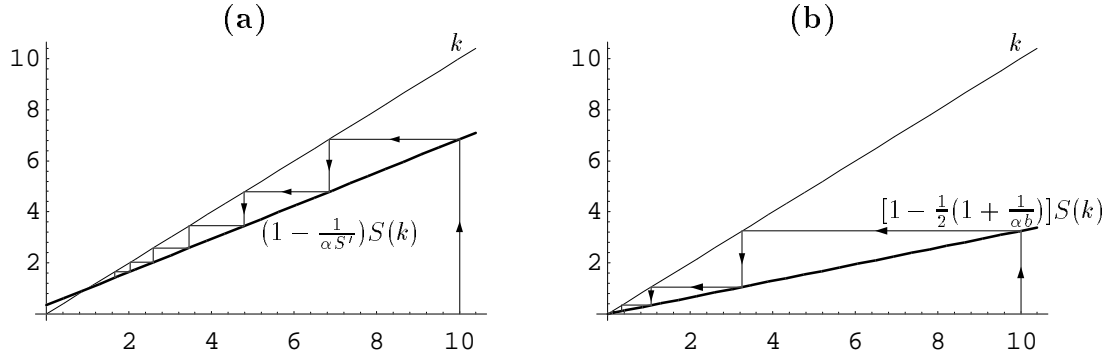


Figura 4.3

(a) Evolución del capital para el perfil de estrategias $B1(0.365)$ con $\alpha = 0.8$, $S(k) = 1.9k + 1$ y un capital inicial $k_1 = 10$. **(b)** Ídem para $B2(0.46)$ con $S(k) = 1.9k$.

consistente en ‘Conseguir un pago p^* en su primer periodo (cuando es adulto), o el mayor pago posible si p^* no es alcanzable’. Utilizando esta estrategia la proporción destinada por G_t al consumo en el periodo t será

$$c_t = \min \left\{ \frac{p^*}{S(k_t)}, \frac{1}{1 + \alpha} \right\}, \quad \text{para cada } t \in \mathbb{N}$$

El siguiente resultado nos da condiciones bajo las cuales $C1(p^*)$ es equilibrio.

Proposición 4.5

$C1(p^*)$ es EN para el juego (S, α, k_1) si y sólo si se verifica alguna de las siguientes condiciones (siendo $\hat{k} = \arg \max \{ \alpha S(k) - k : k \geq 0 \}$):

- (i) $k_1 = 0$ y $p^* = S(0)/(1 + \alpha)$,
- (ii) $\alpha S'(0) \leq 1$ y $p^* \geq S(k_1)/(1 + \alpha)$, o bien
- (iii) $k_1 = 0$, $\hat{k} > 0$, $S(0) = 0$ y p^* es positivo.

Demostración. Consideremos el primer jugador con su capital inicial k_1 . Supongamos que deja otro capital $k_2 = k$ y que G_2 sigue lo que le indica $C1(p^*)$ consumiendo una proporción

$$c_2 = \min \left\{ \frac{p^*}{S(k)}, \frac{1}{1 + \alpha} \right\}.$$

Veamos cuál es el valor óptimo de k para G_1 . De (4.1) y (4.2) el pago puede ser expresado como función del valor elegido k :

$$P_1(k) = \begin{cases} \frac{S(k_1)-k}{1+\alpha} + \frac{\alpha}{1+\alpha}S(k), & \text{si } S(k) < (1+\alpha)p^* \\ \frac{S(k_1)-k}{1+\alpha} + \alpha p^*, & \text{si } S(k) \geq (1+\alpha)p^* \end{cases}.$$

Sea k^* aquel capital donde la función de pagos $P_1(k)$ cambia su expresión, esto es,

$$k^* = \begin{cases} S^{-1}[(1+\alpha)p^*], & \text{si } S(0) < (1+\alpha)p^* \\ 0, & \text{si } S(0) \geq (1+\alpha)p^* \end{cases}. \quad (4.31)$$

Primero supongamos que $k^* \leq S(k_1)$. Se puede ver que $P_1(k)$ es lineal en $[k^*, S(k_1)]$ y que el máximo lo alcanza en el extremo inferior. En el intervalo $[0, k^*]$ el pago es proporcional a $\alpha S(k) - k$ y por tanto el máximo en ese conjunto, y en todo $[0, S(k_1)]$ se alcanza en $\min\{\hat{k}, k^*\}$. Si $k^* > S(k_1)$, $P_1(k)$ es proporcional a $\alpha S(k) - k$ en el intervalo $[0, S(k_1)]$ con un máximo en $\min\{\hat{k}, S(k_1)\}$. Así que se puede asegurar que siempre el máximo de $P_1(k)$ sobre el intervalo $[0, S(k_1)]$ se alcanza en $\min\{\hat{k}, k^*, S(k_1)\}$ (ver fig. 4.4).

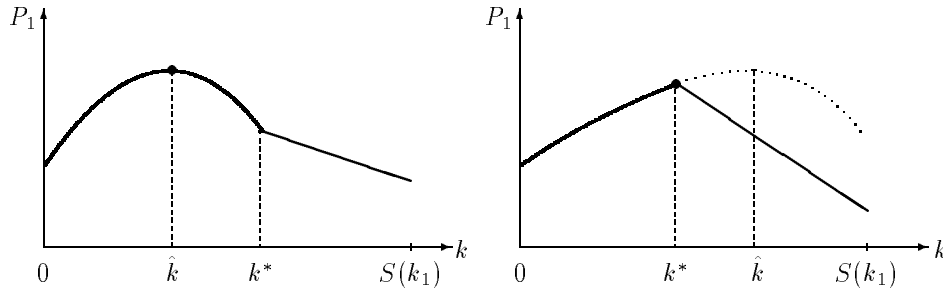


Figura 4.4

Algunas posibilidades para la función de pagos $P_1(k)$ en la demostración de la proposición 4.5.

El desarrollo anterior es cierto también para cualquier G_t . Por tanto, tres posibles casos pueden surgir:

$$\begin{cases} (a) & k^* \leq \hat{k} \text{ y } k^* \leq S(k_t) \quad (\implies k_{t+1} = k^*) \\ (b) & \hat{k} \leq S(k_t) \text{ y } \hat{k} < k^* \quad (\implies k_{t+1} = \hat{k}) \\ (c) & S(k_t) < \hat{k} \text{ y } S(k_t) < k^* \quad (\implies k_{t+1} = S(k_t)) \end{cases}.$$

Además, de la definición de k^* se pueden considerar dos alternativas:

$$\begin{cases} (d) & S(0) < (1+\alpha)p^* \quad (\implies k^* \text{ es un valor tal que } S(k^*) = (1+\alpha)p^*) \\ (e) & S(0) \geq (1+\alpha)p^* \quad (\implies k^* = 0) \end{cases}.$$

Por otra parte, si un jugador G_t sigue $C1(p^*)$, el capital dejado $k_{t+1} = [1 - (1 + \alpha)c_t]S(k_t)$ sería

$$k_{t+1} = \begin{cases} 0, & \text{si } S(k_t) < (1 + \alpha)p^* \\ S(k_t) - (1 + \alpha)p^*, & \text{si } S(k_t) \geq (1 + \alpha)p^* \end{cases} .$$

El perfil $C1$ es EN sólo si el capital k_{t+1} maximiza el pago $P_1(k)$. Otras dos posibilidades deben ser consideradas:

$$\begin{cases} (f) & S(k_t) < (1 + \alpha)p^* \quad (\implies k_{t+1} = 0) \\ (g) & S(k_t) \geq (1 + \alpha)p^* \quad (\implies k_{t+1} = S(k_t) - (1 + \alpha)p^*) \end{cases} .$$

Combinando una condición de cada grupo obtenemos distintos casos. La estrategia puede ser EN si para cada jugador el recomendado k_{t+1} consigue el pago óptimo para ese jugador. Las combinaciones *adf*, *ae**f*, *be**f* y *be**g* son inconsistentes.

