UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

«La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años»

Autor: Mª de las Mercedes Palarea Medina
Director: D. Martín M. Socas Robayna

Departamento de Análisis Matemático

D. Martín M. Socas Robayna, Catedrático de E.U. de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de La Laguna.

CERTIFICA:

Que la presente Memoria titulada ***"La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años",*** ha sido realizada bajo la dirección del que suscribe, por la Licenciada Mª de las Mercedes Palarea Medina, y que constituye su Tesis para optar al grado de Doctora en Ciencias Matemáticas.

Y para que así conste a los efectos oportunos, firma la presente a 3 de diciembre de 1998.

Quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que de forma directa o indirecta me han ayudado en la realización de esta Tesis.

En primer lugar al Dr. D. Martín M. Socas por su experta y oportuna labor de dirección durante el desarrollo de esta Tesis, por su gran disponibilidad y paciencia y sus continuas enseñanzas y sugerencias, respetando siempre mis ideas; por su buen hacer tanto científico como humano.

Gratitud profunda a D. Nácere Hayek quien ha sido un ejemplo para mí desde que entré en la Universidad, se ha preocupado porque sea una buena estudiante y profesional y me lo ha demostrado con sus palabras de aliento.

A todos los compañeros del Departamento de Análisis Matemático por su colaboración y continuo ánimo, así como a los compañeros del Centro Superior de Educación.

A las Profesoras Mª Candelaria Afonso, Inés Plasencia y Aurelia Noda por sus correcciones y sugerencias para esta Memoria.

A la Dra. Josefa Hernández por su paciencia y ánimo ininterrumpido a lo largo de todos estos años: Gracias.

A nivel de instituciones quisiera agradecer a la propia Universidad de La Laguna, al Centro de Investigación y Estudios Avanzados (C.I.N.V.E.S.T.A.V.) de México y a los tres centros escolares de La Laguna: Santa Rosa de Lima (Dominicas), San Bartolomé (Tejina) y Nuestra Señora del Coro (La Verdellada), la posibilidad que brindaron a este Proyecto.

A los directores, profesores de los Centros, personal de administración y a todos los alumnos que participaron en la parte experimental de este trabajo.

A toda "mi familia", en especial a <u>mi madre</u>, que ha sido capaz hasta el último momento de la entrega de esta Memoria, de servirme de modelo en el trabajo y de hacer grandes renuncias para que esto fuera posible.

A mi madre

ÍNDICE

Capítulo 3
Diseño Y Metodología De La Investigación

Capítulo 4
Elaboración De Un Cuestionario Para El Álgebra Escolar

Capítulo 5
La Primera Investigación Sobre Expresiones Algebraicas

Capítulo 6
La Segunda Investigación Sobre Expresiones Algebraicas

Capítulo 7
La Investigación Sobre Ecuaciones

Capítulo 8
El Estudio De Actitudes De Los Alumnos

Capítulo 9
Conclusiones, Implicaciones Para La Enseñanza Y Perspectivas Futuras

Introducción

INTRODUCCIÓN

La presente Memoria pretende expresar el proceso y los resultados de mi investigación, relacionada con el Álgebra escolar.

El interés por este tema no es nuevo. Siempre me ha gustado y hasta me ha entusiasmado. Por eso no es extraño que desde mis primeras investigaciones en Didáctica, mi interés se haya centrado en aquellos temas que desde mi experiencia docente, tanto oficial (Bachillerato antiguo, antes de la Ley del 70, la segunda etapa de la E.G.B. y Escuela de Magisterio), como extraoficial, planteaban dificultades en la enseñanza y en el aprendizaje, ya que como bien señaló el Profesor Russel J. Reiter en su conferencia de recepción del Doctorado Honoris Causa por la Universidad de La Laguna "Cómo llegar a ser un científico prominente", recordando a Ronal Dahl en la introducción de su libro GOING SOLO: ***"la vida está hecha de una larga serie de pequeños acontecimientos, y unos pocos grandes acontecimientos"*** .

El área específica de investigación a la que llegué con estos antecedentes profesionales ha sido la del Álgebra y dentro de ella, el lenguaje algebraico; no en vano mi trabajo fundamental de investigación lleva por título **"La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes, cometidos en Álgebra por alumnos de 12-14 años,** que permitirá elaborar una propuesta didáctica para la enseñanza-aprendizaje del Álgebra en dicha etapa, propuesta didáctica original de un diseño que intente aportar mejoras en la enseñanza-aprendizaje del Álgebra.

Nuestro trabajo de investigación pretende ser una aportación más, tendente a evitar el fracaso en Matemáticas, concretamente al adquirir el lenguaje algebraico.

Sin casi darme cuenta me venía formulando ¿qué características o variables tienen las dificultades que presentan los alumnos en el comienzo del aprendizaje del Álgebra Escolar?, ¿qué dificultades manifiestan explícita o implícitamente los profesores que imparten instrucción o enseñan esta rama de la Matemática en este nivel, correspondiente actualmente al inicio de la Educación Secundaria Obligatoria?, ¿qué características o variables hacen diferentes a las personas que les gusta, están capacitadas y "rinden" en Álgebra?

Si se tiene en cuenta la historia de las características, se encuentra que "a priori" a las personas con un buen rendimiento en tareas de tipo matemático en general, se les consideraba "inteligentes". Hace algunos años los investigadores intentan identificar la forma o el "estilo" en que las personas perciben, piensan, resuelven problemas o estudian. A esta forma la han llamado los psicólogos "el estilo cognitivo" de la persona que según Witkin y otros (1977) "es, el enfoque característico que la persona utiliza ante una amplia gama de situaciones - lo que nosotros llamamos "estilo"- y debido a que este enfoque abarca sus actividades perceptivas e intelectuales, se le puede denominar su "estilo cognitivo", por lo tanto explica las diferencias individuales, en la forma de organizar y procesar información y experiencia.

Es claro que ante un mismo problema, diferentes personas utilizan distintas estrategias para afrontar su solución. Estas estrategias, a veces, son características y específicas de una situación determinada, pero, otras veces, se puede identificar un patrón, un modo de funcionamiento o estilo general, característico de un individuo, o de un grupo de individuos, ante tareas y problemas en muy variadas situaciones. Estos estilos o estrategias, reflejan diferencias en la forma en que los sujetos piensan, estudian, perciben, memorizan, resuelven problemas, hacen representaciones, etc.

Aunque los estilos cognitivos, se refieren más, a la "forma", que al contenido y competencia de la actividad cognitiva, y su caracterización hay que hacerla en términos de "procesos", nosotros vamos a considerar los estilos cognitivos de los alumnos, respecto al pensamiento algebraico, en términos de habilidades cognitivas de carácter operacional y habilidades cognitivas de carácter conceptual.

En este planteamiento cognitivo el papel de los diferentes sistemas de representación en Álgebra surge de una manera natural, y preguntas acerca de cómo los estudiantes aprenden a usar y coordinar múltiples representaciones, se plantean abiertamente en la investigación.

Junto a estas cuestiones cognitivas emergen de forma directa las cuestiones afectivas, y preguntas sobre el dominio afectivo y su relación con el lenguaje algebraico y los sistemas de representación, también, son tratadas en este trabajo.

Por otra parte sabemos que desde una perspectiva general, la investigación educativa se puede considerar como un proceso sistemático, controlado y objetivo, dirigido hacia el desarrollo de un cuerpo organizado de conocimientos científicos acerca de la educación, que debería capacitar al educador para determinar qué tipo de enseñanza y qué condiciones de aprendizaje debe proporcionar al educando para obtener conductas predeterminadas. La investigación educativa permite un mejor entendimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje y de las condiciones en las cuales se puede realizar para obtener una óptima eficacia. También es claro que su propósito específico consiste en facilitar información o conocimiento a quienes tienen la responsabilidad de tomar decisiones en el campo educativo, mediante las cuales la educación resulte más eficaz, y estas personas no son sólo las autoridades oficiales en este campo, sino también, y no menos importantes, los didactas y profesores de aula.

Atendiendo a su finalidad, algunos autores consideran que la investigación puede clasificarse como básica o aplicada, en tanto en cuanto trata de aportar nuevos elementos a un determinado cuerpo científico de conocimientos y de integrarlos en su estructura y además pretende resolver problemas prácticos, concretos, valiéndose del conocimiento científico acumulado. Sin embargo Kilpatrick (1993) ya indica que esta clasificación parece estar perdiendo vigencia, dado que para algunos investigadores, las características de básica y aplicada no lo son del estudio de investigación propiamente dicho, sino que más bien describen el uso que se puede hacer de tales investigaciones. Así, un informe acerca de una investigación será básico o aplicado según la propia interpretación del usuario. Esto es, si el informe ayuda al investigador, se tratará para él de una investigación "básica" y si ésta ayuda a resolver un problema práctico, se considerará "aplicada".

Asimismo Sierspinska y otros (1993) también sugieren que en las investigaciones relativas a Educación Matemática entre otras, se debe profundizar en las situaciones de enseñanza-aprendizaje, la realidad de las clases de Matemáticas y el propio sistema educativo. También en la reflexión de este documento se alude a dos clases de resultados en las investigaciones de Educación Matemática: los basados en observaciones y experiencias a largo plazo y los que se obtienen de estudios preparados especialmente; entre las categorías que distinguen para los resultados está la de "potenciadores de la práctica", o sea aquellos que ayudan a los profesores a entender lo que ellos enseñan y les suministran ideas para enseñar.

Interesa también en esta introducción indicar que Kilpatrick (1993) señala que realmente no importa si los criterios, que se elaboren para caracterizar una buena investigación, están incompletos o son provisionales, lo que interesa es que éstos permitan reflexionar y valorar a los investigadores acerca de la calidad, tanto de su trabajo como el de otros investigadores y permita analizar los progresos en este campo.

Es conveniente que se atienda a investigaciones sobre aspectos destacados de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, que provoquen interés y tengan significación, y en el caso concreto nuestro, al tratarse del Álgebra Escolar, está suficientemente justificada. También el interés de una investigación puede ser significativo para los profesores, aunque su interés más directo sea para otros investigadores, ya que la importancia para el profesor de un estudio se alcanzará cuando una línea de investigación, un grupo de estudios haya sido sintetizado y permita obtener claras implicaciones para la práctica docente. Al respecto señala Schoenfeld (1991) que el interés de una investigación viene intrínsecamente relacionado con la utilidad de la misma.

En este sentido de lo práctico, el desarrollo curricular y la evaluación del conocimiento algebraico constituyeron elementos que fueron abordados en la investigación para responder a preguntas como: qué experiencias aritmético/geométricas deben ser proporcionadas a los alumnos para facilitar la transición del pensamiento numérico al algebraico y cómo desarrollar cuestionarios o test que informen al profesor sobre el conocimiento algebraico de los alumnos y no solamente como un elemento de evaluación sumativa de los estudiantes.

En este marco de referencia, el estudio central del trabajo es la investigación acerca de la adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años, con la finalidad de tener elementos para elaborar una propuesta curricular para la enseñanza - aprendizaje del álgebra en el primer ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

Para dar respuesta a este estudio la investigación se planteancinco objetivos principales:

1) Estudiar los aspectos cognitivos (Habilidades cognitivas de carácter operacional (H.C.C.O.) y habilidades cognitivas de carácter conceptual (H.C.C.C.) más relevantes, del pensamiento algebraico con alumnos de 12 a 14 años.
2) Elaborar instrumentos de medida (test) que consideren todos los elementos implicados en el tránsito desde el pensamiento aritmético al algebraico desde una propuesta curricular “global”.
3) Estudiar aspectos afectivos (actitudes hacia la Matemática y Álgebra) con alumnos de 12 a 14 años con relación a la Matemática y al Álgebra y analizar la evolución de la actitud hacia las Matemáticas de alumnos de 8 a 14 años.
4) Estudiar y organizar las dificultades, obstáculos y errores que se dan en el aprendizaje del lenguaje algebraico,
5) Elaborar una propuesta curricular “global” que facilite el inicio del aprendizaje del Álgebra.

Dada la finalidad y amplitud de la investigación se propuso trabajar con referencia a dos paradigmas empírico-analítico y simbólico y considerar la complementariedad de ambos (Salomon, 1991, Socas y otros, 1995), ya que el enfoque empírico-analítico saca provecho de la precisión y supone una manipulación, aislamiento, control y medida de aspectos externos al sujeto humano con objeto de realizar inferencia sobre aspectos internos como el aprendizaje y la afectividad, mientras que el enfoque simbólico requiere de métodos y técnicas absolutamente integradas en el proceso de enseñanza-aprendizaje y sus condicionantes humanos, de manera que, simultáneamente es posible investigar un fenómeno determinado y obtener datos reales tanto del proceso como del resultado.

Al considerar, igualmente, en la investigación experimentos de enseñanza, se optó por el enfoque didáctico más coherente a las preguntas de investigación formuladas, y éste consistió en abordar la enseñanza-aprendizaje de las nociones de variable (letra con sentido algebraico), expresiones algebraicas y ecuaciones lineales, en una propuesta que integra contextos numéricos y geométricos, en un marco del álgebra como lenguaje, donde las fuentes de significado y los sistemas de representación juegan un papel determinante. Es decir, un acercamiento semiótico al lenguaje algebraico.

La metáfora del álgebra como lenguaje, en este acercamiento semiótico, es entendida como un sistema de representación que se ocupa del significado de las escrituras algebraicas, además de considerar el carácter instrumental de los signos del álgebra, lo que sugiere la necesidad de considerarla como una actividad más de los alumnos, y los signos, como instrumentos específicos de esa actividad. En resumen, el signo algebraico va a ser considerado,por una parte, omo un "portavariable" (hace las veces de) en el sentido que constituye una herramienta de modelización de sistemas no algebraicos (numérico, geométrico, etc.); pero, por otra, también funciona como un signo de sí mismo, es decir, como un instrumento específico de la actividad. En este planteamiento los enfoques como: "aritmética generalizada", "resolución de problemas", "modelización" y "funcional" tienen un desarrollo coherente.

La organización dada a nuestra Memoria de investigación es de nueve Capítulos.

En **el Capítulo 1** hacemos un planteamiento general de la investigación.

Se comienza describiendo, de forma global, el problema que se pretende investigar y las características de la investigación desarrollada. Se estudia el planteamiento de la enseñanza/aprendizaje escolar en las distintas reformas curriculares, partiendo de un análisis de la evolución histórica del Álgebra.

En la sección siguiente se presenta una revisión de investigaciones relacionadas con nuestro tema, para terminar con unas conclusiones que vamos a considerar para conformar nuestro marco teórico local.

El Capítulo 2 se dedica a delimitar el problema y establecer el marco teórico en el que abordar el mismo. Las investigaciones realizadas por otros especialistas proporcionan componentes para el marco teórico local construido.

La distribución del capítulo se organiza así. Una primera parte se dedica a la exposición del marco conceptual, analizando los signos con significado algebraico, las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del Álgebra, y la noción de comprensión y los sistemas de representación. Este marco conceptual nos permite delimitar el problema y formular los objetivos de la investigación, planteándose las correspondientes hipótesis.

Concluimos el Capítulo justificando a nivel cognitivo y curricular la racionalidad de este trabajo.

En **el Capítulo 3** se presenta una descripción exhaustiva del diseño de investigación y de los instrumentos de recogida de datos de la misma, así como el proceso de elaboración del diseño de instrucción.

Se hace una descripción global del diseño general de la investigación mediante un esquema de las distintas etapas que lo conforman así como de las fases en que se ha desarrollado. Asimismo se presentan los focos en torno a los cuales se han organizado las diferentes fases de la misma, orientadas a conseguir los objetivos planteados en este estudio.

Al tener como uno de los problemas de estudio, las habilidades cognitivas operacionales y conceptuales en los procesos de adquisición y uso del lenguaje algebraico, y del uso y comprensión de los sistemas de representación utilizados en el marco de una situación de enseñanza, se elaboró un Sistema de Categorías que nos permitió analizar los contenidos desarrollados en el aula y valorar la comprensión de los alumnos con relación a los mismos. Por ello comenzamos este Capítulo con una primera sección dedicada a la planificación de la investigación y a las categorías de análisis.

En un segundo apartado se describe el diseño general de la investigación y las diferentes fases que en que se han desarrollado sus distintas etapas.

Posteriormente se dedica una tercera parte de este capítulo a la descripción, desarrollo y valoración de los diseños concretos de instrucción, relativos a expresiones algebraicas (DISEA) y a ecuaciones (DISEC), que se han aplicado.

Finalmente, el Capítulo aborda los instrumentos de recogida de datos, tanto cuantitativos como cualitativos, planteando cómo se desarrolló su construcción, su validación y su administración.

En el estudio cuantitativo destacamos la construcción del Test para las expresiones algebraicas y para las ecuaciones. Se incluye también las escalas de actitudes hacia las Matemáticas y hacia el Álgebra, que se han utilizado.

En el análisis cualitativo se aporta el estudio y desarrollo de las entrevistas realizadas a los alumnos seleccionados.

En **el Capítulo 4** se presenta el proceso paso a paso de elaboración de un test o cuestionario para el Álgebra Escolar y que forma parte del objetivo 2 de nuestra investigación.

La elaboración de los instrumentos de medida (test o cuestionario) constituye un proceso generalmente largo. La realización de diferentes cuestionarios no siempre tiene un sentido cuantitativo. Los primeros cuestionarios utilizados en esta investigación tienen un sentido estrictamente cualitativo y están destinados a la búsqueda de áreas de dificultades dentro del pensamiento algebraico y su conexión con el pensamiento numérico.

Los cuestionarios, en estas primeras fases, constituyen protocolos cerrados de investigación que nos van informando acerca de las dificultades y errores que presentan los alumnos con relación al pensamiento algebraico desde el enfoque que pretendíamos. Es a partir del análisis de los mismos, cómo se construye un instrumento genérico desde el enfoque de esta investigación.

Los Capítulos 5 y 6 están dedicados al tópico expresiones algebraicas. En ellos describiremos los estudios de las distintas fases, reseñando los procesos seguidos y los resultados más significativos. El objetivo de esta etapa que estamos comentando es averiguar causas de las dificultades en el lenguaje algebraico, y analizar potencialidades y dificultades aportadas por el diseño aplicado. Los sujetos con los que hemos realizado nuestra experiencia han sido alumnos del sistema escolar vigente en cada caso, durante dos segmentos de tiempo tomados cuando cursaban los niveles de 7º y 8º de E.G.B.

La exposición de los resultados se hace de forma detallada, terminando con el estudio biográfico de un alumno, en cada uno de los capítulos, en los que consideramos de forma global los datos que de ellos hemos recopilado.

En **el Capítulo 7** se hacen las consideraciones correspondientes al trabajo con ecuaciones lineales con una incógnita. En él describiremos los estudios de la fase exploratoria y experimental, reseñando los procesos seguidos y los resultados más significativos.

Terminamos este Capítulo con la exposición de la que denominamos segunda parte del estudio biográfico del alumno ya comenzada en el Capítulo 5.

El Capítulo 8 presenta los resultados de dos estudios. El primero de ellos analiza la actitud de alumnos de 7º y 8º de E.G.B. hacia las Matemáticas y hacia el Álgebra y el segundo, la evolución de la actitud hacia las Matemáticas en alumnos de 3º a 8º de E.G.B.

Finalmente, en **el Capítulo 9,** tras los resultados y su análisis, obtenemos y presentamos las conclusiones generales de este trabajo en todos los ámbitos de la investigación: metodología e instrumentos utilizados, dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del Álgebra, en concreto en las expresiones algebraicas y las ecuaciones, además de señalar las implicaciones de nuestra investigación para la enseñanza y plantear cuestiones abiertas pertinentes y que esperamos abordar en posteriores trabajos de investigación.

Señalar, por último, que finalizamos la presentación de esta Memoria con las referencias bibliográficas utilizadas en la misma.

Completa la Memoria un volumen de Anexos, donde se presentan los cuestionarios, test, escalas de actitudes, los cuadernos de clase, los protocolos y las transcripciones de las sesiones audiograbadas, los protocolos y las transcripciones de las entrevistas y datos complementarios de los Capítulos.

Queremos terminar esta introducción señalando que algunos de los resultados de esta Memoria han sido publicados o están pendientes de publicación. Concretamente:

1. ***"Una clasificación de errores en Álgebra".*** *Actas de las XIV Jornadas Hispano-Lusas*, Vol. III, pp. 1541-1546. (1989).

Tomando como base los trabajos del Chelsea College y de M. Matz, se analizan los resultados de una prueba de diagnóstico aplicada a alumnos de diferentes niveles (12-16 años) y se propone una clasificación para tales errores. Esta información sugiere formas de ayudar a los alumnos a corregirlos y, al mismo tiempo, señala las posibles causas de las dificultades de los alumnos para aprender Álgebra.

2. En el marco de la elaboración del libro "***Iniciación al Álgebra***" de la colección Matemáticas: Cultura y aprendizaje. 1989. Síntesis, Madrid, realizamos una reflexión sobre el tema, que nos ayudó a ir delimitando el problema.

Pretendió ser una reflexión acerca de la enseñanza-aprendizaje del Álgebra en la Escuela Secundaria Obligatoria y servir de orientación en este proceso.

Se propone un acercamiento al Álgebra en términos de conversión de lenguajes: el "Habitual", el "Algebraico", el "Aritmético", el "Geométrico" y el de los "Modelos", que facilita la actividad matemática como un proceso reversible de generalización y particularización, que estimula y favorece el desarrollo del conocimiento algebraico.

3. ***"Enseñanza de resolución de ecuaciones y expresiones algebraicas mediante la yuxtaposición de sistemas de representación".*** *Actas de las V J.A.E.M.* Castellón. (1991) (Pendientes de publicar).

Analiza las dificultades semánticas y sintácticas del lenguaje de los sistemas de representación frente a la semántica y sintaxis del Álgebra con referencia a otros trabajos de la misma naturaleza, y presenta resultados de experiencias habidas con alumnos de diferentes niveles escolares y universitarios.

Con relación a las expresiones algebraicas se utilizaron como fuentes de significado las áreas de rectángulos, en el mismo sentido que lo habían hecho Chalouh y Herscovics y como situación intermedia entre el Sistema de Representación Visual Geométrico (S.R.V.G.) y el algebraico, un diagrama de doble entrada que denominamos "visualización simplificada".

Con relación a las ecuaciones algebraicas se utilizaron dos sistemas de representación: el Sistema de Representación Visual Geométrico (S.R.V.G.) y el Sistema de Representación del Equilibrio de la Balanza (S.R.E.B.).

4. ***"Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico".*** *SUMA. Monográfico Lenguaje y Matemáticas,* Vol. 16, pp. 91-

98, (1994).

En este trabajo se presentan los resultados de una revisión de investigaciones relacionadas con el proceso cognitivo integrado en el aprendizaje del Álgebra y, en especial, con la identificación de obstáculos cognitivos que frenan el progreso del conocimiento del alumno al iniciar el estudio y comprensión del Álgebra Elemental.

Por otra parte, se trata de delimitar el campo de los obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico y el de los errores que se dan - por diferentes motivos - en el Álgebra en general y en particular en los procesos de generalización y en su expresión simbólica.

5. ***"Elaborations sémantiques vs élaborations syntactiques dans l'enseignement-apprentissage de l'algèbre scolaire (12-16 ans)"*** *Proceedings of the 46th CIEAEM*, Vol II, pp. 111-119. Toulouse. Francia. (1994).

Analiza la competencia e incompatibilidad de los diferentes Lenguajes y Sistemas de Símbolos utilizados en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

Partiendo del hecho que los Sistemas de Símbolos en Matemáticas han sido utilizados como fuente de significado (relación semántica) y como generadores de las reglas de transformación (sintaxis), nosotros presentamos algunos resultados que corresponden a las nociones y operaciones experimentadas por los alumnos en la transición de la Aritmética al Álgebra, cuando son utilizados diferentes Sistemas de Representación.

6. ***"Un Modelo de Investigación Convergente en Educación Matemática desde una perspectiva curricular"*** . *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, pp. 45-58. Zaragoza, (1995).

Presentamos un modelo de investigación convergente que estamos desarrollando en el Área de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de la Laguna, considerando aspectos referidos al desarrollo del currículo en Matemáticas y a la investigación en Educación Matemática. Se detectan los conocimientos y creencias de cada uno de los componentes del sistema curricular y se lleva a cabo la implantación de un cambio del currículo. Con respecto a la investigación se pretende superar posiciones extremas entre los aspectos cualitativos y cuantitativos de los distintos paradigmas, a la vez que se desarrollan métodos y técnicas de ambos, útiles y complementarios (metodología convergente), que permitan entender mejor los procesos y resultados implicados en la investigación.

7. ***"Sistemas de representación en la resolución de problemas algebraicos".*** *SUMA*. Vol. 20, pp. 29-35. (1995).

En este artículo, se trata de responder a las preguntas formuladas en Wagner y Kieran, 1989, ¿qué es un problema verbal algebraico?; ¿hay problemas verbales que son intrínsecamente más algebraicos que aritméticos?, ¿qué hace a un método de resolución ser más algebraico que aritmético?, ¿hay jerarquías cognitivas con respecto a modos de representación (lenguaje natural, gráfico, numérico, simbólico, etc., que justifiquen un análisis en resolución de problemas algebraicos?, analizando mediante el uso de diferentes representaciones, la resolución de algunos problemas (en concreto, 7) de varias operaciones que consideramos límite entre lo aritmético y lo algebraico, como los de grifos, proporcionalidad, móviles y otros, con el fin de ver qué hace a un método de resolución ser más algebraico que aritmético.

Concluimos que parece claro que no hay elementos suficientes para clasificar un problema verbal en aritmético o algebraico. El proceso de traslación puede realizarse mediante varios sistemas de representación que siendo cualitativamente distintos conducen a expresiones equivalentes. Por tanto, determinar entre los problemas verbales de varias operaciones que consideramos límite entre lo aritmético o lo algebraico, cuál tiene una estructura más aritmética que algebraica, o al revés, depende de los sistemas de representación elegidos que provocan en el resolutor un tipo de imagen mental que desencadena la necesidad de un pensamiento aritmético o algebraico para su solución.

8. *“El uso de sistemas de representación con imágenes en la enseñanza-aprendizaje del Álgebra escolar”.* *“25 años de Matemáticas en la Universidad de La Laguna”*, pp. 507-521. (1996).

Reseñamos diferentes perspectivas de investigación sobre la enseñanza-aprendizaje del lenguaje algebraico y presentamos el enfoque con que abordamos el Álgebra escolar mediante Sistemas de Representación Semióticos.

Se presenta también un diseño elaborado para abordar el desarrollo del curriculum desde una reflexión epistemológica, tomando como objeto de estudio los Sistemas de Representación, su aplicación a alumnos de 12-13 años de edad y los resultados de la experiencia.

9. *“Operational, process and strategic abilities in the learning of algebraic language. A case study”.* *Proceedings PME 21*, vol, 1 pp. 253. Lathi (Finlandia). (1997).

En este trabajo se estudia, desde una perspectiva cognitiva, las operaciones, procesos y estrategias que realiza el sujeto cuando aprende o sea cuando adquiere, organiza, elabora y recupera conocimientos del lenguaje algebraico y por otra, potencia el control y la toma de conciencia de los procesos cognitivos del alumno en el aprendizaje del lenguaje algebraico.

La investigación proporciona a los alumnos, medios que les ayudan a tomar consciencia de sus propios procesos cognitivos, favoreciendo así el conocimiento metacognitivo.

Nuestra experiencia conecta estos dos caminos, cognitivo y metacognitivo, y ha investigado en el ámbito escolar habitual de alumnos de 7º nivel (12-13 años) “explorando” el acercamiento al lenguaje algebraico, subrayando las posibilidades que aparecen al introducir nuevos recursos de enseñanza y medios de observación.

Hemos propuesto la utilización de un sistema denominado Sistema de Representación Visual-Geométrico (S.R.V.G.) donde toda expresión codificada en él pueda utilizarse como elaboración sintáctica y como elaboración semántica.

Hemos detectado, a su vez, como producto de este análisis, nuevas capacidades y destrezas del alumno así como intentos de desarrollo de otras, sin éxito.

Los resultados son relevantes para percibir la integración de aspectos relativos al contenido matemático con aspectos relativos a las relaciones entre el estudiante y la adquisición del lenguaje algebraico, a través de la yuxtaposición de los sistemas de representación.

Los resultados confirman, por una parte, creencias acerca del bajo nivel de dominio del lenguaje algebraico por parte de los alumnos de este nivel de enseñanza y por otra, la aportación positiva de la yuxtaposición de los sistemas de representación en la adquisición del lenguaje algebraico, favoreciendo habilidades operacionales, de procesos y de estrategias.

10. ***"The three dimensions of error in the understanding of algebraic language".*** *Proceedings PME 21,* Vol 1, pp. 264. Lathi (Finlandia). (1997).

Plantea desde la perspectiva de la enseñanza - aprendizaje elementos de análisis de los errores que se cometen en la Enseñanza Secundaria y que sin duda están asociados al aprendizaje del lenguaje algebraico, para determinar la naturaleza de los mismos, entender al alumno, descubrir sus conocimientos adyacentes y diseñar tareas que apoyen la construcción del lenguaje algebraico de manera más significativa.

Se analizan orígenes de errores que manifiestan alumnos de 12-13 años en la adquisición del lenguaje algebraico utilizando como elementos de análisis: pruebas específicas (pretest y postest), producciones de los alumnos en situaciones de clase y entrevistas vídeograbadas.

Se detectan errores de dos procedencias distintas, una, relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático y otra, relacionada con las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales, encontrando así tres dimensiones del error: la dimensión “obstáculo”, la dimensión “ausencia de sentido” y la dimensión “afectiva y emocional”.

11.***"Gestion, communication et apprentissage du langage algébrique. Une étude de cas".*** *Proceedings CIEAEM 49,* pp.195-202. Setúbal (Portugal). (1997).

Presentamos en este trabajo un análisis de las interacciones didácticas que se dan en la adquisición del lenguaje algebraico por alumnos de 12-13 años, utilizando como unidades de análisis para la interacción didáctica: la gestión del trabajo en el aula, la comunicación del contenido y la construcción del conocimiento. Estas unidades de análisis son relacionadas con las actuaciones del profesor y de los alumnos, en términos de establecer significados, enjuiciar e intervenir.

Esto nos permite construir una rejilla para el análisis de las interacciones. Los datos se obtienen a partir de los obtenidos en el desarrollo de las sesiones de clase y las grabaciones de las puestas en común.

El trabajo se completa con el estudio de un caso donde se profundiza en la organización del conocimiento algebraico y su significado por parte del alumno.

12. ***“Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar”*** . *UNO,* nº 14, pp. 7-24. (1997).

Aporta elementos claves para la investigación en una cuestión ampliamente debatida en esta década, que es el currículo de matemáticas que incluye el tratamiento del Álgebra. Sabemos que en los primeros cursos del acercamiento a la misma aparecen dificultades específicas que no favorecen el aprendizaje y mucho menos un aprendizaje significativo. Reportamos referencias a problemas específicos de la enseñanza-aprendizaje del Álgebra en términos de dificultades, obstáculos y errores y al análisis del uso de diferentes sistemas de representación aplicados a la enseñanza de Álgebra y su contribución a la búsqueda de significados para las expresiones algebraicas y las ecuaciones lineales.

13. ***"Operational and conceptual abilities in the learning of Algebraic Language. A case study".*** *Proceedings PME22,* Vol. 3, pp. 327-334. SouthAfrica, (1998).

Presenta un estudio biográfico de un alumno de 7º de E.G.B. con los datos obtenidos con distintos instrumentos (pre y post-test, cuaderno de clase y entrevistas vídeograbadas), que ofrecen información sobre los procesos cognitivos conceptuales y operacionales en su aprendizaje de las expresiones algebraicas y que se enmarca en un proyecto de diseño de una Propuesta Curricular para el lenguaje algebraico, tomando en consideración habilidades cognitivas de tipo operacional y conceptual que facilitan la transición de la Aritmética al Álgebra y que se basa en cuatro fuentes de significado y en el marco de los trabajos de Duval (Semiosis-Noesis).

14. ***"About cognitive processes involved in the learning of algebraic language. A biographical study".*** *Hiroshima Journal of Mathematics Education*. (1998). (enviado).

Se presenta la incidencia de nuevos registros de representación en los resultados del estudio biográfico de un alumno que está iniciando su trabajo de Álgebra escolar. En especial se expresan sus habilidades cognitivas de carácter operacional y conceptual al analizar su trabajo en operatividad básica con las expresiones algebraicas y en la conversión de sistemas de representación de dichas expresiones. Se ha trabajado en contextos aditivos y multiplicativos, en especial en los conceptos de área y perímetro.

15. ***"Análisis de la evolución de las actitudes hacia las Matemáticas en alumnos de 8 a 14 años",*** *presentado en las XVIII Jornadas Regionales de la S.C.P.M.* Puerto de la Cruz, (1998).

Presenta un estudio realizado con niños y niñas de 3º a 8º de E.G.B. para tratar de conocer su actitud hacia las Matemáticas.

Dentro de la investigación en el dominio afectivo actual, los objetivos que nos planteamos fueron: conocer de forma global la actitud hacia las Matemáticas de alumnos de 3º a 8º E.G.B., estudiar si había diferencias por cursos o por sexos y analizar los resultados según las diferentes componentes de la actitud.

A partir de la idea de Hart (1989), construimos una definición multidimensional de actitud con componentes: afectiva, comportamental y de implicación, cognoscitiva y contextual, y de creencias sobre sí mismo.

Se eligió como instrumento de medida una escala de tipo Likert, para medir la actitud hacia las Matemáticas, construida a partir de los trabajos de Aiken (1976) y Gairín (1986).

La población estuvo formada por 620 alumnos.

El resultado del estudio muestra una actitud positiva de los estudiantes hacia las Matemáticas, que exteriorizan en sus sentimientos, en sus comportamientos y en sus creencias, Sin embargo, detectamos una disminución de esa actitud positiva a medida que crecen y una mayor inseguridad en los niños más pequeños. Los datos obtenidos se mantienen similares por sexos.

16. ***"Análisis de actitudes hacia las Matemáticas y hacia el Álgebra en niños y niñas de 11 a 14 años",*** *presentado en el III C.I.B.E.M.* Caracas, (1998).

Presentamos un estudio sobre las actitudes hacia las Matemáticas y hacia el Álgebra de niños y niñas de 11 a 14 años. Las cuestiones que abordamos son: 1) ¿Cómo son las actitudes hacia las Matemáticas y hacia el Álgebra?, 2) ¿Se aprecian cambios significativos en dichas actitudes, según los cursos o los sexos? El término actitud lo consideramos como el resultado de cuatro componentes: afectiva, comportamental y de implicación, cognoscitiva y contextual y de creencias sobre sí mismo con respecto a esta materia. Para medirla se eligió una escala tipo Likert, que se pasó a una muestra de alumnos de 7º y 8º de E.G.B. (11-14 años). Los resultados muestran diferencias entre ambas actitudes, siendo más favorable la actitud hacia las Matemáticas. Los resultados son distintos según las componentes y no se aprecian diferencias significativas según los sexos.

Capítulo 1
Aproximación Al Problema De Investigación

CAPÍTULO 1: APROXIMACIÓN AL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo exponemos una visión general del área problemática y del tema específico de investigación.

Dividimos el capítulo en tres partes. En la primera, daremos una visión general del problema de investigación, explicando brevemente algunas características de ella.

La segunda parte se dedica a la enseñanza-aprendizaje del Álgebra, en la que partiendo de un análisis de la evolución histórica de la misma, estudiamos los planteamientos de distintas Reformas curriculares, centrándonos en la nueva Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.) en España.

Terminamos el capítulo con una breve reseña de las investigaciones más significativas relacionadas con nuestra investigación. Esta parte la subdividimos a su vez en tres apartados, agrupando los distintos trabajos en expresiones algebraicas, ecuaciones y desarrollo curricular, si bien reconocemos que esta división no es disjunta.

Todo lo anterior nos permite cerrar este Capítulo con unas conclusiones donde resaltamos aquellas que inciden directamente en nuestro trabajo.

1.2 EL PROBLEMA GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN

Durante los últimos veinte años el interés por el estudio de las dificultades que la enseñanza-aprendizaje del Álgebra escolar ha generado, ha sido enorme, tanto desde la perspectiva del investigador, como del profesor. Pero los problemas que plantea no han sido resueltos y lo que debe ser enseñado y aprendido en Álgebra, está aún por determinar.

Muchas son las preguntas que aún hoy no tienen respuestas: ¿Qué hace que la comprensión del Álgebra escolar sea una tarea difícil para la mayoría de los estudiantes? ¿Qué fuerza a muchos estudiantes a recurrir a memorizar reglas del Álgebra? ¿Es el contenido del Álgebra la fuente del problema? ¿O es la forma en que es enseñada lo que causa a los estudiantes no ser capaces de dar sentido a la materia? ¿O hacen los estudiantes un acercamiento a las tareas algebraicas de una manera que es inapropiada para aprender la materia en cuestión? (Kieran, 1992). Las diferentes investigaciones tratan de buscar respuestas a éstos y otros interrogantes en torno a la naturaleza del Álgebra y a los procesos de pensamiento implicados.

El propósito general de esta investigación es determinar las dificultades, obstáculos y errores que tienen los alumnos de la Enseñanza

Secundaria Obligatoria (E.S.O.), para comprender y trabajar con objetos matemáticos relativos al pensamiento algebraico, siendo uno de los objetivos finales elaborar, en el marco de los resultados obtenidos, una Propuesta Curricular para el lenguaje algebraico.

En este estudio del lenguaje algebraico se aborda el problema desde una perspectiva global, donde el conocimiento algebraico puede ser representado bajo diferentes registros semióticos, aceptando que las operaciones de cambio entre ellos constituye una operación cognitiva básica, que permite analizar las dificultades, obstáculos y errores conceptuales y encontrar procedimientos adecuados para corregirlos, y que la naturaleza abstracta del lenguaje algebraico debe ser entendida como un proceso caracterizado por diferentes etapas, reflejadas en los diferentes estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitivos, que se caracterizan como estadios semiótico, estructural y autónomo. Es en este desarrollo donde debemos entender la construcción del conocimiento conceptual y procedimental del Álgebra.

Las dificultades asociadas al aprendizaje del lenguaje algebraico de los alumnos de la E.S.O. no ofrece dudas. Estas dificultades se traducen en errores que cometen los alumnos y éstos se producen por causas muy diversas que se refuerzan en redes complejas. Es útil desde la perspectiva de la investigación y de la enseñanza-aprendizaje, tener elementos de análisis de estos errores, para determinar la naturaleza del error, entender al alumno, descubrir sus conocimientos subyacentes y diseñar tareas que apoyen la construcción del pensamiento algebraico. Centrándonos en la búsqueda de las causas que originan las dificultades en el inicio del Aprendizaje del Álgebra, estudiamos, por una parte, las operaciones, procesos y estrategias que realiza el sujeto cuando aprende, o sea, cuando adquiere, organiza, elabora y recupera conocimientos del lenguaje algebraico y, por otra, potencia el control y la toma de conciencia de los procesos cognitivos del alumno en el aprendizaje de dicho lenguaje.

Se plantea como problema concreto el estudio de las habilidades cognitivas operacionales y conceptuales en los procesos de adquisición y uso del lenguaje algebraico y también del uso y comprensión de los registros o sistemas de representación utilizados en dos tópicos concretos: expresiones algebraicas y ecuaciones lineales

Nuestra experiencia conecta los dos caminos esenciales del objeto algebraico, las habilidades cognitivas de carácter operacional y las habilidades cognitivas de carácter conceptual, y ha investigado en el ámbito escolar habitual de alumnos de 12-14 años, "explorando" el acercamiento al lenguaje algebraico, subrayando las posibilidades que aparecen al introducir nuevos recursos de enseñanza y medios de observación.

1.2.1 Caracterización de la investigación

La propuesta de trabajo desarrollada pretende superar posiciones extremas entre los aspectos cualitativos y cuantitativos de los paradigmas de investigación (en el mismo sentido que proponen Cook y Reichardt, 1986), y recoge métodos y técnicas de ambos, útiles y complementarios en función de los tipos de estudio que se realicen (Socas y otros, 1995).

Necesariamente hemos tenido que optar por un método experimental, que nos permita, una vez identificadas las variables a estudiar, obtener unos resultados matemáticamente interpretables, enfoque cuantitativo. Sin embargo, no es el producto el aspecto más importante de nuestra investigación, sino más bien, queremos comprender cómo se comportan los alumnos durante el proceso de la implementación del diseño, cuáles son sus dificultades, dónde se producen sus bloqueos; y por ello, hemos de utilizar un enfoque cualitativo.

Por una parte, pretendemos estudiar los resultados del desarrollo de un diseño de instrucción para expresiones algebraicas (DISEA) y otro para ecuaciones (DISEC). La elaboración de un Diseño de cambio curricular parte de tener unos objetivos claros que diferencien el nuevo currículo del que está en uso.

La instrucción en el aula por el investigador conlleva una interacción entre él y los estudiantes. Esta interacción directa y a pequeña escala toma la forma de un experimento de enseñanza-aprendizaje, donde la instrucción en el aula y el currículo diseñado son probados en el momento en que se desarrolla la interacción directa entre ambos. En esta fase el método de investigación es eminentemente cualitativo, siendo la observación directa la técnica fundamental. Las peculiaridades de cada niño, sus ritmos de aprendizaje, las dificultades que se van encontrando, se van plasmando en un diario el cual se complementa con las observaciones del profesor habitual del aula. Estos datos se completan con un análisis de los cuadernos de los alumnos. Aplicamos unos Cuestionarios antes y después de la instrucción para valorar la incidencia de la misma y los logros de los alumnos.

Con todos los datos obtenidos se seleccionan unos alumnos para hacer un estudio de casos que se realiza mediante entrevistas vídeograbadas. Esta fase nos permite conocer los procesos de cada niño al realizar las actividades del diseño, al tiempo que se detectan pautas, tendencias, dificultades, obstáculos, errores, que, si bien, no son generalizables, aportan nuevos datos sobre el aprendizaje específico que estamos trabajando. Finalmente, describimos los estudios biográficos hechos a dos alumnos, utilizando los datos obtenidos con los diferentes instrumentos usados, que ofrecen información sobre los procesos cognitivos conceptuales y operacionales, en su aprendizaje de las expresiones algebraicas y ecuaciones.

Para completar este trabajo, hemos investigado algunos aspectos del dominio afectivo. Este estudio se ha realizado a partir de unas escalas de actitudes, que han sido analizadas de forma cuantitativa.

1.3 LA ENSEÑANZA - APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA ESCOLAR

La enseñanza-aprendizaje del Álgebra escolar genera muchas dificultades al profesorado y a los alumnos y éstas son de naturaleza diversa. Su procedencia se puede concretar en el propio ámbito escolar, pero no sólo en él, pues existen influencias de agentes externos a la propia escuela, mas no ajenos a la difícil empresa de la enseñanza-aprendizaje del Álgebra, en este nivel educativo.

1.3.1 El Álgebra históricamente. Breves consideraciones epistemológicas

Al plantearnos un aprendizaje con significado para el Álgebra, hemos tenido en cuenta la historia de sus conceptos, ya que nos ofrece diferentes ideas para la actividad didáctica, incluso puede ser utilizada por el profesor como referencia para anticipar dificultades o errores posibles en el aprendizaje de los alumnos.

De forma sucinta señalamos las distintas acepciones de la variable a lo largo de la historia, según los distintos usos que se hace de ella en las diferentes ramas de la ciencia y según las concepciones que tienen, los alumnos. Un estudio más amplio se recoge en Socas y otros (1989).

Sabemos que el uso de las letras como variables procede de la geometría griega, teniendo claro que el proceder de la geometría algebraica griega no pretendía resolver ecuaciones algebraicas, sino satisfacer condiciones geométricas, y además la solución griega se aplica a líneas y áreas únicamente, no a cualquier cantidad numérica. Sin embargo, los matemáticos árabes tratan directamente el problema algebraico - utilización de las operaciones aritméticas y de los algoritmos algebraicos - y la geometría clarifica y concreta los procesos algebraicos.

El libro II de los Elementos de Euclides es uno de los más cortos de los suyos, sólo contiene 14 proposiciones, ninguna de las cuales juega papel importante en los libros de texto modernos, y, sin embargo, en la época de Euclides este libro tenía una gran importancia, hecho que se explica porque hoy tenemos un Álgebra simbólica y una trigonometría que reemplaza a sus equivalentes geométricos griegos. La proposición 1 del Libro II citado *"Si tenemos dos rectas y cortamos una de ellas en un número cualquiera de segmentos, entonces el rectángulo contenido por las dos líneas rectas es igual a los rectángulos contenidos por la línea recta que no fue cortada y cada uno de los segmentos anteriores"*, no es otra cosa que la formulación geométrica de una de las leyes fundamentales de la Aritmética, la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma: $a(b + c + d) = ab + ac + ad$. Nosotros hoy representamos las magnitudes por letras y usamos numerosas reglas algorítmicas de Álgebra, y, en tiempos de Euclides, las magnitudes se representaban como segmentos de línea recta, obedeciendo a los axiomas y teoremas de geometría. Se dice que los griegos tenían el Libro II de los Elementos que les servía más o menos para los mismos fines que el Álgebra simbólica actual. El Álgebra moderna facilita enormemente la manipulación de relaciones entre magnitudes y el Álgebra geométrica daba mucha habilidad a la hora de aplicar teoremas.

En Grecia, las letras también significaban números, que podían haber inducido a los matemáticos griegos a su utilización como incógnita; sin embargo, se produce un impedimento fuerte para trasladar el uso geométrico de las letras, directamente al Álgebra: mientras todos los puntos son "el mismo" en geometría, los números tienen una individualidad bien distinguida.

Parece conveniente también hacer algunas consideraciones epistemológicas acerca de los estadios que se han detectado en la propia evolución histórica del Álgebra por ser similares a los estadios recorridos por los estudiantes en el aprendizaje del Álgebra.

1º) Estadio retórico, anterior a Diofanto, donde se usaba el lenguaje ordinario en la descripción de problemas matemáticos particulares; había una total ausencia de símbolos o signos para representar incógnitas.

2º) Estadio del Álgebra sincopada. Diofanto introduce abreviaturas para representar incógnitas. La preocupación central estaba en descubrir el valor de la incógnita, no en intentar expresar generalizaciones.

3º) Estadio del Álgebra simbólica: Viète (1540-1603) inicia el uso de las letras para representar cantidades dadas. Hay posibilidad de expresar soluciones generales. El Álgebra ya es vista como herramienta para probar reglas que gobiernan relaciones numéricas.

Otra cuestión epistemológica a considerar es la necesidad de una notación simbólica sabiendo que la fuerza del lenguaje simbólico radica en que elimina el significado de casos particulares e incluso el de las operaciones que se efectúan sobre ellos. Pero es evidente que hay que explicitar (en esto coincidimos con las ideas de Sfard y Linchevski, 1994), que la historia del Álgebra no es una historia de símbolos, aunque es verdad que desde un cierto estado los conceptos algebraicos llegan a ser inseparables prácticamente de los símbolos, sin embargo nuestro conocimiento algebraico se construye a través de manipulaciones e investigaciones de expresiones formales y además de cambios en paralelo desde simbolismo a metamorfosis conceptuales. Así, desde que fue introducida la notación algebraica moderna, la historia del Álgebra y la historia de los símbolos, aunque ciertamente diferentes, llegaron a estar íntimamente relacionadas, y es prácticamente imposible hablar de la historia de una de ellas sin hablar de la historia de la otra.

Otro aspecto a tener en cuenta es la importancia de observar la correlación entre el avance desde el Álgebra operacional al Álgebra estructural y la dificultad que presentan las ideas algebraicas para su uso.

1.3.2 El Álgebra escolar

Sabemos que para muchos alumnos, el Álgebra resulta difícil e incluso irrelevante y algunos llegan a experimentar un rechazo tan intenso que impregna el conjunto de su actitud hacia las Matemáticas. Para estos alumnos lo que les pedimos hacer en Álgebra no tiene un significado real subyacente. Muchos estudiantes no están dispuestos en el mismo sentido que el profesorado, que se muestra siempre ansioso de pasar al tema siguiente e introduce ideas algebraicas demasiado pronto y demasiado de prisa. La explicación piagetiana de este fenómeno se correspondería con el razonamiento según el cual el desarrollo, a partir del pensamiento operacional concreto para pasar al pensamiento operacional formal, no está lo suficientemente avanzado en el momento en que deseamos progresar para llegar a las siguientes ideas algebraicas. En términos de la teoría piagetiana, sólo en la etapa de las operaciones formales se puede esperar que vaya desapareciendo la dependencia de los referentes concretos. Frecuentemente todos necesitamos funcionar en un nivel más concreto, y a menudo es útil una introducción de distintos sistemas de representación.

Sin embargo, el acercamiento al "Álgebra" se puede considerar para todos los niños y todas las edades en tanto en cuanto es un modo de pensar, sirve como método de aprehender y de explicar interrelaciones, permite una manera de llegar a la generalidad por la vía de lo particular y descubrir los "modelos" que se presentan en lo cotidiano.

Por eso, los alumnos deben aprender el Álgebra como un conjunto de competencias incluyendo la representación de las relaciones cuantitativas, como un estilo del pensamiento matemático, el pensamiento algebraico, que "da cuerpo a la construcción y a la representación del modelo de regularidad, permite razonar, proyectar y conjeturar" (Chambers, 1994).

Se podría señalar entre los mitos más extendidos referidos al Álgebra el hecho de que se trata de:

. Manipulación de un lenguaje utilizando únicamente símbolos y variables.

. Disciplina reservada al ciclo secundario.

. Disciplina demasiado ardua, fuerte.

. Disciplina reservada a los alumnos más dotados.

Parece que actualmente hay unanimidad cuando se habla de las competencias del Álgebra en la escuela obligatoria. El Álgebra debe ocuparse del estudio de las “letras” o “variables” y de las propiedades que las relacionan. Ahora bien, existen diferentes interpretaciones que pueden hacerse de la afirmación anterior, y que dependen de la intervención que poseen esas “letras” (variables) en diferentes contextos.

Las diferentes interpretaciones de la variable, darán lugar a distintos tipos de Álgebra, apareciendo así distintos currículos y, como consecuencia, diferentes concepciones de la enseñanza-aprendizaje de la materia que resulta difícil de delimitar.

Por otra parte, siendo evidente la diferencia entre el Álgebra superior (enseñada en la Universidad) y el Álgebra de la escuela, resulta obvio que las experiencias del profesor en la primera, pueden ser "utilizadas" para la segunda, aunque nunca "enseñadas".

Kaput (1996) afirma que el contenido del programa de la asignatura del Álgebra "ha ido evolucionando históricamente hasta convertirse en una manipulación de cadenas de caracteres alfanuméricos, guiados por varios principios sintácticos y convenciones interrumpidas de manera ocasional por "aplicaciones" en forma de problemas cortos presentados por textos breves de peculiar estilo".

Igualmente en el complicado proceso histórico seguido por la Humanidad para llegar al actual uso e interpretación de las letras, en la enseñanza del Álgebra se pueden distinguir también distintos períodos y diferentes interpretaciones de las letras. En libros de la década de los 60, la letra como "variable" solía aparecer representada por números cuando se comenzaba a resolver sistemas de ecuaciones. En el Álgebra moderna, las variables se entienden como "símbolos que pueden ser sustituidos por nombres de objetos y normalmente, por números". En la actualidad, esta última tendencia es la más utilizada, esto es, se interpreta como un símbolo que puede ser reemplazado por elementos de un conjunto. Muchos de nuestros alumnos (incluso universitarios), consideran que las variables son letras que deben ser sustituidas por números obligatoriamente, y no se detienen a analizar que en geometría, por ejemplo, las variables representan puntos, rectas, etc.; en lógica, proposiciones; en análisis, funciones.

Haciendo análisis histórico, se observa que la interpretación del Álgebra como Aritmética generalizada tuvo una repercusión inmediata, puesto que desde la invención de la notación algebraica (Viète) hasta el nacimiento del cálculo, pasaron escasamente 150 años.

Otra interpretación que podemos hacer del Álgebra va encaminada a considerarla como el estudio de métodos para resolver ciertos problemas concretos: las ecuaciones. En este caso, las letras se consideran como incógnitas específicas a determinar.

Otra concepción que se puede tener del Álgebra es la del "estudio de relaciones entre cantidades". En este caso se considera a las variables en su sentido completo de variabilidad.

Muchos profesores piensan que el sentido funcional es el que priva en la enseñanza del Álgebra. El aspecto funcional del Álgebra es esencial en la actualidad para el uso de los lenguajes informáticos y hay que tener en cuenta que existe una diferencia sustancial en el empleo en dichos lenguajes; por ejemplo, un contador es una función que nos permite obtener sucesivos valores para una cierta variable. En este caso, la función se representa por "x = x + 1", y, considerando los aspectos anteriores, será una ecuación irresoluble donde las letras se interpretan como números generalizados. Creemos que es fundamental tener esto en cuenta, dada la importancia que la informática va adquiriendo en la enseñanza.

Otra interpretación que tiene el Álgebra es la que denominamos interpretación estructural. Las letras constituyen entes pertenecientes a estructuras algebraicas tales como grupos, anillos, dominios de integridad o cuerpos, a los que se les pueden aplicar las propiedades satisfechas por cada uno de los conjuntos en los que se actúe. Las ecuaciones en los conjuntos usuales (N, Z, Q y R) admitirán soluciones según la estructura que se considere.

Estas interpretaciones deben ser utilizadas en la elaboración de un currículo de Álgebra, de forma que éste no puede en ningún momento observar uno solo de esos contextos, por lo que es necesario combinarlos y no limitarse exclusivamente a considerar el Álgebra como Aritmética generalizada, ni como el estudio de las ecuaciones, ni desde el punto de vista funcional, ni desde el aspecto estructural, aunque es cierto que un tratamiento inicial como Aritmética Generalizada favorece el desarrollo de los otros aspectos.

1.3.2.1 El Álgebra en las diferentes reformas educativas

El Álgebra como materia escolar se introduce a finales del siglo pasado en los niveles de secundaria en los países europeos y americanos. Los contenidos y su secuencia han permanecido casi inalterables hasta la fecha. Muchos cursos iniciales de Álgebra en diferentes países empiezan con términos literales y su relación con referencias numéricas dentro del contexto, primero de expresiones algebraicas, y, más tarde, de ecuaciones. Después de un período breve donde se realizan sustituciones numéricas en expresiones y ecuaciones, se trabaja la simplificación de expresiones y la resolución de ecuaciones por métodos formales. De esta manera, la manipulación y factorización de polinomios y expresiones racionales, se convierten en actividades regulares. Eventualmente algunos programas incluyen funciones (lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigononométricas) y sus representaciones algebraica, tabular y gráfica. Se intercalan problemas verbales, que pretenden ser aplicaciones en el "mundo real" de las técnicas algebraicas recién aprendidas. Estos contenidos son los que comúnmente aparecen en todos los libros de texto de Álgebra elemental (Kieran, 1992).

La caracterización del Álgebra como una parte del pensamiento matemático ha permanecido casi inalterable en este siglo.

En los párrafos siguientes indicamos algunos aspectos de la evolución de los contenidos del Álgebra en la Enseñanza Obligatoria en España.

En los Programas anteriores a la Ley General de Educación (1970), el Álgebra se contempla como operatoria con expresiones numéricas o alfanuméricas; la enseñanza de la resolución de ecuaciones tiene poco que ver con el medio del niño, con su mundo real, con el contexto y con el sentido común. El lenguaje está basado fundamentalmente en reglas memorísticas y sin significado real. Estas Matemáticas que se enseñaban en los niveles elementales se encontraban alejadas del desarrollo que experimentaba la propia Matemática y de las investigaciones que se realizaban en el campo educativo, fundamentalmente en el terreno de la Psicología. Es a partir del Congreso de Royaumont (Francia, 1959) cuando se decide el cambio para actualizar los contenidos matemáticos impartidos en las escuelas. Y será un año más tarde, en el Seminario de Dubrownix (Yugoslavia), donde se establecerán las sugerencias e ideas de los nuevos programas. Esta actualización se orienta principalmente en algunos países a introducir la teoría de conjuntos en las Matemáticas que se enseñaban tanto en Primaria como en Secundaria, intentando con ello que el estudio de las "estructuras" algebraicas constituyese el foco de lo enseñado. La interpretación estructural tomó un auge importante en la escuela.

El fracaso de esta medida no tardó en hacerse patente, y en todos los países donde se gestó la Reforma de la Enseñanza de las Matemáticas, se replanteó esta medida radical y se tomó, desde ese momento, una conciencia más moderada del problema. No obstante, justo cuando la mayoría de los promotores de esta reestructuración de contenidos, dio marcha atrás para plantearse desde otra perspectiva la situación del fracaso escolar, surge en nuestro país la Ley General de Educación (1970) que en sus programas de Matemáticas (Nuevas Orientaciones) considera como núcleo central de la enseñanza elemental, tanto la teoría de conjuntos como las estructuras del Álgebra conjuntista; prácticamente el 50 % de los programas estaban dedicados a cuestiones algebraicas.

Las expresiones algebraicas y las ecuaciones estaban subordinadas a las estructuras. Esta concepción del Álgebra se transforma primero en elemento unificador de toda la Matemática y, luego, en el de toda la enseñanza de las Matemáticas; la estructura básica es el "grupo". El estudio del Álgebra tenía como finalidad aprender propiedades operacionales y saber trabajar con paréntesis. Esta concepción del Álgebra ocupó diversos aspectos en su desarrollo: 1) Lógica, Conjuntos, Relaciones y Aplicaciones (Funciones), 2) Operaciones y sistemas operacionales, 3) Estructuras e isomorfismos, 4) Construcción de los sistemas de números y 5) Estructura de Espacio Vectorial.

Es en el año 1981, con la instauración de los Programas Renovados, donde se modifica en gran medida la concepción de lo que debe ser la enseñanza en general de las Matemáticas, y en particular del Álgebra, en la Enseñanza General Básica (E.G.B.). El rigor y la abstracción propios de los programas anteriores son sustituidos por el aspecto funcional, eliminando en gran parte los contenidos estructurales enfatizados en la década anterior. Se establecen unos Niveles Básicos de Referencia, un documento de apoyo para los profesores que modifica ostensiblemente, tanto la estructura general del currículo como el nivel de profundización de los tópicos a tratar. La proporción de contenido algebraico disminuye hasta ocupar aproximadamente el 25 % de las Matemáticas de la escuela.

Los Programas Renovados no fueron puestos en marcha totalmente, y en el año 1984 se establece un nuevo Proyecto de Reforma en el que se señala una serie de *orientaciones* para la enseñanza de las Matemáticas en el Ciclo Superior. Los contenidos de Álgebra (al igual que los de todas las ramas de las Matemáticas) no vienen especificados y quedan constituidos mediante los llamados "objetivos terminales de área".

A la vista de los objetivos que se plantearon, se observa que el Álgebra aparece más ligada a los aspectos prácticos y utilitarios de los que adolecen los otros programas. La nueva programación pretende recuperar de los programas anteriores los aspectos didácticamente válidos, excluyendo de forma clara los planteamientos mediante "las estructuras" y, sin embargo, la concepción del Álgebra como Aritmética generalizada no queda muy clara en estas recomendaciones. Aproximadamente un 10 % del programa está dedicado a aspectos algebraicos.

De igual forma constatamos en otras propuestas de cambio curricular, por ejemplo la de U.S.A., que se recoge en los Estándares de la N.C.T.M., la necesidad de reconocer la importancia de una nueva pedagogía (Professional Standards for Teaching Mathematics, 1991) como apunta la Norma 4 “Conocimiento de la Pedagogía de las Matemáticas” y también la importancia de promover el Álgebra como disciplina que debe ser enseñada en los niveles K-12 (Curriculum and Evaluations Standars for School Mathematics, 1989).

Por ejemplo, en el estándar 9 de los niveles 5-8 referido al Álgebra se especifica que el currículo de Matemáticas debe incluir exploraciones de conceptos y procesos algebraicos para que los estudiantes sean capaces de:

- entender los conceptos de variable, expresión y ecuación;
- representar situaciones y patrones numéricos con tablas, gráficas, reglas verbales y ecuaciones, y explorar las interrelaciones de estas representaciones;
- analizar tablas y gráficas para identificar propiedades y relaciones;
- adquirir confianza en la resolución de ecuaciones lineales usando métodos concretos, informales y formales;
- investigar de manera informal inecuaciones y ecuaciones no lineales;
- aplicar métodos algebraicos en la resolución de diversos problemas matemáticos y del mundo real.

En el estándar 4 del nivel 9-12 también se sugiere que se debe incluir investigación de conexiones matemáticas para que los estudiantes sean capaces de:

- ver las matemáticas como un todo integral,
- explorar problemas y describir los resultados usando modelos o representaciones matemáticas gráficas, numéricas, físicas, algebraicas y verbales;
- aplicar el pensamiento matemático y la creación de modelos para resolver problemas que surjan en otras áreas, tales como arte, música, psicología, ciencias o

economía.

En el estándar 5, también de los niveles 9-12, el currículo de matemáticas debe proseguir en el estudio de conceptos y métodos algebraicos para que los estudiantes sean capaces de:

- representar situaciones que requieran variables en expresiones algebraicas, ecuaciones, inecuaciones y matrices;
- utilizar tablas y gráficas como herramienta para interpretar expresiones algebraicas, ecuaciones e inecuaciones;
- operar con expresiones algebraicas y matrices y resolver ecuaciones e inecuaciones;
- apreciar la potencia de la abstracción y el simbolismo matemático.

Acerca de la influencia de esta formación en la comprensión del Álgebra en la vida futura del estudiante indican que permitirá:

- resolver ecuaciones lineales con métodos matriciales;
- demostrar que manejan con soltura las transformaciones algebraicas, incluyendo técnicas basadas en teoría de ecuaciones.

Y además en el estudio de la geometría, desde una perspectiva algebraica, también serán capaces de:

- deducir las propiedades de una figura utilizando el Álgebra vectorial;
- utilizar las transformaciones, los ejes de coordenadas y los vectores en la resolución de problemas a través de la inclusión en los niveles 9-12 del estudio de la geometría en dos y tres dimensiones desde un punto de vista algebraico:
    - convirtiendo representaciones sintéticas en representaciones analíticas;
    - deduciendo las propiedades de una figura por medio de transformaciones y de coordenadas;
    - identificando figuras congruentes y semejantes por medio de transformaciones;
    - analizando las propiedades de las transformaciones euclídeas y relacionando traslaciones con vectores.

1.3.2.2 El Álgebra en la Enseñanza Secundaria Obligatoria

Ya se han indicado las tendencias acerca del Álgebra en la escuela obligatoria. La interpretación que está más en consonancia con el desarrollo histórico del Álgebra en sus tres etapas: retórica, sincopada y simbólica, sugiere que la forma más convencional de concebirla es como la rama de las Matemáticas que trata de la simbolización de las relaciones numéricas generales, de las estructuras matemáticas, y, de las operaciones de esas estructuras. En este sentido, el Álgebra escolar se interpreta como una "aritmética generalizada" y como tal involucra la formulación y manipulación de relaciones y propiedades numéricas. Es fundamentalmente ésta la propuesta que se contempla en el Diseño Curricular Base del Área de Matemáticas para la Enseñanza Secundaria Obligatoria (12-16 años) en la Nueva Reforma del Sistema Educativo Español (1989).

Conviene destacar que los planteamientos de las Matemáticas en los currículos actuales chocan frontalmente con los de los programas anteriores. La LOGSE destaca la importancia de los procesos de adquisición del conocimiento, así como la relevancia de intervenir en el camino de aprendizaje y maduración personal recorrido por el alumno -aspectos estos subyacentes en una posición constructivista de la enseñanza- en contraposición con el modelo tecnológico -con fundamentos conductistas- propugnado por la anterior Ley de Educación, para la cual lo esencial era la consecución de una serie de objetivos y contenidos, susceptibles de ser observados y medidos.

Consideramos el Diseño Curricular Base de Matemáticas como una organización sistemática, basada en una caracterización mediante cuatro componentes generales: objetivos, contenidos, metodología y evaluación (Rico, 1997). Estas cuatro componentes se van desarrollando y concretando, primero, en los Proyectos Curriculares de Centro, y, más tarde, en las Programaciones de Aula y la relación entre ellas constituye, para la mayoría de los profesores, un difícil problema a resolver.

Es importante resaltar que el Álgebra se contempla en este Diseño como un Bloque Conceptual, además de aparecer de manera transversal a lo largo de todos los Bloques.

El Álgebra se puede considerar como una de las partes de la Matemática que influye considerablemente en el aspecto formativo de su propia actividad, favoreciendo la potencia y simplicidad de sus propios lenguajes y métodos.

El Diseño Curricular incide de manera especial en la construcción del conocimiento matemático en su etapa final, generalización y formalización ("Características especiales del Área" del D.C.B.), teniendo en cuenta que la formalización, la precisión y la falta de ambigüedad, no son el punto de partida a la hora de presentar los conocimientos, sino una meta a donde se llega por aproximación y análisis de la realidad; es el punto de llegada de un largo proceso de construcción.

Los Objetivos Generales del Área implicados específicamente son: "Incorporar al lenguaje y modos de argumentación habituales las distintas formas de expresión matemática (numérica, gráfica, geométrica, lógica, algebraica, probabilística) con el fin de comunicarse de manera precisa y rigurosa" (nº 1), y "Actuar, en situaciones cotidianas y en la resolución de problemas, de acuerdo con modos propios de la actividad matemática tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones" (nº 9).

En el desarrollo del Bloque Primero de Contenidos: "Números y Operaciones: significados, estrategias y simbolización" ("Números y Operaciones" en el D.C.B. del Gobierno de Canarias, 1991), se contempla en la Introducción, cuando expresa que con este Bloque "se pretende habituar al alumnado a descubrir patrones, reglas y leyes, efectos sorprendentes, etc." y que "esto permite estimular el trabajo y el ingenio personal, al mismo tiempo que contribuye a un mayor conocimiento de los números y sus relaciones"; "El lenguaje algebraico es un contenido donde se recomienda poner especial énfasis, ya que plantea dificultades para gran parte del alumnado; se debe pretender poco más que los objetos algebraicos que se manejen tengan significado para el alumno, reforzando conceptos como los de variable, incógnita, solución, etc., evitándose la manipulación de objetos algebraicos fuera de contexto".

Los *Conceptos* (Hechos, conceptos y principios, en el D.C.B. del M.E.C., 1989), aparecen en el apartado nº 7, El lenguaje algebraico:

- Significado y uso de las letras para representar números (un número desconocido fijo, un número cualquiera, una relación entre conjuntos de números...). Fórmulas y ecuaciones.
- Reglas para desarrollar y simplificar expresiones literales sencillas.

En el D.C.B. del Gobierno Canario, 1991, los conceptos algebraicos se explicitan de la siguiente manera en el número 5, Álgebra:

5.1. Lenguaje algebraico. Significado de las letras para representar números.

5.2. Ecuaciones de primer y segundo grados.

5.3. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Con relación a los *Procedimientos*, que en conjunto se refieren a utilización de distintos lenguajes, algoritmos y destrezas y estrategias generales, se recogen en los apartados 1, 10, 11, 12, 13, 14, 18 y 21, los que hacen referencia al Álgebra.

De manera concreta:

1. Interpretación y utilización de los diferentes lenguajes numérico, gráfico, algebraico.

10. Simbolización, mediante letras, números conocidos, desconocidos, etc.

11. Expresión algebraica de enunciados de problemas.

12. Simbolización de relaciones mediante fórmulas y ecuaciones.

13. Desarrollo y síntesis de expresiones literales sencillas.

14. Resolución por métodos numéricos y gráficos de ecuaciones de primer y segundo grados, sistemas lineales con dos incógnitas, interpretando las posibles soluciones.

18. Realización de operaciones sencillas con expresiones literales para adquirir agilidad en el manejo de funciones, ecuaciones y fórmulas.

21. Utilización del razonamiento aritmético para, dada una operación u operaciones, establecer el enunciado de una situación problemática.

Con relación a los contenidos de *Actitudes*, considera esencial en esta rama de las Matemáticas, la "valoración del lenguaje numérico y algebraico para representar, comunicar o resolver situaciones de la vida cotidiana".

En cuanto al Bachillerato en el documento "Estructura y contenido para el Bachillerato" del Ministerio de Educación y Ciencia (1993), se recoge explícitamente, en las Especialidades de Humanidades y Ciencias Sociales, la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (en primer curso, sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, y en el segundo, utilizando las matrices), mediante métodos gráficos, así como una profundización de lo aprendido en la etapa anterior. Con respecto al Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, y Tecnología, en el primer curso se trata la resolución de ecuaciones algebraicas, y en el segundo curso se estudian las matrices y determinantes, y como aplicación, resolver sistemas de ecuaciones lineales. En el segundo curso del Bachillerato de Ciencias Humanas y Sociales aparece como contenido específico la programación lineal.

Añadimos, finalmente, una última reflexión sobre el Álgebra entendida como lenguaje en la E.S.O., que es el ámbito de nuestra investigación.

El lenguaje habitual por medio del cual logramos comunicarnos, exige de nuestra parte una reflexión sobre la relación con su uso al transmitir ideas relativas a las Matemáticas.

Para algunos autores, la Matemática es ella misma un lenguaje. Para otros, esta afirmación es un “eslogan sin sentido” o “algo peligroso que, generalmente, confunde”.

Lo que sí queda internacionalmente admitido es que la Matemática ha desarrollado una sintaxis y un vocabulario propios, aunque sus símbolos y terminología no sean, en exclusiva, de la Matemática misma.

La Matemática tiene una notación que le es propia y que hace posible la aplicación formal de las reglas de la Aritmética o del Álgebra. Esta notación formal en Matemáticas es esencial en el desarrollo de la misma y es causa de gran confusión en la opinión de los alumnos.

Algunas ideas que vamos a considerar en el trabajo posterior y que recogemos aquí, de forma breve, son:

- “El Álgebra es una fuente de confusión considerable y de actitudes negativas en los alumnos” (Booth, 1988).

- El uso de la notación formal puede conducirnos a reglas irracionales, a manipulaciones sin sentido y, no obstante, tal manipulación formal es un rasgo esencial de las Matemáticas.

- El lenguaje habitual es un vehículo necesario para la comunicación de ideas, pero insistimos en que en Matemáticas es el simbolismo formal otra manera de realizar la comunicación, principalmente de forma escrita.

- Teniendo en cuenta que en la semiótica (estudio de los signos), la semántica se ocupa de las relaciones entre los signos y los objetos denotados por ellos, y la sintaxis, estudia exclusivamente las relaciones de los signos entre sí, podemos afirmar que el lenguaje escrito de las Matemáticas opera también en dos niveles:

Semántico, donde los símbolos y las notaciones son dadas con un significado claro y preciso (paralelismo con el lenguaje habitual).

Sintáctico, se opera sin referencia a ningún significado.

- En Matemáticas, el lenguaje habitual tiene que ayudar a interpretar el lenguaje simbólico, lo que produce conflicto de precisión. El lenguaje habitual puede expresar su significado a pesar de que se cometen abusos morfosintácticos, tales como roturas de reglas gramaticales o faltas de ortografía. El significado puede ser comunicado por alusión o por asociación, sin embargo, el lenguaje de Matemáticas es más preciso, está sometido a reglas exactas, no comunica su significado por el vocabulario común (raíz, producto, factor, índice,…).

Una solución para eliminar el uso del lenguaje habitual de las Matemáticas, a causa de las dificultades implicadas, sería escribirlas involucrando solamente símbolos, pero esto serviría únicamente para incrementar las distancias entre las Matemáticas y la realidad.

Sin embargo, otras dificultades surgen cuando para comunicar los objetos matemáticos hacemos referencia al lenguaje simbólico. Por ejemplo:

$a^3 = a.a.a$

$a^5 = a.a.a.a.a$

$a^3 . a^5 = a.a.a . a.a.a.a.a = a^8$

…

$a^m . a^n = a^{m+n}$

….

$a^m : a^n = a^{m-n}$

donde m y n representan dos números cualesquiera, distintos de cero, y en el segundo caso, m es mayor que n.

Las restricciones de m y n son necesarias para la definición inicial de a^2, a^3, … Los símbolos como a^0, a^{-2}, $a^{1/2}$, no tienen significado en términos de esta definición.

Nos preguntamos, ¿bajo qué condiciones está permitido y es ventajoso quitar las restricciones anteriores de m y n?, es decir, ¿cómo hacer para que las reglas precedentes sean válidas para todos los valores de m y n, racionales?; surgen así las extensiones de notación de exponentes:

a^0, se le representa por 1

a^{-2}, se le representa por $1/a^2$

$a^{1/2}$, se le representa por $\sqrt{a}$

y así sucesivamente.

Intentaremos en nuestra investigación aportar resultados que permitan analizar y entender aspectos de esta problemática brevemente presentada.

1.4 INVESTIGACIONES SOBRE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA ESCOLAR

La investigación en Educación Matemática, entendida como un proceso sistemático, controlado y objetivo, debe estar dirigida tanto al desarrollo de un cuerpo organizado de conocimientos científicos acerca de la Educación matemática, como a capacitar al educador para determinar qué tipo de enseñanza y qué condiciones de aprendizaje debe proporcionar al educando para obtener y desarrollar capacidades determinadas. La investigación en

Educación Matemática debe facilitar un mejor entendimiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas y de las condiciones en las cuales se puede realizar para obtener una óptima eficacia.

En las dos últimas décadas la corriente de la Didáctica de las Matemáticas se ha preocupado por señalar insistentemente este punto y se ha intentado diseñar situaciones de enseñanza en las que se intersectan trayectorias que se trazan desde distintos campos del saber, como son la psicología, la pedagogía, la epistemología, etc., hacia un problema específico de enseñanza de las Matemáticas (Glaeser, 1981). Sin embargo, los didactas advierten acerca del peligro de una posible desviación de la tarea de la investigación en uno u otro sentido.

Al presentar las investigaciones más significativas sobre la enseñanza/aprendizaje del Álgebra escolar, que tienen que ver con nuestro trabajo, las hemos querido organizar en tres partes: expresiones algebraicas, ecuaciones lineales y desarrollo curricular; básicamente no disjuntas, y que se intersectan en los diferentes trabajos de investigación y, por tanto, también en esta exposición.

Las investigaciones sobre la enseñanza-aprendizaje de expresiones algebraicas que nos ocupa en esta tesis se documentan bien en trabajos como Wagner y Kieran (1989), Kieran y Filloy (1989), Cedillo (1991), Kieran (1992), Rojano (1994), Cooper y otros (1997), Boulton y otros (1997), donde se identifican los factores más significativos que afectan a la enseñanza-aprendizaje del Álgebra en estos últimos cincuenta años. Estas investigaciones se realizan desde las perspectivas diferentes de los psicólogos cognitivos y de los didactas de las Matemáticas y, a modo de síntesis, están dirigidas a determinar los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del Álgebra, en los que se pueden diferenciar dos grandes bloques: los procesos cognitivos que se derivan de considerar la Aritmética como fundamento del Álgebra y los procesos específicos del pensamiento algebraico, y los intentos continuados de los investigadores de desarrollar una teoría de la enseñanza-aprendizaje del Álgebra.

Entre los diferentes documentos que intentan resumir las aportaciones de las investigaciones en Álgebra y las perspectivas de investigación, tenemos: *"Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra"* que constituye "Una agenda de investigación en el aprendizaje y enseñanza del álgebra" promovida por el National Council of Teachers of Mathematics (N.C.T.M.) y coordinado por **Wagner y Kieran** en **1989.**

Este documento forma parte de un Proyecto más amplio para cuatro áreas (Álgebra, Enseñanza y Evaluación de Resolución de Problemas, Enseñar Matemáticas efectivas y Aprendizaje de conceptos numéricos por los niños de grado medio), comenzado en U.S.A. en mayo de 1986, con el objetivo de dirigir esfuerzos de investigación hacia cuestiones importantes y para alentar el desarrollo de mecanismos de apoyo esenciales para colaborar en cadenas de preguntas que los docentes e investigadores se debían formular.

Las perspectivas investigadoras en Álgebra se basaron en: contenido, aprendizaje, enseñanza, pensamiento algebraico, afectividad, representación, tecnología, desarrollo curricular, evaluación y formación del profesor.

Algunos de los apartados de la agenda son de naturaleza empírica y otros están orientados más teóricamente.

Los temas principales, entre otros, fueron: ¿Qué es el Álgebra y qué debería ser?; ¿Qué nos han dicho los investigadores acerca de la enseñanza y aprendizaje del Álgebra?; ¿Qué es el pensamiento algebraico y cómo se relaciona con el pensamiento matemático general?; ¿Cuál es el papel de las representaciones en el aprendizaje del Álgebra?

Kieran, **1989**, en su artículo "The Early Learning of Algebra: A Structure Perspective" del citado documento, muestra una síntesis de las investigaciones sobre el aprendizaje inicial del Álgebra. Manifiesta que la enseñanza del Álgebra en la Secundaria usualmente empieza con los siguientes tópicos: variables, simplificación de expresiones algebraicas, ecuaciones con una incógnita, y resolución de ecuaciones, y que las dificultades que los estudiantes tienen en estos temas han estado centradas en a) el significado de las letras, b) el cambio a una serie de convenciones diferentes de las usadas en Aritmética y c) el reconocimiento y uso de estructuras.

Para ello plantea en su artículo dos grandes bloques: I) La Aritmética como fundamento del Álgebra y II) el Álgebra, específicamente.

En la primera parte (I) caracteriza el término "estructura" y expresa dos acepciones de la misma, una "estructura en Aritmética/Álgebra”, que se refiere, en general, a la estructura de un sistema que comprende un conjunto de números/variables numéricas, alguna operación (s) y las propiedades de la operación (s) y otra, en sentido más particular, la estructura de ciertos objetos matemáticos, tales como la estructura de expresiones, la estructura de ecuaciones, y la estructura de problemas verbales.

Posteriormente examina algunos estudios sobre reconocimiento y uso de estructura en niños de escuela elemental y lo hace acerca de "Ecuaciones y Problemas Verbales Aritméticos", "Solución de Proposiciones Abiertas" y "Expresiones Aritméticas Complejas".

En la segunda parte (II), referida al Álgebra específica, en la que al trabajar los alumnos necesitan reconocer y usar estructuras que han podido evitar en Aritmética al no tener que llegar a la formalización ya que les basta involucrarse en procedimientos intuitivos e informales, concreta su revisión secuenciándola en el orden en el que los tópicos de un curso de Álgebra se introducen: "Variables", "Expresiones Algebraicas" y “Ecuaciones Algebraicas y Resolución de Ecuaciones". En este último apartado de las ecuaciones revisa las investigaciones acerca de la estructura tanto superficial como sistémica, así como el procedimiento de resolución de ecuaciones y los modos de resolución de las mismas. Finalmente, concluye que desde la revisión de su investigación se constata que las dificultades con estos tópicos están centradas donde ya se ha apuntado al comienzo; asimismo se percibe que algunas de estas dificultades son atribuidas a la instrucción. Relacionada con la comprensión de ciertos aspectos estructurales, área particularmente problemática, indica la relación de igualdad entre las expresiones de los dos lados de una ecuación, que ha conducido al uso de muchos de los sistemas de representación.

La autora indica también que muchos de los estudios revisados fueron desarrollados en forma tradicional, sin computadora, y se pregunta si se producirían cambios relevantes en un ambiente de Álgebra enriquecido con el uso de la computadora como herramienta. Sin embargo cita a Fey (1984) y expresa que "los individuos deben tener una completa comprensión del alcance y estructura de los métodos matemáticos disponibles cuando las computadoras desarrollan mecánicamente los procedimientos operativos".

Finalmente, según Kieran, el reto para los investigadores sigue siendo "diseñar estudios que incrementen nuestro conocimiento de cómo pueden los estudiantes llegar a comprender la estructura del álgebra elemental y los métodos algebraicos".

Un segundo documento de gran interés es el artículo de **Kieran y Filloy**, **1989**, acerca de "El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica" (traducido al español por el Profesor Luis Puig, *Enseñanza de las Ciencias*, 1989, 7 (3), pp. 229-240), donde los autores describen algunas de las contribuciones significativas de investigación, de conocimiento creciente, no sólo en esa época sino actualmente, de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del Álgebra escolar, entre las que cabe destacar el marco aritmético de referencia.

Los autores comienzan haciendo referencia al Informe titulado "Investigación relacionada con el proceso de aprendizaje de las Matemáticas" del ICME 3 (Karlsruhe, Alemania, 1976). Este Congreso supuso un cambio de rumbo en la tendencia de las "Matemáticas Modernas". En este sentido también se expresa el N.C.T.M. en sus Estándares (Professional Standards for Teaching Mathematics, 1991) como indicamos anteriormente. Por otra parte, Bauersfeld-Skowronek, 1976, expresan "No deberíamos comenzar desde una teoría del aprendizaje general y neutral respecto del contenido, y derivar de ella una teoría del aprendizaje matemático... (más bien deberíamos) empezar (desde) procesos de aprendizaje específicos de contenido".

Asimismo hay requerimientos que impone esta disciplina del Álgebra sobre el estudiante, y que tienen implicaciones en la enseñanza de la misma. Sabemos que en el Álgebra escolar se "manipulan expresiones algebraicas", "resuelven ecuaciones" e "introduce el concepto de función". Su estudio corresponde al momento en que se enseña a los estudiantes a "cómo obtener y expresar relaciones" en la resolución de problemas "mediante el simbolismo algebraico".

Las contribuciones significativas indicadas anteriormente del artículo que comentamos se pueden agrupar en:

1) Contribuciones principales de la investigación a un cuerpo creciente de conocimientos sobre los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del Álgebra de Secundaria.

2) Discusión de los intentos continuados de los investigadores de desarrollar una teoría de la enseñanza-aprendizaje del Álgebra.

3) Algunas tendencias futuras en el aprendizaje y la enseñanza del Álgebra escolar.

Asimismo en este marco de referencia sitúan las investigaciones relativas a las variables, las expresiones y ecuaciones, la resolución de ecuaciones y las funciones y sus gráficas.

También referencia el enfoque mediante computadoras ya sugerido en el trabajo de Kieran citado anteriormente. Citan los trabajos de distintos entornos como el Logo, Pascal y LSE (Samurcay, 1985), Logo Math (Hoyles, Sutherland y Evans, 1985, Sutherland y Hoyles, 1986, Sutherland, 1987 a y b) para el análisis del trabajo de los estudiantes relacionado con el concepto de variable. También Thomas y Tall (1986) estudiaron este concepto en el entorno Basic. Otros estudios se centraron en la identificación de puntos en la recta numérica y en el plano cartesiano. Esta parte de su resumen termina aportando algunas deficiencias del trabajo con computadoras. Sin embargo ante la preocupación sobre la eficacia de ciertos aspectos del software con representaciones múltiples, citan a Goldenberg (1987) con la expresión "El sentido común apoya la idea que más de una representación de las funciones ayudará a los aprendices a entender lo que queda menos claro cuando se usa una representación", "Múltiples representaciones tomadas conjuntamente, deberían mejorar la fidelidad de todo el mensaje". Ante estos argumentos teóricos, Tall (1987 a y b) manifiesta que hay indicaciones claras de obstáculos conceptuales cuando se usan gráficas en computadora con alumnos mayores.

En el segundo agrupamiento, el de las consideraciones teóricas, señalan la falta de modelos teóricos paradigmáticos (en el sentido de Kuhn, 1962) en la investigación del Álgebra.

Ciñen su atención a los fenómenos didácticos cuyas causas puedan atribuirse a la materia matemática implicada en el proceso de enseñanza-aprendizaje del lenguaje algebraico.

Aquí en este grupo se comprenden las "nuevas tendencias e influencias correlacionadas", entre las que figura la lingüística, la teoría del procesamiento de la información relacionada con la Didáctica de la Matemática, que han tratado la noción de código. Otro ejemplo es el énfasis que la psicolingüística y la inteligencia artificial ponen en un modelo procesual de las habilidades humanas relacionándolo en cómo el modelo explica la aparición de errores en los procedimientos sintácticos de los usuarios del lenguaje algebraico. Por último, la atención al significado, con preferencia al abstracto, que ha proporcionado un punto de vista pragmático, ha conducido a un cambio de dirección en el interior del trabajo en Álgebra que se aparta de la "competencia" y va hacia la "actuación" del usuario del lenguaje algebraico. Se pretende que la gramática - el sistema formal abstracto del Álgebra- y la pragmática- principios del uso del lenguaje algebraico- sean dominios complementarios en el estudio de la psicología del aprendizaje del Álgebra.

También están comprendidos aquí "componentes de los modelos teóricos locales". Presentan que, para dar cuenta del significado completo de algunos mensajes matemáticos, al lado del significado estricto del texto matemático hay que admitir supuestos implícitos. El enfoque teórico de los autores toma en cuenta dos tipos de actividades: la producción de mensajes matemáticos y su recepción. Existe una componente pragmática ligada a la presencia de toda la evolución histórica de sistemas de signos matemáticos, siendo la notación algebraica la manera más inmediata de usar los sistemas de signos matemáticos en su aplicación a la ciencia, la tecnología y los procesos de información social actuales. También existe la componente pragmática que se debe a la estructura cognitiva del sujeto.

Concluyen este apartado con la consideración de los tres componentes hoy, de cualquier modelo teórico que suponen la necesidad de a) modelos de enseñanza del Álgebra, b) modelos de procesos cognitivos implicados y c) modelos de competencia formal. Por eso no son posibles sino modelos teóricos locales adecuados a fenómenos específicos que son los que no privilegiarán a cualquiera de los componentes.

Siguiendo con otra parte de este grupo 2, se encuentra la necesidad de "sistemas matemáticos de signos" y una noción de significado de un signo que abarque tanto el significado matemático formal como el significado pragmático. Asimismo se ha de incorporar, según estos autores, los sistemas de signos intermedios usados por los estudiantes. Señalan que hay que interpretar los códigos personales ya que al observar los procesos de pensamiento matemático se desvelan los obstáculos con los que se enfrenta el estudiante aprendiz. Terminan esta parte indicando que todo modelo explicativo local teórico tiene cuatro fuentes de significado: tres functores de signos y un factor de abstracción y con la necesidad de "una teoría de la producción de Sistemas Matemáticos de Signos" en la que un functor de abstracción relacione los distintos Sistemas Matemáticos de Signos intermedios con el Sistema Matemático de Signos final más abstracto (objeto del modelo de enseñanza). Los autores llaman al enfoque anterior "teoría semiótica del Álgebra".

Finalizan el artículo con el grupo 3 indicado, de observaciones finales, con áreas de investigación futura: Desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes, ya que el Álgebra no es meramente "dar significado a los símbolos” (Love, 1986) sino que hay que manejar lo todavía desconocido, invertir y deshacer operaciones, ver lo general en lo particular; ser conscientes de esos procesos y controlarlos, que es lo que significa pensar algebraicamente (Kieran-Filloy).

El papel de las computadoras en el aprendizaje de los conceptos algebraicos lo vuelven a citar aportando las ventajas de su uso porque permiten: aprovechar el tiempo en actividades que edifiquen la comprensión de conceptos algebraicos claves y habilidades de resolución de problemas; cambiar las notaciones para representar las relaciones y los procesos matemáticos y enfatizar los procesos y las acciones en la enseñanza del Álgebra. Citan a dos autores, Fey (1987) y Sfard (1987), que han hecho ya estudios y que afirman que "la interacción entre el conocimiento conceptual y procesual y el aprendizaje continuará siendo una cuestión absolutamente central sobre la que la investigación meditada puede aconsejar las decisiones curriculares" y que existe "predominio significante entre los estudiantes de secundaria de las concepciones operacionales sobre las estructurales" y con la ayuda de las computadoras se puede desarrollar enfoques nuevos de la enseñanza del Álgebra que están más en sintonía con una de las maneras de pensar y aprender Álgebra preferida por el estudiante.

El panorama de las investigaciones realizadas referidas al Álgebra en concreto a la transición de la Aritmética al Álgebra y presentación de perspectivas, ha sido presentado por el profesor **Cedillo**, en el Congreso celebrado en Morelia (México) en Mayo de **1991**.

Los autores comunican su intención que es: “el hacer reflexionar al docente para analizar y retroalimentar su tarea”.

Hacen referencia a estudios enfocados desde la epistemología y la psicología cognitiva, así como estudios sobre la incorporación de las computadoras.

Comienzan en el primer apartado por caracterizar el Álgebra escolar por contenidos como la manipulación de expresiones algebraicas, resolución de ecuaciones e introducción al estudio del concepto de función o por el momento de la iniciación de su estudio, cuando se enseña a los estudiantes cómo obtener y expresar relaciones en la resolución de problemas mediante el simbolismo algebraico.

Fundamentalmente, los autores indican tres partes en su contenido: 1) algunos requerimientos que impone esta disciplina sobre el estudiante y sus implicaciones hacia la enseñanza del Álgebra, 2) discusión de implicaciones hacia la enseñanza que se derivan de considerar la Aritmética como su antecedente y 3) resultados relativos al aprendizaje del Álgebra en ambientes computacionales.

En su apartado de consideraciones epistemológicas, relacionan los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del Álgebra con el desarrollo histórico de esta disciplina y aluden a Harper, 1987, que evidencia que los estudiantes progresan en el aprendizaje del Álgebra a través de los mismos estadios que la propia Álgebra: retórica, sincopada y simbólica. Apuntan que la fuerza del lenguaje simbólico radica en que elimina el significado de casos particulares, sin embargo, su costo es que es débil en el aspecto semántico. Concluyen con Wheeler, 1989, que el desarrollo de un lenguaje simbólico especializado como es el lenguaje algebraico, ha dejado fuera el significado dado por el lenguaje habitual, en que la actividad algebraica es previamente expresada.

Un segundo apartado se refiere a "continuidades y discontinuidades" entre Aritmética y Álgebra. Se ocupan, en el apartado de continuidades, del uso del signo de igualdad, la presencia de letras, la solución de problemas, las expresiones algebraicas como respuesta a un problema y la solución de ecuaciones, para luego dar un paso más y establecer una separación entre las situaciones referidas al uso del signo igual y al uso de los términos literales, variables, y en el de las discontinuidades, de las expresiones y ecuaciones con planteo de "nuevos procedimientos" acerca de solución de ecuaciones, y, de la enseñanza del concepto de función.

Con relación a la Solución de Ecuaciones comentan que los estudios cognitivos se han centrado en los enfoques intuitivos, sustitución por tanteo (ensayo y error) y formales, pero con prioridad de los últimos, en el que aluden a trabajos de Kieran, 1983, y de Whitman, 1976. Asimismo citan la eficiencia de modelos concretos investigados por Filloy y Rojano (1985 a y 1985 b).

Otros estudios sobre Resolución de Ecuaciones se centraron en el conocimiento de las estructuras de las ecuaciones y la relación entre las operaciones y sus inversas y las expresiones equivalentes de esas relaciones.

Con relación a las Funciones apuntan que muchos estudiantes han tenido alguna experiencia intuitiva sobre esto en la escuela elemental, que ya han sido investigadas (Eisenberg y Dreyfus, 1989).

También se hace referencia a las dificultades que tienen los estudiantes con las representaciones gráficas y al tratar con escalas, en especial.

Comentan la distinción entre la función como objeto y como procedimiento y la ilustran con los hallazgos del estudio de Sfard, 1987, y especifican que una concepción operacional es aquella que considera la función como un algoritmo para calcular una magnitud a través de otra, y, sin embargo, la concepción estructural considera la función como una correspondencia entre dos conjuntos. Esta autora plantea cuestiones importantes como el hecho de la presentación en la escuela de los símbolos y las definiciones en forma estructural, no operacional; de ahí que se podría y convendría adoptar en la enseñanza la forma en que los estudiantes comprenden los algoritmos, antes de pedirles que lo traduzcan en definiciones estructurales y esto podría hacerse incorporando la programación con computadoras.

Después de considerar que la investigación sobre la enseñanza-aprendizaje del Álgebra con incorporación de ambientes computacionales está iniciándose, comentan también investigaciones tanto relacionadas con aspectos operacionales, con ambientes basados en Logo, Pascal, LSE y Basic, como con aspectos estructurales. Thomson y Thomson, 1987, analizaron un diseño de enseñanza elaborado para que los estudiantes reconocieran la forma o estructura de una expresión algebraica en dos formatos: la forma simbólica usual y una representación de árboles de expresiones presentados en pantalla. Otros estudios se habían centrado en representaciones múltiples, otro en la habilidad para identificar puntos en la recta numérica y en el plano cartesiano. El último estudio citado, el de Fey y Heid, 1987, es un enfoque curricular basado en funciones para la solución de problemas e incluye el uso de distintas clases de paquetes computacionales.

Como conclusión, en el último apartado, sugieren algunas situaciones a considerar para la enseñanza del Álgebra: creación de un referente para asignar un significado al simbolismo algebraico, actividades contextualizadas que propicien dar sentido al Álgebra, extensión de conceptos que aparecen en Aritmética y que en Álgebra adquieren otra connotación, diseño de estrategias que permitan aprovechar las preferencias de los estudiantes hacia acercamientos operacionales e iniciar el estudio del Álgebra cuando los estudiantes hayan alcanzado un cierto desarrollo intelectual y una experiencia pre-algebraica que les permita contar con un referente para asignar un significado al simbolismo algebraico, una madurez para enfrentarse a situaciones en las que ese simbolismo adquiere sentido para ellos, para lo cual presentan la alternativa de la incorporación de ambientes computacionales.

Posteriormente **Kieran, 1992**, informa que en el trabajo de Brown y otros (1988) se presentan los resultados de la IV Prueba de NAEP (National Assessment of Educational Progress), hecha a estudiantes de Estados Unidos de 7º a 11º cursos, y que concluyen que “los estudiantes parece que tienen algunos conocimientos de conceptos y habilidades geométricos y algebraicos, básicos, sin embargo, no son capaces de aplicarlos a situaciones de resolución de problemas ni parecen comprender muchas de las estructuras subyacentes en estos conceptos y habilidades matemáticos. Los estudiantes para cubrir su falta de comprensión, parece que recurren a memorizar reglas y procedimientos y eventualmente llegan a creer que esta actividad representa la esencia del Álgebra. La autora sigue recordando que Brown y otros informaron que una gran mayoría de los estudiantes en el NAEP creyeron que la Matemática está basada en reglas, y alrededor de la mitad consideraron que aprender Matemáticas es principalmente memorizar. Estos hallazgos no están restringidos a la evaluación del NAEP, sino que han sido también encontrados en incontables estudios de otras ciudades.

Kieran se cuestiona acerca de las razones o fuentes de esta situación problemática en torno a la posibilidad de que sea el contenido, la enseñanza o acercamiento a las tareas algebraicas mediante caminos inadecuados al tema.

En las perspectivas de enseñanza muestra su preocupación por la gran escasez de modelos de enseñanza del Álgebra así como de la literatura relacionada con las creencias y actitudes de los profesores de Álgebra.

Este artículo del Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning, presenta un análisis histórico del Álgebra, una descripción del contenido del Álgebra escolar, una discusión de las demandas psicológicas hechas sobre el aprendiz de Álgebra por el contenido matemático. También da un breve panorama de la perspectiva de enseñanza, una discusión en relación al marco psicológico-histórico de las secciones anteriores y concluye con unas sugerencias para futura investigación.

En el análisis histórico del desarrollo del simbolismo algebraico y sus reglas de transformación subraya la distinción entre:

. usar letras para representar incógnitas, en resolución de ecuaciones,

. usar letras para representar datos expresando soluciones generales,

. usar letras como herramienta para proveer reglas dominando relaciones numéricas.

También subraya la pérdida gradual de significado inherente al moverse de descripciones en lenguaje habitual de situaciones problema y sus soluciones, a representaciones simbólicas y procedimientos. Así, el principal énfasis en este asunto es sobre la cuestión del desarrollo del simbolismo algebraico. Sin embargo, el resumen histórico sugiere que el desarrollo del simbolismo algebraico permitió un cambio de una perspectiva procedimental a estructural sobre el Álgebra. Esta distinción procedimental-estructural es un tema que debe ser usado para interpretar muchas de las investigaciones halladas.

Además la autora afirma que algunos de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del Álgebra escolar, tienen sus raíces en el desarrollo histórico del Álgebra como un sistema simbólico. La invención de Viète de una notación condensada extremadamente, permitió al Álgebra ser más que una herramienta procedimental. Permitió asimismo que las formas simbólicas fueran usadas estructuralmente como objetos. Los desarrollos estructurales en Álgebra durante ciento cincuenta años han provocado un considerable impacto, no solamente sobre el modo en que es percibida el Álgebra por los algebristas, sino también sobre el modo en que es presentada en los textos escolares.

En relación al Álgebra escolar afirma que un estudio del desarrollo histórico del Álgebra sugiere que, actualmente, es concebida como una rama de las Matemáticas que trata de simbolizar relaciones numéricas generales y estructuras matemáticas y de operación sobre estas estructuras. El modo en que el Álgebra se presenta en la mayoría de los textos matemáticos americanos se hace eco de esta perspectiva estructural.

En su informe ha adoptado una perspectiva epistemológica histórica y ha intentado reconceptualizar la investigación existente en Álgebra en términos de un modelo procedimental-estructural y del aprendizaje del Álgebra y la enseñanza. Kieran espera haber creado un marco que permita comprender mejor las dificultades que los estudiantes tienen al aprender Álgebra y en el comienzo de su artículo, planteó como fuentes de problema, el contenido, la enseñanza y el aprendizaje, y, sin embargo, el orden en que enfatiza al concluir su artículo esos puntos es al revés y lo justifica porque en el volumen de investigación revisada se potencia la investigación sobre el aprendizaje. La investigación tiene implicaciones para la enseñanza y cuando la investigación acerca de la enseñanza se toma en consideración, los hallazgos de ambas de estas áreas ofrecen sugerencias acerca de contenidos. Mientras discute cada uno de estos puntos, menciona brevemente unas pocas áreas donde está garantizada la investigación.

El capítulo introductorio de la mayoría de los libros de texto enfatiza relaciones con la Aritmética. Las representaciones algebraicas son tratadas como afirmaciones generalizadas de las operaciones llevadas a cabo en Aritmética; esto es, tratadas en términos procedimentales por lo cual valores numéricos son sustituidos en expresiones algebraicas para someterse a valores específicos. Sin embargo, una vez que esta introducción relativamente suave se completa, las representaciones algebraicas comienzan inmediatamente a ser tratadas como objetos matemáticos sobre los que ciertas operaciones estructurales pueden ser llevadas a cabo, tales como combinar términos literales, factorizar, o sustraer el mismo término a ambos lados de una ecuación.

El modo en que los términos *procedimental* y *estructural* están siendo usados por la autora es: *procedimental* se refiere a operaciones aritméticas llevadas a cabo sobre números para dar números, y, *estructural*, por otra parte, se refiere a un conjunto diferente de operaciones que son llevadas a cabo, no sobre números, sino sobre expresiones algebraicas.

Continúa la autora, la mayoría de los libros de texto de Álgebra conceden una fachada de acercamientos procedimentales para la introducción de objetos algebraicos al proveer unos pocos ejercicios incluyendo sustitución numérica en expresiones algebraicas y varias técnicas aritméticas para resolver ecuaciones algebraicas- técnicas que permiten a los estudiantes, en un sentido, desviarse del simbolismo algebraico. Sin embargo, esta pretensión se abandona cuando las expresiones se presentan para ser simplificadas y las ecuaciones, para ser resueltas por métodos formales. Los objetivos implicados del Álgebra escolar son estructurales.

En relación con las consideraciones psicológicas, Sfard, (1991), informa la autora, ha sugerido que nociones matemáticas abstractas pueden ser concebidas fundamentalmente en dos formas diferentes: estructuralmente (como objetos) u operacionalmente (como procesos). La concepción operacional es, para la mayoría de los alumnos, la primera etapa en la adquisición de nociones matemáticas nuevas. La transición desde una concepción "proceso" a una concepción "objeto", ni es lograda rápidamente ni sin gran dificultad. Después que ellas están totalmente desarrolladas, ambas concepciones juegan papeles importantes en la actividad matemática.

La autora hace la observación que en el contexto del Álgebra escolar, su uso del término procedimental es entendido para significar lo mismo que el uso de Sfard para el término operacional.

Sfard contrasta las distinciones entre dos concepciones de la siguiente manera:

Hay un profundo vacío ontológico entre concepciones operacional y estructural. Ver una entidad matemática como un objeto significa ser capaz de referirlo como si ello fuera una cosa real- una estructura estática, existir algo en espacio y tiempo. También significa ser capaz de reconocer la idea "de un vistazo" y manipularla como un todo, sin ir a los detalles… Por el contrario, interpretar una noción como un proceso implica mirarlo como una entidad potencial más que una actual, que tiene que ver con la existencia sobre petición en una secuencia de acciones. Así, mientras la concepción estructural es estática, instantánea, e integrativa, la operacional es dinámica, secuencial, y detallada.

La existencia de etapas históricas durante las que varios conceptos matemáticos tales como número y función han evolucionado desde operacional a estructural, ha llevado a Sfard a crear un modelo conceptual paralelo de tres fases que, como deberíamos comprender en breve es apoyado por los hallazgos de varios estudios investigados. Durante la primera fase, llamada interiorización, se forma algún proceso sobre objetos matemáticos ya familiares. La segunda fase, llamada condensación, es aquella en la que la operación o proceso se subdivide en unidades más manejables. La fase de condensación dura hasta que una nueva entidad es concebida sólo procedimentalmente u operacionalmente. La tercera fase, reificación, implica la habilidad repentina para ver algo familiar con una diferente claridad. Mientras la interiorización y condensación son secuencias largas de cambios graduales, cuantitativos más que cualitativos, la reificación parece ser un salto: Un proceso solidificado en un objeto, en una estructura estática. La nueva entidad se separa del proceso que la produce.

El análisis histórico anterior nos permite ver el desarrollo del Álgebra como un ciclo de evolución procedimental-estructural. De un modo similar, el estudio del Álgebra escolar puede ser interpretado como una serie de adaptaciones proceso-objeto (por ejemplo procedimental-estructural) que los estudiantes deberían tomar para llegar a comprender el aspecto estructural del Álgebra.

El aprendizaje es, en un sentido, el factor más fácil de tratar porque la mayoría de la investigación del Álgebra escolar se ha enfocado sobre esta cuestión. Para ella, de su revisión, han emergido dos temas: la accesibilidad de las interpretaciones procedimentales sobre las estructurales y la dificultad para adquirir una concepción estructural del Álgebra. La primera se ha observado al ver a los estudiantes generar prescripciones verbales o programas de ordenador para calcular soluciones de ecuaciones que representan las mismas relaciones, el menor esfuerzo que hacen creando representaciones funcionales de situaciones problemáticas, el modo en que ciertos entornos programados parecen facilitar una perspectiva de letras como números, la preferencia de los estudios para justificaciones numéricas cuando generalizan relaciones, indicaciones variadas de imágenes conceptuales de funciones que reflejan nociones de dependencia.

Por otra parte, la dificultad que los estudiantes experimentan con la comprensión de la estructura del Álgebra fue ejemplificada por su intento temprano para convertir expresiones en ecuaciones en orden a tener una representación que incluya un resultado, los errores estratégicos y no sistemáticos que cometen cuando simplifican expresiones, su resistencia a operar sobre una ecuación no haciendo lo mismo en ambos lados, su no trato al signo igual como símbolo de simetría, su extendida inhabilidad para considerar la letras como una variable o como un dato y transformar problemas verbales en ecuaciones, su dificultad para ver la estructura “oculta” de las ecuaciones, su no uso del Álgebra como una herramienta para proveer relaciones numéricas, su inhabilidad general para convertir interpretaciones “procesuales” de entidades algebraicas en interpretaciones “objeto”.

En definitiva, indica la autora, que la mayoría de los estudiantes no adquiere sentido real de los aspectos estructurales del Álgebra, sino que memorizan un contenido pseudoestructural. Sin embargo, expresa que hay signos de promesa en el marco, por otra parte poco prometedor, del aprendizaje del Álgebra. Se sugiere, para posteriores estudios, se ponga el enfoque en el análisis de la instrucción en el aula, creando bases sólidas para desarrollar concepciones estructurales del Álgebra por encima de concepciones procedimentales. La misma atención dada a este planteamiento tendría que prestarse a los libros de texto.

Lee y Wheeler (1989) han mostrado, por su parte, que los estudiantes se comportan como si la Aritmética y el Álgebra fueran sistemas cerrados.

El cambio de la instrucción en el aula, sigue la autora, no es solamente construir conexiones entre la Aritmética y el Álgebra sino mantener viva la conexión Álgebra-Aritmética, esto es, desarrollar la habilidad para regresar y avanzar entre las concepciones procedimentales y estructurales para ver las ventajas de ser capaces de elegir una u otra perspectiva, dependiendo de la tarea. Indica la investigación de Sfard (1989), que intentó provocar una concepción estructural de la función por medio de una secuencia de actividades. Esto hace pensar la potencialidad de este planteamiento de trabajo para percibir los objetos del Álgebra.

En relación con la "enseñanza", la autora manifiesta que la investigación llevada a cabo ha sido mínima. Sin embargo, de la poca que ha habido se detecta que el acercamiento al Álgebra en la enseñanza se ha hecho con concepciones estructurales. Lo mismo ha ocurrido con los libros de texto; sus guías no están fácilmente disponibles. No es accesible realmente la forma de comunicación para que los profesores puedan aprender de los hallazgos de la investigación y cómo aplicarlos en la instrucción. Algunas de las revistas de investigación en educación matemática tienen como metas específicas expresar hallazgos cognitivos y discuten sus implicaciones instruccionales. Sin embargo, muchos de los artículos aparecen escritos por otros investigadores. Por otra parte, los profesores tienen muy poco tiempo para buscar los resultados de las investigaciones. Muchos de ellos realizan la enseñanza propuesta en el libro de texto, pero es posiblemente este vacío acerca de cómo los profesores interpretan y deliberan sobre el contenido de las investigaciones, una de las áreas con mayor necesidad de atención investigadora.

En lo referente al "contenido" alude a que, dada la incidencia de los textos en la enseñanza del profesorado, hay que revisar la no incorporación de perspectiva procedimental-estructural del aprendizaje de las Matemáticas de los libros de texto.

En los N.M.P. de 1987, serie inglesa de textos de Álgebra escolar de secundaria, a la que contribuyeron Harper y Küchemann, se expresa cómo un curso de Álgebra puede estar basado en la idea de desarrollar sucesivamente las nociones de letras como incógnitas específicas y como datos integrados en una secuencia gradual desde lo procedimental a lo estructural.

Incluso plantean un acercamiento de definiciones formales y perspectivas estructurales (Boas, 1981). El alcance del impacto cognitivo de estos textos no ha llegado a ser investigado, pero sí algunos elementos de este acercamiento, así Bell (1988) y Bell y otros (1987) han dado como resultados algunos signos prometedores. Uno de ellos es el papel de la tecnología, aunque no se ha discutido directamente. Sí hay propuestas en los trabajos de Fey (1989 a, 1989 b). Sin embargo la autora puntualiza en palabras de Maurer (1987) que se puede usar esos sistemas de representación para transformar expresiones desde una forma a otra en algunos casos, pero se debe saber de manera clara y persistente lo que se quiere hacer, que quizás los estudiantes pueden aprender sin un trabajo específico de papel y lápiz y que, quizás, pueden aprender por medio de ejemplos resueltos por ellos en una computadora.

Alude la autora a las propuestas de los estándares de la N.C.T.M. que coinciden en enfatizar actividades que provoquen el desarrollo de interpretaciones procedimentales y a su vez expliciten la transición de las concepciones procedimentales a las estructurales.

Señala también los estudios de Schwarz (1989) y de Kaput (1989) con computadoras.

Para terminar, indica la importancia de las dos concepciones procedimentales y estructurales y además manifiesta cómo se ha desarrollado históricamente el Álgebra según un ciclo procedimental-estructural. También, que la literatura de la investigación ha mostrado que la enseñanza y el contenido del Álgebra enfatizan las consideraciones estructurales. Sin embargo, la mayoría de los estudiantes no alcanza esta meta, por eso se sugiere que la investigación ha de ser reconsiderada desde el punto de vista de una dinámica procedimental estructural del aprendizaje de las Matemáticas. Son escasas las investigaciones basadas en estas sugerencias, pero parece se dirigen en la dirección correcta.

Otro trabajo de especial interés es el artículo de la profesora **Rojano, 1994**, en el que resume una serie de focos y tendencias en la investigación de la matemática escolar considerada como lenguaje de los años 80 y 90, en contraste a la de los 70, centrada en la construcción de conceptos. La autora plantea algunas de las implicaciones didácticas de esta nueva localización de la matemática escolar y, en especial, se refiere al lenguaje algebraico por ser el Álgebra simbólica el lenguaje básico de la Matemática y por su trayectoria personal, tal como la propia autora expresa.

Su artículo lo forman análisis relativos a la investigación en "una visión conceptualista de la Educación Matemática", "La Matemática como lenguaje", "La Matemática y otros lenguajes" concretado "en la transición de la Aritmética al Álgebra", para señalar posteriormente "Aspectos semántico y sintáctico del lenguaje matemático", así como "Modelos gramaticales. El estudio de la sintaxis", para finalizar, apuntando "Nuevas perspectivas de enseñanza" y sus propias "Consideraciones finales".

En la "visión conceptualista" manifiesta la situación de los acercamientos constructivistas de la década de los 70, procedentes de la corriente de la psicología genética de Piaget como ruptura con los acercamientos estructurales de los 60. Este enfoque constructivista trascendió el ámbito de la investigación en Psicología de las Matemáticas y alcanzó el campo de la didáctica, de la enseñanza y del diseño y desarrollo curricular en Matemáticas. La autora, por su parte, indica los efectos más notorios de esta nueva situación en las reformas educativas.

Siguiendo con la investigación, señala la elaboración de modelos teóricos (Kieren, 1988, para la construcción del número racional) en la década de los 80, así como adaptaciones del modelo piagetiano de las etapas de desarrollo de los conceptos (Küchemann, 1981 y Booth, 1984, en el campo del Álgebra, y el trabajo teórico de Van Hiele, 1987, para nociones geométricas). También se confirman líneas de investigación que incorporan elementos de la epistemología genética y de la historia de los conceptos matemáticos (Brousseau, 1981 sobre los números decimales, entre otros).

A lo largo de esas décadas se iba despertando el interés por los aspectos semánticos y sintácticos de la Matemática, para poder explicar las observaciones hechas acerca de las interpretaciones y usos que los estudiantes dan a los símbolos matemáticos y se va observando un cambio significativo en la educación matemática que lleva a considerar esta disciplina como un lenguaje.

Esta nueva tendencia, según la autora confirma en su epígrafe "la Matemática como lenguaje: Una nueva problemática" conduce a reformulaciones importantes y a replanteamientos que varían de unos autores a otros, con los consiguientes diferentes enfoques, incluido el que parte de una visión constructivista.

Con relación a "la Matemática y otros lenguajes" indica en principio las aportaciones de la caracterización del lenguaje matemático (algebraico) realizada por Freudenthal, 1983, donde señala la autora que se recomponen las piezas conceptuales dispuestas de una cierta manera por las investigaciones de los 70. Hace un análisis breve pero profundo de alguna de las ideas plasmadas por el citado autor, referidas a las diferencias y similitudes del lenguaje algebraico con la lengua materna y la Aritmética. Estos resultados hacen que la autora se preocupe de comunicar las siguientes perspectivas adoptadas por algunos autores, acerca del "conocimiento matemático y habilidades lingüísticas". Entre ellos, Vergnaud, 1987, cuya concepción constructivista toma en cuenta el papel del lenguaje. Por su parte Laborde, 1990, también amplía este conocimiento y no se limita a la adquisición del conocimiento matemático, sino también al desarrollo de las mismas habilidades lingüísticas. Laborde aborda el tránsito de unas a otras formas de lenguaje. También apunta en la dirección de que los aspectos cognitivo y lingüístico intervienen simultáneamente en la comprensión y uso de los diferentes tipos de formulaciones construidas; concretamente la semántica de una formulación es construida por el estudiante por medio de sus representaciones mentales y de los rasgos lingüísticos de la formulación.

Por otra parte, Conroy, 1981, indaga si hay una jerarquía en las diferentes formas de lenguaje y concluye que hay jerarquías que reflejan el lenguaje del salón de clases, pero que también existen algunas estructuras peculiares del lenguaje, que el niño tiene que aprender.

En el tránsito de la Aritmética al Álgebra y la influencia del lenguaje natural, Clement, 1982, y Cooper, 1984, señalaron factores lingüísticos procedentes del lenguaje natural que afectan la traducción de un enunciado dado en este lenguaje, al lenguaje algebraico.

También en la interacción del lenguaje algebraico con otros lenguajes se encuentra el estudio de Filloy-Rojano, 1991, en el cual problemas de traducción de lenguajes, del natural al algebraico y viceversa se analizan en el marco de una serie de tendencias cognitivas presentes en el aprendizaje de conceptos más abstractos (Filloy, 1991 y 1993). Incluye la autora algunas observaciones referidas al momento y contenido de la entrevista clínica del citado estudio (Filloy-Rojano, 1991). Asimismo hace referencia a la influencia de los significados que son atribuidos en las fórmulas geométricas a los símbolos literales y la necesidad aritmética de completar un proceso operativo, analizados por Booth (1984) y Collis (1975).

En la referencia de la autora a los "Aspectos semántico y sintáctico del lenguaje matemático" señala que se han convertido en centro de atención de las investigaciones, como consecuencia de las observaciones realizadas en estudios que incluyen tareas de conversión del lenguaje matemático a otro lenguaje o viceversa. Concretamente cita los estudios con relación a la resolución de problemas.

Posteriormente, hace inclusión del análisis de artículos relacionados con la "Comprensión del Simbolismo de las Matemáticas" (Skemp, 1982), que abordan temas relacionados con la semántica y sintaxis del Álgebra; concretamente señala la poca atención que se ha prestado en la investigación a las actitudes o tendencias individuales existentes en los alumnos donde se detectan preferencias hacia ciertos métodos de resolución que varían desde los más operativos y algorítmicos hasta los más semánticos y analíticos. Estas tendencias han sido hechas explícitas como consecuencia del estudio clínico "Operación de la incógnita", realizado por la propia autora y el Profesor Filloy (1989), con estudiantes que inician su estudio del Álgebra. Como conclusiones importantes para los autores señala la existencia de fenómenos de abstracción de las acciones en los procesos de modelación concreta, que dependen en gran manera de las tendencias individuales y que hace estar alerta acerca del riesgo que supone hacer generalizaciones acerca de la evolución de ciertas operaciones de un nivel concreto hacia una forma sintáctica.

En el aspecto relativo a "Modelos teóricos" señala el de Kaput, 1987, que usa el término fuerte de "alienación del Álgebra" que indica que la alienación proviene de dificultades inherentes al manejo de un sistema simbólico formal aislado de otro conocimiento, que pudiera proporcionar retroalimentación informativa respecto a la apropiación de acciones realizadas, o un contexto cognitivamente estabilizador de estas acciones.

El marco teórico de referencia que Kaput (1989) propone, para el caso particular del Álgebra, parte del reconocimiento de la necesidad de considerar un conjunto de lenguajes o representaciones con los cuales comunicar y pensar sobre el lenguaje algebraico.

Otro trabajo que cita es el de Filloy, 1990, basado en nociones provenientes de la semiótica.

Con buen sentido la autora incluye finalmente en esta recopilación de trabajos de investigación los relativos a "Modelos gramaticales. El estudio de la sintaxis", o sea la referencia a trabajos cuyo interés central lo constituye la sintaxis algebraica como especificidad de la sintaxis matemática, al considerar el Álgebra simbólica como el lenguaje básico de la Matemática.

Por último, cita con cierto detenimiento el trabajo doctoral de Drouhard, (1992) referido a la diferencia entre los acercamientos conceptualistas y los psicolingüísticos en la Educación Matemática. Una consideración muy importante de este trabajo es que hay ciertos objetos de enseñanza del Álgebra que no son conceptos, por eso plantea como problema básico a clarificar qué son las "escrituras algebraicas" (ya que no son conceptos) y cuáles, sus significaciones. Su empresa teórica consiste en poner en evidencia las características principales de los "modelos estructurados", didácticamente plausibles, de los "sistemas de escrituras simbólicas del Álgebra elemental". Reformula su propósito en términos tomados del campo de la inteligencia artificial. Se basa, al desarrollar su proyecto, en dos hipótesis fundamentales: 1) que las escrituras simbólicas del álgebra tienen una estructura, y 2) que la gramática generativa - transformacional de Chomsky (1957) es un formalismo adecuado para describir dicha estructura. Hace una aportación al conocimiento más preciso del aspecto sintáctico del lenguaje matemático (del Álgebra simbólica) y complementa el conocimiento producido por los estudios sobre comprensión o construcción de conceptos en el Álgebra, ya que existen objetos de enseñanza del Álgebra, como hemos indicado, cuyas dificultades de aprendizaje no pueden ser descritas en términos conceptuales, ya que dichos objetos no constituyen conceptos. La parte empírica de este trabajo así como las nociones de "denotación" y "designación" (Frege, 1962, 1974), permiten reinterpretar producciones sintácticas de los alumnos, a las cuales no se solía dar una explicación de corte conceptualista. El análisis de su propio trabajo le conduce a afirmar que "comprender las escrituras simbólicas del Álgebra es tomar en cuenta de manera conjunta su sintaxis, su denotación, su sentido y su interpretación". También este autor restringe su análisis a ciertos aspectos del lenguaje matemático (algebraico), pero abre perspectivas de investigación con implicación didáctica .

Como "Consideraciones finales", afirma que el lenguaje matemático guarda diferencias sustanciales con las lenguas vernáculas y por ello el conocimiento, la experiencia y los métodos de investigación propios de ellas, no pueden ser aplicados de manera directa al caso del Álgebra.

Por otra parte, las variaciones observadas en el panorama de investigación son consecuencia de que las bases teóricas de éstas se corresponden con diferentes corrientes de la psicolingüística y son, además, una manifestación de la ausencia de un paradigma para el estudio del sistema matemático de signos que abarque sus aspectos sintáctico, semántico, pragmático y sociocultural.

Como consecuencia, afirma que los acercamientos metodológicos se encuentran aún en evolución y la delimitación de la problemática y de los objetos de estudio están en proceso de redefinición con las investigaciones recientes sobre la adquisición del lenguaje matemático. Sin embargo, se inclina a tomar como referencia la distinción entre las unidades de análisis en un marco de la psicología piagetiana y en un marco psicolingüístico y sociocultural (Wertsh, 1991).

En **1997 Cooper, Boulton - Lewis, y otros**, presentan un estudio donde en la transición de la Aritmética al Álgebra, se ocupan de la comprensión inicial del signo igual, operaciones y sus leyes y variable, en relación con la comprensión del Álgebra. Informan del primer estadio de un estudio longitudinal de tres años, planteado para el seguimiento de los estudiantes desde el comienzo de la instrucción del Álgebra temprana (7º grado), a la instrucción inicial del Álgebra compleja (9º grado). El estudio se enfocó en las entrevistas iniciales antes de la instrucción de Álgebra y dan resultados de la comprensión de los estudiantes de: a) dos aspectos de la Aritmética que parecen continuar en Álgebra, el signo igual y las leyes operacionales; y b) un aspecto de Álgebra nuevo para los estudiantes de Aritmética, la variable.

La propuesta pretende explorar la preparación de los estudiantes para la instrucción del Álgebra y ecuaciones lineales en términos de conocimientos previos. Muestran un estudio en el que 51 estudiantes australianos de 7º grado fueron entrevistados y su conocimiento del modelo fue categorizado (Aritmética binaria, Álgebra binaria y Aritmética compleja).

Se describen las respuestas de los estudiantes que indicaron dificultad con el signo igual, la división, la conmutatividad, la jerarquía de las operaciones y múltiplos de las incógnitas. Las respuestas fueron categorizadas como satisfactorias e insatisfactorias, y según la aproximación básica usada, en respuestas aritméticas (usando acercamientos basados en la Aritmética), algebraicas (usando acercamientos basados en el Álgebra) y por último “sin idea” (cuando las respuestas no permiten definir el acercamiento usado). Con respecto a la aritmética binaria, el conocimiento de la mayoría fue en gran parte satisfactorio. Sin embargo, los estudiantes necesitaron estudiar mejor la comprensión de la división y del signo igual.

Con respecto al Álgebra binaria, los estudiantes tuvieron dificultad con múltiplos de la incógnita. Ellos necesitan instrucción explícita y cuidadosa en el significado de la x como una variable más que la incógnita y por consiguiente en los múltiplos de la “x”. Con respecto a la aritmética compleja, los estudiantes necesitan comprender mejor el orden convencional de una secuencia de operaciones y aprender el significado de equivalencia del signo igual en una ecuación (quizás con el uso de la analogía de la balanza). Interpretaron el “igual”, casi como para exigir una respuesta. Algunos estudiantes también necesitan instrucción sobre las leyes conmutativa y distributiva y sus inversas. También proponen estos autores que la comprensión tanto de la distributividad de la división y las inversas, como su aplicación a una secuencia de operaciones, debería ser foco de futuras investigaciones.

En **1997 Boulton - Lewis, Cooper y otros**, también presentaron en el mismo Congreso (PME 21), otro estudio donde discuten la transición desde la Aritmética al Álgebra desde una perspectiva cognitiva, y proponen un modelo de dos caminos, que usan los resultados de dos estudios para ilustrar la importancia del peso cognitivo y secuencia apropiada a través de Álgebra binaria y Aritmética compleja en el aprendizaje efectivo del Álgebra temprana. Expresan que enseñar y aprender el Álgebra temprana ha sido un área importante de investigación en la educación matemática. Parte de esta investigación se ha enfocado hacia la transición desde la Aritmética al Álgebra. Otra investigación se ha dirigido específicamente hacia las dificultades y los obstáculos para desarrollar conceptos algebraicos ocasionados porque han sido descritos como lagunas cognitivas (Booth, 1988; Herscovics y Linchevski, 1994) o cortaduras didácticas (Filloy y Rojano, 1989) entre la Aritmética y el Álgebra. Filloy y Rojano (1989) creen que la laguna cognitiva se ubica entre el conocimiento requerido para resolver ecuaciones aritméticas por inversión y el conocimiento requerido para resolver ecuaciones algebraicas al operar sobre o con la incógnita. Ellos sugirieron que se necesita entre la Aritmética y el Álgebra un nivel operacional, de "conocimiento pre- algebraico". Herscovics y Linchevski (1994) argumentaron similarmente que mientras las propiedades y las convenciones son cruciales en Álgebra, ellas pueden reemplazarse en la Aritmética con un enfoque operacional.

Después de revisar diferentes investigaciones sobre el lenguaje algebraico (expresiones algebraicas), vamos a centrar el análisis en otro aspecto concreto de nuestro trabajo: las ecuaciones.

Muchos de los estudios que se han hecho sobre el aprendizaje y la enseñanza del Álgebra, se han centrado en distintos enfoques para la solución de ecuaciones. Estos enfoques han sido clasificados en tres tipos: a) intuitivos, b) estrategia de ensayo y error, y c) formales. Se ha encontrado que los dos primeros enfoques son menos utilizados.

Los enfoques intuitivos incluyen el uso de hechos numéricos, técnicas de conteo y "cubrir lo que falta". Booth, 1983, ha informado acerca del uso de los métodos de hechos numéricos y técnicas de conteo entre estudiantes que se inician en el Álgebra.

Bell, O'Brien y Shiu (1980) han observado a estudiantes que usan el método de "cubrir lo que falta". Petitto (1979) ha señalado que el uso de técnicas intuitivas, frecuentemente, no puede generalizarse a ecuaciones en que intervienen números negativos y que los estudiantes que emplean una combinación entre técnicas formales e intuitivas, tienen un mejor resultado que aquellos que usan sólo un tipo de técnica.

El uso de sustitución por ensayo y error en la solución de una ecuación, requiere mucho tiempo y se apoya fuertemente en la memoria, a menos que los intentos se realicen sistemáticamente, lo cual rara vez se observa. Kieran, 1985, ha encontrado que en cuanto se les enseña un método formal, los estudiantes tienden a abandonar la sustitución, incluso en lo que se refiere a la verificación de resultados (Lewis, 1980). Sin embargo sí hay evidencia que los estudiantes que usan la sustitución como primera aproximación a la solución de ecuaciones, poseen una noción más desarrollada del equilibrio entre los lados derecho e izquierdo de la ecuación y del papel de equivalencia que juega el signo igual (Kieran, 1988 y 1992). Efectuar la misma operación en ambos lados de una ecuación hace hincapié en la simetría de ésta y este énfasis está ausente en el método de transposición. La propia profesora Kieran, en 1983, en un experimento de enseñanza diseñado para ayudar a los estudiantes a dar un significado para el método de efectuar la misma operación en ambos miembros, encontró que los estudiantes que se habían iniciado en la solución de ecuaciones según el método de transposición no pudieron darle sentido al método de la "misma operación".

Por otra parte, la relación entre procedimientos intuitivos y formales ha sido estudiada por Whitman, 1976. Enseñó en tres formas distintas: intuitiva, formal y técnicas intuitivas seguidas por técnicas formales; además encontró que los estudiantes que aprendieron a resolver ecuaciones con técnicas intuitivas lograron mejores resultados que los que aprendieron en ambas formas, mientras que los que aprendieron mediante técnicas formales alcanzaron unos resultados correctos más bajos que los que aprendieron ambas formas.

Para la resolución de ecuaciones conocemos otros estudios que han incluido diferentes técnicas de modelaje como un método para ayudar a los estudiantes a construir significado para ciertas clases de ecuaciones y para las operaciones llevadas a cabo sobre ellas.

O'Brien (1980) trabajó con dos grupos de estudiantes que ya tenían conocimientos de Álgebra. A un grupo se les enseñó las ecuaciones con significado mediante manipulaciones realizadas sobre ellas por medio de materiales concretos y, al otro, con significado, mediante generalizaciones de la Aritmética de la relación adición-sustracción; encontró que el segundo grupo llegó a ser más experto para resolver ecuaciones que el grupo que utilizó materiales concretos.

La eficiencia de los modelos concretos en la enseñanza de métodos de solución de ecuaciones ha sido ampliamente investigada por los profesores Filloy y Rojano (1984, 1985 a, 1985 b).

El trabajo tuvo por objetivo ayudar a los estudiantes a crear significados para las ecuaciones del tipo $A x + B = C x$ y $A x + B = C x + D$ y para las operaciones algebraicas en la resolución de las mismas. El enfoque principal fue geométrico, aunque también utilizaron el modelo del equilibrio, la balanza. Los resultados indicaron que los alumnos no incrementaron significativamente la habilidad para operar con ecuaciones de ese tipo. Los estudiantes tendieron a la fijación sobre el modelo y parecieron incapaces de aplicar sus conocimientos previos en la resolución de ecuaciones para la simplificación de ecuaciones del modelo instruccional; de ahí que afirmasen que en la corrección de los errores sintácticos algebraicos y de las dificultades operacionales que ocurren al resolver problemas complejos o ecuaciones, no se puede dejar que los niños las resuelvan espontáneamente en base a su comprensión inicial de la conducta algebraica operacional, ya que el camino de tales desarrollos espontáneos no sigue la dirección que se propone alcanzar el Álgebra.

El profesor Filloy en su trabajo con la profesora Sutherland de 1996 hace referencia de nuevo a los modelos concretos para la enseñanza del Álgebra e indica en ellos dos componentes, uno de "traslación", mediante objetos y operaciones en situaciones abstractas dotadas de significado y sentido cuando se ha dado a manifestaciones más concretas, y otro de "separación" de nuevos objetos y operaciones, introducidos por medio del modelo desde el detalle de significado conveniente para el contexto concreto. Esto supone separación desde la semántica del modelo concreto hasta, por último, lo que es buscado, no es la solución a un problema que el alumno ya conoce, sino la forma de resolver una situación más abstracta por medio de más operaciones abstractas. Esta segunda componente, según estos profesores, es la que conduce a la construcción de sistemas de signos matemáticos más abstractos. Los estudiantes pueden lograr un buen control del modelo concreto pero, a causa de éste, desarrollan una tendencia a quedarse y avanzar dentro del contexto concreto. La fijación sobre el modelo puede retrasar la construcción de una sintaxis algebraica ya que ésta requiere salirse de la semántica del modelo concreto. En el caso de los alumnos con más tendencia sintáctica, ellos han observado obstáculos que se pueden generar en el curso de abreviar acciones y producir códigos intermedios entre el nivel concreto y el nivel algebraico puramente sintáctico. Estos obstáculos impiden la abstracción de las operaciones representadas en el nivel concreto y son debidos, en el periodo de transición, a una falta de significado adecuado para representar los estados que permiten las diferentes operaciones. Los obstáculos surgen desde una especie de "insuficiencia esencial" en el sentido que modelizar (cuando es desarrollado espontáneamente por los niños) tiende a impedir lo que se pretende enseñar. Cuando cualquiera de los dos componentes se refuerza a expensas del otro, es más difícil ver los nuevos objetos y operaciones.

Para las ecuaciones en especial, estos profesores indican los mismos modelos del equilibrio de la Balanza y el Geométrico. Ellos proponen el geométrico para aplicarlo a ecuaciones del tipo $A x + B = C x$, cuando A, B y C son números enteros positivos y en el caso de $C > A$, presentándolo a los niños con ejemplos numéricos particulares. Indican cinco fases para la resolución de las ecuaciones: 1) Trasladar la ecuación al modelo; 2) comparar áreas; 3) producir la nueva ecuación: $(C - A) x = B$; 4) resolver la nueva ecuación, y 5) verificar la solución.

La balanza la proponen para ecuaciones del tipo A x + B = C y las fases que indican son: 1) Trasladar la ecuación al modelo; 2) quitar repetidamente pares de objetos de peso desconocido, manteniendo el equilibrio, hasta no quedar ninguna "cacerola" representativa del término de la incógnita en el lado izquierdo; 3) escribir la nueva ecuación: (C - A) x = B; 4) resolver la ecuación; 5) verificar la solución.

Algunas otras investigaciones acerca de las ecuaciones y resolución de ecuaciones han contribuido explícitamente al reconocimiento y uso de estructuras por los estudiantes y otros estudios han contribuido implícitamente a ello.

Estudios como los de Wagner y otros autores, 1984; Kieran, 1989, se han centrado en el conocimiento de los estudiantes sobre la estructura de ecuaciones y han encontrado que los estudiantes tienen dificultad en percibir estructuras superficiales similares, en el planteamiento de ecuaciones.

En algunos otros estudios, se asumió que se tenía conocimiento de estructura si el estudiante podía reconocer la forma elemental de una ecuación (por ejemplo, conocimiento de la estructura superficial); en otros se asumió que se tenía conocimiento de estructura si se podían discriminar transformaciones correctas de incorrectas en la resolución de ecuaciones (por ejemplo, el conocimiento de la estructura sistémica). En estos últimos estudios, el conocimiento de estructura incluye el conocimiento de (a) las relaciones inversas entre adición y sustracción y entre multiplicación y división, (b) la equivalencia de las expresiones de ambos lados izquierdo y derecho de una ecuación y (c) la equivalencia de las ecuaciones de la cadena que se obtiene al resolver una ecuación.

Muchos otros de los estudios se han enfocado sobre la capacidad de análisis de los estudiantes, por ejemplo en el reconocimiento de la estructura superficial, de una expresión o ecuación. Davis (1975), Davis, Jockush y Mcknight (1978), Matz (1979) y Greeno (1982), así como los estudios de Monroe (1915), Rugg y Clark (1918) y Breslight (1939), han mostrado que estudiantes principiantes en Álgebra tienen enormes dificultades en asignar una estructura a expresiones que envuelven varias combinaciones de operaciones, términos numéricos y literales.

Uno de los objetivos del Proyecto sobre Aprendizaje del Álgebra (Wagner, Rachlin, y Jensen, 1984) fue identificar las dificultades que los estudiantes tienen en la solución de ecuaciones estándares y no estándares. Dos de los ejercicios fueron diseñados para probar la creencia que los estudiantes tienen que la solución de una ecuación está determinada por la estructura superficial de la misma y no por los símbolos usados para representar la variable.

La aparición de errores en el tratamiento de las expresiones algebraicas se reproduce en los estudios sobre resolución de ecuaciones por estudiantes principiantes. Además dos estudios (Carry, Lewis y Bernard, 1980; Lewis,

1981) han mostrado los mismos tipos de errores con estudiantes de escuela superior.

Por otra parte, un estudio de Thompson y Thompson, 1987, ha mostrado que la instrucción puede mejorar la habilidad de los estudiantes para reconocer la forma o estructura superficial de una ecuación algebraica. Ellos habían diseñado un experimento de enseñanza comprendiendo dos formatos instruccionales: (a) notación de ecuaciones algebraicas y (b) despliegue de expresiones en árbol, sobre una pantalla de computadora.

En cuanto a la estructura sistémica, un experimento de Kieran, 1980, enfatizó un aspecto de este tipo de estructura de una ecuación algebraica: la equivalencia de las expresiones de los dos lados de la ecuación. Comenzó con la construcción de significados para ecuaciones con un término variable en cada uno de los lados de la ecuación. La secuencia instruccional empezó por extender la noción de igualdad aritmética hasta incluir igualdades con más de un término numérico sobre el lado derecho y después ocultando números seleccionados en estas "identidades aritméticas". Se encontró que este acercamiento fue accesible para los estudiantes noveles del estudio y efectivo para ampliarles su visión del signo igual, esto es pasar de verlo como "una señal de hacer algo" (Behr, Erlwanger y Nicols, 1976) a verlo como un símbolo que relaciona el valor sobre el lado izquierdo con el valor sobre el lado derecho.

Otra faceta de la estructura aritmético/algebraica concierne a la relación entre operaciones y sus inversas con la expresión equivalente de estas relaciones. Kieran, 1984, mostró que los aprendices en Álgebra tienen dificultad en juzgar ecuaciones equivalentes. Los errores sobre "Redistribución" y "Transposición aditiva" indican su confusión respecto a la estructura sistémica de las ecuaciones. Los principiantes que prefirieron usar las operaciones superficiales conocidas para determinar el valor de la incógnita, por ejemplo el procedimiento de sustitución, tuvieron un mejor sentido de la relación entre la operación de adición y sustracción que aquellos que prefirieron usar las inversas de las operaciones superficiales, procedimiento de transposición. Esto supone que los principiantes en Álgebra que usan el procedimiento de transposición para resolver ecuaciones pueden estar menos seguros de la relación estructural subyacente entre la adición y sustracción que la que sugiere el uso de transposición.

Otro aspecto de conocimiento estructural que se consideró importante en la resolución de ecuaciones abarcó restricciones de equivalencia. Greeno, 1982, señaló que a los principiantes en Álgebra les falta el conocimiento sobre las restricciones que determina si las transformaciones son permisibles. Por ejemplo, no saben cómo mostrar que una solución incorrecta está equivocada, excepto volviendo a resolver la ecuación dada, parecen no ser conscientes que una solución incorrecta, cuando es sustituida en la ecuación original, suministrará diferentes valores para los dos lados de la ecuación, ni se dan cuenta que es sólo la solución correcta la que suministra valores equivalentes para las dos expresiones en cualquier ecuación de la secuencia de ecuaciones equivalentes que resuelve la misma. Sin embargo, no son sólo los principiantes en Álgebra los que al resolver ecuaciones carecen del conocimiento de estas restricciones de equivalencia, Kieran, 1984, encontró que un grupo de experimentados y competentes alumnos en resolución de ecuaciones, también carecían de este conocimiento. Los estudiantes experimentados miraban primero los términos y coeficientes numéricos, luego los signos, y finalmente la posición de los términos. Los noveles seguían un patrón de inspección lineal, de izquierda a derecha, y, raramente parecían capaces de tomar en cuenta todas las diferencias entre las ecuaciones. Esta incapacidad de los principiantes en Álgebra para discriminar los rasgos esenciales de las ecuaciones tiene consecuencias importantes para el aprendizaje.

A propósito Burton, 1988, afirma: "Los estudiantes son a menudo incapaces de leer una sentencia algebraica en el sentido de extraer significado de ella. Más alarmante es que algunas veces ellos no pueden leer ni siquiera el sentido de "globalidad" de toda ella”.

Linchevski y Herscovics, 1996, refiriéndose al desarrollo secuencial del conocimiento algebraico, expresan que han hallado en una investigación con estudiantes de 7º grado, que en la búsqueda de soluciones para ecuaciones de primer grado con una única ocurrencia de la incógnita, p. ej. $a x + b = c$, $a x + b + c = d + e$, casi todos los estudiantes usaron las operaciones inversas en el sentido inverso. Cuando la incógnita apareció como un sustraendo o un divisor (p. ej. $37 - n = 18$), las ecuaciones se resolvieron aritméticamente y sin la transformación de la ecuación original. Con ejemplos que involucran dos ocurrencias de la incógnita había un cambio fundamental en procedimientos con la mayoría de estudiantes que usan un proceso de acercamiento sistemático basado en sustitución numérica. Estos autores concluyeron que los estudiantes no podían operar espontáneamente sobre o con la incógnita y que agrupar términos algebraicos, no es un problema simple. Argumentaron que expresiones algebraicas son intuitivamente vistas como procesos computacionales (cf. Sfard y Linchevski, 1994) y que al enseñar, en vez de proceder desde la variable a la expresión de la ecuación, la solución aritmética de ecuaciones lineales, podría ser más apropiada inicialmente para aprender a operar sobre la variable o con ella.

En **1997, Pirie y Martin**, en su artículo “¡La ecuación, la ecuación entera y nada sino la ecuación! Un enfoque para la enseñanza de las ecuaciones lineales”, presentan algunos resultados de un estudio de casos que observó el aula de matemáticas de un profesor particular, tratando de enseñarlas con significado para capacitar alumnos al nivel de escuela secundaria. En concreto observaron el aprendizaje de ecuaciones lineales, donde se utilizó un enfoque diferente al habitual y en el que muchos problemas de los referidos en la literatura, no se presentaron. Contrastan los autores este método con el uso del modelo de Pirie-Kieren (1994). Consideran la Ecuación como secuencia temporal de acciones o entidad estática, y afirman que el aprendizaje relativo a ecuaciones lineales es probablemente la primera vez donde son cambiadas las imágenes que los estudiantes han construido desde sus experiencias aritméticas, para el significado del signo igual. Hasta este punto, la imagen fundamental de "=" como "indicando el resultado de una operación" había sido suficiente para tratar con todas las expresiones simbólicas que ellos han encontrado (Matz, 1982; Mevarech y Yitschak, 1983; Booth, 1984). El fracaso para reconocer este problema potencial, y tratar con él en este punto, puede conducir a los alumnos a demostrar ostensiblemente una capacidad para resolver ecuaciones lineales, pero enmascarando una carencia más profunda de comprensión.

Puesto que la mayoría de los libros de texto escolares introducen el Álgebra por conexión a la Aritmética (Herscovics y Kieran, 1980) es natural que los alumnos deberían buscar transferir también la comprensión lingüística asociada. Las ecuaciones se leen desde la izquierda a la derecha en el tiempo real. El enigma de este problema yace en esta concepción de una ecuación como un suceso temporal, correspondiendo a la lectura verbal de izquierda a derecha, más que a un estado estático.

Es simplemente esta necesidad de ver una ecuación como una totalidad, en un instante, más que como una acumulación de ítems y las operaciones procesadas a través del tiempo, lo que es crucial para la comprensión completa de ecuaciones lineales.

Luego se ocupan de: ¿el mítico "corte didáctico"? y señalan que Lins (1992), afirma que las operaciones aritméticas son un modelo fundamental para nuestra comprensión de operaciones algebraicas; los elementos en Álgebra no - numéricos se tratan de hecho como si fueran números de un tipo diferente". Filloy y Rojano (1984), sin embargo, sugieren que existe una delineación clara entre la Aritmética y el Álgebra en el momento que los estudiantes encuentran ecuaciones lineales con la cantidad desconocida a ambos lados del signo igual y ellos llaman esto, el "corte didáctico". Aunque de acuerdo que tal demarcación exista, Herscovics y Linchevski (1991) disputan su ubicación precisa en el desarrollo cognitivo del estudiante. Las ecuaciones lineales, en su variedad de formas recorren desde $a\,x = b$ a $a\,x + b = c\,x + d$, sin embargo este corte parece estar ubicado en alguna parte alrededor de este mal definido límite entre la Aritmética y Álgebra. Los autores afirmarían que este "corte", esta dificultad cognitiva específica implicada, es, en realidad una noción impuesta por el observador, con vista posterior, para explicar un artefacto de métodos particulares de enseñar. Creen que es un fenómeno percibido, más que real. Los resultados del método de abordar la solución de ecuaciones mediante la apelación al pensamiento paralelo aritmético, acoplado con la introducción de expresiones de dificultad supuestamente creciente, más que una dificultad inherente en la solución de ecuaciones lineales, crea el obstáculo cognitivo por el mismo método que pretende proveer una introducción lógica a la solución de la ecuación. Los autores muestran que este obstáculo supuesto no existe para los alumnos y, sin embargo, han sido juzgados matemáticamente como alumnos menos capaces - en la clase elegida. Uno podría en este punto desear preguntar por qué las ecuaciones lineales son enseñadas del todo a niños de capacidad más inferior, pero dado que su estudio está escrito en el currículum, los profesores no se lo cuestionan.

Indican, por otra parte, en “enfoques estándares de enseñanza”, que, en términos generales, hay dos enfoques diferentes para la enseñanza de la solución de ecuaciones lineales que predomina a través de las aulas. Un método es cambiar repetidamente la ecuación, “haciendo lo mismo a ambos lados” hasta que uno tenga una ecuación que directamente da la respuesta y el enfoque alternativo es “cambiar lados, cambiar signos”, basado en el concepto de operaciones inversas. Aquí, la comprensión se construye sobre la suposición que se preserva la integridad de la ecuación original.

En realidad, por supuesto, en cualquier enfoque que se tome, los estudiantes no comienzan con la forma generalizada más difícil, ellos progresan desde ecuaciones simples de la forma “x + b = d” a “a x = d” a “a x + b = d” a “x - b = d” a “a x - b = d” antes que finalmente encuentren “a x + b = c x + d”.

El estado común entre estos métodos es que ambos implican transformar la ecuación original, y conducir a los alumnos a “resolver” una ecuación que no es la original dada, pero es alguna ecuación alterada, en algún sentido simplificada. Una consecuencia de esto es que, si los alumnos han estado realmente convencidos de la noción que sus manipulaciones conducen a “las mismas” ecuaciones, muchos casi no ven razón para verificar su solución, ya que ellos llegan directamente a la solución desde una ecuación que es “la misma” que la original, o no ven el problema, cuando se les dice que verifiquen sus respuestas, y simplemente sustituyen su valor calculado en la línea anterior, más que yendo a la primera, versión más dura de la ecuación.

En general, los métodos estándares para tratar con la complejidad de cualquier concepto matemático son, o para relacionar con una situación de la vida real - la mayoría frecuentemente comenzando con una situación de vida y sacando las Matemáticas fuera de ella, o para introducir materiales para modelar el problema - en otras palabras para comenzar con las Matemáticas e ilustrar de alguna manera mediante objetos o cuadros, o para enseñar los algoritmos por los que los problemas formulados matemáticamente pueden resolverse - es decir, permaneciendo con las nociones matemáticas como tal, y encontrando métodos generalizables de solución.

El método más común de introducción para ecuaciones lineales es un ejemplo de la primera alternativa, el de “la ecuación como una balanza” como ya se ha indicado.

Finalmente, en la investigación con relación al desarrollo curricular en Álgebra, en cuanto a propuestas de enseñanza dentro del campo del Álgebra elemental, señalamos en primer lugar los trabajos de Davidov y Bell.

El primero, Davidov, citado por Freudenthal (1974), afirma que la mayoría de los problemas aritméticos, en cuanto traspasan las fronteras del simple cálculo, son enteramente problemas algebraicos lineales o sistemas de ecuaciones lineales. La notación literal se enseña a los niños inmediatamente después de que se han familiarizado con la sucesión de números cardinales y antes de aprender las fracciones. De hecho, este acercamiento ofrece los números y los símbolos literales en las primeras fases de la enseñanza. No está claro aún el orden a seguir en los problemas verbales: ¿cuál es el papel que desempeñarían los datos literales? El utilizar el lenguaje simbólico antes de manipular datos numéricos, ¿serviría para resolver problemas más fácilmente?

Por otra parte, Bell y otros (1983) se basan en una "enseñanza con significado", que propone la utilización de modelos concretos para la resolución de ecuaciones lineales. Asimismo crean situaciones concretas con el propósito de desembocar en el planteamiento de las ecuaciones mencionadas.

Sin embargo vamos a analizar dos tendencias que merecen especial atención, la de la escuela francesa y la del grupo mexicano de Álgebra.

De la escuela francesa en el marco de la ingeniería didáctica podemos destacar los trabajos de Chevallard (1980, 85, 86, 89, 90 a y 90 b), donde muestra una diferenciación entre la enseñanza “funcional” del Álgebra y la enseñanza “formal”.

Es partidario de que la enseñanza debe ser funcional. Pero ¿qué significa esto?, significa que el aprendizaje no se debe hacer “in vacuo”, es decir, sin objetivo. Cuando enseñamos de esta manera (formal) estamos haciendo una enseñanza que no es inútil pero sí incompleta y por tanto fuente de errores y obstáculos.

Señala que en general en la enseñanza del Álgebra se hace más un planteamiento formal que funcional. En realidad lo que se hace en Álgebra no se sabe para qué sirve. En definitiva, el alumno tiene la sensación de que se hace porque lo quiere el profesor y con eso basta.

En su trabajo, Chevallard nos dice con relación al aprendizaje formal y tomando como ejemplo la factorización: “*En ausencia de un empleo funcional, las peticiones de cálculo se hacen con consignas como “Factoriza…” que llevan añadidas un conjunto de sobredeterminaciones didácticas que el alumno tiene que interpretar para realizar el ejercicio correctamente”*.

Se puede añadir que en los actuales currículos no se podría hacer una enseñanza funcional pues, en general, el cálculo algebraico se enseña mucho antes de que se tenga que emplear. Por ejemplo los polinomios y su factorización, la simplificación de fracciones algebraicas, la resolución de ecuaciones de tercer o cuarto grado mediante factorizaciones, etc… no se revelan necesarias hasta que llegamos a querer estudiar una función y nos ayudamos de las derivadas y en general del cálculo diferencial para obtener sus máximos, mínimos, asíntotas, etc… y aún cuando eso llega, los ejercicios y problemas que se ofrecen para este estudio son evidentemente mucho más sencillos que los que servirían para provocar las complicadas simplificaciones que les "hemos enseñado" a calcular.

En general esta tesis es aplicable no sólo al Álgebra del Bachillerato, sino también a la E.S.O.

En el trabajo de Vergnaud y otros (1986), se señala que el Álgebra supone una "ruptura epistemológica" respecto a la Aritmética; que muchos alumnos y, en general, los más "flojos", no entran fácilmente en el juego de las manipulaciones simbólicas, y que, estudiando las dificultades y los errores de los alumnos, se clarifican algunas ideas importantes para esta introducción.

Se observa, también, que, en Álgebra se deben plantear explícitamente las relaciones entre los datos y las incógnitas (plantear la ecuación), para manejar con un cálculo, relativamente automático, esa "explicitación"; mientras que en Aritmética el trabajo consiste en buscar las incógnitas intermedias, en un orden conveniente, eligiendo los datos y las operaciones adecuadas para calcular lo desconocido. Estos distintos modos de actuación obligan a un aprendizaje muy distinto en ambos casos.

Se plantea, asimismo, la significación del signo de igualdad, con las diferencias entre su uso en Aritmética y en Álgebra y las dificultades de aprendizaje que crea. Los conceptos de función y variable que se presentan y que hacen surgir la dialéctica Álgebra instrumento/ Álgebra objeto (Douady, 1986).

Se apunta que, en el caso de la función y la variable, no se aprovechan las ejemplificaciones que prestan las fórmulas de la Geometría o de la Física.

Dada la "ruptura" considerada entre la Aritmética y el Álgebra, se deciden los autores por intentar una introducción del Álgebra como "herramienta" que va a servir para resolver los problemas difíciles de Aritmética.

La tendencia del Grupo mexicano de Álgebra (Filloy y Rojano, 1989; y Rojano, 1985), está dirigida a analizar los fenómenos didácticos de la transición entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico de los individuos. Algunos de sus resultados se pueden concretar en:

- existen fenómenos didácticos de transición de la Aritmética al Álgebra que se presentan o no, según el perfil o clase a la cual pertenece el sujeto.

- existen fenómenos detectados durante la fase de instrucción, determinados por algún elemento de la estrategia específica de enseñanza utilizada, sin importar las características del perfil o clase del sujeto.

- existen fenómenos de la etapa de transición que no dependen, esencialmente ni de la estrategia de enseñanza utilizada, ni de las características de "clase", sino de tendencias del sujeto, en relación a "su" aprendizaje y a "su" uso de la matemática.

- las interacciones entre la semántica y la sintaxis algebraica pueden ser encauzadas por medio de estrategias de enseñanza adecuadas, hacia la completación de ciclos, en cuyos recorridos se puede dotar a las nuevas nociones y operaciones algebraicas que se introducen, no sólo de significado, sino también de sentido.

Observamos de los planteamientos anteriores que en el tratamiento relacionado con las investigaciones en Álgebra se pasa así de las versiones simplistas, claramente reflejadas en los programas de estudio y textos tradicionales, que consideraban la enseñanza del Álgebra elemental como una mera extensión de la Aritmética, a un reconocimiento que en la adquisición del lenguaje algebraico, ciertos cambios de concepción respecto de las operaciones que se realizan y de los objetos operados, juegan un papel fundamental. No obstante, parece necesario hacer una distinción entre la "dificultad cognitiva" de los estudiantes y la "cuestión pedagógica", esto es, qué podemos hacer para ayudar a los estudiantes en sus dificultades cognitivas. Tendríamos que plantearnos el importante reto de cómo organizar el material para capturar y sostener el interés para que los estudiantes puedan implicarse en los procesos intelectuales, identificados por los análisis cognitivos como necesarios o suficientes para adquirir conocimiento preciso del Álgebra. Por tanto, debemos diseñar unidades de estudio que correspondan a unidades manejables tanto por los maestros como por los estudiantes.

Por su parte, los profesores **Filloy y Sutherland (1996)**, expresan lo que consideran resultados sustantivos relacionados con el diseño y desarrollo del nuevo curriculum del Álgebra. La principal tesis que sostienen estos autores es que el curriculum de Álgebra tiene que tener en cuenta al profesor y la enseñanza, tanto como a los materiales curriculares.

Ya en su introducción indican que cualquier persona implicada en el desarrollo de un nuevo curriculum de Álgebra tiene un punto de vista, consciente o inconsciente de qué es Matemáticas y más específicamente qué es Álgebra y reflexionan en las diferentes prácticas en el aula.

Comienzan su artículo con una parte referida a las Matemáticas, ya que plantean que el Álgebra no se puede ni se debe separar del resto de las Matemáticas, sin intentar discutir qué son las Matemáticas. Sin embargo, presentan un conjunto amplio de perspectivas acerca de la Matemática escolar: un cuerpo de conocimientos para ser aprendido; un conjunto de técnicas; ciertas estructuras (aritmético - algebraicas, geométricas, etc.); un lenguaje con un sistema de signos que son entrelazados con el lenguaje natural; una creencia formal con un lenguaje altamente formalizado; una actividad científica; una actividad en que se modelen las ciencias natural y social; una parte del lenguaje natural donde se expresan juicios para el progreso de la sociedad, la economía, el clima, expresiones de conducta vocacional; una colección de vías para hablar acerca de predicciones de acontecimientos futuros; un elemento esencial de la cultura de todos los tiempos; un sistema de símbolos en que las expresiones pueden ser formuladas por medio de modelos generales y así poder llevar a cabo, cálculos generalizados; un sistema simbólico en que pueden ser expresadas generalizaciones y abstracciones; un sistema simbólico en que pueden ser usados fenómenos de iteración y recurrencia para expresar algoritmos; un sistema de habilidades mentales tales como una imaginación espacial, la capacidad de razonamiento hipotético y deductivo; estructuras de la inteligencia, interiorización de las propiedades y acciones llevadas a cabo con objetos reales; una lista de las actividades de enseñanza tales como las halladas en libros de texto de la asignatura, etc.

Expresan la importancia de un curriculum equilibrado que predisponga a lograr un nuevo y rico aprendizaje de los alumnos, sin preferencia por algunas de las perspectivas anteriores en detrimento de las otras.

Manifiestan que se presenta una falsa disyunción cuando el aspecto relacional del pensamiento matemático quita mérito a su uso instrumental y viceversa; por ejemplo cuando el aspecto de resolución de problemas se separa falsamente del conocimiento matemático. Por ejemplo, considerar un acercamiento que asume que la Matemática escolar es el conocimiento acerca de objetos (ideales) dados, cuyas propiedades y relaciones deberían ser descubiertas. Esta perspectiva está en oposición a otras tendencias radicales que mantienen que todo el conocimiento está construido desde las primeras acciones entre el sujeto y el mundo real. Ambas perspectivas ignoran todo el aspecto social que interviene en el proceso por el que los estudiantes llegan a ser competentes en él; por ejemplo, el uso del lenguaje matemático en orden a pensar y también producir conocimiento práctico que puede ser comunicado a los otros. Si se trata de un currículo parcial, la tensión, entre la comprehensión y la mera mecanización, probablemente, puede llegar a ser más aguda.

Como contraste al curriculum parcial y predispuesto a priorizar unas perspectivas sobre otras, quizás el error más común es descender a un completo eclepticismo intentando dar la misma importancia, el mismo "peso" a la mayoría de los aspectos listados anteriormente y esto provoca gran confusión. Por eso estos autores sugieren que es importante comenzar diseñando el curriculum con un marco bastante general que se base sobre puntos de vista claramente establecidos y que pueda ser refinado en el desarrollo del mismo, permitiendo así disminuir la tensión entre las diferentes perspectivas acerca de lo que son las Matemáticas, debido a la necesidad de responder del marco elegido, en términos de implementación curricular, los puntos de vista reflexionados llegan a convertirse en "líneas de fuerza" que dan impulso a tales decisiones y no a otras, y, más importante aún, dan significado a tales decisiones.

Muy interesante resulta la sugerencia de los autores de un marco de análisis de los aspectos del desarrollo curricular del Álgebra que explicitan en seis criterios:

1) Conceptos matemáticos y sistemas de signos relacionados .
2) Cognición matemática y tendencias cognitivas.
3) Enseñanza y aprendizaje y procesos de abstracción.
4) La relación entre el Álgebra y el conocimiento práctico.
5) Nuevas tecnologías para aprender y enseñar Álgebra.
6) Modelando matemática. La herramienta instrumental y analítica del Álgebra con otras áreas de conocimiento.

Los autores eligen el enfoque de las rupturas potenciales entre el Álgebra y actividades matemáticas concretas en oposición a discutir algunas de las reformas curriculares del Álgebra actual, citando los trabajos de Rachlin (1989), Malle (1993) y Vollrath (1994).

Los profesores Filloy y Shuterland opinan que si el profesor depende con exceso de los recursos curriculares entonces incluso las nuevas actividades más innovadoras y maravillosas desarrolladas para aprender Álgebra, pueden hacerse cercanas a los estudiantes por caminos no algebraicos. Afirman asimismo que introducir a los niños en sistemas de signos algebraicos y matemáticos es una actividad tan intensa como enseñar a un niño a aprender el lenguaje natural. El profesor tendrá que explicar a los estudiantes con sistemas de signos que ellos no comprenden todavía y en este sentido el profesor sirve a los estudiantes como una "forma de conciencia experimentada por otro y hasta el momento que el aprendiz es capaz de dominar su propia acción a través de su propia conciencia y control" (Bruner 1985).

En la línea en que nos estamos manifestando, parece importante también indicar algunas observaciones de las que expresan estos autores:

1. Su acepción de sistema de signos matemáticos y que es el rango de representaciones externas que son usadas en Matemáticas escolares. Dan como razón de no elegir el término representación el que a menudo se confunde con “representación mental”.

2. La constatación de que hay confusión por parte de los niños y el profesor acerca de si lo principal de una actividad es “exactamente” resolver el problema presentado o trabajar sobre el acercamiento para resolver el problema.

A modo de síntesis y desde la perspectiva de la enseñanza podemos considerar que las tendencias hasta la década de los ochenta, en la enseñanza del Álgebra se pueden concretar con relación a la naturaleza del curriculum en:

Actualmente hay cierta unanimidad cuando se habla de las competencias del Álgebra en la escuela obligatoria: “ocuparse del estudio de las “letras” o “variables” y de las propiedades que las relacionan.

Existen diferentes interpretaciones de la afirmación anterior:

a) Álgebra como Aritmética generalizada y, en consecuencia, las letras forman parte de modelos que permiten generalizar las propiedades numéricas.

Por ejemplo, la generalización de 3 (5 + 2) = 3.5 + 3.2, nos lleva a:
a (b+c) = a.b + a.c.

b) Álgebra como el estudio de métodos para resolver ciertos problemas concretos: las ecuaciones, donde las letras se consideran como incógnitas específicas a determinar.

c) El Álgebra como el estudio de relaciones entre cantidades, que considera la variable en su sentido completo de variabilidad.

d) El Álgebra como modelo estructural, donde las letras constituyen entes pertenecientes a estructuras algebraicas tales como grupos, anillos, dominios de integridad o cuerpos, a los que se pueden aplicar las propiedades satisfechas por cada uno de los conjuntos en los que se actúe.

Por último, desde una pespectiva de enseñanza, el libro de Bednarz, Kieran, y Lee, 1996, *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*, sugiere cuatro aproximaciones a la enseñanza del Álgebra en la Escuela Secundaria, denominadas: generalización, resolución de problemas, modelización y funciones. De las dos primeras nos ocupamos en el desarrollo de esta Memoria.

Acerca de la modelización (modelo, modelaje y modelación), exponen que consiste esencialmente en "trasladar un problema del mundo real a un problema matemático, resolver el problema matemático e interpretar la solución en el lenguaje del mundo real”.

El proceso de modelización implica tres etapas claramente diferenciadas: 1) Reconocimiento y familiarización con la situación problema, (explicitación y reconocimiento de la regla); 2) formulación del modelo y resolución del problema en términos del modelo, (formulación y resolución en términos de la regla); y, 3) validación del modelo e interpretación de los resultados en el problema, (validación de la regla e interpretación).

En las tendencias sobre “modelización matemática” en la enseñanza-aprendizaje encontramos dos posturas: a) Los que consideran que, a través de la modelización, no se puede enseñar nuevos conceptos matemáticos, y b) Los que defienden la modelización como un procedimiento ideal para enseñar Matemáticas (de Lange, 1994; Treffers, 1987).

En cuanto a la “perspectiva funcional”, sugieren, en general, comenzar el trabajo en Álgebra, a partir de experiencias con funciones o familia de funciones que modelizan situaciones del mundo real. De esta manera el currículo de Álgebra introduce los contenidos de funciones, variables, ecuaciones, desigualdades, sistemas, y equivalencias en el contexto de modelización matemática, en un entorno esencialmente tecnológico (calculadoras gráficas y ordenadores).

1.5 CONCLUSIONES E IMPLICACIONES

Observamos que desde el punto de vista curricular, la Aritmética generalizada es el enfoque curricular predominante en el D.C.B. (12-16).

Desde el punto de vista de la investigación, parece claro, de las diferentes investigaciones revisadas acerca del pensamiento algebraico, que éstas tratan de buscar respuestas a los principales interrogantes en torno a la naturaleza del Álgebra y a los procesos de pensamiento implicados, que faciliten procesos significativos de enseñanza-aprendizaje del Álgebra y que muchas son las preguntas que aun hoy no tiene respuesta en el tratamiento del Álgebra en un contexto escolar y a las cuales hemos aludido en el apartado 1.2 de este mismo Capítulo: ¿Qué hace que la comprensión del Álgebra escolar sea una tarea difícil para la mayoría de los estudiantes? ¿Qué fuerza a muchos estudiantes a recurrir a memorizar reglas del Álgebra? ¿Es el contenido del Álgebra, la forma en que es enseñada, o un acercamiento a las tareas algebraicas de una manera inapropiada la fuente del problema? (Kieran, 1992). Actualmente los investigadores seguimos buscando respuestas para ellas.

La educación matemática como disciplina científica se ha abierto camino en el campo de la investigación hasta situarse en medio, entre las investigaciones en Ciencias y en Ciencias Humanas (Rojano, 1985). La problemática específica de la enseñanza del Álgebra participa de las ventajas y de las desventajas de esta situación. El soporte teórico de las investigaciones actuales se encuentra fuertemente relacionado con la llamada Ciencia Cognitiva, que busca dar respuesta a los principales interrogantes en torno a la naturaleza de los procesos de pensamiento en todos sus aspectos, y, en particular con relación a la construcción del conocimiento matemático. Dentro de esta nueva ciencia tienen especial relevancia los aportes de la psicología, la lingüística, la inteligencia artificial, la antropología, etc. De estas ciencias el enfoque psicológico es el que ha aportado más elementos a los estudios sobre el aprendizaje del Álgebra, aunque en últimas fechas, los estudios basados en la lingüística y en la inteligencia artificial son cada vez más significativos, y hay una tendencia más general que trata de encontrar respuestas a diferentes interrogantes en el contexto cultural de los sujetos, por lo que la antropología cada vez aporta más a la educación matemática.

Las investigaciones ponen de manifiesto, en primer lugar, las implicaciones que tiene para el aprendizaje del Álgebra, el considerar la Aritmética como su antecesora; el Álgebra no es simplemente una generalización de la Aritmética; aprender Álgebra no es meramente hacer explícito lo que estaba implícito en Aritmética; el Álgebra supone un cambio en el pensamiento del estudiante y la dificultad para muchos principiantes de la transición desde lo que puede considerarse modo informal de representación y resolución de problemas, al modo formal.

La idea de la forma de ver "el signo igual" fue investigada por Kieran (1980) con niños de 12-13 años, Mevarech y Yitschak (1983) con universitarios y Vergnaud (1984) estudiando la resolución de ecuaciones por alumnos mayores.

En el análisis de la incidencia de la formación numérica se presentan investigaciones relativas a las "dificultades con las convenciones de notación en especial la concatenación, el uso de paréntesis y las dificultad de notación para expresar respuestas algebraicas".

En los métodos de simbolizar, la confianza de los alumnos en métodos intuitivos no enseñados, el uso de métodos informales, intuitivos, primitivos, limitados por el contexto, indicativos de método incipiente, basado en conteo y adición y que permiten trabajar con ellos, sólo con números enteros, Booth, 1984) hace que se concreten en hallar la respuesta en lugar de prestar atención al método que usan. Los estudiantes no son capaces de darse cuenta que el procedimiento es a menudo, la respuesta.

En Álgebra los alumnos necesitan reconocer y usar estructuras que han podido evitar en la Aritmética al no tener que llegar a la formalización sino que les basta implicarse en procedimientos intuitivos e informales. Se observa de los resultados de estas investigaciones que las dificultades que los estudiantes tienen están centradas en: a) el significado de las letras, b) el cambio a una serie de convenciones diferentes de las usadas en Aritmética y c) el reconocimiento y uso de estructuras.

En segundo lugar, se pone de manifiesto en los trabajos analizados, la falta de modelos teóricos para la enseñanza-aprendizaje del Álgebra.

Frente a la concepción conceptualista de la década de los 70, apoyada en posiciones constructivistas que tiene su origen en la psicología genética de Piaget, aparecen, en la década de los 80 y 90, tendencias en las investigaciones de la Matemática escolar a considerarla como lenguaje y en especial el lenguaje algebraico por ser el Álgebra el lenguaje básico de las Matemáticas. Este enfoque lingüístico se documenta bien en el trabajo de Rojano (1994). A lo largo de estas casi dos décadas se va despertando el interés por los aspectos semánticos y sintácticos de la Matemática para poder explicar las observaciones hechas acerca de las interpretaciones y usos que los estudiantes dan a los símbolos matemáticos, y, se va observando un cambio significativo en la educación matemática que lleva a considerar esta disciplina como un lenguaje.

Estas tendencias conducen a reformulaciones importantes y a planteamientos que varían de unos autores a otros.

Una aportación relevante es la de Freudenthal (1983), que desde su análisis fenomenológico recompone los principales elementos conceptuales y organizativos del lenguaje algebraico y realiza un análisis profundo sobre las diferencias y similitudes del lenguaje algebraico con la lengua materna y la

Aritmética.

El estudio de la sintaxis algebraica como especificidad de la sintaxis matemática, al considerar el Álgebra simbólica como el lenguaje básico de la Matemática, es abordado en los trabajos del modelo de Kirshner, su propuesta teórica, que interpreta las manipulaciones algebraicas como un lenguaje en el sentido de Chomsky (1957) y adapta los modelos de la lingüística generativa transformacional al estudio del Álgebra (Kirshner, 1985). Su modelo consiste en modelar las expresiones algebraicas y sus transformaciones, a través de traducciones de las llamadas formas superficiales a las profundas y de unas formas a otras, en el nivel profundo. El autor afirma que dentro del dominio restringido de las destrezas de la manipulación simbólica, los acercamientos lingüísticos ofrecen ciertas ventajas significativas, sin embargo el paradigma lingüístico de su modelo no resulta adecuado para el estudio de los procesos de resolución de los llamados problemas verbales o de la traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático.

Observamos cómo los aspectos semántico y sintáctico del lenguaje matemático, se han convertido en centro de atención de las investigaciones, como consecuencia de las observaciones realizadas en estudios que incluyen tareas de traducción del lenguaje matemático a otro lenguaje o viceversa.

Existen investigaciones con una fuerte orientación didáctica que aplican los conocimientos actuales sobre la psicolingüística al estudio de la Matemática como es el caso de la de Pimm (1987), que además ubica su trabajo en las Matemáticas como lenguaje; este autor pretende construir las Matemáticas en términos lingüísticos con el elemento básico de la "metáfora" entendida como "comprender y experimentar una cosa en términos de otra" (Lakoff y Johnson, 1980). Plantea el tratamiento del aprendizaje de las Matemáticas como el de una lengua extranjera no como el de la lengua materna en el sentido que el centro de atención no sea el propio lenguaje sino la “competencia comunicativa” del mismo. Así se podría conseguir de los alumnos que el estudio de las Matemáticas constituyera un estudio que comprometiera y compensara. Pimm señala que hay tendencia a centrar la atención en la forma de los enunciados matemáticos más que en las ideas que expresan, o sea se centra en la notación simbólica y las cuestiones estructurales. Basándose en estas ideas indica la necesidad de atender la comunicación oral en el aula, devolver a los símbolos su papel de medios, para reemplazar su papel de mensaje y sustituir el aprendizaje de la Matemática como un sistema abstracto regido por reglas, por la adquisición de competencia comunicativa sobre determinados objetos, situaciones y fenómenos.

Como resumen de esta tendencia, Rojano (1994) señala que las investigaciones ponen de manifiesto que el lenguaje matemático guarda diferencias sustanciales con las lenguas vernáculas y por ello el conocimiento, la experiencia y los métodos de investigación propios de ellas, no pueden ser aplicados de manera directa al caso del Álgebra. Se observan grandes variaciones en el panorama de investigación como consecuencia de que las bases teóricas de ésta se corresponden con diferentes corrientes de la psicolingüística, y, son además una manifestación de la ausencia de un paradigma para el estudio del sistema matemático de signos que abarque sus aspectos sintáctico, semántico, pragmático y sociocultural.

En definitiva, señala que los acercamientos metodológicos se encuentran aún en evolución y la delimitación de la problemática y de los objetos de estudio están en proceso de redefinición de las investigaciones recientes sobre la adquisición del lenguaje matemático. Sin embargo, se inclina a tomar como referencia la distinción entre las unidades de análisis en un marco de la psicología piagetiana y en un marco psicolingüístico y sociocultural (Wertsh, 1991).

Existen investigaciones que han apuntado a ciertos cambios conceptuales y/o simbólicos que establecen la diferencia entre el pensamiento aritmético y el algebraico en el individuo. Algunos de estos trabajos tienen que ver con las diferentes interpretaciones de las letras (Kücheman, 1981; Booth, 1984; Kieran, 1992) y convenciones gráficas o simbólicas para codificar operaciones y transformaciones en la resolución de ecuaciones (Matz, 1982). Estas observaciones han hecho posible hacer hipótesis sobre ciertas líneas de evolución del lenguaje aritmético al algebraico, las cuales corresponden a las nociones y a las formas de representación de los objetos y operaciones que ocurren en el cambio. Los cambios que el estudiante tiene que hacer para tener acceso al lenguaje del Álgebra pueden ser visualizados en una de estas líneas como intersecciones, separando una clase de pensamiento del otro.

Una de esas intersecciones se ha sugerido por medio de un análisis de las estrategias y métodos de solventar las ecuaciones que se encuentran en los libros de texto de Álgebra pre-simbólica de los siglos XIII, XIV y XV - Boncompani, 1954; Arrighi, 1974 y Hughes, 1981-, citados por Filloy - Rojano, 1984 y Filloy - Sutherland, 1996.

De las amplias investigaciones revisadas, dos son las perspectivas que predominan y que en nuestra investigación vamos a tener en consideración: las perspectivas psicológica (cognitiva) y lingüística, de las que tomaremos aspectos relevantes para conformar nuestro marco teórico local y poder abordar los dos tópicos antes mencionados, expresiones algebraicas y ecuaciones lineales, y los problemas específicos de su enseñanza-aprendizaje, en términos de dificultades, obstáculos y errores, así como la búsqueda de significados para las expresiones algebraicas y las ecuaciones lineales, analizando el papel que juegan diferentes representaciones semióticas en el lenguaje algebraico, y sus implicaciones en el currículo, para la propuesta de aprendizaje significativo del Álgebra.

Capítulo 2
Marco Teórico Y Objetivos De La Investigación

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos los objetivos e hipótesis de la investigación, así como el marco teórico en el que desarrollamos el trabajo. Como afirman Lester y Charles (1992), la Didáctica de las Matemáticas necesita, junto a investigaciones empíricas, teorías que sustenten dichos trabajos.

La distribución del capítulo se organiza así. Una primera parte se dedica a la exposición del marco conceptual, analizando los signos con significado algebraico, las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del Álgebra, y la noción de comprensión y los sistemas de representación. Este marco conceptual nos permite delimitar el problema y formular los objetivos de la investigación, planteándose las correspondientes hipótesis.

Concluimos el capítulo justificando a nivel cognitivo y curricular la racionalidad de este trabajo.

2.2. MARCO CONCEPTUAL

2.2.1. Los signos con significado algebraico

Para que el método algebraico se pueda incorporar como algo natural, es necesario que, además de cambiar los símbolos, se produzca un cambio en su significado, es decir, que no se haga solamente una sustitución de los números por letras, sino que se realice el paso de números a variables y para ello hay que realizar un cambio, tanto de símbolos como de significado. A menudo, el cambio se produce únicamente en los símbolos y sólo se realiza el paso de números a letras.

La aplicación del Álgebra a problemas es difícil para muchos alumnos. Es preciso hallar formas para que los alumnos sean capaces de manifestar esas dificultades y éstas puedan ser discutidas.

Muchas de las dificultades son debidas a la significación que poseen las letras. Por ejemplo “3l” es comprendida a menudo como “tres lápices” más que 3 veces el número de lápices. Un acercamiento a la comprensión de estas afirmaciones es animar constantemente a comprobar por sustitución en el trabajo que se realice así como a “pensar con letras”.

Más dificultades son asociadas con expresiones tales como “más que” “menos que”. También $y = x + 2$ es comúnmente leído como “x es 2 más que y” o “y es igual a x si tú sumas “2” a “y”. En este tipo de situaciones también puede ayudar la sustitución por números y comprobación de la igualdad.

En el Álgebra, entendida como “Aritmética generalizada”, todo cálculo algebraico se construye a partir de las cinco propiedades características del sistema numérico: la conmutativa y asociativa de la suma y el producto, y la distributiva del producto respecto de la suma, como ya hemos indicado.

George Peacock (1791-1858), miembro más influyente de la "Analytical Society" del Trinity College de Londres, creada en 1815 en Cambridge, cuyos fundadores (Peacock fue uno de ellos junto con Herschel y Babbage) recogieron y desarrollaron el movimiento de reforma iniciado por Woodhouse (1773-1827), publicó en 1830 una obra titulada *Treatise of Algebra*, en la que intenta dar al Álgebra una estructura lógica comparable a la de los *Elementos* de Euclides, aplicando el pensamiento axiomático aplicado a la Aritmética y al Álgebra.

Aunque Peacock no realizó ninguna aportación nueva de importancia, contribuyó de forma definitiva al proceso de actualización de la enseñanza de las Matemáticas y, en especial del Álgebra, en Inglaterra. Este esfuerzo se hacía sobre la materia, pero no sobre el alumno. Se trataba, sobre todo, de profundizar en la fundamentación del Álgebra pero se olvidaba el hecho de que la profundización en la abstracción no tiene que suponer desatender al alumno.

Al principio Peacock estableció una distinción entre el Álgebra aritmética y el Álgebra simbólica, lo que le permitió elaborar un conjunto de reglas aplicables a los números y otro conjunto de reglas aplicables esta vez a las magnitudes en general. El Álgebra aritmética se refería exclusivamente al estudio de los enteros positivos o de los números naturales. Así, los símbolos "+" y "-" debían ser tomados en el sentido habitual y la expresión $a - b$ tenía un sentido sólo si $a > b$. De la misma manera, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, era válido en esta Álgebra siempre que "m" y "n" fueran números naturales. En el Álgebra simbólica, las reglas de las operaciones se refieren esencialmente a los números negativos, racionales, irracionales y complejos, y las reglas válidas para el Álgebra aritmética se extienden y son aplicables sin restricción al conjunto de los números.

Así, según Peacock, "todos los resultados obtenidos en el Álgebra aritmética, cuyas expresiones son generales desde el punto de vista de la forma, pero particulares, específicas, al nivel de los valores, son resultados igualmente en el Álgebra simbólica, en donde son entonces generales tanto en la forma como en el valor"; es decir, afirma que todas las reglas que se verifican en los números naturales, siguen verificándose para los demás números y objetos, representados por las letras. Por eso el nivel de comprensión del Álgebra está muy relacionado con la progresión que se sigue en la utilización de las letras, siendo una de las mayores dificultades con que se encuentran los alumnos, la del uso y significado de las mismas, y de ahí que se piense que las dificultades del Álgebra se deben a la naturaleza abstracta de los elementos utilizados (Collis, 1975). El punto principal que se deriva de este análisis fue que el desarrollo de la comprensión en el Álgebra puede corresponder a un avance en las formas de cómo se interpretan las letras.

Augustus de Morgan (1806-1871) fue otro de los iniciadores de la que se podría llamar "Escuela Inglesa" (Boyer, 1986). Apoyó alguno de los puntos de vista de Peacock. Se podría decir que con de Morgan comienza el "Álgebra Abstracta", pues considera sin significado concreto no sólo a las letras que utiliza sino también a los símbolos que representan operaciones; "así las letras tales como A, B, C, podían significar virtudes y vicios, y + y -, podían representar premio y castigo", mientras que en el Álgebra de Peacock los símbolos se entendían como números o magnitudes todavía.

Recuerda con esta aspiración otra parecida declarada por Leibniz (1646-1716), aproximadamente 150 años antes, cuando al entrar en contacto con el Álgebra, ve en ella unas posibilidades de formalización que le ilusionan. Y, adivinando una gran potencia en ese nuevo lenguaje y una abstracción y objetividad que le seducen, piensa que el Álgebra puede convertirse en el modelo de su Característica Universal y escribe: "*Es ésta una especie de lenguaje simbólico que nos permitiría expresar sin ambigüedad todos los pensamientos humanos -consecuencia de su precisión-. Aumentaría nuestro poder de deducción al permitir desarrollos más complejos o más largos y resolvería todas las controversias sin tener que llegar a enfrentamientos, utilizando sus "demostraciones"*" (Couturat, 1969).

Por otra parte, Collis (1975) afirma que la dificultad no se da sólo con las letras a un determinado nivel, sino que está muy relacionada con el tamaño de los números en otros niveles.

Veamos que el uso que se hace de las letras, en Matemáticas y en especial en Álgebra es muy variado. Se emplean con situaciones muy diferentes: Parámetros "conocidos", parámetros incógnita, incógnitas algebraicas, incógnitas geométricas, variables, etc…

Analizaremos brevemente estos distintos usos tratando de especificar algunas de las dificultades de enseñanza y aprendizaje que presentan.

Una de las primeras y más importantes diferenciaciones que aparecen en el uso de las letras, en Álgebra, es la de parámetro e incógnita.

Estas dos formas de empleo habitual, conducen a dos conceptos que empezaron a diferenciarse ya claramente con Viète (sobre 1600) quién contribuyó de este modo, de forma importante, al avance en la simbolización, proponiendo un método para distinguir las magnitudes que se suponen conocidas de las magnitudes desconocidas o incógnitas que se deben calcular: utilizar letras "consonantes" para representar magnitudes o números que se suponen conocidos, o que se pueden conocer en cada caso, y letras "vocales", para las cantidades desconocidas o indeterminadas.

Con esto se daba un importante paso en el camino hacia la generalización de los procesos algebraicos, pues mientras se había estado trabajando con coeficientes numéricos concretos, el proceso de encontrar la incógnita era siempre aplicado a “cada caso particular”.

Con esta singularidad se multiplicaban los esfuerzos a la hora de resolver cualquier problema. Era importante, pues, buscar una generalización, pero pronto se percibió que el uso de las letras, para representar coeficientes cualesquiera producía más confusión que clarificación en el proceso. Mientras la diferenciación entre las letras utilizadas no fuera real, no se conseguiría verdaderamente la generalización buscada.

Esta diferenciación es la que logró Viète proponiendo una formalización que distinguía ambos conceptos.

Sin embargo, esta formalización no llegó a tomar fuerza entre los matemáticos de la época. Hubo que esperar hasta Descartes que fue el que logró imponer una formalización diferenciadora que, por otra parte, es la que ha llegado hasta nuestros días, pero en la enseñanza no está tan claramente constituida esta diferencia.

Veamos primeramente el uso de la *letra como parámetro*, es decir, nos referimos a expresiones matemáticas en las que se emplea una letra para representar una cantidad constante.

Si nos fijamos en los diccionarios, por ejemplo, el enciclopédico Sopena define el parámetro en Álgebra, como la “cantidad sujeta a determinarse satisfaciendo ciertos valores condicionales”, y el parámetro en Geometría como la “cantidad constante que entra en la ecuación de algunas curvas…”.

La enciclopedia Larousse nos da como definición de parámetro en Matemáticas: “Valor que se presenta como una constante en una expresión o ecuación, pero que puede ser fijado a voluntad (el parámetro de una parábola es el coeficiente “2p” de la ecuación de la parábola $y^2 = 2px$)…”.

En los libros de Matemáticas se emplea la noción de constante y la noción de parámetro sin que se haya hecho una adecuada introducción a estos términos. Sin embargo, el uso matemático de un parámetro puede adquirir sentidos distintos, a saber, “parámetro constante”, “parámetro incógnita” o “parámetro variable”.

Así, en las fórmulas geométricas de áreas y volúmenes, éstos son funciones de algunas magnitudes lineales. Por ejemplo, si nos fijamos en el caso del área del círculo: $A = \pi r^2$, la constante de proporcionalidad es el número π. El radio “r” representa un valor constante: el correspondiente al círculo particular del ejercicio que estemos resolviendo. Así la fórmula generaliza los casos particulares.

Pero el parámetro puede convertirse en parámetro incógnita si conocemos el área “A” del círculo y debemos usar la fórmula para calcular el radio “r” correspondiente. De modo que en una misma fórmula puede una letra (en este caso la “r”) tener una posición de parámetro conocido, o de parámetro incógnita, de acuerdo con el uso que en cada momento podemos hacer de ella.

Pero también, aparecen las letras en diferentes contextos como parámetros variable. Si tenemos la ecuación: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, las letras "a", "b" y "r" son parámetros cuya variación, la de cada uno individualmente, nos dará las ecuaciones de las distintas circunferencias que pueden ser expresadas mediante ese tipo de ecuación. La variación de "r", dejando invariables "a" y "b", daría una familia de circunferencias concéntricas con centro en el punto (a,b). La variación de "a" nos daría una familia de circunferencias del mismo radio "r" y centro en la recta horizontal representada por la expresión "y = b". En estos casos, el parámetro ha pasado a tener una situación de variable y lo podemos considerar como "parámetro variable".

Históricamente se comprueba que el uso de la letra como incógnita, logró alcanzarse tras muchos años de intentos y vacilaciones.

La incógnita comenzó llamándose la "cosa" durante el nacimiento del Álgebra árabe (comienzos del siglo IX) en su forma "retórica". Durante los siglos XV y XVI fue reduciéndose mediante abreviaturas.

Luca Pacioli (1445-1514) en su obra "Summa Arithmetica, Geometria, Proportioni e Proportionalita", impresionante recopilación de material de cuatro campos distintos: Aritmética, Álgebra, geometría euclidiana y contabilidad de doble entrada, en la sección dedicada al Álgebra, considerada la primera Álgebra impresa, incluye las soluciones usuales de las ecuaciones lineales y cuadráticas. Aunque no posee la notación exponencial de Chuquet, hay un uso creciente de cierta sincopación por medio de abreviaturas. En esta época ya se utilizaban ampliamente en Italia las letras "p" y "m" para representar la suma y la resta, y Pacioli utilizó además co, ce y ae para *cosa* (es decir, la incógnita), *censo* (el cuadrado de la incógnita) y *aequalis* (el signo igual). Creía que las ecuaciones cúbicas no se podían resolver algebraicamente, de aquí que no exprese la tercera potencia de la incógnita. Para la cuarta potencia de la incógnita usó de una manera natural, cece (o cuadrado del cuadrado).

Michael Stifel (1487-1567) comienza, en su "Arithmetica Integra" (1544), usando abreviaturas para las distintas potencias de la incógnita, representadas por las palabras: coss, zensus, cubus y zenzizensus, y evoluciona hasta proponer después, en su obra "De algoritmi numerorum cossicorum", el uso de una única letra para representar la incógnita, repitiendo dicha letra, para las potencias, tantas veces como lo indique el exponente. Por ejemplo: "AAAA representaría nuestra actual x^4".

Rafael Bombelli (1526-1572) en los tres primeros libros de su "Algebra", utiliza el "tanto" y la "potenza", para simbolizar la incógnita "x" y su cuadrado "x^2".

François Viète (1540-1603) propuso concretamente usar las "vocales" para representar las incógnitas y por fin, René Descartes (1596-1650) en su obra "La Géométrie", utiliza ya las primeras letras del alfabeto: a, b, c, …

para los parámetros constantes y las últimas: x, y, z… para las incógnitas o variables, por lo que esta obra marca la forma de expresión actual en Álgebra.

Pierre Fermat (1601-1665), por la misma época que Descartes, utiliza la notación de Viète: “D in A aequetur B in E” que traduce nuestra expresión: “Dx = By”, pues “in” es “por”, “aequetur” es “igual” y las vocales, son las incógnitas.

Estamos, por tanto, hablando de siete siglos aproximadamente, y del esfuerzo de muchos matemáticos experimentados, personas capaces e interesadas en hacer avanzar el conocimiento, y que aportaban sus esfuerzos para lograr este avance, a pesar de los cuales hubo que esperar todo ese tiempo para llegar a la simbolización completa actual.

Esta concreción, tan larga y dificultosa, del símbolo de la incógnita a lo largo de la historia, puede orientarnos sobre la complicación que puede representar para el alumno, llegar a asimilar una eficaz simbolización. Nos basamos para este comentario, en las afirmaciones de Piaget y García (1982).

El uso de las letras como incógnitas específicas en las ecuaciones, obliga a un doble ejercicio de abstracción: Primero, la letra (por ejemplo la x) representa “la cosa”, “la desconocida”, del mismo modo que en los orígenes del Álgebra; tratándola como si se conociera, se sigue con ella el proceso del problema en particular, y, cuando este proceso culmina, queda “planteada” una condición, la ecuación, que tiene que cumplir la incógnita para que el problema esté bien resuelto. Después actuando sobre esa condición, mediante reglas preestablecidas y generales, con una especie de proceso automático de reversibilidad, llegamos por fin a aislar y, de ese modo, a calcular la incógnita.

La incógnita representa algo preciso durante el proceso de planteamiento de la condición (ecuación o inecuación), pero cuando la condición está planteada, su manipulación posterior es independiente de lo que represente. Se debe hacer una abstracción de su significado y pensar, únicamente, en las leyes algebraicas que se pueden aplicar para llegar a la solución.

En este proceso, lo primero es hacer una representación semiótica con la letra, es decir, emplear una representación real, en este caso la letra, para evocar o representar otra cosa distinta de ella; después, trabajar con esa representación pero haciendo abstracción de lo que representa, para elaborar la respuesta de una forma objetiva, mediante el proceso de cálculo asociado a la representación semiótica, independientemente del contexto; cuando se ha llegado al final del proceso de cálculo, se vuelve a retomar la representación y lo que representa, para aceptar o no, la respuesta obtenida.

Este proceso de “abstracción de las representaciones utilizadas” para trabajar, teniendo en cuenta sólo el objeto matemático, es imprescindible para que el cálculo sea ágil.

En este trabajo de representación son importantes las primeras expresiones de las diferentes representaciones, momento en el que se hace el planteamiento, y aquí cada detalle tiene que tener un claro sentido; también es importante la última representación semiótica, pues, a partir de ella, se hace la "conversión" de la representación en sentido inverso, volviendo así a la situación "real".

Hasta aquí el estudio que venimos haciendo se ha referido exclusivamente a la interpretación del "signo letra" (en sentido semiótico) en sí mismo. En este uso que vamos a estudiar ahora, la *letra como variable*, no sólo hay que comprender el significado de las letras sino también, el de la relación que las une y, por tanto, comprender cómo los cambios en una de ellas, hacen variar a la otra.

Es, por ejemplo, el uso de las letras en las funciones. Son las expresiones "y = f (x)" o "y < g (x)".

Aquí cada letra representa más de un valor, pero tampoco es un conjunto fijo de valores, como en el caso anterior. No son importantes "cada uno" de los valores de la "x", ni su conjunto, lo esencial es "la relación" que une los pares de valores. Y así, es importante "el par" de valores que se forma con un valor cualquiera de la "x" y su "correspondiente" de la "y".

Considerando la Historia, la idea de función, en un sentido parecido al que usamos en la actualidad, se debe a Leibniz (1646-1716), (Boyer, 1986); pero la notación que usamos: "y = f (x)", es debida a Euler, que la utilizó en sus "Comentarii" de San Petersburgo de 1734-1735 (Boyer, 1986).

La notación de Euler ha sido un logro importante en la teoría de funciones, por lo clarificadora que resulta de la relación entre las dos variables "x" e "y".

Tan sólo unos años antes de Euler, se puede encontrar, en un matemático tan prestigioso como Jean Bernouilli (1667-1748), que fue discípulo del mismo Leibniz, una idea vaga de lo que era una función, idea que expone como: "una cantidad compuesta de cualquier manera a partir de una variable y constantes arbitrarias" (Boyer, 1986).

La noción de función fue introducida durante el siglo XVII: "A finales de siglo se llegaría a decir que y es función de x…" (Dieudonné, 1989) aunque un concepto totalmente general de función (o aplicación, como ahora se prefiere) no se dio hasta Dedekind (1831-1916):

"En vez de limitarse, como en las concepciones anteriores, a las funciones reales (o complejas) de una o varias variables reales, Dedekind generaliza al máximo y determina que, siendo E y F dos conjuntos cualesquiera, una aplicación de E sobre F es una ley ("Gesetz") que a todo elemento "x" de E le hace corresponder un elemento bien determinado de F, su "valor" en "x", que se escribe de manera general f (x)." (Dieudonné, 1989).

Por otra parte, el nivel de comprensión del Álgebra está muy relacionado con la progresión que se sigue en la utilización de las letras.

Küchemann (1981) señala que las consideraciones acerca de la compresión del Álgebra de los números implican el desarrollo de las habilidades de interpretar y manipular letras y otros símbolos y hace una clasificación de las distintas interpretaciones dadas a las letras por los niños.

Del uso de las letras se han hecho muchas clasificaciones, pero elegimos la de Küchemann para citarla por ser una de las más conocidas. Identifica seis categorías en el uso de las letras: 1) evaluada; 2) ignorada, no utilizada; 3) objeto; 4) incógnita específica; 5) número generalizado y 6) variable, a partir de las entrevistas que realizó el Proyecto CSMS (Concepts in Secondary Mathematics and Science).

Las categorías 4, 5 y 6, podrían representar diferentes usos teóricos de las letras en Álgebra, mientras que las categorías 1, 2 y 3, podrían estar indicando maneras que tiene los niños de interpretar las letras, dificultando así la comprensión teórica formal implícita en el tópico.

Por otro lado, Usiskin (1988) al considerar que el Álgebra escolar concierne esencialmente la comprensión del significado de las letras y las operaciones con ellas, partiendo de una especie de análisis funcional-estructural de contenidos, señala que los distintos usos que se hacen de las variables están relacionados con las distintas interpretaciones que se hacen del Álgebra y propone la siguiente relación:

Concepción del Álgebra	*Uso de las variables*
Aritmética generalizada	Generalizar patrones (Traducir, generalizar)
Medio para resolver ciertos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudio de relaciones	Argumentos, parámetros (relacionar, graficar)
Estructura	Signos arbitrarios (manipular, justificar)

Categorías similares, habían sido señaladas anteriormente por Mason y otros (1985) en su excelente libro de texto. Lo realiza desde un punto de vista genético que trata de identificar corrientes generales de actividad e ideas que subyacen en álgebra escolar:

Aritmética generalizada → Álgebra ← Expresar generalidad

Posibilidades y restricciones → Álgebra ← Reorganizar y manipular

Es difícil no mencionar a Freudenthal (1983) en su capítulo sobre el lenguaje algebraico, donde examina con profundidad algunos temas relacionados con la sintaxis y la semántica del lenguaje matemático, como se manifiesta en la Aritmética; en particular cómo algunas construcciones básicas como la de los nombres de los números naturales y la "puntuación" de las expresiones aritméticas, se desarrollan en objetos fenomenológicos, que sirven de base para nuevas construcciones a un nivel más alto de organización, cuando las variables se introducen durante el paso de la Aritmética al Álgebra. También Freudenthal elabora una breve pero muy profunda enumeración de "estrategias y tácticas algebraicas", esto es, hace un catálogo de algunas componentes básicas que subyacen en la dinámica de la actividad algebraica.

Consideramos ahora los diferentes contextos en los que aparecen las letras en el Álgebra dentro de la clasificación utilizada por Küchemann (1981). Interesa más que la notación formal en sí misma, las ideas representadas (o conceptos representados por los alumnos) por esas expresiones.

Cuando a la letra se le adjudica un valor, *letra evaluada*, se trata de un rechazo de la letra como desconocida. Esta categoría es aplicada a las respuestas donde a las letras se les asigna un valor numérico desde el principio. El alumno desea eliminar la incertidumbre que le produce trabajar con algo no conocido y asigna a la letra un valor elegido por él de forma personal. Para ello acude a relaciones y conceptos como simetría, lugar que ocupa dentro del alfabeto, reparto equivalente, etc…

- El valor repartido se da por ejemplo, si debe trabajar con una expresión algebraica tal como "a + b = 12", cuando asigna, inmediatamente, los valores: a = 6, b = 6.

También se puede apreciar esta valoración en ejercicios como el siguiente:

"Si b + d = 6, ¿qué puedes decir de b + d + f = ….?", en el que hay alumnos que dan como respuesta: b + d + f = 9.

En este caso es muy probable que hayan asignado a cada letra el valor 3, usando la información inicial: b + d = 6 y, repartiendo entre ambas letras el valor 6, de forma equitativa.

- Asimismo se da un caso singular de valoración de la letra cuando existe correspondencia entre el ordenamiento lineal del alfabeto y el sistema numérico, estableciendo que las letras finales del alfabeto tienen un valor más alto que las iniciales: la "a" valdrá 1, la "b" valdrá 2, etc…

En el caso de un ejercicio como el anterior la respuesta obtenida será: b + d + f = 12, pues la "b" ocupa el segundo lugar, la "d" el cuarto y la "f" el sexto lugar, de modo que: "b + d + f = 2 + 4 + 6 = 12".

Otra situación puede ser la que plantea: "Si a + 5 = 8, ¿cuál es el valor de a?". La letra a tiene un valor específico**.** Es inicialmente desconocida pero evaluable. Aquí los alumnos evitan el operar con una incógnita específica.

Los problemas de esta clase, comunes en el nivel de Primaria, pueden ser asimilados por los niños reflexionando sobre el significado de una letra como un valor numérico específico. Este uso de las letras es probablemente el primero que el alumno posee, desarrollado por la Aritmética, desde los primeros años bajo la forma: □+ 5 = 8, donde el número que falta debe ser colocado dentro del marco. El mismo marco no tiene valor y simplemente indica que existe un número desconocido. Si la cuestión se plantea así: "Si □ + 5 = 8, entonces □ = ?", es conceptualmente diferente a poner el número desconocido dentro del marco. El marco □ es fabricado como un indicador de un símbolo matemático con valor numérico que puede combinarse con números y con otros símbolos como el "+". En algunas situaciones, los símbolos como □ pueden reemplazares por letras del alfabeto, tales como n o x.

Otro contexto puede ser "¿Cuál es el valor de 5 . a + 3, cuando a = 1, a = 2, a= 3?" Se traslada ahora la noción de letra fija, inicialmente desconocida pero calculable, por la idea de que la letra puede ser reemplazada por varios números. A pesar de todo, la cuestión es un cálculo numérico disfrazado. Los alumnos son invitados a calcular "(5 x 1) + 3", "(5 x 2) + 3", "(5 x 3) + 3".

Con referencia a la *letra ignorada* o no tenida en cuenta, casi resulta improcedente decir que sea una "interpretación" de la letra, pues en realidad es un rechazo, haciendo precisamente una "no interpretación" de ella. Aquí los alumnos ignoran las letras, o, a lo más, reconocen su existencia, pero no le asignan significado.

Los alumnos escriben expresiones como "5 k" sin tener en cuenta más que el número 5, y, acompañándolo de la k, simplemente porque "estaba escrito así". No conceden ningún sentido a la letra. Le "permiten" estar ahí, simplemente.

Esta no - interpretación de la letra, puede detectarse en ejercicios como: "Añade 3 a 5n", cuando se produce una respuesta como "8n".

Sin embargo, puede pasar desapercibida en ejercicios como: "Multiplica 5 por 2n", pues la respuesta "10n" es correcta, a pesar de la no interpretación de la "n".

Otro contexto puede ser: "Si a + b = 43, a + b + 2=…". Esta cuestión puede ser resuelta sin el uso de las letras, aunque parecen implicadas dos incógnitas. Sin embargo, ningún resultado permite obtener esas incógnitas. Pueden ser esencialmente ignoradas por un procedimiento de igualación que enfoca la atención en "+2".

Cuestiones análogas, aunque con mayor grado de dificultad, pueden ser planteadas; por ejemplo, "si n - 245 = 752, n - 246= ..", o "si e + f = 8, e + f + g = …."

Cuando el alumno manifiesta este olvido de las letras, inicia un proceso de incomprensión del Álgebra elemental; al no dar un sentido correcto a las expresiones que debe utilizar, no comprende los procesos que se siguen con esas expresiones, ni su finalidad.

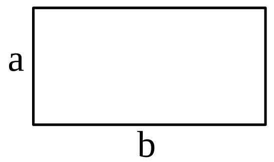
La interpretación de la *letra como objeto* es considerarla como un objeto concreto (frutas, lados de un polígono, etc.), eliminando así el significado abstracto de las letras por algo más concreto y real; corresponde a las ocasiones en que el alumno "lee" la letra pensando que simboliza un objeto determinado. Considera que la letra es, o bien la inicial de una palabra, o bien un objeto en sí misma.

- Puede ser en una expresión algebraica: "5 m + 6 p + 2 m", en la que las letras se tomen como representantes de objetos cuyas iniciales son: (m), manzanas y (p), peras, por ejemplo. Con esta interpretación se trata de sumar: "5 manzanas + 6 peras + 2 manzanas".

- Incluso pueden pensar "simplemente" en 7 "emes" más 6 "pes", es decir, cada letra como el objeto - letra con el que se escribe.

- Puede ser en una fórmula geométrica para un cálculo de áreas (a) o de perímetros (b).

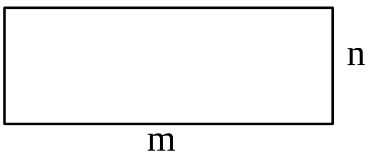
(a)



A = a . b

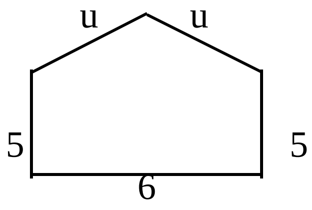
"a" y "b" pueden ser interpretadas como lados del rectángulo, como segmentos -"b" segmento base, "a", segmento altura-, en lugar de interpretarlas como las longitudes de esos lados. La fórmula del área tiene sentido con la segunda interpretación, pues se sabe realizar el producto de dos números, pero no con la primera, porque el alumno no ha realizado el producto de dos segmentos.

(b) Calcular el perímetro de un rectángulo de lados m y n.



p =

(c) Calcular el perímetro de la siguiente figura:

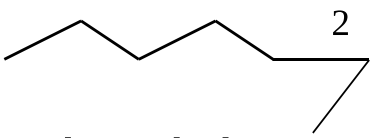


Las letras son aún idea de un simple nombre o marca de los lados (no son vistas todavía como longitudes desconocidas de los lados) y pueden ser unidas.

El uso de las letras como objeto reduce el significado abstracto de las letras a objetos, pero esta reducción ocurre con frecuencia donde no es adecuado. Esto sucede especialmente en problemas donde se involucren objetos (lápices, peras, salarios, etc.) y es esencial distinguir entre los objetos mismos y su cantidad.

Los alumnos pueden también considerar las letras como un número desconocido, pero específico y pueden operar sobre él directamente, esto es lo que se considera *letras como incógnitas específicas.*

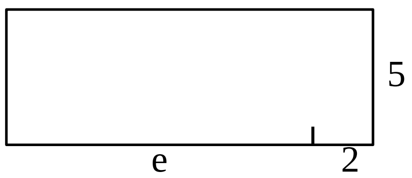
Una ocasión de adjudicación de valor, en este caso "visual geométrico", se puede observar en los cuestionarios, en el ejercicio de cálculo de perímetro en la siguiente figura:



¿Cuál será el perímetro de este polígono, cuya figura sólo vemos parcialmente, si tiene n lados y todos miden 2 cm de longitud?

En lugar de la respuesta correcta: perímetro igual a 2n, algunos alumnos responden 14, porque han contado los lados visibles que son 7, es decir han rechazado el uso de la letra "2n", asignándole un valor calculado por la imagen visual que aporta la figura.

O el cálculo del área del siguiente rectángulo:



A =

Otro contexto puede ser: "Los lápices azules cuestan 10 pesetas cada uno y los lápices rojos 12 pesetas cada uno. Compro algunos lápices azules y rojos y en total me cuestan 180 pesetas. Si a es el número de lápices azules y r es el número de lápices rojos comprados, ¿qué puedo escribir acerca de a y r?"

La respuesta correcta a esta cuestión requiere el uso de las letras como incógnitas genuinas o específicas.

En las concepciones de los alumnos, surgen otras interpretaciones de las letras. Por ejemplo, cuando interpretan la letra como un conjunto de números o sea la *letra generalizando números.*

Los alumnos ven las letras como una representación, o al menos son capaces de deducirla de varios valores numéricos antes que de uno exactamente.

En el ejercicio: "¿qué puedes decir sobre "n", si sabes que n + p =20 y que "n" es menor que "p"?, para dar la respuesta correcta es necesario contemplar para "n" un conjunto de posibilidades. Encontramos que hay alumnos que responden "n = 9", otros dicen: "n = 2". Son alumnos que en el momento que encuentran un valor que cumple la condición, ya les parece suficiente. Algunos aceptan la posibilidad de que tome un valor u otro, pero luego no dan los varios valores posibles, sino que eligen entre ellos "él" ("único") que creen que debe ser "la respuesta".

O, por ejemplo, "L + M + N = L + P + M", ¿se verifica: siempre, nunca o algunas veces?

Es difícil, para el alumno, pasar de la interpretación de un único valor a la interpretación de varios valores posibles. Estos alumnos no han llegado a superar la concepción del "valor único" para la letra, en favor de la concepción del "valor múltiple".

En general, esta interpretación de "valor múltiple" es necesaria para las expresiones con desigualdades. Por ejemplo, cuando escribimos "$x < 5$", estamos indicando un "conjunto de números". Este conjunto puede variar desde "0" hasta "4", si trabajamos con números naturales, hasta conjunto de infinitos elementos, cuando trabajamos con números enteros, racionales, reales o complejos.

En el contexto "¿para qué valores de x en el conjunto {0, 1, …, 9}, se verifica $3x + 1 < 19$?, todos los alumnos son inducidos a evaluar $3x + 1$ para $x = 0, 1, \ldots 9$, y comparar la respuesta con 19.

También en la resolución de una ecuación de grado mayor que "1"se obtiene en la mayoría de los casos, más de una respuesta válida, por lo que en expresiones como: $x^2 + x - 6 = 0$, en realidad la "x" representa dos valores posibles: las dos soluciones "$x = 2$" y "$x = -3$" de la ecuación. Por supuesto, salvo los casos de ecuaciones de solución única múltiple, en que se da un solo valor como solución doble, triple, etc.

La abstracción que, para el proceso de cálculo, se hace de la significación de la incógnita, debe incluir la posibilidad de que ésta represente a varios números.