La combinación *adg* para G_1 implica que $S(k_2) = (1 + \alpha)p^*$. Para el siguiente jugador G_2 las condiciones *a* y *d* no varían pero ahora estaría en *f* y como hemos dicho *adf* no es consistente.

Si G_1 está en *aeg*, podemos asegurar que $S(k_1) = (1 + \alpha)p^*$ y que $k_2 = 0$. El siguiente se encontrará en *aeg* también, y ahora $S(0) = (1 + \alpha)p^*$. De manera que si $k_1 = 0$ entonces $C1[S(0)/(1 + \alpha)]$ es EN. Con esto queda probado el punto (i).

Supongamos que el primer jugador está en *bdf*. Esto es equivalente a $\hat{k} = 0$, $0 < k^*$, $k_1 < k^*$ y $p^* = S(k^*)/(1 + \alpha)$. El siguiente jugador estará de nuevo en *bdf*. Por tanto $C1[S(k^*)/(1 + \alpha)]$ es EN para todo $k^* > 0$ tal que $k^* > k_1$.

Se puede demostrar que *bdg* para G_1 es equivalente a $\hat{k} < k^* \leq k_1$, $S(k^*) = S(k_1) - \hat{k}$ y $p^* = [S(k_1) - \hat{k}]/(1 + \alpha)$. Entonces el siguiente jugador está en *bdf*. Como vimos antes esto implica $\hat{k} = 0$, $k_2 < k^*$ y $p^* = S(k^*)/(1 + \alpha)$. Así $k_1 = k^*$. Por consiguiente tenemos que $C1(p^*)$ es EN si $p^* = S(k_1)/(1 + \alpha)$, $\hat{k} = 0$ y $k_1 > 0$. Puesto que la función $\alpha S(k) - k$ es cóncava, el máximo se alcanza para $k = 0$ si y sólo si la derivada en ese punto es no positiva. Esto es equivalente a $\alpha S'(0) \leq 1$. Este caso con el anterior prueba el punto (ii).

Por último, cuando consideramos *c*, entonces ni *e* ni *g* son posibles. Tenemos únicamente la combinación *cdf*. Puesto que *f* implica $k_2 = 0$ y *c* implica $k_2 = S(k_1)$, sólo puede ser equilibrio en el caso degenerado $k_1 = 0$, $S(0) = 0$. Además $\hat{k} > 0$ y $p^* = S(k^*)/(1 + \alpha)$ para cualquier k^* positivo. Esta última condición es equivalente a afirmar que p^* es positivo. Queda entonces probada la afirmación (iii) de la proposición. \square

Los casos (i) y (iii) de la proposición comienzan con un capital cero y el capital continúa siendo nulo a través del tiempo. El caso (ii) comienza con un capital inicial k_1 tal vez mayor que cero pero k_2 y los sucesivos son cero.

Ejemplo 4.7 Bajo los mismos supuestos del ejemplo 4.1, tenemos que $C1(15/6)$ es EN si $k_1 = 0$, como afirma la proposición 4.5 en su primer apartado. \square

Ejemplo 4.8 Con las hipótesis del ejemplo 4.3, en el cual $\alpha S'(0) < 1$, si $k_1 = 8/3$ entonces $C1(p^*)$ es EN para todo $p^* > 35/6$. \square

4.4 Existencia del equilibrio de Nash

En la sección anterior se han definido distintas estrategias para los juegos de generaciones sucesivas y se han buscado condiciones para que constituyan equilibrios de Nash y perfectos para los subjuegos. Cabría ahora preguntarse si todo juego de generaciones tiene un EN en estrategias puras, que son las que hemos utilizado hasta ahora. Aunque los juegos infinitos no tienen necesariamente equilibrio de Nash en estrategias puras, la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa y para demostrarlo simplemente definiremos una estrategia que es EN para todo juego.

La estrategia en cuestión es la siguiente. Para el primer jugador consiste en ‘Consumir lo máximo posible’; para los siguientes jugadores ‘Consumir lo máximo posible si la generación precedente también lo hizo y en caso contrario no consumir nada en absoluto’. Por tanto, tenemos que $c_1 = (1 + \alpha)^{-1}$; $c_i = (1 + \alpha)^{-1}$ si $c_{i-1} = (1 + \alpha)^{-1}$ y $c_i = 0$ en otro caso.

Teorema 4.1

Todo juego (S, α, k_1) tiene un EN en estrategias puras

Demostración. Lo único que hemos de hacer es comprobar que la estrategia definida anteriormente es realmente equilibrio. El primer jugador no tiene incentivos para desviarse, pues consumiría menos en el primer periodo de su vida y nada en el segundo. Para otro jugador cualquiera, si los anteriores no se han desviado, se encuentra con un capital nulo. Si sigue tanto él como su sucesor la estrategia, obtiene un pago total de $S(0)$. Si no la sigue, pero sí sus sucesores, entonces gana $cS(0)$, donde c es una constante menor o igual que $(1 + \alpha)^{-1} \leq 1$. No tiene, por tanto, incentivo alguno para desviarse y la estrategia resulta entonces ser equilibrio de Nash. \square

Como se puede apreciar, la estrategia anterior es estacionaria para el capital, los movimientos y los pagos, a partir del segundo jugador, pero no coincide con ninguna de las definidas en la sección anterior. Como no hemos utilizado las propiedades exigidas a la función de stock, el resultado se mantiene cierto para cualquier función S con tal que sea no negativa.

Por otra parte esta estrategia no es EPS, pues ningún jugador tiene incentivos para cumplir con la amenaza de no consumir nada si el anterior no le dejó un capital nulo: resulta una amenaza increíble. Esto es consecuencia de que la definición de la estrategia depende del jugador (ser el primero o no) y no sólo de la situación del sistema cuando le toca actuar. En la siguiente sección estudiaremos un tipo de estrategias que sí poseen esta característica.

4.5 Estrategias sin memoria perfectas en los subjuegos

El principal objetivo de la presente sección es describir la forma que adquieren cierta clase de equilibrios en los cuales todos los jugadores utilizan idénticas estrategias en las que no se hace uso de más información que la del estado del sistema, es decir, del capital heredado.

Como se indicó al comienzo de la sección 4.3, llamamos estrategias sin memoria a aquellas que dependen únicamente del estado del sistema en el momento de aplicarse y no de la historia anterior de la partida. Llamaremos *función de respuesta* R a una estrategia de este tipo, es decir, una función que a una herencia consistente en un capital k responde dejando otro capital $R(k)$ al siguiente jugador.

Definición 4.1

Una función $R : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ se dice que es una función de respuesta si $R(k) \in [0, S(k)]$ en su dominio.

Como antes $R_N := (R, R, \dots)$ es el perfil de estrategias en el cual todos los jugadores utilizan R como función de respuesta. La secuencia de capitales obtenidos es $(R(k_1), R^{(2)}(k_1), \dots, R^{(t)}(k_1), \dots)$ donde $R^{(n)}$ es la función iterada definida por $R^{(n)}(k) := R[R^{(n-1)}(k)]$, siendo $R^{(0)}(k) := k$. Como la información es perfecta, cada movimiento es el origen de un subjuego. Si R_N es EN para todo capital inicial, entonces R_N es EPS puesto que no importa qué estados hayan sido alcanzados con anterioridad sino únicamente cuál es el estado actual. Habitualmente diremos que R es EN o EPS cuando el perfil de estrategias R_N lo sea.

El siguiente resultado ofrece una caracterización de los R que son EPS.

Lema 4.1

Sea R una función de respuesta. Entonces R es un EPS si y sólo si para todo $k \geq 0$,

$$\phi(k') \leq \phi[R(k)] \quad \text{para cada } k' \in [0, S(k)],$$

donde $\phi(k) := \alpha S(k) - k - \alpha R(k)$.

Demostración. Sea k_t el capital en el periodo t . Los capitales desde el periodo t en adelante resultarán

$$k_t, R(k_t), R^{(2)}(k_t), \dots$$

si nadie se desvía, o bien

$$k_t, k_{t+1} \in [0, S(k_t)], R(k_{t+1}), \dots$$

si G_t se desvía pero G_{t+1} no lo hace. R es EPS si y sólo si el pago a G_t sin desviación es mayor o igual que el que obtiene al desviarse suponiendo que G_{t+1} no lo hace. De esta manera, utilizando (4.3) tenemos que

$$\frac{S(k_t) - k_{t+1}}{1 + \alpha} + \alpha \frac{S(k_{t+1}) - R(k_{t+1})}{1 + \alpha} \leq \frac{S(k_t) - R(k_t)}{1 + \alpha} + \alpha \frac{S(R(k_t)) - R^{(2)}(k_t)}{1 + \alpha}$$

lo cual es equivalente a

$$\alpha S(k_{t+1}) - k_{t+1} - \alpha R(k_{t+1}) \leq \alpha S[R(k_t)] - R(k_t) - \alpha R^{(2)}(k_t).$$

De la definición de función ϕ esto es equivalente a su vez a que

$$\phi(k_{t+1}) \leq \phi[R(k_t)],$$

para todo $k_{t+1} \in [0, S(k_t)]$. Puesto que el capital inicial k_t puede ser cualquiera mayor o igual que cero, la demostración está completa. \square

Proposición 4.6

Sea R una función respuesta tal que el perfil de estrategias R_N es EPS. Sea $k > 0$ de manera que $R(k) < S(k)$. Entonces, para todo k' del intervalo cerrado $[S^{-1}[R(k)], k]$ se verifica la igualdad

$$\phi[R(k')] = \phi[R(k)].$$

La figura 4.5 muestra gráficamente el contenido de la proposición.

Demostración. Sea $k > 0$ tal que $R(k) < S(k)$. Tomemos un $k' \leq k$ de manera que $R(k) \leq S(k') < S(k)$. Obviamente k' puede ser cualquier punto del intervalo $[S^{-1}[R(k)], k]$. Puesto que por hipótesis $R(k) < S(k)$ y R_N es EPS, del lema 4.1 se sigue que

$$\phi[R(k')] \leq \phi[R(k)]. \quad (4.32)$$

La forma de tomar k' garantiza que $R(k) \in [0, S(k')]$, y de nuevo del lema 4.1 podemos afirmar que

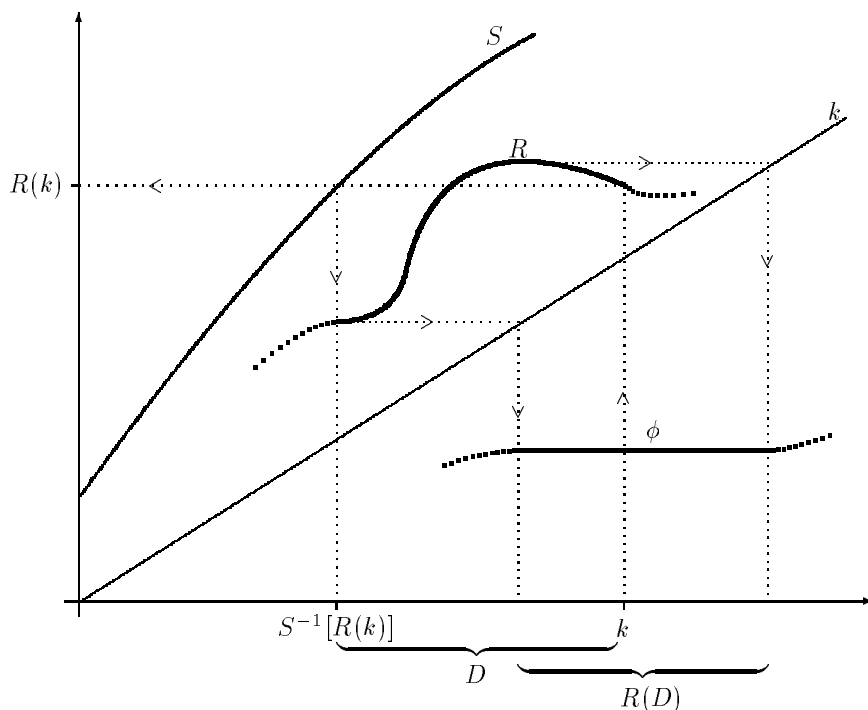
$$\phi[R(k)] \leq \phi[R(k')]. \quad (4.33)$$

De (4.32) y (4.33) podemos ver que la igualdad $\phi[R(k)] = \phi[R(k')]$ es cierta y por tanto también el resultado. \square

Del lema 4.1 y la proposición 4.6 se obtiene con facilidad el siguiente resultado.

Corolario 4.1

Sea R una función respuesta tal que $R(k) < S(k)$ para todo $k > 0$. Si R es EPS entonces $\phi[R(k)]$ toma el mismo valor para cualquier $k \geq 0$. Además, si f es el valor de $\phi[R(k)]$ en cualquier k , se tiene que $\phi(k) \leq f$ para cada $k \geq 0$.

**Figura 4.5**

Interpretación gráfica de la proposición 4.6. Comenzando por el punto k construimos el conjunto D cuyos puntos están por debajo de k pero sus imágenes mediante la función S son mayores o iguales que $R(k)$. Sobre todo el conjunto $R(D)$ la función ϕ toma un valor constante.

Demostración. Sea k un valor positivo cualquiera. Por hipótesis tenemos que $R(k) < S(k)$, y de la proposición 4.6 tenemos que $\phi[R(\cdot)]$ es constante en $[S^{-1}[R(k)], k]$. El mismo razonamiento puede hacerse sobre el punto $S^{-1}[R(k)]$, y así sucesivamente. De aquí que $\phi[R(\cdot)]$ es constante sobre $[0, k]$, para un k arbitrario.