La incógnita es, en cierto modo, una variable. Para la enseñanza y aprendizaje del Álgebra es fundamental el concepto de variable (Schoenfeld, 1988) y, sin embargo, la mayoría de las veces las variables se utilizan como si pudieran entenderse sin ningún problema, simplemente, después de una cierta práctica; el uso de las variables se confunde con el uso de las x, las y…, o de otras letras, manejándolas habitualmente con naturalidad, sin llegar a valorar ni la complejidad que tiene el concepto, ni los múltiples significados y usos que pueden tener las letras para los alumnos.

El adquirir el concepto de variable supone la conjunción de dos procesos: Generalización, que permite pasar de un conjunto de situaciones concretas a algún aspecto común a todas ellas, y, simbolización, que permite expresar de forma abreviada lo que tienen en común todas las situaciones. Para que se pongan en práctica de forma simultánea estos dos procesos hace falta utilizar, en cada caso, capacidades muy distintas y a la hora de planificar cualquier estrategia de enseñanza, se debe abordar cada uno de ellos de forma diferente. Cuando se habla del concepto de variable, se incluyen múltiples significados, y cada uno de ellos se corresponde con las distintas formas de enfrentarnos a la generalización. Podemos decir que es una variable con cierta "predeterminación". Puede tomar uno o dos valores (o más, según el grado de la ecuación), pero no puede adquirir cualquier valor dentro de su dominio, como sucede con la variable. Salimos del valor único para cada caso y entramos en el conjunto de los “valores posibles”. Esto ya supone una bivalencia (o trivalencia, o polivalencia), que es un paso hacia la complejidad de la variable. Las letras son consideradas como una representación de un rango de valores no especificado y se ve como una relación sistemática entre dos conjuntos de valores.

En el caso de las ecuaciones con relación a la incógnita, esos valores están predeterminados por la condición que supone la ecuación. Aunque no se conozcan, esos valores serán “concretos” al resolver ésta, y la “x” es como la envoltura o la caja donde se encuentran. Están juntos en la “x” , pero llevan implícita una cierta “individualidad” e independencia unos de otros, pues, por ejemplo, para comprobar si son válidos o no, cada uno debe cumplir por separado la ecuación propuesta. Son valores en cierto sentido “sucesivos”, pues su posibilidad de existencia, que es su ecuación, se verá cumplida por uno de ellos “u” otro, pero nunca lo será por dos valores “simultáneamente”.

El caso de la ecuación de primer grado con una incógnita no ofrece nuevos problemas de interpretación de la letra “x” pues, para el alumno, se trata del mismo concepto de parámetro incógnita. El hecho que la letra empleada sea la “x”, incluso sirve para aclarar la idea de que se trata de una ecuación y que “hay algo que calcular”. El alumno ve que ese “algo” es la “x” y sus únicas dificultades pueden provenir de defectos de cálculo, pero no de comprensión distinta de las letras o incomprensión de la tarea que debe realizar.

En el caso de la ecuación de segundo grado, ya encontramos cierta tendencia a calcular simplemente un valor. Este hecho es muy claro cuando la ecuación llega a adquirir la forma de $x^2 = k$.

El concepto de variable implica claramente el conocimiento de la incógnita y de sus posibles valores. Pero esto está más allá de la comprensión de las letras como incógnitas específicas y como generalización de números. Señala Küchemann que este concepto es difícil de encontrar con toda exactitud debido a que la mayoría de los ítems que pueden dar idea de variable, a menudo son resueltos en un nivel de interpretación más bajo, incluso dentro de la resolución de un mismo problema, el alumno cambia de interpretación, lo que genera gran dificultad al observador y también al mismo niño.

La idea de “variable” para el alumno es un concepto de difícil asimilación, pues los símbolos que ha usado en Aritmética - signos de operaciones, paréntesis y números - son de significación unívoca y está acostumbrado a poder interpretar, de manera única, cada símbolo que encuentra.

Cuando las letras vienen a sustituir a un número, son aceptadas como letras desconocidas que en algún momento, se podrán calcular, como letras “incógnitas”. Lo que resulta mucho más difícil, para el alumno, es imaginar que para una misma letra existen distintas posibilidades; aceptar la idea de la letra como “variable”.

El ejemplo de la siguiente situación ya considerado permitirá clarificar. “Los lápices azules cuestan 10 pesetas cada uno y los lápices rojos 12 pesetas cada uno. Compro algunos lápices azules y rojos y en total me cuestan 180 pesetas. Si a es el número de lápices azules y r es el número de lápices rojos comprados, ¿qué puede escribir acerca de a y r? En la relación de los lápices rojos y azules adquiridos “10 a + 12 r = 180”, las letras pueden ser consideradas como incógnitas específicas o como generalización de números. Sin embargo, ninguna de las dos interpretaciones induce a establecer una relación que existe entre a y r, por lo que es necesario tomar la interpretación de las letras como variables en un paso posterior.

En 10 a + 12 r = 180, "a" y "r" se interpretan como incógnitas específicas, al observar que la expresión es una afirmación verdadera para un particular par de números considerados como incógnitas (6, 10). Análogamente, las letras pueden ser observadas como generalización de números: 10a + 12r =180 es satisfecha para un conjunto finito de pares de números (6,10), (12,5), (0,15), (18, 0). Esta interpretación contiene la idea de que los valores de a y r pueden cambiar, pero no refleja la verdadera idea de cambio, para ello es necesario comparar los valores unos con otros, mediante alguna vía.

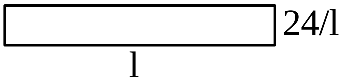
Un primer paso en tal comparación puede ser el orden de los pares de valores, para quienes es posible reconocer una correspondencia

a creciente	r decreciente
0	15
↓	↓
6	10
↓	↓
12	5
↓	↓
18	0

Se puede ir más lejos y describir el grado con que a y r cambian estableciendo relaciones entre ellos. Tal relación puede ser expresada de formas diferentes, por ejemplo, “si el crecimiento de a es 6, el decrecimiento de r es 5”. Este sentido añadido a las relaciones de esta clase dan a “10 a + 12 r = 180”, un verdadero avance desde la interpretación de las letras como incógnitas específicas o como generalización de números, a las letras usadas como variables.

Otro contexto no funcional en el que las letras "n" o "x", respectivamente, tienen claramente las características de una variable es el de los siguientes ejercicios: “¿quién es más largo 2n ó 2 + n? Explicarlo” y “probar que si x > 5, entonces 4 x + 1 > 3 x + 4”. El interés de esta cuestión es comprender si los niños reconocen que el tamaño relativo de ambas expresiones (2n y n + 2) y (4 x + 1 y 3 x + 4) dependen de los valores de n y x, respectivamente.

En Geometría se podría plantear: “Un rectángulo tiene de área 24 cm^2. Determinar una expresión para el perímetro del rectángulo en términos de la longitud del lado del rectángulo”.



Aquí a los alumnos se les pide que describan el método de cálculo del perímetro del rectángulo, dada la longitud de un lado. Resultando la expresión $p = 2\left(l+\frac{24}{l}\right)$, donde l cm denota la longitud y p cm el perímetro que simboliza esta descripción. El símbolo l representa una variable, puesto que su valor cambia de rectángulo en rectángulo. La representación posterior de esta relación (funcional) entre perímetro y longitud sobre un gráfico cartesiano, refuerza el concepto de variable, puesto que el movimiento a lo largo del grafo es una consecuencia de la variación de los valores de la longitud.

Con referencia al signo igual (=), sabemos que hay muchas situaciones en las que las notaciones algebraicas y aritméticas tienen apariencia similar pero significados muy diferentes. Esto hace que sea muy difícil distinguir unas de otras. En el caso del signo igual las repercusiones didácticas tienen mucha importancia. En Aritmética se entiende como una acción física. Es usado para conectar un problema con su resultado numérico; se utiliza casi siempre con carácter unidireccional, a la izquierda se indica la operación y a la derecha se pone el resultado numérico: $3 + 5 = \square$, donde una parte es conocida y la otra debe ser completada con el resultado de la ejecución ordenada por la primera; con menor frecuencia, se utiliza para relacionar dos procesos que dan el mismo resultado, 3 x 4 = 4 + 4 + 4, y en algunos casos relaciona la secuencia de pasos intermedios de un proceso que conduce a un mismo resultado, por ejemplo, “3 x (5 - 2) + 4 = 3 x 3 + 4 = 13”, donde cada eslabón de la cadena de igualdades expresa una simplificación o cambio en la forma de su predecesor, es decir, una “reducción”, pero en todos los casos los supuestos que se establecen son siempre verdaderos. Los alumnos trasladan a veces este significado del signo “=” al Álgebra y lo confunden con el “=” de la ecuación, por ejemplo, en “3 x + 3 = 2 x + 7”.

En lo que se refiere a la maduración del concepto de igualdad, se presenta un cambio conceptual más crítico. A diferencia de la situación con otros valores simbólicos, este cambio claramente implica la extensión de un concepto existente más que la adquisición de uno completamente nuevo, especialmente porque las características de “=” en Aritmética y en ecuaciones algebraicas comparten la misma notación.

La presencia en el Álgebra del signo (=) como señal de acción no tiende a desaparecer. El Álgebra en la escuela tradicional está llena de problemas semejantes: “$(a + b) . (a - b) = a^2 - b^2$”, donde es interpretada como un sistema de reglas de transformaciones lingüísticas (sintaxis) guiadas automáticamente por una interpretación del signo igual como una acción. En este cálculo expresado por una cadena de igualdades aparece un término bien caracterizado y automatizado en el Álgebra de la escuela “la reducción”. De esta manera, y de acuerdo con ciertas reglas, las expresiones son “reducidas” en un sentido o en otro, pero la aplicación de la “reducción” no se limita exclusivamente a expresiones algebraicas tautológicas, sino también a ecuaciones, para resolverlas, o sea a veces el signo igual indica restricciones, como en el caso de las ecuaciones donde las igualdades sólo son ciertas para algunos valores. El signo igual tiene en Álgebra un carácter bidireccional, es decir, hay que verlo actuar tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda. Aparece así un cambio importante en el sentido del signo (=) en su paso de la Aritmética al Álgebra. Por tanto, para simbolizar en Álgebra es necesario haber realizado un verdadero cambio conceptual en el uso del signo igual, manteniendo al mismo tiempo el que tenía en Aritmética, ya que la notación utilizada en ambos casos es la misma.

Al respecto, Kieran (1980) citando a Gattegno (1974) se plantea la siguiente distinción: la “identidad” es una clase de relación muy restrictiva en cuanto que se refiere a una efectiva “mismicidad” (ser el mismo); la “igualdad” apunta en el sentido de un atributo que no cambia; y “equivalencia” está referida a una relación más amplia donde se acepta que para ciertos propósitos es posible reemplazar una cosa por otra. Siendo la equivalencia la relación más amplia y más flexible, es por tanto, la más usada. Sin embargo, la interpretación del signo “=” en términos de equivalencia parece ser algo a lo que los alumnos no llegan tan fácil y rápidamente.

A nivel infantil la conducta normal de un alumno para determinar si dos conjuntos A y B son numéricamente iguales es “contarlos y ver qué pasa”. Su conclusión de que “son el mismo” correspondería simbólicamente a “card (A) = card (B)”. Puede considerar que aquí está presente una noción comparativa de la igualdad.

Cuando el alumno aprende a “juntar” dos conjuntos y contar el total de elementos de la “unión”, esta acción conduce a una noción “operacional” de la igualdad que enfatiza el “resultado” de la operación aritmética. Así pueden distinguirse dos significados intuitivos de la igualdad entre los alumnos de educación infantil: uno, que implica comparación entre dos conjuntos; y el otro, que implica la combinación de los dos conjuntos y la obtención del resultado de contar los elementos del conjunto resultante. Es esta última, la noción operacional de la igualdad, a la que se recurre cuando se presenta el signo “=” en la escuela.

En la Educación Primaria, aunque los niños aprenden rápido a leer y escribir el simbolismo elemental de la Aritmética simple, no necesariamente lo entienden igual que nosotros. Ellos interpretan “+” e “=” en términos de acciones a ser realizadas, como se indicó. Así se interpreta el signo igual como “una señal para hacer algo”.

Cuando Behr (1976) presentó a sus estudiantes de Primaria, igualdades como 4 + 5 = 3 + 6, una respuesta común fue: “después del igual debería estar tu respuesta. Es el final, no otro problema”, seguida de la transformación de la igualdad inicial en dos oraciones “4 + 5 = 9 y 3 + 6 = 9” y la comparación de los resultados de estas afirmaciones. Este tipo de reacción pone en duda la validez psicopedagógica de la estrategia del “nombre para un número”, según la cual se esperaría que el niño asimile la equivalencia entre 4 + 5 y 3 + 6, aceptando que 4 + 5= 3 + 6, porque ambos son nombres distintos para el 9.

En la Secundaria, algunos experimentos (Herscovics y Kieran, 1980; Kieran, 1980) permiten afirmar que la interpretación que los niños dan al signo igual está más evolucionada y tiende a ser más en términos de símbolo de relación que como una “señal para hacer algo”.

Así ante igualdades como 4 + 3 = 6 + 1, argumentan que ambos lados son iguales porque tienen el mismo valor. Esto es, el miembro derecho ya no tiene que ser una respuesta; basta con que sea una expresión que tenga el mismo valor que el miembro izquierdo. Esta misma interpretación se extendía hasta la conceptualización del significado de las ecuaciones algebraicas simples: por ejemplo, 2 x + 3 = 4 x + 1, se describía como: “si sabes qué número es x, entonces dos veces ese número más tres tiene el mismo valor que cuatro veces ese número más uno. Esta noción de la igualdad parece ser, sin embargo, aún insuficiente para una adecuada conceptualización del proceso de resolución de ecuaciones, por ejemplo, porque ya hemos dicho que resolver ecuaciones no implica sólo una comprensión de que ambos miembros son expresiones equivalentes sino también que cada ecuación se puede sustituir por otra ecuación equivalente.

En los procesos de sustitución formal que conducen de “3 x 5 = 5 x 3” a “a . b = b . a”, o la verificación de que si x^2 - 5 x + 6 = 0”, es satisfecha por x = 3, sustituyendo x por 3, son procesos formales.

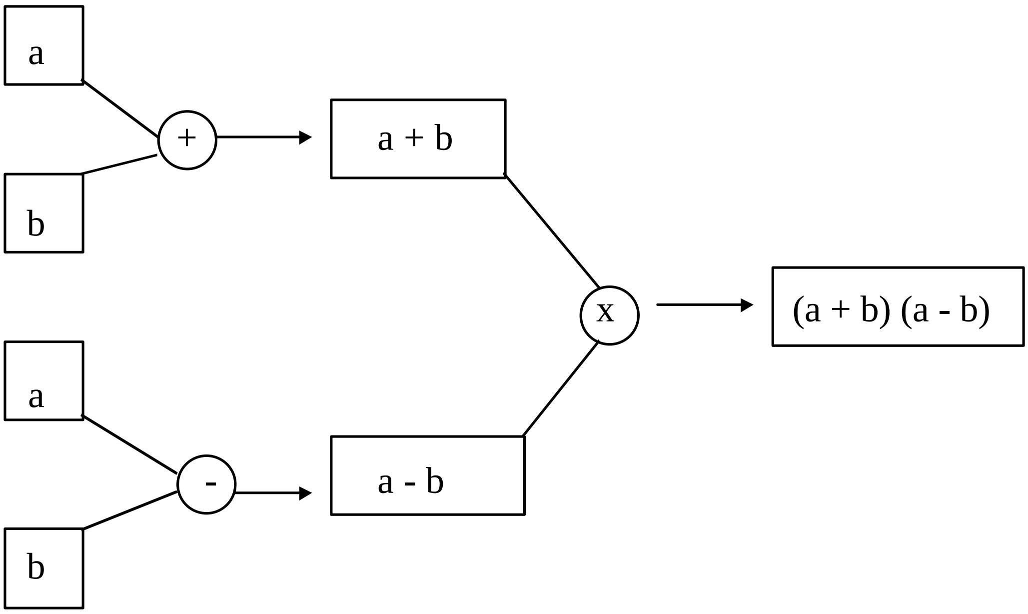
La sustitución formal, sin embargo, se extiende más allá. De la identidad "(a + b) . (a - b) = a^2 - b^2", al reemplazar “a” por “a + c” y “b” por “b + d”, se obtiene, “(a + c + b + d) (a + c - b - d) = $(a + c)^2$ - $(b + d)^2$”, donde variables de una expresión son sustituidas por expresiones más complejas que son nuevamente variables.

Estas transformaciones algebraicas constituyen un poderoso instrumento de cálculo algebraico que está a mitad de camino entre lo puramente formal y un conocimiento explícito de su significado.

Las expresiones algebraicas a sustituir deben ser interpretadas estáticamente y aceptadas las sustituciones solamente dentro de los paréntesis; en el caso anterior del reemplazo de “a + c” por “a” y de “b + d “ por “b” en “(a + b) . (a - b) = a^2 - b^2”, produce inicialmente:

“[(a + c) + (b + d)] [(a + c) - (b + d)] = $(a + c)^2$ - $(b + d)^2$”.

El camino hacia la sustitución formal debe comenzar con pasos seguros en medio de un progreso deliberadamente lento. La organización de las instrucciones en esquemas semejantes a un pequeño ordenador puede facilitar la comprensión. Si queremos leer (a + b) (a - b) como producto de la suma de a y b y de la diferencia de a y b, el uso de diagramas no lineales puede ser un estado intermedio que ayude en este sentido.



La sustitución formal es un instrumento de cálculo algebraico importante a causa de su amplio campo de aplicaciones, que se manifiesta en diferentes procesos matemáticos tales como, entre otros: generalización, cuando términos numéricos son reemplazados por variables; simplificación, cuando en una expresión dada, expresiones parciales son reemplazadas por variables; eliminación, cuando variables implicadas en una sustitución son suprimidas, por ejemplo en la resolución de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas; complicación estructural, cuando en una expresión las variables son reemplazadas por expresiones dadas y particularización, cuando las variables son reemplazadas por números para verificar ciertas expresiones.

En general, los métodos de resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas y de sistemas de ecuaciones utilizan estos procesos. Tales métodos puede ser introducidos numéricamente y generalizados por medio de la sustitución formal.

Con referencia a los símbolos de las operaciones consideramos expresar que los símbolos son un recurso que permite denotar y manipular abstracciones. Una de las teorías iniciales de los estudiantes será el reconocimiento de la naturaleza y significado de los símbolos para poder comprender cómo operar con ellos y cómo interpretar los resultados. Este conocimiento les permitirá la transferencia de conocimiento aritmético hasta el Álgebra, aceptando las diferencias entre ambos. En Aritmética los signos de operación indican una acción que se va a realizar con números, y que da como resultado otro número, por tanto, dar un significado a estos signos es dar un procedimiento que permita llegar a la respuesta. En Álgebra tienen un carácter de "representación", ya que indican operaciones que no siempre tienen por qué realizarse y pueden quedar indicadas como operaciones "en potencia".

El discernimiento del significado de los valores simbólicos les puede llevar a dar "7x" como respuesta de "3x + 4", que tiene que ver con su interpretación del símbolo de la operación. En Aritmética, el símbolo "+" es interpretado como una acción a realizar, es decir, "+" significa realizar la operación. Por ejemplo, en Aritmética el "+" de "6 + 5", indica la operación suma entre 6 y 5, y no se suele escribir 6 + 5 más que como un paso previo para obtener el resultado: 11. La idea de que el símbolo de la suma puede indicar el resultado y la acción, no es fácilmente apreciada por los alumnos aunque estas dos nociones sean necesarias para el conocimiento del Álgebra. Por ejemplo, en Álgebra, en la expresión "6 + d" el signo "+" indica el proceso de sumar "6" a "d"; "+" expresa aquí la relación entre dos conjuntos de valores, el que está representado por "d" y el que está representado por "6 + d". Con esto no se expresa un único resultado sino "todos" los resultados. En este caso sí tiene sentido dejar la operación indicada.

En orden a trabajar con valores simbólicos, el estudiante necesita ampliar el concepto de notación usado para las operaciones aritméticas. A veces, los alumnos reducen la comprobación de la validez de una transformación notacional y la dualidad en Álgebra provoca confusión en la conexión entre la evolución simbólica y numérica.

En Aritmética, la concatenación es usada en la notación "cada lugar", un valor. Error típico en Álgebra es concluir que si x = 6, 4x = 46. También en la notación de fracciones mixtas donde se denota implícitamente la adición ($4\ \frac{3}{4}$); se originan errores como xy = -8, dados x = -3 e y = -5. Sería aconsejable no omitir el signo de la multiplicación demasiado pronto cuando se trabaja con productos algebraicos, ya que ayudaría a evitar esos errores.

Collis (1974) señaló que los principiantes en Álgebra ven las expresiones algebraicas como proposiciones que son, de alguna manera, incompletas. Atribuye esta percepción a la incapacidad de los alumnos para admitir operaciones indicadas. Necesitan que dos números que están conectados mediante un signo de operación se reemplacen inmediatamente por el resultado de esa operación. Los alumnos no pueden mantener operaciones sin realizar, "no aceptan la falta de cierre", y eso se pone de manifiesto cuando se utilizan expresiones como la anterior, "6 + d", que no se pueden reemplazar por un número. Cuando ocurre esto, los alumnos tienden a igualar a cero y hallar el valor de la d.

En Álgebra son también importantes las propiedades de las operaciones y las relaciones que se establecen entre ellas. Esto es lo que va a permitir realizar las transformaciones algebraicas que se apoyan directamente en las propiedades de las operaciones. Para dominar el Álgebra hace falta que se relacione el significado de las operaciones con las acciones realizadas sobre las cantidades, pero, muchos alumnos no ven estas relaciones y por eso es conveniente practicar con ellos, en casos sencillos, la conexión que existe entre aplicar una regla u operación y la acción que se realiza sobre los objetos reales. Schoenfeld (1987) y Resnick (1983) recomiendan que se dedique mucho tiempo a las acciones sobre los objetos y a la discusión oral, pues afirman que, a pesar de que parece que el proceso que se sigue, es bastante fácil, estas conexiones no se hacen de forma automática.

El poder del Álgebra radica en la posibilidad de realizar una manipulación extensiva de relaciones entre variables dentro de un sistema de representación semiótico (S.R.S.) completamente confiable (usamos el sistema de representación semiótico como un lenguaje) que no requiere una atención continua del significado referencial de las expresiones intermedias generadas en la representación. El hecho de que este sistema de representación puede realizar transformaciones y operaciones sobre sí mismo es, sin lugar a dudas, un factor de su eficiencia. Pero a su vez, las aplicaciones del Álgebra en entornos muy concretos le confieren un significado más plausible, y hasta cierto punto, esos entornos o situaciones empíricas son el origen histórico y genético del Álgebra.

Los objetos de Álgebra, al igual que el resto de los objetos de las matemáticas, se presentan bajo un aparente dilema con estatus diferente: el estatus operacional, de carácter dinámico, donde los objetos son vistos como un proceso, y el estatus conceptual, de carácter estático, donde los objetos son vistos como una entidad conceptual. Pero mientras el estatus conceptual del objeto matemático se presenta organizado en diferentes redes conceptuales y es plenamente aceptado, los S.R.S. que caracterizan el estatus operacional (representaciones numéricas, códigos algebraicos, gráficas, diagramas, etc.) en los que los objetos son expresados y comunicados, ha recibido menor atención por los matemáticos y en el sistema educativo.

Sin embargo, las Matemáticas no pueden ser comunicadas sin estos sistemas de representación y en muchas ocasiones, los estudiantes y profesores trabajan con sistemas de representación intermedios (diagramas, geométricos, balanza, etc.) de manera inconsciente, con la intención de que ayuden al estudiante a ser competente en el sistema de representación convencional apropiado.

2.2.2. Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del Álgebra

Problemas específicos en la enseñanza-aprendizaje del Álgebra escolar son las dificultades, los obstáculos y los errores.

2.2.2.1. Dificultades

El Álgebra escolar es considerada como una de las partes de la Matemática que influye considerablemente en el aspecto formativo, por la potencia y simplicidad de sus registros formales y por sus métodos, pero su aprendizaje genera muchas dificultades a los alumnos y estas dificultades son de naturaleza diferente, y tienen que ver con la complejidad de los objetos del Álgebra, con los procesos de pensamiento algebraico, con el desarrollo cognitivo de los alumnos, con los métodos de enseñanza y con actitudes afectivas y emocionales hacia el Álgebra.

Estas dificultades de procedencia distinta se conectan y refuerzan en redes complejas que se concretan en la práctica en forma de obstáculos y se manifiestan en los alumnos, mediante errores.

Las dificultades, sin embargo, pueden abordarse desde varias perspectivas según se haga hincapié en unos u otros elementos.

Con relación a las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos del Álgebra, observamos como éstos operan a dos niveles, el nivel semántico -los signos son dados con un significado claro y preciso-, y el nivel sintáctico -los signos pueden ser operados mediante reglas sin referencia directa a ningún significado-. Son éstos dos aspectos los que ponen de manifiesto la naturaleza abstracta y la complejidad de los conceptos matemáticos.

Con relación a las dificultades asociadas a los procesos de pensamiento en Álgebra, también se observa que se ponen de manifiesto en la naturaleza lógica del Álgebra y en las rupturas que se dan necesariamente en relación a los modos de pensamiento algebraico.

Los modos de pensamiento algebraico provocan rupturas que se convierten en dificultades en el proceso normal de construcción del conocimiento matemático. El saber matemático anterior produce modelos implícitos para resolver los problemas matemáticos. Muchas veces estos modelos son adecuados, pero otras, por el contrario, aparecen como dificultades para el saber matemático nuevo, el saber algebraico.

Estas dificultades, en general, no se pueden evitar ya que forman parte del proceso normal de construcción del conocimiento matemático, pero los profesores tienen que conocerlas y reflexionar sobre ellas para facilitar su explicitación por parte de los alumnos. Si se quedan implícitas, es muy difícil incorporar otro saber nuevo.

Veamos a título de ejemplo como al quedar implícito un modelo, éste constituye un conflicto para otros. Así por ejemplo a los modelos “a x + b”, “x^2”, “$\sqrt{x}$” ó “1/x”, se les suele aplicar las propiedades de linealidad:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2, \quad \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad 1/(x + y) = 1/x + 1/y,$$

donde este primer error adquiere más fuerza a causa de la analogía con

$$(a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2.$$

A otras expresiones también se les aplica las propiedades de linealidad

$$2^{n+m} = 2^n + 2^m.$$

Las dificultades asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje del Álgebra tienen que ver con la institución escolar, con el currículo y con los métodos de enseñanza de la misma.

Las dificultades asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos tiene que ver con los estadios generales del desarrollo intelectual, representado cada uno de ellos por un modo característico de razonamiento y por unas tareas específicas de Álgebra que los alumnos son capaces de hacer. Nos encontramos, sin embargo, con diferentes teorías generales sobre el desarrollo cognitivo que, por distintas razones, no han tenido un efecto claro y directo en las aulas de matemáticas de Secundaria.

En relación a las dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales, sabemos de las dificultades de muchos estudiantes hacia el Álgebra, muchos tienen sentimientos de tensión y miedo hacia el Álgebra. Sin lugar a duda, muchos son los aspectos que influyen en esta aversión. Por ejemplo, la naturaleza jerárquica del conocimiento matemático, la actitud de los profesores de matemáticas hacia sus alumnos, los estilos de enseñanza y las actitudes y creencias hacia las matemáticas que les son transmitidas.

2.2.2.2. Obstáculos

Otro problema en la enseñanza-aprendizaje del Álgebra es el de los obstáculos que tienen que ver con la organización de los errores.

Podemos señalar que un obstáculo es un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento, sino de algo que se conoce positivamente, o sea, está constituyendo un conocimiento.

Tiene un dominio de eficacia. El alumno lo utiliza para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto en el que el dominio de ese conocimiento es eficaz y adecuado.

Cuando se usa este conocimiento fuera de ese contexto, genera respuestas inadecuadas, incluso, incorrectas; el dominio resulta falso.

Es resistente, y resultará más resistente cuanto mejor adquirido esté, o cuanto más haya demostrado su eficacia y su potencia en el anterior dominio de validez. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.

Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo esporádicamente.

De todo ello podemos obtener como primera reflexión que en el contexto del desarrollo del pensamiento matemático éste está lleno de obstáculos caracterizados como epistemológicos. Sin embargo éstos no están especificados en términos de experiencia de enseñanzas regladas y organizadas en el sistema educativo; no obstante aceptamos que tales organizaciones de las Matemáticas en el sistema escolar pueden originar obstáculos que podemos caracterizar como didácticos. Ahora bien, la adquisición por parte del alumno de nuevos esquemas conceptuales está salpicado de obstáculos que podemos considerar cognitivos.

Para Bachelard (1938) el conocimiento científico se edifica salvando obstáculos, no sólo de tipo externo, como los debidos a la complejidad de los fenómenos o a la debilidad de las facultades perceptivas humanas, sino también a los que se producen en el propio acto de conocer y que se manifiestan como una especie de inercia que provoca el estancamiento o, incluso, la regresión del conocimiento. Éstos son los que él denomina obstáculos epistemológicos.

Brousseau (1983) manifiesta que la noción de obstáculo tiene tendencia a extenderse fuera del campo estricto de la epistemología: a Didáctica, a Psicología, a Psicofisiología, etc.

Herscovics (1989) reconoce la introducción de la noción de obstáculo epistemológico por parte de Bachelard y su definición en el contexto del desarrollo del pensamiento científico (no menciona a Brousseau ni sus obstáculos didácticos), se sitúa en un punto de vista esencialmente constructivista e interpreta la noción de obstáculo cognitivo en términos de la teoría piagetiana, señalando que el estudiante se enfrenta a nuevas ideas que no tienen cabida en sus estructuras cognitivas ya existentes, lo que ocasiona que no pueda enfrentarse adecuadamente a la nueva información. Podemos pues tomar como válido que los obstáculos cognitivos son producto de la experiencia previa de los alumnos y del procesamiento interno de estas experiencias, y que nuestra organización curricular, diseñada para presentar los objetos matemáticos de las formas lógicamente más simples, puede realmente causar obstáculos cognitivos, pero que también surgen obstáculos cognitivos que no tienen que ver con esta organización curricular sino que tienen que ver con otros aspectos, como por ejemplo, la lógica interna de las Matemáticas y en algunos casos con los que hemos denominado en los apartados anteriores, lógica social.

Se refiere por primera vez a la noción de obstáculo en la adquisición de esquemas conceptuales por el aprendiz y lo expresa en su trabajo “*Cognitive Obstacles Encountered in the Learning of Algebra*”.

Siguiendo con este análisis sobre las obstrucciones en el aprendizaje del Álgebra, interesa destacar lo que indica Tall (1989) en su trabajo “*Different Cognitive Obstacles in a Technological Paradigm*”. El no hace distinciones entre los obstáculos; los llama simplemente obstáculos cognitivos, y distingue dos tipos:

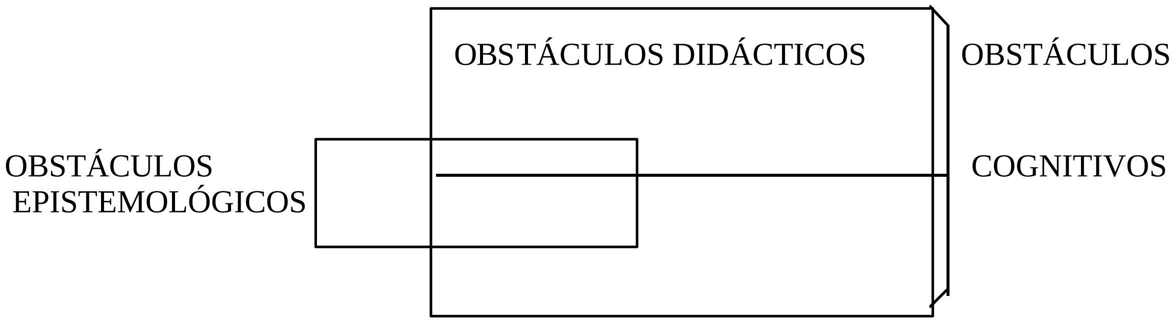
a) Obstáculos **basados en la secuencia de un tema**, en que afirma que la razón para creer en obstáculos surge fundamentalmente del hecho de que ciertos conceptos tienen un grado de complejidad, por lo que es preciso familiarizarse con ellos en un cierto orden. Por ejemplo, el caso del Álgebra, en el que las destrezas operatorias son enseñadas con anterioridad a ideas conceptuales aparentemente más profundas.

b) Obstáculos **basados sobre casos simples**, posiblemente causados por limitar al estudiante a casos simples por un período sustancial de tiempo, antes de pasar a casos más complejos.

Observamos que la idea de obstáculo parte de la misma fuente: el “obstáculo epistemológico” de Bachelard (1938).

En el contexto del desarrollo del pensamiento matemático éste está lleno de obstáculos caracterizados como epistemológicos; éstos no están especificados en términos de experiencia de enseñanzas regladas y organizadas en el sistema educativo, no obstante aceptamos que tales organizaciones de las Matemáticas en el sistema escolar pueden originar obstáculos que podemos caracterizar como didácticos. Además la adquisición por parte del alumno de nuevos esquemas conceptuales está salpicado de obstáculos que podemos considerar cognitivos, son producto de la experiencia previa de los alumnos y del procesamiento interno de estas experiencias; además nuestra organización curricular, diseñada para presentar los objetos matemáticos de las formas lógicamente más simples, puede realmente causar obstáculos cognitivos, y aún más, surgen obstáculos cognitivos que no tienen que ver con esta organización curricular sino con otros aspectos.

Una organización posible y útil de los obstáculos sería:



La presencia de obstáculos epistemológicos fuera de los obstáculos cognitivos, se justifica por la impresión de que los obstáculos epistemológicos deben su existencia a la aparición y resistencia de ciertos conceptos matemáticos a lo largo de la historia, así como la observación de conceptos análogos en los alumnos, más que a la confirmación de la resistencia de esas concepciones en los alumnos de hoy. Esta condición parece esencial, por la disparidad de las normas que rigen la construcción del conocimiento matemático en la historia y la construcción del conocimiento matemático en el contexto escolar, el análisis histórico puede ayudar al didáctico en su búsqueda de núcleos de resistencia al aprendizaje matemático, pero no puede, en ningún caso, aportar por sí solo la prueba de la existencia de tal o cual obstáculo para los alumnos de hoy.

2.2.2.3. Errores

Algunos matemáticos han encontrado en los errores una gama de problemas dignos de estudio, ya sea porque plantean acertijos o pasatiempos o porque sugieren teoremas interesantes.

Lakatos (1981) en algunos de sus artículos muestra cómo la discusión de los errores detectados en algunas teorías permite la transformación o enriquecimiento de éstas, por ejemplo, cuando analiza el trabajo de Cauchy señala: “ ¿qué decir de los bien conocidos “errores” de Cauchy?”

Y concluye: “Cauchy no cometió en absoluto ningún error, sino que probó un teorema completamente distinto, sobre secuencias transfinitas de funciones que Cauchy-convergen sobre el continuo de Leibniz.”

Este es un buen ejemplo en lo referente a los errores cometidos en el desarrollo histórico del conocimiento matemático. Algunos autores como Lakatos prefieren considerar estos errores como “concepciones limitadas”, matiz totalmente válido, pues decimos que algún procedimiento es correcto o no, a partir de los elementos que conforman las teorías actuales, pero con ello cometemos el error de hacer juicios con marcos de referencia que no corresponden a la situación que se analiza.

Este matiz de “concepción limitada” que se le da a los errores en la historia de las Matemáticas puede ser válido también en el caso de los errores cometidos por los estudiantes, puesto que muchos de estos errores pueden explicarse a través de los métodos que ellos desarrollan con el tiempo, siendo dichos métodos válidos en algunos casos solamente. Queda claro que no todos los errores de los alumnos pueden explicarse de esta forma; por lo tanto, este matiz no es válido, en general, para reflexionar sobre los errores cometidos por los estudiantes, pero constituye un elemento más a tener en cuenta.

En general aceptamos que incluso la mayoría de los alumnos que tienen una actuación aparentemente satisfactoria en Matemáticas, oculta probablemente serios errores conceptuales que dificultarán el aprendizaje subsiguiente. Parece necesario diagnosticar y tratar mucho más seriamente de cómo lo hacemos, los errores de los alumnos. Probablemente necesitemos enseñar menos directamente y dedicar más tiempo a conocer lo que piensan los alumnos, discutiendo con ellos a nivel intuitivo acerca de sus concepciones erróneas y presentarles luego situaciones matemáticas para seguir pensando en aquello que les permite reajustar sus ideas.

La interpretación y análisis de los errores cometidos en la enseñanza-aprendizaje del Álgebra puede enriquecerse con el apoyo de algunas teorías de la psicología educativa, algunas de ellas se refieren a determinados procesos que se dan en la Matemática; por mencionar uno de ellos podemos citar los trabajos de Krutetskii (1976) sobre la caracterización de las habilidades matemáticas, pero en general la mayoría se refiere a la formación de conceptos y a la resolución de problemas. Nuestra intención no es describir estas teorías, sin embargo, sí parece útil para nuestro propósito describir brevemente, los dos extremos del continuo que supone en la actualidad estas teorías, en los aspectos relacionados con la naturaleza del conocimiento. En un extremo de este continuo que representa las teorías del aprendizaje situaríamos la “teoría de la absorción”, que afirma que el conocimiento se imprime en la mente desde el exterior. Básicamente el conocimiento matemático se contempla como un conjunto de datos y técnicas. Estos datos y técnicas se aprenden por medio de la memorización. En realidad, el aprendizaje es un proceso consistente en interiorizar o copiar información aislada del contexto o de otros aprendizajes sin conexión, sin relación con cuanto ya conoce el alumno. En pocas palabras, la teoría de la absorción parte del supuesto que el conocimiento matemático es una colección de datos y hábitos compuestos por elementos básicos denominados asociaciones. En el otro extremo estaría la teoría cognitiva que afirma que el conocimiento no es una simple acumulación de datos y el conocimiento significativo no puede ser impuesto desde el exterior sino que debe elaborarse desde dentro. La esencia del conocimiento es la estructura: elementos de información conectados por relaciones, que forman un todo organizado y significativo. El conocimiento significativo comporta intuición o comprensión y es en realidad un proceso de resolución de problemas. Es decir, el aprendizaje significativo se caracteriza porque los nuevos contenidos que son objeto de aprendizaje, así como el proceso mismo de aprendizaje, están relacionados con capacidades ya poseídas y con contenidos adquiridos anteriormente, y, por tanto, incorporados no de forma aislada, sino en conexión con las estructuras cognitivas precedentes.

En el marco de estas teorías cognitivas no basta con que el alumno establezca conexiones con el conocimiento que posee, sino que es necesario que el alumno tenga una disposición activa a dar sentido a lo que encuentra o se le ofrece, conduciendo a la asimilación del nuevo conocimiento dentro del armazón de su propio conocimiento. Esto en Matemáticas produce unas veces distorsiones que conducen a concepciones erróneas, y otras, la vieja estructura de conocimiento matemático debe ser ampliada o abandonada en favor de un nuevo conocimiento que contemple conjuntamente a ambos. Los métodos de enseñanza basados en esta teoría requieren la identificación previa de los conceptos erróneos o no, que tienen los alumnos y de la provisión de problemas que den lugar a la presencia de conflictos cuando se usen conceptos inadecuados.

La posición cognitiva sugiere que la mente del alumno no es una página en blanco. El alumno tiene un conocimiento anterior que parece suficiente y establece en su mente, un cierto equilibrio. Dos parecen las razones básicas a tener en cuenta en la adquisición de un nuevo conocimiento. Primero, el nuevo conocimiento debe tener significado para el alumno y para ello debe contestar a preguntas que él se ha hecho a sí mismo, o por lo menos recuperar algunas representaciones que ya estaban en su mente, es decir, el alumno debe asumir la responsabilidad de la construcción del saber y considerar los problemas como suyos y no como problemas del profesor. Y segundo, el saber anterior produce modelos implícitos que a veces son favorables con el nuevo conocimiento matemático y que por tanto hay que explicitarlos, y otras veces, al contrario, son obstáculos. En ningún caso el conocimiento nuevo se añade al saber antiguo, muy al contrario se construye luchando contra él, porque debe provocar una estructuración nueva del conocimiento total.

Investigaciones realizadas en los últimos años han mostrado la importancia que tiene centrar la atención no sólo en las respuestas correctas de los estudiantes sino, también, en los errores que cometen.

Un conocimiento de los errores básicos en Álgebra es importante para cualquier profesor porque le provee de información sobre la forma en que los niños interpretan los problemas y cómo utilizan los diferentes procedimientos algebraicos. Esta información le sugiere formas de ayudar a los alumnos a corregir dichos errores y, al mismo tiempo, le señala las posibles causas de las dificultades de los estudiantes para aprender Álgebra.

El trabajo que Marylin Matz (1980) ha emprendido, tratando de dar una explicación teórica a la presencia tan frecuente, uniforme y persistente de los errores de sintaxis algebraica en poblaciones escolares de entre 15 y 18 años de edad, ha puesto de manifiesto que los procesos que generan las respuestas algebraicas incorrectas no son resultado de acciones arbitrarias o del azar, sino que son producto de procesos intelectuales razonables, generados por desafortunadas adaptaciones del conocimiento adquirido previamente. Muchos de los errores comunes, afirma, surgen de uno de los siguientes procesos: el uso de una regla conocida en una situación para la cual resulta inapropiada, o, la adaptación incorrecta de una regla conocida, de tal manera que pueda utilizarse para resolver un problema nuevo y señala que "los errores son intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación". Los errores aparecen en el trabajo de los alumnos sobre todo, cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que les obliga a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben.

Un interesante proyecto de investigación que trata de identificar los tipos de errores que cometen más comúnmente los estudiantes y de explicar las razones de estos errores fue realizado por el grupo de Álgebra del proyecto SESM (Strategies and Errors in Secondary Mathematics) llevado a cabo en el Reino Unido entre 1980 y 1983 (Booth, 1984). Los estudiantes implicados en este trabajo oscilaban entre los trece y dieciséis años, y a pesar de las diferencias de edad y de haber estudiado diferentes cursos de Álgebra, cometían similares errores en todos los niveles. El término Álgebra está considerado en el sentido de "Aritmética generalizada", lo que implica el uso de letras para números y la escritura de expresiones generales que representan reglas aritméticas y expresiones dadas.

El proyecto SESM centró más el interés en analizar la naturaleza de los errores cometidos por los alumnos que en el tipo de cuestiones que los alumnos resuelven correctamente y, especialmente, en el caso de que tales errores sean cometidos por un amplio número de estudiantes. Del análisis de estos errores comunes, observamos que muchos de ellos podían ser atribuidos a aspectos tales como:

a) la naturaleza y significado de los símbolos y las letras;
b) el objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en Álgebra.
c) la comprensión de la Aritmética por parte de los estudiantes, y
d) el uso inapropiado de “fórmulas” o “reglas de procedimientos”.

Los tres primeros aspectos generan errores que se originan en la transición conceptual de la Aritmética al Álgebra, mientras que el cuarto d) se debe fundamentalmente a falsas generalizaciones sobre operadores o números.

Se considera que las respuestas erróneas pueden deberse a que los estudiantes o no asumen el Álgebra como Aritmética generalizada, ya que en algunos casos ignoran las letras o las usan en vez de otros caracteres alfabéticos o valores, o bien las tratan como objetos. Además, se tiene en cuenta que los niños pueden estar operando según sus propios métodos intuitivos y no según los métodos que la enseñanza propone y esto puede contribuir a que se den los errores observados.

Otra interpretación de los errores algebraicos se encuentra en las investigaciones realizadas por Lesley R. Booth dentro del estudio (SESM) en su “Estrategia y Errores en Aritmética Generalizada”. Comienza haciendo un análisis de los reactivos y los resultados del test de Algebra aplicado en SESM, con el fin de detectar las respuestas erráticas de más alta frecuencia (30 % o más) y usarlas como objetos de estudio. Un análisis de los errores observados conduce a un modelo de clasificación que distingue los errores debidos a:

a) una mala interpretación de los elementos de la pregunta o de lo que se pide hacer.
b) el uso de un método incorrecto para abordar o resolver el reactivo.
c) una incorrecta codificación del resultado.

Se consideran además las posibilidades de cualquier combinación o interacción de tales errores.

Por otra parte en México, en el curso escolar 1987-88, se realizó una exploración con niños del segundo año de secundaria con la finalidad de reconocer en sus poblaciones escolares la problemática del aprendizaje del Álgebra, con las características que a dicha problemática le atribuían estudios realizados con poblaciones escolares de otras partes del mundo, detectando los errores algebraicos más frecuentes que cometen los estudiantes mencionados y las posibles causas de ellos, así como la comparación de esos errores con los de los estudios referidos, incluyendo el realizado con estudiantes de un Colegio de Bachilleres de la ciudad de México, consiguiendo así, por un lado, un punto de partida para intentar mejorar la enseñanza de esta rama de la Matemática y, por otro, contribuir al conocimiento que sobre adquisición del lenguaje aritmético - algebraico, la investigación en didáctica del Álgebra de los últimos tiempos, está tratando de conformar.

Esta conjunción de ideas junto a nuestra experiencia en estos niveles escolares nos llevó a una primera organización de los errores: Errores del Álgebra que están en la Aritmética y errores de Álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.

1) Errores del Álgebra que están en la Aritmética.

El significado de los signos usados es el mismo en ambas ramas de las Matemáticas. El Álgebra no está separada de la Aritmética y aquella se puede considerar con la perspectiva de Aritmética generalizada. De aquí que para entender la generalización de relaciones y procesos, se requiere que éstos sean antes asimilados dentro del contexto aritmético. Por eso a veces las dificultades que los estudiantes encuentran en Álgebra, no son tanto dificultades en el Álgebra como problemas que se quedan sin corregir en la Aritmética; por ejemplo, en el uso de paréntesis, potencias, etc. Al respecto, dice Brousseau (1983): “Podríamos considerar que hay un campo previo, natural, que es la Aritmética, el campo primero. El Álgebra sería un medio de hablar de la Aritmética, de hablar de cosas aritméticas que pedirían un contrato didáctico un poco especial con los alumnos”. Éste es un punto de vista meta - aritmético.

Ejemplos de estos errores son los cometidos por los alumnos que no dominan las operaciones con fracciones, el signo “-“ delante de un paréntesis.

El uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos también da lugar a errores de este tipo, debido al uso inadecuado por parte de los alumnos de una fórmula o regla conocida, que han extraído de un prototipo o libro de texto y la usan tal cual la conocen o la adaptan incorrectamente a una situación nueva. Tienden así un “puente” para cubrir el vacío entre reglas conocidas y problemas no familiares. La mayoría de estos errores se originan como falsas generalizaciones sobre operadores, fundamentalmente por falta de linealidad de estos operadores.

Entre estos errores distinguimos:

I) Errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva.
II) Errores relativos al uso de recíprocos.
III) Errores de cancelación.

2) Errores de Álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.

Estos errores son de naturaleza estrictamente algebraica y no tienen referencia explícita en la Aritmética. Como ejemplo citamos: el sentido del signo “=” en su paso de la Aritmética al Álgebra y la sustitución formal.

En esta investigación se profundiza más en el origen y causa de los errores y nos lleva a revisar los errores desde dos puntos de vista: las dificultades inherentes al aprendizaje de las Matemáticas y los obstáculos en el sentido anteriormente caracterizado.

Desde luego que la evaluación y el diagnóstico de los errores de los alumnos es importante, pero el profesor ha de usar este conocimiento para promover un mejor aprendizaje del alumno. Desde un punto de vista práctico esto supone pasar de una enseñanza caracterizada por dos fases: contenidos, aplicaciones, donde el error tiene sólo una función negativa cuando realizamos la evaluación del alumno, a una enseñanza caracterizada por tres fases, donde la primera: evaluación y diagnóstico, es la más importante en la cual la explicitación de los errores se tiene que hacer.

La evaluación diagnóstica es un conjunto de situaciones de aprendizaje diseñadas para identificar las dificultades específicas del aprendizaje, que tratan de determinar la naturaleza de las mismas. Esta evaluación diagnóstica tiene lugar al comienzo de las unidades didácticas, pero la detección de errores y la determinación de su naturaleza también tiene lugar en el desarrollo de la unidad didáctica, es decir, en el curso del aprendizaje. El objeto de la evaluación diagnóstica es claro: determinar inmediatamente una acción conveniente de remedio.

2.2.3. La noción de comprensión y los sistemas de representación

Desde el punto de vista de la Didáctica de las Matemáticas hay dos preguntas básicas que se nos plantean cada vez de forma más acuciante: ¿Qué procedimientos espontáneos utilizamos para matematizar? ¿Cómo hacer Matemáticas de forma que sea un lenguaje semántico o sea que digan algo, que nos den información sobre el mundo que nos rodea?

Resnick y Ford (1981) dedican una gran parte de su libro a justificar la importancia de desarrollar las Matemáticas como comprensión conceptual frente a las ideas asociacionistas que desarrollaban una matemática como cálculo.

La comprensión es un tema intensamente tratado por los psicólogos y relacionado con la competencia intelectual (Nickerson, Perkins y Smith, 1987) y, a su vez, con las representaciones.

Ciertamente cuando examinamos un texto matemático para poder “leer con sentido” lo allí expresado, tenemos que conocer el código que relaciona la expresión simbólica usada con el contenido, y luego podemos codificarlo en una u otra representación, siempre dentro de los límites de conocimiento compartido entre autor y lector y la competencia del lector en leer y codificar conocimiento matemático. Situación similar se presenta al plantear un problema o una “situación” en matemáticas. Después de leer su expresión es preciso realizar la Representación.

Las representaciones y su papel en el aprendizaje de las Matemáticas constituyen una importante línea de investigación (Resnick y Ford, 1981). Entre las razones de su importancia podríamos citar, fundamentalmente, dos: la primera tiene que ver con las propias Matemáticas, en las que las representaciones son algo inherente a ellas, y la otra es de tipo psicológico, ya que las representaciones mejoran notablemente la comprensión en los alumnos (Paivio, 1978; De Vega, 1984).

Diferentes han sido las interpretaciones dadas a la palabra *representación* en relación al aprendizaje, a la enseñanza y al desarrollo de las Matemáticas. Dar una definición de representación es algo complicado actualmente. Janvier (1987), citando un estudio de Denis-Dubois (1976), apunta que en la literatura psicológica se usa el término representación, al menos, en los tres caminos siguientes:

1) Como una organización material de símbolos, tales como diagramas, gráficas, esquemas, que se refieren a otras entidades o que actúan como modelos de procesos mentales.

2) Como una organización del conocimiento en el "sistema mental humano" o en la memoria a largo plazo.

3) Solamente como imágenes mentales que el individuo puede formar, siendo éste un caso especial del anterior. El hecho de considerarlo como una tercera forma se debe a la importancia de la investigación en este dominio y a su claro marco teórico. Janvier considera que las configuraciones imagísticas de Goldin (1987) se les puede considerar en el segundo grupo, pero también pertenecen al tercero.

El propio Janvier se identifica con la primera definición, cuando habla de "esquemas o ilustraciones", y con la segunda, cuando habla de "concepción". Para él, una representación sería como una especie de estrella-iceberg que mostraría sólo una punta cada vez. Esta descripción de representación tiene la ventaja de insistir en el carácter inseparable que tiene un conjunto de esquematizaciones.

Janvier, por su parte, indica algunas de las características de la comprensión:

1. La comprensión se puede verificar por medio de la realización de actos mentales específicos. Implica una serie de actividades complejas.
2. Presupone acciones automáticas (o automatizadas) que son orientadas por procesos de reflexión y planificación mental. Por consiguiente, la comprensión no puede ser exclusivamente identificada con las actividades mentales reflejadas o conceptos.
3. La comprensión es un proceso continuo, lo que produce la comprensión es la construcción de un sistema ramificado de conceptos en la mente. Los conceptos matemáticos no se comienzan a construir desde el momento en que son introducidos en clase por el profesor. Este principio muy conocido nos es fácil o frecuentemente puesto en práctica en la enseñanza diaria.

4. Varios investigadores intentan determinar etapas en la comprensión. Nos inclinamos a creer que la comprensión es un proceso acumulativo basado principalmente en la capacidad de manejar un conjunto cada vez más rico de representaciones.

En el segundo camino, los psicólogos se dividen en dos corrientes: los que apoyan la hipótesis dual de Paivio, que sostiene la existencia de dos formatos representacionales: el sistema verbal y la imaginación, y los que proponen un único formato representacional abstracto, semántico y proposicional que subyace como sustrato común a las palabras e imágenes (de Vega, 1984).

Para Kaput (1987) "*cualquier concepto de representación implica dos entidades relacionadas, pero funcionalmente separadas: el mundo representante y el mundo representado. Habiendo, por tanto, una correspondencia entre algunos aspectos del mundo real y algunos del mundo representado. Por ello, en cualquier especificación particular de una representación se describirá las siguientes cinco entidades:*

1) el mundo representado.
2) el mundo representante.
3) qué aspectos del mundo representado han sido representados.
4) qué aspectos del mundo representante hacen la representación.
5) la correspondencia entre los dos mundos".

Goldin (1993) presenta, como resumen del grupo que trabajó sobre representación en los Congresos del PME, las diferentes interpretaciones dadas a este término:

a) Como soportes físicos, externos (incluyendo entornos de ordenador): Una situación física estructurada y externa o un conjunto de situaciones que pueden ser descritas matemáticamente o vistas como un soporte de una idea matemática (p.e. la línea numérica,...).
b) Como soportes lingüísticos: Aspectos verbales, sintácticos y semánticos del lenguaje en los que los problemas son propuestos y con los que las Matemáticas son discutidas.
c) Como construcciones matemáticas formales: Un significado diferente de "representación", que enfatiza el entorno del problema externo al individuo, sería una estructura formal o un análisis matemático de una situación. Aunque hay un sentido en el cual las Matemáticas pueden ser vistas como "internas", el énfasis se pone en "representación" como una herramienta analítica para formalizar o precisar ideas matemáticas o conductas matemáticas.
d) Como representaciones cognitivas internas: Aspecto muy importante, que incluye las representaciones individuales internas de los estudiantes, de sus ideas matemáticas, tales como áreas, funciones, así como los sistemas de representación cognitiva en sentido amplio, que pueden describir los procesos del aprendizaje humano y de la resolución de problemas.

En los últimos años, diferentes investigaciones (Presmeg, 1985) están destacando la importancia que tiene el uso de métodos visuales en la enseñanza de las Matemáticas en todos los niveles, de forma que faciliten a todos los alumnos la comprensión y, en particular, a aquellos visualmente orientados.

Los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción o en una experiencia intuitiva inmediata como son los objetos comúnmente señalados como “reales” o “físicos”. Es necesario poder proporcionar representantes.

Los objetos matemáticos se comunican por tanto, mediante los S.R.S. y existen diferentes tipos de representaciones que favorecen una comprensión más amplia de los conceptos, sin embargo, existe la preocupación entre los matemáticos y los profesores de matemáticas para que los alumnos no confundan los objetos matemáticos con sus representaciones, y es por ello por lo que se ha favorecido los S.R.S. más formales frente a los S.R.S. más visuales o también caracterizados como representaciones más intuitivas.

Pero el dominio de un S.R.S. formal es más una meta que un camino donde aparece una sucesión de estadios de desarrollo cognitivo que se dan, hasta producir competencia, en el manejo del S.R.S. formal: 1) el estadio semiótico, donde los alumnos aprenden signos nuevos que adquieren significado con los signos antiguos ya conocidos, 2) estadio estructural, donde el sistema nuevo se estructura según la organización del antiguo; aparecen en este estadio estructural verdaderas dificultades cognitivas que al no ser explicadas por el sistema antiguo, se recurre a la observación de regularidades y comportamientos patrones para dotarlos de significado y 3) estadio autónomo donde los signos actúan con significados propios independientemente del sistema anterior. Es éste el proceso de generalización de las matemáticas y es una característica de la misma como parte inherente del desarrollo de sus signos. Es por tanto el sistema nuevo, una fuente de dificultades al encontrarnos con elementos que no pueden ser conocidos en términos del sistema de signos antiguo, como es el caso del Álgebra. De ahí que insistamos en la necesidad del uso de diferentes sistemas de representación como fuentes de significado, en especial el del objeto geométrico como un registro del Álgebra de representación semiótica.

Destacamos la importancia de las representaciones para la formación adecuada de conceptos; en este sentido diversos investigadores, Janvier (1987), Hiebert (1988), Kaput (1987, 1991), Duval (1993, 1995) han realizado experimentos y desarrollado aspectos teóricos, con la intención de aclarar los mecanismos de articulación que se dan dentro de un proceso de comprensión del conocimiento.

Por ejemplo, Janvier (1987), tomando como ejemplo el concepto de función, usa una figura en forma de estrella de cinco puntas, la cual, en cada una de las esquinas exhibe una representación de la función (descripción verbal, objeto, tabla, gráfica y fórmula). Proporciona algunos resultados que muestran la importancia de las representaciones y la necesidad de efectuar “un proceso de traducción” entre representaciones, como una etapa importante en la construcción del concepto.

Hiebert (1988) elabora una teoría para explicar el desarrollo de la competencia del manejo de los símbolos matemáticos escritos (entendidos como entidades que se usan para ocupar el lugar de otras). Propone una sucesión de procesos cognitivos que se acumulan para producir la competencia en el manejo de dichos símbolos. Identifica cinco tipos de procesos básicos: conectar o relacionar los símbolos individuales con sus referentes; desarrollar procedimientos de manipulación de símbolos; elaborar procedimientos para los símbolos; rutinizar los procedimientos con los símbolos; y, construir un sistema de símbolos más abstracto. Cada tipo de proceso debe emplearse y debe hacerse siguiendo la secuencia señalada.

El uso de los primeros procesos permite la fundamentación del dominio de los procesos posteriores. Desde este punto de vista, los primeros conocimientos y experiencias son cruciales para el aprendizaje posterior. Por lo tanto, la teoría sugiere que muchas de las deficiencias que muestran los estudiantes al trabajar con símbolos escritos, se debe a que éstos se involucran en los procesos más avanzados, sin tener los fundamentos de los procesos más elementales. El sentido acumulativo de esta teoría indica que los primeros procesos no son descartados, sino empleados como nuevos procesos que se adquieren y usan.

Kaput (1987, 1991) desarrolla un acercamiento teórico para explicar el uso de los símbolos matemáticos. Señala: “He intentado expresar relaciones entre la “notación A (escrita, dibujada, etc.) y el referente B” donde cada uno (y quizá la correspondencia) es expresable en forma material, pero donde la relación referencial existe sólo en términos de operaciones mentales de los miembros de un dominio consensual particular” (Kaput, 1991). Es claro que Kaput subraya la presencia de operaciones mentales y que las transformaciones (acciones) de una representación a otra, juegan un papel importante en la construcción de conceptos matemáticos.

Kaput (1987) señala que cualquier S.R.S. se ocupa al menos de cuatro fuentes de significado:

1. Las traslaciones entre S.R.S. formales, por ejemplo, las traslaciones entre los sistemas de representación formal aritmético y formal algebraico.
2. Las traslaciones entre S.R.S. no formales y formales, por ejemplo, las traslaciones entre representaciones mediante el lenguaje natural, las representaciones físicas, las representaciones geométricas, los diagramas, etc. y la representación formal algebraica.
3. Las transformaciones y operaciones dentro de un mismo S.R.S., sin referencia a ningún otro S.R.S.; por ejemplo, las transformaciones y operaciones dentro del sistema de representación formal algebraico, sin otro

significado referencial que sí mismo.
4. La consolidación a través de la construcción de objetos mentales mediante acciones, procedimientos y conceptos que se dan en los S.R.S. intermedios, creados durante el desarrollo de la secuencia de enseñanza. Estos S.R.S. intermedios se integran en S.R.S. más abstractros y sirven de base para nuevas acciones, procedimientos y conceptos en un nivel de generalización mayor (a veces denominado: "abstracción reflexiva", "encapsulación", "reificación", "generalización", etc.).

Duval (1993, 1995) realiza un trabajo teórico, coherente y unificador (Semiosis -aprehensión o producción de una representación semiótica, lo que se puede generar con una sola representación-, y, Noesis -aprehensión conceptual de un objeto, articulación de varias representaciones semióticas-) de los diferentes acercamientos teóricos, a las representaciones. La actividad de conversión de un registro (sistema matemático de signos con ciertas reglas, según Duval) a otro, va a provocar el conocimiento.

Duval (1993) caracteriza un sistema semiótico como un sistema de representación de la manera siguiente: "un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

1) La presencia de una representación identificable...
2) El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada...
3) La conversión de una representación es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial..."

Sobre la construcción de conceptos, Duval (1993) establece que: "toda representación es parcialmente cognitiva con respecto a lo que representa" y por tanto: "la comprensión (integral) de un contenido conceptual está basada en la coordinación de al menos dos registros de representación, y esta coordinación queda de manifiesto por medio del uso rápido y la espontaneidad de la conversión cognitiva".

En general, en los procesos de enseñanza-aprendizaje del Álgebra, se observa que ésta toma su significado de tres fuentes diferentes:

a) De los números y sus operaciones. Las expresiones algebraicas pueden ser vistas como enunciados de relaciones que pueden ser válidas entre números y operaciones en general,

b) Las expresiones algebraicas y las reglas de transformación también pueden referirse a situaciones reales donde las relaciones entre cantidades juegan un papel determinante. Situaciones que pueden matematizarse expresando sus relaciones cuantitativas con una formalización matemática adecuada. Esto se da cuando al resolver un problema, primero escribimos una ecuación adecuada. También es posible usar una situación real para explicar y justificar las reglas de transformación, y,

c) En un determinado nivel el significado del Álgebra está contenido completamente en el sistema formal, es decir, las expresiones algebraicas tienen significado en cuanto que están bien formadas conforme a las condiciones del sistema formal.

Para un aprendiz del Álgebra no es suficiente obtener el resultado de las expresiones algebraicas de una sola fuente, sino que hay que complementarlo con las tres, para asegurar una comprensión adecuada y flexible.

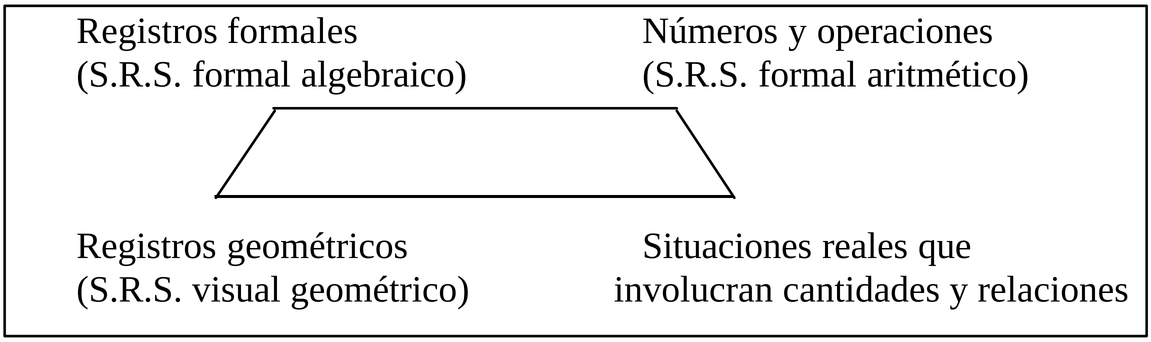
La enseñanza del Álgebra que proponemos parte, de un lado, de la aceptación de la tesis de Duval (1993) en el sentido que un objeto algebraico difícilmente puede interiorizarse sin reunir diversas representaciones del mismo, y de otro, dotar a estos sistemas de representación de diferentes fuentes de significado, en el sentido de Kaput (1987).

Nuestra instrucción se ha propuesto en términos de conversión entre los cuatro sistemas de representación: habitual, aritmético, algebraico y geométrico. Entendemos por habitual a la expresión en el lenguaje natural de situaciones reales (físicas o gráficas) que involucran cantidades o relaciones así como a enunciados verbales. Fundamentalmente se utilizan en la presentación los objetos algebraicos como herramienta de comunicación de ideas abstractas, ideas que los alumnos irán adquiriendo más fácil y adecuadamente, cuando son expresadas en los distintos sistemas de representación.

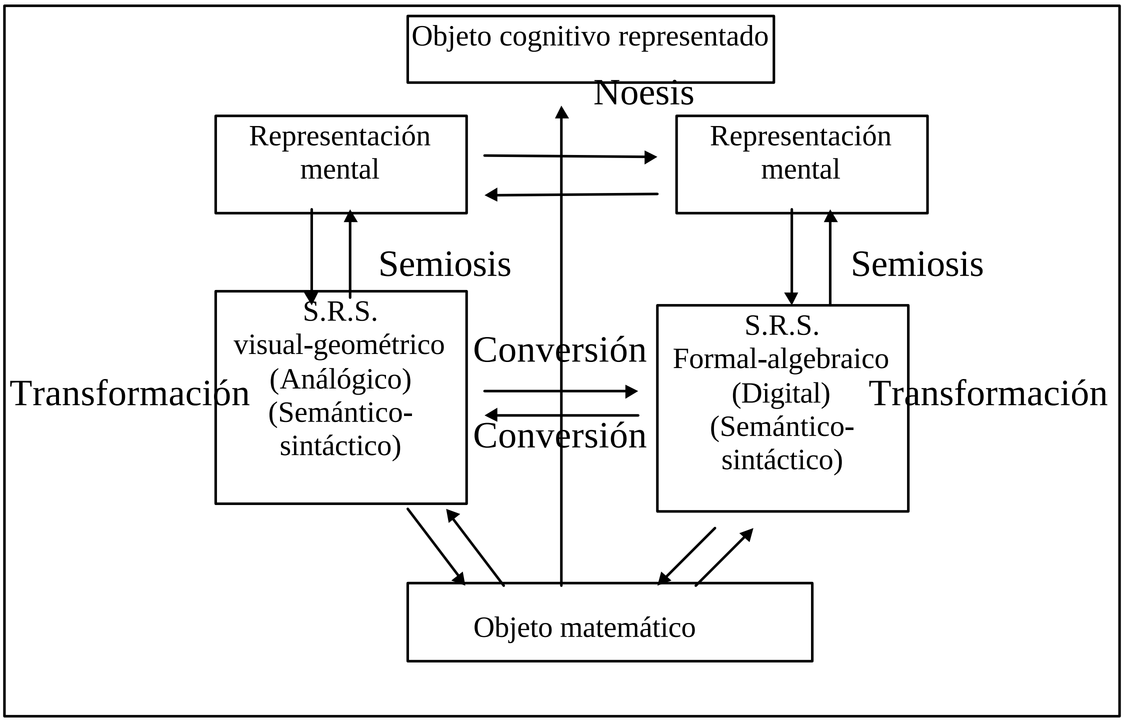
El uso de estos diferentes sistemas de representación también se puede justificar en base a que en Matemáticas, al estar los conceptos fuertemente jerarquizados, las conexiones entre los diferentes sistemas de representación generan “esquemas” mentales que facilitan la comprensión de estas abstracciones y permiten progresar en la adquisición de nuevos objetos. Además al relacionar los sistemas de representación entre sí se construye un mejor entendimiento entre ellos, y al mismo tiempo, el estudiante podrá adquirir confianza en su propia capacidad para utilizar ideas algebraicas.

Parece razonable aceptar que la apropiación de un objeto matemático difícilmente puede lograrse sin reunir a diversas representaciones del mismo. La manipulación por parte de los estudiantes de representaciones matemáticas les proporciona los medios para construir imágenes mentales de un objeto matemático y la riqueza de la imagen del objeto construido dependerá de las representaciones que el sujeto haya utilizado.

De nuestros estudios experimentales sobre lenguaje algebraico (Palarea y Socas, 1994 a, 1994 b) hemos constatado la necesidad de ampliar las fuentes de significados para el lenguaje algebraico a SRS de procedencia visual (registros geométricos) (Palarea y Socas, 1994 b). Además de la perspectiva numérica reflejada en los currículos de Matemáticas para Secundaria, aparece la necesidad de considerar las letras con sentido algebraico, como cantidad de una magnitud geométrica (Socas y Palarea, 1997), quedando determinada las fuentes de significado para el Álgebra de la siguiente forma: (la base mayor del trapecio corresponde a sistemas de representación semióticos analógicos, con fuerte componente semántica y la base menor del trapecio corresponde a sistemas de representación semióticos de carácter digital).



que en términos de la tesis de Duval las diferentes representaciones semióticas interaccionan de la siguiente manera:



y se articulan en estrategias de enseñanza que parten de situaciones reales que utilizan el sistema de representación habitual para alcanzar la comprensión cualitativa del problema, de modo que el desarrollo de situaciones numéricas o geométricas determinan un primer nivel de generalización, para en un segundo nivel de generalización (Aritmética generalizada), alcanzar la comprensión conceptual del problema.

Pasamos ahora a relacionar diferentes aspectos considerados en la investigación en este marco de referencia.

Con relación a las expresiones algebraicas se utilizó como fuentes de significado las áreas de rectángulos, en el mismo sentido que lo han hecho Chalouh y Herscovics (1988), y como situación intermedia entre el modelo geométrico y el algebraico, un diagrama de doble entrada que denominamos "visualización simplificada".

En el comienzo de la enseñanza-aprendizaje del Álgebra se ha constatado, en general, la tendencia natural a interpretar una expresión algebraica en términos de estructura de referencia numérica conocida, o sea Aritmética. Mientras no "se requiere" el contexto algebraico se sigue interpretando en contexto aritmético. Por eso los profesores debemos estar bien enterados de la estructura de referencia en que los alumnos responden (Chalouh y Herscovics, 1988).

Existen investigaciones que han apuntado a ciertos cambios simbólicos que establecen la diferencia entre el pensamiento aritmético y el algebraico del alumno/a. Algunas se refieren a convenciones gráficas o simbólicas para codificar operaciones y transformaciones en la solución de ecuaciones (Matz, 1982).

Nos basamos en que la sintaxis algebraica no la adquieren los alumnos de manera natural, ya que la vida cotidiana apenas emplea el lenguaje algebraico y escasean los "modelos paradigmáticos" que faciliten la síntesis de la notación representacional (elaboraciones semánticas) y la notación acción (elaboraciones sintácticas).

Mostramos algunos aspectos de nuestra particular opinión respecto al tema en especial la aportación que queremos hacer al nuevo curriculum mediante una visión particular dentro de los Sistemas de Representación utilizados para la enseñanza del Álgebra, más allá de considerarla como Aritmética Generalizada, introduciendo el Objeto Geométrico no presentado simplemente como elemento de una situación real, contextual sino como un específico registro del Álgebra, como una representación semiótica, como la de los números y operaciones. Sabemos que "los sistemas de representación (o sistemas simbólicos, artefactos lingüísticos o culturales, materialmente realizables), cuando se aprenden, son usados por los individuos para estructurar la creación y elaboración de sus representaciones mentales (medio por el cual un individuo organiza y maneja el flujo de su experiencia)" (Kaput, 1989).

Respecto al registro algebraico y al registro geométrico en concreto, queremos terminar recordando las palabras de Dieudonné (1989): "La sustitución del lenguaje algebraico por el lenguaje geométrico aporta considerables simplificaciones y hace aparecer propiedades insospechadas, escondidas bajo una montaña de cálculos", palabras que compartimos y nos hacen reafirmar en el criterio que el estudio del Álgebra debe estar regido por intercambio de los diferentes registros posibles, en definitiva, un intercambio de lenguajes, en especial el algebraico y geométrico.

El objeto geométrico no se presenta en las investigaciones como un registro del Álgebra, como una representación semiótica, como lo es la de los números y operaciones, sino como una situación de contextualización, describiendo una situación real similar, como es, por ejemplo, el área y el perímetro.

Nosotros proponemos el objeto geométrico como elemento de un sistema de representación, donde se pueden dar todas las leyes: +, -, x, :, yuxtaponer, distribuir, etc., donde la Visualización Simplificada (registro mixto), constituye un elemento de puente entre la representación formal y las otras representaciones.

Manteniendo la hipótesis dual de Paivio, se ha pasado del modelo del “triángulo” al del “trapecio”, donde las fuentes de significado van a incrementarse. Es decir, de la Formalización, Números y operaciones y Situaciones reales (modelo del triángulo), se pasa a añadir la del objeto geométrico como un nuevo registro del Álgebra, esto es, como una representación semiótica, igual que lo es la numérica, aunque de naturaleza diferente.

La utilización didáctica del modelo del trapecio, se podría considerar también, como la yuxtaposición de dos modelos triangulares: el que ya existía y el nuevo.

Lo que se investiga es la potencialidad que supone utilizar no sólo los números y operaciones sino el objeto geométrico como una representación semiótica.

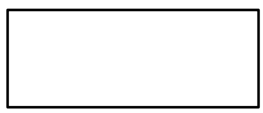
No surge de una simple curiosidad sino que se apoya en diferentes razones: psicológicas, la hipótesis dual de Paivio sobre el conocimiento del pensamiento formal (analítico y visual), y la tesis de Duval, según la cual el alumno y el adulto en enseñanza reglada o no reglada e incluso en la no científica, necesita de dos registros concretos, los números y operaciones y lo visual, que van a dar significado al registro formal, y también razones epistemológicas como el papel de las representaciones visual-geométricas a lo largo de la historia del conocimiento matemático.

En los registros geométricos se podría usar elementos manipulativos o gráficos. Nosotros nos inclinamos por los registros gráficos.

En los registros gráficos existe un problema de “polisemia”. Así por ejemplo, a 3x le puedo dar significado pensando en :

a) Registro numérico 3 . 1   3 . 2   3 . 3   y luego 3 . x
representa todos los productos en 3 . x
Este el es registro numérico.

b) ó 3x representado por 
x x x

ó 3x representado por 3 
x

que representa todos los triángulos de altura 3. Esto representa el registro geométrico.

Este problema de la "polisemia" es un problema permanente en la dualidad del pensamiento matemático (pensamiento aditivo y multiplicativo) y nuestra opción es que no deben ordenarse jerárquicamente, primero aditivo y luego, multiplicativo, sino que deben tratarse globalmente desde el principio en las diferentes formas de pensamiento: numérico y algebraico y geométrico, en nuestro caso asociado a las ideas de área y perímetro. Ambos registros numérico y geométrico dan sentido al Álgebra.

Para el tratamiento didáctico de esta dualidad de las representaciones geométricas optamos por los registros bidimensionales que explicitan simultáneamente los aspectos aditivos y multiplicativos.

En los textos aparecen las áreas y los perímetros en situaciones reales. Los alumnos calculan áreas y perímetros de terrenos, hacen problemas de edades, pero nosotros hacemos uso de ellos más allá de esa utilización tomándolos como registros de nuevas representaciones semióticas, permitiendo este tratamiento trabajar incluso sin los números y las operaciones.

En relación a los planteamientos y a las estrategias en la resolución de ecuaciones, igualmente se pretende asimismo investigar las relaciones entre diferentes registros en los que se mueven los alumnos en el inicio del tratamiento de las ecuaciones:

- registro aritmético (comparación de números...)

- registro algebraico (representación de expresiones, manipulación de las mismas, expresiones equivalentes, búsqueda de soluciones..)

- conversiones entre registros (conectando expresiones mediante registros adecuados, secuencias de razonamiento sobre diferentes registros..)

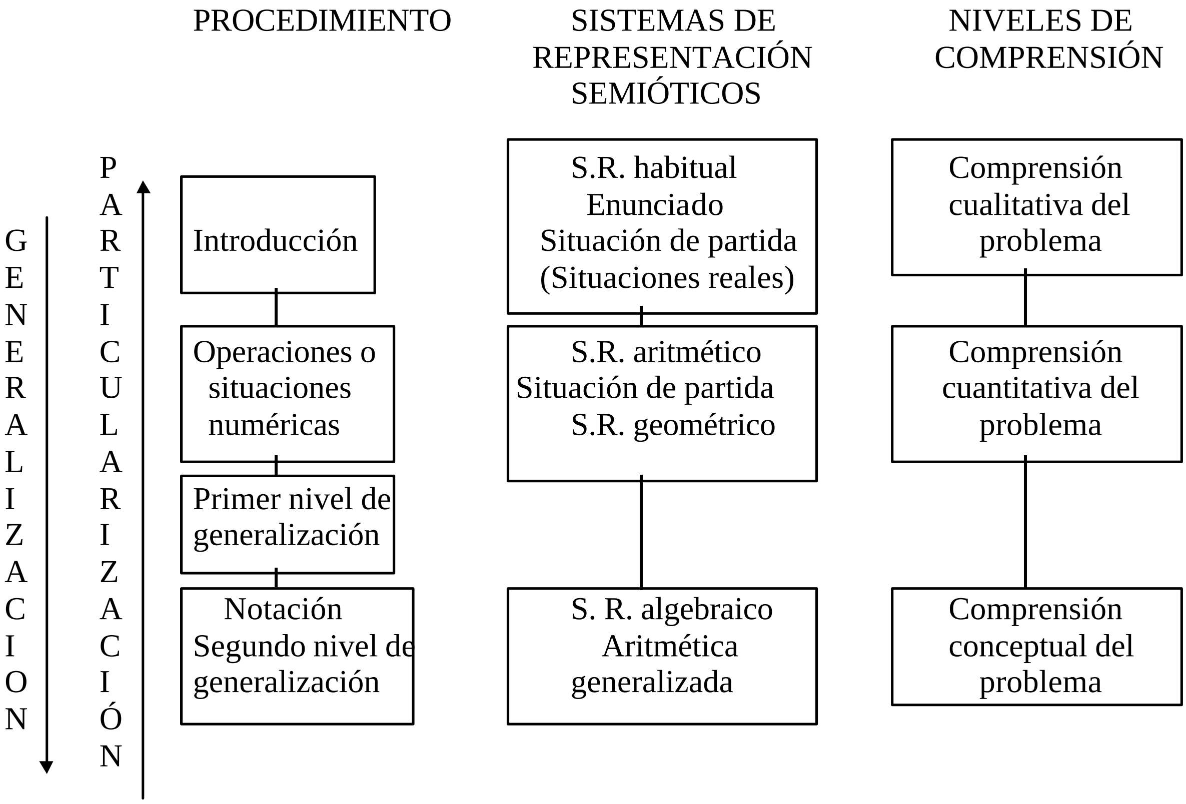
-registro visual-geométrico (representación de expresiones, manipulación de las mismas,…)

- registros esquemáticos mixtos (esquemas de interpretación de soluciones de ecuaciones...).

También es conveniente reflexionar acerca de los registros que han resultado más adecuados para los alumnos, por el mayor o mejor uso de los mismos.

Es conveniente plantear ejercicios que hagan pasar de un registro a otro, de una representación a otra, con el fin de estimular la actividad del alumno. Esto, sin lugar a dudas, aumentará también sus capacidad para abordar dificultades que no sean simples ejercicios de aplicación, sino auténticas investigaciones en el mejor y más amplio sentido de la palabra; estas afirmaciones están basadas en los estudios de Douady (1986).

En el siguiente esquema se recogen (por columnas) los tres niveles que permiten interpretar las actividades que desarrollamos en Socas y otros (1989).



En la resolución de ecuaciones el proceso de enseñanza tradicional dicta una estrategia general que puede responder al planteamiento de las siguientes cuestiones con respecto a la situación del alumno:

1) ¿Lee y entiende el enunciado, lo cual implica básicamente identificar datos, incógnitas y relaciones entre ellos y entender la pregunta formulada?

2) ¿Traduce al lenguaje algebraico, planteando una ecuación?

3) ¿Resuelve la ecuación planteada?

4) ¿Comprueba si el resultado obtenido en el Álgebra satisface las condiciones del problema?

De aquí se deduce que para la enseñanza, el trabajo de resolver las ecuaciones no es en sí un objetivo, sino sólo un medio útil en el aprendizaje del uso del Álgebra. No es la ecuación misma y su solución lo que importa sino la correcta puesta en práctica del Álgebra. Esto parece eliminar las tendencias del alumno al empleo de sus estrategias espontáneas en el abordaje de las ecuaciones. El alumno posee, derivada de su experiencia prealgebraica, un conjunto de tendencias espontáneas de entrenamiento al problema. Esas tendencias obedecen a su nivel de familiarización con los conocimientos prealgebraicos, sin embargo, con este sistema tradicional se pretende que el alumno quede predispuesto a estos problemas guiándose por la estrategia general de enseñanza.

Esta actitud de la enseñanza es llevada también al nivel de las estrategias particulares. Ahí, la enseñanza dicta una estrategia de traducción cuyas dos formas más comunes constan de los siguientes pasos:

Forma 1:

1) Identificar la incógnita principal del enunciado y denotarla con una letra.

2) Traducir, secuencialmente, acciones y relaciones que se encuentran en el enunciado del problema.

3) Como acción final del paso anterior, plantear, en el momento adecuado, la igualdad entre dos conjuntos simbólicos equivalentes.

Forma 2.

1) Identificar la incógnita principal y denotarla con una letra.

2) Encontrar un elemento en el problema que pueda escribirse (simbolizarse) de dos maneras distintas integrando la letra adoptada.

3) Efectuar esa doble simbolización mediante un proceso de sustitución gradual de un elemento por otro, que atienda a las acciones y relaciones enunciadas y que culmine con la obtención de las dos representaciones equivalentes del elemento inicialmente seleccionado.

La diferencia entre las dos formas está en que en la forma 1, la conversión se hace atendiendo a las acciones enunciadas, y en la forma 2, se tiene a elementos de la situación descrita en el enunciado, que vienen siendo resultado de esas acciones.

La existencia de ambos tipos de estrategias, las estrategias espontáneas y las impuestas, provoca un conflicto que proporciona situaciones en las que el alumno se inclina por una de ellas.

Se podría afirmar que la estrategia de traducción de la enseñanza enfocada sobre las acciones, forma 1, aunque tiene la ventaja de ser más cercana a las tendencias pre-algebraicas de los alumnos, adolece de una cierta insuficiencia al no prestar atención a los referentes contextuales. Por eso parece más conveniente impulsar la de la forma 2 en el m arco de los diferentes registros señalados y con ella un mejor nivel de interpretación semántica de los símbolos compuestos, sin que esto provoque la inhibición de las tendencias prealgebraicas del alumno, sino que habrá que trabajar hasta que éste llegue a un grado de familiaridad con la nueva estrategia.

2.2.4 Habilidades cognitivas de carácter operacional y conceptual

Como señala Castro (1994), en la revisión que hace sobre pensamiento y habilidad matemática, conocer la naturaleza de los procesos de pensamiento que intervienen en la actividad matemática, ha sido objeto de interés preferente tanto por parte de psicólogos como de matemáticos (Kilpatrick, 1992). Poincaré y Hadamard figuran entre los pioneros de esta preocupación; no obstante, ha sido en el último medio siglo cuando psicólogos y educadores matemáticos han sistematizado la investigación del pensamiento matemático (Nesher y Kilpatrick, 1990).

Los trabajos de Polya (1957), Kilpatrick (1967) y Krutetskii (1963, 1976) figuran entre los más destacados, sirviendo de orientación para investigadores posteriores.

En Mayer (1986) encontramos que cualquier caracterización de pensamiento incluye tres ideas: 1) el pensamiento es cognitivo, pero se infiere de la conducta; 2) el pensamiento es un proceso que establece un conjunto de operaciones sobre el conocimiento en el sistema cognitivo; 3) el pensamiento es dirigido y tiene como resultado la resolución de problemas.

Por otro lado, podemos considerar la habilidad de acuerdo con Eysenk, citado en Suwarsono (1982), como un constructo hipotético creado con el fin de explicar cómo unos individuos realizan ciertos tipos de tareas mejor que otros.

Krutetskii en su obre *"The Psichology of Mathematical Abilities in Schoolchildren"* (1976) trata de determinar cuáles son las componentes del pensamiento matemático, para ello realiza un estudio exhaustivo de la literatura de la época, antes de presentarnos su punto de vista.

Krutetskii concluye que para dar una definición sobre habilidad matemática hay que clarificar:

- la especificidad de la habilidad matemática;
- la estructura de la habilidad matemática;
- las distintas tipologías que se pueden presentar, según los individuos.

Krutetskii establece la siguiente lista de habilidades diferentes:

1.- Habilidad para formalizar material matemático, desde una forma aislada de contenido a una forma abstracta, desde relaciones concretas numéricas y formas espaciales, a operar con estructuras formales.

2.- Habilidad para generalizar material matemático; detectar qué es importante y qué no lo es, abstrayendo lo irrelevante; también ver qué es común y qué es especialmente diferente.

3.- Habilidad para operar con numerales y otros símbolos.

4.- Habilidad para secuenciar el razonamiento lógico, relacionada con la necesidad de comprobar, demostrar y deducir.

5.- Habilidad para abreviar los procesos de razonamiento y pensar en estructuras más reducidas.

6.- Habilidad para invertir procesos mentales.

7.- Flexibilidad de pensamiento. Incluye el proceso de paso de una forma mental a otra. Esta característica del pensamiento es importante para el trabajo creativo de un matemático.

8.- Memoria matemática; se puede considerar que también rige el hecho específico de la ciencia matemática, ayuda a generalizar y formalizar estructuras y esquemas lógicos.

9.- Habilidad para conceptos espaciales. Está directamente relacionada con la geometría, especialmente con la geometría del espacio.

Como indica Castro (1994), podemos considerar habilidad matemática como sinónimo de pensamiento matemático.

Los constructos habilidad y destreza están interrelacionados pero deben ser diferenciados.

- Por habilidad, se entienden los rasgos psicológicos individuales de una persona, que favorecen la rapidez y demuestran dominio en una actividad concreta (en este caso las matemáticas). *"La habilidad es el rasgo psicológico del que depende la maestría de las destrezas en una actividad"* (Krutetskii, 1976).

- Por destreza, se consideran las acciones específicas en un campo como el matemático.

Pero, para analizar tanto habilidades como destrezas, hay que analizar una actividad, pues se juzgan ambas usando los hechos y la ejecución de la actividad de las personas. Sin embargo, la actividad se puede mirar desde un punto de vista diferente. Analizando la actividad desde el punto de vista de los rasgos psicológicos que son favorables a este dominio estaremos haciendo un análisis de la habilidad.

En Hiebert y Lefevre (1986) encontramos un análisis de los tipos de conocimientos en Matemáticas, el conceptual y el procedimental, señalando diferentes características de cada uno de ellos. Para el conocimiento conceptual indica que es rico en relaciones y depende de la cantidad e intensidad de las conexiones que se dan entre las redes de representación interna. Se trata de un conocimiento que no puede aprenderse sin significado. Mientras el conocimiento procedimental es dependiente del sistema de representación simbólica e implica el conocimiento de las reglas sintácticas. Se trata de un conocimiento que puede generarse a partir de aprendizajes rutinarios.

Establecen los autores relaciones entre ambos conocimientos de manera que el conocimiento procedimental se beneficia del conocimiento conceptual, puesto que: a) los símbolos adquieren significado, al existir una conexión con el conocimiento conceptual que representan; b) se retienen más fácilmente los procedimientos, puesto que se encuentran conectados a una red de representaciones internas, y c) los procedimientos se pueden utilizar más fácilmente. Dado que se aumenta el número de representaciones internas, se puede dirigir y ejecutar más eficientemente el procedimiento, se promueve la transferencia y se reduce el número de procedimientos requeridos.

Por otra parte, el conocimiento conceptual se beneficia del conocimiento procedimental, puesto que los símbolos mejoran los conceptos y pueden generarlos. Además, el conocimiento conceptual puede convertirse en conocimiento procedimental y los procedimientos pueden promover los conceptos.

La caracterización y relación entre estos dos tipos de conocimiento es también considerada por otros autores, como por ejemplo Douady (1986) o Sfard (1991), incluso con mejor acierto. Además no profundizan en las representaciones externas y su relación con las representaciones internas, que es objeto de nuestra investigación. No obstante, al estudiar los aspectos cognitivos del pensamiento algebraico, vamos a considerar a éstos en términos de habilidades de carácter operacional y habilidades de carácter conceptual, que serán descritas en el capítulo 3.

2.3. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN: OBJETIVOS E HIPÓTESIS

Analizadas en el capítulo 1 las investigaciones más significativas en el campo del lenguaje algebraico y presentado en este capítulo el marco teórico local en el que vamos a desarrollar la investigación, procedemos en este apartado a delimitar el problema de investigación formulando, de manera concreta, los objetivos e hipótesis de la misma.

La investigación plantea cinco objetivos principales que, posteriormente se concretan en otros específicos en función de tres focos de investigación.

Objetivo 1º

El primer objetivo tiene que ver con aspectos cognitivos y lo definimos así:

Estudiar los aspectos cognitivos (Habilidades cognitivas de carácter operacional (H.C.C.O.) y habilidades cognitivas de carácter conceptual (H.C.C.C.)) más relevantes, del pensamiento algebraico con alumnos de 12 a 14 años.

Este objetivo general se formula en una hipótesis general, que se concreta en hipótesis específicas, cuyo estudio se realizará básicamente por métodos cualitativos mediante categorías de análisis.

Para este primer objetivo, la hipótesis de nuestro estudio es:

La presencia, junto con el sistema de representación formal algebraico, de un nuevo sistema de representación visual - geométrico y el sistema de representación visual físico de la balanza, como sistemas autosuficientes para el tratamiento inicial del Álgebra, implementados a través de un diseño instruccional innovador (DISEA para expresiones algebraicas y DISEC para ecuaciones), mejora la comprensión de las expresiones algebraicas, facilita a su vez el planteo y resolución de ecuaciones sencillas y constituye una ventaja para:

a) analizar las potencialidades y dificultades que la yuxtaposición de estos sistemas de representación aporta a los alumnos en la primera etapa de abordar el Álgebra,

b) profundizar en el análisis de las habilidades cognitivas, metacognitivas y

heurísticas que los alumnos ponen en juego al realizar la operatividad básica, en especial el uso de los paréntesis y la sustitución formal,
c) detectar y analizar habilidades en la conversión entre los distintos registros o sistemas de representación.

Objetivo 2º

Una de las bases más importantes que dio pie a las investigaciones y, posteriormente, a la construcción de un test para detectar las habilidades cognitivas indicadas, es que los seres humanos obtienen distintos rendimientos ante una misma tarea, sin embargo se piensa puede existir componentes de características relativamente estables donde se aúnen respuestas. Se trata de construir un instrumento de detección válido y fiable de habilidades algebraicas, por ello se plantea este segundo objetivo así:

Elaborar instrumentos de medida (test) que consideren todos los elementos implicados en el tránsito desde el pensamiento aritmético al algebraico desde una propuesta curricular "global".

Creemos que disponer de estos instrumentos de medida, favorece el conocimiento de obstáculos, errores y estrategias utilizadas por los alumnos que van a orientar la aplicación de uno u otro diseño curricular y permite observar el efecto de la metodología y estrategias de intervención utilizadas y su incidencia en el desarrollo de habilidades de carácter operacional, habilidades de carácter conceptual y habilidades metacognitivas.

Objetivo 3º

La importancia del dominio afectivo cuando se está trabajando con alumnos es indiscutible. Por ello, entendemos que en cualquier investigación los dominios, cognitivo y afectivo, no pueden estar disociados.

Nuestro objetivo no es utilizar el estudio de este campo para valorar la bondad de nuestro experimento de enseñanza, sino que es un estudio, aunque más corto, con entidad propia, que pretende diversos aspectos.

Como se sabe, el estudio del dominio afectivo está marcado por la falta de definición concreta de sus términos y por la necesidad de una teoría que lo sustente. Nuestro trabajo se va a centrar en el estudio de las actitudes de los alumnos, entendiendo este término como un concepto multidimensional. De esta forma, consideramos la actitud como el resultado de las siguientes componentes: a) componente afectiva (lo que siente hacia las Matemáticas y hacia el Álgebra en particular), b) comportamental y de implicación (comportamiento hacia esta materia y este aspecto suyo en particular así como lo que están dispuestos a hacer), c) cognoscitiva y contextual (opinión propia y de los que le rodean acerca de su relación con la materia) y d) creencias sobre sí mismo con relación a la materia.

Lo formulamos así:

Estudiar aspectos afectivos (Actitudes hacia la Matemática y

Algebra) con alumnos de 12 a 14 años con relación a la Matemática y al Álgebra, y analizar la evolución de la actitud hacia las Matemáticas de alumnos de 8 a 14 años.

Objetivo 4º

La evaluación del conocimiento matemático de los alumnos se plantea como un problema de inferencia a partir de las prácticas manifestadas por los mismos en muestras representativas del campo de actividades asociado a los conceptos, cuyo conocimiento se trata de evaluar. Es previsible que las respuestas correctas y errores no ocurran al azar, sino que existan asociaciones e implicaciones entre algunos de ellos, así como entre las dificultades y obstáculos. El propósito de estudiar estas relaciones junto a las consecuencias de los objetivos anteriores, 1, 2 y 3, nos ha llevado a formular este cuarto objetivo:

Estudiar y organizar las dificultades, obstáculos y errores que se dan en el aprendizaje del lenguaje algebraico.

Objetivo 5º

El lugar donde se lleva a cabo esta investigación es el aula y se pretende que en el futuro el propio profesorado habitual del aula correspondiente se encargue de desarrollar el diseño de instrucción. En esta situación no se puede afirmar que el cambio de determinadas variables sea sólo consecuencia directa del profesor que enseña y del alumno que aprende, ya que existen múltiples factores difíciles de controlar. Entre ellos el desarrollo de un curriculum determinado, decidido por el profesor, puede incidir en el éxito o fracaso de la enseñanza-aprendizaje, por las decisiones didácticas que haya tomado respecto al mismo y no sólo de la metodología aplicada. De ahí que formulemos el siguiente objetivo, como consecuencia de los cuatro objetivos anteriores y de los análisis espistemológicos y curriculares;

Elaborar una propuesta curricular "global" que facilite el inicio del aprendizaje del Álgebra.

Sostenemos que la implantación de un cambio curricular innovador se encuentra condicionado, entre otros elementos, por la disponibilidad de una propuesta de este tipo, acerca de la que el profesor puede juzgar su influencia en el sentido más global del cambio curricular y su incidencia en la mejora de la enseñanza - aprendizaje de sus alumnos, así como permitirle arbitrar modelos de aplicación de la misma que puede ayudar a facilitar su implantación y entender mejor la dinámica de estos procesos de cambio.

2.4. RACIONALIDAD DEL ESTUDIO Y SU JUSTIFICACIÓN

En este apartado mostramos brevemente aspectos de la racionalidad del estudio y su justificación desde el curriculum y desde lo cognitivo, aspectos por otro lado que se van argumentando y desarrollando a lo largo de toda la Memoria.

A nivel curricular

Para justificar a nivel curricular nuestra investigación, analizamos la relación entre lenguaje algebraico y la Reforma Educativa (LOGSE).

El lenguaje algebraico es un contenido donde se recomienda poner especial énfasis, pues sabemos que "el aprendizaje del Álgebra en general representa un escollo importante para un buen número de alumnos" (M.E.C., 1992), pero, al mismo tiempo, se puede considerar como una de las partes de la Matemática que influye considerablemente en el aspecto formativo de su propia actividad, favoreciendo la "potencia y simplicidad de sus propios lenguajes y métodos". También incide de manera especial en la construcción del conocimiento matemático en su etapa final, generalización y formalización, teniendo en cuenta que la formalización, el rigor, la coherencia, la ausencia de ambigüedad y las otras características del conocimiento matemático no son el punto de partida, sino más bien, el punto de llegada de un largo proceso de construcción.

Al interés tradicional por transmitir los conocimientos científicos se ha unido en los últimos años una preocupación creciente por los métodos de enseñanza - aprendizaje. La razón de ello está, por una parte, en el escaso rendimiento escolar que obtienen estas disciplinas, y, por otra, en la incidencia probada que los métodos, como variable mediacional, ejercen en los procesos de enseñanza -aprendizaje, y esto en el tema que nos ocupa - el "Álgebra escolar" - es esencial.

Nuestra investigación pretende aportar una Propuesta Curricular sobre el lenguaje algebraico **elaborando** un Diseño Específico de Intervención para el Primer Ciclo de la ESO, (12-14 años), que pretende colaborar en la mejora del aprendizaje del Álgebra mediante la superación de dificultades, obstáculos y errores que se han detectado en los alumnos.

A nivel cognitivo

Entre los objetivos indicados están: "Estudiar los aspectos cognitivos (Habilidades cognitivas de carácter operacional (H.C.C.O.) y habilidades cognitivas de carácter conceptual (H.C.C.C.)) más relevantes, del pensamiento algebraico con alumnos de 12 a 14 años", y "Estudiar y organizar las dificultades, obstáculos y errores que se dan en el aprendizaje del lenguaje algebraico".

Como ya se ha indicado es importante que el profesorado analice los contenidos del Álgebra en términos de capacidades generales. Por eso, el interés de este análisis está, en primer lugar, en la repercusión e incidencia de los sistemas semióticos de representación utilizados. En segundo lugar, detectar las habilidades cognitivas de carácter operacional y conceptual de los estudiantes.

Intentamos averiguar, además, las causas que provocan que alumnos que no han mostrado dificultades en el desarrollo del pensamiento aritmético sí las presentan cuando comienzan a trabajar el Álgebra. ¿Qué ocurre? ¿Por qué aparecen tantos errores sistemáticos en grupos de alumnos?, ¿no podría ocurrir que el sujeto estuviera generalizando sus estrategias de resolución de las operaciones aritméticas y no construyera nuevas y adecuadas para su enfrentamiento con el Álgebra? ¿Qué se pretende?, ¿qué el sujeto sepa "3 x (4 + 2) = 18", o que asuma el esquema de la propiedad distributiva del producto respecto a la suma, y la sepa aplicar en cualquier situación en que sea adecuado hacerlo? Lógicamente, la segunda alternativa, que le permitirá además generar otras situaciones donde ese esquema pueda ser relacionado con otros.

¿No podría ser que se le esté prestando una excesiva atención al contenido matemático y no se le esté prestando atención alguna a los esquemas lógico - matemáticos, que el alumno debe construir para poder asimilar esos contenidos? Si esto es así, ¿qué factores podrían influir en el rendimiento de un alumno de 7º que se enfrenta por primera vez de una manera sistemática con un lenguaje como es el algebraico?, ¿solamente los esquemas cognitivos del sujeto?, ¿la actitud que él tiene?, o ¿su capacidad intelectual?

Capítulo 3
Diseño Y Metodología De La Investigación

CAPÍTULO 3: DISEÑO Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta una descripción exhaustiva del diseño de investigación y de los instrumentos de recogida de datos de la misma, así como el proceso de elaboración del diseño de instrucción.

Se hará una descripción global del diseño general de la investigación mediante un esquema de las distintas etapas que lo conforman así como de las fases en que se ha desarrollado. Asimismo se presentan los focos en torno a los cuales se han organizado las diferentes fases de la misma, orientadas a conseguir los objetivos planteados en este estudio.

1) Estudiar los aspectos cognitivos (Habilidades cognitivas de carácter operacional (H.C.C.O.) y habilidades cognitivas de carácter conceptual (H.C.C.C.) más relevantes, del pensamiento algebraico con alumnos de 12 a 14 años.
2) Elaborar instrumentos de medida (test) que consideren todos los elementos implicados en el tránsito desde el pensamiento aritmético al algebraico desde una propuesta curricular "global".
3) Estudiar aspectos afectivos (actitudes hacia la Matemática y Álgebra) con alumnos de 12 a 14 años con relación a la Matemática y al Álgebra y analizar la evolución de la actitud hacia las Matemáticas de alumnos de 8 a 14 años.
4) Estudiar y organizar las dificultades, obstáculos y errores que se dan en el aprendizaje del lenguaje algebraico,
5) Elaborar una propuesta curricular "global" que facilite el inicio del aprendizaje del Álgebra.

Al tener como uno de los problemas de estudio las habilidades cognitivas operacionales y conceptuales en los procesos de adquisición y uso del lenguaje algebraico y del uso y comprensión de los sistemas de representación utilizados en el marco de una situación de enseñanza, se elaboró un Sistema de Categorías que nos permitió analizar los contenidos desarrollados en el aula y valorar la comprensión de los alumnos con relación a los mismos. Por ello comenzamos este Capítulo con una primera sección dedicada a la planificación de la investigación y a las categorías de análisis.

En un segundo apartado se describe el diseño general de la investigación y las diferentes fases que en que se han desarrollado sus distintas etapas.

Posteriormente se dedica la tercera parte de este Capítulo, a la descripción, desarrollo y valoración de los diseños concretos de instrucción, relativos a expresiones algebraicas (DISEA) y a ecuaciones (DISEC), que se han aplicado.

El DISEA es aplicado primero en el curso 1992-93 en un grupo de alumnos (31 de 7º de E.G.B.) y sobre él se desarrolla la primera reflexión, y, posteriormente, se desarrolla una nueva aplicación en un grupo de 23 alumnos de 8º de EG.B, en el curso 1995-96. Los grupos pertenecen a aulas distintas de los Centros denominados Centro nº 1 (Santa Rosa de Lima, La Laguna) y Centro nº 3 (Nuestra Señora del Coro, Verdellada). El DISEC, por su parte, sólo es aplicado al primer grupo citado, el de los 31 alumnos del Centro nº 1.

Finalmente, el Capítulo aborda los instrumentos de recogida de datos, tanto cuantitativos como cualitativos, planteando cómo se desarrolló su construcción, su validación y su administración.

En el estudio cuantitativo destacamos la construcción del Test para las expresiones algebraicas y para las ecuaciones. Se incluye también las escalas de actitudes hacia las Matemáticas y hacia el Álgebra, que se han utilizado.

En el análisis cualitativo se aporta el estudio y desarrollo de las entrevistas realizadas a los alumnos seleccionados.

3.2 PLANIFICACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN. CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

En esta investigación el trabajo de aula va a ser desarrollado por la profesora/investigadora. Esto exige una preparación y organización global, previa a las sesiones de trabajo de campo a realizar durante las experiencias.

Esta preparación y organización previa constituye una fase fundamental de la investigación que va a permitir realizar una mejor organización y estructura interna de las fases de diseño e implementación así como de la fase de evaluación, que permitirá detectar las potencialidades y dificultades de la enseñanza-aprendizaje propuesta.

Esta fase previa, la llamaremos planificación y estará determinada por un sistema de categorías, que va a permitir la organización de las fases de diseño, desarrollo y evaluación de las experiencias.

Este sistema de categorías responde a los tres ámbitos de estudio: el cognitivo, el curricular y el de la implementación didáctica, que permitirá: analizar el aula donde se realiza la experiencia, analizar los contenidos desarrollados en el aula y valorar la comprensión de los alumnos en relación con los contenidos desarrollados. Por ello utilizaremos un sistema formado por tres tipos de categorías:

- Categorías de implementación didáctica (C. I. D.).
- Categorías de contenido algebraico (C. C. A.).
- Categorías de habilidades algebraicas (C. H. A.).

En nuestro estudio nos proponemos llevar a cabo una evaluación de las habilidades algebraicas de carácter operacional y conceptual para expresiones algebraicas y ecuaciones lineales con una incógnita, un análisis de los contenidos que se han desarrollado en las clases para los dos tópicos anteriores y un estudio de las interacciones que se han producido en el aula durante el tiempo que hemos realizado el trabajo.

En la organización y construcción de este sistema de categorías hemos tomado en consideración a diferentes autores, como Flanders (1967), Bisquerra (1989), Blanco y Anguera (1991) y especialmente a Castro (1994).

CATEGORÍAS DE IMPLEMENTACIÓN DIDÁCTICA (C. I. D.)

Las categorías de implementación didáctica permiten tener referencias sobre la comunicación y las interacciones de los alumnos durante la experiencia.

Las categorías de implementación didáctica las consideramos agrupadas en las cuatro fases del proceso de enseñanza-aprendizaje: Presentación/observación, Exploración/indagación, Representaciones e Integración. A cada una de estas fases corresponden varias categorías, tanto referentes al profesor como al alumno.

De acuerdo con el modelo de enseñanza-aprendizaje propuesto, estas categorías se organizan según la siguiente tabla:

Fases del proceso de enseñanza-aprendizaje	Categorías de Implementación Didáctica (C.I.D.)	
	Profesor	Alumno
Presentación/observación.	Motivación. Exposición.	Cuestiones o preguntas de los alumnos. Respuestas de los alumnos.
Exploración/indagación.	Cuestiones o preguntas del Profesor. Respuestas del Profesor.	Cuestiones o preguntas de los alumnos. Respuestas de los alumnos.
Representaciones semióticas. Representaciones mentales.	Actividades. Cuestiones o preguntas del Profesor. Respuestas del Profesor. Interacciones.	Respuestas de los alumnos. Cuestiones o preguntas de los alumnos. Interacciones.
Integración.	Síntesis. Reflexión.	Respuestas de los alumnos. Interacciones.

Tabla 3.1

A un nivel más operativo y práctico cada una de estas categorías deben ser consideradas en los sentidos siguientes:

La *motivación* es la actuación diseñada por el profesor para estimular el interés de los alumnos por la realización del trabajo.

La *exposición* es la información o explicación dadas por el profesor al alumno, a través de las cuales se transmite el contenido algebraico, se precisa una idea o un concepto, o se explica un procedimiento.

Las *actividades* o tareas a realizar son actuaciones concretas y bien definidas que propone el profesor para que las lleven a cabo los alumnos.

Las *respuestas del profesor* son cuestiones o comentarios del profesor acerca de algún conocimiento, que induce a los alumnos a recapacitar y relacionar conceptos de forma que obtengan algún aspecto nuevo del conocimiento.

La *síntesis* es el momento, generalmente final, en el que el profesor resume y organiza, total o parcialmente, el trabajo previamente realizado. Constituye el momento final de cada tema o unidad de aprendizaje desarrollada.

La *reflexión* consiste en recapacitar sobre el trabajo realizado, clasificarlo por parte de los alumnos y sacar conclusiones, con la finalidad de que el alumno mejore en la comprensión y expresión del conocimiento tratado.

Las *interacciones* deben ser entendidas en sentido amplio, como la cadena de episodios o acontecimiento que suceden en el aula en las diferentes fases del proceso de enseñanza - aprendizaje (Flanders, 1977); en nuestro estudio nos vamos a limitar a dos fases del proceso: la fase de representación y la fase de integración.

Las restantes categorías, respuestas del profesor, preguntas de los alumnos, y respuesta de los alumnos están, obviamente, determinadas.

Para ello se recogen, organizan y analizan los datos obtenidos de distintas fuentes: diario de la profesora investigadora, transcripciones de las grabaciones y vídeograbaciones, y cuadernos de los alumnos.

CATEGORÍAS DE CONTENIDO ALGEBRAICO (C. C. A.)

Con las categorías de contenido algebraico (C. C. A.), analizaremos y organizaremos la estructura específica de los conocimientos algebraicos a tratar y la secuencia de enseñanza que los desarrolla. A través de la secuencia se especifica el contenido matemático y se obtiene información sobre la concepción subyacente tanto del contenido como de la enseñanza del Álgebra.

Este nivel de categorías es útil tanto para la organización previa del trabajo del profesor como para la puesta en práctica del mismo, marcando distintos pasos en la articulación de los contenidos que permite por tanto una planificación inicial y, posteriormente, analizar el desarrollo del contenido en la clase, lo que hace posible no sólo comparar las fases de planificación y desarrollo sino sacar conclusiones para la organización curricular del tema tratado.

En definitiva resulta de utilidad, a efectos de organizar la secuencia de enseñanza, establecer categorías que nos permitan conocer los aspectos del contenido que son tratados en la experiencia.

Los contenidos a tratar en esta investigación se organizan en torno a dos tópicos: expresiones algebraicas y planteo y resolución de ecuaciones lineales con una incógnita.

Para las expresiones algebraicas, el contenido a tratar fue:

1) Expresiones numéricas y algebraicas.

. Representaciones semióticas.

2) Operaciones con expresiones numéricas y algebraicas.

. Propiedad distributiva.

3) Sustitución formal en contextos aditivos y multiplicativos

. Expresión mediante variables (letras) propiedades o relaciones.

. Valor numérico de expresiones algebraicas.

Los contenidos a tratar para las expresiones algebraicas se organizan en torno al principio de permanencia algebraico: La adición y sus propiedades; La multiplicación y sus propiedades; La propiedad distributiva. Además de las expresiones numéricas y algebraicas y sus diferentes representaciones semióticas y la sustitución formal y los diferentes procesos implicados (particularización, valor numérico de expresiones algebraicas, y, generalización, letras que reemplazan a cantidades para expresar propiedades o relaciones entre las cantidades), y otros.

Para el planteo y resolución de ecuaciones lineales con una incógnita, el contenido a tratar fue:

a) Plantear ecuaciones en diferentes registros.

b) Resolución de ecuaciones dadas en diferentes registros.

c) Plantear y resolver ecuaciones en problemas de enunciado verbal.

Estas categorías de contenido algebraico (C. C. A.), a su vez, se subdividen en subcategorías.

Las categorías de contenido algebraico (C. C. A.) para las expresiones algebraicas que consideramos fueron:

◊ Uso e interpretación de letras (U.L.): Cantidad de una magnitud numérica, como incógnita, como número generalizado, como objeto, etc.

◊ Uso e interpretación de signos (U.S.): Signo “igual”, paréntesis, etc.

◊ Representaciones semióticas (R.S.): Lenguaje Habitual (L.H.), Representación Aritmética (R.A.), Sistema de Representación Visual Geométrico (S.R.V.G.) y Representación Formal (R.F.).

◊ Operatividad Básica (O.B.): La operatividad básica se refiere a las operaciones con expresiones numéricas y algebraicas: Operaciones aditivas y multiplicativas y Propiedades.

La operatividad básica contempla todo lo relativo al cálculo con expresiones numéricas y algebraicas.

◊ El cálculo estará referido a las siguientes <u>estructuras</u>:

“a + b”, “a . b”, “a . b + c”, “a + b . c” , “a . b + c . d”,
“a . (b + c)”, “·(a + b) . c” y “(a + b) (c + d)”,
con sus diferentes casos particulares.

◊ Reconocimiento de estructuras (R.E.): Respuestas abiertas. Interpretación de las expresiones algebraicas en términos numéricos.

◊ Sustitución formal (S.F.): Estará centrada en el trabajo de dos procesos fundamentales, la particularización, entendida como la obtención del valor numérico de una expresión alfanumérica y la generalización, como el proceso de sustitución formal por el que se reemplaza a cantidades numéricas o de magnitudes para expresar propiedades o relaciones entre las cantidades.

Las categorías de contenido algebraico (C. C. A.) para el planteo y resolución de ecuaciones con una incógnita, que consideramos, fueron:

◊ Uso e interpretación de los signos y las letras (U.S.L.): Signo igual, signo negativo en los coeficientes de la ecuación.

◊ Representaciones semióticas (R.S.): Lenguaje Habitual (L.H.), Sistema de Representación Visual Geométrico (S.R.V.G.), Sistema de representación del equilibrio con la Balanza (S.R.E.B.) y Representación Formal (R.F.).

◊ Procedimientos de resolución de ecuaciones lineales con una incógnita: Procedimientos de resolución en: “x + b = c”, “a x = b” y “a x + b = c x + d”.

◊ Reconocimiento e interpretación de estructuras: Reconocimiento e interpretación de expresiones equivalentes expresadas en el mismo y en distintos registros. Reconocimiento e interpretación de las soluciones (positivas y negativas).

CATEGORÍAS DE HABILIDADES ALGEBRAICAS (C. H. A.)

Para analizar la comprensión de las expresiones algebraicas y la resolución de ecuaciones, establecemos las categorías de habilidades algebraicas.

Frente a las propuestas de enseñanza/aprendizaje del Álgebra basadas especialmente en procedimientos algorítmicos, nosotros proponemos una enseñanza-aprendizaje que conjugue tanto la representación conceptual como de procedimiento, en un marco de interpretación del Álgebra como lenguaje.

Por ello las categorías de habilidades algebraicas, se organizan en torno a los dos núcleos:

- Categorías de Habilidades Algebraicas para Expresiones Algebraicas.
- Categorías de Habilidades Algebraicas para Ecuaciones Lineales.

Las categorías se dividen en dos subcategorías:

- Habilidades cognitivas de carácter operacional (H.C.C.O.),
- Habilidades cognitivas de carácter conceptual (H.C.C.C.),

que nos van a permitir estudiar la comprensión, tanto de los aspectos conceptuales como de procedimiento, así como las interacciones entre ambos.

Las Categorías de Habilidades para Expresiones Algebraicas son:

EXPRESIONES ALGEBRAICAS	
H.C.C.O.	**H.C.C.C.**
O_1 Realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis. **O_2** Realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis **O_3** Hacer sustituciones formales referidas tanto a los procesos de particularizar como a generalizar.	**C_1** Hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal. **C_2** Contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como objetos geométricos y como número generalizado en contextos de área y perímetro. **C_3** Interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual.

Tabla 3.2

Caracterizamos ahora cada categoría por sus descriptores o elementos que vamos a considerar dentro de cada categoría.

Los descriptores de las distintas categorías se recogen en las siguientes tablas:

EXPRESIONES ALGEBRAICAS H.C.C.O.	
CATEGORÍAS	**DESCRIPTORES**
O_1 Realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis.	**O_1** 1.1.En contextos aditivos: números, números y letras. 1.2. En contextos multiplicativos: números, números y letras. 1.3. En contextos aditivos y multiplicativos simultáneos: Números y números y letras. a) Modo de Resolución. b) Uso de las propiedades. c) Tipos de respuestas.
O_2 Realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especiales atención a las denotaciones del paréntesis.	**O_2** 2.1.En contextos aditivos: números, números y letras. 2.2.En contextos multiplicativos: números, números y letras 2.3. En contextos aditivos y multiplicativos simultáneos: Números y números y letras. a) Modo de Resolución. b) Uso de las propiedades. c) Tipos de respuestas. d) Denotación del paréntesis
O_3 Hacer sustituciones formales referidas tanto a los procesos de particularizar como a generalizar.	**O_3** 3.1.En contextos aditivos. 3.2. En contextos multiplicativos. 3.3. En contextos aditivos y multiplicativos simultáneos. a) Modo de Resolución. b) Uso de las propiedades. c) Tipos de respuestas. d) Denotación del paréntesis. e) Concatenación.

Tabla 3.3

EXPRESIONES ALGEBRAICAS H.C.C.C.	
CATEGORÍAS	**DESCRIPTORES**
C_1 Hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal.	**C_1** • Registros de representación: • Modos de conversión entre los diferentes registros Traducción secuencial de acciones y relaciones dadas en un registro (verbal). Otros. • Utilización de registros personales o numéricos. • Concordancia o no con las transformaciones en un registro y sus conversiones en el otro registro. • La visualización simplificada como un registro intermedio. • Las representaciones en el S.R.V.G.
C_2 Contextualizar el lenguaje algebraico en general, y en particular las letras como objetos geométricos y como número generalizado, en contextos de área y perímetro.	**C_2** • Registros de representación: • Modos de conversión entre los diferentes registros Traducción secuencial de acciones y relaciones dadas en un registro (verbal). Otros. • Utilización de registros personales o numéricos. • Concordancia o no con las transformaciones en un registro y sus conversiones en el otro registro. • La visualización simplificada como un registro intermedio. • Las representaciones en el S.R.V.G. • Las letras como objeto geométrico (cantidad de una magnitud geométrica : longitud y superficie). Los problemas de área y perímetro. • Las letras como número generalizado (cantidades numéricas o de otras magnitudes). El papel de las unidades de medida.
C_3 Interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual.	**C_3** • Registros de representación: • Modos de conversión entre los diferentes registros Traducción secuencial de acciones y relaciones dadas en un registro (verbal). Otros. • Utilización de registros personales o numéricos. • Concordancia o no con las transformaciones en un registro y sus conversiones en el otro registro. • La visualización simplificada como un registro intermedio. • Las representaciones en el S.R.V.G. • Uso e interpretación de las letras. • Uso y reconocimiento de las letras: como objeto geométrico, como incógnitas específicas, generalizando cantidades numéricas y de magnitud. • Designación y denotación de variables. • La variable vista como una respuesta (Cantidad numérica, cantidad de una magnitud). • Reconocimiento y comprensión de los convenios de notación en álgebra. • Uso e interpretación de los paréntesis • Designación y denotación de paréntesis. • Sustitución Formal: • Uso e interpretación de la particularización y generalización de la sustitución formal. • El signo igual: • Uso y representación del signo "=".

Tabla 3.4

Análogamente determinamos las categorías relativas a las habilidades cognitivas de carácter operacional y conceptual relativo a las ecuaciones.

ECUACIONES	
H.C.C.O.	**H.C.C.C.**
O_1 Uso de las reglas de transformación. **O_2** Procedimientos de resolución en “x + b = c”. **O_3** Procedimientos de resolución en “a x = b”. **O_4** Procedimientos de resolución en “ax + b = cx + d”. **O_5** Signos negativos en los coeficientes de la ecuación. **O_6** Comprobación e interpretación de las soluciones de la ecuación (positivas y negativas).	**C_1** Conversiones del lenguaje habitual al Sistema de Representación Visual Geométrico. **C_2** Conversiones del lenguaje habitual al Sistema de Representación del Equilibrio con la Balanza. **C_3** Conversiones del lenguaje habitual al lenguaje algebraico. **C_4** Conversiones del lenguaje algebraico al Sistema de Representación Visual Geométrico. **C_5** Conversiones del lenguaje algebraico al Sistema de Representación del Equilibrio con la Balanza. **C_6** Reconocimiento de expresiones equivalentes expresadas en distintos lenguajes. **C_7** Interpretación y comprensión del signo “=”.

Tabla 3.5

Los descriptores de cada categoría se recogen en las siguientes tablas:

ECUACIONES H.C.C.O.	
CATEGORÍAS	DESCRIPTORES
O_1 Uso de las reglas de transformación.	**O_1** 1.1) Transformaciones en cada miembro de la igualdad independientemente. 1.2) Transformaciones equivalentes en los dos miembros de la igualdad.
O_2 Procedimientos de resolución en "x + b = c".	**O_2** 2.1) Resolución numérica a) Sin transformaciones en la ecuación original. b) Sustitución numérica. 2.2) Operación inversa (+). a) Monotonía de la suma. b) Transposición de términos. 2.3) Otros métodos.
O_3 Procedimientos de resolución en "a x = b".	**O_3** 3.1. Resolución numérica. a) Sin transformaciones en la ecuación original. b) Sustitución numérica. 3.2) Operación inversa (x). a) Monotonía de la suma. b) Transposición de términos. 3.3) Otros métodos.
O_4 Procedimientos de resolución en "ax + b = cx + d".	**O_4** 4.1) Resolución numérica. a) Sin transformaciones en la ecuación original. b) Sustitución numérica. 4.2) Operación inversa (+, .). a) Monotonía de la suma. b) Transposición de términos. 4.3) Operando con la incógnita. 4.4) Otros métodos.
O_5 Signos negativos en los coeficientes de la ecuación.	**O_5** Interpretaciones del coeficiente negativo.
O_6 Comprobación e interpretación de las soluciones de la ecuación (positivas y negativas).	**O_6** Reconocimiento de la equivalencia de las dos cantidades.

Tabla 3.6

ECUACIONES H.C.C.C.	
CATEGORÍAS	**DESCRIPTORES**
C_1 Conversiones del lenguaje habitual al Sistema de Representación Visual Geométrico.	**C_1, C_2, C_3, C_4, C_5,y C_6** • Utilización de registros personales (códigos) o numéricos.
C_2 Conversiones del lenguaje habitual al Sistema de Representación del Equilibrio con la Balanza.	• Concordancia o no con las transformaciones en un registro y sus conversiones en el otro registro.
C_3 Conversión del lenguaje habitual al lenguaje algebraico.	• Identificación y notación de la incógnita en los diferentes registros.
C_4 Conversiones del lenguaje algebraico al Sistema de Representación Visual Geométrico.	• Uso de letras para representar la incógnita.
C_5 Conversiones del lenguaje algebraico al Sistema de Representación del Equilibrio con la Balanza.	• La incógnita vista como una respuesta (Cantidad numérica, cantidad de una magnitud).
C_6 Reconocimiento de expresiones equivalentes expresadas en distintos lenguajes.	• Planteamiento de la ecuación.
C_7 Interpretación y comprensión del signo "=". Reconocimiento de expresiones equivalentes expresadas en distintos lenguajes.	• La ecuación vista como una totalidad o como una yuxtaposición de partes no equivalentes. • Representación del signo "=". • Conocimiento del signo "=" como equivalencia. • Conocimiento de la ecuación como colección de términos "equivalentes". • El signo "=" visto como una "operación" o como "una relación".

Tabla 3.7

3.3 DISEÑO GENERAL Y FASES DE LA INVESTIGACIÓN

En este apartado describiremos el diseño general de la investigación y las fases en que se han desarrollado sus distintas etapas.

3.3.1 Diseño general de la investigación

Como se ha planteado en el capítulo anterior, nuestra investigación se propone establecer las dificultades que plantea y las posibilidades que tiene una propuesta inicial de enseñanza-aprendizaje del Álgebra, desde una perspectiva global, que incorpora diferentes registros yuxtapuestos, como el S.R.V.G. y las letras como objeto geométrico, es decir, diferentes fuentes de significados articulados, que faciliten la comprensión del lenguaje algebraico.

Es ésta una investigación sobre la adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores y se ocupa de tres aspectos del Álgebra escolar: expresiones algebraicas, planteamiento de ecuaciones lineales con una incógnita y resolución de las mismas.

La investigación no se enmarca en un paradigma único, sino que se sitúa entre dos perspectivas:

- La interpretativa, con la que se pretende conseguir una mayor comprensión de las situaciones y relaciones establecidas, a la vez que permite dar respuesta a los interrogantes de cómo los sujetos perciben, interpretan, modifican y construyen los objetos matemáticos considerados;

- La analítica, con el fin de reducir el fenómeno que se estudia a dimensiones objetivables, susceptibles de medición, análisis estadístico y control experimental.

Pretendemos en nuestro trabajo una complementación entre ambos paradigmas, por ello, la investigación se diseñó y desarrolló siguiendo un modelo que intenta conjugar una investigación de tipo cuantitativo con otra de tipo cualitativo, como se ha indicado en el Capítulo 1. Por eso la investigación conjuga el diseño de instrucción, con el diseño de un test de habilidades algebraicas y una escala de actitudes hacia las Matemáticas y hacia el Álgebra, así como el diseño de protocolos no cerrados para entrevistas estructuradas con los alumnos seleccionados. Este método de recogida de datos a través de la entrevista, según describe Tuckman “proporciona acceso a lo que está dentro de la cabeza de una persona, hace posible medir lo que sabe una persona (conocimiento e información), lo que le gusta o disgusta (valores y preferencias) y lo que piensa (actitudes y creencias)”, (citado por Cohen y Manion, 1990).

En cuanto a su finalidad, podemos hablar de una investigación aplicada, ya que tratamos de resolver un problema práctico, como es la búsqueda de causas que originan las dificultades en el inicio del aprendizaje del Álgebra desde tres ámbitos diferentes: cognitivo, curricular y de implementación didáctica, con el fin de transformar las condiciones de la acción didáctica y mejorar la calidad educativa.

3.3.2 Focos, etapas y fases de la investigación

Esta investigación se ha desarrollado en cuatro etapas durante los cursos comprendido entre 1988 y 1998 y se ha centrado en tres focos de investigación.

A continuación se presentan los focos así como las etapas y fases que comprenden el proceso completo de la misma para facilitar su explicación.

Con relación a los focos, el **foco I** abarca desde **1990** a **1992** y se centra en la búsqueda de las diferentes causas que originan las dificultades que los alumnos manifiestan en el uso del lenguaje algebraico, en general, y en el paso de la Aritmética al Álgebra para los alumnos de 12- 14 años.

Para ello se consideran diferentes aspectos de investigación y se analizan:

- Las propuestas curriculares oficiales y en libros de texto.
- Las dificultades observadas en múltiples investigaciones.
- El tipo de habilidades operacionales y conceptuales que manifiestan los alumnos en el trabajo en el lenguaje algebraico (se utiliza como material sus textos y se elabora un primer cuestionario).
- Las dificultades operacionales y conceptuales que manifiestan los alumnos en el trabajo en el lenguaje algebraico.
- La influencia de los métodos y procedimientos de estudio del lenguaje algebraico que practican los alumnos.
- Las posibilidades que tienen otras representaciones semióticas para el trabajo con el lenguaje algebraico.

Los objetivos correspondientes a este foco son:

- Analizar la organización curricular de los diseños oficiales y de los libros de texto.
- Analizar y considerar las dificultades detectadas a lo largo de la literatura.
- Analizar habilidades cognitivas de carácter operacional y conceptual que manifiestan los alumnos al trabajar el lenguaje algebraico.
- Analizar dificultades, obstáculos y errores presentados por los alumnos en el trabajo del lenguaje algebraico.
- Comprobar si las dificultades de los alumnos están relacionada con la organización metodológica del texto.
- Analizar las ventajas e inconvenientes del uso de distintos sistemas de representación en el aprendizaje del Álgebra.

Los procedimientos de recogida de información son en una primera fase, la administración de unos cuestionarios a diferentes poblaciones, y, en una segunda fase, la elaboración de un pretest-postest. Se realizó instrucción previa siguiendo el texto de los alumnos. Es una investigación de carácter descriptivo.

El **foco II** abarca los años desde **1992** a **1994**, y en él se consideran tres ámbitos diferentes aunque relacionados y constituyen en sí mismos investigaciones diferentes. En este foco se hace referencia a:

- Análisis de las potencialidades y dificultades que aportan los modelos DISEA y DISEC en la introducción a las expresiones algebraicas y al planteamiento y resolución de ecuaciones algebraicas.

- Análisis de las actitudes de los alumnos de 12 a 14 años, con relación a la Matemática y al lenguaje algebraico.

- La elaboración de un test que permite diagnosticar la situación de los alumnos con relación al lenguaje algebraico.

Los objetivos correspondientes a este foco son:

- Elaborar un test sobre lenguaje algebraico: expresiones algebraicas y ecuaciones.
- Conocer la actitud de los alumnos hacia la Matemática y hacia el Álgebra.
- Valorar las habilidades de carácter operacional y conceptual que muestran los alumnos sobre el lenguaje algebraico.
- Valorar la comprensión que muestran los alumnos sobre las diferentes sistemas de representación.
- Analizar los diferentes sentidos que atribuyen a las distintas fuentes de significado que se proponen para el Álgebra.

Los modelos DISEA y DISEC permiten situar al alumno en el uso de diferentes sistemas de representación (Duval) y diferentes fuentes de significado (Kaput), en un marco constructivista del aprendizaje del lenguaje algebraico, lo que nos facilitará la observación, análisis y valoración de las influencias del modelo, y las dificultades, obstáculos y errores que tienen los alumnos, en un proceso de enseñanza-aprendizaje del Álgebra.

El **foco III** abarca los años desde **1994** a **1996**.

Este tercer foco de investigación se considera desde dos ámbitos diferentes; por una parte, vuelve a estar centrado en el análisis de potencialidades y dificultades que aporta el modelo DISEA en el trabajo con expresiones algebraicas con alumnos de 8º (no se consideran las ecuaciones); y, por otra, se retoma la construcción del test y se valida, utilizando con pequeñas modificaciones el de la investigación anterior.

Se vuelve a realizar una segunda investigación sobre expresiones algebraicas con la intención de profundizar en aspectos tales como: respuestas abiertas, operaciones, conversiones entre los diferentes registros, etc., y añadimos dos aspectos que en el trabajo anterior no habíamos trabajado con amplitud: el uso de paréntesis y las sustituciones formales, aspectos asociados en el trabajo en Álgebra.

Los objetivos correspondientes a este foco son:

- Validar el Test sobre lenguaje algebraico y utilizarlo en la investigación sobre expresiones algebraicas.
- Valorar las habilidades de carácter operacional y conceptual que muestran los alumnos sobre expresiones algebraicas.
- Valorar la comprensión que muestran los alumnos sobre el sistema de representación visual geométrico en el trabajo con expresiones algebraicas.
- Analizar los diferentes sentidos que atribuyen a las distintas fuentes de significado que se proponen para las expresiones algebraicas.

El diseño y planificación de toda la investigación comprende las cuatro etapas reflejadas en la tabla 3.8.

ETAPAS	CURSOS	FOCOS	FASES
1ª **Revisión**	1988-1990		Revisión "literatura". Revisión curricular. Intuición del problema.
2ª **Exploratoria**	1990-1992	**I.** Causas de las dificultades en el lenguaje algebraico.	**I.1 (90-91)** Cuestionario 1. Cuestionario 2.
			I.2. (91-92) Cuestionario 3. Instrucción (Diseño Oficial, libro de texto). Cuestionario 4.
Experimental	1992-1994	**II.** Análisis de potencialidades y dificultades aportadas por los Diseños: DISEA y DISEC. Análisis de Actitudes hacia las Matemáticas y el Álgebra. Elaboración pretest y postest de habilidades algebraicas.	**II.1. (92-93)** Elaboración escalas de actitudes. Elaboración pretest y postest de habilidades algebraicas (conceptuales y operacionales). Elaboración Diseños (DISEA y DISEC). Aplicación escalas de actitudes. Aplicación pretest. Implementación de los Diseños. Aplicación postest. Preparación Protocolos Entrevistas. Entrevistas.
			II.2. (93-94) Entrevistas. Revisión pretest y postest habilidades algebraicas. Revisión Diseños DISEA y DISEC. Revisión Protocolos Entrevistas.
3ª **Experimental**	1994-1996	**III.** Elaboración Test. Validación del Test de habilidades algebraicas.	**III.1. (94-95)** Elaboración Test habilidades algebraicas Aplicación Test habilidades algebraicas. Validación Test habilidades algebraicas.
		Análisis de potencialidades y dificultades aportadas por el DISEA.	**III.2 (95-96)** Elaboración Prueba T para expresiones algebraicas. Aplicación Prueba T. Implementación DISEA (DISEA II). Aplicación Prueba T. Entrevistas.
4ª	1996-1998		**96-97** Organización y análisis de datos.
			97-98 Conclusiones.

Tabla 3.8

La **primera etapa:** Abarca los años 88-90.

Comienza con las primeras intuiciones del problema sobre las dificultades, obstáculos y errores que los alumnos tienen al trabajar con álgebra y que proviene de la revisión de la literatura relativa al tema, de la revisión curricular y de la propia experiencia de la investigadora. En esta etapa se empieza la preparación de las experiencias exploratorias y se bosqueja el diseño del proceso de investigación.

La **segunda etapa:** Comprende los años desde el 90 al 94 y corresponde al trabajo de los dos primeros focos de investigación.

El primero de ellos se desarrolla en una primera fase durante los años 90-92 y se centra en la búsqueda de las diferentes causas que originan las dificultades que los alumnos manifiestan en el uso del lenguaje algebraico, en general, y en el paso de la aritmética al álgebra para los alumnos de 12-14 años y el segundo foco, en una nueva fase que abarca desde el 92-94, en sus diferentes ámbitos de desarrollo: el análisis de las potencialidades y dificultades que aportan los diseños de instrucción, la elaboración de la escala de actitudes y el análisis de las actitudes de los alumnos con relación a la Matemática y al Álgebra, la elaboración y revisión del test de habilidades operacionales y conceptuales, y la elaboración de los protocolos de las entrevistas, la realización de las mismas y su revisión.

La **tercera etapa:** Corresponde al trabajo realizado en los años 94-96 y al tercer foco de investigación, que considera una primera fase donde se valida el Test, y una segunda fase donde se aplica de nuevo el test, con modificaciones del utilizado anteriormente; se realiza una segunda implementación del DISEA (DISEA II) en un aula de 8º, para analizar las potencialidades y dificultades que aporta esta nueva aplicación. También se realizan nuevas entrevistas.

La **cuarta etapa:** corresponde a los años 96-98. En una primera fase se han organizado los datos (96-97). Es el periodo de análisis y discusión de los datos obtenidos, tanto de la clase como grupo como el de un estudio de un caso singular, y en una segunda y última fase (97-98), se redacta esta Memoria.

3.3.3 Población

El estudio se ha realizado en la Isla de Tenerife, en tres Centros codificados con los nº 1, 2 y 3 en esta Memoria. Están situados en la Ciudad de La Laguna y Tejina, y han proporcionado 13 aulas para investigar. Son tres aulas de los Centros Públicos (nº 2 y 3) y el resto, del Centro nº 1 que es Privado-Concertado. Además se había realizado una prueba con alumnos de varios centros de diferentes niveles y países. El número total de sujetos es de 455.

Adjuntamos posteriormente una tabla resumen (tabla 3.9).

Presentamos algunas consideraciones del por qué elegir los cursos 7º y 8º como fundamentales para nuestra investigación.

El elegir estos cursos lo justificamos porque son muy importantes en el tema que nos ocupa, ya que son niveles donde se comienza la transición del pensamiento aritmético al algebraico y, por otra parte, según interpretamos la descripción de los psicólogos evolutivos, son cursos de transición en el cambio de pensamiento de la utilización por el sujeto de esquemas operacionales concretos a operaciones formales.

Nos parecen decisivos y tratamos de encontrar una secuencia de enseñanza-aprendizaje que posibilite un acercamiento mayor y mejor al Álgebra por parte de los alumnos de estos niveles.

Las investigaciones relacionadas con la adquisición del lenguaje algebraico han sido variadas en cuanto a niveles escolares y en cuanto a número de alumnos, estudiando fundamentalmente el uso y significado de las letras y la resolución de ecuaciones sencillas, así como la incidencia de las nuevas tecnologías. Asimismo, se han ensayado determinados métodos de enseñanza, más o menos estructurada, para ver sus efectos.

Nuestra investigación pretende observar cuál es la incidencia de los nuevos registros utilizados y cómo los alumnos los integran, cuáles son las dificultades, obstáculos y errores a que se enfrentan en su uso y cuál es su comportamiento al usarlos yuxtapuestos, así como cuáles son las habilidades cognitivas que muestran en la conversión de unos sistemas de representación en otros y en el trabajo en cada uno de ellos; en definitiva qué elaboraciones sintácticas y semánticas realizan. Por ello, hemos elegido este nivel escolar donde se comienza a adquirir el lenguaje algebraico.

FOCO	CURSO	LUGAR	NIVEL	ACTIVIDAD	CÓDIGO ACTIVIDAD	POBLACIÓN
I	1990-91	MÉXICO Centro nº 1 LA LAGUNA	 8º E.G.B. EGB+BUP+UNIV	Cuestionario Cuestionario	C_1 C_2	29 alumnos 70 alumnos 32 estudiantes (9 de 8º de E.G.B. (mismo centro) 9 de 1º y 2º de B.U.P. (tres centros) 9 de 3º de Ciencias (E.U.F.P.E.G.B) 5 de 1º de C.C.H.H. (E.U.F.P.E.G.B))
I	1991-92	Centro nº 1	7º E.G.B.	Cuestionario Instrucción Cuestionario	C_3 C_4	112 estudiantes (37, 7º A + 37, 7º B + 38, 7º C) 7ª A y 7ª B 7º A y 7ª B 112 estudiantes (37, 7º A + 37 7º B + 38, 7º C)
II	1992-93	Centro nº 1	7º E.G.B.	Actitudes Pretest Instrucción E.A. Postest E.A: Instrucción Ec Postest Ec. Entrevistas	 Pr1 + Pr2 Po1 Po2	7ºA, 7º B y 7º C 7ºA, B, C y 8º A y B 7º A 3 alumnos
II	1993-94	Centro nº 1	8º de E.G.B.	Entrevistas		6 alumnos
III	1994-95	Centros 1 y 2	7º y 8º	TestA + TestB	TA +TB	41 a. (Centro nº 2, 22 de 7º B y 19 de 8º B)
III	1995-96	Centro nº 3	8º	Prueba T Instrucción Prueba T	T1 T2	21 19

Tabla 3.9

3.4 EL DISEÑO DE INSTRUCCIÓN

3.4.1 Introducción

En los niveles elementales, los estudios de expresiones algebraicas y de resolución de ecuaciones, incluyen procesos de modelización como método para ayudar a los estudiantes a construir significados para ciertas clases de ecuaciones, de expresiones algebraicas y para las operaciones llevadas a cabo, sobre ellas.

Para analizar las dificultades semánticas y sintácticas de las representaciones no formales frente a la semántica y sintaxis del álgebra formal y después de haber reflexionado en estudios sobre ello, señalamos que en la enseñanza-aprendizaje del álgebra se debe considerar el uso de diferentes fuentes de significado dada las características individuales de la inteligencia humana y de la propia naturaleza matemática.

Este Diseño aborda, como el resto de nuestra investigación, el paso del pensamiento aritmético (lenguaje aritmético) al pensamiento algebraico (lenguaje algebraico).

El diseño que presentamos, con un perfil de enseñanza determinado, está basado en la reflexión hecha en la 1ª Etapa del Diseño General de Investigación que nos ocupa; en concreto, en el análisis que se ha realizado de errores, obtenido a través de los Cuestionarios que se han pasado en diferentes niveles de enseñanza (Primaria, Secundaria y Universitaria), denominados Cuestionarios 1 (anexo 1) y 2 (anexo 2), y en la Revisión Curricular y Bibliográfica, en relación a Expresiones Algebraicas y Ecuaciones lineales sencillas, con el fin de detectar dificultades, obstáculos y errores intrínsecos al inicio de la enseñanza-aprendizaje del Álgebra.

Asimismo la organización de este Diseño está influenciada por el nuevo acercamiento de la profesora investigadora, durante el curso 91-92, a este nivel de escolarización de 7º de E.G.B. (anteriormente ya había impartido clases en el mismo nivel y desarrollado la enseñanza-aprendizaje del Álgebra) donde se realizó la instrucción sin un diseño específicamente preparado para ella, sino siguiendo la planificación y metodología del Centro elegido y con el objetivo de seguir indagando acerca de las causas que originan las dificultades en el inicio del aprendizaje del Álgebra.

Se trata de un diseño dirigido a un grupo de alumnos de 7º durante el curso 92-93 en los que la profesora, al inicio de la Instrucción, entregó un documento de trabajo consistente en cuatro cuadernos individuales, confeccionados para trabajar exclusivamente en clase. Los contenidos que subyacen en él se interpretan desde la acepción de “contenido” (Cañal, 1987), como “conjunto de toda la información que se pone en juego en un proceso de enseñanza-aprendizaje; no constituyen “lo que hay que aprender” sino que tienen un carácter instrumental y son un medio para nuevos aprendizajes:

algunos que son previsibles y figuran como “objetivos”, y otros que no lo son. No se puede perder de vista que hay que asegurar un aprendizaje significativo y para ello el contenido debe ser potencialmente significativo, tanto desde la estructura lógica de la matemática como desde la estructura psicológica del alumno, y éste ha de estar motivado para conectar lo nuevo con lo que ya sabe, con el fin de modificar sus estructuras cognitivas anteriores.

Se han construido los cuatro cuadernos con una serie de actividades en relación a las expresiones algebraicas (cuadernos I y II), y a ecuaciones (cuadernos III y IV), buscando una situación fundamental a partir de la cual se puedan producir otras situaciones didácticas en las que, colocado el alumno, pueda entrar en contacto con el conocimiento que queremos adquiera, interactuar con él y generar estrategias de trabajo que nos permitan analizar la comprensión del conocimiento, así como el proceso de adquisición del mismo. Para esta adquisición del lenguaje algebraico por parte de los alumnos nos parece interesante estudiar una manera diferente de lograrla, generando actividades de los alumnos y observando su funcionamiento. Se preparó un modo de acción para estudiar las actividades de los alumnos en las situaciones planteadas, las preguntas al profesor y las respuestas dadas por el mismo; en fin, lo que es el desarrollo de la unidad de aprendizaje.

Uno de los propósitos fundamentales de una observación de esta clase es, precisamente, la generación de esas estrategias propias, de esos recursos que permiten al alumno enfrentarse a situaciones nuevas e interactuar con ellas, sin necesidad de un entrenamiento específico para cada uno de los tipos que se puedan presentar, y poder analizar las potencialidades y dificultades que aporta el Diseño implementado. Se usa la hipótesis de que el conocimiento adquirido de este modo es más estable por haber sido generado por el propio alumno, en lugar de ser asimilado a través del profesor.

Este Diseño, dentro de una teoría cognitivista del aprendizaje, por tanto, potencia las actividades del alumno, dejando al profesor como un orientador de las mismas. La actuación del profesor se centra en la explicación de los nuevos sistemas de representación (su semántica y su sintaxis), aunque algunas veces los propios alumnos, las descubren.

Actuando así se podrá contribuir a obtener algunos de los objetivos propuestos en el segundo foco de los tres de la investigación global y que corresponde a esta 2ª Etapa, como son: a) valorar las habilidades de carácter operacional y conceptual que muestran los alumnos sobre el lenguaje algebraico y b) valorar la comprensión que muestran sobre los sistemas de representación y c) analizar los diferentes sentidos que atribuyen a las distintas fuentes de significado que se proponen para el Álgebra.

La segunda aplicación del DISEA, curso 95-96, se verificó con un nuevo cuaderno exclusivamente dirigido a expresiones algebraicas.

Los objetivos de la investigación, por otra parte, serán alcanzados también gracias al análisis de otros instrumentos de medida como son el pretest - postest y las entrevistas individuales.

3.4.2 Objetivos

Este diseño se propone desarrollar un aspecto no usual en la introducción al lenguaje algebraico que es el uso de “la letra como objeto geométrico” con significado algebraico.

Se realizó con un enfoque “sintáctico-semántico” apoyándose en los sistemas de representación visual-geométrico y el de la balanza, que actúan en yuxtaposición al sistema de representación formal algebraico.

El objetivo principal de este diseño es disminuir el bloqueo, consecuencia de las dificultades intrínsecas que presenta el aprendizaje del álgebra, y que manifiestan los alumnos a través de errores al enfrentarse por primera vez con el lenguaje algebraico, errores usuales de sintaxis cuando operan con las letras y operaciones algebraicas, errores de traducción de lenguajes, interpretaciones erróneas del significado de expresiones algebraicas dados los diferentes contextos en que ellas aparecen, dificultades de comprensión del signo igual, dificultades en la búsqueda de significados, imposibilidad de la utilización del álgebra para expresar situaciones sencillas.

Se pretende diseñar situaciones más abstractas en lenguajes más asequibles al alumno para conseguir el desarrollo de habilidades sintácticas dando significado a experiencias y operaciones nuevas.

Investigar el conocimiento estructural que tienen los alumnos de las expresiones Algebraicas a través del proceso que usan para simplificar, que causa errores no sistemáticos.

Las experiencias de aprendizaje se diseñan para buscar que los conocimientos se sedimenten a niveles de comprensión, de destrezas y habilidades a través de Sistemas de Representación para las Expresiones Algebraicas y las Ecuaciones. Para ello se sitúa a los alumnos en el uso de distintos sistemas de representación, ya que se sostiene la tesis que el uso de varios registros favorece la comprensión del pensamiento algebraico. La característica básica es que estas representaciones son “autosuficientes” en el sentido que dotan de semántica y sintaxis al pensamiento algebraico. La conexión entre diferentes sistemas de representación ayuda al alumnado a realizar reflexiones metacognitivas y le permite clarificar el concepto que tienen de las letras, expresiones algebraicas en general, y ecuaciones.

Considerando que la comunicación de las matemáticas habrá de hacerse a través del lenguaje visual y el lenguaje formal, se ha pretendido hacer la interconexión entre ellos y se ha introducido un nuevo “elemento de conexión” que va a hacer de enlace en forma de esquema visual y formal que expresa una operación y que se ha denominado “visualización simplificada”, como paso intermedio en estructuras o actividades algebraicas, interpretando las áreas de rectángulos fuentes de significado para las expresiones algebraicas. Se ha pretendido yuxtaponer el lenguaje formal con el lenguaje visual.

Otro aspecto tenido en cuenta es el plantear la enseñanza-aprendizaje de Álgebra en términos de conversión de registros.

También se intenta analizar las potencialidades y dificultades del propio Diseño en términos de metodologías y estrategias de intervención en el aula que permitan profundizar en el rendimiento del alumno, en su conocimiento constructual, en sus actitudes y específicamente en el análisis de elementos cognitivos, específicamente en habilidades cognitivas de carácter operacional y de carácter conceptual de las expresiones algebraicas y ecuaciones, a través del análisis de su dominio en operatividad básica, conversión entre los distintos sistemas de representación y transformaciones en el tratamiento de cada uno de ellos.

En la reorganización del Diseño para expresiones algebraicas, DISEA, realizado para la última aplicación del mismo, se ha aspirado además, a observar la relevancia o no que dan los alumnos al uso de paréntesis, así como, a analizar si alumnos hábiles en matemáticas cometen o no frecuentes incorrecciones en la designación y denotación de paréntesis, y a averiguar si ellos consideran el uso de paréntesis como opcional. También a cómo abordan la sustitución formal en contextos aditivos y multiplicativos.

En definitiva, se puede resumir en que se pretende analizar las dificultades relacionadas con la comprensión e interpretación de la naturaleza y significado de las letras, de la naturaleza de las respuestas en álgebra y del uso de fórmulas y reglas de procedimiento.

3.4.3 El diseño como elemento de instrucción

La primera consideración que se ha de hacer es que, a efectos de comprensión y claridad de este texto, vamos a distinguir una primera parte para explicitar el Diseño de Instrucción para el aprendizaje de las Expresiones Algebraicas (DISEA) y una segunda, para los aspectos relativos al Diseño de Instrucción para el aprendizaje de las Ecuaciones (DISEC).

En esta etapa, el método de investigación es eminentemente cualitativo, siendo la observación directa la técnica fundamental. Las peculiaridades de cada niño, sus ritmos de aprendizaje y las dificultades que van encontrando son datos que completan el análisis posterior de los cuadernos de los alumnos.

El trabajo de clase (fichas de trabajo de los cuadernos) se ha preparado para que se haga individualmente.

El contenido de las distintas sesiones en el desarrollo de la instrucción fue como sigue.

3.4.3.1 El diseño de instrucción para el aprendizaje de las Expresiones Algebraicas: DISEA.

Para la primera aplicación realizada en un grupo de 7º en el curso 1992-93 en el Centro nº 1, se diseñaron dos cuadernos de 20 fichas cada uno y para la segunda realizada en el curso 1995-96 en un grupo de 8º del Centro nº 3, sólo un cuaderno de 41 fichas.

El primer DISEA, como hemos dicho, consta de dos cuadernos que hemos codificado con I y II, relativos a Expresiones Algebraicas. Ambos están formados por una serie de fichas que agrupan las actividades de los alumnos (una o más en cada ficha) (Anexo 10, partes 1ª y 2ª).

Estas fichas abarcan diferentes aspectos de los contenidos algebraicos previstos: Expresiones numéricas y algebraicas, operaciones con expresiones numéricas y algebraicas y sustitución formal en contextos aditivos y multiplicativos, y están organizados en torno a las categorías de contenido algebraico (C. C. A.) para expresiones algebraicas:

- Uso e interpretación de letras (U.L.).
- Uso e interpretación de signos (U.S.).
- Representaciones semióticas (R.S.).
- Operatividad Básica (O.B.).
- Reconocimiento de estructuras (R.E.)
- Sustitución formal (S.F.).

El primero (I) contiene 20 fichas, 15 para trabajar en el aula y 5 que se proponen de refuerzo.

Las cuatro fichas primeras (1, 2, 3 y 4) tienen como finalidad la introducción al Álgebra, motivar su estudio y justificarla, planteándoles que las expresiones algebraicas sirven para representar números desconocidos, para simplificar, simbolizar, representar fórmulas, resolver problemas aritméticos por medio de ecuaciones, etc., y se hace mediante el acercamiento a contextos que son familiares a los alumnos.

La ficha 1, plantea el uso de una letra para expresar una cantidad desconocida, concretamente el precio de un cuaderno en una supuesta hoja de anotación de gastos de un niño. Previamente se ha motivado la necesidad de usar “símbolos” distintos de los números.

La ficha 2, plantea el uso de letras (más de una) en dos contextos familiares como son los dibujos del plano de una clase y el de una parte de un piso.

Las fichas 3 y 4, plantean un sencillo esquema “situación - representación”, para hacer conversión de registros de expresiones habituales simples a representaciones de las mismas con letras y números (fichas 3 y 4), y, de manera inversa, inventarse historias - enunciado para expresiones dadas (ficha 4).

En las fichas 5, 6 y 7, se comienza a relacionar ya “el Álgebra” (...letras...) con la Aritmética (...números...) y se “introduce” la Geometría

(...representación de rectángulos…) y se inicia la introducción del rectángulo como unidad fundamental en el tipo de representaciones que se usarán a lo largo de toda la experiencia.

Se establecieron dos “convenios” de “interpretación”: para un número sólo (producto del mismo por la unidad: 3 = 3 . 1 = 1 . 3), y, para una letra sola (producto de la letra por la unidad: x = x . 1 = 1 . x), en la ficha 5, y, otro, de “representación”, a través de un rectángulo, donde las dimensiones van a estar representadas por elementos numéricos, literales o alfanuméricos y se incluyó la representación de términos numéricos, alfanuméricos (fichas 6 y 7), presentando de manera especial el reconocimiento de las diferencias entre la representación de “4.b” y “4 + b” por ejemplo (ficha 7), por la repercusión que tiene para el trabajo posterior, esto es, el reconocimiento del rectángulo como expresión de un término de una expresión algebraica.

En orden a hacer la introducción del uso del lenguaje algebraico exclusivamente por ellos mismos, sin ninguna orientación como se había hecho en las fichas anteriores, se plantearon en las fichas 8 y 9, por una parte enunciados en distintos contextos familiares (caramelos, días de asistencia a clase, boliches y cantidades de dinero, además de un cuadrado para calcular su perímetro y su área), para que ellos expresaran las relaciones que se pedían (ficha 8), y por otra, relaciones sin contexto pero haciendo uso de los términos “doble”, “triple”, “cuadrado”, “nº anterior”, “nº siguiente”, incluyendo las operaciones de sumar, restar, multiplicar y potencia (cuadrada), con variables en todos los enunciados (ficha 9).

La ficha 10, plantea la representación de binomios con rectángulos, para que los alumnos vayan detectando la necesidad de usar tantos rectángulos como términos tenga una expresión algebraica, para representarla correctamente en el sistema de representación visual geométrico, respetando la unidad fundamental del rectángulo aceptada por convenio. Los términos de los binomios tienen en algunos casos factores comunes (2 x + 2; 2 x + 6; 6 . y + 3) y en otros, no (3 + 4 . y).

Las fichas siguientes 11 y 12, son relativas a particularizar en la sustitución formal mediante el cálculo del valor numérico de expresiones contextualizadas (ficha 11) o no (ficha 12), en concreto en precio de kilos de frutas.

La ficha 13, después de recordar un modelo, permite, de nuevo trabajar la representación de binomios sencillos.

La ficha 14, por su parte, introduce un coeficiente negativo en la expresión de binomios, que cuando se exprese en el sistema que se venía trabajando va a representarse mediante “tachar”, “colorear”, etc.

La ficha 15, se refiere a una actividad de representación de ejercicios de su libro de texto, no utilizado hasta ahora.

Las cinco fichas de “actividades de refuerzo” están formadas por 10 actividades en total. Son prácticamente un repaso de lo trabajado antes.

La primera (actividades 1, 2 y 3), tiene relación directa, en su primera parte, con el grupo de fichas del cuaderno referentes a representar situaciones dadas en lenguaje habitual (actividad 1), y, dadas expresiones algebraicas, inventar historias (actividad 2), y, en su última parte, comienza la representación con rectángulos (actividad 3) de una sola letra o un solo número.

La segunda (actividades 4, 5 y 6), contiene una actividad de representación de expresiones de monomios, productos de letras (a . b), o números (3.4) - actividad 4- , y de binomios (x + y) - actividad 5-, y una segunda parte, de cálculo de valor numérico sin contextualizar (actividad 6).

En la tercera (actividades 7 y 8), se propone la representación de binomios formados por un número más un producto de una letra por un número (3 + 2 . x; 3 . x + 4; 3 . x + 6), actividad 7, y, en la actividad 8 un binomio donde aparece un coeficiente negativo (3 . x - 3).

Las fichas 4 y 5, se refieren a “traducción de lenguajes”, desde el habitual al algebraico. La cuatro, actividad 9, con expresiones contextualizadas en diferentes contextos: caramelos, área de terrenos y de un cuadrado, edades, dinero, número de ejercicios hechos en clase. En ella, los alumnos han de elegir las incógnitas a utilizar. Sin embargo, en la actividad 10 de la ficha 5 a los alumnos se les proporciona las variables que han de utilizar en sus expresiones.

El segundo cuaderno (II) consta de 20 fichas también formadas por una o más actividades.

Se plantea en principio traducción de lenguajes. Se comienza (ficha **1**) con la conversión del lenguaje habitual al algebraico a través del aritmético (actividad 1).

Se intenta que los alumnos se familiaricen con el término “cualquier”, “cualquiera” y así se plantean ejercicios similares a algunos del cuaderno anterior (doble de m, triple de la diferencia entre b y c) pero con la diferencia que los términos doble, triple, cuadrado, etc., no están ahora en relación con una letra o número determinado sino con cualquier letra o número (actividad 2: “Escribir el doble, triple, el cuadrado, la mitad, la tercera parte, el doble menos cuatro, etc., de cualquier número”).

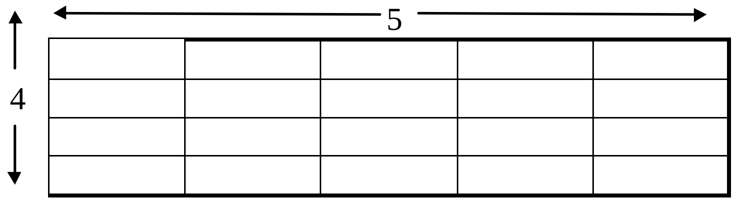
Se organizan las fichas siguientes de forma que relacionen los lenguajes anteriores, habitual y aritmético, con el geométrico como paso para llegar al algebraico (fichas 2, 3 y 4). Se comienza por representar con los rectángulos como unidades, distintas expresiones algebraicas. En uno de los enunciados verbales se utiliza los términos gramaticales “exceda a” y “difieren en” en lugar de “mayor que” o “se diferencian en”; concretamente en la ficha 3, actividad 1: a) Expresar la base y la altura de cualquier rectángulo cuya base exceda en 5 unidades a la altura; b) la base y la altura difieren en 10 unidades. Se hace, luego, tratamiento de expresiones singulares, al igual que con un único término se hacían en el cuaderno primero “4 . b” y “4 + b”, son aquí

“2.a + b” y “2. (a + b)” de la ficha 4.

Posteriormente y para concluir este primer bloque de fichas, se trabaja en la representación de todas las maneras posibles, por ejemplo, “2 . a + 3 . a + 4 . a” ó “2 . a + 3 . b”.

El último bloque de fichas se puede manifestar que fundamentalmente se dedica al trabajo de la propiedad distributiva, aunque para facilitarlo se introducen algunas actividades que favorecen la comprensión.

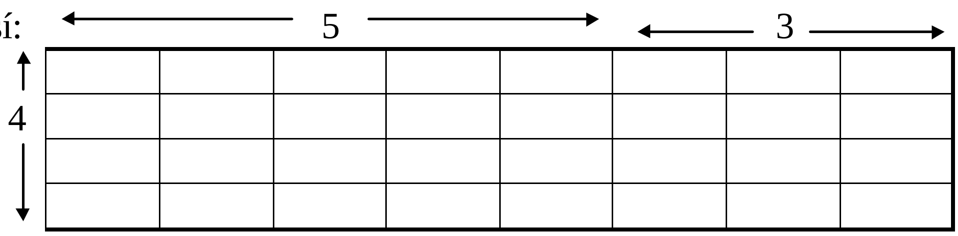
A través de cuadricular los rectángulos que se utilizan, se comienza explícitamente a relacionar cada término con el área del rectángulo que lo representa, presentando en la ficha un ejemplo con un rectángulo cuyas dimensiones son dadas unitariamente (entendiendo por ello un solo elemento para expresar la base y uno solo también para expresar la altura), ficha 5,



y a continuación se solicita representen “a x 4” y “a x b”.

Aparte de este modelo se presenta otro, también con un rectángulo cuadriculado donde una de las dimensiones está subdividida en dos (ficha 6), también los datos de las dimensiones son números y se introduce nuestro “esquema” (cuadro de doble entrada) que denominamos de “visualización simplificada”, que nos va a permitir relacionar el área del rectángulo (como suma de áreas de subrectángulos) con el desarrollo de la “propiedad distributiva”, haciendo uso de la traducción de lenguajes desde el geométrico al algebraico, mediante el esquema que presentamos (ficha 6)

Así:



lo representamos con un cuadro de doble entrada:

(visualización simplificada)

x	5	3
4	4 x 5	4 x 3

Se trabaja la propiedad distributiva por la izquierda (fichas 7 y 8), por la derecha (ficha 9), y también la doble distributiva (ficha 10). Se trata sencillamente de ir dando las dimensiones del rectángulo subdivididas o no, para, mediante el modelo de cálculo del área del rectángulo total, realizar el desarrollo de la propiedad distributiva; los alumnos han de representar las expresiones dadas con rectángulos y con el esquema de visualización simplificada, incluso se llegó a trabajar el producto de una suma de tres términos por una de dos (ficha 11: (a + b + 2) . (3 + c)). Es esencial indicar que con este planteamiento no hay distinción en que los datos de las dimensiones estén dados por números o por letras y que la propiedad distributiva se plantee por la izquierda o por la derecha. Avanzando en esta línea de aplicación se planteó el producto de dos expresiones de monomios con el cuadro de doble entrada, ya que la única distinción con el proceso anterior era descomponer la expresión del monomio en sumandos, así 2a pasaría a representarse como a + a y 3b como b + b+ b, para concluir que siempre que se hace un producto de este tipo de expresiones, el resultado final está formado por una expresión cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes y la parte literal el producto de las letras, sean iguales o distintas (ficha 12).

La representación por medio de rectángulos se amplió al trabajo con expresiones elevadas al cuadrado que se tituló “trabajar con cuadrados”. En la globalidad de este diseño nos limitamos al trabajo con una y dos dimensiones, tanto de números exclusivamente (ficha 13, actividad 1), como de cuadrados de la suma (ficha 13, actividades 2 y 3) para hacer un nuevo hincapié en la singularidad de “$3 + a^2$” y “$(3 + a)^2$” .

En la ficha 14, se siguen representando cuadrados de sumas: $(3 + 4)^2$ y $(a + b)^2$.

En la ficha 15, se indica la expresión algebraica de $(a + b)^2$ para que los alumnos representen con el sistema de representación geométrica de los rectángulos y con el esquema de la visualización simplificada:

Sistema de Representación Geométrico	Esquema	Expresión algebraica
		$(a + b)^2 = (a + b)\ (a + b)$

Para terminar esta ficha 15 se plantea la comparación de dos expresiones para que verifiquen su igualdad o no mediante una representación:

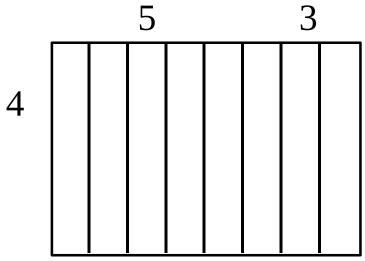
¿Es igual $(a + b)^2$ que a (b + a) + b (b + a)? (ficha 15, actividad 2).

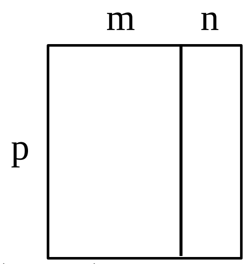
En la ficha 16, se plantea una suma de cuadrados ($a^2 + b^2$) para que también sea comparada con el cuadrado de la suma: $(a + b)^2$ (actividad 1).

En la actividad 2 de la misma ficha, se vuelve a representar el $(a + b)^2$ y se pide se ponga nombres a todas las zonas que aparezcan, sean cuadrados o rectángulos, con el fin de llegar a identificar, a través de las áreas de las zonas Ambos, relativos a ecuaciones, están formados por una serie de fichas que agrupan las actividades de los alumnos (una o más en cada ficha).
separadas, el desarrollo del cuadrado de la suma $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2$ a.b.

En la ficha 17, se dan representadas varias expresiones de propiedades distributivas en sendos rectángulos; a aquéllos que tienen dimensiones numéricas se les ha “cuadriculado” para que observen claramente las unidades contenidas y luego paralelo a ellos, expresiones con letras.

Así: $(5 + 3) . 4$ $(m + n). p$

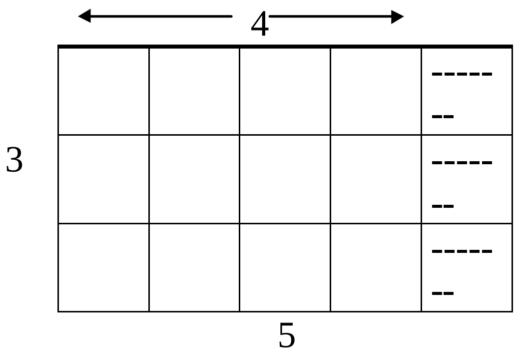


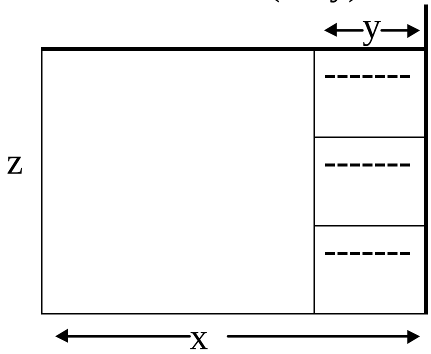


$(5 + 3) . 4 = 5 . 4 + 3 . 4$ $(m + n) p = m . p + n . p$

En la ficha 18, se plantea también la propiedad distributiva por la izquierda y por la derecha, siendo en este caso el segundo término del binomio de paréntesis, negativo.

Así: $(5 - 4) 3$ $(x - y) . z$





$(5 - 4) . 3 = 5 . 3 - 4 . 3$ $(x - y) . z = x . z - y . z$

Se especifica expresamente en la ficha que esto es precisamente la propiedad distributiva.

Las dos últimas fichas 19 y 20, nos permiten hacer el trabajo de "sacar factor común". Para ello se deja claro primero que la propiedad distributiva del producto respecto a la suma transforma productos en sumas y restas, pero no cualquier suma o diferencia se puede transformar en producto (ficha 19). En la ficha 20 se trabaja expresamente el sacar factor común a través de representar $2 . x + 2 . y$, y luego, deducir la propiedad distributiva ($2 . x + 2 . y = 2 . (x + y)$; y lo mismo para $a^2 + a$ que se transforma en $a^2 + a . 1 = a (a + 1)$.

El DISEA se ha reorganizado para su segunda aplicación en el curso 1995-96 y también comprende los diferentes aspectos de los contenidos algebraicos previstos así como su organización está en torno a las categorías de contenido algebraico (C. C. A.), pero de manera especial se incide en: uso, interpretación de las letras, uso e interpretación del paréntesis, operatividad básica con expresiones alfanuméricas y la sustitución formal, y representaciones semióticas, todo ello en contextos aditivos y multiplicativos.

La ficha 1 es de operatividad básica con números donde interviene el paréntesis en situaciones aditivas y multiplicativas.

Las fichas 2 y 3 son de recuerdo para estos alumnos, de la significación del Álgebra y en concreto para el uso de las letras y las expresiones algebraicas para representar números desconocidos, simplificar, simbolizar. La ficha 2 pretende sencillamente el uso de una letra que exprese el precio de un cuaderno y la ficha 3, la utilización de letras para expresar medidas de longitud en contextos de un plano de una clase y un plano de una parte de un piso.

Las fichas 4, 5, 6 y 7 presentan el esquema "situación - representación" que permite la traducción de enunciados simples expresados en lenguaje habitual a representaciones con letras y números (4, 5, 6 y 7) y de manera inversa, inventar historias- enunciados para expresiones dadas (fichas 5 y 6).

La conversión del lenguaje habitual al lenguaje algebraico se trabaja mediante el nuevo bloque de fichas 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14. Las actividades de las fichas 8, 9 y 10 y la primera parte de la ficha 11 muestran un exclusivo contexto aritmético y el resto (11, 2ª parte, 12, 13 y 14), sí están contextualizadas en contextos muy familiares a los escolares.

La ficha 8 simplemente da enunciado verbal y no indica símbolo numérico alguno. Hace referencia a número, número cualquiera, números distintos, números distintos cualesquiera. Aparecen también los términos gramaticales doble, triplo, mitad.

La ficha 9 ya indica variables concretas (m, z, x, f, etc.) a utilizar al hacer la traducción. También se utilizan los vocablos doble, triple, siguiente anterior, posterior, cuadrado. Se introducen expresiones que implican el uso obligado, no opcional, de paréntesis, por ejemplo "el cuadrado de x más 6, todo por 7 más n"; así como expresiones "x al cuadrado más y por 7 más m" que permiten usar o no el paréntesis.

Todos los apartados de la ficha 10 implican el uso obligado de paréntesis y da variables concretas a utilizar.

La ficha 11 introduce enunciados que dan lugar a "ecuaciones" al convertirlos en otros registros, y siempre se expresa en el texto, "es igual a" no con el símbolo correspondiente (=) : apartados a, b, c y d.

La segunda parte de esta ficha (11), apartados e, f, g, h, i, ya son situaciones contextualizadas: pesos de frutas; precios de kg de frutas, de cintas de vídeo, de una pelota y superficies de terrenos.

La ficha 12 sigue con enunciados contextualizados y entre ellos se sitúa el siguiente, que obliga a usar paréntesis: tres hermanos tienen unas cantidades de dinero. María tiene 50 pesetas más que Miguel y Pablo tiene el doble que los otros dos juntos".

La ficha 13, permite también formar ecuaciones. Aquí la expresión de la equivalencia del "=" se expresa de manera variada ("es", "es igual a"), incluso sin hacer alusión directa al mismo, como es el caso del enunciado: "la suma del área de un rectángulo con la de otro cuya área es el doble de la del primero y juntas miden 24 centímetros cuadrados".

En esta ficha 13 hay una segunda actividad que conduce a expresiones algebraicas abiertas al traducir la situaciones, sin embargo puede predisponer al alumno a “resolverlas” como si se tratase de ecuaciones: “¿cómo expresarías con signos, letras y números las expresiones siguientes:

- apartado b) el dueño de un estanco vende 135 periódicos cada día, ¿cómo expresarías el número total de periódicos vendidos en dos semanas (14 días).

- apartado c) la entrada de un cine vale 175 pesetas, ¿cómo expresarías el gasto de un niño que ha ido 5 veces a ese cine?

No se solicita valores pero puede orientar el enunciado a obtenerlos.

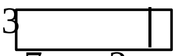
En la ficha 14, se integra ya una variable determinada “x”, que se da como dato en un enunciado contextualizado en edades, cuya traducción al lenguaje algebraico supone el uso obligado de paréntesis. Se usa el vocablo “década”.

La ficha 15, es relativa a operatividad básica con símbolos alfanuméricos, utilizando paréntesis en situaciones aditivas y multiplicativas. Aquí se incluyen expresiones abiertas y además se solicita la simplificación de las expresiones resultantes de la realización de las operaciones indicadas.

Las fichas 16 y 17, permiten analizar la tendencia de los alumnos a reconocer estructuras aritméticas en estructuras algebraicas, mediante la propuesta de cálculo de perímetros.

Como se observa se han planteado ítems que miden la habilidad para representar en el lenguaje simbólico, elementos que figuran dentro de enunciados verbales en distintos contextos (situación real, situación geométrica mediante un dibujo, situación geométrica mediante un enunciado verbal).

La ficha 16, primero recuerda el concepto de perímetro y su cálculo y se acompaña con un ejemplo, para posteriormente solicitar el cálculo del perímetro de varias figuras dibujadas con distintas características: polígono abierto de n lados iguales de longitud 2, polígono en que la longitud de cada uno de los lados viene expresada con un número solo o con una sola letra y polígonos en que una de las dimensiones está subdividida en dos y todas las longitudes están expresadas por letras.

La ficha 17, es similar, añadiendo en un apartado un segmento interior que no afecta al cálculo del perímetro: “calcula el perímetro de 3 

7 2

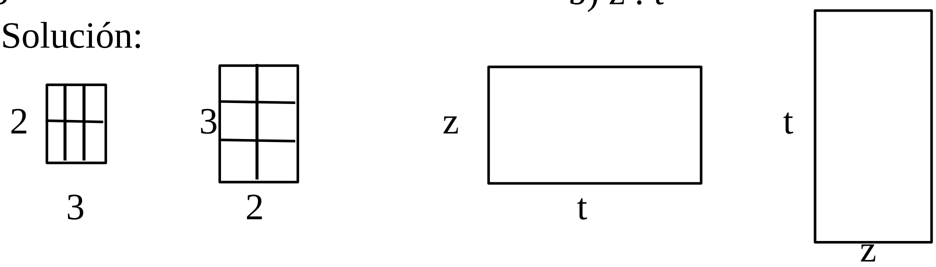
Las fichas 18, 19, 20, 21, 22, 23 y 24, plantean relacionar el álgebra con la aritmética y la geometría.

Las fichas 18 y 19, expresan los convenios de “interpretación” para un número solo (3 = 3 . 1 = 1 . 3), una letra sola (x = x . 1 = 1 . x), como producto de ellos por la unidad, y de “representación” de una letra sola o número solo, por un rectángulo donde las dimensiones van a ser los factores (3 y 1; x y 1), anteriores.

La ficha 20, plantea ya, que cualquier término de grado dos (no necesariamente un factor es la unidad) puede ser expresado por un rectángulo.

a) 2 . 3 b) z . t

Solución:



Se presenta también en esta ficha 20, el caso particular de “4 . b” y “4 + b”, que evidentemente están representadas por uno y dos rectángulos, respectivamente.

La ficha 21, muestra la representación de binomios donde existen (“2x + 2”, “2x + 6”), o no (“3 + 4y”), factores comunes.

En el primer caso, la ficha muestra posibles soluciones de representación.

La ficha 22, sigue representando binomios con las mismas características que la ficha anterior con el objetivo, ya, de presentar aquellos binomios que (por tener factores comunes) pueden ser representados por un solo rectángulo subdividido en dos, y otro que (al no tener factores comunes), no puede hacerse.

En la ficha 23, se definen los casos en que una suma o una diferencia (binomio) se puede transformar en un producto (por tener “algo” en común), en este caso y sólo en él se hace uso de paréntesis en estas transformaciones. Se hace simultáneamente con sistemas de representación visual geométrico y haciendo uso de lenguaje numérico o algebraico, según proceda.

La ficha 24, es un ejercicio específico para sacar factor común sin ninguna orientación para el alumno. La ficha 25 (con símbolos exclusivamente numéricos) muestra un recuerdo de la expresión de un producto de dos números por medio de un rectángulo (cuadriculado) cuyas dimensiones son los factores del producto y luego se plantea una actividad con dos ejemplos para realizar.

La ficha 26, muestra figuras con dimensiones subdivididas o no, para calcular sus áreas. Como se observa, se intenta de nuevo, al igual que con los perímetros anteriormente, el reconocimiento de referencia a estructuras aritméticas, al aparecer nuevas estructuras de tipo algebraico.

La ficha 27, vuelve a mostrar un rectángulo cuadriculado pero una de las dimensiones, en este caso, está subdividida en dos. A continuación se introduce el esquema planteado como de conexión entre el sistema de representación geométrico y el sistema de representación formal, formado por el cuadro de doble entrada de la visualización simplificada.

Es una representación visual que puede ser útil para la generalización de la propiedad distributiva.

La ficha 28, muestra una distribución en paralelo de expresiones de la propiedad distributiva por la derecha y por la izquierda, con datos numéricos y con letras, respectivamente. Representados todos en el S.R.V.G. con rectángulos, indicando todas y cada una de las unidades en el caso de dimensiones expresadas con números. El conjunto de fichas desde la 29 a la 33, muestra una distribución, en general, en tres columnas, que van a configurar la representación geométrica, la visualización simplificada y la expresión algebraica del área de un rectángulo. En todas aparece una dimensión al menos subdividida, para que intervenga el paréntesis.

La ficha 29, muestra un ejemplo de las tres situaciones del área de un rectángulo que se considera, y, a partir de ahí, se solicitan actividades que dejan dos situaciones ausentes para que las complete el alumno, incluso expresiones algebraicas donde aparecen expresiones con factores comunes no explícitos, por ejemplo “4 a + 8”.

En la ficha 30, se vuelve a dar un modelo completo y se solicita representaciones, en este caso las tres estudiadas están ausentes.

En la ficha 31, se presentan sendos ejemplos también con un modelo, pero los alumnos han de hacer al menos dos representaciones. Sin embargo, la característica de esta ficha son las expresiones dadas: “4 x 5 + b”; “a x (5 + b)”; “a x (c + d)”; “(3 + a) b”, que como se observa no plantean la misma dificultad, dada la posición de los números y las letras, en las expresiones.

En la ficha 32, se avanza, presentando una representación de un rectángulo cuyas dos dimensiones están subdivididas, con lo cual la expresión algebraica a la que va a dar lugar es la “doble distributiva”, que se adjunta con el esquema de la visualización simplificada y con la expresión algebraica.

Posteriormente se solicita una actividad de los alumnos de hacer la representación geométrica y el esquema de visualización simplificada de una expresión de doble distributiva planteada.

La ficha 33, permite seguir trabajando la propiedad distributiva; la actividad 1 se refiere a realizar la representación con el registro del sistema de representación geométrico y la visualización simplificada, y la actividad 2ª, no se dirige al alumno hacia una representación específica, sino que se deja la respuesta a su libre elección.

La ficha 34, la forma una actividad cuyos contextos son el perímetro y el área de cuadrados y rectángulos donde las dimensiones se dan con unas letras concretas. Los dos últimos apartados contienen en su enunciado los vocablos “exceda en” y “difieren en”, pero siempre en contexto de perímetro y área.

La ficha 35 se ocupa de desarrollar y reducir los resultados de la propiedad distributiva por la izquierda (apartados c, d, e), por la derecha (apartados a y b) y el último apartado (f) es de doble distributiva, donde los dos binomios que se multiplican son iguales [(x + y) (x + y)]. Las fichas 36, 37, 38 y 39, son de sustitución formal.

La ficha 36 se refiere a sustitución de valores de las letras “a” y “b” en expresiones sencillas con y sin paréntesis, expresando o no, la propiedad distributiva.

En la ficha 37 se plantea la sustitución con un enunciado no habitual, Por ejemplo en la actividad 1: a) ¿en qué se transforma “a + 4” si a = 2?; d) ¿en qué se transforma “5b+2 a, si a = 3 y b = 4?, y en la actividad 2:

“Rellena los vacíos como se indica en el primer apartado de cada columna:

x → x + 3	x → 7x	x → 5 x + 3
n →	n →	n →
b + 2 →	b + 2 →	b + 2 →

En la ficha 38 aparecen situaciones similares, también de sustitución, pero planteadas de otra manera. A saber:

En la actividad 1: a) Si a = 2b, ¿en qué se transforma 5 a + 3?
b) Si a = b + 3, ¿en qué se transforma 5 a + 3 b?
c) Si a = 3, ¿en qué se transforma 5 a - 3?

Sin embargo, en la actividad 2 se trata de hallar el valor de variables en expresiones donde se conoce el valor de otras variables o relaciones entre ellas, dando estructuras diferentes a las anteriores:

a) Hallar “u”, si “u = v + 3” y “v = 1”

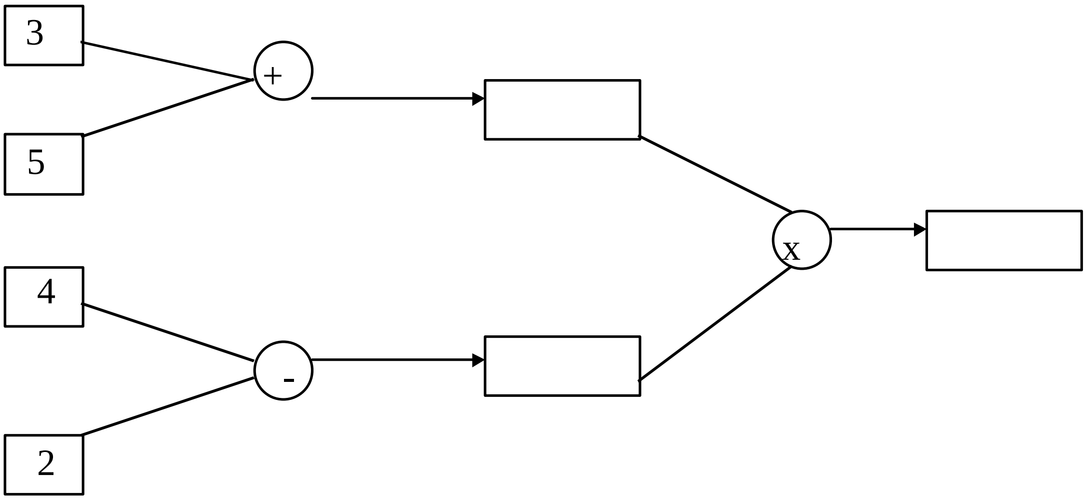
b) Hallar “r”, si “r =s + t” y “r + s + t = 30”.

La obtención de valores se plantean también en la ficha 39, donde no se han de hacer sustituciones sino a la inversa, se ha de reconocer sustituciones en equivalencias ya establecidas. Así se trata, por ejemplo, de reconocer sustituciones hechas en estos pares de expresiones, situadas en dos columnas correspondientes A y B. Por ejemplo:

A	B
a) 5 x - 17	5 (y + 1) - 17
h) r - (z + t)	a - b - c
k) x (y + 2t)	x y + x z

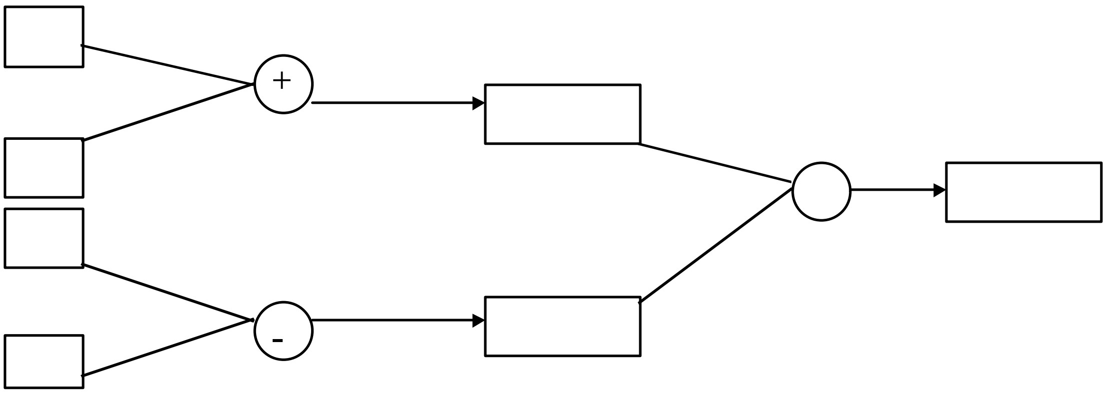
Las fichas 40 y 41, muestran un nuevo tipo de diagrama, no lineal, para hacer cálculos de operatividad básica con números y letras, que pueden ser efectivos para posteriormente esquematizar ecuaciones y que en este momento se limitan a acoger situaciones de sustitución:

1. Completa los siguientes diagramas:



Como es evidente los cuadrados representados pueden ser rellenos por letras exclusivamente, números y letras e incluso expresiones no monomiales.

En el caso concreto se han usado otros grupos de pares de números [(a,4) y (b,3), (a,b) y (a,b)], en la ficha 40, donde se solicita al final cuál es el resultado de “(a + b) (a - b)”.



En la ficha 41, como continuación de la anterior aparece: ¿cuál sería el resultado de “(a + b) (a - b)”, si “a = x^2 “ y “b = 2 y”?, donde se plantea hacer previamente una sustitución antes del producto. Se proporciona la representación de un diagrama para que se indiquen en él las operaciones y el resultado anterior.

3.4.3.2 El diseño de instrucción para el aprendizaje de las ecuaciones lineales con una incógnita: DISEC

Al igual que el primer DISEA, el diseño de instrucción para el aprendizaje de las ecuaciones lineales con una incógnita, que denominamos DISEC, se aplicó al mismo grupo de alumnos de 7º en el curso 92-93 y se diseñaron dos cuadernos de 24 y 9 fichas, respectivamente, que agrupan las actividades (una o varias) en cada ficha (anexo 11, partes 1ª y 2ª).

Estas fichas comprenden diferentes aspectos de los contenidos algebraicos previstos para las ecuaciones:

a) Plantear ecuaciones en diferentes registros.

b) Resolución de ecuaciones dadas en diferentes registros.

c) Plantear y resolver ecuaciones en problemas de enunciado verbal, y están organizados en torno a las categorías de contenido algebraico (C. C. A.) para el planteo y resolución de ecuaciones con una incógnita:

- Uso e interpretación de los signos y las letras (U.S.L).
- Representaciones semióticas (R.S.).
- Procedimientos de resolución de ecuaciones lineales con una incógnita.
- Reconocimiento e interpretación de estructuras.

Consta, como hemos indicado, de dos cuadernos que hemos codificado con III y IV, por aplicarse en el aula posteriormente a los I y II del DISEA.

El primero, III, contiene 24 fichas de representaciones semióticas, uso e interpretación de los signos y letras y reconocimiento de estructuras, 14 para trabajar con el registro de la balanza y las restantes, 10, con el sistema de representación geométrico, utilizado ya en el diseño de las expresiones algebraicas (DISEA).

La ficha 1, presenta el registro de la balanza y la utilización que se va a hacer de ella para representar la ecuación. La igualdad de la ecuación va a estar representada por la balanza en equilibrio. En cada uno de los platillos se representará el contenido de cada uno de los miembros de la ecuación.

Las fichas 2, 3, 4, 5 y 6, presentan las actividades con tres columnas en las que la primera expresa un enunciado verbal, la segunda la representación de la balanza y la tercera se usa para expresar igualdades numéricas, que representen la situación de los pesos en los platillos (con números, en las fichas 2, 3, 4 y 5, y, con la letra “x” en la ficha 6).

En la ficha 2 se presenta en la actividad, una balanza en equilibrio para su observación y se solicita que los alumnos escriban la igualdad numérica que corresponde a lo representado.

En la actividad 2 de la misma ficha, se presenta una balanza que no está en equilibrio y una igualdad numérica con un sumando desconocido que se enuncia como “peso a añadir para que se equilibre la balanza” y que los alumnos han de colocar.

En la ficha 3, actividad 1, se expresa una situación de equilibrio sin explicitarla, sino dando el valor de las pesas y se pregunta “cómo se encuentra la balanza”. En la segunda columna se solicita la representación de la situación indicada en el enunciado y también, en la tercera columna, que expresen la igualdad numérica.

En la actividad 2 de la misma ficha, por el contrario, los alumnos basándose en un dibujo de la balanza en equilibrio y con un “peso” ausente, han de deducir el enunciado verbal y han de completar asimismo la igualdad numérica.

En la ficha 4, actividad 1, se plantea la ley de monotonía de la suma a través de añadir y quitar el mismo peso a ambos platillos de la balanza. También los estudiantes han de completar el dibujo y expresar numéricamente la igualdad planteada, así como las dos igualdades que han resultado de la aplicación de la ley.

La actividad 2, se dirige a la observación de una balanza en equilibrio y se pregunta qué ocurre en el caso de cambiar los platillos entre sí. En la tercera columna han de expresar las igualdades numéricas original y transformada.

En la ficha 5, actividad 1, se trabaja la ley de monotonía del producto en tanto que se solicita añadir la mitad y el doble de los pesos que existen ya en una balanza en equilibrio que aparece. También aquí se pide establezcan las expresiones numéricas de las situaciones obtenidas.

En la actividad 2 de esta ficha se solicita la observación de una nueva situación en tanto que no se representan pesas en los platillos sino objetos (botellas que se indica pesan todas lo mismo y otros objetos también todos con la misma forma y tamaño). Una característica es que no se pone el mismo número de botellas ni de los otros objetos en cada uno de los platillos. Se solicita expresen la situación de la balanza.

En la ficha 6, actividad 1, se da por hecho que la balanza está equilibrada y contiene su representación, un saco en un platillo, y una pesa valorada, en el otro. Se indica el uso de la letra “x” para el peso del saco y se solicita la expresión de la situación indicada.

La actividad 2 de la misma ficha consiste en inventar totalmente una situación semejante a la de la actividad anterior.

Las fichas 7, 8, 9, 10, 11 y 12, se refieren a la conversión de registros desde el lenguaje habitual al de la balanza y al formal. Todos los enunciados están contextualizados. Hay que indicar que en todas las actividades se da una representación de la balanza con los dos platillos vacíos y está dibujado el signo “=”. En el enunciado se utilizan distintas expresiones para la igualdad: “es”, “es igual a”, “valen”, “pesan”.

En todas las actividades de las fichas siguientes, A, B, C y D van a representar número de kilos.

En la ficha 7, actividad 1, la ecuación resultante es de la forma: A + x = B, B >A; “x” expresa el peso de una lata de pintura.

En la actividad 2, la ecuación resultante es de la forma: A + x = B + C, B + C > A y “x” representa el peso de una bolsa de manzanas.

En la ficha 8, actividad 1, la ecuación resultante es de la forma: A x = B, B >A y “x” representa el peso de un paquete de cartulinas.

En la actividad 2, la ecuación resultante es de la forma: A x + B = C, C >B y “x” representa al peso de un libro. Se utiliza el vocablo “triplo”.

En la ficha 9, actividad 1, la ecuación resultante es de la misma forma que la anterior: A x + B = C, C >B y “x” representa al peso de una barra de metal.

En la actividad 2, sin embargo, la ecuación resultante es de la forma: A x = B, B =A y “x” representa el peso de una bolsa de pastas de chocolate.

En la ficha 10, actividad 1, la ecuación resultante es de la forma: x + A = B, B >A y “x” representa el peso de una enciclopedia. Se utiliza el vocablo “incrementado”.

En la actividad 2, la ecuación resultante es de la forma: A x + B = C x + D, C >A, B >D y “x” representa el peso de un lote de libros.

La ficha 11, actividad 1, la ecuación resultante es de la forma: A x + B = C x, C >A y “x” representa el peso de un bolígrafo. Se utiliza el vocablo doble.

La actividad 2, indica el uso del símbolo “o” para representar el número de balones. La ecuación resultante es de la forma: A x = B, B =A y “x” representa el número de balones. Se utiliza el vocablo doble.

En la ficha 12, actividad 1, la ecuación resultante es de la forma: A x + B = C, C >B y “x” representa el peso de una jarra.

En la actividad 2 la ecuación resultante es de la forma: A x = B, B =A y “x” representa el peso de un pin.

La ficha 13 muestra una nueva conversión de registros. En este caso desde representaciones en la balanza a la representación formal. Los alumnos han de elegir la variable que quieren utilizar. Las ecuaciones a que dan lugar las representaciones son: A x = B x + C, A >B y C = A - B (apartado a), A x + B = C x, C > A, B = C - A (apartado b), A x = B x + C, A > B y C = A - B (apartado c); A x + B = C, C > B y C - B = A (apartado d) y A x + B = C x, C > A y B = C - A (apartado e).

En la ficha 14, la actividad 1 es de simple observación de dos representaciones de la misma situación, una en el S.R.E.B. y otra, en el S.R.F. algebraico.

La actividad 2, presenta tres situaciones representadas en el lenguaje formal algebraico que corresponden a ecuaciones de la forma “x + A = B x”, “A x = B x + C” y “A x + B = C” para hacer la traducción al registro de la balanza.

El nuevo grupo de fichas, desde la 15 a la 24, como ya hemos indicado anteriormente, se refieren al trabajo con representaciones geométricas yuxtapuestas a las hechas en el sistema de representación formal algebraico.

En la ficha 15 se presenta un modelo completo de la representación de una situación en el registro geométrico y en el formal algebraico. Se hace por medio de dos ejemplos contextualizados en contexto de cantidad de pesetas poseídas (ejemplo 1), y, en edades (ejemplo 2).

Las fichas 16, 17, 18, 19 y 20, se refieren a traducción de lenguajes desde el lenguaje habitual al geométrico y al formal algebraico. Todos los enunciados están contextualizados. En el enunciado se utilizan “es”, “es igual a”, “valen”, para expresar la igualdad.

En la ficha 16, actividad 1, la ecuación resultante es de la forma: x + A = B, B >A y “x” representa la edad de una persona.

En la actividad 2 la ecuación resultante es de la forma: A + B x = C x, C >A y “x” representa el precio de una goma.

En la ficha 17, actividad 1, la ecuación resultante es de la forma: A x + B = C x + D, A >C, D >B, D- B = A - C y “x” representa la medida de la longitud de un segmento.

En la actividad 2 la ecuación resultante es de la forma: A x + B = C x, C >A y “x” representa el valor de una pegatina.

En la ficha 18, actividad 1, la ecuación resultante es de la forma: A x + B = C, C >B y “x” representa el peso de una barra de metal.

En la actividad 2 la ecuación resultante es de la forma: A x + B = C, C >B y “x” representa el precio de un bolígrafo.

En la ficha 19, actividad 1, la ecuación resultante es de la forma: A x = B, B = A y “x” representa el valor de una regla.

En la actividad 2 la ecuación resultante es de la forma: A x + B = C x + D, C >A, B >D y “x” representa el nº de estudiantes de una clase.

En la ficha 20, actividad 1, la ecuación resultante es de la forma: A x + B = C x, C >A y “x” representa el precio de un lápiz.

En la actividad 2 la ecuación resultante es de la forma: A x+ B = C x, C >A y “x” representa el nº de discos de un cantante.

En la ficha 21 se pretende una conversión desde el S.R.V.G. al S.R.F. algebraico. Las expresiones que se presentan, al traducirlas, dan ecuaciones del tipo:

a) A x + B = C x, C > A.
b) A x = B x + C, A > B.
c) A = B x, A = B.
d) A + B x = C x, C > B.

En la ficha 22 se presenta la situación inversa, esto es, dadas las expresiones algebraicas (en la forma A x + B = C x, con A > C; A x + B = C x, C > A; A x = B x + C, con A > B y A x + B = C, con C > B), hay que hacer la conversión a la representación geométrica.

En la ficha 23, actividad 1, se comienza con el planteamiento de “igualdades aritméticas” con el uso de “portavariable”. Las operaciones implicadas son las de sumar, restar, multiplicar y dividir, con el portavariable en distintas situaciones. Todas las expresiones tienen sólo dos términos en el primer miembro y uno sólo en el segundo.

En la actividad 2, se muestran ejemplos de igualdades y se indican cuáles de ellas son numéricas y cuáles son literales, y se distingue, lo que es primer miembro del segundo miembro, en una igualdad.

La última ficha de este cuadernillo, ficha 24, en su primera actividad, muestra un cuadro de doble entrada con cinco apartados, donde se representa un ejemplo de lo que es el primer miembro en una de las igualdades de la ficha anterior, y se solicita que los alumnos completen el cuadro que se aporta, para que indiquen cuáles son los primeros y segundos miembros del resto de las igualdades presentadas en la ficha 23. Aquí se definen las ecuaciones como igualdades literales que sólo son ciertas para algunos valores de las letras.

En la actividad 2, se presentan varias ecuaciones sencillas para que hallen el valor de la incógnita. Son estas ecuaciones de la forma: A - x = B (apartado a); A x = B x + C (apartado b), A = B/x (apartado c) y A x + B = C x + D (apartado d).

El último cuaderno del DISEC (IV) está formado por 9 fichas, que van directamente orientadas a los procedimientos de resolución de ecuaciones utilizando representaciones yuxtapuestas, tanto con el registro de la balanza y el formal algebraico como el de éste con el geométrico, y reconocimiento e interpretación de estructuras.

En la ficha 1, se recuerda la situación de la balanza en equilibrio y también la ley de monotonía de la suma y del producto relacionada con este sistema de representación.

En la ficha 2, se recuerda también que las igualdades literales se transforman en igualdades numéricas si se sustituyen las letras por algunos valores concretos. Asimismo se menciona de nuevo que las igualdades literales, que sólo son ciertas para algunos valores de las letras, son las ecuaciones. Se definen lo que son soluciones de una ecuación y se expresa que resolver la ecuación es hacer las operaciones necesarias para obtener las soluciones.

En la actividad 1 se plantea completar igualdades numéricas dejando para ello situaciones ausentes (una por cada apartado), representadas por “portavariable” en distintas posiciones. Las operaciones que aparecen son la de la adición, sustracción, multiplicación y división. Los números utilizados son de una y dos cifras solamente. Se expresa que los valores con los que se han ocupado los portavariables son las soluciones de las ecuaciones planteadas.

Las fichas 3, 4 y 5, se refieren a resolver ecuaciones yuxtaponiendo el sistema de representación de la balanza y el algebraico.

En la actividad 1 de la ficha 3 se presenta un ejemplo totalmente resuelto, para luego, en la actividad 2 solicitar que resuelvan una ecuación de la forma x + A = B x con los dos sistemas de representación.

La ficha 4 plantea también la resolución con los dos registros pero las ecuaciones tienen la forma A x = B x + C, en la actividad 1, y A x + B = C, en la segunda actividad de la ficha.

En la actividad 1 de la ficha 5, se pide hallar las soluciones de ocho ecuaciones pero no se explicita ningún registro particular a utilizar en la resolución.

En la actividad 2, se definen las ecuaciones equivalentes y se pide reconozcan cuáles lo son de las resueltas en la actividad anterior.

En las cuatro fichas restantes, fichas 6, 7, 8 y 9, se trabaja específicamente con los registros geométrico y algebraico.

En la ficha 6 se presenta un ejemplo completo de resolución de una ecuación con ambos registros y luego se solicita que los alumnos resuelvan una nueva ecuación como se ha presentado en el modelo.

La ficha 7 plantea dos ecuaciones para resolverlas. Se trata de las mismas ecuaciones que anteriormente han sido resueltas con la balanza en la ficha 4.

La ficha 8, semejante a la 5 de este mismo cuaderno, muestra varias ecuaciones para resolver sin especificar el sistema de representación concreto a utilizar. También aquí en la actividad 2 se requiere indiquen cuáles de las ecuaciones son equivalentes, después de haberlas resuelto.

En la ficha 9 los estudiantes han de indicar el acierto o error que muestran algunas soluciones que se dan para ciertas ecuaciones y además justificar sus respuestas.

3.4.3.3 Implementación de los diseños

Primera aplicación del DISEA

Se previeron trece sesiones para expresiones algebraicas, como se muestra a continuación, de las cuales se explicitan más detalles en el Capítulo 5.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS DISEA	
1	Contacto
2	Aplicación Pretest
3	I_1, I_2, I_3 y I_4
4	I_5, I_6, I_7, I_8 y I_9
5	I_{10}, I_{11} y I_{12}
6	I_{13}, I_{14} y I_{15}
7	Ac. Ref. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10
8	II_1, II_2 II_3 y II_4
9	II_5, II_6 y II_7
10	II_8, II_9 II_{10}, II_{11} y II_{12}
11	II_{13}, II_{14} II_{15} y II_{16}
12	II_{17}, II_{18}, II_{19} y II_{20}
13	Aplicación Postest

Tabla 3.10

La primera sesión se pensó dedicar a tener un primer contacto con los niños, donde se haría la presentación del trabajo que se va a realizar en el aula y los objetivos del mismo. La segunda, se dedicaría a la aplicación del Pretest. La organización del resto de las sesiones se hizo en torno a objetivos, contenidos a tratar y su descripción, fichas que cubren la sesión correspondiente e indicación de la intención desde la investigación. Indicamos ahora el desarrollo previsto para las restantes sesiones de expresiones algebraicas.

La sesión decimotercera se previó aplicar el Postest en su primera parte, Po1, que se relaciona estrictamente con expresiones algebraicas.

<table>
<tr><td colspan="2">3ª Sesión
- Presentación del trabajo a realizar.
- Uso de las letras con sentido algebraico en situaciones contextualizadas o no.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Usar letras para representar cantidades desconocidas.
- Establecer relaciones entre letras que representan cantidades desconocidas.
- Hacer conversiones del lenguaje habitual a representaciones “sincopadas” aritméticas y algebraicas, utilizando el esquema directo e inverso: situación (lenguaje habitual) - representación (“sincopada”, aritmética o algebraica).
- Hacer conversiones de una representación sincopada y numérica a lenguaje habitual.</td><td rowspan="3">Fichas
I_1, I_2, I_3 y I_4</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Expresiones numéricas y algebraicas.
- Representaciones.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
En esta sesión se pretende que el alumno comience a utilizar las letras con sentido algebraico para representar cantidades desconocidas y hacer conversiones entre las representaciones en lenguaje habitual, aritmético, sincopado y algebraico.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Constatar qué habilidades presentan o adquieren los alumnos y qué tipo de representaciones espontáneas utilizan al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal (C_1) y al “contextualizar el lenguaje algebraico” (C_2) en contextos familiares a los estudiantes y al “interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas” (C_3).</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">4ª Sesión
- Uso de la representación semiótica del S.R.V.G.
- Uso de las letras con sentido algebraico en situaciones contextuales</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Usar el rectángulo (área y lado) como unidad fundamental en el S.R.V.G.
- Hacer conversiones de expresiones numéricas y algebraicas sencillas (unitarias o binarias) al S.R.V.G.
- Representar y establecer diferencias de expresiones binarias aditivas y multiplicativas (a + b y a . b), usando el S.R.V.G.
- Hacer conversiones del lenguaje habitual a la representación formal.
- Usar las letras para representar cantidades desconocidas.
- Usar las letras para establecer relaciones entre cantidades desconocidas</td><td rowspan="3">Fichas
I_5, I_6 I_7
I_8 y I_9</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Expresiones numéricas y algebraicas.
- Representaciones.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
En esta cuarta sesión, se introduce el S.R.V.G., donde los números y letras van a representar, indistintamente, un producto (área de un rectángulo) o un segmento (lado de un rectángulo), es decir, se sitúan siempre como una cantidad de un objeto bidimensional (objeto geométrico). Trabajan las ideas básicas de esta representación y se establecen los convenios de la misma. Posteriormente, se utilizan las letras para representar situaciones dadas en lenguaje habitual y que hacen referencia a distintos contextos familiares o a relaciones numéricas.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Constatar si los alumnos realizan correctamente la aplicación de vocablos específicos así como detectar los códigos utilizados y la designación correcta o no de los paréntesis al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal” (C_1), analizando las interpretaciones y uso del S.R.V.G. así como las dificultades al “contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como número generalizado” (C_2), en representaciones del tipo “a + b” y “a . b” y al “interpretar y comprender el significado de los signos y las letras” (C_3).</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">5ª Sesión
- El S.R.V.G. para expresiones del tipo a . b + c.
- Sustitución formal centrada en la particularización con el cálculo del valor numérico de expresiones algebraicas</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Usar el rectángulo (área y lado) como unidad fundamental en el S.R.V.G.
- Hacer conversiones de expresiones numéricas y algebraicas del tipo “a . b + c” al S.R.V.G.
- Realizar sustitución formal al determinar el valor numérico de expresiones algebraicas.
- Establecer relaciones entre cantidades expresadas con representación formal y hacer uso del paréntesis.</td><td rowspan="3">Fichas
I_{10}, I_{11} y I_{12}</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Representaciones.
- Expresiones numéricas y algebraicas.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
Al comienzo de esta segunda sesión se retoma el sistema de representación visual geométrico y se extiende a representaciones del tipo “a . b + c”.
Se pretende que los alumnos se familiaricen con esta representación y observen que la representación del binomio es una yuxtaposición de rectángulos, tanto si los miembros del binomio son unitarios como binarios.
Luego, los alumnos establecerán relaciones entre cantidades y letras y evaluarán las letras en expresiones contextualizadas dadas en lenguaje natural y tablas o en expresiones dadas en tablas donde las letras con números.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Se trata de analizar las potencialidades y dificultades del S.R.V.G. al “hacer conversiones entre los diferentes registros” (C_1), en especial para representar expresiones del tipo “a . b + c”, consideradas como una totalidad, donde tanto “a . b”, como “c”, representan un rectángulo. Asimismo observar la capacidad para correctamente “realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis” (O_1), “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2), y para “hacer sustituciones formales referidas tanto a los procesos de particularizar como a generalizar” (O_3). en situaciones familiares como precio del kilo de fruta o valor numérico al “contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como número generalizado” (C_2), y al “interpretar y comprender el significado de los signos y las letras” (C_3).</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">6ª Sesión
- Uso del S.R.V.G. para expresiones del tipo “a.b ± c.d”.
- Representaciones.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Usar el rectángulo (área y lado) como unidad fundamental en el S.R.V.G.
- Hacer conversiones de expresiones numéricas y algebraicas del tipo “a.b ± c.d” al S.R.V.G.
- Hacer conversiones entre los diferentes sistemas de representación (Nota: especificar en función de las actividades).</td><td rowspan="3">Fichas
I_{13}, I_{14} y I_{15}</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Representaciones.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
Se retoma nuevamente, en esta sesión el sistema de representación visual geométrico y se extiende a representaciones del tipo “a.b ± c.d”. Se pretende que los alumnos continúen profundizando en esta representación y observen la representación de “a.b + c.d”, como una yuxtaposición de rectángulos, para introducir, posteriormente, el coeficiente negativo y establecer los convenios de las sustracciones en esta representación.
En esta sesión se intenta también sacar a los alumnos de los contextos en los que habían venido trabajando y proponerles la realización de diferentes representaciones.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Se trata de analizar las potencialidades y dificultades del S.R.V.G. al “hacer conversiones entre los diferentes registros” (C_1), en especial para representar expresiones del tipo “a.b ± c.d”, consideradas como una totalidad, donde surge no sólo la idea de adición sino también la sustracción.</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">7ª Sesión
Integración de los aspectos trabajados.
- Uso e interpretación de las letras y representaciones.
- Sustitución formal.
- Representaciones.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Usar letras para representar cantidades desconocidas.
- Establecer relaciones entre letras que representan cantidades desconocidas.
- Hacer conversiones del lenguaje habitual a representaciones “sincopadas” aritméticas y algebraicas, utilizando el esquema: situación (lenguaje habitual) - representación (“sincopada”, aritmética o algebraica).
- Hacer conversiones de una representación sincopada y numérica a lenguaje habitual.
- Usar el rectángulo (área y lado) como unidad fundamental en el S.R.V.G.
- Hacer conversiones de expresiones numéricas y algebraicas sencillas (unitarias o binarias) al S.R.V.G.
- Representar y establecer diferencias de expresiones binarias aditivas y multiplicativas (a + b y a . b), usando el S.R.V.G.
- Hacer conversiones del lenguaje habitual a la representación formal.
- Utilizar la sustitución formal al determinar el valor numérico de expresiones algebraicas.</td><td rowspan="3">Fichas
Actividades de refuerzo: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Expresiones numéricas y algebraicas.
- Representaciones.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
En esta sesión de “repaso” se integra todo el conjunto de contenidos tratados en las sesiones anteriores, comenzando por el tratamiento de las letras para representar cantidades desconocidas, luego se establecen relaciones entre ellas y se hacen aplicaciones del S.R.V.G. Se hace conversión de lenguajes, desde el habitual al algebraico y se calculan valores numéricos de expresiones algebraicas sencillas.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Observar la capacidad para correctamente “realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis” (O_1), “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2), y para “hacer sustituciones formales referidas tanto a los procesos de particularizar.” (O_3).
Analizar las potencialidades y dificultades del S.R.V.G. al “hacer conversiones entre los diferentes registros” (C_1), al “contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como número generalizado” (C_2), y al “interpretar y comprender el significado de los signos y las letras” (C_3).
Constatar el tipo de representaciones espontáneas que utilizan.</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">8ª Sesión
- Representaciones.
- Conversión de representaciones.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Usar en el lenguaje habitual terminología propia del lenguaje matemático.
- Hacer conversiones del lenguaje habitual en contexto aritmético o geométrico, a la representación formal y al S.R.V.G.
- Hacer conversiones de la representación formal al S.R.V.G.</td><td rowspan="3">Fichas
II_1 $II_{2,}$ II_3, y II_4</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Expresiones numéricos, de lenguaje habitual y algebraico.
- Representaciones.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
En esta cuarta sesión se comienza por hacer conversión de registros desde el lenguaje habitual, donde se utilizan vocablos propios del lenguaje matemático (doble, triple, excede a, difiere en), al algebraico, a través del aritmético, para luego relacionar estos tres sistemas con el S.R.V.G.
Posteriormente se pretende la conversión del S.R.F. algebraico al S.R.V.G. insistiendo en presentar los rectángulos unidad, de todas las maneras posibles.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
En esta octava sesión se pretende detectar los códigos utilizados al “hacer conversiones entre los diferentes registros” (C_1). También se trata de constatar la identificación de cada término de una expresión algebraica con distintos rectángulos equivalentes al “contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como número generalizado” (C_2), y al “interpretar y comprender el significado de los signos y las letras” (C_3).</td><td></td></tr>
</table>

9ª Sesión - El S.R.V.G. para expresiones del tipo “a . b” y “a . (b + c)”. - Operatividad básica: propiedad distributiva. - Conversión de representaciones.	
Objetivos - Usar el rectángulo como expresión de un producto de dos factores y como producto de un factor por un binomio. - Introducir un esquema de conexión entre representación formal y el S.R:V.G. - Estudiar la propiedad distributiva por la izquierda.	**Fichas** II_5, II_6 y II_7
Contenidos a tratar - Área del rectángulo. - Representaciones. - Propiedad distributiva por la izquierda.	
Descripción de contenidos a tratar En esta sesión novena se comienza por la representación del área del rectángulo con dimensiones numéricas unitarias o binarias (es decir, dimensiones subdivididas o no), de la forma “a . b” y “a (b + c)”. Luego se introduce un esquema de doble entrada “visualización simplificada” (V.S.), como paso intermedio entre la representación algebraica y el S.R.V.G. o viceversa. Se termina con la representación de los mismos productos como expresiones algebraicas, en la representación visual formal de la visualización simplificada, en el S.R.V.G. y su desarrollo en el S.R.F. algebraico.	
Intención de la investigación Observar la dificultad de la nueva representación propuesta y la aceptación y enriquecimiento del trabajo con yuxtaposición de sistemas de representación al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal” (C_1), contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como objetos geométricos y como número generalizado en contexto de área (C_2) e “interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual” (C_3).	