La segunda parte es inmediata utilizando el lema 4.1. \square

Ahora, con la ayuda de los resultados precedentes daremos un procedimiento para construir una función respuesta R que verifique las hipótesis de la proposición 4.6. Llamaremos I al conjunto de los valores que toma la función R cuando k es no negativo, y f al valor de ϕ en todos los puntos de I , esto es:

$$I := \{R(k) : k \geq 0\}, \quad \{f\} := \{\phi(k) : k \in I\}.$$

Definiremos una función auxiliar $\rho(k) := S(k) - (k + f)/\alpha$ que coincida con la función R sobre el conjunto I . El procedimiento es el siguiente.

Procedimiento 1: función de respuesta general EPS

P1 Elegir un f de manera que $0 \leq f \leq \alpha S(\bar{k}) - \bar{k}$, donde
 $\bar{k} := \min\{S(0), \hat{k}\}$ y
 $\hat{k} := \arg \max_k \{\alpha S(k) - k\}$ (tal vez infinito).

P2 Elegir un conjunto I tal que

P2a el intervalo semiabierto $[\max\{0, \rho(k)\}, S(k))$ tenga intersección no vacía con el conjunto I para cada $k \in [0, \hat{k}]$, y

P2b $\rho(k) \in I$, para todo $k \in I$.

P3 Asignar valores a R de la siguiente manera:

$$\begin{cases} R(k) = \rho(k), & \text{si } k \in I \\ R(k) \in [\max\{0, \rho(k)\}, S(k)) \cap I, & \text{si } k \notin I \end{cases}$$

Podemos dar la siguiente caracterización de los EPS formados por idénticas estrategias sin memoria R , de manera que $R(k) < S(k)$. Demostraremos que todos estos EPS pueden generarse con el anterior procedimiento.

Teorema 4.2

Sean $P1$, $P2$ y $P3$ los pasos del anterior procedimiento.

1. Dado $f \in \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ y $R: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ verificando $P1$, $P2$ y $P3$, entonces el perfil de estrategias R_N es un EPS.
2. Sea R_N un EPS, donde R es una función respuesta tal que $R(k) < S(k)$ para todo $k > 0$. Además sea $f = \phi[R(k)]$ (para cualquier $k \geq 0$) e $I = \{R(k) : k \geq 0\}$. Entonces f , I y R verifican las condiciones expresadas en $P1$, $P2$ y $P3$.

Demostración. 1. Sean f , I y R tales que verifican las propiedades que se exigen en $P1$, $P2$ y $P3$. Comprobemos primero que R está bien definida. Puesto que $\rho(k)$ es decreciente para $k > \hat{k}$, $S(k)$ es creciente y $P2a$ es cierto para los $k \leq \hat{k}$, resulta entonces que la intersección que aparece en la definición de R en $P3$ para los k no incluidos en I es no vacía.

Veamos ahora que R_N es EPS aplicando el lema 4.1. Primero comprobamos que R es realmente una función respuesta de las que estamos buscando y que por tanto $R(k) < S(k)$. De $P3$ es obvio que $R(k) < S(k)$ para todo $k \notin I$. Puesto que de $P1$ podemos asegurar que $f > 0$, tendremos que $\rho(k) = S(k) - (k + f)/\alpha < S(k)$ para

todo $k > 0$. P3 asegura que $R(k) = \rho(k)$ para $k \in I$. De aquí se sigue que también $R(k) < S(k)$ para todo $k \in I$.

De P3 y de las definiciones de ϕ y ρ se tiene que la igualdad $\phi(k) = f$ es cierta para todo $k \in I$. Por otra parte, P3 asegura que $\phi(k) \leq \phi[R(k)] = f$, para todo $k \geq 0$. Por lo tanto, el lema 4.1 nos permite asegurar que R_N es un EPS.

2. Probemos la segunda parte del teorema. Sea R_N un EPS tal que $R(k) < S(k)$ para todo $k > 0$. Del corolario 4.1 se tiene que $\phi[R(k)]$ toma el mismo valor para todo $k \geq 0$. Sea f ese valor e I el conjunto $\{R(k) : k \geq 0\}$.

P1. Puesto que $R(k) \in [0, S(k))$ para todo $k > 0$, entonces $\phi(k) \in (-k, \alpha S(k) - k] \forall k > 0$. Del lema 4.1 tenemos que $\phi(k) \leq \phi[R(k)] = f$, para todo $k \geq 0$. La función ϕ es igual a f en algún $k \geq 0$ puesto que I es no vacío. De esta manera $f \leq \max\{\alpha S(k) - k : k \geq 0\} = \alpha S(\hat{k}) - \hat{k}$. Por otro lado, puesto que $\phi(0) = \alpha[S(0) - R(0)]$ y $R(0) \leq S(0)$ entonces $f \geq 0$. Junto a esto $0 \leq \phi(0) \leq \phi[R(0)] = f \leq \max\{\alpha S(k) - k : k \in [0, S(0)]\}$ y dado que la función $\alpha S(k) - k$ es cóncava, el máximo se alcanza en $k = S(0)$ si $S(0) < \hat{k}$ o en $k = \hat{k}$ en caso contrario. De manera que las condiciones que se exigen a f en P1 resultan ciertas.

P2. Sea $k \geq 0$, entonces $R(k) \in [0, S(k))$. Por el lema 4.1 tenemos que $\phi(k) \leq f$ y, por consiguiente, $R(k) \geq \rho(k)$, con lo que $R(k) \in [\max\{0, \rho(k)\}, S(k))$. De la definición de I también $R(k) \in I$ y P2a se cumple.

Sea $k \in I$, entonces $\phi(k) = f$. Tenemos $R(k) = \rho(k)$, así que P2b también es cierta.

P3. De las definiciones de I y de f tenemos que la igualdad $\phi(k) = f$ se cumple para todo $k \in I$. Por tanto $R(k) = \rho(k)$, para todo $k \in I$. Para los $k \notin I$, el lema 4.1 implica que $\phi(k) \leq f$, y entonces $R(k) \geq \rho(k)$. Por supuesto, $R(k) \in [0, S(k))$ y $R(k) \in I$, así que P3 es verdad y el teorema queda demostrado. \square

Ejemplo 4.9 La estrategia A2 estudiada en la sección 4.3.1 en la cual cada jugador ‘deja el mismo capital que recibió’ puede ser expresada mediante la función de respuesta $R(k) = k$. En este caso $I = \mathbb{R}_+$. Del corolario 4.1, $\phi[R(k)] = \phi(k)$ toma un mismo valor para todo $k \geq 0$, y esto implica que $S(k)$ es lineal con $(1 + \alpha)/\alpha$ como coeficiente de k . De manera parecida, la estrategia B1 de la sección 4.3.2 que hace $c_t = c^*$ para todo t , está relacionada con la función de respuesta $R(k) = [1 - c^*(1 + \alpha)]S(k) = d^*S(k)$. Si $c^* = (1 + \alpha)^{-1}$ entonces $R(k) = 0$. Utilizando el lema 4.1 podemos asegurar que R es EPS si y sólo si $\phi(k) \leq \alpha S(0)$, ($\forall k \geq 0$). Por las propiedades S1–S3 lo anterior es cierto si y sólo si $\alpha S'(k) \leq 1$, ($\forall k > 0$), como por otra parte ya afirma la proposición 4.3 en su primer apartado. Por otro lado, si $c^* < (1 + \alpha)^{-1}$, $R(k) = d^*S(k)$. El corolario 4.1 nos permite

asegurar que R es EPS si $\alpha(1 + \alpha)c^*S[d^*S(k)] - d^*S(k)$ es constante. Así, la función de stock $S(k)$ debe ser lineal con pendiente $[\alpha(1 + \alpha)c^*]^{-1}$. Este resultado está de acuerdo con el tercer punto de la proposición 4.3. \square