10ª Sesión - El S.R.V.G. para expresiones del tipo “a (b + c)”, (a + b) . c”, “(a + b) . (c + d)”, “(a + b + c) . (d + e)” y “na . mb”. - Operatividad básica: propiedad distributiva. - Conversión de lenguajes.	
Objetivos - Usar el sistema de representación visual formal de la visualización simplificada en la propiedad distributiva. - Hacer conversión de registros basándose en expresiones de la propiedad doble distributiva.	**Fichas** II$_8$, II$_9$, II$_{10}$, II$_{11}$ y II$_{12}$
Contenidos a tratar - Representaciones. - Propiedad distributiva.	
Descripción de contenidos a tratar En esta sesión décima se pretende seguir utilizando el esquema de visualización simplificada, en su aplicación a la propiedad distributiva en sus diferentes formas así como a expresiones de la forma “na . mb”, mediante transformaciones del tipo “na” en “a + a + a+ ^{n} a” para aplicar la unidad fundamental definida con el rectángulo.	
Intención de la investigación Analizar la dificultad o facilidad que proporciona el uso de las tres representaciones trabajadas al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal” (C_1), en el caso de la propiedad distributiva por la izquierda, por la derecha, la doble distributiva e incluso la extensión a productos de trinomios por binomios, al “contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como objetos geométricos y como número generalizado en contexto de área” (C_2) y al “interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual” (C_3). Detectar las habilidades al “realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis” (O_1) y “al realizar operaciones con paréntesis aditivos o y multiplicativos, en especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2).	

<table>
<tr><td colspan="2">11ª Sesión
- El S.R.V.G. para expresiones del tipo “$a + b^2$”, “$(a + b)^2$” y “$a^2 + b^2$”.
- Operatividad básica: propiedad doble distributiva.
- Conversión de registros.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Usar el sistema de representación visual formal de la visualización simplificada.
- Distinguir el cuadrado de la suma de dos números de la suma de un número con el cuadrado de otro
- Distinguir el cuadrado de la suma de dos números de la suma de cuadrados de esos números.
- Hacer conversión de registros basándose en expresiones de la propiedad doble distributiva.
- Reconocer expresiones equivalentes a través de representaciones equivalentes.</td><td rowspan="3">Fichas
II_{13}, II_{14}, II_{15} y II_{16}</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Potencias cuadradas de expresiones numéricas y algebraicas.
- Representaciones.
- Propiedad doble distributiva.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
En esta sesión duodécima se pretende seguir utilizando el sistema de representación visual formal de la visualización simplificada, en su aplicación a la propiedad doble distributiva. Se plantea la aplicación de la unidad fundamental a expresiones con exponente “2” para pasar posteriormente a representaciones del cuadrado de la suma de dos números o de dos letras y a representaciones del cuadrado de la suma de dos números y suma del cuadrado de esos números y reconocimiento de su diferencia, basándose en la observación de las representaciones simultáneas de ambas expresiones, así como a la suma de un número con el cuadrado de otro. Lo mismo para las expresiones “$(a + b)^2$” y “a (b + a) + b (b + a)”.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Se trata de detectar al “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2), cuál es el uso que hacen de los paréntesis al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal” (C_1), y para comprobar la aceptación de expresiones como equivalentes si sus representaciones con el S.R.V.G. son también equivalentes.</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">12ª Sesión
- Uso del S.R.V.G. para reconocer factores comunes.
- Operatividad básica: propiedad doble distributiva y sacar factor común.
- Conversión de registros.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Hacer conversión de registros basándose en expresiones de la propiedad doble distributiva.
- Reconocer las expresiones susceptibles de transformación de suma (con factores comunes en sus términos) en productos (propiedad distributiva).
- Reconocer factores comunes a través de representaciones con el S.R.V.G.</td><td rowspan="3">Fichas
II_{17}, II_{18}, II_{19} y II_{20}</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Representaciones.
- Propiedad distributiva por la derecha y por la izquierda (incluyendo el producto por una diferencia) y la doble distributiva.
- Divisores de un número.
- Factores comunes en los términos de una expresión algebraica.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
En esta última sesión de instrucción se pretende integrar todos los casos de la propiedad distributiva y hacer extensión de esta propiedad a su relación con la situación de sacar factor común, a través de la utilización del S.R.V.G. que se ha venido utilizando.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Constatar el uso e interpretación de la yuxtaposición de registros al hacer conversiones entre el registro formal y el registro geométrico (C_1) al “contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como objetos geométricos y como número generalizado en contextos de área y perímetro” (C_2) y al “interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual (C_3), así como analizar la capacidad de extender el trabajo con términos positivos a las expresiones con términos negativos en operatividad básica al “Realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2). cuando desarrollan las expresiones de las áreas con las dimensiones subdivididas así como en el desarrollo de la propiedad distributiva y su transformación en expresiones algebraicas con términos con factores comunes.</td><td></td></tr>
</table>

Aplicación del DISEC

Se previeron siete sesiones para ecuaciones, como se muestra a continuación.

ECUACIONES DISEC	
1	III_1, III_2, III_3, III_4, III_5, III_6, III_7 y III_8
2	III_9, III_{10}, III_{11}, III_{12}, III_{13} y III_{14}
3	III_{15}, III_{16}, III_{17}, III_{18}, III_{19} y III_{20}
4	III_{21}, III_{22}, III_{23} y III_{24}
5	IV_1, IV_2, IV_3, IV_4 y IV_5
6	IV_6, IV_7, IV_8 y IV_9
7	Aplicación Postest

Tabla 3.11

En la primera sesión se comienza a trabajar con el tercer cuaderno (III).

El desarrollo de las sesiones relativas a ecuaciones, incluyó los siguientes contenidos:

<table>
<tr><td colspan="2">1ª Sesión
Presentación del trabajo a realizar.
- Utilización del Sistema de Representación del Equilibrio de la Balanza (S.R.E.B.).
- Planteamiento de Ecuaciones Lineales de una incógnita.
- Conversión de Registros.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Conocer la sintaxis y semántica del S.R.E.B.
- Usar el S.R.E.B. para representar igualdades o desigualdades numéricas.
- Hacer conversiones de representaciones donde interviene el S.R.E.B.
- Plantear la representación de una ecuación lineal (de las formas: “A x = B”, “A + x = B + C” y “A x + B = C”) como la de una balanza en equilibrio.</td><td rowspan="3">Fichas
III$_1$, III$_2$, III$_3$, III$_4$, III$_5$, III$_6$, III$_7$ y III$_8$</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Sistema de Representación del Equilibrio de la Balanza.
- Igualdad y desigualdad de cantidades.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
En la primera parte de esta primera sesión relacionada con el núcleo de Ecuaciones se presenta la ecuación como una balanza en equilibrio. Luego se trata la conversión de la expresión en la balanza a la igualdad numérica y viceversa, utilizando representación de “pesas “ y “objetos”. Posteriormente se pasa a la yuxtaposición de representaciones semióticas: el S.R.E.B. y la R.F., desde un enunciado en lenguaje habitual en contextos familiares.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
En esta primera sesión relativa a las ecuaciones lineales se pretende en principio captar la atención hacia un nuevo sistema de registro: el S.R.E.B., y además ver la aceptación del mismo por parte de los alumnos y el uso e interpretación que hacen del mismo en la. “conversión del lenguaje habitual al Sistema de Representación del Equilibrio con la Balanza” y “conversión del S.R.E.B. al lenguaje habitual” (C$_2$), así como detectar la facilidad o dificultad que plantea su uso en yuxtaposición con el S.R.F. en la situación de “conversión del lenguaje habitual al S.R.F. algebraico” (C$_3$). De la misma manera, detectar cómo es el “reconocimiento de expresiones equivalentes expresadas en distintos lenguajes”(C$_6$).y la “interpretación y comprensión del signo igual” (C$_7$).</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">2ª Sesión
- Uso del Sistema de Representación del Equilibrio de la Balanza (S.R.E.B.).
- Planteamiento de Ecuaciones Lineales de una incógnita.
- Conversión de Registros.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Conocer la sintaxis y semántica del S.R.E.B.
- Usar el S.R E.B. para representar igualdades o desigualdades numéricas o algebraicas.
- Plantear la representación de una ecuación lineal (de las formas: “x + A = B”, “A x = B”, “A x + B = C”, “A x + B = C x”, x + A x = B” y “A x + B = C x + D”) como la de una balanza en equilibrio.
- Hacer conversiones de lenguajes donde interviene el S.R.E.B.</td><td rowspan="3">Fichas
III$_9$, III$_{10}$, III$_{11}$, III$_{12}$, III$_{13}$ y II$_{14}$</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Sistema de Representación del Equilibrio de la Balanza.
- Ecuaciones lineales con una incógnita.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
En esta tercera sesión se sigue trabajando la yuxtaposición de sistemas de representación del S.R.E.B. y la R.F. desde un enunciado en lenguaje habitual en contextos familiares. Para terminar la sesión se hace la conversión desde una expresión en la balanza a una expresión formal y viceversa.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Esta nueva sesión de trabajo con el soporte del S.R.E.B pretende conocer la comprensión de los alumnos de la sintaxis y semántica del registro que nos ocupa y los códigos que utilizan los alumnos en su tratamiento. Se sigue haciendo énfasis para observar el “reconocimiento de expresiones equivalentes expresadas en distintos lenguajes” (C$_6$), y la “interpretación y comprensión del signo igual” (C$_7$), y en los códigos que utilizan también en la “conversión del lenguaje algebraico al Sistema de Representación del Equilibrio con la Balanza” (C$_7$), y en la “conversión del S.R.E.B. al lenguaje habitual” (C$_2$).</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">3ª Sesión
- Introducción y uso del SRVG para las Ecuaciones Lineales.
- Planteamiento de Ecuaciones Lineales de una incógnita.
- Conversión de Registros.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Usar el S.R.V.G. para representar igualdades numéricas o algebraicas.
- Plantear la representación de una ecuación lineal (de las formas: “x + a = B”, “A x = B”, “A x + B = C”, “A x + B = C x”, “x + A = B x” “A x + B = x + C” y “A x + B = C x + D”), con el S.R.V.G.
- Hacer conversiones de lenguajes.</td><td rowspan="3">Fichas
III_{15}, III_{16}, III_{17}, III_{18}, III_{19} y II_{20}</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Sistema de Representación Visual Geométrico.
- Planteamiento de ecuaciones lineales con una incógnita.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
En esta cuarta sesión se presenta el S.R.V.G. aplicado a la representación de una ecuación.
Se procede luego a la conversión desde el lenguaje habitual a dos sistemas de representación: el S.R.V.G. y la R.F.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
En esta tercera sesión relativa a las ecuaciones donde el soporte es el S.R.V.G., se pretende detectar la comprensión de este registro que ya ha sido utilizado en expresiones algebraicas y ver el uso e interpretación que hacen del mismo en la “conversión del lenguaje habitual al Sistema de Representación Visual Geométrico” (C_1), y “conversión del lenguaje algebraico al Sistema de Representación Visual Geométrico” (C_4), “conversión del S.R.V.G. a la R.F. (C_4), así como detectar la facilidad o dificultad que plantea su uso en yuxtaposición con el SRF en la situación de “conversión del lenguaje habitual al lenguaje algebraico” (C_3). De la misma manera, detectar cómo es el “reconocimiento de expresiones equivalentes expresadas en distintos lenguajes” (C_6), y la “interpretación y comprensión del signo igual” (C_7).</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">4ª Sesión
- Uso del SRVG para las Ecuaciones Lineales.
- Planteamiento de Ecuaciones Lineales de una incógnita.
- Conversión de Registros.
- Aproximación a resolución de ecuaciones.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Usar el SRVG para representar igualdades numéricas o algebraicas.
- Hacer conversiones de lenguajes.</td><td rowspan="3">Fichas
III$_{21}$,II$_{22}$, III$_{23}$ y II$_{24}$</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Sistema de Representación Visual Geométrico.
- Miembros y términos en una ecuación.
- Planteamiento de ecuaciones lineales con una incógnita.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
En esta cuarta sesión, última relacionada con el planteamiento de ecuaciones, se trabaja la conversión desde la representación en el S.R.V.G. a la R.F. y viceversa; se procede luego al reconocimiento de los miembros y términos de una ecuación. Para finalizar se hace una aproximación a la resolución de ecuaciones sencillas donde intervienen la variable “x”.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
En esta cuarta sesión se hace énfasis en observar el “reconocimiento de expresiones equivalentes expresadas en distintos lenguajes” (C$_6$), y la “interpretación y comprensión del signo igual” (C$_7$).
Para finalizar, se intenta detectar el “uso de las reglas de transformación” (O$_1$), y el dominio de la operatividad básica en igualdades aritméticas donde se representa el dato desconocido con un portavariable • y se analizan los procedimientos de resolución y la actuación ante “signos negativos en los coeficientes de la ecuación” (O$_5$), y ante la “comprobación e interpretación de las soluciones de la ecuación (positivas y negativas)” (O$_6$).</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">5ª Sesión
- Resolver ecuaciones aritméticas.
- Resolución de ecuaciones lineales por yuxtaposición del Sistema de Representación Formal y el S.R.E.B.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Reconocer la sintaxis propia del registro de la balanza.
- Resolver ecuaciones aritméticas planteadas con portavariable.
- Resolver ecuaciones lineales de la forma : “A x + B = C x”, “A x = B x + C”, “A = B x”, “A + B x = C x”, “”x + A = B x” y “A x + B = C”, por yuxtaposición entre el S.R.E.B. y la R.F:
- Reconocer ecuaciones equivalentes a través de distintas expresiones de las mismas.</td><td rowspan="3">Fichas
IV_1, IV_2, V_3, IV_4 y IV_5</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Sintaxis del SRVFB: Ley de monotonía de la suma y del producto.
- Ecuaciones equivalentes.
- Resolución de ecuaciones lineales con una incógnita.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
En la primera parte de esta tercera sesión, primera dedicada a la resolución de ecuaciones, se comienza probando la verificación de las leyes de monotonía de la suma y el producto para este registro de S.R.E.B. Posteriormente y antes de expresar el modelo de realizar la resolución mediante yuxtaposición de los sistemas de representación S.R.E.B. y la R.F., se plantea la resolución de ecuaciones sencillas planteadas con portavariable “• ”.
Se procede luego a la resolución con la yuxtaposición de los registros citados y al reconocimiento de ecuaciones equivalentes.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
En esta primera sesión relacionada con la resolución de ecuaciones lineales donde se hace uso del S.R.E.B. se trata de captar la aceptación de los alumnos de este sistema de representación y la comprensión de su sintaxis. Asimismo, detectar la habilidad sintáctica en el lenguaje algebraico a través del análisis del “uso de las reglas de transformación” (O_1), y los “procedimientos de resolución en “x +`b = c” (O_2), y “procedimientos de resolución en “a x = b” (O_2), así como las dificultades que plantea la aparición de “signos negativos en los coeficientes de la ecuación” (O_5), y cuál es el proceder en la “comprobación e interpretación de las soluciones de la ecuación (positivas y negativas)” (O_6), si existe, o si ni siquiera existe dicha comprobación.
También constatar las habilidades de tipo conceptual que se evidencian en la “conversión del S.R.E.B. a la R.F. (C_2), y la conversión de la R.F. al S.E.R.B.” (C_5), los códigos utilizados, y el uso o no (cuando es opcional) de la yuxtaposición de registros.
Por último, el trabajo de esta sesión pretende detectar el “reconocimiento de expresiones equivalentes expresadas en distintos lenguajes” (C_6) y la “interpretación y comprensión del signo “=”(C_7).</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">6ª Sesión
- Resolución de ecuaciones por yuxtaposición del Sistema de Representación Formal y el S.R.V.G.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Reconocer la sintaxis propia del registro del S.R.V.G.
- Resolver ecuaciones lineales de la forma por yuxtaposición entre el S.R.V.G. y el S.R.F:
- Reconocer ecuaciones equivalentes a través de distintas expresiones de las mismas.
- Comprobar las soluciones de una ecuación.</td><td rowspan="3">Fichas
IV_6, IV_7, IV_8 y IV_9</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Sintaxis del S.R.V.G: Ley de monotonía de la suma y del producto.
- Ecuaciones equivalentes.
- Resolución de ecuaciones lineales con una incógnita.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
En la primera parte de esta segunda sesión relacionada con el núcleo de Ecuaciones se presenta el S.R.V.G. aplicado a la representación de una ecuación.
Se procede luego a la conversión desde el lenguaje habitual al S.R.V.G. y al S.R.F. simultáneamente, para tratar luego de hacer la conversión desde la representación en el S.R.V.G. al S.R.F. y viceversa.
Se reconocen los miembros y términos de una ecuación y para finalizar se hace una aproximación a la resolución de ecuaciones sencillas donde interviene la variable “x”.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
En esta primera sesión relacionada con la resolución de ecuaciones lineales donde se hace uso del SRVG se trata de captar la aceptación de los alumnos de este sistema de representación y la comprensión de su sintaxis. Asimismo, detectar la habilidad sintáctica en el lenguaje algebraico a través del análisis del “uso de las reglas de transformación” (O_1), y los “procedimientos de resolución en “x + b = c” (O_2), y “procedimientos de resolución en “a x = b” (O_2), así como las dificultades que plantea la aparición de “signos negativos en los coeficientes de la ecuación” (O_5) y cuál es el proceder en la “comprobación e interpretación de las soluciones de la ecuación (positivas y negativas)” (O_6) si existe, o si ni siquiera existe dicha comprobación.
También constatar las habilidades de tipo conceptual que se evidencian en la “conversión del S.R.V.G. al S.R.F. (C_4), y la conversión del S.R.F. al S.R.V.G.” (C_4), los códigos utilizados, y el uso o no (cuando es opcional) de la yuxtaposición de registros.
Por último, el trabajo de esta sesión pretende detectar el “reconocimiento de expresiones equivalentes expresadas en distintos lenguajes” (C_6) y la “interpretación y comprensión del signo “=” (C_7).</td><td></td></tr>
</table>

Segunda aplicación del DISEA

Esta aplicación del DISEA, denominada aplicación del DISEA II, se previó para realizar en un nuevo Centro, Centro nº 3 de este estudio.

S. *P*.	FICHAS Y OBSERVACIONES	S. *R*.	FICHAS VERDELLADA	OBSERVACIONES
1.	Contacto	1.		Contacto
2.	Aplicación Prueba T	2.		Aplicación Prueba T
3.	1, 2 y 3	3.	Repaso 1, 3, 8 y 9 de la Prueba T	Prueba T, a
4.	4 y 5	4.	Repaso 1, 3, 8 y 9 de la Prueba T	Prueba T,a
5.	6 y 7	5.	1, 2, 3 y 4	
6.	8 y 9	6.	5, 6 y 7	
7.	10 y 11	7.	8, 9, 10 (ap. a, b, c y d)	
8.	12 y 13 (Ac.1)	8.	10 (ap. e y f), 11, y 12 (ap. a, b, c y d)	
9.	13 (Ac.2) y 14	9.	12 (ap. e, f, g y h), 13 y 14	
10.	15	10.	15	
11.	16 y 17	11.	Integración	15 bis
12.	18, 19 y 20	12.	16	15 bis
13.	21 y 22	13.	17, 18, 19 y 20	
14.	23 y 24	14.	21, 22	
15.	25, 26, 27 y 28	15.	23 y 24	
16.	29 y 30	16.	25, 26, 27, 28 y 29 (ap. a)	Repaso: 21, 22 y 23. Ficha 28 explicada a todos.
17.	31 y 32	17.	29 (ap. b y c) y 30	
18.	33	18.	31, 32, 33 (ap. 1 y 2b) y 34 (ap. a, b y c)	Ficha 31: se distribuyeron los apartados para trabajarlo por grupos de alumnos. Ficha 33: no se trabajaron 2a y 2c. Ficha 34: Apartados a, b y c trabajados oralmente. Ficha 33 bis: (2 a - 3) (4 - 2b) trabajado en la pizarra. Trabajado “cuadrado” y “doble”.
19.	34	19.	34 (ap. d y e)	Ficha 34 bis: (a + b + 3) (c + d + 5)
20.	35	20.	35	Ficha 35 bis: (a - b) (c - d)
21.	36 y 37	21.	36, 37 y 38	
22.	38 y 39	22.	39 y 40	
23.	40 y 41	23.	41	Ficha 41bis a e Integración: Ficha 41bis, b.
24.	Aplicación Prueba T	24.		Integración: Ficha 41 bis, b
25.	Despedida	25.		Aplicación Prueba T
		26.		Despedida: comentario alumnos.

Tabla 3.12

Se organizaron 25 sesiones como se muestra en la tabla 3.12 (S.P. sesiones previstas). Sin embargo el desarrollo real de los contenidos es el que aparece en la misma tabla en la columna siguiente a la codificada con S.R. (sesiones reales).

La metodología aplicada en clase tuvo tres momentos bien diferenciados: la introducción que hace el didacta, si procede, el trabajo posterior de los alumnos individualmente o por parejas y la puesta en común.

La primera sesión de las mismas fue para tener un contacto con los alumnos del aula asignada, presentarles el trabajo y motivarlos a colaborar.

La segunda sesión se previó aplicar la prueba T, que se pensó aplicar también en la sesión 24, después de la instrucción. La última sesión se pensó en hacer un comentario con los alumnos de toda la clase para que ellos mismos expresasen lo que pensaban habían conseguido, cuál había sido su experiencia, etc. El desarrollo real de los contenidos de las restantes sesiones se muestra a continuación:

<table>
<tr><td colspan="2">3ª Sesión
- Operatividad básica.
- Uso e interpretación de paréntesis.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Detectar dificultades en el uso sintáctico de los paréntesis.
- Clarificar el uso del signo “-” dentro y fuera de los paréntesis.
- Jerarquizar adecuadamente las operaciones básicas.</td><td rowspan="4">Preguntas 1 y 8 de Test (T, a)</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Operaciones aditivas y multiplicativas con números enteros, incluyendo paréntesis.
- Propiedad distributiva en contextos aritméticos.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
En esta primera sesión se trabaja con preguntas seleccionadas del Test aplicado en al sesión anterior, sesión “0”, concretamente relativas a: suma, resta, multiplicación y división con números enteros en las que se incluyen paréntesis en todos los ítems, en un ejercicio con un solo término dentro del paréntesis y en otro, con dos términos dentro de los paréntesis.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Detectar dificultades concretas que plantean o presentan los alumnos al “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2) para aportarles estrategias de solución a las mismas.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">4ª Sesión
- Operatividad básica.
- Uso e interpretación de paréntesis</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Detectar dificultades en el uso sintáctico de los paréntesis.
- Clarificar el uso del signo “-” dentro y fuera de los paréntesis.
- Presentar analogía entre la operatividad básica con números enteros y con expresiones algebraicas.
- Reconocer los términos existentes en una expresión algebraica.
- Simplificar expresiones algebraicas.
- Jerarquizar adecuadamente las operaciones básicas.
- Aceptar respuestas abiertas.</td><td rowspan="4">Preguntas 3 y 9 de Test (T, b)</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Operaciones aditivas y multiplicativas con monomios, binomios y trinomios, incluyendo paréntesis.
- Propiedad distributiva en contextos aritméticos y algebraicos.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
En esta segunda sesión se sigue trabajando con preguntas seleccionadas del Test aplicado en la sesión “2”, concretamente relativas a: suma, resta, multiplicación y división con expresiones algebraicas en las que se incluyen paréntesis en todos los ítems con dos o tres términos y ejercicios donde se añade al cálculo de operaciones básicas y simplificación de resultados, la necesaria aceptación de respuestas abiertas porque las expresiones no permiten hacer ninguna reducción.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Detectar dificultades concretas que plantean o presentan los alumnos al “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2), para aportarles estrategias de solución a las mismas.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">5ª Sesión
- Operatividad Básica con números enteros.
- Uso de letras con sentido algebraico.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Realizar operaciones básicas con términos numéricos usando paréntesis.
- Usar letras para representar cantidades desconocidas.
- Establecer relaciones entre letras que representan cantidades desconocidas.
- Hacer conversiones del lenguaje habitual a representaciones “sincopadas” aritméticas y algebraicas, mediante el esquema: situación (lenguaje habitual) - representación (sincopada, aritmética o algebraica).</td><td rowspan="4">Fichas
1, 2, 3 y 4</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Expresiones numéricas y algebraicas.
- Representaciones.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
Para conectar con las sesiones anteriores se hace un repaso de operatividad básica con números enteros, donde interviene el paréntesis en situaciones aditivas y multiplicativas.
A continuación, se comienza propiamente el tratamiento del álgebra, recordando a los alumnos la utilización de las letras con sentido algebraico para representar cantidades desconocidas y hacer traslaciones entre las representaciones en lenguaje habitual, aritmético, sincopado y algebraico.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Constatar qué habilidades presentan o adquieren los alumnos al “realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis (O_1) y al “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2). Constatar también el tipo de representaciones espontáneas utilizan los alumnos al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal (C_1) y al “contextualizar el lenguaje algebraico” (C_2) en contextos familiares a los estudiantes.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">6ª Sesión
- Uso de letras con sentido algebraico.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Hacer conversiones de una representación sincopada y numérica a lenguaje habitual.
- Hacer conversiones del lenguaje habitual a representaciones sincopadas aritméticas y algebraicas.</td><td rowspan="4">Fichas
5, 6 y 7</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Expresiones numéricas y algebraicas.
- Representaciones.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
..En esta sexta sesión se pretende que el alumno siga utilizando las letras con sentido algebraico para representar cantidades desconocidas y hace conversiones entre los distintos lenguajes aritmético, sincopado y algebraico.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Constatar si los alumnos utilizan el esquema presentado “situación - representación” al “hacer conversiones entre los diferentes registros” (C1) al “contextualizar el lenguaje algebraico” (C_2) en contextos familiares. Asimismo se pretende ver su “interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual” (C_3), cuando observan enunciados verbales o redactan historias para expresiones algebraicas determinadas.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">7ª Sesión
Traslaciones entre diferentes representaciones semióticas.
Uso de las letras con sentido algebraico en situaciones contextuales.
Designación de paréntesis.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Hacer conversiones del lenguaje habitual al lenguaje algebraico.
- Usar las letras para representar cantidades desconocidas.
- Usar las letras para establecer relaciones entre cantidades desconocidas.
- Utilizar terminología propia del lenguaje matemático.
- Designar paréntesis.</td><td rowspan="4">Fichas
8, 9 y 10 (ap. a, b, c y d)</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Doble, triplo, mitad, cuadrado, número anterior, número posterior, número siguiente.
- Expresiones numéricas y algebraicas.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
En esta séptima sesión los alumnos utilizarán las letras para hacer conversiones desde el lenguaje habitual al lenguaje simbólico. Los enunciados hacen referencia a contextos aritméticos o a relaciones numéricas.
Al comenzar la sesión no se señalan símbolos a utilizar en la conversión pero luego sí se indican variables concretas.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Constatar si los alumnos realizan correctamente la aplicación de vocablos específicos y la designación correcta o no de los paréntesis al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal” (C_1).</td></tr>
</table>

8ª Sesión Traslaciones entre diferentes representaciones semióticas.	
Objetivo - Hacer conversiones del lenguaje habitual, desde enunciados contextualizados o no, al lenguaje algebraico. - Designar paréntesis. - Usar el signo igual.	**Fichas** 10 (ap. e y f), 11 y 12 (ap. a, b, c y d)
Contenidos a tratar - Doble, triplo, cuadrado. - Signo “igual”. - Relaciones entre expresiones algebraicas. - Representaciones.	
Descripción de contenidos a tratar - En esta sesión se convierten enunciados verbales desde el lenguaje habitual al simbólico. Se comienza con enunciados no contextualizados para luego contextualizarlos en contextos familiares: precios de frutas cintas, de vídeo, medida de superficie de terrenos, etc. Se introducen en estas traducciones enunciados que dan lugar a ecuaciones y, como consecuencia, los alumnos han de usar el signo igual en sus expresiones simbólicas. También en sus expresiones han de designar paréntesis para hacer las transformaciones correctamente.	
Intención de la investigación Constatar si los alumnos al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal” (C_1) y “contextualizar el lenguaje algebraico” (C_2) e “interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual” (C_3), lo hacen de manera adecuada.	

<table>
<tr><td colspan="2">9ª Sesión
Traslaciones entre diferentes representaciones semióticas.
Uso de paréntesis.</td></tr>
<tr><td>Objetivo
- Representar en lenguaje simbólico elementos que figuran dentro de enunciados verbales en distintos contextos.
- Denotar paréntesis.
- Usar el signo “igual”.</td><td rowspan="4">Fichas
12 (ap. e, f, g y h), 13 y 14</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Doble, mitad, triplo, más que, década.
- Signo igual (=).
- Representaciones.
- Relaciones entre expresiones.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
En esta sesión novena se sigue insistiendo en la conversión del lenguaje habitual al lenguaje simbólico en contextos muy familiares a los alumnos: edades, boliches, pesos, medida de superficies, número de alumnos, entradas de cine, etc. Se trabaja con variables predeterminadas por los enunciados o con las que eligen los estudiantes.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Se pretende constatar si los alumnos al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal” (C_1) y “contextualizar el lenguaje algebraico” (C_2) e “interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual” (C_3), lo hacen de manera adecuada.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">10ª Sesión
Operatividad Básica.
Uso e interpretación de paréntesis.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Reconocer implícitamente términos de una expresión algebraica.
- Aceptar respuestas abiertas.
- Realizar operatividad básica con términos algebraicos usando paréntesis.</td><td rowspan="4">Fichas
15</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Términos semejantes.
- Términos opuestos.
- Operaciones aditivas con monomios, binomios y trinomios, incluyendo paréntesis.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
Esta sesión es un repaso de operatividad básica en contextos aditivos con expresiones algebraicas donde se utilizan diferentes variables: a, b, c, x, y, t, y paréntesis.
Se presentan, en algunos casos, las mismas expresiones con variables distintas: “(a + b) + (a - b)” y “(x + y) + (x - y)”.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Se pretende observar el dominio de los alumnos al “realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis” (O_1), “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2) con énfasis en las dificultades que presenta el signo menos (-) delante o dentro del paréntesis, la aceptación de respuestas abiertas y si esta aceptación depende de que la expresión sea abierta desde su planteamiento o si es consecuencia de cálculos operacionales realizados previamente.</td></tr>
</table>

11ª Sesión Operatividad Básica Conversiones entre diferentes representaciones semióticas. Denotación, uso e interpretación de paréntesis.	
Objetivos - Reconocer implícitamente términos de una expresión algebraica. - Aceptar respuestas abiertas. - Realizar operatividad básica con términos algebraicos usando paréntesis. - Representar en lenguaje simbólico elementos que figuran dentro de enunciados verbales en distintos contextos. - Denotar, usar e interpretar paréntesis. - Usar e interpretar distintas expresiones del signo “igual”.	**Fichas** 15 bis
Contenidos a tratar - Términos semejantes. - Términos opuestos. - Doble, triplo, cuádruplo, menos que. - Operaciones aditivas y multiplicativas con monomios, binomios y trinomios, incluyendo paréntesis. - Relaciones entre expresiones. - Representaciones.	
Descripción de contenidos a tratar Esta sesión como la anterior y la siguiente es de integración y se trabaja la operatividad básica en contextos aditivos y multiplicativos con paréntesis utilizando monomios y binomios. Se realizan conversiones de representaciones semióticas desde el lenguaje habitual a la representación formal en situaciones, contextualizadas o no.	
Intención de la investigación Se pretende observar el dominio de los alumnos al “realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis” (O_1), “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2) con énfasis en las dificultades que presenta el signo menos (-) delante o dentro del paréntesis, la aceptación de respuestas abiertas y si esta aceptación depende de que la expresión sea abierta desde su planteamiento o si es consecuencia de cálculos operacionales realizados previamente. Asimismo se pretende detectar qué códigos utilizan y qué habilidades muestran al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal” (C_1), “contextualizar el lenguaje algebraico” (C_2) y al “interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual” (C_3).	

<table>
<tr><td colspan="2">12ª Sesión
Operatividad Básica
Conversiones entre diferentes representaciones semióticas.
Denotación y uso de paréntesis.
Perímetro de polígonos.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Aceptar respuestas abiertas.
- Representar en el S.R.F. elementos que figuran dentro de enunciados verbales en distintos contextos.
- Denotar, usar e interpretar paréntesis.
- Usar e interpretar distintas expresiones del signo “igual”.
- Aplicar el uso de paréntesis al cálculo de perímetros.</td><td rowspan="4">Fichas
15 bis y 16</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Doble, mitad, triplo, más que, menos que, cuadrado.
- Signo igual (=).
- Representaciones.
- Relaciones entre expresiones.
- Perímetro de polígonos.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
Esta sesión, también de integración, intenta de nuevo la conversión desde el lenguaje habitual al simbólico desde enunciados contextualizados o no.
Se comienza el tratamiento de la aplicación del uso de paréntesis en un contexto particular como es el del cálculo de perímetros. El concepto de perímetro al no ser el objetivo del desarrollo de esta sesión se les recuerda a los alumnos con un ejemplo donde las dimensiones y el valor del perímetro se dan con datos numéricos.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Se pretende observar el dominio de los alumnos al “realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis” (O_1), “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2) con énfasis en las dificultades que presenta el signo menos (-) delante o dentro del paréntesis, la aceptación de respuestas abiertas y si esta aceptación depende de que la expresión sea abierta desde su planteamiento o si es consecuencia de cálculos operacionales realizados previamente. Asimismo se pretende detectar qué códigos utilizan y qué habilidades muestran al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal” (C_1), “contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como objetos geométricos y como número generalizado en contextos de área y perímetro” (C_2) y al “interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual” (C_3) al trasladar “obtengo”, “es”, “son”, la idea de totalidad en expresiones verbales, etc., a la representación formal.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">13ª Sesión
Operatividad Básica
Denotación de paréntesis.
Perímetro de un polígono.
Introducción al Sistema de Representación Visual Geométrico.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
Aplicar el uso de paréntesis al cálculo de perímetros.
- Usar el rectángulo (área y lado) como unidad fundamental en la representación visual-geométrica.
- Hacer conversiones de expresiones numéricas y algebraicas sencillas (unitarias o binarias) a la representación visual-geométrica.
- Representar y establecer diferencias de expresiones binarias aditivas y multiplicativas (a + b y a . b), usando el SRVG.</td><td rowspan="4">Fichas
17, 18, 19 y 20</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Representaciones.
- Perímetro de polígonos.
- Área del rectángulo.
- Expresiones numéricas y algebraicas.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
La primera parte de esta sesión sigue con el tratamiento de operatividad básica con paréntesis en situaciones geométricas mediante dibujo de polígonos regulares e irregulares con dimensiones dadas con datos numéricos, alfanuméricos o sólo con letras usadas como objetos geométricos.
Posteriormente se introduce la representación visual- geométrica, donde los números y letras van a representar, indistintamente, un producto (área de un rectángulo) o un segmento (lado de un rectángulo), es decir, se sitúan siempre como una cantidad de un objeto bidimensional (objeto geométrico).
Trabajan las ideas básicas de esta representación y se establecen los convenios de la misma.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Se trata de analizar el uso u omisión de paréntesis al “realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis” (O_1) y “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2) así como las interpretaciones y uso del S.R.V.G. al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal (C_1), al “contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como objetos geométricos y como número generalizado en contextos de área y perímetro” (C_2), con una atención especial a las dificultades con representaciones del tipo “a + b” y “a . b”.
Por último, fijar la atención en el “interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual” (C_3).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">14ª Sesión
Traslaciones entre diferentes representaciones semióticas.</td></tr>
<tr><td>Objetivo
- Usar el rectángulo (área y lado) como unidad fundamental en la representación visual-geométrica.
- Representar binomios con existencia o no de factores comunes.</td><td rowspan="4">Fichas
21 y 22</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Binomios.
- Área del rectángulo.
- Representación.
- Operaciones aditivas con monomios y multiplicativas de monomios con binomios.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
.. Esta décimocuarta sesión se dedica a la conversión del SRVG al SRF mediante representación, de todas las formas posibles, de los términos de binomios - con existencia o no de factores comunes -, con rectángulos, para llegar a concluir con el paso de los contextos aditivos (donde existen factores comunes) a los multiplicativos (expresión de la propiedad distributiva). Primero, este planteamiento se hace con datos numéricos y luego con expresiones algebraicas.
En la última ficha se propone una actividad de “sacar factor común” sin dar ninguna orientación.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Constatar si los alumnos hacen uso o no del SRVG propuesto al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal” (C_1)y ver su comportamiento al “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2), cuando sacan factores comunes.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">15ª Sesión
- Traslaciones entre diferentes representaciones semióticas.
- Operatividad Básica.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Reconocer posibilidad de representar con un único rectángulo binomios con factores comunes.</td><td rowspan="4">Fichas
23 y 24</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Binomios.
- Área del rectángulo.
- Representación.
- Operaciones aditivas con monomios y multiplicativas de monomios con binomios.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
.. Esta décimoquinta sesión se dedica a la conversión del SRVG al SRF mediante representación, de todas las formas posibles, de los términos de binomios con rectángulos, para llegar a concluir con el paso de los contextos aditivos (donde existen factores comunes) a los multiplicativos (expresión de la propiedad distributiva). Primero, este planteamiento se hace con datos numéricos y luego con expresiones algebraicas.
En la última ficha se propone una actividad de “sacara factor común” sin dar ninguna orientación.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Constatar si los alumnos hacen uso o no del S.R.V.G. propuesto al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal” (C_1)y ver su comportamiento al “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2), cuando sacan factores comunes.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">16ª Sesión
Uso del SRVG.
Traslaciones entre diferentes representaciones semióticas.
Introducción al esquema de visualización simplificada.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Reconocer relación entre la representación de un producto y el área de un rectángulo.
- Reconocer relación entre la representación de la propiedad distributiva y el área de un rectángulo con dimensiones subdivididas.
- Conocer y comprender el esquema de visualización simplificada como conexión entre el SRVG y el SRF.</td><td rowspan="4">Fichas
25, 26, 27, 28 y 29 (ap. a)</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Expresiones numéricas y algebraicas.
- Cálculo explícito de áreas de rectángulos.
- Esquema de visualización simplificada.
- Propiedad distributiva por la izquierda y por la derecha y la doble distributiva.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
En esta sesión se comienza por representar un producto como el área de un rectángulo de dimensiones, los factores del producto. Se presenta un modelo de ello con dimensiones dadas con datos numéricos y posteriormente se trabaja con datos alfanuméricos.
Se orienta luego el trabajo al cálculo de áreas de rectángulos donde los alumnos tendrá que hacer uso de los paréntesis y practicar el desarrollo de la propiedad distributiva por la izquierda y por la derecha y la doble distributiva, con lo cual se van integrando los contenidos tratados.
Con esta perspectiva se plantea un esquema de cuadro de doble entrada que se ha llamado de “visualización simplificada” que recoge la unidad fundamental propuesta para expresar un término de una expresión algebraica y permite visualizar el desarrollo de la propiedad distributiva
Para terminar esta sesión se trabaja la propiedad distributiva, por la izquierda y por la derecha, con dos representaciones yuxtapuestas, la del SRVG y la del SRF o numérica.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Observar la dificultad del nuevo esquema propuesto y la aceptación y enriquecimiento del trabajo con yuxtaposición de sistemas de representación al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal” (C_1), contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como objetos geométricos y como número generalizado en contexto de área (C_2) e “interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual” (C_3).
Asimismo se pretende observar el comportamiento de los alumnos al “realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis” (O_1) y “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2), cuando desarrollan las expresiones de las áreas con las dimensiones sin subdividir o subdivididas así como en el desarrollo de la propiedad distributiva.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">17ª Sesión
Uso del SRVG.
Uso del esquema de visualización simplificada
Traslaciones entre diferentes representaciones semióticas.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Conocer y comprender el esquema de visualización simplificada como conexión entre el SRVG y el SRF.
- Hacer conversiones desde el SRVG al SRF y viceversa.
- Realizar yuxtaposición de sistemas de representación.</td><td rowspan="4">Fichas
29 (ap. b y c)
y 30</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Esquema de Visualización simplificada.
- Area de rectángulos.
- Expresión algebraica.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
En esta sesión, después de plantear un modelo que recoge por yuxtaposición tres situaciones del área del rectángulo: la del SRVG, la del esquema de visualización simplificada como conexión entre el anterior y el SRF, se realizan actividades donde hay dos situaciones ausentes. En las primeras actividades se proporciona una de las representaciones para que los alumnos realicen las dos restantes, posteriormente, después de volver a darles el modelo totalmente resuelto, los alumnos han de hace las tres representaciones de cada una delas actividades propuestas.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Analizar la dificultad o facilidad que proporciona el uso de las tres representaciones trabajadas al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal” (C_1), .contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como objetos geométricos y como número generalizado en contexto de área (C_2) y al “interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual” (C_3).
Esta sesión, como la anterior, permite observar las habilidades operacionales al “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis (O_2), en la propiedad distributiva resultante del cálculo del área de un rectángulo con dimensiones subdividas, y al “realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis” en los resultados de la aplicación de la propiedad distributiva.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">18ª Sesión
Traslaciones entre diferentes representaciones semióticas.
Propiedad distributiva</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Yuxtaponer sistemas de representación.
- Representar el desarrollo de la propiedad distributiva mediante el SRVG, el esquema de VS y el SRF.</td><td rowspan="4">Fichas
31, 32, 33 (ac. 1 y 2b) y 34 (ap. a, b y c)29 (ap. b y c). 33 bis</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Propiedad distributiva por la izquierda, por la derecha y la doble distributiva.
- Producto de binomios con términos negativos.
- Área del rectángulo.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
En esta sesión se sigue con el tratamiento de los distintos sistemas de representación yuxtapuestos. Se comienza recordando las tres representaciones de la propiedad distributiva para luego intentar que los alumnos, a partir del planteamiento de una expresión de la forma “a (b + c)” o “(a +b) c” y sus casos particulares con a, b, o c expresados con números, hagan la representación en el S.R.V.G., la V.S. y el desarrollo en el S.R.F.
La sesión se continúa con el mismo planteamiento que el anterior para expresiones de la doble distributiva como es “(a + b) (c + d)” y sus casos particulares.
En esta sesión se plantean operaciones con expresiones con términos negativos y sus casos particulares para realizar el mismo proceso que con las actividades anteriores, es decir, hacer las tres representaciones arriba indicadas.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Constatar el uso e interpretación de la yuxtaposición de registros al hacer conversiones entre el registro formal y el registro geométrico (C_1) al “contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como objetos geométricos y como número generalizado en contextos de área y perímetro” (C_2) y al “interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual (C_3), así como analizar la capacidad de extender el trabajo con términos positivos a las expresiones con términos negativos en operatividad básica al “Realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2), cuando desarrollan las expresiones de las áreas con las dimensiones sin subdividir o subdivididas así como en el desarrollo de la propiedad distributiva.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">19ª Sesión
Traslaciones entre diferentes representaciones semióticas.
Operatividad básica.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Hacer conversiones de lenguajes en contextos de áreas y perímetros.
- Extender la comprensión del producto de binomios con términos positivos al caso en que los términos sean negativos.</td><td rowspan="4">Fichas
34 (ap. d y e)
34 bis</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Propiedad doble distributiva.
- Área y perímetro de rectángulos.
- Expresiones numéricas y algebraicas.
- Producto de trinomios.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
Se comienza esta sesión con el tratamiento de la propiedad doble distributiva para luego pasar a ocuparse de producto de trinomios haciendo uso del SRVG y de la VS, para luego trasladar la solución al SRF.
En el trabajo restante de la sesión, se plantea el cálculo de áreas y perímetros de rectángulos con datos alfanuméricos.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Constatar los códigos utilizados al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal” (C_1), al “contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como objetos geométricos y como número generalizado en contextos de área y perímetro” (C_2) y al interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual así como analizar la capacidad de extender el trabajo con binomios a los trinomios al “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">20ª Sesión
Integración.
Propiedad distributiva.
Simplificación de expresiones.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Extender la comprensión del producto de binomios con términos positivos al caso en que los términos sean negativos.
- Simplificar expresiones algebraicas.</td><td rowspan="4">Fichas
35 y 35 bis</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Operatividad básica en contextos aditivos y multiplicativos: reducción de términos semejantes, propiedad distributiva.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
Se comienza la sesión trabajando, como en la sesión anterior, productos con términos negativos.
Finaliza la sesión con el planteamiento de cálculo y simplificación de resultados, si procede, de expresiones de la propiedad distributiva por la izquierda, por la derecha y doble distributiva.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Detectar la extensión de la representación en el S.R.V.G. y con el esquema de la visualización simplifica desde el producto de binomios con términos positivos al de binomios con términos negativos, así como el proceso seguido por los estudiantes en el cálculo de operatividad básica al “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis (O_2) y “realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis” (O_1), con los resultados anteriores, en especial el uso del signo igual (C_3).</td></tr>
</table>

21ª Sesión - Sustitución formal - Uso del paréntesis.	
Objetivos - Reconocer la sustitución formal como cálculo algebraico importante. - Determinar valor numérico de expresiones algebraicas donde aparecen o no paréntesis. - Establecer comparaciones entre expresiones dela forma “n a + b” y “ n (a + b)” o “(a + b) n”. - Usar pasos intermedios en la obtención del valor de identidades notables : (a^2 - b^2). - Aplicar la sustitución formal (particularización y generalización) para calcular el valor de variables que aparecen en varias expresiones simultáneas.	**Fichas** 36, 37 y 38
Contenidos a tratar - Operaciones básicas en expresiones numéricas y algebraicas: operaciones aditivas, multiplicativas, propiedad distributiva por la izquierda, por la derecha y doble distributiva.	
Descripción de contenidos a tratar En esta sesión los alumnos van, de manera gradual, introduciéndose en la sustitución formal. En la primera parte de esta sesión se pretende que el alumno comience por el cálculo del valor numérico de expresiones sencillas y con valores sencillos, números de una cifra o decenas netas completando una tabla con las expresiones dadas. Luego, se introduce la sustitución formal desde el lenguaje habitual con expresiones de la forma “a + b”, “a . b”, “m a - n b” y “m a + n . b”, donde “a” y “b” en las dos primeras formas, o “m” y “n” en las dos últimas, son números conocidos. Posteriormente se plantea cálculo sencillo con términos alfanuméricos, donde se incluye: cálculo de valor numérico reconocimiento de respuestas abiertas y generalización, donde una variable se sustituye por una expresión algebraica. Se concluye con el planteamiento de cálculo de valores de variables donde se conoce el valor de otras variables o relaciones entre ellas.	
Intención de la investigación En toda esta sesión se pretende observar las sustituciones que hacen los alumnos y la interpretación que hacen de las letras en cada caso, así como la incidencia del uso del paréntesis en esa sustitución e interpretación al “hacer sustituciones formales referidas tanto a los procesos de particularizar como generalizar (O_3) y sus correspondientes “operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis” (O_1) y con “operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos,, con especial atención las denotaciones del paréntesis (O_2), e “interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual” (C_3).	

<table>
<tr><td colspan="2">22ª Sesión
- Sustitución formal
- Operaciones básicas: contextos aditivos y multiplicativos.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Reconocer sustituciones en equivalencias ya establecidas.</td><td rowspan="4">Fichas
39 y 40</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Particularización y generalización en la sustitución formal.
- Factores comunes en una expresión algebraica.
- Divisores de un número.
- Propiedad conmutativa, asociativa y distributiva en la operatividad básica con expresiones algebraicas.
- Potencias cuadradas de binomios.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
Esta sesión se puede considerar de integración de operatividad básica con y sin paréntesis, ya que permite analizar la asimilación de las propiedades propias de la sustitución formal (particularización y generalización), así como propiedades de los números y las letras y propiedades de las operaciones aditivas y multiplicativas realizadas con ellos.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Se propone analizar aplicaciones al "hacer sustituciones formales referidas tanto a los procesos de particularizar como a generalizar.
en diferentes procesos matemáticos como: generalización (términos numéricos que se reemplazan por variables), simplificación (expresiones parciales de una expresión dada son reemplazadas por variables), eliminación (variables implicadas en una sustitución, son suprimidas), complicación estructural (las variables en una expresión son reemplazadas por expresiones dadas) o particularización (las variables son reemplazadas por números para verificar ciertas expresiones) al “realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis” (O_1), “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2) e “interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual” (C_3).</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">23ª Sesión
- Sustitución formal.
- Operatividad básica.</td></tr>
<tr><td>Objetivos
- Facilitar procesos de operaciones mediante organización propia de la jerarquía de las mismas.
- Plantear cálculos en operaciones básicas con diagramas no lineales</td><td rowspan="4">Fichas
41, 41 bis, a y 45 bis, b</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Operaciones aditivas y multiplicativas con binomios numéricos y alfanuméricos.
- Sustitución formal.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
Se plantea el cálculo en operaciones básicas con diagramas no lineales donde se organizan las instrucciones que dan la operaciones a realizar, en esquemas semejantes a un pequeño ordenador.
Se comienza utilizando sólo números, luego se hace con letras y posteriormente con variables que, más tarde, son sustituidas por números o expresiones, algebraicas o no.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Observar qué papel juegan los diagramas no lineales al “realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis” (O_1), realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2) y “hacer sustituciones formales referidas tanto a los procesos de particularizar como a generalizar” (O_3), y, si el comportamiento de los alumnos en su trabajo es diferente usando diagramas no lineales para cálculo aritmético que para el algebraico.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">24ª Sesión
Integración:
Operatividad básica
Traslaciones entre diferentes representaciones semióticas.
Sustitución formal.</td></tr>
<tr><td>Objetivo
- Operatividad básica con expresiones algebraicas en contextos aditivos y multiplicativos.
- Calcular perímetros y áreas de polígonos.
- Hacer uso de la yuxtaposición de Sistemas de Representación.
- Reconocer sustituciones en equivalencias ya establecidas.
- Plantear cálculos en operaciones básicas con diagramas no lineales</td><td rowspan="4">Fichas
41 bis, b</td></tr>
<tr><td>Contenidos a tratar
- Área y perímetro de polígonos.
- Operaciones aditivas y multiplicativas: Propiedad distributiva, sacar factor común.</td></tr>
<tr><td>Descripción de contenidos a tratar
En esta última sesión, previa a la nueva aplicación de test de habilidades algebraicas, se pretende que los alumnos repasen los distintos contenidos conceptuales y procedimentales cuyo tratamiento se ha realizado a lo largo de las sesiones anteriores, por eso no se incorpora nada nuevo ni en fondo ni en forma.</td></tr>
<tr><td>Intención de la investigación
Se pretende detectar las destrezas y habilidades adquiridas por los alumnos a lo largo de la instrucción, así como el significado que han adquirido del uso de las letras y el dominio de la sintaxis y semántica de los registros presentados al “realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis” (O_1), al “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2), al “hacer sustituciones formales referidas tanto a los procesos de particularizar como a generalizar” (O_3), y al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal” (C1), al “contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como objetos geométricos y como número generalizado en contextos de área y perímetro” (C_2) y al “interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual” (C_3).</td></tr>
</table>

Los estudios sobre expresiones algebraicas y sobre ecuaciones lineales con una incógnita están integrados en la investigación de este Proyecto y responden a los objetivos generales el “estudiar los aspectos cognitivos (habilidades cognitivas de carácter operacional (H.C.C.O.) y habilidades cognitivas de carácter conceptual (H.C.C.C.) más relevantes, del pensamiento algebraico con alumnos de 12 a 14 años” (objetivo número 1) y a “estudiar y organizar las dificultades, obstáculos y errores que se dan en el aprendizaje del lenguaje algebraico” (objetivo número 4). Por ello ha sido necesario categorizar las habilidades cognitivas de carácter operacional y conceptual. Asimismo estos estudios han ido orientados a analizar el uso y comprensión de los registros o sistemas de representación utilizados en el trabajo con las expresiones algebraicas, su sintaxis y su semántica, así como la conversión de unos registros en otros.

Se han llevado a cabo analizando las citadas habilidades y uso de sistemas de representación en los cuestionarios, test de habilidades operacionales y conceptuales, cuadernos de clase que forman parte del DISEA (I y II) y DISEC, y el resultado de las entrevistas individuales.

Se pueden distinguir en estos estudios sobre expresiones algebraicas y sobre ecuaciones, tres etapas: una primera correspondiente al periodo anterior a la aplicación del DISEA y DISEC, y, dos, relacionadas respectivamente con la primera (DISEA I y DISEC) y segunda aplicación del diseño (DISEA II).

3.5. EL DISEÑO DEL TEST PARA EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y ECUACIONES LINEALES CON UNA INCÓGNITA

Elaborar instrumentos de medida, constituye un objetivo de nuestra investigación. Los trabajos para la elaboración del test comienzan en la segunda etapa de nuestra investigación y suponen la aplicación de unos Cuestionarios y la elaboración de un Pretest-Postest a propósito para observar el comportamiento de los alumnos al trabajar con los sistemas de representación visual geométrico y analizar las habilidades operacionales y conceptuales presentadas por los estudiantes en el tratamiento inicial del álgebra, con el fin de ir concretando las posibles causas de las dificultades en el sistema de representación formal algebraico, y es en la tercera etapa en la que se consolida el test definitivo.

Con más detalles la elaboración y validación del test definitivo supone, en una primera fase, nuestra investigación orientada hacia la detección de problemas y causas de dificultades en la enseñanza-aprendizaje del álgebra en el nivel escolar citado, basándonos fundamentalmente en nuestra experiencia y en la revisión de la literatura, se elaboraron los cuestionarios C_1, C_2, C_3 y C_4, que se adjuntan en el anexo 1, 2, 3 y 4 respectivamente, como “examen diagnóstico”. Posteriormente se diseñaron un Pretest y el Postest, que nos permitieron sacar conclusiones generales, tener hipótesis de trabajo más claras que conllevaron a la fase siguiente en la que se elaboró y diseñaron los ítems del Test definitivo, tendentes a poder detectar dificultades ya más concretas en este nivel.

Comenzamos por comentar los cuestionarios C_1 y C_2 que forman un primer bloque y corresponden a los utilizados en una primera fase de aplicación a distintos grupos de dos países (México y España) y diferentes niveles escolares y académicos. Los cuestionarios C_3 y C_4 están relacionados directamente con la fase de instrucción realizada con el diseño oficial en el Centro nº 1, avanzando más en nuestro análisis se construyeron, previos al Test, un Pretest y Postest, aplicados antes y después de la instrucción con el DISEA y DISEC, no formados exactamente por los mismos ítems.

El test se validó en el curso 94-95, concretamente en el segundo trimestre, pasándolo previamente a dos grupos de 7º y 8º en el Centro nº 2 (23 de 7º y 19 de 8º). En su aplicación colaboraron los profesores de Matemáticas de las aulas respectivas del Centro codificado como nº 2. Fue diseñado para realizarse en una sesión de 50 minutos cada una, el equivalente a la hora de clase de Matemáticas.

Posteriormente se pasó la Prueba T, en el tercer trimestre del curso 1995-96 en el Centro nº 3 a una población de 23 alumnos.

Se muestra a continuación (tabla 3.13), un esquema de la situación expresada.

ETAPAS	CURSOS	FOCOS	FASES
1ª **Revisión**	1988- 1990		Revisión "literatura". Revisión Curricular. Intuición del problema.
2ª **Exploratoria**	1990 - 92	**I**. Causas de las dificultades en el lenguaje algebraico.	**I.1 (90-91)** Cuestionario 1 (C_1) Cuestionario 2 (C_2)
			I.2. (91-92) Cuestionario 3 (C_3) Cuestionario 4 (C_4)
Experimental	1992 - 94	**II.** Elaboración Pretest y Postest de habilidades algebraicas	**II.1. (92-93)** Elaboración Pretest y Postest de habilidades algebraicas (conceptuales y operacionales): Pr. y Po. Aplicación del Pretest y Postest.
			II.2. (93-94) Revisión Pretest y Postest habilidades algebraicas.
3ª **Experimental**	1994 - 96	**III.** Elaboración del Test. Validación Test habilidades algebraicas.	**III.1. (94-95)** Elaboración del Est (TA y TB) Aplicación del Test. Validación del Test..
			III.2 (95-96) Elaboración de la Prueba T. Aplicación de la Prueba T.

Tabla 3.13

Como es natural en la elaboración tanto de los Cuestionarios como del Test definitivo se ha tenido en cuenta diferentes fuentes, en particular la prueba escrita del C.S.M.S. (Conceptos de Matemáticas y Ciencias de la Secundaria). Dentro de este Proyecto se realizó una basta investigación sobre la enseñanza de las matemáticas en temas específicos, estudiando el comportamiento de alumnos de 11 a 16 años y concentrando su atención en la adquisición de conceptos más que en la repetición de destrezas adquiridas con anticipación. Por esta razón nos pareció interesante considerar del trabajo del C.S.M.S., el capítulo referente al Álgebra, en nuestra investigación y que significó una importante aportación en tanto que estaba basado en muchos años de trabajo sistemático. Este tipo de prueba presupone un intenso trabajo ya que cada ítem debe ser diseñado, discutido y revisado cuidadosamente, teniendo en cuenta a su vez, los resultados de investigaciones relacionadas y efectuadas anteriormente y las condiciones en las cuales se va a aplicar, por eso para nosotros fue de gran ayuda como uno de los referentes. Sin embargo, nuestra investigación no se dirigía a verificar o refutar las afirmaciones de este grupo, que en este campo ha abierto perspectivas de investigación interesantes, indicando hacia qué puntos valía la pena dirigir los esfuerzos, y tampoco aspiraba como el suyo a jerarquizar niveles de dificultad de los conceptos matemáticos, sino que nuestro test está dirigido a detectar algunas dificultades, obstáculos y errores de la enseñanza-aprendizaje del álgebra, previamente a la aparición de un desarrollo curricular dado, y que nos diera pautas para el diseño de actividades de apoyo al mismo.

Podemos resumir como objetivos del test:

- analizar, determinar y organizar las dificultades, los obstáculos y los errores de los alumnos, en Álgebra.
- recoger información para diseñar una propuesta “global” de enseñanza-aprendizaje del álgebra que ayude a evitar y corregir estas dificultades, obstáculos y errores.
- construir un test que permita al profesorado diagnosticar la situación de sus alumnos con relación al lenguaje algebraico.

De manera más explícita nos vamos a referir a cada uno de los elementos construidos: El Cuestionario 1 (anexo 1) lo forman 10 preguntas que agrupamos en: 1) Operaciones aritméticas básicas (+, -, x, ÷) en fracciones con números de uno y dos dígitos, cálculo de valores numéricos y resolución de ecuaciones sencillas; 2) Cálculo de áreas y perímetros; 3) Uso de expresiones “pre-algebraicas”; 4) Relación de diseños de figuras del plano (dibujo de rectángulos); 5) Problemas de enunciado verbal.

El Cuestionario 2 (anexo 2) formado por la propuesta de ejercicios relacionados con expresiones algebraicas y con la resolución de ecuaciones sencillas con una incógnita.

Los relacionados con las expresiones algebraicas, 10 ítems, muestran distintas situaciones del área del rectángulo mediante un modelo geométrico, la esquematización de la misma situación o visualización simplificada y la expresión algebraica. Se hizo un comentario instruccional con el ejemplo que se presentaba y se solicitaba completar en cada ejercicio dos situaciones ausentes. Se pretendía que indistintamente los alumnos hicieran conversión de registros entre las maneras diferentes de plantear una misma situación.

Con relación a ecuaciones algebraicas se utilizaron dos registros, el geométrico (5 ítems) y el de la balanza (5 ítems). Al igual que en la primera prueba se hicieron comentarios instruccionales antes de pedir a los estudiantes que completasen las dos situaciones ausentes en cada ejercicio. Consta de 19 preguntas en las que los alumnos tenían que completar dos situaciones ausentes. El objetivo, dentro del general, de búsqueda de dificultades, obstáculos y errores, fue analizar las dificultades semánticas y de sintaxis de lenguaje de distintos sistemas de representación (S.R.V.G. y S.R.E.B.), frente a la semántica y la sintaxis del álgebra, con referencia a trabajos anteriores de Chalouh- Herscovics (1988) y Filloy - Rojano (1989). La construcción e interpretación se hace sobre el sistema formal, el del rectángulo y la visualización simplificada.

El Cuestionario 3 (anexo 3) de diagnóstico sobre el conocimiento pre-algebraico pretende observar la asimilación y comprensión por parte del alumno del conocimiento escolarizado, previo a las primeras expresiones y ecuaciones no aritméticas, esto es la pre-álgebra, y facilitar datos para el análisis de comportamientos espontáneos de los alumnos en la realización de operaciones básicas con distintos tipos de números, así como el cálculo de áreas y perímetro con dimensiones expresadas numérica, simbólica o alfanuméricamente. Se desea observar asimismo la reacción de los alumnos ante la incógnita expresada por “x” o por un portavariable para poder compararlo posteriormente con los comportamientos adquiridos después de una instrucción.

El Cuestionario 4 (anexo 4) se refiere en cuanto a expresiones algebraicas a la operatividad básica con ellas así como a conversión de lenguajes, sacar factor común y sustitución formal particularizada en cálculo de valores numéricos. En relación a las ecuaciones hay una parte común con el cuestionario número 2 que es precisamente el uso del sistema de representación visual geométrico para la resolución de ecuaciones y un planteamiento añadido que es el del uso de la balanza. Tanto el S.R.V.G. como el S.R.E.B. actúan de manera yuxtapuesta al S. R. F.

Es en el curso 92-93 donde se ha implementado el DISEA I y DISEC en 7º de E.G.B., cuando se elaboró, a partir de las consideraciones anteriores, un Pretest para pasar a los alumnos antes de la instrucción y un Postest, después de la instrucción. El Pretest está formados por 14 preguntas relativas a expresiones algebraicas y 14, relativas a ecuaciones sencillas que están en torno a tres ejes: a) numérico, aritmético o de medida numérica, b) aritmético, previo al álgebra y c) algebraico. El Postest por su parte también formado de dos partes, una relativa a expresiones con 12 preguntas y otra, a ecuaciones, también con doce preguntas. No están formadas estas preguntas exactamente por los mismos ítems pero sí estos están todos en torno a los tres ejes anteriores: a) numérico, aritmético o de medida numérica, b) aritmético, previo al álgebra y c) algebraico. Una diferencia básica con los cuestionarios citados es que no se plantea el uso del S. R. V. G. y la Balanza de manera directa.

Después de los resultados de los estudios anteriores, se considera un test definitivo (anexo 7) que se pretende estudiar en términos de fiabilidad y validez, dentro del paradigma cuantitativo.

Está formado por 30 preguntas que para su mejor aplicación se han distribuido en dos pruebas, TA y TB, (anexo 7, partes 1ª y 2ª) de 16 y 14 preguntas respectivamente.

Se trata de una prueba genérica para dar información de lenguaje algebraico, ya que en nuestro trabajo abordamos el paso del pensamiento numérico al pensamiento algebraico.

Con los ítems que forman las preguntas de TA, se pretende detectar habilidades cognitivas de carácter operacional y conceptual de un grupo de alumnos a través de ejercicios claramente orientados hacia su comportamiento frente a expresiones donde se ha de realizar operatividad básica, en operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis o utilizándolos en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones de los mismos así como a hacer sustituciones formales por considerarlo un instrumento de cálculo algebraico importante por sus aplicaciones en la generalización, simplificación, eliminación, complicación estructural o particularización.

Asimismo con ellos se desea analizar cómo los estudiantes hacen conversiones entre los diferentes registros, cómo contextualizan el lenguaje algebraico y cómo interpretan y comprenden el significado de los signos, las letras y las expresiones algebraicas.

La parte TB se dedica en su totalidad a ecuaciones y pretende medir el nivel de eficiencia del alumnado en el uso de las reglas de transformación y procedimientos de resolución de ecuaciones sencillas y conocer el tipo de estrategia que utilizan para ello, así como qué comprobación e interpretación hacen de las soluciones de las mismas considerando también importante fijarnos a nivel conceptual en cómo realizan la conversión de lenguajes y si son capaces de reconocer expresiones equivalentes expresadas en distintos lenguajes

Para terminar la presentación de estos Cuestionarios y Test, nos referiremos a la última prueba utilizada en el curso 1995-96 (Prueba T) con el grupo de 8º de alumnos del Centro nº 3, que forma parte del contexto de este trabajo de investigación, como consecuencia de la reflexión de todo el período anterior, y en especial del Test que se ha analizado y validado como tal, el curso anterior.

Aquí el nivel de los alumnos y su edad avanza hacia 8º y 13-14 años, respectivamente.

En esta Prueba T (anexo 8), sólo de expresiones algebraicas, aplicada antes (T1) y después de la instrucción (T2), se ha tomado básicamente el test anterior y se ha intensificado el uso de los paréntesis. Consta de 20 preguntas.

En ella, consideramos la operatividad básica en contextos aditivos y multiplicativos, tanto con números como con expresiones algebraicas, fundamentalmente con paréntesis. Es esencial el estudio de la designación y denotación de los mismos. Sólo se consideran ítems sin paréntesis si se trata de aceptar respuestas abiertas como consecuencia de la falta de clausura de las expresiones planteadas.

Se mantiene el tratamiento de la sustitución formal tanto particularizando como generalizando.

A nivel conceptual se persigue analizar los registros de representación así como el uso e interpretación de los símbolos, las letras y los paréntesis así como el del signo igual en particular, al hacer la conversión de lenguajes, al contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como objetos geométricos y como número generalizado, en contextos de área y perímetro.

Con relación a la construcción de los ítems del test, dado que en este trabajo que presentamos hay un capítulo dedicado específicamente a la elaboración de un test, capítulo 4, remitimos a él para observar la construcción de los ítems del test a que nos referimos.

Con relación a la fiabilidad y validez del test, el análisis psicométrico realizado sobre el test se ha hecho mediante el programa BILOG (DOS-BILOG V3.04), los resultados se exponen igualmente en el Capítulo 4.

La codificación de los datos, admite formas diversas, nosotros en diferentes partes de la investigación, a la hora de resumir los resultados del Test, utilizamos la experiencia del Shell Centre La forma de sintetizar, resumir los resultados del Test, es la utilizada por la experiencia del Shell Centre, por Bell, Malone y Taylor (1987) en *Algebra. An Exploratory Teaching Experiment.* Viene resumida en la siguiente expresión general:

$$-\frac{e_{fi}}{b_i} \qquad +\frac{e_i - e_{ff}}{e_i}$$

donde, siendo b_i = bien (aciertos) en el pretest,
b_f = bien (aciertos) en el postest,
e_i = errorres del pretest,
e_f = errorres del postest,
e_{fi} = errorres del postest no cometidos en el pretest,
e_{ff} = errorres del postest cometidos en el pretest,

se deduce que:

1) $b_i + e_i$ = tamaño de la muestra por número de cuestiones
$b_f + e_f$ = tamaño de la muestra por número de cuestiones
$b_f + e_{fi} + e_{ff}$ = tamaño de la muestra por número de cuestiones

2) $$\frac{e_i - e_{ff}}{e_i} = 1 - \frac{e_{ff}}{e_i} \geq 0$$

luego $\frac{e_{ff}}{e_i}$ no puede ser mayor que 1 nunca.

3) $\frac{e_{ff}}{e_i} = 0$ es la solución óptima, porque no aparecen errores

Por ejemplo, en el ítem 9 de la Prueba T, los resultados han sido -1/13 y

+3/4; esto significa que de las 17 posibles respuestas para este grupo (17 estudiantes analizados), 13 fueron correctas en la primera aplicación de la prueba (T1), una de estas respuestas correctas resultó incorrecta en la 2ª aplicación de la Prueba T (T2), y hubo 4 respuestas erróneas inicialmente, de las cuales 3 resultaron ser correctas en T2. Por lo tanto, “uno de trece bajan y tres de cuatro suben”.

3.6. LAS ESCALAS DE ACTITUDES

El desarrollo de una actitud positiva hacia las distintas materias de la educación, es un tema que está cobrando gran importancia actualmente. En nuestra investigación propusimos como objetivo: 1º) valorar cuál era la actitud de alumnos de 7º y 8º hacia las Matemáticas y hacia el Álgebra, 2º) analizar las analogías y diferencias entre ambas, y, 3º) estudiar la evolución de la actitud hacia las Matemáticas en cursos de 3º a 8º de E.G.B.

El primer problema que tuvimos que afrontar fue la definición del término actitud, para, en base a ella, poder elegir el instrumento de medida más adecuado.

A partir de las ideas de Hart (1989), construimos una definición multidimensional de actitud, como el resultado de las siguientes componentes:

* componente afectiva, que engloba los sentimientos del alumno hacia las Matemáticas.
* componente comportamental y de implicación, que expresa el comportamiento del estudiante hacia la materia y lo que el alumno está dispuesto a hacer en clases de Matemáticas.
* componente cognoscitiva y contextual, que refleja la propia opinión sobre esta materia del alumno y de las personas que le rodean.
* componente de creencias sobre sí mismo con respecto hacia las matemáticas.

Una amplia variedad de instrumentos han sido usados en las investigaciones para medir las actitudes en general o las actitudes hacia las matemáticas en particular. Allport (1935) escribió: “*las actitudes hoy son medidas más exitosamente que lo que son definidas*” (citado por Kulm, 1980).

Kulm (1980) señala que Kiesler, Collins y Miller (1969) reúnen en cinco categorías los instrumentos utilizados para medir las actitudes: Escalas (Thurstone, Likert -en mayor cantidad- y diferencial semántico), observaciones de conducta, reacción a estímulos estructurados (como fotografías, dibujos, escenarios u otras situaciones controladas), ejecución de tareas (a partir de una tarea que ejecuta el estudiante podría inferirse la naturaleza de la actitud del sujeto hacia ella) y reacciones fisiológicas.

Leder (1985, 1992) presenta los siguientes instrumentos de medida como los más utilizados en los trabajos presentados a los últimos PME: escalas de Thurstone, escalas de Likert, escalas de Guttman, escalas de diferencial semántico, inventarios y listados, orden de preferencias, técnicas proyectivas, aunque en la actualidad las preferencias se inclinan por el procedimiento Likert (Leder, 1993), ya que éste permite obtener con relativa facilidad escalas de actitudes con altos índices de validez y fiabilidad. También se está utilizando observaciones clínicas y antropológicas y medidas fisiológicas.

En este trabajo, hemos optado, como instrumento de medida, por una escala de tipo Likert, por ser como hemos visto uno de los métodos más consolidado, por sus múltiples ventajas, tales como que permite el anonimato, se puede pasar a un número grande de niños, los datos obtenidos son fácilmente analizables y puede ser administrada por terceras personas.

Hicimos una revisión de las escalas existentes para medir la actitud, con el fin de buscar un instrumento científicamente construido, que respondiera a nuestros objetivos y que hubiera sido desarrollado en una población con características similares a la nuestra.

A partir de Aiken (1976) y otros, Gairín (1986) construyó una escala (con coeficiente Alpha de correlación de .84, coeficiente bastante alto para medidas de actitudes) que la administró a niños españoles de edades que abarcaban a las de nuestra población. A partir de ella, realizando algunas modificaciones y añadiendo algunos ítems, construimos dos escalas paralelas para medir la actitud hacia las Matemáticas y hacia el Álgebra.

3.6.1 Construcción de las escalas

La prueba utilizada se puede considerar una adaptación de la elaborada por Gairín (1987). Se elaboraron así las dos escalas paralelas respecto a "actitud hacia las Matemáticas" y "actitud hacia el Álgebra", la primera de las cuales fue usada también por Hernández (1997).

Estas escalas están formadas por una serie de frases (24) en las que el alumno debe optar entre las respuestas *"de acuerdo", "sin opinión" o "en desacuerdo"* en cada una de ellas. Unas vienen en forma positiva y otras en forma negativa.

Esta escala fue presentada a un grupo de investigación como "grupo de expertos" para que hicieran un estudio crítico de la misma, y a un grupo de alumnos de E.G.B. (10-14 años), eliminándose aquellos ítems que puntuaron menos de un 10% o más de un 90% .

A partir de esta escala elaboramos otra paralela, pero dirigida al Álgebra, ambas han sido codificadas con AM y AA (anexo 9, partes 1ª y 2ª, respectivamente).

Así, los 24 ítems quedan distribuidos de la siguiente forma:

Componente afectiva: ítems 5, 6, 7, 9, 10, 14 y 18. A esta componente se le asocia la pregunta, ¿qué sientes?

5. Amo de verdad las Matemáticas. 6. Me divierten las clases de Matemáticas. 7. Las clases de Matemáticas duran mucho tiempo. 9. No me interesan las Matemáticas. 10. Me alegro cuando no hay clases de Matemáticas. 14. Me siento mal cuando pienso en Matemáticas 18. Me gusta hacer trabajos y problemas de Matemáticas.

Componente comportamental e implicación: ítems 2, 3, 8, 12, 13 y 17. ¿Qué harías o que te preocupa?

2. En clase de Matemáticas me iría. 3. Cuando hago Matemáticas me olvido de ir a jugar. 8. Daría dinero a un amigo para que me hiciera los trabajos de Matemáticas. 12. Estoy dispuesto a hacer muchos trabajos de Matemáticas. 13. Si pudiera quitar alguna clase sería la de Matemáticas. 17. Todos los días pienso mucho en saber más Matemáticas.

Componente cognoscitiva y contextual: 11, 15, 19, 21, 22, 23 y 24. ¿Qué opinas tú y los que te rodean?

11. El conocimiento de las Matemáticas no es necesario para la mayoría de los trabajos. 15. El estudio de las Matemáticas es muy importante para mi vida. 19. Los colegios no deben trabajar las Matemáticas. 21. Las Matemáticas no sirven para nada. 22. Mis padres quieren que sepa Matemáticas. 23. La mayoría de las personas usan Matemáticas en su vida diaria. 24. La Matemática es memorizar reglas para hacer cálculos aburridos.

Componente de creencias sobre sí mismo: 1, 4, 16 y 20.

1.Me siento poco seguro cuando hago Matemáticas. 4. Las Matemáticas son más difíciles para mí que para mis demás compañeros. 16. Sé muy poco sobre Matemáticas. 20. Tengo que dedicar mucho tiempo para estudiar Matemáticas.

Estas escalas, que se contestaban de forma anónima para asegurar una mayor sinceridad en las respuestas, se complementaron con una serie de preguntas sobre la edad, sexo, curso, número de hermanos, estudios de los padres y de las madres, y necesidad de ayuda en Matemáticas.

3.6.2 Codificación de los datos

En estas escalas de tipo Likert que admiten las tres posibles respuestas citadas: de acuerdo, sin opinión y en desacuerdo, cada sujeto obtiene como puntuación global la suma de los valores correspondientes a sus respuestas en cada uno de los 24 ítems, siendo codificadas con la máxima puntuación las respuestas más acordes con una actitud positiva.

Hemos considerado las respuestas “de acuerdo” en los ítems 3, 5, 6, 12, 15, 17, 18, 22 y 23, y las respuestas “en desacuerdo” en los ítems 1, 2, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 19, 20, 21 y 24, como expresión de actitud positiva.

Se puntúan con un “2” aquellas respuestas que reflejan una “actitud favorable”, con “1” las respuestas “sin opinión”, y, por último, con un “0” las que manifiestan una “actitud negativa”.

3.6.3 Fiabilidad y validez de las escalas

1.- Escala de actitud hacia las Matemáticas

Mediante el módulo TESTAT del programa SYSTAT, analizamos la fiabilidad de la escala de la actitud hacia las matemáticas: el coeficiente Alpha-all items es .839 y el de Spearman-Brown .828 (tabla 3.14).

TEST SCORE STATISTICS				
	TOTAL	TOTAL/ 24	ODD	EVEN
Mean	25.113	1.046	11.429	13.684
Std dev	7.988	0.333	4.137	4.510
Std err	0.602	0.025	0.312	0.340
Maximum	44	1.833	22	24
Minimum	2	0.083	2	0
N cases	177	177	177	177

INTERNAL CONSISTENCY DATA	
Split-half correlation	.706
Spearman-Brown coefficient	.828
Guttman (rulon) coefficient	.826
Coefficient alpha - all items	.839
Coefficient alpha - odd items	.686
Coefficient alpha - even items	.760

Tabla 3.14

Como se puede comprobar, ambos son altos, lo que nos indica que los ítems presentan una elevada congruencia para medir entre sí el mismo constructo de actitud. Por regla general, los coeficientes de fiabilidad deben estar por encima de .90; sin embargo, en escalas de actitudes, es generalmente aceptado que la dificultad inherente a la definición de los constructos en este campo supone una disminución del coeficiente de fiabilidad de los instrumentos de medida.

Aceptamos, pues, que la fiabilidad obtenida se encuentra dentro de los márgenes aceptables.

En el anexo 18 podemos ver para cada ítem la media, la desviación típica, la correlación ítem-total y el índice de fiabilidad. La correlación ítem - total nos informa en qué medida el ítem mide lo mismo que el test total, que, en general, debe estar por encima de .20. Teniendo en cuenta que en este caso ningún ítem está por debajo de este valor, consideramos que el instrumento es aceptable.

La validez de contenido está bien asegurada, ya que se partió de un instrumento validado anteriormente y además, nos apoyamos en el juicio favorable de otros investigadores en el mismo tema, que no participaron en su construcción.

Por último, en cuanto a la validez de constructo, se realizó a través de las soluciones factoriales empleando el ANÁLISIS FACTORIAL COMÚN (Cuadras, 1981, Marascuilo y Levin, 1983) del módulo Factor del SYSTAT con rotación VARIMAX (anexo 18). Con este análisis se obtuvo una solución de cuatro factores en cada escala con valores propios superiores a 1 y explican un 46% de la varianza total de la matriz.

Hemos obtenido que los distintos ítems se agrupan en torno a cuatro factores:

Factor I: 18, 6, 17, 5, 12, 10.

Factor II: 22, 21, 23.

Factor III: 1, 4, 20.

Factor IV: 7, 2, 9, 8, 13, 24, 14, 3, 19, 16, 11, 15.

El Factor I explica un porcentaje de varianza del 13 % y refleja la componente afectiva, siendo el ítem que puntúa más alto: Me gusta hacer trabajos y problemas de matemáticas (ítem 18).

El Factor II explica un 9.5% de la varianza total, y refleja aspectos del contexto sobre la importancia de las matemáticas.

El Factor III con un porcentaje de varianza explicado del 9 %, responde a las creencias que el alumno tiene sobre sí mismo en relación con la materia.

El Factor IV explica un porcentaje de varianza del 14% y agrupa los ítems relacionados con aspectos comportamentales y cognoscitivos del estudiante hacia esta materia.

2.- Escala de actitud hacia el Álgebra

Realizamos el mismo proceso con la segunda escala: actitud hacia el álgebra.

En el anexo 18, podemos ver el estudio del análisis de los ítems. Los coeficientes de fiabilidad obtenidos son: el coeficiente Alpha-all ítems es de .825 y el de Spearman-Brown .845 (tabla 3.15).

	TEST SCORE STATISTICS			
	TOTAL	TOTAL/ 24	ODD	EVEN
Mean	28.797	1.200	14.819	13.977
Std dev	7.574	0.316	3.955	4.185
Std err	0.571	0.024	0.298	0.315
Maximum	47	1.958	23	24
Minimum	10	0.417	4	2
N cases	177	177	177	177
INTERNAL CONSISTENCY DATA				
Split-half correlation		.732		
Spearman-Brown coefficient		.845		
Guttman (rulon) coefficient		.844		
Coefficient alpha - all items		.825		
Coefficient alpha - odd items		.673		
Coefficient alpha - even items		.715		

Tabla 3.15

En esta escala todos los ítems presentan una correlación mayor de .20, por tanto podemos dar por válida también esta escala.

El estudio factorial con cuatro factores presenta leves diferencias con el anterior, quedando algún ítem fuera del grupo que le habíamos asignado:

Factor I: 1, 14, 13, 20, 4, 16, 24, 19.

Factor II: 5, 12, 6, 17, 18.

Factor III: 15, 21, 11, 23, 22.

Factor IV: 3, 8, 9, 2, 7, 10.

En este caso, el porcentaje de varianza total explicada es del 45% (anexo 18).

Una vez realizados estos estudios, creemos que estas escalas tienen la validez y fiabilidad necesarias para que su utilización sea posible.

3.6.4 Administración de las escalas

Las escalas fueron administradas a 177 alumnos de 7º de E.G.B. (90 alumnos) y a 8º de E.G.B. (87 alumnos) de un Centro privado-concertado (Centro nº 1) en el que se ha desarrollado parte de las investigaciones sobre expresiones algebraicas y ecuaciones que hemos comentado. Las pruebas se pasaron antes de dar comienzo la instrucción.

7º	8º	Niños	Niñas
90	87	52	125

Tabla 3.16

Los profesores habituales del aula fueron los encargados de pasarlas, pidiéndoseles que si daban algún tipo de explicaciones sobre los ítems, tomaran todas las precauciones necesarias para no influir en el sentido de sus respuestas. No había límite de tiempo, pero invirtieron, por término medio, una media hora.

Para analizar el tercer objetivo de este estudio (analizar la evolución de la actitud hacia las Matemáticas) en alumnos de 3º a 8º de E.G.B., utilizamos los resultados obtenidos por Hernández (1997) con alumnos de 3º a 5º de E.G.B. del mismo Centro y de otros Centros, y pasamos nuevamente la escala a una población de alumnos de 6º de E.G.B. de este Centro nº 1.

La población total fue

3º	4º	5º	6º	7º	8º	TOTAL
66 (37)	123 (31)	166 (29)	88	90	87	620

Tabla 3.17

(En paréntesis figuran los alumnos del Centro número 1donde se prosiguió el estudio).

3.7 ENTREVISTAS A LOS ALUMNOS

Una vez hecho el estudio cuantitativo de los resultados de los Pretest y Postest relacionados con Expresiones Algebraicas y Ecuaciones, teniendo en cuenta las observaciones del desarrollo del diseño de instrucción en el Curso 1992-93 y como complemento del mismo, se hizo necesario un estudio cualitativo en el cual pudimos indagar acerca del proceso que siguen los niños en su trabajo, detectar las habilidades que ponen en juego y detectar la aceptación y uso de los sistemas de representación como elemento didáctico en el aprendizaje del álgebra.

Se pretende indagar con unos alumnos concretos los elementos conceptuales, cognitivos, actitudinales y metacognitivos, y, se utiliza la entrevista individual con el fin de registrar la observación del mayor número posible de hechos en unos individuos específicos. Este método se caracteriza por centrar la investigación sobre comportamientos narrados por el sujeto, reacciones observables en el curso de la relación establecida con él y otras específicamente provocadas en condiciones sistemáticas constantes con el fin de comprenderlas y explicarlas en sus particularidades. Al respecto Taylor y Bogdan (1986) consideran, en un sentido amplio, la investigación cualitativa como "*aquélla que produce datos descriptivos: las propias palabras de las personas, habladas o escritas, y la conducta observable*".

Asimismo Stake (1995) sitúa las diferencias fundamentales entre la investigación cualitativa y la cuantitativa en tres aspectos fundamentales:1) la distinción entre la explicación y la comprensión como propósito de indagación (la cualitativa centra la indagación en los hechos, la cuantitativa fundamenta su búsqueda en las causas persiguiendo el control y la explicación; desde la cualitativa se pretende la comprensión de las complejas interrelaciones que se dan en la realidad), 2) la distinción entre el papel personal (cualitativa, interpretando los sucesos y los acontecimientos desde los inicios de la investigación) e impersonal (cuantitativa, donde el investigador debe estar "libre de valores" e interpretar una vez que los datos se han recogido y analizado estadísticamente) y 3) la distinción entre conocimiento descubierto y conocimiento construido; argumenta que en la cualitativa, el investigador no descubre sino que construye el conocimiento.

"*Cuando se busca comprender el comportamiento de los sujetos* *implicados en un proceso, intentando captar el propio proceso en su totalidad, las interacciones y significados entre los sujetos entre sí y de los sujetos con el medio ambiental, sin dejar de lado variables imprevistas que en algún momento del desarrollo de la investigación resultan incómodas o parezcan revestir escaso valor, lo más apropiado será partir de un enfoque cualitativo"* (Álvarez, 1986).

En los últimos años se ha producido un fuerte énfasis en la utilización de métodos de análisis de protocolos, a partir de entrevistas, pensamiento en voz alta, introspección, interacción en el aula, etc. De todos ellos, encontramos que la entrevista era el mejor que podía aproximarnos a nuestro objetivo de analizar las habilidades de los alumnos.

Una entrevista de investigación, como afirman Cohen y Manion (1990), es "*un diálogo iniciado por el entrevistador con el propósito específico de obtener información relevante para la investigación y enfocado por él sobre el contenido especificado… Puede servir para tres fines: como medio principal de recogida de información relativa a los objetivos, para probar hipótesis, y, como conjunción de otros métodos*".

Ginsburg y otros (1983) afirman que la entrevista tiene como fin estudiar procesos, no repuestas aisladas e identificar los mecanismos simbólicos internos que están debajo de la resolución de un problema.

Así, a partir de estos informen verbales, los investigadores extraen los significados de las expresiones, obtienen afirmaciones sobre el conocimiento y las operaciones que les atribuyen las personas, construyendo una red de inferencias sugeridas por dichas atribuciones (Newell y Simon, 1972).

La clasificación de los tipos de entrevistas presenta algunas variantes según los autores. Ginsburg y otros (1983) clasifican las entrevistas en: pensamiento en voz alta, entrevista clínica y entrevista clínica revisada, y señalan que muchos estudios utilizan métodos mixtos, que combinan varios de los anteriores.

La clasificación de Cohen y Manion (1990), similar a la de Bisquerra (1989) presenta cuatro tipos de entrevistas:

1) Entrevista estructurada, que sigue un esquema previo, y, por tanto, el contenido y los procedimientos se organizan por anticipado.
2) Entrevista no estructurada: el entrevistador puede modificar la secuencia de las preguntas, explicarlas o añadir información en función de las respuestas o demandas del entrevistado.
3) Entrevista no directiva. El entrevistador toma un rol subordinado, sus orígenes están en Freud y Carl Rogers.
4) Entevista dirigida, que consiste en una forma especial de entrevista no directiva con cierto control

A estos grupos, Bisquerra (1989) añade un quinto grupo.

5) Entrevista informal, donde el entrevistador tiene unas claves, pero las utiliza siguiendo una conversación informal sin ningún cuestionario previo;

es por lo tanto, abierta y no estructurada.

Finalmente, Romberg (1992) habla de entrevistas estructuradas y entrevistas clínicas, como métodos de investigación en educación matemática.

La planificación de la entrevista, según Bisquerra (1989), debe seguir los siguientes pasos; 1) especificar las variables objeto de estudio, 2) decidir el formato de las preguntas y el modo de respuestas, 3) especificar si se trata de hechos, opiniones o actitudes, y 4) construir el protocolo de dichas entrevistas.

También Patton (1980) expresa la idea de una entrevista semiestructurada como *“una forma o modalidad de realizar entrevista en las que se prevén los temas o tipos de cuestiones que deben ser planificados antes de su ejecución y, en el momento del desarrollo, se decide la secuencia y redacción de las preguntas que, muchas veces, van siendo marcadas por la dinámica de la conversación”*.

En cualquiera de las formas es evidente que el arte del experimentador consiste:

- no en hacer contestar sino en hacer hablar libremente y en descubrir las tendencias espontáneas en vez de analizarlas y ponerles diques,

- en situar todo síntoma en un contexto mental, en lugar de hacer abstracción de ese contexto.

En la gama o rango que recorre la observación clínica en su modalidad de entrevista individual, desde la presentación más formal, con protocolo rígido y registro de respuestas en un esquema estandarizado, a la presentación no dirigida, en la cual, el entrevistado adopta un papel de subordinación dirigida (Cohen y Manion, 1990), el instrumento de observación utilizado en la preexperiencia clínica realizada en Junio de 1993 en el estudio de “Expresiones Algebraicas” e “Introducción a las Ecuaciones”, se sitúa en un punto intermedio, correspondiente a lo que se considera un grado “menos formal”, donde el entrevistador, según como vaya discurriendo la entrevista, es libre de modificar la secuencia de preguntas, suprimir algunas, cambiar las frases o enunciados o agregar preguntas o explicarlas.

Debido a que se trata de una preexperiencia clínica con vistas a la experiencia definitiva, está claramente justificada la conveniencia de aplicar este tipo menos rígido de entrevista con información proveniente de los resultados habidos con las pruebas de pretest y postest, así como los trabajos realizados estrictamente en horas de clase, y una serie de ejercicios realizados por cada uno de los alumnos como tarea a desarrollar en sus casas, después de haber finalizado la instrucción.

Se trata de que el alumno vuelva a recordar lo que hizo y hacer indagaciones acerca de por qué lo hizo, cómo lo hizo, por qué lo dejó de hacer, si estaba seguro de lo que hizo, si hubo situaciones a las que ni siquiera se enfrentó, o si es capaz de hacerlo de otra manera, o sea observar procesos locales de pensamiento.

Nos parecen fundamentales estas indagaciones, ya que no siempre lo escrito responde a todo lo que es capaz de hacer el alumno y sobre todo porque interesa que él mismo sea consciente de por qué actúa de una u otra manera y del efecto que produce su actuación.

Es normal la conveniencia de aplicar este tipo menos rígido de entrevista en este trabajo, debido a que se trata de observar procesos locales de pensamiento, y, aunque ya se cuenta con la información extraída de los resultados del diagnóstico escrito sobre pre-álgebra, respecto de algunas respuestas esperadas de los alumnos, gracias al análisis de errores y estrategias, la mayoría de los hechos, en especial los relativos al aspecto cualitativo de la interrelación entre los aspectos numéricos y geométricos y al tipo de acercamientos espontáneos de los niños a las ecuaciones “no aritméticas” está por indagarse. Tampoco es previsible, en ese momento, el comportamiento de los niños en el uso y aplicación de sistemas de representación concretos para operar la incógnita y esto forma parte directa de los procesos de pensamiento de la transición al pensamiento algebraico.

Todo lo anterior justifica la flexibilidad con la que se aplica el “protocolo” de la entrevista, cuyo diseño previó un bloque básico de ítems o ítems, destinado a la corroboración del diagnóstico, al análisis del enfrentamiento del niño a la resolución de ecuaciones “no aritméticas”, al análisis de la conversión de registros y a la resolución de problemas.

3.7.1. Descripción de las entrevistas

Hay que señalar, en principio, que se han realizado entrevistas en tres momentos diferentes del desarrollo de este diseño de investigación como se puede observar en la tabla cronológica que se adjunta.

	1ª Fase. Curso 92-93	2ª Fase. Curso 93-94	3ª Fase. Curso 95-96
Sesiones previstas	4 sesiones a tres alumnos.	4 sesiones a seis alumnos.	2 sesiones a seis alumnos.
Sesiones reales	4 sesiones a tres alumnos.	4 sesiones a seis alumnos.	2 sesiones a cuatro alumnos y 1 sesión a dos alumnos.

Tabla 3.18

En nuestro trabajo nos hemos inclinado por utilizar un método mixto, en el sentido de Ginsburg y otros (1983): el entrevistador pide al niño que exprese todo lo que va haciendo y pensando (pensamiento en voz alta), y para facilitar esta verbalización le va haciendo preguntas que le ayuden a expresarse. Fueron, por tanto menos formales en terminología de Cohen y Manion (1990) o Bisquerra (1989), o entrevistas clínicas, según Romberg (1992).

Las entrevistas tienen como soporte una serie de actividades previamente seleccionadas relativas a expresiones algebraicas y ecuaciones sencillas.

Las variables objeto de estudio son las habilidades que ponen en juego los niños al enfrentarse por primera vez con el álgebra y el uso que hacen de los sistemas de representación que se plantean, en especial los S.R.V.G. y S.R.E.B.

Como propósito de las entrevistas indicamos que se trata de aislar fenómenos didácticos que aparecen en el tránsito del pensamiento aritmético al algebraico, observar las habilidades de carácter conceptual y operacional que se detectan en el uso de las letras, en el reconocimiento de las expresiones algebraicas así como en la conversión de registros y las conversiones dentro de cada uno de los sistemas de representación utilizados y de las traslaciones entre unos y otros sistemas de representación, en especial en el planteamiento y resolución de ecuaciones sencillas. Asimismo detectar la preferencia o no por un sistema de representación determinado y la razón de la elección del mismo.

3.7.2 Selección de los alumnos para las entrevistas

Las entrevistas iniciales se realizaron a tres alumnos del aula en la que se desarrolló la instrucción mediante el diseño exploratorio a finales del curso 92-93. Inmediatamente del comienzo del curso 1993-94 se realizaron las nuevas entrevistas a seis de los alumnos del mismo grupo anterior de clase.

Las entrevistas experimentales finales (3ª fase) se desarrollan dos años y medio después, con seis de los niños del grupo experimental. Sólo se analizan cuatro de ellas, porque los dos alumnos restantes no completaron su intervención.

3.7.3 Descripción y desarrollo de las entrevistas

El protocolo de las entrevistas se diseñó a partir de la temática de los cuestionarios y de los diseños de instrucción.

Para las dos primeras fases (cursos 92-93 y 93-94) se prepararon cuatro sesiones cuya duración fue aproximadamente 30 minutos, con preguntas relativas a:

1ª Sesión:

Se dedicó a la observación del uso de las letras en diferentes contextos y comprensión de los diferentes significados de las mismas; de la aceptación o no de respuestas abiertas, de la familiarización con la idea de que una expresión algebraica puede representar una solución de un problema, ya que es otro modo de representar un número correspondiente a un rango de valores, y de la capacidad de representación en: a) contextos aritmético-algebraicos; b) geométricos y c) ambos contextos relacionados.

2ª Sesión:

Se trabajaron las operaciones algebraicas en contextos aditivos y multiplicativos, en particular las utilizadas en identidades, en el uso de la propiedad distributiva y en la sustitución formal, observando los progresos en la comprensión y uso adecuado de algunas reglas y leyes operatorias: Leyes asociativa y conmutativa; Multiplicación por paréntesis [a (b ± c)]; Sustracción con paréntesis [a - (b ± c)] y la facilidad para hacer la transición del signo “=” (igual) como “hacer una operación” (aritmética) a la de “equivalencia” entre los dos miembros de la igualdad.

Se utilizó el Sistema de representación Geométrico con cuadro de “doble entrada” (visualización simplificada).

3ª Sesión

El trabajo se basó en la conversión y resolución de lenguajes en el planteo y resolución de ecuaciones utilizando la balanza, trasladando la ecuación al sistema de representación y viceversa. Al final de la sesión se propusieron ecuaciones para resolver, dejando libertad para usar el sistema de representación de la balanza o no.

4ª Sesión

En esta última sesión se intentó presentar para su posterior análisis una serie de ítems para plantear y resolver ecuaciones, haciendo uso del sistema de representación geométrico del rectángulo en el que cada uno de los términos de la ecuación está representado por el área de un rectángulo. Por ello, además de trasladar la ecuación al sistema de representación, obligaba a comparar áreas, producir nuevas ecuaciones en el proceso de resolución, y en algún caso la verificación de la solución.

En los dos últimos ítems se solicitó de los entrevistados expresasen a qué modelo recurrirían en esta iniciación al álgebra, si tuvieran que elegir uno.

Con relación al desarrollo de estas primeras entrevistas, señalamos que, diseñadas las “secuencias” de los protocolos de las sesiones se planteó el problema de cómo llevarlas a cabo en la práctica:

. ¿Uso de panel con actividad escrita y luego trabajar en la pizarra?

. ¿Panel con actividad escrita y trabajar en “dina 3”?

. ¿Trabajar en “dina 3”?

Se decidió esto último escribiendo las pruebas con amplitud de espacio, se pasaron a “dina 3” y luego se usaron rotuladores gruesos.

Al principio se utilizó además de la vídeo-grabadora un cassette.

Entre las dificultades reales se detectó la necesidad de: buscar material para vídeograbar; buscar lugar adecuado para grabar; persona disponible para estar pendiente de la grabación, etc.

En principio se pensó en que se dedicara 15 minutos a que el alumno revisase lo que había hecho en clase y nosotros indagaríamos sobre ello y en los otros 15 minutos de la entrevista, se proponían para la resolución situaciones nuevas pero similares a las anteriores. Esto era imposible porque no habían contestado ni actuaban de manera uniforme, como era natural. Se pensó era más conveniente preparar ítems no exactamente iguales sino que en cada sesión se tuviese en cuenta lo que cada uno había hecho previamente. Se había hecho un análisis exhaustivo de los Cuestionarios aplicados así como del trabajo de clase de estos 9 alumnos. Esto no descartó el presentar a todos los alumnos entrevistados, aquellos ítems que resultaban en general interesantes, bien por haber planteado dificultades o bien porque su resolución podía ser variada así como por ser errores o estrategias ya analizadas en la “literatura” y con las cuales valía la pena contrastar. Ideas esenciales en toda la entrevista fueron: ¡Todo lo que hacen está “bien”!, ¡No bloquear! ¡Animar a que sigan siempre trabajando!

Se decidió que dado lo avanzado del curso, Junio de 1993, sólo se realizarían 12 entrevistas correspondientes a las 4 sesiones de 3 alumnos, elegidos uno de cada estrato.

A pesar de que las entrevistas se desarrollaron bien, la fecha y horario fueron malas, a veces se hizo en el “recreo” y en las horas que tenían “libres” por quedarse a comer en el comedor del Colegio.

Para la tercera fase (entrevistas finales) se previeron dos sesiones, ya que el diseño de instrucción trabajado por estos alumnos, sólo consideraba expresiones algebraicas.

Entrevistas: 1ª Fase. **Curso 1992-93**

La selección de alumnos para la entrevista clínica se hizo en base a los resultados obtenidos en los Cuestionarios, en el desarrollo de las sesiones de instrucción, así como a las notas de la asignatura de Matemáticas, y, a la apreciación de la profesora habitual del curso.

De los 31 alumnos de la clase de 7º A se seleccionaron 9: 3 de estrato alto (niñas), 3 de estrato medio (1 niña y dos niños) y 3 de estrato bajo (1 alumna y dos alumnos); globalmente, 5 alumnas y 4 alumnos, para la entrevista clínica individual vídeograbada. Cabe recordar que la profesora que desarrolló la instrucción y la entrevistadora, es la persona que suscribe la Tesis. Se buscó que este triple papel fuera desempeñado por la misma persona, ya que interesaba conocer el comportamiento escolar del estudiante en el aula, así como ciertas características personales que permitieran un mayor aprovechamiento del Estudio Clínico.

Se trató de elegir estudiantes “tipo”, esto es, si dos o más estudiantes presentaban un comportamiento similar se seleccionaba a uno de ellos. También intervinieron en la elección las características de los sujetos, a saber, la participación activa en clase; buen nivel de verbalización o asistencia frecuente.

Hubo una reunión previa con los 9 alumnos de 7º A el 7/06/93. El objetivo de este encuentro era:

- ver si tenían algún inconveniente en ser entrevistados y ninguno lo tenía.

- explicarles lo que se pretendía resumido en: a) que reflexionasen sobre lo que habían hecho para que fueran conscientes de ello y constatar algo mejorable y b) mostrarles la importancia de su colaboración para futuros alumnos de este curso, después del análisis de esta experiencia.

Entrevistas: 2ª Fase. **Curso 1993-94**

Al comenzar este Curso 93-94 y con más detenimiento, se reorganizaron las 4 sesiones de entrevistas para los 6 alumnos restantes, de los seleccionados en el curso anterior. Ya cursaban 8º de E.G.B., pero se realizaron al comienzo del curso entre Septiembre y Octubre. El Protocolo fue único para todos, aunque según el desarrollo de la entrevista se modificase la trayectoria prevista e incluso algunos ítems no fueron considerados y otros añadidos.

Para la 1º Sesión se diseñaron 8 fichas; para la 2ª, 9 fichas; para la 3ª, 6 fichas y para la 4ª, 7 fichas, que en realidad se pueden considerar 6 de contenidos más 1, la última, de comentario personal (Anexo 16.2).

Entrevistas 3ª Fase. **Curso 1995-96**

Esta última fase se caracteriza por centrar la investigación sobre el comportamiento de los alumnos, específicamente en el tratamiento de las expresiones algebraicas, y más concretamente en la interpretación y uso de las letras en el cálculo algebraico en situaciones aditivas y multiplicativas, con especial énfasis en la designación y denotación de los paréntesis y en la sustitución formal. Los objetivos van, por tanto, a poner énfasis en las habilidades operacionales y conceptuales relativas al uso de las letras, los paréntesis y la sustitución formal.

Para esta ocasión se seleccionaron seis alumnos, con los mismos criterios anteriormente expuestos. Cuatro de estos alumnos fueron entrevistados en dos sesiones y dos de ellos no acudieron a la segunda sesión, quizás por influencia de haber terminado el periodo presencial de escolarización en el citado curso.

Para el análisis de las entrevistas, se utilizó el procedimiento habitual.

Una vez realizado el Estudio Clínico con la población estudiantil elegida, se procedió a la transcripción y al análisis de las entrevistas. Su contenido se examinó de acuerdo con los objetivos propuestos y para el análisis de las mismas se consideró la categorización de las habilidades cognitivas de carácter conceptual y operacional previamente establecidas.

Capítulo 4
Elaboración De Un Cuestionario Para El Álgebra Escolar

CAPÍTULO 4: ELABORACIÓN DE UN CUESTIONARIO PARA EL "ÁLGEBRA ESCOLAR"

4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se va a hacer la descripción del proceso de elaboración de un test o cuestionario para el Álgebra Escolar y que forma parte de nuestra investigación: Elaborar instrumentos de medida (test o cuestionarios) que consideren los elementos implicados en el tránsito desde el pensamiento aritmético al algebraico desde una propuesta curricular "global" (objetivo 2).

La elaboración de los instrumentos de medida (test o cuestionario) constituye un proceso generalmente largo, en nuestro caso estuvo siempre presente en casi todas las fases de la investigación de manera que los primeros cuestionarios fueron aplicados en el curso 90-91 (C_1 y C_2) y la prueba definitiva en el curso 95-96 (Prueba T).

La realización de diferentes cuestionarios no siempre tiene un sentido cuantitativo. Los primeros cuestionarios utilizados en esta investigación tienen un sentido estrictamente cualitativo y están destinados a la búsqueda de áreas de dificultades dentro del pensamiento algebraico y su conexión con el pensamiento numérico.

Los cuestionarios, en estas primeras fases, constituyen protocolos cerrados de investigación que nos van informando acerca de las dificultades y errores que presentan los alumnos con relación al pensamiento algebraico desde el enfoque que pretendíamos. Es a partir del análisis de los mismos, como se construye un instrumento genérico desde el enfoque de esta investigación.

La intención de los cuestionarios en las diferentes fases de la investigación no se concreta únicamente en el objetivo anteriormente mencionado sino que aporta información a los otros:

- Analizar, determinar y organizar dificultades, obstáculos y errores de los alumnos en el tratamiento del Álgebra (12-14 años) (Objetivo 4).

- Recoger información para diseñar una propuesta "global" de enseñanza-aprendizaje del Álgebra que ayude a evitar y corregir estos obstáculos, dificultades y errores (Objetivo 5).

- Estudiar los aspectos cognitivos (Habilidades cognitivas de carácter operacional (H.C.C.O.) y habilidades cognitivas de carácter conceptual (H.C.C.C.)) más relevantes, del pensamiento algebraico con alumnos de 12 a 14 años (Objetivo 1).

Como hemos indicado el Test definitivo que denominamos "T" ha sido producto de un trabajo preliminar que no sólo ha incluido la elaboración de otros previamente sino de una amplia revisión de otros trabajos de corte similar; entre ellos destacamos:

a) Lectura y comentarios de estudios al respecto. Dichos estudios fueron realizados, entre otros, por: Lesley R. Booth (1984), Marilyn Matz (1980), Carolyn Kieran (1989), Hans Freudenthal (1983), Manuel Trujillo y Marín (1987), Teresa Rojano (1985), Sonia Ursini (1989, 1990, 1996), Küchemann (1981), Silvia y Mª Elena Alonso Nápoles (1989), Alan Bell y otros, y sobre todo la consideración de los siguientes documentos:

"Chelsea Diagnostic Mathematics Test Algebra" de NFER-NELSON, 1984.

"El aprendizaje del Álgebra en el futuro inmediato: una perspectiva estructural" de Carolyn Kieran, traducido por Guillermo Rubio (CIEA. México), 1989.

"De la Aritmética al Álgebra: Un panorama de investigación realizada y algunas perspectivas" de Tenoch-Cedillo en Mayo de 1991 (Universidad Politécnica Nacional de México).

"Una agenda de investigación en el aprendizaje del Álgebra" de Sigrid Wagner y Carolyn Kieran, 1989.

Resultados de la IV Prueba de NAEP realizada por Carolyn Kieran en D. Grouws (Ed.) en 1992 en su artículo "The Learning and Teaching of School Algebra".

b) Análisis del examen aplicado en el proyecto inglés SESM a estudiantes de secundaria (edades de 11 a 16 años) adaptado previamente a estudiantes de Bachillerato de la Ciudad de México (1988).

c) Análisis de cuestionarios aplicados en México a alumnos de edades comprendidas entre 11 y 17 años.

d) Análisis de una propuesta de estrategia didáctica como enseñanza remedial en la problemática de la sintaxis algebraica de Mª Elena Alonso Nápoles y Braulio Torres Palafox (1989), del CIDME-UAC.

e) Estudio realizado por la Profesora Virginia Navarro-Pelayo Sánchez en su Tesis Doctoral (1994).

La implementación de la prueba definitiva (T) para expresiones algebraicas tiene lugar en el Curso 1995-96, según recogemos de forma esquematizada en la tabla 3.8 y se ha visto precedida de 13 cuestionarios anteriores. La presentación del diseño y desarrollo de estos test o cuestionarios los presentamos en los siguientes bloques: Un primer bloque corresponde a los Cuestionarios C_1 (anexo 1) y C_2 (anexo 2) utilizados en una primera fase y aplicados a distintos grupos de distintos países y diferentes niveles escolares y académicos curso 90-91.

Un segundo bloque lo forman los cuestionarios C_3 (anexo 3) y C_4 (anexo 4) que están relacionados directamente con la fase de instrucción descrita en el capítulo 3, y que corresponde al curso 1991-92.

Un tercer bloque lo forman los diseñados en el curso 92-93, que denominaremos Pretest y Postest, simbolizados por Pr (Pr1 y Pr2, anexo 5 partes 1ª y 2ª, respectivamente) y Po (Po1 y Po2 anexo 6 partes 1ª y 2ª, respectivamente).

Un cuarto bloque se concreta en los TestA (TA, anexo 7, parte 1ª) y TestB (TB, anexo 7, parte 2ª) en el curso 94-95.

El decimocuarto cuestionario (Prueba T, anexo 8) corresponde a la prueba elaborada de los Test (A y B), y adaptada al último estudio sobre expresiones algebraicas, aplicada a un grupo de alumnos del Colegio Público “Ntra. Sra del Coro (La Verdellada), cuyos resultados se expondrán en el capítulo 6.

A medida que se vaya explicando su elaboración, se observará que existen diferencias entre los primeros cuestionarios del 90-91 y la última prueba T del 95-96 (anexo 8). Las razones son evidentes, pues se ha ido analizando y reflexionando sobre cada uno de ellos y se han ido haciendo las correspondientes modificaciones de acuerdo a la delimitación de núcleos y subnúcleos de contenidos que ha ido interesando investigar, ya que sabemos que un test es una muestra de conducta a partir de la cual se pretende hacer ciertas inferencias y su uso más frecuente está relacionado con la predicción a partir de él de alguna variable de interés o criterio, y, la validez de su contenido, alude a la necesidad de garantizar que constituye una muestra adecuada y representativa de los contenidos que se pretende evaluar con él; por eso una selección primeramente aleatoria puede ser muy mejorada en determinadas circunstancias. Sabemos que un test no es un agregado de ítems que se juntan al azar para predecir un criterio, es más bien una medida o índice de un concepto, teoría o constructo psicológico o de otro tipo.

En la siguiente tabla (tabla 4.1) se muestra un esquema de los cuestionarios y su codificación correspondiente.

BLOQUE	CÓDIGO	ANEXO	CURSO
Primer Bloque	C_1	1	1990-91
	C_{21}	2, parte 1ª	
	C_{22}	2, parte 2ª	
Segundo Bloque	C_3	3	1991-1992
	C_{41}	4, parte 1ª	
	C_{42}	4, parte 2ª	
	C_{43}	4, parte 3ª	
Tercer Bloque	Pr1	5, parte 1ª	1992-1993
	Pr2	5, parte 2ª	
	Po1	6, parte 1ª	
	Po2	6, parte 2ª	
Cuarto Bloque	TA	7, parte 1ª	1994-1995
	TB	7, parte 2ª	

Tabla 4.1

4.2 DESCRIPCIÓN GENERAL DE LOS INSTRUMENTOS EMPLEADOS, TIPOS DE ÍTEMS INCLUIDOS Y DESCRIPCIÓN DE LAS VARIABLES DE TAREA

Vamos a describir ahora los diferentes instrumentos utilizados, sus ítems y la descripción de la variable de las tareas de cada uno de ellos. Los vamos a presentar organizados en torno a los cuatro bloques anteriormente descritos y siguiendo las codificaciones establecidas. A los Cuestionarios del cuarto bloque que llamaremos TestA y TestB, además los hemos sometido a un proceso de fiabilidad y validez.

4.2.1 Primer bloque: Corresponde a los Cuestionarios C_1 y C_2, implementados en el curso 1990-1991

El cuestionario "C_1" (anexo 1), lo forman 10 preguntas con un conjunto de 33 ítems que comprende: operaciones con números naturales, con fracciones y simplificación de las mismas, resolución de "ecuaciones sencillas" utilizando el portavariable "□", expresión de áreas y perímetros y pre-álgebra en general, cálculo de valores numéricos y problemas de enunciado verbal con la siguiente distribución, agrupando los ítems en torno a sus características:

1) Operaciones aritméticas básicas (+, -, x, :) en:
   - fracciones con números de uno y dos dígitos,
   - cálculo de valores numéricos,
   - resolución de ecuaciones sencillas.
2) Cálculo de áreas y perímetros.
3) Uso de expresiones "pre-algebraicas".
4) Relación de diseños de figuras del plano (dibujo de rectángulos).
5) Problemas de enunciado verbal.

En este cuestionario (C_1) sólo consideramos un ítem que identificamos como (4d) de los propuestos en el Test del Chelsea College (9d), ya que nuestro propósito era diferente a este Test, y pretendía detectar información sobre habilidades cognitivas de carácter conceptual y operacional en el inicio del tratamiento del Álgebra, así como los errores algebraicos más frecuentes que cometen los estudiantes y las posibles causas de ellos, que no eran considerados en aquel Test. También ese ítem ha sido utilizado en diferentes cuestionarios entre otros, en el Cuestionario para Bachilleres de México del que la Dra. Rojano presenta cinco pruebas diferentes y en todas ellas aparece este ítem (en la primera prueba con el número 17, en la segunda con el número 15 y en las tres restantes, en las que se incluye el Cuestionario final, con el número 16).

Siguiendo con el objetivo de nuestro trabajo de analizar las dificultades semánticas y de sintaxis del lenguaje de las representaciones no formales frente a la semántica y sintaxis del álgebra con referencia a otros trabajos de la misma naturaleza, elaboramos un nuevo cuestionario, (C_2, anexo 2), incluyendo diferentes procesos de modelización como método para ayudar a los estudiantes a construir significados para ciertas clases de ecuaciones y de expresiones algebraicas y para las operaciones llevadas a cabo sobre ellas. La utilización de estos sistemas de representación formales o informales, por lo general denominado “lenguaje de los Modelos”, se ha usado como fuente de significado (semántica relacional) y como generador de las reglas de transformación (sintaxis del lenguaje matemático).

Los diferentes sistemas de representación son en el álgebra una herramienta fundamental que permite pasar de una situación problemática, expresada, por ejemplo, en lenguaje habitual, a una representación no formal y de ésta a la expresión algebraica correspondiente; en este sentido entenderemos también las representaciones no formales como una forma de lenguaje.

El aspecto algebraico que poseen las Matemáticas de la escuela obligatoria nos indica que permanece dentro de la simbología verbal - algebraica, pero la experiencia y la historia han mostrado la importancia de la visualización como una herramienta fundamental para la comprensión de muchos argumentos y fórmulas algebraicas.

Este carácter algebraico de las matemáticas escolares es debido al hecho de que no se es consciente del potencial que posee el sistema gráfico visual y de la insuficiencia de representaciones no formales que enlacen ambos sistemas. Conviene observar que en ningún momento las generalizaciones teórico - algebraicas aparecen automáticamente de la visualización, sino que ésta completa el entendimiento de tales generalizaciones.

Como señala Otte, 1986, las fórmulas algebraicas poseen un aspecto lógico-lineal y otro visual-ideográfico, aspectos que se relacionan, respectivamente, con el verbal numérico y geométrico gráfico, intrínsecos del concepto de variable surgido en los siglos XVI y XVII.

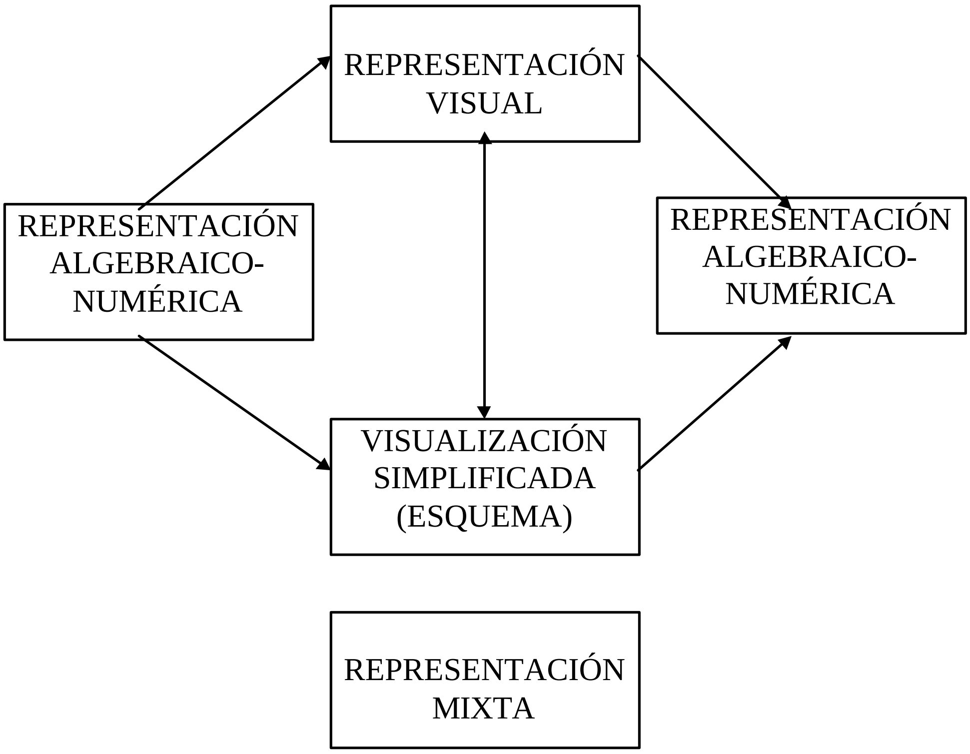
Podemos establecer así una serie de conexiones entre la imaginación mental, los diferentes sistemas de representación semióticos y las fórmulas algebraicas que permitirá realizar diferentes actividades apoyadas por estos planteamientos. Se utilizan las representaciones no formales con un doble significado: como lenguaje y como recurso didáctico que genera esquemas mentales que hacen más fácil el aprendizaje del álgebra.

Consideramos la importancia de combinar estos dos tipos de representaciones de las fórmulas algebraicas apoyándonos en los planteamientos geométricos griegos para quienes no existía el Álgebra, sino que todo se convertía al aspecto visual-ideográfico ya indicado.

Con estas consideraciones de base y la experiencia anterior, se organiza este nuevo cuestionario (C_2, anexo 2) con la intención de estudiar los efectos del uso de diferentes sistemas de representación no formal y su relación con el sistema de representación formal del álgebra y con el lenguaje habitual, y que está formado por dos partes claramente definidas: una (C_{21}, anexo 2 parte 1ª) relativa a Expresiones Algebraicas y otra (C_{22}, anexo 2 parte 2ª) relativa a Resolución de Ecuaciones.

En el cuestionario se utilizan dos sistemas de representación, no formales, diferentes: Un sistema de representación visual-geométrico basado en la idea de área del rectángulo que permite expresar y operar con las expresiones algebraicas (C_{21} en la totalidad de sus ítems) y con las ecuaciones lineales con una incógnita (C_{22} en los ítems 1, 2, 3, 4 y 5). Y un sistema de representación no formal de tipo visual (balanza de brazos iguales) en C_{22}, para expresar una ecuación lineal con una incógnita, en los ítems 6, 7, 8, 9 y 10.

Como hemos señalado con relación a las expresiones algebraicas (C_{21}, anexo 2 parte 1ª), se utilizó como sistema de representación visual geométrico las áreas de rectángulos y se establecieron conversiones con el sistema formal algebraico, además, desarrollamos un sistema mixto visual/formal, situación intermedia entre ambos, que expresamos mediante un diagrama de doble entrada y que denominamos "visualización simplificada". Las conexiones de este sistema mixto visual/formal con las representaciones visuales o formales numéricas o algebraicas se recoge en el siguiente cuadro:



De manera más concreta, C_{21} (anexo 2 parte 1ª) consta de un conjunto de ejemplos, concretamente 10.

El diseño está orientado hacia:

a) la detección de habilidad o destreza para construir (ítems 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9 y 10) o interpretar (ítems 2 y 6) los cuadros de doble entrada en los ítems de C_{21} indicados,

b) detectar los obstáculos cognitivos:

- necesidad de una referencia exclusivamente numérica en los ítems 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10, de C_{21},
- incapacidad para aceptar la falta de clausura, en los mismos ítems anteriores, y,

c) analizar la:

- actitud ante la concatenación, ítems 2, 5, 6, 7, 8, 9, y 10, de la misma parte de la prueba,
- percepción del aspecto sumativo de la situación, ítem 3 y,
- percepción del aspecto multiplicativo, ítems 1 y 4.

Asimismo forman parte de esta prueba ítems relativos a la propiedad distributiva del producto respecto a la suma, así como de sacar factor común, estrictamente necesario en los ítems 5, 7 y 10 de C_{21}.

El uso de paréntesis es otro aspecto a analizar en los ítems de C_{21}, excepto en 3 y 4.

Y, la confusión área- perímetro y la asignación de medidas distintas a longitudes iguales, ítem C_{21}, 3.

Hacemos, finalmente, referencia a que este cuestionario va precedido de un ítem cero en que se da un ejemplo resuelto y de conexión entre las tres representaciones semióticas propuestas: representación visual geométrica, visualización simplificada y representación formal algebraica, que se expresa en la siguiente tabla (tabla 4.2).

REPRESENTACIÓN VISUAL-GEOMÉTRICA	VISUALIZACIÓN SIMPLICADA	REPRESENTACIÓN FORMAL ALGEBRAICA
4  a 2	x | a | 2 4 | 4 x a | 4 x 2	4 (a+2)= 4 x a + 4 x 2

Tabla 4.2

Observamos, como se indicó anteriormente, las distintas situaciones del área del rectángulo mediante la representación visual/geométrica (áreas de los mismos), esquematización de la misma situación o visualización simplificada y la expresión algebraica correspondiente. Es importante indicar que al pasar este cuestionario se hizo un sencillo comentario instruccional en el sentido de que observaran el ejemplo que se presentaba y se solicitaba completar en cada ejercicio, dos situaciones ausentes de la misma expresión.

El objetivo que se pretende con la resolución por parte del alumno de los ítems, es averiguar cuál es su capacidad para reconocer las diferentes representaciones y para hacer conversión entre ellas. En definitiva, indistintamente se pedía que los alumnos hicieran conversiones entre maneras diferentes de plantear una misma situación con representaciones semióticas distintas.

Con relación a ecuaciones algebraicas (C_{22}, anexo 2 parte 2ª) se utilizan como hemos señalado dos representaciones, geométrica y la balanza, con el objeto de ayudar a los estudiantes a crear significados para las ecuaciones del tipo $Ax \pm B = C x$ y para las operaciones algebraicas en la resolución de estas ecuaciones. También aquí se daba un ejemplo resuelto, a modo de comentario instruccional, antes de pedir a los estudiantes que completasen las dos situaciones ausentes y de la misma naturaleza que el ejemplo, en cada ejercicio.

En relación a ecuaciones se pretende observar el comportamiento de los alumnos teniendo en cuenta, entre otras, las siguientes categorías de análisis:

. ¿Cuál es el registro utilizado prioritariamente a la hora de resolver las ecuaciones?, ¿el algebraico o el geométrico?; ¿el algebraico o el de la balanza? ¿Existen o no preferencias en el uso de Sistemas de Representación? ¿Qué preferencia se observa en la conversión de estas representaciones?

. Siguiendo las representaciones dadas, ¿se preocupan de hacer corresponder lo que están trabajando con el lugar asignado en la hoja de trabajo?

. ¿Conducen las representaciones dadas a situaciones absurdas del tipo $0 = a$, $a >0$, $a<0$, y qué se plantean los alumnos?

En relación concreta a la representación de la balanza, observamos además:

- ¿Representan siempre la balanza en equilibrio aunque la expresión no se corresponda con ello?

- ¿Representan sobre la balanza la grafía de los números en lugar de otros símbolos equivalentes?

- Como si se tratase de un “dibujo” y no de la representación de una situación, ¿dibujan objetos debajo de los platillos?

En referencia al S.R.V.G. (sistema de representación visual geométrico), observamos además:

- Con el registro geométrico, ¿expresan de alguna manera la diferenciación de miembros de la ecuación o figuran como si fuesen todos términos algebraicos sin relación?

- ¿Utilizan el signo “=” explícito entre las representaciones de los dos miembros de la ecuación?

Procedemos a describir cada uno de los ítems del cuestionario C_{21} (anexo 2 parte 1ª) relativo a expresiones algebraicas para hacerlo luego del C_{22} de ecuaciones (anexo 2 parte 2ª).

Los 10 ítems de la prueba de expresiones algebraicas como se observa en el anexo 2 parte 1ª, responden al mismo formato: un cuadro con tres columnas que se representan precedidas cada una de ellas por “Representación Visual/Geométrica”, “Visualización Simplificada” y

“Representación Formal Algebraica”, donde se muestran distintas situaciones del área de un rectángulo y en las que, haciendo uso del dato proporcionado, siempre en una sola de ellas, han de completar las dos restantes.

Hay que observar que en ninguna de las expresiones del área se expresan unidades de medida específicas.

Se puede hacer un agrupamiento de ítems en torno a representaciones presentadas como datos en el formato de tres columnas utilizado:

. Representación visual geométrica: ítems 1, 3, 4, 8 y 9.

. Visualización simplificada: ítems 2 y 6.

. Representación Formal Algebraica: ítems 5, 7 y 10.

La descripción de las características de los diferentes ítems se recogen en el anexo 19.

En el Cuestionario de Resolución de Ecuaciones (C_{22}, anexo 2, parte 2ª), al igual que en la prueba C_{21} se hicieron comentarios instruccionales antes de pedir a los estudiantes que completasen las dos situaciones ausentes de cada ítem.

Recordamos que también la forman 10 ítems, correspondientes a situaciones en que deben “traducir” los enunciados verbales a ecuaciones y posteriormente ”resolver”, 5 ítems, mediante la representación visual geométrica y algebraico simultáneamente, y, 5, haciendo uso de la representación física de la balanza y también, simultáneamente, de la algebraica.

La descripción de las características de los diferentes ítems se recoge en el anexo 19.

4.2.2 Segundo bloque: Corresponde a los Cuestionarios C_3 y C_4, implementados en el curso 1991-1992

En un intento de seguir indagando sobre la problemática de la enseñanza-aprendizaje del álgebra en diferentes direcciones, elaboramos los cuestionarios C_3 (anexo 3) y C_4 (anexo 4), manteniendo en mente las siguientes ideas:

- “*La interacción entre el conocimiento conceptual y procesual y el aprendizaje continuará siendo una cuestión absolutamente central sobre la que la investigación meditada puede aconsejar las decisiones curriculares*” (Fey, 1989).

- La gran y difícil tarea de hacer conversión de registros se da en los primeros cursos de álgebra.

- A nivel de enseñanza es posible intentar desarrollar en armonía elementos de sintaxis algebraica y sus correspondientes versiones semánticas:

. como elementos que proceden de las representaciones utilizadas para introducirlos,

. como elementos utilizados para la modelización de situaciones que surgen de los problemas que se plantean, para conducirlos a un uso correcto y congruente del lenguaje algebraico, en cuanto a esos dos aspectos sintáctico y semántico.

- El uso simultáneo de dos sistemas de representación para el lenguaje algebraico, planteado en forma de una conversión de registros activa, puede: favorecer una mejor comprensión del contenido algebraico al que se refieren estos sistemas de símbolos, estimular el conocimientos metacognitivo de estas habilidades, y mejorar habilidades de otros medios y que es asimismo conveniente el uso de diferentes fuentes de significado, dadas las características individuales de la inteligencia humana y de la propia naturaleza de las matemáticas, nos planteamos un nuevo cuestionario, que pretendía seguir ampliando la observación acerca de las siguientes categorías de análisis:

- La aceptación del aprendizaje del álgebra a través de diferentes representaciones.
- La actuación sobre estos sistemas de representación, simultánea o independientemente, y en el último caso, la prioridad.
- La tendencia semántica o sintáctica de los alumnos.
- El significado que tiene para los alumnos y cómo actúa en ellos la semántica y la sintaxis de las diferentes representaciones: balanza y visual-geométrica.
- El uso de códigos personales.
- La pérdida de habilidades por fijación excesiva en determinadas representaciones.
- La inclinación hacia las representaciones visuales o formales.

Este nuevo cuestionario (C_3, anexo 3) incluye una parte para estudiar la asimilación y comprensión por parte del alumno del conocimiento escolarizado, previo a las primeras expresiones y ecuaciones no aritméticas, esto es la pre - álgebra, y facilitar datos para el análisis de los comportamientos espontáneos de los alumnos en la realización de operaciones básicas con distintos tipos de números, así como del cálculo de áreas y perímetros con dimensiones expresadas numérica, simbólica o alfanuméricamente. También se desea observar la reacción de los alumnos ante la incógnita expresada por “x” o por un antecedente pre-simbólico “□”, para poder compararlo posteriormente con los comportamientos adquiridos, después de una instrucción en expresiones algebraicas y una introducción a las ecuaciones lineales sencillas.

En este nuevo cuestionario de 16 preguntas y 53 ítems, como prueba diagnóstico sobre pre-álgebra se toma en cuenta algunas características del tratamiento de enseñanza sobre esta materia y se explora:

a) el “dominio” de las operaciones básicas con números naturales, enteros y fraccionarios,

b) el conocimiento del concepto de área y perímetro,

c) la asignación de unidades de medida,

d) la utilización de tanteo o estrategias sistemáticas o esporádicas y,

e) la expresión de soluciones algebraicas superada la clausura de las operaciones.

Los ítems están diseñados desde tres ejes o subtemas:

1) numérico, aritmético de medida numérica,

2) aritmético previo al álgebra, y,

3) "algebraico".

La aplicación se previó de dos horas.

La intención de la inclusión de los citados ítems fue la siguiente:

Pregunta 1.- Observación del "dominio" alcanzado con las operaciones con números enteros.

Pregunta 2.- Observación de "tanteo" o alguna estrategia sistemática.

Análisis de la dificultad de la operación según donde se encuentre el dato a buscar.

En general, ¿en cuál de las cuatro operaciones propuestas resulta más difícil? .

Pregunta 3.- Observación del conocimiento del alumno del concepto de área y en concreto de las áreas del cuadrado y del rectángulo.

a) . Si previamente al cálculo del área calcula las dimensiones (5 + 4).

. Si hace los cálculos de las áreas de subrectángulos y luego las suma o si sólo las calcula.

. Si asigna unidades de medida.

b) . Si comprende que el área del rectángulo total es la suma de las de los subrectángulos.

c) . Si la "posición invertida" del rectángulo dificulta el cálculo del área.

. Si da las unidades al resultado.

d) . Si hace subdivisiones para el cálculo del área y llega a la suma total.

. Si asigna unidades al resultado.

Pregunta 4.- Observación de "tanteo" o alguna estrategia sistemática.

. Análisis de la dificultad de la operación según donde se encuentre el dato a buscar.

. En general, ¿en cuál de las cuatro operaciones propuestas resulta más difícil?

. Relacionar los resultados de este ítem con los apartados correspondientes del ejercicio 2 y ver si el uso de la "x" aumenta la dificultad del problema.

Pregunta 5.- . Observar si existe asociación de "número cualquiera" a elegir, un número concreto.

. Si existen números concretos, ¿aparece algún sesgo hacia algunos números determinados?

Pregunta 6.- . Observar si asigna unidades de medida.

. Observar si utiliza productos de las longitudes de lados iguales por dos, o suma de las longitudes dos a dos.

Pregunta 7.- . ¿Conocen el concepto de área?

. ¿Son capaces de dar como respuestas válidas, expresiones algebraicas?

. ¿Dividen los rectángulos en subrectángulos, hallan sus áreas y suman los resultados?

Pregunta 8.- . ¿Conocen el concepto de perímetro?

. ¿Calculan previamente las dimensiones antes del perímetro?

. ¿Hacen los cálculos de los perímetros de los subrectángulos y luego suman, o sólo los calculan?

. ¿Asignan unidades de medida?

. ¿Utilizan productos de longitudes de lados iguales por dos, o suma de longitudes dos a dos?

. ¿Son capaces de dar soluciones con expresiones algebraicas, superando la necesidad de clausurar las operaciones?

Pregunta 9.- . ¿Saben sustituir?, ¿operar?

. ¿Realizan las operaciones en el orden dado o en otro?

. ¿La obtención de algún resultado parcial negativo incrementa la dificultad?

. Aplicación o no de la propiedad distributiva.

Pregunta 10.- . Comprensión del problema.

. Utilización de gráficos.

. Limitación o no a la expresión del producto.

. Iteración en el uso de “dos semanas” y 14 días.

Pregunta 11.- ¿Entienden el término “disminuye”?

. ¿Son proporcionales los dibujos?

. ¿Utilizan alguna escala?

. Ver si la representación se hace simultánea, basándose en los ejemplos resueltos anteriormente.

Pregunta 12.- Observación del “dominio” alcanzado con las operaciones con números fraccionarios.

. ¿Expresan los resultados en números mixtos o decimales?

Pregunta 13.- ¿Son capaces de dar respuestas “sin clausura”?

. Comparación de los resultados con los del problema 10 en cuanto a aciertos.

Preguntas 14 y 15.- Dificultad de la potencia en el denominador.

. Aplicación de la propiedad distributiva inexistente.

. ¿Hacen equivalente el cuadrado de la diferencia con la diferencia de cuadrados?

Pregunta 16.- ¿Qué estrategia utilizan en el orden de las operaciones:

$\frac{4x5}{2}$ ó $\frac{4}{2}x5$

. Uso de gráficos.

. Resolución sin explicación.

Podemos señalar que este cuestionario C_3 (anexo 3) sigue la línea del cuestionario C_1 (anexo 1).

El cuestionario que denominamos C_4 (anexo 4) consta en realidad de tres cuestionarios diferentes (C_{41}, anexo 4, parte 1ª; C_{42}, anexo 4, parte 2ª y C_{43}, anexo 4 parte 3ª), de 7, 5 y 5 preguntas con varios ítems, respectivamente y sigue la línea de análisis establecida en el cuestionario C_2.

La prueba C_{41} es para Expresiones Algebraicas y es aplicada después de una cierta instrucción en lenguaje algebraico; consta de 7 preguntas que comprenden 17 ítems (anexo 4, parte 1ª) que se podrían agrupar de acuerdo a los contextos utilizados: edades, dinero, algebraico y geométrico.

Geométrico: Preguntas 1 (ítems 1, 2 y 3), 4 (ítem 10) y 7 (ítem 17).

Edades: Pregunta 2 (ítems 4 y 5).

Algebraico (alfanumérico): Preguntas 3c (ítem 8), 3d (ítem 9), 5 (ítems 11 y 12) y 6 (ítems 13, 14, 15 y 16).

Dinero: Preguntas 3a (ítem 6) y 3b (ítem 7).

Vamos a comentar detalladamente el cuestionario C_{41}. En este cuestionario C_{41} (anexo 4, parte 1ª), como hemos indicado, retomamos la cuestión de las distintas situaciones del área del rectángulo mediante las representaciones Visual - Geométrica, Visualización Simplificada y Expresión Algebraica, presentando tres ítems (1, 2 y 3) en la primera cuestión en los que se pedía a los alumnos/as completar en cada uno de ellos dos situaciones ausentes. Se espera éxito de esta cuestión, pues se presenta previamente un modelo de resolución, aunque en el ítem 2 hay gran cantidad de posibilidades de respuestas no correctas, según la experiencia de aplicación de ítems de este tipo en trabajos anteriores propios y de otros autores.

Al ser cada una de las dos dimensiones del rectángulo dadas con letras y números (una letra y un número por cada dimensión), puede ocurrir que las respuestas vayan orientadas a, por ejemplo, dejar uno sólo de los cuatro datos como altura; separar las letras unidas de los números también unidos; dar valor numérico a las letras; cometer errores en la distributividad; prescindir de los paréntesis; cometer errores de concatenación e incluso no enfrentarse a la resolución.

En el tercer ítem también puede presentar gran dificultad la descomposición del término numérico para poder sacar factor común y pasar a la representación visual geométrica y al cuadro de doble entrada (visualización simplificada).

La pregunta 2 (ítems 4 y 5) muestra un cuadro de doble entrada en contexto de “edades” y con términos lingüísticos de cierta dificultad para los estudiantes en la resolución de problemas verbales: “doble”, “más que”, “menos que”, “década”, junto a la dificultad semántica del uso de los paréntesis, de la aceptación de falta de clausura de las expresiones y de las diferencias cualitativas de la concatenación en la Aritmética y el Álgebra, así como la de las operaciones con números enteros. El único dato especificado en la tabla es una de las edades expresada con una “x”. Las dificultades de la ausencia de dominio lingüístico puede llevar aquí a confusión del término “década” con “doce” y más aún, al aparecer en el enunciado, la expresión “doce años menos” y estar expresado “12”, con letras (doce). Otro posible error es el olvido del contexto y aparición de soluciones negativas.

En cuanto a la operatividad se puede presentar confusión entre potencias y productos, o potencias y sumas; entre “cuadrado” y “doble”; entre elevado a la décima potencia y sumar 10. De cualquier modo casi la solución más esperada sea la de dar a “x” un valor numérico concreto (letra evaluada), y luego seguir resolviendo el ejercicio.

La pregunta 3 (ítems 6, 7, 8 y 9) presenta una conversión desde el lenguaje habitual al sistema de representación formal algebraico en distintos contextos y con ítems de distintas características.

- ítem 6) Dinero.
  Operación implicada: multiplicación.
- ítem 7) Dinero.
  Operación implicada: división.
- ítem 8) Alfanumérico.
  Operación implicada, la resta.
  Palabras clave: “menos que”.
  Dato numérico (escrito en forma de número, 50) y alfabético, letra (h).
- ítem 9) Alfanumérico.
  Palabras clave: “cuarta parte”.
  Dato numérico escrito con letras (cuarta parte) y alfabético, letra (y).

Aquí también puede haber influencia del dominio del lenguaje en la resolución a pesar de ser contextos familiares y de tratarse de situaciones realistas, sobre todo los ítems 6 y 7.

En general, puede haber referencia a situaciones de contexto, análogas (precio total = valor unidad por número de unidades), que pueden llevar a confusión, así como el vocablo “cada” que puede inducir a dividir.

En el ítem 7, el enunciado orienta la solución a la idea de proporcionalidad pero pueden no resolverlo correctamente al no tener claro el esquema semántico de las relaciones partes - todo.

Es posible incluso, aunque más raramente, que utilicen sólo una de la operaciones aritméticas, resta o división, para hacer la conversión.

En el ítem 8 se sospecha un uso incorrecto del vocablo “menos”, incluso la posibilidad de que confundan el signo “-” de los números enteros, con el signo “-” de la operación de la resta.

En el ítem 9, es posible que, al no interpretar la preposición “de”, no utilicen la expresión algebraica correcta “$\frac{1}{4}$. y”, sino que la dejen invariable, “1/4 de y”. En último extremo se puede esperar confusión al utilizar potencias en el resultado o al hacer uso de la propiedad conmutativa en la división.

En general otro error bastante habitual en el uso de la simbología en Álgebra en este tipo de enunciados, es la “mala costumbre” de cambiar con frecuencia el código escrito (mayúsculas versus minúsculas, cambio de letras dadas como representativas de incógnitas por otras letras diferentes, etc.).

Como aplicación de las expresiones algebraicas, también en contexto geométrico (ítem 10), se pide calcular el área rayada correspondiente a la porción de círculo (concretamente cuatro segmentos circulares) que queda al inscribir un cuadrado de lado “l” en un círculo de diámetro “d”. Es obvio que a la dificultad propia del Álgebra, se añade la de percepción de un área como diferencia de otras dos: la del círculo y la del cuadrado. Para este ítem se prevé, por tanto, gran dificultad.

Como posibilidades de error podemos asimismo esperar:

- referentes a la figura escrita: confusión del cuadrado con un rombo por la posición en que está aquél dibujado.
- referentes al cálculo de áreas:
  . en el círculo, por ejemplo, y dar soluciones como: Π d; 2 Π r; Π^2 r, Π d^2.
  . en el cuadrado, por ejemplo, y dar soluciones como: 4l, $\frac{D \text{ x } d}{2}$ (confusión con el rombo), y
- referentes al mal uso del signo “=”.

La pregunta 5 referente a “sacar factor común”, presenta dos ítems (11 y 12) con expresiones alfanuméricas: uno es un polinomio desordenado de tercer grado cuya incógnita es “x” y con todos los coeficientes pares (ítem 11); y, el otro, (ítem 12), es un binomio de segundo grado con coeficientes iguales a la unidad y con “a” como incógnita.

Aquí se tiene un objetivo muy concreto que es detectar la habilidad en la obtención de factores comunes. Es posible esperar que los alumnos/as respondan en los dos ítems de manera similar.

También, dada la experiencia, cabe pensar que posteriormente a la aplicación, se observe que los alumnos no tomen conciencia que el enunciado pide “todos los factores comunes” y a pesar de saber y querer resolverlo, sólo se fijen en los coeficientes o en las potencias de la indeterminada.

Otra posibilidad de respuesta errónea es, si después de detectar bien los factores comunes, en el paréntesis posterior, aparece de nuevo la expresión inicial sin simplificar.

En el ítem 12 es posible asimismo que los alumnos no se den cuenta que es una resta y calculen la diferencia de los exponentes y dejen la misma base, como si se tratase de una división de potencias de base a.

En este mismo ítem, después de sacar factor común, cabe que den como solución “a (a - a)” como si “a : a” fuese igual a “a” y sin embargo luego no siguen operando y no ven la nulidad que se provoca en la expresión.

La pregunta 6 (ítems 13, 14, 15 y 16) se refiere al cálculo numérico de expresiones con paréntesis, donde intervienen dos letras “a” y “b” para las cuales se dan valores entero y fraccionario, respectivamente.

Es importante indicar que hay dos ítems con un solo término producto de dos binomios. El ítem 13 es un producto de dos sumas y el ítem 14 una suma por una diferencia (no de los mismos números para no plantear la diferencia de cuadrados); el resultado de la diferencia contenida en el paréntesis, es “0”.

Los ítems 15 y 16, que muestran dos términos, se diferencian en que en el primero (ítem 15) aparece una suma de dos términos y uno de ellos con paréntesis, conteniendo una diferencia cuyo resultado es 0, y el segundo, (ítem 16), es una resta también de dos términos, como se indicó anteriormente con uno de los términos expresando una suma entre paréntesis.

En estos ítems se prevé un porcentaje alto de resolución correcta al tratarse de situaciones con las que los estudiantes están más familiarizados, en general. Sin embargo, es posible que algunos alumnos no se planteen o no sean capaces de analizar sus resultados y den idénticas soluciones para ítems distintos.

Es posible, asimismo, esperar algún cambio de código escrito al estar más habituados a trabajar con las últimas letras del alfabeto (“x” e “y”, p. ej.) que con las primeras (“a” y “b”).

Por último, la pregunta 7 (ítem 17) muestra un plano con medidas ausentes presentadas en función de una variable (t).

Aquí sí es previsible un alto porcentaje de “no resolución”, pues no es habitual este tipo de planteamientos.

También es posible que expresen los resultados finales sin el proceso de resolución seguido.

En último extremo es probable también la operación de varios valores para la indeterminada e incluso algún valor negativo.

Los cuestionarios C_{42} (anexo 4 parte 2ª) y C_{43} (anexo 4 parte 3ª) se corresponden exactamente con el cuestionario C_2, partes 1ª y 2ª, respectivamente, una parte exclusivamente interviniendo las representaciones algebraica y geométrica (cuestionario C_{42}) y otra, segunda, con las representaciones algebraica y de la balanza (cuestionario C_{43}), por lo que remitimos a los comentarios hechos en su lugar para el cuestionario C_2.

4.2.3 Tercer bloque: Corresponde a los cuestionarios denominados Pretest y Postest, implementados en el curso 1992-1993

Este nuevo bloque (bloque tercero) está integrado por dos pruebas: la primera codificada con Pr (anexo 5) y la segunda, Po (anexo 6). Pr integra expresiones algebraicas y ecuaciones sencillas, que, a efectos de presentarla a los alumnos, está dividida en dos partes (Pr1, anexo 5 parte 1ª y Pr2, anexo 5, parte 2ª). Po (anexo 6), también está dividida en dos partes correspondientes a expresiones algebraicas, Po1 (anexo 6, parte 1ª), y Po2 (anexo 6, parte 2ª), a ecuaciones.

El cuestionario Pr está formado por 48 ítems correspondientes a 14 cuestiones y Po formada por 49 ítems correspondientes también a 14 cuestiones.

Estos cuestionarios fueron elaborados desde los tres ejes de los cuestionarios anteriores:

- numérico, aritmético o de medida numérica,
- aritmético, previo al álgebra, y,
- algebraico.

En la tabla próxima (tabla 4.3) se muestra la correspondencia entre los 48 nuevos ítems de Pr1 y el cuestionario anterior C_3.

C_3	Pr1
(1, a, 1)	(1, a, 1)
(1, b, 2)	(1, b, 2)
(1, c, 3)	(1, c, 3)
(1, d, 4	(1, d, 4)
(2, a, 5)	(2, a, 5)
(2, b, 6)	(2, b, 6)
(2, c, 7)	(2, c, 7)
(2, d , 8)	(2, d, 8)
(2, e, 9)	(2, e, 9)
(2, f, 10)	(2, f, 10)
(2, g, 11)	(2, g, 11)
(2, h, 12)	(2, h, 12)
(4, a, 17)	(3, a, 13)
	(3, b, 14)
	(3, c, 15)
	(3, d, 16)
(5, a, 23)	(4, a, 17)
(5, b, 24)	(4, b, 18)
(5, c, 25)	(4, c, 19)
(5, d, 26)	(4, d, 20)
(9, a, 36)	(5, a, 21)
(9, b, 37)	(5, b, 22)
(9, d, 39)	(5, c, 23)
(9, f, 41)	(5, d, 24)

C_3	Pr1
(10, 0, 42)	(6, 0, 25
	(7, 0, 26)
	(8, a, 27)
	(8, b, 28)
	(8, c, 29)
(3, d, 16)	(8, d, 30)
(3, b, 14)	(8, e, 31)
(7, a, 29)	(9, a, 32)
(7, b, 30)	(9, b, 33)
(7, c, 31)	(9, c, 34)
	(9, d, 35)
	(10, a, 36)
	(10, b, 37)
	(10, c, 38)
	(11, a ,39)
	(11, b, 40)
	(11, c, 41)
	(12, 0, 43)
	(13, 0, 44)
	(14, a, 45)
	(14, b, 46)
	(14, c, 47)
	(14, d, 48)

Tabla 4.3

En la Pr1 con las preguntas 1 y 2 (ítems del 1 al 12) se pretende observar, al igual que en el cuestionario C_3, el dominio alcanzado con las operaciones con números enteros con los ítems 1, 2, 3 y 4, y en la pregunta 2, ítems 5 al 12 (también idéntica a la del mismo número de la prueba Pr1):

- observar el "tanteo" o estrategia sistemática utilizada en la resolución,

- analizar la mayor o menor dificultad de las operaciones aritméticas según el lugar donde esté colocado el dato a buscar,

- detectar cuál de las operaciones es más difícil.

En definitiva, detectar habilidades cognitivas de carácter operacional codificadas en nuestro trabajo con O_2 y O_1, según que intervenga o no el paréntesis.

La pregunta 3 (ítems 13, 14, 15 y 16), similar a la 4 del cuestionario C_3 (ítems 17 al 22), se diferencia de ella en que aquí no aparecen fracciones ni la x con signo negativo y las igualdades son de la forma $x - A = B$ con $B > A$ y $A x + B = C x + D$, con $C > A$ y $B > D$ o $A + x = B$ con $B > A$ o $A x + B = C x + D$ con $A > C$ y $B > D$. También es objeto de estos ítems relacionar sus resultados con los de los apartados de la cuestión 2 para observar si el uso de la “x” en lugar de portavariable “□” aumenta o disminuye la dificultad del problema.

En los ítems 17, 18, 19 y 20 de la cuestión número 4, aparece el lenguaje pre-algebraico con dos ítems, 17 y 18, que han permanecido constantes a lo largo de todas las pruebas. Sin embargo en los ítems 19 y 20 se escribe “=”, que no había aparecido en las pruebas anteriores.

Es importante observar si existe asociación de la expresión “número cualquiera” con la elección de un número concreto, y en este último caso, si existe un sesgo hacia algunos números determinados.

Pretenden estos ítems analizar la habilidad cognitiva de carácter conceptual codificada con C_1, esto es cómo realizan la conversión entre los diferentes registros.

En los ítems 21, 22, 23 y 24 (Pr1) referidos a obtener valores numéricos, existe un cambio en relación a su homólogo del cuestionario C_3 (9a, ítem 36; 9b, ítem 37; 9c, ítem 38; y, 9d, ítem 39) ya que ahora no aparecen divisiones aunque sí operaciones con números enteros y con paréntesis.

Aquí las observaciones son variadas:

- ¿saben sustituir?,
- ¿saben operar?,
- ¿realizan las operaciones en el orden dado o en otro?,
- ¿la obtención de algún resultado parcial negativo incrementa la dificultad?,
- ¿aplican la propiedad distributiva o efectúan previamente el paréntesis haciendo uso de la propiedad asociativa?

Son unos ítems adecuados para analizar sus estrategias en la sustitución formal. Esta habilidad está codificada con O_3 .

El ítem 25 ya utilizado en el cuestionario C_3 (pregunta 10, ítem 42), incluye un problema de enunciado verbal con redundancia de “dos semanas” y 14 días. Se intenta observar la comprensión del problema, si utilizan gráficos o no y limitación o no, a la expresión de un producto, esto es la habilidad a detectar en la conversión de registros: C_1.

El ítem 26 es similar al 43 (pregunta 11) del cuestionario C_3, pero con la diferencia que aquí se intenta simplificar dando un valor numérico a la altura del rectángulo que se solicita dibujen y antes era una letra. Podríamos hacer un esquema de las conversiones:

Lenguaje Habitual

Representación Visual /Geométrica — Representación Formal Algebraica

Nos preguntamos:

- ¿entenderán el vocablo “disminuye” ?,
- ¿hacen los dibujos proporcionales según el enunciado?,
- ¿utilizan alguna escala?

Aquí se contextualiza un enunciado en un rectángulo y permite ver el desarrollo de la habilidad de carácter conceptual codificada con C_2.

Los próximos ítems 27, 28, 29, 30 y 31 de la pregunta 8, son propios para detectar la habilidad cognitiva de carácter conceptual ya citada C_2. En ellos hay cierta correspondencia con ejercicios de pruebas anteriores. Como en las citadas pruebas anteriores sólo existe un ítem donde se especifican las unidades de medida específicas, concretamente cm^2, y esto se repite en el cuestionario que estamos comparando (3, b, 14 de C_3 y 8, e, 31, de Pr1). Hay que hacer notar que en cuestionarios anteriores (los del 90-91), se había mezclado en la pregunta tres áreas de rectángulos con datos numéricos y alfabéticos, sin embargo en estos cuestionarios C_3 y Pr1 ya se han separado en una prueba los ejercicios con datos numéricos y los ejercicios con datos alfanuméricos y en la última revisión se introdujo previamente un “cuadriculado” de las unidades contenidas en el primer ítem correspondiente a la prueba Pr1 (ítem número 27).

En estos últimos ítems (del 27 al 31), se pretende observar el conocimiento del alumno del concepto de área y en concreto de la del cuadrado y rectángulo, además ver si, en el ítem 28, previamente al cálculo el área, calculan las dimensiones parciales, concretamente la base, al venir dada por dos números, o hacen los cálculos de las áreas de subrectángulos y luego las suman o si sólo las calculan, y si asignan unidades de medida.

En el ítem 29 nos preguntamos si la “posición invertida” del rectángulo dificulta el cálculo del área.

El ítem 30 presenta más dificultad ya que las dos dimensiones se dan subdivididas, y, aunque son numéricos, suele crear conflicto: ¿hacen subdivisiones para el cálculo del área y llegan a la suma total?

En el ítem 31 común a todas las pruebas realizadas hasta ahora se busca saber si se comprende que el área del rectángulo total es la suma del área de los dos subrectángulos.

Como ya hemos indicado, los ítems correspondientes al área del rectángulo, en cuyas dimensiones intervienen letras, estaban en esta prueba separados, y se localizan exactamente en los ítems 32, 33, 34 y 35 de la cuestión 9. Los ítems 32, 33 y 35 van incrementando su dificultad desde dar las dimensiones con un solo dato, letra o número (ítem 32) a darlas con dos datos en cada uno, (datos alfanuméricos en el ítem 35), pasando por una dimensión con un dato numérico (4) y otra con dos datos (alfanuméricos, ítem 33).

El ítem 34 presenta dos subrectángulos de áreas dadas, una con números y otra con letras. ¿Responderán a la medida del área con unidades adecuadas?, ¿aceptarán la falta de clausura?

En la pregunta 10 (ítems 36, 37 y 38) se pretende observar la ambigüedad notacional. Se reconoce que presenta más dificultad que si se hubiera puesto: ¿cuál es el valor de...? en lugar de: ¿en qué se transforma...? aquí puede aparecer concretamente en el ítem 37 (valor de 4a, si a= 2) los problemas de concatenación por lo que se espera respuestas del tipo 6, 42, 2.

En el ítem 36 puede aparecer como respuesta 24 y en el 38 “53-3” por 5.3 - 3.

Es posible también que si no hay aceptación de respuestas abiertas los ítems 36 y 38 no los resuelvan, a pesar de tener valores numéricos para asignar a las letras.

En cualquier caso consideramos estos ítems importantes para seguir el proceso hacia la sustitución formal. Hacen posible observar la habilidad cognitiva de carácter conceptual C_3 y además la operatividad básica O_2 y O_1 con o sin paréntesis.

El tratamiento de los ítems 39, 40, 41 y 42 de la cuestión 11 no tiene precedentes en las pruebas anteriores y se ha incluido para analizar fundamentalmente el uso de los paréntesis, así como si los alumnos relacionan o no espontáneamente, la proposición de aprovechar la representación visual / geométrica para la operatividad del paréntesis. Por ello se relacionan directamente con O_2 y además permiten valorar el S.R.V.G. como apoyo a la operatividad básica en Álgebra.

Aquí es probable que aparezca una variedad de respuestas en el ítem 39, [a . (b + 5)], desde multiplicar el factor fuera del paréntesis sólo por el primer término del mismo y luego sumar el segundo término, hasta poner cada elemento que aparece uno a continuación del otro como si fuera un producto y no existiese otra operación dentro del paréntesis.

En el ítem 40, [(a + 3) (b + 2)], puede que sumen o multipliquen los términos numéricos y le añadan las letras: 5ab ó 6ab o asocien los elementos de los paréntesis como si fuesen factores quedando 3a + 2b y luego sumarlos.

En el ítem 41 la dificultad debe ser mayor al no aparecer datos numéricos, aunque al ser los dos paréntesis iguales, puede ocurrir que sí recuerden el cuadrado resultante del producto de dos números, o expresiones iguales.

En el ítem 42, la presencia de trinomios en los paréntesis, puede provocar el no abordarlo o recurrir al S.R.V.G.

El ítem 43, de enunciado verbal, tiene gran énfasis de conocimiento lingüístico por la redacción del mismo, y por los vocablos "triplo", "aumentado". Supone, en cualquier caso, mayor dificultad que las de las expresiones más habituales en los textos, que suelen ser del tipo: "el triplo de un número más tanto (un número concreto), es igual a otro tanto (también con datos numéricos), ¿cuál es el número?"; o este otro: "el triplo de un número aumentado en tanto (un número concreto) es igual a otro tanto (también con dato numérico), ¿cuál es el número?"

Asimismo el ítem 44, de enunciado verbal también, supone cierto dominio de la sintaxis gramatical y del concepto de mitad, además de la palabra clave "entre" que suele ir asociada a división y en este caso a "suma". ¿Podríamos esperar alguna representación gráfica de algún tipo?, o ¿quizás no están habituados...? Tanto en este ítem 44 como en el anterior, 43, se trata de resolver una ecuación sencilla, por tanteo, ensayo y error o utilizando cualquier otro heurístico específico por el que ellos opten.

Por último, la cuestión 14, (ítems 45, 46, 47 y 48), a pesar de no requerir grandes conocimientos, ya que en los cuatro ejemplos los datos numéricos orientan a la buena respuesta, así como el no tener que resolver las ecuaciones -según se indica en el enunciado-, el planteamiento no es habitual y puede inducir a no enfrentarse a su resolución e incluso a no entenderlo al leer y al ser muy larga la expresión de lo solicitado no "molestarse" en intentar comprenderlo.

Pasamos a describir el cuestionario Pr2 (anexo 5, parte 2ª) de la que en la tabla 4.4 se muestra la correspondencia de algunos de sus ítems con la prueba C_3.

C_3	**Pr2**	**C_3**	**Pr2**	**C_3**	**Pr2**
21	(1, a, 1)		(6, 0, 18)		(8, 0, 34)
	(1, b, 2)		(6, 0, 19)		(9, 0, 35)
20	(1, c, 3)		(7, a, 20)	27	(10, a, 36)
	(1, d, 4)		(7, a, 21)	28	(10, b, 37)
	(2, a, 5)		(7,a, 22)		(11, a, 38)
26	(2, b, 6)		(7, b, 23)		(11, b, 39)
	(2, c, 7)		(7, b, 24)		(11, c, 40)
	(2, d, 8)		(7, b, 25)		(12, a, 41)
	(3, 0, 9)		(8, 0, 26)		(12, b, 42)
	(4, 0, 10)		(8, 0, 27)		(12, c, 43)
	(5, b, 11		(8, 0, 28)		(12, d, 44)
	(5, 0, 12)		(8, 0, 29)		(13, 0, 45)
	(5, 0, 13)		(8. 0. 30)	32	(14, a, 46)
	(5, 0, 14)		(8, 0, 31)	33	(14, b, 47)

C_3	Pr2	C_3	Pr2	C_3	Pr2
	(5, 0, 15)		(8, 0, 32)	34	(14, c, 48)
	(5, 0, 16)		(8, 0, 33)	35	(14, d, 49)
	(5, 0, 17)				

Tabla 4.4

En las dos partes de esta prueba Pr1 y Pr2 aparecen ítems similares según la tabla 4.5 adjunta, por ello se pasará a hacer un comentario de las preguntas que están relacionadas en ellas.

Pr1 Nº PREGUNTA (nº ítems)	**Pr2 Nº PREGUNTA (nº ítems)**	**CARACTERÍSTICAS**
8 (27-31); 9 (32-35)		Áreas.
	9 (35); 10 (36-37); 11 (38-40); 14 (46-49)	Perímetros.
5 (21-24)		Sustitución Formal.
1 (1-4)		Operaciones aritméticas: +, -, x, :, con números enteros.
	7 (20-23, 25); 8 (26, 27, 29, 32, 33)	Operaciones con letras, y simplificación sin paréntesis.
11 (39-42)	7 (24); 8 (28, 30, 31, 34)	Operaciones con paréntesis.
	6 (18-19)	Comparación de expresiones algebraicas.
10 (36-38)	5 (11-17)	Sustitución Formal.
4 (17-20); 7 (26)	2 (5-8); 3 (9), 12 (41-44)	Conversión de registros.
6 (25)	4 (10)	Problemas de enunciado verbal.
2 (5-12); 3 (13-16)	1 (1-4)	Resolución de ecuaciones dadas.
12 (43); 13 (44)	13 (45)	Plantear y resolver ecuaciones.
14 (45-48)		Relaciones enunciados - ecuaciones.

Tabla 4.5

A efectos de considerar los problemas con áreas y perímetros se decidió que no aparecieran perímetros en Pr1 (anexo 5 parte 1ª) y sí áreas (8, 9), y en Pr2 (anexo 5 parte 2ª), al revés (9, 10, 11 y 14). En cualquier caso se va a analizar la categoría C_2 dentro de las habilidades cognitivas de carácter conceptual.

El cálculo de valores numéricos no aparece en Pr2, no pareció ser necesario plantear otra cuestión sobre él, sí en la 5 de Pr1.

En cuanto a las operaciones básicas se hallan las cuestiones 1 de Pr1 (+, -, x, :, con números enteros), con letras y simplificación (7 y 8 de Pr2) y operaciones con paréntesis en la pregunta 11 de Pr1. Los ítems correspondientes de Pr2 nos permiten analizar las habilidades cognitivas de carácter operacional codificadas con O_1 y en algunos de ellos (24, de la pregunta 7, y 28, 30, 31 y 34 de la pregunta 8), O_2.

En cuanto a la comparación de registros sólo existe una cuestión (6 de Pr2) que se prevé de gran dificultad.

En la sustitución (10 de Pr1 y 5 de Pr2) se llega tras un proceso de dificultad a plantear en los ítems de Pr2 la sustitución formal que permite analizar las habilidades del tipo O_3 y O_2 en el ítem 16.

En relación a la conversión de registros, los ítems 17, 18, 19 y 20 de Pr1 de la cuestión 4 y los ítems 5, 6, 7 y 8 de Pr2, son similares e implican la expresión de “un número cualquiera” en el 17, los conceptos de “doble” (ítem 19 y 20 de Pr1 y 5 de Pr2), “triplo” (ítem 8 de Pr2) y “suma de dos números distintos” (ítem 18 de Pr1 y 7 de Pr2). En ambas partes, Pr1 y Pr2, aparece “es” sustituyendo al “=”, o a, “es igual a” en los ítems 19 y 20 de Pr1 y 7 y 8 de Pr2. Con ellos se puede detectar habilidades del grupo codificadas con la categoría C_1 y el uso del signo igual, incluida su observación en la categoría C_3.

La pregunta 12 de Pr2 es idéntica a la cuestión 3 (ítem 6, 7, 8, 9) del cuestionario C_{41} del bloque segundo (C_4) y por tanto remitimos a sus comentarios.

El ítem 26 de Pr1, corresponde a una conversión de registros desde el habitual al geométrico y al algebraico y de éste al geométrico que ya se comentó. Permite su interés para analizar habilidades de las codificadas con la categoría C_2.

La pregunta 3 (ítem 9 de Pr2) se puede relacionar con la pregunta 6 de Pr1 (ítem 25) por cuanto sólo pide la expresión de “n” viajes por 50 niños por viaje. Aquí el objetivo es detectar la capacidad de aceptación de respuesta abierta. Esta situación se va a repetir en el ítem 49 de Pr2, pero en contexto geométrico, al hallar un perímetro de un polígono de “n” lados y 2 de longitud constante del lado. Permite el análisis de registro (categoría C_1) y cómo interpretan y comprenden las letras (categoría C_3).

En cuanto a los problemas de enunciado verbal, el 6 de Pr1 está en contexto familiar al niño y en general a la sociedad (periódicos). Aparecen relaciones: venta diaria - quincena y venta total, con la misma estructura más habitual en los textos que es: precio unidad “por” número de unidades = costo total. Sólo se pide la expresión, no el resultado final. Por tanto, es idóneo para analizar según C_1 en conversión de lenguajes y C_2 contextualizando el lenguaje algebraico.

En el ítem correspondiente de Pr2 (ítem 4) también el contexto es familiar (pegatinas). Se hace conversión de registros (relacionado con C_3) y luego hay que analizar la operatividad básica (O_1).

Las cuestiones de ecuaciones están íntimamente relacionadas con las específicas de enunciado verbal, como es habitual.

Con relación a las ecuaciones se observa existen más cuestiones en la Pr1 que en la Pr2.

Pr1/Nº Pregunta	2, 3	6	12, 13	14
Pr2/ Nº Pregunta	1	4	13	

Tabla 4.6

Las cuestiones 2 y 3 de Pr1 y la 1 de Pr2 tratan exclusivamente de resolver ecuaciones dadas.

En el ítem 2, presentando portavariable en las siguientes situaciones, se pretende detectar la dificultad de la localización del portavariable:

$\square$- A = B; $\square$ + A = B; A x$\square$ = B; A /$\square$ = B

A - $\square$ = B; A + $\square$ = B; $\square$ x A = B; $\square$/ A = B

Se muestra a continuación un esquema de los ítem 3 de Pr1 y 1 de Pr2.

Item 3 de Pr1	Item 1 de Pr2
x – A = B, B > A	A - x = B, A > B
A x + B = C x + D, C > A y B >D	A x = B x + C, B > A
A + x = B, B > A	A = B / x , B = n A, n $\in$ N
A x + B = C x + D, A > C y B > D	A x + B = C x + D, C > A y D > B

Tabla 4.7

donde se observan los distintos tipos de ecuaciones planteadas.

Las cuestiones 12 y 13 de Pr1 y 13 de Pr2 se parecen en que requieren las tres el planteamiento de la ecuación, para luego pasar a resolverla.

La ecuación resultante de la cuestión número 12 (Pr1) es:

A x + B = C, donde C > B y C - B = A

La ecuación de la cuestión número 13 (Pr1) pueden plantearla de varias maneras, según las destrezas y habilidades y quizás "costumbre" de los alumnos, resultando:

$x + \frac{1}{2}x = 48$, siendo x y $\frac{1}{2}$ x, el número de niños de cada grupo.

2 x + x = 48, siendo 2x y x, el número de niños de cada grupo.

E incluso con un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$x + y = 48$$
$$y = \frac{1}{2}x,$$

y en la ecuación de la cuestión 13 de Pr2 el planteamiento resultante es de la forma:

A + B x = C + D x, B > D y C > A

La cuestión 14 de Pr1 ya fue comentada y establece relaciones entre enunciados y ecuaciones dadas correspondientes a ellos.

De los ítems 46, 47, 48 y 49 de Pr2 a los que no se ha hecho aún referencia, los tres primeros, 46, 47 y 48, están directamente relacionados con otros de pruebas anteriores y el ítem 49 (14 d) de Pr2 es nuevo y persigue directamente la aceptación de respuesta abierta.

Se espera que, o cierren el polígono mostrado, que es abierto, den el valor 2 a los segmentos dibujados y calculen el perímetro como si fuese un polígono cerrado; o den a “m” un valor arbitrario concreto, prescindiendo del dibujo o, incluso no resuelvan el ejercicio.

Un nuevo cuestionario de este tercer bloque es la Po1 (anexo 6, parte 1ª) que comprende 49 ítems en 12 preguntas que se aplicó después de la instrucción y que puede esquematizarse como muestra la tabla siguiente.

Nº Pregunta en Po1 (nº total de ítems)	**Nº ítems**	**CARACTERÍSTICAS**
1 (6) 2 (1) 12 (1)	1, 2, 3, 4, 5, 6 7 49	Cálculo de perímetros.
3 (1)	8	Problema de enunciado verbal con datos numéricos.
4 (1)	9	Problema de enunciado verbal con datos alfanuméricos.
5 (9) 9 (4)	10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 40, 41, 42, 43	Sustitución y formal.
6 (4)	19, 20, 21 y 22	Cálculo de áreas.
7 (9)	23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31	Operaciones con letras. Contexto aditivo.
8 (8)	32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39	Conversión de registros.
10 (4)	44, 45, 46, 47	Operaciones con letras. Contextos aditivo y multiplicativo. Propiedad distributiva.
11 (1)	48	Conversión de registros.

Tabla 4.8

Los ítems anteriores podrían agruparse en torno a :

a) Cálculo de perímetros en los ítems 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, y 49.

Los ítems 1, 6 y 49 están en contexto aritmético.

Los restantes ítems (2, 3, 4, 5 y 7) se muestran en contexto algebraico. En el ítem 7 han de hacer conversión del lenguaje habitual al S.R.F. algebraico mediante el S.R.V.G. En los ítems 2, 3 y 5 sólo aparecen letras y en el 4 los datos son alfanuméricos.

b) Cálculo de áreas en los ítems 19, 20, 21 y 22.

Al igual que en los ítems anteriores los contextos en éstos también varían: en 19 y 21 los datos son exclusivamente numéricos y en los ítems 20 y 22 son, alfanuméricos.

c) Sustitución y en especial la sustitución formal: ítems 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 40, 41, 42 y 43.

d) Propiedad distributiva: ítems 44, 45, 46 y 47.

Los ítems 44 y 47 presentan la distributividad por la izquierda, el ítem 45, por la derecha y la doble distributividad aparece en el ítem 46. La diferencia entre el 44 y 47 estriba en que el factor fuera del paréntesis en el ítem 44 es un número (concretamente el 6) y en el 47, una letra (a).

e) Conversión de registros: ítems 7, 9, 32, 33 , 34, 35, 36, 37, 38, 39 y 48.

Del ítem 7 ya se hizo referencia en el grupo a).

Los ítems 9, y los comprendidos del 32 al 39 suponen una conversión del lenguaje desde el habitual al algebraico en diferentes contextos, así: el 9 está en contexto de dinero; los ítems 32 y 33 están en la estructura común de "costo = precio de unidad x número de unidades" diferenciándose en que el 33 obliga a despejar el valor de la unidad.

El resto, ítems comprendidos desde el 34 al 39, están en contexto numérico, sólo que los datos de los ítems 34, 36, 38 y 39 son números y en los 35 y 37 aparecen números y letras. La aparición de las palabras o expresiones clave "diferencia", "menos que", "tercera parte" y "triplo", pueden llevar a dificultad en estos contextos.

El ítem 48 es distinto en tanto en cuanto hay que hacer conversión de registros pero sólo hay que dibujar dos rectángulos. Este ítem es común ya en varias de las pruebas anteriores.

f) Problemas de enunciado verbal: ítem 8.

Se dan todos los datos numéricos y el contexto es familiar de estructura semántica sencilla, es decir, precio total = costo = precio unidad x número de unidades.

g) Operatividad básica con letras: ítems 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 y 31.

Sólo aparecen las operaciones de sumar y restar. Los ítems 25, 27, 28 y 31 además presentan paréntesis.

Hay también que considerar que tanto en el cálculo de perímetros como en el de áreas es preciso también aceptar respuestas abiertas para contestar adecuadamente.

Es significativo, por último, la obligatoriedad en esta prueba del trabajo con paréntesis en los ítems 15 (sustitución formal), 20 (cálculo de área), 22 (cálculo de área), 25, 27, 28 y 31 en operatividad básica (suma algebraica) y con la propiedad distributiva, 44, 45, 46 y 47, como ya se ha indicado anteriormente.

Para otras observaciones se remite a las pruebas anteriores según la siguiente tabla de correspondencias, (las ternas que aparecen en los paréntesis codifican: primer elemento, el número de la pregunta; segundo, el apartado si lo hubiere, en caso contrario aparece un 0; y tercero, el nº del ítem) tabla 4.9:

Po1	**C$_3$**	**Pr1**	**Pr2**	**Po1**	**C$_3$**	**Pr1**	**Pr2**
(1, a, 1)	(6,a,27)		(10,a,36)	(10,c,46)			
(1, b1, 2)				(10,d,47)			
(1, b2, 3)				(11,0,48)			
(1, b3, 4)				(12,0,49)		(7,0,26)	
(1, c, 5)					(1, a, 1)	(1, a, 1)	
(1, d, 6)	(6, b, 28)		(10,b,37)		(1, b, 2)	(1, b, 2)	
(2, 0, 7)	(8, d, 35)		(14,d,49)		(1, c, 3)	(1, c, 3)	
(3, 0, 8)					(2, a, 5)	(2, a, 5)	
(4, 0, 9)					(2, b, 6)	(2, b, 6)	
(5, a, 10)					(2, c, 7)	(2, c, 7)	
(5, b, 11)					(2, d, 8)	(2, d, 8)	
(5, c, 12)					(2, e, 9)	(2, e, 9)	
(5, d, 13)					(2, f, 10)	(2, f, 10)	
(5, e, 14)					(2, g, 11)	(2, g, 11)	
(5, f, 15)					(2, h, 12)	(2, h, 12)	
(5, g, 16)					(3, a, 13)		
(5, h, 17)					(3, b, 14)	(8, e, 31)	
(5, i, 18)					(3, c, 15)	(8, c, 29)	
(6, a, 19)		(8, c, 29)			(3, d, 16)	(8, d, 30)	
(6, b, 20)		(9, d, 35)			(4, a, 17)	(3, a, 13)	
(6, c, 21)					(4, b, 18)		
(6, d, 22)		(9, b, 33)			(4, c, 19)	(3, c, 15)	
(7, a, 23)			(8, a, 26)		(4, d, 20)		(1, c, 3)
(7, b, 24)			(8, b, 27)		(4, e, 21)		(1, a, 1)
(7, c, 25)			(8, c, 28)		(4, b, 22)		
(7, d, 26)			(8, d, 29)		(5, a, 23)	(4, a, 17)	
(7, e, 27)			(8, e, 30)		(5, b, 24)	(4, b, 18)	
(7, f, 28)			(8, f, 31)		(5, c, 25)		
(7, g, 29)			(8, g, 32)		(5, d, 26)		(2, b, 6)
(7, h, 30)			(8, h, 33)		(7, a, 29)		
(7, i, 31)			(8, i, 34)		(7, b, 30)		
(8, a, 32)					(7, c, 31)		
(8, b, 33)					(8, a, 32)		(14, a, 46)
(8, c, 34)					(8, b, 33)		(14, b, 47)
(8, d, 35)					(8, c, 34)		(14, c, 48)
(8, 3, 36)					(8, d, 35)		(14, d, 49
(8, f, 37)					(9, a, 36)	(5, a, 21)	
(8, g, 38)					(9, b, 37)	(5, b, 22)	
(8, h, 39)					(9, c, 38)		
(9, a, 40)					(9, d, 39)	(5, c, 23)	
(9, b, 41)					(9, e, 40)		
(9, c, 42)					(9, f, 41)	(5, f, 24)	
(9, d, 43)					(10, 0, 42)	(6, 0, 25)	
(10, a, 44)							
(10, b, 45)							

Tabla 4.9

La prueba Po2, exclusiva de ecuaciones, consta de 15 ítems agrupados en 12 cuestiones.

Podríamos relacionar toda la prueba con la parte referente a ecuaciones de la prueba dividida en dos partes Pr1 y Pr2.

La pregunta 4 (Po2), ítem 4, se relaciona con los ítems 48 de Po1 (11,0,48) y 26 de Pr1 (7,0,26), ya que se limitan todas a hacer un dibujo y ya está comentada.

El resto de los ítems se puede agrupar en:

a) Resolver ecuaciones dadas de la forma:

a.1) A x + B = C x + D, A > C y D > B (ítem 5,0,5)

a.2) A x = B, B = n . A, n$\in$ N. (ítem12,0,15)

b) Planteo y resolución:

(1,0,1)	Contexto: dinero - tiempo.
(2,0,2)	Contexto: geométrico.
(3,0,3)	Contexto: deportes.
(6,0,6)	Contexto: peso.
(7,0,7)	Contexto: empresa, igual al ítem (13,0,45) de Pr2, sólo se diferencian en el contexto.
(8,0,8)	Contexto: dinero. Estructura de: costo = precio unidad x número de unidades, pero hay que despejar para aplicar: precio unidad = costo / número de unidades.
(9,0,9)	Contexto aritmético. Operaciones combinadas con suma y producto. Palabra clave, “doble”.
(10,0,10)	Contexto: dinero. Operaciones combinadas (x y :). Los alumnos pueden hacerlo por reducción a la unidad o por proporcionalidad.

c) Comparación enunciados y ecuaciones dadas para los mismos:

(11,a,11)	Contexto: dinero. Operación implicada: división.
(11,b,12)	Contexto: edad. Operación implicada: suma.
(11,c,13)	Contexto: libros de cuentos. Operaciones implicadas: multiplicación y división.
(11,d,14)	Contexto: equipo concursantes.

4.2.4 Cuarto bloque: Corresponde a los TESTA Y TESTB, implementados en el curso 1994-1995

Después de todos los estudios anteriores se considera un test definitivo que se pretende estudiar en términos de fiabilidad y validez.

4.2.4.1 Construcción del Test

Este Test definitivo comprende dos partes, a efectos de pasarlo a los alumnos (TESTA y TESTB, anexo 7 partes 1ª y 2ª), formadas, respectivamente, por 16 preguntas que incluyen 65 ítems en la primera (TA) y 14 preguntas con 32 ítems la segunda (TB).

En lo relativo a paréntesis, las dos partes, TA y TB, pretenden considerar aspectos de la actividad algebraica (sintaxis) y aspectos que se refieren a la interpretación que el alumno da a los símbolos del lenguaje algebraico (semántica).

En general, los ítems de paréntesis pretenden medir el nivel de eficiencia del alumno en la ejecución de las operaciones algebraicas:

Pregunta 1: Adiciones, restas y multiplicaciones con números enteros.

Pregunta 6: Adiciones, restas y multiplicaciones con monomios, binomios y trinomios.

Pregunta 7: Adiciones, restas y multiplicaciones con monomios y binomios.

Pregunta 13: Multiplicaciones de monomios, binomios y trinomios con sugerencia de apoyo geométrico.

La parte TA, comprende ítems claramente orientados hacia el comportamiento del alumno frente a expresiones donde es “obligado” usar, manipular y operar con expresiones que contienen paréntesis, al menos en el planteamiento inicial del ítem.

En la tabla siguiente (tabla 4.10) se expresan las características de los ítems.

Ítems	**Características**		
(1, a, 1)	operaciones implicadas: +, -		
(1, b, 2)	operaciones implicadas: +, -	( )	
(1, c, 3)	operaciones implicadas: +,-, x		distributiva I.
(1, d, 4)	operaciones implicadas: +,-, x,	( )	distributiva D.
(2, a, E)	ejemplo sustitución formal, contexto aditivo.		
(2, b, E)	ejemplo sustitución formal, contexto multiplicativo.		
(2, c, 5)	sustitución formal, contexto aditivo.		
(2, e, 6)	sustitución formal, contexto aditivo.		
(2, g, 7)	sustitución formal, contexto aditivo.		
(2, d, 8)	sustitución formal, contexto multiplicativo.		
(2, f, 9)	sustitución formal, contexto multiplicativo.		
(2, h, 10)	sustitución formal		distributiva I.
(3, 0, 11)	operación implicada: +.		
(3, 0, 12)	operación implicada: +.		
(4, 0, 13)	sustitución formal, contexto aditivo/multipicativo.		
(4, b, 14)	sustitución formal, contexto aditivo/multipicativo.		distributiva I.
(4, c, 15)	producto binomios, contexto aditivo/multipicativo.		Doble distributiva
(5, a, 16)	reconocer sustitución		
(5, b, 17)	reconocer sustitución		
(5, c, 18)	reconocer sustitución		
(5, c, 19)	reconocer sustitución		
(5, d, 20)	reconocer sustitución		
(6, a, 21)	operatividad básica, contexto aditivo/multipicativo.		distributiva I.
(6, b, 22)	operatividad básica, contexto aditivo.reconocer respuesta abierta		
(6, c, 23)	operatividad básica, contexto aditivo		
(6, d, 24)	operatividad básica, contexto aditivo.reconocer respuesta abierta		
(6, e, 25)*	operación implicada: +	( )	

Ítems	**Características**		
(6, f, 26)	operación implicada: + y -.		
(6, g, 27)	operación implicada: -	( )	
(6, h, 28)	operación implica9da: +	( )	
(6, i, 29)*	operación implicada: +	( ) ( )	
(6, j, 30)*	operación implicada: +	( ) ( )	
(6, k, 31)*	operación implicada: -	( )	
(6, l, 32)	operación implicada: +	( )	
(7, a, 33)	operación implicada: -	( ) ( )	
(7, b, 34)*	operación implicada: +	( ) ( )	
(7, c, 35)	operación implicada: +	( )	
(7, d, 36)	operación implicada: x	( )	distributiva D.
(8, a, 37)	reconocer expresiones equivalentes		
(8, f, 38)	reconocer expresiones equivalentes		
(9, a, 39)	sustitución formal, contexto multiplicativo		
(9, b, 40)	operación implicada: x	( )	distributiva I.;V.N
(9, c, 41)	sustitución formal		
(9, d, 42)	sustitución formal		
(10, a, 43)	conversión de registros		
(10, b, 44)	conversión de registros		
(10, c, 45)	conversión de registros		
(10, d, 46)	conversión de registros		
(11, a, 47)	operación implicada: -	( ) ( )	
(11, b, 48)	operación implicada: +	( ) ( )	
(11, c, 49)	operación implicada: +	( )	
(11, d, 50)	operación implicada: x	( )	distributiva D.
(12, a, 51)	contexto áreas		
(12, b, 52)	operación implicada: x	( )	distributiva I o D.
(13, a, 53)	monomio x binomio		distributiva I
(13, b, 54)	binomio x binomio		doble distributiva
(13, c, 55)	trinomio x binomio		triple distributiva
(14, a, 56)	contexto perímetros		
(14, b, 57)	contexto perímetros		
(14, c, 58)	contexto perímetros		
(14, d, 59)	contexto perímetros		
(15, a, 60)	reconocer expresiones equivalentes		
(15, f, 61)	reconocer expresiones equivalentes		
(16, a, 62)	conversión de registros.		
(16, b, 63)	conversión de registros.		doble distributiva
(16, c, 64)	conversión de registros.		doble distributiva
(16, d, 65)	conversión de registros.		doble distributiva

Tabla 4.10

Hacemos las siguientes observaciones a la misma:
*, aparecen elementos opuestos respecto a la suma al quitar el paréntesis.
( ), indica que hay un paréntesis en el ítem.
( ) ( ) indica que hay dos paréntesis en el ítem.
D: derecha. I: izquierda.

E: Ejemplo.
V.N.: Valor numérico.

Comentamos ahora las preguntas que nos hacemos en cada uno de los ítems.

En la pregunta 1 (ítems del 1 al 4) de sumas, restas y multiplicaciones con números enteros, se pretende ver si:

a) ¿usan en todos los casos la misma estrategia?; por ejemplo, ¿primero abordan el paréntesis, su contenido, o lo hacen al azar?,

b) ¿usan la propiedad distributiva?,

c) ¿usan la propiedad distributiva oportunamente?,

d) ¿usan la propiedad distributiva correctamente?,

e) ¿quitan paréntesis o actúan directamente?,

f) ¿cómo se enfrentan a respuestas negativas?,

g) ¿les afecta el orden de colocación del paréntesis?,

h) ¿cómo se enfrentan a los corchetes?

En los 4 primeros ítems, [(1, a, 1); (1, b, 2); (1, c, 3); (1, d, 4)], hay un signo “-” delante de cada uno de sus paréntesis.

En el ítem (4, c, 15) en el resultado aparece un cuadrado.

En la pregunta 6 (ítems desde del 21 al 32) de suma, resta y multiplicación con monomios, binomios y trinomios, al igual que en la pregunta 1 se pretende analizar si:

a) ¿usan en todos los casos la misma estrategia; por ejemplo, primero abordan el paréntesis, su contenido, o lo hacen al azar?,

b) ¿usan la propiedad distributiva?,

c) ¿usan la propiedad distributiva oportunamente?,

d) ¿usan la propiedad distributiva correctamente?,

e) ¿quitan paréntesis o actúan directamente?,

f) ¿cómo se enfrentan a respuestas negativas?,

g) ¿les afecta el orden de colocación del paréntesis?, y, además:

h) ¿asignan valores numéricos a las letras?,

i) ¿admiten la falta de clausura, cuando desde el principio no es posible “operar”?

En la pregunta 7 (ítems desde el 33 al 36) se hacen los mismos cuestionamientos que en la 6.

En los ítems (6, e, 25), (6, h, 28) y (6, k, 31) el paréntesis es el primer término, sin embargo en los ítems (6, g, 27), (6, l, 32), (7, c, 35) y (11, c, 49) el término que contiene el paréntesis es el segundo.

Los ítems (6, g, 27), (6, h, 28), (6, k, 31) y (6, l, 32) contienen un signo “+” dentro del paréntesis y los ítems (6, e, 25), (7, c, 35) y (11, c, 49) tienen un signo “-” dentro del paréntesis correspondiente. El ítem (6, g, 27) tiene un signo “menos” delante del paréntesis. El (6, i, 29) es una suma de un paréntesis con signo “-” y “+” dentro de él, más otro paréntesis con signo “-” dentro. El (6, j, 30) es una suma de un paréntesis con signo “+” dentro, más otro paréntesis con signo "-" dentro. El (7, a, 33) se prevé más difícil, ya que es una diferencia de un paréntesis con signo "+" dentro, menos otro paréntesis con signo "-" dentro. El ítem (7,b,34) es igual al (6, j, 30) pero con las incógnitas representadas con "x" e "y".

Los ítems (12, a, 51) y (12, b, 52) están en contexto geométrico, concretamente en el área de un rectángulo y pretenden analizar: a) si lo estudiantes se plantean la necesidad de usar paréntesis, b) cuántas y cuáles formas válidas presentan al expresar el área de estas figuras, c) interpretan la letra como algo ("como una cosa") que debe figurar junto con los números y d) ¿no saben cómo interpretar las letras o que hacer con ellas?

Los ítems (13, a, 53), (13,b,54) y (13,c,55) tienen apoyo de la representación geométrica para la propiedad distributiva. En estos tres ítems no intervienen signos negativos.

En los ítems (14, a, 56), (14, b, 57), (14, c, 58) y (14, c , 59), también se pretende, como en la pregunta 12, analizar: a) si lo estudiantes se plantean la necesidad de usar paréntesis, b) cuántas y cuáles formas válidas presentan al expresar el perímetro de estas figuras, c) si interpretan la letra como algo ("como un cosa") que debe figurar junto con los números y d) si no saben cómo interpretar las letras o qué hacer con ellas.

La pregunta 16 (ítem 16, a, 62; 16 b, 63; 16, c , 64 y 16, d, 65), es bastante compleja por las expresiones que son en sí ambiguas y, efectivamente, no existe convenio para facilitar una resolución. ¿Se pretende que los alumnos expresen algebraicamente la situación con una traducción "lineal" del enunciado? "Todo" es una palabra clave que parece implicar un paréntesis, ¿tiene que estar explícita?, ¿se puede sustituir por una "coma" (,)? ¿los alumnos/as son conscientes de la "coma" o son indiferentes a ella?

En el ítem (16, d, 65) influye en el resultado correcto la lectura que hagan los alumnos del enunciado, ya que es algo ambiguo.

En la pregunta 2, con los ítems: (2, c, 5), (2, e, 6), (2, g, 7), (2, d, 8), (2, f, 9), (2, h, 10), se pretende medir la capacidad de expresión de estas operaciones sencillas por los alumnos. Se supone que si han dado algo de Álgebra, esta capacidad será adquirida, y si no han dado, será espontánea.

En los ítems (2, c, 5) y (2, d, 8) se pretende exclusivamente cálculo numérico y en el caso de haber dado Álgebra, los alumnos mostrarán si la han comprendido o no.

Como respuestas posibles se esperan:

a) "10" para 6 + 4 y "24" para 4 x 6, que indicarían una interpretación correcta del enunciado y que suponemos la darán la mayoría de los alumnos, ya que el lenguaje es el habitual de la aritmética y las operaciones a realizar son exclusivamente con números.

b) "6 + 4" y "6 x 4".

Esta presentación de las respuestas, dejando las operaciones indicadas, es ambigua: puede proceder de alumnos que efectivamente interpreten "6 +4" como una suma, aunque la dejen indicada, o de alumnos que no se atreven a realizar la operación porque no saben cómo interpretar el apartado “x + 4” y en que la operación les parece que “tampoco está realizada” y deciden dejar una expresión escrita, que es semejante a la dada, por no tener idea clara de lo que representan las expresiones: “x + 4” y “4x”.

En lo que refiere a los ítems (2, g, 7) y (2, h, 10) las respuestas serán consecuencia de las distintas interpretaciones de las expresiones “r” y “b + 2”.

c) Respuestas: “6”y “8”.

Aquí ha desaparecido la letra. El alumno, ante la falta de información que le aporta la letra, la hace desaparecer. La “b” no le representa nada a nivel numérico y tampoco sabe cómo sumar el “4”, y parece que suma las cuatro unidades al número que tiene y para él, la respuesta a la operación de sumar, es simplemente “6”.

En el apartado (2, h, 10), puede actuar de manera similar y dar como respuesta “8”, como resultado de multiplicar “por” el número 4 la expresión “b + 2”, en la que la “b” desaparecerá.

d) Otras respuestas numéricas posibles serán consecuencia de evaluar la letra con números sencillos. El alumno asigna a las letras un valor, que él elige, siguiendo criterios o indicios ajenos a la propuesta del ejercicio.

Se puede dar, por ejemplo, como resultados para “b + 2: 4” (dando a b el valor 2), 5 (donde a la b se le ha dado el valor 3) y así sucesivamente.

e) Respuestas donde no se tiene en cuenta la “b” pero si se escribe.

Ejemplos de estas respuestas pueden ser “6b” y “8b”. En este tipo de respuestas la letra no se ha tenido en cuenta, las operaciones indicadas se realizan solamente con los números y se añade la letra “b” a la escritura porque “antes también estaba”, pero sin haberla tenido en cuenta en el momento de hacer el cálculo. Se reducirá la letra a hacer de acompañamiento. El añadido de la letra se podrá hacer de distintas formas:

- añadiéndola como estaba:

De “b + 2” más “4” se obtendrá “b + 6”,
y de “b + 2” por “4”, se obtendrá “b + 8”,

- poniéndola “de acompañante”; así quedará como si estuviera multiplicando:

De “b + 2” se obtendrá “6b”
y de “b + 2” por “4”: 8b.

Ambas soluciones pueden aportar respuestas correctas e incorrectas. Correctas como la primera: “b + 6”, que ocultan lo erróneo de la concepción que está detrás del procedimiento seguido o incorrecta como “b + 8”.

f) Respuestas que podrían considerarse ambiguas: “b + 2 + 4” y “b +2 x 4”.

No son incorrectas pero sí son ambiguas. Se supone que los alumnos saben que hay que sumar 4, saben que hay que poner “+4” pero no se atreven a continuar.

Desde el punto de vista de la sustitución formal de las preguntas 2 y 4 en los ítems 5, 6, 7, 8, 9, y 10 de la pregunta 2, y, 13, 14 y 15 de la pregunta 4, los alumnos se manifestarán respondiendo correctamente a los ítems de las preguntas 2 y 4, su concepción de la variable que supone la conjunción de dos procesos: generalización, que permite pasar de un conjunto de situaciones concretas a algún aspecto común a todas ellas, y , simbolización, que permite expresar de forma abreviada lo que tienen en común todas las situaciones.

La sustitución formal se extiende más allá de la generalización, donde variables de una expresión son sustituidas por expresiones más complejas que son nuevamente variables. (ítems 2, e, 6; 2, f, 9; 2, g, 7; 2, h, 10; 4, a, 13; 4, b, 14; 4, c, 15). Y así estas transformaciones algebraicas constituyen un poderoso instrumento de cálculo que está a mitad de camino entre lo puramente formal y un conocimiento explícito de su significado y de ahí su importancia para nuestra investigación.

La idea de sustitución (de números) se usa frecuentemente aunque el curso y la extensión de estas sustituciones algebraicas se considera en los ítems (5, a, 16), (5, b, 17), (5, c, 18), (5, d, 19) (5, e, 20). Así en la expresión 5x - 17 (16), al transformarse en 5 (y + 1) - 17 se puede comprobar su equivalencia usando números “x =4” e “y =3”.

Hay dos preguntas en la prueba: “8” (ítems 37 y 38) y “15” (ítems 61, 61) que permitirán abandonar las concepciones y errores de concatenación presentadas por los alumnos.

De pre - álgebra se pueden considerar los ítems (3, a, 11) y (3, b, 12) de la pregunta 3, y, aunque ya ha sido comentada en la prueba C_3, en sus ítems 20, 21, 22 la consideramos aquí porque allí el enunciado es más fácil: “suma 4 a cada una de las expresiones...”.

Los ítems 39, 40, 41 y 42 de la pregunta 9 también han sido comentados en los ítems 41 y 42 de Po1 (anexo 6 parte 1ª) y 37 y 38 de Pr1 (anexo 5 parte 1ª) y se ven afectados por “uso de paréntesis”, “sustitución formal” y “obtención de valores numéricos”. Son ítems que permiten medir la interpretación que da el alumno en el contenido aritmético, a expresiones algebraicas.

Finalmente, las preguntas 10 (ítems 43, 44, 45 y 46) y 16 (ítems 62, 63, 64, 65), son realmente ejercicios de conversión de lenguajes.

La parte TB (anexo 7 parte 2ª) se dedica en su totalidad a ecuaciones. Se pretende medir el nivel de eficiencia del estudiantado en la resolución de ecuaciones sencillas y conocer el tipo de estrategia que utilizan para ello: tanteo, procedimientos aritméticos y qué consistencia tienen en el uso de las estrategias usadas y verificar si esa eficiencia se lleva a cabo por tanteo solamente, por procedimientos aritméticos, procedimientos algebraicos o por varios de ellos o solamente por aplicación de la sintaxis algebraica. Esto va unido al tratamiento tradicional de la resolución de ecuaciones que ha respondido fundamentalmente al planteamiento de las siguientes cuestiones con respecto a la situación del alumno:

1) ¿Lee y entiende el enunciado, lo cual implica básicamente identificar datos, incógnitas y relaciones entre ellos y entender la pregunta formulada?

2) ¿Hace conversión al lenguaje algebraico, planteando una ecuación?

3) ¿Resuelve la ecuación planteada?

4) ¿Comprueba si el resultado obtenido en el Álgebra satisface las condiciones del problema?

Luego, nuestra visión no persigue como objetivo solamente el resolver las ecuaciones sino considerar la tarea de resolución de ecuaciones como un medio útil en el aprendizaje del uso del álgebra. No es la ecuación misma y su solución lo único que importa sino la correcta puesta en práctica del Álgebra.

En las preguntas 1 y 2 las ecuaciones que se presentan son resueltas fácilmente por tanteo. Si se plantean para ser resueltas algebraicamente, se requiere probablemente las reglas de multiplicar - dividir y las reglas de multiplicar con paréntesis. Sin embargo, cuando los alumnos inventan sus propias cuestiones, en los ejemplos de inventar, puede surgir mayor grado de dificultad.

Los ítems del 1 al 8 son semejantes a algunos de los cuestionarios C_1, C_3 y Pr1, concretamente según se refleja en la tabla 4.11.

C_1	**C_3**	**Pr1**	**TB**
9	5	5	1
	10	10	2
	6	6	3
	11	11	4
	7	7	5
	12	12	6
	8	8	7
	9	9	8

Tabla 4.11

Los ítems 9 y 10 son nuevos y se presentan para ver el enfrentamiento del alumno a este tipo de situación, cuando la solución es negativa. En los ítems 9 y 10 los números que se utilizan son "aparentemente" los mismos: 8, 11 y 3, pero con signos distintos:

$\square + 11 = 3$, en el ítem 9, cuya solución es -8,

y

$8 + \square = 3$, en el ítem 10, cuya solución es -5.

Prevemos que la resolución del ítem 9 es mucho más difícil.

En la pregunta 2 ocurre algo similar:

La ecuación resultante es de la forma:

$$A\,x + B = C\,x + D,\ A > C \text{ y } B > D.$$

El ítem 14, de la forma $A\,x + B = C\,x + D$, con $A > C$ y $D > B$, difiere del 16 de C_3 de ecuaciones de la misma forma: $A\,x + B = C\,x + D$, en que $A > C$ pero $D > B$, con lo cual la solución aquí es negativa.

El ítem 15, de TB es similar al 11 (17 de C_3 y 13 de Pr1) o sea responde a la ecuación $x + A = B$, pero en el 11, $A < 0$ y en el 15, $A > 0$, con lo que en éste (ítem 15), la solución es negativa.

C_3	**Pr1**	**TB**
17	13	11
	14	12
	15	13

Tabla 4.12

En general, en esta prueba se podrían hacer tres grandes grupos de ítems:

TB 1) referidos a conversión de registros,

TB 2) referidos a planteo y resolución de ecuaciones,

TB 3) referidos a resolución de ecuaciones.

En cualquiera de los tres apartados anteriores se pretende detectar si los alumnos/as se dan cuenta que es "equivalente" decir "es" a "es igual a".

En TB 1 y TB 2 se pretende detectar la habilidad para representar en el lenguaje formal, elementos que figuran dentro de enunciados verbales en distintos contextos.

En TB 1 y TB 2, en la etapa de conversión, se señalan 4 momentos importantes:

a) Identificación y notación de la incógnita principal.

Es el momento en que el alumno reconoce en el enunciado cuál es el elemento que se pide hallar y adopta una letra y la asigna como nombre a ese elemento.

b) Presencia de "incógnitas" secundarias.

Es el momento, cuando lo hay, en que el alumno dirige su atención a otros elementos desconocidos, dentro del enunciado que no son la incógnita principal.

c) Adopción del elemento cualitativo final.

Es el momento en que el alumno identifica el elemento cualitativo en términos del cual debe quedar planteada la ecuación. En particular este momento es interesante en los problemas en los que este elemento cualitativo es distinto al asociado a la incógnita principal.

d) Planteamiento de la ecuación.

Es el momento en que el alumno es capaz de traducir la relación de equivalencia principal que se plantea en el enunciado. Esto es, es el momento de la instalación del símbolo " =".

En TB 1) se pueden, a su vez, agrupar en:

TB 1.1. Inventar problemas que se resuelvan con ecuaciones ya planteadas de la forma:

$$A x + B = C x + D \text{ , } A > C \text{ y } D > B \text{ (ítem 3, 0, 16)}$$

y

$A x - B = C$, $C > B$ (ítem 7, 0, 20)

esto es, hacer conversión desde el lenguaje algebraico al lenguaje habitual.

TB 1.2. Simbolizar en lenguaje algebraico expresiones del lenguaje habitual en diferentes contextos.

TB 1.2.1. Cuya solución son expresiones abiertas:

TB 1.2.1.1. - Contexto: edad.
- Palabra clave: doble.
- Operación implicada: suma (ítem 10, a, 23)

TB 1.2.1.2. - Contexto: numérico.
- Palabra clave: diferencia.
- Operación implicada: resta (ítem 10,b, 24).

TB 1.2.1.3. - Contexto: boliches.
- Palabra clave: distinta.
- Operación implicada: suma (ítem10,0, 25).

TB 1.2.1.4. - Contexto: dinero.
- Datos alfanuméricos.
- Operación implicada: suma (ítem 10,f, 28).

TB 1.2.2. Cuya solución son ecuaciones pero no con el objetivo de resolverlas.

TB 1.2.2.1. - Contexto: peso.
- Palabra clave:
  triplo (ítem 10,d, 26) y
  doble (ítem 14, 0, 32).
- operaciones implicadas:
  resta (ítem 10, d, 26) y
  suma y división (ítem 14, 0, 32).

TB 1.2.2.2. - Contexto: geométrico.
- Palabras clave: doble, ambos.
- operación implicada: suma (ítem 10,e, 27).

En TB 2) se presentan los ítems según contexto.

TB 2.1. - Contexto: dinero.
- Palabras clave: descuento, cada vez, veces.
- Operación implicada: resta (ítem 8, 0, 21).

La resolución es aritmética, no algebraica. Con este contexto puramente numérico podría no considerarse ecuación sino mera traducción del lenguaje habitual al lenguaje aritmético y, luego, operatividad básica. La expresión resultante es: $200 - 25 \times 4$.

TB 2.2. Contexto: boliches.
Palabra clave: cuádruplo.
Operación implicada: resta y división.
Ecuación: $A x + B = C$. $C > B$ y $C - B = n$. $A, n \in N$, (ítem 5, 0, 18).

TB 2.3. Contexto: numérico.
Palabras clave: triplo, veces.
Operación implicada: suma.
Ecuación: $A\ x + B = C\ x$, $C > A$ y $B = C - A$
(ítem 9, 0, 22).

TB 2.4. Contexto: edad.
"Es" sustituye a "es igual a".
Operación implicada: suma.
Ecuación: $A + B\ x = C$, $C > A$ y $C - A = n\ .\ B$,
$n \in N$, (ítem 12, 0, 30).

TB 2.5. Contexto: dinero.
Operación implicada: suma y división.
Ecuación: $A\ x + B = C\ x + D$, $C > A$ y $B > D$
(ítem 13,0, 31).

En todos los ítems anteriores, la solución es entera.

Existe un ítem, (4, 0, 17), en que los estudiantes han de establecer, en contexto geométrico, relaciones aparentemente de mayor dificultad, ya que el texto del enunciado es más largo y de mayor complejidad sintáctica, aunque si hicieran un dibujo, se facilitaría mucho la resolución.

Por último, el ítem (11, 0, 29) que pide hacer un dibujo (contexto geométrico), permite relacionar los resultados con los de pruebas anteriores.

Prueba	C_1	C_3	Pr1	Po1	TB
nº ítem	31	43	26	48	29

Tabla 4.13

Los ítems de TB 3) se pueden, a su vez, agrupar en torno a :

TB 3.1. Resolución de ecuaciones por tanteo con portavariable
(ítems del 1 al 10)

TB 3.2. Resolución de ecuaciones por tanteo con la incógnita representada por una "x" (ítems del 11 al 15).
TB 3. 2. 1., sin paréntesis [(2, a, 11), (2, a, 12) (2, a, 13), (2, a, 14) y (2, a, 15)]
TB 3. 2. 2., con paréntesis (6, 0, 19).

En el cuestionario C_1 se pedía: dadas las dimensiones "m" y "h" dibujar un segundo rectángulo, si se le "disminuye" 2 cm por cada lado; en el segundo cuestionario, C_3, este ítem es exactamente igual al anterior; en la tercera Pr1, se da como dimensiones "m" y "8" y se pide en el nuevo rectángulo "aumentar" 2 cm por cada lado. En Po1, al igual que en Pr1, las dimensiones dadas son "m" y "4" y el enunciado expresa que al segundo rectángulo se le aumenta 2 cm por cada lado.

4.2.4.2 Fiabilidad y validez del Test

Un test debe reunir dos características esenciales: fiabilidad y validez. La fiabilidad se refiere a la estabilidad de las mediciones cuando no existen razones teóricas ni empíricas para suponer que la variable a medir haya sido modificada diferencialmente para los sujetos, porque se asume su estabilidad, mientras no se demuestre lo contrario. La *fiabilidad* es el grado de consistencia del instrumento de medida. Se mide a través de un coeficiente de correlación y admite diversas acepciones. Medido un conjunto de objetos repetidas veces obtendremos los mismos resultados cada vez que efectuemos la medición.

La validez en términos de Garrett (1983), refiere al grado en que un test o un conjunto "de operaciones mide lo que debe medir".

La validez se refiere al conjunto de pruebas y datos que ha de recogerse para garantizar la pertinencia de tales inferencias. Más que el test, lo que se validan son las inferencias. El problema de hallar la validez de un test es el problema general de la ciencia para validar una teoría, implica por tanto la utilización de los métodos y procedimientos habituales de la investigación científica.

El Test, dividido en dos partes (TA, TB) fue administrado a dos grupos de alumnos de 7º y 8º (23 y 19 alumnos, respectivamente) del Centro nº 2. La prueba TA fue realizada sólo por 22 alumnos de 7º y los 19 de 8º (41 alumnos), mientras la prueba B fue contestada por todos los alumnos de estos dos grupos (42).

El análisis psicométrico realizado sobre el test se ha hecho mediante el programa BILOG (DOS-BILOG V3.04)[1].

En la tabla 4.14 aparecen los estadísticos del modelo clásico para cada ítem para la parte A del test. La primera columna es el ítem; la segunda columna es el nombre del ítem; la tercera columna es el número de sujetos que lo han intentado; la cuarta columna es el número de sujetos que lo han contestado correctamente, la quinta columna es el porcentaje de sujetos que lo han acertado (índice de dificultad), la sexta columna es el logit que se emplea en el contexto de otros modelos de medida, la sexta es la correlación de Pearson ítem-test y la séptima es la correlación biserial ítem-test.

ITEM	NOMBRE	INTENTOS	CORRECT.	ÍND. DIF.	LOGIT	PEARSON	BISERIAL
1	0001	41.0	15.0	.366	-.32	.288	.369
2	0002	41.0	8.0	.195	-.83	.468	.673
3	0003	41.0	16.0	.390	-.26	.253	.322
4	0004	41.0	4.0	.098	-1.31	.226	.390
5	0005	41.0	16.0	.390	-.26	.069	.088
6	0006	41.0	4.0	.098	-1.31	.696	1.198
7	0007	41.0	21.0	.512	.03	.144	.181
8	0008	41.0	18.0	.439	-.14	.180	.226

[1] Este análisis psicométrico ha sido realizado por el Dr. José A. López Pina de la Universidad de Murcia.

ITEM	NOMBRE	INTENTOS	CORRECT.	ÍND. DIF.	LOGIT	PEARSON	BISERIAL
9	0009	41.0	15.0	.366	-.32	.201	.257
10	0010	41.0	3.0	.073	-1.49	.563	1.055
11	0011	41.0	32.0	.780	.75	.338	.473
12	0012	41.0	19.0	.463	-.09	-.013	-.017
13	0013	41.0	10.0	.244	-.67	.501	.686
14	0014	41.0	3.0	.073	-1.49	.417	.782
15	0015	41.0	13.0	.317	-.45	.567	.741
16	0016	41.0	11.0	.268	-.59	.488	.656
17	0017	41.0	5.0	.122	-1.16	.220	.355
18	0018	41.0	12.0	.293	-.52	.478	.633
19	0019	41.0	6.0	.146	-1.04	.587	.905
20	0020	41.0	.0	.000	*********	.000	******
21	0021	41.0	9.0	.220	-.75	.621	.870
22	0022	41.0	9.0	.220	-.75	.333	.466
23	0023	41.0	7.0	.171	-.93	.685	1.015
24	0024	41.0	8.0	.195	-.83	.625	.898
25	0025	41.0	4.0	.098	-1.31	.481	.828
26	0026	41.0	7.0	.171	-.93	.823	1.220
27	0027	41.0	4.0	.098	-1.31	.674	1.161
28	0028	41.0	7.0	.171	-.93	.823	1.220
29	0029	41.0	4.0	.098	-1.31	.382	.657
30	0030	41.0	4.0	.098	-1.31	.567	.976
31	0031	41.0	6.0	.146	-1.04	.401	.618
32	0032	41.0	8.0	.195	-.83	.789	1.133
33	0033	41.0	1.0	.024	-2.17	.309	.822
34	0034	41.0	6.0	.146	-1.04	.660	1.017
35	0035	41.0	7.0	.171	-.93	.759	1.126
36	0036	41.0	12.0	.293	-.52	.720	.954
37	0037	41.0	5.0	.122	-1.16	-.034	-.055
38	0038	41.0	1.0	.024	-2.17	-.106	-.283
39	0039	41.0	15.0	.366	-.32	.572	.733
40	0040	41.0	23.0	.561	.14	.492	.619
41	0041	41.0	14.0	.341	-.39	.587	.759
42	0042	41.0	18.0	.439	-.14	.588	.740
43	0043	41.0	17.0	.415	-.20	.357	.452
44	0044	41.0	12.0	.293	-.52	.673	.890
45	0045	41.0	16.0	.390	-.26	.371	.471
46	0046	41.0	3.0	.073	-1.49	.353	.661
47	0047	41.0	1.0	.024	-2.17	.309	.822
48	0048	41.0	6.0	.146	-1.04	.660	1.017
49	0049	41.0	8.0	.195	-.83	.745	1.070
50	0050	41.0	12.0	.293	-.52	.663	.878
51	0051	41.0	17.0	.415	-.20	.461	.583
52	0052	41.0	4.0	.098	-1.31	.114	.197
53	0053	41.0	22.0	.537	.09	.602	.756
54	0054	41.0	13.0	.317	-.45	.642	.838
55	0055	41.0	11.0	.268	-.59	.551	.741
56	0056	41.0	16.0	.390	-.26	.082	.104
57	0057	41.0	14.0	.341	-.39	.104	.134
58	0058	41.0	6.0	.146	-1.04	.011	.017
59	0059	41.0	23.0	.561	.14	.138	.173
60	0060	41.0	17.0	.415	-.20	.250	.316
61	0061	41.0	3.0	.073	-1.49	.393	.737
62	0062	41.0	25.0	.610	.26	.423	.538

ITEM	NOMBRE	INTENTOS	CORRECT.	ÍND. DIF.	LOGIT	PEARSON	BISERIAL
63	0063	41.0	10.0	.244	-.67	.677	.927
64	0064	41.0	10.0	.244	-.67	.476	.652
65	0065	41.0	21.0	.512	.03	.326	.408

Tabla 4.14

Considerando, según el modelo clásico, que la correlación biserial debe estar comprendida entre 0.300 y 0.800, deben ser eliminados los siguientes ítems:
5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 20, 23, 26, 27, 28, 32, 34, 35, 37, 38, 48, 49, 52, 56, 57, 58 y 59.

El coeficiente de fiabilidad del test A, eliminados los ítems señalados, es 0.956, lo que nos indica que el test apunta bien.

Realizamos el mismo análisis con la parte B del test (tabla 4.15), obteniendo que los ítems que se deben eliminar son: 2, 21 y 31, teniendo de nuevo en cuenta la correlación biserial. El coeficiente de fiabilidad para esta parte del test, eliminados estos ítems, es de 0.928.

ITEM	NOMBRE	INTENTOS	CORRECT.	ÍND. DIF.	LOGIT	PEARSON	BISERIAL
1	0001	42.0	38.0	.905	1.32	.146	.253
2	0002	42.0	40.0	.952	1.76	.002	.005
3	0003	42.0	40.0	.952	1.76	.231	.494
4	0004	42.0	40.0	.952	1.76	.160	.343
5	0005	42.0	27.0	.643	.35	.480	.617
6	0006	42.0	34.0	.810	.85	.444	.642
7	0007	42.0	31.0	.738	.61	.509	.687
8	0008	42.0	33.0	.786	.76	.344	.484
9	0009	42.0	27.0	.643	.35	.547	.703
10	0010	42.0	28.0	.667	.41	.257	.333
11	0011	42.0	32.0	.762	.68	.245	.337
12	0012	42.0	13.0	.310	-.47	.620	.813
13	0013	42.0	18.0	.429	-.17	.326	.411
14	0014	42.0	17.0	.405	-.23	.615	.779
15	0015	42.0	22.0	.524	.06	.495	.621
16	0016	42.0	4.0	.095	-1.32	.482	.835
17	0017	42.0	1.0	.024	-2.18	.294	.788
18	0018	42.0	22.0	.524	.06	.282	.353
19	0019	42.0	17.0	.405	-.23	.386	.489
20	0020	42.0	9.0	.214	-.76	.560	.788
21	0021	42.0	33.0	.786	.76	.166	.234
22	0022	42.0	10.0	.238	-.68	.544	.748
23	0023	42.0	12.0	.286	-.54	.434	.576
24	0024	42.0	17.0	.405	-.23	.508	.643
25	0025	42.0	21.0	.500	.00	.503	.630
26	0026	42.0	21.0	.500	.00	.567	.711
27	0027	42.0	12.0	.286	-.54	.647	.860
28	0028	42.0	7.0	.167	-.95	.304	.454
29	0029	42.0	9.0	.214	-.76	.435	.612
30	0030	42.0	16.0	.381	-.29	.449	.572
31	0031	42.0	8.0	.190	-.85	.694	1.003
32	0032	42.0	14.0	.333	-.41	.544	.706

Tabla 4.15

4.3 DISEÑO DEL CUESTIONARIO PARA EXPRESIONES ALGEBRAICAS: PRUEBA T

La Prueba “T” (anexo 8) es usada ya como un instrumento en una investigación final sobre expresiones algebraicas y fue implementado en el curso 1995-96. Es consecuencia de los estudios realizados de TestA y TestB y de las necesidades de la investigación. Está elaborado después de la reflexión de todo el periodo anterior para analizar las dificultades, obstáculos y errores que se le presentan a los alumnos ante:

- la interpretación de las letras,
- la designación de paréntesis, o sea cómo los interpretan en situaciones aditivas y multiplicativas,
- la denotación de paréntesis al pasar de un texto a la simbolización, en especial al hacer uso del signo “=”.
- la sustitución formal, y,
- la conexión de distintos sistemas de representación en diferentes contextos.

En esta prueba “T” se desea estudiar la asimilación y comprensión por parte del sujeto del conocimiento escolarizado. Se supone que al estar los alumnos en la última etapa del curso de 8º de E.G.B., los estudiantes tendrán una idea más o menos clara del uso de las letras, el uso de los paréntesis y las operaciones sencillas donde ambos intervienen; sin embargo, sabemos que hay algunos factores perturbadores que siempre están presentes en el aula y que siempre permiten un análisis más exhaustivo y preciso.

4.3.1 Construcción de la Prueba T

Esta Prueba se construyó con 102 ítems agrupados en 20 preguntas.

A continuación (tabla 4.16) se muestran los ítems utilizados en el Test de Habilidades Algebraicas y la perspectiva de análisis de los mismos, según el Sistema Categorial indicado en capítulos anteriores.

Para una mayor facilidad en la interpretación de la tabla se indican en las dos primeras columnas las referencias a las preguntas y apartados del Test así como el número de ítem correspondiente. Las columnas siguientes están encabezadas por los códigos utilizados para las habilidades cognitivas.

Pregunta apartado nº ítem	O_1	O_2	O_3	C_1	C_2	C_3	Pregunta apartado nº ítem	O_1	O_2	O_3	C_1	C_2	C_3
(1, a, 1)		x					(9, d, 43)		x				
(1, b, 2)		x					(9, e, 44)		x				
(1, c, 3)		x					(9, f, 45)		x				
(1, d, 4)		x					(9, g, 46)		x				
(1, e. 5)		x					(9, h, 47)		x				
(1, f, 6)		x					(10, 0, 48)			x		x	x
(1, g. 7)		x					(11, a, 49)			x			
(1, h, 8)		x					(11, b, 50)			x			

Pregunta apartado nº ítem	O_1	O_2	O_3	C_1	C_2	C_3	Pregunta apartado nº ítem	O_1	O_2	O_3	C_1	C_2	C_3
(1, i, 9)		x					(11, c, 51			x			
(1, j, 10)		x					(11, d, 52)			x			
(2, a, 11)						x	(12, a, 53)					x	
(2, b, 12)						x	(12, b, 54)					x	
(2, c, 13)						x	(12, c, 55)					x	
(3, a, 14)		x					(12, d, 56)					x	
(3, b, 15)		x					(13, a, 57)	x	x			x	
(3, c, 16)		x					(13, a, 58)	x	x			x	
(3, d, 17)		x					(13, b, 59)	x	x			x	
(3, e, 18)		x					(13, b, 60)	x	x			x	
(3, f, 19)		x					(14, a, 61)	x				x	
(4, a, 20)	x						(14, b. 62)	x				x	x
(4, b, 21)	x						(15, a, 63)		x		x		x
(4, c, 22)	x						(15, b, 64)		x		x		x
(5, a, 23)	x						(15, c, 65)				x		x
(5, b, 24)		x					(15, d, 66)		x		x		x
(5, c, 25)	x						(15, e, 67)		x		x		x
(6, a, 26)			x				(15, f, 68)		x		x		x
(6, b, 27)			x				(15, g, 69)		x		x		x
(6, c, 28)			x				(15, h, 70)		x		x		x
(7, a, 29)						x	(15, i, 71)		x		x		x
(7, b, 30)						x	(15, j, 72)		x		x		x
(7, c,31)						x	(16, a, 73)				x	x	x
(8, a, 32)		x					(16, b, 74)				x	x	x
(8, b, 33)		x					(16, c, 75)				x	x	x
(8, c, 34)		x					(16, d, 76)				x	x	x
(8, d, 35)		x					(16, e, 77)				x	x	x
(8, e, 36)		x					(16, f, 78,)				x	x	x
(8, f, 37)		x					(16, g, 79)				x	x	x
(8, g, 38)		x					(16, h, 80)				x	x	x
(8, h, 39)		x					(17, a, 81)	x			x	x	
(9, a, 40)	x						(17, a, 82)	x			x	x	
(9, b, 41)	x						(17, a´, 83)	x			x	x	
(9, c, 42)	x						(17, b, 84)	x			x	x	
(17, b, 85)	x			x	x		(18, b, 94)	x	x		x	x	x
(17,b´, 86)	x			x	x		(18, b´, 95)	x	x		x	x	x
(17, c, 87)	x			x	x		(19, a, 96)		x		x	x	x
(17, c, 88)	x			x	x		(19, b, 97)		x		x	x	x
(17, c´, 89)	x			x	x		(19, c, 98)		x		x	x	x
(18, a, 90)	x	x		x	x	x	(20, a, 99)	x	x		x	x	x
(18, a, 91)	x	x		x	x	x	(20, a, 100)	x	x		x	x	x
(18, a´, 92)	x	x		x	x	x	(20, b, 101)	x	x		x	x	x
(18, b, 93)	x	x		x	x	x	(20, b, 102)	x	x		x	x	x

Tabla 4.16

Al igual que en la prueba anterior (TA y TB) hay preguntas exclusivamente formadas con ítems de sumar, restar, multiplicar y dividir con números enteros (preguntas 1 y 8), donde se realiza, por tanto, operatividad básica. Tienen una peculiaridad en esta nueva prueba y es que todos contienen paréntesis.

La principal diferencia de "T" con (TA y TB) es la presencia de manera más significativa de los paréntesis.

Mostramos relación entre las preguntas utilizadas en el curso 94-95 (de las pruebas TA y TB) y las del 95-96 (T):

94-95	**95-96**
TA	**PRUEBA T**
1	1
2	4
3	4 y 5
6	3 y 9
12	19
13	20
TB	**PRUEBA T**
10	16

Tabla 4.17

Se expresa a continuación la relación de los ítems (Prueba T) con su estructura correspondiente y el número de paréntesis que contienen.

Nº Item	Nº términos iniciales	( )	( ) ( )	Estructuras
(1,a,1)	2		Sí	(+) + (-)
(1,b,2)	1		Sí	(-) x (-)
(1,c,3)	1		Sí	(-) x (+)
(1,d,4)	1		Sí	(+) + (-)
(1,e,5)	2		Sí	(+) - (+)
(1,f,6)	2		Sí	(+) - (-)
(1,g,7)	2	Sí		(-) + ...
(1,h,8)	2	Sí		- ... + (-)
(1,i,9)	2	Sí		-.... - (-)
(1,j,10)	3		Sí	-... + (-) -(-)

Tabla 4.18

Todos los paréntesis contienen un sólo término en ellos.

Todos los ítems anteriores dan resultados enteros, negativos o positivos.

Todos los ítems en su enunciado tienen números negativos, a excepción de (1, e, 5) que es una resta y luego sí aparece un número negativo.

En la pregunta 8 todos los ítems (ítems 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38 y 39) tienen dos o más términos. Todos son ítems de sumar y restar, a excepción del ítem (8, h, 39), donde aparece una propiedad distributiva por la izquierda.

Sólo hay dos ítems (37 y 38) de la pregunta, que dan como resultado un número negativo. Los números implicados tanto en la pregunta 1 como en la 8 son de una sola cifra.

Todos los ítems poseen 3 o más términos si se prescinde de los paréntesis donde no son "obligados".

Nº Item	Nº términos iniciales	( )	( ) ( )	Estructuras
(8,a,32)	2	Sí		(+) + ...
(8,b,33)	2	Sí		(+) - ....
(8,c,34)	2	Sí		...x...- (+)
(8,d,35)	2	Sí		.... - (-)
(8,e,36)	2	Sí		(-) +....
(8,f,37)	2	Sí		.... - (+) + ...
(8,g,38)	4		Sí	.... - (-) +(-,+)+
(8,h,39)	2		Sí	.... (+) - (-,+)

Tabla 4.19

Los ítems 34, 35, 37, 38 y 39, como se puede observar en el anexo 8, tienen un signo menos delante del paréntesis.

Las preguntas 3 y 9 son también de operatividad básica pero con términos no sólo numéricos, sino alfanuméricos o sea algebraicos.

Nº Ítem	Nº términos iniciales	( )	( ) ( )	Estructuras	DV
(3,a,14)	1	Sí		... x (+)	I
(3,b,15)	1	Sí		(+) x ...	D
(3,c,16)	1	Sí		...x. (-)	I
(3,d,17)	2		Sí	.... x (-) - ... x (+)	I-I
(3,e,18)	1		Sí	(+) x (+)	DD
(3,f,19)	2		Sí	.... x (+) + ... x (-)	I+I
(9,a,40)	4			+	
(9,b,41)	2			+	
(9,c,42)	2			-	
(9,d,43)	2		Sí	(-) + .	
(9,e,44)	2		Sí	- (-)	
(9,f,45)	2		Sí	- (-,+)	
(9,g,46)	2		Sí	+(+)	
(9,h,47)	2			Sí (-, +) - (-,+)	

Tabla 4.20

(DV= Propiedad Distributiva; D= Derecha; I= Izqda; DD= Doble Distrib.

En cuanto al uso inadecuado de la propiedad distributiva puede ocurrir que aparezcan resultados de este tipo: "a (b + c) = ab + c" o bien no saber qué hacer en el caso de que el factor "a" u otro, esté a la derecha: "(b + c) a =" ?

Surgen errores importantes relacionados con el uso de paréntesis y la jerarquía de operaciones. Booth, 1988, ha puesto de manifiesto que los estudiantes (de edades de 13 a 16 años) "ignoran el uso de paréntesis porque los consideran innecesarios". Esta creencia está firmemente asentada sobre los siguientes puntos de vista:

i) el contexto del problema determina el orden de las operaciones;

ii) en ausencia de un contexto específico, se realizan las operaciones de izquierda a derecha,

iii) el mismo valor se obtendrá cualquiera que sea el orden de realización de las operaciones.

En las preguntas 1, 3, 8 y 9 las observaciones previstas van encaminadas a analizar si:

a) ¿usan en todos los casos la misma estrategia. Por ejemplo, primero abordan el paréntesis, su contenido, o lo hacen al azar?,

b) ¿usan la propiedad distributiva?,

c) ¿usan la propiedad distributiva oportunamente?,

d) ¿usan la propiedad distributiva correctamente?,

e) ¿quitan paréntesis o actúan directamente?,

f) ¿cómo se enfrentan a respuestas negativas?,

g) ¿afecta el orden de colocación del paréntesis?,

h) ¿asignan valores numéricos a las letras?,

i) ¿admiten la falta de clausura, cuando desde el principio no es posible "operar"?

En las preguntas 3, 8 y 9 hay como mínimo dos términos en los paréntesis que aparecen.

Las preguntas 4 (ítems 20, 21 y 22), y, 5 (ítems 23, 24 y 25), han sido tratadas en las pruebas Pr2 (ítems 11, 12, 13, 14, 15 y 16), Po1 (ítems 10, 11, 12, 13, 14 y 15), y en la TA (ítems 5, 6, 7, 8, 9 y 10), y ya se ha señalado que pretenden medir la capacidad de expresión, por parte del alumnado de estas operaciones sencillas, bien espontáneamente si no han dado Álgebra, o por adquisición en el desarrollo de la enseñanza/aprendizaje de la misma.

La pregunta 11, (ítems 49, 50, 51 y 52), coincide también con los ítems 16, 17, 18 y 19 de la pregunta 5 de la prueba TA y ya se ha considerado que, aún cuando la sustitución de números se usa frecuentemente, la extensión a estas sustituciones algebraicas no es tan fácil, pero sí se posibilita una correcta respuesta (por tanteo u otra estrategia) mediante asignación de valores numéricos a las letras, que permita verificar las correspondientes sustituciones.

La pregunta 2 (ítems 11, 12 y 13) resulta bastante difícil aparentemente para los alumnos, quizás por no estar habituados a este tipo de cuestiones.

En esta pregunta se espera que los apartados b) y c) tengan más dificultad que el a).

Es importante también observar si usan como valor el "0" o no. En caso negativo, ¿por qué no lo usan?:

- porque no lo consideran como un número cualquiera,
- porque no se plantean su uso.

La pregunta 6 (ítems 26, 27 y 28), aparece en algunas pruebas sin la palabra "calcula"; aquí se ha introducido porque se piensa que puede ayudar, sobre todo por tener los alumnos la edad que tienen; cuando sean mayores no hará falta ponerla.

Los apartados 6a (ítem 26) y 6b (ítem 27) son semejantes en el sentido que en ambos se puede hacer un cálculo "con los números" solamente, aunque el grado de dificultad difiere entre los dos. El primero se presenta más sencillo, pues 43 representa a toda la expresión "a + b", que puede ser vista por el alumno como un todo invariante y , entonces, lo que se debe hacer es sumar "2" a "a + b", es decir, sumar "43 + 2" o sea 45.

En el ejercicio "6b", por el contrario, la expresión dada "n - 246", que se ve apoyada por el número 762 para el cálculo, varía, convirtiéndose en "n - 247", y la operación que se debe hacer con 762 no es obvia. Hay que analizar la repercusión del aumento "246" a "247" sobre la diferencia "n - 246" y esto supone un trabajo mental de mayor grado de dificultad; hay que calcular la variación sobre una operación y no sobre un número. Es posible que los resultados sean mejores en "6a" que en "6b".

En el apartado "6c" se ofrece una expresión similar a la del "6a" pero, en este caso, se debe sumar una letra "g" y esto, para el alumno, es más difícil.

Se podría esperar dos tipos de respuestas:

a) respuestas que revelan que la letra ha sido "valorada", como en:

a.1.) e + f + g = 12, asignando el mismo valor a "e" y a "f", o sea haciendo "e = f" y se reparte el valor 8 entre "e" y "f" y luego asignar el mismo valor "g".

a.2.) "e + f + g = 18", valorando las letras según el número del orden en el alfabeto, o sea e = 5, f = 6, g = 7.

a.3.) "e + f + g = 9", dando a "g" el valor 1, y,

b) "8g" como respuesta, que corresponde a ignorar la letra como valor y escribirla como simple acompañamiento.

La pregunta 10 también es bastante compleja para los alumnos de estas edades, ya que viene a ser "en el fondo", como la diferencia en una serie, entre un término de la serie y el valor de ese término, o sea, distinguir en este caso, el valor de un lápiz y el número de lápices.

¿Sumarán 12 + 10 - ambos precios - , y luego intentarán relacionar con el resultado obtenido, el otro dato numérico del problema, 180?

¿Asociarán las iniciales "a" de azul y "r" de rojo y esto les facilitará el expresar el total de cada una: 10a y 12r?

¿Plantearán bien y luego, por tanteo, calcularán?

¿Observarán que el importe de los de un color y los de otro no tiene por qué ser igual?

También se les puede preguntar que representa “10a + 12r” y cuál es el número de lápices comprados. En la primera de estas preguntas los alumnos deben interpretar correctamente la expresión. Las respuestas esperadas son las siguientes:

i) el precio total de lo comprado,

ii) 10 lápices azules y 12 lápices rojos, utilizando la letra como objeto.

Para el número de lápices comprados, las respuestas esperadas:

i) a + r, que es la suma de los dos tipos de lápices,

ii) 10 + 12 = 24, respuesta correspondiente a la interpretación de las letras como iniciales.

La pregunta 15 (ítems 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69 70, 71 y 72) es típica de conversión del lenguaje habitual al lenguaje algebraico en contexto netamente numérico. En sus ítems aparecen palabras clave:

. doble, en 64, 66, 67, 68 y 69,

. triple, en 63 y 66,

. cuádruplo, en 65,

. cuadrado: en 70 y 71,

. todo, en 72.

Podemos hacernos los siguientes interrogantes:

a) ¿se dan cuenta que es “equivalente” decir “es” a “es igual” en algunas expresiones?,

b) ¿son conscientes de la “coma” o son indiferentes a ella?,

c) ¿confunden en los apartados “h” e “y” el enunciado con el del de la suma de los cuadrados?,

d) ¿presenta dificultades la conjunción “e” en los apartados “g” e “i”?,

e) ¿reconocen el paréntesis especificado en el enunciado verbal por las comas en el apartado d?

La pregunta 16, (ítems 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79 y 80) también es de conversión de lenguajes desde el habitual al algebraico, pero no en contexto numérico sino en otros contextos.

Los ítems 74 y 79 son sólo expresiones abiertas, ¿cómo las aceptan?, y los restantes son expresiones de ecuaciones sencillas en las que no se solicita su resolución sino solamente el planteo.

Las preguntas 17 (ítems 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88 y 89) y 18 (ítems 90, 91, 92, 93, 94 y 95), son también conversiones en dos contextos simultáneos: dinero y frutas, donde yace la estructura: costo = precio total = precio unidad por número de unidades.

La diferencia de los enunciados está en que el precio de las unidades en la pregunta 17 (ítems desde el 81 al 89), viene dado en pesetas y en la pregunta 18 (ítems desde el 90 a 95), en expresiones algebraicas abiertas; incluso, aparece entre ellas un paréntesis.

Las expresiones algebraicas dadas en el segundo enunciado responden al enunciado primero, sólo se ha hecho una generalización del precio unidad que estaba particularizado en la pregunta 17.

Se prevé que los alumnos al intentar relacionar los datos, no mantengan el mismo referente que el que expresa el enunciado, esto es, vayan haciendo la conversión de registros en función del primer dato y no detecten las relaciones aparecidas en el resto del contexto.

También parece adecuado pensar que la representación gráfica que acompaña el enunciado (cuadro de doble entrada), favorezca en parte la resolución de los ítems correspondientes.

La pregunta 7, (ítems 29, 30 y 31), similar a si se hubiera planteado qué es mayor “2n” o “n + 2”, pretende analizar cómo razona el alumnado ante una cuestión de ordenación con expresiones que incluyen una letra de valor desconocido.

Se quiere ver si emplea una estrategia de sustitución, considerando a la “p” susceptible de tomar un valor cualquiera dentro de un conjunto de valores posibles.

Para este ejercicio puede ser que el alumno responda:

a) “la menor de ellas es p - 2”,

“la mayor de ellas es “p + 7 (ó 2p)”.

(Las respuestas de “la mayor es p + 7” o “la mayor es 2p” pueden, en principio, considerarse equivalentes). Esto indicaría un incompleto análisis de las expresiones, basado, o bien en la sustitución de “p” por algún valor numérico (en general, un único valor entero positivo) o por la comparación ingenua de una parte de la expresión (la parte numérica): +7, -2,... y “el doble de”.

b) “Esta pregunta no se puede contestar porque:

b.1. No se conoce el valor de p”. Esta respuesta es ambigua, pues puede provenir de un rechazo de todo análisis ante el desconocimiento de la parte literal (“p”) de la expresión, o de un análisis de las expresiones algo más completo que el que se ha citado antes, incluyendo la sustitución de “p” por varios números. Esto habría dado a “p + 7” como mayor para algunos valores de “p”, y para otros, mayor a “2p”.

b.2. “Para valores de “p” menores que 7, la expresión mayor es “p + 7” y para valores de “p” mayores que 7, la mayor es “2p”.

Las preguntas 12, 14 y 19 se pueden asociar en cuanto a que se presentan como reactivos que permiten analizar la tendencia natural de los alumnos a interpretar una expresión nueva con términos literales en términos de estructura de referencia numérica o sea aritmética, en definitiva, se trata del reconocimiento de estructuras aritméticas, ya indicada anteriormente.

Por otra parte, las preguntas clave serían:

¿dónde es obligado utilizar paréntesis?,

¿existen varias formas válidas de expresar el área de las figuras de los ítems (19,a, 96), (19, b, 97) y (19, c, 98)?, ¿cuáles?,

¿existen varias formas válidas de expresar el perímetro de las figuras de los ítems (12,a, 53), (12, b, 54), (12, c, 55) y (12, d, 56)?, ¿cuáles?

En la pregunta 12 es cierto que la dificultad va aumentando desde el ítem 53 al 56 al igual que en la pregunta 14 entre los ítems 61 y 62. En el ítem 53 y 54 se puede esperar como respuesta al perímetro: “13” para el ítem 53 y “10” para el ítem 54, o sea, sólo sumando los números que ven representados.

Para el ítem 55 se puede esperar el error de $p = f^3$; f; f f f .

Para el ítem 56 se puede esperar como error $e^2 + a^2 + 6$; e + a + 6; 6 e a; e e a a 6; 2 e 2 a 6.

Estas respuestas podrían relacionarse con las que den para los ítems de la pregunta 9 que corresponden a operatividad básica en contexto algebraico.

En la pregunta 14 se puede esperar para el ítem 61: “19 + 7” y para el ítem 62: “2n”, “2 . 16” (16 por ser los segmentos dibujados) o en función del dibujo que los alumnos autoconstruyan en base al dado, esto es, cerrar el polígono dado; en definitiva, se trataría de una incapacidad de generalización.

En cuanto a las áreas de la pregunta 19 (ítems 96, 97 y 98) se puede esperar, en principio, confusión con el perímetro. También puede ocurrir que el porcentaje de aciertos y errores para los tres rectángulos sea sensiblemente diferente, incluso entre los ítems 97 y 98, a pesar de sólo variar las letras y números usados.

También es posible que el cálculo del área del rectángulo lo hagan dividiendo el producto de la base por la altura, por dos, como si fuese un triángulo, aunque esto suele ser más habitual si las dimensiones del rectángulo vienen dadas por un solo elemento y aquí no es el caso.

Otras respuestas posibles son: 12 m y 10 t, donde no saben cómo interpretar la letra o qué hacer con ella, o “m 12” y “t 10”, dándose cuenta de que “m” en el 97 y “t” en el 98 representan un número que corresponde a una parte de la base del rectángulo, pero creen que el área es multiplicar todo junto.

Otras respuestas para los ítem 97 y 98 son 12 y 10, o sea multiplicar los datos numéricos y prescindir de las letras, hecho que coincide con manifestaciones de Küchemann por no usar la letra (“letra no utilizada” o “letra ignorada”).

También puede expresarse: “3m + 4” y “2 t + 5” ó “4 m 3”, interpretando la letra como algo (una “cosa”) que debe figurar junto a los números.

En general, se puede inferir que aun cuando el alumno conozca la fórmula para calcular el área del rectángulo, no es capaz de transformarla a un contexto en donde se requiere el manejo de representación simbólica más compleja: “4 (m + 3)” y “5 (t + 2)”.

La pregunta 20 (ítems 99, 100, 101, 102) es fundamentalmente igual a parte de la pregunta 13 (en sus ítems 53 y 54) de TA, aunque aquí se añade una nueva representación visual formal y es la del cuadro de doble entrada, de “visualización simplificada”. Además se ha indicado en la representación común con la pregunta 13 del TA del área del rectángulo, un modelo del mismo con subdivisión en subrectángulos que, en su caso, responderían a los desarrollos solicitados en los ítems 99, 100, 101 y 102.

Es posible prever que los alumnos no tomen en consideración que se piden “dos” representaciones de cada una de las expresiones y aún más, cabe indicar que, a lo mejor, haciendo caso omiso de las representaciones sugeridas, trabajen exclusivamente con el lenguaje algebraico.

Capítulo 5
La Primera Investigación Sobre Expresiones Algebraicas

CAPÍTULO 5: LA PRIMERA INVESTIGACIÓN SOBRE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

5.1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo y el próximo están centrados en la investigación acerca de las expresiones algebraicas. En éste describiremos los estudios de la fase exploratoria y primera parte de la experimental, reseñando los procesos seguidos y los resultados más significativos. El objetivo de esta etapa que estamos comentando es averiguar causas de las dificultades en el lenguaje algebraico, y analizar potencialidades y dificultades aportadas por el Diseño aplicado.

Ya se ha explicado en el capítulo 3, en el marco del Diseño de investigación en general, la situación de la investigación sobre expresiones algebraicas. Se ha expresado también el planteamiento como problema concreto del estudio de las categorías de habilidades cognitivas operacionales y conceptuales en los procesos de adquisición y uso del lenguaje algebraico y también del uso y comprensión de los registros o sistemas de representación utilizados, dados los objetivos que nos hemos planteado en esta investigación, señalados en el capítulo 2.

La información previa, obtenida en el curso 1990-91, a partir de los cuestionarios C_1 (anexo 1) y C_2 (anexo 2) sobre las causas posibles de las dificultades en la transición de la aritmética al álgebra, sirvió de punto de partida para ir concretando el trabajo posterior.

Asimismo se ha señalado cómo se diseñó y desarrolló la investigación empírica siguiendo un modelo que intenta conjugar una investigación de tipo cuantitativo con otra de tipo cualitativo.

Continuamos el trabajo con la elaboración de los Cuestionarios C_3 (anexo 3) y C_4 (anexo 4) que, como se indicaba en el Capítulo 3 están integrados en el estudio de acercamiento al nivel escolar en el curso 91-92. Posteriormente se procedió a la construcción de dos nuevos Cuestionarios (Pretest, anexo 5, y Postest, anexo 6) y al diseño de instrucción para expresiones algebraicas, DISEA (anexo 10), aplicado en el curso 92-93 (Centro nº 1, Santa Rosa de Lima, La Laguna).

En este Capítulo describiremos además cómo se desarrolló el diseño de investigación (DISEA, anexos 10 y 11), centrándonos en los resultados obtenidos en esta primera etapa experimental. Analizaremos también los cuestionarios, así como las entrevistas individuales videograbadas.

Terminamos este Capítulo con la exposición de un estudio biográfico de un alumno, en el que consideramos de forma global los datos que de él hemos recopilado.

5.2. ETAPA EXPLORATORIA I

Durante el curso **90-91** dentro del proceso de búsqueda de las causas de las dificultades de los alumnos en el uso del lenguaje algebraico (Foco I), realizamos un estudio empírico. Se pretendía analizar las dificultades semánticas y de sintaxis del lenguaje de las representaciones frente a la semántica y sintaxis del álgebra con referencia a otros trabajos de la misma naturaleza, en concreto con los de Chalouh - Herscovics (1988) y Filloy-Rojano (1989), ya citados.

5.2.1. La población de estudio

Se llevó a cabo con treinta y dos estudiantes de diferentes niveles: E.G.B. (9 alumnos), B.U.P. (9 alumnos) y alumnos de la Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de E.G.B. de la Universidad de la Laguna (hoy Centro Superior de Educación), de dos especialidades - Ciencias Humanas (5 alumnos) y Ciencias (9 alumnos).

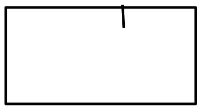
Los alumnos más claramente diferenciados en cuanto a su capacidad y habilidad para las Matemáticas - según su profesorado de Matemáticas de aquel momento - fueron los del nivel de E.G.B., que eran todos del mismo Centro nº 1. Los alumnos de B.U.P. procedían de tres Centros diferentes.

5.2.2. Diseño y desarrollo de la experiencia

El diseño incluyó un cuestionario, ya citado en el capítulo 4, y codificado con C_2 (anexo 2) formado por dos partes (C_{21}, anexo 2 parte 1ª, y C_{22}, anexo 2 parte 2ª): la primera relativa a expresiones algebraicas y la segunda, a la resolución de ecuaciones del tipo $Ax + B = Cx + D$. En este capítulo nos vamos a referir a las expresiones algebraicas.

Con relación a las expresiones algebraicas se utilizó como fuentes de significado las áreas de rectángulos, en el sentido que lo han hecho Chalouh y Herscovics (1988), y como situación intermedia entre la representación geométrica y la representación formal (R.F.), un sistema de representación visual/formal con un cuadro de doble entrada que denominamos "visualización simplificada", ya señalado.

En la primera parte del Cuestionario pasada a los estudiantes (C_{21}, anexo 2 parte 1ª), que comprendía 10 ítems, la naturaleza de la actividad planteada fue la misma para todos ellos y consistió en mostrarles las distintas situaciones del área del rectángulo mediante un sistema de representación geométrico (áreas de los mismos), un sistema de representación mixto visual/formal o "visualización simplificada" y la expresión algebraica. Los alumnos no recibieron instrucción previa, sólo se hizo un sencillo comentario instruccional con el ejemplo que se presentaba, en el momento de la aplicación del cuestionario y se solicitó completar en cada ejercicio dos situaciones ausentes. En definitiva pretendíamos que indistintamente los alumnos hiciesen conversión entre los distintos sistemas de representación.

MODELO GEOMÉTRICO	VISUALIZACIÓN SIMPLIFICADA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
 a 2	x a 2 4 4 x a 4 x 2	4 (a + 2) = 4 x a + 4 x 2

Sabíamos que en contraste con el gran número de estudios llevados a cabo sobre los conceptos de variable que tienen los estudiantes, relativamente pocas investigaciones se han dedicado por sí mismas específicamente al concepto de una expresión algebraica. Consideramos, sin embargo, el estudio en este sentido llevado a cabo por Chalouh y Herscovics (1988) que diseñaron una secuencia instruccional comprendiendo representaciones algebraicas mediante puntos, segmentos y áreas de rectángulos para seis niños (de 12 -13 años de edad) que no habían recibido instrucción algebraica, en el que los investigadores intentaron, primero, determinar la posibilidad de una aproximación geométrica para construir significados para las expresiones algebraicas y segundo, descubrir los obstáculos cognitivos asociados con tal acercamiento.

Cuatro fueron los obstáculos cognitivos identificados previamente: 1) Necesidad de una referencia numérica (si el alumno no mira las letras como representación de números, entonces representar operaciones aritméticas con ellas es una tarea significativa, (Davis, 1975), (Wagner, 1981)); 2) Incapacidad para aceptar la falta de clausura (los alumnos perciben las expresiones algebraicas como afirmaciones incompletas, (Collis, 1974); 3) Dilema nombre - proceso (en aritmética “2 + 3” es el problema (proceso) y “5” es la respuesta (nombre); en álgebra “x + 3” describe juntamente el proceso (añadir 3 a x) y el nombre, (Davis, 1975)); y 4) la Concatenación (en aritmética la yuxtaposición de dos números, 43 = 40 + 3, significa suma, en álgebra, 4 a = 4 x a, significa multiplicación, (Matz, 1979)).

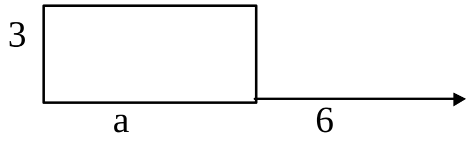
Se encontraron que el planteamiento hecho ayudó a los niños a desarrollar significados para expresiones algebraicas, pero que ellas no llevan necesariamente a desarrollos espontáneos de significado para la simplificación de tales expresiones algebraicas.

De nuestro estudio presentamos ahora, los resultados obtenidos por niveles y concluimos con algunas referencias a los conseguidos por Chalouh y Herscovics.

En el nivel de E.G.B. se ha constatado gran dificultad, en la mayoría de los estudiantes:

- Al hacer descomposiciones en las expresiones algebraicas para obtener las dimensiones de los rectángulos, aún siendo los números dados bastante pequeños: 3 x a + 6 (pregunta 7),

mezclan longitudes con áreas:

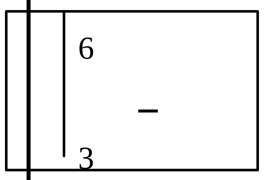


y hacen el esquema de esta situación de manera personal:

x	a
3	3 x a

+6 ;

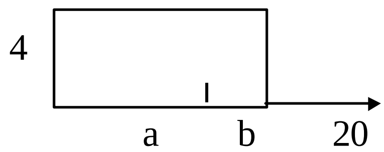
o encontramos algunos estudiantes que hacen representaciones como:

MODELO GEOMÉTRICO	VISUALIZACIÓN SIMPLIFICADA
	x a 3 3 x a +6

Las dificultades aumentan al dar el área del rectángulo expresada como suma de áreas de tres subrectángulos:

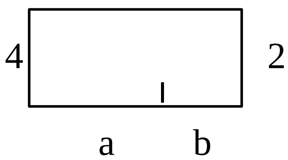
$$4 \text{ x } a + 4 \text{ x } b + 20,$$

con alumnos que al operar lo hacen de manera diferente con las cantidades conocidas y elementos desconocidos:



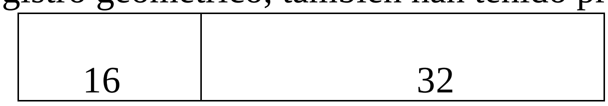
x	a	b
4	4xa	4xb

+20

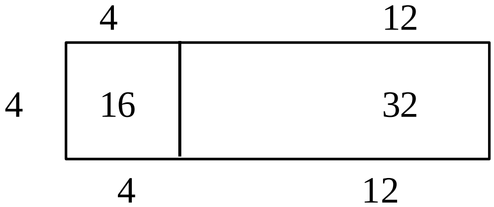


x	a	b	x
4	4xa	4xb	20

- Al descomponer los números que expresan las áreas de los subrectángulos, aún cuanto éstos estaban representados sobre el propio rectángulo en el registro geométrico, también han tenido problema:



En algunos casos consideran 16 y 32 como perímetros:



x	4	12
4	4x4	4x12

4(4+12) = 4x4+4x12

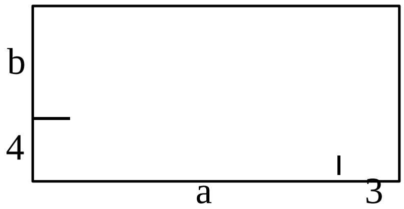
$\sqrt{16} = 4$ $\qquad$ $32 - 8 = 24$ $\qquad$ $24 : 2 = 12$

y en otros proceden así:

x	32
16	16 x 32

16 x32 = 512

- Cuando las dos dimensiones estaban dadas con la longitud subdividida:



se dan expresiones como:

a)

x	a	3
4 x b	(4 x b) x a	(4 x b) x 3

y así lo trasladan a la expresión algebraica

b)

x	4	a	3
b	b x 4	b x a	b x 3

o también en este caso: b (4 + a + 3) = b x 4 + b x a + b x 3

Algunos alumnos hacen interpretaciones personales de la visualización simplificada, tales como:

a)

x	a	3	x	a	3
b	b x a	b x 3	4	4 x b	4 x 3

b)

1)

x	a	3
4	a x 4	3 x 4

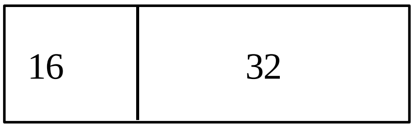
2)

x	a	3
b	a x b	3 x b

En este segundo caso el alumno no suma y explica que dividiría en cuatro rectángulos diferentes; lo hace y manifiesta: “o también multiplicar los valores de cada dimensión consiguiendo una sola cifra en cada uno de ellos”.

En el nivel de B.U.P. las dificultades habidas se manifiestan en los mismos ejercicios que en E.G.B., pero con menor frecuencia de errores.

En la pregunta donde se dan sobre la figura, los valores de las dos áreas de los subrectángulos, sólo un alumno se equivocó

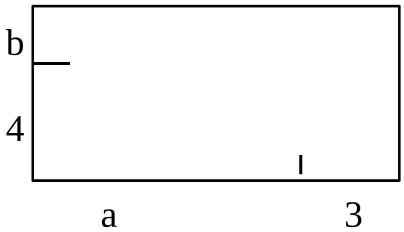


x	16	32
16	16 x 16	16 x 32

6x(16+32)=16x16+16x32

y consideró que las áreas eran la medida de los lados.

Más conflictivo resultó para los alumnos de B.U.P. el ejercicio:



surgiendo las siguientes interpretaciones incorrectas de la visualización simplificada.

a)

x	x	a	3
b	4	b.4xa	b.4x3

b.4x(a+3) = b.4xa+b.4x3

b)

x	a	b+20
4	4xa	4.b+20

4xa + 4xb + 20

Otros alumnos consideran el valor de la medida de la longitud de un segmento como producto de las de los dos segmentos que la forman.

x	a	3
4 b	4ba	12b

4 b (a+3)

Nuevamente aparecen alumnos que hacen interpretaciones personales de la visualización simplificada, tales como

x	y	a	3
4	b	a.4	3.4
		a.b	3.b

y parece significativo señalar que los resultados de los alumnos de la E.U. de la Especialidad de Ciencias Humanas son similares a los de B.U.P., no habiendo sido capaz ninguno de ellos de convertir la representación geométrica

al sistema de representación visual/formal o visualización simplificada, ni expresarlo con la representación formal algebraica.

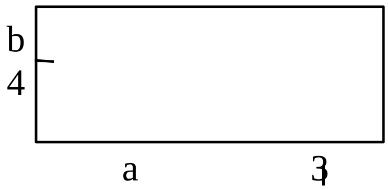
Confunden los signos de las operaciones y cambian las dimensiones de las figuras e interpretan el área como si fuese una longitud.

Por último, en ese análisis general por niveles, indicaremos que tres de los nueve alumnos de 3º de la Especialidad de Ciencias no fueron capaces de representar en el S.R.V.G. “3 x a + 6”, cometiendo los mismos errores que los alumnos de E.G.B. y cuatro fueron también incapaces de esquematizar la situación en un cuadro de doble entrada, dando soluciones como:

.	a	
3	3 a	+6

para la visualización simplificada.

Solamente el grupo de alumnos de la Especialidad de Ciencias, en su totalidad, resolvió correctamente la situación:

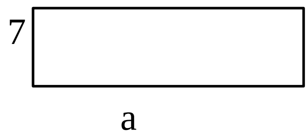


Hemos de señalar, sin embargo, que todos los estudiantes de los diferentes niveles respondieron correctamente a las preguntas a, b, y c.

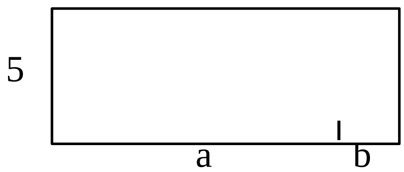
a)

x	a	5
4	4 x a	4 x 5

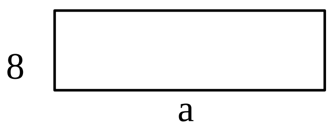
b)



c)



A la vista de este resultado, parece claro que estos alumnos fueron capaces de superar la dificultad de falta de clausura (Collis, 1974), hecho que no coincide con los resultados de Chalouh y Herscovics en la que todos los alumnos pensaron que tenían que dar una respuesta numérica al área del rectángulo,



si bien ellos eran principiantes en álgebra.

Hemos constatado, por los comentarios hechos, que nuestros encuestados no tienen en cuenta los convenios que evitan la concatenación, por ejemplo escribir los coeficientes antes de las letras.

Es importante señalar la presencia de expresiones algebraicas en diferentes condiciones, donde algunos de los alumnos han simplificado construyendo subrectángulos. Pero hay que indicar la situación que algunos de los estudiantes no percibieron el aspecto sumativo del problema como ocurrió con cinco de los seis estudiantes entrevistados por Chalouh-Herscovics, que implica que el concepto “área” está tan fuertemente unido con la multiplicación que crea una “imagen mental”, que impide la solución natural del problema planteado que sería la suma de dos áreas. Esto influyó considerablemente en los alumnos de todos los niveles de nuestro trabajo como se ha expuesto en el análisis del ejercicio donde se dio la siguiente representación en el S.R.V.G.:

16	32

En nuestra investigación, al igual que en la investigación de referencia, los alumnos tuvieron gran dificultad para generar un rectángulo cuya área fuera 3a + 6, hecho que se fue complicando en nuestro caso concreto al expresar las dimensiones del rectángulo subdivididas y no sólo en una dimensión sino en las dos y además en algún caso con letras y números expresando las longitudes.

Creemos que, a excepción de algún caso muy peculiar, la generalidad de los alumnos no asumió ni la representación visual geométrica ni la visual/formal de la visualización simplificada, sobre todo cuando ésta implica términos aditivos no factorizados, ya que incluso, en la conversión de registros, a veces no tenía sentido siquiera el que a longitudes iguales se le asignasen medidas distintas, y se confundiesen conceptos como perímetro y área, áreas y longitudes, etc.

5.3. ETAPA EXPLORATORIA II (91-92)

Para esta primera experiencia de enseñanza en el curso 91-92 denominada de acercamiento al nivel escolar, no se elaboró un diseño específico; siguiendo con el desarrollo del Foco I se hizo una adaptación del diseño oficial que estaban desarrollando los profesores de las aulas. Se implementó con alumnos con los que no existía referencia de trabajo en su aula, sino que nuestra referencia se basó en los problemas detectados por el profesorado y que hemos conocido a través de grupos de trabajo con profesores en activo (Seminario Permanente de Didáctica) y asimismo de problemas extraídos de la literatura.

Nos ocupamos del tratamiento de tres aspectos del álgebra escolar:

expresiones algebraicas, planteamiento de ecuaciones lineales con una incógnita y resolución de las mismas (a estas últimas nos referiremos en el Capítulo 7 de esta Memoria).

Dentro del objetivo general (5) “Elaborar una propuesta curricular global que facilite el inicio del aprendizaje del álgebra”, nos planteamos, en esta experiencia exploratoria, los siguientes objetivos para vincular la investigación con la práctica docente y el diseño curricular:

1) Analizar el desarrollo del curriculum.
2) Analizar los sistemas de representación, sus interrelaciones y sus influencias en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

5.3.1. La población de estudio

La población de estudio la conformaron tres grupos de alumnos de 7º de E.G.B. del Centro nº 1: 7º A (37 alumnos), 7º B (36 alumnos) y 7º C (36 alumnos).

De los tres grupos, uno, 7º C, permaneció como grupo testigo, control, siguiendo su enseñanza - aprendizaje según el método tradicional, (su profesora fue invitada a participar en una investigación sobre álgebra, sin conocer detalle sobre la misma, explicándosele que se esperaba ver las mejoras que se producía en los alumnos después de haber dedicado un cierto tiempo a una aplicación de una metodología que incluía distintos sistemas de representación), y los otros, 7º A y 7º B, recibieron una instrucción “especial” en la Iniciación al Álgebra y en particular en expresiones algebraicas, y planteo y resolución de ecuaciones lineales.

5.3.2 Diseño de la investigación

La investigación es de tipo cuasi-experimental:

Cuestionario C_3	Instrucción	Cuestionario C_4

A partir de la revisión de la experiencia del curso anterior se organizó este diseño exploratorio que consta de las siguientes etapas.

La primera etapa fue de contacto con el Centro, la Dirección y el profesorado, para ver la conveniencia de participar directamente en la instrucción en el aula, para lo cual no hubo problema. Se realizaron reuniones con la dirección y el profesorado, en especial con este último para recoger información acerca de los alumnos, conocer la programación del aula y concretar horarios para alterar al mínimo la situación habitual de los grupos de alumnos y la Planificación del Centro. Se procedió al análisis del texto de los alumnos de 7º de E.G.B. de la Editorial EDEBE, en especial de los temas relacionados con el álgebra, para, posteriormente, preparar el material que se quería añadir al propio de los alumnos.

La segunda etapa: En ella se aplicó a los alumnos el Cuestionario C_3

(anexo 3), que ya ha sido descrito en el capítulo 4. Se realizó la aplicación simultánea a los tres grupos de alumnos el mismo día (12/02/92) en dos sesiones de una hora con un descanso intermedio.

Se desarrolló la instrucción en el aula de 7º A y 7º B por la didacta y se realizó una nueva aplicación de un Cuestionario para expresiones algebraicas C_{41} (anexo 4 parte 1ª), y que forma parte de C_4, también descrito en el capítulo 4.

La tercera y última etapa es la del análisis de datos.

5.3. 3. Desarrollo de la secuencia de enseñanza

En un principio se había pensado que el profesor del aula impartiese la instrucción en el grupo B pero se decidió lo hiciese la didacta para poder comparar posteriormente las respuestas de uno y otro grupo diferenciados por usar uno u otro sistema de representación, en el caso de las ecuaciones lineales.

Se pretendía el acercamiento al álgebra por yuxtaposición de dos sistemas de representación: el geométrico, donde los alumnos interpretan las letras como objetos geométricos y el numérico, donde interpretan las letras como números generalizados que nacen del mismo objeto geométrico.

Por una parte se recurre a la aritmética (3 + 4 = 4 + 3) y se hace que las letras no sustituyan a un solo número sino a varios números, y se llega a generalizar "a + b = b +a".

Asimismo en el sistema de representación visual geométrico se recurre a los rectángulos. Los números van a ser cantidades discretas y las letras, longitudes de segmentos.

Con relación a las expresiones algebraicas se utilizó como fuentes de significado las áreas de rectángulos en el S.R.V.G. y el sistema de representación formal y como situación intermedia entre ambos, el sistema de representación visual/formal con un diagrama de doble entrada que denominamos de "visualización simplificada".

Se comenzó la instrucción el 19 de Febrero de 1992, una semana posterior a la aplicación del Cuestionario C_3. En general, toda la "explicación" se realizó a base de preguntas, respuestas, aclaraciones y nunca como lección magistral estricta. Se intentó que fuese lo más similar posible en los dos grupos A y B.

La primera intervención en el aula comenzó con una introducción al propio término "álgebra" para ver las respuestas espontáneas de los estudiantes cuando se enfrentan por primera vez con esta terminología específica. Se mantuvo un diálogo que se desarrolló partiendo de preguntas a los alumnos acerca de qué les "decía" o "sugería" este vocablo. La mayoría contestó que "sonaba" a letras, ecuaciones… y que les parecía muy difícil.

A continuación se siguió motivando a los alumnos al estudio de esta rama de la Matemática, intentándolo a partir de relatos relacionados con la misma y se plantearon cuatro juegos de averiguar números para que “jugara” toda la clase a la vez. Se trataba de aprender a dar pasos en el desarrollo de técnicas del pensamiento algebraico, planteándolo como algo “lúdico”, para motivarlos, y además desarrollar agilidad mental, potenciar el gusto por los números, apoyar el proceso de simbolización, mostrando las posibilidades de cálculo que su uso permite e ir descubriendo las ventajas que proporciona este cálculo para resolver los distintos problemas, y, en consecuencia, desarrollar habilidades cognitivas y estrategias más adecuadas para manipular los símbolos, mostrando que, realmente, es mejor resolver problemas usándolos, porque hacerlos de otra forma es más largo o incluye pasos difíciles de seguir y de recordar. También se les quiere introducir en que el valor numérico no es único, depende del valor que se dé a las letras que aparecen en una expresión. Posteriormente, y antes de hacer uso del texto, se intenta hacer algunas conversiones de registros donde intervenían palabras clave como “doble”, “triple”, “tantas veces como”, “excede”, etc.

Se pasó posteriormente al texto de los alumnos y se hizo uso de letras para establecer la identificación y comprensión de expresiones algebraicas. Se intentaba mentalizar acerca de la necesidad de utilizar correctamente el lenguaje matemático para expresar y entender enunciados en forma de expresiones algebraicas, así como en la necesidad del uso de las letras para expresar el valor numérico de magnitudes matemáticas desconocidas como la longitud de los lados de un triángulo, cantidad de dinero recogida, coste de un producto, tiempo empleado en recorrer una distancia. En definitiva, usar las letras para representar el valor numérico desconocido de una o varias magnitudes así como para modelizar situaciones reales. También se presentaron las expresiones algebraicas usando figuras geométricas y relacionando sus distintas magnitudes.

Se siguió planteando actividades de conversión desde el lenguaje habitual al simbólico con situaciones muy sencillas. Luego se presentó la visualización simplificada, como paso intermedio entre el S.R.V.G. y la representación formal algebraica, según el ejemplo que ya habíamos utilizado en la experiencia del año anterior, y que se presenta a través de una transparencia con el retroproyector. Para los alumnos fue toda una novedad, pues no lo veían reflejado en el texto ni tampoco era habitual el medio tecnológico utilizado.

A continuación para facilitar el que “fijasen” en su mente el sistema de representación propuesto, se les puso en la pizarra varios casos donde tenían una o dos columnas del ejercicio sin completar. Como medio de seguir trabajando la visualización se plantearon igualdades con apoyos gráficos, así como su simbolización.

En la sesión siguiente se prosiguió con el estudio de términos y coeficientes de una expresión algebraica aprovechando también su texto. Ya había llegado el momento de justificar los juegos planteados en las primeras sesiones y así se hizo. Posteriormente se trabajó la sustitución formal haciendo cálculos de valor numérico de expresiones algebraicas (letras evaluadas).

El paso siguiente fue el tratamiento de las operaciones suma y producto fundamentalmente, utilizando el material del texto con el apoyo del sistema de representación visual geométrico, o sea el tratamiento de las letras como objeto geométrico en contexto de perímetro y área. Después de haber asumido lo anterior se procedió al trabajo sobre la propiedad distributiva mediante el planteamiento de perímetros y áreas de polígonos con las dimensiones subdivididas. A continuación se trabajó la relación propiedad distributiva - sacar factor común, dándose por terminada la instrucción relativa a expresiones algebraicas con estos conceptos.

5.3.4 Resumen de datos

Los datos del Cuestionario C_3 expresan que los tres grupos tenían unos niveles similares, teniendo en cuenta que estos alumnos no habían recibido instrucción sobre el Álgebra.

Podemos comentar que no ha habido gran diferencia en el uso de la "x" en lugar de portavariable "□".

Se observa cierta asociación en el ítem 17, a la "x" y a la "a", así como al "2" y al "3", aunque hay respuestas distintas para cada alumno. Algunos alumnos no distinguen los datos que simbolizan de los signos de las operaciones que los presentan como datos.

Confunden "cuadrado" con "doble". Utilizan para expresar el doble "(.2)" o para la mitad (/,:2), lo hacen sólo usando el "2" y el signo de multiplicar o dividir. Algunos enfatizan con expresión escrita lo que primero expresan en representaciones formales o no formales.

Analizamos ahora la parte del Cuestionario C_4, anexo 4 parte 1ª, C_{41}, relativa a las expresiones algebraicas.

Cuantitativamente los resultados globales de la aplicación del Cuestionario C_{41}, de los tres grupos A, B y C han sido los señalados en la tabla siguiente (tabla 5.1): (G, codifica el grupo de clase; y P/nº ítem, el nº de la pregunta y apartado, si procede/ número de ítem correspondiente; 1, respuesta correcta; 0, incorrecta y X, sin contestar).

G / Pregunta apartado nº ítem	A			B			C		
	1	**0**	**X**	**1**	**0**	**X**	**1**	**0**	**X**
(1 a /1)	**35**	**2**		30	5	1	27	3	6
(1b /2)	**12**	**24**	**1**	2	30	4	1	28	7
(1c /3)	**2**	**34**	**1**		30	6	1	25	10
(2a /4)	**9**	**27**	**1**	9	26	1	5	26	5
(2b /5)	**5**	**28**	**4**	6	28	2	4	25	7
(3 a /6)	**28**	**8**	**1**	20	13	3	22	13	1
(3 b /7)	**16**	**19**	**2**	13	15	8	4	29	3
(3, c, 8)	**14**	**17**	**6**	16	14	6	9	22	5
(3, d, 9)	**23**	**12**	**2**	25	8	3	19	14	3
(4, 0,10)	**1**	**24**	**12**	1	22	13	4	29	3
(5, a, 11)	**7**	**24**	**6**	4	24	8		29	7
(5, b, 12)	**4**	**25**	**8**	3	26	7	2	27	7
(6, a, 13)	**15**	**21**	**1**	17	16	3	17	16	3
(6, b, 14)	**6**	**29**	**2**	12	18	6	11	21	4
(6, c, 15)	**2**	**33**	**2**	5	23	8	3	29	4
(6, d, 16)	**8**	**26**	**3**	9	19	8	6	25	5
(7, 0, 17)	**4**	**20**	**13**		31	5	2	19	15

Tabla 5.1

Como se observa, en la mayoría de los ítems hay más respuestas correctas en los grupos A y B que en el grupo C.

Presentamos a modo de ejemplo observaciones del grupo de 7º A respecto a este Cuestionario de expresiones algebraicas.

Analizando los resultados de interpretación de los ítems se constata que el ítem de mayor dificultad es el nº 10 (pregunta 4) donde sólo existe un acierto. También es el que aparece en segundo lugar de los no abordados (12 de los 37 alumnos).

El ítem mejor resuelto ha sido el 1 (pregunta 1); 35 alumnos lo han hecho correctamente. Esto puede ser debido a que en la presentación del mismo se adjunta un ejemplo similar al pedido.

El segundo apartado b de la pregunta l presenta una variedad de respuestas con relación a la visualización simplificada. El error más significativo ha sido pasar parte de la altura (concretamente siempre la letra “b”) a considerarla de la dimensión de la base.

x	b	a	3
4	4xb	4 x a	4 x 3

(5 alumnos)

Algunos lo hacen mal y utilizan sólo una casilla para la dimensión vertical que indican como un producto o sólo con el 4.

x	ab	3
4	4xab	4x3

x	a	3
4	4xa	4x3

x	a	3
b4	b4xa	b4x3

(4 alumnos)

Otros tres alumnos, aunque utilizan una sola casilla para la dimensión vertical, indican uno de los lados como suma y expresan correctamente el resultado, salvo en la omisión del paréntesis.

x	a	3
4+b	4+bxa	4+bx3

(3 alumnos)

x	a+3
4 + b	4 + b . a + 3

Como se observa, las dificultades se presentan al utilizar incorrectamente la propiedad distributiva, y al prescindir del paréntesis al multiplicar un binomio por un número.

Un alumno presenta una solución correcta que implica el haber hecho subrectángulos, aunque no lo especifica. Surge en este diagrama de visualización simplificada la necesidad, por parte de los alumnos, de separarlos, quizás como consecuencia de la información previa dada en el cuestionario

x	a	3
4	4xa	4x3

x	a	3
b	b x a	b x 3

pero luego no suma los resultados parciales al hallar el área en la columna correspondiente de la representación formal (expresión algebraica).

El mal uso de la propiedad distributiva se manifiesta también en la mayoría de los alumnos al resolver la tercera columna de la representación formal (expresión algebraica).

A pesar de la dificultad que supuso para los estudiantes este apartado, detectada por los resultados habidos, sólo un alumno dejó de hacerlo.

El apartado c, ítem 3, presentó gran dificultad y a excepción de dos alumnos, el resto lo resolvió mal o no lo intentó abordar. Además todos menos una alumna, que hizo el resto del ejercicio y extrañamente éste no lo intentó, consideraron un paréntesis, llegando a ponerlo expresamente algunos estudiantes, convirtiendo: “4 x a + 8” en “4 (a + 8)”. De ahí que los resultados de la representación del S.R.V.G. (1ª columna), a partir de la citada expresión “4xa+8”, hayan sido: 34 respuestas incorrectas, 1 , sin abordar y 2, correctas.

Es interesante indicar que varios alumnos sustituyeron el 8 por una letra, concretamente la “b”, e incluso uno utilizó “A” por “a” y “B” por 8.

Con respecto a los resultados del 2º ejercicio, cuyos resultados fueron:

	(2, a, 4)	(2, b, 5)
1	9	5
0	27	28
x	1	4

se detecta un problema de lenguaje en cuanto a la semántica del vocablo “década” que 9 alumnos interpretan con significado de “doce”.

También la expresión “doce años menos” se interpreta como restar de 12 (5 alumnos), incluso un estudiante lo expresa exclusivamente con “-12” y así la edad de Toni no tiene ninguna relación con el resto.

Otra situación donde parece incidir el problema de la semántica del lenguaje habitual es que tres alumnos que resolvieron el apartado a, ítem 4, no intentaron el b, ítem 5, (por aparecer “década”). La mayoría no tuvo en cuenta que al tratarse de edades si las expresaban numérica y no alfanuméricamente, no podían ser números negativos.

Asimismo también muestran su confusión usando exponentes por coeficientes y sumandos.

“x^2” por “2x”

“x^{10}” por “x + 10”

Un alumno contesta por medio de letras mayúsculas y todas distintas de “x”, sin embargo conserva el uso de la “x” para la casilla donde ha de expresar “x + 10”, aunque la utiliza mal y pone “x.10”.

Se da también una situación que ha sido ya en ocasiones detectada y comentada por autores relevantes en la investigación del Álgebra. Esta es “dar un valor a x y usar ese valor para todo el ejercicio”. Ejemplo de ello es el ejercicio presentado por Firth (1975) a 17 jóvenes de 15 años.

Si x es un número cualquiera

a) Escribe el número que es 3 más que x;

b) Escribe el número que es 5 menos que x;

c) Escribe el número que es dos veces tan grande como x;

d) Escribe el número que es 50 % mayor que x.

Este investigador observó que 5 de los 17 estudiantes resolvieron incorrectamente todo el ejercicio seleccionando primero un valor para x, y usando este valor a través del ejercicio. Esto ha sugerido que este error puede estar relacionado con la dificultad de los estudiantes para considerar “x + 3” como una respuesta final. Este hecho ha sido comentado por Kieran (1989) donde hace referencia también a estudios anteriores de Matz (1979) y Davis (1975) con el dilema del proceso - producto: “La operación de sumar directamente 3 a la letra se puede ver solamente expresada en términos del proceso. El proceso es también el producto. Otra instancia de este error está citada en uno de los estudios de Davis (1975): Un estudiante no puede operar con una variable debido a que él no sabía qué número representaba la variable. De acuerdo a Matz y Davis, los estudiantes deben ser capaces de aceptar el concepto y la notación de esas operaciones subyacentes para poder trabajar con valores simbólicos. Aceptar este concepto significa cambiar su creencia acerca de lo que las respuestas deben parecer, liberando el requerimiento aritmético de que una respuesta es un número”.

También en algún alumno se observa que sólo resuelve lo que está seguro y el resto, no lo hace.

En la pregunta 3, (ítems 6-9) vuelve a estar presente la influencia de la semántica del lenguaje:

En el apartado a, ítem 6 a pesar de 28 alumnos contestar correctamente (y uno más que posteriormente lo tachó) (quizás porque se trata de un ejercicio donde se usa el término “discos”, vocablo del lenguaje habitual, atrayente para la edad encuestada), parecen influir las expresiones habituales de “dando el precio total y el número de elementos adquiridos, calcular el valor de uno” y por eso, contestan:

$p = \frac{760}{m}$, dos alumnos, o

la expresión $\frac{m}{760}$ ya que “cada uno” sugiere dividir.

En el apartado b, ítem 7, parece influir la idea de proporcionalidad en dos alumnos, cuyas respuestas han sido:

1º) “15 = p”
“1 = x”

2º) “1.x.15.p” y no sigue. Posiblemente, por semejanza de este apartado con el anterior, cinco alumnos dan como respuesta 15.p.

Se intuye que algunos no tienen claro el esquema semántico de la relación parte - parte - todo y dan como respuesta $\frac{15}{p}$ (7 alumnos).

Otras soluciones han sido:

“15-p” y “$\frac{p.15}{z}$”.

En el apartado 3c, ítem 9, es relevante que de los alumnos que han contestado mal, 10 hayan dado como respuesta “50-h”.

Hay soluciones sorprendentes como “25”.

Vuelve a aparecer problema de lenguaje y uso incorrecto del vocablo “menos”, dando como resultado “-50h” (dos alumnos) por “h-50”, confundiendo el signo de los números enteros con el signo de la operación de restar.

En 3d de nuevo no se respeta el código del enunciado y se da como respuesta: “$\frac{1}{4}$ de x” por “$\frac{1}{4}$ de y”.

Al analizar este ítem se duda sobre el acierto o error en la expresión “$\frac{1}{4}$ de y” (cuatro alumnos) y se dio por correcta, quedando el interrogante de: “en caso necesario, ¿por qué símbolo sustituirán los alumnos, la preposición de?”.

También aparecen potencias como resultado:

“4^y” , “y^4” (dos alumnos) e “y^3”.

El error de la “conmutatividad de la división” se manifiesta en $\frac{4}{y}$ (respuesta de tres alumnos), así como la confusión entre las operaciones de multiplicar y dividir en la respuesta “4y”.

También aquí, como en otras preguntas hacen reflexionar resultados como “$\frac{y}{15}$”.

Ya se indicó anteriormente el uso en todos los ítems del signo “-” y aparece “$\frac{1}{4} - \alpha$”.

Es interesante observar algunos comportamientos individuales, por ejemplo el nº 10 sólo hace intervenir en todos los apartados del ejercicio la operación de restar cuyos términos son letra y número:

a) m-760

b) 15-p

c) 50-h

d) $\frac{1}{4} - \alpha$

otro alumno da como solución una letra.

En general, los alumnos no respetan el código escrito en los enunciados y cambian con frecuencia minúsculas por mayúsculas y viceversa.

En la pregunta 4, ítem 11, han confundido el polígono central con un rombo; y también modifican el enunciado y hallan el área de la parte no rayada.

En general, se dan cuenta qué es lo que tienen que hacer, pero cometen errores al aplicar fórmulas y hacer cálculos.

En este ejercicio lo que se intentaba era ver si eran capaces de expresarse algebraicamente con corrección y aparecieron deficiencias debidas al cálculo de las áreas del círculo y polígonos, por lo que creemos que en posteriores pruebas hay que independizar los ítems y aislar el cálculo de las áreas de los polígonos y el círculo

$\pi^2 r$ (área del círculo),

πd (área de la circunferencia),

πd^2 (área de la circunferencia),

$d l$ (área del círculo),

$l + d$ (área de la figura inscrita),

4l, por área del cuadrado. Este es un error frecuente: el cálculo del perímetro del cuadrado por el área del mismo cuadrado.

Dan como respuesta final expresiones tan variadas como: “$d l^4$”; “$d l^2$”¸”dl” (dos alumnos); “$l^2 - \pi$”; “$\pi - l^2$”; “$\frac{D.r}{2}$” y “$2 \pi r - l^2$”, donde sustraen magnitudes de dimensiones distintas.

Además de confundir los polígonos hay otras confusiones:

r^2 con d (tres alumnos),

r con d,

d^2 con d + d,

2d + 2l = 4dl (dos alumnos).

En general, se ven afectados por los cambios conceptuales de la aritmética al álgebra en el caso del signo “igual”.

El pregunta 5, ítems 12 y 13, sí tiene un objetivo único: reconocer la habilidad en la obtención de factores comunes.

Siendo los apartados a) y b) semejantes, no sorprende que los resultados también lo hayan sido.

	(5, a, 12)	(5, b, 13)
1	7	4
0	24	25
x	6	8

La correlación entre las respuestas por parte de los mismos estudiante es grande. De hecho sólo hay tres alumnos que teniendo el apartado a) bien, el b) lo hacen mal (dos parece ser “despiste”, por excesiva confianza) y un alumno, por el contrario, tiene mal a) y bien el b).

Algunos estudiantes no reparan en el enunciado que pide todos los factores comunes y en el apartado a) sólo sacan el 4. Tienen en cuenta, exclusivamente, los coeficientes y no la parte literal.

Hay una respuesta que se reduce a sumar coeficientes y multiplicar la parte literal (incluso lo hacen mal en el primer caso):

$4 x^2 + 12 x^3 + 8 x = 24 x^5$ (dos alumnos), y,

$4 x^2 + 12 x^3 + 8 x = 24 x^6$ (un alumno).

Asimismo se observa cómo, detectando correctamente “4” y “x” como factores comunes, luego no reparan en dejar la expresión correcta, y mantienen invariable la parte literal en el paréntesis:

$4x^2 + 12x^3 + 8x = 4x(x^2 + 3x^3 + 2x)$.

En el apartado b, ítem 12, la sustitución de a por un valor y obtención del valor numérico de la expresión resultante, es algo común.

Como suele ser habitual, 10 de los alumnos han dado como respuesta “a” o sea dejan “la misma base” y “restan los exponentes”.

Otros estudiantes asocian, al parecer, el sacar factor común al uso de paréntesis:

a (a+1);
a (a+a);
a (a-a) (dos alumnos sin advertir el valor “0” del paréntesis):
a (-a);
a (2) (dos alumnos);
a (a^2);
a (2-a), (transformando el exponente en coeficiente);
a (a^2 - a);
a (a^2).

Otro alumno, al mencionar “factor” indica tres “factores” separados por “comas”, a^3, a^2, a.

En la pregunta 6 (ítems 133-16), tratándose de calcular valores numéricos, los estudiantes se sienten más familiarizados con este tipo de ejercicios y pocos dejan de contestar los apartados, sin que ello implique que las respuestas sean correctas, como se observa en la tabla.

Los resultados obtenidos fueron:

	(6, a,13)	(6, b, 14)	(6, c, 15)	(6, d, 16)
1	15	6	2	8
0	21	29	33	26
x	1	2	2	3

Es notorio no hayan distinguido las diferencias entre los apartados a, b, c y d, dándose las siguientes respuestas, aún estando incorrectas:

b = c = d;	d = c $\neq$ b;	c = b $\neq$ d;	a = b = c = d.
18	1	5	1

llegando un estudiante a identificar los apartados b, c y d simultáneamente a la diferencia de cuadrados: $a^2 - b^2$. Aquí también se hace cambio de letras: “y” por “a”.

La pregunta 7 y última en la que se muestra un plano para calcular sus medidas indicadas en función de una variable (t), presenta gran dificultad al analizar sus resultados, ya que 13 alumnos no la contestan, 20 lo hace mal y solamente, por tanto, cuatro alumnos, lo terminan bien. Es de destacar que alguno de ellos sólo muestra el resultado y no las operaciones, cálculos o tanteos efectuados.

5.4. DISEÑO EXPERIMENTAL. PRIMERA APLICACIÓN. (92-93)

Realizadas las experiencias exploratorias anteriores durante los cursos 90-91 y 91-92, buscando y analizando las causas de las dificultades en el uso y tratamiento del lenguaje algebraico y siempre con nuestros mismos objetivos indicados en el capítulo 2, se decidió elaborar el Diseño Experimental para el curso 92-93.

Se ha de tener en cuenta que se intenta obtener, a través de una enseñanza que provoque a su vez un aprendizaje significativo, basada en el uso de los distintos sistemas de representación, la detección de las habilidades cognitivas de carácter operacional y conceptual.

El aprendizaje significativo comporta intuición o comprensión y es en realidad un proceso de resolución de problemas. Es decir, el aprendizaje significativo, se caracteriza porque los nuevos contenidos que son objeto de aprendizaje así como el proceso mismo, están relacionados con capacidades ya poseídas, y con contenidos adquiridos anteriormente, y por tanto, incorporados no de forma aislada, sino en conexión con las estructuras cognitivas precedentes. No basta con que el alumno establezca conexiones con el conocimiento que posee, sino que es necesario que tenga una disposición activa a dar sentido a lo que encuentra o se le ofrece, conduciendo a la asimilación del nuevo conocimiento dentro del armazón de su propio conocimiento. Ésta en Matemáticas produce unas veces distorsiones que conducen a concepciones erróneas, y otras, la vieja estructura de conocimiento matemático debe ser ampliada o abandonada en favor de un nuevo conocimiento que contemple conjuntamente a ambos.

El nuevo material que se presenta, por tanto, ha de relacionarse, significativamente, con lo que el alumno ya sabe, de tal forma que el alumno pueda llegar a asimilar los nuevos contenidos escolares integrándolos en una estructura cognitiva cada vez más sólida y duradera" (Repetto-Marrero, 1996), por eso, ha sido fundamental la indagación exploratoria de los cursos anteriores, más una amplia reflexión con el profesorado de este grupo de alumnos, así como la aplicación de un Pretest (anexo 5) de diagnosis inicial, que nos proporcionó directamente -no a través del profesorado una primera información acerca del alumno, que nos ha permitido precisar objetivos y nos ha ayudado a preparar y a estructurar mejor el proceso de enseñanza/aprendizaje, con el fin de lograr que el contenido sea potencialmente significativo tanto desde la estructura lógica de las Matemáticas, en concreto del Álgebra, como desde la estructura psicológica del alumno, así como que consigamos del estudiante una actitud favorable para aprender significativamente, o sea estar dispuesto, motivado, para conectar lo nuevo que está aprendiendo con lo que ya sabe. El alumno aprende mejor cuando hace significativo aquello que debe aprender, es decir, cuando se le motiva para que establezca una relación entre lo que aprende y lo que ya sabe, y la motivación -componente activo que impulsa y determina una conducta-, actúa como "variable interviniente" entre el estímulo (materiales didácticos, en nuestro caso "cuadernos de clase"), y la conducta (tareas escolares prescritas para los mismos).

Podemos resumir esta experimentación como aquella que nos va a permitir analizar potencialidades y dificultades aportadas por el Diseño preparado "ad hoc" para esta experiencia. En este grupo se hace un estudio acerca de las actitudes hacia las Matemáticas y hacia el Álgebra.

5.4.1. La población de estudio

La población de estudio la constituyó 31 alumnos de 7º del mismo Centro donde se había realizado la experiencia el curso anterior, o sea el Centro nº 1.

5.4.2 Diseño de investigación

Se puede concretar el desarrollo del diseño de investigación en las siguientes etapas:

Primera etapa:

Diseño de todo el proceso, construcción y validación de instrumentos de medida, del diseño de instrucción, del experimento de la enseñanza en el aula, DISEA, de los cuales nos ocupamos en los capítulos correspondientes.

Segunda etapa:

Aplicación de los test de Actitudes hacia las Matemáticas y hacia el Álgebra, a los cuales nos referiremos en el Capítulo 8, y el Pretest de habilidades algebraicas (Pr, anexo 5); Implementación del DISEA; La aplicación del Postest, (Po, anexo 6) para medir la eficiencia del dominio en el uso y tratamiento de las expresiones algebraicas, o sea averiguar el acercamiento de los alumnos de este nivel al álgebra, a través del material que presentamos y el modo cómo se presentó; Selección de alumnos para ser entrevistados; Diseño del protocolo de las entrevistas y Realización de las entrevistas.

Tercera etapa:

Análisis de datos.

En este diseño experimental (Curso 92-93) se sigue el mismo tipo de diseño de investigación de la experiencia anterior:

Pretest (Pr)	Instrucción	Postest (Po)

Antes de comenzar la instrucción se aplicó un cuestionario Pretest (Pr, anexo 5) para detectar habilidades algebraicas operacionales y conceptuales, y posteriormente a la instrucción de les administró el Postest (Po, anexo 6), que ya han sido descritos en el Capítulo 4.

5.4.3. Desarrollo de la secuencia de enseñanza

La instrucción se desarrolló en los meses de marzo y abril de 1993.

Para la instrucción en este grupo (7º A) se diseñaron dos cuadernos (I y II) (anexo 10, partes 1º y 2ª, respectivamente) descritos en el capítulo 3, relativos a Expresiones Algebraicas. El primero lo constituyen 15 fichas de trabajo más 10 actividades de refuerzo. El segundo lo forman 20 fichas.

Estos cuadernos I y II se organizan en relación al Sistema Categorial de habilidades cognitivas diseñado para la investigación y va a permitir detectar las habilidades de carácter operacional y conceptual a través de las respuestas de los alumnos.

Las categorías de análisis de las habilidades cognitivas tanto operacionales como conceptuales y sus descriptores ya están detalladas en el capítulo 3.

A continuación se muestra la relación de las actividades de los cuadernillos que constituyen el material de clase en la instrucción llevada a cabo en la implementación del DISEA, con el sistema Categorial de habilidades cognitivas fijado.

Aquí, como en los Cuestionarios Pretest y Postest, también existen ítems que permiten analizar otras habilidades cognitivas.

En la tabla se indican en las tres primeras columnas las referencias al número del cuaderno, número de ficha (o si se trata de una actividad de las de refuerzo, A.R., anexo 10 parte 1ª) y número de actividad, si procede, en la tercera.

Las columnas siguientes mantienen los códigos utilizados anteriormente para expresiones algebraicas.

Nº C	Nº F	Nº A	O_1	O_2	O_3	C_1	C_2	C_3
I	**1.**					x	x	x
	2.					x	x	x
	3.					x	x	x
	4.					x	x	x
	5.					x	x	x
	6.					x	x	x
	7.					x	x	x
	8.			x		x	x	x
	9.					x	x	x
	10.			x		x	x	x
	11.		x	x	x	x	x	x
	12.		x		x			
	13.			x		x	x	x
	14.			x		x	x	x
	15.		x	x	x	x	x	x
	A.R.	**1,2**				x	x	x
	A.R.	**3,4,5**				x	x	x

Nº C	Nº F	Nº A	O_1	O_2	O_3	C_1	C_2	C_3
	A.R.	**6**	x		x			
	A.R.	**7,8**		x		x	x	x
	A.R.	**9,10**				x	x	x
II	**1.**					x	x	x
	2.					x	x	x
	3.					x	x	x
	4.					x	x	x
	5.					x	x	x
	6.					x	x	x
	7.			x		x	x	x
	8.		x	x		x	x	x
	9.		x	x		x	x	x
	10.					x	x	x
	11.		x	x		x	x	x
	12.		x			x	x	x
	13.			x		x	x	x
	14.			x		x	x	x
	15.			x		x	x	x
	16.			x		x	x	x
	17.			x		x	x	x
	18.			x		x	x	x
	19.			x		x	x	x
	20.			x		x	x	x

Tabla 5.2

Ya hemos indicado en el Capítulo 3, las sesiones desarrolladas donde se incluían las relativas a la aplicación del Pretest, antes de la instrucción, y Postest, después de la citada instrucción, para verificar la incidencia de la instrucción en el aprendizaje.

Las Sesiones se desarrollaron así:

En la 1ª sesión se tuvo un primer contacto con los alumnos para explicarles la experiencia, justificar el apoyo del material individual y, en definitiva, motivarlos a colaborar con la experiencia, hecho que nos parece fundamental en una experiencia de este tipo aunque el profesorado esté de acuerdo y por supuesto, la Dirección del Centro.

En la 2ª sesión se hizo la aplicación del Pretest que, como ya se ha indicado, estuvo formado de dos partes con 13 preguntas cada una, con ítems relativos a expresiones algebraicas y a ecuaciones indistintamente.

En la 3ª sesión se comienza el trabajo con el Cuaderno nº I y se dedica este tiempo al uso de las letras con sentido algebraico en situaciones contextualizadas o no para constatar qué habilidades presentan o adquieren con la instrucción y qué tipo de representaciones espontáneas utilizan los alumnos al hacer conversiones entre los diferentes registros (habilidad codificada con C_1), al contextualizar el lenguaje algebraico (C_2) en contextos familiares y al interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y las expresiones algebraicas (C_3).

En la sesión 4ª ya se trabaja la utilización del S.R.V.G. para expresiones algebraicas. Se trata de analizar las interpretaciones del S.R.V.G. así como las dificultades al hacer uso del mismo en las conversiones entre los diferentes registros (C_1) y al contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como objeto geométrico (C_2), con una atención especial a representaciones del tipo "a + b" y "a . b".

En la 5ª sesión se hizo hincapié en el uso de las letras para representar cantidades desconocidas y para establecer relaciones también entre cantidades desconocidas, aparte de referencia a las sesiones anteriores, constatando si los alumnos realizan correctamente la aplicación de vocablos específicos y la designación correcta o no de los paréntesis al "hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal" (C_1), al "contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como número generalizado" (C_2), y al interpretar y comprender el significado de los signos y las letras" (C_3) y detectando los códigos personales utilizados.

En la 6ª sesión se utiliza el S.R.V.G. para expresiones del tipo "a.b+c" y además se hace cálculo del valor numérico de expresiones. Se quería analizar las potencialidades y dificultades del S.R.V.G. al "hacer conversiones entre los diferentes registros" (C_1), en especial para representar expresiones del tipo "a . b + c", consideradas como una totalidad, donde tanto "a . b", como "c", representan un rectángulo. Asimismo observar la capacidad de particularizar dentro de la sustitución formal en situaciones contextualizadas como precio del kilo de fruta o valor numérico al "contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como número generalizado" (C_2), y al "interpretar y comprender el significado de los signos y las letras" (C_3).

En la sesión 7ª se sigue intentando hacer análisis del uso del S.R.V.G., pero ahora con expresiones, en especial del tipo "a.b ± c.d", consideradas como una totalidad, donde surge no sólo la idea de adición, sino también la de la sustracción (C_1).

En la 8ª sesión, donde ya se comienza a utilizar el segundo cuadernillo, se pretende detectar los códigos utilizados al "hacer conversiones entre los diferentes registros" (C_1). También se trata de constatar la identificación de cada término de una expresión algebraica con distintos rectángulos equivalentes, al "contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como número generalizado" (C_2), y al "interpretar y comprender el significado de los signos y las letras" (C_3).

La sesión 9ª en la que también se van a detectar habilidades de carácter conceptual de las codificadas como C_1, C_2 y C_3 se introduce el trabajo sobre la propiedad distributiva usando el S.R.V.G. para expresiones del tipo "a.b" y "a.(b+c)".

Se pretende en la sesión 10ª analizar la dificultad o facilidad que proporciona el uso de las tres representaciones trabajadas anteriormente y se hace a través del uso del S.R.V.G. para expresiones del tipo “a (b + c)”, (a + b) . c”, “(a + b) . (c + d)” y “(a + b + c) . (d + e)”.

Aunque en las sesiones anteriores se ha podido detectar, además de las habilidades de carácter conceptual, algunas de las de carácter operacional, esta undécima sesión se dirige a detectar en especial habilidades O_1 y O_2 de carácter operacional al realizar operatividad básica en operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis” (O_1), y al “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2), trabajando expresiones del tipo “na . mb”, “a + b^2” y “$(a + b)^2$”. También son objeto de análisis las conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal (C_1).

El objetivo de esta última sesión 12ª de instrucción es de integración, pretende comprobar la aceptación de expresiones como equivalentes si sus representaciones con SRVG son también equivalentes, con lo cual se vuelve a tener en cuenta la conversión entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal (C1).

La última sesión, según muestra el cuadro de las mismas, se dedicó a la aplicación del Postest para expresiones algebraicas.

5.4.4. Resumen de datos

La medida de la eficiencia en el tratamiento de las expresiones algebraicas se hizo mediante la parte primera del Postest (Po1, anexo 6, parte 1ª) y que estuvo formada por 12 preguntas y 49 ítems que han sido descritas en el Capítulo 4.

De los 49 ítems que forman la primera parte del Postest (Po1) sobre expresiones algebraicas que se aplicó después de la instrucción, sólo se van a considerar 39 ítems que coinciden con otros tantos del Pretest (Pr1 y Pr2), cuestionario pasado antes de la instrucción.

A continuación se incluyen los resultados correspondientes de los 39 ítems seleccionados, que están distribuidos, por razón de espacio, en dos tablas: La tabla 5.3 con los primeros 19 ítems y la Tabla 5.4, con los restantes (20 ítems).

En la primera columna aparece el número de orden del alumno en la clase. En las columnas siguientes aparecen, separados por comas, los resultados del Pretest y Postest de Expresiones Algebraicas. Las tres últimas columnas están simbolizadas con un “1”, “0” y “x” que indica el número de respuestas correctas, incorrectas o no resueltas por el alumno correspondiente, indicado en la primera columna de la izquierda

En la primera fila se encuentra un código del número de la columna correspondiente, a partir de la segunda y hasta la 22. Los datos de la segunda fila que aparecen en negrilla corresponden a la parte Pr2 de la prueba del Pretest.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	**1**	**0**	**x**
A/I	**36**, 1	**38**,2	**39**,3	**40**,4	**37**,6	**49**,7	**11**,10	**12**,11	**13**,12	**14**,13	**15**,14	**16**,15	**17**,18	29,19	30,20	33,22	**26**,23	**27**,24	**28**,25			
1	0,0	1,1	1,1	1,1	1,0	1,1	0,x	0,x	0,x	0,x	0,x	0,x	0,x	0,1	0,0	0,1	1,1	0,1	0,0	6,8	13,4	0,7
2	0,0	1,0	1,0	0,0	0,0	0,1	1,0	1,0	1,0	0,1	1,1	0,1	0,1	0,1	0,0	0,0	1,1	0,0	0,0	7,7	12,12	0,0
3	1,0	1,1	1,1	0,0	1,0	0,1	0,x	0,x	0,x	0,x	0,x	0,x	0,x	1,1	x,0	x,0	0,0	0,0	0,0	5,4	12,8	2,7
4	1,0	1,0	1,1	1,1	0,0	1,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	7,3	12,16	0,0
5	0,1	1,1	1,1	0,1	0,1	0,0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	1,0	0,1	0,1	1,1	0,1	0,0	4,16	15,3	0,0
6	1,0	1,0	1,0	0,0	0,0	1,0	0,1	1,1	0,1	0,1	1,1	0,0	1,1	0,1	0,0	0,0	1,1	0,1	0,0	8,9	11,10	0,0
7	1,0	1,1	1,1	1,1	0,0	1,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,0	1,1	1,1	0,1	1,1	1,1	1,1	10,16	9,3	0,0
8	1,1	1,1	1,1	0,1	1,1	x,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,1	0,1	0,1	0,1	0,0	0,0	5,10	13,9	1,0
9	1,0	1,1	0,0	1,0	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,1	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	5,3	14,16	0,0
10	0,0	1,1	1,1	0,1	0,0	1,1	0,1	0,1	0,1	0,0	0,0	0,0	0,1	0,1	x,0	1,0	1,1	1,0	1,1	7,11	11,8	1,0
11	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	0,0	1,0	0,0	1,1	0,1	0,0	0,0	1,1	0,0	0,0	12,12	7,7	0,0
12	1,1	1,0	0,0	0,0	1,1	1,0	0,1	0,1	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	5,5	14,14	0,0
13	1,1	1,0	1,1	1,1	0,1	0,1	0,x	0,x	0,x	0,x	0,x	0,x	0,x	0,1	x,1	0,1	0,1	0,0	0,0	4,9	14,3	1,7
14	1,1	1,0	1,0	1,0	0,0	1,0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,0	0,1	1,1	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0	6,9	13,10	0,0
15	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	0,0	1,1	0,0	0,0	0,1	1,1	1,1	1,0	15,15	4,4	0,0
16	1,1	1,1	1,1	0,1	1,0	1,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	1,1	0,1	1,1	0,1	1,1	0,0	0,0	8,16	11,3	0,0
17	1,1	1,1	1,1	0,1	0,1	1,x	1,0	0,1	0,x	0,0	0,0	x,x	0,0	0,1	0,0	0,0	1,1	1,1	1,1	8,10	10,6	1,3
18	1,1	1,0	1,1	1,1	1,1	1,1	0,x	0,x	0,x	0,x	0,x	0,x	1,x	0,1	0,0	x,0	1,1	0,0	1,1	9,8	9,4	1,7
19	1,1	1,0	1,0	1,1	1,1	0,x	0,0	0,0	x,0	0,0	0,0	x,0	0,0	1,1	x,0	0,0	1,1	0,0	0,0	7,5	9,13	3,1
20	1,1	0,1	1,1	1,1	1,1	1,0	1,1	1,1	1,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,1	0,1	1,1	1,0	0,0	10,12	9,7	0,0
21	0,0	1,1	1,1	0,0	0,0	0,0	1,0	1,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	x,1	0,0	x,0	0,0	0,0	0,0	5,3	12,16	2,0
22	1,1	1,1	1,1	1,0	0,0	0,1	0,1	1,1	0,1	0,1	1,1	0,1	0,1	0,1	x,1	0,1	1,0	0,0	0,0	7,14	11,5	1,0
23	1,1	1,1	1,1	1,1	1,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	0,1	0,0	0,1	1,1	1,1	0,1	15,17	4,2	0,0
24	1,1	1,0	0,0	0,0	0,0	x,0	1,1	1,1	1,1	0,0	1,1	0,0	0,0	1,0	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	7,6	11,13	1,0
25	1,1	1,0	1,1	1,1	1,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	1,1	1,0	0,0	7,16	12,3	0,0
26	1,1	1,0	0,0	0,0	1,1	0,x	x,x	x,x	x,x	x,x	x,x	x,x	1,x	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	4,3	9,8	6,8
27	1,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	x,x	x,x	x,x	x,x	x,x	x,x	0,x	1,1	0,1	0,1	1,0	0,0	0,0	8,8	5,4.	6,7
28	0,1	1,1	1,1	0,1	0,0	1,1	0,1	0,1	x,1	0,1	0,1	x,1	0,0	0,1	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	4,12	13,7	2,0
29	1,1	1,1	1,1	0,1	0,0	0,1	x,1	x,0	x,0	x,0	x,0	x,0	x,0	1,1	0,0	0,1	1,1	0,0	0,1	5,10	7,9	7,0
30	1,1	1,0	1,0	1,0	0,0	0,1	x,1	x,1	x,1	x,1	x,1	x,0	x,x	1,1	x,x	0,1	1,1	0,0	0,0	6,10	5,7	8,2
31	0,0	1,0	0,0	x,0	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,0	x,0	0,0	0,0	0,1	0,0	0,0	0,0	6,1	11,18	2,0
1	24,20	30,18	26,21	16,19	14,13	16,20	9,17	10,17	7,15	3,12	9,14	1,8	9,11	11,25	2,10	1,16	22,19	7,7	5,6	222,288		
0	7,11	1,13	5,10	14,12	17,18	13,8	18,8	17,8	18,9	24,13	18,11	23,16	19,13	19,6	23,20	27,15	9,12	24,24	26,25		322,252	
x	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	2,3	4,6	4,6	6,7	4,6	4,6	7,7	3,7	1,0	6,1	3,0	0,0	0,0	0,0			45,49
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19			

Tabla 5.3

	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	**1**	**0**	**x**
A/I	**29**,26	**30**,27	**31**,28	**32**,29	**33**,30	**34**,31	**41**,32	**42**,33	18,34	**43**,35	17,36	**6**,37	**5**,38	18,39	36,40	37,41	38,42	39,44	40,46	**35**,49			
1	1,1	0,0	0,0	0,1	0,0	x,x	1,1	0,1	1,1	1,1	1,1	x,0	1,1	1,1	1,1	0,1	1,0	1,0	1,0	1,1	12,12	6,7	2,1
2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,1	1,0	1,1	0,0	0,1	0,1	1,1	1,1	0,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,0	11,12	9,8	0,0
3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,x	0,x	1,0	0,x	1,0	1,0	1,0	1,0	1,1	0,0	0,0	1,0	0,0	1,1	8,2	12,15	0,3
4	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,0	1,1	0,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	0,0	0,0	1,1	9,10	11,10	0,0
5	0,1	0,0	0,0	0,1	0,0	0,1	1,1	1,1	0,1	1,1	0,1	0,1	0,1	0,1	1,1	1,1	1,1	0,0	1,x	1,1	8,15	12,4	0,1
6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,1	0,0	0,1	0,0	0,1	1,0	1,0	0,1	1,1	1,1	0,1	0,0	0,0	1,1	6,8	14,12	0,0
7	1,1	0,0	1,1	1,1	1,1	0,0	1,1	1,0	1,1	0,0	1,1	1,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	17,15	3,5	0,0
8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,1	0,0	1,1	0,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	12,12	8,8	0,0
9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,1	0,0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	1,1	0,1	1,1	0,0	1,0	1,1	5,11	15,9	0,0
10	1,1	0,0	0,1	0,0	1,1	0,0	0,0	0,x	0,1	0,0	1,1	0,1	0,1	0,1	1,1	1,1	1,1	1,0	1,0	1,1	9,12	11,7	0,1
11	0,0	0,0	x,0	0,0	x,x	0,0	1,1	1,1	1,1	0,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	0,1	0,0	0,0	0,0	1,1	9,11	9,8	2,1
12	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	x,0	0,0	x,1	0,0	x,0	x,1	0,0	x,0	x,0	0,1	0,0	1,1	1,4	13,16	6,0
13	0,0	x,0	0,0	0,0	0,x	0,0	0,1	0,1	1,1	0,0	1,1	1,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,0	1,0	1,0	11,9	8,10	1,1
14	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,1	1,0	0,1	0,0	0,0	0,1	1,1	1,1	1,1	1,0	0,0	1,1	7,7	13,13	0,0
15	1,1	0,0	0,0	1,1	1,1	x,0	1,1	0,1	1,1	1,0	1,1	0,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	15,16	4,4	1,0
16	0,1	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	1,1	0,0	0,1	1,0	0,1	0,1	0,1	0,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	9,13	11,7	0,0
17	1,1	0,0	1,1	1,1	1,1	0,1	1,1	0,x	0,1	0,0	0,1	0,0	0,1	0,1	1,1	1,1	1,1	0,1	1,1	1,1	10,16	10,3	0,1
18	1,0	0,0	1,1	1,1	1,1	1,0	1,1	0,1	0,0	0,1	0,1	0,0	0,0	0,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	12,13	8,7	0,0
19	0,0	0,0	x,0	x,x	x,x	x,x	x,x	x,x	0,x	x,x	0,x	0,x	1,x	0,x	1,1	1,1	1,1	0,0	0,0	1,1	5,4	8,5	7,11
20	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,1	0,1	0,1	0,1	0,0	0,1	0,0	1,1	0,1	1,1	0,1	0,1	0,0	0,0	1,1	5,11	15,9	0,0
21	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	1,1	0,0	1,0	0,0	1,1	x,0	0,1	1,0	1,1	0,1	0,1	0,0	0,0	1,1	7,7	12,13	1,0
22	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,0	1,1	0,0	1,1	0,0	1,1	1,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,0	1,1	1,1	13,10	7,10	0,0
23	1,1	0,0	0,0	1,1	1,1	1,0	1,1	1,1	1,1	0,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	17,16	3,4	0,0
24	0,0	x,x	0,x	0,0	0,0	0,x	0,x	0,x	0,x	0,x	0,0	0,0	0,x	0,0	1,1	0,0	0,0	1,0	x,1	1,1	3,3	15,9	2,8
25	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	1,1	0,0	1,1	0,1	1,1	0,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,0	1,1	12,11	8,9	0,0
26	0,0	x,x	0,0	0,0	0,0	0,0	x,1	x,0	0,0	x,1	0,1	1,0	1,1	0,1	1,1	1,1	1,1	0,0	0,0	1,1	6,9	10,10	4,1
27	0,0	0,0	0,0	1,1	0,0	x,0	1,1	0,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,0	1,0	1,1	14,13	5,7	1,0
28	0,0	x,0	x,0	x,0	x,0	x,0	0,1	0,0	1,1	1,0	1,1	1,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,0	0,1	11,10	4,10	5,0
29	1,0	x,0	0,1	0,0	1,1	0,0	1,0	0,0	1,0	x,1	0,1	1,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	0,1	0,0	1,1	11,11	7,9	2,0
30	1,1	0,0	0,x	0,x	x,x	x,x	1,1	0,x	0,0	x,x	0,1	0,x	0,1	0,1	1,1	1,1	1,1	1,0	x,1	1,1	7,10	9,3	4,7
31	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	1,0	1,1	0,0	1,1	1,x	1,1	1,1	0,1	0,0	0,0	x,0	x,0	1,1	7,7	11,12	2,1
1	11,9	0,0	3,5	7,8	8,7	6,4	19,23	6,10	16,21	7,10	16,28	15,11	20,24	16,26	29,30	22,27	23,25	18,12	17,11	30,29	289,320		
0	20,22	26,29	25,24	22,21	19,20	19,23	10,5	23,15	14,8	20,17	14,2	14,17	10,5	14,4	2,1	8,4	7,6	12,19	11,19	1,2		291,263	
x	0,0	5,2	3,2	2,2	4,4	6,4	2,3	2,6	1,2	4,4	1,1	2,3	1,2	1,1	0,0	1,0	1,0	1,0	3,1	0,0			40,37
	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39			

Tabla 5.4

La próxima tabla (tabla 5.5) muestra los resultados comunes de los 39 ítems seleccionados.

La primera columna incluye el número de ítem; las siguientes, a excepción de las dos últimas, están encabezadas por dos dígitos: el primero expresa el resultado del Pretest y el segundo dígito, el resultado del Postest (Po1), indicando por tanto “00” el número de veces que el ítem correspondientes ha sido incorrecto en la primera aplicación y en la segunda; “x1”, el número de veces que no se ha abordado el ítem en el Pretest y a la vez ha sido correcto en el Postest.

En las dos últimas columnas los resultados globales de cada ítem se expresan, en la forma ya explicada en el Capítulo 4, que es la utilizada en la experiencia del Shell Centre (Bell y otros, 1987).

	00	**XX**	**01**	**10**	**11**	**1X**	**X1**	**0X**	**X0**	**S.C.(-)**	**S.C(+)**
1	5		2	6	18					0.250	0.285
2			1	13	17					0.433	1.000
3	5			5	21					0.192	0.000
4	7		7	4	12				1	0.250	0.466
5	14		3	4	10					0.285	0.176
6	3		8	4	11	1	1	2	1	0.312	0.600
7	4	2	10	4	5		2	4		0.111	0.545
8	4	2	9	3	7		1	4	1	0.300	0.476
9	5	2	8	2	5		2	5	2	0.285	0.416
10	11	2	9	1	2		1	4	1	0.333	0.357
11	7	2	7	3	6		1	4	1	0.333	0.363
12	13	3	6		1		1	4	3	0.000	0.233
13	9	1	6	2	5	2		4	2	0.444	0.272
14	3		16	3	8		1			0.272	0.850
15	17	1	6		2		2		3	0.000	0.275
16	11		16	1					3	1.000	0.533
17	7		2	5	17					0.227	0.222
18	21		3	3	4					0.428	0.125
19	24		2	1	4					0.200	0.076
20	18		2	4	7					0.363	0.100
21	26	2							3	0/0	0.000
22	21		2		3			2	3	0.000	0.071
23	19	1	2	1	6			1	1	0.142	0.083
24	18	3		1	7			1	1	0.125	0.000
25	16	3	2	4	2			1	3	0.666	0.080
26	3	1	5	2	17		1	2		0.105	0.500
27	12	1	6	2	4			5	1	0.333	0.240
28	4		8	3	13			2	1	0.125	0.533
29	13	2	5	4	3		2	2		0.571	0.291
30	1		12	1	15		1	1		0.062	0.866
31	7		5	8	6	1		2	2	0.600	0.312
32	2		7	2	17	1		1	1	0.150	0.636
33	2		11	2	14			1		0.125	0.800

	00	XX	01	10	11	1X	X1	0X	X0	S.C.(-)	S.C(+)
34	1		1		29					0.000	0.500
35	3		5		22				1	0.000	0.555
36	4		3	1	22				1	0.043	0.375
37	9		3	9	9				1	0.500	0.230
38	11			7	9	1	2		1	0.058	0.142
39			1	2	28					0.066	0.033
T	**360**	**28**	**201**	**117**	**388**	**6**	**19**	**52**	**38**		

Tabla 5.5

	00	XX	01	10	11	1X	X1	0X	X0	S.C. (-)	S.C. (+)
1	6	1	6	4	14			7	1	0.222	0.285
2	13		8	7	11					0.388	0.380
3	13		1	8	5			10	2	0.615	0.038
4	22		1	4	12					0.250	0.043
5	6		21	1	10	1				0.166	0.777
6	16		9	6	8					0.428	0.360
7	5		7	3	24					0.1110	0.583
8	17		4		17		1			0.000	0.227
9	20		9	5	5					0.500	0.310
10	10		11	4	12			1	1	0.250	0.333
11	13	1	3	1	20				1	0.047	0.166
12	23		4	3	3		2		4	0.500	0.181
13	7		7	5	10		1	8	1	0.333	0.333
14	16		10	7	6					0.538	0.384
15	5		3	2	28				1	0.066	0.333
16	7		15	3	14					0.176	0.681
17	8	1	10	1	16	1		2		0.111	0.476
18	7		4	3	17	1		6	1	0.190	0.333
19	12	6		2	9	1		5	4	0.250	0.270
20	13		11	3	12					0.200	0.458
21	21		3	6	6		1		2	0.500	0.148
22	10		8	5	15		1			0.250	0.473
23	4		3	2	30					0.062	0.428
24	18	1	1	3	7		1	7	1	0.300	0.068
25	8		12	4	15					0.210	0.600
26	15	7	3	2	7	1	2	1	1	0.300	0.172
27	6	6	3	4	18			1	1	0.181	0.136
28	8		9	4	11		2		5	0.266	0.458
29	7		7	4	12		2		7	0.250	0.391
30	5	5	5	4	9		6	4	1	0.307	0.423
31	19		3	7	5	1			4	0.615	0.115
T	**360**	**28**	**201**	**117**	**388**	**6**	**19**	**52**	**38**		

Tabla 5.6

Como se observa en la tabla 5.5, de los 39 ítems planteados, en 22 de ellos mejoraron las respuestas, uno de los ítems permanece con los mismos resultados. Si no se tiene en cuenta este último que no experimentó variación, la mejoría ha sido del 55, 26 %, y si sí se tiene en cuenta, el porcentaje de mejora es del 56,41 %.

En la tabla 5.6 se puede también detectar que 15 de los 31 alumnos mejoraron en sus respuestas, y un alumno globalmente permanece como estaba. Teniendo en cuenta, como en el caso anterior, a este alumno (nº 13), el porcentaje de mejora es del 48,38 % y si se descuenta ese alumno, el porcentaje alcanzado de mejoría es del 50 %.

5.4.5. Entrevistas individuales

Las entrevistas se realizaron de forma individual, conviniendo en aplicar el tipo de entrevista semi - estructurada en la cual el entrevistador a partir de las actividades del protocolo de la sesión concreta, va interrogando al niño con el objetivo que éste exprese lo que va haciendo, por qué lo hace así o por qué lo deja de hacer.

Se prepararon dos sesiones de entrevista relacionadas con las expresiones algebraicas que se realizaron en el propio Centro. Cada sesión duró entre 20 y 30 minutos. Fueron vídeograbadas.

Se convocó a 9 alumnos, 3 de estrato alto (las tres niñas), 3 de estrato medio (1 niña y dos niños) y tres de estrato bajo (1 niña y dos niños), en total 5 alumnos y 4 alumnas. La selección de estos alumnos se hizo en función de las notas de sus evaluaciones y de los resultados de su trabajo con el didacta. El trabajo del alumno del estrato medio del primer grupo entrevistado es el que hemos elegido para el estudio biográfico.

Se comenzó entrevistando a un alumno de cada estrato al final del propio curso 92-93, Junio, (1º Fase); el resto, seis alumnos (2º Fase), fueron entrevistados a comienzos del curso 93-94, en el propio mes de Septiembre. Vamos a considerar por separado las dos fases.

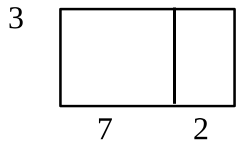
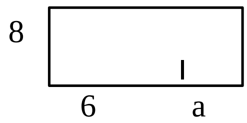
En principio se pensó que en la entrevista se revisaría lo que cada uno de los alumnos seleccionados había hecho, pero resultó imposible porque no habían contestado ni actuaban de manera uniforme, como era natural. Se pensó era más conveniente preparar ítems no exactamente iguales o distribuidos de manera diferente para que en cada sesión se tuviera en cuenta el trabajo de aula previo de cada uno. Se había hecho un análisis exhaustivo del Pretest y Postest, así como del trabajo de clase de estos 9 alumnos. Esto no descartó el presentar todos aquellos ítems que resultaban en general interesantes bien por haber planteado dificultades, porque permitían detectar las habilidades cognitivas que deseábamos, o bien porque su resolución variada así como por ser errores o estrategias ya analizadas en la literatura relativa al tema y con las cuales valía la pena un contraste.

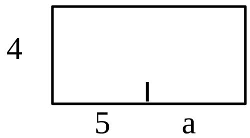
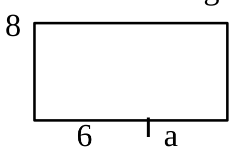
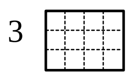
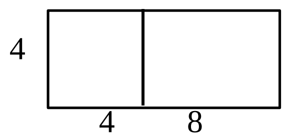
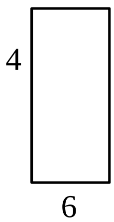
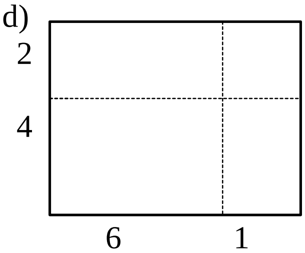
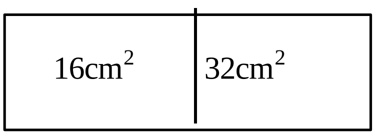
Entrevistas 1ª Fase. Curso 1992-93

En los protocolos de la entrevista los ítems los organizamos en torno a las dos grandes categorías de análisis ya citadas, habilidades cognitivas tanto operacionales (H.C.C.O.) como conceptuales (H.C.C.C.). El protocolo correspondiente a la entrevista en su <u>primera sesión</u> se puede esquematizar en el trabajo con expresiones algebraicas investigando el uso correcto o incorrecto de las letras, la aceptación o rechazo de respuestas abiertas y la representación de las expresiones algebraicas.

El protocolo correspondiente a la entrevista en su <u>segunda sesión</u> se puede esquematizar en el trabajo con expresiones algebraicas utilizadas en identidades notables en el uso de la propiedad distributiva y en la sustitución formal.

A modo de ejemplo presentamos algunos ítems relacionados con las habilidades correspondientes (tabla 5.7).

1ª SESIÓN	**H.C.C.O.**	**Nº F**
O_1	Calcula el perímetro de la figura siguiente:  perímetro =	9
	Calcula el perímetro de la figura siguiente:  perímetro =	9
O_1 y O_2	n multiplicado por 4 se puede escribir como 4n. Multiplica por 4 cada uno de los siguientes: 8 n + 5 3n	27
O_1	a + 3 a puede ser escrito de forma más simplificada como 4a. Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible: 2 a + 5 a 2 a + 5 b 2 a + 5 b + a a + 4 + a + 4 3 a - b + a	28
O_3	Rellena los vacíos como se indica en el primer apartado de cada columna: $x \to x + 4$ $x \to 4x$ 6 6 r r b + 2 b + 2 Ahora si a = 2b, ¿en qué se transforma 5 a + 3?	27

1ª SESIÓN	H.C.C.C.	Nº F
C_1	Intenta representar a) 2 . x + 3 . x b) 2 . x + 3 . y c) 2 . x + 7	14
	Representa con rectángulos: a) 5 b) y	3
	Representa mediante rectángulos: 2 . x	4
	La "paga" que da un padre a un niño cada semana es de "p" pesetas, ¿cómo expresarías el dinero que reúne eses niño durante 6 semanas?	28
	Escribe las operaciones siguientes en lenguaje algebraico. 1. El triple de x; 2. El doble de n menos 4 3. El producto de a, b, c. 5 El triple de la suma de a y b. 6. El doble de la diferencia entre h e i. 7. El producto de x por la suma de a y b. 8. El triple de la diferencia entre b y c 9. El cuadrado de la suma de x e y 10. El triple del cuadrado de b	6
	Calcula el perímetro de la figura siguiente:  perímetro =	8
C_2	Calcula el perímetro de la figura siguiente:  perímetro =	8
C_1 y C_2	Escribe la operación siguiente en lenguaje algebraico El precio de m kilogramos de manzanas a y ptas el kg	
	Calcula el área de las siguientes figuras: a)  A= b)  A = c)  A = d)  A = e)  A=	

	Intenta escribir la representación de la siguiente situación. Pepe mide 8 cm más que Juan y Eduardo mide 4 cm más que Juan. Situación (S): Pepe Juan Eduardo Representación (R)	1
	Utilizando una sola letra rellena el siguiente esquema para el ejercicio siguiente: “Pepe mide 8 cm más que Juan y Eduardo mide 4 cm más que Juan”. S.R.	
	Aquí tienes una situación y su representación y tú tienes que escribir la historia, ¿de acuerdo? S: Paquete de leche mantequilla café R: pesetas pesetas-20 ptas + 100 La historia podría ser……………………....	

Tabla 5.7

Es necesario indicar para completar la información de la primera sesión que se presentaban algunas informaciones orientativas respecto a las representaciones, como ejemplos:

- “Fíjate muy bien

Un niño/a tiene en el bolsillo izquierdo boliches y en el derecho tiene tres más que en el izquierdo.

SITUACIÓN: bolsillo izquierdo bolsillo derecho

REPRESENTACIÓN: boliches boliches -3”

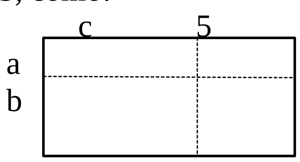
- Convenios de representación con rectángulo de expresiones dadas por: un número solo (equivalente al producto del nº por la unidad), una letra sola (equivalente al producto de la letra por la unidad) y “cada vez que aparece un número solo o una letra sola, la representaremos por un rectángulo”.

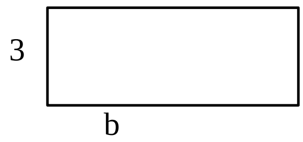
-Representaciones de: a) 2 . 3 y b) z . t

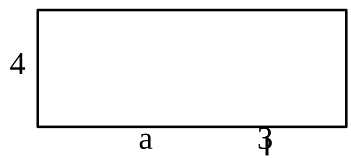
-Representación de 2 x + 5 x:

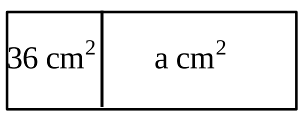
Ítems de la segunda sesión relacionados con las habilidades correspondientes (Tabla 5.8):

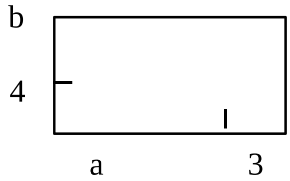
2ª SESIÓN	**H.C.C.O.**	**Nº F**
O_1 Operatividad Básica	Un rectángulo tiene de altura “m”, si la base es doble de al altura: a) ¿cuánto vale el perímetro?, b) b) ¿cuánto vale el área?	36
O_2 Operatividad Básica	Calcula: a) 6 . (b + a) b) (a + 2) . 3 c) (a + 2) . (b + a) a . (b - c)	29
O_3 Sustitución formal	Rellena los vacíos como se indica en el primer apartado de cada columna: x→x+3 x→7x x→5x+3 6 2 3 n r 4 b + 2 b + 2 2 a	

2ª SESIÓN	**H.C.C.C.**	**Nº F**
C_1 Conversión de registros	ESCRIBE LAS OPERACIONES SIGUIENTES EN LENGUAJE ALGEBRAICO 1. El triple de x. 2. El doble de n menos 4. 3. El producto de a, b, c. 5. El triple de la suma de a y b. 6. El doble de la diferencia entre h e i. 7. El número siguiente a g. 8. El número anterior a h. 9. El cuadrado de la suma de x e y. 10.El triple del cuadrado de b.	42
	Representar (a+5) b; (x+3) 2; (y+c)3, mediante rectángulos, y utilizar un cuadro de doble entrada.	17
	El producto (a + b) (c + d) se puede escribir utilizando el área del rectángulo de lados a + b y c + 5, como:  (a + b) (c + d) = a.c + a.5 + + b.c + b.5 Escribe los siguientes productos: a) a . (b + 5) = b) (a + 3) (b + 2)= c) (a + b) (a + b) = d) (a + b + 3) (a + b + 3)=	35

<table>
<tr><th>2ª SESIÓN</th><th>H.C.C.C.</th><th>Nº F</th></tr>
<tr><td>C_2 Contextualizar</td><td>ESCRIBE LA OPERACIÓN SIGUIENTE EN LENGUAJE ALGEBRAICO
4. El precio de m kilogramos de manzanas a y ptas. el kg.</td><td>42</td></tr>
<tr><td></td><td>Traduce a lenguaje algebraico las frases e ideas siguientes:
a) El precio de m discos a 760 pesetas cada uno.
b) Lo que cuesta un lápiz, si 15 cuestan P pesetas.
c) El número que representa 50 unidades menos que el número h.
El número que es la cuarta parte del número y.</td><td>43</td></tr>
<tr><td></td><td>En un supermercado un kilo de peras cuesta b pesetas; un kilo de manzanas cuesta 5 pesetas más que el de peras; un kilo de plátanos, 13 pesetas menos que el de peras, y un kilo de uvas 8 pesetas más que el kilo de plátanos.
Completa esta tabla:
<table>
<tr><th>PESO</th><th>PERAS</th><th>MANZANAS</th><th>PLÁTANOS</th><th>UVAS</th></tr>
<tr><td>1 kg</td><td>b</td><td>b + 5</td><td>b - 13</td><td>(b-13)+8</td></tr>
<tr><td>2 kg</td><td></td><td>2.(b+5) =
= 2b + 10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10 kg</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td><td>31</td></tr>
<tr><td></td><td>Calcula el área de las siguientes figuras:
a)


A =
b)


A =
c)


A =
d)


A =</td><td>44</td></tr>
</table>

2ª SESIÓN	**H.C.C.C.**	Ficha
C_3 Interpretar y comprender significados	Escribe de las siguientes expresiones cuál es la más grande y cuál la más pequeña: más pequeña más grande n + 1, n + 4, n - 3, n, n - 7……………… …………. Razona tu respuesta	30
	¿Es igual $(a + b)^2$ que a (b+a) + b (b+a)? Para responder, representa previamente la última expresión.	36
	Expresar la base y la altura de cualquier rectángulo en el que la base sea el doble de la altura 8 / 4 — 8x4 no podrá ser la solución 10 / 5 — 10x5 no podrá ser la solución Tanto 8 y 4 como 10 y 5 n son las dimensiones de cualquier rectángulo. es solución a 2a (*) (*) (Se observa cómo de esta manera podemos representar cualquier rectángulo que tenga la base doble que la altura).	32
C_1 y C_2	Un rectángulo tiene de altura “m”. Si la base es doble de la altura: a) ¿cuánto vale el perímetro?, b) ¿cuánto vale el área?	36
	Usando el lenguaje algebraico representa estas situaciones. Recuerda que tiene que utilizar letras para representar los datos desconocidos. 1. En la clase de Matemáticas, Juan hizo tres ejercicios más que Maribel y Sandra un tercio de Juan. 2. Pilar tiene 5 pesetas menos que Sergio y Fermín tiene el doble que los otros dos juntos.	15
C_1, C_2 y C_3	Expresar la base y la altura de cualquier rectángulo cuya base exceda en 5 unidades a la altura; la base y la altura difieren en 10 unidades. Representa con rectángulos los resultados.	33

Tabla 5.8

Como se observa, en esta segunda sesión se han presentado nuevos ejercicios de sustitución para ratificar la apreciación de algunas de las cuestiones de la primera sesión.

Aquí la operatividad va asociada en algunos casos a la propiedad distributiva y a su vez está relacionada con el rectángulo del S.R.V.G. y la utilización del cuadro de doble entrada como sistema de representación visual formal. Sigue haciéndose uso de los conceptos de perímetro y área como contexto. En general, la conversión de registros en esta sesión va enriquecida con contextos concretos.

Análisis de datos de las entrevistas de la 1ª Fase

Comenzamos por considerar las entrevistas de los tres primeros alumnos, dos alumnas (codificadas como A e I) y un alumno (Z).

El protocolo de la misma no fue idéntico para los tres alumnos, aunque sí hubo un tanto por ciento elevado de actividades comunes, como se muestra en la tabla número, anexo 16 parte 1ª a, donde se expresa su codificación identificando las fichas y relacionando las generales de los protocolos utilizados con las entrevistas individuales de cada uno de estos tres alumnos seleccionados del Centro número 1.

En ella aparecen las fichas correspondientes a las entrevistas no sólo de expresiones algebraicas sino también de ecuaciones. El número que aparece delante del punto, corresponde a la sesión de cada alumno entrevistado.

El número de fichas por sesiones se muestra en el cuadro siguiente

Sesiones	Nº Fichas I	Nº Fichas A	Nº Fichas Z
1ª	14	12	13
2ª	3	5	13

Mostramos a continuación, algunas de las respuestas de estos tres alumnos en la entrevista individual, ya que en el estudio biográfico se expresará ampliamente las respuestas de uno de estos alumnos, el codificado con Z.

Ante las siguientes situaciones:

1ª) “Pepe mide 8 cm más que Juan y Eduardo mide 4 cm más que Juan

SITUACIÓN: Pepe Juan Eduardo

REPRESENTACIÓN: ....”.

Las respuestas fueron:

	Pepe	Juan	Eduardo
I	x	x+8	x+8+4
Z	Juan + 8	Pepe - 8	Juan + 4
A	x ~~Juan~~ + 8 cm	x	x Juan + 4 cm

2ª) “Utilizando una sola letra rellena el siguiente esquema para el ejercicio siguiente: “Pepe mide 8 cm más que Juan y Eduardo mide 4 cm más que Juan.

SITUACIÓN: …………………………………………………………….

REPRESENTACIÓN:………………………………………………………….

Las respuestas fueron:

	Pepe	Juan	Eduardo
I	X	V = Juan	J= Eduardo
Z	x + 8 Juan = altura	x - 8	x + 4
A	Juan + 8 cm	x	Juan + 4

3ª)"AQUÍ TIENES UNA SITUACIÓN Y SU REPRESENTACIÓN Y TÚ TIENES QUE ESCRIBIR LA HISTORIA. ¿DE ACUERDO?
SITUACIÓN: Paquete de leche mantequilla café
REPRESENTACIÓN: pesetas pesetas-20 pesetas+10
La historia podría ser...”
Las respuestas fueron:

I	Si el paquete de leche cuesta 20 ptas más que el de mantequilla y el café 100 ptas más que la leche.
Z	Un paquete de leche cuesta x ptas, un paquete de mantequilla 20 ptas menos y un paquete de café 100 ptas más que el paquete de leche.
A	La mantequilla vale el paquete de leche menos 20 ptas y el café vale el paquete de lecha más cien ptas.

Estas tres cuestiones llevaban previamente en el folio de trabajo, el ejemplo presentado en el aula.

Otras actividades similares a éstas se plantearon al alumno **Z** en su segunda entrevista clínica, sin aportarle esquema alguno:

"Usando el lenguaje algebraico representa estas situaciones. Recuerda que tienes que utilizar letras para representar los datos desconocidos.
1. "En la clase de Matemáticas, Juan hizo tres ejercicios más que Maribel y Sandra un tercio de Juan"
2. "Pilar tiene 5 pesetas menos que Sergio y Fermín tiene el doble que los otros dos juntos."

Las respuestas han sido:

Para la actividad 1:

Transcribimos literalmente la entrevista:

E (entrevistadora): Ese es parecido al de los boliches, el de los paquetes...
Z: (escribe)

Juan = hizo 3 ejercicios + que Maribel
Sandra = tercio de Juan

E: Tú cuando trabajas con álgebra, ¿mantienes todas esas letras?
Z: (escribe)

Juan= 3 + x
Maribel = x

$$\textbf{Sandra} = \frac{\mathbf{3 + x}}{\mathbf{3}}$$

Z: ¿Así?
E: ¿Ya está? Mira a ver éste....

Para el 2:

E: Puedes empezar por cualquiera, por el que tú quieras.

(el alumno escribe primero sólo los nombres y el signo igual)

Z: (escribe)

Pilar =
Sergio
Fermín =

(Sigue leyendo en voz baja y continúa escribiendo)

Pilar = x - 5 ptas
Sergio = x ptas
Fermín = 2. (x-5)

E: x - 5, ¿por qué?, ¿el doble de Pilar?
Z: Porque aquí representa entre Sergio y Pilar…
E: ¿Cuánto?
Z: Porque si Pilar... a ver...   Pilar tiene 5 ptas menos que Sergio
E: ¿Qué significa eso de los otros dos juntos?
Z: Entre Sergio y Pilar juntos.
E: ¿Y cuánto tienen entre Sergio y Pilar? , ¿x - 5?
Z: 2 x - 5

Pilar = x - 5 ptas
2x-5
Sergio = x ptas

E: Entonces...

Pilar = x - 5 ptas
2x-5
Sergio = x ptas

(el alumno escribe lo que corresponde a Fermín)

Fermín = 2 . (2x - 5),

y contesta,

Z: 2 . (2 x - 5)
E: Perfecto.

Asimismo la primera de ellas "En la clase de Matemáticas, Juan hizo tres ejercicios más que Maribel y Sandra un tercio de Juan" se le planteó también a **A** en su entrevista y la respuesta fue:

Juan = x + 3 ----------ejercicios que hicieron
Maribel = x -----------   "   "   "

Sandra = $\frac{x+3}{3}$ **------ ” ” ”**

Otros dos ejercicios que se plantearon a **A** en la entrevista individual, sin previo ejemeplo, son:

“Usando el lenguaje algebraico representa estas situaciones.

“Juan tiene ocho caramelos más que Jaime”,

Su respuesta fue:

Juan = x + 8 caramelos

Jaime = x caramelos

Y para el segundo “Tres hermanos tienen unas cantidades de dinero. María tiene 50 pesetas más que Miguel y Pablo tiene el doble que los otros dos juntos”, la respuesta ha sido:

Dinero que tiene María	**= 50 + x**	**y**
” ” ” Miguel	**= x**	**y - 50**
” ” ” Pablo	**= 2 . (x + 50 + x)**	**2.(y + (y - 50)**

Como se puede observar A y Z no tienen dificultad en la conversión de registros (C_1) y en contextualizar (C_2), incluso A plantea de dos maneras diferentes sus respuestas; este segundo planteamiento lo intentó Z con el esquema en el ejercicio de la medida de las alturas de Pepe, Juan y Eduardo y se equivocó.

En el anexo 17 parte 1ª se muestran las transcripciones correspondientes a las entrevistas a los alumnos en esta primera fase.

<u>Entrevistas de la 2ª Fase (Septiembre 1993</u>

Con relación a las entrevistas realizadas al comenzar el curso siguiente (Septiembre), del mismo año natural, 1993, hay que indicar que se realizó la aplicación de nuevo de las 4 sesiones para los seis alumnos restantes, dos para expresiones algebraicas y dos para ecuaciones. A estas últimas nos referiremos en el capítulo 7.

El Diseño del protocolo de las entrevistas (anexo 16, parte 2ª) fue nuevo y único para todos, aunque según el desarrollo de la entrevista se modificase la trayectoria prevista e incluso algunos ítems no fueran cuestionados y otros, añadidos.

Las características principales de los propósitos de cada una de las sesiones fueron: La primera se dedicó a la observación del uso de las letras en diferentes contextos, de la aceptación o no de respuestas abiertas y a la capacidad de representación en: a) contextos aritmético - algebraicos; b) geométricos y c) ambos contextos relacionados.

En la segunda, se trabajó la operatividad básica en contextos aditivos y multiplicativos, en particular, la propiedad distributiva por la derecha y por la izquierda respecto de la suma y de la diferencia. También la sustitución formal numérica y alfanumérica. Se utilizó el S.R.V.G. con cuadro de doble entrada de visualización simplificada.

La referencia a las dos últimas sesiones se hará en el capítulo 7.

Presentamos las fichas de los protocolos con sus actividades en el anexo 16, parte 2ª relacionadas con las habilidades en el tratamiento de expresiones algebraicas

Este **protocolo** comprende, en sus primera y segunda sesiones, actividades extraídas de los cuadernos que se trabajaron en clase así como de los ítems que integraron los cuestionarios anterior (Pretest), y posterior (Postest), a la instrucción en el curso 92-93.

El propósito de estas entrevistas fue detectar habilidades cognitivas en el tratamiento de las expresiones algebraicas, tanto, de carácter conceptual al hacer la conversión de registros no contextualizados y especialmente contextualizados en áreas y perímetros y en situaciones familiares a los alumnos, como de carácter operacional en contextos aditivos, multiplicativos o ambos a la vez, con singular atención al tratamiento de los paréntesis y a la sustitución formal.

La organización de los ítems en las actividades de las fichas de la **primera y segunda sesión** se muestra en las tablas 5.9 y 5.10.

Ficha (número de actividades)	**Actividad (número de ítems)**	**Número ítem**
1 (5)	1 (10)	1, 2, 3, 4,5, 6, 7, 8, 9, 10
	2 (1)	11
	3 (1)	12
	4 (1)	13
	5 (14)	14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27
2 (1)	1 (2)	28, 29
3 (2)	1 (1)	30
	2 (3)	31, 32, 33
4 (2)	1 (2)	34, 35
	2 (3)	36, 37, 38
5 (3)	1 (4)	39, 40, 41, 42
	2 (4)	43, 44, 45, 46
	3 (6)	47, 48, 49 50, 51, 52
6 (2)	1 (8)	53,54,55,56,57,58,59,60
	2 (5)	61,62,63,64,65
7 (2)	1 (6)	66,67,68,69,70,71
	2 (5)	72,73,74,75,76
8 (4)	1 (4)	77,78,79,80
	2 (3)	81,82,83
	3 (2)	84,85
	4 (2)	86,87

Tabla 5.9

Ficha (número de actividades)	**Actividad (número de ítems)**	**Número ítem**
1 (3)	1 (5)	1, 2, 3, 4,5

Ficha (número de actividades)	Actividad (número de ítems)	Número ítem
	2 (5) 3 (1)	6,7,8,9,10 11
2 (1)	1 (3)	12, 13, 14
3 (2)	1 (1) 2 (3)	15 16, 17, 18
4 (1)	1 (6)	19, 20, 21, 22, 23, 24
5 (2)	1 (4) 2 (3)	25, 26, 27, 28 29, 30. 31
6 (1)	1 (3)	32, 33,34
7 (2)	1 (4) 2 (4)	35, 36,37,38 39, 40,41,42
8 (3)	1 (8) 2 (9) 3 (7)1	43,44,45,46,47,48,49,50 51,52,53,54,55,56,57,58,59 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66
9 (4)	1 (2) 2 (3) 3 (10) 4 (12)	67, 68 69, 70, 71 72,73,74,75,76,77,78,79,80,81 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91 ,92, 93

Tabla 5.10

Descripción de las fichas del protocolo

Las características principales y los propósitos de cada una de las sesiones se describen a continuación.

La ficha **1 (ítems 1-27)** de la **sesión primera** es un conjunto de cinco actividades de conversión de lenguajes las cuatro primeras y la quinta de operatividad básica donde diez de los catorce ítems que la forman, contienen paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos.

En la primera de ellas, tienen los alumnos que hacer una conversión desde el lenguaje habitual a la representación formal (R.F.) y de los 10 ítems en 8 de ellos se les da una variable concreta a utilizar.

Las actividades 2, 3 y 4 se refieren también a hacer una conversión desde el lenguaje habitual a la R.F. pero ya contextualizado en contextos familiares a los niños: paga de un padre, precio de casetes y gastos de compra de cromos.

En la actividad 5 varía el número de términos, existen ítems de aceptación de respuestas abiertas y otros donde el quitar paréntesis va a dar lugar a términos semejantes que han de reducir. La colocación de los paréntesis varía de unos ítems a otros.

En la ficha **2 (ítems 28-29)** se muestran dos convenios de representación con rectángulos en el S.R.V.G. así como ejemplos y aplicación de los mismos.

La ficha **3 (ítems 30-33)** incluye actividades de aplicación de los convenios de la ficha anterior con especial atención a expresiones de la forma "a . b" y a + b" siendo uno de los elementos un número. Además hay ejemplos de representación de binomios en el S.R.V.G. donde las expresiones a representar contienen factores comunes.

La ficha **4 (ítems 34-38)** está formada por dos actividades, una primera de aplicación de las fichas anteriores con representación de binomios con factores comunes o no. En la segunda, también de aplicación, se les da un ejemplo en el que pueden fijar su atención para desarrollar los ejercicios que se solicitan.

La ficha **5 (ítems 39-52)** presenta dos actividades donde se dan expresiones numéricas o alfanuméricas, monomios y binomios, y se les pide se le sume un número concreto en la actividad 1 y se multipliquen por un número, también concreto, en la actividad 2.

La última actividad que forma la ficha se trata de un cálculo de operatividad básica en contexto aditivo - multiplicativo, sin paréntesis en el planteamiento.

La ficha **6 (ítems 53-65)** incluye dos actividades en la primera de las cuales se presentan 8 polígonos variados para calcularles sus perímetros. Los datos son numéricos, alfanuméricos, y las dimensiones subdivididas o no, todas explícitas o no. La segunda actividad vuelve a ser de operatividad básica sin paréntesis en su planteamiento.

La ficha **7 (ítems 66-76)** incluye dos actividades en la primera de las cuales se presentan 6 rectángulos para calcularles sus áreas. Los datos son numéricos, alfanuméricos, y las dimensiones subdivididas o no incluso con trazado de segmento que origina subrectángulos. La segunda actividad vuelve a ser de operatividad básica pero con paréntesis.

La ficha **8 (ítems 77-87)** es de integración e incluye cuatro actividades. La primera de conversión de registros desde el lenguaje habitual a la R.F. en contextos de área y perímetro y familiares a los niños. La segunda, de operatividad básica sin y con paréntesis. La tercera, de cálculo de perímetros con datos exclusivamente numéricos (a) y alfanuméricos y con dimensiones subdivididas (b). La cuarta y última, cálculo de áreas, con dimensiones subdivididas, dadas con datos alfanuméricos.

La ficha **1 (ítems 1-11)** de la **sesión segunda** está formada por tres actividades, las dos primeras son de operatividad básica en contextos aditivos - multiplicativos con paréntesis, y la tercera, para comparar dos expresiones en las que los alumnos han de hacer, previamente, operaciones básicas.

En la ficha **2 (ítems 12-14)** se da una representación de un producto mediante el área de un rectángulo y se plantea el esquema de la visualización simplificada para dicho ejemplo y luego en la actividad 1 se pide una aplicación de lo anterior, dando tres expresiones en la representación formal.

El planteamiento de la ficha **3 (ítems 15-18)** es el mismo de la anterior pero aquí el producto que se presenta es de dos binomios; el resto de la ficha sigue el mismo tratamiento que el de la anterior.

En la ficha **4 (ítems 19-24)** se trata de que el alumno sin ejemplo sea capaz de representar en el S.R.V.G. y en la representación visual/formal de la visualización simplificada, seis expresiones algebraicas que se le dan y que incluyen la propiedad distributiva por la izquierda, por la derecha y la doble distributiva.

La ficha **5 (ítems 25-31)** contiene una actividad (actividad 1) de operatividad básica con datos numéricos y alfanuméricos con paréntesis; la segunda actividad es de cálculo de áreas de tres rectángulos: uno con dimensiones dadas en datos numéricos y sin subdividir y otras dos con las dimensiones dadas en datos alfanuméricos y subdivididas (en uno de ellos sólo subdivida la base y en el otro, las dos dimensiones del rectángulo).

La ficha **6 (ítems 32-34)** está formada por una actividad para calcular tres productos propuestos en la representación formal y que tiene la propiedad distributiva por la izquierda, por la derecha y la doble distributiva. Los alumnos puede elegir el sistema de representación que quieran y actuar en consecuencia.

La ficha **7 (ítems 35-42)** con dos actividades de sustitución formal planteadas con dos tipo de enunciados:

a) Si……, calcula …..
b) ¿En qué se transforma ….., si …..?

La ficha **8 (ítems 43-66)** la forman tres tablas, una para cada una de las actividades.

En la primera actividad sólo se hace uso de una variable que alterna con datos numéricos en el planteamiento de las expresiones para hallar su valor.

En la segunda se usan dos variables y además la potencia “dos” y en la tercera se contextualiza en precio de frutas. En las tres actividades han de operar con paréntesis.

Por último en la ficha **9 (ítems 67-93)** hay cuatro actividades: la primera pretende que el alumno represente y calcule dos productos con paréntesis; la segunda, requiere calcular tres productos pero no se pide representación explícita; en las tercera y cuarta, se trata de hacer sustitución formal planteada de distinta forma: a) Rellenar unos vacíos según modelo en contexto aditivo, multiplicativo y “mixto” y b) completar una tabla, en la última actividad (actividad 9). Tanto en la actividad 3 como en la 4 aparece la sustitución formal de variables por nuevas expresiones algebraicas.

<u>Aplicación de las entrevistas:</u>

Esta nueva aplicación de la entrevista se hizo con los seis alumnos que se quedaba pendiente del curso anterior, dos de cada uno de los estratos. Se hicieron 24 entrevistas en total, 4 por cada alumno (incluyendo en el total dos de expresiones algebraicas y dos para ecuaciones), con una duración que varía entre 20 y 30 minutos, se registraron en vídeo y se recopilaron además todas las hojas utilizadas por el alumno y el entrevistador.

En Septiembre las actividades fueron suministradas a las tres alumnas (codificadas con A_1, A_2 y A_4) y tres alumnos (codificados con A_3, A_5 y A_6), en dos sesiones, que son las 1ª y 2ª, ya que las tercera y cuarta se referían a ecuaciones.

En el anexo 17 parte 2ª se muestran algunas de las transcripciones correspondientes a las entrevistas a los alumnos en esta segunda fase.

Análisis de datos de las entrevistas de la 2ª Fase

Analizamos los datos que provienen de la información recogida en las transcripciones de las entrevistas individuales. En el anexo 17 parte 2ª se muestran las transcripciones correspondientes a las entrevistas a los alumnos en esta segunda fase.

En la **primera sesión** de Septiembre de 1993, la alumna codificada con $\mathbf{A_1}$ en la ficha 1 (ítems 1-27), lee el comienzo del enunciado de la actividad 1 y el apartado 1 que contesta correctamente. Lo mismo ocurre hasta llegar al 8 donde no utiliza la letra que se le ha dado como variable (f) sino su correspondiente mayúscula. Al preguntarle la entrevistadora si es lo mismo, contesta "no… yo que sé…" y la corrige. En general utiliza el "." para expresar la multiplicación aunque no se precise. En la actividad 2 tiene que pensar un poco, lo escribe correcto y cierra la igualdad "6.p = x".

En la actividad 3 no se aclara de entrada y escribe "x = 750" y se le sugiere vuelva a leer el enunciado y sigue confusa expresando "x cintas son 750", se le contextualiza más la situación y se da cuenta, rectifica y escribe "750.x" (vuelve a usar ".").

En la actividad 4 no duda y vuelve a cerrar la expresión " y . 50 = x". Los resultados en la actividad 5 han sido:

nº Í	Pregunta	Respuesta	nº Í	Pregunta	Respuesta
14	2 a + 5 a	7 a	21	3 a - (b + a)	= 2 a - b
15	2 a + 5b	2 a + 5b	22	a + 4 + a - 4	2 a
16	(a + b) + a	2 a + b	23	3 a - b + a	
17	2 a + 5 b + a	3 a + 5b	24	(a + b) + (a - b)	(a + b) + a - b
18	(a - b) + b	a	25	6 (a + b) - 3 a	
19	(3 - a) b + a b	3b-ab+ab=3b	26	3 (2 + a) - 3	3 + 3 a
20	2 (a + b)		27	(3 + x) y	

En el ítem 14 no ha tenido problema; en el ítem 15 se equivoca y da como resultado de "2 a+5 b = 7 a b", se le hace caer en la cuenta de que no tiene la misma parte literal y lo entiende en seguida, pero al irlo a expresar lo hace como multiplicación 2 a 5 b y después corrige y escribe "2 a+5 b". En el ítem 16 no duda en quitar el paréntesis y expresa "2 a + b" como resultado, que es correcto.

En el ítem 17 también trabaja bien y en e) "(a - b) + b" dice sería "a - 2b"; al preguntarle por qué, dice "porque aquí sumas "+b" y se van sumando los…”. La entrevistadora remite al ítem 3 y dice a la alumna quite paréntesis quedándole desde “(a + b) + a”, “a + b + a” y ahora en este ítem 5, “a - b+ b”, y entonces se da cuenta que había leído mal “a-2b” y ahora dice sería “2 por b”; se le sigue preguntando por qué “2b”. La alumna dice: “porque se suman”. Se sigue insistiendo en por qué se suman y responde la alumna “porque tienen… el signo más…”. Se le propone cuánto es: “-3+3”, “-8 + 8”, “-20 + 20”, “-9+9” y contesta la alumna: “cero”, y la entrevistadora le pregunta: ¿- b + b? y la alumna vuelve a contestar: “cero” y ahora pone “a + 2b”, y posteriormente tacha “+2b”.

En el ítem 19 que aparece la propiedad distributiva la resuelve bien y reduce términos correctamente.

Los ítems 20, 23, 25, 27 no se abordaron.

En el ítem 24 “(a + b) + (a - b)” comenzó expresando “ab + a” y el “ab” como resultado de (a + b) pero al decirle por qué no quita paréntesis primero, la alumna tacha lo que escribió y escribe “2 a + b + a + b + a” (parece confundir con la propiedad distributiva). Se le pregunta como se quita el paréntesis con el signo “+” y dice que cambiándole de signo y dice que da lo mismo que sea el signo “+” o “-“ delante del paréntesis.

La entrevistadora retrocede hacia el ítem 21 y de “3a - (b + a)” la alumna escribe “3 a - b- a” y lo iguala a “b-2 a” y afirma que “3 a - a = - 2 a”, porque está restando. Se sigue dialogando hasta que saca de “3 a - a”, el resultado “2 a”, quedándole, en resumen, como resultado “2 a - b”.

Se le pide haga el ítem 26 y lo resuelve bien, pero aquí no tiene que operar con coeficientes negativos de la incógnita.

En la **ficha 2 (ítems 28-29),** la primera parte es de recordatorio de convenios y luego una aplicación, que la hace correcta.

La segunda parte de representar un producto con un rectángulo, también lo comprende.

En la **ficha 3 (ítems 30-33),** representa expresiones que se dan, de productos integrando un término, pero cuando se trata de una suma, dibuja los dos rectángulos pero las unidades que utiliza en uno y otro rectángulo correspondientes a términos de una misma expresión algebraica dice, se pueden representar distinto. Lo que sí reconoce es la diferencia de representación por ser un producto (4.b) y una suma (4+b).

La última parte de la ficha 3 son actividades de representación de binomios para observar donde existen factores comunes.

En la **ficha 4 (ítems 34-38)**, la entrevistadora pasa directamente al apartado b) de la actividad 1 y comprueba en el diálogo que la alumna tiene claro que una variable puede tomar cualquier valor.

En la actividad 2 (ítems 36-38), sólo se aborda y sin problema el ítem 31con dos representaciones equivalentes.

En la **ficha 5 (ítems 39-52)**, el contexto aditivo no le plantea problema, pero sí su precipitación que le lleva a identificar “n+9” con “9n”, pero rectifica rápido. La entrevistadora aclara que tenían que haber vuelto a copiar los datos del problema aparte, porque si no, lo que se refleja al final, en la ficha, es erróneo en general. Esta alumna, en general, observa poco y se precipita mucho.

Vuelve en la actividad 2 (ítem 43-46) a no copiar los datos sino trabajar donde se los dan y va añadiendo “.4”. En el ítem 44 no pone paréntesis y al preguntar qué es lo que ha de multiplicar por 4, contesta “que la expresión” y rectifica poniendo paréntesis al binomio y desarrollando la propiedad distributiva. Al llegar al cuarto ítem ya no se confunde y pone el paréntesis.

Al pasar a la actividad 3 (ítem 47-52) la entrevistadora va directamente al apartado d); la entrevistadora primero copia una expresión igual a la que tiene y se le sugiere la propiedad asociativa y se vuelve a equivocar y reducir mal los términos semejantes: “6a - 3.a = 6 a - 3 a = - 3 a” Al preguntarle por qué da los resultados que aporta, contesta “porque tiene el signo menos delante”, entonces se le plantea que “6-3” sería “-3” y “8-4” sería “-4” y así sucesivamente y la alumna corrige y da el resultado correcto.

Se pasa al ítem 52 y lo contesta correcto. No existe en éste la situación anterior ya que no hay términos con coeficientes negativos.

En el cálculo de perímetros de la **ficha 6 (ítems 53-65)**, se equivoca y sustituye “6+6” por “6^2” y “n + n” por “n^2” y además multiplica, presentando como resultado “$6^2 + n^2$” y sigue equivocándose poniendo “12 . n^2”. Como se le ha preguntado qué es el perímetro dice “lo de fuera” y la entrevistadora puntualiza: “lo que mide el contorno”, se le recuerda esta idea y rectifica, dando: “6+6+n+n”. En cualquier caso la entrevistadora insiste en el error “n + n” como n^2 y la alumna rectifica, expresando “n + n = 2n”.

Se pasa a calcular los perímetros de los apartados b) e), f) g) y h). y obtiene solución correcta y no le plantea problema el cálculo, estén como estén representadas las dimensiones, tanto numérica como alfanuméricamente. Sin embargo en el apartado h, ítem 60, al comienzo iba a sumar la longitud del segmento dibujado dentro del rectángulo.

En la actividad 2 (ítems 61-65), operatividad básica, sólo son abordados los ítems 61 y 62, no tiene problema.

En la **ficha 7 (ítems 66-76)**, cálculo de áreas, hasta llegar al apartado del caso en que la longitud de la base está subdividida y un dato es numérico y otro literal, no comete errores. Ahora sustituye “5+a” por “5 a” pero indicándole que se fije, que recuerde cómo se calcula el área del rectángulo, se da cuenta y añade el paréntesis que le faltaba.

En el apartado f) siguiente, indica correctamente el producto de los dos binomios, que expresan las dimensiones base y altura subdivididas.

La actividad 2 no se abordó.

En la **ficha 8 (ítems 77-87)**, en la actividad 1 en su ítem 77 no tiene dificultad. En el ítem 78, como siempre por precipitada, pone por área “4.k” y no “k.k = k^2” y el perímetro sí lo hace bien.

En el apartado c, ítem 79, perfectamente comprendido, hay que sugerirle explicite el significado de la variable utilizada. El apartado d, ítem 80, no se abordó.

La actividad 2 (ítem 81-83) no se realiza pero sí la actividad 3 (ítem 84-85) de cálculo de perímetros. En esta actividad 3 en el apartado a, ítem 84, se propone un cálculo de perímetro dando las dimensiones con datos unitarios y numéricos y lo resuelve oralmente. En el apartado b, ítem 85, primero plantea el cálculo del área en lugar del perímetro pero, súbitamente, se da cuenta y lo calcula hallando el doble de cada dimensión y sumando los resultados.

Para el cálculo del área del apartado b, ítem 87 de la actividad 4, único propuesto, ya pone directamente el paréntesis correspondiente y lo resuelve bien.

En el trabajo de la alumna **A$_2$**, en la **ficha 1,** en la actividad 1 se detecta su seguridad en la conversión de registros de representación desde el lenguaje habitual al sistema de representación formal algebraico. La alumna sustituye con A la a, con F la f, pero no así las “bes” o las “ces”. Al principio no ponía el signo igual entre expresiones equivalentes, pero se le advirtió y lo puso posteriormente. Admite y reconoce perfectamente la propiedad conmutativa así como el convenio de suprimir el “.” cuando se trata de producto de números y letras dentro de un término. Para “la tercera parte del número f”, da tres expresiones diferentes. Siempre pone el coeficiente antes de su variable correspondiente.

En la actividad 2 expresa primero el producto con un punto “.”, como signo de la operación, luego sin el punto y, posteriormente, con el coeficiente previo a la variable y la unidad correspondiente.

En la actividad 3, contesta también de inmediato, al igual que en la actividad 4 y pone asimismo las expresiones primero con punto “.”, y luego sin él y poniendo el coeficiente previo.

Se le pregunta si le resultan fáciles y dice que sí y además los esperaba más difíciles.

En la actividad 5 los dos primeros ítems los hace rápido y bien. En el ítem 16 dice que no se puede quitar paréntesis porque no se puede sumar (a+b) que está dentro del paréntesis. Se deja pendiente.

En el ítem 17, dice que si se asocian los términos, el resultado será distinto. En el ítem 18 también se bloquea por el paréntesis y aunque se le ponen situaciones de estructura idéntica pero con datos numéricos, sigue bloqueada pero se sigue haciéndola reflexionar y se da cuenta y luego anula términos opuestos.

En el ítem 19, detecta el producto de la propiedad distributiva aunque no reconoce al comienzo esta propiedad. Repite la expresión dada añadiendo el “.” para la multiplicación del paréntesis y luego la desarrolla bien y reduce términos semejantes.

En el ítem 21, no tiene dificultad y en el ítem 22 se equivoca al principio y dice que “a + a” es a^2, pero rectifica.

El ítem 23 no se hizo. El ítem 24 “(a +b) + (a - b)” dice que le suena a “igualdad de notable”, pero se da cuenta que esto es contexto aditivo y la “igualdad notable”, multiplicativo. Lo resuelve bien después de quitar paréntesis. En el ítem 25 tampoco tiene dificultad y lo resuelve con la misma estrategia que el anterior, quita paréntesis, elimina opuestos y reduce términos semejantes. En el ítem 26 reconoce la propiedad distributiva la desarrolla y reduce términos semejantes. Los ítems 26 y 27 no son abordados.

En la **ficha 2,** cuando se le pregunta si “x” puede representar longitudes distintas en “x = x.1 = 1.x”, en principio dice sí. Cuando hace sustituciones por valores numéricos se da cuenta que deben ser iguales.

En la **ficha 3,** no duda y en el binomio con factor común, descompone en factores el término donde está implícito el factor común.

En la **ficha 4,** en las expresiones dadas, primero transforma los números en producto de factores de ellos por la unidad y luego las representa correctamente, procurando dibujar las unidades aproximadamente iguales. En principio se equivocó y evaluó una variable dándole el valor 1, pero reconoció su error.

En la **ficha 5,** en la actividad 1 plantea las respuestas bien, denotando paréntesis adecuadamente y operando también correctamente a excepción de la operación “(3n) + 4” ítem 41, donde no quitó paréntesis en principio, luego pretendió hacer la propiedad distributiva, luego sumar “4+3” y luego a su resultado, sumar “n”, pero se dio cuenta del error.

En la actividad 2, contexto multiplicativo, sus resultados - incluyendo la denotación del paréntesis - son adecuados, así como la operatividad básica posterior.

En la actividad 3 sólo se abordaron los apartados c, ítem 49 y f, ítem 52) que los realizó correctamente; primero copió las mismas expresiones dadas pero prescindiendo del punto “.” que indicaba producto.

El cálculo de perímetro de la **ficha 6** es el correcto.

Como código personal se puede considerar el explicitar en las figuras las dimensiones que están implícitas y que están dadas como consecuencia de las explicitadas.

No tiene dudas y resuelve perfectamente todos los casos aunque en uno de ellos primero tiene un error y en lugar de sumar “6+6”, los multiplica.

La actividad 2 no se abordó.

En la **ficha 7** hay cálculo de áreas, que realizó también muy bien, utilizando los paréntesis cuando eran necesarios y también cuando no lo eran, pero expresaban subáreas.

Presenta dos formas de calcular las áreas con dimensiones subdivididas, planteando el producto de la base completo por la altura completa d, ítem 69, y f, ítem 71, o subdividiendo el área total en subáreas que se calculan previamente y luego, se suman.

En algunos casos cuando se trata de la situación de doble distributiva, que en el apartado f) hubo que sugerírsela, pone todos los arcos posibles entre los factores de los productos que hay que realizar y usa el coeficiente uno. Esta última situación se da también en el único ítem 75 (apartado d) que se abordó en la actividad 2.

La **ficha 8** tampoco le plantea dificultad en las actividades abordadas (1 a, ítem 77, 1b, ítem 78, 1c, ítem 79, 4, ítem 86 y 87). En la actividad 4 vuelven a aparecer las dos forman del cálculo de áreas de la ficha anterior.

Por su parte, el alumno codificado con **A_3** en la **ficha 1** actividad 1, el alumno comienza resolviendo correctamente el apartado 1, ítem 1, pero al pasar a los apartados 2, ítem 2, (cuadrado de la suma de x e y) y al 3, ítem 3, (el cuadrado de z), ya lo hace mal y confunde cuadrado con doble (apartado 1) y con potencia cuarta (apartado 3).

En un ejemplo tan sencillo como es el del apartado 4, ítem 4, (el producto de a, b, c) dice no se sabe si es “suma”, “resta”, “multiplicación” o “división” y al volverlo a leer se le insiste en qué significa “el producto” y contesta “la suma”.

En el apartado 5, ítem 5, lee pesetas por papas (x kilogramos de pesetas). Este ítem, después de un amplio diálogo - contextualizándolo incluso en el ambiente familiar y espacial del alumno-, le cuesta mucho y repite varias veces que tendría que pagar “75 pesetas el… kilo”, “x por cada kilo que compre”, “75 pesetas por cada kilo”, pero es incapaz de sintetizar la expresión algebraica y termina escribiendo “75 ptas. x kg”.

En el apartado 6, ítem 6, cambia la letra “h” por “H” y hay que volver a dialogar para que explique la expresión que da como correspondiente al enunciado. Comienza escribiendo “H - i = x.2” y lo comprende porque dice “H - i = x”, pero usa mal el signo “igual”.

Sí hace bien y rápido el apartado 7, ítem 7.

En el apartado 8, ítem 8, cambia “f” por “F” hasta que se le interroga y llega a afirmar que “la tercera parte del número f, es f al cubo”. Se dialoga en general sobre el significado de la tercera parte y dice que es dividir por 3 y a continuación escribe “f.(3)” y luego $f^{(3)}$ y la entrevistadora le preguntas si es “f al cubo” y contesta afirmativamente. Se le recuerda lo que él mismo ha expresado acerca del significado de la tercera parte, y…por fin escribe “f:3”.

En el apartado 9, ítem 9, expresar del triplo de un número cualquiera, dice que es “3 veces a” y escribe “a . a . a “ y se le dice si eso es “3 veces a” o es “a por a y por a” y el alumno dice “entonces tiene que ser “a.3”.

La suma de tres números cualesquiera del apartado 1, ítem 10, sí lo contesta bien y sin dudar: “a + z + x”.

En la actividad 2, ítem 11, sí expresa rápido la solución. No cierra la expresión igualando a “algo”, ni tampoco en la actividades 3 (ítem 12, y 4

(ítem 13)

En la actividad 5, ítem 14-27, no se abordaron todos los ítems. El ítem 14 lo hace correcto. En el segundo, ítem 15, “2 a+5 b”, ya cometió el error habitual de sumar los coeficientes y añadir las letras: “7ab”. Se le pregunta acerca del uso del 7 y dice “porque se suman los números” y se le advierte si siempre se puede sumar los números y dice que no, sino “cuando… cuando se suman los números lo números así y sean iguales”… Rectifica y deja “2 a + 5 b”.

En el apartado 3, ítem 16, opera directamente y no quita explícitamente el paréntesis, pero lo resuelve bien y sabe que si no se pone signo delante o detrás del paréntesis está implícito que es el “por” de multiplicar.

En el apartado 4, ítem 17, “2 a + 5 b + a” pone como resultado “2 a . (2) + 5 b”, y rectifica en el diálogo donde se ha contextualizado con frutas y bolígrafos, pero sigue el diálogo y sigue el error diciendo a la pregunta ¿cuánto es “2 a + a?, “Mm… 2….2 a por 2 a al cubo…”. La entrevistadora le dice escriba lo que cree es el resultado y tacha “2 a . (2) + 5b” que tenía desde el principio y escribe “2 (a) . 2 + 5 b”.

Pasando al apartado 5, ítem 18, “(a - b) + b”, escribe como resultado “a - b” y el diálogo sigue:

E: ¿Y ése sería el resultado?

A: No, ¿a + b al cubo?… ¿o no?…

E: ¿De dónde sacas tú “b al cubo”?… ¡Eh!.

A: ¿b al cubo?…

En el apartado 6 (ítem 19) no desarrolla bien la propiedad distributiva, no la reconoce, el factor fuera del paréntesis por el segundo término del binomio.

En el apartado 7, ítem 20, quita paréntesis mal y cambia el orden de los factores.

La entrevistadora va directamente al ítem 24 y el alumno afirma en el diálogo que cuando tiene el signo más delante del paréntesis, hay que “pasar el símbolo al menos” y cuando está el menos, “+”, “es que es más por más, menos”. Como solución a “(a +b) + (a - b)”, da “a + b”.

En la **ficha 2,** que se recuerdan los convenios de representación, dice comprenderlos y al pasar a realizar la actividad 1, representa “2” como “2x”, luego como “2.2” y, al final, como “2.1”.

Al realizar el apartado b) de esta actividad, ya representa bien “x”.

Sí tiene claro que las unidades tienen que ser iguales en la misma representación.

En la **ficha 3** representa bien los monomios constituidos por una letra y un número, así como el binomio “4+b”.

En la última parte de la ficha, de observación, hay relación con la representación de “z . t” de la ficha 2.

En la **ficha 4** sólo se aborda el apartado b) de la actividad 1 y se bloquea, no lo hace siendo tan sencillo y de la misma estructura que una de las aparecidas en la ficha anterior.

En la **ficha 5** los resultados de los ejercicios que llevan una denotación de paréntesis tanto en contextos aditivos (actividad 1) como multiplicativos (actividad 2), es incorrecta. En ninguno denota paréntesis aunque sean estrictamente necesarios. En los contextos aditivos el error es el común de sumar los coeficientes de todos los términos y añadir la incógnita: “n + 5 + 4 = 9 n”; “3 b + 4 = 7 n”; “2 n + 4 + 4 = 10 n”.

En los contextos multiplicativos no aparecen los paréntesis:

Aparece	Debe aparecer
4 . n + 5 = 20 n	4 (n + 5) = 4 n + 20
2 n + 4 . 4	(2 n + 4) 4

Tanto en un tipo de contexto como en el otro, no hay dificultad, si los datos son numéricos.

La **ficha 5** no se aborda.

En la **ficha 6**, cálculo de perímetros, no muestra posibilidades de resolución y se pasa a la ficha 7 de cálculo de áreas.

En esta **ficha 7** de cálculo de áreas se defiende mejor, en especial donde los datos son numéricos, aunque estén las dimensiones subdivididas, sin embargo al aparecer datos alfanuméricos ya comete errores al no denotar los paréntesis adecuados, ni siquiera con la ayuda de la entrevistadora, que propone rayar los rectángulos que forman parte del área total, capta la expresión adecuada. A veces tiene distinto tratamiento en la expresión formal los datos que representan la base y los que representan la altura, unos los transforma en suma y otros, en producto.

La actividad 2 de operatividad básica, no se abordó.

En la **ficha 8** aparece una conversión de registros de representación, desde el lenguaje habitual al S.R.F. algebraico y los apartados que se le proponen los hace bien, en la actividad 1. La actividad 2, no la abordó.

En la actividad 3, hace oral y correctamente el cálculo del perímetro en el apartado b, ítem 85, va sumando cada uno de los elementos que aparecen explícitos y luego añade los que no están.

La alumna **A_4** es más aventajada en la clase y la **ficha 1** la realiza perfectamente y rápido; en la actividad 1; utiliza el “.” después del paréntesis.

En las actividades 2, 3 y 4, las soluciones son correctas y no añade el signo igual al final.

En la actividad 5 se despista en el ítem 15 y pone “7 a b” al preguntarle ¿por qué “7 a b”?, rectifica inmediatamente y deja la expresión sin alterar.

Los ítems 16, 17 y 18 los resuelve directamente.

En el ítem 19 al comienzo comete uno de los errores habituales al trabajar la propiedad distributiva, multiplicar el factor fuera del paréntesis por sólo el término que está próximo a él, pero en el diálogo se le pregunta de qué propiedad se trata y contesta “sería la distributiva” y luego después, anula los términos opuestos.

En el ítem 20 sí desarrolla la propiedad distributiva.

En el ítem 21 se le pregunta qué hace cuando tiene un signo “menos” delante del paréntesis, cómo se quita el paréntesis y contesta “cambiando el signo y quitando el paréntesis”.

La entrevistadora explica la diferencia entre los signos “+” y “-” en la suma algebraica y en el producto, como es el caso del paréntesis. En el ítem 22 “a + 4 + a . 4”, primero da como resultado “5 a + 3 a”, quizás por asociar por parejas los 4 términos, los dos primeros y los dos últimos, pero luego, rectifica rapidísimo.

El tratamiento a los paréntesis en todos los ítems de esta actividad 5, cuando se trata de contextos aditivos, no es sistemático, sí cuando se trata de contextos multiplicativos.

En la **ficha 2,** la alumna lee y observa lo que corresponde a ello y resuelve asimismo los ítems, siguiendo el mismo proceso que el ejemplo presentado, especificando en cada caso, lo que es la base y lo que es la altura.

En la **ficha 3,** sigue con seguridad haciendo las representaciones y no tiene dudas. Cuando va a representar el binomio “4 + b”, primero lo transforma en “4.1 + b.1” y luego lo representa, dice tiene que ser la representación formada por dos rectángulos.

En la representación de binomios que se da como ejemplo, en la segunda mitad de la ficha 3, va leyendo y explicando en cada caso lo que es la base y la altura. Reconoce que el área es la misma si se trata de distintas representaciones de la misma expresión.

En la **ficha 4,** en la actividad 1, también transforma el término formado por un solo factor en un producto de dos, en que es uno es la unidad (6 . y + 3 = 6 . y + 3 . 1). Tampoco aquí en esta ficha tiene dificultad alguna.

En la **ficha 5,** opera bien tanto en el contexto aditivo como en el multiplicativo y usa paréntesis siempre que hay binomio, sea un contexto u otro, pero reconoce cuando hay distributividad “cuando dentro del paréntesis hay una suma y luego hay un número que multiplica a ese paréntesis”. Se le pregunta si sólo cuando hay una suma y contesta que “y una resta”.

En la actividad 3 de operatividad básica sólo se abordan los apartados c, ítem 49, y f, apartado 52, y reduce bien los términos semejantes.

En la actividad 1 de la **ficha 6** de cálculo de perímetros no tiene dificultad, se presenten los datos numéricos o alfanuméricos, con dimensiones subdivididas o no, con segmentos adicionales trazados o no.

En la actividad 2 sólo se le proponen los apartados b, ítem 62 y e, ítem 65 y los resuelve correctamente,

En la **ficha 7,** hace el cálculo de áreas sin dificultad, si las dimensiones están subdivididas y los datos son números, primero realiza la propiedad asociativa y luego multiplica las dimensiones de la base y de la altura. En algunos casos traza subrectángulos interiores, pero luego no los tiene en cuenta en el cálculo cuando las dos dimensiones son subdivididas y literales; la entrevistadora sugiere enumere las zonas que se forman al trazar los segmentos perpendiculares a los lados y la alumna luego expresa el área de cada zona y las suma. Reconoce que en estos casos se plantea la propiedad distributiva.

En la actividad 2 sólo se aborda y con éxito el apartado d, ítem 75.

En la **ficha 8,** en el apartado a, ítem 77 de la actividad 1 hace la conversión bien, no así el apartado b, ítem 78, del cálculo del área de un rectángulo y su perímetro, que sí escribe bien la expresión: k . k, pero luego se ofusca y da como resultado “2k” y no “k^2”, ni siquiera hablándole de longitud, dibujándole lo que significa “2k” en longitud y las áreas, pero no relaciona estas dimensiones en el resultado que ha aportado.

La actividad 2 no se trabaja.

En la actividad 3 también se pretende calcular perímetros, pero se dan las figuras con las dimensiones indicadas.

El apartado a, ítem 84, lo hace oralmente y bien.

En el b, ítem 85, que están las dimensiones subdivididas, sigue calculando las dimensiones completas previamente y luego ya realiza la suma. En su estrategia va escribiendo entre paréntesis cada una de las dimensiones, sumando los paréntesis a la vez y luego como ha de añadir todo otra vez, encierra todo en un corchete y multiplica por 2. Realiza la asociatividad y luego la distributividad.

Por último, en el cálculo de áreas en la actividad 4 de esta **ficha 8**, donde tampoco se aborda el apartado a, ítem 86, sino el b, ítem 87, se le dice raye lo que representa el área y lo hace, asocia los datos de la dimensión de la base, los encierra en un paréntesis y multiplica por la altura. Realiza la distributividad.

El alumno **A_5** en las respuestas de la actividad 1 de la **ficha1** aparece un error inusual en el aprendizaje del Álgebra y es el de representar el cuadrado de un monomio o binomio con el exponente ”2” a la izquierda de los mismos: $^2(x + y)$, ^2z, ha hecho la conversión de registros linealmente.

Otro ítem que no capta a pesar de haber contextualizado la expresión en situaciones cercanas al alumno, es el de escribir correctamente en la R.F. la expresión correspondiente a “la tercera parte del número f” (usa “F” por “f”).

En las actividades 2, 3 y 4 no tiene problemas; en las dos primeras añade al final, las unidades; en la tercera, actividad 4, ítem 13, no.

En la actividad 5 no muestra seguridad alguna, sin embargo, aparecen algunos resultados correctos: “2 a + 5 a = 7 a”, en el ítem 14; “2 a + 5 b = 2 a + 5 b”, en el ítem 15; “2 (a + b) = 2 a + 2 b”, en el ítem 20, y, “(3 + x) y = 3 y+ y x”, en el ítem 27.

En los ítems 16, 17 y 18 utiliza un cuadrado de más en cada uno. En los dos primeros, suma los coeficientes, pone la parte literal y eleva al cuadrado.

(a + b) + a = 2 a^2 + b, ítem 16

2 a + 5 b + a = 3 a^2 + 5 b, ítem 17.

(a - b) + b = 2 b - a = a - 2 b = (quitando paréntesis) a- b + b = a - b^2, ítem 18.

En el ítem 19 intenta resolver directamente sin quitar el paréntesis previamente y comete varios errores, incluso después de sugerirle quitar el paréntesis y hacerlo correctamente, vuelve a utilizar inadecuadamente el cuadrado. Sólo cuando se le ha puesto ejemplos numéricos de sumas de opuestos, que reconoce dan "ceros", lo termina bien.

En el ítem 20 reconoce la propiedad distributiva y al irla a desarrollar se olvida, en principio, de multiplicar por el primer término del binomio, pero se da cuenta y lo corrige. Luego vuelve a trabarse en la suma de opuestos "-b a + a b" y no los asocia.

En el ítem 21 dice hay propiedad distributiva y no la hay, se le pregunta si con el signo "-" delante del paréntesis existe distributiva y dice que no y que para quitar el paréntesis se cambia "del signo de la derecha" y escribe "3 a - b - a" y corrobora el error anterior, escribiendo como resultado "4 a^2".

En el ítem 22, "a + 4 + a - 4", escribe primero como resultado: 4 a - 4, luego lo tacha y dice "daría cero". La profesora insiste si es lo mismo "4 + a" que "4 a" y dice que no, pero en el ítem 23, "3 a - b + a ", vuelve a identificar "b + a " con "b a".

En el ítem 24 confunde la suma (de una suma con una diferencia), con el producto, y, pone como solución la diferencia de cuadrados, porque dice que al sumar "a + a" da a^2, rectifica y escribe "2 a" y le suma "2b" como resultado de "b - b". El hecho de no quitar paréntesis parece le induce a error.

El ítem 25 sí lo resuelve fácil desarrollando la propiedad distributiva y realizando la operación. Sin embargo en el ítem 26 "3 (2 + a) - 3", aplica la propiedad distributiva y le queda "6 + 3 a - 3" que reduce a "6 a".

En la **ficha 2,** el alumno comprende las representaciones de los ejemplos que se dan y las aplica correctamente en la actividad 1.

Lee con detenimiento el segundo apartado de los convenios y observa sus ejemplos.

En la **ficha 3,** el primer dibujo que hace en la actividad 1 es correcto, pero al quererlo representar de otra manera, se ofusca y hace la representación como si la "x" valiese "1", esto es, en lugar de representar "3.x", representa "3.1".

En la actividad 2 comete el mismo error, y dibuja la "b" como si su valor fuese la unidad.

Para que comprenda las representaciones "4.b" y "4 + b", se le vuelve a mostrar la última parte de la ficha anterior donde se exponía cómo representar un producto de dos factores que forman un término de una expresión algebraica, pero ninguno de ellos, es la unidad y ni siquiera con este apoyo es capaz de hacerlo bien.

Cuando este alumno está leyendo y observando la segunda parte de la ficha 3, a pesar de que aparentemente es muy sencilla dice no entenderla y la entrevistadora tiene que aclararle lo que está expresado gráficamente y luego admite que lo comprende.

Al pasar a la **ficha 4**, ya el alumno es capaz de hacer la representación de los binomios correctamente tanto en la actividad 1 como en la actividad 2.

En la **ficha 5**, la actividad 1, ítem 39, de operatividad básica en contexto aditivo lo hace bien. En el contexto multiplicativo, actividad 2, ítem 40, al principio no pone los paréntesis adecuados, pero al decirle sencillamente que se fije bien, los pone y de manera correcta.

Sin embargo al interrogarle acerca de si el resultado de “4.(3n)” y “4 . 3n” es el mismo, dice que no porque “4.(3n) = 12 n” y “4 . 3n = 12. n”, pero rápidamente rectifica.

En “4 . (n + 5)”, ítem 44, dice el resultado es “20 n” y al interrogarle sobre el mismo, corrige y expresa “24 n” que explica le ha salido de “1 n + 5 = 6 n” y después lo multiplica por “el 4” y le da “24 n”. Se sigue dialogando y reconoce la propiedad distributiva.

En la actividad 3, ítems 47-52, se pasa directamente al apartado c, ítem 49. Al no fijarse opera mal en el comienzo, y, al copiar la expresión prescindiendo del “.” que expresa la multiplicación, a mitad de la misma, hace una operación errónea “5 - 3 n = 2”, pero inmediatamente se da cuenta y ya sigue realizando la operación; vuelve a errar en “6 n - 3 n” y escribe como resultado “-3n”.

En el apartado f, ítem 52 vuelve a copiar la expresión prescindiendo del “.” y no se equivoca en la operatividad básica, pero aquí no existen términos negativos sino el numérico.

En la **ficha 6,** expresa bien el perímetro en la actividad 1 pero luego opera mal y convierte “6 + 6 “ en 6^2” y “n +n” en “n^2” y dialogando sobre ello, reconoce el error. Todo parece ser falta de fijar la atención en lo que hace.

Con relación a los apartado b), c), e) y f) se dialoga y responde correctamente.

En el apartado g la respuesta oral es correcta “12 + 2 a + 16” pero escribe “12 + 2 a .16”. Se le pregunta acerca de lo anterior y rectifica.

En el apartado h) hace los cálculos bien desde el principio.

La actividad 2 no fue abordada.

En la **ficha 7,** calcula el área bien cuando se trata de datos netamente numéricos, subdivididos o no, pero cuando se introducen literales, al no fijarse, sustituye “5+a” por “5 a”, pero luego lo corrige.

En el cálculo del área del último apartado, ítem 71, sin embargo, a pesar de estar subdivididas las dimensiones, lo hace bien.

Señala el desarrollo de la propiedad distributiva con las flechas correspondientes, va poniendo las áreas parciales, pero no le va añadiendo el signo de sumar, y lo hará después.

La actividad 2 no se abordó.

En la **ficha 8,** la conversión desde el lenguaje habitual a la R.F. no le plantea dificultad.

Del resto de la ficha sólo se abordan las actividades 3b, ítem 85 y 4b, ítem 86. La actividad 3b, ítem 85, se refiere al perímetro de un rectángulo y lo hace sumando los duplos de cada uno de los datos expresados. En la actividad 4b, ítem 86, de cálculo de áreas actúa bien y da como resultado "2 m. 4 + 4 . 4" o sea suma las áreas de los subrectángulos. Se le pregunta si se puede expresar de otra manera y dice "eme más cuatro por cuatro" o sea la base completa por la altura.

El último de los alumnos entrevistados, **A_6**, en la actividad 1 de la **ficha 1,** resuelve los cuatro primeros ítems sin dificultad, pero al llegar al quinto en que se solicita que exprese "el precio de x kilogramos de papas a 75 pesetas el kg, escribe "x= 75" y cuesta bastante llegar a la expresión correcta, parece confundir la "x" como si pensase en ella representando el precio total y en el enunciado se ha usado la variable "x" para el nº de kilos.

Para el ítem 6 representa la diferencia (h - i) pero al querer representar el doble, vuelve a errar, llama "x" a la diferencia citada y considera la expresión final "x^2" pero rectifica y pone 2 x.

El resto de los ítems los resuelve bien.

En las tres actividades siguientes no tiene problemas para hacer la conversión del lenguaje habitual a la R.F.

En la actividad 5 el alumno resuelve bien el ítem 14 pero en el apartado 2 no acepta la respuesta abierta y escribe "7ab".

En el ítem 16 "(a + b) + a", da como resultado "a^2 + b" porque afirma que "dos veces a es lo mismo que a al cuadrado". Al escribir la entrevistadora ¿a + a= a^2?, ¿a . a = ?, es cuando reconoce que en el primer caso es "2 a", y en el segundo, "a^2".

En el ítem 18 no quita paréntesis sino que resuelve directamente y se equivoca dando como resultado: a - 2b. La entrevistadora escribe aparte "-a + a" y "- b + b" y oralmente expresa "-3+3" ó "-8+8" para preguntar al alumno a qué sería igual y dice que a "nada" y sin embargo al escribir la entrevistadora "a - b + b" dice es igual a "a-1". Se sigue dialogando y dice "que el cero me da 1, en… es que se le pone 1 en lugar de…". La entrevistadora interrumpe y le dice "de cero…o sea da lo mismo poner 1 que poner 0…" y el alumno contesta: "sí" y deja como resultado "a-1".

En el ítem 19, "(3-a) b + ab", dice no se puede quitar el paréntesis. La entrevistadora le sugiere pase al ítem siguiente, 20, donde primero identifica "a + b" con "a . b", después reconoce la propiedad distributiva y la desarrolla bien.

Vuelve al ítem anterior y resuelve mal la propiedad distributiva y da como resultado “b . a . 3 + b . a .a”, haciendo intervenir el segundo término en el primero al resolver la propiedad distributiva pero la entrevistadora le dice se fije en el ítem siguiente y rectifica y escribe “b.3 - b . a + a . b = 3b”.

En el ítem 21 reconoce que no existe propiedad distributiva porque hay un “-” delante del paréntesis, pero ve normal dar el valor de “1” al paréntesis “(b + a)” porque “si fuera “por” sería “b a”… y así… no se puede”.

El ítem 22 lo resuelve, pero sigue resultándole difícil.

El ítem 23 dice que si lo puede hacer con una propiedad distributiva cuando ni siquiera existe y al final agrupa “3 a” con “a” y da “4 a” y le añade el “-b” que tenía.

El ítem siguiente, ítem 24, lo confunde con una diferencia de cuadrados pero se da cuenta y quita el paréntesis y asocia los términos semejantes y anula los opuestos.

En el ítem 25 sí reconoce la propiedad distributiva y opera quedando “6 a + 6 b - 3 = 3 a + 6 b”. Los dos ítems restantes también los resuelve bien. En ninguno de estos últimos aparecen términos con letras con signo negativo.

En la **ficha 2,** lee los enunciados de los convenios y dice no se puede representar la “t” porque no se sabe el número de unidades. Realiza la actividad 1, bien.

En la **ficha 3,** actividad 1, ya comienza a tener problema a la hora de subdividir la longitud de “x” en tantas partes como indica el otro factor del término.

En la actividad 2 no logra distinguir claramente la diferencia entre “4b” y “4+b”.

La última parte de la ficha que es un ejemplo de representación de binomios con factores comunes tampoco le resulta muy fácil comprenderla.

En la **ficha 4,** para representar “6y+3”, ítem 35, representa sólo “6” y “3” y la “y” la desaparece. Al preguntarle cuántos rectángulos tendría la representación dice que “9”. Al remitirle a la ficha anterior y observar dos rectángulos para representar “2 . x + 2”, no comprende y dice que para representar “6y+3” representa “6.1 y 1.1”. Se recapacita sobre el número de rectángulos de la expresión, relacionándolo con la representación de “4+b”.

En la actividad 1 de la **ficha 5,** los dos primeros ítems los resuelve bien pero al realizar la suma en “3n+4”, ítem 41, y “2n+4+4”, ítem 42, comete el mismo error: “7n” para la primera suma y “10 n”, para la segunda.

En la actividad 2, contexto multiplicativo, no opera adecuadamente después de haber quitado los paréntesis y reduce “20 + 4 n = 24 n” y “18 + 8N= 24 N”.

En la actividad 3 sólo se abordan los apartados c, ítem 49 y f, ítem 52,. En el c) primero copia la expresión prescindiendo del “.”, luego conmuta dos términos con las variables “m” y “n” que luego asocia sumando sus coeficientes, a pesar de no ser términos semejantes.

En el f, ítem 52, también primero copia los términos sin el “.·, luego reduce términos semejantes “5b+4b” pero pone por resultado “$9b^2$” porque, como hay dos “b”, pone “b^2”.

En la **ficha 6,** para el cálculo del perímetro en la actividad 1, multiplica en vez de sumar los datos de la altura y la base, respectivamente. Se le interroga sobre el cuadrado y corrige, poniendo “6 + N + 6 + n = 12 n^2”.

En el apartado b, ítem 54) también tiene tendencia a usar “cuadrado” pero rectifica.

En el apartado f) contesta bien y lo ha hecho paso a paso. Para el cálculo de los apartados g e h como para los anteriores, no usa el doble de las dimensiones expresas sino una a una y las repite dos veces.

En la actividad 2 sólo se aborda el apartado b, ítem 62, y totalmente correcto.

En el cálculo de las áreas de la **ficha 7,** en el apartado d, ítem 69, dibuja un segmento que determina subrectángulos y calcula el área sumando las de los dos subrectángulos.

En el apartado e) también traza subrectángulos y calcula el área total mediante la suma del área de dos subrectángulos.

En el apartado f) dice calcular las áreas de los subrectángulos y sumar. La actividad 2 no se aborda.

En la **ficha 8,** hace bien la conversión desde el lenguaje habitual a la R.F. y en un momento duda en el perímetro y pone “k + x” y dice que pone “x” porque no sabe cuántos metros tiene, pero luego ya se da cuenta y escribe “4k”. El resto de los ítems los hace bien. Le plantea la entrevistadora una variación de la actividad 1c, ítem 79, y también la resuelve bien.

El primer perímetro de la actividad 3 (la actividad 2 no se abordó), lo calcula oralmente y bien.

En el área del apartado a, ítem 86 de la actividad 4, las dimensiones subdivididas vuelven a ser causa de error y en lugar de poner “1+c” pone “1c”, pero rectifica y dice, se suma. Luego para el cálculo del área dice primero que se suman y luego, que se multiplican, Cuando va a hacer el “producto” reconoce la propiedad distributiva en (1+c) (m+2) y explica oralmente cómo haría este producto y lo hace correctamente.

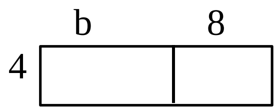
Con relación a la segunda sesión de Septiembre del mismo año, 1993, la alumna **A_1** en la **ficha 1, ítems 1-11,** actividad 1, que comprende ejercicios de propiedad distributiva, los hace todos bien (sólo se le han pedido los apartados a, b y c (ítems 1, 2 y 3, respectivamente). En el ítem 3, como son todos datos numéricos, se le pide si se puede hacer de otra manera y dice que haciendo primero la asociación de los términos del paréntesis y luego multiplicar, que es correcto. Sin embargo se le pregunta cómo se llama la propiedad utilizada y primero dice que conmutativa y después de hacerle una comparación con otro caso de conmutar, dice la asociativa.

En la actividad 2, la entrevistadora va directamente al apartado d, ítem 9, en el que la alumna desarrolla correctamente la propiedad distributiva pero luego opera mal: “$a^2 + 2a$” para la que da el resultado “$2a^3$”.

En la actividad 3, ítem 11, que se le pide una comparación de dos expresiones equivalentes. Lo trabaja bien, pero al final hace una afirmación falsa: “$(a + b)^2 = a^2 + b^2$”.

En la **ficha 2, ítems 12-14,** lo primero que se presenta es un producto de un monomio por un binomio representado en el S.R.V.G. y con el cuadro de doble entrada, visualización simplificada, y, se solicita represente con las tres representaciones unos casos concretos que se aportan. Esta alumna lo hace sin dificultad y dice las tres formas le resultan fáciles y al final opta por la representación en el S.R.V.G. como la más fácil.

En la **ficha 3, ítems 15-18** el planteamiento es similar al de la ficha anterior pero aquí el producto es entre binomios. A la alumna se le pregunta qué ocurriría si tuviera tres términos y responde que también se puede hacer con rectángulos y ella misma se plantea un ejemplo “4.(b+8+a)” pero se equivoca al representarlo y pone sólo



Se pasa a la **ficha 4, ítems 19-24** y en ella al último ítem (24) y lo hace correctamente. Se le pregunta si la expresión de una de las áreas “y . a” es lo mimo que “a . y” y contesta afirmativamente.

La primera actividad de la **ficha 5, ítems 25-31,** la calcula perfectamente, pero no lo hace directamente sino siempre desarrollando la propiedad distributiva; cuando no existen términos semejantes, expresa que no se puede seguir simplificando.

En la actividad 2 calcula de manera correcta las áreas haciendo uso de los paréntesis adecuadamente.

En la **ficha 6, ítems 32-34,** calcula un producto con la propiedad distributiva incluida y lo representa con la R.F. y en el S.R.V.G. y otro con la R.F. y un cuadro de doble entrada. Reconoce que cuando trabaja con números y letras está trabajando algebraicamente.

Se le pregunta cuál de los métodos elegiría ella y dice que primero el algebraico, segundo el de la representación en el S.R.V.G. y tercero, el cuadro de doble entrada o visualización simplificada.

En la **ficha 7, ítems 35-42,** se detecta, al hacer la sustitución para hallar el cálculo de valor numérico, que cuando hay algún término negativo, encierra en un paréntesis los dos primeros términos sean del signo que sea. Asimismo al hacer la operatividad no asocia, al principio, los términos positivos y los negativos, sino que asocia los términos que ha reunido en el paréntesis. Lo curioso es que ha confundido el nombre de los números enteros y los ha llamado “decimales”.

El “x” de multiplicar a veces lo asocia con la variable “x”.

En la segunda actividad, cuyo planteamiento a veces se presta a dificultad entre los alumnos, esta alumna no tiene problema, utiliza los paréntesis adecuadamente y las operaciones con números enteros.

En la **ficha 8**, **ítems 43-66,** la actividad 1, a pesar de sorprenderle el planteamiento, completa bien la tabla.

En la actividad 2, también interpreta bien el cuadro y actúa en consecuencia. En la actividad 3, la situación es la misma que en las dos actividades anteriores.

En la **ficha 9, ítems 67-93** la actividad 1 le resulta sencilla y explica oralmente cómo lo haría en el S.R.V.G.

La actividad 2 no se le plantea.

La actividad 3 la hace normalmente y bien, pero al operar en el ítem 80,“3 . (2 a)” ó “3.2 a”, vuelve a dudar y plantea incluso que la primera expresión da por resultado “$6.a^3$” y la segunda, “6 a”, pero sigue trabajando y se da cuenta del error, de la expresión del paréntesis.

En la actividad 4, en la última fila de la tabla, ítem 90-93, que fue la única que se solicitó, su trabajo comienza bien pero en la expresión “4 - (p-1)”, cuyo planteo es correcto, dice no se puede quitar paréntesis, porque “primero va un número no se le puede restar” y porque “no está multiplicando a ninguna parte”.

La segunda alumna entrevistada, **A_2**, ha resuelto correctamente su trabajo en la **ficha 1 (ítems 1-11).**

En la actividad 1 desarrolla la propiedad distributiva en todos los apartados y cada uno de los productos los pone entre paréntesis. Sólo a veces quita los paréntesis y no va relacionado el hacerlo, con una estructura concreta de la operación.

En la actividad 2, sólo se abordan los apartados b, ítem 7, y d, ítem 9. Todos los términos en que van apareciendo coeficientes numéricos, los pone precediendo a las letras. El apartado b se refiere a la propiedad distributiva por la derecha y el d, a la doble distributiva. La alumna une con arcos los factores de los productos que ha de efectuar.

En la actividad 3, ítem 11, lo que hace es plantear el cuadro de la suma como producto de dos binomios iguales que efectuándolo con la doble distributiva sale la primera expresión dada.

En la **ficha 2 (ítems 12-14),** previa la lectura y observación del ejemplo, realiza los dos primeros ejercicios de la actividad 2 (ítem 12 y 13), que son los que se le solicitaron y los realiza bien, de las tres formas planteadas: en la R.F., en el S.R.V.G. y en la visualización simplificada.

En la **ficha 3 (ítems 15-18),** se sigue en la línea de la ficha anterior pero con el producto de dos binomios. Vuelve la alumna a leer y observar, y, a continuación, realiza la actividad 2 de aplicación de lo anterior. Sigue poniendo siempre el coeficiente numérico comenzando el término.

En la **ficha 4 (ítems 19-24),** sólo resolvió el primero (ítem 19) y el último ítem (24) de la única actividad que posee la ficha (actividad 1). Hace las representaciones muy bien y vuelve a dibujar arcos con los elementos que debe multiplicar en la expresión de doble distributiva.

En la **ficha 5 (ítems 25-31),** sólo se le planteó la actividad 2 y de ésta, el primer apartado (ítem 29). Lo hizo bien.

De la **ficha 6 (ítems 32-34)**, sólo se abordó el primer ítem (32) de la única actividad 1 y se solicitó lo hiciera con las representaciones utilizadas anteriormente y lo hizo.

En la **ficha 7 (ítems 35-42),** la actividad 1 de sustitución formal donde sustituyen valores de las variables para hallar el valor numérico, todo lo hizo correcto. No usa paréntesis sino que unos resultados los da directamente y otros paso a paso.

En la actividad 2, ítems 39 - 42, también actúa correctamente. En general cuando se trata del producto de dos números lo pone entre paréntesis.

En la **ficha 8 (ítems 43-66),** tampoco tiene problema. Usa correctamente los paréntesis y corchetes y además opera bien con los números enteros.

En la **ficha 9 (ítems 67-93),** sólo se trabajan las actividades 3 y 4. Todos los ejercicios los comprende y además reduce términos semejantes adecuadamente.

En el trabajo del alumno **A_3** en la **ficha 1 (ítems 1-11),** actividad 1, se observa sistemáticamente comete el error de transformar una suma en un producto "a + 5 = 5 a", "b +a = a b", "a + 2 = 2 a". Luego la entrevistadora le pregunta acerca de ello y dice es lo mismo.

Otra tendencia que acusa es que si tiene un binomio netamente numérico, aplica la propiedad asociativa y obtiene el resultado mentalmente y lo escribe para seguir luego operando. Siempre al final pone el coeficiente delante de la parte literal.

En la actividad 2, ítems 6-10, en binomios numéricos actúa igual que en la actividad 1 pero en los otros binomios si son formados por dos letras, los iguala a "x" (y hace mal uso del signo igual) y si son formados por letra y número, opera como si fuera un producto, tanto si es una suma como una resta. Así:

apartado c, ítem 8: a (b - c) = b - c = x . a

apartado d, ítem 9: (a + 2) . (b + a) = 2 a . b a

apartado e, ítem 10: (y + c) .3 = y + c = x . 3

En el apartado b, ítem 7, "(x-3) . 2", se complica aún más y escribe

"(x-3) . 2 = 3 - x . 2 = 6 x".

En la actividad 3, ítem 11, "¿Es igual (a + b)^2 que a . (b + a) + b . (b + a)?", descompone en partes que corresponden a los términos (1), prescinde de los paréntesis y hace la propiedad conmutativa (2) e iguala a una nueva incógnita (3):

(1) a . (b + a) = (2) a . (b + a) = b + a . a (3) a.(b+a) = b + a .a = y

z

b . (b + a) = b . (b + a) = b + a . b b.(b+a) = b + a .b = x

y en la primera expresión $(a + b)^2$ sólo la iguala a N:

$$(a + b)^2 = N;$$

especifica que el enlace de “y” y “x” hacia z es porque z es la suma supuesta que resultaría de “y + x”. Al preguntarle cómo se sabe si N es igual en z dice: “no se puede averiguar”.

En la **ficha 2 (ítems 12-14),** lee el ejemplo y dice comprender la representación gráfica del producto “4 x (5 + 3)”, sin embargo no reconoce la propiedad distributiva.

En la actividad 1, ítems 12-14, de aplicación del modelo anterior, desarrolla la propiedad distributiva correctamente en cuanto a su cálculo y representación pero no así en el esquema de visualización simplificada porque agrupó en una dimensión las letras y no estaba así en el planteamiento. Reconoce, sin embargo, que tendría que coincidir el resultado de las tres representaciones pero no sabe cómo hacerlo.

En la **ficha 3 (ítems 15-18),** detenidamente la entrevistadora le sugiere ponga flechas para que se dé cuenta cómo se actúa en el ejemplo que se ha presentado, para que él luego lo pueda aplicar al ejemplo concreto, propuesto. Se va fijando por el modelo presentado y hace bien la actividad 2. Después de expresar los cuatro productos, la entrevistadora le pregunta si éstos corresponden a la base, la altura, el perímetro o el área y contesta que al área.

En la **ficha 4 (ítems 19-24),** trabaja con las actividades de las fichas anteriores delante, y así es capaz de hacerlo.

En el quinto ejercicio de la ficha 4, que es el siguiente que se le ha planteado para resolver, lo hace paso a paso a base de preguntas de la entrevistadora. Al final lo hace bien, pero no tiene seguridad y le cuesta mucho, incluso reconocer el área de cada subrectángulo que se forma. Después de representar la situación en el S.R.V.G. hace la representación en el sistema de representación visual/formal o visualización simplificada más fácilmente.

En la **ficha 5 (ítems 25-31),** se comienza por la actividad 2, ítem 29-31, de cálculo de áreas; hace rápido el primer apartado a, ítem 29; los datos son numéricos, sin embargo, parece inmediatamente ir a calcular el perímetro que no se lo ha solicitado nadie, porque va a hacer una suma del valor de uno de los lados (la altura) con el mismo. En el apartado b, ítem 30, plantea bien que las dimensiones que están subdivididas, tienen como resultado la suma de las longitudes de los segmentos en que se ha subdividido, concretamente “x+2” e “y + 3”, pero como solución del producto, da “6xy”.

En el apartado c, ítem 31 de la actividad 2, también plantea bien el cálculo del área " 3 + m por 4" pero da como resultado "12 m," hace lo mismo que en la ficha 1, actividad 2b: (x - 3) . 2 = 3 - x . 2 = 6 x. Luego se pasa a la actividad 1 y sólo se trabaja el apartado d, ítem 28, de doble distributiva y sigue sin seguridad. Comienza sumando los dos primeros términos de los binomios que se multiplican y luego los dos restantes. Al decirle que lo represente, lo hace, sin embargo, correctamente según enunciado, y halla cada una de las áreas de los subrectángulos adecuadamente. Se vuelve al apartado b y ahora lo plantea bien "(2 + x) (y + 3), lo resuelve oralmente y ve que no le coincide el nuevo resultado con el primero, que había hallado y tacha el anterior.

Se vuelve a revisar el apartado c, ítem 31, y lo corrige dando "4 . m + 4.3".

Con la alumna **A_4** en la actividad 1 de la **ficha 1 (ítems 1-11),** sólo se abordan los tres primeros apartados. En todos los casos desarrolla la propiedad distributiva antes de realizar el resto de las operaciones, pero al preguntarle si se puede hacer de otra manera, contesta afirmativamente y dice que asociando los números de dentro del paréntesis.

En la actividad 2, similar a la anterior, también actúa de la misma forma que antes, en los aparados a, ítem 6, y b, ítem 7, que se le proponen.

En la actividad 3, ítem 8, sin embargo, al querer resolver $(a + b)^2$ dice es "a . a + b . b", se dialoga lo que significa el exponente dos y dice multiplicar dos veces, pero vuelve a insistir en "a . a + b . b". Se insiste y entonces dice que será sumar dos veces pero escribe "(a + b) . (a + b)", se le advierte eso no es "sumado" sino "multiplicado y entonces escribe "a + b . a+ b"… Se le pregunta si se pone así y se da cuenta de la falta del paréntesis. Al intentar resolverlo ya corrige el error y pone "a . a + a . b + b . a + b . b". Al querer comparar con la otra expresión que se le dio a ver si son iguales, y en vez de resolver la otra, saca factor común en lo que acaba de escribir: "a (a + b) + b (a + b)" y reconoce la equivalencia de ambas expresiones, a pesar de haber dicho al principio de trabajar la actividad, que le parecía que no.

En la **ficha 2 (ítems 12-14),** comprende el ejemplo planteado del producto y hace la aplicación en la actividad 1. En principio la expresión algebraica no le plantea problema, ni la representación aunque se fija en el ejemplo, pero al comenzar el cuadro de doble entrada se equivoca y la entrevistadora le sugiere vuelva a revisar se fije en el ejemplo. Al dirigirse la entrevistadora al tercer ejercicio de la actividad, ya hace todo sin dificultad.

En la **ficha 3 (ítems 15-18),** donde se plantea el producto de binomio por binomio en el ejemplo y luego se pasa a la aplicación en la actividad 2, ítems 16-18, no tiene dudas al actuar.

En la **ficha 4 (ítems 19-24),** en el apartado 2 que se le propone, después de desarrollar la propiedad distributiva con la R.F., pasa al S.R.V.G. y no representa los dos factores como se dieron sino los dos rectángulos que corresponden al desarrollo de la propiedad distributiva “4.5” y “4.b”. Se le pide si lo puede hacer de otra manera y representa exactamente con la expresión que venía: “4 x (5 + b)”. La representación visual/formal del cuadrado de doble entrada, no le plantea dificultad.

La entrevistadora le dice se pase al ítem último de la página (24) y lo expresa con las tres representaciones, sin dificultad.

En la **ficha 5 (ítems 25-31),** no se le plantea la actividad 1 sino la 2, ítems 29-31, de cálculo de áreas que lo hace todo bien. En los apartados b, ítem 30, y c, ítem 31, dibuja líneas discontinuas para separar los subrectángulos, sin habérselo sugerido. En relación al apartado c, ítem 31, se le pregunta si puede expresar al área de otra manera que sumando las de los subrectángulos y lo expresa bien, incluyendo en un paréntesis los dos segmentos de la base sumados y luego multiplica por la longitud del segmento de la altura.

En la **ficha 6 (ítems 32-34),** sólo resuelve el apartado a, ítem 32 que se le ha pedido y se le da libertad para hacerlo como prefiera y lo hace con la R.F. y en el S.R.V.G.; se le pregunta si en general tuviera que optar por un registro cuál escogería y dice, el de los rectángulos (SRVG), después de haber hecho la propiedad distributiva (con la R.F.).

En la **ficha 7 (ítems 35-42),** en su actividad 1, de sustitución formal, evaluando letras para obtener valores numéricos de expresiones, resuelve todos los apartados correctamente y desarrolla la propiedad distributiva incluso teniendo una diferencia de números tan sencillos como son 8 y 3, ítem 38. En todos los casos pone el resultado final.

En la actividad 2 también hace la sustitución correcta, la entrevistadora le pregunta cuál sería el resultado de “5 . 6 - 4”, apartado c, ítem 41, y jerarquiza bien las operaciones, efectuando: “5 . 6 - 4 = 30 - 4 = 26”; lo mismo ocurre en “5 . 4 + 2 . 3”, que opera “5.4 + 2 . 3 = 20 + 6 = 26”.

En la **ficha 8 (ítems 43-66),** se le pregunta si comprende lo que ha de hacer y contesta afirmativamente, pero por más que la entrevistadora conduce el diálogo que utilice el término “sustituir” no lo hace, aunque haya manifestado que comprende totalmente la situación.

Sin embargo en la actividad 2, ya utiliza el vocablo “sustituir”. Hubo un momento en que al ir a operar se trabó y dijo que en “3n + (t+3) no se podía quitar paréntesis porque alteraba el resultado, pero luego rectificó. En el resto de la actividad no tuvo dudas.

En la actividad 3, hace el planteo bien, incluso usa corchetes, pero vuelve a trabarse al operar y da como resultado de “b - 13 + 8”, “b - 21”.

En la **ficha 9 (ítems 67-93),** de las dos primeras actividades sólo se le pide el apartado a de la 1, ítem 67, y lo hace bien; una vez más desarrolla la propiedad distributiva y luego usa el registro del S.R.V.G.

En la actividad 3 (ítem 72-81) hace las sustituciones correctas utilizando los paréntesis como corresponde. En el último ejercicio tuvo un error momentáneo al aplicar una propiedad distributiva cuando no existía pero rectificó porque dijo que era una multiplicación (se estaba refiriendo al producto del paréntesis).

En la actividad 4 y última, las sustituciones las hace bien, pero al operar se ofusca en cosas sencillas; por ejemplo en "4 + p - 1" dice "no se puede hacer nada porque el 1 está restando", (ítems 82-93).

El alumno **A$_5$**, por su parte, en la **ficha 1 (ítems 1-11),** en los apartados a, b y d, ítems 1, 2 y 4, respectivamente, actúa correctamente pero en los otros, comete errores.

Concretamente en la propiedad distributiva en el apartado c, ítem 3, como hay un signo "-" multiplica el factor fuera del paréntesis por el segundo término y le resta el producto del factor por el primer término. Dice que trabajar de izquierda a derecha o de derecha a izquierda da igual si son multiplicaciones y se le está preguntando respecto a la distributividad.

En el enunciado del ítem 3 se planteaba "(7-2) . 3" al comienzo respondió "6-41= -34", luego "6-21 = 16, posteriormente expresa "2.3,6…-7…" pero definitivamente deja "6-21=16".

En el apartado e, ítem 5, "(a + 2). 3", contesta "a + 6", hace algo similar a lo que ha hecho en el apartado c, ítem 3, y dice que aquí actúa así porque es una suma. Al preguntar si el 3 no afecta a la "a"·, el alumno rectifica y da "6 + 3 a".

En la actividad 2 vuelve a tener problema con la propiedad distributiva cuando los términos son alfanuméricos y así en "(x-3) . 2", ítem 7, comienza por dar como resultado "x-6". Al reconocer que posee la propiedad distributiva, se da cuenta del error y escribe "2 x - 6".

El resto de los apartados de esta actividad los hace bien, incluso cuando aparece la doble distributiva, mas en este caso los términos aparecen con signo "+".

La actividad 3 se siente incapaz de trabajarla.

En la **ficha 2 (ítems 12-14),** lee y comprende el enunciado que se plantea al principio.

En la aplicación de lo anterior a la actividad 1, el alumno en el primer apartado expresa correctamente el producto en la R.F., en la representación del S.R.V.G. y en el sistema de representación visual/formal, cuadro de doble entrada, (visualización simplificada).

En el último apartado que se le presentó también realizó todo correcto.

En la **ficha 3 (ítems 15-18),** se plantea el producto de binomios en la actividad 1 y el alumno lo observa y comprende pasando a la actividad 2. Los dos apartados que trabajó, el primero y el último, los trabaja bien, pero no sabe lo que es cuadro de doble entrada y dice se llama "tabla de multiplicar".