Ejemplo 4.10 Considérese $S(k) = k + k^{0.3} + 1$ y $\alpha = 0.75$. Busquemos una función respuesta R que sea EPS. El máximo de $\alpha S(k) - k$ se alcanza para $k = \hat{k} = 0.86$ con un valor de 1.2518. El paso P1 nos invita a elegir un $f \in [0, 1.2518]$. Tomemos f igual a 0.5, por ejemplo. Podríamos elegir $I = [0.3, 0.5] \cup [0.9, 1.5]$ cuya imagen mediante la función ρ es $[0.9302, 0.9789] \cup [0.9627, 1.0024]$. R podría ser cualquier función de manera que

$$\begin{aligned} R(k) &= 0.75[k + k^{0.3} + 1] - (k + 0.5)/0.75, \quad \text{si } k \in I \\ R(k) &\in [\max\{0, k^{0.3} - k/3 - 1/3\}, S(k)) \cap I, \quad \text{si } k \notin I \end{aligned}$$

La función de respuesta R puede tomar cualquier valor en la región sombreada de la figura 4.6. Para cualquier capital inicial, la sucesión de capitales converge al punto fijo de ρ , esto es, a $k = 1.0$. \square

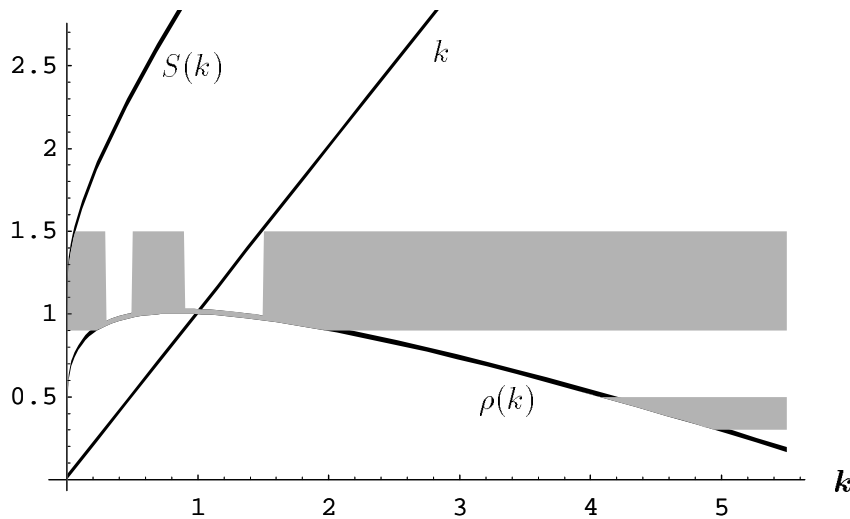


Figura 4.6

Un EPS dado por la función R , para $S(k) = k + k^{0.3} + 1$. Cualquier función de respuesta cuya gráfica esté sobre la región sombreada constituye un EPS.

Ejemplo 4.11 Si $S(k) = 2k + 1$ y $\alpha = 0.9$, entonces $\hat{k} = \infty$ y tenemos que elegir un f en $[0, \alpha S(1) - 1] = [0, 1.7]$. Sea f igual a 0.5. En este caso $\rho(k) = \frac{8}{9}k + \frac{4}{9}$. Podríamos tomar el conjunto I como $\{i_n\}_{n=1}^{\infty}$, donde $i_1 = S(0)$, $i_2 = S[\rho^{-1}[S(i_1)]]$, $i_3 = S[\rho^{-1}[S(i_2)]]$, y así

sucesivamente. La función de respuesta R vendrá dada por

$$R(k) = \begin{cases} i_1, & \text{si } k \in [0, \rho^{-1}(i_1)] \\ i_2, & \text{si } k \in (\rho^{-1}(i_1), \rho^{-1}(i_2)] \\ \vdots & \\ i_n, & \text{si } k \in (\rho^{-1}(i_{n-1}), \rho^{-1}(i_n)] \\ \vdots & \end{cases}$$

La función R verifica P1, P2 y P3 y por tanto es un EPS. Ahora, el conjunto I no está acotado, y cualquiera que sea el capital inicial la sucesión de capitales tiende a infinito.

□

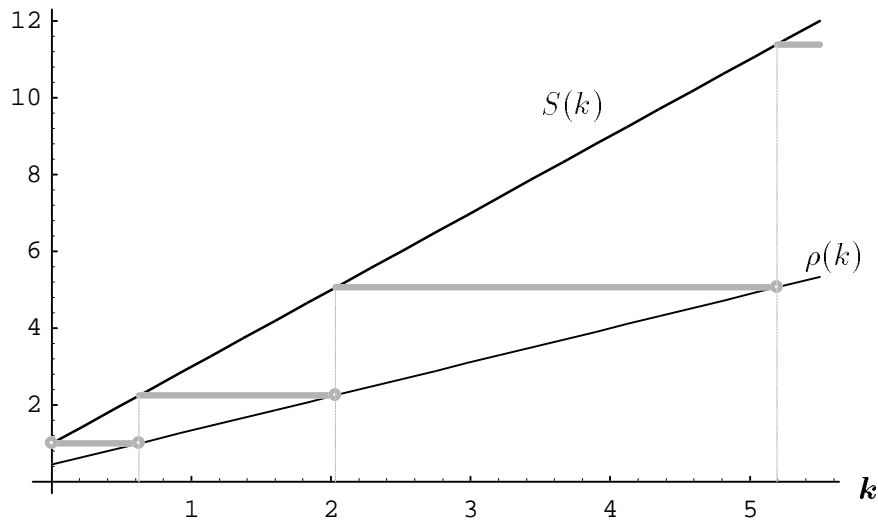


Figura 4.7

Un EPS para $S(k) = 2k + 1$, la función de producción del ejemplo 4.11.

Sin embargo, hay que hacer notar que no todo juego de generaciones sucesivas tiene una función de respuesta que sea EPS, como muestra el siguiente contraejemplo.