En la **ficha 4 (ítems 19-24),** el alumno va a completar el primer y último apartado de la actividad. En el primero, ítem 19, desarrolla bien la propiedad distributiva con la R.F. Al comienzo como la grafía del 1 parece un 4, así lo considera. La entrevistadora aprovecha para advertirle la importancia de trazar los números adecuadamente. También representa en el S.R.V.G. y en el esquema de visualización simplificada, correctamente.

Lo mismo hace en el último apartado que incluye un producto de dos binomios con datos literales. Expresa que los tres registros le resultan fáciles.

En la **ficha 5 (ítems 25-31)**, sin dudar, calcula todos los productos que incluyen la propiedad distributiva o doble distributiva correctamente. La entrevistadora le pregunta en el apartado c, ítem 27, qué ocurriría si en el segundo término del binomio del paréntesis apareciese un signo menos y también responde bien.

En la actividad 2 se le pregunta si recuerda el cálculo de áreas y da respuesta afirmativa y efectivamente hace los cálculos adecuados tanto con datos numéricos, como alfanuméricos con dimensiones subdivididas o no.

La **ficha 6 (ítems 32-34),** plantea un producto y la entrevistadora se lo relaciona con el área de un rectángulo. El alumno reconoce esta relación después de calcular y representar la R.F. y además sacar factor común sin que nadie se lo sugiriera, se le pregunta si sabe cómo se denomina a lo que ha hecho y contesta que es “la distributiva” a sacar factor común, y si no,…la conmutativa. De esta ficha no se le plantea nada más.

En la **ficha 7 (ítems 35-42),** las sustituciones las hace correctas pero en uno de lo apartados donde aparece una suma algebraica con signo menos cuya suma de valores absolutos de los términos positivos es menor que la de los términos negativos, da un resultado positivo y además expresa que “7-3”, ítem 36, es lo mismo que “3-7”, actuando como se la operación de restar fuera conmutativa. Todos los demás apartados de la ficha los hace correctamente.

En la **ficha 8 (ítems 43-66),** no entiende la tabla que se le ha puesto. La entrevistadora le explica la primera fila y luego el alumno actúa. Al comienzo en “(3+a)” para “a = 4”, ítem 45, escribe “4 (3+4)” y donde “a” ha de sustituirla por 4, escribe “4 + a”. Le cuesta muchísimo comprender la sustitución y parece tender a no aceptar la “a” solamente o un número solamente en el cuadro donde las restantes columnas todas tienen paréntesis. También en la casilla del valor de “a” para a = 1, ítem 48, anota “1+a” que es el mismo error que para “a = 4”. Sin embargo en los binomios posteriores, hace bien su trabajo.

En la actividad 2 cuando formalmente ha de sustituir una letra por un binomio, en principio no pone paréntesis, pero luego se da cuenta y lo añade.

En las columnas donde aparecen “a^2” y “b^2” para asignarles diferentes valores, vuelve a errar y hace la sustitución sumando al valor que hay que darle, el “a^2” o “b^2”, respectivamente.

a	a^2	b^2
4	$4 + a^2$	$4 + b^2$
1	$1 + a^2$	$1 + b^2$

n	$n + a^2$	$n + b^2$

En la actividad 3 donde se ha de hacer sustituciones en un contexto de frutas, la sustitución la hace correcta, incluso usa corchetes y paréntesis adecuadamente, sin embargo, se le pregunta cuál será el resultado de operar "[(b - 13) + 8] y dice "8 + 13 . b".

En la **ficha 9 (ítems 67-93),** las actividades 1 y 2 no se abordan. En la actividad 3, ítem 72-81), reitera bien las sustituciones y se equivoca de nuevo al resolver: "5 . 2b + 3 = 13 b", en el ítem 81, pero al preguntarle si está seguro, dice que no y corrige, poniendo el resultado correcto "10 b + 3".

Por último el alumno **A_6** muestra su error en la actividad 1 de la **ficha 1 (ítems 1-11)** al convertir binomios alfanuméricos, en productos:

(a + 5) . b = 5 a . b = 5 a b (apartado b, ítem 2)

3. (b + a) = b a . 3 = 3 b a (apartado d, ítem 4)

(a + 2) . 3= 2 a.3 = 6a (apartado e, ítem 5)

El resto, con datos numéricos estrictamente, lo resuelve bien. No desarrolla la propiedad distributiva como tal, sino que asocia los elementos de los paréntesis.

En la actividad 2, ítems 6-10, el error indicado en la actividad anterior, vuelve a aparecer:

(a + 2) . (b + a) = 2 a . b a = b . 2 a^2 (apartado d, ítem 9)

En la propiedad distributiva comienza siempre multiplicando el factor por el elemento más cercano, hecho que produce error si la propiedad distributiva es por la derecha y hay signo menos: "(x - 3) . 2 = 2 . 3 - 2 . x = 6 - 2 x" (apartado b, ítem 7), no así si el signo es más: "(y + c) . 3 = 3 c + 3 y" (apartado e, ítem 10) o es la propiedad distributiva por la izquierda: "a . (b - c) = a . b - a .c" (apartado c, ítem 8). Además ha cometido otros nuevos errores como es el de suprimir un factor común en: "a . b - a .c = b . c" (apartado c), al preguntarle acerca de la igualdad dice que los miembros no son lo mismo y que sustituiría "b-c" por "1" y quedaría "a.1" que sería "a"; en el apartado e, ítem 10) suma coeficientes y añade las letras: "3 c + 3 y = 6 c y", sin tener en cuenta la no semejanza de los términos.

En la actividad 3, se equivoca leyendo pero en seguida dice que las expresiones no son iguales. Comienza a resolver "a (b + a) + b (b + a)" y escribe "a^2 + b + b^2 + a"; al interrogarle de dónde ha sacado "a^2 + b", tacha todo y escribe "a b + a^2 + b^2 + b a", que es correcto.

Al interrogarle si se puede hacer algo más, escribe "a^2 + b^2 + $(a\ b)^2$ y dice que esto es lo mismo pero "mirándolo desde otro lado".

Al comenzar a leer en la **ficha 2 (ítems 12-14),** dice que no entiende, pero, nada más decirle la entrevistadora si no entiende, rectifica y dice que sí, incluyendo el esquema de visualización simplificada.

Al hacer la aplicación en la actividad 1 resuelve el primer apartado con la R.F. y pasa a hacer la representación, dibuja casillas y luego deja columnas sin rellenar. Dice se puede hacer el esquema pero no sabe cómo es.

En el segundo ejercicio también hace correcto el cálculo en la R.F., pasa a la representación pero pone más cuadraditos de la cuenta, pero no deja columnas en blanco. El ejemplo le induce, como tiene el dato colocado verticalmente, él además de ponerlo verticalmente, lo escribe verticalmente y no acaba todos los productos en el ejercicio segundo.

En la **ficha 3 (ítems 13-18),** el alumno trata de entender la representación del modelo según va leyendo, y dice “está claro”. En esta ocasión comienza a dibujar por la segunda columna o sea hace la representación en el SRVG, luego hace el esquema, también correcto, y dice no se acuerda de lo que ha de hacer en la R.F. pero se decide a hacerlo y efectúa bien la operación.

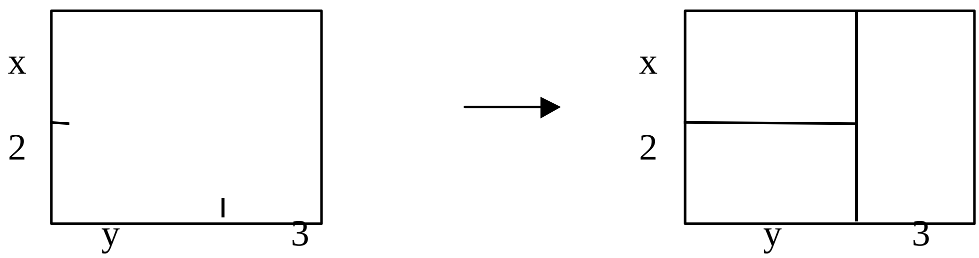
En la **ficha 4 (ítems 19-24)** se le señalan los apartados 3 y 5 para realizar: uno de propiedad distributiva por la izquierda y otro de doble distributiva.

En el apartado 3 comienza por la columna donde hasta ahora ha representado en el S.R.V.G. pero lo que hace es la visualización simplificada y dice es la representación del rectángulo sin haber ninguno, y añade que el cuadro de doble entrada, es parecido. Cuando va a rellenar la tercera columna dice que es lo mismo.

La entrevistadora pasa a la ficha siguiente y no le pide las respuestas del apartado 5.

En la **ficha 5 (ítems 25-31),** actividad 1, hace bien los cálculos solamente con números (sigue aplicando la propiedad asociativa a los que están dentro de paréntesis) y la doble distributiva; sin embargo, la propiedad distributiva por la izquierda y por la derecha, vuelve a llevarle al error ya común : “b + c = b c”, ítem 28, “m + n = M . N” (cambió m por M y n por N), ítem 27.

En la actividad 2, el cálculo del área don datos numéricos lo hace bien. En el apartado b, ítem 30, hace una descomposición en subrectángulos no habitual:



y el planteo lo hace bien aunque luego el resultado aparece mal: “2 y + 6 x + x^2”, pero al dialogar se detecta que el error ha sido el de la actividad anterior:

“3 . (2 + x)” lo transforma en “3 . 2x = 6x”, ítem 30.

En el apartado c, ítem 21, vuelve a aparecer otro error ya cometido: “4 m + 12 = 16 m” (sumar coeficientes y añadir la parte literal, aunque no sean términos semejantes).

Este último error aparece de nuevo en la **ficha 6 (ítems 32-34)** en el apartado a, ítem 32: "x . (b + 5) = x . b + x . 5 = 5 x^2 b".

En el apartado c, ítem 34, que es el que se le propone después, desarrolla la propiedad distributiva bien, pero vuelve a su error en: "2 y + 2 x = 4 y x".

En la representación en el cuadro de doble entrada del apartado a, ítem 32, no tiene problema. En el apartado c, ítem 34, opta como segunda representación por la de los rectángulos, pero en principio dibuja la misma longitud para "x" que para "y", se le pregunta acerca de ello y reconoce que en el dibujo están iguales, pero en el enunciado no, y entonces lo corrige.

En la **ficha 7 (ítems 35-42),** de sustitución formal en el cálculo de valor numérico no tiene dificultades.

En la **ficha 8 (ítems 43-66),** en la primera tabla hace todos los cálculos bien, oralmente.

En la actividad 2 expresa oralmente lo que haría en la primera fila. La segunda fila la resuelve bien, por escrito.

En los ítems 56-59,al tener que sustituir "b" por "t + 3" no pone paréntesis - aunque se le pregunta si no lo lleva -, sin embargo, en el ítem 59, para calcular "b^2" sí le pone paréntesis y escribe "$(t + 3)^2$".

En la actividad 3, sólo se le pide los cálculos de los ítems 60-62, comprende lo que ha de hacer, pero al igual que en la actividad anterior no pone los paréntesis necesarios y el doble de "b - 13", lo expresa con "2b-13" y añade un error: "2 b - 13 = - 11b".

En la **ficha 9 (ítems 67-93),** el cálculo del apartado a, ítem 67, en la actividad 1 lo hace oral y al preguntarle cómo dibujaría el rectángulo correspondiente dice pondría "3" de base y "a + 4" de altura. La actividad 2 no se le propuso.

La actividad 3, de sustitución formal fue un fracaso total. Lo que el alumno sustituye es justo lo que es constante y deja invariable la variable que había de sustituir.

En la actividad 4 no pone paréntesis cuando el término es un binomio y tiene un "-" delante y en lugar de: "4 - (p.1)" pone "4 - p - 1", ítem 93.

5.4.6. Estudio biográfico de un caso

Llamamos estudio biográfico de un caso al análisis que hacemos de un alumno, en el que consideramos todos los datos obtenidos por los diferentes instrumentos de medida y que van desde el Pretest a las vídeograbaciones, pasando por el análisis del cuaderno, grabaciones y Postest.

El alumno, del cual definitivamente se decidió hacer el estudio biográfico ha sido seleccionado en base a ser un alumno medio de la clase en cuanto a rendimiento académico así como por su capacidad de comunicación y su actitud positiva y disponible para colaborar en el estudio de su trabajo.

También fue recomendado por el profesor del aula para ello. Lo vamos a simbolizar con una “Z”. Contaba con 12 años de edad en el momento de pasarles el Pretest y 13 años cuando ya se le hizo la entrevista individual. Sus padres han realizado ambos, estudios universitarios.

Atendiendo exclusivamente a aciertos y errores en las pruebas que se pasaron, respecto al conjunto de la población de la clase, el número de orden fue el 18 en el Pretest y en la prueba inmediata a la instrucción relativa a Expresiones Algebraicas, el número 12 y a la de Ecuaciones, el número 8.

Presentamos aquí el estudio en profundidad y extensión de su caso. Se ha tratado de registrar la observación del mayor número de variables en este alumno. Se ha intentado centrar la investigación sobre comportamientos manifestados, indicados o relatados por el sujeto, reacciones observables en el curso de la relación establecida con él y otras, específicamente provocadas en condiciones preestablecidas (aula, entrevista individual), con el fin de comprenderlas y explicarlas en sus particularidades.

Los resultados del estudio donde se han valorado las dificultades desarrolladas por el alumno al usar dos sistemas de representación yuxtapuestos para el aprendizaje del lenguaje algebraico a través del análisis de los datos han sido recopilados a partir del Pretest, cuadernos de trabajo de aula, el Postest, unas actividades de repaso, resueltas por el alumno fuera del ámbito escolar y, por último, cuatro sesiones vídeograbadas en la entrevista individual, de las cuales nos vamos a referir a las dos primeras por relacionarse con el tratamiento de las expresiones algebraicas.

Comenzamos por describir la situación de la actividad del alumno en la parte primera del Cuestionario Pr1 (anexo 5, parte 1ª).

La pregunta **1,** que incluye los ítems del 1 al 4, la hizo toda bien.

La pregunta **2** (ítems 5 - 12).

b) $\square + 25 = 41$

Calculó como si fuera una resta y obtuvo

$\square - 25 = 41$

$\square = + 66$

h) El ítem 12

$\frac{63}{\square}$ igual a 7, no lo hizo.

En la pregunta **3 (**ítems 13 - 16) sólo hizo el primer apartado (ítem 13); creemos que por tanteo. Los demás no los intenta. Es similar a la pregunta 1 de la segunda parte del Pretest (Pr2).

En la pregunta **4** (ítems 17 - 20) “expresando con signos, letras y números”, todo lo hizo bien.

La pregunta **5** (ítems 21 - 24) relativa al cálculo del valor numérico también lo hizo todo bien.

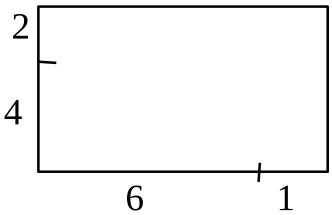
La pregunta **6** (ítem 25) se refiere a conversión de registros desde el lenguaje habitual al formal algebraico para expresar una situación usando variables. “El dueño de un estanco vende 135 periódicos cada día, ¿cómo expresarías el número total de periódicos vendidos en dos semanas (14 días)”

x = 135 periódicos
d = 14 días
x . d

La pregunta **7** **(**ítem 26), de dibujo de rectángulos, la realiza correctamente y usa 8 y 10 cm exactos, como expresa el enunciado.

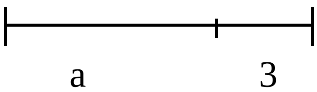
La pregunta **8** como la 9 de esta parte del Pretest (Pr1) y la 6 del postest de expresiones algebraicas, Po1 (primera parte del Postest), es de cálculo de áreas. El alumno usa en todos los apartados A = b . a.

En la pregunta **8** (ítems 27 - 31), en concreto en el apartado c, ítem 29, añade cm^2 aunque no se especificaba ninguna unidad. El apartado d) no lo resuelve, ni
siquiera lo intenta:



En la pregunta **9** (ítems 32 - 35), sus fallos no se relacionan con el concepto de área precisamente sino con la operatividad con las letras, los mostramos en el siguiente cuadro:

Apartado	ítem	dice	debe decir
a)	32	$b \,.\, 3 = 3\,b^2$	3b
b)	33	$3\,a \,.\, 4 = 12\,a^2$	(3 + a) . 4
c)	34	$36 + a = 36\,a\,cm^2$	$36 + a\,cm^2$
d)	35	$3\,a \,.\, 4\,b = 12\,ab^2$	(3 + a) (4 + b)

Como se aprecia sustituye  por 3a.

Parece claro que al tratarse del cálculo de áreas intenta expresar unidades cuadradas añadiendo, sin más, un exponente dos a la letra última que aparece.

La pregunta **10** (ítems 36 - 38), de sustitución formal en el cálculo de valores numéricos, la resuelve toda bien. Sólo pone los resultados finales. Tiene clara la sustitución, cumpliendo la ley de concatenación en “4. a” y “5 a - 3”.

En la pregunta **11** (ítems 39 - 42), donde ha de hacer uso de la propiedad distributiva, resuelve bien la distributividad pero vuelve a fallar en la operatividad posterior a ella, y agrupa dos términos semejantes (ab y ba) pero da un resultado incorrecto “a b^2” y además en las dos ocasiones que se presenta la situación (ítems 41 y 42). Hay que indicar que en el enunciado de esta cuestión, se da un apoyo en el S.R.V.G. para la expresión de la distributividad.

La pregunta **12 (**ítem 43), no la intentó resolver. Se trata de resolver una ecuación sencilla que se ha de plantear previamente dado un enunciado verbal "Hallar un número tal que su triplo aumentado en 2, dé 29".

En la pregunta **13 (**ítem 44), da los resultados correctos pero no especifica absolutamente nada acerca del proceso que ha realizado.

En la pregunta **14 (**ítems 45 – 48), establece las relaciones solicitadas entre enunciados verbales y ecuaciones presentadas y las resuelve correctamente.

La segunda parte del Pretest (Pr2) comprende también, como ya se indicó, 14 preguntas con 49 ítems.

La pregunta **1** (ítems 1 - 4), es similar a la cuestión 3 de Pr1 y realizó los dos primeros ítems (1 y 2), mal; el apartado c (ítem 3), bien y el apartado d (ítem 4) "8x + 3 = 5 x + 9", ni siquiera lo intentó.

La pregunta **2** (ítems 5 - 8), similar a la cuestión 4 de Pr1 la realizó toda bien.

La pregunta **3**, ítem 9, donde se da un enunciado verbal, la hizo bien.

La pregunta **4,** ítem 10, también de enunciado verbal en contexto habitual para los niños como es el de pegatinas, la hizo bien; contenía las operaciones de multiplicar y dividir. También explicó el proceso que había llevado a cabo.

En la pregunta **5** (ítems 11 - 17) manifiesta varias situaciones de resolución: a) ítems mal resueltos, concretamente los 11, 12, 14, 15 y 17; b) no intenta buscar la solución en los ítems 13 y 16. Estos últimos se refieren a sustitución formal. Es importante considerar que una de las expresiones que aparece 5 a - 3 la había resuelto bien en el ítem 38 de Pr1 dando a "a" el valor 3 y ahora la respuesta al transformado de 5 a + 3 si a = 2b, la hace mal, pues se limita a dar a "a" el valor 2 ó al b, el valor 1.

A la pregunta **6** (ítems 18 y 19), tampoco le busca solución. Se refiere a elegir entre expresiones algebraicas cuál es la más grande y cuál, la más pequeña.

Asimismo la cuestión **7** de contexto aditivo, apartado a, en los ítems 20, 21 y 22 y contexto multiplicativo, apartado b, en los ítems 23, 24 y 25 es de respuestas variadas:

Correctas Ítem 20 estructura aditiva: a + 4 si a = 8.
Ítems 23 y 25 estructura multiplicativa.

Incorrecta Ítem 24 estructura multiplicativa, se trata de multiplicar por 4, n + 5, y da como resultado 20n.

Ausentes Ítems 21 y 22

Los ítems de estructura aditiva: a + 4 si a = n + 5 (ítem 21) y si a = 3n (ítem 22), tampoco intenta resolverlos.

El alumno hace una observación: “en álgebra no se pueden sumar términos que no sean semejantes”, quizás para justificar sus “ausencias” en resolver algunos ítems.

La pregunta **8** (ítems 26 - 34), de simplificación de expresiones le resultó muy difícil, al menos eso parece. De hecho el único ítem resuelto correcto es el 26. Los 27, 28 y 29 los hace mal.

Ítem	dice en el segundo miembro	debe decir
27	$2\,a + 5\,b = 7\,a\,b$	$2\,a + 5\,b$
28	$(a + b) + a = 3\,a^2\,b$	$(a + b) + a = 2\,a + b$
29	$2\,a + 5\,b + a = 8\,a^2\,b$	$3a + 5b$

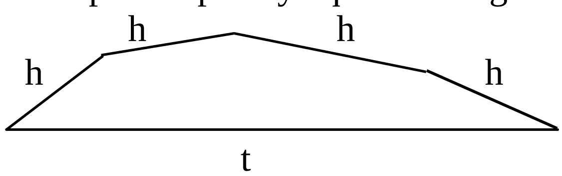
Esta pregunta se planteó en el postest también como se verá y también hizo todo los ítems mal pero, al menos, intentó resolverlos.

El resto de los ítems, desde el 30 al 34, no los hizo.

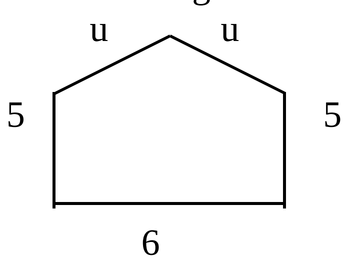
La pregunta **9,** ítem35, de cálculo de perímetro, con la ayuda del concepto de perímetro mediante un ejemplo, lo hizo bien, pero al final se equivocó al sumar.

La pregunta **10** (ítems 36 y 37), también de cálculo de perímetros, la resuelve en parte bien, ítem 36, pero considera como parte del perímetro un segmento trazado dentro del rectángulo (ítem 37).

En la pregunta **11** (ítems 38 - 40), también referida a perímetros comete un error que parece por despiste ya que en la figura



del ítem 39 su respuesta es correcta 4 h + t y sin embargo en el ítem 40 para el cálculo del perímetro de la figura:



da como resultado 16 u. Ha sumado los números y ha añadido la incógnita sin tener en cuenta si se repite o no.

El ítem 38 lo resolvió bien.

En la pregunta **12** (ítems desde el 41 al 44) de conversión a la representación formal algebraica, para el ítem 41 “El precio de m discos a 760 pts c/u”, da como respuesta m = 760 y para el ítem 42 “lo que cuesta un lápiz, si 15 cuestan p pesetas”, la respuesta es 15: m.

La pregunta **13** (ítem 45) no la intenta, ya se verá cómo en el postest de ecuaciones la resuelve y comprueba los resultados.

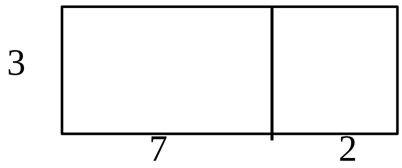
En la última pregunta, la **14** (ítems desde el 46 al 49) referida a cálculo de perímetros se ratifica que la idea de perímetro la tiene clara, sin embargo sigue fallando la operatividad correcta con las letras; si suma números iguales lo hace bien, si se trata de letras, mal:

$$a + a = a^2; \quad b + b = b^2$$

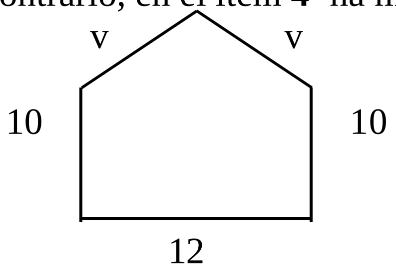
transforma los resultados en potencias, o sea las sumas en productos.

Describimos la actuación del alumno en la primera parte del Postest (Po1).

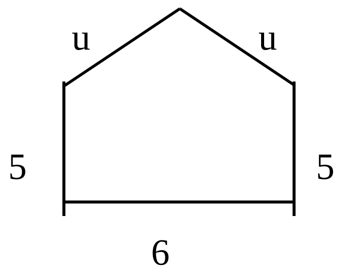
La pregunta **1** de cálculo de perímetros (ítems desde el 1 al 6) la resuelve mejor en el postest; sin embargo, su error sigue en el apartado d, ítems 6, cuando la figura aparece subdividida.



Por el contrario, en el ítem **4** ha mejorado su actuación en



dando como perímetro p = 32 + 2v y en el pretest había dado “16u” para el perímetro de:



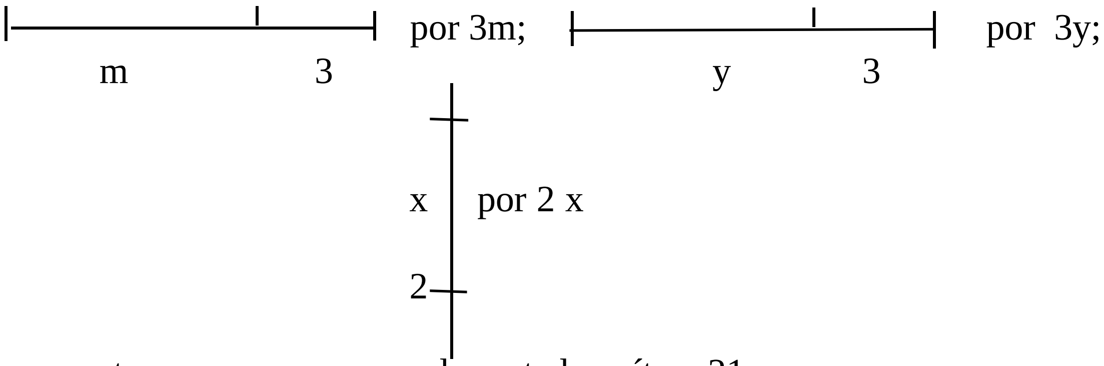
La pregunta **2,** ítem 7, también relativa a perímetro, la resuelve bien.

En la pregunta **3**, ítem 8, de problema de enunciado verbal con datos numéricos, sustituye correctamente los datos desconocidos, por variables.

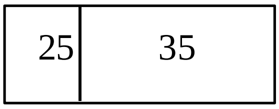
En la pregunta **4,** ítem 9, intenta seguir el mismo proceso que en el anterior y se equivoca.

En la pregunta **5** (ítems 10 - 18), de sustituciones formales, sí se manifiesta una mejora con respecto al Pretest. Allí lo había hecho mal e incluso algunos apartados (ítems 13 y 16) no había intentado resolverlos. En esta ocasión se equivoca sólo en la pregunta 5 en su apartado i (5, i , 18), pero parece un despiste.

En el cálculo de áreas de rectángulos, en la pregunta **6** (ítems desde de 19 al 22) ya ha corregido el añadir unidades concretas no propuestas, pero sigue operando mal con las letras y haciendo sustituciones no lícitas, como:



y comete un error nuevo en el apartado c, ítem 21:



dando como resultado del área: A= 25 . 35 = 875, o sea multiplica en lugar de sumar las áreas de los subrectángulos indicados.

En la pregunta **7** (ítems desde el 23 al 31) de operatividad con letras y simplificación todo lo hace mal, aún peor que en el Pretest. Existen errores repetidos. Adjuntamos esquema:

Nº de Items	Prueba Pr	Nº de Items	Prueba Po
26	Bien	23	$7\ a^2$
27	7 a b	24	7 a b
28	$3\ a^2\ b$	25	$3\ a^2\ b$
29	$8\ a^2\ b$	26	$8\ a^2\ b$
30	x	27	$1\ a\ b^2$
31	x	28	1 b
32	x	29	$2\ a^2$
33	x	30	$3\ a^2\ b$
34	x	31	$2\ a^2\ b^2$

La pregunta **8** (ítems 32 - 39), de conversión de registros, concretamente del lenguaje habitual a la representación formal algebraica la resuelve mejor que en el Pretest (Pr1, c, 12), pero no del todo bien, ni parece hacerlo con seguridad.

La pregunta **9** (ítems 40 - 43), de sustitución en general y formal, la resuelve toda bien. Se aprecia seguridad en la concatenación.

La pregunta **10** (ítems 44 - 47), es similar al Pr1, 11 (ítems desde el 39 al 42), pero en aquél existía apoyo geométrico. Sigue cometiendo errores del mismo tipo. Es significativo que en ambos la distributividad la lleva a cabo bien, pero luego la operatividad es incorrecta. Por ejemplo:

$$a\ .\ a = 2\ a^2$$

a b - a c = 2ab - 2ac; nos preguntamos, ¿multiplica todos los términos por dos?, ¿pone 2 por tratarse de dos letras, iguales a no?

En la pregunta **11,** ítem 48, consistente en el dibujo de rectángulos, su respuesta es correcta. Utiliza medidas exactas, 4 cm para “4” y 6 cm para “6”. También en el Pretest, Pr1 7 (ítems 26) lo había hecho bien.

La pregunta **12,** ítem 49, de cálculo de perímetro como la (9,0,35) de Pr2 la hizo bien.

Se constata que al parecer, globalmente, los conceptos de área y perímetro (sea cual sea el polígono), los tiene bien adquiridos (habilidad de carácter conceptual C_2). La propiedad distributiva también la desarrolla bien (O_2). Las sustituciones formales son las adecuadas (O_3), así como la interpretación de los registros (C_3), sin embargo su habilidad operativa no ha mejorado (O_1), sea cual sea el contexto en que aparezca.

Se muestra a continuación un resumen de la actuación del alumno en los ítems de la prueba Po1 y algunas correspondencias de los mismos con los de la prueba Pr (tabla 3.11).

[B = solución correcta; M = solución incorrecta; cuando aparece un ( ) con una letra dentro, implica que no ha habido variación en la actuación del alumno, tanto en respuestas correctas como incorrectas; O.B., operatividad básica].

Pr1	**Pr2**	**Habilidad a detectar**	**Po1**	**Observaciones**
	36 (B) 38 (B) 39 (B) 40 (M)	O_1 y C_2	1 (B) 2(B) 3(B) 4(B) 5	
	37 (M)	O_2	6 (M)	No superado
	49 (B)	C_2	7 (B)	
		C_1	8 (B) 9 (M)	
	11 M 12 M 13 14 M 15 M 16	O_3	10 B 11 B 12 B 13 B 14 B 15 B, usó paréntesis bien. 16 B 17 B 18 M	Sustitución Formal
29 cálculo; añadió unidades		O_1	19 B, no añadió unidades	Mejora
35 (M)		O_2	20 (M)	O. B. No superada.
31 B		O_1	21 (M), no tenía unidades	
33 (M)		O_2	22 (M)	O. B.

Pr1	Pr2	Habilidad a detectar	Po1	Observaciones
				No superada.
	26 B 27 (M)	O_1	23 (M) 24 (M)	Peor No superado
	28 (M)	O_2	25 (M)	O. B. No superada.
	29 (M)	O_1	26 (M)	O. B. No superada.
O. B. No superada.	30 31	O_2	27 M 28 M	O. B. No superada.
	32 33	O_1	29 M 30 M	O. B. No superada.
	34	O_2	31 M	O. B. No superada.
17 (B) 18 (B), suma de dos números distintos	41 M 42 (M) 43 B 43 B 6 B, mitad de un número	C_1	32 B 33 (M) 34 B 35 M 36 (B) 37 M, 3ª parte del número “f” 38 B, triplo de un número 39 (B), suma de tres números cualesquiera	No superado Peor
		O_3	40 B 41 B 42 B 43 B	Sustitución Formal
		O_2	44 B 45 B 46 M 47 M	O.B. O.B. No superada
26 (B)	35 (B), despiste operaciones	C_1 y C_2	48 (B), despiste, en figura no pone bien la dimensión, aunque el dibujo es correcto	Operatividad Básica
35 M		O_1 y C_2	49 B	

Tabla 5.11

Se podría relacionar 16, 17 y 18 de Po1 con 38 de Pr1 y 17 de Pr2. El 38 está bien y el 18 casi bien, quizás haya habido despiste.

Pr1 (ítem 38)	Pr2 (ítem 17)	Po1 (ítems 16-18)	
¿En qué se transforma “5 a - 3, si a = 3? Solución: 12	Ahora si a = 2b, ¿en qué se transforma “5 a + 3? Sol: 10 + 3 = 13	$x \rightarrow 5 . x + 3$	
		ítem 16	$3 \rightarrow 5 . 3 + 3$
		ítem 17	$4 \rightarrow 5 . 4 + 3$
		ítem 18	$2 a \rightarrow 5 . 2a$

Pr1 (ítems 21-24)		Po1 (ítems 40-43)	
ítem 21 Si a= 7, b= 3 y c= 5, calcula: a + b + c	a + b + c = 7 + 3 + 5 = = 15	**ítem 40** ¿En qué se transforma a + 4, si a = 3?	7
ítem 22 Si a= 3, b= 7 y c= 2, calcula: a - b + c	a - b + c = 3 - 7 + 2 = = -2	**ítem 40** ¿En qué se transforma 4b, si b = 5?	20
ítem 23 Si a= 9, b= 8 y c= 6, calcula: a + b - c	a + b - c = 9 + 8 - 6 = = +11	**ítem 40** ¿En qué se transforma 5 c - 4, si c = 6?	26
ítem 24 Si a= 2, b= 8 y c= 3, calcula: a x (b - c)	a x (b - c) = 2 x (8-3) = 2.8 - 2 . 3 = 10 16 6	**ítem 40** ¿En qué se transforma 5b + 2 a, si a = 3 y b = 4?	26

La obtención de valores numéricos para este alumno ha sido muy fácil; se observa en los números 21, 22, 23 y 24 de Pr1 y en los números 40, 41, 42 y 43 de Po1, a pesar de que la distinta forma de plantear el enunciado en estos últimos ítems, suele crear problemas, en general, a otros alumnos.

La propiedad distributiva siempre la aplica bien pero luego opera mal con las letras, como ya hemos reiterado (números 44, 45, 46 y 47 de Po1 y con apoyo geométrico ítems 39, 40, 41 y 42 de Pr1 11).

La mayor dificultad de este alumno hasta el final ha sido el problema de la operatividad con las letras que tiene una incidencia especial cuando se trata de hacer el cálculo de áreas donde intenta expresar unidades cuadradas añadiendo, sin más, un exponente dos a la letra última que aparece. Tiene asumido que el área tiene dos dimensiones y no se preocupa de donde surgen.

También resuelve correctamente, en la mayoría de los casos, las distintas situaciones de sustitución así como el trabajo con la propiedad distributiva como tal, aunque vuelve a fallar en la operatividad posterior al desarrollo de la misma. Hecho que se repite en el cálculo de los perímetros, donde teniendo claro el concepto de perímetro, falla en las operaciones que aparecen en el cálculo del mismo.

Por otra parte hay que indicar que existen situaciones a las que no se enfrenta, aunque no son muchas. Por ejemplo “hallar un número tal que su triplo aumentado en 2, dé 29”.

En el hecho de hacer conversiones de registros, concretamente desde el lenguaje habitual al formal algebraico, sorprende que no haga bien algunas de ellas muy cercanas al contexto propio de su edad, precio de discos, de lápices, etc.

En todos los casos anteriores son comprensibles los resultados tratándose del Pretest. Algunas de estas situaciones han sido superadas después de la instrucción.

Con relación al Postest hay que expresar que ha habido mejoría y esto no sólo con relación a sí mismo sino con relación al nº de orden de buenos a peores resolutores de los ítems como se manifiesta en las tablas y se ha indicado en la página …

Hay que manifestar, sin embargo, que en relación al cálculo de perímetros ha mantenido el error del comienzo cuando se trata de que la figura total está subdividida.

Sí ha mostrado mejoría en las sustituciones formales no sólo en resolverlas correctamente sino en abordarlas todas. Muestra gran seguridad en la concatenación y en la propiedad distributiva.

En el cálculo de áreas también ha habido variación tanto positiva como negativa: como positiva acepta ya unidades sin concretar si el enunciado no las da, sin embargo, sigue haciendo sustituciones no lícitas como 2 + x por 2x o 3 + y por 3y cuando las dimensiones vienen subdivididas, bien la base o la altura del rectángulo, aunque en realidad no es el concepto de área el obstáculo, sino la operatividad básica.

También, y como era de esperar, ha mostrado variación hacia la positividad en la conversión de registros desde el habitual al formal algebraico.

Podríamos sintetizar indicando que en la parte relativa a expresiones algebraicas, globalmente, los conceptos de área y perímetro (sea cual sea el polígono) son correctos. La interpretación del lenguaje y conversión de registros es la correcta, sin embargo su operatividad está muy floja, independientemente del contexto en que aparezca.

En cuanto al trabajo realizado en las sesiones de entrevista individual hay que indicar que en la primera sesión la primera cuestión relativa a sustitución ya se le había planteado en la parte 2ª del Pretest, concretamente en el nº 5 y su resolución fue incorrecta e incluso parte de ella, sin resolver. Ahora en la entrevista la ha resuelto completamente correcta, incluyendo la última expresión de sustitución formal, en la que en el pretest había dado a “a” un valor numérico, concretamente el “2”, pues tenía necesidad de obtener un número, no aceptaba la respuesta abierta.

En la segunda pregunta:

n multiplicado por 4 se puede escribir como 4n.

Multiplica por 4 cada uno de los siguientes:

8 n + 5 3n

también contenida en la segunda parte (Pr2), concretamente en la pregunta número 7 apartado b), la situación ha sido similar: en aquella ocasión sólo hizo correcto el primer apartado de carácter estrictamente aritmético y ahora todo lo resuelve adecuadamente, tanto las expresiones aditivas como las multiplicativas.

Las preguntas 3, 4 y 5, que presentan conversión de registros desde el lenguaje habitual al sistema de representación formal, por ejemplo: **Pepe mide 8 cm más que Juan y Eduardo mide 4 cm más que Juan,** no parece en principio plantearle gran dificultad, sin embargo, se le hace muy difícil expresar todo en función de una sola letra. La conversión desde la expresión alfanumérica a la elaboración de una historia, esto es desde la representación formal al lenguaje habitual, le resulta fácil.

La pregunta 6ª, que ya ha aparecido en el Cuestionario C_4 de nuestra investigación, en los ítems desde el 26 al 34 y en la Po1, postest de expresiones algebraicas, en los ítems desde el 23 al 31:

a + 3 a puede ser escrito de forma más simplificada como 4a.

Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible:

2 a + 5 a =	**3 a - (b + a) =**
2 a + 5 b =	**a + 4 + a - 4 =**
(a + b) + a =	**3 a - b + a =**
2 a + 5 b + a =	**(a + b) + (a - b) =**
(a - b) + b =	

sí que ha resultado para este alumno de gran complicación, pero lo que ocurre es que al menos en esta sesión se ha enfrentado y atrevido a intentar buscar una solución.

A continuación se expresan los resultados correspondientes en la tabla 3.12: en la primera columna, el enunciado y en las columnas siguientes, los resultados relativos a las pruebas mencionadas en el encabezado de las mismas.

Enunciado	Pr1	Po1	Entrevista Individual. 1ª Sesión
2 a + 5 a	7a	~~$7a^2$~~	7 a
2 a + 5 b	~~7ab~~	~~7ab~~	como está, ~~7ab~~
(a + b) + a	~~$3a^2b$~~	~~$3a^2b$~~	2 a b + a = ~~3 a b~~
2a + 5 b + a	~~$8a^2b$~~	~~$8a^2b$~~	~~8ab~~
(a - b) + b	x	~~$-1ab^2$~~	a b + b = ~~2 b + a~~
3a - (b + a)	x	~~1b~~	3 a - 2 a b = ~~1 a b~~
a + 4 + a - 4	x	~~$2a^2$~~	5 a + 3 a = ~~2 a~~
3a - b + a	x	~~$3a^2b$~~	3 a - 2 a b = ~~1 b a~~
(a+b) + (a-b)	x	~~$2a^2b^2$~~	2 a b + a b = ~~3 a b~~

Tabla 5.12

Como se observa el acercamiento a lo correcto en esta última parte es poco, sin embargo parece sentirse seguro trabajando aunque lo haga inadecuadamente.

También indica que “2 a + 5 b” “queda como está” y luego actúa incoherentemente y escribe la expresión “7 a b”, como si fuese equivalente a “2 a + 5 b”.

Sigue cometiendo errores sistemáticos, tanto en el Pretest, como en la instrucción y Postest.

Por ejemplo: en “(a + b) +a” indica en la entrevista individual que como delante de “a “ hay un 1 y delante de la “b” hay un 1, entonces se pone “2 a b + a = $3a^2b$” y se han sumado los coeficientes. Se le insiste y se le pregunta el por qué “a^2” y dice porque hay “2ª”.

Reitera el error de las pruebas anteriores en “2 a + 5 b + a = $8a^2b$”, luego tacha el “cuadrado”. También expresa en “(a - b) + b” que 1a - 1b = a b y más la b = 2b + a.

En “a + 4 + a - 4” da la siguiente expresión “a + 4 + a - 4 = 5 a + 3 a = 2 a”, porque sale del 1 de la a + 4 y el 3 del 1 de la “otra a menos el otro 4”.

Se detectan dos expresiones erróneas sistemáticamente: “2ab” considerado como resultado de “a + b” y “ab” como resultado de “a-b”, así como la tendencia a sumar los coeficientes de todos los términos, sean o no semejantes.

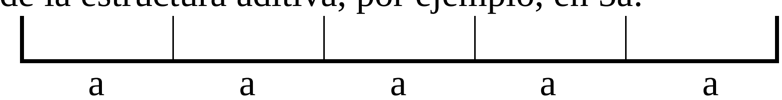
Se considera un “avance positivo” el abandono del exponente “2” en las situaciones aditivas.

En la pregunta 7 que es idéntica, a la 4, ítem 9 de Po1:

La “paga” que da un padre a un niño cada semana es de “p” pesetas, ¿cómo expresarías el dinero que reúne ese niño durante 6 semanas?, su respuesta es correcta y no le ha planteado duda, aún cuando en el postest Po1, lo hizo mal.

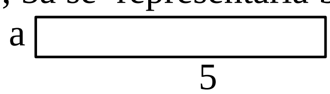
En general se puede afirmar que trabaja bien en la sustitución, incluso la sustitución formal. La operatividad con las letras le resulta francamente difícil y los resultados son malos, no se ha visto avance significativo y, en la semántica, su comportamiento se puede calificar de regular.

Siguiendo con el análisis de esta primera sesión, en el uso del rectángulo para representar una expresión algebraica teniendo al S.R.V.G. como soporte, para posteriormente facilitar la conexión entre los lenguajes, se plantea el abordar el Álgebra desde el principio, desde el punto de vista no sólo de la estructura aditiva, por ejemplo, en 5a:



sino multiplicativa.

Por ejemplo, 5a se representaría bidimensionalmente:



Sólo se ha pretendido, de momento, trabajar como máximo con dos dimensiones.

Como objetivo señalamos el analizar una nueva aplicación del área del rectángulo a la representación de términos y expresiones algebraicas.

También el comprender, interpretar y utilizar elementos y formas de expresión matemática de diversa naturaleza, no de manera abstracta y desconectada de la realidad, sino relacionada con ella.

Asimismo intentar que los objetos algebraicos que manejan tengan significado para el alumno.

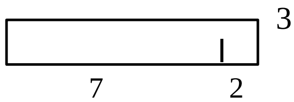
Como procedimientos se usaron la: a) simbolización mediante letras, números conocidos, productos de dos números, dos letras o letra y número de perímetro, área o dimensiones del rectángulo; b) simbolización de relaciones mediante fórmulas; c) simbolización mediante polígonos de letras, números y expresiones algebraicas de segundo grado como máximo.

Todo lo anterior pretende conseguir en los alumnos una actitud de valoración del lenguaje algebraico para representar, comunicar o resolver situaciones de la vida cotidiana y valoración de las relaciones entre las diferentes representaciones semióticas: lenguaje habitual, numérico, gráfico y algebraico.

En esta fase de representaciones geométricas, Z capta la unidad muy bien y acepta diferentes representaciones de la misma expresión sin dificultad.

La conversión desde el lenguaje habitual la hace correctamente, no manifiesta duda ni siquiera cuando ha de utilizar paréntesis.

En el trabajo con perímetros, su comportamiento es el adecuado; sólo usó unidades de medida concretas cuando se le aportaron las dimensiones con ellas, hecho no frecuente en la enseñanza en general. Sin embargo existe a lo largo de todo su trabajo un error que no ha corregido y es el del cálculo del perímetro cuando existe un trazado de un segmento adicional que no es necesario para el cálculo:



siempre suma la medida del segmento dibujado dentro del rectángulo, al igual que lo hizo en el Pretest y Postest.

En la segunda sesión de la entrevista individual, con el fin de ratificar la apreciación de algunas de las cuestiones de la primera sesión, se presentan nuevos ejercicios de sustitución.

Aquí la operatividad va asociada en algunos casos a la propiedad distributiva y a su vez está relacionada con el uso del rectángulo en el S.R.V.G. y la utilización del cuadro de doble entrada como sistema de representación visual formal.

También se hace uso de los conceptos de perímetro y área.

La conversión de lenguajes en esta sesión se ha visto enriquecida con contextos concretos.

Este alumno sigue permitiendo verificar su seguridad en el uso de códigos personales; se pueden considerar como tales el hecho de representar siempre el producto primero con un punto “.”, y luego, haciendo uso de uno de los convenios del Álgebra, copia las expresiones prescindiendo de él, (pregunta 1):

Rellena los vacíos como se indica en el primer apartado de cada columna:

x -----x + 3	**x ----- 7x**	**x ----- 5.x + 3**
6 -----	**2 -----**	**3 -----**
n -----	**r -----**	**4 -----**
b+2 -----	**b + 2 -----**	**2a -----**

En relación a la propiedad distributiva manifiesta claramente su seguridad en la misma, tanto por la izquierda como por la derecha y es sorprendente que aquí no asocia términos que no son semejantes (pregunta 2):

Calcula:

a) 6 . (b + a) =

b) (a + 2) . 3 =

c) (a + 2) . (b + a) =

d) a . (b - c) =

En la pregunta 3, de gran dificultad en gran parte del alumnado, razona muy bien; desde el comienzo lo hace correctamente, sin dar ningún valor numérico a “n” y, luego da a “n” el valor 8:

Escribe de las siguientes expresiones cuál es la más grande y cuál la más pequeña:

n + 1, n + 4, n - 3, n, n - 7

Razona tu respuesta...

Se le pregunta si “n” puede tener distintos valores y expresa que tendría que tener el mismo. Esta situación es más aceptada por la mayoría del alumnado que cuando se solicita que varias relaciones se expresen en función de una única variable, y dan valores distintos, según les convenga, como hizo este alumno (Z) en una pregunta de la sesión anterior. En esta pregunta que estamos comentando entiende que al sumar un número mayor a un número dado, el resultado es siempre mayor y por el contrario al restar un número mayor a uno dado, el valor de la expresión resultante es siempre, menor. Hay que hacer la observación que esta misma cuestión se había planteado en la segunda parte del Pretest (Pr2), ítems 18 y 19, y ni siquiera abordó su resolución.

La pregunta 4 la supera sin problema alguno, al ser de conversión de registros, desde el habitual al registro de la R.F. algebraica. Conoce perfectamente las palabras-clave usadas: triple, doble, siguiente, anterior, cuadrado, producto, diferencia. Uno de los ítems de esta pregunta relaciona contextos de peso y dinero, y tampoco le ofrece confusión. Quizás este ítem debería haber estado incluido en la pregunta siguiente:

Ejemplos de ellas son:

1. El triple de x

2. El doble de n menos 4

3. El producto de a, b, c

“4”El precio de m kilogramos de manzanas a y ptas el kg, etc.

En la pregunta 5, de conversión de registros en contextos, la solución también es correcta y al igual que la anterior posee dos ítems con lenguaje exclusivamente alfanumérico sin contexto específico de otro carácter:

Traduce a lenguaje algebraico las frases e ideas siguientes:

a) El precio de m discos a 760 pesetas cada uno.

b) Lo que cuesta un lápiz, si 15 cuestan P pesetas.

c) El número que representan 50 unidades menos que el número h.

d) El número que es la cuarta parte del número y.

Las dos primeras expresiones de esta cuestión 5 no las entendió en el Pretest en su segunda parte (Pr2), aquí ya se siente seguro ante ellas. Es interesante también que el ítem “el número que representa 50 unidades menos que el número h”, que, en general, se presta a tanta confusión, a este alumno no le plantea duda alguna.

Parece habitual en él, como si se tratase de un código personal, que cuando se pide un número desconocido lo representa por “x” y luego lo pone como segundo miembro de la expresión que explicita correctamente los datos de los enunciados.

La pregunta 6 de conversión de registros en contexto de frutas ya había aparecido en el primer cuaderno de clase en su ficha 11 (DISEA I) y tanto allí como aquí en la entrevista, el alumno cometió el mismo error y también los mismos aciertos; el error fue no usar corchetes cuando lo necesitaba y los aciertos están en multiplicar por 2 y por 10 para hallar el valor de 2 kg y 10 kg, dado el valor de la unidad:

En un supermercado un kilo de peras cuesta b pesetas; un kilo de manzanas cuesta 5 pesetas más que el de peras; un kilo de plátanos, 13 pesetas menos que el de peras, y un kilo de uvas 8 pesetas más que el kilo de plátanos.

Completa esta tabla:

PESO	PERAS	MANZANAS	PLÁTANOS	UVAS
1 kg	b	b + 5	b - 13	(b - 13) + 8
2 kg		2. (b + 5)		
10 kg				

En la pregunta 7 propone un ejemplo que él mismo reconoce no es correcto en relación al enunciado, por lo cual su actuación se considera positiva:

Expresar la base y la altura de cualquier rectángulo en el que la base sea el doble de la altura.

En las preguntas 8 y 9 es curioso observar que estos ítems han sido tratados en el cuaderno número 2 de clase (II), en la ficha 3, los ha comprendido en cuanto a su expresión algebraica incluso las palabras-clave “excede” y “difiere” y sin embargo no es capaz de hacer correctamente la representación:

Expresar la base y la altura de cualquier rectángulo cuya base exceda en 5 unidades a la altura; la base y la altura difieren en 10 unidades.

Representa con rectángulos los resultados.

Creemos que ha influido el no estar muy claro el enunciado, parece un único apartado cuando realmente son dos.

En la pregunta 10:

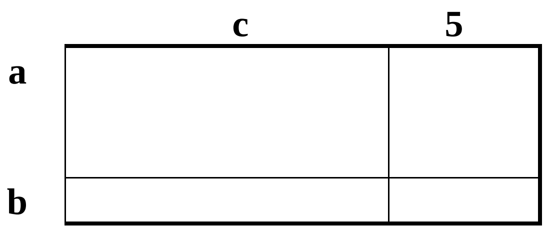
Representar (a + 5) . b; (x + 3). 2; (y + c) . 3, mediante rectángulos, y utilizar un cuadro de doble entrada, le resulta bastante fácil el cuadro de doble entrada, no sólo el interpretarlo sino el elaborarlo. Sin embargo la representación en el S.R.V.G. le es bastante difícil, incluso no parece ayudarle el cuadro de doble entrada para la representación, usando el rectángulo como unidad.

En la pregunta 11:

¿Es igual $(a + b)^2$ que a (b + a) + b (b + a)? sigue muy bloqueado.

En la 12:

El producto (a + b) (c + 5) se puede escribir utilizando el área del rectángulo de lados a + b y c + 5, como:



(a + b) (c + 5) = a . c + a . 5 + b . c + b . 5

Escribe los siguientes productos:

a) a . (b + 5) =

b) (a + 3) (b + 2) =

c) (a + b) (a + b) =

d) (a + b + 3) (a + b + 3)

a pesar de dar el ejemplo del rectángulo para la representación de la propiedad distributiva, lo ignora totalmente a la hora de resolver el ítem.

Sigue con sus dudas de operatividad con las letras, y al comienzo transforma “ab + ba” en $(ab)^2$ como en la prueba Pr1, ítems 41 y 42, pero luego cae en la cuenta de que “está sumando”.

En cuanto a la representación del rectángulo hay que guiarlo bastante para que reflexione sobre ella, pero sí parece interiormente tenerlo asumido, pues de lo contrario no lo aceptaría, no es “su estilo”.

En los cálculos del área y el perímetro en la pregunta 13:
Un rectángulo tiene de altura “m”. Si la base es doble de la altura:
a) ¿cuánto vale el perímetro?,
b) ¿cuánto vale el área?
no duda en absoluto, pero sigue en principio utilizando “A = b . a”.

Su situación en los ítems de la pregunta 14 relativos al cálculo de áreas similares a los ítems 19, 20, 21 y 22 de la prueba Po1 no está nada clara, pues aún cuando en Po1 siempre confunde las dimensiones dadas por varios elementos en un producto, en lugar de sumar, aquí en la entrevista ya en algún momento usa la suma, pero otras veces, no. Los errores en las operaciones con las letras se suceden: “3y . 2x = 6yx”; y, “36 + a = 36 a”

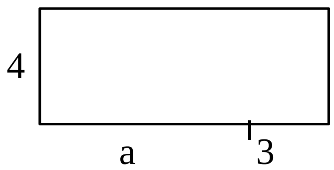
En Po1 no interpreta el cálculo del área total como suma de las dos subáreas indicadas, sino que multiplica los valores de las medidas; sin embargo, en esta sesión de la entrevista sí los suma.

Aquí en la entrevista hace caso omiso de los paréntesis y no los usa para “(3 + a) (4 + b)” y así le resulta:

“3 + a . 4 + b = 12 a b”

previo a considerar “3 + a” como base y “4 + b” como altura, ha indicado como base “3a” y como altura “4b”.

En otro ítem de esta cuestión también comete el mismo error y da como resultado del área del rectángulo:



12a.

A modo de ejemplo se muestran a continuación (tabla 3.12) varias tareas relativas a diferentes datos obtenidos por los distintos instrumentos utilizados y organizados según las categorías anteriores: O_1, O_2, O_3, C_1, C_2, y C_3.

Tareas	**Resultados**
O_1 Realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis.	
O_1 a) Realiza las siguientes operaciones: a.1) - 4 + 20 - 8 a.2) (+5) + (-20) = a.3) (-2).(+5) = a.4) (+24) : (-6) = b) La cuestión a + 3 a puede ser escrita de forma más simplificada como 4a. Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible: b.1) 2 a + 5 a b.2) 2 a + 5 b	 a.1) +8 (Pr) a.1) +5-20 = -15 (Pr) a.1) -10 (Pr) a.1) -4 (Pr) b.1) 7 a (Pr y E), 7 a^2 (Po) b.2) 7 ab (Pr y Po), él dice “como está” y escribe 7ab (E).

Tareas	**Resultados**
b.3) 2 a + 5 b + a b.4) a + 4 + a - 4	b.3) 8 a^2 b (Pr y Po), 8 a b (E) b.4) No resuelto en Pr. 2 a^2 (Po) , 5 a - 3 a = 2 a (E)
O_2 Realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis.	

O_2
a) Calcula:
a.1) 6 . (b + a)
a.2) (a + 2) . 3
a.3) (a + 2) . (b + a)
a.4) a (b - c)
b)La cuestión a + 3 a puede ser escrita de forma más simplificada como 4a. Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible:
b.1) (a + b) + a
b.2) (a - b) + b
b.3) 3 a - (b + a)
b.4) (a + b) + (a - b)
	
	a. 1) 6.b + 6.a = 6b + 6a (Po) y (E)
	a. 2) 3 . a + 3 . 2 = 3 a + 6 (Po) y (E)
	a. 3) a.b + a.a + 2.b + 2.a=2ab + 2a^2 +2b+2 a (Po);
	a.b + a.a + 2.b + 2.a=ab + a^2 +2b+2 a (E);
	a. 4) a .b - a . c = 2ab-2ac (Po)
	a .b - a . c = ab-ac (E)
	
	b.1) 3 a^2 b (Pr y Po); 2ab+a = 3ab (E)
	b.2) No resuelto en Pr;1ab^2 (Po); a b + b = 2 b + a (E).
	b.3) No resuelto en Pr; 1b (Po); 3 a - 2 a b = 1 a b (E).
	b.4) No resuelto en Pr; 2 a^2b^2 (Po); 2 a b + a b = 3 a b (E).

O_3 Hacer sustituciones formales referidas tanto a los procesos de particularizar como a generalizar	
O_3 a) a.1) Si a = 3, b = 7 y c = 2, calcula a-b+c=; a.2) Si a= 2, b= 8 y c = 3, calcula a x (b - c); a.3) ¿En qué se transforma 5a-3, si a= 3? b)Rellena los vacíos como se indica en el primer apartado de cada columna: x →x + 4 6 r b + 2 c) Rellena los vacíos como se indica en el primer apartado de cada columna: x → x . 4 6 r b + 2 Ahora si a = 2b, ¿en qué se transforma 5	a.1) 3 - 7 + 2 = -2 (Pr) a.2) 2 x (8 - 3) = 2 . 8 - 2 . 3 = 10 (Pr) 16 - 6 a.3) 12 (Pr) Pretest Postest Entrevista x→x + 4 x + 4 x + 4 6→ x+6 6 + 4 6 + 4 = 10 r→ r + r r + 4 r + 4 b+2 4 + b + 2 b + 2 + 4 = b + 6 Pretest Postest Entrevista x→ x . 4 x . 4 x . 4 6→ 6 x. 4 . 6 6 . 4 = 24 r→ r^2 4 r 6 . r = 6 r b+2→ 4 (b+2) 4 . b + 4 . 2 = 4 . b + 8 5 a+3

Tareas	**Resultados**
a + 3?	10 + 3 = 13 5 . (2 b) + 3 = 10 b + 3 a = 2 b
C_1 hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal	
C_1 a) El producto (a + b) (c + 5) se puede escribir utilizando el área del rectángulo de lados a + b y c + 5, como: c 5 a b (a + b) (c + d) = a.c + a.5+b.c+b.5 Escribe los siguientes productos: a) a . (b + 5) = b) (a + 3) (b + 2)= c) (a + b) (a + b) =	Pretest Entrevista a) a.b + a.5 a) a.b + a.5 b) a.b + a.2 + 3.b + 3.2= b) a.b + a.2 + 3.b + 3.2 = 2 a + 3 b + 6 c) a.a + a.b + b.a + b.b = c) a.a + a.b + b.a + b.b = = a^2 + ab + ba +b^2 = = a^2 + ab + ba +b^2 = = a^2 + $ab^{\cancel{2}}$ + b^2 = a^2 + 2 $(ab)^{\cancel{2}}$ +b^2
b) Representar (a + 5) . b, mediante rectángulos y utilizar un cuadro de doble entrada	b) 5 a b x a 5 b b . a b . 5 b) x b a a . b 5 5 . b a 5 b
c) c.1) En la clase de Matemáticas, Juan hizo tres ejercicios más que Maribel, y Sandra un tercio de Juan. c.2) Pilar tiene 5 pesetas menos que Sergio y Fermín tiene el doble que los otros dos juntos.	c.1) (E): Juan= hizo 3 ejercicios + que Maribel Maribel = x Sandra = $\frac{3+x}{3}$ c.2) (E): Pilar = x - 5 ptas 2x-5 Sergio = x ptas Fermín = 2 . (2 x - 5)
d) Escribe las operaciones siguientes en lenguaje algebraico: d.1) El triple de x. d.2) El doble de n menos 4. d.3) el triple de la suma de a y b.	d.1) 3x (Trabajo de aula y Entrevista) d.2) 2n - 4 (Trabajo de aula y Entrevista)

Tareas	Resultados
d.4) El doble de la diferencia entre h e i. d.5) El triple del cuadrado de b.	d.3) 3 (a + b) (Trabajo de aula y Entrevista) d.4) 2 (h-i) (Trabajo de aula y Entrevista) d.5) 3 b^2 (Trabajo de aula y Entrevista)
C_2 Contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como objetos geométricos y como número generalizado en contextos de área y perímetro.	
C_2 a) La "paga" que da un padre a un niño cada semana es de "p" pesetas, ¿cómo expresarías el dinero que reúne ese niño durante 6 semanas?"	a) paga cada semana = p p.v (Po) dinero que reúne en 6 semanas = v a) paga de un niño = "p" cada semana p.6 (E)
b) El chófer de un colegio hizo "n" viajes en un día, transportando 50 niños en cada viaje. ¿Cómo expresarías el número total de niños que transportó este día?	b) n= viajes n . 50 = x niños (Pr)
c)Calcula el área de la siguiente figura: A = 4 a 3	c) A = b . a = 3 a . 4 = 12 a^2 (Pr) A = b . c = 3 a . 4 = 12 a (Po)
d) Traduce al lenguaje algebraico: El precio de m discos a 760 pesetas cada uno.	d) m.760 (E)
e) El dueño de un estanco vende 135 periódicos cada día, ¿cómo expresarías el número total de periódicos vendidos en dos semanas (14 días).	e) x = 135 periódicos d = 14 días x . d (Pr)
f) Calcula el perímetro de la figura siguiente: 8 6 a perímetro =	f) 8 + 8 + 6+6+ a+ a = 28 a^2 16 12 a^2 (Pr) f) 8 + 8 + 6+6+ a+ a = 16 + 12 28 + 2 a (E)
C_3 Interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual.	
C_3 a) Escribe de las siguientes expresiones: n + 1, n + 4, n - 3, n, n - 7, cuál es la	a) No resuelto (Pr) E: más pequeña más grande

Tareas	Resultados
más grande y cuál la más pequeña: Razona tu respuesta…………………	n-7 n+4 n + 1, n + 4, n - 3, n, n - 7 8+1=9 8+4=12 8-3=5 8 1

Taba 5.13

Se observa en el cuadro anterior resultados de varios ítems que se propusieron al alumno en distintas ocasiones, en algunos de los cuales respondió de diferente forma.

En las habilidades cognitivas operacionales de las categorías O_1 y O_2, se observa que la mayor dificultad de este alumno ha estado en la falta de habilidades operacionales con las letras como se observa en los ejemplos indicados, en especial en la adición.

Esto se va a traducir posteriormente en fallos en el cálculo de áreas donde intenta expresar unidades cuadradas añadiendo un exponente dos a la letra última que aparece. Así si el área de

3  es 3b, la expresa con "$3b^2$.

b

Ya hemos señalado que tiene asumido que el área tiene dos dimensiones y no se cuestiona de dónde surgen.

Concretamente y a modo de ejemplo se transcribe literalmente el apartado b de la casilla O_1(A alumno, E, entrevistador):

A: (fijándose en el enunciado y señalando en la "a" de " a + 3a") *Aquí es como si fuera 1.*
E: O sea, que tú crees que aquí es como si tuviera un 1 ,¿no?
A: Sí, (empieza a sumar*) 1 a + 3 a = 4 a;* ***2 a + 5 a = 7 a; 2 a + 5 b =,*** *aquí no se podría porque no son términos semejantes, no se podría sumar.*
E: Vale, entonces, ¿cómo te quedaría?
A: No se podría sumar, ¿Cómo lo sumo?
E: ¿Y qué te queda entonces?
A: Eso, así. (2a + 5b)
E: Pues así, pues ya está.
A: 7ab.
E: ¿Es lo mismo? Si tú crees que no se pueden sumar lo dejas como está, y si tú crees que se tiene que poner 7ab, pues…
A: Es que no son términos semejantes, a mí me han enseñado eso, como no son semejantes no se pueden sumar..
E: ¿Cuál es entonces el resultado? ¿cómo mismo está?
A: Sí.
E: Pues ponlo, si tú crees que es así porque no son semejantes…
A: No, éste 2 a + 5 b = 7 a b.
E: Si tú crees…
A: 7ab.
E: Pasamos al tercer ejemplo.
A: ***2 a + 5 b + a = 8 a^2 b.***
E: O sea, cuando tú tienes a + a es a^2.
A: No, a + a = 2 a.

E: Sigue. Este caso (señalando al 2 a + 5 a) *y este caso* (señalando al 2 a + 5 b + a) *para tí, ¿es lo mismo?*
A: Sí son iguales.
E: Son iguales, ¿no?
A: No, el resultado que tendríamos en éste (señalando al 2 a + 5 b + a) *es mayor, es que a + a será 2a elevado al cuadrado.*
E: ¿Y este 2 a que tienes aquí?
A: Este es el que multiplica a la "a". Entonces no es al cuadrado 8ab.
A: ***a + 4 + a - 4.***
E: Por último, ¿qué piensas?
A: Es que yo aquí no puedo poner 4 a porque entonces estaría multiplicando.
E: ¿Entonces?
A: como no ponga…aquí tiene un 1. 5 a, no. Sería 5 a . 3 a esto es igual a 2 a.
E: O sea, que tú has sacado este 5 ¿de..?
A: Del a de la a + 4 y el 3 del 1 de la otra a menos el otro 4.
E: Ya.

Continuamos transcribiendo otro ejemplo de la categoría O_2 (apartado b, ejemplo 1):

A: (a + b) + a sería 2ab + a =
E: ¿Por qué pones 2 a b ? ¿qué crees tú?
A: Aquí delante de la "a" hay un 1 y delante de la "b" hay un 1, entonces se suman los coeficientes. Se pone 2 a b + a = 3 a^2 *b.*
E: ¿Por qué a^2*?*
A: Porque hay 2 a.
E: Vale.

Se siguen detectando dos expresiones erróneas sistemáticamente: "2ab" considerado como resultado de "a + b" y en otros ejemplos, no manifiestos aquí por razón de espacio, "ab" como resultado de "a-b", así como la tendencia a sumar los coeficientes de todos los términos, sean o no semejantes. Sin embargo en el diálogo se ratifica en que si los términos no son semejantes no se puede operar.

La comprensión de la propiedad distributiva es evidente en cuanto tal, pero su poca habilidad operacional en la suma le hace fallar en la secuencia de operaciones posterior al desarrollo de la misma.

En relación a las sustituciones (Categoría O_3) muestra seguridad y siempre expresa el producto primero con un "." y luego haciendo uso de uno de los convenios del álgebra, copia las expresiones prescindiendo de él.

La cuestión de conversión entre representaciones (Categoría C_1.) la supera sin problema. Conoce perfectamente las palabras-clave usadas: triple, doble, siguiente, anterior, cuadrado, producto, diferencia. En la cuestión de conversión en contextos, la solución también es correcta.

Sorprende a veces que al hacer conversiones desde el lenguaje habitual al sistema de representación formal algebraico, no haga bien algunas muy cercanas al contexto propio de su edad, precio de lápices, por ejemplo.

Al contextualizar el lenguaje algebraico (Categoría C_2) la falta de habilidad operacional con las letras, indicada anteriormente, se agudiza más cuando trata de hacer cálculos donde las letras representan a objetos geométricos.

La idea de producto asociada a la noción de área le lleva a expresar “3 . b = 3 b^2”, donde la “b^2” es una expresión asociada al área como producto de dos dimensiones. El hecho se repite en los cálculos de los perímetros, donde a pesar de comprobarse que tiene clara la noción de perímetro, falla en las operaciones que aparecen en el cálculo del mismo cuando se trata de una figura (rectángulo o no) que tiene la dimensión de algunos de sus lados dividida, haciendo operaciones no lícitas como “2 + x” por “*2x*” y “3 + y” por “*3y*”.

Su habilidad conceptual relativa al área y perímetro se ha visto enriquecida con un cambio de actuación en sentido de no asignar al área o perímetro unidades de medida no explícitas en las dimensiones de las figuras.

Refiriéndonos a la interpretación y comprensión del significado de los signos, las letras y las expresiones algebraicas (Categoría C_3) en la cuestión expuesta en el cuadro, de gran dificultad en gran parte del alumnado, este estudiante razona muy bien y lo hace correctamente desde el comienzo, sin dar ningún valor numérico a “n” y, luego da a “n” el valor 8. Transcribimos su entrevista:

E: ¿Cuántas expresiones hay?
A: Cinco.
E: Vale, ¿cuál es la parte más grande y la más pequeña?
A: No sé, esto puede ser por ejemplo n-3, esto puede ser más pequeño que éste porque esto puede ser 400 y esto puede ser un 2 a lo mejor.
E: Sí, pero ¿puede ser en el mismo ejercicio?, ¿ la “n” puede tener distintos valores?
A: Tendría que tener el mismo, digo yo.
E: Y, ¿por qué dices tú, entonces, que es 400.y no ese número?, ¿te das cuenta de lo que estás diciendo, o sea, como si fuese…, tú has dicho no como si fuesen menos. ¿no?
A: Yo lo que haría será darle un valor a la “n”, un valor que me parezca para todas las expresiones y hacerlo así.
E: Bueno, a ver.
A: Lo puedo poner aquí, ¿no?
E: Sí, donde tú quieras. ¿No se puede ver si no le damos un valor...?, ¿ si no le damos un valor no se puede ver?
A: A “n” el 8, 8 + 1 = 9, 8 + 4 = 12, 8 - 3 = 5, 8, 1, el más pequeño me parece que es n-7 y el más grande n+4.
E: Tú fíjate a ver si esto tiene…intenta olvidar lo del 8 a ver si tiene algún sentido eso, a ver si tú ves por qué tiene que se la más pequeña o por qué la más grande..?
A: Uh.

Entiende que al sumar un número mayor a un número dado, el resultado hallado es siempre mayor y por el contrario al restar un número mayor a uno dado, el valor de la expresión resultante es siempre, menor.

Las entrevistas tercera y cuarta acerca de planteamiento y resolución de ecuaciones lineales de primer grado en diferentes registros, se recogen en el capítulo 7º de esta Memoria.

Capítulo 6
La Segunda Investigación Sobre Expresiones Algebraicas

CAPÍTULO 6: LA SEGUNDA INVESTIGACIÓN SOBRE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

6.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo se dedica a la segunda investigación acerca de las expresiones algebraicas. En él describiremos la última experiencia dentro de la etapa experimental.

El estudio sigue la misma línea que la primera investigación sobre expresiones algebraicas presentada en el capítulo anterior.

6.2 DISEÑO EXPERIMENTAL. SEGUNDA APLICACIÓN. (95-96)

La permanente reflexión acerca de nuestra propia práctica nos ha sugerido en el curso 1995-96 esta nueva experiencia.

Se ha realizado con un grupo de alumnos de 8º de E.G.B. en el Colegio Público de Nuestra Sra. del Coro (La Verdellada), Centro nº 3.

Supusimos que al estar los alumnos en la última etapa del curso de este nivel, tercer trimestre, tendrían una idea más o menos clara del uso de las letras, el uso de los paréntesis y las operaciones sencillas donde ambos intervienen, así como de la sustitución formal. Sin embargo, para poder observarlo y constatarlo con mayor precisión consideramos se requería contar con una nueva situación experimental que permitiera controlar algunos factores perturbadores, obstáculos, que siempre están presentes en el aula, contar con mecanismos de observación que hicieran posible un análisis más exhaustivo y preciso, pero de tal manera que lo observado, no tuviera que ver sólo con los problemas que presentaban los sujetos en observación, sino que también estuvieran presentes las componentes que la enseñanza pone en juego.

En un primer momento se plantea el tema de estudio a la Dirección del Centro, a la Profesora de Matemáticas del aula y a los propios alumnos implicados, con el fin de motivarlos a colaborar. Sabemos que el origen de muchos comportamientos está en una carencia, una privación de algo, es decir, una necesidad; estas necesidades provocan en los individuos impulsos que a su vez desatan respuestas, actividad y movimiento y hay objetos que satisfacen las necesidades que mueven a los organismos y éstos pueden ser incentivos positivos, atrayentes y esto era lo que pretendíamos, que la experiencia fuese atrayente para este grupo de alumnos. A la Dirección y a la Profesora se expusieron las líneas generales del trabajo y a los alumnos se les comentó el objetivo del mismo: mejorar la enseñanza - aprendizaje del Álgebra en la escuela, aprovechando las respuestas concretas de alumnos que están "sufriendo" su enseñanza y que pretenden aprender, como es su caso. En definitiva, se les plantea la situación desde la necesidad de sus respuestas.

Todos los estamentos se muestran de acuerdo desde el principio y en especial los alumnos, que manifiestan su ánimo para colaborar y empezar su trabajo.

La organización de todo este último proceso ha sido facilitada por el conocimiento de este nivel de escolarización, ya que desde el principio de la elaboración del material para el desarrollo de esta experiencia, se vio positivo el indagar en un curso en que no se había hecho, con los objetivos propuestos para el diseño general, capítulo 2, ya que en otras dos ocasiones se había realizado en el nivel de 7º de E.G.B., con un planteamiento que incluía un porcentaje elevado de instrucción por parte del didacta y en esta nueva etapa se suponía que los alumnos ya habían sido introducidos en el Álgebra, en el curso anterior.

Los objetivos se concretaron en :

Analizar las dificultades, obstáculos y errores que se le presentan a los alumnos ante situaciones algebraicas más concretas:

- la interpretación de los distintos usos de las letras,
- situaciones aditivas en el cálculo algebraico,
- situaciones multiplicativas en el cálculo algebraico,
- el uso de los paréntesis,
- la sustitución formal,

detectando habilidades cognitivas de carácter operacional y conceptual y extraer conclusiones para una propuesta curricular del álgebra. Es decir, completar la información respecto a los objetivos 1, 4 y 5 de la investigación.

Después de la revisión bibliográfica acerca del Álgebra Escolar y de nuestras experiencias anteriores, hemos podido ver que las variables que influyen en la preferencia y rendimiento de tareas matemáticas así como en los errores cometidos, son múltiples. Al tenernos que limitar a tan sólo unas pocas, las hemos ido seleccionando a lo largo de todos los años pasados y en la última experiencia de 1996 nos hemos centrado en el uso e interpretación de las letras, el uso de los paréntesis y la sustitución formal, como hemos señalado anteriormente.

6.3 LA POBLACIÓN DE ESTUDIO

La población global fue de 23 alumnos pertenecientes al nivel de 8º de E.G.B. (correspondiente al 2º nivel del Primer Ciclo de la E.S.O.), de los cuales 21 realizaron la prueba T, antes de la instrucción (T1) y 19 alumnos realizaron la misma prueba T, inmediatamente después de la instrucción (T2).

6.4.- DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

En esta última parte experimental de la investigación global, efectuada en el curso 1995-96, después de haber previamente revisado el Test y los resultados de aplicarlo en el curso anterior 94-95, de la revisión del DISEA y su primera aplicación (DISEA I), del análisis de los protocolos para las entrevistas realizadas en el curso 92-93 y 93-94, se puede explicitar el desarrollo del diseño de investigación en las siguientes etapas.

La primera etapa es la de contacto con el Centro, la Dirección y los alumnos del aula, diseño de todo el proceso, construcción y validación de instrumentos de medida, del diseño del experimento de la enseñanza en el aula, y del diseño del protocolo de las nuevas entrevistas, de los cuales nos ocupamos en los apartados correspondientes.

La segunda etapa es la de las aplicaciones de la Prueba T de habilidades algebraicas para expresiones algebraicas (T1), la implementación del DISEA revisado (DISEA II), segunda aplicación de la misma Prueba T (T2), selección de alumnos para ser entrevistados y la realización de las entrevistas.

Ya hemos indicado que al no disponer de ningún instrumento de evaluación construimos nuestro propio Test que fue aplicado el curso anterior, 94-95 en el Colegio Público "San Bartolomé" de Tejina, Centro número 2, y en el curso 1995-96 se ha adaptado al marco local de este Centro número 3, para esta aula y se ha denominado Prueba "T".

Una vez que se consiguió despertar el interés, propusimos pasar a los alumnos la Prueba T, que pretendía estudiar la asimilación y comprensión por parte del sujeto del conocimiento escolarizado y detectar habilidades cognitivas.

La Prueba T (anexo 8) la integran 102 ítems que han sido elegidos y concretados después de la reflexión de todo el período precedente y cuyo objetivo principal fue analizar dificultades y errores que se le presentan o manifiestan los alumnos, para subrayar para el futuro, puntos posibles de dificultad y para detectar las habilidades cognitivas, objeto de nuestra investigación, atendiendo al Sistema Categorial ya establecido, que va a permitir, entre otros aspectos, observar:

- el uso, operatividad e interpretación de las letras,
- la designación de paréntesis y cómo los interpretan en situaciones aditivas y multiplicativas,
- la denotación de paréntesis al hacer conversión de registros en general y al pasar de un texto escrito en lenguaje habitual a la representación formal, en particular.
- el uso del signo "=",
- la sustitución formal,
- la conexión de distintos sistemas de representación en diferentes contextos.

La descripción de la misma ya ha sido hecha en el capítulo 4 de esta Memoria y ahora nos limitamos a expresar los resultados de su aplicación y el análisis de los mismos. La diseñamos para que nos sirviera de información adicional a nuestra observación directa de lo que aprendiesen los estudiantes, obtenida en la propia aula y en las entrevistas.

Se pasó a los alumnos/as los días 12/04/96, antes de la instrucción y el 21/06/96, después de la instrucción. Los resultados de ambas se mostrarán simultáneamente.

Se construyó un cuaderno individual para clase, cuaderno V (anexo 13 parte 1ª), con una serie de actividades, que tienen como finalidad detectar cómo se enfrenta un alumno/a a una serie de cuestiones del Álgebra y recoger la información acerca de la misma, descrito con detalle en el Capítulo 3. Asimismo se grabaron en el aula algunas de las sesiones de instrucción habituales, con el fin de enriquecer la información para, por último, completarla con las sesiones de entrevistas vídeograbadas.

La tercera y última etapa es la del análisis de datos.

6.5. DESARROLLO DE LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA

Ya hemos indicado que el DISEA se ha reorganizado, para su implementación, segunda aplicación, en este curso 1996-97.

El material recogido en un solo cuaderno individual (anexo 13 parte 1ª) de clase, comprende 41 fichas cuyas actividades también se han redactado en torno al sistema categorial de habilidades cognitivas propuesto (tabla 6.1) y, en esta ocasión, para los tópicos: uso, interpretación y operatividad con las letras, el uso de los paréntesis y la sustitución formal, tanto en situaciones aditivas como multiplicativas.

En la tabla aparecen actividades que se añadieron al cuaderno individual preparado previamente para los alumnos, pero que se consideraron adecuadas como complemento al material diseñado y que aparecen como ampliaciones.

Se indica en las dos primeras columnas el número de la ficha o si se trata de una actividad añadida y que va a figurar como ampliación, y la tercera el número de actividad en la ficha o ampliación, si procede (anexo 13, parte 2ª).

Nº F	Ampliación	Nº A	O_1	O_2	O_3	C_4	C_5	C_6
	Prueba T, a	**1,8**		x				
1	**Prueba T, b**	**3,9**	x	x				
2						x	x	x
3						x	x	x
4						x	x	x
5						x	x	x
6						x	x	x
7						x	x	x
8						x	x	x
9						x	x	x
10						x	x	x
11						x	x	x
12						x	x	x
13						x	x	x

Nº F	Ampliación	Nº A	O_1	O_2	O_3	C_4	C_5	C_6
14						x	x	x
15			x	x				
	15 bis		x	x		x	x	x
16			x			x	x	x
17			x			x	x	x
18							x	x
19							x	x
20							x	x
21				x		x	x	x
22				x		x	x	x
23				x		x	x	x
24				x		x	x	x
25						x	x	x
26			x	x			x	x
27						x	x	x
28				x		x	x	x
29			x	x		x	x	x
30			x	x		x	x	x
31						x	x	x
32						x	x	x
33						x	x	x
	33 bis			x		x	x	x
34			x	x		x	x	x
	34 bis		x	x				
35			x	x				
	35 bis		x	x				
36			x	x	x			
37			x	x	x			
38			x	x	x			x
39			x	x				x
40			x	x				x
41			x	x	x			
	41 bis, a		x	x	x			
	41 bis, b		x	x	x	x	x	x

Tabla 6.1

Mostramos ahora una tabla (tabla 6.2) donde se exponen las relaciones de algunas de las fichas de este nuevo cuaderno (Cuaderno V) con los utilizados en la experiencia anterior del curso 92-93 (Cuadernos I y II).

FICHAS 95-96	FICHAS 92-93	OBSERVACIONES Referentes a las del 96
1.		Operatividad básica con números enteros
2.	I1	Uso de letras para cantidad desconocida
3.	I2	Uso letra medida desconocida
4.	I3	Esquema situación-representación (ej. cambiando 7º por 8º)
5.	I4	Esquema situación-representación (ej. cambiando 7º por 8º)

FICHAS 95-96	FICHAS 92-93	OBSERVACIONES Referentes a las del 96
6.		Misma tarea que anterior (esquema situación -representación)
7.		Similar a la anterior
8.		Conversión de registros: contexto numérico
9.		Conversión de registros: contexto numérico. Similar a Actividad de refuerzo número 10
10.		Similar a la anterior
11.		Conversión de registros: contexto numérico o familiar al alumno. Similar a anterior y a actividad de refuerzo número 9
12.		Similar a actividad de refuerzo número 9
13.		Similar a refuerzo
14.		Conversión de registros, dando la variable a utilizar
15.		Operatividad básica con expresiones algebraicas
16.		Perímetros
17.		Perímetros
18.	I5	Convenios del álgebra
19.	I6	Convenios del álgebra
20.	I7	Representación S.R.V.G.
21.	I10	Representación S.R.V.G.
22.	I13	Representación S.R.V.G.
23.	II_{19} (parte) y II_{20} (parte)	Representación S.R.V.G.
24.		Sacar factor común
25.	II_5	Área rectángulo representando producto de números.
26.		Áreas
27.	II_6	Sistema de registro: Visualización Simplificada
28.	II_{17}	Propiedad distributiva
29.		Tres representaciones yuxtapuestas del área del rectángulo similar a $II_{10,\ 11,\ y\ 12}$
30.	II_9	Tres representaciones yuxtapuestas del área del rectángulo
31.	II_7 se le añadió P.D. Derecha.	Tres representaciones yuxtapuestas de la propiedad distributiva
32.	II_{10}	Tres representaciones yuxtapuestas de la doble distributiva
33.	II_{11} sólo primera parte y II_{20} (parte de ella)	Tres representaciones yuxtapuestas de la doble distributiva
34.		Conversión de registros: contexto área y perímetro
35.		Propiedad distributiva

FICHAS 95-96	FICHAS 92-93	OBSERVACIONES Referentes a las del 96
36.		Sustitución Formal
37.		Sustitución Formal
38.		Sustitución Formal
39.		Reconocimiento expresiones equivalentes (Test, número 11)
40.		Diagramas no lineales para Operatividad
41.		Diagramas no lineales para Operatividad

Tabla 6.2

Se previeron veinticinco sesiones para el desarrollo del DISEA II incluyendo en éstas las de la primera aplicación de la prueba diagnóstico (T1) y la segunda aplicación (T2), para verificar la incidencia de la instrucción en el aprendizaje.

Estas sesiones se desarrollaron con pequeñas variaciones de lo previsto como se muestra en la tabla 6.3 de la que parte de ella ha aparecido en el capítulo 3.

15	3.	1, 2 y 3	3.	Repaso 1 y 8 de la Prueba T	
16	4.	4 y 5	4.	Repaso 3 y 9 de la Prueba T	
18	5.	6 y 7	5.	1, 2, 3 y 4	
19	6.	8 y 9	6.	5, 6 y 7	
22	7.	10 y 11	7.	8, 9, 10 (ap. a, b, c y d)	
23	8.	12 y 13 (Ac.1)	8.	10 (ap. e y f), 11, y 12 (ap. a, b, c y d)	
25	9.	13 (Ac.2) y 14	9.	12 (ap. e, f, g y h), 13 y 14	
26	10.	15	10.	15	
29	11.	16 y 17	11.	Integración	
30	12.	18, 19 y 20	12.	16	
2 /05/96	13.	21 y 22	13.	17, 18, 19 y 20	
3	14.	23 y 24	14.	21, 22	
6	15.	25, 26, 27 y 28	15.	23 y 24	
7	16.	29 y 30	16.	25, 26, 27, 28 y 29 (ap. a)	Repaso: 21, 2 todos.
9	17.	31 y 32	17.	29 (ap. b y c) y 30	
10	18.	33	18.	31, 32, 33 (ap. 1 y 2b) y 34 (ap. a, b y c)	Ficha 31: se c trabajarlo por Ficha 33: no s Ficha 34: Apa oralmente. Ficha 33 bis: pizarra. Trabajado “cu
13	19.	34	19.	34 (ap. d y e)	Ficha 3
14	20.	35	20.	35	Fic
20	21.	36 y 37	21.	36, 37 y 38	
21	22.	38 y 39	22.	39 y 40	
23	23.	40 y 41	23.	41	Ficha 41bis a
24	24.	Aplicación Prueba T	24.		Inte
21/06/96	25.	Despedida	25.		
27			26.		Despe

Tabla 6.3

Las sesiones de instrucción se desarrollaron así:

En la 1ª sesión, se tuvo un primer contacto con los alumnos para explicarles la experiencia, justificar el apoyo del material individual y, en definitiva, motivarlos a colaborar con la experiencia, hecho que nos parece fundamental en una experiencia de este tipo aunque el profesorado esté de acuerdo y por supuesto, la Dirección del Centro. Habíamos constatado ya en el curso 92-93 la importancia de esta primera Sesión, tratándose además, en este caso, de un Centro poco conocido para la didacta.

En la 2ª sesión, se hizo la aplicación de la Prueba T de habilidades algebraicas de la que ya se ha indicado su composición de 102 ítems y su relación con las categorías del Sistema Categorial establecido.

En la 3ª sesión, se hizo repaso de las preguntas 1 y 8 de la prueba T (anexo 13, parte 2ª, a) con el fin de trabajar la operatividad básica, usando e interpretando los paréntesis. Se quería detectar dificultades concretas que plantean o presentan los alumnos al “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2), para aportarles estrategias de solución a las mismas.

En la 4ª sesión, se sigue trabajando con las preguntas 3 y 9 de la Prueba T (anexo 13, parte 2ª, b). Aparecen ya en estos ítems contextos algebraicos, no sólo aritméticos y se pretende presentar analogía entre la operatividad básica con números enteros y con expresiones algebraicas, detectando de nuevo dificultades concretas al “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2), para intentar aportarles estrategias de solución.

En la 5ª sesión, se comienza propiamente nuestro tratamiento del álgebra con el apoyo del material elaborado para tal fin, el cuaderno. Se quiere constatar qué habilidades presentan o adquieren los alumnos al “realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis” (O_1) y al “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2). Constatar también el tipo de representaciones espontáneas que utilizan los alumnos al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal (C_1) y al “contextualizar el lenguaje algebraico” (C_2) en contextos familiares a los estudiantes.

En la sesión 6ª, se sigue trabajando con las fichas del cuaderno y se hacen conversiones desde una representación sincopada y numérica al lenguaje habitual y viceversa. Se presenta a los alumnos un sencillo esquema “situación - representación” (S.R.) y se pretende constatar si efectivamente los alumnos utilizan el esquema presentado “S.R.” al “hacer conversiones entre los diferentes registros” (C_1), al “contextualizar el lenguaje algebraico” (C_2) en contextos familiares y ver su interpretación y comprensión del significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual” (C_3), cuando observan enunciados verbales o redactan historias para expresiones algebraicas determinadas.

En la 7ª sesión, los alumnos siguen trabajando la conversión de registros, en especial con enunciados que hacen referencia a contextos aritméticos o relaciones numéricas. También se introducen vocablos específicos como son: doble, triplo, mitad, cuadrado, número anterior, posterior y siguiente a uno dado con dato alfanumérico. Se quiere constatar si los alumnos realizan correctamente la aplicación de los vocablos específicos empleados y la designación correcta o no de los paréntesis al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal” (C_1).

En la 8ª sesión, se convierten registros desde el lenguaje habitual de un enunciado verbal al simbólico, comenzando con enunciados no contextualizados, para luego pasar a contextos familiares a los alumnos. Se introducen enunciados que van a dar lugar a ecuaciones para que usen el signo igual. Se pretende constatar si los alumnos al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal” (C_1) y “contextualizar el lenguaje algebraico” (C_2) e “interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual” (C_3), lo hacen de manera adecuada.

La sesión 9ª, se sigue dedicando a hacer conversiones entre diferentes representaciones semióticas interviniendo variables predeterminadas por los enunciados o las que eligen los alumnos. Se pretende los mismos objetivos que en la sesión anterior.

En la sesión 10ª, se sigue trabajando la operatividad básica en contextos aditivos donde se utilizan diferentes variables y paréntesis utilizando, en algunos casos, las mismas expresiones con variables distintas para ver el comportamiento de los alumnos ante ellas. Se pretende observar el dominio de los alumnos al “realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis” (O_1), “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2) interesándonos en la observación de dificultades que presenta el signo menos (-) delante o dentro del paréntesis, la aceptación de respuestas abiertas y si esta aceptación depende de que la expresión sea abierta desde su planteamiento o si es consecuencia de cálculos operacionales realizados previamente.

La sesión 11ª, es de integración y se preparó un material especial para esa sesión que aparece codificado como 15 bis (anexo 13 parte 2ª, c), como ampliación del Cuaderno, y que está formado por 7 ejercicios donde se trabaja la operatividad básica en contextos aditivos y multiplicativos con paréntesis utilizando monomios y binomios. Se realizan conversiones de representaciones semióticas desde el lenguaje habitual al lenguaje simbólico en situaciones, contextualizadas o no. Esto nos permitió observar el dominio de los alumnos al “realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis” (O_1), “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2) con particularización en las dificultades que presenta el signo menos (-) delante o dentro del paréntesis, la aceptación de respuestas abiertas y si esta aceptación depende de que la expresión sea abierta desde su planteamiento o si es consecuencia de cálculos operacionales realizados previamente. Asimismo se pretende detectar qué códigos utilizan y qué habilidades muestran al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal” (C_1.), “contextualizar el lenguaje algebraico” (C_2) y al “interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual” (C_3).

En la sesión 12ª, se sigue trabajando sobre el material del día anterior y luego se añade la ficha 16 donde se comienza a trabajar sobre la contextualización en el cálculo de perímetros de polígonos.

En esta sesión se pretende detectar además de las mismas habilidades que en la anterior, las que los alumnos manifiestan al “contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como objetos geométricos y como número generalizado en contextos de área y perímetro” (C_2) y al “interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual” (C_3) al convertir “obtengo”, “es”, “son” (la idea de totalidad en expresiones verbales), etc., al lenguaje simbólico.

En esta nueva sesión, 13ª, se sigue trabajando los contenidos conceptuales de las anteriores pero además se introduce la representación en el S.R.V.G., donde los números y letras van a representar, indistintamente, un producto (área de un rectángulo) o un segmento (lado de un rectángulo), es decir, se sitúan siempre como una cantidad de un objeto bidimensional (objeto geométrico). Trabajan las ideas básicas de esta representación y se establecen los convenios de la misma.

Se trata de analizar el uso u omisión de paréntesis al “realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis” (O_1) y “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2), así como las interpretaciones y uso del S.R.V.G. al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal (C_1), al “contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como objetos geométricos y como número generalizado en contextos de área y perímetro” (C_2), con una atención especial a las dificultades con representaciones del tipo “a + b” y “a . b”. Por último, fijar la atención en el “interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual” (C_3).

Las decimocuarta y decimoquinta sesiones se dedican a la conversión del S.R.V.G. al S.R.F. mediante representación con rectángulos, de todas las formas posibles, de los términos de binomios - con existencia o no de factores comunes -para llegar a concluir con el paso de los contextos aditivos (donde existen factores comunes) a los multiplicativos (expresión de la propiedad distributiva). Primero, este planteamiento se hace con datos numéricos y luego con expresiones algebraicas. Se quiso constatar si los alumnos hacen uso o no del S.R.V.G. propuesto, al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal” (C_1) y ver su comportamiento al “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, haciendo énfasis a las denotaciones del paréntesis” (O_2), cuando sacan factores comunes.

En la sesión 16ª, se comienza por representar un producto como el área de un rectángulo de dimensiones (subdivididas o no) que simbolizan los factores del producto. Se presenta un ejemplo de ello con dimensiones dadas con datos numéricos y posteriormente se trabaja con datos alfanuméricos.

Se orienta luego el trabajo al cálculo de áreas de rectángulos, donde los alumnos tendrán que hacer uso de los paréntesis y practicar el desarrollo de la propiedad distributiva por la izquierda y por la derecha y la doble distributiva, con lo cual se van integrando los contenidos tratados.

Con esta perspectiva se plantea una representación visual/formal, la del cuadro de doble entrada de la visualización simplificada, que recoge la unidad fundamental propuesta para expresar un término de una expresión algebraica y permite visualizar el desarrollo de la propiedad distributiva.

Para terminar esta sesión se trabaja la propiedad distributiva, por la izquierda y por la derecha, con dos representaciones yuxtapuestas, la del S.R.V.G. y la del S.R.F. numérico.

Con este planteamiento se pueden observar habilidades del tipo C_1, C_2, C_3, O_1 y O_2.

En la sesión 17ª, después de mostrar un ejemplo que recoge por yuxtaposición tres situaciones del área del rectángulo: la del S.R.V.G., la del esquema de visualización simplificada como conexión entre el anterior y el S.R.F., que es el tercero planteado, se realizan actividades donde hay dos situaciones ausentes. En las primeras actividades se proporciona una de las representaciones para que los alumnos realicen las dos restantes, posteriormente, después de volver a darles un ejemplo totalmente resuelto, los alumnos han de hacer las tres representaciones de cada una de las actividades propuestas. Se pretende analizar la dificultad o facilidad que proporciona el uso de las tres representaciones trabajadas al hacer las conversiones entre diferentes representaciones semióticas.

En la sesión 18ª, también se añade una ficha (33 bis, anexo 13, parte 2ª d) que es sencillamente el producto "(2a-3) (4-2b)" para introducir los términos negativos. En esta sesión se sigue con el tratamiento de los distintos sistemas de representación yuxtapuestos. Se comienza recordando las tres representaciones de la propiedad distributiva para luego intentar que los alumnos, a partir del planteamiento de una expresión de la forma "a (b + c)" o "(a +b) c" y sus casos particulares con a, b, o c expresados con números, hagan la representación en el S.R.V.G., la V.S. y en la R.F. Se continúa con el mismo planteamiento que el anterior, para expresiones de la doble distributiva como es "(a + b) (c + d)" y sus casos particulares.

En la sesión 19ª que se trabaja la ficha 34 del cuaderno individual (apartados d y e) se añade la ficha 34 bis, (anexo 13, parte 2ª e), que está formada exclusivamente por el producto "(a+b+c) (c+d+5)". Se comienza esta sesión con el tratamiento de la propiedad doble distributiva para luego pasar a ocuparse del producto de trinomios haciendo uso del S.R.V.G. y de la V.S., cuya solución se ha de convertir a la R.F. Se practica, después, el cálculo de áreas y perímetros de rectángulos, con datos alfanuméricos.

La sesión 20ª también es de integración, que se realiza mediante la ficha 35 y una nueva (ficha 35 bis, anexo 13, parte 2ª, f), cuyo único ítem es "(a-b) (c-d)". La ficha 35, por su parte, contiene casos posibles donde aparece la propiedad distributiva con datos alfanuméricos, permitiéndonos detectar la extensión de la representación en el S.R.V.G. y con la visualización simplificada desde el producto de binomios con términos positivos al de binomios con términos negativos, así como el proceso seguido por los estudiantes en el cálculo de operatividad básica al "realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis" (O_2) y "realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis" (O_1), con los resultados anteriores, en especial el uso del signo igual (C_3).

Las cuatro sesiones restantes de este diseño están dedicadas al trabajo de la sustitución formal, fundamentalmente.

Concretamente en la sesión vigésimoprimera, los alumnos van, de manera gradual, introduciéndose en la sustitución formal comenzando por el cálculo del valor numérico de expresiones sencillas y con valores sencillos, números de una cifra o decenas netas completando una tabla con las expresiones dadas. Luego, se introduce la sustitución formal desde el lenguaje habitual con expresiones de la forma "a + b", "a . b", "m a - n b" y "m a + n . b", donde "a" y "b" en las dos primeras formas, o "m" y "n" en las dos últimas, son números conocidos. Posteriormente se plantea cálculo sencillo con términos alfanuméricos, donde se incluye: cálculo de valor numérico, reconocimiento de respuestas abiertas y generalización, donde una variable se sustituye por una expresión algebraica. Se concluye con el planteamiento de cálculo de valores de variables donde se conoce el valor de otras variables o relaciones entre ellas.

Se pretende observar las sustituciones que hacen los alumnos y la interpretación que hacen de las letras en cada caso, así como la incidencia del uso del paréntesis en esa sustitución e interpretación al “hacer sustituciones formales referidas tanto a los procesos de particularizar como generalizar” (O_3) y sus correspondientes “operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis” (O_1) y con “operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos” con especial atención a las denotaciones del paréntesis (O_2), y al “interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual” (C_3).

En la sesión vigésimosegunda, se propone además de ver cómo los alumnos reconocen sustituciones en equivalencias ya establecidas, analizar aplicaciones al "hacer sustituciones formales”

Se añade un nuevo tipo de diagramas no lineales para facilitar procesos de operaciones mediante organización propia de la jerarquía de las mismas y que también detectan habilidades O_1, O_2 y O_3.

En la sesión vigésimotercera se sigue trabajando con los diagramas no lineales y además se añaden dos fichas (41 bis, a y b, anexo 13 parte 2ª, g y h). La ficha 41 bis, a, está formada por 3 ejercicios más para resolver con el nuevo tipo de diagramas presentado.

La ficha 41 bis, b contiene 10 preguntas de repaso y sirve de integración. Tanto con la ficha 41 del cuaderno como con las dos de ampliación citadas se pretende observar qué papel juegan los diagramas lineales al “realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis” (O_1), al “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2) y al “hacer sustituciones formales referidas tanto a los procesos de particularizar como a generalizar” (O_3), y, si el comportamiento de los alumnos en su trabajo es diferente usando diagramas no lineales para cálculo aritmético que para el algebraico. La parte trabajada del anexo 7 va dando información de lo que los alumnos han asimilado de los contenidos tanto conceptuales como procedimentales y actitudinales, transmitidos en este periodo de permanencia de la investigadora en el aula.

En la última sesión de instrucción a todo el grupo en conjunto, sesión vigésimocuarta, había una pretensión muy clara de integración al desear detectar destrezas y habilidades adquiridas por los alumnos a lo largo de la instrucción, así como el significado que han adquirido del uso de las letras y el dominio de la sintaxis y semántica de los registros presentados al “realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis” (O_1), al “realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2), al “hacer sustituciones formales referidas tanto a los procesos de particularizar como a generalizar” (O_3), y al “hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal” (C_1), al “contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como objetos geométricos y como número generalizado en contextos de área y perímetro” (C_2) y al “interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual” (C_3).

La sesión vigésimoquinta, según muestra el cuadro de las mismas, se dedicó a una nueva aplicación de la Prueba T (T2) de habilidades cognitivas para expresiones algebraicas.

La sesión última, vigésimosexta, resultó interesante en tanto que los alumnos hicieron por escrito sus comentarios a toda la implementación del diseño y donde se dialogó con ellos acerca de la instrucción y de la posibilidad de entrevistarlos individualmente. No hubo problema en absoluto y su disponibilidad fue máxima, así como la de la profesora del aula y del Centro, en general.

6.6. RESUMEN DE DATOS

6.6.1. Criterios de calificación de los ítems

Después de la primera aplicación de la prueba T, anexo 8 (T1) se procedió al establecimiento de criterios de calificación que permitieron la organización y concentración de datos.

Estos criterios de calificación se desglosan, por pregunta, y, en alguna de ellas, ítem por ítem, a continuación.

Pregunta 1 (ítems 1 - 10).

Sólo se consideraron correctos si se había escrito correctamente la expresión formada por el signo y el valor numérico correspondiente a cada ítem.

Pregunta 2 (ítems 11 - 13).

A pesar del enunciado se consideró correcta la respuesta con “A” cuando procedía, aunque no explicasen el por qué.

Pregunta 3 (ítems 14 - 19).

Sólo se consideraron correctos si se había escrito correctamente la expresión formada por el signo y la parte literal después de haber hecho todas las operaciones posibles para reducir al máximo, excepto en el ítem 16 que se admitió como correcto “x (y-x) = (xy) - (xx)”.

En el ítem 19 se consideró correcta la respuesta “(a . 3 a + a . b) + (b . 2 a) - (b . b)”, ya que habían quitado los paréntesis al principio efectuando la propiedad distributiva.

Pregunta 4 (ítems 20 - 22).

En el ítem 20 se dio como correcta tanto la expresión “15 + 2” como “15 + 2 = 17”, como “2 + 15 = 17”, como “17”.

En el ítem 21: “x + 8”, “x + 6 + 2”.

En el 22, tanto “2 + 3x” como “3x + 2”.

Pregunta 5 (ítems 23 - 25).

En el ítem 23, se da por correcto: “21”, “7 . 3 = 21”, “3 x 7 = 21”, “7 . 3” y “3 . 7”.

En el 24: “3x + 12”, “3 (x + 4) =3x + 12”, “(x + 4).3 = 3x + 12” y “12 + 3x”.

En el 25: “15 x”, “3 . 5x = 15 x” y “5x . 3 = 15 x”

Pregunta 6 (ítems 26 - 28).

En el ítem 26 se da por correcto “45”, “43 + 2 = 45”, “21 + 22 + 2 = 45” y “a + b + 2 = 45. También se dio por correcta, a pesar del error del uso del signo igual: a + b = 43 + 2 = 45.

En el ítem 27, como correcto se admitió “761”, “n = 247 = 761” (a pesar del error al usar inadecuadamente el signo igual) y “1008 - 247 = 761”. Un alumno comprendió lo que había que hacer pero se confundió en la operación de restar y no se dio por correcto.

En el ítem 28 la sustitución de f por F y g por G no afectó para considerarlo correcto. Se admitieron correctas “8 + g”, “8 + (g)”, “8 + g = x”, “e + f + g = 8 + g” y “e + F = 8 + G”.

Pregunta 7 (ítems 29 - 31).

Dimos por correcta en el ítem 29, tanto “p-2” como “-2”.

Para el ítem 30 se consideró correcta “no me dice el valor de la p” y “p, no tiene valor”.

Pregunta 8 (ítems 32 - 39).

Sólo se consideraron correctos si se había escrito correctamente la expresión formada por el signo y la parte literal después de haber hecho todas las operaciones posibles para reducir al máximo.

Pregunta 9 (ítems 40 - 47).

Hemos considerado correcto “4 + 3y” (ítem 41) y “5y - 2t” (ítem 42), aunque no repitieran después del “=” la expresión.

En el ítem 43 se consideró correcto tanto “a” como “a + 0”.

Pregunta 10 (ítem 48).

En esta pregunta se ha flexibilizado la corrección en aquellos casos donde se detectaba que los alumnos habían comprendido la situación. Por eso se han considerado correctas:

* A = Compro 6
  R = Compro 10
* Comprar 10 rojos y 6 azules
* a lápices azules + r lápices rojos = 180 pts
* a (12) y r (5)
* a (10) + r (12)

* a . 12   r . 5
* 10 . a + 12 . r = 180
* a . 10 + r . 12 = 180
* a . 10
   r . 12
* 10 . a
   12 . r

Pregunta 11 (ítems 49 - 52).

Se han considerado correctos:

ítem 49	ítem 50	ítem 51	ítem 52
• 5x-17 5(y+1)-17 • x = y + 1 • x = (y + 1) • la x la sustituyen por (y+1)	• 2x.3y-z 6xp-z • 2x . 3y =6 x p • 6xp =(2x.3y) • 2x.3y lo sustituyen por 6xp • 2.3 = 6 y = p	Vuelve a haber cambio de minúsculas por mayúsculas. • e = f-2 • e = (f - 2) • e los sustituyo por F-2 • e = (F-2) • e (j+z) (j+z) (f-2)	• x = hrh • x = (hrh) • x lo sustituye por hrh

Hemos considerado despiste el haber subrayado el 5 en el ítem 49 en el primer ejemplo, puesto que el mismo alumno hizo correcto el resto de los ítems.

Pregunta 12 (ítems 53 - 56).

Se consideraron correctas las respuestas de la tabla

ítem 53	ítem 54	ítem 55	ítem 56
• 4 + 9 + 4 + 9 =26 • 4 + 4 + 9 + 9 = 26 • 9 + 9 = 18 4 +4 = 8 18 + 8 = 26 • 8 + 18 = 26 • 18 + 8 = 26 • 4 . 2 + 9 . 2	• 20 • (3 + 5 + 2) 2 = 20 • 6 + 7 + 7 = 6 + 14 = 20 (error en el uso del signo igual) • 10 + 4 + 6 = 20 • 3.2 + 5.2 + 2.2 • 3.2 + 5.2 + 2.2 6 + 10 ´+ 4 = 20 • 10+4+6 = 14+6= 20 • 4 + 10 + 6 = 20	• 3f • 3F • f + f + f • F + F + F	• 2e + 2 a + 6 • 2 a + 2e + 6 • 6 + 2 a + 2e • 6 + a + a+ +e +e • a + a + 6 + e + e • 2 a + 2E +6

Pregunta 13 (ítems 57 - 60).

Esta pregunta ha planteado gran problema a los alumnos porque quizás el enunciado estaba confuso.

Pregunta 14 (ítems 61 - 62).

Para el ítem 61, se consideran correctas: “p = 19 . 7 = 133”; “7 x 19 = 133” y “7 . 19”. Para el ítem 62, no se ha considerado correcto si cierran el polígono y luego dan como respuesta 2N. Ha de haber coherencia entre lo que hacen en el gráfico y la expresión simbólica. Sí se han considerado correctas: “n.2”, “2 . n”, “2 . N” y “2 . x”.

Pregunta 15 (ítems 63 - 72).

Aquí se han considerado correctas aquellas respuestas en las que se ha realizado un tanteo adecuado. Sin embargo expresiones como “el doble de 11 es 22-5= 17” en el ítem 64, no se ha considerado correcto.

Hemos prescindido del error frecuente del mal uso del signo igual, para considerar el valor de “correcto”.

Los ítems 67, 68 y 72 no tuvieron soluciones correctas.

ítem 63	**ítem 64**	**ítem 65**	**ítem 66**	**ítem 69**	**ítem 70**	**ítem 71**
• 3 (x+y) • 3.(a + b) • (x + y).3 • 3 (x + b) • 3 (a + b) • x+a =b.3 • 3.(x + b) • 3 (x + a)	• 2.x-5=17 • 2.11 = 22 - 5 = 17 • 11+11 =22-5= 17 • 2(x)-5=17 • x . 2-5 = 17	• 8.4= 32+7=39 • 4.x + 7 = 39 • 4x + 7 = 39 • 4.8=32+7 =39 • 4 (x) + 7 = 39 • x . 4 + 7 = 39	• 3.x+2.x=54 • 3x+2x =54 • +3x+2x=54 • 3(x)+2(x)=54 • x.3+x.2=54	• 2(h-i) • 2.(h-i) • (h-i).2	• 8^2 • $(3+5)^2$ • 8.8=64 • $3+5=8^2$	$(x+y)^2$

Sin embargo, no se consideró correcta una expresión como ésta: $(8)^2$ = 8 . 8 = , por no acabarlo, en el ítem 70.

Pregunta 16 (ítems 73 - 80).

Correctas resultaron: Para el ítem 73

* 12 + 12 . 2= 24 + 12 = 36

* J = 2x 2 . x + x = 36

* 2 x + x = 36 Juan Pedro

2x x

• Juan; x .2

x + 2 x = 36

Pedro; x

Para los siguientes ítems expresamos las expresiones dadas por correctas en la siguiente tabla (faltan los ítems que no obtuvieron aciertos):

ítem 74	ítem 76	ítem 78	ítem 79	ítem 80
• x-y • b-a	• 3x-5 = 160 • 3.x-5=a 160 kg	• x+2x=24cm^2 • -x+2x = 24 • x+2.x=24 cm^2	• 5x+25x • (x.5)+(x.25)=5 x+25x=30x • x.5+x.25	• 3(2x+1)+7=34 • 7+3.(2x+1)=34
• x-y • b-a	• 3x-5 = 160 • 3.x-5=a 160 kg	• x+2x=24cm^2 • -x+2x = 24 • x+2.x=24 cm^2	• 5x+25x • (x.5)+(x.25)=5 x+25x=30x • x.5+x.25	• 3(2x+1)+7=34 • 7+3.(2x+1)=34

Pregunta 17 (ítems 81 - 89).

Expresamos las expresiones dadas por correctas:

Para el ítem 81: “125 pts” y “125”.

Para el ítem 82: “100 pts”, “100”, “125 - 25 = 100” y “125 - 25 pts”.

Para el ítem 83: “190 pts”, “190”, “100 + 90”, “90 -25 + 125”, “(125-25) + 90” y “90 + (125-25) pts”.

Para el ítem 84: “250 pts”, “250”, “125.2” y “125.2 pts”.

Para el ítem 85: “200 pts”, “200”, “125.2-25 .2”, “(125-25)2 pts” y “250-50”.

Para los restantes ítems de la pregunta lo expresamos en esta tabla:

ítem 86	ítem 87	ítem 88	ítem 89
• 380 pts • 380 • 180-50+250 • (125.2-25.2)+(90.2) • (250-50)+180	• 1250 pts • 1250 • 125.10 pts	• 1000 pts • 1000 • (125-25)10 pts	• 1900 pts • 1900

Pregunta 18 (ítems 90 - 95).

Para los ítems señalados expresamos las expresiones dadas por correctas en la siguiente tabla:

ítem 90	ítem 91	ítem 92	ítem 93	ítem 94	ítem 95
• 2b • b + b • b x 2 • 2 . b • b . 2	• 2.(b-25) • 2b-50 • 2b-25.2 • (b-25).2	• 2b-50+180 • (2b-25.2)+90.2 • (2b-50) + 180	• 10b • b . 10 • 10 . b	• 10b - 250 • 10b - 25.10 • (b-25) . 10 • 10 . (b-25)	• (10b - 25.10) + 90 . 10

Pregunta 19 (ítems 96 - 98).

Expresamos las expresiones dadas por correctas para los ítems anteriores, en la siguiente tabla:

ítem 96	ítem 97	ítem 98
• 48 • 12.4 = 48	• 4 (m+3) • 4.(m+3)	• 5 (t+2) • 5.(t+2) =5t +10

• 12 x 4 • 4. (4+8) = 4.12 = 48 • (4.4) + (8.4) • A = b . a = 12 . 4 = 48 • 4.4 + 8 . 4 = 16 + 32	• 4.(m+3) =4m+12 • (4.m) + (4.3) • 4m + 12 • 4.m + 3.4 = 4m+12 • (m + 3) 4	• (5.t)+(5.2) • 5t+10 • 5.t+2.5=5t +10 • (t+2)5

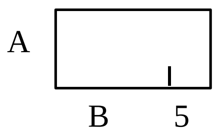
Pregunta 20 (ítems 99 - 102).

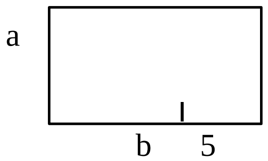
Hay que señalar que, como es natural, los alumnos no utilizaron en la primera aplicación de la Prueba (T1) el cuadro de doble entrada y la mayoría de ellos sí hicieron uso del mismo, en la segunda aplicación de la Prueba.

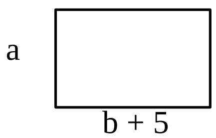
Para los ítems 99 y 100 se presenta esta tabla de resultados que se han considerado correctos:

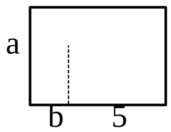
<table>
<tr><th>ítem 99</th><th>ítem 100</th></tr>
<tr><td>

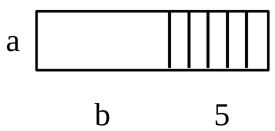
• a . b + a . 5

• 

• 



• 

• 

</td><td>

• $\begin{array}{c|c|c} x & b & 5 \\ \hline a & a.b & a.5 \end{array}$

a . (b+5) = ab+5 a

• $\begin{array}{c|c|c|} x & b & 5 \\ \hline a & a \times b & a \times 5 \\ \hline \end{array}$

• $\begin{array}{c|c|c} x & b & 5 \\ a & a \times b & a \times 5 \\ \hline \end{array}$

a . (b+5) = a.b+a.5

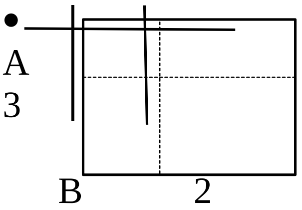
• $\begin{array}{c|c|c} x & b & 5 \\ \hline a & a.b & a.5 \\ \hline \end{array}$

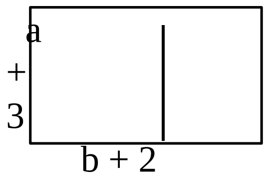
• $\begin{array}{|c|c|c|} \hline x & b & 5 \\ \hline a & a.b & a.5 \\ & & \\ \hline \end{array}$

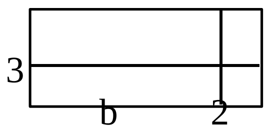
• $\begin{array}{c|c} & a \\ \hline b & a.b \\ \hline 5 & a.5 \\ \hline \end{array}$

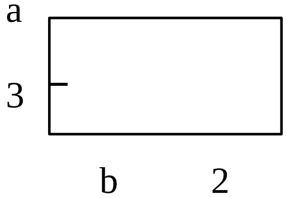
</td></tr>
</table>

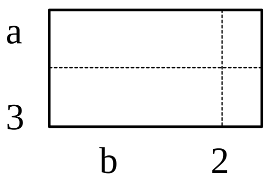
Para los ítems 101 y 102 se presenta esta tabla de resultados que se han considerado correctos:

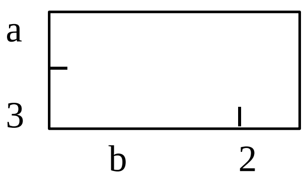
<table>
<tr><th>ítem 101</th><th>ítem 102</th></tr>
<tr><td>
•


• a.b + a.2 + 3.b + 3.2


•


•


•


•


</td><td>
•
<table><tr><td>x</td><td>b</td><td>2</td></tr><tr><td>a</td><td>a.b</td><td>a.2</td></tr><tr><td>3</td><td>3.b</td><td>3.2</td></tr></table>
(a+3)(b+2)= 2 a+3b+b+6
•
<table><tr><td>x</td><td>b</td><td>2</td></tr><tr><td>a</td><td>a x b</td><td>a x 2</td></tr><tr><td>3</td><td>3 x b</td><td>3x2</td></tr></table>
•
<table><tr><td>x</td><td>a</td><td>3</td></tr><tr><td>b</td><td>b.a</td><td>b.3</td></tr><tr><td>2</td><td>2.a</td><td>6</td></tr></table>
•
<table><tr><td>x</td><td>b</td><td>2</td></tr><tr><td>a</td><td>a.b</td><td>a.2</td></tr><tr><td>3</td><td>3.b</td><td>3.2 =6</td></tr></table>
(a+3).(b+2) =a.b+a.2+3.b+3.2
•
<table><tr><td>x</td><td>B</td><td>2</td></tr><tr><td>a</td><td>a.b</td><td>a.2</td></tr><tr><td>3</td><td>3.b</td><td>3.2</td></tr></table>
(a+3)(b+2)=a.b+a.2+3.b+3.2=a.b+a.2+3.b+6
•
<table><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>x</td><td>b</td><td>2</td></tr><tr><td>a</td><td>a.b</td><td>a.2</td></tr><tr><td>3</td><td>3.b</td><td>3.2</td></tr></table>
•
<table><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>x</td><td>b</td><td>2</td></tr><tr><td>a</td><td>axb</td><td>ax2</td></tr><tr><td>3</td><td>3xb</td><td>3x2=6</td></tr></table>
</td></tr>
</table>

6.6.2. Análisis de las respuestas

Pasamos a reflejar en la tabla 6.4 los datos cuantitativos de las respuestas de los alumnos en la Prueba T. Quedan registrados en ella los aciertos y los errores de cada uno de los 102 ítems.

Los números de la primera fila corresponden a los números asignados por el Centro en la lista general del curso de 8º B.

Los alumnos cuyo número de orden en la lista de clase eran 2, 6, 8 y 22 son los que estuvieron ausentes en la prueba anterior a la instrucción y los de los números 4 y 17, en la prueba posterior al desarrollo de la instrucción, por eso los hemos eliminado en este momento del estudio y nos limitamos a 17 alumnos, codificados en la segunda fila de la tabla, de los cuales nueve son niños (los números 1, 3, 5, 11, 12, 13, 15, 16 y 18) y ocho, niñas (los números 7, 9, 10, 14, 19, 20, 21 y 23).

Se presentan los datos de estos 17 alumnos seleccionados, para analizar los resultados de esta prueba, sin embargo las observaciones que se hacen posteriormente del aula y de las grabaciones en audio, son de todos los alumnos, como es natural.

A partir de la tercera fila, aparece en primera columna la codificación de las preguntas tal como se dio a los alumnos; a continuación, segunda columna la codificación de los 102 ítems tal como se asignó para analizar los resultados. A partir de la tercera columna y hasta la 19, aparecen dos dígitos en cada una de las casillas que corresponden a los resultados de la primera aplicación de la Prueba T (T1), primer dígito, y a la segunda aplicación de la prueba T (T2), segundo dígito.

La columna 20, donde también aparecen pares de dígitos, indica el número total de alumnos/as que no han resuelto el correspondiente ítem, indicado en las primera y segunda columnas, en la T1, primer dígito, y en la T2, segundo dígito.

Las columnas 21 y 22 indican, asimismo, los resultados incorrectos (columna 21, precedida por un “0”) y correctos (columna 22, precedida por un “1”) de T1, primer dígito, y, de T2, segundo dígito.

		1	3	5	7	9	10	11	12	13	14	15	16	18	19	20	21	23			
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**x**	**0**	**1**
(1, a, 1)	1	01	11	11	11	11	11	10	11	11	11	11	11	11	11	10	11	11	-	1,2	16,15
(1, b, 2)	2	01	00	00	11	11	01	11	10	00	01	00	11	11	11	11	11	11	-	7,5	10,12
(1, c, 3)	3	01	01	00	11	11	01	11	11	00	11	00	11	11	11	11	11	11	-	6,3	11,14
(1, d, 4)	4	00	01	00	01	xx	01	11	11	00	00	10	11	11	01	11	00	11	1,1	9,6	7,10
(1, e, 5)	5	11	11	01	11	11	10	11	11	11	11	11	01	01	10	00	11	11	-	4,3	13,14
(1, f, 6)	6	00	01	11	11	00	11	11	11	11	10	11	01	11	11	00	11	01	-	6,4	11,13
(1, g, 7)	7	00	10	11	11	11	11	10	11	11	10	11	11	11	11	00	01	11	-	3,5	14,12
(1, h, 8)	8	01	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	01	00	10	11	-	3,2	14,15
(1, i, 9)	9	10	11	11	11	11	11	11	11	01	11	11	01	11	01	00	11	11	-	4,2	13,15
(1, j, 10)	10	01	11	01	11	00	11	10	11	11	11	11	01	11	11	00	10	11	-	5,4	12,13
(2, a, 11)	11	11	xx	11	11	00	11	10	11	11	11	11	11	11	00	x1	11	11	2,1	2,3	13,13
(2, b, 12	12	00	xx	00	00	00	00	00	00	00	00	10	00	10	00	x0	00	00	2,1	13,16	2,0
(2, c, 13)	13	11	xx	10	00	00	00	00	01	11	01	01	00	01	00	x0	10	10	2,1	10,10	5,6
(3, a, 14)	14	01	x1	x1	x1	x0	x0	x0	x1	x0	x1	x1	xx	x1	01	x1	x0	x1	15,1	2,5	0,11
(3, b, 15)	15	01	x0	x1	x1	x0	x0	x0	x1	xx	x0	x1	x0	x1	x1	x1	x0	x1	16,1	1,7	0,9
(3, c, 16)	16	00	xx	x0	x0	xx	x0	x0	x0	x0	xx	x0	x1	x0	x0	x1	x0	x0	16,3	1,12	0,2
(3, d, 17)	17	00	x0	x0	x1	xx	x0	x0	x0	xx	xx	x0	x0	x1	x0	x0	x0	x0	16,3	1,12	0,2
(3, e, 18)	18	00	xx	x0	x0	xx	x0	xx	x1	xx	xx	x0	xx	x0	xx	xx	x0	xx	16,9	1,7	0,1

		1	3	5	7	9	10	11	12	13	14	15	16	18	19	20	21	23			
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**x**	**0**	**1**
(3, f, 19)	19	00	xx	x0	x0	xx	x0	x0	x0	xx	x0	x0	x0	x0	x1	x0	x0	x0	16,3	1,13	0,1
(4, a, 20)	20	00	11	10	01	01	11	00	11	xx	11	11	11	11	11	01	00	11	1,1	6,4	10,12
(4, b, 21)	21	00	01	00	01	00	00	00	01	xx	01	01	01	01	01	00	00	11	1,1	15,7	1,9
(4, c, 22)	22	00	01	00	11	00	00	00	01	xx	11	01	11	01	00	01	00	01	1,1	13,7	3,9
(5, a, 23)	23	01	11	10	11	01	11	10	11	xx	01	11	11	11	00	01	00	11	1,1	6,4	10,12
(5, b, 24)	24	01	00	00	01	00	00	00	01	xx	00	00	01	01	00	00	00	00	1,1	16,11	0,5
(5, c, 25)	25	01	11	10	11	01	11	00	11	xx	01	11	01	11	00	01	10	01	1,1	8,4	8,12
(6, a, 26)	26	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	10	11	01	11	11	0,0	1,1	16,16
(6, b, 27)	27	01	00	00	11	11	00	x0	00	01	00	01	01	10	00	0x	00	00	1,1	13,10	3,6
(6, c, 28)	28	01	01	00	01	x1	11	x1	01	x0	11	00	01	01	00	x1	10	11	4,1	9,4	4,12
(7, a, 29)	29	0x	00	01	00	00	11	11	00	01	1x	11	11	11	01	xx	0x	00	1,4	10,5	6,8
(7, b, 30)	30	0x	00	00	00	01	00	00	00	00	0x	00	00	00	00	xx	0x	00	1,4	16,12	0,1
(7, c, 31)	31	xx	xx	xx	xx	xx	xx	x0	xx	xx	x1	0x	xx	xx	xx	xx	x1	xx	16,14	1,1	0,2
(8, a, 32)	32	11	01	11	11	11	01	11	11	11	01	11	11	11	11	11	11	01	-	4,0	13,17
(8, b, 33)	33	11	11	11	10	11	01	11	11	11	01	11	11	10	11	10	11	01	-	3,3	14,14
(8, c, 34)	34	10	00	11	11	01	10	01	01	11	10	10	11	10	01	11	00	10	-	6,8	11,9
(8, d, 35)	35	01	00	10	10	x1	01	01	00	11	01	10	10	11	01	11	10	00	1,0	8,8	8,9
(8, e, 36)	36	11	11	10	11	11	01	11	11	11	01	11	11	11	00	11	11	01	-	4,2	13,15
(8, f, 37)	37	00	00	01	11	x1	01	10	01	11	01	10	00	01	01	00	00	00	1,0	12,8	4,9
(8, g, 38)	38	00	00	11	11	x0	01	01	01	11	00	10	00	11	01	00	00	00	1,0	11,9	5,8
(8, h, 39)	39	00	0x	01	00	x0	00	00	01	00	x0	00	00	10	00	00	01	00	2,1	14,13	1,3
(9 a, 40)	40	01	x1	x1	11	xx	x1	x0	x1	x1	x1	x1	x1	01	00	01	00	x1	11,1	5,3	1,13
(9, b, 41)	41	00	x1	00	01	xx	01	x0	01	x1	01	x1	01	01	01	01	00	x1	6,1	11,4	0,12
(9, c, 42)	42	0x	x1	01	01	xx	01	x1	x1	x1	x1	x1	x1	11	01	01	00	x1	9,2	7,1	1,14
(9, d, 43)	43	01	x0	x1	00	xx	x1	x1	x1	x1	x0	x1	x1	01	00	0x	00	x1	11,2	6,5	0,10
(9, e, 44)	44	00	x0	x1	11	xx	00	x0	x0	x1	x1	x1	x1	10	00	00	00	x1	10,1	5,9	2,7
(9, f, 45)	45	00	xx	x1	01	xx	x0	x0	x0	x1	x1	x1	x1	00	00	x0	00	x0	12,2	5,9	0,6
(9, g, 46)	46	01	xx	x1	11	xx	x0	x0	x1	x1	x1	x1	x1	01	01	x1	00	x1	12,2	4,3	1,12
(9, h, 47)	47	00	xx	x0	01	xx	x0	x0	x0	x0	x1	x0	x1	00	00	x0	00	x0	12,2	5,12	0,3
(10, 0, 48)	48	0x	xx	x1	00	x0	11	01	x0	0x	01	11	00	01	x0	00	x0	x0	7,3	8,8	2,6
(11, a, 49)	49	xx	xx	xx	xx	1x	x1	x1	x1	xx	x0	0x	x1	x1	x0	x1	xx	xx	15,9	2,2	0,6
(11, b, 50)	50	xx	xx	xx	xx	1x	x1	x1	x1	xx	x0	0x	x1	x1	xx	x1	xx	xx	15,10	1,1	1,6
(11, c, 51)	51	xx	xx	xx	xx	1x	x1	x1	x1	xx	x0	xx	xx	x1	x0	x1	xx	xx	16,10	0,2	1,5
(11, d, 52)	52	xx	xx	xx	xx	0x	x1	x1	x1	xx	x0	xx	xx	x1	x0	x0	xx	xx	16,10	1,3	0,4
(12, a, 53)	53	10	00	x0	11	11	00	00	10	01	01	01	00	11	x1	11	01	x1	3,0	8,7	6,10
(12, b, 54)	54	10	00	x0	11	11	00	00	11	01	01	01	01	11	x1	01	01	x1	3,0	9,5	5,12
(12, c, 55)	55	00	x0	x0	11	11	00	01	01	x1	x1	01	x1	11	x1	11	x1	x1	8,0	5,4	4,13
(12, d, 56)	56	00	xx	x0	11	11	00	01	01	x1	x1	01	x1	01	x1	01	01	x1	7,1	8,3	2,13
(13,a, 57)	57	0x	00	xx	00	xx	xx	x0	10	xx	x0	xx	00	00	00	0x	00	xx	8,8	8,9	1,0
(13, a,58)	58	0x	0x	xx	x0	xx	xx	0x	xx	xx	xx	xx	00	xx	xx	0x	00	xx	11,14	6,3	0,0
(13, b, 59)	59	0x	xx	xx	xx	xx	xx	xx	xx	xx	xx	xx	x0	00	0x	0x	00	xx	12,14	5,3	0,0
(13, b, 60)	60	0x	xx	xx	00	xx	xx	00	00	xx	x0	xx	x0	xx	x0	0x	00	xx	11,10	6,7	0,0
(14, a, 61)	61	x0	xx	xx	01	x0	x1	xx	x1	11	0x	1x	11	xx	x0	xx	x0	xx	12,8	2,4	3,5
(14, b, 62)	62	xx	xx	xx	x0	00	00	x0	01	01	01	01	x1	x1	x0	00	x0	x0	10,3	7,8	0,6
(15 a, 63)	63	x0	00	x0	01	01	00	00	01	01	00	00	x1	x1	01	01	00	00	4,0	13,9	0,8
(15, b, 64)	64	x1	x1	x1	x0	01	x0	00	x1	x0	x0	00	x0	01	x1	x1	01	x0	12,0	5,8	0,9
(15, c, 65)	65	x1	x1	x1	x0	x1	11	00	x1	x0	x0	00	x1	01	x1	x1	x1	x0	13,0	3,6	1,11
(15, d, 66)	66	x0	x0	x1	x0	x1	01	00	x1	x0	x0	00	x1	01	01	x1	x0	00	11,0	6,9	0,8
(15, e, 67)	67	x0	x0	x0	x0	x0	x0	00	x0	x0	x0	00	x0	00	00	x0	x0	00	12,0	5,17	0,0
(!5, f, 68)	68	x0	x0	x0	x0	x0	00	00	x0	xx	x0	00	x0	00	00	x0	00	00	10,1	7,16	0,0
(15, g, 69)	69	x0	xx	x0	x1	x0	xx	00	xx	xx	x1	x0	x1	x1	01	xx	x0	xx	15,6	2,6	0,5
(15, h, 70)	70	xx	x0	x0	x0	x0	00	x1	11	xx	x0	x0	x1	00	00	x0	01	x1	12,2	4,10	1,5
(15, i, 71)	71	xx	xx	x0	x0	x0	x0	x1	x1	xx	x0	x0	x1	x0	00	xx	x0	x0	16,4	1,10	0,3
(15, j, 72)	72	xx	xx	x0	x0	x0	x0	00	x0	xx	x0	00	x0	00	00	x0	x0	x0	13,3	4,14	0,0

		1	3	5	7	9	10	11	12	13	14	15	16	18	19	20	21	23			
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**x**	**0**	**1**
(16, a, 73)	73	00	x0	x0	x0	x0	00	x0	00	00	00	00	x1	00	01	01	00	00	6,0	11,14	0,3
(16, b, 74)	74	0x	xx	x0	x0	xx	0x	x0	xx	0x	01	x1	x1	00	00	0x	00	00	8,7	9,7	0,3
(16, c, 75)	75	xx	xx	xx	x0	xx	00	x0	xx	0x	00	x0	x0	00	00	x0	00	00	10,6	7,11	0,0
(16, d, 76)	76	xx	x1	x1	xx	xx	01	x0	x1	xx	x0	x1	x0	00	01	x1	00	00	12,4	5,6	0,7
(16, e, 77)	77	xx	x0	x0	xx	xx	0x	x0	xx	xx	00	x0	x0	00	00	0x	0x	00	10,8	7,9	0,0
(16, f, 78)	78	xx	xx	x0	x0	xx	01	xx	xx	xx	xx	xx	x0	00	01	0x	0x	00	11,10	6,5	0,2
(16, g, 79)	79	xx	xx	xx	xx	xx	0x	xx	xx	xx	x1	x0	x1	00	01	xx	00	00	12,10	5,4	0,3
(16, h, 80)	80	xx	xx	xx	x0	xx	00	x0	x0	xx	xx	x0	x1	00	00	xx	xx	00	13,8	4,8	0,1
(17 a, 81)	81	11	x1	x1	1x	11	11	11	11	xx	11	11	11	11	11	11	11	11	3,2	0,0	14,15
(17, a, 82)	82	11	x1	x0	0x	11	10	10	10	xx	11	11	11	00	01	11	11	01	3,2	4,5	10,10
(17, a, 83)	83	11	x1	x1	0x	11	10	00	00	xx	11	11	11	00	01	01	11	00	3,2	7,5	7,10
(17, b, 84)	84	11	x1	x1	1x	11	10	11	11	xx	1x	11	11	11	11	11	11	11	3,3	0,1	14,13
(17, b, 85)	85	11	x1	x0	0x	11	10	10	10	xx	1x	11	11	00	00	11	11	01	3,3	4,6	10,8
(17, b, 86)	86	11	x1	x1	0x	11	10	00	00	xx	0x	11	10	00	00	01	11	00	3,3	8,7	6,7
(17, c, 87)	87	11	x0	x1	1x	11	00	01	00	xx	0x	0x	11	11	00	00	11	00	3,4	8,6	6,7
(17, c, 88)	88	11	x0	x0	0x	10	00	10	00	xx	0x	0x	11	00	00	00	11	00	3,4	9,10	5,3
(17, c, 89)	89	11	x0	x0	0x	11	00	00	00	xx	0x	0x	10	00	00	00	11	00	3,4	10,10	4,3
(18 ,a, 90)	90	11	xx	x1	1x	11	00	xx	x1	xx	01	01	11	01	01	11	x0	00	6,4	6,3	5,10
(18, a, 91)	91	0x	xx	x1	xx	00	00	xx	x0	xx	00	01	01	01	00	00	x0	00	7,5	10,8	0,4
(18, a, 92)	92	0x	xx	x1	xx	x0	00	xx	x0	xx	00	01	00	00	00	01	x0	00	8,5	9,9	0,3
(18, b, 93)	93	1x	xx	x1	1x	01	01	xx	x1	xx	0x	01	11	01	00	01	x1	00	6,6	8,2	3,9
(18, b, 94)	94	0x	xx	x1	xx	x0	00	xx	x0	xx	0x	01	01	01	00	00	x0	00	8,6	9,7	0,4
(18, b, 95)	95	0x	xx	x0	xx	x0	00	xx	x0	xx	0x	01	00	00	00	00	x0	0x	8,7	9,9	0,1
(19 a, 96)	96	0x	x1	x0	00	11	01	x1	x0	x0	1x	00	11	x1	11	00	11	00	6,2	6,7	5,8
(19, b, 97)	97	0x	x0	x0	00	01	00	x1	x0	x0	0x	00	01	x1	01	01	00	x0	7,2	10,9	0,6
(19, c, 98)	98	0x	x0	x0	00	01	00	x1	x0	x0	0x	00	01	x1	01	01	00	xx	7,3	10,8	0,6
(20, a, 99)	99	1x	xx	xx	xx	xx	00	01	x1	x1	xx	x1	xx	01	xx	x1	x1	xx	13,9	3,1	1,7
(20, a, 100)	100	xx	xx	xx	xx	xx	x1	xx	xx	x1	xx	x1	x1	x1	x0	x1	xx	xx	17,10	0,1	0,6
(20, b, 101)	101	1x	xx	xx	xx	xx	01	0x	xx	x1	xx	x0	xx	01	xx	x1	x1	xx	13,11	3,1	1,5
(20, b, 102)	102	xx	xx	xx	xx	xx	x1	x1	x1	x1	xx	x1	x1	x1	x0	x1	xx	xx	17,8	0,1	0,8

Tabla 6.4

Las respuestas de los ítems desde el número 1 al 10 (relacionados con O_2) y del 32 al 39 (también relacionados con O_2), para detectar las habilidades en el tratamiento de expresiones con paréntesis no han mostrado, en general, mucha variación de T1 a T2, sólo tres ítems (1, 7 y 34) han sido peor resueltos después de la instrucción. En el primer grupo indicado aquí, los paréntesis sólo contenían un término y los del segundo grupo, tenían dentro del paréntesis dos términos, e incluso algunos de éstos con signos negativos.

Las respuestas relacionadas con el signo "-" delante del paréntesis mejoran, pero no demasiado ya que para los ítems 34, 35, 37 38 y 39 que contienen exclusivamente números, la variación de los resultados, según la tabla 6.4, no son significativos. Lo mismo ocurre cuando los términos son alfanuméricos como es el caso de los ítems números 44, 45 y 47 (O_2).

El grupo de ítems desde el 40 al 47 en parte ya ha sido comentado, pero de ellos los ítems 40, 43 y 46 referidos a operatividad básica con paréntesis (O_2), donde no aparecen signos menos ante los mismos, muestra una gran diferencia en aciertos entre la primera aplicación T1 y la segunda aplicación T2.

Los grupos de ítems, desde el 14 al 19 y desde el 40 al 47, se ocupan de operatividad básica con paréntesis pero todos los términos son alfanuméricos. El primer grupo se trata de contextos aditivo - multiplicativos y el segundo, sólo aditivos. Si observamos la tabla 6.4 vemos cómo el primer grupo fue prácticamente inabordado en T1 y los ítems que se abordaron muestran fallo total, sin embargo en la aplicación T2 hay mejoría. En el grupo segundo la situación es algo mejor, pero no satisfactoria.

Sí han sido significativas después de la instrucción las respuestas de los alumnos para los ítems 41 y 42, de aceptación de respuestas abiertas (O_1 y C_3).

Los ítems 20, 21 y 22 y 23, 24 y 25 son de operatividad básica, los primeros en contextos aditivos y los últimos, en contextos multiplicativos. Sólo uno de ellos (24) precisa paréntesis, en principio. En estos dos grupos sí ha habido mejoría digna de mención, tratándose además de enunciados inhabituales para los alumnos de esta edad.

En los ítems 11, 12 y 13 los resultados son muy diferentes entre el primero de estos ítems y los otros, dos. Se trata de interpretar las letras y su significado en ciertas igualdades a las que parece han contestado a veces de manera aleatoria. (C_3)

Lo mismo ocurre con los ítems 29, 30 y 31. Aquí también hay diferencia de dificultad entre el primero y los dos restantes. A los alumnos de esta edad les es todavía difícil interpretar las expresiones simbólicas, fuera de contexto. (C_3)

En el caso de la sustitución formal (O_3) también se ha detectado mejoría después de la implementación del diseño, tanto en los ítems 26, 27 y 28 como en los 48, 49 50, 51 y 52, aunque en éstos últimos ha sido menor. El ítem 48 implica un grado de dificultad mayor, ya constatada por Hart (1981) con niños de 14 años, que utilizaron las letras como objetos en su experiencia.

El grupo de ítems comprendido entre el 53 y el 62 están contextualizados en el cálculo de perímetros y en las dimensiones de los rectángulos (C_2). Reconocemos que el enunciado de los ítems 57, 58, 59 y 60 no quedó suficientemente claro y los alumnos han visto condicionadas sus respuestas a ello. Si observamos la tabla 1 vemos como las respuestas de los ítems 53, 54, 55 y 56 han mejorado, sin embargo los ítems 57, 58, 59 y 60 no son correctos pero 61 y 62 aunque no mucho, también se han visto favorecidos en la Prueba T en su segunda aplicación (T2).

En los ítems que detectan directamente las habilidades de conversión de registros (desde el nº 63 al 80) habría que hacer distinción “a priori” en cuanto a dificultad entre el grupo de ítems desde el 63 al 72 de contexto aritmético y del 73 al 80, de otros contextos, sin embargo los resultados no han sido muy distintos. En los resultados de contexto aritmético no ha habido dificultad al interpretar distintas expresiones del “igual” (C_3), por ejemplo “es”; sí parece haberla habido al aparecer el vocablo “todo” implicando un paréntesis en el ítem 72. En el segundo grupo (ítems desde el 73 al 80), el contexto quizás más lejano al niño es el relativo a un rectángulo aunque desde el punto de vista escolar, sí es cercano. Los resultados ahora son aún peores que anteriormente, influyendo negativamente el vocablo “obtengo” como expresión de “igual” y aún más sorprende que ni un alumno haya sido capaz de realizar una adecuada conversión de registro estando el enunciado contextualizado en la edad en el caso de los ítems 75 y 77.

En el conjunto de ítems desde el 81 al 95, vuelve a haber dos subconjuntos diferenciados dentro del mismo contexto, precio de frutas (C_2). Desde los ítems 81 al 90 se utilizan exclusivamente números y se observa que ha habido empeoramiento desde T1 a T2 y sin embargo en el resto de los ítems, desde el 90 al 95, donde se han utilizado letras para representar el precio de las distintas frutas ha habido mejoría en los resultados, aunque no significativa.

En los ítems 96, 97 y 98, muy utilizados en investigaciones anteriores a la nuestra, sí hay una pequeña diferencia entre los resultados del primero (96) con datos numéricos exclusivamente y los dos restantes, pero los tres presentan dificultades.

En los últimos ítems de la prueba, 99, 100, 101 y 102 también parece ha incidido negativamente el enunciado ya que los alumnos no han distinguido claramente las tres representaciones que se daban para elegir dos, quizás había que haber hecho una mayor distinción entre ellas en la propia presentación del ítem.

En la tabla 1 del anexo 20 se muestran los resultados obtenidos en forma de la frecuencia de aciertos, errores y no resueltos en las respuestas dadas a cada uno de los ítems de las preguntas, además del análisis para medir el índice de dificultad (ID) de cada uno de los ítems en relación a los otros (columna 6ª de la tabla, correspondiendo la primera línea a T1 y la segunda, a T2). El ID se ha calculado dividiendo el número total de alumnos que acertaron por la población; por tanto, un índice de dificultad 1 indica que todos los alumnos que intentaron contestar lo hicieron correctamente y que el ítem es muy fácil. Queremos hacer nuestra la observación (Muñiz, 1992) que manifiesta que el índice de dificultad sería semánticamente más apropiado denominarlo índice de facilidad, pues a medida que aumenta indica que el ítem es más fácil, no más difícil.

El valor medio de la Prueba, que coincide con la suma de los índices de dificultad, ha sido:

$$\sum_{1}^{102} IDi = 27.573 \text{ en la Primera Aplicación}$$

$$\sum_{1}^{102} IDi = 53.796 \text{ en la Segunda Aplicación}$$

El análisis lo vamos a presentar primero referido a la primera aplicación de la prueba T (T1) y luego, a la segunda, T2.

El análisis de las respuestas de la primera aplicación, muestra lo siguiente:

Al observar los resultados de la última columna y en cada una de las casillas de la misma (el primer cociente), se aprecia que:

- Los ítems 51, 81 y 84 fueron contestados por el 100 % de los alumnos que lo abordaron. Estos tres ítems se refieren al reconocimiento de una sustitución (O_3) en dos expresiones equivalentes (ítem 51) y a la contextualización del lenguaje algebraico en un contexto sencillo (precio de frutas), ítem 81 y 84 (C_2).
- Los ítems 1 y 26 fueron contestados por más del 90 % de los alumnos que lo intentaron. Por una parte, el ítem 1 es una sencilla suma de dos números enteros, uno positivo y otro negativo en que ambos términos se presentan con paréntesis (O_2) y el ítem 26 ya ha sido utilizado por K. Hart y D. Küchemann en el Chelsea Diagnostic Mathematics Test (Algebra), en 1984 (pregunta 5) y comentado en "An Exploratory Teaching Experiment" por Bell y otros (1987). En su caso el tanto por ciento de aciertos fue del 97 % y en nuestra investigación este ítem aparece con un índice de dificultad del 94 % que indica también una gran facilidad para resolverlo.
- Menos de la mitad de alumnos contestaron acertadamente 73 reactivos (4, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 24, 27, 28, 29, 30, 31, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99 y 101). Como se puede observar ha sido bastante significativo este porcentaje de reactivos, ya que incluso para los alumnos no ha sido fácil realizar operatividad básica ni siquiera con sólo datos numéricos, como es el caso de los ítems 37, 38 y 39 (O_1 y O_2).
- Los ítems de mayor grado de dificultad (41 ítems) fueron el 14, 15, 16, 17, 18, 19, 24, 30, 31, 41, 43, 45, 47, 49, 52, 58, 59, 60, 62, 63, 64, 66, 67, 68, 69, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 91, 92, 94, 95, 97 y el 98. En este grupo de ítems están presentes varias situaciones diferentes como son el tratamiento con paréntesis (O_2), la admisión de respuestas abiertas (O_3), la contextualización en general (C_1) y en particular en perímetros y áreas (C_2). Varios de estos ítems han estado incluidos en investigaciones anteriores como las de Hart (1984) y Rojano (1985). Es importante observar que la conversión de registros, desde el habitual al formal algebraico ha presentado gran dificultad.

Para la segunda aplicación de la prueba T (T2), el análisis de las respuestas muestra:

Los ítems 32, 81 (este último coincide con la primera aplicación) y 84 fueron contestados por el 100 % de los alumnos que los abordaron. Se observa que el 32 fue abordado y resuelto correctamente por todos los alumnos.

Los ítems 26, 42 (aceptación de respuesta abierta) y 84 fueron contestados por más del 90 % de los alumnos que lo intentaron (la proporción de las respuestas del ítem 26 coincide con la de la primera aplicación y la del 84 se aproxima).

Menos de la mitad de alumnos contestaron acertadamente 41 reactivos (12, 13, 16, 17, 18, 19, 24, 27, 30, 38, 39, 44, 45, 47, 48, 57, 58, 59, 60, 62, 63, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 77, 78, 79, 88, 89, 91, 92, 95, 97 y 98). Todos están comprendidos en los reactivos de las mismas características de la primera aplicación.

Los ítems 55 y 62 han sido estudiados por Hart aludiendo a la importancia de la complejidad estructural de los ítems a la hora de analizarlos, hecho que ella indica que ya había sido presentado por Collis (1975) y Haldford (1978). Ella plantea que podía estar en referencia al número de variables utilizadas en el mismo, pero no valía en este caso para la comparación de estos dos ítems y alude (Hart) a que Collis también ha mostrado que la naturaleza de los elementos de un ítem, tanto como su complejidad estructural, puede tener un marcado efecto en la facilidad del mismo. La principal distinción que Collis hace es si los elementos son números pequeños, números grandes o letras. Pero más importante que estas categorías específicas es el argumento de Collis que las dificultades provienen de la falta de significado de los elementos para los alumnos. Parece que los niños pueden tener distintos significados para las letras. En el caso de los ítems citados las respuestas son de la misma forma: 3e y 2n, sin embargo el ítem 62 es mucho más difícil: “n” es claramente definido como un número (nosotros hemos dicho que la figura tiene n lados) que tiene que ser operada incluso aunque su valor no sea conocido. En la tabla expuesta se puede observar cómo, efectivamente, también a nuestros alumnos le ha resultado más fácil el primero (55).

Los ítems de mayor grado de dificultad (10 ítems) fueron el 12, 57, 58, 59, 60, 67, 68, 72, 75 y el 77; en esta ocasión aquellos ítems relacionados con el contexto “edad” presentan más dificultad que cualquiera de los otros (ítems 75 y 77, por ejemplo), que parece ha sido comprendida su conversión al lenguaje algebraico.

En general, están comprendidos en los reactivos de las mismas características de la primera aplicación, excepto los ítems números 12 y 57.

Si se comparan los resultados de las dos aplicaciones de la Prueba T, se observa que: en 78 ítems se mejora la facilidad, en 13 se disminuye y en 11 la situación no varía. Se puede considerar el ítem más fácil el número 81 ya que todos los alumnos que intentan resolverlo lo hacen correctamente, tanto en la primera aplicación como en la segunda.

En el caso que hemos comentado de los ítems 55 y 62, se observa que entre la primera y la segunda aplicación de la Prueba, los resultados han mejorado en los dos ítems.

Las tablas siguientes, 6.5 y 6.6, muestran los aciertos, errores e ítems sin abordar, de los 17 alumnos seleccionados y la tabla 6.7, el número de orden de cada uno de los alumnos en relación al total del grupo.

Cuando existe el mismo número de aciertos, se considera con mejor nº de orden aquel que ha mostrado más diferencia en aciertos entre las dos aplicaciones de la prueba T: caso de los alumnos nº 5, 11 y 12, los alumnos nº 6 y 7 y los alumnos 3 y 9 en la primera aplicación (T1) y los alumnos nº 4 y 6 y los alumnos 1 y 7 en la segunda apicación (T2).

	1	3	5	7	9	10	11	12	13	14	15	16	18	19	20	21	23			
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**x**	**0**	**1**
x	25	68	68	39	50	28	46	50	68	42	34	45	23	25	38	32	42	**723**		
0	53	22	17	29	22	51	33	26	17	39	38	27	46	63	48	43	41		**615**	
1	24	12	17	34	30	23	23	26	17	21	30	30	33	14	16	27	19			**396**
Or	**8**	**17**	**13**	**1**	**3**	**10**	**9**	**7**	**14**	**11**	**5**	**4**	**2**	**16**	**15**	**6**	**12**			

Tabla 6.5

	1	3	5	7	9	10	11	12	13	14	15	16	18	19	20	21	23			
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**x**	**0**	**1**
	36	40	18	28	33	9	14	11	47	26	14	7	4	7	18	11	18	**341**		
0	31	30	45	32	28	51	53	35	18	33	36	28	36	49	35	57	46		**643**	
1	35	32	39	42	41	42	35	56	37	43	52	67	62	46	49	34	38			**750**
Or	**15**	**17**	**11**	**9**	**10**	**8**	**14**	**3**	**13**	**7**	**4**	**1**	**2**	**6**	**5**	**16**	**12**			

Tabla 6.6

Nº	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
Or . Pretest	8	*17*	13	1	3	10	9	7	14	11	5	4	*2*	16	15	6	*12*
Or . Postest	15	*17*	**11**	9	10	**8**	14	**3**	**13**	**7**	**4**	**1**	*2*	**6**	**5**	16	*12*

Tabla 6.7

Los números que se expresan con letra cursiva es que han mantenido su nº de orden y los que aparecen con negrilla es que han mejorado su lugar de orden en la segunda aplicación de la Prueba (T2). Por tanto, se constata que cinco alumnos empeoran su situación, tres permanecen en el último lugar y positivamente 9 mejoran su nº de orden.

En la tabla 6.8, se muestra la variación de los resultados de la primera aplicación de la prueba (Tl) a la segunda (T2) de los 17 alumnos del curso 1995-96, calculada según la fórmula del Shell Centre (los detalles de la misma están en el Capítulo 4).

A continuación se presenta una comparación de los datos globales de la T1 y T2.

102 cuestiones comunes por 17 alumnos = 1734 “notas” posibles.

395 respuestas correctas en la Prueba T (T1), codificadas con 10, 11 y 1X.

81 respuestas que pasaron de correctas a incorrectas.

Pasaron de correctas a incorrectas, o sea de “1” a “0” y de “1” a “X” (se incluyen la son abordadas en incorrectas).

10: 65 1X: 16 en total, 81.

1734 - 395 = 1339 respuestas incorrectas en T1.

930 se mantuvieron erróneas:

Se mantienen erróneas: “XX”, “00”, “X0” y “0X”:

XX: 260 00: 328 X0: 250 0X: 65

en total, 903

(213 + 223 = 436, pasaron a correctas en T2).

Luego, según la expresión general

$$- \frac{e_{fi}}{b_i} \qquad + \frac{e_i - e_{ff}}{e_i}$$

siendo:

b_i la expresión de ítem correcto en el pre-test

b_f la expresión de ítem correcto en el post-test

e_i la expresión de error en el pre-test

e_f la expresión de error en el post-test

e_{fi} la expresión de errores del post-test no cometidos en el pre-test.

e_{ff} la expresión de errores del post-test cometidos ya en el pre-test.

$b_i + e_i = 17$, en este caso, siempre será el total de respuestas posibles.

$b_f + e_f = 17$.

$b_f + e_{fi} + e_{ff} = 17$.

En este caso concreto, la expresión resultante es:

$$\boxed{- \frac{81}{396} \qquad + \frac{(723+615)-903}{723+615}}$$

es decir,

globalmente $\boxed{\text{20.45 \% bajan} \quad \text{y 48.17 \% suben.}}$

nºal	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	
00	21	13	11	12	11	31	23	12	7	11	17	12	25	37	21	32	32	**328**
XX	17	38	18	17	29	6	12	11	44	11	7	7	4	6	9	7	17	**260**
01	16	7	6	11	10	17	8	14	7	17	15	15	22	25	18	7	8	**223**
10	4	1	6	2	1	7	9	5	0	3	6	3	7	1	2	6	2	**65**
11	17	11	11	27	26	16	14	21	17	14	23	27	25	13	14	21	17	**314**
1X	3	0	0	5	3	0	0	0	0	4	1	0	0	0	0	0	0	**16**
X1	2	14	22	4	5	9	13	21	13	12	14	25	15	8	17	6	13	**213**
0X	16	2	0	6	1	3	2	0	3	11	6	0	0	1	9	4	1	**65**
X0	6	16	28	18	16	13	21	18	11	19	13	13	4	11	12	19	12	**250**
e_{fi}	7	1	6	7	4	7	9	5	0	7	7	3	7	1	2	6	2	
b_i	24	12	17	34	30	23	23	26	17	21	30	30	33	14	16	27	19	
e_i	78	90	85	68	72	79	79	76	85	81	72	72	69	88	86	75	83	
e_{ff}	60	69	57	53	57	53	58	41	65	52	43	32	33	55	51	62	62	**903**
$-e_{fi}/b_i$	.291	.083	.352	.205	.133	.304	.391	.192	.000	.333	.233	.100	.212	.071	.125	.222	.105	
+ $(e_i - e_{ff})$ $/e_i$	18/78	21/90	28/85	15/68	15/72	26/79	21/79	35/76	20/85	29/81	29/72	40/72	36/69	33/88	35/86	13/75	21/83	
+ $(e_i - e_{ff})$ $/e_i$	.230	**.233**	.329	**.220**	**.208**	**.329**	.265	**.460**	**.235**	**.358**	**.402**	**.555**	**.521**	**.375**	**.406**	.173	**.253**	
nº al.	1	**2**	3	**4**	**5**	**6**	7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	16	**17**	

Tabla 6.8

Estas tablas, por tanto, muestran los resultados de aciertos y errores por ítem (tabla 6.7), por aplicación de la prueba, antes (tabla 6.5) y después de la instrucción (tabla 6.6), por alumno (tabla 6.8), así como la de los ítems que consiguieron cada uno de los aciertos globales en la T1 y en la T2 que presentamos a continuación en las tablas 6.9 y 6.10.

No existen ítems que hayan obtenido 9, 15 ó 17 aciertos. Como se observa 13 de los 17 alumnos mejoraron sus resultados.

		N	**U**	**M**	**E**	**R**	**O**			**D**	**E**		**L**	**O**	**S**		**Í**	**T**	**E**	**M**	**S**			**T**
N	**0**	14	15	16	17	18	19	24	30	31	41	43	45	47	49	52	58	59	60	62	63	64	66	
U		67	68	69	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	91	92	94	95	97	98	100	102		**43**
M	**1**	21	39	40	42	46	50	51	57	65	70	99	101											**12**
E	**2**	12	44	48	56																			**4**
R	**3**	22	27	61	93																			**4**
O	**4**	28	37	55	89																			**4**
	5	13	38	54	88	90	96																	**6**
A	**6**	29	53	86	87																			**4**
C	**7**	4	83																					**2**
I	**8**	25	35																					**2**
E	**10**	2	20	23	82	85																		**5**
R	**11**	3	6	34																				**3**
T	**12**	10																						**1**
O	**13**	5	9	11	32	36																		**5**
S	**14**	7	8	33	81	84																		**5**
	16	1	26																					**2**

Tabla 6.9

		N	Ú	M	E	R	O		Í	T	E	M	S	Nº Total Ítems
N	**0**	12	57	58	59	60	67	68	72	75	77			**10**
U	**1**	18	19	30	80	95								**5**
M	**2**	16	17	31	78									**4**
E	**3**	39	47	71	73	74	79	88	89	92				**9**
R	**4**	52	91	94										**3**
O	**5**	24	51	61	69	70	101							**6**
	6	13	27	45	48	49	50	62	97	98	100			**10**
	7	44	76	86	87	99								**5**
A	**8**	29	38	63	66	85	96	102						**7**
C	**9**	15	21	22	34	35	37	64	93					**8**
I	**10**	4	43	53	82	83	90							**6**
E	**11**	14	65											**2**
R	**12**	2	7	20	23	25	28	41	46	54				**9**
T	**13**	6	10	11	40	55	56	84						**7**
O	**14**	3	5	33	42									**3**
S	**15**	1	8	9	36	81								**5**
	16	26												**1**
	17	32												**1**

Tabla 6.10

Hacemos ahora algunas consideraciones a estas últimas tablas: 6.9 y 6.10. Se puede observar que de 43 ítems que obtuvieron 0 aciertos en T1, sólo 10 tienen esta situación en la T2. Existen 73 ítems en la T1 (71,56 %) que obtuvieron cinco o menos aciertos y este porcentaje ha bajado al 36,27 % por haber sólo 37 ítems en esta situación en la T2. Sin embargo, y, como consecuencia de lo expresado, 13 ítems (12,74 %) obtuvieron en la T1, 12 ó más aciertos y se ha duplicado este porcentaje (25,49 %, ahora), en la T2. Por lo cual, es obvio afirmar la incidencia positiva de la instrucción.

En el anexo 23 se muestran los cálculos realizados con la fórmula del Shell Centre de los 102 ítems de la Prueba T, que expresan una mejora en el 41,17 % de los mismos desde la primera aplicación de la Prueba T a la segunda.

6.7. AUDIOGRABACIONES

En esta última experiencia se realizaron cinco audiciones en casete.

Las transcripciones de las mismas conforman el anexo 15 y complementan la información obtenida por los otros instrumentos.

La primera grabación, audio 0, (protocolo en anexo 14, 0) de la que ni siquiera los alumnos tuvieron consciencia de ella, fue hecha cuando se trabajaba la ficha 15 del cuaderno que contiene ítems con datos alfanuméricos de aceptación de respuestas abiertas a) y d), contextos aditivos sin paréntesis (c y f), con signo menos delante de paréntesis (b, g y m); de éstos el paréntesis contiene binomios con signo positivo (g) y binomios en el paréntesis con el 2º término negativo también (b y m). Asimismo existen dos expresiones de la misma estructura pero utilizando distintas variables (j y n). Los ítems “l” y “o” contienen signo positivo delante de paréntesis que forma un binomio, en el primer caso (l) con los dos términos “+” y en el 2º (o) con el segundo término del binomio, negativo.

Existen otros dos ítems con el paréntesis como primer término con un segundo término con signo positivo (h) y otro con signo negativo, k, siendo el paréntesis de términos positivos y el e) que tiene el segundo término del paréntesis que sigue siendo el primero de la expresión general, que es “negativo”. El último ítem que forma parte de esta ficha está formado por la suma de un trinomio y un binomio (i).

Es importante indicar la gran participación de los alumnos, sin distinción entre la grabación hecha sin tener ellos conocimiento de ello o teniéndolo.

Hacemos ahora un resumen de los resultados de las transcripciones recogidas en el anexo 15. 0.

Para las respuestas abiertas como es el caso del apartado a) hubo trece alumnos, que contestaron mal, al principio “4 +3 y= 7y”. También hubo quien prescindió de la variable y contestó 7 o sea la suma de los coeficientes, ignorando la letra. En el ítem d), “5y-2t”, también de aceptación de respuesta abierta, hubo respuestas correctas, pero también: “7y” ó “3y”, o sea sumar o restar los coeficientes y añadir la primera letra. La profesora didacta recuerda lo que son términos semejantes.

En el apartado b) la solución de 18 alumnos fue correcta, sin embargo, alguno cambió sólo el signo del segundo término del paréntesis por haber un signo “-” delante, pero no quitó el paréntesis. Se aclaró el por qué de cambiar todos los signos de los términos al quitar el paréntesis.

El apartado c) es contestado por algunos correctamente pero tampoco ha faltado quien ha sustituido “a+a” por “a^2”, hecho que proporcionó la situación para explicar la potenciación y su diferencia con la operación de multiplicar. También este ejercicio permitió repasar el concepto de términos semejantes.

En el apartado e) un alumno indica que se puede quitar paréntesis sin más pues hay un signo positivo delante del paréntesis (e). Sin embargo, la operatividad posterior que era bastante sencilla algún alumno aún la realizó mal, aunque algún otro reconoció la obtención del elemento neutro al tener los términos opuestos, pero no supieron darle el nombre de “opuestos”, sino sólo que eran semejantes.

En la pregunta siguiente operan bien, pero no usan aún la terminología de términos semejantes e incluso usan los vocablos ”términos paralelos”.

Alguna alumna confunde la propiedad asociativa y conmutativa con la distributiva; aprovechando tal situación se hizo hincapié en que la distributividad supone dos operaciones.

Se da el caso de cambiar el signo del término que está más próximo al signo “-” delante del paréntesis, hecho que se aprovecha para explicar que ha de cambiarse todos los signos de todos los términos cuando el paréntesis está precedido de un signo menos, dando la razón para ello, como se había hecho cuando se trabajó el apartado b.

Ha habido quien ha expresado que ha dado a “a” el valor “1” en “3 a - b-a” y por eso daba “4 a-b” como resultado, y posteriormente “3 a-1-a” con lo cual el valor “1” lo había dado a “b”.

Sin embargo, en el caso “h” donde el signo “+” es el que está fuera del paréntesis, no hay gran dificultad.

Vuelve a presentar dificultad “(a+b) + (a-b)” y dan como resultado 2 a + 2b.

Hay un alumno que siempre expresa “por” aunque existan sumas.

Como se puede observar sigue habiendo variedad de respuestas, como es natural.

A partir del 29/04/96 se comenzaron las cuatro restantes grabaciones. Las preguntas contempladas en la puesta en común en esta sesión (audio 1, anexo 14.1) fueron siete.

La primera tiene contexto aditivo multiplicativo, exclusivamente aritmético, con todos los ítems con, al menos, un paréntesis.

En la segunda todos los términos se relacionan aditivamente, poseen signo más o menos delante y detrás de los paréntesis, que aparecen en todos los ítems menos tres: dos que son de respuestas abiertas y el primero que es muy sencillo y sin paréntesis. (O_1)

La tercera pregunta tiene ítems de distintas características, pero todos de conversión de registros desde el lenguaje habitual a la representación formal algebraica: los apartados c) d) e) f) p) y q) dan lugar a igualdades. Cuatro ítems (c, d, e y f) proceden de contexto aritmético y dos relativos a número de vídeos de un club y nº de boliches, respectivamente. El resto de la pregunta, excepto dos ítems, da lugar a expresiones monómicas o binómicas, cuyos enunciados contienen los vocablos doble, triplo, cuadrado.

Los dos ítems que quedan: i) y o) se refieren a expresiones de precios de “gomas de borrar”, donde la expresión resultante es una división, y, “tenis”, cuya expresión resultante es un producto.

Las cuatro preguntas restantes, también son todas de conversión de registros. La cuarta es de estructura similar al apartado i) de la pregunta anterior pero con otro contexto.

La quinta es de contexto de edad y en el apartado a) se sugiere el uso de un cuadro para ver si facilita la resolución de la situación.

El apartado b) puede dar lugar al uso de paréntesis pero no es obligado. El apartado c), sin embargo, sí implica el uso obligado de paréntesis.

La pregunta 6 es “El fotógrafo de un colegio hizo f fotos en un día por grupos. Cada grupo tenía 22 alumnos, ¿cómo expresarías el número total de niños que fotografió ese día y cómo expresarías el triplo de ese número de niños? Se da la letra a utilizar como incógnita. También se utiliza el vocablo “triplo”.

En la pregunta 7 también se da la letra a utilizar y aparece un nuevo ítem que presenta gran dificultad y es el de la estructura “tantos… menos que…” que ya se planteaba en contexto aritmético en el “3h”).

La audición siguiente realizada (audio 1, 13b), podemos resumirla en:

. Repaso de propiedades conmutativa, asociativa y distributiva.

. Distintas estrategias de resolver paréntesis, paso a paso donde se cometen menos errores, en especial los alumnos de bajo nivel, o aplicando la asociatividad en los paréntesis.

Hacemos ahora algunas consideraciones al respecto:

. Suelen resolver directamente si los signos que están fuera de paréntesis son positivos.

. La estructura “asimétrica” del enunciado. Por ejemplo: “4 - (11-2) +3 - (5-6) 2”, hace que prescindan de ella y la vuelvan simétrica: “4-(11-2)+3-(5-6) $\pm$ 2”.

. No recordaban el “sacar factor común” con exactitud, pero al repasarlo lo captaron rápidamente. Se insistió en la reversibilidad: propiedad distributiva .$\longleftrightarrow$. sacar factor común.

. Se explica la identidad de expresiones como por ejemplo: “-3x” y “-x” por “3”.

. Se insiste en que no se conformen con dar cada uno sus resultados sino en justificarlos, saber por qué están bien y por qué, mal.

. Han mejorado los resultados de la expresión correspondiente a: “el número que representa 15 unidades menos que x”.

. Mejora en aceptación de respuestas abiertas y en el uso de la expresión de términos semejantes.

Se nota mejoría de la primera pregunta a la segunda, en especial si los signos son positivos, a pesar de ser términos alfanuméricos en la segunda.

Como errores ha aparecido:

. 3 (2+4) = 3.2.4

. (-2 a) 3 a = -6 a

. a.a = 2 a

. (-2 a) (+b) “menos por más “ y luego expresan “menos 2 a más b”.

. En el apartado 3l) “el doble de la diferencia entre h e i”: “2 x” por “h”, más “i”.

. La confusión del cuadrado de la suma de dos números con la suma de sus cuadrados, por ejemplo, $(3+5)^2 = 3^2 + 5^2$ no es ya general, pero sigue apareciendo.

Como situación confusa están los apartados “3g” y “3j”.

Lo más importante ha sido el que participasen todos los alumnos de clase. Unos, la mayoría lo comienzan haciendo espontáneamente al pedir “voluntarios” para contestar, y el resto, a petición de la didacta que tuvo muy claro el que nadie se quedara sin aportar algo e interactuar con el resto de la clase, no bastándole una única intervención en la sesión.

Al siguiente día (30/04/96) se siguió grabando (audio 2, anexo 14.2); en los ejercicios de repaso y se insistió en esta nueva sesión en el trabajo en grupos de dos o tres alumnos donde se sugirió debatiesen, sus diferentes respuestas.

Se siguió con la pregunta 3 en su apartado “m”. Se aclaró de nuevo la distinción, entre el cuadrado de la suma de “3 + 5” como equivalente a “(3+5) elevado al cuadrado”, y la suma de sus cuadrados: $3^2 + 5^2$.

Se corrigió a los alumnos la incidencia lingüística en la dicción de “paréntesis”, “hipótesis”. En la pregunta 3, ejercicio “q”: “Añadiendo 7 al triplo del doble de un número de boliches más 1, obtengo 34 boliches”, hubo que aclarar la terminología “añadiendo”; la aparición del gerundio pareció crear conflicto y era en realidad provocado por la expresión “el triplo del doble de un número”.

La pregunta cuatro de contexto próximo y atractivo, produjo un éxito al haber un porcentaje elevado de soluciones correctas.

En la pregunta 5 un alumno tergiversa el enunciado y expresa en principio “multiplicar la edad de la madre por 10 y … no da”, dice. Se sugirió usar un cuadro y un alumno lo hizo. Al hacer los cálculos han obtenido para la edad de la madre: “x+12 por 10” y “12 x por 10” y no “x.10+12”; al dialogar acerca de “x + 120 años”, recapacitan y la didacta termina, dando la solución. A continuación se sitúan los cálculos en un cuadro en la pizarra. Al intentar resolver el apartado b) un alumno dice no saber calcular el doble, más bien parece no querer, y, expresa varios errores.

Lleva la resolución de este apartado un diálogo amplio y paso a paso. Se llega a expresiones con corchetes y paréntesis y sí es cierto que los alumnos plantean el resolverlo correctamente de dentro hacia afuera. La profesora insiste en la conveniencia de leer, resolver y volver a leer.

Sigue insistiendo el alumno que dice no saber anteriormente, en que no sabe hacer lo que se le pide.

En el ejercicio 7 el único apartado que planteó problema fue el d) “Julio tiene el doble que María y tres sellos más” porque, o ponían el doble de los de Jorge o el doble de 100 (que era el exceso del número de los de María respecto de los de Jorge).

Con posterioridad a la ficha de repaso se siguió trabajando en la ficha 16 del cuaderno, relativa a cálculo de perímetros y donde se recuerda explícitamente el cálculo del mismo, con un ejemplo.

Al preguntarle quien no se acordaba, el alumno que siempre dice “no sabe cómo calcula”, ahora “tampoco recordaba” el concepto y cálculo del perímetro.

A excepción de dos alumnos, el resto, supo calcular el perímetro de la figura parcialmente dibujada. Uno de ellos, una alumna, contó los lados dibujados y tampoco bien, porque contó uno de menos y lo multiplicó por la dimensión de uno de ellos.

En el cálculo de los perímetros de los polígonos siguientes se dan tres situaciones diferentes para cada uno de los apartados.

La primera, correcta “4h+t” o “h.4+t” (se aclara la importancia de expresar, al hablar, con una pausa, la denotación escrita de un paréntesis). En la segunda, “5+5+6+u+u”, las respuestas al hacer el cálculo operativo son diferentes “16 u”, y en general “16 + 2u” que es la correcta. En el último, a pesar de estar la base subdividida, el cálculo del perímetro ha sido el correcto.

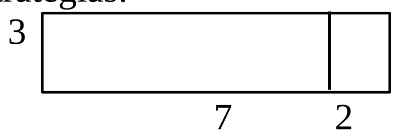
Como error en esta sesión vuelve a aparecer la confusión del cuadrado de la suma de dos números con la suma de cuadrados de esos números.

Los alumnos no han reconocido el pentágono al presentarles su dibujo, incluso después de calcular su perímetro.

Siguiendo con la ficha 17 y el cálculo de los perímetros que aparecen en principio en el primer rectángulo donde sólo aparecen explícitos los datos numéricos correspondientes a la base y a la altura, hay una alumna que suma exclusivamente, sin darse cuenta que la otra base del rectángulo y el segmento paralelo a la altura considerada, también interviene en el cálculo del perímetro; quizás haya sido por la influencia de la aparición de todas las letras y números, para las longitudes de los lados de la mayoría de las figuras de la ficha anterior. Se vuelve a recordar el concepto de perímetro y se les insiste en que, cuando están trabajando, si no se acuerdan de algo aclarado en alguna ficha anterior, deben acudir a ella.

En esta ficha no han cometido errores de asociar términos no semejantes. Reconocen también el doble o cuádruplo para representar dos o cuatro sumandos iguales y no manifiestan el error de sustituir doble por cuadrado.

Con relación al cálculo del perímetro cuando aparece dibujado un segmento interno que afecta a ese cálculo, lo han resuelto bien y con distintas estrategias:



. p = (7+2).2+3.2

. p = 3.2 + 2.2 + 7.2

. p = 6 + 14 + 4

. p = 3 + 3 + 7 + 7 + 2 +2

Algún alumno no lo había resuelto y se le volvió a explicar el concepto y se identifica “contorno” con “perímetro”.

Con relación a la audición 15.3 (protocolo, audio 3, anexo 14.3) se dedicó a la práctica de la relación del uso del rectángulo como unidad del S.R.V.G. y el número de términos de una expresión algebraica, con el número de rectángulos necesarios para representarla en el S.R.V.G., así como la posibilidad de que la misma expresión del área represente la medida de la superficie ocupada por distintos rectángulos, cuyas áreas son equivalentes.

Se trabaja la ficha 18, donde ya se pretende que los alumnos explícitamente relacionen las distintas representaciones semióticas y se comienza expresando convenios sobre los que se establece acuerdos a tener en cuenta en estas relaciones. En principio la representación de un número como producto del mismo por la unidad (convenio 1), o una letra sola como producto de la letra por la unidad (convenio 2), y, ya en la ficha siguiente (19), la representación de un número solo o una letra sola por un rectángulo (convenio 3). Se hace hincapié en la importancia de no separar unidades con trazos dibujados cuando las dimensiones están dadas por letras pues no se pueden evaluar, sin embargo, si se trata de datos numéricos, sí, y no sólo una de las dimensiones del rectángulo sino las dos, si la situación lo permite. Se aprovecha la representación del número de unidades dado por el dato numérico para expresar la importancia del concepto unidad como cantidad arbitraria, pero que una vez elegida no se puede cambiar su valor en el mismo ejercicio o en los distintos apartados de una misma pregunta y que las representaciones han de ser proporcionales al nº de unidades que aparezcan.

En la ficha 20 ya se da un paso más y se pretende la conversión del S.R.F. algebraico al S.R.V.G., primero representando un sólo término y luego, dos, para que lleguen a la asociación de nº de términos de una expresión algebraica a nº de rectángulos que hay que representar, y para aclarar que es diferente tener dos rectángulos distintos de áreas que miden diferente, a tener varias representaciones de la misma área.

Se sigue insistiendo en la importancia en general y en álgebra en particular, a respetar en los enunciados no sólo las relaciones que aparecen, sino las letras que dan para establecer esas relaciones, así como en la necesidad de justificar sus repuestas y explicar los procesos que han llevado a cabo, sean con resultados correctos o no.

Se pone énfasis también, por la incidencia en la sintaxis de este sistema de representación, en la separación de los términos en una expresión algebraica en especial cuando en ella aparecen paréntesis y se les da como estrategia para separar los términos, cuando aparece un signo positivo o negativo fuera de paréntesis, pues si existen letras en los paréntesis con contextos aditivos, se presta a mucha confusión.

La gradación de dificultad de los ítems ha sido, valiéndonos de ejemplos: 2.3, 3.2, z . t, t . z, 3.x, 4.b, para luego pasar a 4+b y ya después, es cuando se considera que se representen “3 + 4y”, “6y+3”, “2x+2”, “2x+6” para que suscite el sacar factor común.

Con relación a la audición 15.4 (audio 4, anexo 14.4), comienza con un planteamiento inverso a uno de los trabajados en la sesión anterior, que consiste en solicitar de los alumnos, den expresiones concretas para un número determinado de términos y que asocien los elementos de los términos a las dimensiones de los rectángulos y viceversa, o sea asocian las de los rectángulos a los términos de las expresiones en los que se insiste muestren expresiones con paréntesis. Aún siguen confundiendo perímetro con área.

Se vuelve a trabajar el sacar factor común asociado a las distintas representaciones de un mismo término con los rectángulos de áreas equivalentes.

Se solicita de los alumnos acudan a la pizarra a ir representando lo que cada uno ha hecho previamente en su cuaderno para la expresión de la ficha 21, “6y +3”, para recordar de nuevo el concepto de unidad, la proporcionalidad al representar múltiplos de la unidad, áreas equivalentes y sacar factor común, o sea para realizar una integración.

6.8. ENTREVISTAS INDIVIDUALES

En el capítulo 3 se indicó ya la selección de seis alumnos para la entrevista individual. La entrevista en esta ocasión estuvo constituida por dos sesiones de aproximadamente 30 minutos, para cada alumno. Hay que expresar que todos y cada uno de los alumnos estaban dispuestos a ser entrevistados.

El protocolo de la misma (anexo 16, parte 3ª) sí fue idéntico en esta ocasión para los seis alumnos, pero por la diferencia de comportamiento no se aplicó de la misma manera, aunque sí hubo un tanto por ciento elevado de actividades comunes.

A continuación (tabla 6.11) se muestra la relación de las actividades de los protocolos de las entrevistas individuales relacionadas con el Sistema Categorial para las expresiones algebraicas, que es lo que abarca esta última experiencia.

En las dos primeras columnas se hace referencia al nº de la sesión y la segunda a la ficha.

Nº S	Nº F	Nº ítems	O_1	O_2	O_3	C_1	C_2	C_3
1ª	1	1-14	x	x				
	2	15-16	x	x		x	x	x
	3	17-23	x			x	x	x
	4	24-29	x	x		x	x	x
	5	30-38	x	x		x	x	x
	6	39-44	x	x		x	x	x
	7	45-46	x			x	x	x
	8	47-54	x	x		x	x	x
	9	55	x	x		x	x	x
	10	56-70	x	x				x
	11	71-72				x	x	x
	12	73-74				x	x	x
	13	75-76				x	x	x
	14	77	x	x				x
2ª	1	1					x	

Nº S	Nº F	Nº ítems	O_1	O_2	O_3	C_1	C_2	C_3
	2	2-9	x			x	x	
	3	10-15	x	x		x	x	
	4	16-19	x	x		x	x	x
	5	20		x		x	x	x
	6	21-26	x	x		x	x	x
	7	27	x	x		x	x	x
	8	28-33	x	x				x
	9	34-46	x	x		x		x
	10	47-70	x	x		x	x	x
	11	71-80	x	x	x	x		x
	12	81-91	x	x	x	x		x
	13	92-95	x	x		x		x
	14	96	x	x	x			x

Tabla 6.11

Este **protocolo** comprende en su **primera sesión** actividades extraídas del cuaderno que se trabajó en clase, a excepción de una actividad que se agregó en la primera ficha y que indicamos con otra tipografía (tabla 6.12).

Fichas Primera Sesión Entrevista	Fichas cuaderno de clase
1 Actividad 1. La actividad 2 es la añadida	1, excepto apartados b y h
2	7
3	8
4	10
5	9, prescindiendo de los apartado a, b, c, d y e.
6	9 a, 9d, 9b, 9e, 11f, 10b
7 Actividad 1 Actividad 2	13, Act. 2 (c y d) 13, Act. 2 (a y b)
8	12
9	14
10	15
11 Primera parte (1er Convenio y Act.1) Segunda parte (2º Convenio)	19, parte de ella 20, parte de ella
12	20 Act.1 y Act.2 21, primer parte
13	21, segunda parte 22
14	24

Tabla 6. 12

En su **segunda sesión** comprende actividades extraídas del cuaderno que se trabajó en clase, a excepción de una actividad que se agregó de ampliación (tabla 6.13).

Fichas Segunda Sesión Entrevista	Fichas cuaderno de clase
1	16, actividad 2
2	17
3	similar a 26
4	16 y similar a 17
5	parte de 30 y parte de 32
6	similar a 31
7	*ampliación* de la doble distributiva
8	35
9	parte de 37, concretamente 37.2 y otros ítems
10	similar a 36 y otros
11	37.1 y 38.1
12	39
13	40
14	41

Tabla 6. 13

A los alumnos entrevistados se les ha asignado un código en esta Memoria.

Observando la tabla siguiente donde A_i representa a cada uno de los seis alumnos (dos alumnas, A_2 y A_5, y 4 alumnos), el distinto ritmo de los alumnos y la misma duración aproximada de las sesiones de las entrevistas, explica que sólo ha permitido abordar las fichas que se indican en ella.

Las fichas reales trabajadas en las dos sesiones han sido las mostradas en la tabla siguiente (tabla 6.14). Si no se especifican ítems es que se han aplicado todos los de la ficha indicada.

Nº S.	Nº ítems	Nº F A1	Nº F. A2	Nº F. A3	Nº F A4	Nº F A5	Nº F A6	Nº al.
1ª	1-14	1	1	1	1	1	1	6
1ª	15-16	2	2	2	2	2	2	6
1ª	17-23	3	3	3	3	3	3	6
1ª	24-29	4	4		4	4	4	5
1ª	30-38	5	5		5	5	5	5
1ª	39-44	6	6	6	6		6	5
1ª	45-46		7		7		7	3
1ª	47-54		8				8	2
1ª	55		9				9	2
1ª	56-70		10 (56-60)				10 (570)	2
1ª	71-72		11					2
1ª	73-74		12				12	2
1ª	75-76		13				13	2
1ª	77		14				14	2
2ª	1		1		1	1	1	4
2ª	2-9		2		2 (2-9)	2	2 (2,3,8,9)	4
2ª	10-15		3		3 (13-15)	3	3 (10-13 y 15)	4
2ª	16-19		4		4 (17,19)	4 (17-18)	4 (17-19)	4
2ª	20		5		5	5	5	4
2ª	21-26		6 (26)		6 (24,26)	6 (23,25,26)	6 (24,26)	4

Nº S.	Nº ítems	Nº F A1	Nº F. A2	Nº F. A3	Nº F A4	Nº F A5	Nº F A6	Nº al.
2ª	27		7		7	7	7	4
2ª	28-33		8 (30,32,33)			8 (28,33)	8 (33)	3
2ª	34-46		9 (34-37, 40 y 46)			9	9	3
2ª	47-70		10 (61,68,70)				10 (64-66)	2
2ª	71-80						11 (75-76)	1
2ª	81-91		12 (84,85,86,90)					1
2ª	92-95							1
2ª	96		14		14			2

Tabla 6.14

En la última columna se expresa el número total de alumnos que han sido entrevistados en cada una de las preguntas.

El protocolo de la **primera sesión** comprende actividades de operatividad básica sin y con paréntesis y otras de conversión de registros.

El protocolo de la **segunda sesión** comprende actividades de operatividad básica con expresión de la propiedad distributiva, de contextualización en perímetros y áreas e ítems relativos a la sustitución formal.

La finalidad principal de esta observación, mediante entrevista individual a posteriori de la primera aplicación de la Prueba T (T1), de la instrucción y de la segunda aplicación de la Prueba T (T2), es la de llegar a detectar habilidades cognitivas tanto que se consideren han sido causadas por la instrucción como aquellas que se poseían y han sido corroboradas en la entrevista. Se detallará la relación de las mismas en el párrafo siguiente.

El protocolo de la **primera sesión** incluye actividades con ítems de operatividad básica que van a permitir detectar las habilidades cognitivas de las codificadas en el sistema categorial general para expresiones algebraicas como O_1, O_2 y C_1, C_2, esto es “Realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis” (O_1) y “Realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2), especificando los contextos aditivos tanto con números como con números y letras, de carácter operacional y “Hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal” (C_1) y “Contextualizar el lenguaje algebraico en general” (C_2), de carácter conceptual, que sintetizamos en las siguientes tablas (6.15 y 6.16).

Categoría	**nº ítems**	**Contexto aditivo**	**Contexto multiplicativo**	**Contexto aditivo/multiplicativo**
O_1	7,8,10,12,56,58, 59,61	Sí		
O_2	1,4,5,57,60,62, 63,64,65,66, 67,68,69,70	Sí		

Categoría	nº ítems	Contexto aditivo	Contexto multiplicativo	Contexto aditivo/multiplicativo
	2,3,11		Sí	
	6,9,13,14,77			Sí

Tabla nº 6.15

C_1 y C_2	15-55

Tabla nº 6.16

En la **segunda sesión** se trata de detectar en los alumnos entrevistados cómo “contextualizan el lenguaje algebraico en contextos de perímetro y áreas” (C_2), mediante las fichas 1, 2, 3 y 4 para perímetros y 3 y 4 para áreas, así como la habilidad al “hacer conversiones entre los diferentes registros” (C_1), después de mostrarles un ejemplo completo de conversión de los mismos (ficha 5); al “contextualizar el lenguaje algebraico en contextos de áreas (C_2), “interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual” (C_3) (fichas 6 y 7).

Asimismo se pueden descubrir habilidades al “realizar operaciones con paréntesis en contextos multiplicativos y aditivos con especial atención a las denotaciones del paréntesis” (O_2); y, como resultado de las operaciones anteriores, detectar las habilidades al “realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis” (O_1). Ambos mediante la ficha 8, que se ocupa del tratamiento de la propiedad distributiva también por la izquierda, por la derecha y la doble distributiva (ítems desde el 28 al 33).

Por último, es objetivo de esta segunda sesión de la entrevista, el detectar habilidades al “hacer sustituciones formales referidas tanto a los procesos de particularizar como a generalizar” (O_3), en las fichas de números comprendidos entre 9 y 14, ambos inclusive.

6.8.1.Contenido de la entrevista

Como se mencionó anteriormente los ítems que conforman el contenido básico de la entrevista están girando en torno a las habilidades cognitivas de carácter operacional y conceptual para el tratamiento de las expresiones algebraicas.

Las características de los ítems de las fichas citadas para la segunda sesión se indican en el anexo 16, parte 3ª.

En el Capítulo 3 se indicaron los criterios de elección del grupo para las entrevistas individuales. Como se recordará en el curso 95-96, el grupo a observar lo formaban 6 alumnos: dos de estrato alto (codificados como alumnos A2 y A4), dos del estrato medio (A5 y A6) y dos del estrato bajo (A1 y A3).

Se hicieron sólo 10 entrevistas de las 12 previstas, ya que dos alumnos, precisamente los del estrato bajo, no acudieron a la segunda sesión.

6.8.2. Análisis de datos

El conjunto de los ítems 7, 8, 10, 12, 56, 58, 59 y 61, que consideramos relativos a la Categoría O_1, fue suministrado a los alumnos según se ha expresado en la tabla 6.14.

Los resultados de los ítems para detectar las habilidades cognitivas de carácter operacional han sido los que se muestran en la tabla 6.17.

Nº ítem	A1	A2	A3	A4	A5	A6
7	7 a	7 a	7 a	7 a	7 a	7 a
8	2 a + 5b	2 a + 5 b	2 a + 5 b	2 a + 5 b	2 a + 5 b	$\cancel{7\,a\,b}$
10	3 a + 5 b	3 a + 5 b	3 a + 5 b	3 a + 5 b	3 a + 5 b	$\cancel{2\,a^{2}}$
12	2 a	2a	N.P.	2 a	2 a	a . 2

Tabla 6.17

(N.P; “No planteada”)

En el ítem 8 el alumno A1 antes de escribir “2 a + 5 b” ha preguntado a la E si es “7ab” y al preguntarle la E si se pueden sumar, dice que no, porque “a no es igual a b”.

La alumna A2 no tiene dudas.

Al alumno A3 que tiene menos capacidad y además es consciente que no sabe, la E le explicó el significado del enunciado de la actividad 2, antes de comenzar a resolverla.

Es un alumno muy inseguro y pregunta si “2 a + 5 a” es “7 a “. En el ítem 8 admite desde el comienzo la respuesta abierta. Para el ítem 10, 2 a + 5 b + a, pone en principio “2 a ^{2}”. La E contextualiza sustituyendo la “a” por bolígrafos y aún así al alumno le cuesta comprender. Al final del diálogo ya llega a “3 a + 5 b”.

El alumno A4 no tiene dudas en la operatividad básica en los contextos aditivos presentados a pesar de ser muy precipitado leyendo los enunciados

La alumna A5 no muestra dificultad en los ítems 7 y 8 ni en 10 y 12. Como resultado del ítem 12 escribe “2 a”.

El alumno A6 resuelve de la misma manera los ítems 7 “(2 + 5 a = 7 a)” y 8 “(2 a + 5 b = 7 a b)”. Al preguntar la E el por qué de 7ab contesta porque “a + 5, 7” y no cae en la cuenta en que no son términos semejantes. Para resolver el ítem 10 expresa que “2 a + a “ es 2 a^2. Sin embargo en el ítem 12, sin decir nada, escribe “a . 2”.

En los ítems 56, 58, 59 y 61, no muestra duda y los resuelve correctamente, admitiendo las respuestas abiertas sin dificultad.

Las respuestas al ítem 58 de A2 y A6 son ambas correctas pero mientras A2 da el resultado directo, A6 va aplicando, por partes, la propiedad asociativa y hace: “a + a + 3 b + 5 a= 2 a + 3 b + 5 a = 7 a + 3 b”, pero en el ítem 61 al no haber sino dos términos semejantes posibles de asociarse, da el resultado directo: “3 a - b + a = 4 a - b”.

El alumno A6 que comenzó nervioso la entrevista se va tranquilizando durante ella y esto le ha permitido resolver más satisfactoriamente su trabajo.

Las características de los ítems relacionado con la Categoría O_2 son:

Nº ítem	Contexto aditivo	Contexto multiplicativo	Contexto aditivo-multiplicativo
1	Sí		
2		Sí	
3		Sí	
4	Sí		
5	Sí		
6			Sí
9			Sí
11		Sí	
13			Sí
14			Sí
55			Sí
57	Sí		
60	Sí		
62	Sí		
63	Sí		
64	Sí		
65	Sí		
66	Sí		
67	Sí		
68	Sí		
69	Sí		
70	Sí		
77			Sí

Tabla 6.18

Las respuestas de los alumnos han sido más dispares en este grupo de ítems.

Si se comienza por los ítems de la columna en contextos aditivos, podemos indicar que: para los tres primeros ítems, todos los alumnos a excepción de A3 han mostrado seguridad. En el ítem 1 sólo A6 ha dado el resultado directo, el resto ha quitado paréntesis previamente a realizar la operatividad aditiva, 4 de los alumnos han especificado el signo “+” del primer término.

Mención aparte lleva el alumno A3 que necesita realizar todo un proceso para el producto de “(-2) . (+5)” Sí sabe la regla de los signos pero hace mezclas de operaciones como si además del producto estuviera realizando una suma y quiere poner -2, luego multiplicar, a continuación el +5 con signo -, para después de un diálogo llegar, por fin, a -10.

En el ítem siguiente, nº 3 (O_1), reconoce la operación de dividir pero luego quiere poner 18 como resultado haciendo una resta y además con el signo "+" porque 24 es el mayor. Para calcular el cociente no expresa 24 dividido por 6 sino 6 x 4 = 24, parece busca el cociente como "algo" que multiplicado por 6, dé 24.

Mostramos los resultados de los ítems 4 y 5 de contexto aditivo y 6 de contexto multiplicativo, sólo con elementos numéricos (O_1):

Ai / ítem	A1	A2	A3	A4	A5	A6
4	5-13+4=4	5 + (-6-7)+4=5-13+4=9-13=-4	5-6-7+4=-4	5-6-7+4=9-13=-4	5-6-7+4=-13+9=-4	5-13+4=9-13=-4
5	3 - 6 + 1 -2+1=+5-8=-3	3 -6+(+5-4)-2+1=3-6+1-2+1=5-8=-3	3-6+5-4-2+1=-3	3-6+5-4-2+1=+9-12=-3	3-6+5-4-2+1=-12+9=-3	3-6+1-2+1=-8+5=-3
6	6+12	42+30+8+4=84	6.12+8+4=72+8+4=84	6(12)+8+4=72+8+4=84	42+30+8+4=84	6.12+8+4=72+8+4=84

Tabla 6.19

Se observan dos claras tendencias en este grupo de alumnos: una a aplicar la propiedad asociativa resolviendo el paréntesis y otros a quitar paréntesis teniendo en cuenta el signo previo a ellos. La operatividad posterior también es dispar, unos dan los resultados directamente, otros operan primero los términos positivos y luego los negativos, y A5 opera primero los términos negativos y luego los positivos.

Las dificultades mayores las muestra A1. A3 ha necesitado escribir 12 por 6 aparte, en vertical, para hacer la multiplicación. En el ítem 4 al comenzar se equivocó y sustituyó "-(-5+4)" por "9", pero al preguntarle la E, se dio cuenta de su error y además explicó el porqué correctamente. En el ítem 6 [6 (7+5)-(-8)+4] no reconoce el producto del primer término y pone "6 + 12" porque dice que "delante del paréntesis no tiene nada". Al preguntarlo qué significa un número delante del paréntesis, no sabe contestar.

La alumna A5 también ha sumado aparte, en vertical, 42 + 30 + 12 = 84.

En los ítems 9, 11, 13 y 14, relacionados con O_2 respuestas han sido:

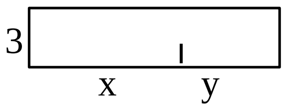
A_i / ítem	A1	A2	A3	A4	A5	A6
9	3 a	3b-ab+ab=3b	3ab+ab…	3	3b-ab+ab=3b	3b-ab+ab=3b +$\cancel{ab^2}$
11		3y+yx =2y (3+x)	3+x?	3x	3y+xy	3y+xy
13		6a+6b-3a=3 a+6b	6.a + 6.b - 3 a =3 a + 6b…		6a+6b-3a=3 a+6b	6a+6b-3a=3 a+6b
14		6+3 a -3 =3 + 3a			6+3 a -3 =3 + 3 a = 3(1+a)	6+3 a-3 = 3 + 3 a

Tabla 6.20

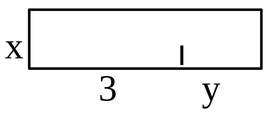
El A1 en el ítem 9 sigue teniendo dificultad en la operatividad básica y dice “3-a” será “2 a” y “más a”, es “3 a”.

El A3 comprende la separación de los términos [(3-a)b] y [ab] para luego operar, en el ítem 9, pero va expresando posibles soluciones sin acierto: para (3-a) b. indica: 3 a.b, 3 a+b, 3+a+b, sin embargo al tener el factor delante del paréntesis en [6 (a+b)] lo hace correctamente, incluso es capaz de representarlo en el S.R.V.G. Siguiendo con la operatividad intenta sustituir “6 a+6b” por 6^2 porque hay dos “6” y en “(3-2) b” quiere multiplicar “(3-a)” por “3b”. Afirma que no puede actuar igual si está el factor a la derecha o a la izquierda del paréntesis.

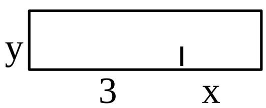
En el ítem 11 vuelve a sustituir “(3+x)y” por “3x+y y luego por “3x.y” y posteriormente por “3x.3y”. Aquí sí comete error al representar en el S.R.V.G. y deja como solución



y en el diálogo con él luego representa



y finaliza con



Luego retrocede la entrevistadora para que lo relacione con “(3+x) y”.

En el ítem 14 sin embargo no tuvo problema. Se trata de la propiedad distributiva por la izquierda y luego, opera bien.

Con el alumno A4 al plantearle conflicto el ítem 9 se le pregunta cómo podría representar con un rectángulo “y (3+x)” y lo hace bien, además comprende que la expresión del término es la expresión del área, pero la operación es incapaz de realizarla y lo mismo le ocurre con el ítem 11.

La alumna A4 reconoce la distributividad por la derecha en el ítem 9 y opera suprimiendo los opuestos según lo expresa oralmente. En el resto de ítems de esta actividad no tiene problema e incluso se le pregunta si se puede sacar factor común en “3 + 3 a” y contesta que sí, luego tiene alguna dificultad para sacarlo pero guiándola, lo ha hecho. Sí reconoce que las expresiones que tenía y las resultantes, después de sacar factor común, tienen que ser equivalentes.

El alumno A6 no ha reconocido la propiedad distributiva con su nombre (expresa que es asociativa y luego conmutativa), sin embargo quita correctamente el paréntesis. A la hora de seguir operando transforma “-ab + ab” en “ab^2”. El resto de ítems de paréntesis los resuelve sin dificultad tanto en la propiedad distributiva por la derecha como por la izquierda.

En el ítem 77 de sacar factor común no tuvo problema e hizo lo siguiente: $6x+3y = 2.3x + 3.y = 3 (2.x + y)$

En el resto de los ítems desde el 55 al 70 donde se incluyen paréntesis ya se encuentra más seguro. Comete error al principio cuando tiene menos delante del paréntesis porque cambia de signo el segundo término del paréntesis y no lo quita y deja el menos delante: $3a - (b-c) = 3a - (b+c)$, pero luego se dialoga con él y se da cuenta y no vuelve a cometer el mismo error, porque va paso a paso cuando hay paréntesis, hace las reducciones de términos semejantes, suprime los opuestos mentalmente y da el resultado directo.

La alumna A2 también fue interrogada acerca del ítem 77 de sacar factor común en la expresión “6x + 3y” y lo hizo correctamente:

$(2.3).x + 3y$

$3 . (2x + y)$

De los ítems de las fichas 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 que consideramos relativos a las categorías C_1 C_2, aunque también recojan aspectos de las categorías operacionales, hacemos algunas consideraciones:

Nº Ficha	2	3	4	5	6	7	8	9
Nº ítems	15-16	17-23	24-29	30-38	39-44	45-46	47-54	55

Tabla 6.21

El ítem 34 de la ficha 2 es el de mayor dificultad.

En los ítem 16 (ficha 2), 45 a y 46 b de la ficha 7, sólo intervienen números.

En los ítems 17-23, 25, 30-33, 39-43, 45b, 46 a, 47-54 no es obligado designar o denotar paréntesis.

En los ítems 24-26, 28-29, 44 y 50 es imprescindible utilizar los paréntesis.

Los ítems 15 y 55 una parte obliga a trabajar con paréntesis y otra, no.

Por último, consideramos que los ítems 35-38 presentan confusión para los alumnos.

Comenzamos por comentar el grupo de ítems donde donde sólo intervienen números.

En el ítem 16 no ha habido dudas; tres alumnos han contestado directamente “13”, aplicando la propiedad asociativa y otros tres, han expresado “5 + 8”.

En el segundo apartado también dos alumnos han expresado el resultado directo (26), otros el producto “13.2” (dos alumnos) y 2 . 13 (un alumno) y sólo la alumna A2 ha puesto primero el paréntesis en “5+8”. En el tercer apartado ha ocurrido lo mismo que el inmediato anterior: 39 (dos alumnos), “13. 3”, “3 . 13” y “(5+8) . 3 = 13. 3”.

El alumno A4 se suele precipitar en la lectura y al comienzo confundió el tercer apartado y volvió a poner “2 . 13” como resultado, pero rectificó.

En los ítems 45a y 46b, sólo hecho por tres alumnos, dos de ellos expresan sin más “175 . 5” y “135 . 14” y una de ellas A2 da los resultados y con unidades: “175 . 5 = 875 pesetas” y “135 . 14 = 1800 periódicos”.

Los ítems de mayor dificultad han sido los correspondientes a los números 15, 34 y 55, expuestos con las expresiones:

“…5 niñas menos que…” (I.15)

“ el número que representa 50 unidades menos que…” (I. 34), y

“… Toni tiene doce años menor que la suma de las edades de Marta y Sergio” (I. 55).

Para el ítem 15, A1 expresa “5-x” y A2, “x+5”. A5 utiliza en el ítem completo tres incógnitas y expresa A, B-5 y 2C, pero después del diálogo comprende su error.

Con A6 la entrevistadora da un valor numérico a la incógnita para que pueda comprender el enunciado.

A3 y A4, lo hacen bien.

El ítem 15 obtuvo como respuestas:

Nº F.	**nº ítem**	**A1**	**A2**	**A3**
2	15	x para 8 A x-5 para 8B x + x =2x 5+5=10 2x-10 para 8C	S(*) 8ºA 8ºB 8º C R (**) x x+5 (x+5).2	niñas octavo A = x niñas octavo B = x-5 niñas octavo C = (x-5)2x-10

Tabla 6.22

Nº F.	**nº ítem**	**A4**	**A5**	**A6**
2	15	S(*) 8ºA 8ºB 8º C R (**) x x-5 (x-5).2	A: D B: D-5 C: 2 (D-5)	8ºA 8ªB 8ªC x 5-x (5niñas - que x).2 x=5 5.35 (5..35).2 x x-5 (x-5).2

Tabla 6.23

Como se observa A2 se ha equivocado y ha puesto “x+5” por “x-5”, sin embargo el paréntesis lo usa bien.

A3, por su parte, sí pone correctamente (x-5) 2, pero luego se equivoca al resolver el paréntesis.

A5 utiliza en principio tres incógnitas independientes: A, B y C, pero con el diálogo captó la idea que tenía que ser la misma incógnita y con ella expresar las relaciones del enunciado.

En A6 aparece “35” que es el número de niñas que la E. le dijo supusiese tenía el grupo.

En el ítem 34, contestado por cinco alumnos (A1, A2, A4, A5 y A6), A2 no tiene duda alguna y expresa “d-50 = x”, pero el resto escribe:

Alumno/a	A1	A4	A5	A6
Respuesta	50 - d	50 - d	b = 50 - d	50 - x

Tabla 6.24

dialogando con ellos y contextualizando A1, A4 y A5 no llegan a dar la solución correcta pero A6, sí, y después de expresar “50 - d” llega a “d - 50”.

El ítem 55 sólo es resuelto por A2 y A6. Es cierto que mientras A2 utiliza corchetes y paréntesis porque hacen falta si no se aplican propiedades de las operaciones previamente, sin embargo, A6 muestra como resultado en principio “12 - (8+(2.x)+2.x)”; no usa los corchetes sino paréntesis dentro de paréntesis.

Al dar la entrevistadora a “x” el valor 7 para que el alumno se dé cuenta del error al salirle un resultado negativo en su expresión, reconoce el fallo y expresa “(8 + (2 . x) + 2 . x) - 12”, pero sigue sin usar corchetes.

La aplicación de los ítems de contexto aritmético aparecen en la siguiente tabla (tabla 6.25).

Nº F.	**nº ítem**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**
3	17	x	x	1	5 x	8 c	x
3	18	2x	x.2	x.2	x.2	2.5 2.b	x.2
3	19	3x	x.3	x.3	a . 3	3 . g	x .3
3	20		x : 2	x : 2	$\frac{4}{2}$	$\frac{a}{b}$ $\frac{a}{2}$	$\frac{x}{2}$
3	21	x + a	x + a	2+3 x+y	5 + 4	c + b	x + y
3	22	x + a + b	x + a + b	x + y + A	~~5+3+2~~ x + a + b	a + d + g	x + y + o
3	23		x - b	x - y	$\frac{x}{a}$ x - a	b - d	x - y
4	27		$(b^2).3=3.b^2$	-	$3.(b)^2$ 3.b.b.	$3 (b)^2$	$(b)^{2}.3$ $b^2.3$ $3b^2$
6	39	2m	m . 2	-	2m	-	m . 2
6	40	?	f:3 $\frac{f}{3}$	-	?	-	cambio f por F
6	41		z^2	-	z^2	-	z^2
6	42		a + b + c	-	?	-	a.1+b.1+c.1 a.b.c

Tabla 6.25

En el ítem 17 los alumnos A3, A4 y A6 escriben al principio concretamente 1, 5 y 8, respectivamente; el resto de los alumnos ha usado la "x" para expresar un número cualquiera.

En el ítem 18 hay menos problema, pero aún la alumna A5 escribe "2.5" y en la entrevista corrige luego y pone 2b, y además retrocede hacia el ejercicio anterior, lo corrige y le pone una "c" donde tenía un "8" para expresar un número cualquiera.

El ítem 19 ya es resuelto con facilidad por todos. Las expresiones dadas son: "x.3" (A2, A3 y A6), "3x" (A1), "a.3" (A4) y "3g" (A5).

El ítem 20 para expresar la mitad de un número sí ha planteado dificultad y hay expresiones preocupantes para alumnos de 8º como que "mitad es el doble" y luego decir el mismo alumno que "la mitad de 2 es 1" (A1) mostrando así su confusión plena. Este alumno parece entender, por una parte, que hay que dividir por dos para hallar la mitad, pero luego es incapaz de poner la mitad de un número cualquiera. El alumno A4 por su parte vuelve a concretar en el 4, un número cualquiera y expresa $\frac{4}{2}$. La alumna A5 al comienzo expresa $\frac{a}{b}$ pero dialogando con ella, detecta su error y pone $\frac{a}{2}$. Los tres alumnos restantes escribe "x:2 (A2 y A3) y $\frac{x}{2}$ (A6), respectivamente. El ítem 21 les resultó más fácil aunque aún el alumno A3 escribe primero "2+3" y luego "x + y", cuando se le hace caer en la cuenta del error. El alumno A4 vuelve a expresar "5+4" en lugar de usar letras, el resto expresan "x + a" (A1 y A2), "c + b" (A4) y "x + y" (A6).

En el ítem 22 sólo queda con dificultad A4, que vuelve a comenzar usando números concretos (5+3+2) y luego ya pone "x + a + b" que es también la expresión dada por A1 y A2; A3 utiliza "x + y + A", "a + d + g", A5 y "x + y + o", A6.

En el ítem 23 las respuestas han sido variadas, concretamente el Alumno A1 entiende por "diferencia", "menos que", y que "son distintos" y ni aún contextualizando la pregunta, capta la idea. Los alumnos A2, A5 y A6 no han tenido problemas, sin embargo A3 expresa que "diferencia" se puede sustituir por "producto" y sólo contextualizándole la situación en su edad, y la de su hermano, su estatura en dos años seguidos, llega a expresar "x-y". A4 para "diferencia "escribe $\frac{x}{a}$ y ni siquiera contextualizando en un principio detecta el error, pero cuando se le ha contextualizado con precios de bicicletas, a las que era aficionado según expresó a la entrevistadora, se da cuenta que ha de escribir "x - a".

Llama la atención la variedad de letras utilizadas por A5: a, b, c, d y g, en estos ítems.

El alumno A6 justifica en el ítem 27 el prescindir del paréntesis porque no existe una suma.

En el ítem 39 las respuestas han sido absolutamente correctas.

Para el ítem 40 al alumno A1 la entrevistadora contextualizó el ítem con la comida que haría la madre del alumno el día que se le entrevistaba, para preguntarle luego cuál era la tercera parte de esa comida y contestó: “el tercer plato”, confundiendo “tercera parte” con el ordinal 3º”.

El alumno A4 en los ítems 40 y 41 se muestra muy bloqueado y ni siquiera dialogando y contextualizando capta la tercera parte, sino que responde que equivalen a “dividir tres por uno”.

Otro hecho que se observa en la tabla en el ítem 42 es la confusión del producto con la suma, aunque el alumno A6 llega a darse cuenta de su error.

Para los ítems 30, 31, 32 y 33, los resultados han sido:

Nº F.	nº ítem	A1	A2	A4	A5	A6
5	30	x x=g+1	h g+1=h	~~h~~ g+1	g b b=g+1	~~k~~ g+1
5	31	h-1	g h-1=g	h-1	d = h-1	h-1
5	32	j+1	j+1	k	a = j+1	j+1
5	33	confusión cuadrado con cuádruplo	$(b^{2}).3$	$3.b^2$	$3\ (b)^2 = 3b^2$	$b^2\ .3$

Tabla 6.26

Como se observa la relación del número siguiente a “g” (ítem 30) con su lugar en el abecedario es clara, aunque después del diálogo hayan reconocido su correcta expresión como “g+1”.

Después de haber resuelto este ítem el siguiente ha resultado más fácil, quedando aún la alumna A2 que al igual que el en el ítem anterior (h= g+1) hace uso de la relación en el abecedario: g =h-1. El alumno A4 expresa, de nuevo, “k” como número posterior a “j”.

En el ítem 33 sólo ha tenido dificultad A1 que ha confundido cuadrado con cuádruplo.

Los resultados de los ítems 43, 45b, 46 a, 47, 48, 49, 50, 53 y 54 han sido:

Nº F.	nº ítem	A2	A3	A4	A6
6	43	x.75=75x	75.x	x.75	x.75
7	45b	p.6=6p		p.6	6.p
7	46 a	n.50=50.n		n.50	n.50
8	47	S JUAN JAIME R x + 8 x			8+x
8	48	S MIGUEL ANA R x.2 x			x.2 x

Nº F.	nº ítem	A2	A3	A4	A6
8	49	S. PEPE ANTONIO LUIS R. x : 2 x x.2			Pepe = $\frac{x}{2}$ Luis=x.2 Antonio=x
8	50	S. MIGUEL MARÍA x x+50			
8	53				J=3+x S= $\frac{3+x}{3}$ M=x
8	54	Pepe x x+3 (3+x) :2			

Tabla 6.27

Como se observa los tres primeros ítems de la tabla (43, 45b y 46 a) no plantearon problema a los alumnos a los que se les aplicó.

En los dos alumnos que quedan A2 y A6 se nota diferencia no en los aciertos, que han sido absolutos por parte de los dos alumnos, sino en la representación de los mismos. La alumna A2 los muestra con el esquema Situación - Representación que se les planteó en la instrucción.

Mención muy especial merecen los ítems 35, 36, 37 y 38, en especial los tres últimos, ya que para interpretarlos se necesita un convenio.

Sus resultados han sido:

Nº F.	nº ítem	A1	A2	A4	A5	A6
5	35	2x + 4y	(2.x)+4y	(2.x)+(4.y) 2x + 4y	2x + 4y	(x.2) + (4.y)
5	36		$(x^2+6)7+n)$	$(x^2+6).7+n$	$7+n.(x+6)^2$	$(x^2+6).(7+n)$
5	37	(n+4)(7+2)	(n+4).(x+2)	n+4 . z+2	z+2 (n+4)	(n+4).(z+2)
5	38		$(x^2+y).7+m$	$x^2+y.7+m$	$x^2+y.7+m$	$x^2+y.7)+m$

Tabla 6.28

Parece que en los enunciados, o la coma iba después de “todo”, o, “todo” debería haber ido entre “comas”. El alumno A4 de cualquier modo parece querer representar el paréntesis escribiendo el punto de multiplicar un poco separado, sin embargo sólo lo hace en el ítem 37. La alumna A2 ha cambiado la incógnita (z) del enunciado por “x” pero seguro ha sido un despiste.

En el conjunto de ítems que precisa designar paréntesis, los resultados han sido:

Nº F.	nº ítem	A1	A2	A3	A4	A5	A6
4	24	3 a + 3b 3 a + b	(a+b).3=3 a+3b=3.(a+b)		3(a+b)	3(a+b)	(a+b).3
4	25	2 h - 2i	(h-i).2		2(h-i)	2(h-i)	(h-i).2
4	26		$(x+y)^2$		$(x+y)^2$	2(x+y)	$(x+y)^2$

						$(x+y)^2$	
4	28		x.(a+b)		x.(a+b)	x (a+b)	x.(a+b)
4	29	3b - 3c	3 (b-c)		3 . (b-c)	3(b-c)	3.(b-c)
6	44		(h-i).2	2.h-2,i 2(h-i)	2 . (h-i)		(h-i).2
8	50		S. PABLO R. (x+x+50).2= 2x + 50 .2				

Tabla 6.29

La alumna A2 al final se olvidó del paréntesis pero debió ser un despiste.

A los alumnos A3, A5 y A6 se les preguntó qué entendían por “lenguaje algebraico” y contestaron, sin dudarlo, el que se expresaba con números y letras.

Como se puede observar en general han captado la designación de paréntesis, sin embargo como en el cuadro aparecen los resultados finales hay que especificar que no espontáneamente el alumno A3 ha llegado a expresar el “2 (h - i)”, aunque ya había afirmado en principio, como resultado, “2h-2i”.

La alumna A5 tuvo gran dificultad en el ítem 26, hecho que sorprende en la trayectoria general de su entrevista. Confundía cuadrado con doble y con cuádruplo, incluso reflexionando con ella a través del lenguaje geométrico, que tampoco se le hizo fácil, ya que también confundía el perímetro de un cuadrado con su área.

Los resultados de los alumnos A_2 y A_6 del resto de los ítems de la pregunta 8, que se trataron, fueron:

Sesión	nº ítem	A_2	A_6
1ª	47	S JUAN JAIME R x + 8 x	8 + x
	48	S MIGUEL ANA R x . 2 x	x . 2 x
	49	S MIGUEL ANA R x . 2 x	Pepe = x/2 Luis = x.2 Antonio= x
	53	S PEPE ANTONIO LUIS R x : 2 x x . 2	J = 3 + x S = $\frac{3+x}{3}$ 11 = x
	54		Pepe x x + 3 (3 + x) : 2

Tabla 6.30

En la ficha 9, ítem 55, los resultados fueron:

		Pedro	Toni	Marta	Sergio
Edad actual	A_2	x . 2	[(x . 2) + 8 + x] - 12 2 x + 8 + x - 12 = 3 x - 4	(x . 2) + 8	x
Edad actual	A_2	2 . x	12 - (8+(2 . x) + 2x) (8 + (2.x) + 2x) - 12	8 + (2x)	x

		Pedro	Toni	Marta	Sergio
Edad dentro de una década	A_6	(x . 2) + 10	(3 x - 4) + 10	(2x+8) + 10	x + 10
Edad dentro de una década	A_6	(2 . x) + 10	(8 + (2 . x) + 2 . x) - 12 + 10	8+(2.x)+10	x + 10

Tabla 6.31

En la ficha 10, las respuestas obtenidas fueron:

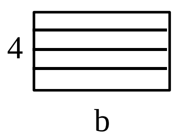
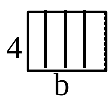
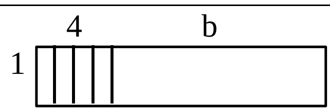
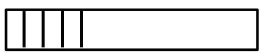
Sesión	nº ítem	A_2	A_6
1ª	56	4 + 3 y	
1ª	57	3 a - b + c	3 a - b + c
1ª	58	7 a + 3 b	2 a + 3 b + 5 a = 7 a + 3 b
1ª	59	5 y - 2 t	
1ª	60	a	a
1ª	61		4 a - b
1ª	62		3 a - b - a = 2 a - b
1ª	63		a + 2 b
1ª	64		c
1ª	65		2 a
1ª	66		2 a
1ª	67		6 a + b
1ª	68		2 x + y - x + y = x + 2 y
1ª	69		2 x
1ª	70		3 x - y

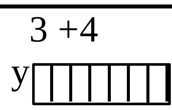
Tabla 6.32

Aunque no aparezca explícito anteriormente, A_6 admite como resultados válidos, las respuestas abiertas de los ítems 56 y 59.

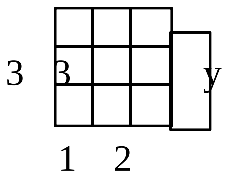
En la ficha 11 sólo resuelta por la alumna A_2 no tuvo problema al hacer la conversión del sistema de representación aritmético y algebraico al S.R.V.G.

Para las fichas 12, las respuestas han sido:

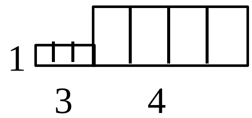
	A_2	A_6
Representa 4 . b		
Representa 4 .+ b		

En la ficha 13, A_2, al comenzar se equivocó y representó: 

También al comenzar la representación de "6 . y + 3"



pero luego lo hizo bien y de varias maneras. El alumno A_6 se complica menos y representa:



En la ficha 14, que trata de sacar factor común en la expresión "6 x + 3 y 2, ninguno de los dos alumnos anteriores tiene dificultad. A_2 sigue usando paréntesis al descomponer 6, aunque no sea necesario, pero A_6, no.

La aplicación de la entrevista en la **segunda sesión** se hizo siguiendo el orden de las fichas.

Los resultados de los ítems dirigidos a las categorías mostradas en las tablas han sido los siguientes:

F	ítem	Categoría	A2	A4	A5	A6
1	1	C_2	N.2 n.2	n.2	n.2	n.2
2 4	4 16	C_2 y O_1 C_2 y O_1	p=4+18 p=20+4+18+2=44	p=2+2+9+9=4+1 8		
2	2	C_2 O_1 y O_2	2n.36 12+2n 2.(n+3+3)	p=6+6=12n.n 6.6+n.n contextualizando 6+6+n+n	6.n 6.6+2n 12+2n	n.2+6.2 = =2 (n+6)
	3	C_2 O_1	p =2y+2x=2 (y + x)	p = y + y + x +x $y^2 + x^2$ 2.y+2.x	y x 2x+2y	=y.2+x.2
	5	C_2 O_1	p = 3f	p = 3.f (1º, 3F)		
	6	C_2 O_1	p = 4e+h	p = 4e+h		
	7	C_2 O_1	p = 2v+20+12			
2	8	C_2, O_2 y O_1	p = 16+12+2 a = 2.(8+6+a)	p =8+8+6+6+a+a 16+12+2 a 28+2 a 2.2.7+2 a =2…	8+8+6+6+2 a= 16+12+2 a =28+2 a	6.2+a.2+8.2 =12+2 a+16 =28+2 a =2 (14+a)
4	9	C_2, O_2 y O_1	p = 6+14+4 = 24	p=3+3+7+7+2+2 6+14+4 2.6+2.7+2.4 2.3+2.7+2.2 = 2… 2^3	3+3+7+7+2+2= 6+14+4 =24	7.2+3.2+2.2 =14+6+4
	17	C_2, O_2 y O_1	p=2+x+m+4+m+4 +2+x =4+2x+2m+8=12+ 2x+2m			

Tabla 6.33

El ítem 1 de la ficha 1 no les plantea problema. Ya aceptan las respuestas abiertas, hecho que se constata, a lo largo de toda esta segunda sesión de la entrevista, en estos cuatro alumnos; sin embargo, a excepción del alumno A6 todos muestran confusión con el concepto de perímetro. El alumno A4 al comenzar confundía perímetro con “lo de dentro” pero al preguntarle qué es para él, el área, se da cuenta de su error.

En los ítems 4 de la ficha 2 y 16 de la ficha 4 no hay dificultad ni para A2 ni para A4 y además a este último alumno, le permitieron recapacitar y retroceder hacia el ítem 3 que lo corrigió ya que en principio identificaba “x+x” con x^2 e “y+y” con y^2.

En los ítems 2 y 3 de la ficha 2, la alumna A5 mostró confusión de perímetro con área**.**

El alumno A6 no mostró dificultad y los resolvió correctamente.

Realmente a A4 el ítem 2 le costó comprenderlo e incluso usó mal el signo igual. En principio operó los números y añadió a continuación las letras: “p = 6 + 6 = 12.n.n”, luego corrige y expresa “6.6.n.n”. La entrevistadora pregunta si “6.6 por n.n” y contesta “6.6 + n.n”. Le pregunta la entrevistadora cómo construiría con un alambre un rectángulo y es entonces cuando se da cuenta que la medida del alambre va a ser la suma de los lados del rectángulo que construya. Es ahora cuando expresa “6 + 6 + n + n”.

Al referirse al ítem 3 de la ficha 2, escribe “p = y + y + x + x” y al pedirle otra expresión, pone $y^2 + x^2$ que sólo va a rectificar (poniendo 2y + 2x) cuando la entrevistadora le pregunta por qué en el ítem 4 de la misma ficha el resultado que ha dado es “2+2+9+9” y no “$2^2 + 9^2$”.

A2 por su parte al escribir “2n.36” y preguntarle qué es el perímetro dice que la multiplicación de todos los lados. Añade aún el error de “n.n = 2n”. La entrevistadora retrocede hacia el ítem 1 y le dice si multiplicaría 2.2.2… y es ahora cuando capta el error. Al ponerle un ejemplo de un triángulo de tres, cinco y siete de lados se le pregunta por el perímetro y dice (7+3+5).3 que debió asociar a los tres lados. Al interrogarlo si era el triplo, el perímetro, dice que no sino que sería 7+3+5. Tacha lo anterior y pone 12+2n. En el ítem 3 pone directamente “p = 2 y + 2 x = 2 (y+x)”, se le pregunta y sabe que ha sacado factor común. Se le remite al ítem anterior y también saca factor común dándole “2 (n + 3 + 3)”.

La alumna A5 escribe para el perímetro “6n” y ni siquiera preguntándole por el área se da cuenta del error. Al proponerle que marque en el ítem 3 qué es el perímetro subraya sólo dos lados y al preguntarle si sólo esos dos trozos, sí se da cuenta y pone “2x+2y” y entonces la E. retrocede al ítem 2 y rectifica poniendo “6+6+2n” y al decirle si puede hacer algo más, escribe “12 +2n”.

En los ítems 5, 6 y 7 no muestran problemas. A4 usa en principio F por f y en el diálogo vuelve a repetir que “4e” es “e.e.e.e”. Al remitirle al cálculo del perímetro cuando sólo había números en las dimensiones y lo hizo bien es cuando rectifica y dice: “e + e + e + e”.

Con relación a los ítems 8 de la ficha 2, 9 y 17 de la ficha 4, hacemos las siguientes observaciones.

A ninguno de los tres alumnos le afecta negativamente el segmento trazado entre las dos “bases” para calcular el perímetro correctamente, ítem 9).

El alumno A6 hace correctamente el ítem 8 y reduce los términos constantes pero afirma haber un factor común “2 a” en 28 + 2 a. Al insistirle si existe, dice que sólo el 2 y lo mismo llega a captar al resolver el ítem 9, pero es incapaz de poner el otro factor que debe acompañar al factor común.

A la alumna A5 no se le plantea problema en los ítems 8 y 9, pero en el ítem 17 vuelve a aparecer la dificultad al confundir producto con suma y escribe como perímetro “(2+x). (m+4)”, y afirma es lo mismo “2x” que “2+x”, luego intentando arreglarlo llega a poner “$(2^2 + x^2) + (m^2 + 4^2)$”. Rectifica posteriormente y pone “2+x+m+4”, al preguntarle si ahí está la suma de todos (sólo ha hecho referencia a los explícitamente indicados en el dibujo), vuelve a rectificar y pone “2+2+2+2x+2m+4+4”. Se le dice reduzca si puede y pone “(2.2+x.2) + (m.2 + 4.2)”.

La alumna A2 no tiene problema y si se le pregunta, saca factor común y reduce términos semejantes.

Los resultados de los ítems dirigidos a la contextualización en áreas de polígonos han sido los siguientes:

F	ítem	Categoría	A2	A4	A5	A6
3	10	C_2 yO_1	A=3.4=12		~~3.3+4.4~~ ~~3.4=12~~	4.3=12
3	13	C_2, O_2 y O_1	A=6.7	2+4 x 6+1 cuadriculando la figura 2x6+2x1+4x6+4x1 y luego se pasa al ítem 15	2.6 2+4 por 6 2+4 . 6+1 = 6.7 (2+4).(6+1) = 6.7=42	(6+1).(2+4) =7.6=42
3	11	C_2 y O_1	A=n.m		A=m.n	A=n.m
3	12	C_2, O_2 y O_1	A=~~16~~ A=12.4 =(4.4)+(4.8)		A=4.4+4.8= 4.4+8.4= 4(4+8)=16+ 32	(4+8).4=12. 4 = 48
	14	C_2, O_2 y O_1	A = 4(5+a)	4.5+a=20+a	A=4.5+a 4.5.a 45 a 4.5.=20+a 4.5+4.a señalando las subáreas 4 (5+a) sacando factor	

F	ítem	Categoría	A2	A4	A5	A6
	15	C_2, O_2 y O_1	A=(a+b).(c+5)=(a.c) + (a.b)+(b.c) + (b.5)=ac+5a +bc+5b (*)	axc+ax5+bxc+5xc (se equivocó)	común A =a+b .c+5 A=(a+b).(c+5)	(c+5).(b+a) = ~~c+5.b+a~~ (a.c)+(b.c)+(b.5)+(a.5)
	18	C_2, O_2 y O_1	(1+c).(m+2) =1.m+2+cm +2c el 1 se puede suprimir		A=(1+c).(m +)2	(1.m)+(1.2) +(c.m)+(c.2)=m+2+cm +2c
	19	C_2, O_2 y O_1	A = (m+4).4	A = 4.n+4,4 No ha sabido sacar factor común ni reducir más.	2.4.2.. m.m+4.4 4.4+4.m	(4.m)+(4.4)

Tabla 6.34

(*) x	c	5
a	a.c	a.5
b	b.c	b.5

Este es un grupo de ítems con gran dificultad. Los alumnos siguen sin acostumbrarse a poner desde el principio los paréntesis cuando las dimensiones están subdivididas y se conforman con separar un poco los binomios y ponerles un “punto” en medio. Lo que sí es cierto que si se dibujan subáreas en los rectángulos se dan cuenta que les ha faltado el paréntesis.

Siguen confundiendo, en la operatividad básica, el producto con la suma y positivamente reconocen los factores comunes, en general.

Sorprende que en el diálogo la alumna A2 no reconoce ni un trapecio, ni un triángulo rectángulo ni el teorema de Pitágoras. Esta alumna suele usar la propiedad asociativa y pone siempre “.” antes o después de los paréntesis cuando son oportunos.

La ficha 5 como era de observación les resultó fácil y reconocieron en ella el S.R.V.G. y la R.F.

La alumna A2 incluso recuerda los nombres “cuadro de doble entrada” y “visualización simplificada”; por esta última entiende “verlo más simplificado”.

También el alumno A6 recuerda el esquema como “visualizaciones”, “visualización simplificada”.

Los resultados de las fichas 6 y 7 donde aparece la propiedad distributiva muestran que los alumnos no tuvieron problemas ni siquiera por haberse ampliado uno de los factores a un trinomio y no ser binomios que era lo que habitualmente se había trabajado.

En la ficha 8 (ítems desde el 28 al 33) de operatividad básica con paréntesis, que corresponde a la habilidad codificada como O2, hay en los tres alumnos que contestaron similitud en algunas situaciones y disparidad en otras, pero sí coinciden todos en comprender la propiedad distributiva tanto por la izquierda como por la derecha y la doble distributiva.

El problema se les plantea al tener que operar después.

Los resultados han sido:

F	ítem	Categoría	A2	A5	A6
8	28	O_1 y O_2		Lo hizo oral, bien	
8	30	O_1 y O_2	xy+2x $xy+x^2$		
8	32	O_1 y O_2	12 a+2b (directo)	3.4 a+3b	12 a+3b= 3(4 a+b)
8	33	O_1 y O_2	$(x+y)^2 = x^2 + y^2$ $(x+y)^2 = x^2 + xy+yx+y^2 =$ $=x^2 + 2xy+y^2$	x.x+x.y+y.x+y.y= (*) =2x+2y+x.y+y.x	$x^2 +xy+yx+ y^2 =$ $x^2 +xy.2+y^2$

Tabla 6.35

(*) Al preguntarle si se puede hacer algo más, escribe la expresión “2x+2y+xy+yx”, o sea identifica “x.x” con “2x”.

La alumna A2 tanto en el ítem 30 como en el ítem 33 comete el mismo error: confundir “x.x” con “2x” e incluso llega a decir que “$3x.3x= 6x^2$”. Confunde cuadrado de la suma de dos números con suma de cuadrado y expresa $(x+y)^2 = x^2 + y^2$. La E. haciéndola reflexionar consigue que la alumna rectifique y escriba $(x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2$. Al preguntarle si se puede hacer alguna reducción, muestra $x^2 + 2xy + y^2$. Luego como la alumna admite que la representación del rectángulo con sus dimensiones sirve para saber si las áreas están bien, se recurre a la geometría y se le pide que dibuje el rectángulo que corresponde a la expresión del ítem según el S.R.V.G. y lo hace correctamente y explica que el área del rectángulo corresponde al desarrollo de la propiedad distributiva.

El resto de los ítems relacionados con la sustitución formal (O_3) los agrupamos en: ítems donde la designación de paréntesis no era obligada. Los resultados han sido:

F	Í	A2	A5	A6
9	34	4.8=32	4.8	4.8=32
	36	4.(3n) =12n	(3n).4=3n.4	4(3n)=12n
	38		x+3+6	6+3
	39		x+3+n	
	40	b+2+3=5+b	x+3+b+2	(b+2)+3=3+b+2= 5+b
	41			2.7

F	Í	A2	A5	A6
	42			
	43			p.7
	44		5x+3+3	(3.5)+3
	45		5x+3+k	
	46	2k.5+3=10k+3	5x+3+2k	(2k.5)+3=10k+3

Tabla 6.36

Como se observa la tendencia de A2 es a no usar paréntesis y la de A6 a usarlos, aún no siendo necesarios, pero ambos operan correctamente y hacen la sustitución adecuada, sin embargo la alumna A5 no ha hecho sustitución sino ha sumado, sin más, los valores asignados a la variable.

Otro grupo de ítems (35 y 37) de operatividad básica (O_2)en expresiones donde es imprescindible usar paréntesis fueron resueltos por A2, A5 y A6 con los siguientes resultados:

F	ítem	habilidad	A2	A5	A6
9	35	O_2	4 . (n+5)= 4n + 20	4 n+5 y después del diálogo 4(n+5)	4 (n+5)=4n+20
	37	O_2	4.(2n+4)=8n+16	2n+4 . 4 y luego (2n+4) . 4	4 (2n+4) =8n+16

Tabla 6.37

También aquí A5 ha comenzado sin poner paréntesis al binomio, pero si se le dice que se fije y se compara con ejemplos donde en lugar de suma hay producto y el resultado es el mismo con o sin paréntesis, reconoce el error y por sí misma, rectifica.

A2 y A6, desde el comienzo, han puesto los paréntesis correspondientes.

Este tipo de habilidad O_2, además de las O_1, $C_{1,}$ $_C2$ y $C_{3,}$ han sido también analizadas a través de los ítems contextualizados de la ficha 10.

F	Í	A2	A6
10	61	3 . (n+t+3)	
	64		2b
	65		(b-13).2 = b2-26
	66		2(b-13)+8 = 2 (b-5) = (b-5).2 =2b - 10
	68	10 . (b+5) = 10b + 50	
	70	[(b-13)+8] . 10 = (b-5) . 10 = b- 50	

Tabla 6.38

El ítem 10 se plantea a la alumna A2 y, por despiste, después de haber comenzado a desarrollar el paréntesis y haber puesto 10b - 130, se equivoca. El error de A6 ha sido no utilizar corchetes.

La ficha 12 incluye ítems (84, 85, 86 y 90) de “reconocimiento de expresiones equivalentes” (C_3) obtenidas a través de sustitución formal, que sólo se le planteó a A2 y no tuvo problema para resolverlo. Los resultados de estos ítems fueron correctos y resueltos sin la más mínima duda.

En diagramas no lineales, el problema en la ficha 14 de A2 y A4 (ítem 96) no ha sido la sustitución formal (O_3) aprovechando el diagrama no lineal planteado, sino la operatividad básica posterior (O_1 y O_2), donde además no reconocen la diferencia de cuadrados.

6.9 ESTUDIO BIOGRÁFICO DE UN CASO

Ya hemos indicado en el Capítulo 5 nuestra idea de un estudio biográfico.

El alumno elegido en esta ocasión también ha sido un alumno de estrato "medio" en cuanto a rendimiento académico, algo tímido, muy receptivo y de actitud positiva y disponible para colaborar y participar en el estudio del trabajo, incluida la entrevista individual. También por su regularidad de asistencia a clase, hecho no general en el grupo de alumnos al que pertenece.

En términos cuantitativos, los resultados globales de las respuestas de este alumno en las dos aplicaciones de la Prueba T han sido:

Resultados	**T1**	**T2**
x	43	7
0	29	29
1	30	66

Tabla 6.39

Los códigos utilizado en la tabla son los que hemos usado en todas las ocasiones anteriores.

La observación inmediata es que ha habido una mejoría auténtica en sentido cuantitativo. En el orden establecido por los alumnos de toda la clase este alumno "subió" cuatro lugares en el análisis global del aula realizado de las dos aplicaciones de la Prueba T. Las respuestas de los 102 ítems son las indicadas en la tabla 6.40:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
11	11	11	11	01	01	11	11	01	01	11	00	00	xx	x0	x1	x0	xx	x0	11
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
01	11	11	01	01	11	01	01	11	00	xx	11	11	11	10	11	00	00	00	x1
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**
01	x1	x1	x1	x1	x1	x1	00	x1	x1	xx	xx	00	01	x1	x1	00	00	00	00
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**	**71**	**72**	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**	**80**
11	x1	x1	x0	x1	x0	x0	x0	x1	x1	x1	x0	x1	x1	x0	x0	x0	x0	x1	x1
81	**82**	**83**	**84**	**85**	**86**	**87**	**88**	**89**	**90**	**91**	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**	**100**
11	11	11	11	11	10	11	11	10	11	01	00	11	01	00	11	01	01	xx	x1
101	**102**																		
xx	x1																		

Tabla 6.40

De cada una de las parejas de números que aparecen en las casillas, el primer dígito se refiere a la respuesta de T1 y la segunda a la de T2.

Pasamos ahora a analizar el aspecto cualitativo.

Interpretamos que el hecho más importante ocurrido es la seguridad personal que ha adquirido este alumno en su trabajo. Se ha sentido capaz de enfrentarse a situaciones no abordadas al comienzo de la experiencia, concretamente en 36 de 43 ítems, que es un porcentaje bastante elevado.

Es evidente que la interacción con el contenido matemático ha mejorado desde la T1 a la T2, en principio globalmente, por cuanto de 43 ítems sin abordar ha pasado a 7.

Particularmente queremos hacer algunas consideraciones donde se detecta positividad. En el desarrollo de habilidades cognitivas de carácter operacional (a) y habilidades de carácter conceptual (b).

En las primeras (a), en operatividad básica, con datos estrictamente aritméticos ha habido mayor éxito en la T2 que en la T1, como era de esperar, dada la actitud del alumno para aprender. Sin embargo hay un hecho y es que cuando existe un signo "-" delante de un paréntesis parece usar estrategias sistemáticas.

Así, a) si se trata de un binomio con el primer término positivo y el segundo negativo, sólo cambia el signo del segundo término y opera el contenido del paréntesis y deja el signo "-":

- (3 - 1) = - 4
- (6 - 2) = - 8

b) si los términos de dentro del paréntesis son positivos, cambia el segundo de signo y hace lo mismo:

- (6 + 7) = - 1, aunque en otros casos, opera bien.

c) si el primer término es el negativo, opera también el contenido del paréntesis y omite el signo de delante del paréntesis:

- (-8+4) = - 4.

En el trabajo con paréntesis también ha habido mejora tanto en contextos aditivos y multiplicativos (propiedad distributiva) cuando intervienen letras, ya que si se trataba de datos numéricos sí había resuelto los ítems correspondientes en la T1.

En la sustitución formal (ítems 49 y 50 de la pregunta 11) el paso de unas expresiones algebraicas a otras lo ha hecho bien cuando sólo intervienen las variables simbolizadas con "x" o "y", no así con otras letras del alfabeto.

Cuando se han dado igualdades alfanuméricas para hacer cálculos, sustituyéndolas, las respuestas han sido las adecuadas. Ha superado primero el no fijar en "si se ha sumado o restado" una cantidad concreta y el evaluar las letras en consonancia con la distancia del lugar que ocupan en el alfabeto. Así en:

a) "Si n-246 = 762, calcula n-247", y,

b) "Si e + f = 8, calcula e + f + g",

las respuestas han sido:

	T1	T2
a	763, incorrecta	761, correcta
b	9, incorrecta	8 + g, correcta

Tabla 6.41

Es evidente que en el caso b) ha dado a “g” el valor concreto “1”, previsiblemente por estar la “g” en el alfabeto seguida de la “f”.

El uso del signo “=” ha sido totalmente el adecuado.

En las segundas, habilidades de carácter conceptual (b), las preguntas 15 y 16 de conversión de registros son una muestra de lo que se está indicando (ítems desde el 63 al 80), de los cuales en la T1 no resolvió ninguno y en la T2, la totalidad. Sin embargo hay que especificar que no todos los resuelve correctamente. En cualquier caso, le resulta más fácil la conversión de registros en situaciones descontextualizadas o en contexto si estos corresponden a ecuaciones, no a expresiones sin clausurar, incluso cuando resulta obligado utilizar paréntesis (ítems 97 y 98).

Hay un hecho significativo que en investigación a veces se ha querido ver cómo solución a la denotación de paréntesis y es el uso de la coma “,” en los enunciados y concretamente este alumno no ha sido sensible a ello e interpreta de la misma forma los enunciados con este “signo de puntuación” que sin él.

Al igual que en la observación comentada para el uso de los paréntesis, el cálculo de perímetros los hizo bien en la T1, pero no abordó los ítems con datos literales y en la T2 sí y además los resolvió correctamente (ítems 55, y 56) incluso en el caso de una figura no totalmente dibujada, donde el número de lados era “n” (ítem 62).

En lo relativo al uso de los Sistemas de Representación ha hecho uso en especial del cuadro de doble entrada y además de manera correcta, aún cuando no lo había utilizado nunca por no haberlo conocido.

Basten estos ejemplos de muestra, de las buenas interacciones de este alumno con el contenido referido a las habilidades cognitivas de carácter operacional y de carácter conceptual, en el proceso de enseñanza - aprendizaje desde la T1 a la T2.

El desarrollo de habilidades metacognitivas ha sido constatado por la apreciación escrita sobre la experiencia que se solicitó de los alumnos de la clase y donde este alumno manifiesta expresamente su consciencia de los diferentes Sistemas de Representación y su aplicación.

Con respecto a su trabajo con el cuaderno de clase indicaremos lo siguiente:

- Se da una situación común con la mayoría de los estudiantes del Álgebra escolar y es que cuando se expresa en un enunciado, que existe en un conjunto un número menos de cualquier nº de objetos que los que existen en otro de referencia, la tendencia es a expresar el cardinal del conjunto de referencia con un número de elementos igual al que en realidad posee más el número que se ha de quitar en el segundo, y en el segundo se indica el número de elementos reales menos los que hay que restar. Así por ejemplo:

"En el gimnasio hay un curso que tiene balones y en la cancha hay otro curso con cinco balones menos", para expresarlo se da el siguiente esquema:

Situación:	gimnasio	cancha
Representación:		

La respuesta es distinta si se usan términos gramaticales:

Situación:	gimnasio	cancha
Representación:	balones	balones - 5

que si se expresa con símbolos:

Situación:	gimnasio	cancha
Representación:	b + 5	b - 5

con lo cual la diferencia siempre saldrá el doble de la que se pedía.

- Hecho significativo al pasar desde la representación formal algebraica al lenguaje habitual, es que se intenta elaborar los enunciados sin una buena corrección lingüística. La interacción es estrictamente con los datos concretos que se dan sin hacer intervenir otros términos gramaticales que lleven al contexto adecuado. Suponemos que esto es debido a la falta de hábito de estos planteamiento en los niveles escolares, ya que más bien se hace uso de ellos en niveles superiores, cuando se da, por ejemplo, ecuaciones planteadas o sistemas de ecuaciones, para que los alumnos construyan enunciados que se relacionen con ellos.

- En la conversión de registros, este alumno de manera espontánea - como también es normal en los estudiantes de su edad -, no utiliza la variable como número generalizado sino como letra evaluada y así si se solicita: "un número cualquiera", "el doble de un número", etc., siempre parte de un número concreto.

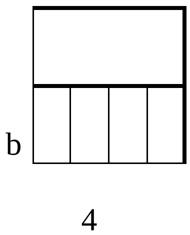
Cuando en las expresiones aparecían letras concretas no planteaba dificultad ni rechazo en utilizarlas. Sólo en el caso de solicitar a) el número siguiente a "g", o b) el número anterior a "h", hizo correspondencia con el orden de las letras en el alfabeto y respondió para a): "h" y para b): "g".

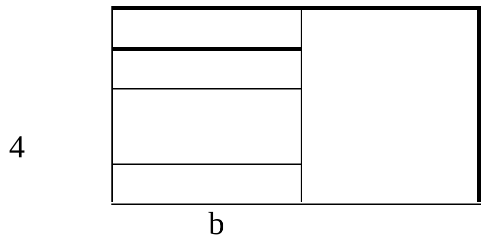
Sin embargo este alumno desde el momento que se le sugirió en la instrucción el uso de la letra como número generalizado, hizo uso correcto de ella y también de la interpretación independiente del orden de las letras en el alfabeto cuando éstas se utilizan como variables en Álgebra.

- Con respecto al uso de paréntesis, a la hora de analizar el trabajo del cuaderno detenidamente, se observa que hace uso de los mismos aún cuando no son necesarios, de manera concreta cuando aparece el "cuadrado" de alguna letra aunque sólo haya un término en la expresión:
$3\ (b^2)$.

- También se detecta que no "admitió", en principio, la conmutatividad en factores que forman un término, como es el caso de "n.50" y "50.n" ó "2.x" y "x.2", y la asociatividad "h +h + h +h" por "h.4" ó "u + u + 5 + 5 + 6" por “u.2 + 5. 2 + 6 = 16 + 2u”. Él mismo, al dar las soluciones correctas en clase y no coincidir con las propias, las “tachó”, como si no fuesen expresiones equivalentes, y, a partir de ahí utiliza siempre los productos en lugar de las sumas.

En el uso del Sistema de Representación Visual Geométrico del rectángulo para expresar un término de una expresión algebraica, se detecta que en principio este alumno elegido no lo comprendió, ya que usaba:





para 4b y de manera similar para otros ejemplos. Sin embargo, a medida que se fue avanzando en la instrucción, se dio cuenta de cómo representar correctamente cada una de las unidades.

Hay que señalar como negativo, que tiene una errónea costumbre que va a permanecer aún en la entrevista clínica, y es la de no poner el signo igual en situaciones necesarias sino lo que hace es dejar un pequeño espacio en blanco como sustituto del mismo signo y seguir trabajando.

Otra costumbre no positiva para el correcto aprendizaje del uso del lenguaje algebraico, es la de cambiar las variables de minúsculas a mayúsculas o viceversa o hacer uso de ellas de manera arbitraria, incluso en un mismo ejercicio.

Resumiendo, es evidente que su atención durante la experiencia fue máxima; prueba de ello es que las ideas que se le transmitían en clase las fue asumiendo muy bien e incluso las aclaraciones y explicaciones que se hacían personales o a otros compañeros, también están reflejadas en el cuaderno.

Parece también fruto de buena interacción con la Profesora, el aplicar las sugerencias de la misma en las estrategias posibles a utilizar para facilitar respuestas correctas, como es:

a) el esquema ya indicado de:

Situación: ....

Representación: ....

para facilitar la traducción.

b) la representacion visual/formal de la visualización simplificada con cuadro de doble entrada,

c) el uso de representaciones gráficas sencillas, con códigos propios del alumno,

d) el indicar concretamente qué es lo que representa cada variable de las que utiliza en su trabajo contextualizado o no,

e) el verificar la corrección de resultados de operaciones algebraicas (por ejemplo, la propiedad distributiva o doble distributiva) con otros sistemas de representación, entre otras.

Realmente se ha de admitir que fue muy positiva la utilización del Sistema de Representación Visual Geométrico para este alumno y en general. Ellos manifestaron su satisfacción por poder utilizarlo y por facilitarles las operaciones a realizar con el lenguaje algebraico, especialmente con los paréntesis e incluso por hacer más factible la traducción desde el lenguaje algebraico al lenguaje geométrico y viceversa a través de la visualización simplificada. Sin embargo, también hay que indicar que cuando se intentó ampliar el uso del mismo para hacer productos de binomios con términos negativos, por ejemplo "((a-b) (c-d))", les resultó algo más difícil su utilización, pero siempre les resultaba más fácil que el S.R.V.G. y además favorecía la conversión al mismo de expresiones dadas en el sistema de representación algebraico.

La utilización del signo "=" que la omitía al comenzar fue superada a lo largo de la entrevista. Hubo bastantes ejercicios que ya los hacía sin ni siquiera expresar nada oralmente, pero siempre dio razones cuando se le preguntó. Se constató asimismo la comprensión del sistema de representación visual geométrico y su aplicación en el lenguaje algebraico. A este lenguaje lo "definió" como "cuando se dicen las cosas con las letras y los números". Se reiteró la situación de la confusión que genera en los alumnos expresiones del tipo "un nº (a) menos que otro dato numérico o literal (b) donde dan como resultado "a -b " y no "b - a" que es lo correcto. Por ejemplo en "5 niños menos que x" y expresa: "5 - x " ó "5 niños - que x". Otro hecho que se confirma en la entrevista es la dificultad para admitir $(b^2)\ .\ 3$ como equivalente a $(b^2)\ .\ 3$ ó $3\ (b^2)$ y llega a poner $b.3^2$ en lugar de cambiar el orden de los factores con sus correspondientes exponentes. Un hecho positivo y diferente a las situaciones anteriores en la clase es su reconocimiento e incidencia de la "," en los enunciados. También el uso de la reversibilidad de la propiedad distributiva con el hecho de sacar factor común de manera adecuada y oportuna incluso cuando el factor proviene del paso previo de una descomposición. Así, por ejemplo, en

"$n.2 + 6.2 = 2\ (n + 6)$"

"$6\ .\ 2 + a\ .\ 2 + 8\ .\ 2 = 12 + 2a + 16 = 28 + 2a = 2\ (14 + a)$".

También ha sido comprobado que acepta la falta de clausura sin problema alguno.

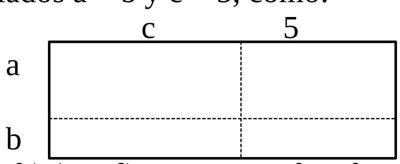
A modo de ejemplo se muestran a continuación (Tabla 6.39) varias tareas relativas a diferentes datos obtenidos por los distintos instrumentos utilizados y organizados según las categorías anteriores: O_1, O_2, O_3, C_1, C_2, y C_3.

<table>
<tr><th>Tareas</th><th>Resultados</th></tr>
<tr><td colspan="2">O_1 Realizar operaciones aritméticas en general o con letras sin utilizar paréntesis.</td></tr>
<tr><td>O_1
a) Realiza las siguientes operaciones:
a.1) (+5) + (-20) =
a.2) (-2).(+5) =
a.3) (+24) : (-6) =</td><td>

a.1) -15 (T1, T2 y E)
a.2) -10 (T1, T2 y E)
a.3) -4 (T1, T2 y E)</td></tr>
<tr><td colspan="2">O_2 Realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos, con especial atención a las denotaciones del paréntesis.</td></tr>
<tr><td>O_2
a) Calcula:
a.1) 6 . (b + a)
a.2) (a + 2) . 3
a.3) (a + b) . (m + 3)
a.4) x (y - x)</td><td>

a. 1) No resuelto en la T1 ni en la T2)
a. 2) No lo resuelve en la T1; a + 6 (T2)
a. 3) No lo resuelve ni en T1, ni T2 ni E
a. 4) No resuelta (T1); xy - x^2 (T2)</td></tr>
<tr><td colspan="2">O_3 Hacer sustituciones formales referidas tanto a los procesos de particularizar como a generalizar</td></tr>
<tr><td>3
a) “2 sumado con x” se puede escribir como: x + 2. Suma 2 en cada uno de los casos siguientes:
15 →
x + 6
3 x

b) “x multiplicado por 3” se puede escribir como: 3 x. Multiplica por 3 en cada uno de los casos siguientes:
7 →
x + 4
5 x</td><td>T1 T2
15→ 17 17
x + 6→ 2x+6 2 + x + 6
3x→ 3 x + 2 2 + 3 x

T1 T2
7→ 21 21
x + 4→ 3x+4 3 x + 12
5x→ 5 x + 3 15 x</td></tr>
<tr><td colspan="2">C_1 hacer conversiones entre los diferentes registros, con especial atención a las designaciones del paréntesis en el registro formal</td></tr>
<tr><td>C_1
a) El producto (a + b) (c + 5) se puede escribir utilizando el área del rectángulo de lados a + b y c + 5, como:


(a + b) (c + d) = a.c + a.5+b.c+b.5
Escribe los siguientes productos:
a) a . (b + 5) =</td><td>a) No resuelta en T1.

T2
<table><tr><td>x</td><td>b</td><td>5</td></tr><tr><td>a</td><td>a . b</td><td>a . 5</td></tr></table></td></tr>
</table>

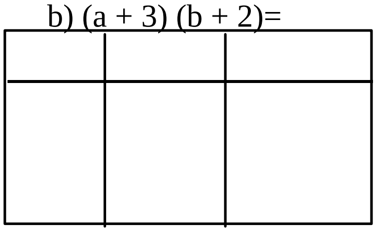
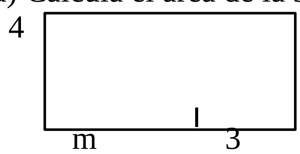
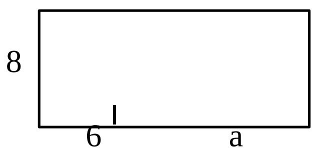
Tareas	Resultados
b) (a + 3) (b + 2)=  b) Escribe las operaciones siguientes en lenguaje algebraico: b.1) El triple de la suma de dos números istintos. b.2) El doble de un número menos 5 es igual a 17. b.3).El doble de la diferencia entre h e i. b.4) El cuadrado de la suma de 3 y 5.	b) No resuelta en T1. T2 x b 2 a a . b a . 2 3 3 . b 3 . 2 b.1) No resuelta en T1 3 (x + y) (T2) b . 2) No resuelta en T1 2 (x - 5 = 17) (T2) b.3) No resuelto en T1 2 . (h-y) (T2) b.4) No resuelto en T! $(3 + 5)^2$
2 Contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular las letras como objetos geométricos y como número generalizado en contextos de área y perímetro.	
C2 a) Calcula el área de la siguiente figura:  A = b) Calcula el perímetro de la siguiente figura  p =	a) A = 4 x m + 3 (T1) A = 4 . (m + 3) (T2) b) p = 6 . 2 + a . 2 + 8 . a= 12 + 2 a + 16 = 28 + 2 a = 2 (14 + a)
C3 Interpretar y comprender el significado de los signos, las letras y de las expresiones algebraicas, incluyendo en particular el uso del signo igual.	
C3 a) Dadas las expresiones: p, p+7, p-2, 2p ¿Puedes contestar?: La menor de ellas es… La mayor de ellas es… o, no puedes contestar porque…	a) La menor de ella es p - 2 (T1 y T2) La mayor de ellas es 2 p (T1 y T2)

Tabla 6.42

En la operatividad básica ha mejorado, sin embargo aún comete errores, como se puede observar en la transcripción siguiente:
A: "a" más tres "a" puede ser escrito de forma más simplificada como cuatro "a". Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible.
Dos "a" más cinco; siete "a".
Dos "a" más cinco "b" ¡eh!. Siete "ab".
E: ¿Por qué?
A: Por... dos más cinco, siete.
E: ¿Da lo mismo las letras que tengas detrás? Si tú crees que está bien sigue. ¿Ahí hay alguna propiedad especial? Tres menos "a", todo por "b". ¿Qué propiedad es esa? La que obedece.
A: La asociativa.
E: ¿La asociativa? ¿Qué vas a asociar? Hazlo, hazlo como te salga.
A: Conmutativa.
E: ¿Y eso es conmutativa? Conmutativa no es cambiar esto...
Sí, pero hazlo, luego ya veremos la propiedad.
¿No se puede simplificar nada?
A: Eh... sería...
E: Menos "ab", más "ab", más "ab" al cuadrado.
A: Ah!
E: ¿Qué estás pensando?
A: Eh... dos "a" por "a" sería... dos...
E: ¿Pero de dónde te sacas tú..., ustedes inventan, de dónde te sacas tú ese "por", dónde ves simbolizado ese por, dónde lo ves ahí puesto? ¿Dónde? ¿Hay por?
A: No.
E: ¿Entonces? ¿Cuánto es? Dos "a" más "a", ¿cuánto es? Nada, no importa. Pásate al otro.
A: Tres "y".
E: ¿Cómo? Tres "y" más "xy". ¡Vale! Sigue.
A: Seis "a" más...
E: Sí.

Parece muy interesante su reconocimiento de que "ha aprendido algo" que le va a facilitar el trabajo de las áreas y perímetros con las dimensiones alfanuméricas que en general es consciente de su mejora y que le ha influido en las respuestas de la evaluación efectuada durante el proceso de la experiencia con su profesora de Matemáticas.

La actitud de este alumno desde el comienzo era buena, pero quizás no participaba tanto por causa de cierta timidez. Sin embargo al configurar un ambiente de clase más participativo en general por parte de todos los alumnos, él ya se sintió mucho más seguro y expresó sus conocimientos, su trabajo, sus dudas y sus aciertos con normalidad.

Por último, en la entrevista individual se verificó una vez más su buena actitud y su esfuerzo por colaborar en la enseñanza-aprendizaje. Sólo y como es natural al principio estaba un poco nervioso pero en seguida lo superó.

Nos parece conveniente indicar que al animar a este alumno a participar y él corresponder puede haber sido una buena ayuda para su futuro en las clases de Secundaria y para confirmar que las interacciones con los alumnos pueden favorecer el aprendizaje.

Capítulo 7
La Investigación Sobre Ecuaciones

CAPÍTULO 7: LA INVESTIGACIÓN SOBRE ECUACIONES

7.1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo 7 está centrado en la investigación acerca de ecuaciones lineales con una incógnita. En él describiremos los estudios de la fase exploratoria y experimental, reseñando los procesos seguidos y los resultados más significativos. Los objetivos de esta investigación se concretan en:

- Estudiar los aspectos cognitivos (habilidades cognitivas de carácter operacional (H.C.C.O.) y habilidades cognitivas de carácter conceptual (H.C.C.C.)) más relevantes relativas a planteamiento y resolución de ecuaciones lineales con una incógnita, con alumnos de 12 a 14 años.

- Elaborar instrumentos de medida (test) que consideren todos los elementos implicados en el tránsito desde el pensamiento aritmético al algebraico relativos a planteamiento y resolución de ecuaciones lineales con una incógnita, desde una propuesta curricular "global".

Ya se ha explicado en el capítulo 3, en el marco del Diseño de Investigación general, la situación de la investigación sobre ecuaciones. Se ha expresado también el planteamiento como problema concreto del estudio de las categorías de habilidades cognitivas operacionales y conceptuales en los procesos de adquisición y uso del lenguaje algebraico y también del uso y comprensión de los registros o sistemas de representación utilizados, dados los objetivos que nos hemos planteado en esta investigación, señalados en el capítulo 2.

Al igual que como se indicó en el capítulo 5, la información previa, obtenida en el curso 1990-91, a partir de los cuestionarios C_1 y C_2, sobre las causas posibles de las dificultades en la transición de la aritmética al álgebra, sirvió de punto de partida para ir concretando el trabajo posterior.

Asimismo el carácter cuantitativo-cualitativo del diseño de esta investigación está ya señalado.

Ya se ha indicado también la elaboración de los Cuestionarios C_3 y C_4, integrados en el estudio de acercamiento al nivel escolar en el curso 91-92, al igual que la construcción de los Cuestionarios Pretest y Postest, y el diseño de instrucción para ecuaciones, DISEC, aplicado en el curso 92-93 (Centro nº 1).

En este capítulo describiremos cómo se desarrolló el diseño de investigación, centrándonos en los resultados obtenidos en esta etapa experimental. Analizaremos los cuestionarios, así como las entrevistas realizadas.

Terminamos este capítulo con la exposición de la que denominamos segunda parte del estudio biográfico del alumno ya comenzada en el capítulo 5.

7.2. ETAPA EXPLORATORIA I

Esta etapa de la investigación, realizada durante el curso 90-91 sigue orientada, desde la perspectiva del Foco 1 de la investigación global, en la búsqueda de las causas de las dificultades de los alumnos en el uso del lenguaje algebraico, en este caso, relativas a planteamiento y resolución de ecuaciones con una incógnita. Se realizó un estudio empírico para analizar las dificultades semánticas y de sintaxis del lenguaje de las representaciones no formales frente a la semántica y sintaxis de la representación formal del álgebra con referencia a otros trabajos, en particular al de los profesores Filloy-Rojano (1989).

7.2.1. La población de estudio

Este estudio exploratorio se llevó a cabo con la misma población del efectuado para las expresiones algebraicas en el mismo año, o sea treinta y dos estudiantes de los niveles ya mencionados en el correspondiente Capítulo 5 (apartado 5.2.1.).

7.2.2. Diseño y desarrollo de la experiencia

El cuestionario utilizado en esta experiencia forma parte del diseño ya descrito en el Capítulo 4 y codificado con C_2, en este caso, para ecuaciones, se utilizó su segunda parte, C_{22} (anexo 2, parte 2ª).

Con relación a ecuaciones se utilizaron dos representaciones semióticas: la del sistema de representación visual geométrico (S.R.V.G.) y el sistema de representación del equilibrio de la balanza (S.R.E.B.). El objetivo es similar al que se propusieron los profesores Filloy y Rojano (1985) en experimentos de enseñanza, ayudar a los estudiantes a crear significados para las ecuaciones del tipo $Ax + B = Cx + D$ y para las operaciones algebraicas en la resolución de las mismas ecuaciones.

Al igual que en la prueba relativa a expresiones algebraicas, en ésta y en los dos primeros ejercicios se hicieron comentarios instruccionales antes de pedir a los estudiantes que completasen las dos situaciones ausentes de cada ejercicio.

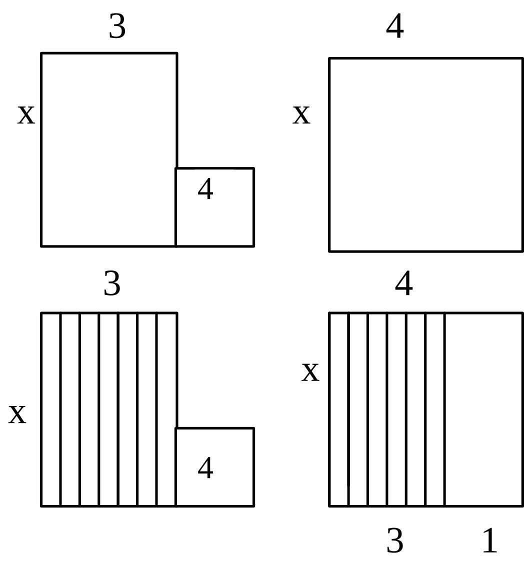
Las representaciones semióticas utilizadas las sintetizamos a continuación:

EL SISTEMA DE REPRESENTACIÓN VISUAL/ GEOMÉTRICO (S.R.V.G).

Caracterizamos el S.R.V.G. para las ecuaciones como un sistema semiótico según Duval (1993), porque: 1) presenta una representación identificable al permitir comparar áreas de rectángulos; se presenta la ecuación como áreas equivalentes en los dos miembros, 2) permite transformaciones dentro de la representación al poderse sumar áreas y restar en ambos miembros consiguiendo nuevos pares de áreas equivalentes, y 3) permite que el área de cada rectángulo pueda ser sustituido por una expresión algebraica y así realizar conversiones entre este sistema y el formal algebraico.

Aplicado a A x + B = C x, donde A, B y C son números enteros positivos y en este caso C > A está el siguiente ejemplo:

EJEMPLO: Tres veces la edad de un niño más cuatro, es exactamente cuatro veces su edad.

ALGEBRAICO	MODELO GEOMÉTRICO
Conversión	
3 x + 4 = 4 x	
4 = 4 x - 3 x	
4 = x	4 = x

EL SISTEMA DE REPRESENTACIÓN DEL EQUILIBRIO O DE LA BALANZA (S.R.E.B).

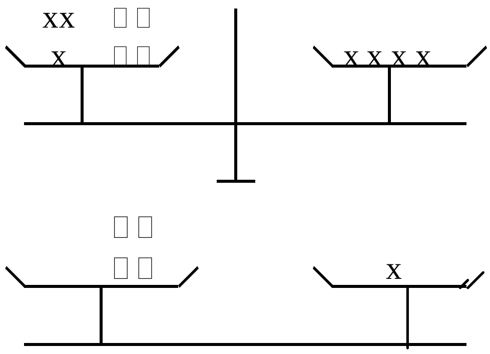
Se utilizó la balanza de dos platillos de brazos iguales en forma de puzzle.

Se presenta la ecuación como la situación obtenida al estar la balanza en equilibrio. Buscar la solución será encontrar el equilibrio de nuevo, pero dejando en un platillo solamente el símbolo de la incógnita o lo que ésta representa.

El S.R.E.B. para las ecuaciones se puede caracterizar también como un sistema semiótico según Duval (1993), ya que: 1) cada miembro de la ecuación puede ser representado en cada uno de los platillos, 2) Se pueden realizar transformaciones ya que se puede añadir o quitar la misma cantidad a ambos platillos y el equilibrio se mantiene, hecho que se corresponde con la ley de monotonía de la suma, y 3) el contenido de cada platillo que a su vez representa a cada uno de los miembros de la ecuación permite hacer conversiones a otros sistemas semióticos como puede ser el algebraico mediante números y letras; esto podría hacerse sustituyendo datos conocidos (pesas, monedas, etc.) por números, el número de objetos o el número de datos desconocidos también por números y datos desconocidos por letras.

Aplicado al mismo tipo de ecuación anterior con otro registro (S.R.E.B.) está el ejemplo:

EJEMPLO: Tres veces la edad de un niño más cuatro, es exactamente cuatro veces su edad.

MODELO DE LA BALANZA	ALGEBRAICO
	$3x + 4 = 4x$ $3x - 3x + 4 = 4x - 3x$
$x = 4$	$4 = x$

En la segunda prueba, como ya hemos señalado, presentamos las dos representaciones, la geométrica y la de la balanza. Los resultados más significativos son los que exponemos a continuación.

En general, no mantienen representada paralelamente en la hoja de trabajo, la secuenciación algebraica y la de las representaciones visuales, lo que indica que o bien resuelven primero algebraicamente o con representaciones visuales, previsiblemente lo primero, o adaptan la representación visual a lo obtenido o viceversa, o trabajan a la vez, sin hacerlo corresponder en la representación.

Tampoco se preocupan de visualizar la balanza con platillos iguales, o bien la hacen al principio y luego la abandonan.

Mantienen la balanza, su dibujo, en equilibrio aún cuando las transformaciones que han hecho paralelas no permiten representarla así, por no ser iguales.

Una idea importante es que los alumnos de E.G.B. (7º y 8º) no mantienen los dos miembros en la resolución con el modelo geométrico, hecho que sí realizan, en general, los alumnos de los otros niveles (1º B.U.P., 1º de la Escuela de Formación de Profesores de E.G.B., de las Especialidades de Ciencias y Ciencias Humanas).

Es importante señalar el uso de códigos personales para indicar acciones que se cumplen en el proceso de solución. Por ejemplo en el caso de la balanza, ponen grupos de puntos sin contar, al margen de los datos de la ecuación, sobre todo si son coeficientes o cantidades conocidas que resultan grandes.

Hay alumnos que establecen su propio código sustituyendo "• " por diez unidades; representan puntos "en el aire" aislados de los platillos, aunque su uso luego no sea el correcto.

Cuando se cansan de representar con símbolos cantidades grandes, mezclan registros de las dos representaciones y ponen la grafía de los números sobre el platillo de la balanza, sitúan representaciones de objetos debajo de los platillos, ponen representaciones de objetos o relaciones entre ellos que no tienen sentido en la experimentación con la balanza.

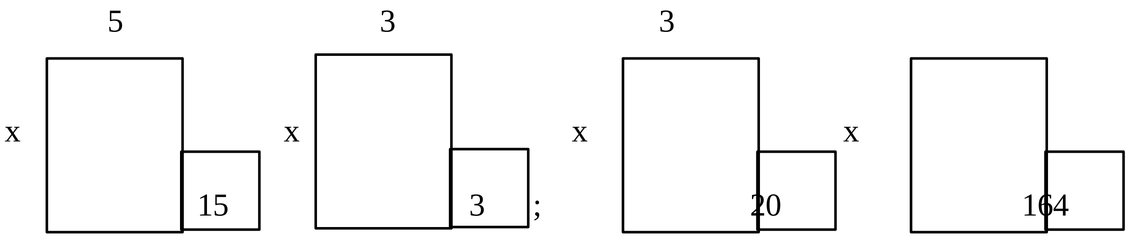
En el análisis de los procesos de resolución se detecta también la pérdida temporal de habilidades, al menos teóricamente conocidas, unida a quizás la fijación de los comportamientos en las representaciones visuales. Tal es el caso que al hacer la transposición de términos suelen hacerla bien si se trata de los términos donde está contenida la incógnita, aún cuando sus coeficientes sean negativos y se olvidan de hacerlo con las cantidades conocidas.

Es significativo que los alumnos de la Escuela Universitaria (2 alumnos en concreto) lleguen a "0 = 144" en la secuenciación algebraica y no se planteen nada, ni siquiera una revisión, no continúan la búsqueda de la solución; quizás sea debido a la rutina de sus acciones al actuar con los elementos del ejemplo incluso en la secuenciación algebraica, sin reflexión sobre los resultados.

La independencia de ambos registros, visual y formal, es notoria. Trabajan con expresiones algebraicas sin tener en cuenta su conexión con los otros sistemas de representación. Se dan casos de alumnos que tienen dificultad en alguna representación y no con la otra, así un alumno que no utiliza la representación geométrica en absoluto, algebraicamente resuelve bien la situación y otro se comporta de manera similar con la representación de la balanza. Por otra parte, un alumno (de 7º de E.G.B.) indica que no sabe hacerlo con "cuadros" y sin embargo utiliza la representación de la balanza correctamente.

La semántica de los sistemas de representación les resulta, a veces, tan poco significativa que, por ejemplo, representan de la misma manera: "cinco veces un número menos 15 es equivalente a tres veces el número menos tres" que "añadiendo 20 cm al triple de la medida de la longitud de un segmento, se obtiene otro segmento cuya medida es la del primero incrementada en 164 cm".

En los dos casos se representan, respectivamente,



Lo mismo ocurre con la balanza. Representan de la misma manera cantidades que restan como si estuviesen sumando.

En otro orden de resultados se observa que en todos los niveles, los alumnos no se preocupan de hacer corresponder la representación que están usando con el lugar asignado en la hoja de trabajo.

De todo ello y como conclusión final más relevante, podemos decir que: la semántica y la sintaxis de los sistemas de representación tienen dificultades análogas a la semántica y sintaxis del lenguaje formal. La semántica de las representaciones es tan fuerte, a veces, que enmascara la semántica de la propia representación formal.

No obstante, en la enseñanza/aprendizaje se debe considerar el uso de diferentes fuentes de significado dadas las características individuales de la inteligencia humana y de la propia naturaleza de la matemática.

El aspecto formal de las Matemáticas de la escuela obligatoria permanece dentro de la simbología verbal - algebraica, pero la experiencia y la historia han mostrado la importancia de la visualización como "herramienta" fundamental para la comprensión de muchos argumentos y fórmulas algebraicas. Este carácter algebraico de las matemáticas escolares es debido al hecho de que no se es consciente del potencial que posee el sistema gráfico visual y de la insuficiencia de registros que enlacen estos sistemas.

El objetivo de nuestro trabajo actual es estudiar el uso simultáneo de estos dos sistemas de representación para las ecuaciones lineales con una incógnita y aceptando como hipótesis de trabajo que un planteamiento en forma de una conversión de registros activa, puede favorecer una mejor comprensión del contenido algebraico al que se refieren estos sistemas de símbolos, desarrollar habilidades cognitivas tanto de carácter operacional como conceptual, estimular el conocimiento metacognitivo de estas habilidades - haciendo a los alumnos conscientes de sus propios procesos - y mejorar habilidades en otros medios.

7.3. ETAPA EXPLORATORIA II (91-92)

Posteriormente a la fase comentada anteriormente, se procedió a la preparación de una intervención en aula en 7º de E.G.B. Ya se ha explicitado en el Capítulo 5 cómo se planteó esta experiencia de acercamiento al nivel escolar durante el curso 91-92.

Esta primera experiencia de aula que vamos a comentar, de la cual ésta es la segunda parte, la relativa a ecuaciones, la relación con el profesorado del curso fue muy buena, sin embargo, no se les explicó con todo detalle lo que se iba a realizar pues se quería mantener el grupo de control.

Se pretendía, siguiendo con el desarrollo del Foco I, comparar los resultados globales de la instrucción tradicional, con una instrucción donde se incluían nuevas representaciones semióticas como son las del S.R.V.G. y S.R.E.B. para el planteo y resolución de ecuaciones lineales, respetando el diseño que tenía el profesor del aula, así como el texto que utilizaban los alumnos.

7.3.1. La población de estudio

La población global fue de 112 alumnos que conformaban los tres grupos de 7º del Centro nº 1: 7º A (37 alumnos), 7º B (37 alumnos) y 7º C (38 alumnos), de los cuales 74 realizaron las dos pruebas C_3 (anexo 3) y C_4 (anexo 4) en su totalidad y los 38 de 7º C sólo realizaron C_3 y de $C_{4,}$ la parte correspondiente a expresiones algebraicas, C_{41} (anexo 4, parte 1ª).

7.3.2. Diseño de la Investigación

La investigación ya sabemos se designó de carácter cuasi-experimental, es decir:

Cuestionario C_3	Instrucción	Cuestionario C_4

El planteamiento global de este Diseño y sus tres etapas ya está completamente descrito en el capítulo 5 (5.3.2.) y no consideramos necesario, repetirlo.

La única diferencia se halla en la segunda etapa donde después de la instrucción se aplica la segunda parte del Cuestionario C_4, esto es C_{42} (anexo 4 parte 2ª) para ecuaciones, también descrita en el capítulo 4.

7.3.3. Desarrollo de la secuencia de enseñanza

Se hizo la introducción a las ecuaciones en dos grupos de alumnos de 7º de E.G.B.

La introducción a las ecuaciones se realizó a partir de reglas aritméticas y con el modelo de la balanza en un grupo y a partir de reglas aritméticas y con el S.R.V.G. con un planteamiento similar al utilizado en el tratamiento de las expresiones algebraicas, esto es, los números son cantidades discretas y las letras, longitudes de segmentos, en el otro.

Se plantea la problemática semántica versus sintaxis algebraica en el ámbito de los fenómenos didácticos que ocurren en la transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico del estudiante. Se le coloca en el momento en que el lenguaje algebraico aparece como necesario para poder abordar las situaciones que dan lugar a las primeras ecuaciones no - aritméticas. Se pretende una mayor comprensión del significado de las letras y una mejor utilización de las mismas, así como una mejora en la conversión de registros.

La detección del diagnóstico (utilizando C_3) se había realizado antes de comenzar el tratamiento de las expresiones algebraicas y de manera conjunta tanto para las citadas expresiones algebraicas como para las ecuaciones como se ha explicitado en el capítulo 4, al cual remitimos.

La instrucción en el aula comienza haciendo referencia a la instrucción acerca de las expresiones algebraicas y al Cuestionario C_3 así como a la suma con letras y a las reglas de multiplicación con variables en sus diferentes casos (anexo 3).

En línea a hacerlos participar en la clase desde el comienzo se les preguntó acerca del vocablo “ecuación” y lo que les sugería. Contestaron lo mismo que para álgebra: letras, sumar letras y algunos alumnos, resolver problemas. Ningún alumno tenía el más mínimo acercamiento a “igualdad”, “equilibrio”, etc.

Se les planteó la ecuación como igualdad de cantidades expresadas con números y símbolos, o sea la equivalencia formal.

Se hace algunas observaciones acerca del signo “igual”, su buen y mal uso, especialmente cuando se está trabajando en ejercicios con muchos términos y varias operaciones y se va resolviendo por “partes” e “igualando” al todo.

A posteriori se pasó al tratamiento del texto de EDEBE (ya se ha especificado en el Capítulo 5 que no se elaboró un diseño “a propósito” para esta experiencia). Se siguió el tema de “ecuaciones” del libro de los alumnos. Se presentan y nombran los dos miembros de una igualdad a partir de una igualdad numérica, se define y diferencia identidad y ecuación a partir de ejercicios concretos. La didacta hace observar que toda ecuación se transforma en una igualdad numérica al sustituir la incógnita por el valor numérico de la solución y a su vez, la solución de una ecuación es el valor numérico que la transforma en una igualdad numérica. Se presentan las propiedades de la suma y la multiplicación en igualdades numéricas y se observa su posible generalización a igualdades literales. Se insiste en el caso particular de las ecuaciones viendo que por aplicación de dichas propiedades, se transforman en ecuaciones equivalentes a la dada.

Al llegar a la resolución de ecuaciones y en los distintos tipos de ecuaciones que aparecen en el libro de texto:

$$x + a = b$$

$$a\,x = b$$

$$a\,x + b = c, \text{ con a distinto de cero,}$$

se pusieron ejemplos de cada uno de los tipos anteriores pero con coeficientes numéricos, para luego generalizar a las expresiones del texto.

Cuando se llegó a “Método general de resolución de ecuaciones” se proyectaron con el retroproyector los modelos que se presentaban para la misma, para el grupo “A” el modelo geométrico, y para el “B”, el de la balanza. Se explicaron y pusieron ejemplos en la pizarra que simultáneamente los alumnos trabajaban en sus correspondientes cuadernos de clase. En los ejemplos también se incluyeron enunciados verbales.

Como observación consideramos exponer que la temporalización no fue adecuada ni tampoco el momento de la intervención en el aula pues los alumnos no habían trabajado los números enteros.

7.3.4. Resumen de datos

En la tabla 7.1 se presentan los resultados globales del Cuestionario previo a la instrucción (C_3). Solamente hay tres preguntas de ecuaciones en el mismo: 2, 4 y 16, con los ítems que se muestran en dicha tabla:

G (Pregunta, apartado, nº ítem)	**A**			**B**		
	1	**0**	**X**	**1**	**0**	**X**
(2, a, 5)	**32**	**3**		34	2	1
(2, b, 6)	**32**	**3**		34	2	1
(2, c, 7)	**28**	**3**	**4**	32	2	3
(2, d, 8)	**28**	**6**	**1**	32	4	1
(2, e, 9)	**31**	**3**	**1**	34	2	1
(2, f, 10)	**29**	**6**		26	10	1
(2, g, 11)	**34**	**1**		36		1
(2, h, 12)	**29**	**4**	**2**	29	5	3
(4, a, 17)	**26**	**8**	**1**	33	4	
(4, b, 18)	**27**	**7**	**1**	30	7	
(4, c, 19)	**33**	**2**		32	5	
(4, d, 20)	**34**	**1**		32	4	1
(4, e, 21)	**31**	**4**		31	6	
(4, f, 22)	**7**	**11**	**17**	8	13	16
(16, 0, 53)	**31**	**4**		33	3	1

Tabla 7.1

Como podemos observar las respuestas han sido correctas en la mayoría de los ítems, con excepción del ítem 22, en el cual el coeficiente de la incógnita no es la unidad.

Los resultados que se han obtenido en los Cuestionarios C_{42} y C_{43}, que son los aplicados después de la instrucción como se ha señalado en el Capítulo 3, relativos a Ecuaciones se muestran en la tabla 7.2. En dicha tabla el número de la pregunta y el número del ítem coinciden. A los alumnos del grupo A se les pedía plantear ecuaciones lineales con una incógnita, mediante la conversión de registros desde el lenguaje habitual a los sistemas de representación visual/geométrico y formal algebraico, y resolverlas con estos mismos sistemas. Los alumnos del grupo B debían responder de forma similar, pero utilizando los sistemas de representación del equilibrio con la balanza y el formal algebraico.

G	A			B		
P/nº ítem	1	0	X	1	0	X
1	3	31	1	0	31	1
2	2	25	8	0	30	2
3	1	23	11	4	28	0
4	2	25	8	0	31	1
5	0	23	12	0	30	2

Tabla 7.2

Los resultados nos confirman que el aprendizaje de un nuevo sistema de representación semiótico necesita de una instrucción explícita, no siendo suficiente el planteamiento aislado de actividades donde se precise su uso.

7.4. DISEÑO EXPERIMENTAL 92-93)

Realizada la etapa exploratoria anterior, se continúa con una nueva experimentación en aula, con los mismos objetivos del Capítulo 2 de esta memoria.

En esta nueva etapa de la investigación y con los estudios previos tenemos una idea central ¿hay o no relación entre las capacidades de los alumnos de esta edad (12-14 años) y los Sistemas de Representación (sistemas de símbolos) que se proponen o se usan? De ahí la importancia que le daremos a la yuxtaposición de sistemas de representación y a la visualización en general. Una de las tesis que subyace en esta investigación es que hasta ahora se ha hecho hincapié en sistemas de representación formal algebraica desde edades muy tempranas y de forma excesiva. Esto se observa en el curriculum y en textos que presentan parte simbólica y no simbólica muy fuertes y aquí consideramos los sistemas de representación semióticos como vehículos de comunicación matemática. Nos planteamos si hay ruptura epistemológica real entre el Diseño Curricular pretendido oficialmente y las capacidades y habilidades de los alumnos para lo simbólico. Pensando que podría ser ésta una de las causas del fracaso escolar unido a la actitud negativa hacia las Matemáticas, en concreto hacia la geometría y el álgebra y basándonos en nuestras experiencias anteriores docentes y de investigación, donde se ha observado la dificultad de los estudiantes en la resolución de ecuaciones en general y de manera particular en la iniciación de la misma resolución en cuanto a las ecuaciones lineales, de la forma: “$A\,x \pm B = C$”, “$A\,x + B = C\,x$” y “$A\,x + B = C\,x + D$” y en la aplicación o transferencia a contextos más amplios y considerando que puede ser debido a:

a) falta de dominio de operatividad aritmética básica,
b) dificultad de conversión entre representaciones simbólicas y situaciones particulares de la realidad,

nos propusimos el elaborar un diseño concreto (DISEC, anexo 11) para llevar al aula y experimentarlo.

Posteriormente se procedió a la preparación de una intervención en un aula en 7º de E.G.B., concretamente en 7º A del mismo Centro donde se había intervenido el curso 91-92 (Centro nº 1).

En general, el trabajo del álgebra de planteo y resolución de ecuaciones es difícil para muchos alumnos. Es preciso hallar formas en las que los alumnos sean capaces de manifestar esas dificultades para que puedan ser discutidas.

Muchas de las dificultades son debidas no a la resolución de las ecuaciones en sí, sino a la significación que poseen las letras para ellos. Por ejemplo "3b" es comprendida a menudo como "tres bolígrafos" más que 3 veces el número de bolígrafos. Un acercamiento a la comprensión de estas afirmaciones es animar constantemente a explicitar el significado de la variable utilizado en el contexto, a comprobar por sustitución en el trabajo que se realice así como a "pensar con letras".

Más dificultades son asociadas con expresiones tales como "más que" "menos que". También $y = x + 2$ es comúnmente leído como "x es 2 más que y" o "y es igual a x si tú sumas 2 (a y)". En este tipo de situaciones también puede ayudar la sustitución por números y comprobación de la igualdad.

"Pensando con letras" comprende principalmente formar expresiones y ecuaciones desde afirmaciones verbales. Las ecuaciones que se presentan son la mayoría resueltas fácilmente por tanteo. Si se plantean para ser resueltas algebraicamente se requiere probablemente las reglas de multiplicar - dividir y las reglas de multiplicar con paréntesis; en los ejercicios de inventar enunciados para ecuaciones concretas planteadas, puede surgir mayor grado de dificultad.

Por lo anterior reconocemos que este tipo de ejemplos debe ser tratado en algún momento en un curso de álgebra. Puede haber alumnos más hábiles que no lo precisan, pero otros sí necesitan más práctica regular y extensa de este tipo de ejemplos. La consideración cuidadosa de las letras siempre es necesaria. Se espera que el significado de las mismas se guarde y ayude a resolver ecuaciones, superar obstáculos y evitar errores, posteriormente.

Hay también que trabajar la relación "ecuaciones - afirmaciones" concentradas sobre la equivalencia algebraica de expresiones tales como "menos que", "juntos son", por ejemplo. Es un ejercicio de reversibilidad de dos sentidos de conversión: hacer sentencias de ecuaciones dadas y plantear ecuaciones de sentencias dadas. En general en los textos se suele dar las letras para ser usadas y los alumnos dicen qué significan, pero para las letras no dadas, el nivel de dificultad es distinto.

Previo a este trabajo, como hemos indicado, se ha realizado otro específico para el tratamiento de las expresiones algebraicas.

Este trabajo de las ecuaciones se relaciona, como es habitual, con otros de investigación sobre la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones y su resolución, en los cuales se encuentran ideas y resultados que ayudan a conformar un marco referencial y que nos ha permitido llevar a cabo nuestro objetivo.

Existe una amplia gama de investigaciones que mira a la enseñanza-aprendizaje de ecuaciones lineales en la etapa escolar, concretamente en el nivel correspondiente a la Enseñanza Secundaria Obligatoria en España.

En concreto en esta investigación vamos a considerar las habilidades de carácter operacional y de carácter conceptual para la resolución de ecuaciones lineales y terminaremos el Capítulo presentando el estudio biográfico de un caso, concretamente del mismo alumno que en el Capítulo 5, en el que consideramos los datos obtenidos por los diferentes instrumentos de medida y que van desde el Pretest a las videograbaciones, pasando por el análisis del cuaderno de clase, grabaciones y Postest

Las habilidades cognitivas de carácter conceptual (H.C.C.C.) están relacionadas con el *planteamiento de las ecuaciones* que supone conversión entre los diferentes registros y las habilidades cognitivas de carácter operacional (H.C.C.O.) están asimismo directamente relacionadas con la *resolución de las ecuaciones*.

Nosotros nos planteamos presentar a los alumnos unas fichas donde ellos mismos puedan entrar en contacto con el conocimiento ya adquirido, interactuar con él y generar estrategias de trabajo que le permitan analizar su trabajo.

Se usa la hipótesis de que el conocimiento adquirido de este modo es más estable por haber sido generado por el propio alumno en lugar de ser asimilado solamente a través de las explicaciones del profesor.

Se desea obtener datos sobre el funcionamiento de la adquisición del conocimiento por parte de los alumnos, los procesos de pensamiento, sus habilidades cognitivas de carácter operacional y conceptual. Para esto, parece interesante estudiar una manera diferente de provocar esta adquisición generando una actividad nueva para los alumnos que al observarla permite estudiar ese funcionamiento y las habilidades cognitivas.

Elaboramos nuestro diseño donde se ha seguido introduciendo representaciones visuales de carácter continuo sin abandonar las discretos y además abordamos las representaciones como ya lo habíamos hecho, no sólo de forma aditiva sino también multiplicativa, insertos en el proceso de transición de la aritmética al álgebra en el período escolar y habiendo diseñado y realizado una experiencia de enseñanza para el periodo previo a las ecuaciones como se ha indicado anteriormente, y moviéndonos tanto en el aspecto sintáctico como en el semántico del álgebra, mediante interacción de lenguajes, para seguir la trayectoria recorrida en las expresiones algebraicas.

El perfil de enseñanza que presentamos se organizó para un grupo de 7º de E.G.B. y se destinó a averiguar el acercamiento de los alumnos a las ecuaciones a través del material que presentaba el didacta y el modo cómo se presentaba.

La introducción a las Ecuaciones se realizó a partir de reglas aritméticas con similar tratamiento al utilizado en las expresiones algebraicas esto es, los números como cantidades discretas y las letras, longitudes de segmentos, y con los registros de representación, S.R.E.B. y S.R.V.G.

7.4.1. La población de estudio

La población fue de 31 alumnos de 7º A del Centro número 1 con los cuales se había hecho previamente la experiencia de las expresiones algebraicas.

7.4.2. Diseño de investigación

Esta parte de la investigación relativa a ecuaciones se puede sintetizar en:

Primera etapa:

Diseño de todo el proceso, construcción y validación de instrumentos de medida, del diseño de instrucción del experimento de la enseñanza en el aula, DISEC, y diseño del protocolo de las entrevistas, de los cuales nos ocupamos en los capítulos correspondientes.

Segunda etapa:

Aplicación del Pretest de habilidades algebraicas (Pr, anexo 5); Implementación del DISEC, anexo 11; La aplicación del Postest, (Po, anexo 6) para obtener respuestas relativas a la adquisición de habilidades operacionales y conceptuales al plantear y resolver ecuaciones lineales, o sea averiguar el acercamiento de los alumnos de este nivel al álgebra; Selección de alumnos para ser entrevistados; Diseño del protocolo de las entrevistas y Realización de las entrevistas.

Tercera etapa:

Análisis de datos.

En este diseño experimental (Curso 92-93) se sigue el mismo tipo de diseño de investigación de la experiencia anterior:

Pretest (Pr)	Instrucción	Postest (Po)

Ya, en su momento, indicábamos que los ítems relativos a expresiones algebraicas y ecuaciones no están separados por cuestionarios sino que en el Pretest existían ítems de los dos tópicos considerados y que fue aplicado antes de comenzar la instrucción. Está codificado con Pr (anexo 5) para detectar habilidades algebraicas operacionales y conceptuales y pretendía estudiar la asimilación y comprensión por parte del alumnado del conocimiento escolarizado previo al inicio del tratamiento del Álgebra que ya ha sido comentado.

Se podrían agrupar estos ítems en:

a) Conversión de registros para llegar a plantear ecuaciones.

b) Resolución de ecuaciones dadas.

Las ecuaciones son de la forma:

* $x - A = B$, $B > A$
* $A - x = B$, $A > B$
* $A x + B = C x + D$, $C > A$ y $B > D$
* $A x = B x + C$, $B > A$
* $A + x = B$, $B > A$
  $A = B/x$, $B = n \cdot A$, $n \in N$.
* $A x + B = C x + D$, $A > C$ y $B > D$
* $A x + B = C x + D$, $C > A$ y $D > B$

c) Planteo y resolución de ecuaciones en problemas de enunciado verbal.
d) Relación entre enunciados y ecuaciones dadas.

Posteriormente a la instrucción se les administró el Postest (codificado con Po, anexo 6), que ya han sido descritos en el capítulo 4. A continuación mostramos su relación con el Sistema Categorial de las habilidades cognitivas, tanto de Pr1, anexo 5 parte 1ª, como de Pr2, anexo 5 parte 2ª, como de Po1, anexo 6, parte 1ª, y Po2, anexo 6, parte 2ª, que son las dos partes en que se les aplicaron ambos cuestionarios.

Indicamos en la siguientes tablas (tabla 7.3, 7.4 y 7.5) en concreto, los que de una u otra prueba se relacionan directamente con ecuaciones.

Para una mayor facilidad en la interpretación de la tabla se indican en las dos primeras columnas las referencias a las preguntas del Pretest y Postest, así como el número de ítem correspondiente.

Nº P (Pr1)	**nº I**	**O_1**	**O_2**	**O_3**	**O_4**	**O_5**	**O_6**	**C_1**	**C_2**	**C_3**	**C_4**	**C_5**	**C_6**	**C_7**
3	13	x	x											
	14	x			x									
	15	x	x											
	16	x			x									
12	43	x	x							x				x
13	44	x		x						x				x
14	45												x	
	46												x	
	47												x	
	48												x	

Tabla 7.3

Nº P (Pr2)	nº I	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
1	1	x	x			x								
	2	x			x									
	3	x		x										
	4	x			x									
4	10	x			x					x				
13	45	x		x						x				

Tabla 7.4

Nº P (Po2)	nº I	O_1	O_2	O_3	O_4	O_4	O_4	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
1	1	x												
2	2	x						x		x				
3	3	x	x							x				
4	4							x		x				
5	5	x			x									
6	6	x			x					x				
7	7	x			x					x				
8	8	x		x						x				
9	9	x		x						x				
10	10	x		x						x				
11	11									x			x	
	12									x			x	
	13									x			x	
	14									x			x	
12	15			x	x									

Tabla 7.5

7.4.3 Desarrollo de la secuencia de enseñanza

La instrucción se desarrolló en los meses de abril y mayo de 1993. Comenzó la instrucción acerca de las Ecuaciones, teniendo en cuenta el enfoque sintáctico - semántico, utilizando los sistemas de representación visual geométrico (S.R.V.G.) y el del equilibrio de la balanza (S.R.E.B.), utilizándolos yuxtapuestos al S.R.F. algebraico.

Para la instrucción en el grupo A se tuvo en cuenta las siguientes ideas fundamentales:

1ª) Presentación de la ecuación como “igualdad de dos cantidades”.

2ª) Conversión de registros de representación.

3ª) Resolución de Ecuaciones en los diferentes registros,

Se diseñaron dos cuadernos (III y IV, anexo 11), descritos en el capítulo 3, relativos a Conversión de registros y a Resolución de Ecuaciones, respectivamente, que forman el DISEC (anexo 11, partes 3ª y 4ª). El primero (III) lo constituyen 24 fichas de trabajo. El segundo (IV) lo forman 9 fichas.

De las 24 páginas citadas del cuaderno III, de la 1 a la 14 se trabajó con el S.R.E.B. y de la 15 a la 24 con el S.R.V.G.

Las fichas 1 y 15 son de planteamiento de un ejemplo, respectivamente, del S.R.E.B. y del S.R.V.G. Con ello se intentó llamar la atención de lo que se iba a hacer:

- Usar el sistema de equilibrio de la balanza para representar en un registro como es la Balanza, representaciones dadas en el Lenguaje Habitual (ficha 1).

- Usar el S.R.V.G. para representar situaciones dadas en el Lenguaje Habitual (ficha 15).

En el cuaderno III, anexo 12 parte 1ª, se plantea un grupo de actividades similares a las usadas con el S.R.V.G., trabajado con los mismos alumnos en las expresiones algebraicas, en las que en representaciones de tres columnas, se indican situaciones en lenguaje habitual (primera columna), dibujo de la balanza (segunda columna) y sistema de representación formal aritmético primero y luego algebraico, en la tercera columna. La representación sobre los platillos se hace con portavariables conteniendo números y también con representaciones de objetos sencillos. Se plantea, a través del lenguaje habitual de la columna de la izquierda, varios ejercicios de observación así como interrogantes que dirijan dicha observación; para terminar, se pide que inventen situaciones similares a las dadas.

Posteriormente se pasa a otro tipo de fichas donde se le da la situación en forma de problema sencillo de enunciado verbal y se solicita la representen en el S.R.E.B. y además - como un paso de mayor dificultad -, que expresen "simbólicamente" lo que han leído en el enunciado y han representado en la balanza. En todo este grupo de fichas contenido en el cuaderno hasta la ficha 12, la expresión de "igual" no es siempre la misma y así aparece "es", "el resultado es", "es igual", "pesan", para ser convertido en "igual". Los contextos son, como siempre en nuestra experiencia, del habitual de los alumnos: peso de latas de pintura, peso de una bolsa de manzanas, de paquetes de cartulina, de un libro, de barras de metal, pastas de chocolate, etc. Las ecuaciones resultantes son muy sencillas: $A\ x = B$ y $B = n \cdot A,\ n \in N$; $A + x = A + B$; $A\ x + B = C$ con $(C - B) = n \cdot A,\ n \in N$; $A + x = B$; $A\ x + B = C\ x$; $A\ x + B = C\ x + D$;

Luego se trabajaron dos grupos de fichas "reversibles"; en las primeras se da la situación representada en el S.R.E.B. con dibujos de objetos que representan datos conocidos y datos desconocidos y hay que expresar simbólicamente la situación, y, otras, en que se dan las ecuaciones planteadas y hay que representar en el S.R.E.B.

Para el uso del S.R.V.G., el tratamiento fue el mismo. Se expuso como ya se indicó un ejemplo completo y luego se trabajaron las conversiones de registros, desde el LENGUAJE habitual al S.R.V.G. y a la representación formal simbólico que ya directamente se le denomina "algebraica". Sigue el trabajo con el paso a la conversión desde el S.R.V.G. al sistema de R.F. y viceversa. El uso del área del rectángulo para expresar cada una de las partes (monomios) de una expresión algebraica, ya se había trabajado en la parte del diseño relativa a las expresiones algebraicas.

Se termina con el planteamiento de algunas ecuaciones sencillas con portavariable aquí denominado “cuadrito”, y con la definición de los dos miembros para estas igualdades literales que sólo son ciertas para algunos valores de las letras”. La última actividad se refiere a resolución de ecuaciones donde la incógnita se representa con una “x”.

Posteriormente, se trabajó en el nuevo cuaderno, IV, anexo 11 parte 2ª, elaborado con el tópico de Resolución de Ecuaciones, compuesto por las 9 fichas citadas, de las cuales 5 eran para trabajar con el S.R.E.B. y 4 con el S.R.V.G. La única y gran diferencia con el anterior es que en estas actividades tienen no sólo que plantear las ecuaciones sino que resolverlas; además, se añade una característica a las experiencias con el sistema de representación del equilibrio de la balanza o con el sistema de representación geométrico, y es en nuestro caso, que los alumnos tienen que ir relacionando los distintos registros que usen para representar las situaciones planteadas que tienen la misma estructura que han de representar con el S.R.E.B. y la R.F. o con el S.R.V.G. y la R.F., no contemplada en el trabajo de otros investigadores, incluidos los profesores Filloy y Sutherland (1996).

Asimismo están contenidas actividades para hallar la solución de ecuaciones directamente representadas en el S.R.F. algebraico así como la definición de ecuaciones equivalentes como aquellas que tienen la misma solución.

Al igual que con el cuaderno anterior de conversión de registros para plantear ecuaciones, en éste se presentan ejemplos de cómo resolver las ecuaciones en el S.R.E.B. y en el S.R.V.G.

Para terminar con esta descripción sólo nos queda indicar que se propusieron 20 actividades de repaso, anexo 12, entre las que se incluían algunas, concretamente 4, del libro de texto habitual de los alumnos en esta clase, considerando así que el experimento de enseñanza diseñado para el tratamiento de esta parte del álgebra había sido ya desarrollado en el aula.

Ya se ha señalado en el Capítulo 3 el planteamiento del estudio de las habilidades cognitivas de los alumnos a través de un Sistema Categorial y cómo se establecen los descriptores para las ecuaciones que nos ocupan.

A continuación se muestra la relación de las Categorías allí establecidas con las actividades de los cuadernos III y IV que constituyen el material de clase en la instrucción llevada a cabo en la implementación del DISEC.

Para una mayor facilidad en la interpretación de la tabla se indican en las dos primeras columnas las referencias al número del cuadernillo y número de ficha.

Las columnas siguientes están encabezadas por los códigos utilizados a lo largo de todo este trabajo para las habilidades cognitivas de carácter operacional (**O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 y O_6**) y habilidades cognitivas de carácter conceptual (**C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 y C_7**) (tabla 7.6).

Nº C	**Nº F**	**O_1**	**O_2**	**O_3**	**O_4**	**O_5**	**O_6**	**C_1**	**C_2**	**C_3**	**C_4**	**C_5**	**C_6**	**C_7**
III	**1**												x	
	2	x											x	x
	3	x							x				x	x
	4	x							x				x	x
	5	x							x				x	x
	6								x			x	x	x
	7								x	x		x	x	x
	8								x	x		x	x	x
	9								x	x		x	x	x
	10								x	x		x	x	x
	11								x	x		x	x	x
	12								x	x		x	x	x
	13											x	x	x
	14											x	x	x
	15												x	x
	16							x			x		x	x
	17							x			x		x	x
	18							x			x		x	x
	19							x			x		x	x
	20							x			x		x	x
	21										x		x	x
	22										x		x	x
	23	x	x	x									x	x
	24	x	x	x	x	x	x						x	x
IV	**1**	x												x
	2		x	x		x								x
	3	x			x							x	x	x
	4	x	x	x	x							x	x	x
	5	x	x	x	x	x	x						x	x
	6	x			x						x		x	x
	7	x	x	x	x						x		x	x
	8	x	x	x	x	x	x							x
	9						x							x

Tabla 7.6

El DISEC, anexo 11, sólo es desarrollado en el primer grupo citado, el de los 31 alumnos.

Se previeron siete sesiones para la experiencia incluyendo en éstas la aplicación del Postest, para verificar la incidencia de la instrucción en el aprendizaje, ya que la del Pretest está ya incluida en el conjunto de Sesiones de Expresiones Algebraicas.

Estas siete sesiones se desarrollaron con pequeñas variaciones de lo previsto como se muestra en el cuadro siguiente (S.P. codifica las sesiones previstas y S.R., las sesiones reales y, III y IV, indican la referencia a los cuadernos III y IV del diseño de instrucción).

S.P.	FICHAS	S. R.	FICHAS
1.	III1, III2, III3, III4, III5, III6, III7 y III8	**1.**	III1, III2, III3, III4 y III5
2.	III9, III10, III11, III12, III13 y III14	**2.**	III6, III7, III8 y III9
3.	III15, III16 y III17, III18, III19, III20	**3.**	III10, III11, III12, III13 Y III14
4.	III21, III22, III23 y III24	**4.**	III15, III16, III17, III18 y III19
5.	IV1, IV2, IV3, IV4 y IV5	**5.**	III20, III21, III22, III23 y III24
6.	IV6, IV7, IV8 y IV9	**6.**	IV1, IV2, IV3, IV4 y IV5
7.	Aplicación Postest	**7.**	Aplicación Postest

Tabla 7.7

La relación de las actividades con dicho sistema categorial, en el caso de la implementación del Diseño se puede constatar con detalle en el Anexo (….. el que contenga las Sesiones Previstas y las Sesiones Reales para las ecuaciones).

Las sesiones se desarrollaron así:

En la 1ª sesión, se hizo la introducción y uso del Sistema de Representación del equilibrio de la Balanza (S.R.E.B.) y la conversión de registros, donde se detectaron habilidades C_2, C_6 y C_7.

En la 2ª sesión, se sigue con actividades similares a las de la sesión anterior pero también se hacen planteamientos de ecuaciones lineales con una incógnita y además se hacen conversiones del lenguaje habitual al S.R.F. algebraico, con lo cual, a las habilidades detectadas en la sesión anterior, se añade para su análisis, habilidades de la categoría C_3.

En la sesión 3ª, se añaden situaciones que permiten detectar habilidades de conversión del S.R.F. algebraico al S.R.E.B., codificadas como C_5.

En la sesión 4ª, ya se hace la introducción y uso del S.R.V.G. para ecuaciones lineales y se plantean ecuaciones lineales de una incógnita y se hace conversión de registros, para detectar habilidades de las codificadas con C_1, C_3, C_4, C_6 y C_7.

En la 5ª sesión, ya se hizo, aparte de referencia a la sesión anterior, aproximación a resolución de ecuaciones mediante yuxtaposición del S.R.F. y del S.R.V.G. Las actividades trabajadas permitieron detectar habilidades C_6 y C_7 además de otras de carácter operacional como son O_1, O_5 y O_6.

En la 6ª sesión, se resolvieron y ecuaciones lineales por yuxtaposición de los dos sistemas el S.R.F. y el S.R.E.B., detectando así habilidades O_1, O_2, O_5 y O_6, así como las C_2, C_5, C_6 y C_7, de carácter conceptual.

La última sesión (7ª), según muestra el cuadro de las mismas, se dedicó a la aplicación del Postest para ecuaciones (Po2), que consta de 15 ítems agrupados en 12 preguntas como ya se explicitó en el capítulo 4.

7.4.4 Resumen de datos

La medida de la eficiencia en el tratamiento de las ecuaciones se hizo mediante la parte segunda del Postest (Po1, anexo 6, parte 2ª) y que estuvo formada por 12 preguntas y 15 ítems que han sido descritas en el Capítulo 4.

De los 15 ítems que forman la segunda parte del Postest (Po1) sobre ecuaciones que se aplicó después de la instrucción realizada, sólo se van a considerar 8 ítems que coinciden con otros tantos del Pretest (Pr1 y Pr2), cuestionario pasado antes de la instrucción.

En la próxima tabla se incluyen los resultados correspondientes de los 8 ítems seleccionados.

En la primera columna aparece el número de orden del alumno en la clase. En las columnas siguientes aparecen, separados por comas, los resultados del Pretest y Postest de Ecuaciones.

En la primera fila se encuentra un código del número de la columna correspondiente, a partir de la segunda y hasta la 9. Las tres últimas columnas están simbolizadas con un “1”, “0” y “x” que indica el número de respuestas correctas, incorrectas o no resueltas por el alumno correspondiente, indicado en la primera columna de la izquierda. Los datos de la segunda fila que aparecen en negrilla, corresponden a la parte Pr2 de la Prueba del Pretest y el resto a la parte Pr1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	**1**	**0**	**x**
A/I	25, 1	26,4	**4**,5	**45**,7	9,8	20,9	45-48,11-14	8,15			
1.	1,1	x,1	x,1	x,0	x,1	1,1	1,1	1,1	4,7	0,1	4,0
2.	x,1	1,1	x,1	0,1	1,1	1,1	1,1	1,1	5,8	1,0	2,0
3.	0,0	1,1	x,1	0,0	0,1	1,0	0,1	1,1	3,5	4,3	1,0
4.	1,1	0,0	1,1	0,1	1,1	1,1	1,1	1,x	6,6	2,1	0,1
5.	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	0,1	1,1	1,1	7,8	1,0	0,0
6.	1,1	1,1	0,1	0,1	x,1	1,1	1,1	1,1	5,8	2,0	1,0
7.	1,1	1,1	1,1	0,0	1,1	1,1	1,1	1,1	7,7	1,1	0,0
8.	1,1	1,1	x,1	x,1	1,1	0,1	1,1	1,1	5,8	1,0	2,0
9.	1,1	0,1	x,1	0,1	1,1	0,0	0,1	1,1	3,7	4,1	1,0
10.	1,1	0,0	x,1	x,x	1,1	0,x	1,1	1,1	4,5	2,1	2,2
11.	1,1	x,1	x,1	0,x	1,1	0,1	1,1	1,1	4,7	2,0	2,1
12.	1,1	0,0	0,0	x,x	0,1	x,x	1,1	0,1	2,4	4,2	2,2
13.	0,1	0,x	0,1	x,1	1,1	1,1	1,1	1,1	4,7	3,0	1,1
14.	x,1	0,1	0,1	0,1	1,1	0,0	1,1	1,1	3,7	4,1	1,0
15.	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,0	1,1	1,1	8,7	0,1	0,0
16.	1,1	0,0	x,1	0,0	1,1	1,1	x,1	1,1	4,6	2,2	2,0
17.	1,1	0,0	0,1	0,0	x,1	1,1	1,1	x,1	3,6	3,2	2,0
18.	1,1	0,1	x,1	x,1	1,1	0,1	1,1	1,1	4,8	2,0	2,0
19.	x,1	0,0	x,1	0,0	1,1	0,0	1,1	1,1	3,5	3,3	2,0
20.	1,1	1,1	0,0	0,0	1,1	0,0	1,1	0,1	4,5	4,3	0,0
21.	1,1	1,0	1,1	0,0	1,1	1,0	1,1	1,1	7,5	1,3	0,0
22.	1,0	1,1	x,1	x,0	1,1	0,0	1,1	1,1	5,5	1,3	2,0

23.	1,1	1,1	0,1	0,1	1,1	1,1	1,1	1,1	6,8	2,0	0,0
24.	1,1	0,0	x,0	0,0	1,0	0,0	1,1	1,x	4,2	3,5	1,1
25.	1,1	0,1	0,0	x,0	1,1	1,1	1,1	1,1	5,6	2,2	1,0
26.	1,1	x,1	x,1	x,0	1,1	1,1	1,1	1,1	5,7	0,1	3,0
27.	1,1	1,1	x,0	x,0	1,1	0,1	1,1	1,x	5,5	1,2	2,1
28.	1,1	1,1	x,1	x,1	1,1	1,1	1,1	1,1	6,8	0,0	2,0
29.	1,1	x,1	x,1	0,1	1,1	1,1	1,1	1,1	5,8	1,0	2,0
30.	0,1	0,0	x,1	0,1	1,1	0,1	1,1	1,1	3,7	4,1	1,0
31.	1,1	0,0	x,x	x,x	x,1	1,0	1,1	x,1	3,4	1,2	4,2
1	25,29	13,20	5,25	2,14	25,30	17,19	28,31	27,28	142,196		
0	3,2	14,10	8,5	17,13	2,1	13,10	2,0	2,0		61,41	
x	3,0	4,1	18,1	12,4	4,0	1,2	1,0	2,3			45,11

Tabla 7.8

Se aprecia una mejora significativa en todos los ítems del Pretest al Postest en el planteo y la resolución de ecuaciones. Igualmente disminuye el número de ítems que dejan sin abordar.

En particular, los ítems 3 y 4 de los analizados, que en Pretest fueron resueltos favorablemente sólo por 5 y 2 alumnos respectivamente, en el Postest las respuestas correctas han sido de 25 y 14 alumnos. El ítem 3 pide resolver una ecuación de la forma A x + B = C x + D, y el ítem 4 requiere una conversión de registros desde el lenguaje habitual al lenguaje formal, previo a la resolución de la ecuación.

Los alumnos, a excepción del alumno número 24, responden correctamente en el Postest el 50 % o más de las preguntas analizadas.

7.4.5. Entrevistas individuales

Como ya se indicó los alumnos estaban seleccionados y por tanto se hizo la aplicación de la entrevista con los protocolos que se habían preparado al respecto para las dos últimas sesiones, las dos primeras eran relativas a expresiones algebraicas y están comentadas en el Capítulo 5.

Igualmente, en el Capítulo 3 se señaló que primero se realizó la entrevista a tres alumnos a final del curso 92-93 según se terminó la instrucción. Los otros seis alumnos fueron entrevistados al comienzo del curso 93-94. Asimismo se explicitó que las entrevistas eran individuales y de carácter semi-estructurado así como que la duración de las mismas oscilaba entre 20 y 30 minutos cada una.

<u>Entrevistas primera fase:</u>

Los protocolos de estas tercera y cuarta sesiones también se organizan en torno a las grandes categorías de tipo operacional y conceptual de habilidades cognitivas.

En la tercera sesión (primera de ecuaciones), el protocolo se centra en la conversión de registros tanto para plantear como para resolver ecuaciones lineales de una incógnita haciendo uso del S.R.E.B. En el caso del “planteo” de las mismas el enunciado se da en lenguaje habitual, y en la “resolución” el objetivo es resolver sencillas ecuaciones a partir de la representación formal algebraica y del S.R.E.B.

Se trata de trabajar con igualdades de cantidades expresadas con números y símbolos y con el S.R.E.B.; se entiende que el valor de lo que está en cada platillo es la suma de los valores de lo allí representado. Asimismo, iniciar al lenguaje simbólico con esta representación, pasar de un enunciado verbal a la representación simbólica, plantear ecuaciones sencillas y resolverlas. Se trata también de desarrollar la capacidad de "expresar" simbólicamente determinadas relaciones y procesos de carácter general y adquirir destreza en "manipular" dichas expresiones simbólicas para obtener otras nuevas, equivalentes.

En el protocolo de la <u>cuarta sesión</u> (segunda de ecuaciones), como en la sesión anterior, en la "conversión de registros" se trata de pasar desde el lenguaje habitual al S.R.F. algebraico a través de otro sistema de representación, en este caso el S.R.V.G. que hemos establecido desde el principio de nuestra investigación, y en la "resolución", el objetivo es resolver sencillas ecuaciones planteadas en el S.R.F. algebraico y también a través del S.R.V.G. Se intenta igualmente verificar el comportamiento de los niños, después de la instrucción.

Los protocolos para ecuaciones en la primera fase (anexo 16, primera fase) no fueron los mismos para los tres alumnos que codificamos como A, Z e I.

La relación entre las fichas de ecuaciones del protocolo de esta primera fase y las habilidades cognitivas se presenta en la tabla siguiente (tabla 7.9). Se indica en la primera columna el número general de la ficha en el protocolo, y en las restantes los códigos que corresponden a las habilidades cognitivas para ecuaciones.

F	**O_1**	**O_2**	**O_3**	**O_4**	**O_5**	**O_6**	**C_1**	**C_2**	**C_3**	**C_4**	**C_5**	**C_6**	**C_7**
18								x				x	x
19								x	x		x	x	x
20								x	x		x	x	x
21								x	x		x	x	x
22											x	x	x
23											x	x	x
24	x	x	x	x							x	x	x
25	x		x	x							x	x	x
26	x	x	x	x							x		x
37								x	x		x	x	x
38								x	x		x	x	x
39							x			x		x	x
40	x	x	x	x						x		x	x
41							x			x		x	x
45								x	x		x	x	x
46										x		x	x
47							x		x	x		x	x
48	x			x						x		x	x
49							x			x		x	x

Tabla 7.9

Si se observa la tabla los números de la primera columna no son consecutivos, debido a que los números ausentes corresponden a actividades relacionadas con expresiones algebraicas, de las cuales se expresaron los detalles ya en el Capítulo 5.

Este protocolo comprende actividades cuya finalidad es observar las habilidades que presentan los entrevistados al enfrentarse con la conversión de registros y con el planteo y resolución de ecuaciones sencillas.

En la **conversión de registros** aparecen actividades de conversiones entre los sistemas de representación formal (S.R.F.) y el de la balanza (S.R.E.B.) así como entre la R.F. y el sistema de representación visual geométrico (S.R.V.G.). Asimismo las conversiones entre el lenguaje habitual y los S.R.V.G. y S.R.E.B. y la R.F.

En el **planteo de ecuaciones** se diseña un enunciado verbal.

En la **resolución de ecuaciones lineales** se utilizan básicamente dos registros el de la balanza y el del S.R.V.G.

La finalidad principal de esta observación, mediante entrevista individual a posteriori de las pruebas pretest, de la instrucción y del postest, es la de llegar a detectar habilidades cognitivas tanto que se consideren han sido causadas por la instrucción como aquellas que se poseían y han sido corroboradas en la entrevista.

La resolución de ecuaciones lineales de la forma $A x + B = C x$ y $A x + B = C x + D$, con A, B, C y D números dados, en donde es necesario operar la incógnita, puede ser considerada como una de las primeras incursiones en el terreno de álgebra simbólica, propiamente dicha, el cual se separa de la aritmética en, al menos, dos aspectos esenciales. Por un lado, el método de resolución pasa de requerir sólo de operaciones aritméticas sobre los datos de la ecuación, en lo concerniente a la relación entre las operaciones elementales y sus inversas, a transferir dicha operatividad a otros objetos, como las incógnitas (las cuales, en este momento, son sólo la representación de números desconocidos. Esto lleva implícito habilidades en el uso de las reglas de transformación (O_1), en los procedimientos de resolución (O_2, O_3, O_4 y O_5) y si procede en la comprobación e interpretación de las soluciones de la ecuación (O_6). Por otro lado, el signo igual pasa de ser interpretado como algo que relaciona las operaciones aritméticas realizadas (miembro izquierdo, en general) con el resultado de las mismas (miembro derecho, en general), a tener una connotación “más algebraica”, en el sentido de que hay ocurrencias de la incógnita en ambos miembros y así, las expresiones que liga (el signo igual) son más generales y “equivalentes” (Kieran, 1981). Tradicionalmente en la enseñanza, esta transición no es considerada y se hace la extensión del método aritmético de inversión de las operaciones a los casos más generales, sin considerar las posibles dificultades que puedan surgir en esta transferencia. La entrevista individual pretende poner de manifiesto dichas dificultades, tanto en la señalado anteriormente como en la etapa previa a la resolución que implica tomar en consideración las siete categorías de habilidades cognitivas de carácter conceptual para las ecuaciones lineales con una incógnita:

C_1 Conversiones del lenguaje habitual al Sistema de Representación Visual Geométrico.

C_2 Conversiones del lenguaje habitual al Sistema de Representación del Equilibrio con la Balanza.

C_3 Conversiones del lenguaje habitual al lenguaje algebraico.

C_4 Conversiones del lenguaje algebraico al Sistema de Representación Visual Geométrico.

C_5 Conversiones del lenguaje algebraico al Sistema de Representación del Equilibrio con la Balanza.

C_6 Reconocimiento de expresiones equivalentes expresadas en distintos lenguajes.

C_7 Interpretación y comprensión del signo "=".

Teniendo en cuenta la finalidad y los propósitos particulares de la observación, se procede al diseño de los contenidos de la entrevista.

Como se mencionó anteriormente los ítems que conforman el contenido básico de la entrevista están girando en torno a las habilidades cognitivas de carácter operacional y conceptual para el tratamiento de las ecuaciones.

Las características principales y los propósitos de cada ficha se van a resumir en las tablas siguientes (tablas 7.10 y 7.11), a la vez que se relacionan con las habilidades a detectar con las mismas.

Característica (3ª sesión)	**Nº general ficha**
Conversión S.R.E.B. a S.R.F.	18 y 23
Conversiones de Lenguaje Habitual a S.R.E.B. y a la R.F.	19, 20 y 21
Conversión de la R.F. a S.R.E.B.	22 y 24
Enunciado verbal, para planteo	25
Resolución con S.R.E.B	24
Resolución en el S.R.F.	24 y 26

Tabla 7.10

Característica (4ª sesión)	**Nº general ficha**
Conversiones de Lenguaje habitual a S.R.V.G. y S.R.F.	39, 41, 47 y 49
Conversión de S.R.F. a S.R.V.G.	40, 46 y 48
Resolución con S.R.V.G.	40 y 48
Resolución con S.R.F.	40 y 48

Tabla 7.11

El contenido de las fichas que integran el protocolo de las entrevistas está expresado literalmente en el anexo 16, parte 1ª.

Los criterios de elección del grupo a entrevistar ya se indicaron en el Capítulo 3. Como se recordará para la experiencia del 92-93, del grupo de los

9 alumnos seleccionados para la entrevista se aplicó en Junio del curso 92-93, a las alumnas A e I y al alumno Z.

Se hicieron 12 entrevistas en total, 4 por cada alumno (incluyendo las dos de expresiones algebraicas, ya comentadas en el Capítulo 5 y las dos de ecuaciones), con una duración que varía entre 20 y 30 minutos se registraron en vídeo y se recopilaron además todas las hojas utilizadas por el alumno y el entrevistador.

Los seis alumnos restantes se entrevistaron en Septiembre, al comienzo del curso escolar siguiente. Para ellos se organizaron otras tantas entrevistas, o sea 24 sesiones, 4 por cada uno de los 6 alumnos.

Con relación a la primera aplicación de la entrevista con contenido de ecuaciones realizada en Junio, las fichas indicadas en las tablas anteriores fueron suministradas a las dos niñas y al niño, ya indicados, pero no de manera uniforme, según muestra el cuadro general de las dos sesiones, que son las 3ª y 4ª, ya que las primera y segunda se referían a expresiones algebraicas.

En resumen, los protocolos elaborados para las entrevistas con A, I y Z en las tercera y cuarta sesiones son los que se recogen en la siguiente tabla:

	18	19	20	21	22	23	24	25	26	37	38	39	40	41	45	46	47	48	49
A	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	3.10			4.3	4.7	4.4		4.1	4.5	4.6	4.2
Z							3.4		3.5	3.2	3.3	4.2	4.3		3.1	4.1			
I	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.8	3.7				4.3	4.5	4.6		4.1	4.7	4.4	4.2

Tabla 7.12

7.4.6. Análisis de datos

Consideramos a continuación de manera resumida algunas respuestas dadas por las dos alumnas (A e I) y recogidas en las transcripciones de los protocolos (anexo 17), no así del tercer alumno (Z) que se hace en el estudio biográfico.

La alumna codificada con una **I e**n la ficha **18,** entiende el equilibrio de la balanza como expresión de miembros iguales. Comprende la ley de monotonía de la suma y quita a cada platillo 1 botella y 3 vasos. Asimismo relaciona directamente el quitar en la balanza con restar en álgebra. A la pregunta de la entrevistadora de qué representa la igualdad, si una expresión o una ecuación, contesta: “una expresión”.

No interpreta las pesas como tales, sino como si fueran “vasos” como unidades y usa “v” como unidad.

Resuelve la ecuación sin que el enunciado lo pidiese.

En la operatividad básica utiliza la ley de monotonía de la suma y suma opuestos de dos términos simultáneamente, en los dos miembros:

$$2x + 3v = x + 7v$$

$$2x + 3v - x - 3v = x + 7v - x - 3v$$
$$x = 4v$$

En la ficha **23,** vuelve a interpretar las pesas como en la ficha 18 y no pone escuetamente el número de pesas sino que pone como “unidad de pesas”, “p”.

En la ficha **19,** en la primera actividad usa: $\underline{x + 3v = 9}$, con lo cual “3v” aparece como si fuera un término alfanumérico y representa 3 kilos, al igual que el 9, “9 kilos”.

En la segunda actividad usa como código personal “1 duro = 0” para representar 5 pesetas y no verse obligada a dibujar tanto.

Al aparecer en el enunciado los vocablos “pins” y “pesetas” no pone unidades a las pesetas, porque usa la variable “p” para “pin”.

En el diálogo sobre la ficha **20,** se le pregunta por el significado de las incógnitas y a partir de ahí expresa por escrito literalmente cuál es el significado de ellas en cada una de las actividades.

Para representar las pesas lo hace con dibujos o con números, incluso usando en el mismo ejercicio, las dos representaciones.

No tiene sistematicidad en las representaciones, unas veces pone “k” para expresar kilos y otras, no pone nada. Algunas veces opera con los números opuestos y otras, no.

En la ficha **21,** no mostró dificultad.

Al preguntarle si sabe si existen pesas de 9 kilos, 10 kilos, 11 kilos, etc., contesta que “nunca ha visto una balanza”, sino electrónica.

En la ficha **22,** acepta sin dificultad los símbolos propuestos en el enunciado para hacer la conversión de lenguajes, que realiza correctamente desde el S.R.F. al S.R.E.B.

En la ficha **24,** hace la conversión del S.R.F. al lenguaje habitual correctamente, cuando se le ha preguntado. Pone a “x” el coeficiente 1 que estaba implícito y luego realiza las transformaciones sumando opuestos. Al final vuelve a usar “v” como unidad.

En la ficha **25** reconoce la ecuación expresada en el S.R.F. que ya había trabajado en el S.R.E. con la balanza y hace bien la operatividad básica al resolverla.

Resumiendo se puede decir que a la alumna I en la 3ª sesión se le plantearon todas las fichas donde intervenía la representación del S.R.E.B: 18- 25.

Como hemos indicado las seis primeras fichas son de conversión de registros, sin embargo en la primera de ellas, la alumna tiene necesidad de hallar la solución de la ecuación.

Las habilidades de carácter conceptual son buenas en la conversión de registros tanto en las codificadas con C_2 como con C_3 y C_5. Asimismo reconoce expresiones equivalentes que muestran la habilidad C6 y no muestra dificultad en la interpretación del signo “=” (C_7).

Utiliza registros personales como “v” como unidad de peso y “1 duro = 0” para representar 5 pesetas, en el platillo de la balanza.

Pone a “x” el coeficiente 1 que estaba implícito en la expresión dada.

La representación de las pesas la hace con números o con dibujos, incluso con ambas representaciones en el mismo ejercicio.

No utiliza siempre la misma letra para la incógnita, suele usar la primera letra del objeto referente, sin embargo sí respeta los símbolos propuestos en los enunciados.

Como no expresa espontáneamente por escrito, el significado de las incógnitas, en el diálogo sobre la ficha **20** se le pregunta por ello y a partir de ese momento siempre explicita por escrito, literalmente, cuál es el dignificado de ellas en cada una de las actividades.

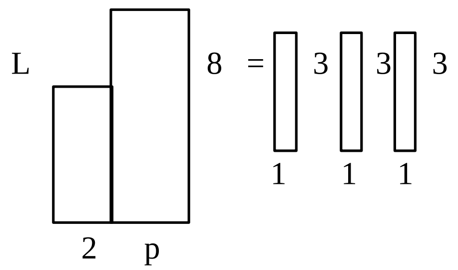
En cuanto a las habilidades de carácter operacional mostradas en las dos fichas restantes (24 y 25), también hay que expresar que conoce la sintaxis del S.R.F. y el del S.R.E.B., por lo cual se reconoce en la alumna habilidad en el uso de las reglas de transformación tanto en transformaciones en cada miembro de la igualdad independientemente como en transformaciones equivalentes en los dos miembros de la igualdad (O_1).

En los procesos de resolución de las ecuaciones de la forma A x + B = C x + D (O_4), también se puede observar el uso de la operación inversa y la aplicación de la ley de monotonía de la suma, sin embargo para despejar, al final, no utiliza la ley de monotonía del producto sino la transposición de términos, incluso en las ecuaciones de la forma A x = B (O_3).

En la sesión 4ª de la alumna I, se intentó la aplicación del resto de las fichas indicadas en la tabla 7.12: 39, 41, 46, 47 y 49 de conversión de registros y las fichas 40 y 48 de resolución de ecuaciones, pero al tener la alumna tanta dificultad fue imposible trabajar las fichas 41 y 47.

Las respuestas del tratamiento con el S.R.V.G. es menos positiva que con el S.R.E.B., ya que definitivamente no llegó a captar el rectángulo como unidad para representar un término de una expresión algebraica. Sin embargo la dificultad es menor cuando se trata de hacer la conversión desde la R.F. al S.R.V.G. (C_4) que desde el lenguaje habitual al S.R.V.G. (C_1).

La utilización de registros personales tan específicos como “letras cualesquiera” para expresar unidades se supone le planteará problemas a posteriori, cuando intente resolver las ecuaciones si no reconoce tales letras como unidades pues le podrán parecer nuevas incógnitas y como consecuencia la existencia de más incógnitas que ecuaciones. Unas veces utiliza distintas letras para expresar lo mismo (disemia o sinonimia) y otras, utiliza una misma letra para expresar cosas distintas (polisemia); así por ejemplo, usa la misma letra para expresar pesetas (p) y precio total (p) y muestra que (ficha 39) “el precio de 2 lápices más 8 pesetas es 3 veces el precio de un lápiz”, se representa geométricamente:



y para la expresión algebraica, escribe: 2 L + 8 P = 3 P

Esta alumna usa el signo "=". siempre entre los rectángulos que representan los primero y segundo miembros.

No tiene en cuenta la proporcionalidad al representar las longitudes correspondientes a los distintos números: 1, 2, 4 y toma unidades diferentes en el mismo ejercicio, pero dialogando con la entrevistadora, se da cuenta y rectifica.

En cuanto a la resolución de ecuaciones, al principio no se da cuenta que se pide "resolución" y no "representación" de la expresión de la ecuación.

Presenta más dificultad en el S.R.V.G. que en el propio S.R.F.

En la resolución algebraica de ecuaciones de la forma: A x + B = C x (O_4) y A x + B = C (O_2), no usa la ley de monotonía de la suma ni del producto sino estrictamente la transposición de términos.

En el caso de ecuaciones de la forma A x + B = C x (O_4), primero representa la situación en el S.R.V.G., luego representa la misma situación en el S.R.F. y luego sigue haciendo las transformaciones en el S.R.F. No presenta concordancia con las transformaciones en un registro y sus conversiones en el otro registro. Igualmente al resolver la misma ecuación en el S.R.V.G. y en el S.R.F. algebraico, la solución que le da es distinta y no capta el error, después de haber expresado oralmente que la solución tiene que ser la misma (O_6).

Al darle a elegir para resolver entre una ecuación de la forma: A x = B x + C y otra de la forma A x + B = C, elige la segunda, porque "le parece más fácil porque tiene menos equis".

La operatividad básica es errónea al aparecer coeficientes negativos y da como resultado de "-2x + x", "-3x", (O_5).

En las entrevistas con la alumna **A** se pudo ampliar más el número de fichas utilizadas del protocolo dada su comprensión general es mucho más profunda que la de la alumna anterior.

En la ficha **18,** desde el comienzo asigna significado a las variables que utiliza.

A partir de la ficha **19,** mantiene la misma variable utilizada para las pesas en toda la entrevista (b), pero en cada ejercicio la variable implica distinto número de kilos, según el enunciado. El dibujo que usa es también diferente para cada nº de kilos.

No muestra problema alguno en la conversión de registros entre las diferentes representaciones. Resuelve las ecuaciones sumando opuestos a los dos miembros y multiplicando por inversos los dos miembros al comenzar a trabajarlas y al final, ya directamente escribe el resultado de la suma de opuestos, sin explicitar la operación realizada.

Dice: “primero resuelve algebraicamente, lo que está sumando pasa restando, después de haber quitado denominadores”, situación que ni siquiera se había planteado.

Relaciona “restar” a los dos miembros con “quitar” en la balanza, y el equilibrio con el caso en que las situaciones son equivalentes.

En algún momento expresa que le “estorban” dos cantidades desconocidas y entonces recuerda que “en una igualdad si se suma, resta, multiplica o lo que sea, siempre que sea lo mismo a las dos, no pasa nada”.

Cuando obtiene la expresión “2 x = 6”, expresa “por lógica si aquí hay dos y aquí seis, sería la mitad”.

El álgebra le da seguridad, según ella, pero le sorprende la frase “la suma de un número…” en un ejercicio, porque no lo ha acabado de leer, sin embargo es interesante para considerar la profundidad con que ha captado que un número sólo no se puede sumar…

Al preguntarle si usa algún registro como el S.R.E.B. u otro similar, contesta: “no, porque ya sé cómo se pasa”…

En la 4ª y última entrevista, al comienzo no especifica por escrito el significado de cada variable, pero luego, sí.

En la resolución de ecuaciones no trabaja simultáneamente los dos sistemas de representación.

Aplica la ley de monotonía de la suma con los números pero no con los términos que contienen las letras que los pasa directamente al miembro contrario, con las operaciones opuestas o inversas sin explicitar.

En el diálogo, reconoce que hay un rectángulo por cada término de las expresiones algebraicas que se esté representando.

Asimismo reconoce explícitamente la conversión de registros desde el S.R.F. al S.R.V.G.

Tiene algún problema con la semántica del lenguaje habitual, no conoce el significado del vocablo “incrementar”.

Para dividir un segmento en 4 partes iguales en un dibujo, divide primero por dos y luego, de nuevo, por dos.

Comprende perfectamente que la equivalencia entre áreas de rectángulos implica la equivalencia entre los dos miembros de una ecuación.

Explicita al expresar un término con un rectángulo, por ejemplo x $\underset{2}{\boxed{}}$ que podría llegar a ser un cuadrado dependiendo de lo que valga la “x”.

Es capaz de representar con “x” no sólo el valor unitario sino dos veces el valor de la unidad. Por ejemplo,

Relaciona espontáneamente la sintaxis del S.R.E.B. con la sintaxis del S.R.V.G.

Tiene claro que el área del rectángulo por ser un área, no puede tener un valor negativo y autodescubre en el S.R.V.G. que restar es tachar parte del área y que la expresión del término negativo es un rectángulo "tachado" o rayado.

Tiene también claro el concepto de solución de una ecuación y que ha de ser la misma, trabajando en el S.R.F. y en el S.R.V.G.

Reconoce ecuaciones equivalentes.

Tiene actitud positiva y valora los S.R.E.B. y el S.R.V.G. en especial, si no sabes "hacer" las ecuaciones: "te puede servir para…, aunque no se sepa álgebra es sencillamente hacer unas reglas como la balanza, como si estuvieras pesando, ¿no?…".

Resumiendo en las fichas planteadas par la resolución de sus actividades, donde interviene el S.R.E.B., no muestra problema en la conversión de lenguajes (C_2), (C_3), (C_5), (C_6) y (C_7), ni tampoco en la resolución de ecuaciones, contextualizadas o no. Al hacer la conversión de registros desde el habitual al S.R.E.B. y al S.R.F. lo hace primero representando en la balanza y luego en el S.R.F., sin embargo a la hora de resolver las ecuaciones hace primero el proceso en el S.R.F. y luego en la balanza. La operatividad es absolutamente correcta, utilizando indistintamente para los procesos de resolución de las ecuaciones, transformaciones en cada miembro de la igualdad independientemente o transformaciones equivalentes en los dos miembros de la igualdad (O_1). Usa asimismo la ley de monotonía de la suma, del producto y también transposición de términos, sin estar estos procesos ligados a ninguna forma de la ecuación en particular (O_2), (O_3) y (O_4).

Siempre introduce la solución de la ecuación en un recuadro y al dibujar la balanza pone el signo igual entre los dos platillos.

En la tercera sesión también se dialogó con esta alumna con respecto a una ficha en que se solicitaba hiciera la representación simultánea en el S.R.V.G., en el S.R.F. y con la representación del sistema visual/formal del cuadro de doble entrada que llamamos de visualización simplificada de la expresión "(a + 5). b", y no tuvo la más mínima duda.

En relación al resto de las fichas en que las actividades precisan del S.R.V.G. de la tabla anterior, que se aplicaron en la cuarta y última sesión, tampoco tuvo dudas ni con la conversión de lenguajes ni con la resolución de las ecuaciones. Al igual que en la sesión anterior no trabaja simultáneamente los dos sistemas de representación sino primero halla la solución en el S.R.F. y luego en el S.R.V.G. Utiliza la ley de monotonía de la suma y la transposición de términos pero no le ley de monotonía del producto. Siempre señala con una "rayita" las unidades, cuando se trata de una medida numérica.

<u>Entrevistas segunda fase:</u>

En el mes de Septiembre al inicio del curso siguiente 92-93 se realizó la segunda aplicación de las entrevistas, 4 sesiones para los seis alumnos restantes. Aquí sólo no referiremos a las dos últimas porque las anteriores han sido comentadas en el Capítulo 5.

Las características principales de los propósitos de cada una de las sesiones fueron: En la **tercera sesión**, primera de ecuaciones, el trabajo se basó en el planteo y resolución de ecuaciones utilizando el S.R.E.B. haciendo las conversiones de registro correspondientes. Al final de esta sesión se propusieron ecuaciones para resolver dejando libertad para usar los distintos sistemas de representación. En la última sesión, la **cuarta**, se intentó presentar para su posterior análisis, una serie de ítems para plantear y resolver ecuaciones convirtiéndolas al S.R.V.G., utilizando rectángulos en el que cada uno de ellos representa un término de la expresión algebraica correspondiente. Así planteado, la situación obligaba a comparar áreas, producir nuevas ecuaciones en el proceso de resolución y en algún caso, la verificación de la solución. En los dos últimos ítems se solicitó de los entrevistados expresar a qué registros recurrirían en esta iniciación al álgebra si tuvieran que optar por uno solo de los sistemas de representación.

Se muestra a continuación la relación de las fichas de las sesiones tercera y cuarta con las habilidades del Sistema Categorial (anexo 16), indicando en las tres primeras columnas las referencias al número de la sesión y la segunda al número de la ficha.

Nº S	**Nº F**	**O_1**	**O_2**	**O_3**	**O_4**	**O_5**	**O_6**	**C_1**	**C_2**	**C_3**	**C_4**	**C_5**	**C_6**	**C_7**
3ª	**1**	X										X	X	X
	2								X	X		X		X
	3											X	X	
	4												X	X
												X	X	
													X	X
		X	X		X							X	X	X
	6	X	X	X	X		X							
		X	X	X	X		X			X			X	X
4ª	**1**												X	
	2							X			X		X	X
	3										X		X	X
	4												X	X
											X		X	X
	5	X	X	X	X	X	X	X						X
		X	X	X	X		X			X			X	X
	6	X	X	X	X		X	X	X	X			X	X

Tabla 7.13

La última pregunta de la sesión cuarta de la entrevista se expresa así: “ahora intenta expresar a qué sistema de representación recurrirías si tuvieras que elegir uno (balanza, geométrico, algebraico) para resolver los ejercicios”. “¿Por qué a ése?

Los tópicos en este nuevo protocolo también están en torno a la

conversión de registros, **planteo de ecuaciones** y **resolución de ecuaciones** con los mismos registros que en Junio, eso es, con el S.R.E.B. y el S.R.V.G.

Este **protocolo** comprende en su **tercera sesión** actividades extraídas de los cuadernos trabajados en clase, a excepción de una actividad que se agregó en la primera ficha sexta. La referencia se hace en la segunda columna de la siguiente tabla:

Fichas Tercera Sesión Entrevista	Fichas cuaderno de clase	Cuad. III	Cuad. IV
1 Actividad 1.1 Actividad 1.2 Actividad 1.3	2, Actividad 1 3, Actividad 2 5, Actividad 2	X X X	
2 Actividad 1 Actividad 2 Actividad 3	10, Actividad 1 11, Actividad 1 10, Actividad 2	X X X	
3 Actividad 1	13, Actividad 1	X	
4, Actividad 1 Actividad 2	14, Actividad 1 14. Actividad 2	X X	
5, Observación Actividad 1 Actividad 2	3, Actividad 1 3, Actividad 2 4, Actividad 2		X X X
6, Actividad 1.2 Actividades 2, 3, 4 y 5 (nuevas)	5, Actividad 1 (a, b, c, e, f, g)		X

Tabla 7.14

En su **cuarta sesión** comprende actividades también extraídas de los cuadernos de clase, a excepción de una actividad que se agregó de ampliación.

La referencia se hace en la segunda columna de la siguiente tabla:

Fichas Cuarta Sesión Entrevista	Fichas cuaderno de clase	Cuad. III	Cuad. IV
1	15	X	
2, Actividad 1 Actividad 2 Actividad 3	17, Actividad 2 18, Actividad 2 19, Actividad 3	X X X	
3, Actividad 1	21, Actividad 1	X	
4, Actividad 1 Actividad 2	22, Actividad 1 Actividad 2	X	
5, Actividad 1 Actividades 2, 3 y 4 (nuevas)	8, Actividad 1		X
6, Actividades nuevas			

Tabla 7.15

El propósito de las entrevistas es el mismo que el de Junio o sea detectar habilidades cognitivas de carácter operacional y conceptual, es decir, observar las habilidades que presentan los entrevistados al enfrentarse con la conversión de registros y con el planteo y resolución de ecuaciones sencillas.

El contenido del protocolo de las entrevistas (anexo 16, parte 2ª) ya se indicó que fue nuevo y único para todos.

Las actividades que conforman el nuevo protocolo están también integradas en torno al sistema de representación que han de utilizar, o bien el de la S.R.E.B. o del S.R.V.G.

Las características principales y los propósitos de cada una de las sesiones y sus fichas correspondientes se describen a continuación.

La ficha **1** de la **sesión tercera** es un conjunto de tres actividades de conversión de registros. En la primera de ellas, tienen los alumnos q

ue hacer una observación de una situación en la balanza y han de escribir la igualdad numérica expresada en la misma. En la segunda se trata de explicar la situación expresada en la balanza y también completar la igualdad numérica correspondiente. Por último, en la tercera, se utilizan objetos y representaciones de pesas iguales sin asignarle ninguna cantidad concreta.

En la ficha **2** hay tres actividades de conversión de registros. Se trata de representar en el registro del S.R.E.B. y en el S.R.F., tres situaciones sencillas, dadas con enunciado verbal. La primera de ellas da lugar a una ecuación donde no hay que operar con la incógnita y en las segunda y tercera; sí. la segunda da lugar a una ecuación del tipo Ax + B = C x y la tercera, A x + B = C x + D.

La ficha **3** incluye actividades de conversión desde el S.R.E.B. al S.R.F.

La ficha **4** está formada por dos actividades, una primera de observación y una segunda de aplicación de la observación consistente en hacer una conversión de registros desde el S.R.F. al S.R.E.B.

La ficha **5** presenta un ejemplo de resolución yuxtaponiendo el S.R.E.B. y el S.R.F. Posteriormente, se proponen dos actividades de resolución con ambos métodos, una donde hay que operar con la incógnita, y otra, no.

La ficha **6** incluye cinco actividades, la primera de las cuales se presenta expresada en el registro formal y las otras cuatro, mediante enunciado verbal. Aquí no se sugiere método de resolución.

La ficha **1** de la **sesión cuarta,** es un ejemplo descriptivo de la conversión de registro desde el lenguaje habitual al S.R.V.G. y al S.R.F. y dos ejemplos de aplicación del mismo.

La ficha **2,** es una aplicación a tres actividades del ejemplo de la ficha anterior.

La ficha **3,** incluye actividades de conversión desde el S.R.V.G. al S.R.F.

La ficha **4,** está formada por dos actividades, una primera de observación y una segunda de aplicación de la observación consistente en hacer una conversión de registros desde el S.R.F. al S.R.V.G.

Las fichas **5 y 6,** son de resolución de ecuaciones.

La ficha **5,** está formada por 4 actividades: la primera, dando la ecuación expresada en el S.R.F. y las tres restantes, formadas por enunciados verbales.

La ficha **6,** con tres actividades de enunciado verbal, se diferencia de la anterior en que se especifican los posibles registros a utilizar: S.R.F., S.R.V.G., S.R.E.B. o varios a la vez. En esta ficha al final, se pide que especifiquen qué ecuaciones son equivalentes.

Las fichas 5 y 6 tenían opción a resolverlas con la balanza.

Las características principales y los propósitos de cada ficha se van a resumir en las tablas siguientes (tablas 7.16, 7.17), a la vez que se relacionan con las habilidades a detectar con las mismas.

Características (3ª sesión)	**Nº general ficha**
Conversión S.R.E.B. a S.R.F.	F.1 actividad 1.3 y F. 3
Conversiones de Lenguaje habitual a S.R.E.B. y S.R.F.	F. 2
Conversión de S.R.F. a S.R.E.B.	F. 4
Conversión del S.R.E.B. al S.R.F. aritmético	F. 1 actividad 1.1 y 1.2
Resolución con S.R.E.B.	F.5 y F. 6
Resolución con S.R.F. algebraico	F.5 y F. 6

Tabla 7.16

Características (4ª sesión)	**Nº general ficha**
Conversiones de Lenguaje habitual a S.R.V.G. y S.R.F.	1 y 2
Conversión de S.R.F. a S.R.V.G.	4
Conversión del SRVG al S.R.F.	3
Resolución con S.R.V.G.	5 y 6
Resolución con S.R.F.	5 y 6

Tabla 7.17

El grupo entrevistado en esta nueva aplicación es el de los mismos seis alumnos con los que se quedó pendiente el curso anterior.

Se hicieron 24 entrevistas en total, 4 por cada alumno (incluyendo en el total las de expresiones algebraicas; para ecuaciones se realizaron dos de ellas por alumno), con una duración que varía entre 20 y 30 minutos y se registraron en vídeo y se recopilaron además todas las hojas utilizadas por el alumno y el entrevistador.

En Septiembre las fichas de la tabla 7.18 fueron suministradas a las tres niñas (codificadas con A_1, A_2 y A_4) y tres niños (codificados con A_3, A_5 y A_6), pero no de manera uniforme, según muestra el cuadro general en dos sesiones, que son las 3ª y 4ª, ya que las primera y segunda se referían a expresiones algebraicas.

Como se puede observar en dicha tabla (A_i representa a cada uno de los seis alumnos), el distinto ritmo de los alumnos y la misma duración aproximada de las sesiones de las entrevistas, sólo ha permitido abordar las fichas que se indican en ella.

Se muestran las fichas reales trabajadas en las dos sesiones, si aparece en la casilla un “sí” es que se han abordado todos los ítems de la ficha.

Nº S	**Nº F**	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**
3ª	**1**	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
	2	Sí	1,2	Sí	Sí	Sí	Sí
	3	Sí	a, e	a, c	Sí	a, d	Sí
	4	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
		Sí	Sí	1 (Sí) 2 (a)	Sí	Sí	Sí
		Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
		Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
	6	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
		Sí	Sí	3	Sí	2,4,5	Sí
4ª	**1**	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
	2	Sí	Sí	1,2	Sí	Sí	Sí
	3	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
	4	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
		a	Sí	a	a	Sí	a, c
	5	Sí	Sí	Sí	a, b, c	Sí	Sí
		Sí	Sí	3	2	2,3	Sí
	6	Sí	2		Sí	Sí	Sí

Tabla 7.18

Análisis de datos de la Sesión 3ª

En la **primera entrevista** de Septiembre de 1993, la alumna codificada con **A**$_{\mathbf{1}}$, **e**n la actividad 1.1 de la **ficha 1,** observa la situación. La entrevistadora le pregunta por qué se puede afirmar que los pesos son iguales y contesta “porque la balanza está recta”. Escribe la igualdad numérica correcta pero no pone unidades al resultado. Comprende perfectamente el significado de la incógnita.

En la actividad 1.2 expresa perfectamente la situación de la balanza en lenguaje habitual. Usa la misma variable para el lenguaje habitual que en el S.R.E.B., que en la igualdad numérica.

En la actividad 1.3 escribe correctamente lo que se le pide. Usa explícitamente “1” como coeficiente en “1x”. Al preguntarle qué significa la “x” dice “la botella” pero al decirle que si “la forma de la botella”, reconoce que ha querido expresar, el “peso de la botella”.

Usa “a” como expresión de “las supuestas pesas dibujadas”.

En la actividad 1 de la **ficha 2,** no entiende el vocablo “incrementado”. y lo explicita verbalmente. La entrevistadora se lo aclara.

Se ofusca en la representación y va directamente al cálculo del peso de la enciclopedia. En el diálogo con la entrevistadora cae en la cuenta que se trata de “representar” en el S.R.E B. y en la R.F., no de hallar el peso.

En la actividad 2 se muestra confusa para representar el peso de un bolígrafo ya que no se trata de representar bolígrafos. Sin embargo reconoce que el peso doble del de un bolígrafo, es lo mismo que el doble del peso de un bolígrafo.

Sin embargo no reconoce que es lo mismo el doble del peso de un bolígrafo que el peso de 2 bolígrafos y aún en el diálogo no lo puede asumir.

En la **ficha 3** siempre usa dos incógnitas. Para expresar las pesas usa “a”, “b” y “c”, y dice son el peso de las pesas, y para los objetos usa “x”, “y” y “b”, de botella.

La **ficha 4** no la hizo.

En la **ficha 5** observa con detenimiento la actividad 1.

En la actividad 2 opta por resolver primero algebraicamente y hace transposición de términos: x + 3 = 2 x; 3 = 2 x - x; intercambia miembros para dejar en el primero el que contiene el término con la incógnita con el coeficiente mayor, pero lo hace cambiando además todos los términos de signo:

$$2x + x = -3$$

Vuelve a cambiar los miembros y los signos y vuelve a explicitar el coeficiente 1:

$$3 = 1x$$

Al final, al volver a hacer el cambio de los miembros de la ecuación, cambia el signo sólo de uno de ellos, el que contiene el dato numérico.

La profesora le sugiere, al final, la conveniencia de situar el signo “=” siempre “frente” a la raya horizontal que separa los términos de la fracción.

En la actividad 3, la alumna hace primero su trabajo sobre la columna que indica el S.R.E.B. y luego en la de la expresión algebraica.

Luego la entrevistadora retrocede hacia la actividad 2 y la alumna actúa quitando en los dos platillos lo mismo, para eliminar una ´”x” de los dos miembros y le queda “3 = 1x” según la alumna expresa.

En la actividad 1 de la **ficha 6,** sólo se aborda los apartados a) y f). La forma de la ecuación es “3+x= 5”. En el apartado a) hace transposición de términos directa y despeja bien. En f), lo mismo que en a) aunque ahora la ecuación es “2x+3=5x”. Opera correctamente con los términos que contienen la incógnita y también despeja bien, pero no sabe justificar la transposición de términos.

En la actividad 2, precipitadamente, intenta hallar la solución dividiendo 36 por dos porque se debe haber quedado en la mente con el vocablo último “doble”, pero al decirle que si la primera “x” que escribió no influye, rectifica y escribe “3x=36”; “x = 36/3 = 12”.

En la actividad 3, vuelve a hacer transposición de términos y despeja la incógnita correctamente. La profesora vuelve a dibujar unas flechas entre el signo igual y la raya de fracción y la alumna cuestiona sobre ellas.

En la actividad 4, son correctos el proceso y resultado como en las actividades anteriores.

En la actividad 5, calcula directamente el valor de una regla sin plantear siquiera la ecuación correspondiente. La entrevistadora le pregunta si no se puede plantear la situación con una ecuación y su respuesta es plantearla mediante la escritura de una regla de tres. La entrevistadora insiste en si eso es una ecuación y contesta que es una regla de tres. Intenta plantear la ecuación y dice no sabe cómo hacerlo, pues no se acuerda.

En la **ficha 1,** la alumna **A_2**, pasa rápido la actividad 1 y el enunciado de la segunda, pero en ésta no escribe la igualdad pedida, sino que obtiene el valor numérico que ha de incluir en el portavariable suponiendo que tiene la incógnita, pero sin expresarla. Usa mal el signo igual porque iguala “9” a “5”, pero en el diálogo, rectifica.

Se le pregunta si lo podría haber resuelto de otra manera, y dice que con una ecuación. No indica el tanteo.

En la actividad 1.3 representa correctamente en el S.R.F. la situación de la balanza, y escribe “x= botella” para, en el diálogo, verbalmente, expresar y posteriormente, escribir: “x = el peso de una botella” y la ecuación “2 x + 3 = x + 7”.

En la actividad 1 de la **ficha 2,** la tendencia primera es a escribir la expresión simbólica pero se traba al escribir “23 =..” e intenta dividir por 7 sin tener en cuenta el enunciado, sino utilizando los datos numéricos precipitadamente. Reflexionando sobre el proceso de resolución propuesto, después de leerlo otra vez, se da cuenta del vocablo “incrementado” lo comprende y hace la representación en el S.R.E.B. correctamente, pero añade el signo “+” sobre el platillo; no le ha bastado dibujar en los platillos la enciclopedia y una representación de las pesas. La representación de las pesas la hace de 1 unidad. La entrevistadora le pregunta que al ser un número grande de unidades si se podía haber puesto de otra manera y contesta que sí: “con cuadrados” (que ha sido el código de representación elegido por ella), de más peso.

Ha expresado correctamente al expresión simbólica.

En la actividad 2 lee previamente todo el enunciado y comienza a representar la situación en el S.R.E.B., siguiendo el orden del enunciado. Vuelve a usar el signo “+” y las pesas unitariamente, y a continuación, sin haberla interrumpido, ella directamente dice “y la expresión simbólica sería pues “x = el peso del bolígrafo… pues sería…x” ¡NO!, “2x + 8 = 3x”.

Al preguntarle la entrevistadora si cuando está registrando en el S.R.F. se está fijando en lo que ha hecho en la balanza o directamente en el enunciado, contesta: “más bien del enunciado”.

En la actividad 3 se le solicita que sólo exprese oralmente lo que haría, no que dibuje, y lo hace correctamente.

La **ficha 3,** la lee e inmediatamente interpreta oralmente, de manera adecuada, la situación de la balanza en el apartado a), la expresa simbólicamente indicando lo que significa la incógnita que utiliza.

La entrevistadora pasa directamente al apartado e) que lo resuelve de la misma manera y también adecuadamente.

En la **ficha 4,** la actividad 1 de observación, la entiende perfectamente y resuelve la actividad 2 sin dificultad y respetando los códigos que se proponen en el enunciado.

En la **ficha 5,** la alumna observa la resolución con los dos registros y a continuación resuelve las actividades propuestas también con ellos y lo hace primero dibujando la balanza, luego los elementos de ella y posteriormente expresa la ecuación con la R.F.; después trabaja simultáneamente, sumando los opuestos y tachando a su vez en los dibujos de la balanza.

En la **ficha 6,** se le sugiere comience por la actividad 2, escribe lo que significa la incógnita que va a usar, y después de expresar la ecuación, quiere buscar la solución y la entrevistadora le propone el S.R.E.B. Dibuja la balanza y vuelve a hacer uso de 36 unidades, una a una. Entiende perfectamente lo que ha representado y por tanto no le resulta difícil hallar, no el valor de “3 veces el número” (suma de un número más el doble del mismo número) sino del propio número, dividiendo la suma total, por tres.

En la actividad 4 pregunta, después de leer el enunciado, si hace la balanza y se le da libertad para hacerla o no.

Designa con “x” el número de estudiantes de la clase. Expresa en el S.R.F.: 2x+6=5x+3, lo dibuja en la balanza, tacha en los dos miembros la misma cantidad de cuadraditos que ha representado el número de estudiantes y de redondeles, con los que ha expresado el número añadido. Como quedan tres redondeles en un platillo y tres cuadraditos en el otro, escribe “3 = 3x” y calcula “x=1”. Le sorprende que la solución sea un alumno de clase particular. Posteriormente se pasa a la actividad 3 y al principio indica el significado de la incógnita “x = número de discos”, luego escribe la ecuación, hace la balanza y va explicando paso a paso lo que realiza y vuelve a terminar representando de nuevo en el S.R.F. lo que tiene en el S.R.E.B.: “3 = 3x”, y concluye: “x = 1”. De la actividad 5 sólo se le pide se exprese oralmente e inmediatamente da el resultado correcto.

Pasando a la actividad 1 en su apartado b) pregunta si lo tiene que hacer con “signos”, se le dice que como desee; se le pregunta: ¿qué es hallar la solución? y contesta que es hallar el valor de la x. Se le pregunta si la balanza le ayuda a ver la solución y dice que sí. Representa en el S.R. E.B., luego escribe en el S.R.F. el resultado, después de haber quitado lo mismo en los dos platillos, quedándole “2x = 4” ya escribe a continuación: x = 2. Resumiendo: esta alumna comienza siempre a trabajar con la R.F., se apoya en el S.R.E. B. y acaba de nuevo en el S.R.F.

Al alumno codificado con **A_3** se le pregunta ante la observación de la actividad 1.1 de la **ficha 1**, por qué se puede afirmar que los pesos son iguales y contesta: “porque la balanza está equilibrada”.

Escribe correctamente la igualdad numérica, expresa la unidad kilogramos.

Insiste que 70 kg es lo que pesa el barril y 70 kg lo que pesan la pesas. Al preguntarle si “70 kg = 70 kg” es lo que expresa concretamente lo que muestra la balanza, aunque sea cierta la igualdad y, directamente, escribe “50+20”. Se le sigue insistiendo si falta algo y contesta que el signo “=”, luego se le pregunta si va algo delante del “=” y dice 70 kg, quedándole definitivamente “70 kg = 50 + 20”.

Cuando se le pide en la actividad 2 que explique la situación representada en el S.R.E.B. dice que en uno de sus platillos tiene 9 kilos (ya hace la suma de las dos pesas presentes de 3 y 6, que además no tienen indicadas unidades específicas) y en el otro una pesa de 4 kilos (vuelve a añadir unidades) y otra de “x” (asignada por él) y que “no pone nada”; Pasando a la representación de la igualdad numérica donde la entrevistadora señala el igual que aparece poco marcado y el alumno expresa que “le parecía el signo de dividir” e inmediatamente da el valor 5 como el que le corresponde a la “x” y lo coloca en el portavariable.

En la actividad 1.3, observa con detenimiento la situación y va indicando: 1 botella = x, pero en el diálogo dice que expresa el peso de 1 botella; al comienzo de representar las dos botellas pone “x.x” y al dialogar con la entrevistadora, rectifica, y dice que es la suma. Usa un código propio para expresar cada una de “las pesas” que se han dibujado explícitamente: “$\square$ = z” (después de haber querido sustituir tres de estos cuadraditos como si fuera una unidad) y hablar de ellos como si fueran vasos (quizás asocia botellas con vasos). La expresión que le queda es:

$$x + x + z \,.\, 3 = x + z \,.\, 7$$

Como se observa la comprensión de la situación es adecuada, pero usar de esta manera las variables puede conducirle a errores al usar estas dos incógnitas, como ya se indicó, cuando en realidad una de ellas está representando la unidad que se utilice.

En la **ficha 2,** el alumno usa pesas del valor que le hace falta en cada uno de los enunciados: 7, 8 y 5, en las tres actividades, respectivamente.

Entiende el vocablo “incrementado”.

Representa siempre primero la situación en el S.R.E.B. y lo hace correctamente, aunque los dibujos que usa como unidades no los cuida en cuanto a la proporcionalidad de sus dimensiones, a pesar de que siempre dibuja rectángulos. Se le pregunta si tendrían que ser todos iguales y contesta que sí. Se puede entender como un código personal de este alumno, el que siempre en los términos de la expresión simbólica que contiene la variable expresa la variable primero y luego, el coeficiente.

Las representaciones simbólicas son correctas en todos los casos.

En la **ficha 3,** sólo se le interroga acerca de los apartados a) y e) y los contesta rápido y correctamente. Sigue utilizando el coeficiente después de la variable. A la hora de representar las pesas, no lo hace de manera sistemática, sino 1+1+……^{n} ó 1 x n.

Reconoce que el uso del S.R.E B. le resulta fácil.

En la **ficha 4,** comprende la actividad 1. Al pasar a la actividad 2, al comienzo, para representar “2x”, por ejemplo, dibuja dos redondeles para el coeficiente y un cuadradito para la “x”. Al dialogar sobre el significado de lo que se deposita sobre los platillos, reconoce que hay que sumar para saber el valor de ello y no multiplicar, y, entonces, rectifica su expresión y dibuja dos cuadraditos.

No se sigue con esta ficha sino que se pasa a la ficha 5.

En la **ficha 5,** el alumno comprende la solución de la ecuación que se muestra en ella y al pasar a la actividad 2, representa bien en el S.R.E.B. tanto los términos de la incógnita como los términos constantes, pero después de haber intentado hacerlo como en la ficha anterior, esto es, representar los dos factores de un término, “2x”, como si fueran sumandos. Sin embargo, la sintaxis en el S.R.E.B. la aplica adecuadamente y trabaja simultáneamente en este S.R.E.B. y el S.R.F.; reconoce que el resultado en ambos ha de ser el mismo, pero al realizar la operatividad básica en las expresiones algebraicas no tiene seguridad y da como resultado de “x+3-x”, “3x”. Se le pregunta cuánto es “x-x” y dice que “z”, porque no se sabe. Si se le pone el ejemplo numérico “8-8” sí se da cuenta y entonces da como resultado del primer miembro, “3”.

Al intentar resolver el segundo miembro “2x-x” da como resultado 2, porque dice que “x-x= 0”.

Resuelve en la balanza quitando dos “o” a cada platillo y pasa a la expresión algebraica a quitar un 2 a cada miembro y llega al final a “3 ” y “3 o”, con lo cual a cada uno le corresponde 1: “x = 1”.

En la **ficha 6,** resuelve las ecuaciones de la actividad 1 por tanteo, por eso al intentar hacer el apartado b) le resulta muy difícil y no logra encontrar la solución. De las restantes actividades sólo se le propone la 3 y también la resuelve por tanteo.

La alumna **A_4**, que ya hemos expresado que es más aventajada en la clase, en la igualdad numérica de la actividad 1.1 de la ficha 1 no pone en el miembro número alguno sino sólo “x”, pero se intuye lo entiende. En la actividad 1.2 busca un número que sumado al que posee ya en el segundo miembro, le dé la suma que obtiene con los datos numéricos del primer miembro.

En la actividad 1.3 utiliza dos incógnitas, una para el peso de una botella y otra para el peso de un cuadrado (de los que se aportaban en el dibujo como pesas).

En la actividad 1 de la **ficha 2,** representa cada uno de los kilos con un cuadradito y lo hace bien. Al hacer la expresión simbólica usa la incógnita “e” para enciclopedia y “x” para el valor de 1 kilo, hecho que puede conducir posteriormente a confusión con el uso de estas dos variables. Lo mismo ocurre en las actividades 2 y 3 donde vuelve a usar dos incógnitas. Sin embargo, tiene claro y lo especifica por escrito, que una de ellas se refiere al valor de la unidad de peso, sea kg o g.

En la **ficha 3,** usa en toda la actividad, dos incógnitas y siempre las mismas “z” y “a”; la hace bien y rápido.

La **ficha 4,** que comienza con observar una situación representada en los registros del S.R.E.B. y del S.R.F., la comprende muy bien y realiza la actividad 2, utilizando la codificación sugerida, muy bien y sin presentársele duda alguna.

La alumna observa la resolución de la ecuación en la **ficha 5,** con los dos registros citados en la actividad 1, el de la balanza y el S.R.F. y pasa a aplicar lo observado a las actividades 2 y 3 que resuelve correctamente, trabajando simultáneamente en los dos registros y usando la conveniente regla de transformación, suma de opuestos, o sea los términos que contienen la incógnita, o los términos numéricos, sin embargo para despejar cuando la “x” está multiplicando, no hace uso de los elementos simétricos respecto del producto sino que dice “lo que está multiplicando pasa dividiendo” y al preguntarle qué ocurre para el valor de la “ x” en la balanza cuando se le ha dado la situación de haber en un platillo 3 cuadraditos (representando 3x) y 3 redondeles en el otro (representando un 3), contesta que “cada cuadrado vale un circulito”.

En la **ficha 6,** actividad 1, sigue la misma estrategia de resolución en todos los apartados, esto es sumar los opuestos y despejar al final pasando lo que está multiplicando, el coeficiente de la incógnita, al otro miembro, dividiendo.

En la actividad 2 muestra un despiste al intentar, después de plantear la ecuación correctamente (x + 2x = 36), obtener el valor de la “x” dividiendo 36 por 2; dialogando con ella, se da cuenta que tiene que reducir los términos semejantes antes de despejar. Pregunta si puede hacer escrita la división 36 entre tres.

En las actividades 3, 4 y 5, plantea sin dudar cada una de las ecuaciones y las de las actividades 3 y 4, las resuelve como la anterior, sumando opuestos y despejando al final, sin aplicar el elemento simétrico respecto del producto.

En la actividad 5 expresa oralmente el valor de una regla y luego lo escribe directamente, sin hacer operaciones.

El alumno $\mathbf{A_5}$ comienza la observación de la actividad 1 de la **ficha 1**, lee e inventa palabras al leer. Vuelve a leer y lo hace correctamente.

Al escribir la igualdad numérica, no lo hace correctamente pues expresa “x = 50 + 20”, que indica que lo entiende pero no es la respuesta adecuada al enunciado.

En la actividad 1.2, sí expresa correctamente la respuesta. En 1.3 usa dos incógnitas y vuelve a poner “x = botellas” e “y = cuadrado”; en el diálogo vuelve a aclarar y añade “peso”, quedando “x = botellas $\rightarrow$ peso”, “y = cuadrados $\rightarrow$ peso”.

En la **ficha 2**, las pesas que dibuja tienen el valor numérico que corresponde al enunciado 7, 8, 6 y las tres las dibuja igual.

En la actividad 1 entiende el vocablo “incrementado” como “que lo pone” que por su actuación posterior se entiende que lo añade.

Reconoce resultarle fácil el S.R.E.B. pero también reconoce que no la suele usar.

Hace las tres representaciones de las correspondientes actividades, correctas y ya indica que la “x” representa el peso de la enciclopedia, de los bolígrafos, de los lotes de libros; el uso de estos dos últimos plurales (bolígrafos y lotes de libros) no es el correcto, pero lo comprende porque lo simboliza bien en las expresiones simbólicas.

De la **ficha 3,** sólo se le proponen de la actividad 1, los apartados a) y d). Sigue usando dos incógnitas y expresa x = peso $\rightarrow$ latas, z = pesos de una pesa en el apartado a).

Referente al significado de la “z” se dialoga hasta que se aclara que es el peso de una pesa.

En el apartado d) no expresa el significado de las variables usadas.

En la **ficha 4,** realiza la observación de la actividad 1 y representa sin dificultad en el S.R.E.B. la situación presentada en el S.R.F. Al comenzar, ha dibujado en un platillo el signo “+” y se le pregunta si es necesario y contesta que no.

En la **ficha 5,** se le pregunta si le resulta más fácil el S.R.E.B. que el S.R.F. algebraico y contesta que sí, que facilita la expresión algebraica si se puede representar.

En la observación de la actividad 1, al ver el proceso de resolución precipitadamente, lee: “observa las siguientes resoluciones de la ecuación” pero se le sugiere lea otra vez y se le pregunta, ¿cuántas resoluciones hay? y contesta que una. Luego se detiene un rato a observar la actividad. Al principio no se da cuenta de la correspondencia paso a paso del proceso de resolución con el S.R.F. y con el S.R.E.B., pero luego, sí.

Se le pregunta qué es “resolverla” y no sabe explicarlo bien, dice que es hallar su resultados.

Al intentar resolver la actividad 2 mediante el S.R.F. se ha confundido mucho. Comienza por sumar opuestos, pero su mala operatividad básica no le permite obtener la solución adecuada. Concretamente llega a la expresión “0 = - 6” y no le sorprende y como esta expresión procedía de -“3 + 3 = 2. -3”, cambia lo escrito por “0 = -3”. Llega a dudar que la solución obtenida utilizando la balanza y en el S.R.F., tiene que ser la misma. La ecuación dada al representarla en la balanza era muy fácil de resolver, sencillamente tachando “un cuadrado” de los que representan la incógnita en ambos platillos. No expresa claramente que tachar o quitar en la balanza es restar en la expresión algebraica, sino dice que tiene que “quitar los factores que me faltan… o sea… ir operando en…”.

En la actividad 3 el alumno comienza escribiendo la expresión algebraica. “3 x + 2 = 5” y en la balanza, la situación. Luego tacha un elemento en ambos platillos de la balanza. La entrevistadora le pregunta cómo expresaría ahora la situación en el S.R.F. y escribe “3x+1=4”. Vuelve a tachar un elemento en cada platillo y escribe en el S.R.F., separado de lo escrito anteriormente, “3x+2-2= 5-2”, “3x=3”, o sea ha ido tachando uno a uno los elementos en la balanza. Al final, después de “3 x = 3”, escribe “x   1”, sin usar el signo igual.

En la **ficha 6** dice obtiene el valor de la incógnita en “3 + x = 5”, “de cabeza”. La entrevistadora insiste que explique lo que pensó y dice que restó y escribe: “x = 3 - 5 = 2”.

“x = 2”.

La entrevistadora pregunta si “3-5 es igual a 2” y entonces vuelve a partir del comienzo y escribe “3+x=5; x= 5 - 3; x = 2” recuadrando el resultado. Se le pregunta si es lo mismo que había hecho al principio y dice que no, que es al revés.

En el apartado b) hace directamente transposición de términos, opera bien con los números enteros y despeja correctamente, recuadrando el resultado. En el apartado c) también obtiene directamente, por transposición de términos, el resultado correcto.

Posteriormente la entrevistadora le dice resuelva el apartado f) y también lo hace correctamente, rápido y con el mismo proceso que los anteriores, esto es, transposición de términos.

La actividad 2 le proporciona gran confusión y expresa que al poner la “suma de un números más…2” significa ya “x+x” y esto dice le da “x” que suma a “2x” porque el enunciado dice el doble del mismo número, pero cuando va a escribir la ecuación pone “2x” como resultado de la “x+x” inicial: 2x+2x= 36, y obtiene x=9, que es incorrecto. La entrevistadora le dice resuelva la actividad 4 e inmediatamente escribe la ecuación bien, pero opera mal los números enteros, tanto en la adición como en la división.

El alumno en la actividad 5 realiza la división directamente sin escribir la ecuación, pero se le pide lo haga y anota: “3 x = 18”; “x = 18:3= 6”.

Se le pide explicación de por qué lo que está multiplicando pasa dividendo y dice “porque…es así… cuando pasa…. pasa. La entrevistadora pregunta que si siempre sucede y contesta “sí…no… cuando está sumando pasa restando…

El último de los alumnos entrevistados, **A_6**, en la actividad 1.1 de la **ficha 1,** pone el resultado del primer miembro directamente. Para indicar que la balanza está equilibrada dice que “está igual” que “está al mismo nivel”.

En 1.2 no explica la situación sino sencillamente rellena el portavariable con el dato adecuado. Pero si se le pregunta cuál sería la expresión algebraica dice que “3 + 6 = x + 4” y al pedirle un enunciado expresa: “los platos de la balanza son igual…están equilibrados igual…entonces te…ese el mismo resultado…3 + 6 son 9 … entonces…al 4 … tengo que sumarle un número para que me dé 9”.

En 1.3 se equivoca al contar las pesas y pone 9 en lugar de 7 pero al preguntarle si efectivamente ese dato es correcto, rectifica y pone un 7.

En la **ficha 2,** intenta la proporcionalidad al dibujar distintas pesas.

En la actividad 1 comienza representado en el S.R.E.B. y descompone los “7 kilos” en “2 + 2+ 2+ 1 kilos”. Se le pide la expresión simbólica y pone “x + 7 = 23”.

En la actividad 2 representa la situación en el S.R.E.B. y luego en el S.R.F., lo mismo que lo hace con la actividad 3 y en ambas, correctamente.

En la **ficha 3**, el alumno realiza todos los apartados sin problema, con una incógnita. No expresa ni oral ni gráficamente el significado de la variable que utiliza; si se le pregunta sí sabe lo que representa.

El alumno en la **ficha 4,** después de observar la actividad 1, afirma que la entiende y realiza la actividad 2 sin problema y también afirma que le resulta fácil trabajar en el S.R.E.B.

En la **ficha 5,** entiende también el ejemplo de resolución propuesto y sabe lo que significa “resolver”.

En la actividad 2, el alumno hace la representación con la balanza y luego con la expresión algebraica. Al comienzo usa mal el signo igual, pero luego, rectifica.

Para realizar la resolución en el S.R.E.B., al principio, intenta quitar dos cuadraditos a la derecha y 1 en la izquierda, y él mismo después corrige el error. En la expresión algebraica intenta copiar el resultado de la balanza sin realizar provecho alguno, pero se le advierte y entonces aplica la suma de opuestos para llegar al resultado. Como al final le queda “3 = x”, invierte los miembros y escribe “x = 3”. En algún momento del proceso confunde los “términos” con los “miembros”.

En la actividad 3 el alumno representa parte de la balanza y parte de la expresión algebraica. Comienza quitando “3x” al primer miembro, mediante tachado y al segundo, nada. Tiene confusión porque parece trabajar mecánicamente y le da lo mismo tachar dibujos en ambos platillos, que no representan lo mismo.

Vuelve a retroceder hacia la situación inicial y tacha dos unidades en cada platillo.

En la expresión algebraica “3 x + 2 = 5”, primero, y siguiendo la confusión del S.R.E.B., expresa “3 x - 3x + 2 = 5”; luego tacha y pone “3 x + 2 = 5 - 3”, y por fin, “3x = 3” y no saca el valor unitario de “x”.

En la **ficha 6,** el alumno halla en la actividad 1 todas las soluciones por tanteo. En las actividades 2, 3, 4 y 5, el alumno hace transposición de términos, opera los números enteros y los términos que poseen la incógnita y despeja para obtener su valor. En las actividades 2, 3 y 4 hace las comprobaciones de las igualdades numéricas, sin embargo, la expresión oral que da, es que está haciendo “la comprobación de los números”.

En la última ecuación “3 y = 18” se le había sugerido que usase una variable diferente de la “x”, aunque dice estaba probando y parecía tanteo, pero al preguntarle, había obtenido el número por división de 18 entre 3.

Con relación a la **segunda sesión** de Ecuaciones, de Septiembre del mismo año, 1993, cuarta y última de esta experiencia la alumna **A_1** lee y observa la **ficha 1,** de conversión de registros desde el lenguaje habitual al S.R.V.G. y al S.R.F.

La **ficha 2,** con tres actividades presentadas en el lenguaje habitual para hacer una aplicación de lo observado en la ficha anterior, las hace perfectamente y sin dudas. Tiene muy clara la representación en el S.R.V.G. y también en el S.R.F. Primero representa en el S.R.F. y luego en el S.R.V.G. y se le pregunta si siempre lo haría así y contesta afirmativamente. No especifica por escrito el significado de las incógnitas. En el S.R.V.G. se preocupa de dibujar bastante aproximadas las unidades que ha de representar iguales. La **ficha 3,** donde ha de hacer conversión de registros desde el S.R.V.G. al S.R.F., lo hace rápido y bien. Al preguntarle qué conversión de registros le resulta más fácil, si la conversión del S.R.F. al S.R.V.G. o al revés, contesta “me resulta igual al hacerlo”.

En la **ficha 4,** se equivoca al comenzar a representar “x+3” y se da cuenta que está representando “x.3” y rectifica. Al constatar su seguridad se pasa a la ficha siguiente.

La **ficha 5,** comienza con una actividad (actividad 1) para calcular la solución de algunas ecuaciones planteadas en el S.R.F.

Todas las hace sin dificultad y al preguntarle qué operación realiza para pasar de “-x = - 4” a “x = 4”, en lugar de decir que multiplica por (-1) los dos miembros contesta que “multiplica los signos” y al pedirle que aclarase, contesta: “hago menos por menos, más… entonces ya desaparecen los menos…”.

Las actividades 2, 3 y 4 plantean ecuaciones con enunciados verbal de la forma A x + B = C (actividad 2); A x + B = C x + D (actividad 3) y A x = B (actividad 4), en contextos de peso y precio.

No manifiesta dificultad alguna, ni en la reducción de términos semejantes, ni en la operatividad con números enteros, ni en divisiones con distinto signo, etc.

En la actividad 4, en particular, la resolución la ha hecho a través de una regla de tres. Al plantearle una situación similar, pero de proporcionalidad inversa, al comienzo, una vez más, precipita la solución y cómo se le ha dado los mismos datos numéricos, se equivoca, pero se da cuenta rápido que es inversamente proporcional.

En la **ficha 6,** de libre elección de sistema de representación, especificándole el S.R.F., el S.R.V.G. y el S.R.E.B., comienza de nuevo con su tendencia a la estrategia de resolución mediante regla de tres, pero dice "no se puede". Se le pide busque la solución mentalmente y lo hace; se le pregunta cómo lo ha hecho y contesta que dividiendo. Se le insiste utilice el S.R.F. y lo plantea. Se le solicita el S.R.V.G. y también lo hace, contando cuadraditos. En este último proceso surge el concepto de múltiplo y se le pregunta concretamente si 45 es múltiplo de 3 y contesta que no, pero teóricamente dice que un número es múltiplo de otro "cuando… cuando lo puedes dividir y no te da decimal". Al ponerlo en la situación concreta de dividir 45 entre tres y no "le da decimal", rectifica.

Intenta averiguar la causa de su error, vuelve a contar los cuadraditos y se da cuenta que anteriormente lo había hecho mal.

Se le pregunta qué hubiera ocurrido si en lugar de 45 hubiera sido 46, contesta "lo haría múltiplo de dos"; la entrevistadora dialoga sobre la posible descomposición de 46 o de cualquier número en suma de otros para facilitar la representación.

En la actividad 2, la alumna mientras va leyendo el enunciado va efectuando el registro en el S.R.F. Luego ha representado la situación en la balanza.

Al pasar a la actividad 3, la entrevistadora le sugiere haga primero la representación en la balanza y también lo hace mientras lee el enunicado. Como uno de los datos es 6000 pesetas, pregunta cómo lo representaría y la entrevistadora contesta que como se le ocurra y al preguntarle cómo tendría que poner ya que ella ha nombrado "billetes", responde que "uno de 5000 y otro de 1000"… o "pongo una bolsita de 6000 pts".

Hasta ahora sólo ha planteado las ecuaciones y se le pide que resuelva y con el S.R.E.B., la actividad anterior (actividad 2).

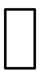
Quita "5 kilos" de cada platillo y al quedarle 3 jarras en un platillo y 12 kilos en el otro sin más, dice que cada jarra pesa 4 kilos.

En la actividad 3 vuelve a actuar igual, quitando la bolsita de 6000 pesetas y dejando una de 3000 y eliminando la que tenía de 3000 en el platillo de la derecha. Simultáneamente ha tachado los dibujos de dos paquetes de revistas en cada platillo y le queda sólo una bolsa con 3000 pesetas en el platillo de la izquierda y tres paquetes de revistas en el de la derecha y expresa "1000 pesetas cada carpeta".

Ya había representado también al principio de actuar en la balanza, la expresión en el S.R.F.: "2x + 6000 = 5x + 3000" y se le pide vaya haciendo la conversión a este ultimo registro de lo que ya ha realizado en el S.R.E.B. Comienza dando los resultados finales de cada paso, pero la entrevistadora insiste y entonces explicita "quitarle de un saco 3.000 pts… porque aquí…también tenía 3.000 pts (señalando el segundo platillo) y lo taché… y quitarle dos… dos lotes de revistas y dos lotes de revistas para que me de…”. Se establece un diálogo largo y detenido para explicar paso a paso y establecer correspondencia entre los dos registros pues se intuye la alumna lo comprende y así se ha verificado. Al final se le afirma que lo que se pretendía era demostrarle que era sencilla y que si las ecuaciones son más complicadas, puede actuar de manera similar.

Al final se le pregunta acerca de su tendencia a alguno de los registros y responde que si pudiera optar elegiría el S.R.V.G. “para representar” o el algebraico “para plantear el problema”.

La segunda alumna entrevistada, **A_2**, lee y observa el contenido de la **ficha 1** y dice comprenderlo.

Al pasar a la **ficha 2** titubeó al hacer la representación geométrica. No recordaba cómo se podía representar un número cualquiera, una letra cualquiera, luego expresó que “con cuadrados”… La entrevistadora le dice que si “x” es un rectángulo, por ejemplo, ¿cómo se puede representar y contesta “pues por una letra…”. La entrevistadora insiste ¿por qué letra?…¿por una cualquiera?. La alumna contesta “¡Ah, no!, por 1…”, dibujando x 

1

A partir de esta aclaración lo hizo bien. La expresión algebraica desde el primer momento la representó correctamente.

A continuación las actividades 2 y 3 las realiza rápido y sin dudar comenzando por la representación en el S.R.V.G. y luego escribiendo la R.F. algebraica.

En la **ficha 3,** de conversión de sistemas de representación desde el S.R.V.G. al S.R.F., no tiene dificultad. Al preguntarle cuál es más fácil la conversión del S.R.V.G. al S.R.F. o al revés, contesta que quizás pasar del S.R.V.G. al S.R.F.

En la **ficha 4,** observa y lee la actividad 1 y pasa a resolver la actividad 2 y lo hace de manera rápida y sin dificultad. En el diálogo afirma que la unidad puede variar pero no en el mismo ejercicio.

En la **ficha 5,** de resolución de ecuaciones espontáneamente, sin sugerencias, representa la situación del apartado a) en la balanza y concluye al terminar de tachar en los dos platillos lo mismo: “x = 2”.

En el apartado b) sigue el mismo proceso que en el apartado anterior y después de haber concluido, observando la balanza que como queda tres equis igual a doce, entonces “doce dividido entre tres me daría 4”. Pregunta si lo hace en forma de ecuación, se le contesta no hace falta, pero algebraicamente escribe la última parte:

$$3x + 0 = 12$$
$$3x = 12$$
$$x = 12/3$$
$$x = 4$$

La entrevistadora pasa al apartado d) y le dice lo resuelva geométricamente. Representa los dos miembros correctamente y luego tacha como en la balanza tres cuadrados en las representaciones de cada uno de los miembros y dice le quedaría “cinco equis igual a treinta”. Se le pregunta cuántos cuadraditos le correspondería a cada equis y contesta “30 entre cinco que serían 6” y escribe: “x = 6”.

Las actividades 2, 3 y 4 son de enunciado verbal. En la actividad 2 se equivoca al leer y luego rectifica. Comienza después de la lectura, escribiendo el significado de la incógnita, esto lo hace también en la actividad 3 y representa en el S.R.F. la ecuación. Dibuja luego la balanza (también en las dos actividades citadas hace lo mismo).

Sigue trabajando en la actividad 2 en la balanza tachando los elementos iguales de ambos platillos y al tener separada la representación del término que contiene la incógnita y el de los datos numéricos sigue trabajando en el S.R.F., pro ejemplo: 2 x = 4; x = 2.

En la actividad 3 como el orden de magnitud es mayor, se pregunta cómo podría poner 3000 y decide “círculos grandes de 1.000” utilizando su propio código y dice “hago círculos que valieran mil”. La entrevistadora le pregunta si no pueden ser círculos pequeños y que valgan 1.000 y contesta afirmativamente. La entrevistadora le pregunta que para que se entendiera mejor que los “o” significan lo que realmente significan, qué haría y escribe “o = 1.000”. Se le pregunta que si “manzanas” y pone “o = 1.000 pesetas”.

Sigue trabajando en la balanza, tacha un número de dibujos iguales en ambos platillos y, como en la actividad anterior, al final escribe: “3.000 = 3x”; “1.000 = x”.

En la actividad 4 halla directamente la solución mediante una división. Al final se le insiste añada el significado completo y concreto del número que da como solución.

En la **ficha 6,** que se le da libertad para resolver las tres actividades con el sistema de representación que desee, en la primera actividad expresa oralmente la operación de dividir que tiene que hacer.

En la actividad 2 comienza indicando el significado de la incógnita que va a utilizar, luego escribe la ecuación en el S.R.F., en el S.R.E.B., tacha lo que corresponde, explicando lo que hace y vuelve a pasarse al S.R.F.: “3x = 12”; “x = 12/3”; “x = 4”.

La entrevistadora le pregunta que cómo expresaría en el S.R.F. lo que ha hecho en la balanza de tachar y escribe: “3 x + 5 - 5 = 17 - 5”.

Se le interroga acerca del sistema de representación a que recurriría ella si tuviera que elegir uno y contesta “el algebraico y el de la balanza”, se le insiste ¿y en el caso de uno, cuál elegirías?. Y contesta que la balanza, porque “lo veo más claro yo cuando pongo la balanza…” y “porque luego me ayuda si voy a escribirlo en forma algebraica”.

En el trabajo del alumno **A_3** en la **ficha 1** el alumno lee, observa y dice comprender.

En la **ficha 2** la expresión algebraica no le plantea dificultad pero sí mucha la representación en el S.R.V.G. No ha llegado a captar la representación de “x” si el coeficiente es “1”, sí si el coeficiente es distinto de 1 y también sabe representar un número: 7, 23, por ejemplo.

En la **ficha 3** distingue perfectamente la representación geométrica de los dos miembros de la ecuación. Realiza bien la conversión del SRVG al SRF.

En la **ficha 4** sí ha tenido mucha dificultad en la conversión del S.R.F. al S.R.V.G., sigue bloqueado en la representación de “x” no así en “2x”, sin embargo sí tiene claro que el área del rectángulo se obtiene “multiplicando los lados”.

En la **ficha 5,** en la actividad 1 en su apartado a), da inmediatamente la solución “2” para la ecuación, pero en los restantes apartados que está la “x” en contexto multiplicativo, sigue actuando como si fuera contexto aditivo.

En la actividad 3 que es hacia donde lo dirige la entrevistadora es incapaz, después de haber planteado correctamente la ecuación en el S.R.F., que es del tipo $A\ x + B = C\ x + D$ con $C > A$ y $B > D$, es incapaz de resolverla, ni siquiera de comenzar la resolución.

La situación en la **ficha 6,** es aún peor, ya que ni siquiera capta por tanteo cómo calcular el valor de un pin, dándole el precio de tres de ellos. La entrevistadora contextualizó en distintos contextos próximos al alumno, después de preguntarle sobre ellos y tampoco fue capaz de hacerlo.

Reconoce que de los sistemas de representación presentados el que más le gusta es el de la balanza.

Al final comenta que el sistema de representación que más le gusta es el S.R.E.B. porque es más sencillo y más claro.

Por su parte, la alumna $\mathbf{A_4}$ comprende muy bien la ficha 1.

Al pasar a la **ficha 2** se equivoca al representar “x” aumentado en 4. Se le sugiere haga la representación formal y la hace correctamente: $1\ x + 4 = 2\ x$. Se le dice que compare con lo que ha hecho en el S.R.V.G a ver si es igual y reconoce el error, rectifica y lo hace bien.

En las actividades 2 y 3, sus representaciones tanto en el SRVG como en el SRF son correctas.

En la **ficha 3,** de conversión del S.R.V.G. al S.R.F. no tiene tampoco dudas.

En la **ficha 4,** de conversión del S.R.F. al S.R.V.G. lo hace correcto y además afirma le resulta más fácil pasar de la representación en el S.R.F. al S.R.V.G. Sólo se le ha pedido resolver el primer ejercicio.

En la **ficha 5,** tanto cuando se le da la ecuación en el S.R.F. como con enunciado verbal, siempre suma opuestos para resolver la ecuación y al final despeja directamente la incógnita pasando el coeficiente de la misma que está multiplicando al segundo miembro, dividiendo. Se le pregunta en qué se basa para hacerlo y contesta que dividiendo los dos miembros por el coeficiente de la “x”. Cuando el texto está contextualizado, lo primero que dice es cuál es el significado de la incógnita que va a usar.

En la **ficha 6,** que se da libertad para el sistema de representación a utilizar en la actividad 1 usa el S.R.F. y despeja el valor de la incógnita haciendo transposición de términos.

En la actividad 2 utiliza la balanza, al sugerirle, cambie de registro, tacha en ambos platillos un número igual de cuadraditos y como le quedan 3 jarras en un platillo y 12 kilos en otro y expresa “los doce que quedan se los divido a…a 4 y… el peso de la jarra por 4…”. La entrevistadora pregunta, ¿cómo te quedaría entonces la situación en la balanza? Y contesta “… a ver… 1 jarra….a 4 kilos….”.

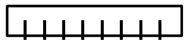
La actividad 3, que da lugar a una ecuación de la forma: A x + B = C x + D, suma opuestos para resolver, primero lo hace con los números y luego con los términos que poseen la incógnita. Sigue sin utilizar el producto por el inverso sino hace la transposición de términos para despejar la incógnita. La entrevistadora dialoga sobre la unidad que corresponde a la solución e insiste en la conveniencia de ponerlas siempre.

Finalmente al definirse sobre el sistema de representación al que recurriría si eligiese uno de ellos, se decide por el algebraico y luego el geométrico, en último término, la balanza.

El alumno **A$_5$**, por su parte, en la **ficha 1** comienza por hacer una lectura incorrecta del enunciado verbal que aparece. Se le indica que se fije y lo lee bien; observa las representaciones.

En la **ficha 2,** en la actividad 1 se confunde en la representación de “x+4” y va haciendo un incremento en profundidad, no sólo en largo y ancho, aparte del error de representación “x.4” en lugar de “x+4” que es lo que corresponde al convertir el enunciado verbal en una representación geométrica. También confunde “2.x” con “x^2 + x^2” al representarlo geométricamente.

En la actividad 2 sin embargo la representación geométrica en general ya la hace bien y en particular la representación de “x”. Para no molestarse en dibujar cuadrados, ni llegar a 23, dibuja sencillamente: 23



1

En la actividad 3 el error es al revés, dibuja más cuadros de los que corresponde.

En la **ficha 3,** no hay ninguna dificultad en la conversión del S.R.V.G. al S.R.F., de ello el alumno reconoce que esta conversión del S.R.V.G. al S.R.F. es más fácil que del S.R.F. al S.R.V.G. que es al que se refiere la **ficha 4.** En ella se presenta un modelo al que en general los alumnos no vuelven a acudir, a no ser que la entrevistadora lo sugiera. Este alumno no se preocupa mucho de hacer el dibujo de cada una de las unidades, aproximadamente igual, aunque sí oralmente dice han de ser iguales. En el diálogo se intenta que el alumno distinga entre “x” como longitud y “x” como área equivalente a “x.1”, que es uno de los convenios clave para el uso del S.R.V.G. que se está usando.

En general dibuja el “igual” en medio de las representaciones geométricas de los dos miembros.

La última representación de la actividad 2 la hace sin duda alguna.

En la **ficha 5,** actividad 1, el alumno confunde lo que es tanteo (que cree es lo que hizo) con cálculo mental con las operaciones básicas (que es lo que en realidad efectuó), ya que se le ha preguntado y ha explicitado las operaciones que ha hecho mentalmente, incluso en el apartado d) con ecuaciones de la forma A x + B = C y A - x = B.

En la actividad 2, llega incluso a no plantear la ecuación que corresponde al enunciado verbal y obtiene la solución mentalmente.

Se le pide la ecuación y la plantea sin dificultad: “2 x + 3 = 7 x”.

En la actividad 3 plantea directamente la ecuación. Aplica la suma de opuestos simultáneamente en los dos miembros tanto para los términos con la incógnita como sin ella. Sigue sin utilizar el producto por el inverso, sino haciendo transposición de términos directamente. Reconoce que el tanteo es útil para números sencillos y los más complicados, entendiendo los que tienen mayor orden de magnitud requieren el uso del álgebra. Puntualiza que a veces hay algunas magnitudes pequeñas que son muy liadas y podía aprovechares el Álgebra.

En la **ficha 6,** utiliza libremente el S.R.F., actúa directamente en el escrito a través del cálculo mental (actividades 2 y 3) y obtiene las soluciones, las cuales son recuadradas, como lo suele hacer, en general.

La actividad 3 se le pide después de resolverla con el S.R.F. que lo haga en el S.R.E.B. y el alumno afirma que también es fácil: las reglas de sintaxis usadas son las adecuadas.

A_5 señala que, en caso de tener que usar un solo registro, elegiría el S.R.F. algebraico y en segundo lugar, el S.R.E.B. Al algebraico dice recurriría porque es el que viene en el libro con los ejemplos y en caso de equivocación, acudiría a la balanza.

Por último, al entrevistar al alumno $\mathbf{A_6}$ y mostrarle la representación de la **ficha 1,** dice entenderla bien.

En la **ficha 2,** actividad 1, sin embargo, tiene problemas con la representación de “a+4” y deja “4x” e indica incluso las 4 unidades correspondiesen al cuatro.

En la actividad 2 vuelve a errar en “x+7” y representa “7x”. La entrevistadora le propone hacer la representación en el S.R.F. que en la primera actividad la había hecho bien y aquí también representa correctamente la actividad 2. Después de hacer la expresión algebraica correspondiente sí es capaz de representar “x+7” con dos rectángulos yuxtapuestos.

En la actividad 3 hace la representación correcta en el S.R.V.G. después de haber hecho la expresión algebraica.

En la **ficha 3,** representa rápida y bien los cuatro apartados. Vuelve la entrevistadora a preguntar a cerca de la representación de “x” y puntualiza el que una dimensión del rectángulo que la representa, es la unidad.

En la **ficha 4,** observa la representación geométrica y expresión algebraica de la actividad 1 y pasa luego a resolver la actividad 2, de conversión del S.R.F. al S.R.V.G., en los primero y tercer apartados que se le indican y lo hace bien.

En la **ficha 5,** explicita que hallar la solución de una ecuación es hallar el valor de la “equis”.

El apartado a) lo resuelve mentalmente, haciendo una resta.

El b) lo hace por tanteo y además sistemático, no al azar.

Cuando se encuentra en el apartado f) con un producto de 2.1 y 5.1, dice “que hay que quitarle el 1” parece asociar al coeficiente 1 de los términos con “x”.

En la actividad 2 plantea la ecuación a partir del enunciado verbal y, mediante transposición de términos, llega a la solución; sin embargo, una ecuación del mismo tipo A x + B = C en la actividad anterior, la hizo por tanteo.

Al preguntarle el por qué de la diferencia en su actuar contesta “a que es más difícil y aquí (refiriéndose a la actividad anterior) ya tenía los datos”. En esta ocasión ha tenido que plantear él la ecuación y antes, no.

En la actividad 3 hace transposición de términos y llega a x = 1000 pesetas. La unidad la añade después que la entrevistadora le hiciera la pregunta acerca de qué tipo de unidades había utilizado.

En la actividad 4 sólo hace una división y obtiene la solución, no plantea ecuaciones.

En la **ficha 6,** el alumno comienza dibujando en el S.R.E.B. y dice no se puede hacer y escribe 3= 45 pero se dialoga para que reconozca su error y escribe “3x= 45”, se vuelve a pasar a la balanza y representa en el platillo de la derecha 15, 15, 15, o sea ha usado su propio código. Se le pregunta cuánto vale cada pin y dice 15.

En la actividad 2 la resolución la hace mediante el S.R.F. y por transposición de términos.

En la actividad 3 también plantea la ecuación en el S.R.F. Luego se pasa al S.R.E.B. y va tachando el dibujo de dos lotes de revistas en cada platillo y 3000 pesetas en cada no, luego divide 3000 entre 3 y le da 1000.

Al preguntarle a cuál de los sistemas de representación recurriría, contesta que al algebraico y luego a la balanza: el algebraico porque es más fácil y el de la balanza porque da la solución de forma gráfica y así también es fácil.

7.4.7 Estudio biográfico de un caso

Nos vamos a seguir refiriendo al alumno (Z) entrevistado del cual ya se expresó su comportamiento respecto a las expresiones algebraicas en el capítulo anterior.

Ya manifestamos el número de orden de este alumno atendiendo, exclusivamente, al total de aciertos y errores en los Cuestionarios Pretest y Postest que se le aplicaron. Recordamos que, ocupando el lugar nº 18 en el Pretest, sin embargo, su posición en la prueba Postest en su parte de Ecuaciones (Po2), ocupó el número 8.

Comenzamos por describir la situación de la actividad del alumno al aplicarle el Cuestionario Pr1 en los ítems relativos a ecuaciones.

En relación a las H.C.C.O. en ecuaciones aritméticas, de las preguntas del Pretest ya citadas, aparecen en la número 2, situaciones donde hay portavariable y los elementos que intervienen en los ítems son sólo números.

Las respuestas a esta pregunta de contextos aditivo y multiplicativo no son totalmente correctas, en el caso de estar situado el portavariable en primer lugar o en el divisor.

Realiza correctamente la operaciones de +, -, x y : si el portavariable está en el dividendo, no si está en el divisor, sin embargo, en un ítem (Pr2, ítem 3) donde se planteó una división con el divisor desconocido (x), lo resolvió correctamente (probablemente por tratarse de números muy pequeños "$3 = \frac{27}{x}$".

En el ítem 10 y 45 de Pr2:

1) Cuatro cajas de pegatinas de 5 pegatinas cada una, se reparten entre dos niños. ¿Cuántas pegatinas le tocan a cada niño?. Explica lo que has hecho para obtener ese número.

2) En una familia la madre tiene 37 años y el padre 46. La suma de las edades de la madre y sus hijas (quintillizas) es igual a la del padre con la de dos de sus hijas, ¿cuál es la edad de cada una de sus hijas ?,

Como se observa los contextos son numéricos y muy cercanos a los niños de esta edad. El primero no sólo lo resuelve correctamente sino que explica cómo lo ha hecho con palabras escritas, sin embargo el segundo, no lo abordó.

Cuando se trata de HCCO con ecuaciones algebraicas, sólo ha resuelto bien cuando "x - 4 = 12" (Pr1, 13)

y "$3 = \frac{27}{x}$" (Pr2, 3)

En general, cuanto tiene que operar con la incógnita no lo hace (4x + 16 = 7x + 1 (Pr1, 14); 8x + 10 = 4x + 2 (Pr1, 16) y 8x + 3 = 5 x + 9 (Pr2, 4).

La situación, entre dos de los anteriores, de un ítem que podía haber sido más fácil, 16 + x = 34 (Pr1, 15), pudo ser la razón de que tampoco se enfrentase a él.

También resolvió incorrectamente “10 - x = 4” (Pr2, 1, para el que dio solución 5) y “4 x = 6 x + 4” (Pr2, 2, solución 2).

Los ítems 19 y 20 de Pr1, conversión de registros desde el lenguaje habitual al S.R.F., los resuelve correctamente. Sin embargo, el ítem 43 (Halla un número tal que su triplo aumentado en 2, dé 29), no lo resuelve, ni siquiera hace el planteamiento.

En el ítem 44 de Pr1, da como respuesta “32 y en el 2 hay 16” y no explica nada. Este ítem exige cierto dominio también, de la sintaxis gramatical y del concepto de mitad, además de la palabra clave “entre” que suele ir asociada a división. Podríamos esperar alguna representación gráfica o no, por no estar habituado a ellas en este tipo de problemas.

La pregunta 14 de Pr, ítems 45-48 (relación entre enunciados y ecuaciones dadas) es totalmente correcta, situación esperada ya que no requiere grandes conocimientos y la sintaxis implicada es muy sencilla en los cuatro ejemplos que se dan; los datos numéricos orientan y dan pistas para una buena respuesta así como el no tener que resolver las ecuaciones, según se indica en el enunciado; sin embargo el planteamiento inusual podría haber inducido a no enfrentarse a su resolución e incluso a no entenderlo al leer y al ser muy larga la expresión de lo solicitado, no “molestarse” en intentar comprenderlo.

Mostramos a continuación un resumen de la actuación del alumno en los ítems de la prueba Po2.

En el Postest los resultados de los ítems permiten detectar sus habilidades conceptuales al plantear correctamente casi todas las ecuaciones:

I) Planteo como proporcionalidad: ítem 1 y 10 con los contextos de dinero y tiempo.

En el ítem 1 el planteo y resolución lo hace por una regla de tres. El ítem 10, de contexto dinero, con operaciones combinadas (“x” y “:”), que permitía hacerlo -entre otras formas- por reducción a la unidad o por proporcionalidad, lo resolvió como el 1, por regla de tres.

II) Traducción lineal: ítem 3 (6 x - 12 = 6); ítem 6 (8x + 3 = 5 x + 9); ítem 8 en contexto dinero (3 x = 270); ítem 9 (x + 2 x = 36).

III) Traducción no lineal: Consideramos en este grupo los ítem 2 y 7: El ítem 7 (37 + 5 x = 46 + 2x).

El ítem 2, que es el cálculo del perímetro y el área de un rectángulo dado un enunciado verbal, donde no se le proporciona el dibujo de la figura, lo hizo mal. El error comienza por usar “m” correctamente según enunciado como altura; calcula bien el perímetro: p = 4 m + 2 m pero luego lo iguala a 6 y dice que ése es el valor de la altura. O sea que ha concluido que p es igual a la altura. Y ahora el error se extiende al problema entero, ya que calcula para la base el doble de 6 y le asigna 12, y a continuación calcula el área, como lo hace siempre: A = b . a = 12 . 6 = 72. Además indica en el dibujo que la base es “2x”, como si considerase “m” = “x”.

Por otra parte, en las H.C.C.O. los resultados fueron para cada uno de los ítems, los siguientes:

I) Proporcionalidad: los ítems 1 y 10 en contextos de dinero y tiempo los resuelve correctamente usando el “1” en el divisor.

II) Transposición de términos: Los ítems **5** y **15** de resolución de ecuaciones sin contextualizar los resolvió bien y el proceso que siguió fue: transponer términos, reducir términos semejantes y despejar la incógnita.

Ítem 5

$$8x + 3 = 5x + 9$$
$$8x - 5x = 9 - 3$$
$$3x = 6$$
$$x = \frac{6}{3} = 2$$

Ítem 15

$$13x = 91$$
$$x = \frac{91}{13} = 7$$

Las habilidades aritméticas las podemos observar en los ítems 3 y 8. El primero de enunciado verbal pero en contexto de deporte. lo hace bien. Es significativo que en éste como en los demás ítems siempre expresa lo que va a significar en su trabajo, la incógnita que elige.

$6x - 12 = 6$ $\qquad$ $6x = 18$

$6x = 6 + 12 = 18$ $\qquad$ $x = \frac{18}{6} = 3$

El ítem 8, en contexto dinero, tiene la estructura típica de: costo = precio unidad x número de unidades y hay que calcular el precio de la unidad. Lo hace correctamente:

$$3x = 270$$
$$x = \frac{270}{3} = 90 \text{ ptas}$$

Es significativo que en los ítems 42 de la pregunta 12 de Pr2 y el 33 de la pregunta 8 del Po1, la situación era similar pero no contextualizada y la resolvió mal.

En cuanto a las habilidades algebraicas el ítem 9, de contexto puramente aritmético, también lo resuelve bien. En el texto aparece la palabra - clave “doble” y no le plantea problema.

$x + 2x = 36$

$3x = 36$ $\qquad$ $x = \frac{36}{3} = 12$

Los ítems 6 y 7 requieren para su resolución habilidades aritméticas y algebraicas y los resuelve correctamente:

Ítem 6: $\quad 8x + 3 = 5x + 9$

$$8\,x - 5\,x = 9 - 3 \qquad\qquad 3\,x = 6 \qquad\qquad x = \frac{6}{3} = 2$$

El ítem 7 que es igual al ítem 45 dela pregunta 13 de Pr2 sólo se diferencia en el contexto, tienen la misma estructura. En la prueba anterior no lo había intentado siquiera resolver, aquí lo hace perfectamente y además realiza la comprobación con el dato resultante:

$$37 + 5\,x = 46 + 2\,x$$
$$5\,x - 2\,x = 46 - 37$$
$$3\,x = 9$$
$$x = \frac{9}{3} = 3$$

Podíamos pensar que en este alumno se ha conseguido que las ideas intuitivas de la proporción han evolucionado hasta convertirse en conceptos maduros (Streefland 1984, 1985).

También es significativo que expresa en los resultados las unidades de las magnitudes que se han medido: pesetas, días.

Es importante asimismo el que no mezcla a lo largo de toda la prueba, los términos que llevan indeterminada con los que no la llevan.

En el trabajo de clase con los dos últimos cuadernos la situación ha sido:

Con relación a los cuadernos utilizados en el desarrollo de las clases, en el cuaderno III muestra la idea de equilibrio muy clara en la ficha 2.1 y 2.2. La primera es la correspondiente a la representación que se les da.

En la ficha 3 en las actividades 1 y 2, utiliza tres registros, respectivamente:

$$\begin{tikzcd} \text{L.H.} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \text{S.R.E.B.} \arrow[dl, leftrightarrow] \\ & \text{L. Ar.} & \end{tikzcd} \qquad \text{y,}$$

$$\begin{tikzcd} \text{L.H.} & & \text{S.R.E.B.} \arrow[ll] \arrow[dl, leftrightarrow] \\ & \text{L. Ar.} \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \text{L.H.} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \text{S.R.E.B.} \arrow[dl, leftrightarrow] \\ & \text{L. Ar.} & \end{tikzcd}$$

En la actividad de la ficha 4, actividad 2 no va trabajando en paralelo lo que hace en la balanza y lo que hace en la transcripción: en la balanza añade • • • • y en la expresión aritmética añade 4, no 1 +1 + 1+ 1 y luego va quitando 1 a 1 aplicando la ley de monotonía de la suma.

En la actividad 2 de la ficha 5 se limita a denominar “x = plato izquierdo” y “b = plato derecho” y expresar “x = b” sin interpretar el contenido de los platillos.

L.H. $\longrightarrow$ S.R.E.B. $\longrightarrow$ R.F.

Entiende perfectamente el intercambio de miembros de la ecuación.

La actividad 1 de la ficha 6: S.R.E.B.$\rightarrow$R.F., la hace correctamente.

La actividad 2 de la ficha 6 solicita inventar una situación que se corresponda con la ecuación dada y lo hace correctamente tanto en la representación del S.R.E.B. como en el S.R.F. algebraico.

En el uso de dos registros (S.R.E.B. y S.R.F.) desde el lenguaje habitual en las fichas 7 actividad 1 y 7 actividad 2, parece que en la primera 7.1 trabaja independiente un registro del otro y usa “x” en la expresión simbólica y sin embargo en el S.R.E.B. usa valor numérico directamente; además parece usar el doble de tamaño para representar expresar el 6 del 3 con las pesas. En la actividad 2, de la ficha 7, por el contrario ni siquiera pone algo en uno de los platillos.

Los códigos presentados son sólo dibujos sin incógnitas y él pone pesas dentro.

Parece ser un código personal el usar siempre “x” para expresar el valor de la unidad y luego no sabe captar cuando se da el valor del total del número de unidades.

Realiza una mala traducción en la ficha 8.

Utiliza los datos numéricos en la balanza.

No utiliza todos los datos del enunciado en planteamiento y lo hace mal.

Bien si se dice “2 veces” “5 veces ó “triplo” pone 2 ó 5 ó 3 por la representación del objeto unitario.

Resuelve mal la ficha 9 y bien las tres siguientes (10, 11 y 12).

Hace “mentalmente” la suma de un número de balones más el doble del mismo número de balones “3 o”.

No siempre hace bien la traducción “lineal” (aquí es en el S.R.E.B.), sí lo hace bien en el Postest.

En la ficha 13 de conversión de registros desde el S.R.E.B. al R.F. hace correctamente la conversión, sea cual sea la situación de las incógnitas (solas en un platillo, con objetos en un platillo y en dos platillos en uno solas y en otro, no).

Asimismo no se le presenta problema si el coeficiente es uno u otro número diferente en un término, apareciendo términos con la incógnita en un miembro, o en los dos miembros.

Respeta el código utilizado en el enunciado.

En la ficha 15 se trabaja el S.R.V.G.

En cuanto a la habilidad cognitiva presenta error de escala al representar, ya no especifica en general, que la incógnita representa el valor unitario del objeto (una regla, sí, ficha 19).

Como código personal se interpreta el utilizar el signo “=” entre las representaciones de los rectángulos correspondientes a cada uno de los miembros.

Desde las fichas 15 a la 20 ha de hacer conversión de registros desde el lenguaje habitual a representación en el S.R.V.G. y S.R.F. algebraico. Comenzamos la primera ficha por presentar el Sistema de Representación Visual Geométrico y la R.F. algebraica:

$$\begin{tikzcd} \text{L.H.} \arrow[r] \arrow[dr] & \text{S.R.V.G.} \arrow[dl, dash] \\ & \text{R.F. algebraica} \end{tikzcd}$$

Tuvo un problema lingüístico con el término “incrementada” que lo interpretó como “2 veces” y multiplicó en lugar de sumar para añadir.

Muy importante la captación del S.R.V.G. para representar cualquier incógnita (x) y cualquier constante (6, por ejemplo) en sentido bidireccional:

Así:

x como 1 $\boxed{}$ x 1 $\boxed{}$ 6

Parece tener en cuenta la escala a la hora de representar, pero no lo hace exactamente como corresponde.

El trabajo en la ficha 21 se refiere a las conversiones siguientes:

S.R.V.G. $\longrightarrow$ L.H. para :

2 x + 3 = 3x
5 x = 2 x + 6
6 = 2 x
4 + 2 x = 4 x

y S.R.V.G. $\longleftarrow$ L.H. para :

3 x + 4 = 2 x
x + 3 = 2 x
4 x = 2 x + 6

En este cuaderno III, antes de introducir expresamente la resolución de ecuaciones se trabajaron expresiones que contenían “portavariable”. Por ejemplo en “En cada caso, llena el “cuadrito” vacío”:

Las respuestas fueron: (ficha 23)

Enunciado	Alumno (Z)
a) - 8 = 10	a 18 le quito 8 y me quedó 10 (C)
b) + 25 = 41	(C) Tanteando
c) / 4 = 9	multipliqué 4 .9 (C)
d) 4 x = 56	dividí 56 entre 4 (C)
e) x 3 = 270	dividí 279 entre 3 (C)
f) 34 - = 13	a 34 le quité 13 (C)
g) 277 + = 39	a 39 le quité 27 (C)

Enunciado	Alumno (Z)
h) 63 / = 7	63 entre 7 (C)

Tabla 7.19

Como se puede observar el alumno, inconsciente en a) y consciente en b), usa el tanteo en la adición - sustracción.

En el caso de la expresión de la división, apartados c y h, Z hace uso de la prueba de la división, consciente o inconscientemente, y multiplica en el caso c) y divide en el caso h)

Las observaciones añadidas a los resultados en la tabla son expresadas explícitamente por el alumno.

En la ficha 24: En cada caso halla el valor de la "x", las respuestas fueron:

a) 10 - x = 4	x = 5 (Pr); x = 6 (C) por tanteo
b) 4 x = 6 x + 4	x = 2 (Pr); 4x = 6 x + 4 4 x - 6 x = 4 2 x = 4 $x = \frac{4}{-2}$ x = -2 Comprobación: 4 (-2) = 6 . (-2) + 4 -8 = -12 + 4 -8 = -8
c) $3 = \frac{27}{x}$	x = 9 (Pr y C))
d) 8x + 3 = 5 x + 9	x = 2 (Pr); 4x = 6 x + 4 4 x - 6 x = 4 2 x = 4 $x = \frac{4}{-2}$ x = -2 Comprobación: 8. (2) + 3 = 5. (2) + 9 16 + 3 = 10 + 9 19 = 19 (C)

Hay momentos en que trabaja como si el "=" no tuviese el auténtico sentido que le corresponde a una ecuación sino como si se tratase de su uso en la Aritmética.

En el Cuaderno IV se le recuerda la idea de equilibrio de la balanza, relacionándola con la ecuación, se le hace reflexionar acerca de los valores que ha introducido en los portavariables y se les llama ya "soluciones" de las ecuaciones planteadas.

Para la "Resolución de Ecuaciones" se sigue un proceso similar al del tratamiento con la simple conversión de registros. Primero se le hace un ejemplo de representación y luego se pasa a trabajar ejercicios de la forma:

Dada la ecuación, resolver en el S.R.E.B. y en el sistema formal algebraico:

S.R.E.B. ⟷ S.R.F.

- x + 3 = 2 x
- 4 x = 2 x + 6
- 3 x + 2 = 5

Sea cual sea el tipo de ecuación dada para resolver, lo ha hecho bien. En el caso del S.R.E.B. no llega al final sino la situación la detiene cuando en un platillo está el contenido del termino que contiene la incógnita, y en el otro el dato conocido; sin embargo en el lenguaje algebraico llega al valor unitario de la incógnita, pero está ausente algún paso intermedio: Por ejemplo en la ficha 4, números 1 y 2:

1) 4 x = 2 x + 6
 4 x - 2 x = 2 x - 2 x + 6
 Este paso que parece faltar sí lo ha realizado en el S.R.E.B.
 3 = x. Esta fase, por el contrario no la ha realizado en el S.R.E.B.

2) 3 x + 2 = 5
 3 x + 2 - 2 = 5 - 2
 Vuelve a faltar este paso como en el ejercicio anterior, pero también lo realiza en el S.R.E.B.
 x = 1 esta fase tampoco la realiza en el S.R.E.B.

Posteriormente cuando se le plantean ecuaciones en el S.R.F., para resolver, fuera de conexión con el S.R.E.B. usa simplemente transposición de términos.

En la entrevista tercera, primera de ecuaciones, también se pueden detectar H.C.C.C. en las representaciones en el S.R.E.B.

En la ficha primera de esta entrevista aparecen dos preguntas en las que la primera de ellas tiene dos actividades (1.1 y 1.2) y la segunda, sólo una (2):

Representa en la BALANZA

1. 1. Añadiéndole 3 kilos al peso de una lata de pintura, el peso es 9 kilos.

BALANZA	EXPRESIÓN SIMBÓLICA

1.2. Al añadir 7 kilos al peso de una bolsa de manzanas, el resultado es 7 kilos más dos kilos.

BALANZA	EXPRESIÓN SIMBÓLICA

La pregunta 2: El triplo del peso de un libro más 2 kilos es 5 kilos.

BALANZA	EXPRESIÓN SIMBÓLICA

La pregunta 3: El peso de 2 barras de metal más 3 kilos, es 7 kilos,

Al principio necesita <u>representar</u>, en el S.R.E.B., en los dos platillos, al margen del enunciado, situaciones idénticas, no se conforma con que sean equivalentes (en todos los ejercicios se da el dibujo de una balanza con los platillos vacíos).

Le sorprende el signo “=” del dibujo, quizás no es muy adecuado, cuando en realidad en los enunciados el “=” se sustituye por “es” y otras expresiones.

En las preguntas 4, 5 y 6:

4. Cuatro bolsas de pastas de chocolate pesan 20 kilos.
5. El doble del peso de un bolígrafo más 8 gramos es 3 veces el peso del bolígrafo
6. Simbolizando un número de balones con “o”, representa: “la suma de un número de balones más el doble del mismo número de balones, es igual a 24”

BALANZA	EXPRESIÓN SIMBÓLICA

ya comienza a tener en cuenta el enunciado a la hora de representar lo que realmente dice el texto, bien si se trata de sumar (“2 x + 8 = 3x”; o “+ 2” o “= 24”) o de multiplicar (“4 x = 20”).

Mejoró con respecto al trabajo de clase. Aquí tiene muy claro qué expresa la variable “x” que usa, y allí, no.