Ejemplo 4.12 Sea $S(k) = k^{0.3} + k$ y $\alpha = 0.2$. Al ser $S(0) = 0$ se tiene que $\bar{k} = 0$ y el paso P1 nos deja el cero como único valor posible para f . Tendremos entonces definida una función $\rho(k) = k^{0.3} - 4k$. Debemos elegir un conjunto I en el que coincidan R y ρ , y de manera que verifiquen los puntos P2a y P2b. En nuestro caso $\hat{k} = \arg \max\{\alpha S(k) - k\} = 0.0247$ y en ese punto la función ρ vale 0.23. El paso P2a nos obliga a toma I de manera que tenga intersección no vacía con el intervalo $[k^{0.3} - 4k, k^{0.3} + k)$ para todo $k \in [0, \hat{k}]$. Tomando este \hat{k} algún elemento de I se ha de encontrar en el intervalo $[\rho(\hat{k}) = 0.2366, S(\hat{k}) = 0.3541]$. Sin embargo las imágenes de todos los puntos de este intervalo mediante la función ρ son

negativas, y no van a ser valores aceptables de R . No va a ser posible encontrar el conjunto I y por tanto no va a existir la función de respuesta de manera que R sea EPS. \square

4.6 Funciones de respuesta justas

En la sección anterior hemos definido y caracterizado funciones que indican a cada generación cuál ha de ser el capital que ha de dejar a sus sucesores en función del capital que se recibió en herencia de los predecesores. Existen algunas propiedades que parece razonable exigir a las funciones de respuesta para aumentar su simplicidad y su justicia. A continuación proponemos las siguientes:

- F1. *No exhaustiva.* Un jugador nunca debería tener que ceder todo el capital disponible al siguiente jugador y disfrutar, por tanto, de un consumo nulo en su primer periodo. A lo sumo dejará una proporción $\beta \in [0, 1)$, esto es, $R(k) \in [0, \beta S(k)]$.
- F2. *No decreciente.* Herencias más grandes no pueden exigir dejar capitales más pequeños.
- F3. *Continua.* A jugadores que han recibido herencias parecidas se les deben demandar capitales similares.

Definición 4.2

Una función de respuesta justa es una función de respuesta que verifica F1-F3.

¿Cómo modificaremos el Procedimiento 1 anterior para el caso en que queramos hallar funciones de respuesta justas que sean equilibrios perfectos en los subjuegos? La propiedad F1 obliga a que $R(k)$ pertenezca al intervalo $[0, \beta S(k)]$, y esto hace que $\phi(k) \in [\alpha(1 - \beta)S(k) - k, \alpha S(k) - k]$. Del lema 4.1 tenemos que $\phi(k) \leq \phi[R(k)] = f$ para cualquier $k \geq 0$. Tomando el mayor valor permitido para $R(k)$ tenemos que $f \geq \max_k \{\alpha(1 - \beta)S(k) - k\}$. Esto nos permite dar una mejor cota inferior para f que el cero que ofrece el paso P1.

Al elegir el conjunto $I = \{R(k) : k \geq 0\}$ en el segundo paso, hemos de tener en cuenta que se tratará ahora de un intervalo por ser la imagen de un conexo mediante una función continua. Este conjunto será entonces de la forma $[i, j]$ o bien $[i, \infty)$. Por otra parte P2a indica ahora que el intervalo $[\max\{0, \rho(k)\}, \beta S(k)]$ tiene intersección no vacía con el conjunto I para cada $k \in [0, \hat{k}]$. Esto significa que el extremo inferior de I ha de ser menor que $\beta S(0)$, y que el extremo superior debe ser mayor que $\max_k \rho(k)$.

Como indica el paso P3 las funciones R y ρ deben coincidir en todo I . Por F2 sabemos que ρ ha de ser no decreciente en I lo cual está garantizado, por ser ρ cóncava, si $j \leq \hat{k}$. Además P2b nos dice que $\rho(I) \subseteq I$. Como ρ es no decreciente en I basta entonces exigir que $i \leq \rho(i)$ y, si I es acotado, también que $\rho(j) \leq j$ (por la continuidad este último caso exige que I contenga un punto fijo de ρ).

De las desigualdades $\rho(j) \leq j$, $j \leq \hat{k}$ y de la concavidad de ρ podemos afirmar que $\rho(\hat{k}) \leq \hat{k}$ en caso de que \hat{k} sea finito. Esto nos permite dar otra cota inferior para f ,

$$\alpha S(\hat{k}) - (1 + \alpha)\hat{k} \leq f$$

que añadiremos en el primer paso.

Las propiedades F2 y F3 hacen que la asignación de valores de $R(k)$ sea única: todos los puntos por debajo del extremo inferior de I toman el valor de R en este extremo, $R(i) = \rho(i)$; los situados por encima del extremo superior, si no es infinito, valen $R(j) = \rho(j)$.

Teniendo en cuenta todo lo anterior podemos dar un nuevo procedimiento que genere funciones de respuesta que cumplan las propiedades F1, F2 y F3, que exponemos en el procedimiento 2.

Procedimiento 2: Función de respuesta justa EPS

Q1 Elegir un f de manera que

$$\max_k \{ \alpha(1 - \beta)S(k) - k \} \leq f \leq \alpha S(\bar{k}) - \bar{k},$$

donde $\bar{k} = \min\{S(0), \hat{k}\}$ y $\hat{k} := \arg \max_k \{ \alpha S(k) - k \}$ (tal vez infinito).

Si \hat{k} es finito, f ha de ser además mayor que $\alpha S(\hat{k}) - (1 + \alpha)\hat{k}$.

Q2 Tomar un intervalo I de la siguiente manera:

(i) Si $\max_k \rho(k) = \infty$, tomar $I = [i, \infty)$, con $i \leq \beta S(0)$, $i \leq \rho(i)$.

(ii) Si \hat{k} es finito, $I = [i, j]$, con $i \leq \beta S(0)$,
 $i \leq \rho(i) \leq \rho(j) \leq \rho(\hat{k}) \leq j \leq \hat{k}$.

(iii) En otro caso puede tomarse I como indica (i) o bien como lo hace (ii).

Q3 La función de respuesta justa R toma la expresión

$$R(k) = \begin{cases} S(i) - (i + f)/\alpha, & \text{si } 0 \leq k < i \\ S(k) - (k + f)/\alpha, & \text{si } i \leq k \leq j \\ S(j) - (j + f)/\alpha, & \text{si } j < k \end{cases} .$$

Veamos a continuación algunos ejemplos de la aplicación del procedimiento.

Ejemplo 4.13 Retomemos la función de stock considerada en el ejemplo 4.10, esto es, $S(k) = k + k^{0.3} + 1$, con la constante de enlace $\alpha = 0.75$. Supondremos que cada jugador consume al menos un 20% de lo disponible, esto es, $\beta = 0.8$.

El paso Q1 de Procedimiento 2 nos ofrece $\max\{\alpha(1 - \beta)S(k) - k\} = 0.1798$ como cota inferior del valor de f . Como se vió antes el valor en el que se alcanza el máximo de $\alpha S(k) - k$ es $\hat{k} = 0.86$. Por ser menor que $S(0)$, $\bar{k} = \hat{k}$ y tenemos $\alpha S(\bar{k}) - \bar{k} = 1.2518$ como cota superior de f . Tomemos $f = 1$ y sigamos el Procedimiento 2 en el paso Q2.

Por ser \hat{k} finito el conjunto I es de la forma $[i, j]$. Por una parte i ha de ser menor que $\beta S(0) = 0.8$. Por otra $i \leq \rho(k)$, lo que implica que se encuentre en el intervalo $[0.044, 0.237]$. Sea, por ejemplo, $i = 0.2$. El extremo superior del intervalo I debe ser menor que \hat{k} y ha de cumplir $\rho(j) \leq j$. Vale, por tanto, cualquier punto del intervalo $[0.237, 0.860]$. Si tomamos $j = 0.8$ la función de respuesta quedará de la forma

$$R(k) = \begin{cases} 0.217 & \text{si } 0 \leq k < 0.2 \\ k^{0.3} - (k + 1)/3 & \text{si } 0.2 \leq k \leq 0.8 \\ 0.335 & \text{si } 0.8 < k \end{cases} .$$

□

Ejemplo 4.14 Consideremos ahora la situación del ejemplo 4.11 en la que la función de stock es lineal, $S(k) = 2k + 1$, con $\alpha = 0.9$. Como en el ejemplo anterior supondremos $\beta = 0.8$.