Hay un cambio sistemático en las expresiones de la entrevista y las del cuaderno. En éste, al aparecer “2 veces”, “3 veces”, “5 veces”, “doble”, “triplo”, “3 pins”, lo indica poniendo un 2, 3, 5, 2, 3 y 3, respectivamente que implicaría multiplicar, aquí en la entrevista sustituye por dos dibujos “iguales” para el doble, tres dibujos iguales para 3 veces, etc. (por ejemplo en la pregunta 5).

5. El doble del peso de un bolígrafo más 8 gramos es 3 veces el peso del bolígrafo

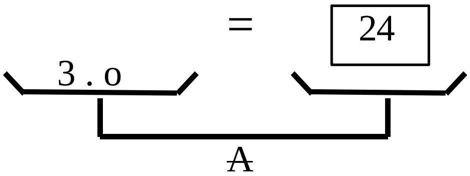
BALANZA	EXPRESIÓN SIMBÓLICA

En Resolución se observa que así como en el trabajo de clase se representaron los números con unidades y códigos como “◯”, aquí usa los códigos.

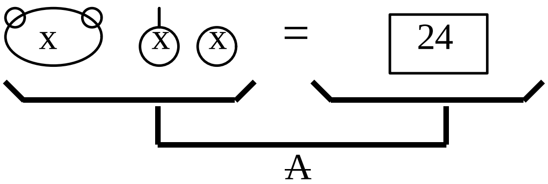
6. Simbolizando un número de balones con “o”, representa: “la suma de un número de balones más el doble del mismo número de balones, es igual a 24”

BALANZA	EXPRESIÓN SIMBÓLICA

Así:



3 . o = 24 (C)



“o” + “2o”= 24 (E)

A partir de aquí ya se adapta al enunciado aún cuando el enunciado no está contextualizado.

La pregunta 7: Resuelve la siguiente ecuación: $4 x = 2 x + 6$

BALANZA	ALGEBRAICO

Al ver la expresión de tipo $Ax = B x + C$, dice que la balanza está desequilibrada, quizás sea por haber dos términos o por ser coeficientes variados. Se le cuestiona sobre el "=" que aparece y entonces cambia de rumbo y busca valores de "x" que identifiquen los valores numéricos de los dos miembros. Intenta hacer en la balanza lo que hace por rutina, los "2 x" del segundo miembro, pasarlos al primero, que en álgebra pasan restando y luego se da cuenta que tiene que tachar, no poner "2x" más en el primer platillo. Cuando llega a "$2x = 6$" dice que de ahí, ya se saca el valor de la incógnita, pues dice "2x", "dos manzanas" o "de lo que sea", es igual a 6 kilos, lo pone en un contexto para hacerse comprender.

Entiende perfectamente que sumar, restar, multiplicar o dividir por la misma cantidad los dos miembros (ley de monotonía), no altera la igualdad.

En la pregunta 8:

Resuelve la siguiente ecuación: $x + 3 = 2 x$

BALANZA	ALGEBRAICO

también contextualiza al hablar y lo hace de "kilo". Comienza por trabajar en el S.R.E.B. y en vez de suprimir, añade "2x" a los dos miembros, luego quita "3x" a cada uno y se queda ya con el valor de la incógnita aislado. Luego trabaja en lenguaje algebraico y va trasladando las situaciones del S.R.E.B. al S.R. F.

En la pregunta 9: Hallar la solución de las ecuaciones siguientes:

a) $3 + x = 5$

b) $3 x + 8 = 20$

c) $2 x + 3 = 5 x$,

se le da a elegir un ejercicio y elige el del apartado c); cuando en $A x + B = C x$ y $C > A$ pasa el segundo miembro a ser primero y viceversa, dice que le ha dado la vuelta ($2 x + 3 = 5 x$ y hace $5 x = 2 x + 3$). Le resulta más cómodo trabajar con Cx en el primer miembro pues $C > A$ (entiende por "dar la vuelta" en la balanza, el poner el peso de un platillo en el otro y viceversa, sin embargo se le hace difícil expresarlo con palabras. Se le pregunta qué es para él "darle la vuelta a la balanza" y contesta "coger el peso de uno ponerlo en el platillo y coger el peso del platillo y ponerlo encima").

Se le nota que entiende perfectamente la situación de la ecuación como una balanza de brazos iguales en equilibrio así como la relación entre la sintaxis algebraica y la manipulación en los platillos de la balanza. Intenta, cuando es posible, descomponer el todo en partes para relacionar luego partes conocidas; no tiene problemas, como no los ha tenido en otras ocasiones, con la palabra triple e incluso hace buen uso de este vocablo y dice que “el triplo del peso de un libro es lo mismo que tres veces ese libro”

En la cuarta sesión, “conversión de registros”, como en la sesión anterior, se trata de pasar desde el lenguaje habitual al S.R.F algebraico a través del S.R.V.G. que hemos establecido desde el principio de nuestra investigación, y en la “resolución” el objetivo es resolver sencillas ecuaciones a partir del S.R.F. algebraico también a través del S.R.V.G. Se intenta potenciar este sistema de representación continuo, por supuesto sin abandonar los discretos y haciendo de enlace el S.R.V.F. de visualización simplificada. Ya hemos indicado nuestro objetivo de profundizar en el análisis cualitativo de la interrelación entre los aspectos numérico y geométrico y los acercamientos espontáneos de los niños a las ecuaciones no aritméticas, el uso de sistemas de representación concretos para operar con las letras y las incógnitas en particular, sabiendo que esto forma parte de los procesos de la transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico. Se intenta también ver el comportamiento de los niños, inmediatamente después de que se les proporciona instrucción, con apoyo de modelos concretos, para plantear y resolver “nuevas” ecuaciones.

En el S.R.V.G., en la pregunta número 1

1. Completa la siguiente tabla:

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
	x + 3 = 2 x

parece entender el concepto de unidad, pero en la pregunta 2:

2. Completa la siguiente tabla:

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
	3 x + 2 = 5

hay que hacerle caer en la cuenta en la representación proporcional, a “escala”, pero dialogando, se ve lo entiende. Tiene muy claro, al menos eso parece, el concepto de unidad.

En la cuestión 3:

El precio de 2 lápices más 8 pesetas es 3 veces el precio de un lápiz.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA

pregunta si lo ha de hacer con el S.R.E.B. a pesar de venir en el recuadro el S.R.V.G. y el S.R.F. algebraico. Sigue manifestando su claridad en cuanto a la unidad.

En la pregunta 4: El triplo del número de discos de un cantante más 4 es 7 veces el número de discos.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA

expresa rápido 3 x + 4 = 7 x.

En las cuestiones 5 y 6:

5. Resuelve la siguiente ecuación: 4 x = 2 x + 6

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA

6. Resuelve la siguiente ecuación: 3 x + 2 = 5

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA

se le pregunta si hay diferencia entre estos ítems y los anteriores y al principio sólo dice que están más detallados los anteriores y es posible sea porque aquellos son expresiones contextuales, pero no llega a caer en la cuenta; luego, más adelante percibe que aquí "ha de resolver" y él sabe que esto implica hallar el valor de la incógnita. Vuelve a preguntar si representa el S.R.E.B. a pesar de pedir la representación en el S.R.V.G. y S.R.F. algebraico. Siempre tiene tendencia a resolver formalmente y luego representar. Usa bien las unidades, pero al final, cuando el coeficiente de la incógnita no queda la unidad, le cuesta un poco aplicar que resolver implica hallar el valor de la incógnita exclusivamente y no el del término que tiene la incógnita.

A modo de ejemplo se muestran a continuación varias tareas relativas a diferentes datos obtenidos por los distintos instrumentos utilizados y organizados según las categorías citadas.

Tareas	**Resultados**
O_1 Uso de las reglas de transformación.	
Pr1 (ítems 13-16) En cada caso halla el valor de la "x" **a)** x - 4 = 12 (ítem 13) **b)** 4 x + 16 = 7 x + 1 (ítem 14) **c)** 16 + x = 34 (ítem 15) **d)** 8 x + 10 = 4 x + 2 (ítem 16)	Pr1 (ítems 13-16) a) x = 16 (ítem 13) Los ítems 14, 15 y 16 no los resolvió en el Pr1.
Po2 (ítem 5) Resuelve: 8 x + 3 = 5 x + 9. Explica cómo lo has hecho.	Po2 (ítem 5) 8 x + 3 = 5 x + 9 8 x - 5 x = 9 - 3 3 x = 6 x = 6/3 = 2
Po2 (ítem 6) **a)** 8 veces el peso de una lata de pintura más 3 es igual a 5 veces el peso de la lata de pintura más 9. ¿Cuánto pesa la lata?.	Po2 (ítem 6) x = peso de una lata de pintura 8 x + 3 = 5 x + 9 8 x - 5 x = 9 - 3 3 x = 6 x = 6/3 = 2
Pr2 (ítems 1 - 4) En cada caso halla el valor de la "x" **a)** 10 - x = 4 (ítem 1) **b)** 4 x = 6 x + 4 (ítem 2) **c)** 3 = 27/x (ítem 3) **d)** 8 x + 3 = 5 x + 9 (ítem 4)	 Pr2 (ítems 1 - 4) ítem 1 (solución x = 5), incorrecto. ítem 2 (solución x = 2), incorrecto. ítem 3 (solución x = 9), correcto. ítem 4: No resuelto.

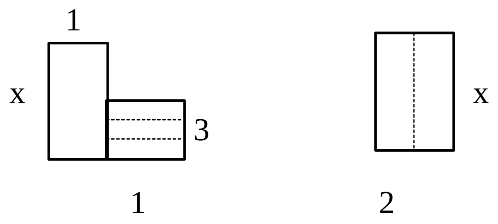
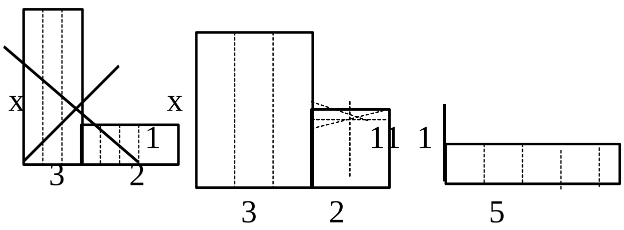
Tareas	**Resultados**
Pr2 (ítem 45) En una familia la madre tiene 37 años y el padre 46. La suma de las edades de la madre y sus hijas (quintillizas) es igual a la del padre con la de dos de sus hijas, ¿cuál es la edad de cada una de sus hijas?.	Pr2 (ítem 45) No resuelto
Po2 (ítem 7) En una empresa el presidente tiene 37 años y el dueño 46. La suma de las edades del presidentes y sus 5 empleados (todos de la misma edad) es igual a la del dueño con la de dos de sus empleados, ¿cuál es la edad de cada uno de sus empleados?.	Po2 (ítem 7) 37 = presidente 46 = dueño 37 + 5 x = 46 + 2 x 5 x - 2 x = 46 + 37 3 x = 9 x = 9/3 = 3 37 3 3 3 3 + 3 52 46 3 + 3 52
O_2 Procedimientos de resolución en “x + b= c”	
O_2 Pr1 (ítems 13 y15) En cada caso halla el valor de la “x” **a)** x - 4 = 12 (ítem 13) 16 + x = 34 (ítem 15) Pr2 (ítem 1) En cada caso halla el valor de la “x” 10 - x = 4 (ítem 1)	Pr1 (ítems 13 y 15) a) x = 16 (ítem 13) El ítem 15 no lo resolvió en el Pr1. Pr2 (ítem 1) ítem 1 (solución x = 5), incorrecto.
O_3 Procedimientos de resolución en “a x = b”.	
O_3 Pr2 (ítem 3) En cada caso halla el valor de la “x” 3 = 27/x (ítem 3) Pr2 (ítem 45) En una familia la madre tiene 37 años y el padre 46. La suma de las edades de la madre y sus hijas (quintillizas) es igual a la del padre con la de dos de sus hijas, ¿cuál es la edad de cada una de sus hijas?.	Pr2 (ítem 3) ítem 3 (solución x = 9), correcto. Pr2 (ítem 45) No resuelto
O_4 Procedimientos de resolución en “a x + b = c x + d”.	
O_4 Pr1 (ítems 14 y16) En cada caso halla el valor de la “x” **a)** 4 x + 16 = 7 x + 1 (ítem 14) **b)** 8 x + 10 = 4 x + 2 (ítem 16) Pr2 (ítems 2 y 4) En cada caso halla el valor de la “x” **a)** 4 x = 6 x + 4 (ítem 2) **b)** 8 x + 3 = 5 x + 9 (ítem 4) o2 (ítem 5)	Pr (ítems 14 y 16) Los ítems 14 y 16 no los resolvió en el Pr1. Pr2 (ítems 2 y 4) ítem 2 (solución x = 2), incorrecto. ítem 4: No resuelto. Po2 (ítem 5)

Tareas	**Resultados**
Resuelve: 8 x + 3 = 5 x + 9. Explica cómo lo has hecho.	8 x + 3 = 5 x + 9 8 x - 5 x = 9 - 3 3 x = 6 x = 6/3 = 2
Po2 (ítem 6) **a)** 8 veces el peso de una lata de pintura más 3 es igual a 5 veces el peso de la lata de pintura más 9. ¿Cuánto pesa la lata?.	Po2 (ítem 6) x = peso de una lata de pintura 8 x + 3 = 5 x + 9 8 x - 5 x = 9 - 3 3 x = 6 x = 6/3 = 2
Po2 (ítem 7) En una empresa el presidente tiene 37 años y el dueño 46. La suma de las edades del presidentes y sus 5 empleados (todos de la misma edad) es igual a la del dueño con la de dos de sus empleados, ¿cuál es la edad de cada uno de sus empleados?.	Po2 (ítem 7) 37 46 37 = presidente 3 3 46 = dueño 3 + 3 37 + 5 x = 46 + 2 x 3 ____ 5 x - 2 x = 46 + 37 3 52 3 x = 9 + 3 x = 9/3 = 3 ____ 52
O_5 signos negativos en los coeficientes de la ecuación.	
O_5 Pr2 (ítem 1) En cada caso halla el valor de la “x” 10 - x = 4 (ítem 1)	Pr2 (ítem 1) ítem 1 (solución x = 5), incorrecto.
C_3 Conversión del lenguaje habitual al lenguaje algebraico.	
Pr2 (ítem 45) En una familia la madre tiene 37 años y el padre 46. La suma de las edades de la madre y sus hijas (quintillizas) es igual a la del padre con la de dos de sus hijas, ¿cuál es la edad de cada una de sus hijas?.	Pr2 (ítem 45) No resuelto
Po2 (ítem 6) 8 veces el peso de una lata de pintura más 3 es igual a 5 veces el peso de la lata de pintura más 9. ¿Cuánto pesa la lata?.	Po2 (ítem 6) x = peso de una lata de pintura 8 x + 3 = 5 x + 9 8 x - 5 x = 9 - 3 3 x = 6 x = 6/3 = 2
Po2 (ítem 7) En una empresa el presidente tiene 37 años y el dueño 46. La suma de las edades del presidentes y sus 5 empleados (todos de la misma edad) es igual a la del dueño con la de dos de sus empleados, ¿cuál es la edad de cada uno de sus empleados?.	Po2 (ítem 7) 37 46 37 = presidente 3 3 46 = dueño 3 + 3 37 + 5 x = 46 + 2 x 3 ____ 5 x - 2 x = 46 + 37 3 52 3 x = 9 + 3 x = 9/3 = 3 ____ 52

Se observa en el cuadro anterior resultados de varios ítems que se propusieron al alumno en distintas ocasiones, en algunos de los cuales respondió de diferente forma.

Concretamente y a modo de ejemplo se presenta literalmente la transcripción de la entrevista relativa a la sesión cuarta en los ítems 1 y 2:

Completa la siguiente tabla:

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	**EXPRESIÓN ALGEBRAICA**
	x + 3 = 2 x
REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	**EXPRESIÓN ALGEBRAICA**
	4 x = 2 x + 6
REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	**EXPRESIÓN ALGEBRAICA**
	3 x + 2 = 5

Z: Aquí lo represento con rectángulos ¿no?.
E: Claro, es una representación geométrica.
Z: x + 3 y después igual a 2x.
E: ¿La x tiene que ser igual en el uno, y en el otro?.
Z: ¿Eh?. Sí.
E: Tiene que ser igual, otra cosa es que la dibujes más o menos, pero tiene que ser igual, ¿no?. Mira a ver el último de abajo por ejemplo.
Z: 3x + 2.
E: ¿Eso qué es?.
E: ¿Y 2?.
Z: Eso que dice ahí 3.
E: Pero espera ese 3 y ese 2 ¿qué pasa? mide mucho más el 2 que el 3. ¿Cómo es eso?.
Z: Lo tacho 3x.
E: ¿Y el uno puede ser más grande que el 2?.
Z: No, pero es que no sé.
E: A qué tiene que ser igual esa cantidad equivale a l.
Z: A la unidad.
E: Sí pero en este dibujo, a qué tiene que ser igual, si lo hiciera, bien con la regla y todo.
Z: A la unidad.

E: A cuál unidad, cuál es la unidad aquí. Cuánto mide aquí la unidad, dónde está puesta, dónde está representada, cuando tú dices 3 aquí, ¿qué significa? ¿3 qué?.
Z: 3 unidades.
E: Por eso te estoy preguntando que si el 1 .... hasta dónde quedaría más o menos, más aproximado.
Z: Un poco menos.
E: Claro, ¿ves?
Z: igual a 5.
E: ¿También tienen que ser iguales las unidades o no?.
Z: Sí.

Nos parece interesante indicar alguna observación que este alumno hizo, relacionada con la experiencia: "Álgebra. Bueno para empezar quiero decir que el Álgebra es una parte de las matemáticas muy especial por que es como una experiencia nueva, es decir, ya no son los números ahora son letras con las que e puede trabajar como con los números pero más fácil ya que no hay que adivinar un resultado concreto sino 2a, 4a, a^2 respecto a los ejercicios pues no son como los números que hay un montón de reglas sino hay que sacarlo por la lógica, casi siempre, es decir, el álgebra es como estar en 1º y aprender a escribir".

Capítulo 8
El Estudio De Actitudes De Los Alumnos

CAPÍTULO 8: EL ESTUDIO DE ACTITUDES DE LOS ALUMNOS

8.1 INTRODUCCIÓN

El comportamiento de un sujeto está determinado en considerable medida por sus actitudes. De aquí que reflexionemos acerca de ¿qué se entiende por actitud? Para reflexionar sobre la historia de este concepto hay que remontarse a los trabajos de G. Allport (1967) en 1935 y de Fleming (1967) que narra las vicisitudes del término desde su aparición en el idioma inglés en 1710, vía francesa, y desde el vocablo attitudine, derivado, a su vez, del latín medieval aptitudo y del clásico aptus, hasta su introducción en la Psicología social a través de Thomas y Znaniecki en 1918 (Visauta, 1989).

Jiménez (1981) recoge algunas de las posiblemente más de 100 definiciones existentes del concepto de actitud y señala, extraídos de esas definiciones, algunos de los componentes esenciales del constructo:

"Se trata, como se ve, de una predisposición a actuar aprendida, dirigida hacia un objeto, persona o situación y que incluye dimensiones cognitivas, afectivas o evaluativas y eventualmente, propiamente conductuales. Todo ello organizado no caóticamente, sino de una forma estructurada, sistemática, esto es, con unos elementos relacionados entre sí, de forma tal, que el cambio de uno de ellos influye en los demás".

Todos sabemos que en la enseñanza-aprendizaje del Álgebra, como en la de toda la Matemática, nos encontramos con una gran variedad de dificultades. Entre ellas no podemos olvidar las "debidas a actitudes afectivas y no racionales hacia el Álgebra".

La investigación en el dominio afectivo está actualmente alcanzando una gran importancia. Sus resultados han puesto de manifiesto que necesitamos conocer las creencias, actitudes y emociones que experimentan las personas durante su aprendizaje, ya que estas variables tienen gran influencia sobre el mismo. Los educadores, hoy, somos conscientes que los estudiantes aprenden en la escuela no sólo contenidos conceptuales sino también normas de interacción, concepciones sobre el mundo y actitudes hacia lo que les rodea.

Los aspectos afectivos están siendo contemplados en las distintas reformas educativas; en concreto, el Informe Cockroft (1982), los Estándares Americanos (1989) y el Australian Education Council (Leder, 1992), y en España, los Diseños Curriculares Base (1989).

El Informe Cockcroft señala que "*el alumno no se limita a aprender la asignatura sino que también adopta una postura ante ella*" y "*subraya la necesidad de esforzarse por fomentar una actitud positiva ante las Matemáticas desde los primeros días de la escuela*". Los Estándares Curriculares presentan entre sus objetivos más importantes: el de ayudar a los alumnos a comprender el valor de las Matemáticas y desarrollar la confianza del estudiante. Leder (1992) enfatiza la importancia que atribuye el Australian Education Council a las actitudes de los estudiantes hacia la materia: "*Un importante fin de la educación Matemática es desarrollar en los estudiantes actitudes positivas hacia las Matemáticas y su implicación en ellas... La noción de tener una actitud positiva hacia las Matemáticas incluye tanto el gusto hacia ellas como un buen sentimiento de la propia capacidad al enfrentarse con situaciones en las cuales las Matemáticas están implicadas*".

Por último, los Diseños Curriculares Base españoles colocan los contenidos de actitudes a la misma altura que los de conceptos o de procedimientos. La L.O.G.S.E. indica que *"la actividad matemática no sólo contribuye a la formación de los alumnos en el ámbito del pensamiento lógico-matemático, sino en otros aspectos muy diversos de la actividad intelectual como la creatividad, la intuición, la capacidad de análisis y de crítica, etc. También puede ayudar al desarrollo de hábitos y actitudes positivas frente al trabajo, favoreciendo la concentración ante las tareas, la tenacidad en la búsqueda de soluciones a un problema y la flexibilidad necesaria para poder cambiar de punto de vista en el enfoque de una situación. Asimismo, y en otro orden de cosas, una relación de familiaridad y gusto hacia las Matemáticas puede contribuir de forma importante al desarrollo de la autoestima, en la medida en que el alumno llegará a considerarse capaz de enfrentarse de un modo autónomo a numerosos y variados problemas"*. (D.C.B.- E.S.O., 1989).

Hay también que tomar en consideración lo relativo a la actitud del profesor y así en las "Orientaciones didácticas y para la evaluación" del D.C.B. de la E.S.O. (1989) se señala *"Cada profesor adopta en el aula una serie de decisiones y actitudes que traducen sus ideas acerca de qué son, para qué sirven y cómo se aprenden las Matemáticas, sin olvidar su propia predilección hacia una u otra parte de la asignatura o hacia determinado tipo de actividades"*.

Los aspectos afectivos engloban un amplio número de conceptos y fenómenos, tales como sentimientos, emociones, creencias, actitudes, etc., cada uno de los cuales no está perfectamente delimitado, y, éste es uno de los problemas que encontramos en las investigaciones sobre este dominio, la falta de clarificación de los términos utilizados. Esta dificultad no afecta sólo a los trabajos hechos por educadores matemáticos, sino que incluye igualmente los hechos por los psicólogos.

Beltrán (1985) señala que "*hay necesidad de investigación básica sobre los factores causales de las actitudes en general y, sobre todo, de las actitudes escolares, así como de las condiciones que favorecen el desarrollo de las actitudes positivas hacia las distintas materias de estudio, teniendo en cuenta las características de los estudiantes y la situación específica en que se encuentran. Debe también centrarse la investigación sobre la interacción* *de los individuos con la organización escolar, las características del grupo y el modo en que estas interacciones afectan a las actitudes. Y, por último, conviene desplazar el estudio desde el rendimiento, donde ha estado excesivamente centrado, a las actitudes hacia el aprendizaje como tal, la escuela, los profesores, las áreas vocacionales o la identidad del papel sexual".*

Una de las primeras dificultades de estas investigaciones es la ausencia de una teoría general para el dominio afectivo. El intento más reciente en educación matemática de desarrollar un marco teórico para el dominio afectivo ha sido realizado por McLeod (1989, 1992).

McLeod se inclina por la teoría general de Mandler, que desarrolla primeramente en el año 1984, y que, posteriormente, aplica sus ideas a los problemas en educación matemática (Mandler, 1989).

De forma resumida, la teoría de las emociones de Mandler, desarrollada a partir del enfoque del procesamiento de la información, ofrece un marco para describir y explicar las reacciones emocionales de los alumnos ante tareas y problemas matemáticos. Mandler distingue dos grandes aspectos en el análisis que realiza de las emociones: la actividad fisiológica y el análisis cognitivo del significado. La activación está provocada por la interrupción de una secuencia de pensamientos y acciones planificadas, basada en esquemas, secuencia que puede no tener éxito o no ser la apropiada en la situación en la que se está ejecutando. Este bloqueo o estas discrepancias originan una respuesta fisiológica, que es percibida por el individuo como un incremento en el pulso o una tensión muscular, debidas al incremento de la actividad del sistema nervioso autónomo. Junto con esta activación el sujeto analiza y evalúa la nueva entrada de información y el significado de la interrupción. El resultado de esta evaluación desencadenada por los esquemas, junto con la activación produce la experiencia de una emoción tal como desilusión, frustración, rabia, satisfacción, etc. Las respuestas sirven como mecanismos para redirigir la atención del individuo y tienen un valor de supervivencia, que posiblemente juegue un papel en el desarrollo evolutivo.

McLeod (1992) concluye que estas interrupciones tienen varias posibilidades de análisis. Primero, los conocimientos del individuo y las creencias juegan un papel importante en la interpretación de la interrupción. Segundo, la excitación que sigue a la emoción es generalmente de duración limitada, y tercero, las interrupciones repetidas en el mismo contexto se convierten en emociones cada vez menos intensas, pero que generan actitudes negativas. Esta descripción de cómo se produce una emoción se ajusta muy bien a las Matemáticas, así, el alumno que repetidamente falla, siente emociones negativas, que dan origen a actitudes negativas hacia las Matemáticas.

Dentro de este amplio campo del dominio afectivo, nos vamos a centrar en las actitudes. Una de las primeras dificultades que encontramos al abordar este aspecto, es la propia definición del término. Kulm (1980) cita varias definiciones de *actitud* de raíz behaviorista. La primera es la de Allport (1935), que la define como *“un estado mental y neural, organizado a través de la experiencia y que ejerce una influencia directa y dinámica sobre la respuesta de un individuo a todos los objetos o situaciones con las que está relacionado”*.

A continuación, cita la de Rokeach (1972) que, aunque posterior en el tiempo, no ha cambiado mucho: *“actitud es una organización de varias creencias centrada en un objeto específico o una situación que nos predispone a responder de una manera preferente”*.

Krathwohl, Bloom y Masia (1964, citados también por Kulm) elaboran una taxonomía del dominio afectivo. Su objetivo es ayudar a los educadores a desarrollar y medir objetivos afectivos. Ellos ven las conductas afectivas como un continuo jerárquico. En el nivel más bajo (recibir), los estudiantes son sólo conscientes de los fenómenos. Luego, tienen sentimientos sobre ellos (responder), e incluso logran interactuar con ellos (valorar). En el nivel siguiente, conceptualizan su conducta y sus sentimientos (organizar) y, finalmente, desarrollan una filosofía consistente (caracterizar).

Las actitudes hacia las Matemáticas no tuvieron en un primer momento una definición concreta, sino que más bien se definían por los propios instrumentos utilizados para estudiarlas. Sin embargo, Kulm (1980) cita dos definiciones de actitud hechas explícitamente hacia las Matemáticas. La primera la de Romberg y Wilson (1969), los cuales la describen así: *“Si un individuo tiene un conjunto de predisposiciones hacia un objeto de su entorno (p.e. Matemáticas, sobre sí mismo, escuela, profesor, etc) es razonable esperar que tal predisposición interactúe con la percepción del objeto, de forma que afecte la respuesta del individuo hacia dicho objeto”*.

Mientras, Aiken (1972) establece que *“el término actitud se ha usado en muchos estudios para referirse a cosas similares a diversión, interés, e incluso a nivel de ansiedad”*.

Más recientemente, Matos (1991) cita alguna de éstas y añade otras, por ejemplo la de Glencross (1984), cuya idea está basada en un concepto unidimensional traducido por una predisposición aprendida para responder de forma favorable o desfavorable, pero siempre consistente, en relación a un objeto dado, o la de Triandis (1971, citada por Matos), con tres componentes caracterizadoras del concepto: cognitiva, afectiva y comportamental.

Matos afirma que las diferentes aproximaciones al término actitud tienen en común la consideración de la existencia de un mundo exterior, en relación al cual las personas actúan, y previene que este tipo de perspectiva minimiza los aspectos sociales del aprendizaje, que consideran el objeto de la actitud definido previamente, sin depender del alumno y que tiende a explicar las actitudes a través de factores que no han partido del propio alumno.

Hart (1989) revisa diferentes definiciones y concluye que la mayoría de los psicólogos definen la actitud como una predisposición a responder favorablemente o no, hacia un objeto dado (en nuestro caso, hacia las Matemáticas). Esta definición tiene tres componentes: una reacción afectiva o emocional hacia el objeto (componente afectiva: sentimientos y afectos), una conducta hacia el objeto (componente comportamental: acciones e intenciones) y unas creencias sobre el objeto (componente cognitiva: conocimientos y creencias). Por ello, una actitud positiva o negativa hacia las Matemáticas se infiere de la propia conducta de aproximación o alejamiento de las Matemáticas y de las propias creencias sobre lo que son las Matemáticas y cómo pueden ser usadas.

Las revisiones más importantes sobre este tema son las siguientes: Kulm (1980), Bell y otros (1983), Leder (1992, 1993) y McLeod (1989, 1992, 1994).

Kulm (1980) intenta hacer una descripción teórica del estado de las investigaciones sobre las actitudes, aunque cita algunas investigaciones concretas. Establece que hay cinco categorías que pueden ser medidas dentro de la actitud hacia las Matemáticas: Contenido matemático, características matemáticas, prácticas de enseñanza, actividades en clases de Matemáticas y profesor de Matemáticas, y esto a su vez en tres poblaciones que serían los alumnos, sus profesores y otros. Sin embargo, concluye que las diferentes investigaciones sobre los tópicos señalados, o son pocas o no son claras. Por ejemplo, afirma que ha encontrado muy pocos trabajos sobre contenidos específicos (geometría, fracciones, problemas verbales,...).

Para presentar un resumen de las investigaciones sobre las actitudes, las engloba en cuatro áreas principales: relación entre actitudes y logros; factores relacionados con las actitudes; relaciones entre actitudes de padres, profesores y alumnos; e intentos para mejorar las actitudes. Señala también que otros estudios se han encaminado hacia la actitud de los profesores en formación, especialmente los de enseñanza primaria.

1º) La relación entre actitudes y logros es una de las áreas que más atención ha recibido: tratar de investigar qué tipo de relación existe entre las actitudes de los alumnos y su rendimiento en esta materia. Algunos trabajos encuentran una correlación positiva, pero baja.

Otros estudios citados por Kulm (Cohen, 1971; Carman, 1975; Pavlic, 1975) han comenzado a comparar la efectividad de diseños instruccionales innovadores con prácticas tradicionales, pero generalmente sólo indican si los grupos experimentales difieren o no, con respecto al logro o a la actitud. Concluye Kulm, argumentando que la búsqueda de la relación causal entre actitud y rendimiento, tendría una gran importancia para la actitud hacia las Matemáticas.

2º) Entre los factores relacionados con las actitudes, es el sexo el que más atención ha recibido. Hay evidencias que las actitudes hacia las Matemáticas de los hombres y las mujeres son distintas, así como sus cambios en los distintos niveles (Crosswhite, 1972; Fennema, 1974). Otros factores que han sido estudiados son los referidos a: cursos, motivación, status socio-económico, raza, ansiedad, estilo de aprendizaje y preferencia vocacional.

3º) Las actitudes de los padres podrían constituir un factor extremadamente importante para determinar las actitudes y los logros de los alumnos, pudiendo mitigar la mayor parte de los efectos positivos o negativos de los profesores. Las actitudes de los profesores tienen, también, un papel importante al formar actitudes, ya que ellos juegan el principal papel en los logros de sus alumnos y pueden también transferirles sus propias actitudes hacia las Matemáticas. Sin embargo, muy pocas respuestas se han dado a estas afirmaciones. Los estudiantes tienen buenas actitudes cuando perciben que las Matemáticas son útiles y han tenido buenos profesores (Callahan, 1971) y desarrollan actitudes negativas cuando no tienen éxito en sus tareas o no encuentran interés en las Matemáticas (Selkirk, 1975).

4º) Como intentos para mejorar las actitudes aparecen muchos trabajos que realmente tienen que ver con la categoría “estudios de métodos”, porque generalmente lo que tratan es de verificar los cambios producidos por un diseño instruccional innovador, más que de mejorar actitudes.

Sin embargo, los datos sobre las actitudes pueden ser extremadamente útiles para evaluar los efectos de innovaciones curriculares o instruccionales. Pocos son los estudios que cuidan las razones teóricas, los problemas del diseño y las medidas de las actitudes, en la misma medida que cuidan lo relacionado con el conocimiento. Los estudios de este tipo se han hecho en diferentes niveles, desde alumnos de 7º grado hasta personas adultas.

Bell y otros (1983) hacen una amplia revisión de las investigaciones llevadas a cabo en el Reino Unido y USA y, aunque señalan que no quieren hacer una clasificación de las mismas, las agrupan en ciertas áreas, que citamos a continuación:

1.- Estudios que intentan investigar y describir las actitudes de los niños hacia las Matemáticas consideradas como un todo.

Se ha comparado la actitud hacia varias materias y se encontró que en todas las clases, las Matemáticas ocupaban con respecto a la actitud una posición baja, no habiendo diferencias por sexo, y que las actitudes eran menos positivas a medida que el curso ascendía.

Gopal Rao (1973) desarrolla su investigación con alumnos hasta niveles de Secundaria y considera algunos factores que cree que pueden afectar a las actitudes. Encuentra que las Matemáticas es tan pronto una materia que les gusta como que les disgusta fuertemente a los alumnos de Primaria, esto es, hay una considerable polarización y es sobre los 11 años cuando parece que las actitudes están bastante definidas. Suelen ser menos favorables durante los primeros años de Secundaria y se estabilizan otra vez sobre los 14 años. También encontró una correlación significativa entre las actitudes de los padres y las de sus hijos hacia las Matemáticas. Después de la escuela, los chicos tienen generalmente una actitud más favorable que las chicas, pero todos creen que las Matemáticas son útiles.

El trabajo citado de Callahan (1971) en USA, mostró la misma polarización (agrado-extremo desagrado) con alumnos de 11 a 14 años y estableció también la edad de 11 años como la idónea para que se consoliden las actitudes. Encontró también que la creencia que “la Matemática es útil” (66% dicen que es tan o más importante que cualquier otra materia) es una de las razones de los alumnos para gustarles las Matemáticas.

2.- Estudios que intentan establecer comparaciones de actitudes hacia diferentes temas dentro de las Matemáticas.

Kyles y Sumner (1977) confirmaron que las Matemáticas son consideradas útiles por los alumnos de Primaria y Secundaria; éstos últimos reconocen esta importancia de cara a futuros empleos, pero la materia no es del agrado de la mayoría de los alumnos de Primaria y son consideradas absorbentes en Secundaria. En su análisis consideraron dos dimensiones: la facilidad y el agrado. En cuanto a la “facilidad”, los alumnos coinciden con sus profesores y en cuanto al “agrado”, los problemas verbales son más aceptados que otros problemas de Álgebra, geometría, etc.

El Informe APU Primary Survey (1980) reveló también la fuerte tendencia de los alumnos para encontrar útiles las Matemáticas. Se les preguntó si disfrutaban de las Matemáticas y la respuesta mayoritaria fue “algunas veces”; agrado y dificultad no se pueden atribuir a la materia completa, sino que están asociadas con tópicos específicos y formas de presentación.

El APU encontró pequeñas diferencias entre los chicos y las chicas, en aspectos muy concretos. Por ejemplo, las chicas son más propensas a sentirse inseguras que los chicos.

3.- Estudios sobre las percepciones de los alumnos sobre lo que son las Matemáticas.

Preston (1980) identificó, a través de análisis factorial, tres facetas definidas de conducta:

a) Tendencia a ver las Matemáticas como una materia algorítmica, mecánica y algunas veces estereotipada.

b) Tendencia a ver las Matemáticas como un conjunto abierto-cerrado, intuitivo y heurístico.

c) Compromiso, interés y aplicación hacia las Matemáticas.

4.- Estudios sobre las interacciones existentes entre actitudes y logros.

Los estudios relativos a analizar la correlación entre actitudes y logros son contradictorios. Hart (1976) realizó un resumen sobre ellos y comentó que, incluso cuando aparece una correlación significativa, es difícil determinar si la actitud es la que afecta al rendimiento o es al revés.

5.- Estudios para descubrir cómo las actitudes hacia las Matemáticas influyen en las elecciones académicas posteriores de los alumnos.

Los estudios realizados por Stoodley (1979), Kempa y McGough (1977) y Selkirk (1972), encontraron, en general, que son múltiples las variables que inciden en la elección futura de cursos de Matemáticas, y que el agrado hacia la materia parece ser más determinante que la facilidad o la utilidad percibida. De hecho, encontraron alumnos que ejecutaban bien las Matemáticas, pero que las percibían como una materia difícil.

En resumen, lo más destacado es que hay una fuerte polarización de las actitudes en la Escuela Primaria, siendo los 11 años la edad crítica para el establecimiento de las actitudes; que parece existir (aunque no muy fuerte) alguna relación entre las actitudes de los profesores, de los padres y de la escuela como un todo con la de los alumnos, y que al avanzar en los cursos se observa un declive de las actitudes, que puede ser parte de un declive en las actitudes positivas hacia todas las materias y que forma parte de una aproximación más crítica a muchos aspectos de la vida.

Finalmente, McLeod (1992) hace una amplia revisión. Entre los resultados más importantes, resalta que la mayor parte de los estudios de evaluación proveen datos sobre actitudes hacia las Matemáticas. Cita datos de la Evaluación Nacional (Dossey et al, 1988), cuyos principales resultados son: hay una correlación positiva entre actitud y rendimiento en los tres cursos evaluados (cursos 3º, 7º y 11º), pero el porcentaje de estudiantes que dicen disfrutar con las Matemáticas disminuye del 60% en el curso 3º al 50% en el curso 11º. Similares resultados aparecen en el II Estudio Internacional de las Matemáticas (II IEA, Robitaille y Garden, 1989).

Sin embargo, no está claro que la actitud influya sobre el rendimiento ni éste sobre la actitud, sino que ambos interactúan de forma no establecida aún. Por ejemplo, los datos del II IEA muestran que los estudiantes japoneses que obtienen altos rendimientos en Matemáticas, exteriorizan su disgusto hacia ellas.

Matos (1991) presenta cuatro cuestiones fundamentales relativas al estudio de las actitudes de los alumnos hacia las Matemáticas:

1. El estudio de las actitudes de los alumnos constituye una de las preocupaciones más importante de los investigadores en educación matemática. Los estudios realizados en este dominio hasta este momento, reafirman la importancia del estudio de las actitudes de los alumnos y de los profesores, e indican factores que originan esas actitudes y cuáles pueden producir cambios en ellas.

2. La conceptualización de las actitudes como construcción de los alumnos, permite fundamentar un análisis de las actitudes ligadas a sus concepciones y creencias acerca de las Matemáticas.

3. El estudio de las actitudes desde un punto de vista constructivista, puede aportar datos importantes para la comprensión de los procesos de consolidación y cambio de las actitudes hacia las Matemáticas.

4. La metodología adecuada de investigación debe agrupar distintas

estrategias; partiendo de una primera recogida de datos y de una formulación de categorías, se establece una serie de conjeturas que, posteriormente, serán observadas y confirmadas.

En España, las investigaciones sobre actitudes hacia las Matemáticas ha constituido un tema de interés reciente donde el trabajo más significativo es el desarrollado por Gairín (1986).

Gairín define la actitud como una predisposición a actuar y pensar de una determinada forma. Hace una revisión de las investigaciones, considerando las siguientes variables: personales, familiares, escolares y estudios multidimensionales.

Gairín (1990) desarrolló una investigación global para estudiar las actitudes de los alumnos de E.G.B. de diferentes centros en relación a variables personales, familiares y curriculares, estableciendo comparaciones entre Barcelona, el resto de Cataluña y el resto de España. Sus conclusiones confirman la asociación entre los factores personales, familiares y curriculares y la actitud hacia las Matemáticas: la no influencia significativa del sexo, y una relación entre la actitud y la edad, la tipología del centro, la zona donde se ubica y las elecciones por preferencia o importancia que se hacen de las materias del curriculum.

En la Universidad de La Laguna, Quiles (1986) desarrolla una tesis doctoral, titulada *La actitud y el rendimiento escolar en Matemáticas: un acercamiento multidimensional.* El propósito de su trabajo es profundizar en la relación entre la actitud hacia las Matemáticas y el rendimiento en dicha asignatura, observando la actitud del alumno, la de su profesor y la de sus padres en el mismo contexto de investigación. Sus resultados ponen de manifiesto que existe una relación significativa y positiva (aunque baja) entre las actitudes paternas y el nivel de rendimiento logrado por el niño. Las actitudes del profesor parecen no afectar al nivel del rendimiento del alumno; resultado que estima sorprendente y que atribuye a los propios instrumentos utilizados en la investigación, además de no haber estudiado la eficacia del profesorado en la enseñanza de las Matemáticas.

Finalmente, al tratar de determinar la importancia de la actitud matemática del alumno como predictora del rendimiento, se hace patente la controversia existente en este campo. Termina, pues, señalando que la actitud, junto a las variables aptitudinales o las habilidades que el niño posee, explica el porcentaje de varianza más destacado en la nota final de éste.

Nortes Checa (1988) y Giménez (1991) aplican en sus Tesis Doctorales la escala de Gairín para medir las actitudes de sus alumnos. El primero en 6º Curso y el segundo con alumnos de 5º a 8º, haciendo modificaciones en algunos de los ítems. Ambos encuentran que dicha escala (o sus modificadas) tienen altos coeficientes de validez y fiabilidad.

Finalmente, cabe citar el monográfico de la revista Uno (nº 13, 1997) dedicado a actitudes y Matemáticas. En él se destaca como el aprendizaje de contenidos actitudinales es un elemento clave dentro de la formación matemática. Gómez-Chacón (1997) hace una interesante reflexión sobre los enfoques teóricos que sirven de fundamento a la investigación en el dominio afectivo, aclarando algunos aspectos terminológicos, modelos, conceptos, teorías y métodos, que deben guiar este campo de investigación. Este marco teórico le permite abordar una investigación sobre los efectos que producen en las actitudes hacia las Matemáticas de un grupo de alumnos y alumnas de Secundaria después de una intervención en el aula, cuyos resultados positivos ponen de manifiesto que, aunque la modificación de actitudes es lenta, aparece una evolución favorable (Hernández, Gómez-Chacón, 1997).

En este Capítulo presentamos los resultados de dos estudios. El primero de ellos analiza la actitud de alumnos de 7º y 8º de E.G.B. hacia las Matemáticas y hacia el Álgebra. En el segundo estudiamos cómo evoluciona la actitud hacia las Matemáticas en alumnos de 3º a 8º de E.G.B.

8.2 PRIMER ESTUDIO: LAS ACTITUDES DE LOS ALUMNOS HACIA LAS MATEMÁTICAS Y HACIA EL ÁLGEBRA

El objetivo de este trabajo es estudiar la actitud de los niños de 12 a 14 años hacia las Matemáticas y hacia el Álgebra, analizando las posibles analogías y diferencias entre ellas. Junto al estudio global se realiza también un estudio por cursos y por sexos. Para el análisis de los resultados se ha utilizado varias técnicas estadísticas.

Las cuestiones que abordamos en esta investigación son las siguientes:

1.- ¿Cómo es la actitud hacia las Matemáticas y hacia el Álgebra en los niños de 12 a 14 años?

2.- ¿Hay diferencias en las actitudes según los cursos o los sexos?

3.- ¿Hay correlación entre ambas actitudes?

Los instrumentos de medida fueron dos escalas de tipo Likert, con 24 ítems cada una, una para conocer las actitudes hacia las Matemáticas y otra para las actitudes hacia el Álgebra, cuyo proceso de construcción y validación hemos explicado en el Capítulo 3 (3.6). Hemos de tener en cuenta que las actitudes no son realidades empíricas directamente observables, sino que se infiere su existencia de las manifestaciones verbales o escritas de los sujetos estudiados, por ello su medida se ve condicionada no sólo por el ambiente socio-cultural, sino por la naturaleza del objeto a medir.

Hipótesis y su confirmación estadística

Nos planteamos las siguientes hipótesis cuya confirmación o no, pasamos a explicar.

Hipótesis 1: La actitud hacia las Matemáticas es positiva.

Hipótesis 2: La actitud hacia el Álgebra es positiva.

Hipótesis 3: La actitud hacia la Matemáticas está relacionada con la actitud hacia el Álgebra.

Y las hipótesis nulas:
Hipótesis H_{01}: No existen diferencias significativas en las actitudes hacia las Matemáticas según los cursos.
Hipótesis H_{02}: No existen diferencias significativas en las actitudes hacia las Matemáticas según los sexos.
Hipótesis H_{03}: No existen diferencias significativas en las actitudes hacia el Álgebra según los cursos.
Hipótesis H_{04}: No existen diferencias significativas en las actitudes hacia el Álgebra según los sexos.

Hipótesis 1: La actitud hacia las Matemáticas es positiva.

Asignando puntuaciones a los diversos ítems, obtenemos que el nivel medio alcanzado es 28.8, que aunque sobrepasa la mitad de la puntuación total, no es tampoco demasiado alta. La desviación típica es 7.6.

N OF CASES	177
MINIMUM	10.000
MAXIMUM	47.000
RANGE	37.000
MEAN	28.797
VARIANCE	57.697
STANDARD DEV	7.596
STD. ERROR	0.571
SKEWNESS(G1)	-0.122
KURTOSIS(G2)	-0.208
SUM	5097.000
C.V.	0.264
MEDIAN	29.000

Tabla 8.1

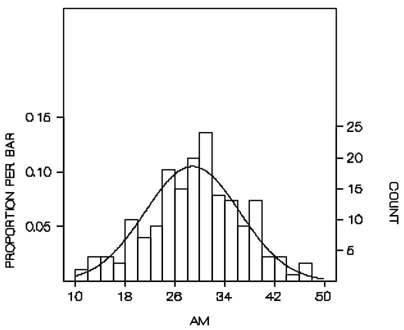


Figura 8.1

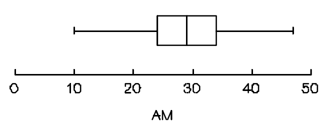


Figura 8.2

Hipótesis 2: La actitud hacia el Álgebra es positiva.

Igualmente, la actitud hacia el Álgebra se revela positiva. En este caso, la media obtenida es 25.1, valor más bajo que el anterior. La desviación típica es 8.

N OF CASES	177
MINIMUM	2.000
MAXIMUM	44.000
RANGE	42.000
MEAN	25.113
VARIANCE	64.169
STANDARD DEV	8.011
STD. ERROR	0.602
SKEWNESS(G1)	-0.343
KURTOSIS(G2)	-0.023
SUM	4445.000
C.V.	0.319
MEDIAN	26.000

Tabla 8.2

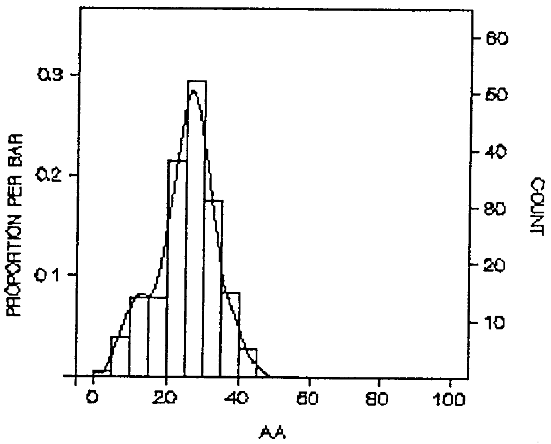


Figura 8.3

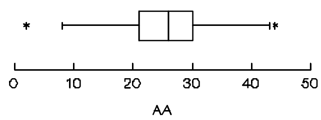


Figura 8.4

Hipótesis 3: La actitud hacia las Matemáticas está relacionada con la actitud hacia el Álgebra.

Para analizar la relación de la actitud hacia las Matemáticas con la actitud hacia el Álgebra, aplicamos una prueba t-Student de diferencias entre medias de ambas actitudes (dado que la escala era la misma para ambos casos) (Anexo 21, 1). Las medias obtenidas han sido 28.8 para la actitud hacia las Matemáticas y 25.1 para la actitud hacia el Álgebra. La prueba t-Student de diferencias no arroja diferencias estadísticamente significativas entre ambas actitudes, t(176)= 7.951, p=.000. Así pues, podemos afirmar que los valores obtenidos en ambas actitudes son similares.

Hipótesis H_{01}: No existen diferencias en las actitudes hacia las Matemáticas, según los cursos.

Hipótesis H_{02}: No existen diferencias en las actitudes hacia las Matemáticas, según los sexos.

Estas dos hipótesis las estudiamos conjuntamente. Para tratar de ver si hay diferencias entre los cursos y los sexos, aplicamos un ANOVA factorial con dos factores intersujeto: curso (7º y 8º) y sexo (niños vs. niñas) (Anexo 21, 2). El principal resultado obtenido es la influencia estadísticamente no significativa ejercida por los factores CURSO y SEXO sobre la actitud hacia las Matemáticas: F(1, 173)= 3.454, p=.065 . En efecto, las medias obtenidas para los cursos 7º y 8º han sido, respectivamente, 30.1 y 27.5. En séptimo curso se observa una actitud más favorable.

No se han observado tampoco efectos significativos según el sexo (F (1, 173) = 3.589, p=.060), (las medias obtenidas fueron 30.5 para los niños y 28.1 para las niñas: los niños muestran un nivel algo superior) ni de la interacción entre ambos factores (F(1,173) =0.293 , p= 0.589). Las figuras 8.5 y 8.6 muestran los resultados con respecto al curso y al sexo, respectivamente.

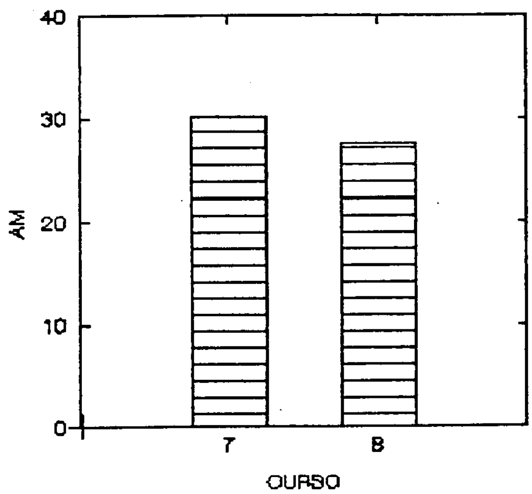


Figura 8.5

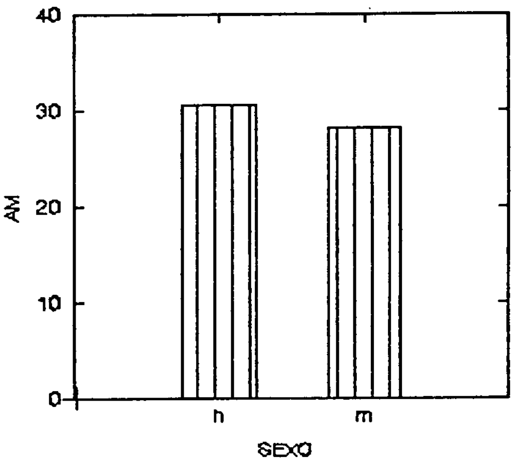


Figura 8.6

Hipótesis H_{03}: No existen diferencias en las actitudes hacia el Álgebra, según los cursos.

Hipótesis H_{04}: No existen diferencias en las actitudes hacia el Álgebra, según los sexos.

Realizamos el mismo análisis con la escala de actitud hacia el Álgebra. Aplicamos de nuevo un ANOVA factorial con dos factores intersujeto: curso

(7º y 8º) y sexo (niños vs. niñas) (Anexo 21, 3). El principal resultado obtenido es la influencia estadísticamente significativa ejercida por el factor CURSO sobre la actitud hacia el Álgebra: F(1, 173)= 8.152, p=.005. En efecto, las medias obtenidas para los cursos 7º y 8º han sido, respectivamente, 27.3 y 22.9. También aquí se observa una actitud más favorable en los alumnos de 7º.

No se han observado efectos significativos del sexo (F (1, 173)=1.750 , p=.188), (la media de los niños es 26.4 y la de las niñas 24.6) ni de la interacción entre ambos factores (F(1,173) =1.982 , p= 0.161). Las figuras 8.7 y 8.8 muestran estos resultados.

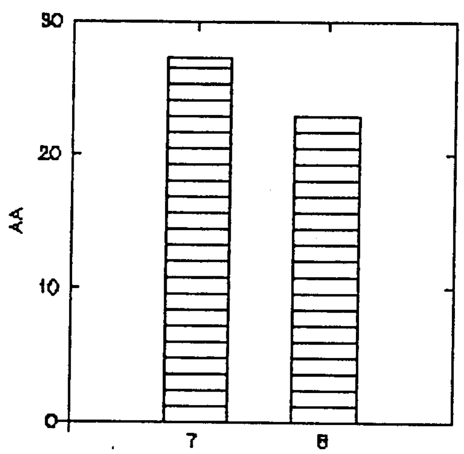


Figura 8.7

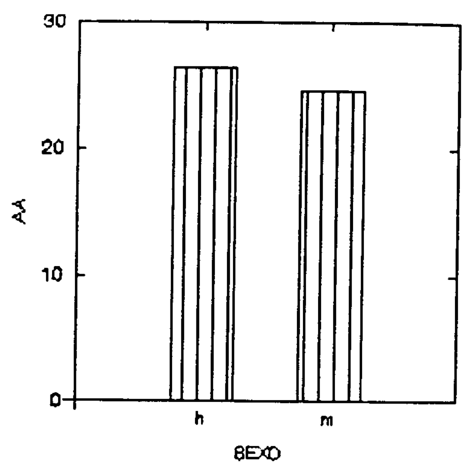


Figura 8.8

8.3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA ACTITUD HACIA LAS MATEMÁTICAS

Presentamos en este apartado los porcentajes de respuestas favorables a la actitud hacia las Matemáticas en las distintas componentes, organizados por cursos y globales (Anexo 21, 4). También haremos alusión a los resultados por sexos, cuando éstos muestren diferencias.

Componente afectiva

En las respuestas a los reactivos de esta componente, detectamos una actitud poco favorable hacia las Matemáticas con algunas variaciones por cursos y por sexos. Así, *el amor hacia las Matemáticas* (11 %) es muy bajo y disminuye con el curso y en las alumnas (reactivo 5).

La metodología de los profesores o la materia en sí, hace que sólo el 14 % *se diviertan en las clases de Matemáticas* (reactivo 6), porcentaje que disminuye por cursos. Estos resultados coinciden con la negación de los alumnos hacia que *las clases de Matemáticas duran mucho tiempo* (33 %), con claras diferencias entre los cursos (reactivo 7).

La respuesta (en desacuerdo) a *me alegro cuando no hay clase de Matemáticas* es 14%, similar por cursos e inferior en las alumnas (reactivo 10).

Como podemos observar en el ítem 14, existen bloqueos o actitudes negativas hacia las Matemáticas, un 51 % afirma *sentirse mal cuando piensan en Matemáticas*, lo que se relaciona con el poco deseo de *hacer trabajos y problemas* (item 18).

Podemos observar, sin embargo, como la mayoría de los niños tienen interés por las Matemáticas (item 9), con un 65%, siendo inferior en 8º y similar por sexos.

En la misma línea de las respuestas anteriores, sólo un 14 % no se alegra cuando no hay clases de Matemáticas.

En resumen, podemos concluir que en esta primera componente detectamos una actitud poco favorable hacia las Matemáticas que se revela en un deseo de no trabajarlas, en una sensación desagradable hacia ellas, encontrando, en general, una disminución por cursos y en las alumnas.

La siguiente tabla muestra los porcentajes de las respuestas a los reactivos de la componente afectiva, indicando entre paréntesis cuando los porcentajes se refieren a no estar de acuerdo con la proposición.

Ítem	Curso 7º (n=90)	Curso 8º (n=87)	Global (n=177)
5. Yo amo de verdad las Matemáticas.	12%	10%	11%
6. Me divierten las clases de Matemáticas.	16%	11%	14%
7. Las clases de Matemáticas duran mucho tiempo. (En desacuerdo).	44%	22%	33%
9. No me interesan las Matemáticas. (En desacuerdo).	71%	59%	65%
10. Me alegro cuando no hay clase de Matemáticas. (En desacuerdo).	13%	14%	14%
14. Me siento mal cuando pienso en Matemáticas. (En desacuerdo).	60%	41%	51%
18. Me gusta hacer trabajos y problemas de Matemáticas.	19%	18%	19%

Tabla 8.3

Componente comportamental y de implicación

En esta segunda componente podemos observar los comportamientos de los alumnos ante diversas situaciones.

Coincidiendo con los resultados obtenidos en los ítems del apartado anterior, el alumnado no está de acuerdo con marcharse de clase (52 %) (reactivo 2).

Sin embargo, su actitud hacia el juego (ítem 3), fundamental en estas edades, muestra que sólo un 19 % no *se olvidan de ir a jugar cuando hacen Matemáticas* (reactivo 3).

A pesar de todo, un porcentaje de un 77 % de alumnos no daría dinero a un amigo para que le hiciera los trabajos de Matemáticas (reactivo 8).

El ítem 12 muestra el grado de disposición a hacer muchos trabajos, que sigue siendo bajo (18%) y menor en 8º (8 %).

Finalmente, las respuestas al ítem 13 manifiestan cierta relación con las del reactivo 2. Sólo un 45 % está de acuerdo con *no quitar las clases de Matemáticas.*

En esta componente, los porcentajes en las respuestas a los distintos ítems son bastante similares en los dos sexos.

Ítem	Curso 7º (n=90)	Curso 8º (n= 87)	Global (n=177)
2. En clase de Matemáticas me iría. (En desacuerdo).	58%	46%	52%
3. Cuando hago Matemáticas me olvido de ir a jugar.	22%	15%	19%
8. Daría dinero a un amigo para que me hiciera los trabajos de Matemáticas. (En desacuerdo).	88%	66%	77%
12. Estoy dispuesto a hacer muchos trabajos de Matemáticas.	27%	8%	18%
13. Si pudiera quitar alguna clase diaria sería la de Matemáticas. (En desacuerdo).	52%	38%	45%
17. Todos los días pienso mucho en saber más Matemáticas.	18%	13%	15%

Tabla 8.4

Componente cognoscitiva y contextual

Vuelve a ser el nivel 7º el que da valores más altos en el ítem 11 frente al 73% de media global, estando los alumnos de 8º menos convencidos de la utilidad de las Matemáticas en la mayoría de los trabajos.

De la misma forma que opinan que las clases de Matemáticas no se deben quitar, opinan a favor de la enseñanza de las Matemáticas. El ítem 19 nos muestra un 79% de alumnos que afirman que en los colegios se deben trabajar las Matemáticas.

El reactivo 21 reafirma la creencia de que las Matemáticas son útiles (81 %). Por último, el reactivo 24 muestra cómo los alumnos empiezan a considerar las Matemáticas como un conjunto de reglas que hay que memorizar para hacer cálculos aburridos (57%).

Los reactivos de este bloque nos informan lo que opinan sobre las Matemáticas los que rodean a estos niños. Así, la mayoría de los alumnos creen que *sus padres quieren que sepan Matemáticas* (80 %), porcentaje similar por cursos y por sexos. Este ítem es uno de los que menos dispersión presenta.

Igualmente creen que *las personas usan Matemáticas en su vida diaria* (72 %), y que *el estudio de las Matemáticas es muy importante en su vida* (50 %), habiendo en este último ítem diferencias significativas entre 7º y 8º (60% - 39%) y entre los alumnos y alumnas (60 % - 46 %).

Ítem	Curso 7º (n=90)	Curso 8º (n=87)	Global (n=177)
11. El conocimiento de las Matemáticas no es necesario para la mayoría de los trabajos. (En desacuerdo).	82%	64%	73%
15. El estudio de las Matemáticas es muy importante para mi vida.	60%	39%	50%
19. Los colegios no deben trabajar las Matemáticas. (En desacuerdo).	86%	71%	79%
21. Las Matemáticas no sirven para nada. (En desacuerdo).	87%	76%	81%
22. Mis padres quieren que sepa Matemáticas.	83%	76%	80%
23. La mayoría de las personas usan Matemáticas en su vida diaria.	74%	70%	72%
24. La Matemática es memorizar reglas para hacer cálculos aburridos. (En desacuerdo).	60%	54%	57%

Tabla 8.5

Componente de creencias sobre sí mismo

Los datos expresan que sólo en torno al 40% están seguros cuando hacen Matemáticas (ítem 1) y es destacable la diferencia por sexos (60% alumnos frente a 32% alumnas). Los resultados del ítem 4 son similares a los del ítem 1, pero en este caso no hay diferencias por sexos.

Un 52 % están en desacuerdo con el ítem 16: *sé muy poco sobre Matemáticas*, siendo similar por cursos y por sexos la confianza que muestran en sus conocimientos.

Los alumnos intuyen las Matemáticas como una asignatura que no les exige dedicar mucho tiempo para estudiarla (ítem 20). Así, un 35% responde negativamente a este reactivo.

Ítem	Curso 7º (n=90)	Curso 8º (n=87)	Global (n=177)
1.Me siento poco seguro cuando hago Matemáticas. (En desacuerdo).	37%	44%	40%
4. Las Matemáticas son más difíciles para mí que para mis demás compañeros. (En desacuerdo).			
16. Sé muy poco sobre Matemáticas. (En desacuerdo).	38%	39%	38%
20. Tengo que dedicar mucho tiempo para estudiar Matemáticas. (En desacuerdo).	56%	48%	52%
	31%	39%	35%

Tabla 8.6

8.4 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DE LA ACTITUD HACIA EL ÁLGEBRA

Presentamos en este apartado, en términos de porcentajes, las respuestas favorables sobre la actitud hacia el Álgebra (Anexo 21, 5). También haremos alusión a los resultados por cursos o por sexos, cuando éstos muestren diferencias con respecto a dichos datos.

Componente afectiva

En las respuestas a los ítems de esta componente, detectamos una actitud poco favorable hacia el Álgebra con variaciones por cursos. Así, cuando les preguntamos si están de acuerdo con la frase *Yo amo de verdad el Álgebra* (3 %) (reactivo 5), nos encontramos con valores entre un 2 y un 6% de alumnos que responde afirmativamente.

La metodología de los profesores o la materia en sí, hace que sólo el 7 % *se divierta en las clases de Álgebra* (reactivo 6). Estos resultados coinciden con la negación de los alumnos hacia que *las clases de Álgebra duran mucho tiempo* (33 %). El porcentaje de respuestas (en desacuerdo) a *me alegro cuando no hay clase de Álgebra* (reactivo 10) es 20 %, siendo inferior en 8º.

Como podemos observar en el ítem 14, hay menos bloqueos hacia el Álgebra que hacia las Matemáticas, un 66 % afirma no sentirse mal cuando piensan en Álgebra, pero existe poco deseo de hacer trabajos y problemas sobre ella (ítem 18) con un 18 %.

Podemos observar cómo la mayoría de los niños no tiene interés por el Álgebra (item 9), con un 46 %, y además este interés disminuye en 8º.

En resumen, podemos concluir que en esta primera componente detectamos una actitud poco favorable hacia el álgebra que se revela en un deseo de no trabajarlas, en una sensación desagradable hacia ellas, no encontrando diferencias significativas ni por cursos ni por sexos.

Ítem	Curso 7º (n=90)	Curso 8º (n=87)	Global (n=177)
5. Yo amo de verdad el Álgebra.	2 %	5 %	3 %
6. Me divierten las clases de Álgebra.	10%	5%	7%
7. Las clases de Álgebra duran mucho tiempo. (En desacuerdo).	42%	23%	33%
9. No me interesan el Álgebra. (En desacuerdo).	61%	30%	46%
10. Me alegro cuando no hay clase de Álgebra. (En desacuerdo).	26%	15%	20%
14. Me siento mal cuando pienso en Álgebra. (En desacuerdo).	72%	60%	66%
18. Me gusta hacer trabajos y problemas de Álgebra.	24%	10%	18%

Tabla 8.7

Componente comportamental y de implicación

En esta segunda componente podemos observar los comportamientos de los alumnos ante diversas situaciones.

Coincidiendo con los resultados obtenidos en los ítems del apartado anterior, el alumnado está de acuerdo con marcharse de las clases de Álgebra (59 %) (reactivo 2). Sin embargo, su actitud hacia el juego (ítem 3), muestra que sólo un 18 % no se olvidan de ir a jugar cuando hace Álgebra.

A pesar de todo, un porcentaje de un 76 % de alumnos no daría dinero a un amigo para que le hiciera los trabajos de Álgebra (reactivo 8).

El ítem 12 muestra el grado de disposición a hacer muchos trabajos, que sigue siendo bajo (15 %) y menor en 8º (6 %).

Finalmente, las respuestas al ítem 13 muestran un 50 % en desacuerdo con quitar las clases de Álgebra.

Ítem	Curso 7º (n=90)	Curso 8º (n= 87)	Global (n=177)
2.En clase de Álgebra me iría. (En desacuerdo).	74%	43%	59%
3. Cuando hago Álgebra me olvido de ir a jugar.	20%	15%	18%
8. Daría dinero a un amigo para que me hiciera los trabajos de Álgebra. (En desacuerdo).	87%	66%	76%
12. Estoy dispuesto a hacer muchos trabajos de Álgebra.	24%	6%	15%
13. Si pudiera quitar alguna clase diaria sería la de Álgebra. (En desacuerdo).	58%	43%	50%
17. Todos los días pienso mucho en saber más Álgebra.	11%	7%	9%

Tabla 8.8

Componente cognoscitiva y contextual

Los alumnos (31 %) opinan que *el conocimiento de álgebra no es necesario para la mayoría de los trabajos* y sólo un 51 % está en desacuerdo con la sentencia *el Álgebra no sirve para nada,* siendo un 62 % los que están en desacuerdo con que *los colegios no deben trabajar el Álgebra.*

En cuanto a la creencia sobre el Álgebra un 53 % está en desacuerdo con el reactivo 24: *el Álgebra es memorizar reglas para hacer cálculos aburridos.*

Vuelve a ser el nivel 7º el que da valores más altos en el ítem 11 (40 % frente al 31 % de media global) estando los alumnos de 8º menos convencidos de la utilidad del Álgebra en la mayoría de los trabajos.

De la misma forma que opinan que las clases de Álgebra no se deben quitar, opinan a favor de la enseñanza del Álgebra. El ítem 19 nos muestra un 62 % de alumnos que afirman que en los colegios se debe trabajar el Álgebra.

El reactivo 21 reafirma la creencia de que el Álgebra es útil (51 %). Por último, el reactivo 24 muestra cómo los alumnos empiezan a considerar el Álgebra como un conjunto de reglas que hay que memorizar para hacer cálculos aburridos (53%).

Sobre lo que opinan sobre el Álgebra los que rodean a estos niños, encontramos que sólo un 39 % cree que *sus padres quieren que sepan Álgebra*, porcentaje similar por cursos y por sexos.

Igualmente creen que *las personas usan Álgebra en su vida diaria* (14 %), y que *el estudio del Álgebra es muy importante en su vida* (14 %), no habiendo en este último ítem ninguna diferencia entre 7º y 8º.

Ítem	Curso 7º (n=90)	Curso 8º (n=87)	Global (n=177)
11. El conocimiento del Álgebra no es necesario para la mayoría de los trabajos. (En desacuerdo).			
15. El estudio del Álgebra es muy importante para mi vida.	40%	21%	31%
19. Los colegios no deben trabajar el Álgebra. (En desacuerdo).	14%	14%	14%
21. El Álgebra no sirve para nada. (En desacuerdo).	71%	52%	62%
22. Mis padres quieren que sepa Álgebra.			
23. La mayoría de las personas usan Álgebra en su	59%	43%	51%
vida diaria.	46%	32%	39%
24. El Álgebra es memorizar reglas para hacer cálculos aburridos. (En desacuerdo).	16%	11%	14%
	57%	49%	53%

Tabla 8.9

Componente de creencias sobre sí mismo

Los datos expresan que sólo en torno al 37 % están seguros cuando hacen Álgebra (ítem 1) y hay diferencia por sexos (54% alumnos frente a 30% alumnas). Los resultados del ítem 4 son similares a los del ítem 1, pero en este caso la diferencia por sexos es menor.

Un 42 % está en desacuerdo con el ítem 16: *sé muy poco sobre Álgebra*, siendo similar por cursos y por sexos la confianza que muestran en sus conocimientos.

Los alumnos intuyen el Álgebra como una asignatura que no les exige dedicar mucho tiempo para estudiarla (ítem 20). Así, un 44 % responde negativamente a este reactivo.

Ítem	Curso 7º (n=90)	Curso 8º (n=87)	Global (n=177)
1. Me siento poco seguro cuando hago Álgebra. (En desacuerdo).	37%	37%	37%
4. El Álgebra es más difícil para mí que para mis demás compañeros. (En desacuerdo).	43%	37%	41%

16. Sé muy poco sobre Álgebra. (En desacuerdo).			
20. Tengo que dedicar mucho tiempo para estudiar Álgebra. (En desacuerdo).	47%	38%	42%
	48%	40%	44%

Tabla 8.10

En resumen, podemos indicar que la actitud hacia el Álgebra es poco favorable, pues incluso las componentes contextual y cognoscitiva presentan unos valores muy bajos. Por tanto, a las dificultades inherentes al Álgebra hemos de añadir unas reacciones afectivas negativas de los alumnos, que se convierten en comportamientos contrarios a trabajar esta parte de las Matemáticas y que en cierta medida viene impulsada por el contexto del alumno que no le motiva, ni le indica una utilidad de la misma.

8.5 COMPARACIÓN DE LOS RESULTADOS DE AMBAS ESCALAS

Un análisis de los resultados de las dos escalas, nos lleva a observar que existen diferencias entre ambas, pero en aspectos muy concretos. En general, hay una tendencia a valorar más positivamente su actitud hacia las Matemáticas que hacia el Álgebra, pero en los aspectos relacionados con la utilidad del Álgebra, su importancia para la vida o para los trabajos se produce un fuerte descenso en las puntuaciones.

Así en el ítem 11, *El conocimiento del Álgebra no es necesario para la mayoría de los trabajos,* solo un 31% está en desacuerdo con él, frente al 71% que estaban en desacuerdo con respecto a las Matemáticas. En la tabla siguiente mostramos aquellos ítems para los que las diferencias han sido más notables.

Ítem	Matemáticas	Álgebra
5. Yo amo de verdad las Matemáticas/el Álgebra.	11%	3%
9. No me interesan las Matemáticas/el Álgebra. (En desacuerdo).	65%	46%
11. El conocimiento de las Matemáticas/el Álgebra no es necesario para la mayoría de los trabajos. (En desacuerdo).	73%	31%
15. El estudio de las Matemáticas/el Álgebra es muy importante para mi vida.	50%	14%
21. Las Matemáticas/el Álgebra no sirve para nada. (En desacuerdo).	81%	51%
22. Mis padres quieren que sepa Matemáticas/Álgebra.		
23. La mayoría de las personas usan Matemáticas/ Álgebra en su vida diaria.	80%	39%
	72%	14%

Tabla 8.11

En la siguiente figura se puede observar como es en la componente comportamental y de implicación (CI) y, sobre todo, en la cognoscitiva y contextual (CC) donde las diferencias entre ambas escalas son mayores.

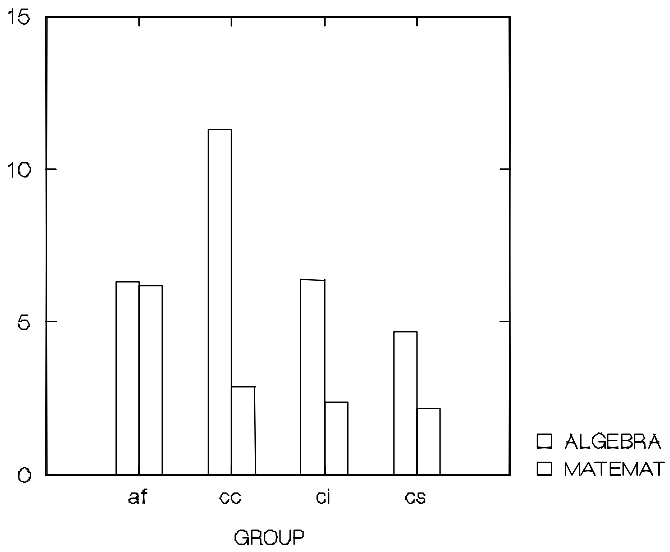


Figura 8.9

Se puede observar, en ambas escalas, como los porcentajes disminuyen de un curso a otro, no habiendo diferencias significativas por sexos.

En la tabla siguiente mostramos las medias (y desviaciones típicas), obtenidas en cada escala.

	Global	Curso 7º	Curso 8º	Niños	Niñas
Actitud Matemáticas	28.8 (7.6)	30.1 (7.3)	27.4 (7.7)	30.5 (7.5)	28.1 (7.5)
Actitud Álgebra	25.1 (8)	27.3 (7.1)	22.9 (8.3)	26.4 (6.8)	24.6 (8.4)

Tabla 8.12

8.6 SEGUNDO ESTUDIO: EVOLUCIÓN DE LA ACTITUD HACIA LAS MATEMÁTICAS DESDE 3º A 8º CURSOS.

En este apartado queremos presentar de forma resumida los resultados del estudio comparativo sobre la evolución de la actitud de los alumnos hacia las Matemáticas desde 3º a 8º Curso. Para ello utilizamos los datos obtenidos en la tesis doctoral: “Sobre habilidades en la resolución de problemas aritméticos verbales, mediante el uso de sistemas de representación yuxtapuestos (Hernández, 1997), sobre actitud hacia las Matemáticas, con alumnos de 3º a 5º, y los datos obtenidos por nosotros de los alumnos de 7º y 8º. Para completar toda la franja de 3º a 8º se decidió administrar la misma escala a un grupo de 6º de E.G.B.

Población

La población está formada por 620 alumnos, que se dividen así:

3º	4º	5º	6º	7º	8º
66	123	166	88	90	87

Tabla 8.13

Instrumento

Se utilizó como hemos indicado la misma escala ya comentada.

Resultados

En las tabla y figura siguientes podemos observar las medias de los diferentes cursos y su desviación típica:

3º	4º	5º	6º	7º	8º
36.4 (5.6)	37.9 (5.7)	35.4 (8)	27.5 (7.7)	30.1 (7.7)	27.4 (7.7)

Tabla 8.14

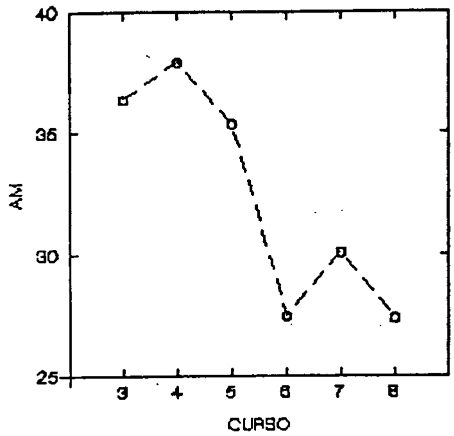


Figura 8.10

Apreciamos una cierta similitud en los tres primeros cursos (3º, 4º y 5º), aunque ligeramente superior en 4º. Sin embargo, a partir de 5º se produce un descenso de este nivel medio a medida que avanzan los cursos.

Si consideramos el valor medio de 3º y el de 8º la diferencia es de 9 puntos, que en una escala de 48 puntos es considerable.

Por componentes, encontramos que, en general disminuyen, siendo el descenso más notorio en las componentes afectiva (AF) y comportamental e implicación (CI).

8.7 DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El estudio realizado muestra una actitud positiva hacia las Matemáticas en los cursos 7º y 8º, que podríamos calificar en una escala de uno a diez como notable. Sin embargo esta actitud disminuye al comparar el curso 7º con el 8º, resultado que coincide con las investigaciones revisadas por Bell y otros (1983), Gairín (1990) y Giménez (1997).

En cuanto a la actitud hacia el Álgebra es menos positiva, llegando casi al aprobado en el curso 8º, siguiendo la escala anterior de uno a diez.

La actitud hacia las Matemáticas (3º a 8º) evoluciona en sentido negativo al avanzar el estudiante en el sistema escolar, siendo el cambio más notorio en 8º, coincidiendo con los resultados obtenidos por Chamoso y otros (1997).

Estas actitudes las exteriorizan en sus sentimientos (me gustan, me divierten,..), en sus comportamientos (no me iría de clase) y en sus creencias, que están influenciadas por las opiniones de sus padres y de los que los rodean. Los datos obtenidos se mantienen similares por sexos.

Consideramos importantes los resultados en aspectos concretos, como el carácter utilitario y formativo que dan a las Matemáticas, ya que la sensación de utilidad y formación percibida sobre una materia, mejora el interés en el aprendizaje de la misma (Nickerson, Perkins y Smith, 1987). Esta percepción que tienen sobre la utilidad de las Matemáticas debía reforzarse mediante la elección de contenidos y problemas que sean reales e interesantes para ellos. Contrariamente vemos como hacia el Álgebra la situación es bien distinta: no perciben la utilidad de la misma, ni las personas que le rodean tampoco, según ellos creen.

En cuanto a las creencias sobre las Matemáticas, opinan en una mayoría que "la Matemática o el Álgebra no es memorizar reglas para hacer cálculos aburridos", tan frecuente en algunos estudios.

Entendemos que el desarrollo de actitudes positivas hacia las Matemáticas debe ser considerado en el aprendizaje de las mismas. Por ello las unidades didácticas deben trabajarse inmersas en un marco metodológico cooperativo que favorezca la participación activa del alumno, las relaciones interpersonales no competitivas y el trabajo en grupo, así como el desarrollo de la motivación intrínseca y la mejora de la autoestima.

La gran mayoría de las componentes que forman las actitudes pueden mejorarse mediante cambios metodológicos adecuados y en la línea de un aprendizaje significativo.

La alfabetización emocional (Goleman, 1996) en Matemáticas es un trabajo importante a desarrollar en nuestros alumnos. Ello implica diversos factores como puede ser el desarrollo de actitudes positivas. Además las actitudes van implícitas en el modelo de enseñanza que realmente se utiliza, es decir, la enseñanza de las Matemáticas no es un proceso neutral.

Capítulo 9
Conclusiones, Implicaciones Para La Enseñanza Y Perspectivas Futuras

CAPÍTULO 9: CONCLUSIONES, IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA Y PERSPECTIVAS FUTURAS

9.1 SITUACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo, presentamos un resumen global de la investigación y de los distintos aspectos que hemos abordado en los diferentes capítulos, así como una exposición de las implicaciones de nuestra investigación para la enseñanza del Álgebra en la Secundaria Obligatoria, para indicar finalmente algunas líneas de investigación que nos proponemos seguir en el futuro.

Como hemos indicado en la Memoria, nuestro trabajo se encuentra dentro del Pensamiento Algebraico, que entendemos como una línea de estudio e investigación en Didáctica de las Matemáticas que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los conceptos algebraicos en el Sistema Educativo y en el medio social.

Muchas son las preguntas que como Kieran, 1992 nos hacíamos en el capítulo 1: ¿Qué hace que la comprensión del Álgebra escolar sea una tarea difícil para la mayoría de los estudiantes?; ¿Qué fuerza a muchos estudiantes a recurrir a memorizar reglas del Álgebra?; ¿Es el contenido del Álgebra la fuente del problema?; ¿Es la forma en que es enseñada lo que causa a los estudiantes no ser capaces de dar sentido a la materia? ¿Hacen los estudiantes un acercamiento a las tareas algebraicas de una manera que es inapropiada para aprender la materia en cuestión?

Para dar respuesta a las diferentes cuestiones formuladas, nos propusimos determinar las dificultades, obstáculos y errores que tienen los alumnos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (E.S.O.), para comprender y trabajar con objetos matemáticos relativos al pensamiento algebraico, con la finalidad de elaborar, en el marco de los resultados obtenidos, una Propuesta Curricular para el lenguaje algebraico en esta Etapa Educativa.

Para delimitar el estudio, establecimos en el Capítulo 2, los cinco objetivos generales de la investigación y las hipótesis de la misma.

Estos objetivos generales se concretaron en los capítulos siguientes (5, 6, 7 y 8), donde fueron analizados según los casos con técnicas diferentes.

Los cinco objetivos generales son:

1) Estudiar los aspectos cognitivos (Habilidades cognitivas de carácter operacional (H.C.C.O.) y habilidades cognitivas de carácter conceptual (H.C.C.C.)) más relevantes, del pensamiento algebraico con alumnos de 12 a 14 años.

Bajo la hipótesis de: “la presencia del sistema de representación formal algebraico, de un nuevo sistema de representación visual - geométrico y del sistema de representación visual físico de la balanza, como sistemas autosuficientes para el tratamiento inicial del Álgebra, implementados a través de un diseño instruccional innovador (DISEA para expresiones algebraicas y DISEC para ecuaciones), permite profundizar en el análisis de las habilidades cognitivas, metacognitivas y heurísticas que los alumnos ponen en juego al realizar la operatividad básica, en especial el uso de los paréntesis y la sustitución formal".

2) Elaborar instrumentos de medida (test) que consideren todos los elementos implicados en el tránsito desde el pensamiento aritmético al algebraico desde una propuesta curricular "global".

Bajo la hipótesis de: "disponer de estos instrumentos de medida, favorece el conocimiento de obstáculos, errores y estrategias utilizadas por los alumnos que van a orientar la aplicación de uno u otro diseño curricular y permite observar el efecto de la metodología y estrategias de intervención utilizadas y su incidencia en el desarrollo de habilidades de carácter operacional, habilidades de carácter conceptual y habilidades metacognitivas".

3) Estudiar aspectos afectivos (Actitudes hacia la Matemática y Álgebra) con alumnos de 12 a 14 años con relación a la Matemática y al Álgebra, y analizar la evolución de la actitud hacia las Matemáticas de alumnos de 8 a 14 años.

Bajo la hipótesis de: "la necesidad de relacionar en la investigación educativa, los dominios cognitivo y afectivo".

4) Estudiar y organizar las dificultades, obstáculos y errores que se dan en el aprendizaje del lenguaje algebraico.

Bajo la hipótesis que: "las respuestas correctas y errores no ocurren por azar, sino que éstas tienen orígenes diferentes y se refuerzan en asociaciones complejas".

5) Elaborar una propuesta curricular del Álgebra que facilite el inicio del aprendizaje del Álgebra.

Bajo la hipótesis de: "un acercamiento semiótico al lenguaje algebraico que integre los contextos numéricos y geométricos en un marco del Álgebra como lenguaje, donde las fuentes de significado y los sistemas de representación juegan un papel determinante, constituye el enfoque didáctico más coherente".

9.2 CONCLUSIONES

9.2.1 CONCLUSIONES GENERALES RESPECTO A LA METODOLOGÍA E INSTRUMENTOS UTILIZADOS

En primer lugar, a nivel metodológico nuestras aportaciones se concretan en:

- Elaboración de un marco teórico local a partir de la tesis dual de Paivio sobre el conocimiento del pensamiento formal (analítico y visual), la tesis de Duval sobre la necesidad de varios registros para interiorizar un objeto algebraico, las diferentes fuentes de significado de Kaput y los estadios de desarrollo cognitivo de los signos matemáticos que ha permitido concretar la noción de comprensión en relación a diferentes sistemas de representación semióticos.

- Elaboración de un sistema de Categorías para la implementación didáctica mediante las que organizar, analizar y valorar el diseño y desarrollo de los DISEA y DISEC.
- Elaboración de un triple sistema de categorías que configuran un instrumento de análisis y valoración para las relaciones que se producen en el sistema didáctico profesor-alumno-contenido, al trabajar las expresiones algebraicas y la resolución de ecuaciones.
- Elaboración, desarrollo y evaluación de unos DISEA y DISEC que han mostrado su viabilidad didáctica y su potencial para investigar sobre la comprensión del lenguaje algebraico en términos de habilidades cognitivas de carácter operacional y conceptual y analizar las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del mismo.
- Elaboración de varios instrumentos de evaluación de carácter local para las expresiones algebraicas y ecuaciones lineales con una incógnita y la elaboración y validación de un test general para el lenguaje algebraico.
- Elaboración de un test de actitudes multidimensional para las Matemáticas y el Álgebra, basado en cuatro componentes, que ha permitido estudiar la actitud de los alumnos hacia el Álgebra y hacia las Matemáticas.

Estas seis elaboraciones constituyen en conjunto el marco teórico y modelo metodológico elaborado para la investigación y son una aportación propia, para la que hemos consultado las fuentes mencionadas en los capítulos 1, 2 y 3.

Con los datos obtenidos en los Capítulos 4, 5, 6, 7 y 8 podemos señalar que el marco teórico elaborado y el modelo metodológico propuesto, se revela como un buen diseño de investigación para profundizar en el análisis cualitativo y cuantitativo de las dificultades, obstáculos y errores, que se originan en la transición de la aritmética al Álgebra y obtener datos para elaborar una propuesta curricular global del Álgebra.

9.2.2 CONCLUSIONES ESPECÍFICAS RESPECTO A LOS OBJETIVOS E HIPÓTESIS

Con relación al primer objetivo

“Estudiar los aspectos cognitivos (Habilidades cognitivas de carácter operacional (H.C.C.O.) y habilidades cognitivas de carácter conceptual (H.C.C.C.)) más relevantes, del pensamiento algebraico con alumnos de 12 a 14 años”.

Señalar que la presencia de los sistemas de representación formal algebraico, un nuevo sistema de representación visual - geométrico y el sistema de representación visual físico de la balanza, como sistemas autosuficientes para el tratamiento inicial del Álgebra, implementados a través de un diseño instruccional innovador (DISEA para expresiones algebraicas y DISEC para ecuaciones)”, permite analizar las dificultades y potencialidades de estos sistemas de representación para el lenguaje algebraico y profundizar en habilidades cognitivas, metacognitivas y heurísticas que los alumnos ponen en juego al realizar la operatividad básica, en especial el uso de los paréntesis y la sustitución formal, y, detectar y analizar los problemas de conversión entre los diferentes registros.

Entre las conclusiones más significativas, a modo de síntesis, cabe señalar:

- Que se confirma que la confusión (ausencia de sentido) que tienen los alumnos acerca de las notaciones y convenciones del lenguaje formal algebraico es causa de errores en Álgebra. Entre estas notaciones y convenciones está el uso de los paréntesis que constituye una fuente importante de dificultades, como ya había puesto de manifiesto Booth (1984). Nosotros hemos ampliado el punto de vista y hemos considerado tanto la denotación del paréntesis, qué sentido o significado le atribuyen y la designación del mismo en las diferentes conversiones entre sistemas de representaciones no formales y el sistema de representación formal.

Con relación a la denotación encontramos:

Hay alumnos que no tiene necesidad de usar los paréntesis en contextos aditivos, y, menos de ellos en contextos multiplicativos.

Mantienen la idea que las operaciones se efectúan en el orden en que aparecen (secuencialmente).

Encontramos que las respuestas dadas por una gran mayoría de alumnos a los ítems de paréntesis en contextos aditivos, están caracterizadas por la duda, la confusión y las respuestas en blanco, no así en las respuestas dadas al uso de los paréntesis en su tratamiento distributivo. Se presentan de esta manera, los paréntesis en contextos aditivos como obstáculos cognitivos basados en su uso en la aritmética.

Con relación a la designación, encontramos:

Hay alumnos que no veían la necesidad de escribir explícitamente los paréntesis cuando hacían la conversión al sistema de representación formal, consideraban su escritura opcional por cuanto ya sabían mentalmente cuáles eras las operaciones que debían efectuar primero, fundamentalmente en contextos aditivos.

Como resumen de este estudio, podemos señalar que la presencia de diferentes sistemas de representación contextualiza mejor el aprendizaje del lenguaje algebraico y ayuda a mejorar tanto la designación como la denotación de los paréntesis, al menos, en situaciones multiplicativas.

- Que en relación a diferentes obstáculos cognitivos registrados en la literatura (Chalouh y Herscovics, 1988), no encontramos en este enfoque global ni problemas de concatenación, ni problemas relativos a la necesidad de una referencia en el sistema de representación numérico. Sí hemos encontrado alumnos con dificultad para aceptar la falta de clausura.

- Que la conversión directa de situaciones reales que involucran cantidades y relaciones en contextos diferentes, no parece presentar dificultades, al conocer los alumnos las palabras clave que permiten hacer esa conversión: triple, doble, siguiente, anterior, cuadrado, producto, diferencia, etc.

- Que la conversión entre el Sistema de Representación Semiótico Visual Geométrico y el Sistema de Representación Formal Algebraico presenta dificultades tanto en el contexto de área como de perímetro, sobre todo cuando algunas de las dimensiones están subdivididas.

- Que las habilidades operacionales presentan una mayor conflictividad en las operaciones aditivas. En el cálculo de perímetros, aún teniendo clara la noción de perímetro, los alumnos fallan en las operaciones que aparecen en el cálculo del mismo. Este error es más frecuente cuando alguna de las dimensiones de la figura está subdividida. (Küchemann, 1981; Chalouh y Herscovics, 1988).

En relación a las cuestiones multiplicativas y en particular a la propiedad distributiva, los alumnos manifiestan seguridad en la misma, tanto por la izquierda como por la derecha, sin que las situaciones aditivas que se dan, generen dificultades.

Los estudiantes manifiestan asimismo una escasa habilidad operativa aditiva, aún conociendo la regla: “si los términos no son semejantes, no se pueden operar”, situación muy frecuente en la enseñanza, donde los alumnos parecen poseer el conocimiento conceptual pero son incapaces de transformarlo en una habilidad operacional. Situación descrita por Booth (1984), como que “la habilidad para describir un método verbalmente, no supone necesariamente la habilidad para reconocer la correcta simbolización de este método”.

-Que las reglas fijas predominan sobre el conocimiento conceptual. A pesar de haber incorporado conocimiento conceptual del nuevo registro, las habilidades operacionales subyacentes (Sistema de Representación Formal Aritmético) les hace producir errores por falta de significado en el nuevo registro. Estas ausencias de significado no se suplen con transformaciones en el S.R.S. formal algebraico (Semiosis) sino que se adquieren en los procesos de Noesis.

-Que los alumnos presentan una articulación adecuada entre el S.R.S. visual geométrico y el S.R.S. formal algebraico cuando se refieren a las cuestiones multiplicativas y en particular a la propiedad distributiva, pero que ese esquema mental los lleva a cometer errores en contextos aditivos, por la necesidad de expresar las letras como potencias al cuadrado, expresión asociada a la noción de área.

Otros resultados obtenidos son:

- Los alumnos son capaces de hacer elaboraciones sintácticas y semánticas en el Sistema de Representación de Imágenes propuesto, cuando el sistema está bien definido y lo trabajan como un Sistema Independiente.

- Los alumnos generan errores sintácticos en sus transformaciones en cualquiera de los sistemas de representación semiótica utilizados, debido a la producción de códigos personales intermedios para dotar de significado a las transformaciones concretas intermedias.

- Los alumnos con mayor capacidad parece que en la práctica prescinden del Sistema de Representación Visual Geométrico, pero si se indaga a través de entrevistas clínicas o de otros medios, se constata que lo han usado mentalmente.

- Algunos alumnos tienen a veces dificultad para establecer identificaciones entre las elaboraciones realizadas en uno y otro Sistema. No tienen capacidad para pasar de un Sistema de Representación a otro.

- Las elaboraciones sintácticas en el lenguaje algebraico son en general, mas sencillas y menos engorrosas que las elaboraciones sintácticas en los sistemas autosuficientes estudiados. Sin embargo, las elaboraciones semánticas, en general, son más sencillas en los sistemas de representación imaginarios.

Como conclusión final *con relación al primer* podemos señalar tres conclusiones básicas: 1) Que la presencia de otro registro, entre el registro numérico y el registro algebraico, con la propiedad de ser autosuficiente, no crea, aparentemente, problemas cognitivos. 2) El planteamiento diseñado ayuda a los alumnos a desarrollar significados para las expresiones algebraicas y para las ecuaciones, pero ello no conduce, aparentemente, a desarrollos espontáneos para la sintaxis de las expresiones algebraicas y ecuaciones. 3) La necesidad de evitar en lo posible el enfrentamiento inútil entre las elaboraciones semánticas y sintácticas, facilitando en los procesos de enseñanza aprendizaje de Álgebra, tanto unas como otras; pero, para establecer este equilibrio, es necesario potenciar el uso de los Sistemas de Representación Imaginarios autosuficientes

Con relación al segundo objetivo

"Elaborar instrumentos de medida (test) que consideren todos los elementos implicados en el tránsito desde el pensamiento aritmético al algebraico desde una propuesta curricular global".

Se confirma la hipótesis en el sentido que la utilización de instrumentos de medida no estándares o genéricos sino locales, para investigaciones específicas, como los test o cuestionarios diseñados, favorece el conocimiento de los errores y permite valorar el diseño implementado.

La construcción e implementación de los diferentes cuestionarios elaborados nos permite obtener las siguientes conclusiones:

-En términos generales el Test (A y B) validado es confiable y consistente y permite obtener información relevante sobre las concepciones de los estudiantes con relación al lenguaje algebraico.

-El test (A y B) no vale como cuestionario estándar para investigaciones específicas sobre lenguaje algebraico, es necesario elaborar, para cada trabajo de investigación, un cuestionario "ad hoc".

Con respecto al tercer objetivo

"Estudiar aspectos afectivos (actitudes hacia la Matemática y Álgebra) con alumnos de 12 a 14 años con relación a la Matemática y al Álgebra, y analizar la evolución de la actitud hacia las Matemáticas de alumnos de 8 a 14 años".

La confirmación de la hipótesis "necesidad de relacionar en la investigación educativa los dominios cognitivos y afectivos", se pone de manifiesto no sólo en los resultados de las escalas de actitudes diseñadas, sino también en las interacciones que genera la implementación de los DISEA y DISEC.

El estudio realizado muestra una actitud positiva hacia las Matemáticas en los cursos 7º y 8º. Sin embargo, esta actitud, disminuye al comparar el curso 7º con el 8º, como hemos indicado.

La actitud hacia el Álgebra es menos positiva en general, disminuyendo aún más en el curso 8º.

En cuanto a la actitud hacia las Matemáticas (3º a 8º), hemos podido observar cómo avanza en sentido negativo en los cursos superiores, siendo el cambio más notorio en 8º.

Con respecto al cuarto objetivo

"Estudiar y organizar las dificultades, obstáculos y errores que se dan en el aprendizaje del lenguaje algebraico".

Tenemos elementos en esta investigación recogidos en los Capítulos 5, 6 y 7 para confirmar la hipótesis: "las respuestas correctas y errores no ocurren por azar, sino que éstas tienen orígenes diferentes y se refuerzan en asociaciones complejas".

Nos planteamos como objetivo organizar los errores que se dan en el aprendizaje algebraico. Hemos elaborado una organización que profundiza en la interpretación de los mismos desde una perspectiva más ajustada a la realidad escolar.

La noción de obstáculo y la organización propuesta en el Capítulo 2 se ha mostrado útil como una forma de mirar el origen de los errores que cometen los alumnos.

Los estadios de desarrollo cognitivo de los signos matemáticos y el uso de diferentes sistemas de representación nos ha permitido ver los significados que los alumnos atribuyen a los objetos del Álgebra.

Con los resultados obtenidos en la investigación, se evidencia que los errores que cometen los alumnos no se deben al azar y proponemos como síntesis una nueva manera de considerarlos en dos grupos: Errores que tienen su origen en un obstáculo y errores que tienen su origen en una ausencia de significado. Estos últimos, tienen dos procedencias distintas, una, relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático, y otra, relacionada con las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia el Álgebra.

Es decir, debemos mirar los errores desde tres perspectivas distintas:

I) Errores que tienen su origen en un obstáculo.

II) Errores que tienen su origen en ausencia de sentido.

III) Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales.

A lo largo de los diferentes Capítulos tenemos evidencias y ejemplos de estos tipos de errores, bien, referenciados en la literatura o bien, obtenidos por nosotros en la investigación.

I) Errores que tienen su origen en un obstáculo: Collis (1974) y la “no aceptación de la falta de clausura”; Davis (1975) y el “dilema proceso-producto”; Matz, (1980) y la “concatenación”.

II) Errores que tienen su origen en ausencia de sentido.

Al originarse estos errores en los diferentes estadios de desarrollo que se dan en los sistemas de representación (semiótico, estructural y autónomo), podemos diferenciar errores en tres etapas distintas.

A) Errores del Álgebra que tienen su origen en la aritmética.

B) Errores de procedimientos.

Entre los errores derivados, distinguimos los errores relativos al mal uso de la propiedad distributiva.

C) Errores de Álgebra debidos a las características propias del lenguaje algebraico.

III) Errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales.

Son errores de naturaleza diversa: faltas de concentración (excesiva confianza), distracciones debidas a la presencia de palabras claves o de rasgos perceptuales, bloqueos, olvidos, omisiones, creencias, etc.

Proponemos una forma diferente de analizar los errores de los alumnos y hemos ampliado la clasificación de los errores dada por nosotros mismos (1989) en el capítulo 2, o los propuestos por otros autores, como, por ejemplo, Matz (1980) o Booth (1984).

Con respecto al quinto objetivo

“Elaborar una propuesta curricular “global” del Álgebra que facilite el inicio del aprendizaje del Álgebra”.

De los resultados obtenidos por los diferentes instrumentos podemos afirmar que se confirma la hipótesis: “un acercamiento semiótico al lenguaje algebraico que integre los contextos numérico y geométrico, en un marco del Álgebra como lenguaje, donde las fuentes de significado y los sistemas de representación juegan un papel determinante, constituye el enfoque didáctico más coherente”.

Esta propuesta curricular basada en los sistemas de representación favorece el clima relacional de la clase, hace más positivas las relaciones profesor-alumno, las relaciones de los alumnos entre sí y mejora la disciplina en tanto que existe un mayor grado de fluidez en el desarrollo de las tareas.

En lo que se refiere a significación del planteamiento para expresiones algebraicas se observan mejoras (capítulos 5 y 6) referidas a: a) Habilidades cognitivas de carácter operacional: Realizar operaciones aritméticas o con letras; Realizar operaciones con paréntesis en contextos multiplicativos (propiedad distributiva); Realizar sustituciones formales (particularizando y generalizando). b) Habilidades cognitivas de carácter conceptual: Hacer conversión de registros: habitual, geométrico, algebraico; Contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular con las letras como objeto geométrico y como número generalizado en contextos de área; Interpretar y comprender el significado de los signos, de las letras y de las expresiones algebraicas. c) Habilidades metacognitivas: Desarrollar elementos metacognitivos al establecer analogías y hacer transformaciones equivalentes en los Sistemas de Representación. d) Actitudes de los alumnos: Desarrollar actitudes positivas hacia el Álgebra.

A título de ejemplo y relacionado con uno de los instrumentos de análisis se observa en el Capítulo 6, respecto a la segunda investigación sobre expresiones algebraicas, que los alumnos mejoran en 78 de los ítems, en 13 empeoran y en 11 no varían, obteniéndose un porcentaje global de mejora del 41%.

En lo que se refiere a significación del planteamiento para ecuaciones lineales con una incógnita, se observan mejoras (capítulo 7) referidas a: a) las habilidades cognitivas de carácter operacional: uso de las reglas de transformación y usos de procedimientos de resolución; b) habilidades cognitivas de carácter conceptual: hacer conversiones entre los diferentes lenguajes; c) habilidades metacognitivas: desarrollar elementos metacognitivos al establecer analogías y transformaciones equivalentes en los sistemas de representación; d) actitudes de los alumnos: desarrollar actitudes positivas hacia el Álgebra. A título de ejemplo y seleccionando uno de los instrumentos de análisis, en la tabla 7.8 de resultados comparados de Pr y de Po2, se aprecia una mejora significativa en todos los ítems del Pretest al Postest en el planteo y resolución de ecuaciones, disminuyendo notablemente el número de ítems que dejan sin abordar.

Señalamos que los resultados obtenidos avalan una propuesta didáctica, basada en un acercamiento semiótico, articulado en los procesos de significación descritos para los objetos algebraicos.

Este acercamiento semiótico, es entendido como un sistema de representación que se ocupa del significado de las escrituras algebraicas, además de considerar el carácter instrumental de los signos del Álgebra, lo que sugiere la necesidad de considerar el Álgebra como una actividad más de los alumnos, y los signos, como un instrumento específico de la actividad.

A modo de resumen la propuesta de enseñanza del lenguaje algebraico en la etapa 12-16 debe abordarse desde la perspectiva de generalización aritmética y resolución de problemas.

Los aspectos básicos a tener en cuenta son: a) Capacidades a desarrollar: usar el lenguaje algebraico para expresar relaciones (simbolizar); trabajar y hacer conversiones entre diferentes representaciones semióticas; generalizar; particularizar; sustituir formalmente; hacer transformaciones en expresiones algebraicas; leer, interpretar y hacer transformaciones en funciones y fórmulas dadas; plantear y resolver ecuaciones por métodos algebraicos y otros (numérico y visual/geométrico); b) Desarrollar las letras con significados algebraicos: el Álgebra de las Cantidades (numéricas y de magnitudes); el Álgebra geométrica (objetos geométricos): y, c) Utilizar las cuatro fuentes de significado y las representaciones semióticas básicas: representación contextual (analógica); representación numérica (digital); representación visual/geométrica (analógica); representación formal (digital).

Señalar, finalmente, como conclusión de este objetivo que: un planteamiento de la enseñanza-aprendizaje del Álgebra desde esta perspectiva global y articulado en el sentido descrito para el uso de los diferentes registros, favorece una mejor comprensión del contenido algebraico al que se refieren estos sistemas de símbolos, desarrolla habilidades cognitivas con significado, tanto de carácter operacional como conceptual, estimula aspectos del conocimiento metacognitivo de estas habilidades haciendo a los alumnos más conscientes de sus propios procesos y mejorando sus habilidades en otros medios.

9.3 CONCLUSIONES GENERALES

Hemos señalado cómo los diferentes desarrollos del currículo del Álgebra han ignorado el enorme interés que los S.R.S. tienen en la construcción del conocimiento algebraico y lo han considerado, en el mejor de los casos, como un añadido al proceso de conceptualización. Sin embargo, en el aprendizaje del Álgebra, los S.R.S. ocupan un lugar central donde la habilidad para cambiar de registros constituye una capacidad matemática esencial.

Muchas de las dificultades que presentan nuestros alumnos en Álgebra y que ponen de manifiesto en los errores que cometen, sobre todo los que tienen su origen en ausencia de significado y que están relacionados con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos algebraicos y a los procesos de pensamiento algebraico, pueden ser explicados como una falta de coordinación de registros de las representaciones.

Para entender mejor la aprehensión de los objetos matemáticos, es decir, la construcción de los conceptos y procedimientos matemáticos por parte de los alumnos, es necesario, entre otros elementos, una teoría del conocimiento que no sólo organice y articule las redes conceptuales, sino que se apoye en una teoría de la representación (por ejemplo, Semiosis y Noesis), donde el conocimiento del objeto matemático aparece como el invariante de las diferentes representaciones semióticas.

Finalmente, para hacer una propuesta de enseñanza-aprendizaje significativa del Álgebra, ésta ha de ser presentada como un lenguaje que admite diferentes S.R.S. que sirven de fuente de significado para la misma. Abordar el aprendizaje del lenguaje algebraico desde el uso de diferentes SRS, permite analizar, desde una perspectiva cognitiva, las operaciones, procesos y estrategias que utiliza el alumno cuando construye este conocimiento, proporcionándole medios que le ayuden a reflexionar sobre sus propios procesos cognitivos, además de facilitar las interacciones entre el profesor, los estudiantes y el contenido. Una propuesta curricular basada en los sistemas de representación favorecería el clima relacional de la clase, esto es, serían más positivas las relaciones profesor-alumno, las relaciones de los alumnos entre sí y mejoraría la disciplina en tanto que existiría un mayor grado de fluidez en el desarrollo de las tareas.

En lo que se refiere a significación de este planteamiento se quiso observar las interacciones que aportan las técnicas de enseñanza y estrategias de intervención utilizadas, referidas a: a) Habilidades cognitivas de carácter operacional: Realizar operaciones aritméticas o con letras; Realizar operaciones con paréntesis en contextos aditivos y multiplicativos (propiedad distributiva); Realizar sustituciones formales (particularizando y generalizando). b) Habilidades cognitivas de carácter conceptual: Hacer conversión de registros: habitual, geométrico, algebraico; Contextualizar el lenguaje algebraico en general y en particular con las letras como objeto geométrico y como número generalizado en contextos de área y perímetro; Interpretar y comprender el significado de los signos, de las letras y de las expresiones algebraicas. c) Habilidades metacognitivas: Desarrollar elementos metacognitivos al establecer analogías y hacer transformaciones entre los Sistemas de Representación. d) Actitudes de los alumnos: Desarrollar actitudes positivas hacia las Matemáticas y hacia el Álgebra.

9.4 PERSPECTIVAS FUTURAS

A lo largo del desarrollo y en la formulación de las conclusiones de todo el trabajo de investigación, han sido múltiples los interrogantes que han quedado abiertos.

Algunas cuestiones que parece oportuno estudiar en profundidad son las siguientes:

En primer lugar, sería interesante a partir de la información obtenida y de la propuesta sugerida para la enseñanza/aprendizaje del lenguaje algebraico en la etapa 12-16, plantearse la organización de este tópico en toda la E.S.O. y su distribución en los dos ciclos. Una vez estudiada esta cuestión podría abordarse un trabajo de ingeniería didáctica encaminado al diseño de materiales curriculares para el trabajo de los alumnos. En este sentido, en el trabajo presentado podemos encontrar múltiples sugerencias y aportaciones a tener en cuenta.

Podríamos también estudiar las repercusiones que tiene esta propuesta en el conocimiento y creencias que tiene el profesorado de Secundaria respecto al lenguaje algebraico.

Hemos propuesto una forma de mirar los errores que cometen los alumnos y una clasificación de los mismos en tres ejes y conviene profundizar y completar esta clasificación. Por ejemplo, la organización de los errores dentro del eje afectivo, o la organización de los errores dentro del eje de carencia de sentido.

La concepción dominante que los alumnos deben manejar la mayor variedad posible de sistemas semióticos de representación, en forma, por ejemplo, de materiales didácticos manipulativos o gráficos, contribuye al desarrollo y reforzamiento de muchas ideas matemáticas, requiere más trabajo de investigación. Los indicios que tenemos es que la excesiva presencia de sistemas de representación puede provocar diferentes conflictos cognitivos en los alumnos que impiden el aprendizaje del lenguaje algebraico.

El planteamiento y la metodología desarrollada en este estudio se puede aplicar a otros aspectos del Álgebra escolar. En este sentido tenemos la intención de estudiar el planteamiento y resolución de inecuaciones (desigualdades) lineales en la Educación Secundaria Obligatoria.

Bibliografía

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AIKEN, L.R. (1972). Research on Attitudes Toward Mathematics. Arithmetic Teacher, 19, pp. 229-234.

AIKEN, L.R. (1976). Update on Attitudes and other Affective Variables in Learning Mathematics. Review of Educational Research. 46(2), pp. 293-311.

ALONSO NÁPOLES, Mª E. y TORRES PALAFOX, B. (1989). Una estrategia didáctica como enseñanza remedial en la problemática de la sintaxis algebraica: ambientes “MICROWORLDS”. Cuadernos de investigación, nº 12. C.I.N.V.E.S.T.A.V.

ALONSO NÁPOLES, S. y ALONSO NÁPOLES, Mª. E. (1989). Problemática de la sintaxis algebraica en el Bachillerato y algunas alternativas de solución. Cuadernos de Investigación, nº 12. C.I.N.V.E.S.T.A.V.

ALVÁREZ MÉNDEZ, J.M. (1986). Investigación cuantitativa/Investigación cualitativa: ¿Una falsa disyuntiva? En T.D. Cook y Ch.S. Reichardt: *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa*. Ed. Morata. Madrid.

ATO GARCÍA, M, LÓPEZ GARCÍA, J.J. y OTROS (1994). Fundamentos de Estadística con SYSTAT. Ed. Ra-Ma. Madrid.

BACHELARD, G. (1938). La formation de l’esprit Scientifique. París: De Vrin. (Traducción al castellano, 1985. La formación del espíritu científico. Siglo Veintiuno. México).

BAUERSFELD, H Y SKOWRONEK, H. (1976). Research Related to the Mathematical Learning Process, en Athen y Kunle, (eds.), pp. 231-245.

BEDNARZ, N.; KIERAN, C. and LEE, L. (Eds.) (1996) Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching. Kluwer Academic Publishers. Montreal Canadá.

BEHR, M. J.; ERLWANGER, S., y NICHOLS, E. (1976). How Children View Equality Sentences (PMDC Techical Report nº 3). Tallahassee: Florida State University. (ERIC Document Reproduction Service nº ED144802).

BELL, A. (1988). Algebra-Choices in Curriculum Design. En A. Borbas (Ed.), Proceedings of the 12th International Conference for the Psychology of Mathematics Education (Vol.1, pp147-153). Veszprém, Hungary:OOK

BELL. A., O´BRIEN, D. Y SHIU, C., (1980). Designing Teaching in the Light of Research on Understanding. En Proceedings of the 4th PME. California.

BELL, A.W.; COSTELLO, J. y KÜCHEMANN, D. (1983). A Review of Research in Mathematical Education. Research on Learning and Teaching. NFER-Nelson.

BELL, A. y otros (1983). Algebra: Ideas and Material for Years 2-5 in the Secondary School. Sout Notts Project. Shell Centre for Mathematical Education. University of Nottingham.

BELL, A.; MALONE, J y TAYLOR, P. (1987). Algebra: An Exploratory Teaching Experiment. Nottingham, U.K. Shell Centre for Mathematical Education; Perth, Australia: Curtin University, SMEC.

BELTRÁN, J. (1985). Psicología educacional. U.N.E.D. Madrid.

BISQUERRA, R. (1989). Métodos de Investigación Educativa. Guía práctica. CEAC. Barcelona.

BLANCO, A. y ANGUERA, Mª T. (1991). Sistemas de Codificación. En metodología observacional en la Investigación Psicológica. Volumen I. Anguera (Ed.). PPU. Barcelona.

BOAS, R.P. (1981) Can we Make Mathematics Intelligible? American Mathematical Monthly, 88, 727- 731.

BOOTH, L. R. (1983). A Diagnostic Teaching Programme in Elementary Algebra: Results and Implications. En Proceedings of the 7st Conference of the PME. Israel.

BOOTH, L. R. (1984). Algebra: Children’s Strategies and Errors, (NFER-Nelson: Windsor).

BOOTH, L.R. (1988). Children's Difficulties in Beginning Algebra. The Ideas of Algebra, K-12, 1988 Yearbook, NCTM, Reston, USA.

BOULTON-LEWIS, G, M., COOPER T.J. G.M., ATWEH B., PILLAY H., WILSS L. y MUTCH S. (1997). The Transition from Arithmetic to Algebra: A Cognitive Perspective. Proceedings of the 21st Conference of the PME. Finland.

BOYER, C.B. (1986). Historia de la Matemática. Alianza. Madrid.

BRESLICH, E. R. (1939). Algebra, a System of Abstract Processes. En C.H. Judd (Ed.), Education as Cultivation of the Higher Mental Process. New York: Macmillan.

BROUSSEAU, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. Recherches en Didactique des Mathématiques 2, pp. 37-128.

BROUSSEAU, G. (1983). Les obstacles épistémologiques el les problèmes en Mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques 4 (2), pp. 165-198.

BROWN, M. (1981). Number Operations. En K.M. Hart. (Ed.): Children’s Understanding of Mathematics: 11-16. John Murray.

BROWN, C. A., CARPENTER, T. P., KOUBA, V.L., LINDQUIST M.M., SILVER E.A. y SWAFFORD, J.O. (1988) Secondary School Results for the Fourth NAEP Mathematics Assessment: Algebra, Geometry, Mathematical Methods and Attitudes. Mathematic Teacher, 81, 337-3437.

BRUNER, J. (1985). Vygotsky: A historical and Conceptual Perspective. En J. Wersxh (Ed.) Culture Communication and Cognition. Vygotskian Perspectives. Cambridge University Press, Cambridge, p. 24.

BURTON, M. (1988) A Linguistic Basis for Student difficulties with Algebra. For the Learning of Mathematics, Vol 8, nº 1.

CAÑAL, P. (1987). Un enfoque curricular basado en la investigación. *Investigación en la escuela*, 1, pp - 43-50.

CARRY, J.R., LEWIS, C., y BERNARD, J. (1980). Psychology of equation solving: An Information Processing Study (Final Technical Report). Austin: University of Texas at Austin, Department of Curriculum and Instruction.

CASTRO, E. (1994). Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de Secundaria (12-14 años). Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

CEDILLO, T. (1991). De la Aritmética al Álgebra: Un panorama de la investigación realizada y algunas perspectivas. Universidad Pedagógica Nacional. México.

CHALOUH, L. y HERSCOVICS, N. (1988). Teaching Algebraic Expressions in a Meaningful Way. En A. Coxford (Ed.). The Ideas of Algebra. K-12. (1988 Yearbook, pp. 33-42). Reston, VA: N.C.T.M.

CHAMBERS, D. L. (1994). The Right Algebra for All. Educational Leadership, 51 (6), 85-86.

CHAMOSO, J. Mª. y otros (1997). Evolución por cursos de la actitud hacia la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Primaria y Secundaria Obligatoria. Actas VIII J.A.E.M.

CHAPPEL, M. (1997). Preparing Students to Enter the Gate. En Teaching Children Mathematics, 3 (6), 266.-267.

CHEVALLARD, Y. (1980). Mathématiques, language, enseignement: la réforme des années soixante. Recherches en Didactique des Mathématiques, nº 41 (Septiembre) pp.71-99.

CHEVALLARD, Y. (1985). Le Passage de l´arithmétique à l´algébrique dans l´enseignement des Mathématiques au Collége (Première partie). L´evolution de la transposition didactique. Petit X, nº 5 pp.51-94.

CHEVALLARD, Y. (1986). Enseignement de l´algèbre et transposition didactique. Marseille-Luminy.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le Passage de l´arithmétique à l´algébrique dans l´enseignement des Mathématiques au Collége (Deuxième partie). Perspectives curriculares: la notion de modelisation. Petit X, nº 19, pp.43-75.

CHEVALLARD, Y. (1990a). Le Passage de l´arithmétique à l´algébrique dans l´enseignement des Mathématiques au Collége (Troisième partie). Voies d´attaque et problèmes didactiques. Petit x, ed. IREM de Grenoble.

CHEVALLARD, Y. (1990b). Didactique, anthropologie, mathématiques. Postfacio a la segunda edición de La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. Ed. La pensée sauvage. Grenoble.

CHOMSKY, N. (1957). Syntactic Structures. (Mouton: The Hague). Traducción al castellano: Estructuras sintácticas. Siglo XXI: México.

CLEMENT, J. (1982). Algebra Word Problem Solutions: Thought Processes Underlying a Common Misconception. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 13, pp. 16-30.

COCKROFT, W.H. (1982). Mathematics Counts (Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools). H.M.S.O. London. Traducción al castellano. 1985. Las Matemáticas sí cuentan. M.E.C. Madrid.

COHEN, L. y MANION, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Ed. La Muralla, S.A. Madrid (Original 1985).

COLLETTE, J.P. (1986). Historia de las matemáticas. V. I y II. México. Siglo XXI, Editores. España.

COLLIS, K.F. (1974) Cognitive Development and Mathematics Learning. Paper presented at the Psycology of Mathematics Workshop, Centre for Science Education, Chelsea College. London.

COLLIS, K.F. (1975) The Development of Formal Reasoning. Newcastle, Australia: University of Newcastle.

CONROY, J. (1981). Learning Language and Mathematical Structure in the Infants School. Research in Mathematics Education in Australia, Vol. 2, pp. 203-212.

COOK, T.D. y REICHARDT, CH.S. (1986). Hacia una superación del enfrentamiento entre los métodos cualitativos y los cuantitativos. En T.D. Cook y Ch.S. Reichardt: Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa. Ed. Morata. Madrid.

COOPER M. (1984). The Mathematical "Reversal Error" and Attempts to Correct it. En B. Southwell, R. Eyland, M. Cooper, J. Conroy y K. Collis (eds.) Proceedings of the 8st Conference of the PME.

COOPER T.J. BOULTON-LEWIS G.M., ATWEH B., PILLAY H., WILSS L. y MUTCH S. (1997). The Transition from Arithmetic to Algebra: Initial Understanding of Equals, Operations and Variable. Proceedings of the 21st Conference of the PME. Finland.

COUTURAT, L., (1969). La logique de Leibniz. Ed. Georg Olms Verlagsbuchhandlung- Hilldesheim. Germany.

CUADRAS, C.M. (1981). Métodos de Análisis Multivariante. Ed. Eunibar. Barcelona.

DAVIS, R.B. (1975): Cognitive Processes Involved in Solving Simple Algebraic Equations. Journal of Children's Mathematical Behavior, 1 (3), pp. 7-35.

DAVIS, R.B., JOCKUSCH, E., y McKNIGHT, C. (1978). Cognitive Processes in Learning Algebra. Journal of Children´s Mathematical Behavior, 2(1), 10-32.

DE LANGE, J. (1994). Curriculum Change: an American-dutch Perspective en Robitaille, D.F.: Wheeler, D.; Kieran, C. (eds). Selected Lectures from the 7th International Congress on Mathematics Education, pp. 229-248. Les Presees de L`Université Laval. Quebec.

DIEUDONNÉ, J. (1989). En honor del espíritu humano. Las Matemáticas hoy. Ed. Alianza Universidad.

DOSSEY J.A., MULLIS, I.V.S., LINDQUIST, M.M. y CHAMBERS, D.L. (1988). The Mathematics Report Card: Trends and Achievement Based on the 1986 National Assesment. Princeton. Educational Testing Services.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'énseignement des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques, 7 (2), pp. 5-31.

DROUHARD, J.P. (1992). Les Écritures Symboliques de l´Algèbre eléméntaire. Tesis Doctoral. Université Denis Diderot. París 7.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et functionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, IREM de Strasbourg. (Traducido por el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV. IPN. México, 1997).

DUVAL, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels. Peter Lang. Suisse.

EISENBERG, T.; DREYFUS, T. (Eds.) (1989). Visualization in the Mathematics Curriculum [Special Issue]. Focus on Learning Problems in Mathematics, 11(1 y 2).

FEY, J.T. (Ed.) (1984). Computing and Mathematics: The impact on Secondary School Curricula. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

FEY, J.T. (1989 a). Computer - Intensive Algebra. College Park: University of Maryland.

FEY, J.T. (1989 b). School Algebra for the Year 2000. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Reston, VA: NCTM; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

FEY, J. Y HEID, K., (1987). Effects of Computer-based Curriculum in School Algebra. Paper presented at a Meeting of National Science Foundation Project Directors, College Park, MD.

FILLOY, E. (1990). PME algebra research. A working perspective. Conferencia Plenaria. En G. Booker, P. Cobb y T. Mendecuti (Eds). Proceedings of the fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Vol. II, pp. 1-33.

FILLOY, E. (1991). Cognitive Tendencies and Abstraction Processes in Algebra learning. En Furinghetti (Ed.). Proceedings of the fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Vol. II, pp. 48-55. Assisi. Italy.

FILLOY, E. (1993). Tendencias cognitivas y procesos de abstracción en el aprendizaje del Álgebra y de la Geometría. Enseñanza de las Ciencias. V. 11, pp. 160-166.

FILLOY, E., y ROJANO, T, (1984). From and Arithmetical to an Algebraic Thought. En Proceedings of the 6th PME-NA. Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1, pp.154-158. Utrecht, The Netherlands: State University of Utrecht, Subfaculty of Mathematics, OW & OC.

FILLOY, E.; ROJANO, T. (1985 a). Obstructions to the Acquisition of Elemental Algebraic Concepts and Teaching Strategies. En L. Streefland (Ed.) Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1, pp.154-158. Utrecht, The Netherlands: State University of Utrecht, Subfaculty of Mathematics, OW & OC.

FILLOY, E.; ROJANO, T. (1985 b). Operating on the Models of Teaching. En S.K. Damarin y M. Shelt (Eds). Proceedings of the Seventh Annual Meeting for the Psychology Mathematics Education, pp. 75-99. Madison: University Wisconsin.

FILLOY, E., y ROJANO, T, (1989). Solving Equations: The transition from Arithmetic to Algebra. For the Learning of Mathematics, 9 (2), 19-25.

FILLOY, E.; ROJANO, T. (1991). Translating from Natural Language to the Mathematical System of Algebraic Signs and Viceverse. En R. Underhill (Ed.) Proceedings of 13 NAPME.

FILLOY, E.; SUTHERLAND, R. (1996). Designing Curricula for Teaching and Learning Algebra. En Bishop et all (Eds.). International Handbook Mathematics Education. Kluwer. Academic Publishers. Netherlands.

FLANDERS, N. (1977). Análisis de la Interacción Didáctica. Anaya.

Madrid.

FREGE, G. (1962). Estudio sobre semántica. Ariel. Barcelona.

FREGE, G. (1974). Escritos lógico - semánticos. Tecnos. Madrid.

FREUDENTHAL, H. (1974). Soviet Research on Teaching Algebra at the Lower Grades of the Elementary School. Educational Studies in Mathematics, 5, 391-412.

FREUDENTHAL, H. (1983). Didactical Phenomemology of Mathematical Structures. Reidel Dordrecht, The Netherlands. Kluwer.

GAIRÍN, J. (1986). Aprendizaje y cambio de actitudes en la didáctica especial de las Matemáticas. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

GAIRÍN, J. (1990). Las actitudes en educación. Un estudio sobre educación matemática. Edit. Boixareu Universitaria. Barcelona.

GALLARDO, A. (1994). El status de los números negativos en la resolución de ecuaciones algebraicas. Tesis Doctoral. C.I.N.V.E.S.T.A.V. del I.P.N. México.

GARRET, H. (1983). Estadística en Psicología y Educación. Ed. Paidós. Barcelona.

GIMÉNEZ, J. (1991). Innovación metodológica de la didáctica especial del número racional positivo. Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Barcelona.

GIMÉNEZ, J. (1997). Nunca es tarde para mejorar las actitudes: el caso de las fracciones. UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas. Julio, nº 13.

GINSBURG, H.P., KOSSAN, N., SCHWARTZ, R. y SWANSON, D. (1983). Protocol Methods in Research on Mathematical Tinking. En H.P. Ginsburg (Ed.): The Development of Mathematical Thinking. Academic Press. New York.

GLAESER, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. Recherches en Didactique des Mathématiques, V. 2(3), pp.303-346.

GOBIERNO DE CANARIAS (1991). Diseños Curriculares Base para Educación Secundaria. Consejería de Educación Cultura y Deportes.

GOLDENBERG, E. P. (1987). Believing is Seeing: How Preconceptions Influence the Perception of Graphs. En Bergeron, J.C.; Herscovics, N. y Kieran, C., (Ed.), Vol 1, pp.197-203.

GOLDIN, G.A. (1987). Cognitive Representational Systems for Mathematical Problem Solving. En C. Janvier (Ed): Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. Hillsdale. N.J. Lawrence Erlbaum.

GOLDIN, G.A. (1993). The IGPME Working Group on Representations. Paper presentado en el XVII PME. Japan.

GOLEMAN, D. (1996). Inteligencia emocional. Edit. Kairós. Barcelona.

GÓMEZ-CHACÓN, I.M. (1997). La alfabetización emocional en Educación Matemática. Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas. Julio, nº 13.

GREENO, J.G. (1982). A cognitive Learning Analysis of Algebra. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association. Boston. M.A.

GROUWS, D. (Ed.) (1992). Handbook of Research on Mathematical Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Publishing Company. New York.

HARPER, E. (1987). Ghosts of Diophantus. Education in Mathematics, 18, 75-90.

HART, K.M. (Ed.) (1981). Childrens's Understanding of Mathematics, 11-16. John Murray. London.

HART, L.E. (1989). Describing the Affective domain: Saying what we mean. En McLeod, D.B. y Adams, V.M. (Eds): Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective. Springer-Verlag. New York.

HERNÁNDEZ, J. (1997): Sobre habilidades en la resolución de problemas aritméticos verbales, mediante el uso de dos sistemas de representación yuxtapuestos. Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna.

HERNÁNDEZ, J., ESPINEL, C. y SOCAS M. M. (1994). The attitudes in problem solving. En J. P. Da Ponte y J. F. Matos (Eds). Proceedings of the XVIII PME Conference. Lisbon, Portugal, pp. 42.

HERNÁNDEZ, R. P. y GÓMEZ CHACÓN, I. M. (1997). Las actitudes en Educación Matemática. Estrategias para el cambio. UNO, Revista de Didáctica de las Matemáticas. Julio, nº 13.

HERSCOVICS, N. (1989). Cognitive Obstacles Encounters in the Learning of Algebra. Research Agenda for Mathematics Education. Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Wagner-Kieran Editors. N.C.T.M.

HERSCOVICS, N., y KIERAN, C. (1980). Constructing Meaning for the Concept of Equation. Mathematics Teacher, 73, 572-580.

HERSCOVICS, N., y LINCHEVSKI, L. (1991). Pre-algebraic Thinking: Range of Equations and Informal Solution Processes Used by Seventh Graders Prior to Any Instruction. En Furinghetti, E (Ed.). Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Genova, Italy, Vol. 2, pp. 173-180.

HERSCOVICS, N. y LINCHEVSKI, L. (1994). A Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra. Educational Studies in Mathematics, 27, 59-78.

HIEBERT, J. (1988). A Theory of Developing Competence with Written Mathematical Symbols. Educational Studies in Mathematics. Vol 19, 3, pp. 333-335.

HIEBERT, J. y LEFEVRE, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An introductory analysis. En Hiebert, J. (Ed.). Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics. New York: Lawrence Erlbaum Associates.

HOYLES, C.; SUTHERLAND, R. y EVANS, J., (1985). The Logo Maths Project: A Preliminary Investigation of the Pupil-centred Approach to the Learning of Logo in the Secondary Mathematics Classroom, 1983-84. (University of London, Institute of Education: London).

HUGHES, B. (1981). Jordanus de Nemor. De Numeris Datis (A Ciritical Editions and translation). University of California Press, Berkeley.

JANVIER, C. (Ed) (1987). Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.

JIMÉNEZ, F. (1981). Psicología Social. UNED. Madrid.

KAPUT, J. (1987). Toward a Theory of Symbol Use in Mathematics. En Janvier, C. (Ed.): Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. Hillsdale. N.J.: Lawrence Erlbaum.

KAPUT, J. (1989). Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. Reston. VA: NCTM. Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates.

KAPUT, J. (1991). Notations and Representations as Mediators of Constructive Processes. En Von Glasersfeld E. (Ed) Radical Constructivism in Mathematics Education. Kluwer Academic Publisher.

KAPUT, J. (1996). ¿Una línea de investigación que sustente la reforma del álgebra? Uno, 9, pp. 85-97.

KIERAN, C. (1980). The Interpretation of the Equal Sign: Symbol for an Equivalence Relation Vs an Operator Symbol. En Karplus, (Ed.), Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, California, pp.163-169.

KIERAN, C. (1981). Concepts Associated with the Equality Symbol. Educational Studies in Mathematics, nº 12, pp. 317.326.

KIERAN, C. (1983). Relationships between Novice Algebraic Letters and their use Symetric and Equation-solving Procedures. En Proceedings of the International Group for the Psichology Mathematics Education. Vol.1, pp. 161-168. Montreal. Université de Montréal. Canadá.

KIERAN, C. (1984). A Comparison between Novices´views of Algebraic Letters and their Use of Daling with the Equivalence of Equations. En J.M: Moser (Ed.), Proceedings of the 6th Annual Meeting of PME-NA, pp.83-91. Madison: University of Winconsin.

KIERAN, C. (1985). Use of Substitution Procedure in Learning Algebraic Equation-solving. En Proceedings of the 7th PME-NA.

KIERAN, C. (1988). Two Different Approaches among Algebra Learners. En A. F. Coxford: The Ideas of Algebra, K-12 (1988 Yearbook), Reston, VA: NCTM.

KIERAN, C. (1989). The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective. En S. Wagner y C. Kieran. Research Agenda for Mathematics Education: Vol. 4. Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, pp.33-56. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

KIERAN, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. En Grows, D.A. (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Macmillan Publishing Company. New York.

KIERAN, C. y FILLOY, E. (1989). El aprendizaje del Álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. Enseñanza de las Ciencias, 7 (3), pp. 229-240.

KIEREN, T. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Developments. En J. Hiebert y M. Behr (eds.), Number Concepts and Operations in the Middle Grades. Lawrence Erlbaum Associates Publishers/ National Council of Teachers of Mathematics: Hillsdale, NJ/Reston.

KIFER, E y ROBITAILLE, D. (1989). Attitudes, Preferences and Opinions. En Robitaille, D.F. y Garden, R.A. (Eds): The IEA Study of Mathematics II: Contexts and Outcomes of School Mathematics. Oxford. Pergamon.

KILPATRICK, J. (1985). A Retrospective Account of the Past 25 years of research on teaching Mathematical Problem Solving. Mathematical Problem

Solving. En E. Silver (Ed.). Teaching and Learnning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives. LEA. Hillsdale. New Jersey.

KILPATRICK, J. (1993). Beyond Face Value: Assessing Research in Mathematics Education. En Nissen, G., Blomhoj, M. Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics. Roskilde University. Dinamarca, pp. 13-33.

KIRSHNER, D. (1985). A Linguistic Model of Algebraic Symbol Skill. University of British Columbia.(No publicado)

KIRSHNER, D. (1989). The Visual Syntax of Algebra. Journal for Research in Mathematics Education, pp.274-287.

KRUTETSKII, V.A. (1963). Some Characteristics of the Thinking of Pupils with Little Capacity for Mathematics. En Educational Psichology in the U.R.S.S. Simon y Simon (eds.). Routledge. London.

KRUTETSKII, V.A. (1976). The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren. University of Chicago Press.

KÜCHEMANN, D. (1981). Algebra. En Hart, K. (Ed.): Children's Understanding of Mathematics, pp. 11-16. Murray: London.

KUHN, T. S. (1962). The Structure of Scientific Revolutions. University of Chicago Press: Chicago. Traducción castellana: La estructura de las revoluciones científicas (Fondo de Cultura Económica: México, 1971).

KULM, G. (1980). Research on Mathematics Attitude. En Shumway, R. (Ed): Research in Mathematics Education. National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA.

LABORDE, C. (1990). Language and Mathematics. En P. Nesher y J. Kilpatrick (eds.). Mathematics and Cognition, pp. 53-69. Cambridge University Press: Chicago.

LAKATOS, I. (1981) Matemáticas, ciencia y epistemología. Alianza Madrid.

LAKOFF, G. y JOHNSON, M. (1980). Metafors we Live by. University of Chicago Press: Chicago.

LEDER, G. (1985). Measurement of Attitudes to Mathematics. For the Learning of Mathematics. Vol 5 (3), pp. 18-21.

LEDER, G. (1992). Measuring Attitudes to Mathematics. Proceedings of the XVI International Conference for the Psychology of Mathematics Education.

LEDER, G. (1993). Reconciling Affective and Cognitive Aspects of Mathematics Learning: Reality or a Pious Hope? Proceeding of the XVII International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Japan. Vol 1, pp. 46-65.

LEE, L. y WHEELER, D.(1989). The Arithmetic Conection. Educational Studies in Mathematics, 20, 41-54.

LESTER, F. y CHARLES, R. (1992). A Framework for Research on Problem-Solving Instruction. En J.P. Ponte, J.F. Matos, J.M. Matos y D. Fernandes (Eds): Mathematical Problem Solving and New Information Technologies. Research in Contexts of Practice. Proceeding of the NATO Advanced Research Workshop on Advances in Mathematical Problem Solving Research. Springer-Verlag. Berlin.

LEWIS, C. (1980). Kinds of Knowledge in Algebra. Paper presented at the Annual Meeting of AERA.

LEWIS, C. (1981). Skill in Algebra. En J.R. Anderson (Ed.). Cognitive Skills and their Acquisition. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

LINCHEVSKI, L. y HERSCOVICS, N. (1996). Crossing the Cognitive Gap between Arithmetic and Algebra: Operating on the Unknow in the Context of Equations. Educational Studies in Mathematics, 30, 1, pp. 39-65.

LINS, R. (1992). Algebraic and non-algebraic Algebra. En Geeslin, W. y Graham, K. (Eds.), Proceeding of the Sixteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Durham, NH (USA), vol 2, pp. 56-63.

LOVE, E. (1986). What is algebra?, Mathematics Teaching, 117, pp. 48-50.

MALLE, G. (1993). Didaktishce Probleme der elementaren Algebra. Braunschwerg. Germany.

MANDLER, G. (1989). Affect and Learning: Causes and Consequences of Emotional Interactions. En D.B. McLeod y V.M. Adams (Eds): Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective. Springer-Verlag. New York.

MARASCUILO, L. A. y LEVIN, J. R. (1983). Multivariate Statistics in the Social Sciences. A research's guide. Wadswoth, Inc. California.

MARTÍNEZ ARIAS, R. (1995). Psicometría: Teoría de los tests psicológicos y educativos. Ed. Síntesis. Madrid.

MASON, J., GRAHAM, A., PIMM, D. y GOWAR, N. (1985). Routes to Roots of Algebra. The Open University Press. Walton Hall, Milton Keynes.

MATOS, J.F. (1991). A importancia das Concepçoes e Attitudes dos alunos em relaçao à Matematica. Memorias de II CIBEM. Sevilla, septiembre 1990, París, UNESCO, Sección de Enseñanza Científica y Tecnológica.

MATZ, M. (1979). Towards a Process Model for High School Algebra Errors. (Working Paper nº 181). Cambridge. Massachusetts. Institute of technology. Artificial Intelligence Laboratory.

MATZ, M. (1980). Towards a Computational Theory of Algebraic Competence. Journal of Children´s Mathematical Behavior, 3, 1, pp.93-166.

MATZ, M. (1982). Towards Computational Theory of Algebraic Competence. Intelligent Tutoring Systems. En D. Sleeman y J.S. Brown. Academic Press. Massachusets Institute of Techonology.

MAURER, S.B. (1987). New Knowledge About Errors and New Views about Learnes: What they Mean do Educators and More Educators and Would Like Know. En A.H. Schoenfeld (Ed.). Cognitive Science and Mathematics Education. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

MAYER, R.E. (1986). Pensamiento, resolución de problemas y cognición. Paidós. Barcelona.

McLEOD, D.B. (1989). The Role of Affect in Mathematical Problem Solving. En D.B. McLeod y V.M. Adams (Eds) (1989): Affect and Mathematical Problem Solving: A new perspective. Springer-Verlag. New York.

McLEOD, D.B. (1992). Research on Affect in Mathematics Education: A Reconceptualization. En D. Grouws: Handbook of Research on Mathematical Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Publishing Company. New York.

McLEOD, D.B. (1994). Research on Affect and Mathematics Learning in the JRME: 1970 to the Present. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 25, 6, pp. 637-647.

McLEOD, D.B. y ADAMS, V.M. (Eds) (1989). Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective. Springer-Verlag. New York.

M.E.C. (1970). Ley General de Educación.

M.E.C. (1979). Nuevas orientaciones para la Segunda Etapa de E.G.B. Magisterio Español. Madrid.

M.E.C. (1987). Programas Renovados de la Educación General Básica, Ciclo Superior. Escuela Española. Madrid.

M.E.C. (1989). Diseño Curricular Base para la Educación Secundaria (Área de Matemáticas). M.E.C. Madrid.

M.E.C. (1989). Libro Blanco para la Reforma del Sistema Educativo. Madrid.

M.E.C. (1993). Estructura y Contenido para el Bachillerato. B.O.E. 253 de 21/10/92. Real Decreto 1178/1992.

MEVARECH, Z.R. y YITSCHAK, D. (1983). Students' misconceptions of the equivalence relationship. En Hershkowitz (Ed.): Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, pp. 313-318.

MONROE, W.S. (1915). A Test of the Attainment of First-year High School Students in Algebra. School Review, 23, 159-171.

MUÑIZ, J. (1992). Teoría clásica de los tests. Ed. Pirámide. Madrid.

N.C.T.M. (1989). Curriculum and evaluation standards for school Mathematics. Reston, VA. NCTM.

N.C.T.M. (1991). Professional Standards for Teaching Maths. NCTM Reston, Virginia.

NAVARRO-PELAYO, V. (1994). Estructura de los problemas combinatorios simples y del razonamiento combinatorio en alumnos de Secundaria. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

NESHER, P. y KILPATRICK, J. (Eds.) (1990). Mathematics and Cognition ICMI Study Series. Cambridge University Press. Cambridge.

NEWELL, A. y SIMON, H. (1972). Human Problem Solving. Prentice-Hall, Inc. New Jersey.

NICKERSON, R.S., PERKINS, D.N. y SMITH, E.E. (1987). Enseñar a pensar: Aspectos de la aptitud intelectual. Paidós. MEC. Barcelona.

N.M.P. (1987). National Mathematics Project. London. Longman.

NORTES CHECA, A. (1988). El paso de las operaciones concretas a las formales: Un análisis en el dominio de las Matemáticas. Tesis doctoral. Universidad de Murcia.

NORTES CHECA, A. (1993). Un modelo de evaluación diagnóstica en Matemáticas. Universidad de Murcia.

NORTES CHECA, A. y MARTÍNEZ ARTERO, R. (1989). La actitud hacia las Matemáticas: Un estudio en 6º de E.G.B. Bordón, Vol. 41, nº 1.

O´BRIEN, D. J. (1980). Solving Equations (a Teaching Experiment). University of Nottingham.

OTTE, M. (1986). What is a Text? En Christiansen, B., Howson, A.G., Otte, M.: Perspectives on Mathematics Education, pp. 173-204. Reidel: Dordrecht.

PACCIOLI, L. (1974). Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proporitionalita. Vinegia, 1494; Toscolano, 1523.

PAIVIO, A. (1978). Mental Comparisons Involving Abstract Attributes. Memory and Cognition, 6, pp. 199-208.

PALAREA, M.M. y SOCAS, M.M. (1991). Enseñanza de resolución de ecuaciones y expresiones algebraicas, mediante la yuxtaposición de sistemas de representación. Actas V J.A.E.M. Castellón (en prensa).

PALAREA, M.M. y SOCAS, M.M. (1994 a). Algunos obstáculos cognitivos en el aprendizaje del lenguaje algebraico. Suma. Monográfico Lenguaje y Matemáticas, Vol. 16, pp. 91-98.

PALAREA, M.M. y SOCAS, M.M. (1994 b). Élaborations sémantiques vs élaborations syntactiques dans l'enseignement - apprentissage de l'algèbre scolaire (12-16 ans). Actes de la 46ème Rencontre de la CIEAEM. Vol II, pp.111-119. Toulouse. (France).

PALAREA, M.M. y SOCAS, M.M. (1995). Sistemas de Representación en la Resolución de Problemas Algebraicos. Suma. Vol. 20, pp. 29-35.

PALAREA, M.M. y SOCAS, M.M. (1997 a). Operational, Process and Strategic Abilities in the Learning of Algebraic Language. A Case Study. Proceedings of the 21st Conference of the PME, v.1, pp. 254. Finland.

PALAREA, M.M. y SOCAS, M.M. (1997). Gestion, communication et aprentissage du langage algébrique. Une étude de cas. C.I.E.A.E.M.-49, pp.195-202. Setúbal. Portugal.

PALAREA, M.M. y SOCAS, M.M. (1998 a). Operational and Conceptual Abilities in the Learning of Algebraic Language. A Case Study. Proceedings of the PME-22, v. 3, pp. 327-334. Stellenbosh, South Africa.

PALAREA, M.M. y SOCAS, M.M. (1998 b). About Cognitive Processes Involved in the Learning of Algebraic Language: A Biographical Study. Hiroshima Journal of Mathematics Education (enviado).

PATTON, M.Q. (1980) Qualitative Evaluation Methods. Beverly Hills, CA: Sage.

PETITTO, A. (1979). The Role of Formal and non-formal Thinking in doing Algebra. Journal of children´s Mathematical Behavior. Vol. 2, pp. 69-82.

PIAGET Y GARCÍA (1982). Psichogenèse et histoire des sciences. Paris. Flammarion.

PIMM, D. (1987). Speaking Mathematically. Routledge & Kegan: Londres. (Trad. cast.: 1990, P. Manzano, El lenguaje matemático en el Aula. Ministerio de Educación y Ciencia y Ediciones Morata: Madrid).

PIRIE, S.E.B. y MARTIN, L. (1997). The Equation, the Whole Equation and Nothing but the Equation! One Approach to the Teaching of Linear Equations. Educational Studies in Mathematics, 34, pp.159-181.

PIRIE, S.E.B. y KIEREN, T.E. (1994). Grouwth in Mathematical Understanding: How Can we Characterise it and How Can we Represent it? En P. Cobb (Ed.) (Secial Edition). Educational Studies in Mathematics, Vol. 26, nº 2-3, pp.165-190. [Re-printed in Cobb (Ed.), Learning Mathematics: Constructivist and

Interactionist Theories of Mathematical Development. Dordrecht: Kluwer, pp.61-86].

POLYA, G. (1957). How to Solve It. (Traducción española: Cómo plantear y resolver problemas. México. Edit. Trillas, 1976).

PRESMEG, N. (1985). The Role of Visually Mediated Processes in High School Mathematics: A Classroom Investigation. Tesis doctoral. Cambridge.

QUILES, M. (1986). La actitud y el rendimiento escolar en matemáticas: Un acercamiento multidimensional. Tesis doctoral. Universidad de La Laguna.

RACHLIN, S. (1989). The Research Agenda in Algebra: A Curriculum Development Perspective. En Wagner, S. y Kieran, C. (Eds): Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra. N.C.T.M. Laurence Erlbaum Associates. Reston. Virginia.

REPETTO JIMÉNEZ, E. y MARRERO RODRÍGUEZ, G. (1996). Estrategias de Intervención en el Aula desde la LOGSE. ICEPSS Editores, S.L. Canarias.

RESNICK, L. y FORD, W. (1981). The Psychology of Mathematics for Instruction. (Traducción española: (1990) La enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológicos. Paidós-MEC).

RESNICK, L.B. (1983). A Developmental Theory of Number Understanding. En Ginsburg (Ed): The Development of Mathematical Thinking. Academic Press. New York, pp. 109-151.

RICO, L. (1997) La organización del currículo de Matemáticas. La educación Matemática en la enseñanza secundaria. Cuadernos de Formación del Profesorado, 12. ICE Barcelona. Ed. Horsori, pp. 39-59.

ROBITAILLE, D.F. y GARDEN, R.A. (Eds) (1989). The IEA Study of Mathematics II: Contexts and Outcomes of School mathematics. Oxford. Pergamon.

ROJANO, T. (1985). De la Aritmética al Álgebra (estudio clínico con niños de 12 a 13 años de edad). Tesis de Doctorado. Cinvestav del IPN. México.

ROJANO, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. Enseñanza de las Ciencias 12 (1).

ROMBERG, T. (1992). Perspectives on Scholars Chip and Research Methods. En Grows, D.A. (Ed): Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. NCTM-MacMillan Publishing Company. New York.

RUGG, H.O. y CLARK, J.R. (1918). Scientific Methode in the Reconstruction of Ninth-grade Mathematics. Supplementary Educational Monographs, 2 (1, Whole nº 7).

SALOMON, G. (1991). Transcending the Qualitative Debate: The Analytic and Systemic Approaches to Educational Research. Educational Researcher, 20 (6), 10-18.

SAMURCAY, R., (1985). Learning Pogramming: Constructing the Concept of variable by beginning students. En Streefland (Ed.), Vol. I, pp.77-82.

SCHOENFELD, A.H. (1980). Teaching Problem-Solving Skills. American Mathematical Monthly (87), pp.794-805.

SCHOENFELD, A. (1983). Episodes and Executive Decisions in Mathematical Problem Solving. En R. Lesh y M. Landau (Eds): Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. New York. Academic Press.

SCHOENFELD, A. (1985). Mathematical Problem Solving. New York. Academic Press.

SCHOENFELD, A. (1987). Cognitive Science and Mathematics Education. LEA. Hillsdale. New Jersey.

SCHOENFELD, A. (1988). Problem Solving in Context(s). En R.I. Charles y E.A. Silver (Eds.): The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving. Vol 3. LEA y NCTM.

SCHOENFELD, A. (1989). Explorations of Students Mathematical Beliefs and Behavior. Journal for Research in Maths. 20(4), pp.338-355.

SCHOENFELD, A. (1991). On Pure and Applied Research on Mathematics. Educational Journal of Mathematical Behavior, 10, pp. 263-276.

SCHOENFELD, A. (1992). Learning to think Mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense Making in Mathematics. En D.A. Grouws (Ed) Handbook of Research on Mathematical Teaching and Learning. A Project of the National Council of Teachers of Mathematics. Macmillan Publishing Company. New York.

SCHOENFELD, A.H. (1994) A Discourse on Methods. Journal for Research in Mathematics Education, 25(6) pp.697-710.

SCHWARZ, B. (1989). The Use of Microworld to Improve the Concept Image of a Function: The Triple Representation Model Curriculum. Unpublished Doctoral Dissertation. Weizmann Institute of Science, Israel.

SFARD, A. (1987). Two Conceptions of Mathematical Notions: Operational and Structural. En J.C. Bergeron, N. Herscovics, y C. Kieran (Eds): Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 3, pp.162-169. Montréal, Canada: Université de Montréal.

SFARD, A. (1989). Transition from Operational to Structural Conception: The Notion of Function Revisited. En G. Vergnaud, J. Rogalski, y M. Artigue (Eds): Proceedings of the 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 3, pp.151-158. Paris: Laboratoire PSYDEE.

SFARD, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. Educational Studies in Mathematics. Vol. 22 (1), pp. 1-36.

SFARD, A., y LINCHEVSKI, L. (1994). The Gains and the Pitfalls of Reification. The Case of Algebra. Educational Studies in Mathematics, 26, pp.191-228.

SIERPINSKA, A. (1993). Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics. En Nissen, G., Blomhoj, M. Criteria for Scientific Quality and Relevance in the Didactics of Mathematics. Roskilde University. Dinamarca pp. 35-74.

SIERPINSKA, A. y OTROS (1993). What is Research in Mathematics Education, and what are Its Results? Journal for Research in Mathematics Education Vol. 24 (3) pp. 274-278.

SKEMP, R. (1982). Communicating Mathematics: Surface Structures and Deep Structures. Visible Language, Vol. 26, 3.

SOCAS, M. M. (1991). Iniciación a la enseñanza-aprendizaje de Álgebra: una perspectiva curricular. Actas del Segundo Simposio Internacional sobre

Investigación en Educación Matemática, Aprendizaje y Enseñanza del Álgebra, pp. 49-79. Cuernavaca. Mexico.

SOCAS, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Cap. V, pp. 125-154. En Rico, L. y otros: La educación Matemática en la Enseñanza Secundaria. Ed. Horsori.

SOCAS, M. M. y PALAREA, M. M (1997). The Three Dimensions of Error in the Understanding of Algebraic Language. Proceedings of the 21st Conference of the PME, v.1, pp. 264. Finland.

SOCAS, M. M. Y PALAREA, M. M. (1996). El uso de sistemas de representación con imágenes en la Enseñanza-aprendizaje del Álgebra escolar. Actas del Simposium Internacional sobre la "Matemática actual". XXV años de Matemáticas en la Universidad de la Laguna, pp. 507-521. Secretariado de Publicaciones de la Universidad de La Laguna.

SOCAS, M. M. Y PALAREA, M. M. (1998). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en Álgebra escolar. UNO. Barcelona.

SOCAS, M., CAMACHO, M., HERNÁNDEZ, J. (1998). Análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza Secundaria. Revista Interuniversitaria de formación del Profesorado, 32, pp.73-86.

SOCAS, M., AFONSO, M. C., PALAREA, M. y HERNÁNDEZ, J. (1995). Un modelo de investigación convergente en educación Matemática desde una perspectiva curricular. Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 21, pp.45-58.

SOCAS, M., CAMACHO, M., PALAREA, M. y HERNÁNDEZ, J. (1989). Iniciación al Álgebra. Ed. Síntesis. Madrid.

SOCAS, M. M., PALAREA, M. M. Y OTROS (1990). Una clasificación de errores en Álgebra. Actas XIV Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas. Servicio de publicaciones. Universidad de La Laguna, vol.III, pp. 1541-1546.

STAKE, R.E. (1995). The Art of Case Study Research. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

SUTHERLAND, R. (1987a). A Study of the Use and Understanding of Algebra Related Concepts within a Logo Environment. En J.C. Bergeron, N. Herscovics, y C. Kieran. Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1, pp. 241-247. Montréal, Canada: Université de Montréal.

SUTHERLAND, R. (1987b). What are the Lnks between Variable in Logo and Variable in Algebra. Recherches en Didactique des Mathématiques, 8 (1-2), pp.103-130.

SUTHERLAND, R. y HOYLES, C. (1986). Logo as a Context for Learning about Variable. En Proceedings of the tenth International Conference for the Psychology of Mathematics, pp. 301-306. University of London, Institute of Education: London, U.K.

SUWARSONO, S. (1982). Visual Imagery in the Mathematical Thinking of Seven Grade Students. Tesis doctoral. I.K.I.P. Sanata Darma, Teromolpos 29, Yogiakarta.

TALL, D. (1987a). Algebra in a Computer Environment. En J.C. Bergeron, N. Herscovics, y C. Kieran (Eds): Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1, pp.262-274. Montréal, Canada: Université de Montréal.

TALL, D. (1987b). Constructing the Concept Image of a Tangent. En J.C. Bergeron, N. Herscovics, y C. Kieran (Eds): Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 3, pp. 69-75. Montréal, Canada: Université de Montréal.

TALL, D. (1989). Different Cognitive Obstacles in a Technological Paradigm. Research Agenda for Mathematics Education. Research Issues in the Learning and Teaching for Algebra. Wagner y Kieran Editors. N.C.T.M.

TAYLOR, S. J. y BOGDAN, R. (1986). Introducción a los métodos cualitativos de investigación. Buenos Aires: Paidós.

THOMAS, M. Y TALL, D. (1986). The Value of the Computer in Learning Algebra Concepts. En Proceedings of the 10 PME. London.

THOMPSON, P. W. y THOMPSON, A. G. (1987). Computer Presentations of Structure in Algebra. En Bergeron, J.C.; Herscovics, N. y Kieran, C., (Eds.), Proceedins of the 11th International Conference PME. Vol.1 pp.248-254. Montreal, Québec, Canadá: Université de Montréal.

TREFFERS, A. (1987). Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education: The Wiskobas Project. Dordrecht. Kluwer.

TRUJILLO Y MARÍN, M. (1987). Uso del lenguaje algebraico en la resolución de problemas de aplicación. Tesis doctoral.

USISKIN, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and Uses of Variables. En A.F. Coxford, y A.P. Shulte (Eds.). Ideas of Algebra, k-12. pp. 8-19. Reston VA: N.C.T.M.

VAN HIELE, P.M. (1987). A Method to Facilitate the Findings of Levels of Thinking in Geometry by Using the Levels in Arithmetic, Learning and Teaching Mathematics. Issues for Research and Practise Working. Syracusse University.

VEGA, M. (1985). Introducción a la Psicología cognitiva. Alianza. Madrid.

VERA, F. (1970). Diofanto de Alejandría Científicos griegos (Recopilación, estudio preliminar, preámbulos y notas). Vol. 2, Editorial Aguilar, México.

VERGNAUD, G. (1984). Understanding Mathematics at the Secondary-School Level. En Bell, Low y Kilpatrick (Eds.), pp.27-35.

VERGNAUD, G. (1987). About Constructivism. En J.C. Bergeron, N. Herscovics, y C. Kieran (Eds.). Proceedings of the 11th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1, pp. 42-54. Montréal. Canada: Université de Montréal.

VERGNAUD, G. y CORTÉS, A. (1986). Introducin Algebra to “low-level” Eight and Ninth Graders. En Proceedings of the 10th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1, pp.319-324 University of London, Institute of Education: London, U.K

VIÉTE, F., WITMER, T.R. (1983). The Analytic Art. The Kent State University Press, E.E.U.U.

VISAUTA, B. (1989). Técnicas de investigación social. Barcelona: PPU.

VOLLRATH, H. J. (1994). Algebra in der Sekundarstufe. Lehebücher und monographien zur didaktik der mathematik. Wissenschaftsverlag. Mannheim.

WAGNER, S. y KIERAN, C. (Eds.) (1989). Research issues in the Learning and Teaching of Algebra. Volume 4. N.C.T.M. Lawrence Erlbaum Associates. Reston. Virginia. Hillsdale N.J.

WAGNER, S. (1981). Conservation of Equation and Function under Transformations of Variable. Journal for Research in Mathematics Education, 12, 107-118.

WAGNER, S., RACHLIN, S.L. y JENSEN, R.J. (1984). Algebra Learning Project: Final Report. Athens: University of Georgia. Department of Mathematics Education.

WERTSH, J. V. (1991). Voices of Mind. A. Sociocultural Approach to Mediated Action. Harvester Wheatsheaf: Londres.

WHEELER, D. (1989). Contexts for Research on the Teaching and Learning of Algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds): Research Agenda for Mathematics Education: vol.4. Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra, pp.278-287. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

WHITMAN, B. (1976). Intuitive Equation Solving Skills and the Effects on them of Formal Techniques of Equation Solving. Doctoral Dissertation, Florida State University, 1975, Dissertation Abstracts International, 36, 5180 A (University Microfilms Nº 76-2720).

WITKIN, H.A., MOORE, C.A., GOODENOUGH, D.R. y COX, P.W. (1977). Field-dependent and Field-independent Cognitive Styles and Their Educational Implications. Review of Educational Research, nº 47, pp. 1-65.

Anexos

ÍNDICE

Anexo 1. Cuestionarios para expresiones algebraicas y ecuaciones.

Anexo 2. Cuestionarios para expresiones algebraicas y ecuaciones.

Anexo 3. Cuestionarios para expresiones algebraicas y ecuaciones.

Anexo 4. Cuestionarios para expresiones algebraicas y ecuaciones.

Anexo 5. Pretest.

Anexo 6. Postest.

Anexo 7. Test de habilidades algebraicas.

Anexo 8. Prueba local t.

Anexo 9. Escala de actitudes.

Anexo 10. Diseño instruccional para las expresiones algebraicas (disea i).

Anexo 11. Diseño instruccional para las ecuaciones lineales con una incógnita (disec).

Anexo 12. Actividades complementarias al diseño de instrucción.

Anexo 13. Diseño instruccional para las expresiones algebraicas (disea ii).

Anexo 14. Protocolos sesiones de audio.

Anexo 15. Transcripciones de las sesiones de audio.

Anexo 16. Protocolos de las entrevistas de los alumnos.

Anexo 17. Transcripciones de las entrevistas de los alumnos.

Anexo 18.

Anexo 19.

Anexo 20.

Anexo 21.

ANEXO 1

CENTRO:____ **PRUEBA C_1**

APELLIDOS Y NOMBRE:______________________________________ **CURSO:**____

1. Ejecuta las siguientes operaciones con fracciones y simplifica cuando se pueda.

$\boxed{1}$ a) $\frac{6}{4}+\frac{10}{4}=$

$\boxed{2}$ b) $\frac{4}{3}+\frac{2}{5}=$

$\boxed{3}$ c) $\frac{12}{24}-\frac{1}{8}=$

$\boxed{4}$ d) $\frac{3}{16}+\frac{6}{32}=$

$\boxed{5}$ e) $\frac{3}{4}\times\frac{7}{4}=$

$\boxed{6}$ f) $\frac{3}{5}\times\frac{2}{8}=$

$\boxed{7}$ g) $\frac{4}{6}\div\frac{7}{6}=$

$\boxed{8}$ h) $\frac{9}{5}\div\frac{2}{7}=$

2. En cada caso llena el cuadrito vacío:

$\boxed{9}$ a) $\square - 8 = 10$

$\boxed{10}$ b) $\square - 25 = 41$

$\boxed{11}$ c) $4 \times \square = 36$

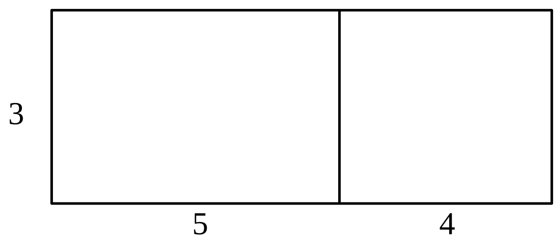
$\boxed{12}$ d) $\square \times 5 = 150$

$\boxed{13}$ e) $\square + 7 = \square + \square$

$\boxed{14}$ f) $\frac{\square}{8} = 4$

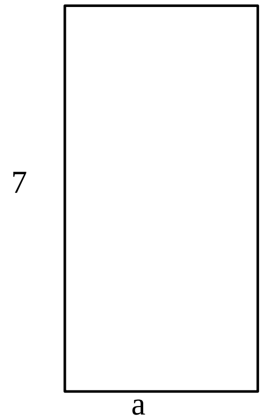
3. Calcular el área de las siguientes figuras.

15 a)



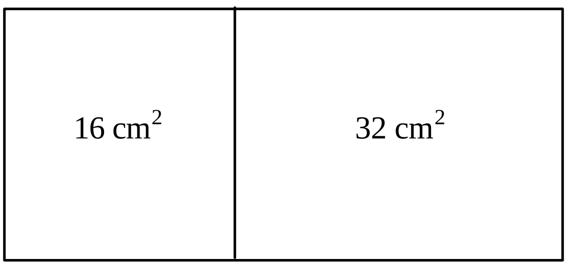
Área = __________

17 c)



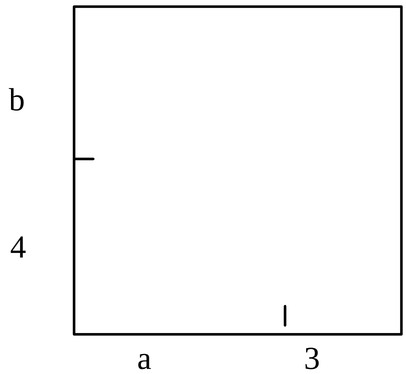
Área = ________

16 b)



Área = ___________

18 d)



Área =_________

4. Calcular el perímetro de las siguientes figuras:

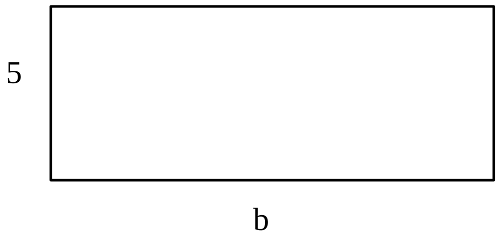
19 a)

Perímetro =_____________

21 c)

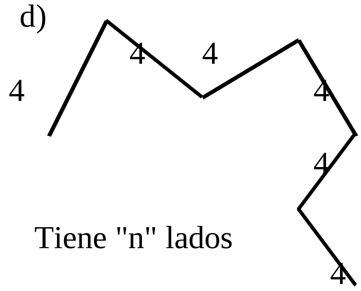
Perímetro = ___________

20 b)



Perímetro = __________

22 d)



Perímetro = __________

5. ¿Cómo expresarías con símbolos o letras:

23 a) Un número cualquiera,

24 b) La suma de dos números distintos,

25 c) El doble de la suma de dos números?

6.

26 a) Si $a = 7$, $b = 3$, $c = 5$ calcular $a + b + c =$

27 b) Si $a = 9$, $b = 8$, $c = 8$ calcular $a + b - c =$

28 c) Si $a = 9$, $b = 4$, $c = 3$ calcular $\dfrac{a \times b}{c} =$

29 d) Si $a = 3$, $b = 8$, $c = 2$ calcular $a \times (b - c) =$

7. El chófer de un colegio hizo "n" viajes en un día, transportando 50 niños en cada viaje. ¿ Cómo expresarías el número total de niños que transportó ese día?

30

8. Dibuja los dos rectángulos que te indicamos:

31 El primero tiene "m” centímetros de largo por "h” centímetros de alto. Al segundo se le disminuye 2 centímetros por cada lado.

9. Si a = 8, b = 1, c = 8, calcular el valor numérico de:

32

$$\frac{a \times (b \times c)}{(a - c)^2} =$$

10. Cuatro cajas con cinco chicles cada una se reparten entre 2 niños. ¿ Cuántos chicles le tocan a cada niño? Explica lo que has hecho para obtener ese número.

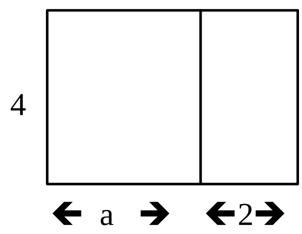
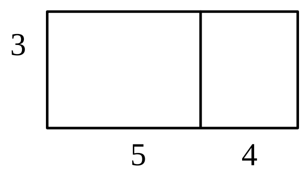
33

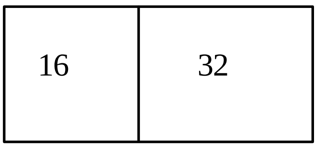
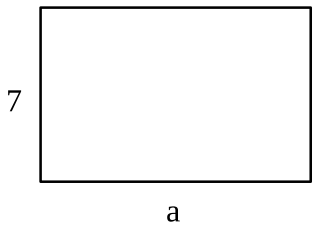
ANEXO 2, parte 1ª

CENTRO:____ PRUEBA C_{21}

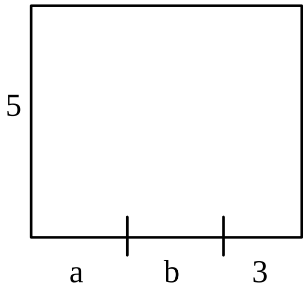
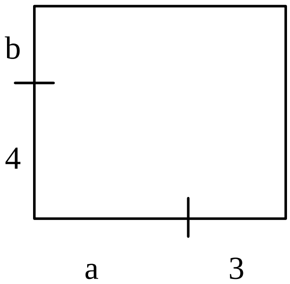
APELLIDOS Y NOMBRE:_______________________________________ CURSO:____

En los siguientes ejemplos se muestran distintas situaciones del área de un rectángulo mediante modelos geométricos, visualización simplificada y expresiones algebraicas. Completa en cada caso las que falten.

<table>
<tr><th>MODELO GEOMÉTRICO</th><th>VISUALIZACIÓN SIMPLIFICADA</th><th>EXPRESIÓN ALGEBRAICA</th></tr>
<tr><td></td><td><table><tr><td>x</td><td>a</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>4 x a</td><td>4 x 2</td></tr></table></td><td>$4 \times (a + 2) = 4 \times a + 8$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{1}$
</td><td></td><td></td></tr>
</table>

MODELO GEOMÉTRICO	VISUALIZACIÓN SIMPLIFICADA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
$\boxed{2}$	$\begin{array}{c\|c\|c} x & a & 5 \\ \hline 4 & 4 \text{ x } a & 4 \text{ x } 5 \end{array}$	
$\boxed{3}$ 		
$\boxed{4}$ 		

<table>
<tr><th>MODELO GEOMÉTRICO</th><th>VISUALIZACIÓN SIMPLIFICADA</th><th>EXPRESIÓN ALGEBRAICA</th></tr>
<tr><td>$\boxed{5}$</td><td></td><td>5 x a + 5 x 3</td></tr>
<tr><td>$\boxed{6}$</td><td><table><tr><td>x</td><td>a</td><td>b</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>3 x a</td><td>3 x b</td><td>3 x 2</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>$\boxed{7}$</td><td></td><td>3 x a + 6</td></tr>
</table>

MODELO GEOMÉTRICO	VISUALIZACIÓN SIMPLIFICADA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
$\boxed{8}$ 		
$\boxed{9}$ 		
$\boxed{10}$		4 x a + 4 x b + 20

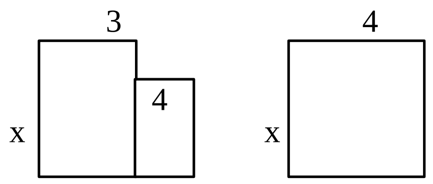
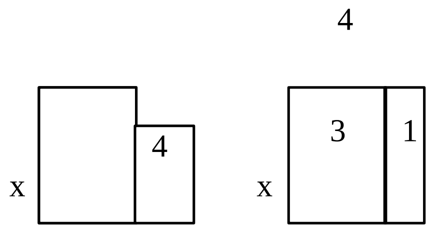
ANEXO 2, parte 2ª

CENTRO:____ PRUEBA C_{22}

APELLIDOS Y NOMBRE: _______________________________________ CURSO:____

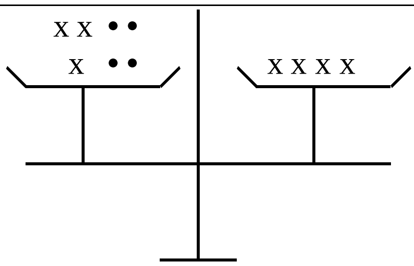
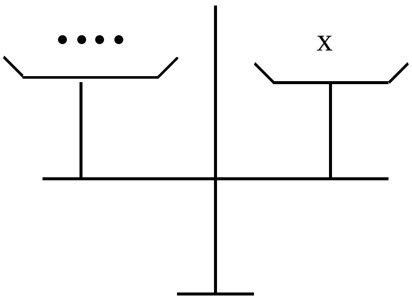
Estos enunciados corresponden a ecuaciones que debes "traducir" o "resolver" algebraicamente y mediante el uso del modelo geométrico.

EJEMPLO: Tres veces la edad de un niño más cuatro. Es exactamente cuatro veces su edad.

<table>
<tr><th>MODELO ALGEBRAICO</th><th>MODELO GEOMÉTRICO</th></tr>
<tr><td>$3x + 4 = 4x$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$4 = 4x – 3x$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$4 = x$</td><td>$4 = x$</td></tr>
</table>

Estos enunciados corresponden a ecuaciones que debes “traducir” o “resolver” algebraicamente y mediante el uso de la balanza.

EJEMPLO: Tres veces la edad de un niño más cuatro. Es exactamente cuatro veces su edad.

MODELO DE LA BALANZA	MODELO ALGEBRAICO
 	3 x + 4 = 4 x 3 x - 3 x + 4 = 4 x - 3 x 4 = x

1. La edad de Pepito más cuatro unidades es la edad de su hermano mayor (18 años), ¿cuál es la edad de Pepito?

1

MODELO ALGEBRAICO	MODELO GEOMÉTRICO

2. Resolver la ecuación: 14 x + 3 x = 5 x

2

MODELO ALGEBRAICO	MODELO GEOMÉTRICO

3. Añadiendo 20 cm al triple de la longitud de un segmento, se obtiene otro segmento cuya medida es la del primero incrementada en 164 cm. ¿Cuál es la longitud del primero?

$\boxed{3}$

MODELO ALGEBRAICO	MODELO GEOMÉTRICO

4. Resolver la ecuación: $x + 4 = 2\,x$

$\boxed{4}$

MODELO ALGEBRAICO	MODELO GEOMÉTRICO

5. Cinco veces un número menos 15 es equivalente a tres veces el número menos tres, ¿cuál es el número?

MODELO ALGEBRAICO	MODELO GEOMÉTRICO

1. El doble de la edad de mi hermano menos seis, es su edad, ¿cuál es?

$\boxed{6}$

MODELO DE LA BALANZA	MODELO ALGEBRAICO

2. Resolver la ecuación: $14 + 2x = 6x + 2$

$\boxed{7}$

MODELO DE LA BALANZA	MODELO ALGEBRAICO

3. El número de cromos de mi hermano más cuatro es igual a 18, ¿cuántos cromos tiene?

$\boxed{8}$

MODELO DE LA BALANZA	MODELO ALGEBRAICO

4. Resolver la ecuación: 8 + 2 x = 16

$\boxed{9}$

MODELO DE LA BALANZA	MODELO ALGEBRAICO

5. El triplo de la edad de una profesora más cincuenta y cuatro es cinco veces su edad, ¿cuál es?

$\boxed{10}$

MODELO ALGEBRAICO	**MODELO ALGEBRAICO**

ANEXO 3

CENTRO:____ **PRUEBA C_3**

APELLIDOS Y NOMBRE:____________________________________ **CURSO:**___

l. Realiza las siguientes operaciones:

$\boxed{1}$ a) (+5) + (-20) =

$\boxed{2}$ b) (-4) + (+20) + (-8) =

$\boxed{3}$ c) (-2) x (+5) =

$\boxed{4}$ d) (+24) : (-6) =

2. En cada caso llena el cuadrito vacío:

$\boxed{5}$ a) $\square - 8 = 10$

$\boxed{6}$ b) $\square + 25 = 41$

$\boxed{7}$ c) $\dfrac{\square}{4} = 9$

$\boxed{8}$ d) $4 \times \square = 56$

$\boxed{9}$ e) $\square \times 3 = 270$

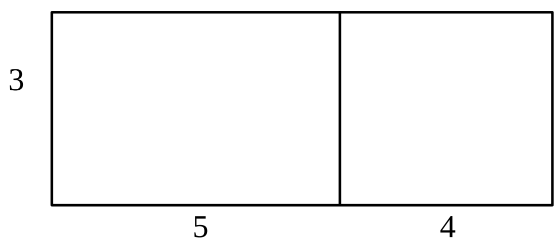
$\boxed{10}$ f) $34 - \square = 13$

$\boxed{11}$ g) $27 + \square = 39$

$\boxed{12}$ h) $\dfrac{63}{\square} = 7$

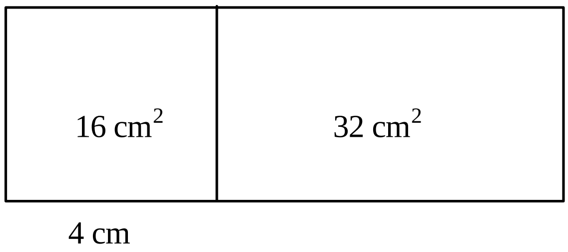
3. Calcular el área de las siguientes figuras.

$\boxed{13}$ a)



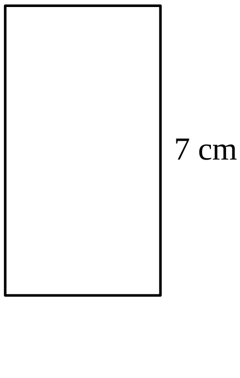
A =

14 b)



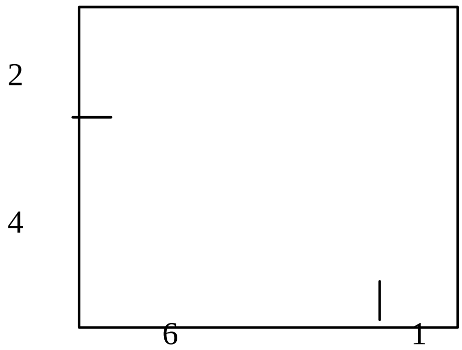
A =

15 c)



A=

16 d)



A =

4.- En cada caso, hallar el valor de la “x”:

17 a) $x - 4 = 12$ x =

18 b) $\frac{x}{4} = 2$ x =

19 c) $16 + x = 34$ x =

20 d) $3 = 27$ x =

21 e) $10 - x = 4$ x =

22 f) $2x + 9 = 15$ x =

5. ¿Cómo expresarías, con signos y letras:

$\boxed{23}$ a) Un número cualquiera.

$\boxed{24}$ b) La suma de dos números distintos.

$\boxed{25}$ c) El doble de la suma de dos números.

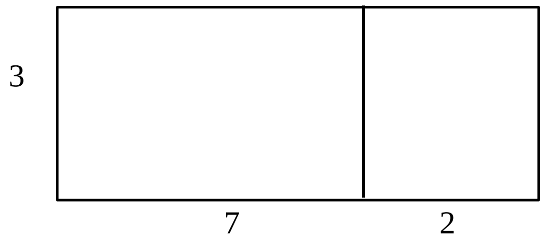
$\boxed{26}$ d) La mitad de un número.

6.- Calcular el perímetro de las siguientes figuras:

$\boxed{27}$ a)

Perímetro =

$\boxed{28}$ b)



Perímetro =

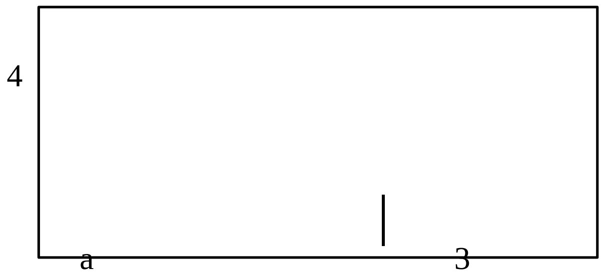
7. Calcular el área de las siguientes figuras:

$\boxed{29}$ a)

A =

b)

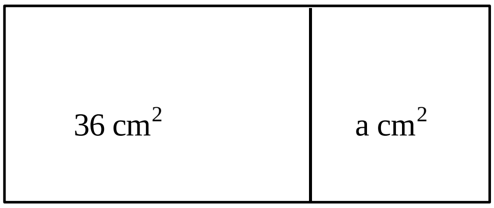
$\boxed{30}$



A =

c)

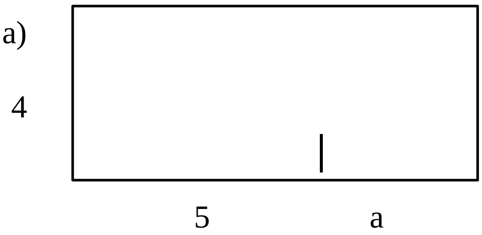
31



A =

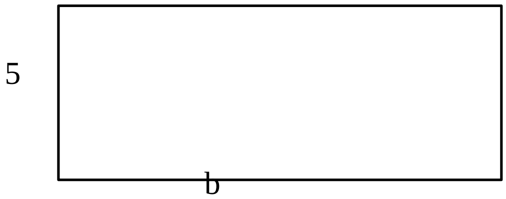
8. Calcular el perímetro de las siguientes figuras:

32 a)



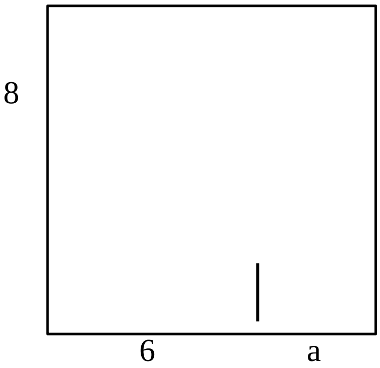
Perímetro =

33 b)



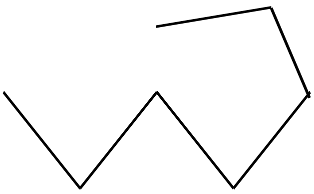
Perímetro =

34 c)



Perímetro =

35 d)



Perímetro =

Tiene “n” lados y todos miden 4.

9.-

☐ a) Si a = 7, b = 3 y c = 5, calcula a + b + c =

☐ b) Si a = 3, b = 7 y c = 2, calcula a - b + c =

☐ c) Si a = 9, b = 4 y c = 3, calcula $\frac{a \text{ x } b}{c}$ =

☐ d) Si a = 9, b = 8 y c = 6, calcula a + b - c =

☐ e) Si a = 8, b = 3 y c = 2, calcula a - b - c =

☐ f) Si a = 2, b = 8 y c =3, calcula a x (b - c) =

10.- El dueño de un estanco vende 135 periódicos cada día, ¿cómo expresarías el número total de periódicos vendidos en dos semanas (14 días)?

☐

11.- Dibujar los dos rectángulos que te indicamos: El primero tiene “m” centímetros de largo por “h” centímetros de alto. Al segundo se le disminuye 2 centímetros por cada lado.

☐

12. Realiza las siguientes operaciones con fracciones y simplifica los resultados todo lo que se pueda:

☐ a) $\frac{4}{3}+\frac{2}{5}=$

☐ b) $\frac{3}{4}x\frac{7}{4}=$

☐ c) $\frac{3}{5}x\frac{2}{8}=$

☐ d) $\frac{6}{12}-\frac{1}{8}=$

☐ e) $\frac{3}{16}-\frac{6}{32}=$

☐ f) $\frac{9}{5}:\frac{2}{7}=$

13. El chófer de un colegio hizo “n” viajes en un día, transportando 50 niños en cada viaje. ¿Cómo expresarías el número total de niños que transportó ese día?

$\boxed{50}$

14. Si a = 8, b = 1 y c = 6, calcula el valor numérico de:

51 $$\frac{a \times (b \times c)}{(a - c)^2}$$

15. Si a = 8, b = 3 y c = 2, calcula el valor numérico de:

52 $$\frac{(a \times b) \times c}{a - c}$$

16. Cuatro cajas con cinco pegatinas cada una se reparten entre dos niños. ¿Cuántas pegatinas le tocan a cada niño? Explica lo que has hecho para obtener ese número.

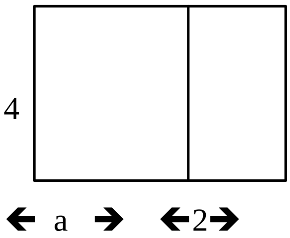
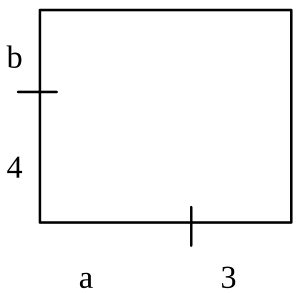
53

ANEXO 4, parte 1ª

CENTRO:____ PRUEBA C_{41}

APELLIDOS Y NOMBRE:______________________________________ CURSO:____

En los siguientes ejemplos se muestran distintas situaciones del área de un rectángulo mediante modelos geométricos, visualización simplificada y expresiones algebraicas. Completa en cada caso las que falten.

<table>
<tr><th>MODELO GEOMÉTRICO</th><th>VISUALIZACIÓN SIMPLIFICADA</th><th>EXPRESIÓN ALGEBRAICA</th></tr>
<tr><td>
</td><td><table><tr><td>x</td><td>a</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>4 x a</td><td>4 x 2</td></tr></table></td><td>4 x (a + 2) = 4 x a + 8</td></tr>
<tr><td>1</td><td><table><tr><td>x</td><td>a</td><td>5</td></tr><tr><td>6</td><td>6 x a</td><td>6 x 5</td></tr></table></td><td></td></tr>
<tr><td>2

</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td>4 x a + 8</td></tr>
</table>

2. Completa el siguiente cuadro de edades, suponiendo que actualmente Pedro tiene el doble de edad que Sergio, Marta tiene ocho años más que Pedro y Toni tiene doce años menos que la suma de las edades de Marta y Sergio.

		Pedro	Toni	Marta	Sergio
4	Edad actual				x
5	Edad dentro de una década				

3. Traduce a lenguaje algebraico las frases e ideas siguientes:

6 a) El precio de " m " discos a 760 pesetas cada uno.

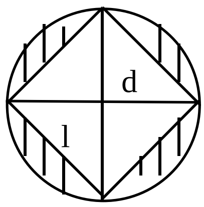
7 b) Lo que cuesta un lápiz si 15 cuestas P pesetas.

8 c) el número que representa 50 unidades menos que el número "h"

9 d) El número que es la cuarta parte del número "y".

4. Expresa el área rayada de esta figura:

10



5. Saca todos los factores comunes posibles en las siguientes expresiones:

11 a) $4x^2 + 12x^3 + 8x$

12 b) $a^2 - a$

6. calcula el valor numérico de las siguientes expresiones, si a = 2 y b = 1/3:

13 a) $(a + a)(a + b)$

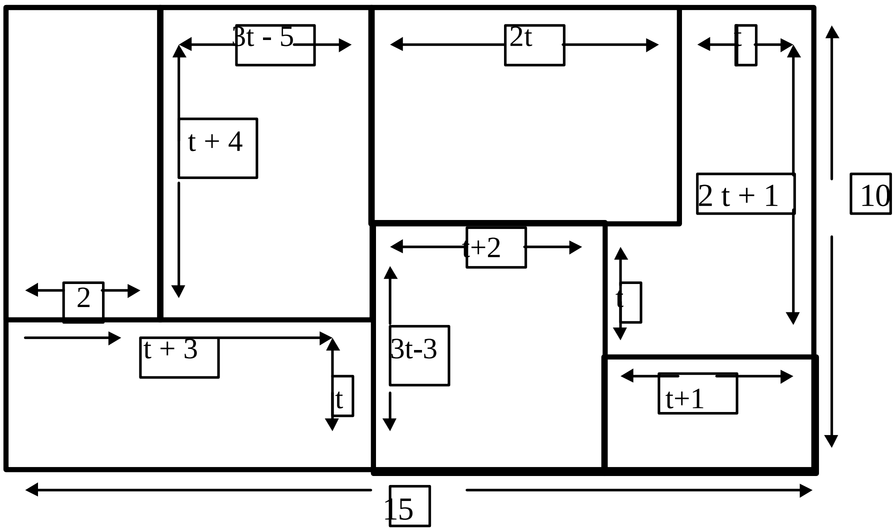
15 c) $a + a(b - b)$

14 b) $(a + b)(b + b)$

16 d) $(a + a)b - b$

7. Halla las medidas que falten del siguiente plano y explica cómo las buscaste.

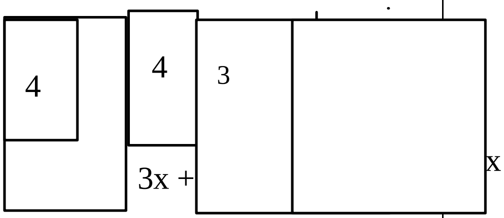
17



CENTRO:____ **PRUEBA C_{42}**
APELLIDOS Y NOMBRE: ____ **CURSO:** ____

Estos enunciados corresponden a ecuaciones que debes “traducir” o “resolver” algebraicamente y mediante el uso del modelo geométrico.

EJEMPLO: Tres veces la edad de un niño más cuatro. Es exactamente cuatro veces su edad.

MODELO ALGEBRAICO	**MODELO GEOMÉTRICO**
 3x + 4 = 4x –3x 4 = x	3 4 x x 4 x 4 = x

1. La edad de Pepito más cuatro unidades es la edad de su hermano mayor (18 años), ¿cuál es la edad de Pepito?

$\boxed{1}$

MODELO ALGEBRAICO	MODELO GEOMÉTRICO

2. Resolver la ecuación: $14x + 3x = 5x$.

$\boxed{2}$

MODELO ALGEBRAICO	MODELO GEOMÉTRICO

3. Añadiendo 20 cm al triple de la longitud de un segmento, se obtiene otro segmento cuya medida es la del primero incrementada en 164cm. ¿Cuál es la longitud del primero?

3

MODELO ALGEBRAICO	MODELO GEOMÉTRICO

4. Resolver la ecuación: x + 4 = 2x.

4

MODELO ALGEBRAICO	MODELO GEOMÉTRICO

5. Cinco veces un número menos 15 es equivalente a tres veces el número menos tres, ¿cuál es el número?

5

MODELO ALGEBRAICO	MODELO GEOMÉTRICO

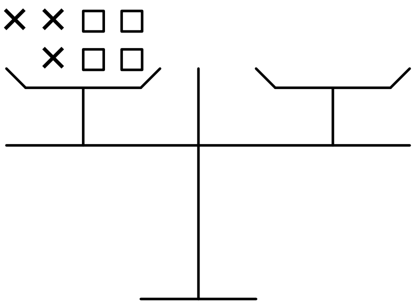
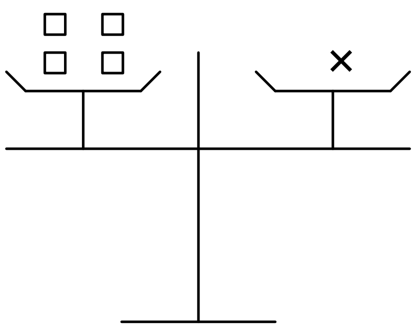
<u>ANEXO 4, parte 3ª</u>

CENTRO:____ PRUEBA C_{43}

APELLIDOS Y NOMBRE:________________________________ CURSO:____

Estos enunciados corresponden a ecuaciones que debes "traducir" o resolver algebraicamente y mediante el uso de la balanza.

EJEMPLO: Tres veces la edad de un niño más cuatro, es exactamente cuatro veces su edad.

MODELO DE LA BALANZA	**ALGEBRAICO**
	$3x + 4 = 4x$
	$4 = x$

1. El doble de la edad de mi hermano menos seis, es su edad, ¿cuál es?

1

MODELO DE LA BALANZA	ALGEBRAICO

2. Resolver la ecuación: $14x + 2x = 6x + 2$.

2

MODELO DE LA BALANZA	ALGEBRAICO

3. El número de cromos de mi hermano más cuatro es igual a 18, ¿cuántos cromos tiene?

$\boxed{3}$

MODELO DE LA BALANZA	ALGEBRAICO

4. Resolver la ecuación: 8 + 2x = 16.

$\boxed{4}$

MODELO DE LA BALANZA	ALGEBRAICO

5. El triple de la edad de una profesora más cincuenta y cuatro es cinco veces su edad, ¿cuál es?

5

MODELO DE LA BALANZA	ALGEBRAICO

ANEXO 5, parte 1ª

CENTRO:____ **PRUEBA Pr1**

APELLIDOS Y NOMBRE:__________________________________ **CURSO:**____

1. Realiza las siguientes operaciones:

$\boxed{1}$ a) (+5) + (-20) =

$\boxed{2}$ b) (-4) + (+20) + (-8) =

$\boxed{3}$ c) (-2) x (+5) =

$\boxed{4}$ d) (+24) : (-6) =

2. En cada caso, llena el cuadrito vacío:

$\boxed{5}$ a) $\boxed{} - 8 = 10$

$\boxed{6}$ b) $\boxed{} + 25 = 41$

$\boxed{7}$ c) $\dfrac{\boxed{}}{4} = 9$

$\boxed{8}$ d) $4 \times \boxed{} = 56$

$\boxed{9}$ e) $\boxed{} \times 3 = 270$

$\boxed{10}$ f) $34 - \boxed{} = 13$

$\boxed{11}$ g) $27 + \boxed{} = 39$

$\boxed{12}$ h) $\dfrac{63}{\boxed{}} = 7$

3. En cada caso, halla el valor de la "x":

13 a) $x - 4 = 12$ $x =$

14 b) $4x + 16 = 7x + 1$ $x =$

15 c) $16 + x = 34$ $x =$

16 d) $8x + 10 = 4x + 2$ $x =$

4. ¿Cómo expresarías con signos, letras y números:

17 a) Un número cualquiera,

18 b) La suma de dos números distintos,

19 c) El doble de un número menos 5 es igual a 17,

20 d) La suma de un número más el doble del mismo número es igual a 24?

5.

21 a) Si a = 7, b = 3 y c = 5, calcula a + b + c =

22 b) Si a = 3, b = 7 y c = 2, calcula a - b + c =

23 c) Si a = 9, b = 8 y c = 6, calcula a + b - c =

24 d) Si a = 9, b = 8 y c = 6, calcula a + b - c =

6. El dueño de un estanco vende 135 periódicos cada día, ¿cómo expresarías el número total de periódicos vendidos en dos semanas (14 días)?

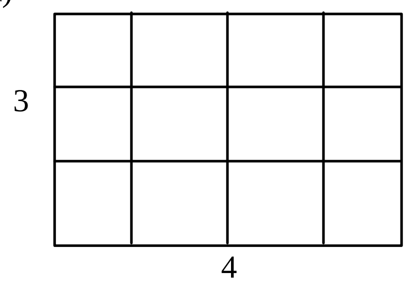
25

7. Dibuja los dos rectángulos que te indicamos: El primero tiene "m" centímetros de largo por 8 centímetros de alto. Al segundo se le aumentan 2 centímetros por cada lado.

26

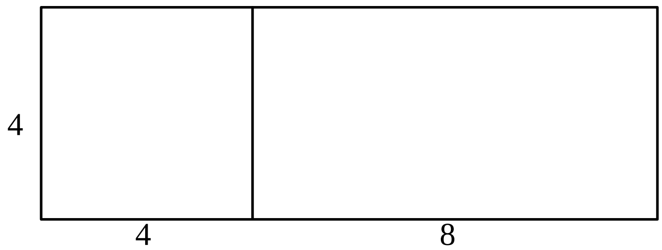
8. Calcula el área de las siguientes figuras:

$\boxed{27}$ a)



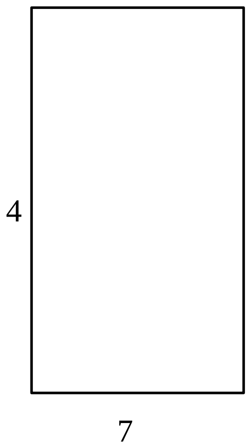
A =

$\boxed{28}$ b)



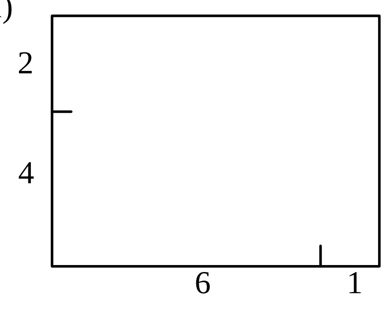
A =

$\boxed{29}$ c)



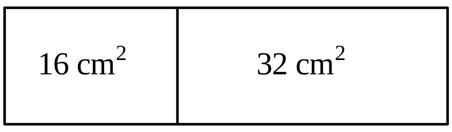
A =

$\boxed{30}$ d)



A =

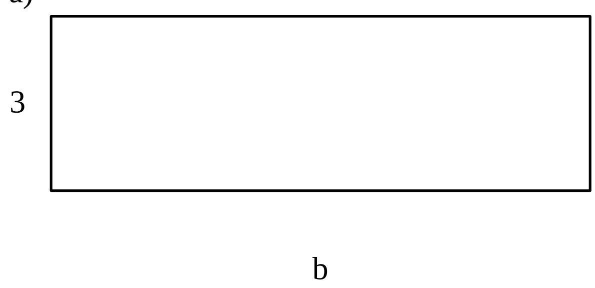
$\boxed{31}$ e)



A =

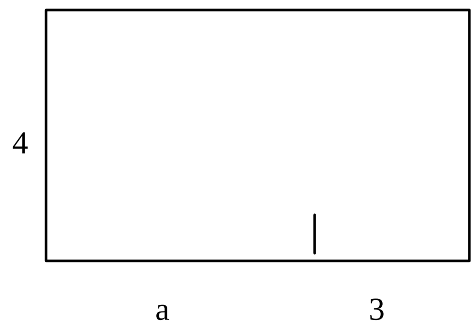
9. Calcula el área de las siguientes figuras:

$\boxed{32}$ a)



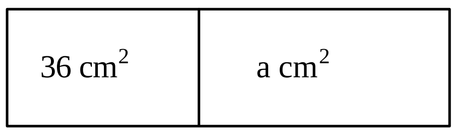
A =

$\boxed{33}$ b)



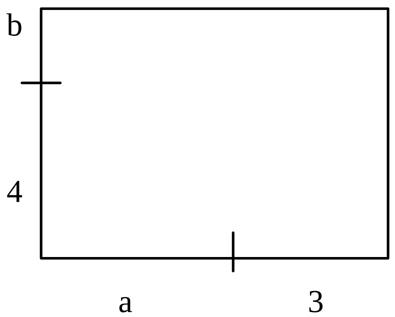
A =

$\boxed{34}$ c)



A =

$\boxed{35}$ c)



A =

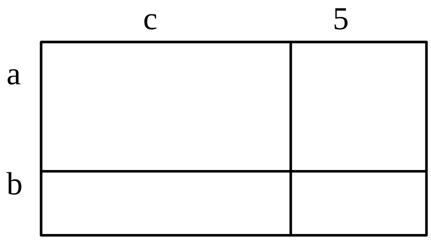
10.

$\boxed{36}$ a) ¿En qué se transforma a + 4, si a = 2? ....

$\boxed{37}$ b) ¿En qué se transforma 4 . a, si a = 2? ....

$\boxed{38}$ c) ¿En qué se transforma 5 . a - 3, si a = 3? ....

11. El producto de (a + b) (c + 5) se puede escribir utilizando el área del rectángulo a + b y c +5, como:



(a + b)(c + 5) = a . c + a . 5 + b . c + b . 5

Escribe los siguientes productos:

39 a) a . (b + 5) =

40 b) (a + 3) (b + 2) =

41 c) (a + b) (a + b) =

42 d) (a + b + 3) (a + b + 3) =

12. Halla el número total que su triple aumentado en 2, dé 29.

43

13. Entre dos grupos de niños hay 48. Si el número de niños de un grupo es la mitad del número de niños del otro, ¿cuántos niños hay en cada grupo?

44

14. En la columna de la izquierda, hay una serie de problemas. No trates de resolverlos. Cada uno de los problemas se resuelve usando una de las ecuaciones que aparecen en la columna de la derecha. Encuentra la ecuación que corresponda a cada problema y pon el número de esa ecuación en el cuadro que se encuentra a la izquierda del problema.

45	¿Cuál es la edad de María si hace 10 años tenia 40?.	1	$6x = 3900$
46	Un hombre trabajó 6 horas, si en total ganó 3900 pesetas, ¿cuánto gana por hora?.	2	$x = (594 + 3) . 6$
47	Tres hectáreas se abonan con 594 Kg de fertilizante, ¿cuántos kilogramos se necesitan para abonar 6 hectáreas?.	3	$x + 5x = 36$
48	Un equipo de baloncesto ganó 5 veces más partidos que los que perdió. Si en total jugó 36 partidos, ¿cuántos perdió?.	4	$x - 10 = 40$

ANEXO 5, parte 2ª

CENTRO:____ PRUEBA Pr2

APELLIDOS Y NOMBRE:______________________________________ CURSO:____

1. En cada caso, halla el valor de la "x":

$\boxed{1}$ a) $10 - x = 4$ $x =$

$\boxed{2}$ b) $4x = 6x + 4$ $x =$

$\boxed{3}$ c) $3 = \frac{27}{x}$ $x =$

$\boxed{4}$ d) $8x + 3 = 5x + 9$ $x =$

2. ¿Cómo expresarías, con signos, letras y números:

$\boxed{5}$ a) El doble de un número,

$\boxed{6}$ b) La mitad de un número,

$\boxed{7}$ c) La suma de dos números distintos es igual a 10,

$\boxed{8}$ d) El triple de un número más 5 es igual a 17?

3. El chófer de un colegio hizo “n” viajes en un día, transportando 50 niños cada viaje. ¿Cómo expresarías el número total de niños que transportó ese día?

9

4. Cuatro cajas con cinco pegatinas cada una, se reparten entre dos niños. ¿Cuántas pegatinas le tocan a cada niño? Explica lo que has hecho para obtener ese número.

10

5. Rellena los vacíos como se indican en el primer apartado de la columna:

	x................ ➔ x + 4		x................. ➔ 4x
11	6............... ➔	12	6................. ➔ ......
13	r............... ➔	14	r.................. ➔ ......
15	b + 2........ ➔	16	b + 2.......... ➔ ......

17 Ahora si a = 2b, ¿en qué se transforma 5a + 3?

6. Escribe de las siguientes expresiones cuál es la más grande y cuál la más pequeña:

	18 más pequeña	19 más grande
n + 1, n + 4, n, n - 3, n – 7	....	....

Razona tu respuesta ....

7.

a) 4 sumado a n se puede escribir como n + 4.
Suma 4 a cada una de las siguientes expresiones:

8	n + 5	3n
20	21	22 ....

b) 4 multiplicado por n se puede escribir como n + 4.
Multiplica 4 a cada una de las siguientes expresiones:

8	n + 5	3n
23	24	25 ....

8. a + 3a puede ser escrito de forma más simplificada como 4a.
Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible.

26 2a + 5a = ...

27 2a + 5b = ...

28 (a + b) + a = ...

29 2a + 5b + a = ...

30 (a – b) + b = ...

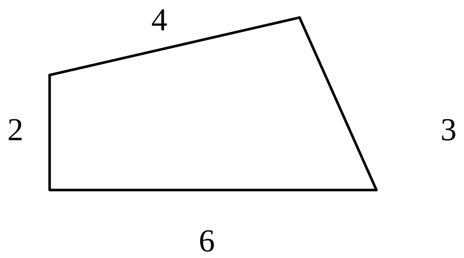
31 3a - (b + a) = ...

32 a + 4 + a – 4 = ...

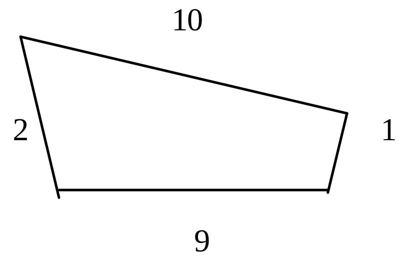
33 3a - b + a = ...

34 (a + b) + (a – b) = ...

9.



El perímetro de esta figura
es igual a 6 + 3 + 4 + 2, es decir,
igual a 15.

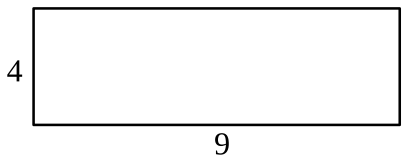


Calcula el perímetro de esta figura.

$\boxed{35}$ P = ...

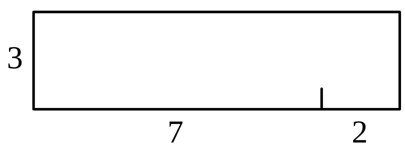
10. Calcula el perímetro de las siguientes figuras:

a)



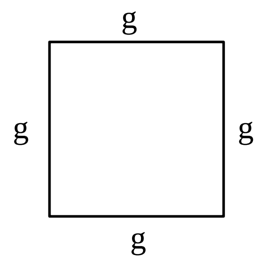
$\boxed{36}$ Perímetro =

b)

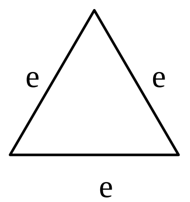


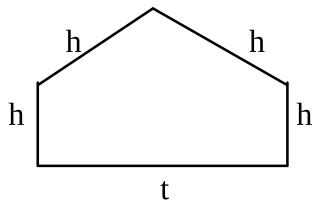
$\boxed{37}$ Perímetro =

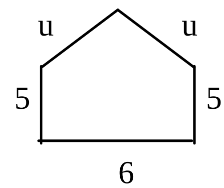
11. Los lados de este cuadrado tienen de longitud, g. Para calcular su perímetro, podemos escribir P = 4g.



¿Qué podemos escribir para calcular el perímetro de cada una de estas figuras?







38 P = ...

39 P = ...

40 P = ...

12. Traduce a lenguaje algebraico las frases e ideas siguientes:

41 a) El precio de “m” discos a 760 pesetas cada uno.

42 b) Lo que cuesta una lápiz, si 15 cuestan “p” pesetas.

43 c) El número que representa 50 unidades menos que el número “h”.

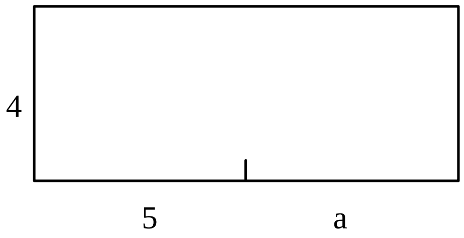
44 d) El número que es la cuarta parte del número y.

13. En una familia la madre tiene 37 años y el padre 46. La suma de las edades de la madre y sus hijas (quintillizas) es igual a la del padre con la de dos de sus hijas, ¿cuál es la edad de cada una de sus hijas?

45

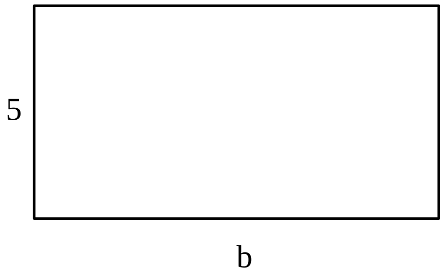
14. Calcula el perímetro de las siguientes figuras:

a)



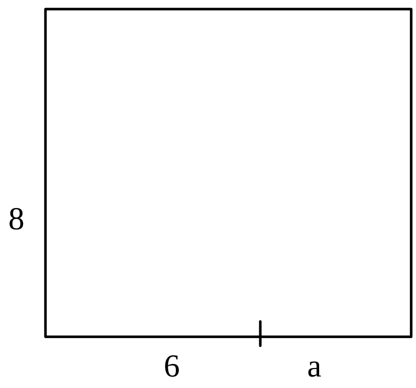
$\boxed{46}$ Perímetro =

b)



$\boxed{47}$ Perímetro =

c)



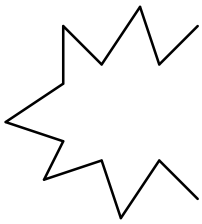
$\boxed{48}$ Perímetro =

d)

Parte de esta figura no está dibujada.

Hay n lados en total, todos de longitud 2.

Halla su perímetro.



$\boxed{49}$ P = ...