El valor de f ha de tomarse en este caso mayor que 0.18, el máximo de la función $\alpha(1 - \beta)S(k) - k$, y menor que $\alpha S(1) - 1 = 1.7$. Sea $f = 3/2$. La función ρ toma la forma $8k/9 - 2/3$.

Como $\hat{k} = \infty$ hemos de considerar $I = [i, \infty)$ siendo i menor que 0.8 y que $\rho(i)$. Esto último no ocurre nunca y por tanto el f seleccionado no es válido. Tomemos entonces $f = 0.85$. Ahora tenemos que para todo $i \geq 0.5$ la desigualdad $\rho(i) \leq i$ resulta cierta. Cualquier punto del intervalo $[0.5, 0.8]$ es adecuado. Para el caso $i = 3/5$ la función de respuesta es

$$R(k) = \begin{cases} 13/15 & \text{si } 0 \leq k < 3/5 \\ 8k/9 + 1/3 & \text{si } 3/5 \leq k \end{cases} .$$

□

4.7 Conclusiones

En este capítulo se ha propuesto un juego con un número infinito de jugadores, los cuales mueven una sola vez y de forma consecutiva. El pago a cada jugador depende del estado inicial del sistema, de su acción y de la acción del jugador que le sigue inmediatamente.

Hemos comenzado analizando diferentes estrategias sencillas, estacionarias en relación con diferentes elementos del juego. Para cada una de ellas se determinaron condiciones bajo las cuales constituyen equilibrios de Nash o perfectos en los subjuegos.

Los perfiles de estrategias $A1$ y $A2$ persiguen preservar el sistema, esto es, el stock de capital. Los equilibrios encontrados para ambos perfiles conservan estacionario el sistema, no sólo en cuanto al capital sino también en relación a los pagos que reciben las generaciones a partir de la segunda.

Las otras estrategias no se centran tanto en el sistema como en los propios jugadores. El perfil estratégico $C1$ procura obtener pagos idénticos para todas las generaciones. Con el equilibrio obtenido el sistema se colapsa porque cada generación consume todo el capital disponible.

Los perfiles $B1$ y $B2$ mantienen la misma proporción consumida por los diferentes jugadores. El comportamiento del sistema bajo el equilibrio puede ser muy diferente dependiendo de los parámetros del juego (S , α , y k_1). Nos encontramos con tres posibilidades. Primero que el capital sea igual a una constante, como en la situación en que se desarrollaban $A1$ y $A2$. Segundo, que el sistema se colapse consumiendo todo el capital, al igual que en $C1$. En la tercera posibilidad, cuando la función S es lineal, el capital no es constante pero converge a un valor (siempre cero con $B2$) o tiende a infinito.

A continuación se ha mostrado cómo para este tipo de juegos puede encontrarse siempre un equilibrio de Nash, y se ha dado este de forma explícita.

También se han estudiado perfiles de estrategias en los que todos los jugadores utilizan la misma estrategia sin memoria. Se ofrecen resultados que caracterizan aquellos que constituyen equilibrios perfectos en los subjuegos y se presenta un procedimiento que permite generar todas las posibles funciones de respuesta con esta propiedad. Además, sugeridos ciertos supuestos de justicia determinamos la forma de las funciones de respuesta que los verifican y un procedimiento que permite obtenerlas.

El modelo es susceptible de extenderse de varias maneras. Por una parte en los pagos se podría aplicar un factor de descuento sobre el consumo del segundo periodo de cada generación; o bien considerar una función de utilidad sobre los consumos más general. Por otro lado se podría ampliar el número de generaciones vivas en cada periodo a tres o más. De estas generaciones algunas estarían activas y toman las decisiones que rigen el sistema y el resto permanecerían inactivas hasta desaparecer.

Bibliografía

- [1] Álvarez, J.A., C. González-Alcón y J. Sicilia (1995) Estrategias óptimas de consumo e inversión en un juego diferencial económico, *Cuadernos Económicos de ICE* **60**: 169–181.
- [2] Athans, M. y P.L. Falb (1966) *Optimal Control: An Introduction to the Theory and Its Applications*, McGraw-Hill, New York.
- [3] Başar, T. y G.J. Olsder (1982) *Dynamic Noncooperative Game Theory*, Academic Press, Londres.
- [4] Başar, T., A. Haurie y G. Ricci (1985) On the dominance of capitalist leadership in a ‘feedback-Stackelberg’ solution of a differential game model of capitalism, *Journal of Economics Dynamics and Control* **9**: 101–125.
- [5] Balasko, Y. y K. Shell (1980) The overlapping generations model I: the case of pure exchange without money, *Journal of Economic Theory* **23**: 281–306.
- [6] Balasko, Y. y K. Shell (1981) The overlapping generations model II: the case of pure exchange with money, *Journal of Economic Theory* **24**: 112–142.
- [7] Barro, R.J. y X. Sala-i-Martin (1995) *Economic Growth*, McGraw Hill, New York.
- [8] Binmore, K. (1994) *Teoría de Juegos*, McGraw-Hill, Madrid.
- [9] Buhl, H.U. y W. Machaczek (1985) Workers’ investment and return in a differential game model. Manuscrito no publicado.
- [10] Clemhout, S. y H.Y. Wan Jr. (1994) Differential games—Economic applications, en *Handbook of Game Theory*, Vol. 2 (R.J. Aumann y S. Hart, eds.) North-Holland, Amsterdam, 801–825.

-
- [11] Fershtman, C. (1987) Identification of classes of differential games for which the open loop is a degenerate feedback Nash equilibrium, *Journal of Optimization Theory and Applications* **55**: 217–231.
- [12] Flanagan, R.J, D.W. Soskice y L. Ulman (1983) *Unionism, Economic Stabilization and Incomes Policies. European Experience*, The Brookings Institution, Washington.
- [13] Friedman, A. (1971) *Differential Games*, Wiley, New York.
- [14] Friedman, A. (1994) Differential games, en *Handbook of Game Theory* Vol. 2 (R.J. Aumann y S. Hart, eds.) North-Holland, Amsterdam, 781–799.
- [15] Friedman, J.W. (1986) *Game Theory with Applications to Economics*, Oxford University Press, Oxford.
- [16] Gibbons, R (1993) *Un primer curso en Teoría de Juegos*, Antoni Bosch, Barcelona.
- [17] Glicksberg, I.L. (1950) Minimax theorem for upper and lower semicontinuous payoffs, Rand Corporation Research Memorandum RM-478.
- [18] González-Alcón, C., J.A. Álvarez y J. Sicilia, (1994) El proceso de crecimiento económico como un juego diferencial bipersonal con herencia de stock de capital. Encuentro en Teoría de los Juegos, Bilbao, 14-16 septiembre.
- [19] González-Alcón, C., J. Sicilia y J.A. Álvarez, (1996) A non-repeated overlapping generations game. International Workshop on Game Theory and Politics, Santiago de Compostela, 2-5 julio.
- [20] González-Alcón, C., J. Sicilia y J.A. Álvarez, (1997) Cooperative solutions in an economic growth game, *Annals of Operations Research*. **84**: 209–230.
- [21] O. Gossner (1996) Overlapping generations games with mixed strategies, *Mathematics of Operations Research* **21**: 477–486.
- [22] Gradus, R. (1989) A differential game between government and firms: a non-cooperative approach, *Journal of Economics* **50**: 237–256.
- [23] Hart, S. (1992) Games in extensive and strategic forms, en *Handbook of Game Theory with Economic Applications* Vol. I, (R.J. Aumann y S. Hart, eds.), North-Holland, Amsterdam, 19–40.
- [24] Haurie, A. y M. Pohjola (1987) Efficient equilibria in a differential game of capitalism, *Journal of Economics Dynamics and Control* **11**: 65–78.

-
- [25] Higham, N.J. (1993) *Handbook of Writing for the Mathematical Sciences*, SIAM, Philadelphia.
- [26] Hoel, M. (1978) Distribution and growth as a differential game between workers and capitalists, *International Economic Review* **19**: 335–350.
- [27] Holmgren, R.A. (1996) *A First Course in Discrete Dynamical Systems*. Segunda ed., Springer-Verlag, New York.
- [28] Isaacs, R. (1965) *Differential Games*, Wiley, New York.
- [29] Kaitala, V. y M. Pohjola (1990) Economic development and agreeable redistribution in capitalism: efficient game equilibria in a two-class neoclassical growth model, *International Economic Review* **31**: 421–438.
- [30] Kalai, E. (1977) Nonsymmetric Nash solutions and replications of two-person bargaining, *International Journal of Game Theory* **65**: 129–133.
- [31] Kaldor, N. (1956) Alternative theories of distribution, *Review of Economic Studies* **23**: 83–100.
- [32] Kandori, M. (1992) Repeated games played by overlapping generations of players, *Review of Economic Studies* **59**: 81–92.
- [33] Kuhn, H.W. (1953) Extensive games and the problem of information, en *Contributions to the Theory of Games*, Vol II (H.W. Kuhn y A.W. Tucker, eds.) Annals of Mathematics Studies 28, Princeton University Press, Princeton, 193–216.
- [34] Lancaster, K. (1973) The dynamic inefficiency of capitalism, *Journal of Political Economy* **81**: 1092–1109.
- [35] Luce, R.D. y H. Raiffa (1957) *Games and Decisions*, Wiley, New York.
- [36] Mehelmann, A. (1988) *Applied Differential Games*, Plenum Press, New York.
- [37] Myerson, R.B. (1991) *Game Theory. Analysis of Conflict*, Harvard University Press, Harvard.
- [38] Nash, J. (1950) The bargaining problem, *Econometrica*, **18**: 155–162.
- [39] Nash, J. (1951) Noncooperative games, *Annals of Mathematics*, **54**: 289–295.
- [40] Nash, J. (1953) Two-person cooperative games, *Econometrica* **21**: 128–140.

-
- [41] North, D. C. (1989) Institutions and economic growth: An historical introduction, *World Development* **17**: 1319–1332.
- [42] Owen, G. (1982) *Game Theory*, Segunda ed., Academic Press, San Diego.
- [43] Owen, G. (1974) Existence of equilibrium pairs in continuous games, *International Journal of Game Theory* **5**: 97–105.
- [44] Phelps, E.S. y R.A. Pollak (1968) On second-best national saving and game equilibrium growth, *Review of Economic Studies* **35**: 185–199.
- [45] Pohjola, M. (1983a) Nash and Stackelberg solutions in a differential game model of capitalism, *Journal of Economics Dynamics and Control* **6**: 173–186.
- [46] Pohjola, M. (1983b) Workers's investment funds and the dynamic inefficiency of capitalism, *Journal of Public Economics* **20**: 271–279.
- [47] Pohjola, M. (1984) Threats and bargaining in capitalism: a differential game view, *Journal of Economic Dynamics and Control* **8**: 291–302.
- [48] Pohjola, M. (1985) Growth, distribution and employment modelled as a differential game, en *Optimal Control Theory and Economic Analysis*, Vol. 2 (G. Feichtinger, ed.), North-Holland, Amsterdam, 581–591.
- [49] Pohjola, M. (1987) Differential games of capitalism: a survey, *Mathematical Modelling* **8**: 693–696.
- [50] Rebelo, S. (1991) Long-run policy analysis and long-run growth, *Journal of Political Economy* **99**: 500–521.
- [51] Rincón, J.P. (1994) Algunas soluciones cooperativas aplicadas a un juego diferencial. Encuentro en Teoría de los Juegos, Bilbao 14–16 septiembre.
- [52] Roth, A.E. (1979) *Axiomatic Models of Bargaining*, Springer-Verlag, Berlín.
- [53] Rubinstein, A. (1982) Perfect equilibrium in a bargaining model, *Econometrica* **50**: 97–109.
- [54] Salant, D.J. (1991) A repeated game with finitely lived overlapping generations of players, *Games and Economic Behavior* **3**: 244–259.
- [55] Samuelson, P.A. (1958) An exact consumption-loan model of interest with or without the social contrivance of money, *Journal of Political Economy* **6**: 467–482.

-
- [56] Sandell, N.R. (1974) On open-loop and closed-loop Nash strategies, *IEEE Transactions on Automatic Control* **45**: 435–436.
- [57] Seierstad, A. (1993) The dynamic efficiency of capitalism, *Journal of Economic Dynamics and Control* **17**: 877–886.
- [58] Seierstad, A. y K. Sydsæter (1986) *Optimal Control Theory with Economic Applications*, North Holland, Amsterdam.
- [59] Selten, R. (1965) Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit, *Zeitschrift fuer die gesamlte Staatswissenschaft* **121**: 301–324, 667–689.
- [60] Selten, R. (1975) Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games, *International Journal of Game Theory* **4**: 25–55.
- [61] Smith, L. (1992) Folk theorems in overlapping generations games, *Games and Economic Behavior* **4**: 426–449.
- [62] Sorin, S. (1992) Repeated games with complete information, en *Handbook of Game Theory*, Vol. 1 (R.J. Aumann y S. Hart, eds.), North-Holland, Amsterdam, 71–107.
- [63] Soto, M.D. (1994) Estrategias de amenaza en un juego diferencial sobre distribución, crecimiento y empleo. Encuentro en Teoría de los Juegos, Bilbao 14–16 septiembre
- [64] Soto, M.D. y M.J. Macarro (1996) Growth and redistribution. The open-loop Stackelberg equilibrium solution. International Workshop on Game Theory and Politics, Santiago de Compostela, 2–5 julio.
- [65] Stahl, I. (1972) *Bargaining Theory*, Stockholm School of Economics, Estocolmo.
- [66] van Damme, E.E.C. (1987) *Stability and Perfection of Nash Equilibria*, Springer-Verlag, Berlín.
- [67] von Neumann, J. y O. Morgenstern (1944) *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton.
- [68] Zeeuw, A. de (1992), Note on ‘Nash and Stackelberg solutions in a differential game model of capitalism’, *Journal of Economic Dynamics and Control* **16**: 139–145.