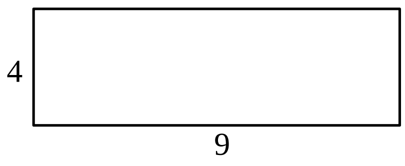
ANEXO 6, parte 1ª

CENTRO:____ **PRUEBA Po1**

APELLIDOS Y NOMBRE:_______________________________________ **CURSO:**____

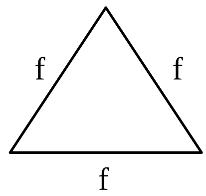
1. Calcula el perímetro de las siguientes figuras:

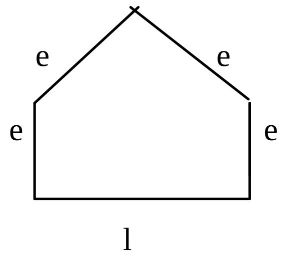
a)

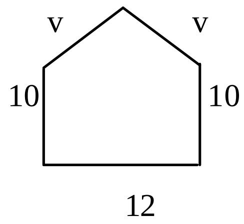


$\boxed{1}$ Perímetro =

b)

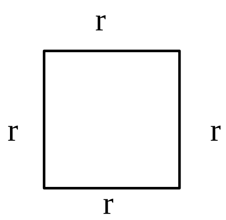






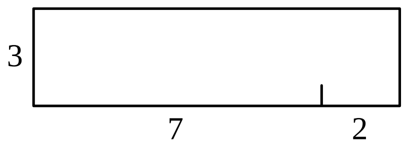
$\boxed{2}$ P = ... $\boxed{3}$ P = ... $\boxed{4}$ P = ...

c)



$\boxed{5}$ Perímetro =

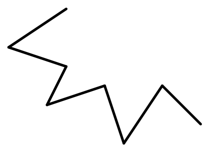
d)



$\boxed{6}$ Perímetro =

2. Parte de esta figura no está dibujada.

Hay n lados en total, todos de longitud 2.



Halla su perímetro.

7 P = ...

3.- La entrada de un cine vale 175 ptas, ¿cómo expresarías el gasto de un niño que ha ido 5 veces a ese cine?

8

4. La “paga” que da un padre a un niño cada semana es de “p” ptas, ¿cómo expresarías el dinero que reúne ese niño durante 6 semanas?

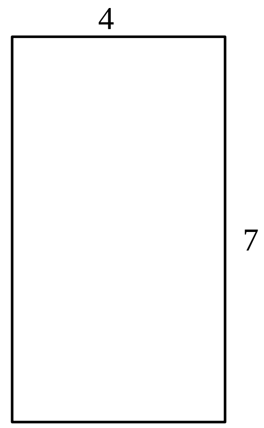
9

5. Rellena los vacíos como se indican en el primer apartado de la columna:

	x................	➔	x + 3		x................	➔	7x		x...........	➔	5 x + 3
10	6...............	➔	....	13	2.................	➔	......	16	3..........	➔	....
11	n...............	➔	....	14	r..................	➔	......	17	4	➔	....
12	b + 2........	➔	....	15	b + 2..........	➔	......	18	2 a...........	➔	....

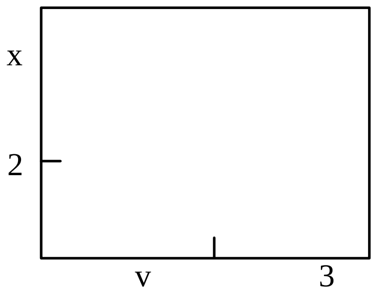
6. Calcula el área de las siguientes figuras:

a)



$\boxed{19}$ A =

b)

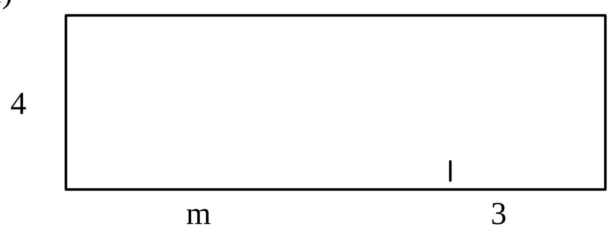


$\boxed{20}$ A =

c)

$\boxed{21}$ A =

d)



$\boxed{22}$ A =

7. Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible.

$\boxed{23}$ 2a + 5a = ...

$\boxed{24}$ 2a + 5b = ...

$\boxed{25}$ (a + b) + a = ...

$\boxed{26}$ 2a + 5b + a = ...

$\boxed{27}$ (a – b) + b = ...

$\boxed{28}$ 3a - (b + a) = ...

$\boxed{29}$ a + 4 + a – 4 = ...

$\boxed{30}$ 3a - b + a = ...

$\boxed{31}$ (a + b) + (a – b) = ...

8. Traduce a lenguaje algebraico las frases e ideas siguientes:

$\boxed{32}$ a) El precio de "v" cintas de vídeos a 2.500 pesetas cada uno.

$\boxed{33}$ b) Lo que cuesta una pelota, si 3 cuestan "p" pesetas.

$\boxed{34}$ c) La diferencia de dos números distintos cualesquiera.

$\boxed{35}$ d) El número que representa 50 unidades menos que el número "d".

$\boxed{36}$ e) Un número cualquiera.

$\boxed{37}$ f) La tercera parte del número "f".

$\boxed{38}$ g) El triple de cualquier número.

$\boxed{39}$ h) La suma de tres números distintos cualesquiera.

9.

$\boxed{40}$ a) ¿En qué se transforma a + 4, si a = 3?

$\boxed{41}$ b) ¿En qué se transforma 4 b, si b = 5?

$\boxed{42}$ c) ¿En qué se transforma 5 c - 4, si c = 6?

$\boxed{43}$ d) ¿En qué se transforma 5 b + 2 a, si a = 3, b = 4?

10. Calcula

$\boxed{44}$ a) 6. (b + 4)

$\boxed{45}$ b) (a + 2) . 3

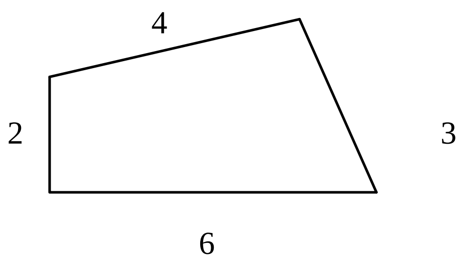
$\boxed{46}$ c) (a + 2) . (b + a)

$\boxed{47}$ d) a . (b - c)

11. Dibuja los dos rectángulos que te indicamos: El primero tiene “l” centímetros de largo por “4”centímetros de alto. Al segundo se le aumentan 2 centímetros enteros por cada lado.

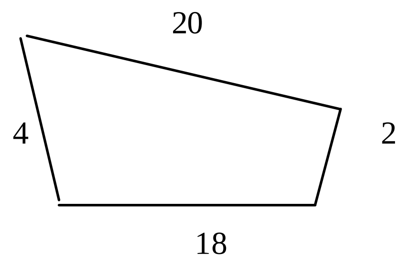
$\boxed{48}$

12. El perímetro de esta figura es igual a 6 + 3 + 4 + 2, es decir, igual a 15.



Calcula el perímetro de esta figura.

$\boxed{49}$ P = ...



ANEXO 6, parte 2ª

CENTRO:____ PRUEBA Po2

APELLIDOS Y NOMBRE:______________________________________ CURSO:____

1. Una persona ahorra cada día 230 pesetas, ¿cuánto ha ahorrado en dos semanas?

1

2. Un rectángulo tiene de altura “m”. Si la base es el doble de la altura:

2 a) ¿cuánto vale el perímetro?,

b) ¿cuánto vale el área?

3. 6 veces el número de días de entrenamiento de un equipo a la semana menos 12 es igual a 6, ¿cuántos días entrena el equipo a la semana?

3

4. Dibuja los dos rectángulos que se te indican: El primero tiene “x” centímetros de largo por “3” centímetros de alto. Al segundo se le aumenta 2 centímetros por cada lado.

4

5. Resuelve: $8x + 3 = 5x + 9$. Explica cómo lo has hecho.

5

6. 8 veces el peso de una lata de pintura más 3 es igual a 5 veces el peso de la lata de pintura más 9. ¿Cuánto pesa la lata?

6

7. En una empresa el presidente tiene 37 años y el dueño 46. La suma de las edades del presidente y sus empleados (todos de la misma edad) es igual a la del dueño con la de dos de sus empleados, ¿cuál es la edad de cada uno de sus empleados?

7

8. 3 pelotas valen 270 pesetas, ¿cuánto vale cada una?

8

9. La suma de un número más el doble del mismo número es igual a 36, ¿cuál es el número?

9

10. 4 discos en rebajas valen 2000 pesetas, ¿cuántas pesetas se necesitan para comprar 6 de los mismos discos?

10

11. En la columna de la izquierda, hay una serie de problemas. No trates de resolverlos. Cada uno de los problemas se resuelve usando una de las ecuaciones que aparecen en la columna de la derecha. Encuentra la ecuación que corresponda a cada problema y pon el número de esa ecuación en el cuadro que se encuentra a la izquierda del problema.

11	Un hombre trabajó 6 horas, si en total ganó 7800 pesetas, ¿cuánto le pagaron por hora?.	1	x = (594 : 3) . 7
12	¿Cuál es la edad de José si hace 10 años tenia 35?.	2	6x = 7800
13	3 libros de cuentos iguales valen 594 pesetas, ¿cuántas pesetas se necesitan para comprar 7 libros iguales a los anteriores?	3	x + 5x = 36
14	Un equipo de concursantes contestó correctamente 5 veces más que las preguntas que falló. Si en total le hicieron 36 preguntas, ¿cuántas falló?	4	x - 10 = 35

12. Resuelve 13 x = 91. Explica cómo lo has hecho.

15

ANEXO 7, parte 1ª

CENTRO:____ PRUEBA TA
APELLIDOS Y NOMBRE:______________________________________ CURSO:____

INSTRUCCIONES: Lee con mucha atención las siguientes preguntas y contesta lo que te pide.

1. Calcula, indicando los pasos que vas dando:

$\boxed{1}$ a) 5 - (6 + 7) + 4 =

$\boxed{2}$ b) 3 - [6 - (-5 + 4) - 2] + 1 =

$\boxed{3}$ c) 6 . (7 + 5) - (-8) + 4 =

$\boxed{4}$ d) 4 - [(27 - 3) + 8] - (4 - 5) . 3 =

2. Rellena los vacíos como se indican en el primer apartado de la columna:

a) x................ ➔ x + 4	b) x................. ➔ 4x
$\boxed{5}$ c) 6............... ➔	$\boxed{6}$ d) 6................. ➔ ......
$\boxed{7}$ e) r............... ➔	$\boxed{8}$ f) r.................. ➔ ......
$\boxed{9}$ g) b + 2........ ➔	$\boxed{10}$ h) b + 2.......... ➔ ......

3. 4 sumado a n se escribe n + 4,

$\boxed{11}$ - ¿cómo se escribiría 4 sumando a 3n?

$\boxed{12}$ - ¿cómo se escribirá 3 aumentado a 5y?

4.

$\boxed{13}$ Si a = 2b, ¿en qué se transforma 5a + 3?

$\boxed{14}$ Si a = b + 3, ¿en qué se transforma 5a + 3b?

$\boxed{15}$ Si a = 2b, ¿en qué se transforma (a + 3) . (3 - a)?

5. En cada uno de los casos siguientes halla las sustituciones que se hacen para pasar de las expresiones de la columna A a la B.

		A	B
$\boxed{16}$	a)	5x - 17	5 (y + 1) - 17
$\boxed{17}$	b)	2x . 3y - z	6 x p - z
$\boxed{18}$	c)	e (j + 7)	(j + 7) (f - 2)
$\boxed{19}$	d)	v x	h r h v
$\boxed{20}$	e)	2/p	k/pq

6. Calcula y reduce, cuando sea posible, las siguientes expresiones:

$\boxed{21}$ a) x . (y – x) =

$\boxed{22}$ b) 4 + 3y =

$\boxed{23}$ c) a + a + 3b + 5a =

$\boxed{24}$ d) 5y – 2t =

$\boxed{25}$ e) (a – b) + b =

$\boxed{26}$ f) 3a - b + a =

$\boxed{27}$ g) 3a – (b + a) =

$\boxed{28}$ h) (a + b) + b =

$\boxed{29}$ i) (a – b + c) + (b – a) =

$\boxed{30}$ j) (a + b) + (a – b) =

$\boxed{31}$ k) (2a + b) – b =

$\boxed{32}$ l) 5a + (b + a) =

7. Calcula y reduce cuando sea posible las siguientes expresiones:

33 a) $(2x + y) - (x - y) =$

34 b) $(x + y) + (x - y) =$

35 c) $2x + (x - y) =$

36 d) $(x + y) . 3 =$

8. ¿Qué significa 3n? Subraya todas las respuestas que creas que son correctas:

37 a) 3 + n b) 3 y n c) 3 x n

d) 3 + 3 + 3 e) n + n + n

38 f) Si tienes otra respuesta, por favor escríbela.

9.

39 a) ¿En qué se transforma $4a$ si $a = 2$?

40 b) ¿En qué se transforma $a (b - c)$ si $a = 2$, $b = 8$ y $c = 3$?

41 c) ¿En qué se transforma $5a - 3$ si $a = 3$?

42 d) ¿En qué se transforma $a - b + c$ si $a = 3$, $b = 7$ y $c = 2$?

10. Si x es un número cualquiera:

43 a) Escribe el número que es 3 más x.

44 b) Escribe el número que es 5 menos x.

45 c) Escribe el número que es dos veces tan grande como x.

46 d) Escribe el número que es el 50% mayor que x.

11. Calcula y reduce, cuando sea posible las siguientes expresiones:

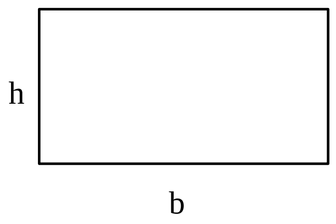
$\boxed{47}$ a) (2x + y) – (x – y) =

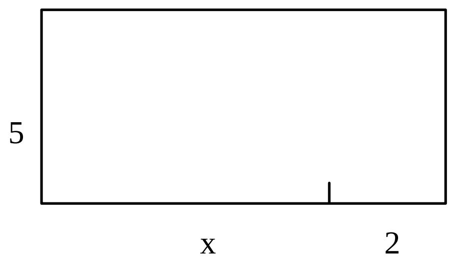
$\boxed{48}$ b) (x + y) + (x – y) =

$\boxed{49}$ c) 2x + (x – y) =

$\boxed{50}$ d) (x + y) . 3 =

12. ¿Cómo expresarías el área de las siguientes figuras?

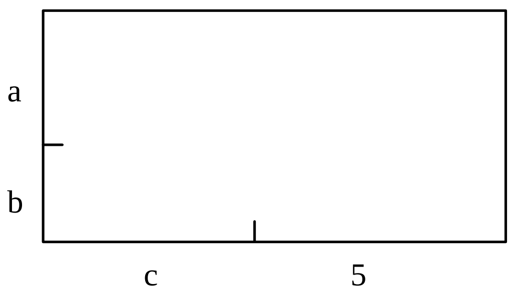




$\boxed{51}$ Área =

$\boxed{52}$ Área =

13. El producto (a + b) (c + 5) se puede escribir utilizando el área del rectángulo de lados a + b y c + 5, como:



(a + b) (c + 5) = a . c + a . 5 + b . 5 + b . c

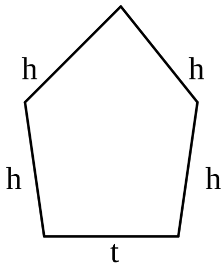
Escribe los siguientes productos:

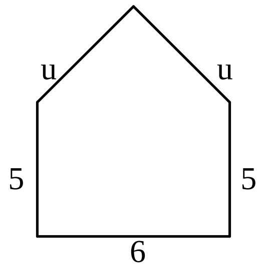
$\boxed{53}$ a) a . (b + 5)

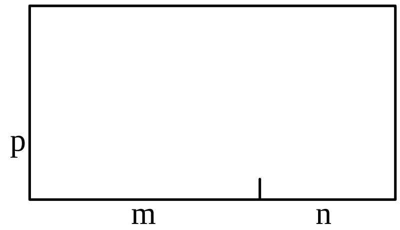
$\boxed{54}$ b) (a + 3) (b + 2)

$\boxed{55}$ c) (a + b + 3) (a + b)

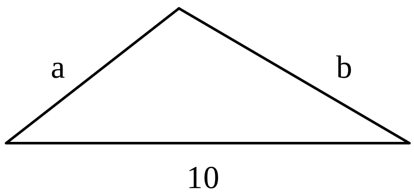
14. ¿Cómo expresarías el perímetro de cada una de las siguientes figuras?:







56 Perímetro = _______ 57 Perímetro = ________ 58 Perímetro =



59 Perímetro = ________

15. ¿Qué significa nm? Subraya todas las respuestas que creas que son correctas.

60 a) n y m b) n x m c) n + m d) 25 + 26 e) 25 x 26

61 f) Si tienes otra respuesta, por favor escríbela.

16. Expresar algebraicamente:

62 a) El doble de x más cuatro por y.

63 b) El cuadrado de x más 6, todo por 7 más n.

64 c) n más cuatro, todo por z más dos.

65 d) x al cuadrado más y por 7 más n.

ANEXO 7, parte 2ª

CENTRO:____ **PRUEBA TB**

APELLIDOS Y NOMBRE:__________________________________ **CURSO:**____

INSTRUCCIONES: Lee con mucha atención las siguientes preguntas y contesta lo que te pide.

1. Llena el cuadrito vacío:

$\boxed{1}$ a) $\boxed{} - 8 = 10$

$\boxed{2}$ b) $34 - \boxed{} = 13$

$\boxed{3}$ c) $\boxed{} + 25 = 41$

$\boxed{4}$ d) $27 - \boxed{} = 39$

$\boxed{5}$ e) $\dfrac{\boxed{}}{4} = 9$

$\boxed{6}$ g) $\dfrac{63}{\boxed{}} = 7$

$\boxed{7}$ g) $4 \times \boxed{} = 56$

$\boxed{8}$ h) $\boxed{} \times 3 = 270$

$\boxed{9}$ i) $\boxed{} + 11 =$

$\boxed{10}$ j) $8 + \boxed{} = 23$

2. Realiza las siguientes operaciones:

$\boxed{11}$ a) $x - 4 = 12$

$\boxed{12}$ b) $4x + 16 = 7x + 1$

$\boxed{13}$ c) $16 + 3x = 34$

$\boxed{14}$ d) $8x + 3 = 5x + 9$

15 e) $x + 9 = 2$

3. Inventa un problema que se resuelva mediante la ecuación:
$3x + 10 = 2x + 40$.

16

4. Una persona tiene un terreno rectangular de dimensiones 12 metros de frente y 8 metros de fondo. Después, esa misma persona, compra un terreno contiguo de 64 metros cuadrados. Una segunda persona le propone cambiar su terreno completo por otro rectangular, en la misma calle, con el misma área y el mismo fondo, pero en mejor sitio. ¿Cuánto debe medir el frente del nuevo terreno para que el trato sea justo?

17

5. El cuádruplo del número de boliches de un niño más 7 boliches son 35 boliches. ¿Cuántos boliches tenía?

18

6. $3 \cdot (2x + 1) + 7 = 34$, ¿cuánto vale x?

19

7. Inventa un problema que se resuelva mediante la ecuación: $2x - 10 = 30$.

20

8. La "paga" de la semana a un niño es 200 pesetas. Su madre le descuenta por cada una de las veces que llega tarde a casa, 25 pesetas. Una semana se ha retrasado 4 veces, ¿cuánto le darán de "paga"?

$\boxed{21}$

9. El triple de un número más 120 es 7 veces ese número, ¿cuál es el número?

$\boxed{22}$

10. ¿Cómo expresarías con signos:

$\boxed{23}$ a) La edad de Juan es el doble de la edad de Pedro y la suma de ambas es de 36 años,

$\boxed{24}$ b) La diferencia de dos números distintos,

$\boxed{25}$ c) La suma de dos cantidades distintas de boliches,

$\boxed{26}$ d) El triple del peso de un deportista menos 5 kilogramos es igual a 160 kilogramos,

$\boxed{27}$ e) La suma del área de un rectángulo con la de otro cuya área es el doble de la del primero y ambos miden 24 centímetros cuadrados,

$\boxed{28}$ f) El número de pesetas que representan x monedas de 5 pesetas y x monedas de 25 pesetas?

11. Dibuja estos dos rectángulos que se te indican: El primero tiene "x" cm de largo por 3 cm de alto. Al segundo de le aumenta 2 cm por cada lado.

29

12. 6 más tres veces la edad de un niño es la edad de su profesor, que tiene 27 años. ¿Qué edad tiene el niño?

30

13. El precio de dos entradas de cine más 200 pesetas es el precio de 3 entradas más 20 pesetas, ¿cuánto vale la entrada?

31

14. El peso de dos garrafas de agua es de 27 kilogramos, ¿cuál es el peso de una de ellas, sabiendo que la garrafa mayor pesa el doble que la menor?

32

ANEXO 8

CENTRO: ____ **PRUEBA T**

APELLIDOS Y NOMBRE__________________________________ **CURSO:**

FECHA: ___________

1. Realiza las siguientes operaciones:

1 a) (+5) + (-20) =

2 b) (- 2) . (-3) =

3 c) (-2) , (+5) =

4 d) (+24) : (-6) =

5 e) (+4) - (+2) =

6 f) (+2) - (-3) =

7 g) (-9) + 3 =

8 h) -5 + (- 8) =

9 y) -9 - (- 6) =

1 j) -4 + (-3) - (-2) =

2**.** Expresa si las siguientes expresiones son verdaderas: Siempre (S), Nunca (N) o algunas veces (A). En A explicar para qué valores de las letras.

1 a) a + b = a + b

1 b) p + q = p + s

1 c) h+m=h+2m

3. Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible hacerlo correctamente.

1 a) $6 (b + a) =$

1 b) $(a + 2) 3 =$

1 c) $x (y - x) =$

1 d) $3 (a - 5) - 5 (a + 2) =$

1 e) $(a+b)(m+3) =$

1 f) $a (3 a + b) + b (2a - b) =$

4. " 2 sumado con x" se puede escribir como: x + 2. Suma 2 en cada uno de los casos siguientes:

2 a) 15 ____________ ⇨ ....

2 b) x + 6 ____________ ⇨ ....

2 c) 3x ____________ ⇨ ....

5. " x multiplicado por 3 se puede escribir como 3x". Multiplica por 3 en cada uno de estos casos.-

2 a) 7 ____________ ⇨ ....

2 b) x + 4 ____________ ⇨ ....

2 c) 5x ____________ ⇨ ....

6.

2 a) Si $a + b = 43$, calcula: $a + b + 2 =$ ....

2 b) Si $n - 246 = 762$, calcula-. $n - 247 =$ ....

2 c) Si $e + f= 8$, calcula: $e + f+ g =$ ....

7. Dadas las expresiones:

p p + 7, p - 2 2 p

¿Puedes contestar?:

2 La menor de ellas es ....

3 La mayor de ellas es ....

3 o no se puede contestar ~~porque~~....................

8. Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible hacerlo correctamente.

3 a) (3+5)+4 =

3 b) (5 + 4) - 3 =

3 c) 4 . 2 - (5 + 2) =

3 d) 5 - (3 - 1) =

3 e) (3 - 2) + 2 =

3 f) 5 - (6 + 7) + 4 =

3 g) 3 - (6 - 2) +(- 5 + 4) + 1 =

3 h) 6 (7 + 5) - (- 8 + 4) =

9. Calcula y reduce, cuando sea posible, las expresiones siguientes:

4	a)	a + a + 3b + 5a =
4	b)	4 + 3 y =
4	c)	(a - b) + b =
4	d)	3 a -(b - 2 a) =
4	e)	5 a -(b - a + c)
4	f)	5 a - (b - a + c)
4	g)	b + (a +b) =
4	h)	(a - b + c) - (b- a + c) =

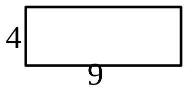
4 10. Los lápices azules cuestan 10 pesetas cada uno y los lápices rojos 12 pesetas cada uno. Compro algunos lápices azules y rojos y en total me cuestan 180 pesetas. Si a es el número de lápices azules y r es el número de lápices rojos comprados, ¿qué puedo escribir acerca de a y r ?

11. En cada uno de los casos siguientes halla las sustituciones que se hacen para pasar de las expresiones de la columna A a la B.

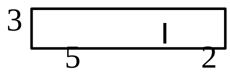
	Columna A	Columna B
4	a) 5x - 17	5 (y + 1) - 17
5	b) 2x. 3y - z	6xp - z
5	c) e (j + 7)	(j + 7) (f - 2)
5	d) v x	h r h v

12. Sabiendo que el perímetro de un polígono se calcula sumando las longitudes de todos sus lados, halla el perímetro de las figuras siguientes:

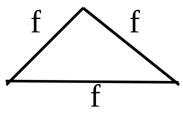
$\boxed{5}$



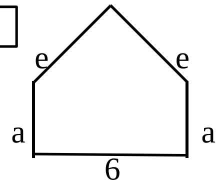
$\boxed{5}$



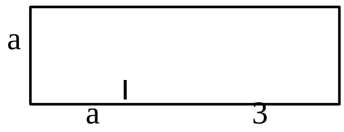
$\boxed{5}$



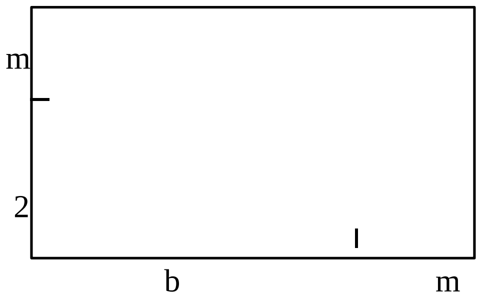
$\boxed{5}$



13. Dados los siguientes rectángulos:



13.1



13.2

Calcula-.

a) La resta entre el lado mayor y el lado menor.

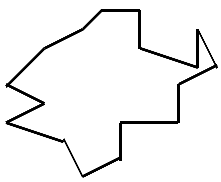
$\boxed{5}$ 13.1 a) $\boxed{5}$ 13.2 a)

b) La suma de los dos lados mayores menos la suma de los dos lados menores.

$\boxed{5}$ 13.1 b) $\boxed{6}$ 13.2 b)

14. ¿Qué se podría escribir para el perímetro de estas figuras?

$\boxed{6}$ a)



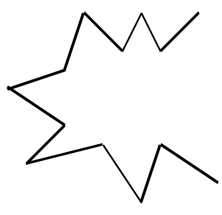
Todos los lados miden 7.

Hay en total 17 lados.

$\boxed{6}$ b) Parte de esta figura no está dibujada.

Hay n lados en total, todos de longitud 2.

Halla su perímetro. P =



15. ¿Cómo expresarías con signos, letras y números?

6 a) El triple de la suma de dos números distintos.

6 b) El doble de un número menos 5 e igual a 17.

6 c) El cuádruplo de un número más 7, es 39.

6 d) El triplo, de un número más el doble del mismo número, es igual a 54.

6 e) 28 menos el doble de, un número más 4.

6 f) El doble de x menos 4, por y.

6 g) El doble de la diferencia entre h e i.

7 h) El cuadrado de la suma de 3 y 5.

7 i) El cuadrado de la suma de x e y.

7 j) n menos cuatro, todo por z más 2?

16. ¿Cómo expresarías con signos?

7 a) La edad de Juan es el doble de la edad de Pedro y la suma de ambas es 36 años.

7 b) La diferencia de dos cantidades de boliches distintas.

7 c) El doble de la edad de Pedro hace 4 años es igual a la de Juan.

7 d) El triple del peso de un deportista menos 5 kilogramos es igual a 160 kilogramos.

7 e) Dentro de 6 años, el triple de la edad de Pepa será igual a la edad de María.

7 f) La suma del área de un rectángulo con la de otro cuya área es doble de la del primero y juntas miden 24 centímetros cuadrados,

7 g) El número de pesetas que representan x monedas de 5 pesetas y x monedas de 25 pesetas.

8 h) Añadiendo el triple del doble de un número de boliches más 1, obtengo 34 boliches?

17. En un supermercado un kilo de peras cuesta 125 pesetas; un kilo de plátanos 25 pesetas y uno de uvas 90 pesetas más que el de plátanos.

Completa la siguiente tabla-.

Peso	Peras	Plátanos	Uvas
1 kg	81	82	83
2 kg	84	85	86
10 kg	87	88	89

18. Expresa ahora lo que valdrían si en lugar de ser las peras a 125 pesetas, fuera a "b" ptas.

Peso	Peras	Plátanos	Uvas
1 kg	b	b - 25	(b - 25) + 90
2 kg	90	91	92
10 kg	93	94	95

19. Sabiendo que el área de un rectángulo es el producto de la base por la altura, calcula el área de las figuras siguientes:

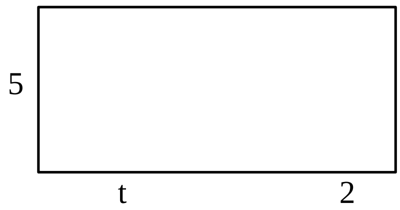
9 a)

A =

9 b)

A =

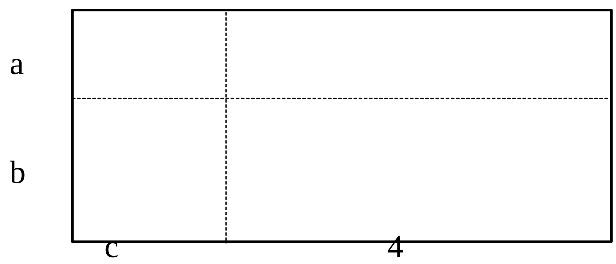
9 c)



A =

20. El producto de (a + b) (c + 5) se puede representar utilizando

el área del rectángulo de lados a + b y c + 4.



—

x	c	4
a	a x c	a x 4
b	b x c	b x 4

— (a + b) (c + 5) = a.c + a.5 + b.c + b.5

Escribe los siguientes productos utilizando dos de las representaciones anteriores.

a) a.(b+5)

$\boxed{9}$ $\boxed{100}$

b) (a + 3) (b+2)

$\boxed{101}$ $\boxed{102}$

ANEXO 9, parte 1ª

Escala de actitudes hacia las Matemáticas (AM).

Núm. alumno.................................. Curso..

Colegio .... Fecha de nacimiento.......................................

Sexo .... Núm. de hermanos sin contarte tú....................

Pon una cruz en los estudios de tus padres:

Padre:	Sin estudios	☐	Primarios	☐	Bachillerato	☐	Universitarios	☐
Madre:	Sin estudios	☐	Primarios	☐	Bachillerato	☐	Universitarios	☐

¿Has necesitado ayuda especial para las Matemáticas?

Sí, frecuentemente ☐ Alguna vez ☐ No, nunca o casi nunca ☐

Pon una cruz según la respuesta elegida:	De acuerdo	Sin opinión	En desa-cuerdo
1. Me siento poco seguro cuando hago Matemáticas	☐	☐	☐
2. En clase de Matemáticas me iría.	☐	☐	☐
3.Procuro guardar bien mi libro de Matemáticas.	☐	☐	☐
4. Cuando hago Matemáticas me olvido de hacer otra cosa.	☐	☐	☐
5. Las Matemáticas son más difíciles para mí que para los demás compañeros.	☐	☐	☐
6. Yo amo de verdad las Matemáticas.	☐	☐	☐
7. Me divierten las clases de Matemáticas.	☐	☐	☐
8. Las clases de Matemáticas duran mucho tiempo.	☐	☐	☐
9. Daría dinero a un amigo para que me hiciera los trabajos de Matemáticas.	☐	☐	☐
10. No me interesan las Matemáticas.	☐	☐	☐
11. Me alegro cuando no hay clases de Matemáticas.	☐	☐	☐

12. El conocimiento de las Matemáticas no es necesario para la mayoría de los trabajos ☐ ☐ ☐
13. Estoy dispuesto a hacer muchos trabajos de Matemáticas. ☐ ☐ ☐
14. Si pudiera quitar alguna clase sería la de Matemáticas. ☐ ☐ ☐
15. Me siento mal cuando pienso en las Matemáticas. ☐ ☐ ☐
16. El estudio de las Matemáticas es muy importante para mi vida. ☐ ☐ ☐
17. Sé muy poco sobre Matemáticas. ☐ ☐ ☐
18. Con frecuencia pienso mucho en saber más Matemáticas. ☐ ☐ ☐
19. Me gusta hacer trabajos y problemas de Matemáticas. ☐ ☐ ☐
20. Los colegios no deben de trabajar las Matemáticas. ☐ ☐ ☐
21. Tengo que dedicar mucho tiempo para estudiar Matemáticas. ☐ ☐ ☐
22. Las Matemáticas no sirven para nada. ☐ ☐ ☐
23. Mis padres quieren que sepa Matemáticas. ☐ ☐ ☐
24. La mayoría de las personas usan Matemáticas en su vida diaria.. ☐ ☐ ☐
25. La matemática es memorizar reglas para hacer cálculos aburridos. ☐ ☐ ☐

ANEXO 9, parte 2ª

Escala de actitudes hacia el Álgebra (AA)

Núm. alumno .... Curso ....
Colegio .... Fecha de nacimiento ....
Sexo .... Núm. de hermanos sin contarte tú.....................

Pon una cruz en los estudios de tus padres:

Padre:	Sin estudios	☐	Primarios	☐	Bachillerato	☐	Universitarios	☐
Madre:	Sin estudios	☐	Primarios	☐	Bachillerato	☐	Universitarios	☐

¿Has necesitado ayuda especial para las Matemáticas?

Sí, frecuentemente ☐ Alguna vez ☐ No, nunca o casi nunca ☐

Pon una cruz según la respuesta elegida:	De acuerdo	Sin opinión	En desa cuerdo
1. Me siento poco seguro cuando hago Álgebra.	☐	☐	☐
2. Me marcharía de clase de Álgebra.	☐	☐	☐
3.Normalmente comprendo lo que se hace en clase de Álgebra.	☐	☐	☐
4. Cuando hago Álgebra me olvido de hacer otra cosa.	☐	☐	☐
5. El Álgebra es más difícil para mí que para los demás compañeros.	☐	☐	☐
6. Yo amo de verdad el Álgebra.	☐	☐	☐
7. Me divierten las clases de Álgebra.	☐	☐	☐
8. Las clases de Álgebra duran mucho tiempo.	☐	☐	☐
9. Daría dinero a un amigo para que me hiciera los trabajos de Álgebra.	☐	☐	☐
10. El Álgebra no me interesa.	☐	☐	☐
11. Me alegro cuando no hay que hacer Álgebra en clases de Matemáticas.	☐	☐	☐
12. El saber Álgebra no es necesario para la mayoría de los trabajos	☐	☐	☐
13. Estoy dispuesto a hacer muchos trabajos de Álgebra.	☐	☐	☐

15. Me pongo nervioso con sólo pensar en tener que hacer Álgebra.			
16. El estudio del Álgebra es muy importante para mi vida.			
17. Sé muy poco sobre el Álgebra.			
18. Todos los días pienso mucho en saber más Álgebra.			
19. Me gusta hacer trabajos y problemas de Álgebra.			
20. Los colegios no deben trabajar el Álgebra.			
21. Tengo que dedicar mucho tiempo para estudiar Álgebra.			
22. El Álgebra no sirve para nada.			
23. Mis padres quieren que sepa Álgebra.			
24. La mayoría de las personas usan el Álgebra en su vida diaria..			
25. El Álgebra es memorizar reglas para hacer cálculos aburridos.			

ANEXO 10, parte 1ª

Diseño instruccional para las expresiones algebraicas (DISEA I). Cuaderno I.

FICHA 1

El ÁLGEBRA

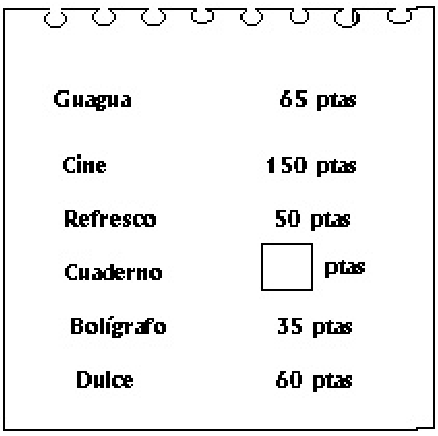
Hasta que llegaste a 7º normalmente has usado en Matemáticas unos símbolos que son los números. Pero algunas veces ocurre que no has podido usar números porque no conoces el valor de una medida, de una cantidad o de un dato cualquiera. En esos casos tienes que utilizar otros símbolos diferentes a los números.

EJEMPLO DE CASO EN QUE HAY QUE UTILIZAR SÍMBOLOS QUE NO SON NÚMEROS.

Un niño al llegar a su casa anota los gastos que tuvo durante todo el día, pero tiene un problema pues no se acuerda de lo que le costó un cuaderno.

¿Cómo podría representar el precio del cuaderno?.

Escríbelo tú en la hojilla; recuerda que no puedes usar números.

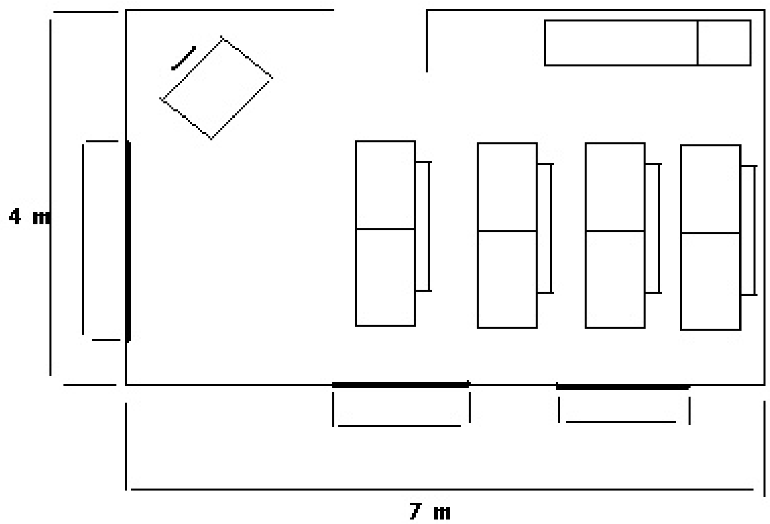


FICHA 2

VAMOS A VER OTRO CASO

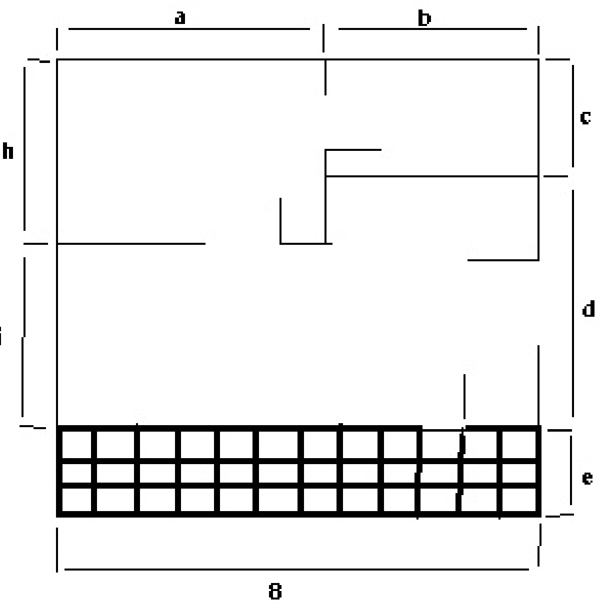
En este plano de una clase se desconocen las medidas de la longitud de la clase, de las ventanas y de la pizarra.

Escribe tú unos símbolos que representen esas medidas.



Y .... ÚLTIMO CASO

En la figura se ha representado el plano de una parte de un piso, cuyas dimensiones están expresadas en la misma.



Observa que la longitud de la terraza la podemos expresar: 8 = a + b.

¿Es cierto que:
c + d = h + i?

y, ¿a = 8 - b?.

FICHA 3

El Álgebra es la parte de las Matemáticas que utiliza símbolos para representar números desconocidos.

Los símbolos más utilizados por el lenguaje algebraico son las letras.

Cuando las letras representan a números, se pueden hacer operaciones con ellas, igual que con los números.

Fíjate muy bien en este caso:

Un niño/a tiene en el bolsillo izquierdo boliches y en el derecho tiene tres más que en el izquierdo.

SITUACION:	bolsillo izquierdo	bolsillo derecho
REPRESENTACION:	boliches	boliches + 3

AHORA INTENTA ESCRIBIR LA REPRESENTACION DE LAS SIGUIENTES SITUACIONES.

En el gimnasio hay un curso que tiene balones y en la cancha hay otro curso con cinco balones menos.

SITUACIÓN:	gimnasio	cancha
REPRESENTACIÓN:	....	....

En 7º A hay grupo de alumnos, en 7º B hay un alumno más que en 7º A y en 7º C hay igual número de alumnos que en 7º B.

SITUACIÓN:	7º A	7º B	7º C
REPRESENTACIÓN:	....	....	....

FICHA 4

AQUÍ TIENES UNA SITUACIÓN Y SU REPRESENTACIÓN Y TÚ TIENES QUE ESCRIBIR LA HISTORIA. ¿DE ACUERDO?

SITUACIÓN:	7º A	7º B	7º C
REPRESENTACIÓN:	n. con g.	n. con g. - 5	n. con g. + 4

(n. con g. = niños con gafas)

La historia podría ser ....
....
....

Hasta ahora, para representar las situaciones desconocidas utilizaste palabras. Normalmente, en vez de utilizar toda la palabra se suele usar sólo una letra.

Vuelve a hacer ahora los ejercicios de la Ficha 3 utilizando una sola letra. Fíjate en el primero que ya está hecho.

SITUACIÓN:	bolsillo izquierdo	bolsillo derecho
REPRESENTACIÓN:	b	b + 3

SITUACIÓN:
REPRESENTACIÓN:

SITUACIÓN:
REPRESENTACIÓN:

FICHA 5

En las fichas anteriores, si recuerdas, has utilizado números, letras, figuras de geometría...

AHORA VAMOS A INTENTAR QUE SE RELACIONEN:

- LA SEÑORA ÁLGEBRA (..... letras .....)

- LA SEÑORA ARITMÉTICA (.... números ....)

- LA SEÑORA GEOMETRÍA (.... figuras .....)

Y para ello, REPRESENTAREMOS, CON ELEMENTOS GEOMÉTRICOS, los números, las letras, las fórmulas, etc.

Para que sea más fácil nos vamos a poner de acuerdo sobre algunas situaciones:

1) CUANDO TE ENCUENTRES UN NÚMERO SOLO, TE VAS A IMAGINAR QUE ES UN PRODUCTO QUE TE ENCUENTRAS POR LA UNIDAD.

Ejemplo: Si tienes un "3", es lo mismo que: 3 x 1 ó 1 x 3.

ACTIVIDAD 1: Rellena los "cuadritos" en:

a) 2 = 2 x $\square$ = $\square$ x 2

b) 6 = 6 x $\square$ = $\square$ x 6

2) CUANDO TE ENCUENTRES CON UNA LETRA SOLA, TE VAS A IMAGINAR QUE ES UN PRODUCTO DE LA LETRA QUE TE ENCUENTRES POR LA UNIDAD.

Ejemplo: "a" es lo mismo que a x 1 ó que 1 x a.

ACTIVIDAD 2: Rellena los "cuadritos" en :

a) x = $\square$. = . $\square$

b) y = . $\square$ = $\square$.

NOTA: Utilizamos "." como símbolo de multiplicar para no confundirnos con la "x".

FICHA 6

Ahora vamos a dar un paso más:

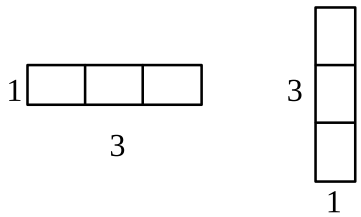
3) CADA VEZ QUE APARECE UN NÚMERO SOLO O UNA LETRA SOLA, LA REPRESENTAREMOS POR UN RECTÁNGULO.

Ejemplo: 3

Por el primer acuerdo (FICHA 5):

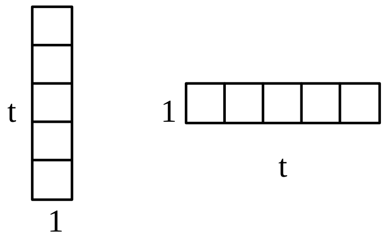
$3 = 3 \, . \, 1 = 1 \, . \, 3$

QUEDARÍA REPRESENTADO ASÍ:



Ejemplo: t

Por el segundo acuerdo (FICHA 5):



ACTIVIDAD 1: Representa con rectángulos:

a) 2 b) x

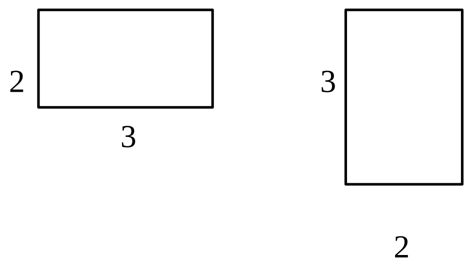
FICHA 7

Representar mediante rectángulos: a) 2 . 3 y

b) z . t, se haría así:

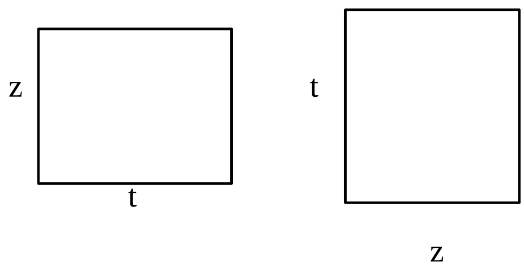
a) 2 . 3

Solución:



b) z . t

Solución:



Seguro que ya sabes REPRESENTAR LAS EXPRESIONES O PRODUCTOS CUANDO NO APARECEN UNOS. ¡INTÉNTALO!.

ACTIVIDAD 1: Representa

3 . x

ACTIVIDAD 2: Representa

a) 4 . b

b) 4 + b

¿Son iguales? ¿Por qué?

FICHA 8

USANDO EL LENGUAJE ALGEBRAICO REPRESENTA ESTAS SITUACIONES.

RECUERDA QUE TIENES QUE UTILIZAR LETRAS PARA REPRESENTAR LOS DATOS DESCONOCIDOS.

1. Juan tiene ocho caramelos más que Jaime.

2. Miguel vino a clase el doble de días que Carlos, y Fátima el triple que Miguel.

3. Un cuadrado tiene de lado 1 metro, ¿cuál es su perímetro? ¿Y su área?

4. Al final de una partida de boliches, Pepe tenía tres boliches más que Luis, y Sara la mitad de Pepe.
   ¿Cuál de los tres tiene más? .... ¿Por qué? ....
   ....

5. Tres hermanos tienen unas cantidades de dinero. María tiene 50 pesetas más que Miguel y Pablo tiene el doble que los dos juntos.

FICHA 9

ESCRIBE LAS OPERACIONES SIGUIENTES EN LENGUAJE ALGEBRAICO.

1. El triple de **x.**

2. El doble de **n** menos 4.

3. El producto de **a, b , c.**

4. El precio de **m** kilogramos de manzanas a **y** ptas. el kg.

5. El triple de la suma de **a** y **b**.

6. El doble de la diferencia entre **h** e **i**.

7. El número siguiente a **g**.

8. El número anterior a **h**.

9. El cuadrado de la suma de **x** e **y**.

10. El triple del cuadrado de **b**.

FICHA 10

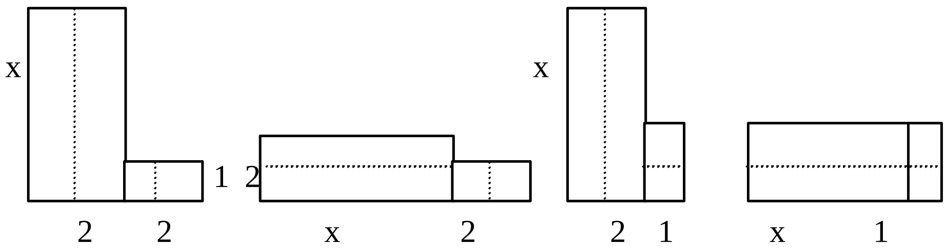
SEGUIMOS ADELANTE

Vamos a REPRESENTAR:

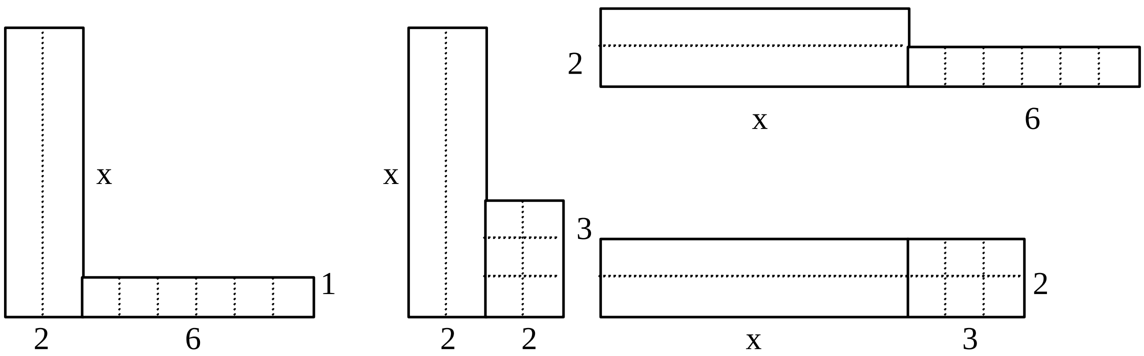
a) $2 \cdot x + 2$ b) $2 \cdot x + 6$

Nos quedaría:

a) $2 \cdot x + 2 = 2 \cdot x + 2 \cdot 1$



b) $2 \cdot x + 6 = 2 \cdot x + 6 \cdot 1$



ACTIVIDAD 1: INTENTA TU REPRESENTAR DE TODAS LAS FORMAS POSIBLES:

c) $3 + 4 \cdot y$ d) $6 \cdot y + 3$

FICHA 11

ACTIVIDAD 1:

En un supermercado un kilo de peras cuesta b pesetas; un kilo de manzanas cuesta 5 pesetas más que el de peras; un kilo de plátanos, 13 pesetas menos que el de peras, y un kilo de uvas 8 pesetas más que el kilo de plátanos.

Completa esta tabla:

PESO	PERAS	MANZANAS	PLATANOS	UVAS
1 kg	b	b + 5	b - 3	(b - 3) + 8
2 kg		2 . (b + 5) = = 2b + 10		
10 kg				

ACTIVIDAD 2: Ahora suponiendo que el kilo de peras cuesta 95 pesetas, calcula todos los precios.

PESO	PERAS	MANZANAS	PLATANOS	UVAS
1 kg				
2 kg				
10 kg				

HEMOS OBTENIDO, COMO PUEDES OBSERVAR, VALORES NUMÉRICOS DE LAS EXPRESIONES.

EN GENERAL, **VALOR NUMÉRICO** DE UNA EXPRESIÓN ALGEBRAICA ES EL QUE SE OBTIENE AL SUSTITUIR LAS LETRAS POR CIERTOS VALORES.

FICHA 12

ACTIVIDAD 1: Completa la tabla siguiente:

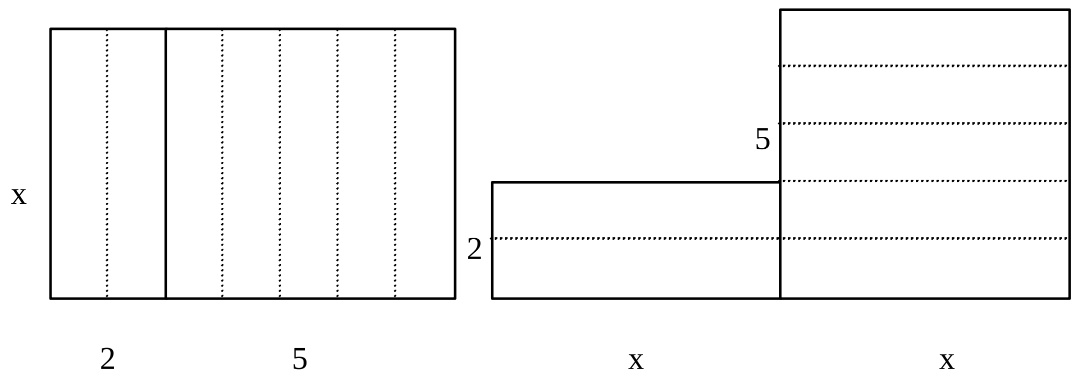
a	b	3 . a + b	a^2	b^2
4	5			
1	3			
20	4			
10	2			

FICHA 13

ACTIVIDAD 1: INTENTA REPRESENTAR

a) 2 . x + 3 . x b) 2 . x + 3 . y c) 2 . x + 7

observando que 2 . x + 5 . x, quedaría representado:



a) 2 . x + 3 . x

b) 2 . x + 3 . y

c) 2 . x + 7

FICHA 14

SEGUIMOS ADELANTE, E INTENTAMOS REPRESENTAR

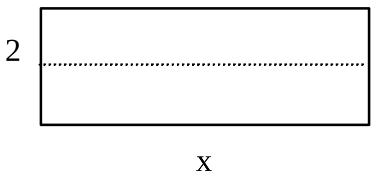
2. x - 2

para hacerlo volvemos a recordar que 2 = 2 . 1 = 1 . 2, entonces vamos a representar

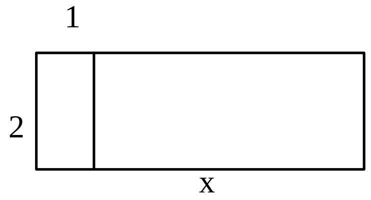
2 . x - 2. 1.

COMO SE TRATA DE "QUITAR" 2 . 1, tachamos, sombreamos, coloreamos, etc., 2 . 1, sobre el rectángulo de 2 . x.

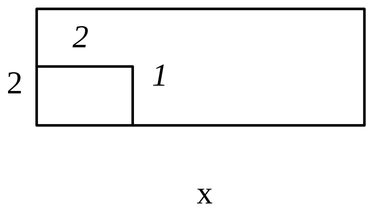
Así:



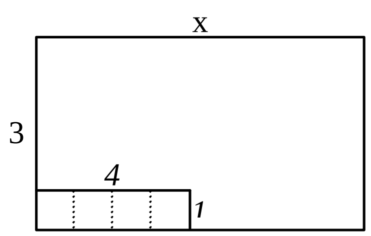
2 . x

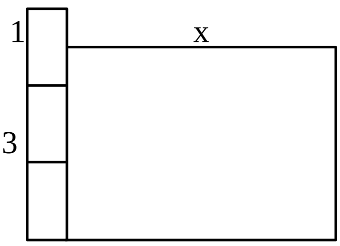


2 . x - 2 .1



ACTIVIDAD 1: ¿CÓMO REPRESENTARIAS: 3 . x - 4?





Y, ¿6 - 3 . x?

FICHA 15

ACTIVIDAD 1:

REPRESENTA LOS APARTADOS a), c), e), f) y g) DEL EJERCICIO 6 DE LA PÁGINA 10 DE TU LIBRO DE TEXTO (7.... EDEBE).

ACTIVIDADES DE REFUERZO

ACTIVIDAD 1: INTENTA ESCRIBIR LA REPRESENTACIÓN DE LA SIGUIENTE SITUACIÓN.

Pepe mide 8 cm más que Juan y Eduardo mide 4 cm más que Juan.

SITUACIÓN:	Pepe	Juan	Eduardo
REPRESENTACIÓN:	....	....	....

ACTIVIDAD 2:

AQUÍ TIENES UNA SITUACIÓN Y SU REPRESENTACIÓN Y TÚ TIENES QUE ESCRIBIR LA HISTORIA. ¿DE ACUERDO?

SITUACIÓN:	Paquete de leche	mantequilla	café
REPRESENTACIÓN:	pesetas	pesetas – 20	pesetas + 100

La historia podría ser ....
....
....

Utilizando una sola letra rellena el siguiente esquema para el ejercicio siguiente: "Pepe mide 8 cm más que Juan y Eduardo mide 4 cm más que Juan".

SITUACIÓN:

REPRESENTACIÓN:

ACTIVIDAD 3: Representa con rectángulos:

a) y b) 6

Seguro que ya sabes REPRESENTAR LAS EXPRESIONES O PRODUCTOS CUANDO NO APARECEN "UNOS". ¡INTÉNTALO!

ACTIVIDAD 4: Representa.

a) 3 . 4   b) a . b

ACTIVIDAD 5: Representa.

a) x . y   b) x + y

¿Son iguales? ¿Por qué?

ACTIVIDAD 6: Completa la tabla siguiente.

a	(3 + a)	a	(3 – a)	(3 + a) (3 – a)
4				
1				
10				

ACTIVIDAD 7: INTENTA REPRESENTAR.

a) $4 + 2 . x$ b) $3 . x + 4$ c) $3 . x + 6$

ACTIVIDAD 8: ¿CÓMO REPRESENTARÍAS: $3 . x - 3$?

ACTIVIDAD 9:

USANDO EL LENGUAJE ALGEBRAICO REPRESENTA ESTAS SITUACIONES.

RECUERDA QUE TIENES QUE UTILIZAR LETRAS PARA REPRESENTAR LOS DATOS DESCONOCIDOS.

1. Miguel tiene el doble de caramelos que Ana.

2. La finca de Paco tiene 200 m más que la de Pepe y la de Blas tiene 30 m menos que la de Paco.

3. Pepe tiene la mitad de dinero que Antonio y Luis el doble que Antonio.

4. ¿Cuál es el área de un cuadrado de g metros de lado?

5. Juan tiene el triple de edad que su hijo, Antonio.

6. Pilar tiene 5 pesetas menos que Sergio y Fermín tiene el doble que los otros dos juntos.

7. En la clase de Matemáticas, Juan hizo tres ejercicios más que Maribel, y Sandra un tercio de Juan.

ACTIVIDAD 10:

ESCRIBE LAS OPERACIONES SIGUIENTES EN LENGUAJE ALGEBRAICO.

1. El doble de m ....

2. El cuadrado de z ....

3. El precio de x kilogramos de papas a 75 ptas. El kg ....

4. El perímetro y el área de un cuadrado de un metro de lado.
   P = ... A = ...

5. El perímetro y el área de un rectángulo de y metros de largo y x metros de ancho ....

6. El producto de x por la suma de a y b ....

7. El triple de la diferencia entre b y c ....

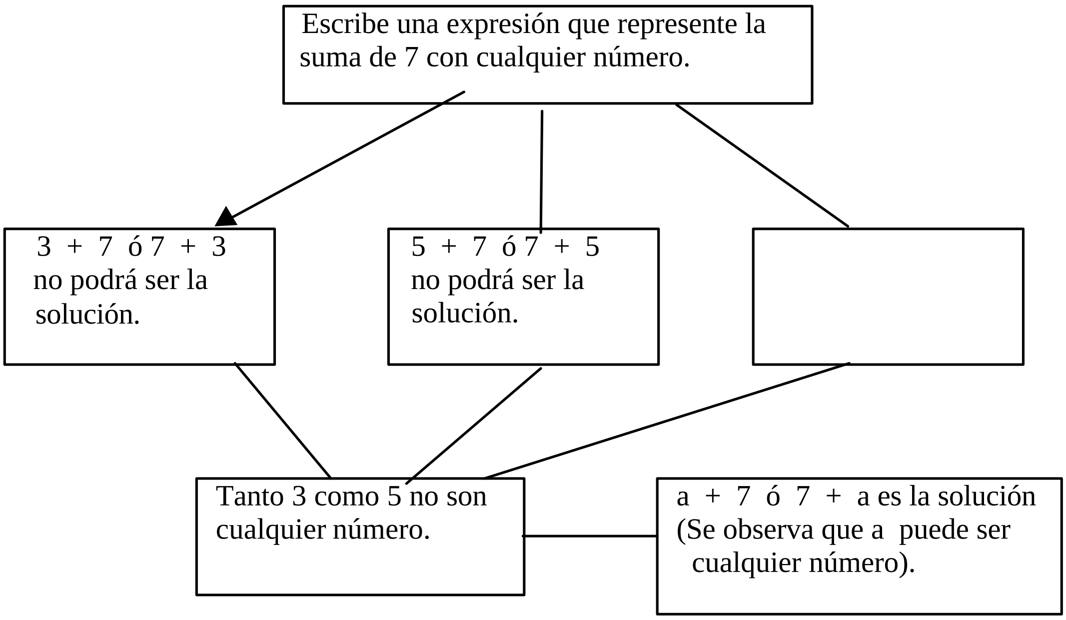
<u>**ANEXO 10, parte 2ª**</u>

Diseño instruccional para las expresiones algebraicas (DISEA I). Cuaderno II.

FICHA 1

Vamos a comenzar intentando TRADUCIR del LENGUAJE HABITUAL al LENGUAJE ALGEBRAICO, pasando por el LENGUAJE ARITMÉTICO.

ACTIVIDAD 1:



ACTIVIDAD 2:

Escribir el doble, el triple, el cuadrado, la mitad, la tercera parte, el doble menos cuatro, etc, de cualquier número.

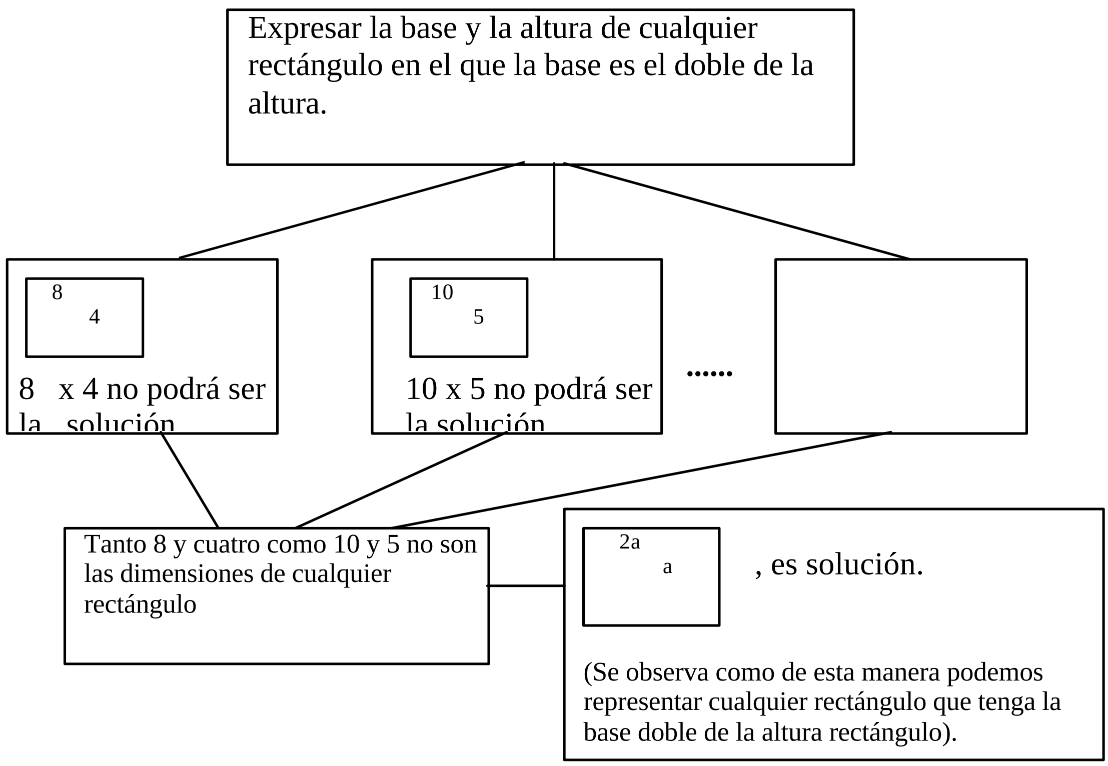
Ahora lo relacionamos con el LENGUAJE GEOMÉTRICO que trabajamos el día anterior. Para ello hacemos lo siguiente:

ACTIVIDAD 1: Representa con rectángulos los resultados: $2 . x$; $3 . x$; x^2;$2 . x – 4$.

$2 . x$ $\qquad$ $3 . x$ $\qquad$ x^2 $\qquad$ $2 . x – 4$.

Traducimos de nuevo del LENGUAJE HABITUAL al LENGUAJE ALGEBRAICO pasando por el LENGUAJE ARITMÉTICO.

ACTIVIDAD 2:



FICHA 3

ACTIVIDAD 1: Expresar la base y la altura de cualquier rectángulo cuya base exceda 5 unidades a la altura; la base y la altura difieren en 10 unidades.

Relacionamos con el LENGUAJE GEOMÉTRICO.

ACTIVIDAD 2: Representa con un rectángulo el resultado de la Actividad 2 de la Ficha 2.

ACTIVIDAD 3: Representa con rectángulos los resultados de la Actividad 1.

FICHA 4

ACTIVIDAD 1: Escribe la suma de cuatro números enteros consecutivos cualesquiera.

ACTIVIDAD 2: Representa lo que has escrito por medio de rectángulos.

ACTIVIDAD 3: Representa de todas las maneras posibles:

a) $2 . a + b$ b) $2. (a + b)$

¿Da lo mismo el resultado de a) y b)?, ¿por qué?

ACTIVIDAD 4: Representa de todas las maneras posibles:

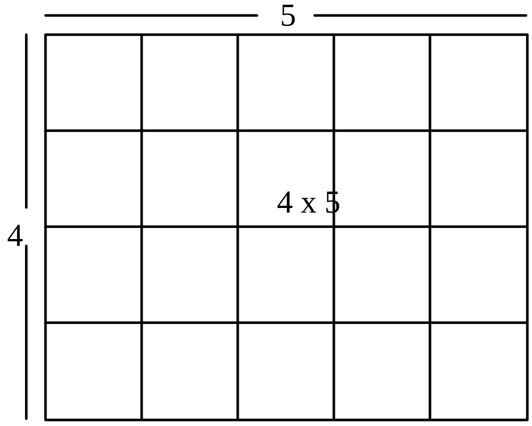
a) $2 . a + 3 . a + 4 . a$ b) $2 . a + 3 . b$

FICHA 5

Recuerda que:

ACTIVIDAD 1:

4 x 5 podemos representarlo como el área del rectángulo de dimensiones 4 y 5, es decir,

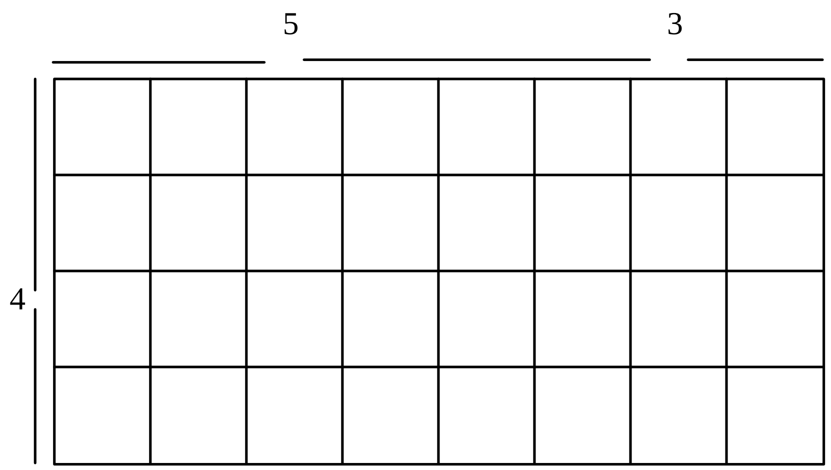


¿Cómo podrás representar a x 4?, y ¿a x b?

FICHA 6

ACTIVIDAD 1:

Teniendo en cuenta lo que se ha hecho en los ejercicios anteriores, observa que 4 x (5 + 3) se puede representar gráficamente, así:



y más esquemáticamente:

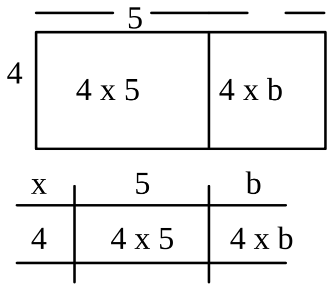
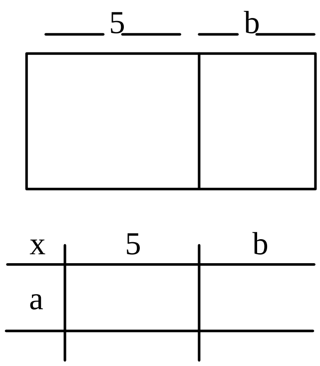
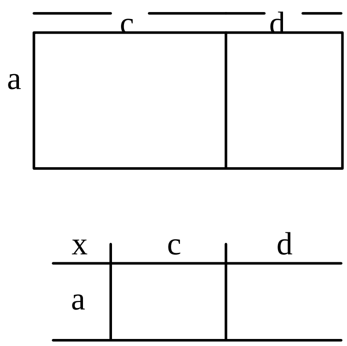
x	5	3
4	4 x 5	4 x 3

ESTE ÚLTIMO ESQUEMA QUE HEMOS PUESTO ES UN CUADRO DE DOBLE ENTRADA.

FICHA 7

ACTIVIDAD 1:

¿Cómo calcularías 4 x (5 + b). Completa el cuadro siguiente:

4 x (5 + 6)		4 x (5 + b) = 4 x 5 + 4 x b
a x (5 + b)		a x (5 + b) =
a x (c + d)		a x (c + d) = = a x c + a x d

FICHA 8

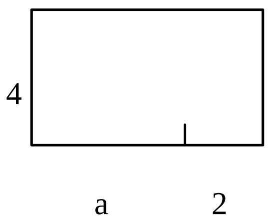
ACTIVIDAD 1:

Como en los casos anteriores, representa en un cuadro de tres columnas:

$2 . (a + b)$.

A PARTIR DE AHORA SIEMPRE QUE PUEDAS HAZ EL CUADRO DE DOBLE ENTRADA.

FICHA 9

<table>
<tr><th>MODELO GEOMÉTRICO</th><th>ESQUEMA</th><th>EXPRESIÓN ALGEBRAICA</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td><table><tr><td>x</td><td>a</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>4 x a</td><td>4 x 2</td></tr></table></td>
<td>4 x (a + 2) = 4 x a + 4 x 2</td>
</tr>
</table>

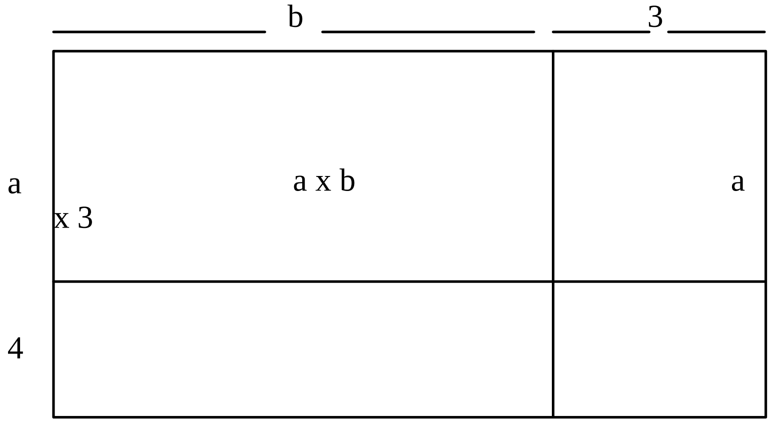
ACTIVIDAD 1:

Representar (a + 5) . b; (x + 3) . 2; (y + c) . 3, mediante rectángulos, y utilizar un cuadro de doble entrada como el de la Actividad 1 de la Ficha 7.

FICHA 10

ACTIVIDAD 1:

Observa que (a + 4) x (b + 3) lo podríamos representar gráficamente



Resolviendo los productos de las expresiones entre paréntesis, podemos escribir

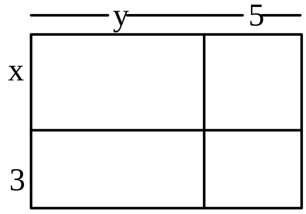
(a + 4) x (b + 3) = a x b + a x 3 + 4 x b + 4 x 3

que podemos esquematizarlo:

x	b	3
a	a x b	a x 3
4	4 x b	4 x 3

ACTIVIDAD 2:

Completa las actividades del cuadro siguiente:

<table>
<tr>
<td>(x + 3) x (y + 5)</td>
<td>

<table>
<tr><td>x</td><td>y</td><td>5</td></tr>
<tr><td>x</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td>
<td>(x + 3) x (y + 5) =
x . 5 + x . y + 3 . y + 3 . 5</td>
</tr>
</table>

FICHA 11

ACTIVIDAD 1:

Completa las actividades del cuadro siguiente:

$(3 + a)(4 + x)$		$(3 + a)(4 + a) =$
$(x + y)(a + b)$		$(x + y)(a + b) =$

ACTIVIDAD 2:

Completa el cuadro siguiente donde intervienen más de dos sumandos, como lo hiciste en el ejemplo anterior.

$(a + b + 2)(3 + c)$		

FICHA 12

ACTIVIDAD 1:

Representamos 2a . 3b.

3b

	x	b	b	b
2a	a	ab	ab	ab
	a	ab	ab	ab

ACTIVIDAD 2:

Observa que:

Representar 2a . 3b es lo mismo que representar:

(a + a) (b + b + b) y,

2a . 3a es lo mismo que (a + a) (a + a + a).

Ahora representa : 5a . 2a.

¿ A qué es igual?

OBSERVA QUE SIEMPRE QUE HACES UN PRODUCTO, EL RESULTADO ES UNA NUEVA EXPRESIÓN, CUYO COEFICIENTE (EL NÚMERO), ES EL PRODUCTO DE LOS COEFICIENTES, Y LA PARTE LITERAL EL PRODUCTO DE LAS LETRAS, SEAN IGUALES O DISTINTAS.

ACTIVIDAD 3:

Sin hacer la representación, ¿cuál es el producto de 3b . 5ab?

FICHA 13

¡COMENZAMOS A TRABAJAR CON "CUADRADOS"!

ACTIVIDAD 1:

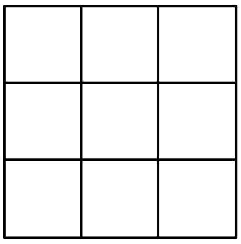
Vamos a representar 3^2 que si recuerdas lo que es el cuadrado de un número, es muy fácil.

Solución:

$$3^2 = 3 \cdot 3$$

3

3



ACTIVIDAD 2:

Representa: $3 \cdot a^2$.

ACTIVIDAD 3:

Representa: $(3 \cdot a)^2$.

ACTIVIDAD 4:

¿Son iguales los resultados de las dos actividades anteriores?

¿En qué se distinguen?

FICHA 14

ACTIVIDAD 1:

¿Te atreves a representar $(3 + 4)^2$? Inténtalo.

ACTIVIDAD 2:

Y, ¿$(a + b)^2$?

FICHA 15

ACTIVIDAD 1:

¿Es igual $(a + b)^2$ que $(a + b)(a + b)$?

Para responder, observa el dibujo de la representación de la Actividad 2 de la ficha anterior (Ficha 14).

MODELO GEOMÉTRICO	ESQUEMA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
		$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

ACTIVIDAD 2:

¿Es igual $(a + b)^2$ que $a \cdot (a + b) + b \cdot (a + b)$?

Para responder, representa previamente la última expresión.

FICHA 16

ACTIVIDAD 1:

Representa $a^2 + b^2$.

Observa: ¿da lo mismo $(a + b)^2$ que $a^2 + b^2$?

FÍJATE BIEN: $(a + b)^2$ SE LEE: "EL CUADRADO DE LA SUMA DE DOS NÚMEROS" Y, $a^2 + b^2$ SE LEE: "LA SUMA DE LOS CUADRADOS DE DOS NÚMEROS".

ACTIVIDAD 2:

Vuelve a representar $(a + b)^2$.

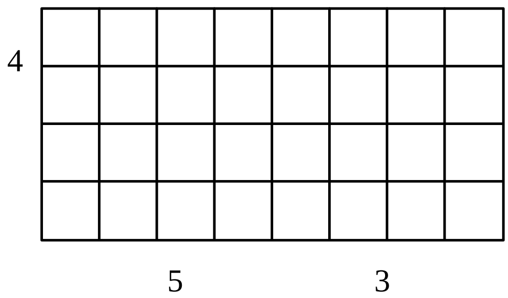
Pon nombres a todas las zonas que se pueden formar dentro del cuadrado y que sean cuadrados o rectángulos. ¿Cuáles son sus áreas?

¿Queda por casualidad $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2 . a . b$?

FICHA 17

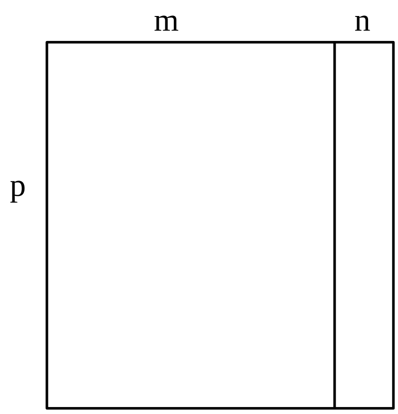
Vamos a representar varios productos cuyos factores son los expresados a continuación.

a) (5 + 3) . 4



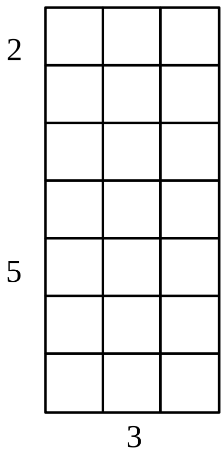
$(5 + 3) . 4 = 5 . 4 + 3 . 4$

b) (m + n) . p



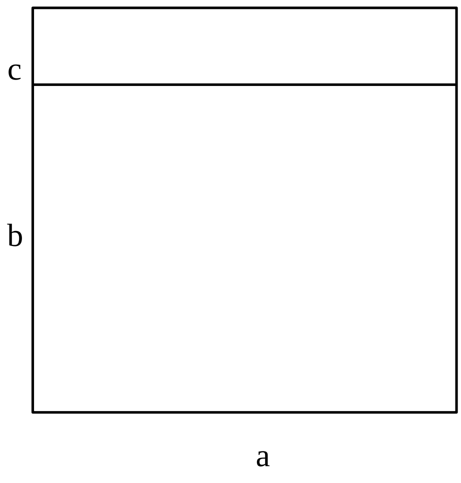
$(m + n) . p = m . p + n . p$

c) 3 . (5 + 2)



$3 . (5 + 2) = 3 . 5 + 3 . 2$

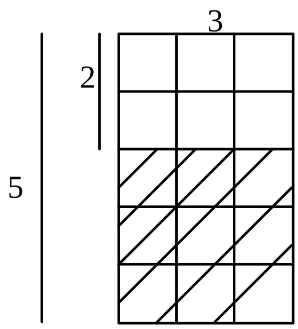
c) a . (b + c)



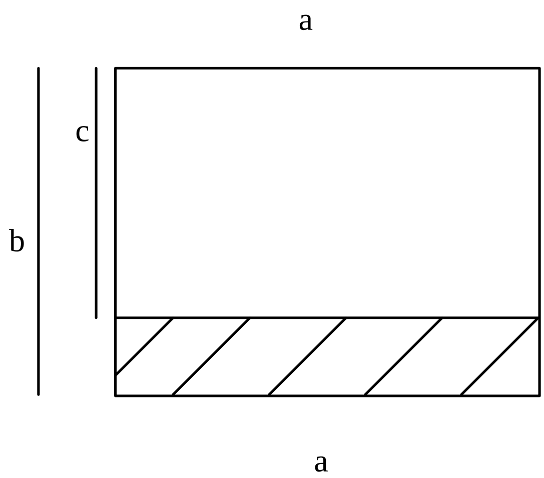
$a . (b + c) = a . b + a . c$

FICHA 18

e) $3 . (5 - 2)$



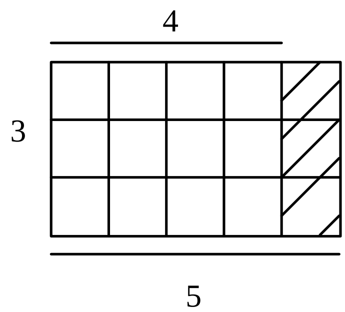
f) $a . (b - c)$



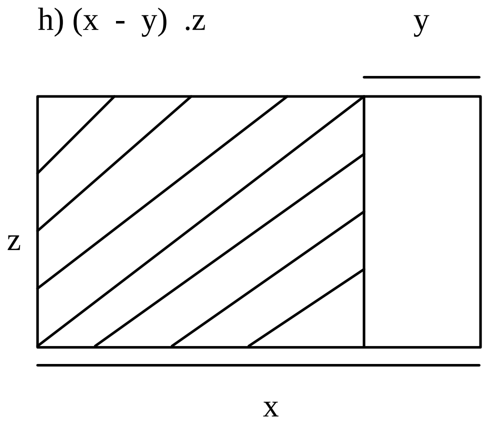
$3 . (5 - 2) = 5 . 3 - 3 . 2$

$a . (b - c) = a . b - a . c$

g) $(5 - 4) . 3$



h) $(x - y) .z$



$(5 - 4) . 3 = 5 . 3 - 4 . 3$

$(x - y) . z = x . z - y . z$

LO QUE HAS REALIZADO "MULTIPLICAR UNA SUMA O DIFERENCIA POR OTRO FACTOR (LETRA O NÚMERO)" O "UN NÚMERO O LETRA POR LA SUMA O DIFERENCIA DE OTROS DOS", SE LLAMA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA DEL PRODUCTO RESPECTO DE LA SUMA O DE LA DIFERENCIA.

FICHA 19

LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA, COMO PUEDES TÚ MISMO OBSERVAR, TRANSFORMA PRODUCTOS EN SUMAS O RESTAS.

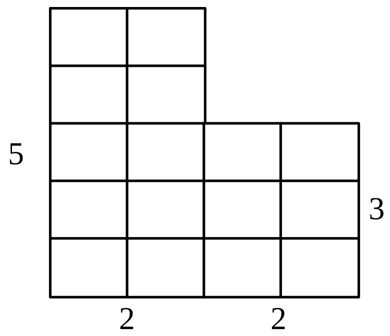
Ejemplos:

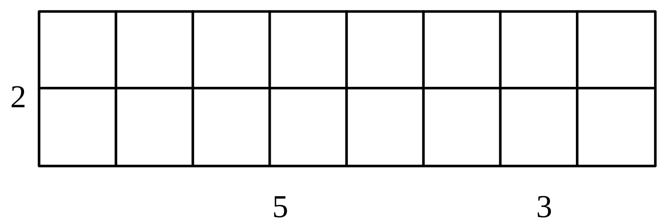
$3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$	$x \cdot (y + k) = x \cdot y + x \cdot k$
$(4 + 7) \cdot 2 = 4 \cdot 2 + 7 \cdot 2$	$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$
$3 \cdot (4 + 5 + 7) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 7$	$(x + y + z) \cdot a = x \cdot a + y \cdot a + z \cdot a$

Vamos a hacer la operación al revés: Transformar sumas o diferencias en productos.

¡¡NO CUALQUIER SUMA O CUALQUIER DIFERENCIA SE PUEDE TRANSFORMAR EN PRODUCTO!!

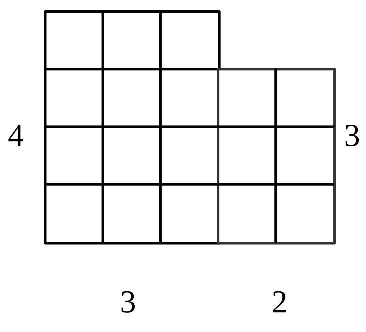
$2 \cdot 5 + 2 \cdot 3$

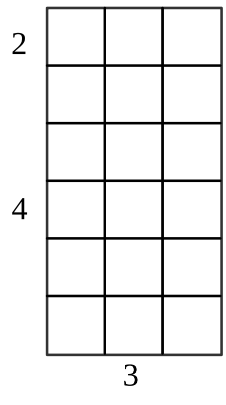




$2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 2 \cdot (5 + 3)$ Factor común = 2

$3 \cdot 4 + 3 \cdot 2$





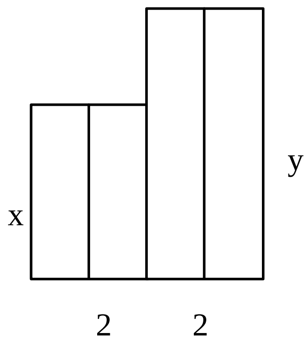
$3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 3 \cdot (4 + 2)$ Factor común = 3

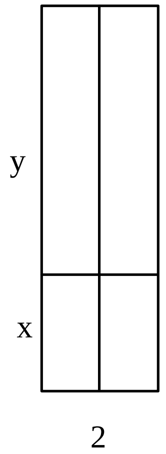
FICHA 20

PODEMOS DECIR ENTONCES QUE SIEMPRE QUE LA REPRESENTACIÓN DE UNA SUMA O UNA DIFERENCIA SE PUEDA REPRESENTAR CON UN ÚNICO RECTÁNGULO ES POSIBLE TRANSFORMARLA EN UN PRODUCTO. EN ESE CASO DIREMOS QUE HEMOS SACADO FACTOR COMÚN.

ACTIVIDAD 1:

Representar: $2 . x + 2 . y$.



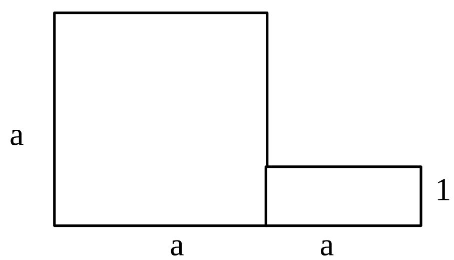


$2 . x + 2 . y = 2 .(x + y)$

Factor común = 2

ACTIVIDAD 2:

Representar: $a^2 + a$.



$a^2 + a = a^2 + a . 1 = a . (a + 1)$

ANEXO 11, parte 1ª

Diseño instruccional para las ecuaciones lineales con una incógnita (DISEC). Cuaderno III.

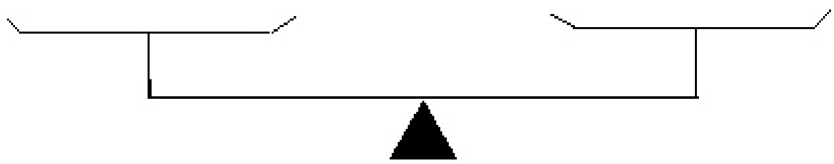
FICHA 1

INTRODUCCIÓN

Ya has **REPRESENTADO EN OTRAS OCASIONES, SITUACIONES EN DISTINTOS LENGUAJES: HABITUAL, ARITMÉTICO, GEOMÉTRICO Y ALGEBRAICO.**

Ahora vamos a hacer algunas **REPRESENTACIONES** dadas en el **LENGUAJE HABITUAL** en un **MODELO FÍSICO: LA BALANZA.**

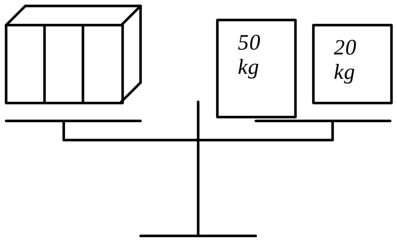
Para ello utilizaremos la representación de una **BALANZA DE BRAZOS IGUALES.**



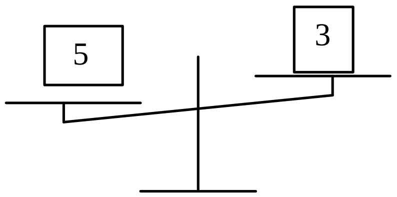
Representaremos la **IGUALDAD,** la **ECUACIÓN,** como la situación obtenida al estar la **BALANZA EN EQUILIBRIO.**

Para ello necesitamos **COLOCAR EN CADA UNO DE LOS PLATILLOS, LOS DATOS DE CADA UNO DE LOS MIEMBROS DE LA IGUALDAD.**

ACTIVIDAD 1:

Observa que los pesos de cada lado son iguales.		**Escribe la igualdad numérica que expresa la situación de la balanza.**

ACTIVIDAD 2:

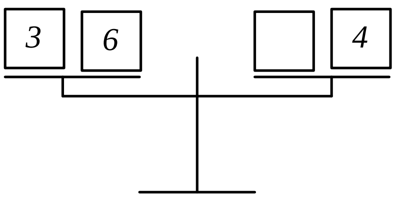
Considera que la balanza no está en equilibrio. ¿Qué peso añadirías sobre el platillo para que se equilibre?		$5 = 3 + \square$

FICHA 3

ACTIVIDAD 1:

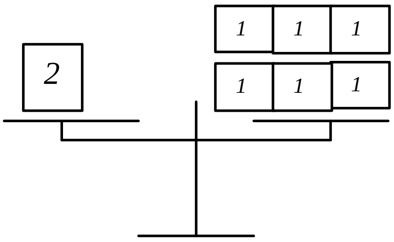
Si en una balanza en equilibrio colocamos dos pesas de 6 y 2 kg en la derecha y en el otro dos de 4 kg c/u, ¿cómo se encuentra la balanza?	**Dibuja la situación indicada.**	**Expresa la igualdad numérica.**

ACTIVIDAD 2:

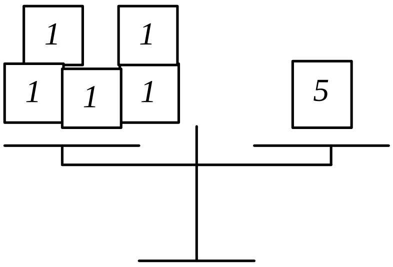
Explica aquí la situación reflejada en el dibujo.		**3 kg + 6 kg =** **= 4 kg +** $\boxed{}$

FICHA 4

ACTIVIDAD 1:

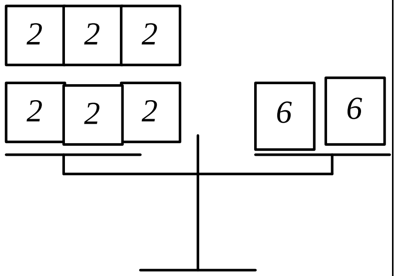
Observa que la balanza está equilibrada. ¿Qué ocurre si añadimos 1 kg a cada lado?, ¿y si quito 2 kg a cada platillo?		**Expresa numéricamente la primera igualdad (dibujo) y las dos que te han resultado al hacer lo indicado.**

ACTIVIDAD 2:

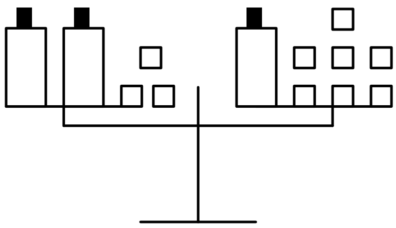
Observa esta balanza. ¿Qué ocurre si se cambian los dos platillos entre sí?		**Expresa numéricamente ambas situaciones, la dada y la pedida.**

FICHA 5

ACTIVIDAD 1:

Observa esta balanza. ¿Qué ocurre si se añade sobre cada platillo la mitad de lo que tenía?, ¿y si se añade sobre cada plato el doble?		**Expresa numéricamente las situaciones obtenidas.**

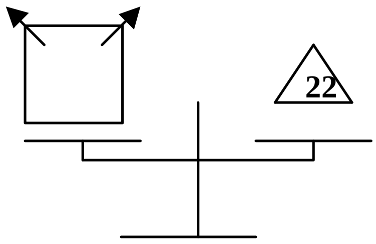
ACTIVIDAD 2:

Observa esta balanza. (Todas las botellas pesan igual).		**Expresa la situación de la balanza.**

FICHA 6

ACTIVIDAD 1:

Observa que la balanza está equilibrada.



Llamando con la letra x al peso del saco, expresa la situación indicada.

ACTIVIDAD 2:

Inventa una situación semejante a la anterior

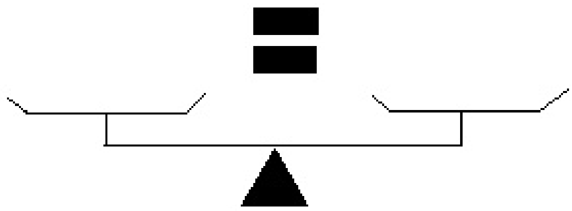
FICHA 7

Representa con la **BALANZA:**

ACTIVIDAD 1:

Añadiéndole 3 kilos al peso de una lata de pintura, el peso es de 9 kilos.

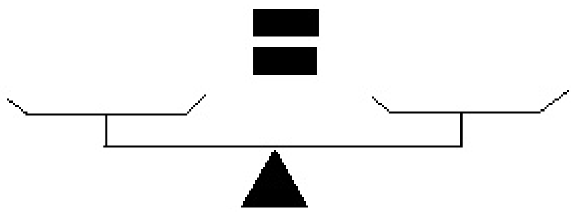
BALANZA	**EXPRESIÓN SIMBÓLICA**



ACTIVIDAD 2:

Al añadir 7 kilos al peso de una bolsa de manzanas, el resultado es de 7 kilos más dos kilos.

BALANZA	**EXPRESIÓN SIMBÓLICA**

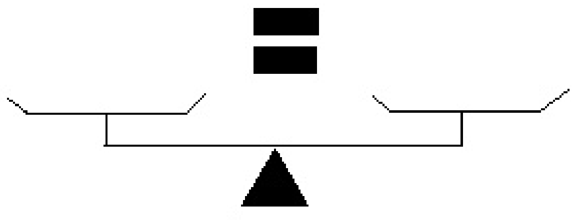


FICHA 8

ACTIVIDAD 1:

El peso de 5 paquetes de cartulinas es de 10 kilos.

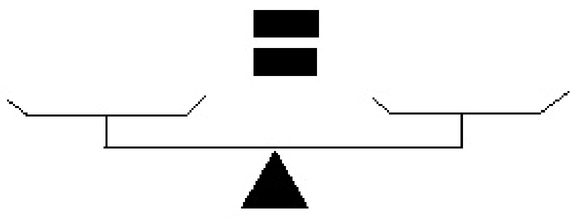
BALANZA	EXPRESIÓN SIMBÓLICA



ACTIVIDAD 2:

El tripo del peso de un libro más 2 kilos es 5 kilos.

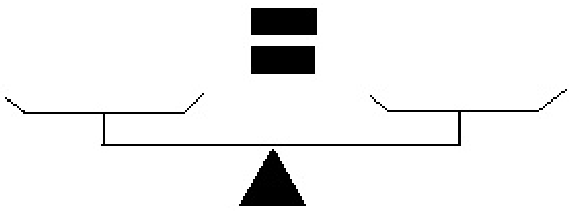
BALANZA	EXPRESIÓN SIMBÓLICA



ACTIVIDAD 1:

El peso de 2 barras de metal más 3 kilos, es de 7 kilos.

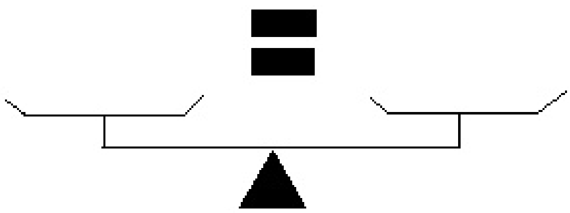
BALANZA	EXPRESIÓN SIMBÓLICA



ACTIVIDAD 2:

4 bolsas de pastas de chocolate pesan 20 kilos.

BALANZA	EXPRESIÓN SIMBÓLICA

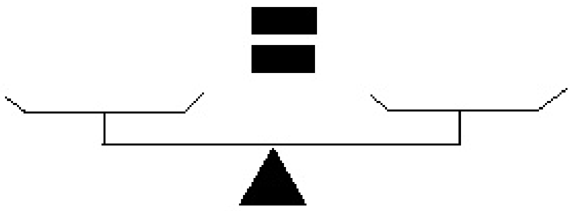


FICHA 10

ACTIVIDAD 1:

El peso de una enciclopedia de la música incrementado en 7 kilos, es 23 kilos.

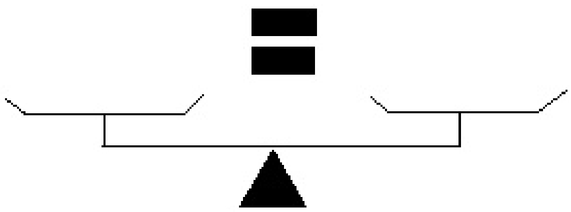
BALANZA	**EXPRESIÓN SIMBÓLICA**



ACTIVIDAD 2:

2 veces el peso de un lote de libros que tiene un niño más 6 kilos es igual a 5 veces el peso del lote de libros más 3 kilos.

BALANZA	**EXPRESIÓN SIMBÓLICA**

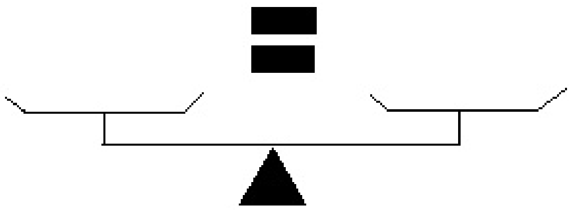


FICHA 11

ACTIVIDAD 1:

El doble del peso de un bolígrafo más 8 gramos es 3 veces el peso del bolígrafo.

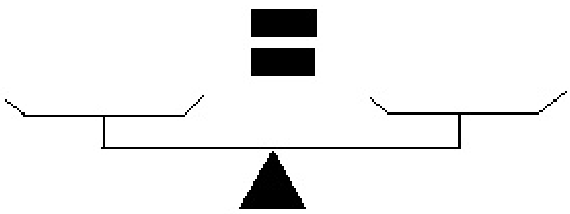
BALANZA	**EXPRESIÓN SIMBÓLICA**



ACTIVIDAD 2:

Simbolizando un número de balones con "o", representa: “la suma de un número de balones más el doble del mismo número de balones, es igual a 24”.

BALANZA	**EXPRESIÓN SIMBÓLICA**

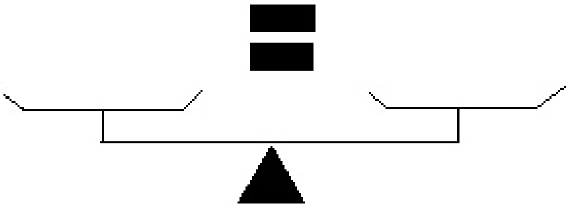


FICHA 12

ACTIVIDAD 1:

El triplo del peso de una jarra grande más 5 kilos es igual a 17 kilos.

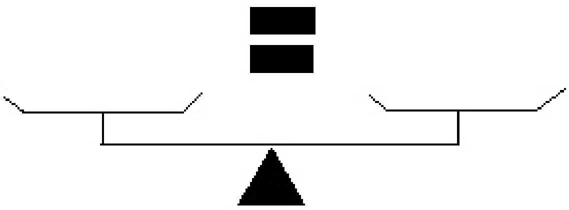
BALANZA	**EXPRESIÓN SIMBÓLICA**



ACTIVIDAD 2:

3 pins valen 45 pesetas.

BALANZA	**EXPRESIÓN SIMBÓLICA**

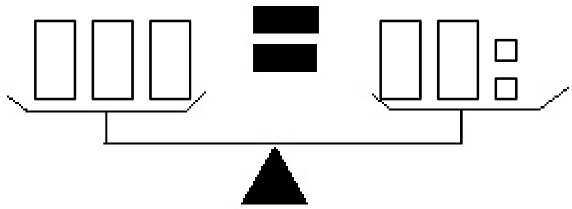
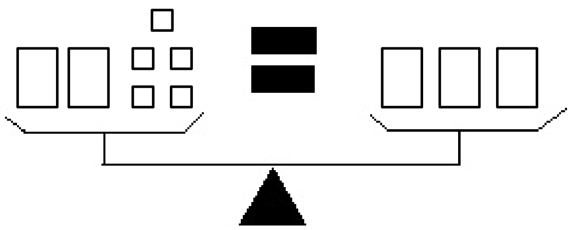
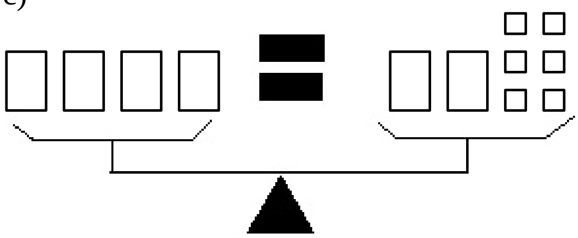
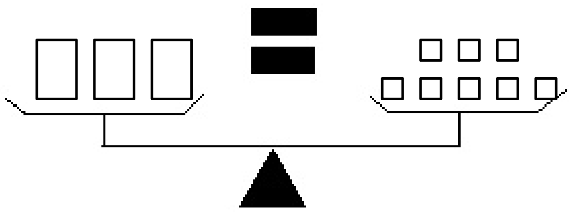
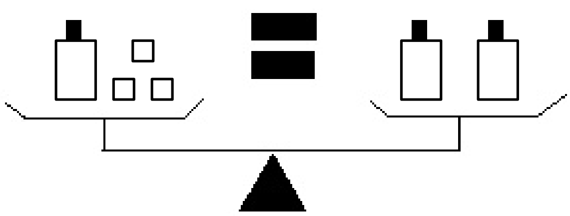


FICHA 13

ACTIVIDAD 1:

Expresa con números y símbolos las siguientes situaciones:

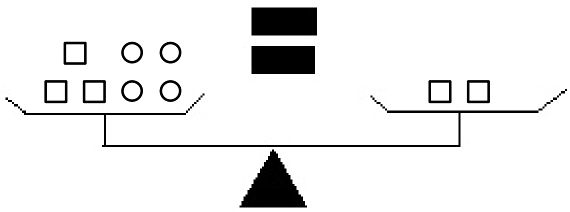
Los cuadrados pequeños representan 1 kg.

BALANZA	EXPRESIÓN SIMBÓLICA
a) 	
b) 	
c) 	
d) 	
e) 	

FICHA 14

ACTIVIDAD 1:

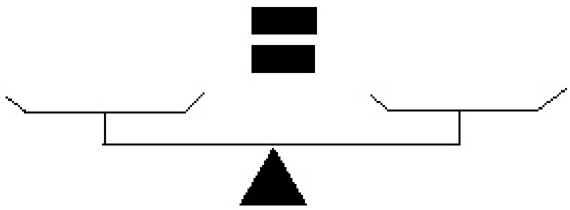
Observa:

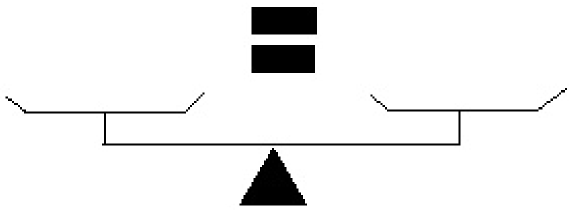
BALANZA	ALGEBRAICO
	$3x + 4 = 2$

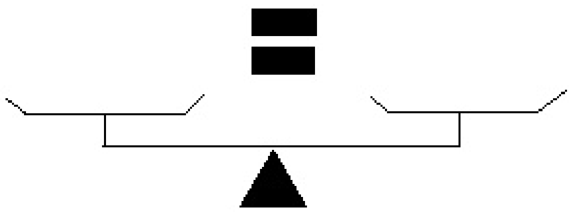
ACTIVIDAD 2:

Completa la siguiente tabla:

(Sugerencia: Representa los números con O y los datos desconocidos con □).

BALANZA	ALGEBRAICO
	$x + 23 = 2x$

BALANZA	ALGEBRAICO
	$4x = 2x + 6$

BALANZA	ALGEBRAICO
	$3x + 2 = 5$

FICHA 15

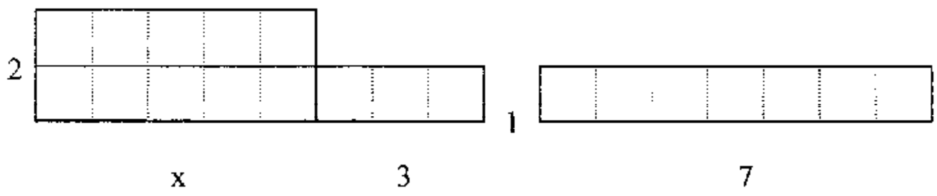
INTRODUCCION

Vamos ahora a hacer otro tipo de **REPRESENTACIONES** cuyas situaciones se dan en el **LENGUAJE HABITUAL.**

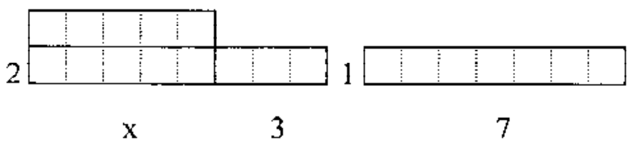
Lo vamos a hacer con **LENGUAJE GEOMÉTRICO** aprovechando lo que has practicado ya.

Ejemplo1:

El doble de la cantidad de pesetas que tiene Juan más 3, es igual a 7.

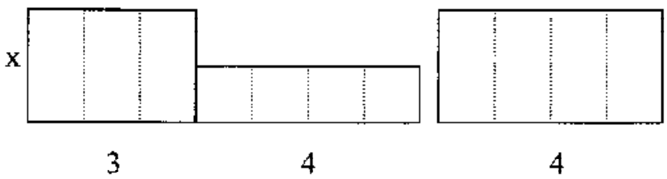


Podríamos ahora colocarlo en esta tabla:

<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA</th><th>EXPRESIÓN ALGEBRAICA</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$2x + 3 = 7$</td></tr>
</table>

Ejemplo 2:

Tres veces la edad de un niño más 4 es exactamente 4 veces su edad.

<table>
<tr><th>REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA</th><th>EXPRESIÓN ALGEBRAICA</th></tr>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
</table>

FICHA 16

ACTIVIDAD 1:

La edad de Pepito más 4 unidades es la edad de su hermano mayor, 10 años.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA

ACTIVIDAD 2:

6 más 3 veces el precio de una goma es igual a 5 veces el precio de la goma.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA

FICHA 17

ACTIVIDAD 1:

Añadiendo 4 cm al triplo de la medida de la longitud de un segmento, se obtiene otro segmento cuya medida es la del primero incrementada en 8 unidades.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA

ACTIVIDAD 2:

El valor de una pegatina aumentada en 4, es 2 veces el valor de la pegatina.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA

FICHA 18

ACTIVIDAD 1:

El peso de dos barras de metal más 3 kilos es 7 kilos.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA

ACTIVIDAD 2:

El precio de un bolígrafo incrementado en 7 pesetas, es 23 pesetas.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA

FICHA 19

ACTIVIDAD 1:

3 reglas valen 18 pesetas.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA

ACTIVIDAD 2:

2 veces el número de estudiantes de una clase particular más 6 es 5 veces el número de estudiantes de la clase más 3.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA

ACTIVIDAD 1:

El precio de 2 lápices más 8 pesetas es 3 veces el precio de un lápiz.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA

ACTIVIDAD 2:

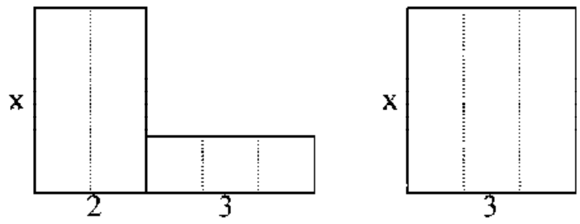
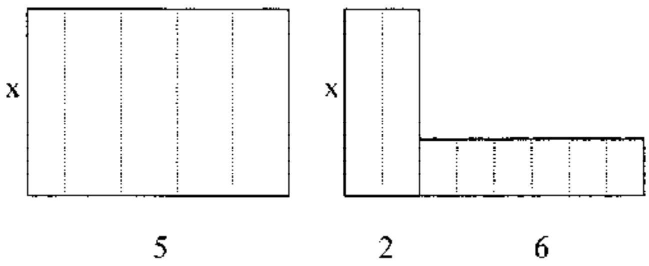
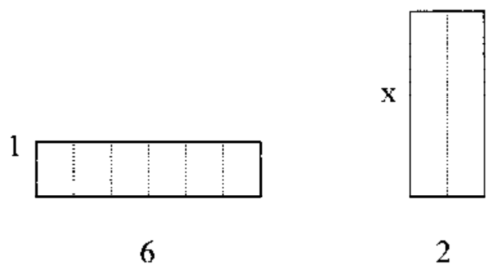
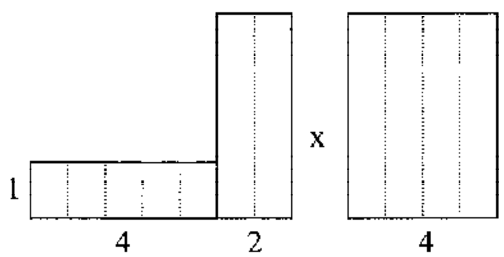
El triplo del número de discos de un cantante más 4 es 7 veces el número de discos.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA

FICHA 21

ACTIVIDAD 1:

Expresa con números y símbolos las siguientes situaciones:

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
	
	
	
	

FICHA 22

ACTIVIDAD 1:

Observa:

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
	$3x + 4 = 2x$

ACTIVIDAD 2:

Completa la siguiente tabla:

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
	$x + 3 = 2x$
REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	**EXPRESIÓN ALGEBRAICA**
	$4x = 2x + 6$
REPRESENTACION GEOMETRICA	**EXPRESION ALGEBRAICA**
	$3x + 2 = 5$

FICHA 23

ACTIVIDAD 1:

En cada caso, llena el "cuadrito" vacío:

a) $\square - 8 = 10$

b) $\square + 25 = 41$

c) $\dfrac{\square}{4} = 9$

d) $4 \times \square = 56$

e) $\square \times 3 = 270$

f) $34 - \square = 13$

g) $27 + \square = 39$

h) $\dfrac{63}{\square} = 7$

ACTIVIDAD 2:

Vamos a recordar que una **IGUALDAD ES UNA EXPRESIÓN DONDE APARECE EL SIGNO " = ".**

Ej :

a) $7 - 2 = 5$

b) $x + 3 = 7$

c) $3x + 2x = 5x$

d) $63 = 9 . 7$

e) $24 - 10 + 2 = 18 - 2$

Todas las expresiones anteriores son igualdades. De ellas, a), d) y e) son **IGUALDADES NUMÉRICAS** y b) y c) son **IGUALDADES LITERALES.**

En todas hay que distinguir el **PRIMER MIEMBRO** (lo escrito antes del signo " = ") y el **SEGUNDO MIEMBRO** (lo escrito después del signo " = ").

ACTIVIDAD 1:

COMPLETA CON LOS DATOS DE LOS APARTADOS ANTERIORES EL SIGUIENTE CUADRO DE DOBLE ENTRADA:

APARTADOS	PRIMER MIEMBRO	SEGUNDO MIEMBRO
a	7 - 2	5
b		
c		5x
d		
c		

Hay **IGUALDADES LITERALES** que **SOLO SON CIERTAS PARA ALGUNOS VALORES DE LAS LETRAS Y ESO SON LAS ECUACIONES.**

Ej: a) $x + 3 = 7$

Sólo es cierta si $x = 4$

b) $3x + 2 = 6x - 7$

Sólo es cierta si $x = 3$

ACTIVIDAD 2:

En cada caso halla el valor de la "x":

a) $10 - x = 4$ $x =$

b) $4x = 6x + 4$ $x =$

c) $3 = \frac{27}{x}$ $x =$

d) $8x + 3 = 5x + 9$ $x =$

ANEXO 11, parte 2ª

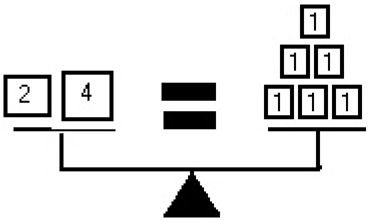
Diseño instruccional para las ecuaciones lineales con una incógnita (DISEC). Cuaderno IV.

FICHA 1

ACTIVIDAD 1

Observa :

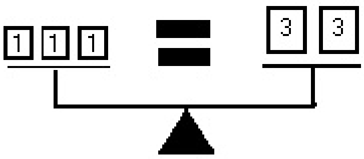
Esta balanza está equilibrada.



¿Que ocurre si añadimos 1 kg a cada lado?

¿Y si quito 2 kg a cada platillo?

Observa esta balanza:



¿Qué ocurre si se cambian los dos platillos?

¿Y si se añade sobre cada platillo el doble de lo que tenía?

FICHA 2

Ya has comprobado como LAS IGUALDADES LITERALES SE TRANSFORMAN EN IGUALDADES NUMÉRICAS SI SE SUSTITUYEN LAS LETRAS POR ALGUNOS VALORES CONCRETOS.

También sabes ya que esas IGUALDADES LITERALES QUE SÓLO SON CIERTAS PARA ALGUNOS VALORES DE LAS LETRAS, SON LAS ECUACIONES.

Ahora ten en cuenta que ESOS VALORES CONCRETOS que hacen que la igualdad literal se transforme en igualdad numérica SE LLAMAN SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN. Para obtenerlos tienes que RESOLVER LA ECUACIÓN, es decir, HACER LAS OPERACIONES NECESARIAS PARA OBTENER LAS SOLUCIONES.

ACTIVIDAD 1

Observa el siguiente ejercicio resuelto:
En cada caso, llena el "cuadrito" vacío:

a) $\boxed{18} - 8 = 10$

b) $\boxed{16} + 25 = 41$

c) $\dfrac{\boxed{36}}{4} = 9$

d) $4 \times \boxed{14} = 56$

e) $\boxed{90} \times 3 = 270$

f) $34 - \boxed{21} = 13$

g) $27 + \boxed{12} = 39$

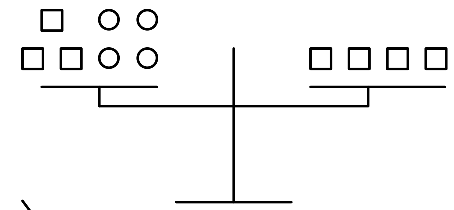
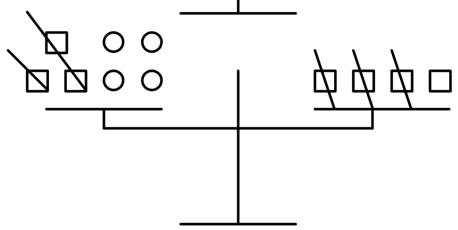
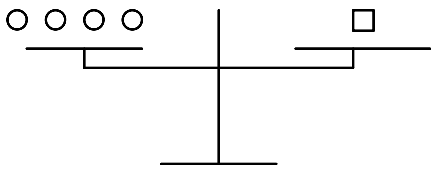
h) $\dfrac{63}{\boxed{9}} = 7$

Los VALORES con los que has llenado los cuadritos son las SOLUCIONES de las ecuaciones planteadas.

FICHA 3

ACTIVIDAD 1

Observa la siguiente RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN: $3x + 4 = 4x$.

BALANZA	ALGEBRAICO
	$3. x + 4 = 4 . x$
	$3 .x - 3 . x + 4 = 4 . x - 3 . x$
	$4 = x$

ACTIVIDAD 2

Resuelve la siguiente ecuación: $x + 3 = 2x$.

BALANZA	ALGEBRAICO

FICHA 4

ACTIVIDAD 1

Resuelve la siguiente ecuación: $4x = 2x + 6$.

BALANZA	ALGEBRAICO

ACTIVIDAD 2

Resuelve la siguiente ecuación: $3x + 2 = 5$.

BALANZA	ALGEBRAICO

FICHA 5

ACTIVIDAD 1

Hallar la solución de las ecuaciones siguientes:

a) $3 + x = 5$

e) $10x = 50$

b) $3x + 8 = 20$

f) $2x + 3 = 5x$

c) $5x = 20$

g) $7x = 14$

d) $5x + 3 = 33$

h) $10 - x = 6$

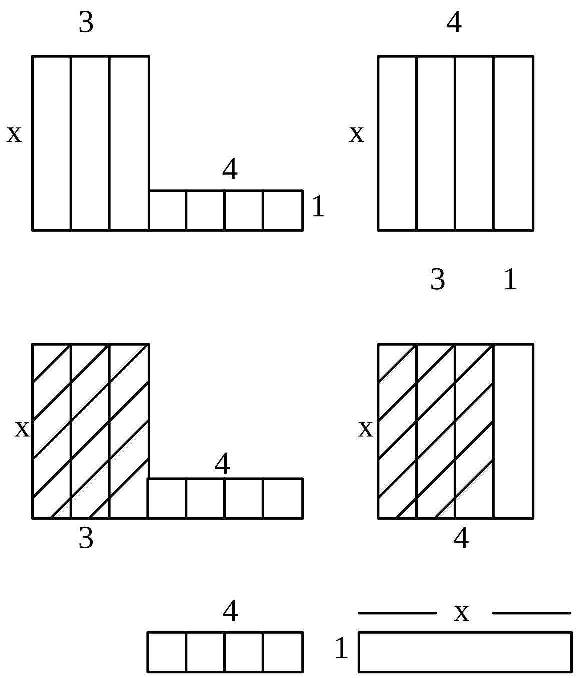
ACTIVIDAD 2

Teniendo en cuenta que ECUACIONES EQUIVALENTES SON AQUÉLLAS QUE TIENEN LA MISMA SOLUCIÓN, INDICA, DE LAS ECUACIONES DE LA ACTIVIDAD 1, CUÁLES SON EQUIVALENTES.

FICHA 6

ACTIVIDAD 1

Observa la siguiente RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN: 3x + 4 = 4x.

GEOMÉTRICO	ALGEBRAICO
	$3 . x + 4 = 4 . x$ $3 . x - 3 . x + 4 = 4 . x - 3 . x$ $4 = x$

ACTIVIDAD 2

Resuelve la siguiente ecuación: x + 3 = 2x.

GEOMÉTRICO	ALGEBRAICO

FICHA 7

ACTIVIDAD 1

Resuelve la siguiente ecuación: $4x = 2x + 6$.

GEOMÉTRICO	ALGEBRAICO

ACTIVIDAD 2

Resuelve la siguiente ecuación: $3x + 2 = 5$.

GEOMÉTRICO	ALGEBRAICO

FICHA 8

ACTIVIDAD 1

Hallar la solución de las ecuaciones siguientes:

a) $3 + x = 5$

e) $2x + 1 = 9$

b) $2x + 3 = 9$

f) $2x + 3 = 5x$

c) $5x = 20$

g) $3x + 4 = 7$

d) $4x + 3 = 2x + 7$

h) $5 + x = 2x + 3$

ACTIVIDAD 2

¿CUÁLES DE LAS ECUACIONES ANTERIORES SON EQUIVALENTES?

FICHA 9

ACTIVIDAD 1

a) ¿Es $x = 4$ solución de la ecuación: $3x + 4 = 16$?

b) ¿Es $x = 3$ solución de la ecuación: $2x + 3 = 10$?

c) ¿Es $x = 5$ solución de la ecuación: $3x = 16$?

d) ¿Es $x = 4$ solución de la ecuación: $3x + 2 = 6 + 2x$?

e) ¿Es $x = 3$ solución de la ecuación: $3(x + 2) = 6x - 3$?

f) ¿Es $x = 3$ solución de la ecuación: $5x = 21$?

Observación: Explica cada una de tus respuestas.

ANEXO 12

Actividades complementarias al diseño de instrucción (A.R.).

CENTRO: ____

APELLIDOS Y NOMBRE:_________________________________CURSO: _____

FECHA: __________________________________

ACTIVIDADES DE REPASO

1. RESUELVE LA ECUAClÓN: 4 + X = 13. EXPLICA CÓMO LO HAS HECHO.

2. RESUELVE LA ECUAClÓN: 5 X = 20. EXPLICA CÓMO LO HAS HECHO.

3. RESUELVE LA ECUAClÓN: 3X + 5 = 4X. EXPLICA CÓMO LO HAS HECHO.

4. RESUELVE LA ECUAClÓN: 3(X + 2) = 4X +3. EXPLICA CÓMO LO HAS HECHO.

5. RESUELVE LA ECUAClÓN: 3X + 9 = 2X + 16. EXPLICA CÓMO LO HAS HECHO.

6. RESUELVE LA ECUAClÓN: 5X - 3X = 13 - 7. EXPLICA CÓMO LO HAS HECHO.

7. RESUELVE LA ECUAClÓN: 21 = 9 + 3X. EXPLICA CÓMO LO HAS HECHO.

8. RESUELVE LA ECUACIÓN: 3X +4 = 4X. EXPLICA CÓMO LO HAS HECHO.

9. RESUELVE LA ECUAClÓN: 3X+ 8 = 20. EXPLICA CÓMO LO HAS HECHO.

10. De las 9 ecuaciones anteriores, ¿cuáles son equivalentes?. ¿Por qué?.

11. ¿Cuál es el número que sumado a 25 da 41?.

12. 9 gomas han costado 63 pesetas, ¿cuál es el precio de cada goma?.

13. El triple de los ahorros de un niño más 400 pesetas que le han regalado es 7 veces sus ahorros. ¿Cuánto había ahorrado?.

14. 6 más tres veces la edad de un niño es la edad de su profesor, 27 años. ¿Qué edad tiene el niño?.

15. El precio de 2 entradas de cine más 200 pesetas es el precio de 3 entradas más 200 pesetas, ¿cuánto vale la entrada?.

16. Las edades de dos hermanos suman 27 años. ¿Cuál es la edad de cada uno, sabiendo que la edad del mayor es doble que la del menor?.

17. Ejercicio número 4, página 128 del Libro de Matemáticas de séptimo de EDEBE.

18. Ejercicio número 6, página 128 del Libro de Matemáticas de séptimo de EDEBE.

19. Ejercicio número 9, página 129 del Libro de Matemáticas de séptimo de EDEBE.

20. Ejercicio número 26, página 137 del Libro de Matemáticas de séptimo de EDEBE.

ANEXO 13, parte 1ª

Diseño instruccional para las expresiones algebraicas (DISEA II). Cuaderno V.

FICHA 1

1. Realiza las siguientes operaciones indicando los pasos que vas dando hasta llegar al resultado final.

a) $(+5) + (-20) =$

b) $-4 + 20 - 8 =$

c) $(-2) \cdot (+5) =$

d) $(+24) : (-6) =$

e) $5 - (6 + 7) + 4 =$

f) $3 - 6 - (-5 + 4) - 2 + 1 =$

g) $6 \cdot (7 + 5) - (-8) + 4 =$

h) $4 - (27 - 3) + 8 - (4 - 5) \cdot 3 =$

FICHA 2

El ALGEBRA

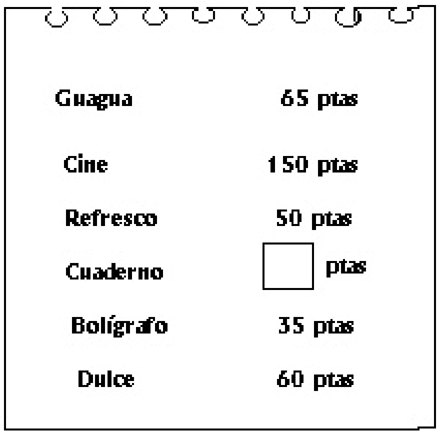
Hasta que llegaste a 8º normalmente has usado en Matemáticas unos símbolos que son los números. Pero algunas veces ocurre que no has podido usar números porque no conoces el valor de una medida, de una cantidad o de un dato cualquiera. En esos casos tienes que utilizar otros símbolos diferentes a los números.

EJEMPLO DE CASO EN QUE HAY QUE UTILIZAR SÍMBOLOS QUE NO SON NÚMEROS.

Un niño al llegar a su casa anota los gastos que tuvo durante todo el día, pero tiene un problema pues no se acuerda de lo que le costó un cuaderno.

¿Cómo podría representar el precio del cuaderno?.

Escríbelo tú en la hojilla; recuerda que no puedes usar números.

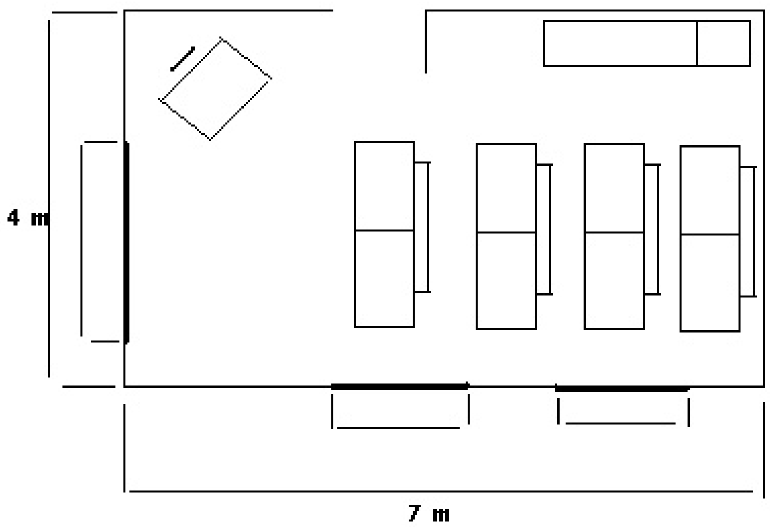


FICHA 3

VAMOS A VER OTRO CASO

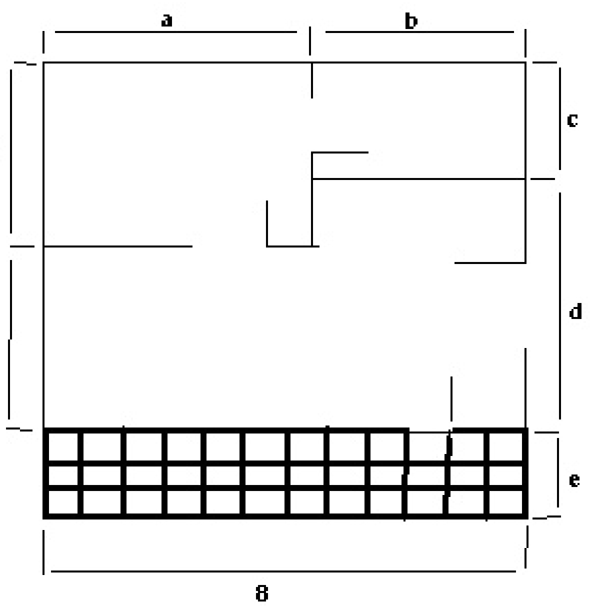
En este plano de una clase se desconocen las medidas de la longitud de la clase, de las ventanas y de la pizarra.

Escribe tú unos símbolos que representen esas medidas.



Y .... ÚLTIMO CASO

En la figura se ha representado el plano de una parte de un piso, cuyas dimensiones están expresadas en la misma.



Observa que la longitud de la terraza la podemos expresar: 8 = a + b.

¿Es cierto que:
c + d = h + i?

y, ¿a = 8 - b?.

FICHA 4

El Álgebra es la parte de las Matemáticas que utiliza símbolos para representar números desconocidos.

Los símbolos más utilizados por el lenguaje algebraico son las letras.

Cuando las letras representan a números, se pueden hacer operaciones con ellas, igual que con los números.

Fíjate muy bien en este caso:

Un niño/a tiene en el bolsillo izquierdo boliches y en el derecho tiene tres más que en el izquierdo.

SITUACIÓN:	bolsillo izquierdo	bolsillo derecho
REPRESENTACIÓN:	boliches	boliches + 3

AHORA INTENTA ESCRIBIR LA PRESENTACION DE LAS SIGUIENTES SITUACIONES.

En el gimnasio hay un curso que tiene balones y en la cancha hay otro curso con cinco balones menos.

SITUACIÓN:	gimnasio	cancha
REPRESENTACIÓN:	....	....

En 8º A hay grupo de alumnos, en 8º B hay un alumno más que en 8º A y 8º C hay igual número de alumnos que en 8º B.

SITUACIÓN:	8º A	8º B	8º C
REPRESENTACIÓN:	....	....	....

FICHA 5

AQUÍ TIENES UNA SITUACIÓN Y SU REPRESENTACIÓN Y TÚ TIENES QUE ESCRIBIR LA HISTORIA. ¿DE ACUERDO?

SITUACIÓN:	8º A	8º B	8º C
REPRESENTACIÓN:	n. con g.	n. con g. - 5	n. con g. + 4

(n. con g. = niños con gafas)

La historia podría ser ....
....
....

Hasta ahora, para representar las situaciones desconocidas utilizaste palabras. Normalmente, en vez de utilizar toda la palabra se suele usar sólo una letra.

Vuelve a hacer ahora los ejercicios de la Ficha 4 utilizando una sola letra. Fíjate en el primero que ya está hecho.

SITUACIÓN:	bolsillo izquierdo	bolsillo derecho
REPRESENTACIÓN:	b	b + 3

SITUACIÓN:
REPRESENTACIÓN:

SITUACIÓN:
REPRESENTACIÓN:

FICHA 6

1. INTENTA ESCRIBIR LA REPRESENTACIÓN DE LA SIGUIENTE SITUACIÓN:

Pepe mide 8 cm más que Juan y Eduardo mide 4 cm más que Juan.

SITUACIÓN:	Pepe	Juan	Eduardo
REPRESENTACIÓN:	....	....	....

2. AQUÍ TIENES UNA SITUACIÓN Y SU REPRESENTACIÓN Y TÚ TIENES QUE ESCRIBIR LA HISTORIA. ¿DE ACUERDO?

SITUACIÓN:	Paquete de leche	mantequilla	café
REPRESENTACIÓN:	pesetas	pesetas - 20	pesetas + 100

La historia podría ser ....
....
....

Utilizando una sola letra rellena el siguiente esquema para el ejercicio siguiente: "Pepe mide 8 cm más que Juan y Eduardo mide 4 cm más que Juan".

SITUACIÓN:

REPRESENTACIÓN:

FICHA 7

1. Representa la siguiente historia: en octavo A hay un grupo de niñas. En octavo B hay 5 niñas menos que en octavo A y en octavo C, hay doble número de niñas que en octavo B, ¿cómo expresarías la situación?

2. Carlos tiene 5 boliches. Su abuelo le ha comprado 8 más. Si su amigo Pedro tiene el doble que él y su amigo Fernando el triplo de los que tiene Carlos, ¿cómo expresarías los boliches que tiene Pedro y los que tiene Carlos?

Carlos tiene .... boliches.
Pedro tiene .... boliches.
Fernando tiene .... boliches.

FICHA 8

¿Cómo expresarías con signos, letras y números las expresiones siguientes:

a) Un número cualquiera.

b) El doble de un número.

c) El triplo de un número cualquiera.

d) La mitad de un número.

e) La suma de dos números distintos.

f) La suma de tres números distintos cualesquiera?

FICHA 9

¿Cómo expresarías con signos, letras y números las expresiones siguientes:

a) El doble de **m.**

b) El cuadrado de **z.**

c) El triple de **x.**

d) La tercera parte del número **f.**

e) El producto de **a, b y c.**

f) El número siguiente a **g.**

g) El número anterior a **h.**

h) El número posterior a **j.**

i) El triple del cuadrado de **b.**

j) El número que representa 50 unidades menos que el número **d.**

k) El doble de **x** más cuatro por 7 más **n.**

l) El cuadrado de **x** más 6, todo por 7 más **n.**

m) **n** más cuatro, todo por **z** más dos.

n) **x** al cuadrado más **y** por 7 más **m**?

FICHA 10

ESCRIBE LAS OPERACIONES SIGUIENTES EN EL LENGUAJE ALGEBRAICO.

a) El triple de la suma de **a** y **b.**

b) El doble de la diferencia entre **h** e **y.**

c) El cuadrado de la suma de **x** e **y**.

d) El triple del cuadrado de **b.**

e) El producto de **x** por la suma de **a** y **b.**

f) El triple de la diferencia entre **b** y **c.**

FICHA 11

¿Cómo expresarías con signos, letras y números las expresiones siguientes:

a) La suma de dos números distintos es igual a 10.

b) El triplo de un número más 5 es igual a 17.

c) El doble de un número más el doble del mismo número es igual a 24.

d) La suma de un número más el doble del mismo número es igual a 24.

e) El precio de m kilogramos de manzanas a y pesetas el kg.

f) El precio de x kilogramos de papas a 120 pesetas el kg.

g) El precio de v cintas de vídeo a 2500 pesetas cada una.

h) Lo que cuesta una pelota, si 3 cuestan p pesetas.

i) La finca de Paco tiene 200 m^2 más que la de Pepe y la de Blas tiene 200 m^2 menos que la de Paco?

FICHA 12

¿Cómo expresarías con signos, letras y números las expresiones siguientes:

a) Juan tiene ocho caramelos más que Jaime.

b) Miguel tiene el doble de caramelos que Ana.

c) Pepe tiene la mitad de dinero que Antonio y Luis el doble que Antonio.

d) Tres hermanos tiene unas cantidades de dinero. María tiene 50 pesetas más que Miguel y Pablo tiene el doble que los otros dos juntos.

e) Juan tiene el triplo de edad que su hijo Antonio.

f) Miguel fue a clase el doble de días que Carlos, y Fátima el triplo de Miguel.

g) En la clase de Matemáticas Juan hizo tres ejercicios más que Maribel y Sandra un tercio de Juan?

h) Al final de una partida de boliches, Pepe tiene tres boliches más que Luis, y Sara la mitad de Pepe.

¿Cuál de los tres tiene más? ....

¿Por qué?

FICHA 13

1. ¿Cómo expresarías con signos?

a) La edad de Juan es el doble de la edad de Pedro y la suma de ambas es 30 años.

b) El triplo del peso de un deportista menos 5 kilogramos es igual a 160 kilogramos.

c) La suma del área de un rectángulo con la de otro cuya área es el doble de la del primero y juntas miden 24 centímetros cuadrados.

2. ¿Cómo expresarías con signos, letras y números las expresiones siguientes:

a) El chófer de un colegio hizo “n” viajes en un día, transportando 50 niños en cada viaje. ¿Cómo expresarías el número total de niños que transportó ese día?

b) El dueño de un estanco vende 135 periódicos cada día, ¿cómo expresarías el número total de periódicos vendidos en dos semanas (14 días)?

c) La entrada de un cine vale 175 pesetas, ¿cómo expresarías el gasto de un niño que ha ido 5 veces a ese cine?

d) La ”paga” que da un padre a un niño es de “p” pesetas, ¿cómo expresarías el dinero que reúne ese niño durante 6 semanas?

FICHA 14

Completa el siguiente cuadro de edades, suponiendo que actualmente Pedro tiene doble edad que Sergio, Marta tiene ocho años más que Pedro y Toni tiene doce menos que la suma de las edades de Marta y Sergio.

	Pedro	Toni	Marta	Sergio
Edad Actual				X
Edad dentro de una década				

FICHA 15

1. Calcula y reduce, cuando sea posible, las siguientes expresiones:

a) $4 + 3y =$

b) $3a - (b - c) =$

c) $a + a + 3b + 5a =$

d) $5y - 2t =$

e) $(a - b) + b =$

f) $3a - b + a =$

g) $3a + (b + a) =$

h) $(a + b) + b =$

i) $(a - b + c) + (b - a) =$

j) $(a + b) + (a - b) =$

k) $(2a + b) - b =$

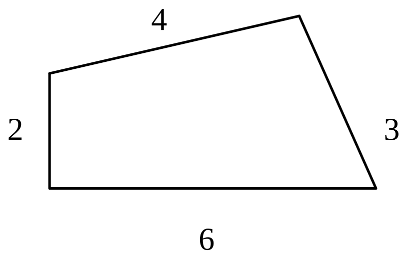
l) $5a + (b + a) =$

m) $(2x + y) - (x - y) =$

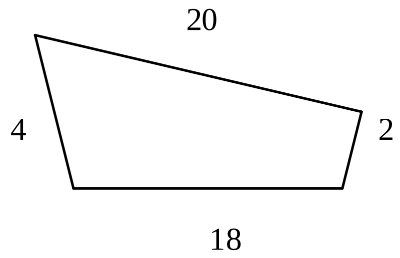
n) $(x + y) + (x - y) =$

o) $2x + (x - y) =$

1.



El perímetro de esta figura
es igual a 6 + 3 + 4 + 2, es decir,
igual a 15.



Calcula el perímetro de esta figura.

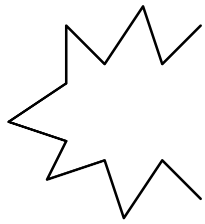
P = ...

2. Parte de esta figura no está dibujada.

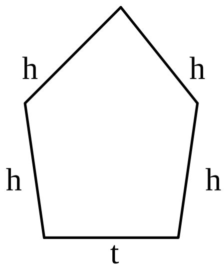
Hay n lados en total, todos de longitud 2.

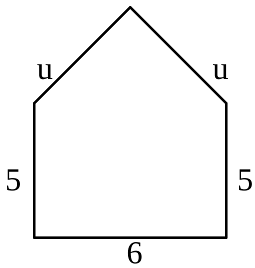
Halla su perímetro.

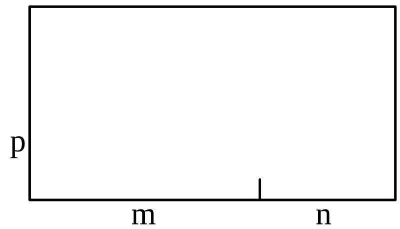
P = ...



3. ¿Cómo expresarías el perímetro de cada una de las siguientes figuras?







Perímetro = ______ Perímetro = _______ Perímetro =

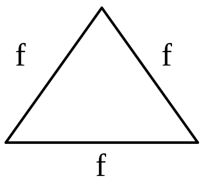
FICHA 17

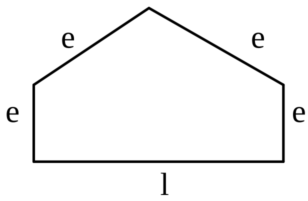
1. Calcula el perímetro de las siguientes figuras:

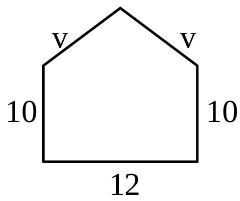
a)

Perímetro =

b)

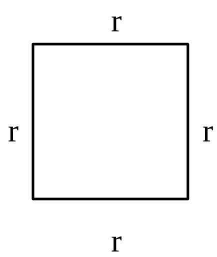






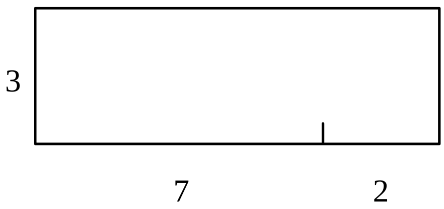
P = ...   P = ...   P = ...

c)



Perímetro =

d)



Perímetro =

FICHA 18

En las fichas anteriores, si recuerdas, has utilizado números, letras, figuras de geometría...

AHORA VAMOS A INTENTAR QUE SE RELACIONEN:

- LA SEÑORA ÁLGEBRA (..... letras .....)

- LA SEÑORA ARITMÉTICA (.... números ....)

- LA SEÑORA GEOMETRÍA (.... figuras .....)

Y para ello, REPRESENTAREMOS, CON ELEMENTOS GEOMÉTRICOS, los números, las letras, las fórmulas, etc.

Para que sea más fácil nos vamos a poner de acuerdo sobre algunas situaciones:

1) CUANDO TE ENCUENTRES UN NÚMERO SOLO, TE VAS A IMAGINAR QUE ES UN PRODUCTO QUE TE ENCUENTRAS POR LA UNIDAD.

Ejemplo: Si tienes un "3", es lo mismo que: 3 x 1 ó 1 x 3.

ACTIVIDAD 1: Rellena los "cuadritos" en:

a) 2 = 2 x $\square$ = $\square$ x 2

b) 6 = 6 x $\square$ = $\square$ x 6

2) CUANDO TE ENCUENTRES CON UNA LETRA SOLA, TE VAS A IMAGINAR QUE ES UN PRODUCTO DE LA LETRA QUE TE ENCUENTRES POR LA UNIDAD.

Ejemplo: "a" es lo mismo que a x 1 ó que 1 x a.

ACTIVIDAD 2: Rellena los "cuadritos" en :

a) x = $\square$. = . $\square$

b) y = . $\square$ = $\square$.

NOTA: Utilizamos "." como símbolo de multiplicar para no confundirnos con la "x".

Ahora vamos a dar un paso más:

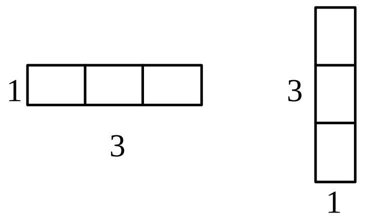
3) CADA VEZ QUE APARECE UN NÚMERO SOLO O UNA LETRA SOLA, LA REPRESENTAREMOS POR UN RECTÁNGULO.

Ejemplo: 3

Por el primer acuerdo (FICHA 5):

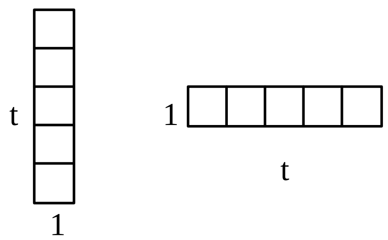
$3 = 3 . 1 = 1 . 3$

QUEDARÍA REPRESENTADO ASÍ:



Ejemplo: t

Por el segundo acuerdo (FICHA 5):



1. Representa con rectángulos:

a) 2　　　　b) x

2. Representa con rectángulos:

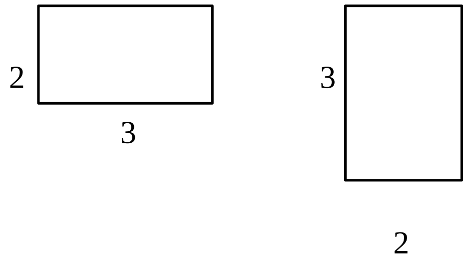
a) y　　　　b) 6

FICHA 20

Representar mediante rectángulos: a) 2 . 3 y
b) z . t, se haría así:

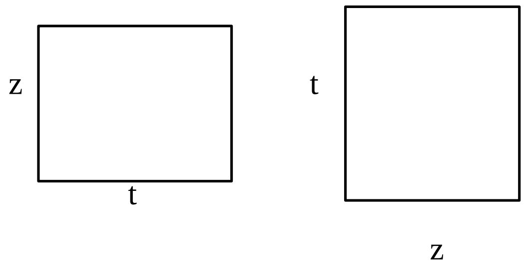
a) 2 . 3

Solución:



b) z . t

Solución:



Seguro que ya sabes REPRESENTAR LAS EXPRESIONES O PRODUCTOS CUANDO NO APARECEN UNOS. ¡INTÉNTALO!.

ACTIVIDAD 1: Representa

3 . x

ACTIVIDAD 2: Representa

a) 4 . b b) 4 + b

¿Son iguales? ¿Por qué?

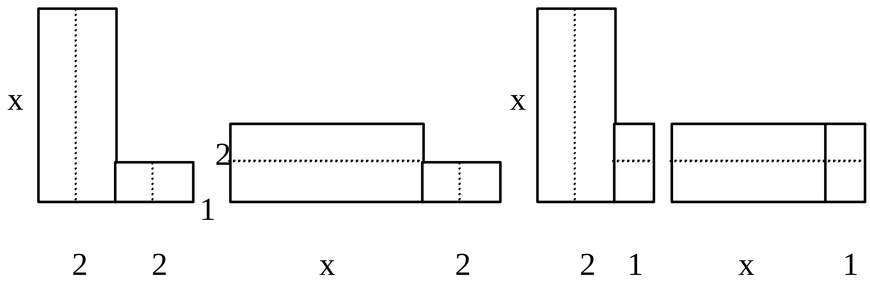
SEGUIMOS ADELANTE

Vamos a REPRESENTAR:

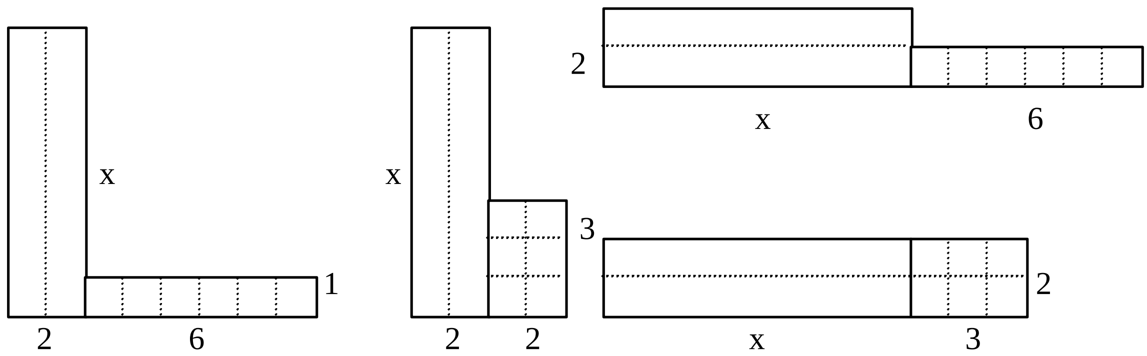
a) $2 \cdot x + 2$ b) $2 \cdot x + 6$

Nos quedaría:

a) $2 \cdot x + 2 = 2 \cdot x + 2 \cdot 1$



b) $2 \cdot x + 6 = 2 \cdot x + 6 \cdot 1$



1. INTENTA TÚ REPRESENTAR DE TODAS LAS FORMAS POSIBLES:

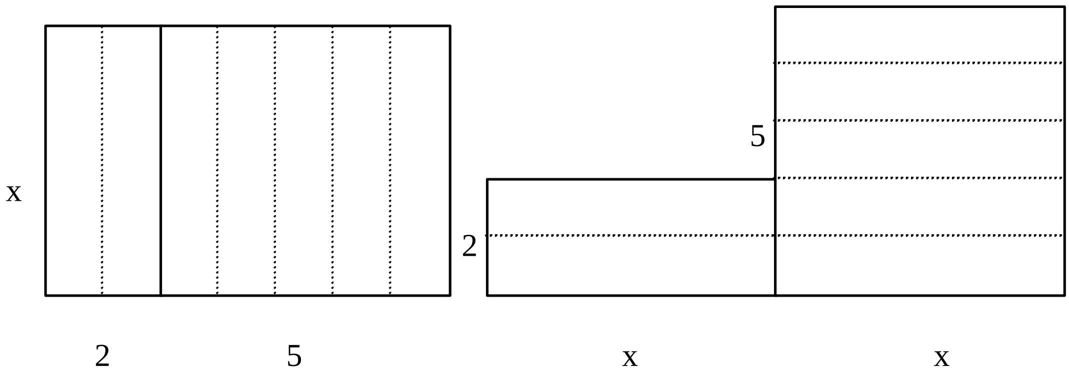
c) $3 + 4 \cdot y$ d) $6 \cdot y + 3$

FICHA 22

ACTIVIDAD 1: INTENTA REPRESENTAR

a) 2 . x + 3 . x b) 2 . x + 3 . y c) 2 . x + 7

observando que 2 . x + 5 . x, quedaría representado:



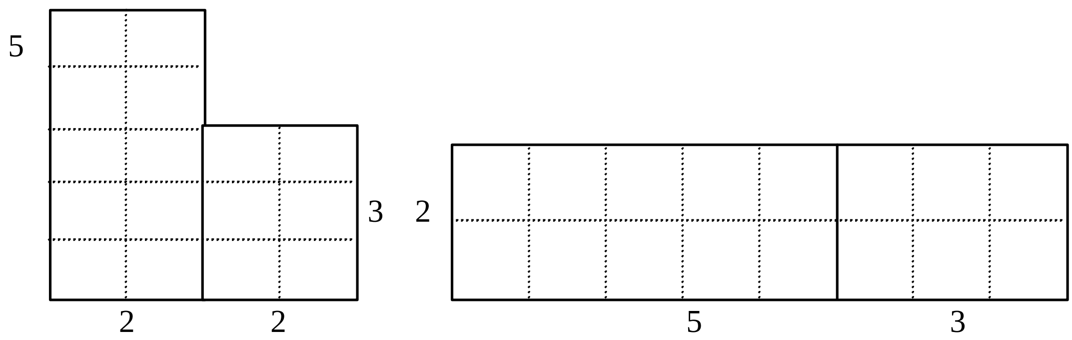
a) 2 . x + 3 . x

b) 2 . x + 3 . y

c) 2 . x + 7

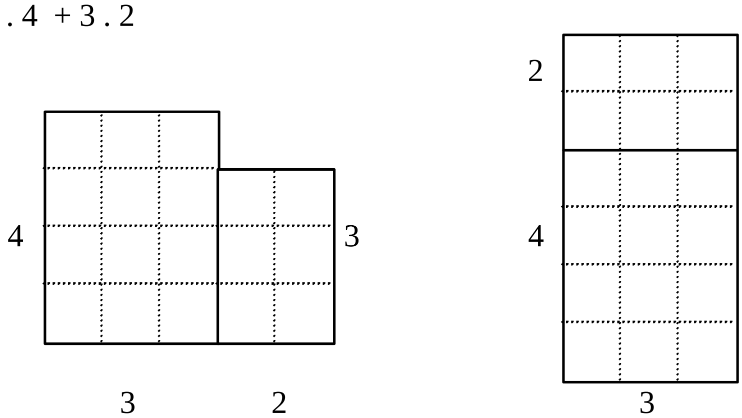
PODEMOS DECIR ENTONCES QUE SIEMPRE QUE LA REPRESENTACIÓN DE UNA SUMA O UNA DIFERENCIA SE PUEDA REPRESENTAR CON UN ÚNICO RECTÁNGULO ES POSIBLE TRANSFORMARLA EN UN PRODUCTO. EN ESE CASO DIREMOS QUE HEMOS SACADO FACTOR COMÚN.

1. Observa las representaciones de 2 x 5 + 2 x 3 y 3 x 4 + 3 x 2.



$2 . 5 + 2 . 3 = 2 . (5 + 3)$ Factor común = 2

$3 . 4 + 3 . 2$



$3 . 4 + 3 . 2 = 3 . (4 + 2)$ Factor común = 3

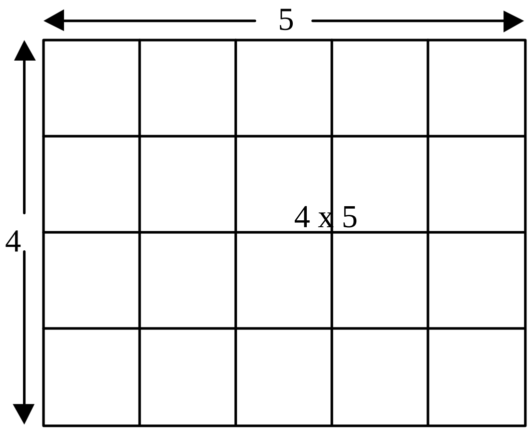
2. Representa 2x + 2y.

FICHA 24

Saca factor común en la siguiente expresión: $6x + 3y$.

FICHA 25

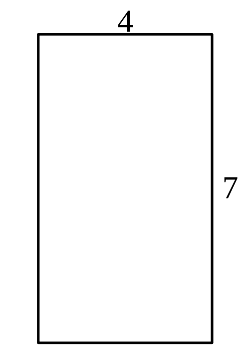
Recuerda que 4 x 5 podemos representarlo como el área del rectángulo de dimensiones 4 y 5, es decir,



¿Cómo podrás representar a x 4?, y ¿a x b?

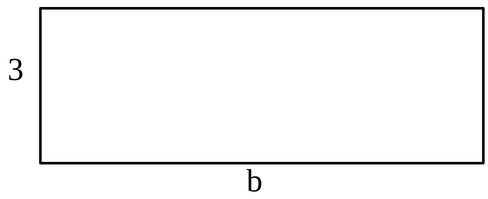
Calcula el área de las figuras siguientes:

a)



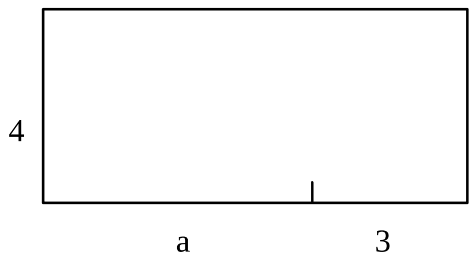
A =

b)



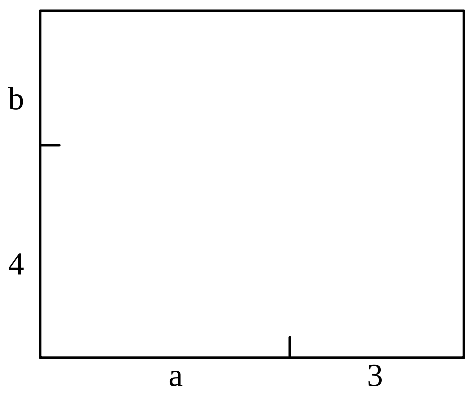
A =

c)



A =

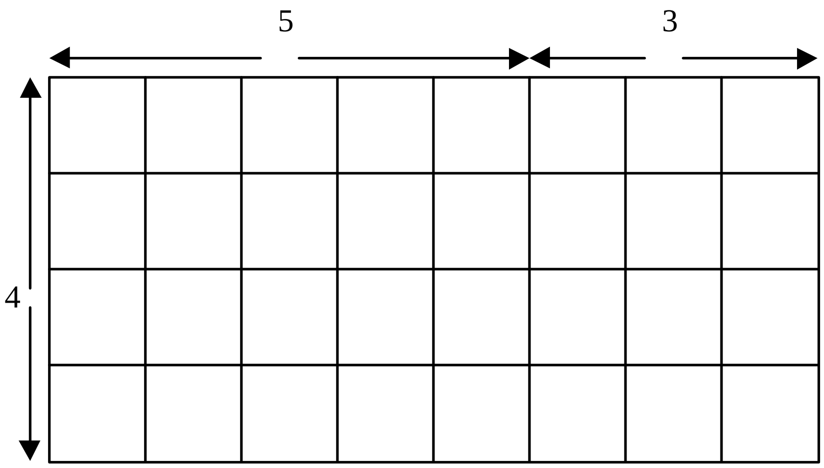
d)



A =

ACTIVIDAD 1:

Teniendo en cuenta lo que se ha hecho en los ejercicios anteriores, observa que 4 x (5 + 3) se puede representar gráficamente, así:



y más esquemáticamente:

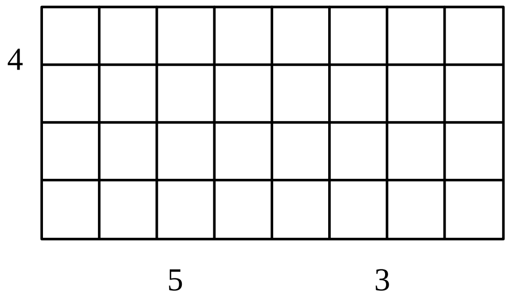
x	5	3
4	4 x 5	4 x 3

ESTE ÚLTIMO ESQUEMA QUE HEMOS PUESTO ES UN CUADRO DE DOBLE ENTRADA.

FICHA 28

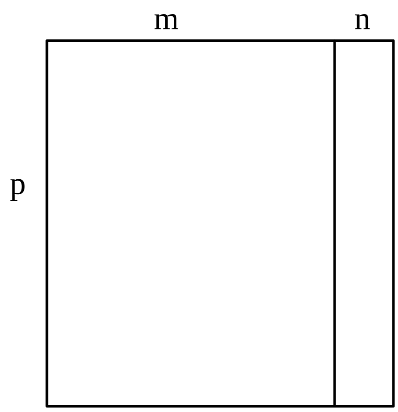
Vamos a representar varios productos cuyos factores son los expresados a continuación.

a) (5 + 3) . 4



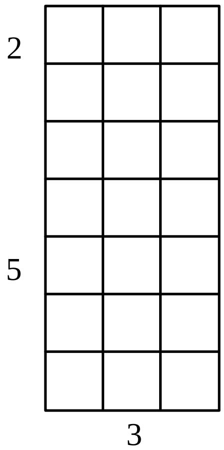
$(5 + 3) . 4 = 5 . 4 + 3 . 4$

b) (m + n) . p



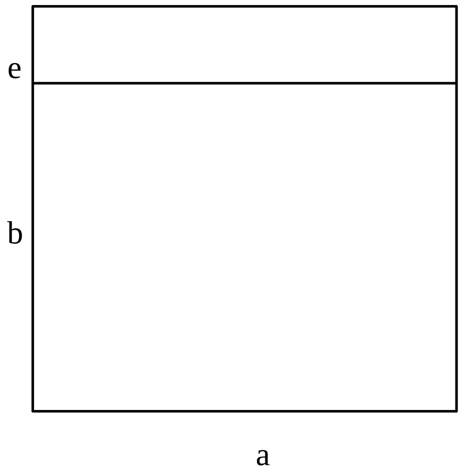
$(m + n) . p = m . p + n . p$

c) 3 . (5 + 2)



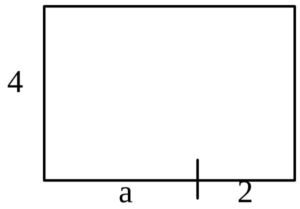
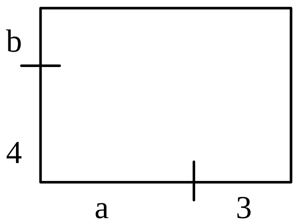
$3 . (5 + 2) = 3 . 5 + 3 . 2$

c) a . (b + c)

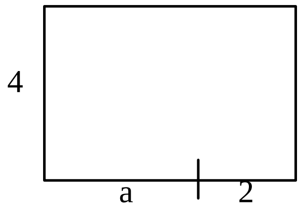


$a . (b + c) = a . b + a . c$

FICHA 29

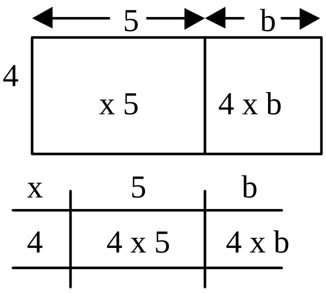
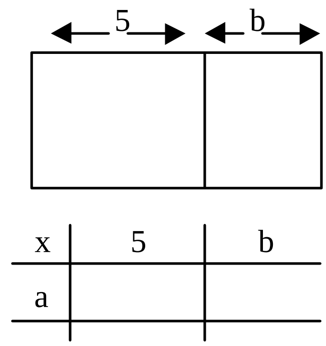
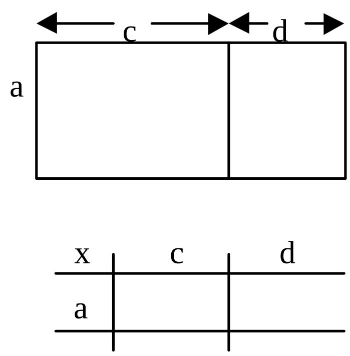
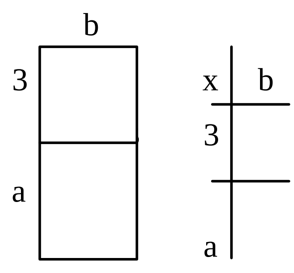
MODELO GEOMÉTRICO	VISUALIZACIÓN SIMPLIFICADA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
	$\begin{array}{c\|c\|c} \text{x} & \text{a} & 2 \\ \hline 4 & 4 \text{ x } \text{a} & 4 \text{ x } 2 \end{array}$	4 x (a + 2) = 4 x a + 4 x 2
	$\begin{array}{c\|c\|c} \text{x} & \text{a} & 5 \\ \hline 6 & 6 \text{ x } \text{a} & 6 \text{ x } 5 \end{array}$	
		
		4 x a + 8

FECHA 30

MODELO GEOMÉTRICO	VISUALIZACIÓN SIMPLIFICADA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
	x	a	2 4	4 x a	4 x 2	4 x (a + 2) = 4 x a + 4 x 2

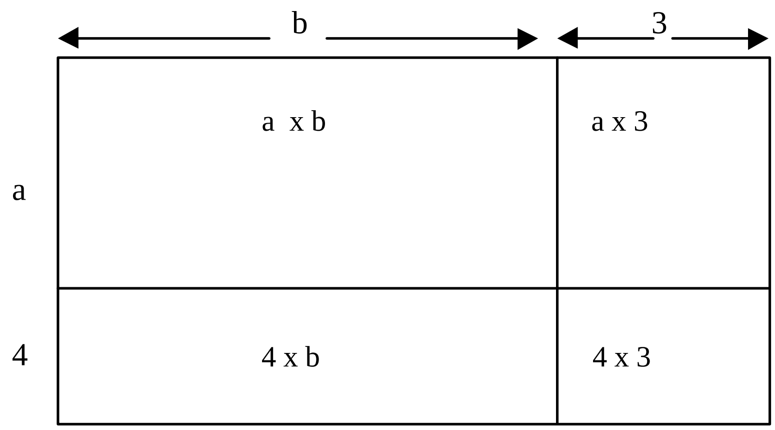
Representar (a + 5) b; (x + 3) 2; (y + c) 3, mediante rectángulos y utilizar un cuadro de doble entrada como el de la actividad 1 de la Ficha 28.

¿Cómo calcularías 4 x (5 + b)? Completa el cuadro siguiente:

4 x (5 + 6)		4 x (5 + b) = 4 x 5 + 4 x b
a x (5 + b)		a x (5 + b) =
a x (c + d)		a x (c + d) = = a x c + a x d
(3 + a) b		(3 + a) b = = (3 x b) + (a x b)

FICHA 32

Observa que (a + 4) x (b + 3) lo podríamos representar gráficamente



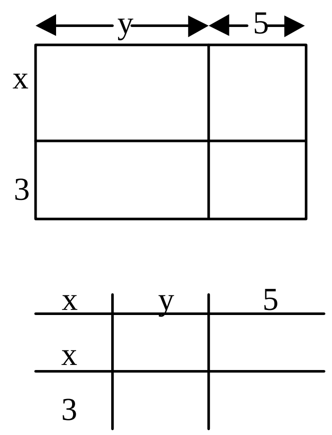
Resolviendo los productos de las expresiones entre paréntesis, podemos escribir

(a + 4) x (b + 3) = a x b + a x 3 + 4 x b + 4 x 3

que podemos esquematizarlo:

x	b	3
a	a x b	a x 3
4	4 x b	4 x 3

Completa las actividades del cuadro siguiente:

<table>
<tr>
<td>(x + 3) x (y + 5)</td>
<td>
</td>
<td>(x + 3) x (y + 5) =
x . 5 + x . y + 3 . y + 3 . 5</td>
</tr>
</table>

FICHA 33

1. Completa las actividades del cuadro siguiente:

$(3 + a)\ (4 + x)$		$(3 + a)(4 + a) =$
$(x + y)(a + b)$		$(x + y)(a + b) =$

2. Efectúa:

a) $(a + 3)(x + 2)$

b) $(y + 4)(y + 5)$

c) $2y + 3)(3y + 4)$

FICHA 34

a) ¿Cuál es el área de un cuadrado de **g** metros de lado?

b) ¿Cuáles son el perímetro y el área de un cuadrado de **t** metros de lado?

c) ¿Cuáles son el perímetro y el área de un rectángulo de **y** metros de largo y **x** metros de ancho?

d) Expresa la base, la altura, el perímetro y el área de un rectángulo cuya base exceda en 5 unidades a la altura.

e) Expresa la base, la altura, el perímetro y el área de un rectángulo cuya base y altura difieren en 10 unidades.

FICHA 35

1. Calcula y reduce, cuando sea posible las siguientes expresiones:

a) $(x + y) . 3 =$

b) $(2a + b) . 3 =$

c) $x . (y + x) =$

d) $4 . (a + b) =$

e) $3 . (4a + b) =$

f) $(x + y) (x + y) =$

FICHA 36

1. Completa la siguiente tabla:

a	**b**	**3a + b**	**2 (a + b)**	**(a + b) 3**
4	**5**			
1	**3**			
20	**4**			
10	**2**			

2. Completa la tabla siguiente:

a	**(3 + a)**	**(3 – a)**	**(3 + a) (3 – a)**
4			
1			
10			

FICHA 37

1. a) ¿En qué se transforma a + 4, si a = 2?

b) ¿En qué se transforma 4a, si a = 2?

c) ¿En qué se transforma 5a - 3, si a = 3?

d) ¿En qué se transforma 5b + 2a, si a = 3 y b = 4?

2. Rellena los vacíos como se indica en el primer apartado de cada columna:

x	x + 3	x	7x	x	5x + 3
6	....	2	....	x	....
n	....	x	....	x	....
b + 2....	....	x	....	x	....

FICHA 38

1. a) Si **a = 2b**, ¿en qué se transforma **5a + 3**?

b) Si **a = b + 3**, ¿en qué se transforma **5a + 3b**?

c) Si **a = 2b**, ¿en qué se transforma **(a + 3) (3 – a)**?

d) Si **a = 2, b = 8, c = 3**, ¿en qué se transforma **a (b – c)**?

e) Si **a = 3**, ¿en qué se transforma **5a - 3**?

f) Si **a = 3, b = 7, c = 2**, ¿en qué se transforma **a – b – c**?

2. Hallar :

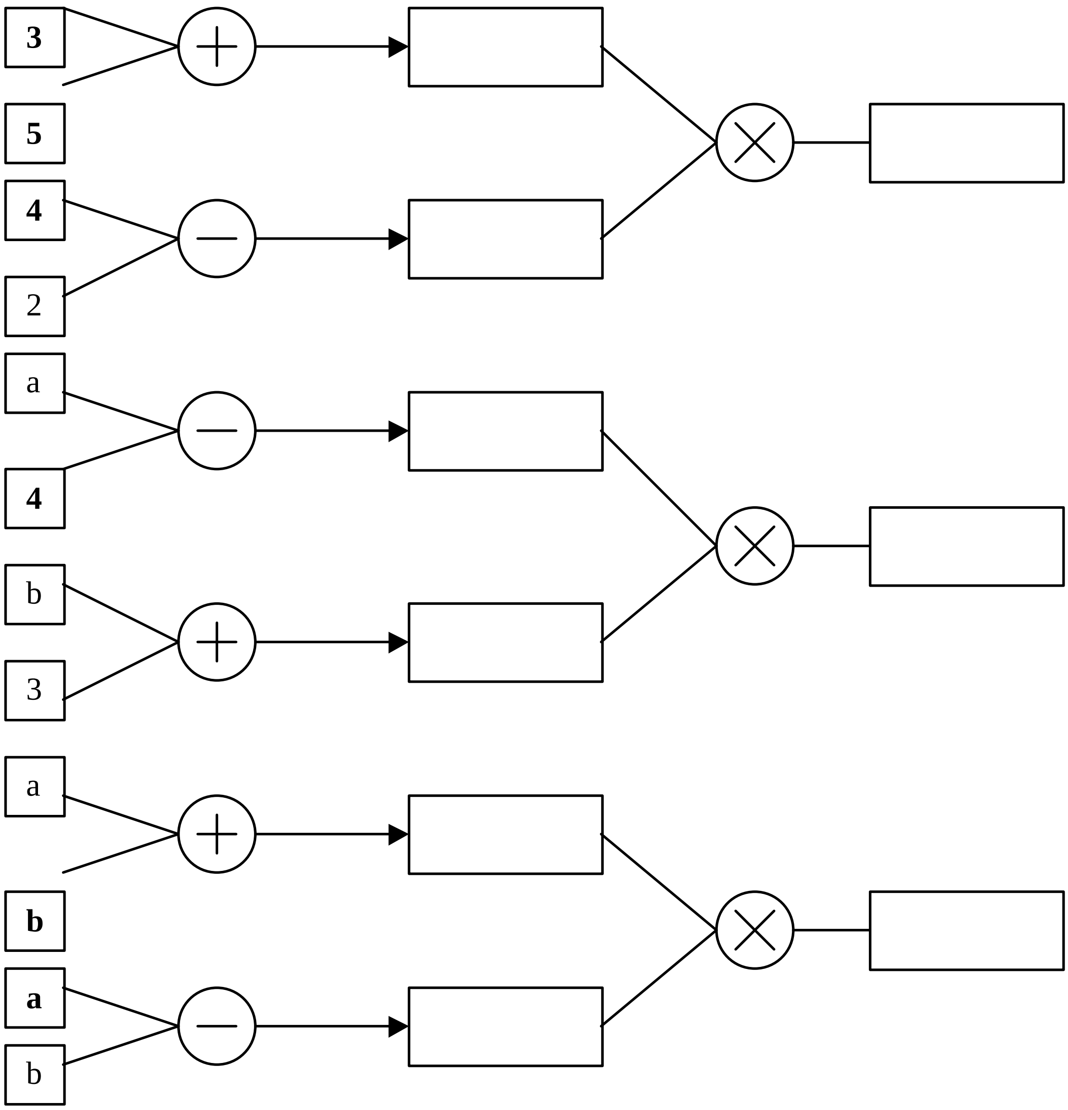
a) u, si u = v + 3
y
v = 1

b) r, si r = s + t
y
r + s + t = 30

1. En cada caso halla las situaciones que se hacen para pasar de las expresiones de las columnas A a la B. (Puede haber más de una posibilidad).

A	B
a) $5x - 17$	$5(y + 1) - 17$
b) $6x + 8$	$3y + 8$
c) $2x \cdot 3y - z$	$6 \times p$
d) $e(j + z)$	$(j + z)(f - 2)$
e) $21 \cdot 7m + 8$	$14m + 8$
f) $2 + 10(p + 20)$	$2 + 10q$
g) $a(2b + 6)$	$a d + c$
h) $r - (z + t)$	$a - b - c$
i) $v x$	$h r h v$
j) $(a + b)^2$	$(3x + 5q)^2$
k) $x(y + 2t)$	$x y + x z$

1. Completa los siguientes diagramas:



FICHA 41

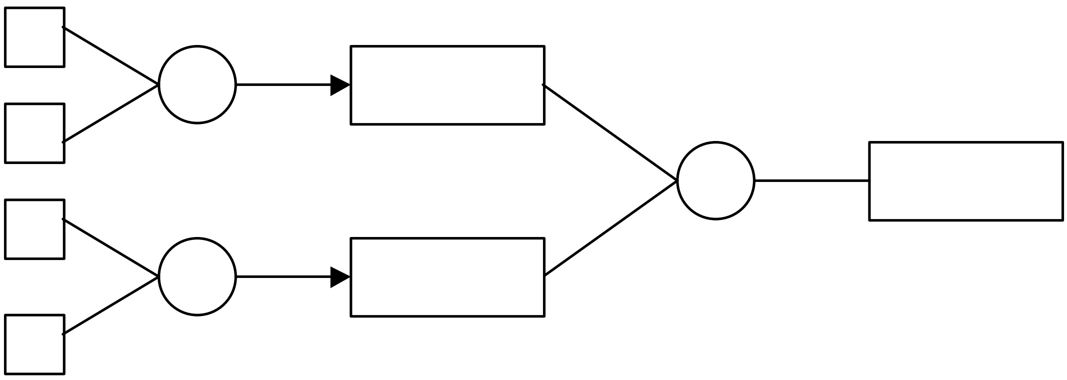
1. ¿Cuál sería el resultado de (a + b) (a – b), si:

$a = x^2$

y

$b = 2y$?

¿Cómo lo harías sobre este diagrama?



ANEXO 13, parte 2ª a

Ampliación

1. Realiza las siguientes operaciones:

1	a)	(+5) + (-20)	=
2	b)	(- 2) . (-3)	=
3	c)	(-2) , (+5)	=
4	d)	(+24) : (-6)	=
5	e)	(4) - (+2)	=
6	f)	(+2) - (-3)	=
7	g)	(-9) + 3	=
8	h)	-5 + (- 8)	=
9	y)	-9 - (- 6)	=
1	j)	-4 + (-3) - (-2) =	

8. Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible hacerlo correctamente.

3	a)	(3+5)+4	=
3	b)	(5 + 4) - 3	=
3	c)	4 . 2 - (5 + 2)	=
3	d)	5 - (3 - 1)	=
3	e)	(3 - 2) + 2	=
3	f)	5 - (6 + 7) + 4 =	
3	g)	3 - (6 - 2) +(- 5 + 4) + 1 =	
3	h)	6 (7 + 5) - (- 8 + 4) =	

ANEXO 13, parte 2^a b

3. Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible hacerlo correctamente.

$\boxed{14}$ a) $6 (b + a) =$

$\boxed{15}$ b) $(a + 2) 3 =$

$\boxed{16}$ c) $x (y - x) =$

$\boxed{17}$ d) $3 (a - 5) - 5 (a + 2) =$

$\boxed{18}$ e) $(a + b)(m + 3) =$

$\boxed{19}$ f) $a (3 a + b) + b (2a - b) =$

9. Calcula y reduce, cuando sea posible, las expresiones siguientes:

$\boxed{40}$ a) $a + a + 3b + 5a =$

$\boxed{41}$ b) $4 + 3 y =$

$\boxed{42}$ c) $(a - b) + b =$

$\boxed{43}$ d) $3 a -(b - 2 a) =$

$\boxed{44}$ e) $5 a -(b - a + c)$

$\boxed{45}$ f) $5 a - (b - a + c)$

$\boxed{46}$ g) $b + (a +b) =$

$\boxed{47}$ h) $(a - b + c) - (b- a + c) =$

<u>ANEXO 13, parte 2ª c</u>

1. Realiza las siguientes operaciones:

a) -4+(-3)-(-2) =

b) 3 - (4+5) +2 =

c) 2 - 4 - (-3+2) - 3 + 1 =

d) 3 (2 + 4) - (-3) + 2 =

e) 4 - (11-2) + 3 - (5 - 6) 2 =

f) (4+3) + (4-3) =

2. Calcula y reduce, cuando sea posible, las expresiones siguientes:

a) a + 2 a + 3 b + b + 5 a =

b) 2 + 3x =

c) 3x - 2t =

d) 3 a - b + a =

e) (a - b) + b =

f) (a + b) + b =

g) 3 a - (b + a) =

h) 5 a + (b + a) =

i) (2 a + b) - b =

j) (3 x + y) - (x - y) =

k) 5h - (3g + 2h) =

l) (a + 2 b) + (2 a + b) + (3 a + b) =

m) 3 (a - 5) - 5 (a + 2) =

n) -2 a (3 a + b) + 3 b (2 a - b) =

3. ¿Cómo expresarías con signos, letras y números:

a) La suma de dos cantidades distintas de boliches.

b) El triple de la suma de dos números distintos,

c) El doble de un número menos 5 es igual a 17.

d) El cuádruplo, de un número más 2, es 28.

e) El cuádruplo de un número, más 6 es igual a 18.

f) El triplo, de un número más el doble del mismo número, es igual a 54.

g) El doble de 5 menos 4.

h) El número que representa 15 unidades menos que x.

i) Lo que cuesta una goma de borrar si 4 cuestan g pesetas.

j) El triplo de 3 más 2, menos 4.

k) El doble de un número más 8 es igual a 20.

l) El doble de la diferencia entre h e i.

m) El cuadrado de la suma de 3 y 5.

n) El cuadrado de la suma de x e y.

o) El precio de m tenis a 3500 pesetas cada uno.

p) El cuádruplo del número de videos de un club más 7 videos, son 39 videos.

q) Añadiendo 7 al triplo del doble de un número de boliches más 1, obtengo 34 boliches.

4. Cinco amigos han ido a tomar un refresco cada uno. Todos han tomado lo mismo. En total han pagado x pesetas. ¿Cómo expresas el valor de cada refresco?

5. a) ¿Cómo expresarías la edad de una madre y su hijo hoy y dentro de 12 años, sabiendo que actualmente la edad de ella es 10 veces la de su hijo? Puedes ayudarte de algún cuadro.

b) ¿Cuál es la expresión de la suma de sus edades actualmente?

c) ¿Cuál es la expresión del doble de la suma de sus edades dentro de 12años?

6. El fotógrafo de un colegio hizo f fotos en un día por grupos. Cada grupo tenía 22 alumnos.

a) ¿Cómo expresarías el número total de niños que fotografió ese día?

b) ¿Cómo expresarías el triplo de ese número de niños?

7. Jorge tiene un número de sellos que representaremos por a. Indica el número de sellos que tienen sus amigos:

a) Pepe tiene la mitad que Jorge.

b) Juan tiene cinco sellos menos que Jorge.

c) María tiene 100 sellos más que Jorge.

d) Julio tiene el doble que María y tres sellos más.

ANEXO 13, parte 2ª d

1. Efectúa

(2 a - 3) (4 - 2 b)

ANEXO 13, parte 2ª e

1. Efectúa:

(a + b + c) (c + d + 5)

ANEXO 13, parte 2ª f

1. Efectúa:

(a - b) (c - d)

ANEXO 13, parte 2ª g

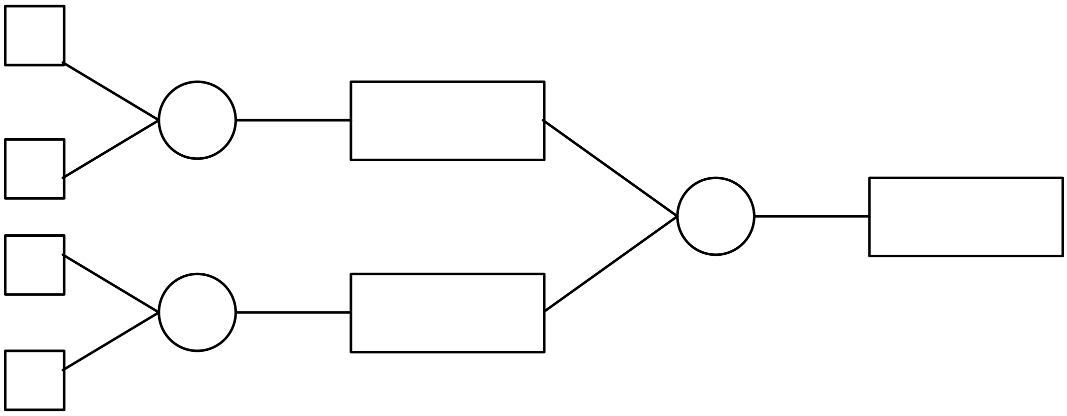
1. ¿Cuál sería el resultado de (a + b) (a - b), si:

$a = 3x$

y

$b = 2y$

2. ¿Cómo lo harías sobre este diagrama?



3. ¿Cuál sería el resultado de (a + b) (2a - b), si:

$a = x^2$

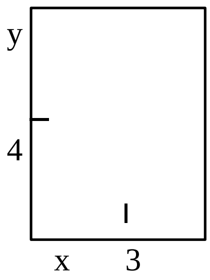
y

$b = 2y$?

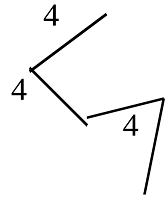
ANEXO 13, parte 2ª h

Ficha 41 bis, b

1. Calcula el perímetro de esta figura:

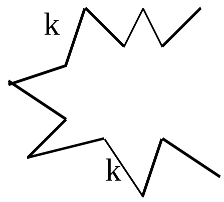


2. Parte de esta figura no está dibujada.
Hay n lados en total, todos de
longitud 4. Halla su perímetro.
P = ………………….



3. Parte de esta figura no está dibujada.

Hay n lados en total, todos de longitud k.



Halla su perímetro. P =

4. Calcula el área de la figura del ejercicio número 1.

5. Representa de todas las maneras posibles:
a) 3 + 2 y

b) 2 + 4 y

6. Saca factor común en las siguientes expresiones:
a) 6 x + 3 y

b) 2 x + 4 y + 6 x

7. Si a = 3 y, ¿en qué se transforma 7 a + 3?

8. Representa mediante un Modelo Geométrico, un cuadro de doble entrada y algebraicamente, la siguiente expresión:

$$(2 + x + y)(3 + 2x + y)$$

9. En cada caso halla las sustituciones que se hacen para pasar de las expresiones de las columnas A a la B. (Puede haber más de una posibilidad).

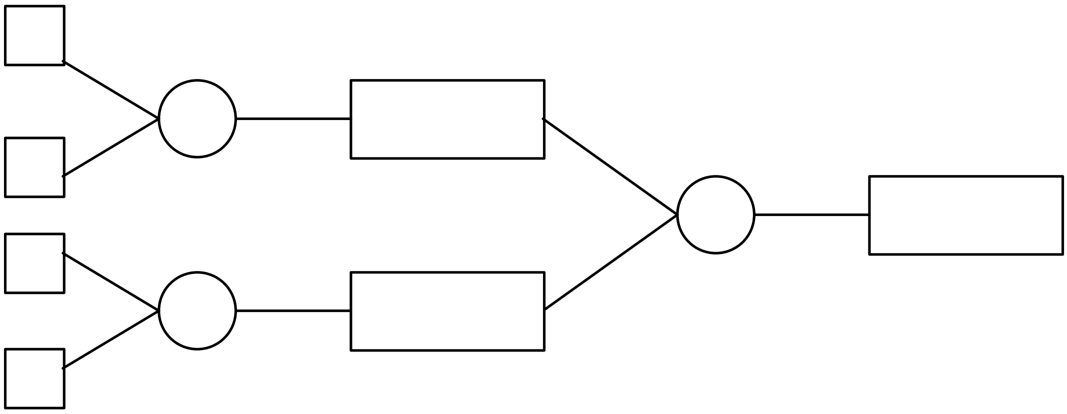
A	B
a) $5x - 17$	$5(y + 1) - 17$
b) $2 + 10(p + 20)$	$2 + 10q$
c) $a(2b + 6) + c$	$ad + c$
d) $r - (z + t)$	$a - b + c$
e) $x(y + 2t)$	$xy + xz$

10. a) ¿Cuál sería el resultado de (a + b) (2 a - b), si:
$a = x^2$

y

$b = 2y$?

¿Cómo lo harías sobre este diagrama?

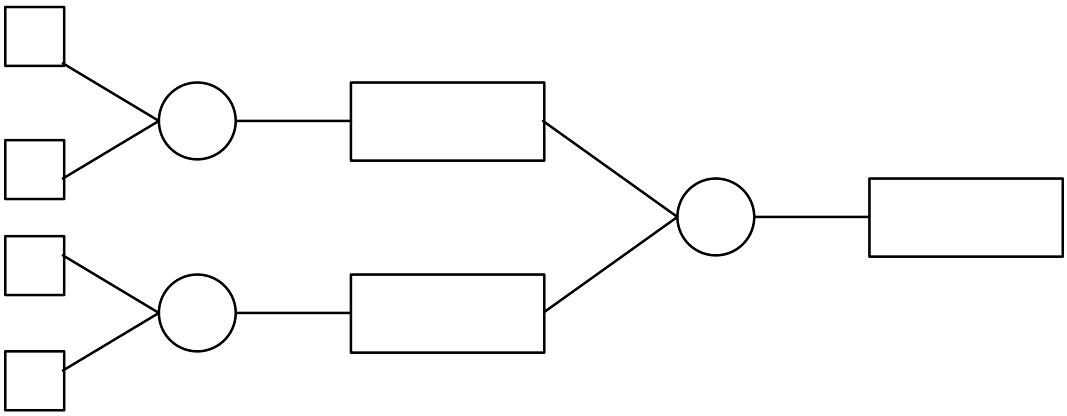


b) ¿Cuál sería el resultado de (2a + b) (a - b), si:
$a = x$

y

$b = 2y$?

¿Cómo lo harías sobre este diagrama?



c) ¿Cuál sería el resultado de (2 a + b) (2 a - b), si: "$a = x^2$" y "$b = 2y$"?

ANEXO 14

14.0 Protocolos Sesión Audio 0.

1. Calcula y reduce, cuando sea posible, las siguientes expresiones:

a) $4 + 3y =$

b) $3a - (b - c) =$

c) $a + a + 3b + 5a =$

d) $5y - 2t =$

e) $(a - b) + b =$

f) $3a - b + a =$

g) $3a - (b + a) =$

h) $(a + b) + b =$

i) $(a - b + c) + (b - a) =$

j) $(a + b) + (a - b) =$

k) $(2a + b) - b =$

l) $5a + (b + a) =$

m) $(2x + y) - (x - y)$

n) $(x + y) + (x - y) =$

o) $2x + (x - y) =$

14.1 Protocolos Sesión Audio 1.

1. Realiza las siguientes operaciones:

a) -4+(-3)-(-2) =

b) 3 - (4+5) +2 =

c) 2 - 4 - (-3+2) - 3 + 1 =

d) 3 (2 + 4) - (-3) + 2 =

e) 4 - (11-2) + 3 - (5 - 6) 2 =

f) (4+3) + (4-3) =

2. Calcula y reduce, cuando sea posible, las expresiones siguientes:

a) a + 2 a + 3 b + b + 5 a =

b) 2 + 3x =

c) 3x - 2t =

d) 3 a - b + a =

e) (a - b) + b =

f) (a + b) + b =

g) 3 a - (b + a) =

h) 5 a + (b + a) =

i) (2 a + b) - b =

j) (3 x + y) - (x - y) =

k) 5h - (3g + 2h) =

l) (a + 2 b) + (2 a + b) + (3 a + b) =

m) 3 (a - 5) - 5 (a + 2) =

n) -2 a (3 a + b) + 3 b (2 a - b) =

3. ¿Cómo expresarías con signos, letras y números:

a) La suma de dos cantidades distintas de boliches.

b) El triple de la suma de dos números distintos,

c) El doble de un número menos 5 es igual a 17.

d) El cuádruplo, de un número más 2, es 28.

e) El cuádruplo de un número, más 6 es igual a 18.

f) El triplo, de un número más el doble del mismo número, es igual a 54.

g) El doble de 5 menos 4.

h) El número que representa 15 unidades menos que x.

i) Lo que cuesta una goma de borrar si 4 cuestan g pesetas.

j) El triplo de 3 más 2, menos 4.

k) El doble de un número más 8 es igual a 20.

l) El doble de la diferencia entre h e i.

14.2 Protocolos Sesión Audio 2.

3. ¿Cómo expresarías con signos, letras y números:

m) El cuadrado de la suma de 3 y 5.

n) El cuadrado de la suma de x e y.

o) El precio de m tenis a 3500 pesetas cada uno.

p) El cuádruplo del número de videos de un club más 7 videos, son 39 videos.

q) Añadiendo 7 al triplo del doble de un número de boliches más 1, obtengo 34 boliches.

4. Cinco amigos han ido a tomar un refresco cada uno. Todos han tomado lo mismo. En total han pagado x pesetas. ¿Cómo expresas el valor de cada refresco?

5. a) ¿Cómo expresarías la edad de una madre y su hijo hoy y dentro de 12 años, sabiendo que actualmente la edad de ella es 10 veces la de su hijo? Puedes ayudarte de algún cuadro.

b) ¿Cuál es la expresión de la suma de sus edades actualmente?

c) ¿Cuál es la expresión del doble de la suma de sus edades dentro de 12 años?

6. El fotógrafo de un colegio hizo f fotos en un día por grupos. Cada grupo tenía 22 alumnos.
a) ¿Cómo expresarías el número total de niños que fotografió ese día?

b) ¿Cómo expresarías el triplo de ese número de niños?

7. Jorge tiene un número de sellos que representaremos por a. Indica el número de sellos que tienen sus amigos:
a) Pepe tiene la mitad que Jorge.
b) Juan tiene cinco sellos menos que Jorge.
c) María tiene 100 sellos más que Jorge.
d) Julio tiene el doble que María y tres sellos más.

Actividades de las fichas 15, 16 y 17 del Cuaderno V.

14.3 Protocolos Sesión Audio 3.

Fichas 17, 18, 19 y 20 del Cuaderno V.

14.4 Protocolos Sesión Audio 4.

Fichas 20 y 21 del Cuaderno V.

ANEXO 15

15.0 TRANSCRIPCIONES DE LA SESIÓN AUDIO 0

(E: Entrevistadora; A: Alumno/a; As: Alumnos)

E: No se entretengan para que vayan... haciendo todo... Pensar sí pero entretenerse no está bien visto. Si les interesa hacer la conmutativa, presentar al final el resultado con el coeficiente delante...

A: ¿Seguimos otra... los que terminamos?

E: Sí... No, no la otra no, la que dejamos detrás. A ver si acaban ésa y lo que quedó pendiente de ayer. De la anterior también queda algo pendiente. Esa no... Si puedes...Cuando estén terminando la ficha 15... vuelvan a leer el enunciado. Calcula y reduce cuando sea posible, ojo, no a lo loco, cuando sea posible, las siguientes expresiones, o sea, para que no dejen operaciones que se pueden hacer sin terminar. Vamos a empezar...A ver, vamos a ver, ¿quién quiere dar como resultado, o sea, el resultado del ejercicio, del apartado a, el ejercicio 15 el apartado a? Fuerte para que lo oigan todos. A ver.

A: ...

E: Y van levantando la mano y van diciendo. El enunciado lo tenemos aquí 15a. A ver Tomás, ¿qué solución das tú?

A: 7y.

E: 7y. Otra solución o la misma; los otros que habían levantado la mano. A ver, Jonay.

A: 7y.

E: 7y. Ya tenemos dos. ¿Quién más?

A: ...

E: A ver, ¿quiénes tienen 7y? 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. Trece alumnos, ¿no? ¿Otra solución que hayan puesto alguno?

A ver ésta, Nayra.

A: 7.

E: 7. ¿Quiénes han puesto 7? ¿Sólo Nayra? ¿Quién más? ¿Qué otra solución hay? ¿Daida?

A: Yo lo dejé igual.

A: Yo también.

E: ¿Quiénes la dejaron igual? 1, 2, 3, 4... ¿4?

Los que han puesto 7y, a ver, por ejemplo, Coello, ¿por qué has puesto tú 7y?

A: Porque sumé tres más cuatro y da siete.

E: ¿Se pueden sumar esos dos términos..., que uno tiene letras y otro no tiene letra?

A: No.

E: a+3b, ¿se puede sumar 3x+y?, ¿se puede sumar 3x+7?, ¿se puede sumar? Están convencidos los que pusieron 7y que está mal, ¿o no?

A: Sí.

E: No... porque es que el término, decíamos que los términos hay que hacerlos según que haya signo más o menos fuera del paréntesis, pero esto si no tiene las mismás letras no se puede sumar. Entonces quedaría 4+3y que es la respuesta correcta, ¿de acuerdo? Así que no se despisten. Luego, estos 13 se equivocaron.

¿Qué pasó Nayra con ese 7? ¿Cogiste la *y* y la mandaste de paseo? ¿Qué pasó? ¿Por qué pusiste tú 7 y te olvidaste de la letra? Porque te olvidaste o porque te creíste que no la tenías que poner, o porque le diste un valor.

A: Me creí que no la tenía que poner.

E: ¿Cómo?

A: Me creí que no la tenía que poner.
E: Porque te creíste que no la tenías que poner, no porque le dieras el valor 1 a la y, por ejemplo, sino porque te creíste que no la tenías que poner. Bien, vale. Entonces la solución correcta es: 4 + 3y. Luego los que se equivocaron la tachan y lo ponen bien. ¿Está claro ya? Espero que les sirva de experiencia para los demás ejercicios. A ver. El siguiente... para el apartado b, alguien que quiera decir la solución, levanten... la mano. A ver... ¿Almudena?
A: 3a-b + c.
3a.
-b.
E: -b.
A: -c.
E: -c.
A: +c, +c.
E: +c, ¿lo dejaste así?, vale. ¿Alguien más que haya puesto esa solución? Bastantes, ¡no!, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 17, 18... prácticamente todos. ¿Alguien que no haya puesto esa solución?
A: Yo lo puse pero entre paréntesis.
E: ¿Cómo...? A ver.
A: 3a.
E: 3a.
A: menos.
E: menos.
A: entre paréntesis b + c.
E: b + c, ¿igual que estaba o cambiando lo que estaba?
A: Cambiando el signo de dentro.
E: ¡Claro! Si tú cambias, tienes que quitar el paréntesis. ¿Está claro? Porque si no, no lo cambias, si no lo dejas como está. Porque si tú ahora quitas el paréntesis aquí, ¿qué te quedaría?; -b-c, que no es lo que tienes escrito.
A: Ya.
E: ¿Te das cuenta? Luego la solución correcta sería ésa. Y es que como antes, no se puede hacer nada más. Porque no sabemos el valor de a, de b y de c. 3a-b+c. ¿Lo tenías bien Ruymán? ..¿sí?
A: Genial.
E: El siguiente. A ver..., soluciones para el siguiente, brazos arriba, así estamos con los brazos en alto. A ver, por ejemplo Cristo, ¿qué solución tienes ahí?
A: 7ª + 3b.
E: 7ª + 3b, ¿quiénes más tienen esa solución? ¿Alguien más tiene esa solución? ¿Alguien que tenga otra solución distinta o alguien que no tiene solución? ¿Todos tienen esa solución? ¿Todos lo tenían hecho? ¿Tú lo tenías, José Carlos?
A: No.
E: ¿Y por qué no lo dices? ¡Será tramposo!
A: Sí, lo tengo, lo que pasa es que lo tengo mal.
E: A ver..., si no lo dices, ¿cómo lo vas a averiguar? A ver, ¿qué tienes?
A: a al cuadrado.
E: a al cuadrado.
A: +3b.
E: +3b.
A: +5a.

E: +5a. ¿Qué significa una potencia, qué significa...?
A: ...
E: ¿Tú no tienes 4a?
A: Sí.
E: ¿Y por qué no lo habías dicho? ¡Mira qué fresco! ¿Alguien más tiene eso? ¿Qué significa una p...? Esto, ¿qué operación es? ..suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación,..., ¿qué operación es esa? ¿Una...? Multiplicación, ¿de qué? .., ¿multiplicación de qué?
A: De la a al cuadrado.
E: ¿De la a al cuadrado o de la a? ¿Qué significa a al cuadrado?
A: De la a.
E: De la a... ¿Y cómo expresarías tú eso... entonces... desarrollado... a al cuadrado? .. ¿ó 4 al cuadrado?, ¿ó 5 al cuadrado? ¿Cómo lo harías tú?
A: 5 por 5.
E: 5 por 5, ¿y al cuadrado?
A: a por a.
E: a por a..., ¿y eso es lo que dice el ejercicio: a por a?, ¿no? Date cuenta, de todas maneras esto es una potenciación, una operación de potenciación. Lo que pasa es que la potenciación es multiplicar... ¿no? .. tantas veces como indique el exponente, la base: a por a, o, a por a por a, o, a por... 4 veces... ¿está claro? ¿Está claro Tomás?
A: Sí.
E: Luego es: a + a, entonces si yo tengo a + a + 5ª + 3b, igual que ustedes agrupan los positivos y los negativos, ¿no? ¿Cómo se llaman estos términos que tienen las letras... y además de las letras iguales los grados iguales? ¿Las potencias iguales? ¿Los exponentes iguales? Perdón, ¿cómo se llaman?
A: Potencias.
E: ¿Cómo?
A: Potencias.
E: ¿Potencias? Potencias sería esto, ¿no? Pero, ¿estos términos que tienen la letra igual y elevado a lo mismo... cómo se llaman entre sí? ¿Términos qué...?
A: Paralelos.
E: Nooo... semejantes... Términos semejantes, que son los únicos que se pueden unir. Cuando yo digo a + a + 5a, que lo hicieron muchos bien, 7a, ¿qué propiedad he utilizado, Sara? Si en vez de poner a + a +... 5a, yo pongo 7a, como han puesto, ¿qué propiedad hemos utilizado ahí?
A: La distributiva.
E: ¿Distributiva? .. ¿Qué has separado tú ahí?, ¿distribuir qué? Cuando yo distribuyo los... cuadernillos, ¿eso es lo mismo que hemos hecho ahí?
A: No.
E: ¿Qué?, ¿qué propiedad es? ¿Qué propiedades te suenan a ti?
A: La asociativa.
E: Asociativa, ¿qué otras propiedades te suenan a ti? Has dicho la distributiva, asociativa...
A: La conmutativa.
E: Conmutativa..., ¿Y qué pasaba con la propiedad distributiva, qué condiciones tenía la propiedad distributiva? ¿Cuántas operaciones tenía que haber?
A: ...
E: División con respecto a suma, división con respecto a resta, multiplicación con respecto a

suma, multiplicación con respecto a resta, o sea, dos operaciones. Con una operación sola no hay distributiva, y ahí no hay sino una operación. No hay ni multiplicaciones ni divisiones con respecto a suma.
A: ...
E: ¿Está claro? Bueno, seguimos: 5y-2t, rápido David, ¿cuál es la solución?
A: ... 7... 7y...
E: ¿7y?
A: menos t.
E: ¿-t? ¿Esa es la solución para el apartado d?
A: No, no, no.
E: A ver, ¿alguien más ha puesto eso?
A: 5y... ¡ah!, eso no.
E: ¿Quién ha puesto eso? .. A ver, ¿otras soluciones que hayan puesto?
A: 5y-2t.
E: 5y-2t, ¿y a parte de esas dos hay alguna más?
A: Sí.
E: 5y-2t, ¿tú pusiste, Tomás?
A: 3y.
E: 3y, ¿y de dónde salió ese 3y?
A: De 5y menos, ... si le quitas...
E: Claro, pero no lo puedes poner porque esos dos términos tienen las letras distintas, y no son semejantes, ¿de acuerdo?, ¿te das cuenta? O sea, si fuera 5y-2y, sí sería 3y. 5y-2t, ¿está claro? Entonces éste es el mismo caso que, ¿cuál?, que, ¿cuál otro de la hoja?
A: Que el primero.
E: Que el primero, que la a, ¿no? No se puede hacer nada porque los términos no son semejantes. El siguiente, a ver, José Carlos.
A: ...
E: Pero, a ver, rapidito, venga sobre la marcha... ¿se puede quitar paréntesis, sin más, Jaime, se puede quitar paréntesis?
A: Sí.
E: ¿Sí? ¿Por qué?
A: ...
E: ¿Cómo?
Espera a ver, espera a ver. ¿Por qué se puede quitar ahí el paréntesis? No lo atorrollen, porque si... lo atorrollamos no se da cuenta.
A: Nada, ... porque, ... pues ... porque hay un más delante del paréntesis. ¿No?
E: ¡Claro! Porque no hay ningún menos delante del paréntesis, cuando no hay menos se supone que hay un más. Da lo mismo decir (3-5), que + (3-5), luego como no hay ningún más, ¿entonces cómo te quedó Zeben?
A: “Eh...”, me quedó a – b +... +b.
E: ¿Cuál es el resultado Coello?
A: No lo sé.
E: ¿Tomás?
A: Yo puse igual b.
E: ¿Igual b? ¿Por qué?
A: ...
E: ¿Por qué pusiste tú igual b?, a ver, ¿por qué lo pusiste?
A: Ya, ya lo sé.

E: ¿Por qué?
A: ...

E: Sí, pero dice que hay una -b y otra +b, ¿qué significaba el menos y el más?
A: Que se resta y da cero, ¿no?
E: ¿Y cómo se llaman esos términos que tienen -4, +4, -b, +b, -8, +8? ¿Cómo se llaman?
A: Términos semejantes.
E: ¿Se llaman? No te, ... no te entendí.
A: Lo que explicaste antes en la pizarra.
E: ¿Qué?, a ver, ¿cómo se llama -b, +b? .. ¿son semejantes? ..
A: No.
E: ¿Por qué no? Sí son semejantes, lo que tienen los coeficientes distintos, pero son términos semejantes, por eso se puede operar entre ellos. Son semejantes. Pero aparte, cuando uno es positivo y otro es negativo, ¿cómo se llama eso? .. ¿son de séptimo? ¿Cómo se llaman? .. -4, +4, -8, +8, -20, +20, ... Opuestos... El opuesto de +4, -4, el opuesto de -4, +4, ¿no? El opuesto de un número negativo es un número positivo y viceversa, ¿está claro? .. entonces, ¿cuál es el resultado?
A: a.
E: a.
¿Cuál es el resultado?
A: a.
E: ¿Por qué?
A: a, -b, +b... se tachan y quedan...
E: ¡Claro!, se va, se anula -b, +b y queda a. ¿Está claro Coello?, ¡ah! ¿Está claro Tomás? ... Bueno. ¿3 a – b + a Dayda?
A: 4a-b.
E: 4a-b, ¿quiénes tenían 4a-b? ¡Menos mal! ¿Y otras soluciones Jonay? ¿Qué tenías tú ahí?
A: 3a-b + a.
E: Sí, pero entonces no lo habías terminado, ¿no, Ruymán?
A: No lo tengo.
E: ¿No lo tienes?, ¿pero estás de acuerdo en que es 4a-b?
A: Sí.
E: ¿Estás de acuerdo?, ¿por qué?
A: “Eh...”...
E: Pero fuerte que te oigan todos. Y David se sienta mejor, ... además. ¡Venga!
A: Porque a la 3a se le suma la otra a.
E: ¿Y por qué se suman?, ¿por qué se puede sumar la otra a?
A: ...
E: ¿Por qué se puede sumar la otra a? .. Sí, 3a+a, ¿por qué se pueden sumar?
A: Porque son todos positivos.
E: Son todos positivos y además son semejantes. Hay que aprenderse palabras nuevas para que se note que, en fin, que están aprendiendo y trabajando, aunque siempre se dice: ¡Qué rollo!, ¡Qué follón!, que no sé qué, que no sé cuánto... y siempre dicen las mismas palabras. Hay que aprender palabras, que se note que ustedes están en un colegio y no están fuera en la calle. ¿Saben? En algo se tienen que distinguir. ¡Pero a veces son tan pocos aquí en el colegio y no aprenden nada! ¿Ustedes me dirán? .. El g... ahora ya, con lo que hemos visto anterior un minuto para que todo el mundo lo haga bien. A ver. El g. Pero los que lo tienen hecho lo revisan 3a-(b+a)... ¿David? ..

A: ...
E: No oigo nada, no oigo nada, nada. No, digo la señorita....., nada. ¡Está con la oreja así la pobre!
A:...
E: A ver, no importa, pero a ver, ¿cómo lo harías? .. rápido... ¿cómo lo harías?
A: 3a.
E: 3a.
A: “¡mm!””¡mm!”...
E: Sin miedo, no pasa nada, si te equivocas no pasa nada, ahora esto no es ningún examen, ¿3a?
A: “¡mm!””¡mm!”...
E: ¿Y por qué no las demás aes?
A: Yo no oí nada David.
E: ¡Ves!, ¡escucha!
A: 3a-b+a.
E: 3a-b+a. ¿Por qué -b+a? .. ¿porque está escrito ahí?
A: Cambia de signo.
E: ¿Cambia de signo? Y si cambia de signo, ¿quién tiene que cambiar de signo?, a ver,...
A: ...
E: Esta señorita que no volvió a oír... porque...
A: Lo que está dentro del paréntesis.
E: Lo que está dentro del paréntesis, y ¿por qué cambias la b y no cambias la a?, ¿sólo se cambia la b, Pedro? En el g, ¿qué se cambia? A ver, ¿Pedro?
A: El signo.
Lo que está dentro del paréntesis.
E: Pero, ¿todo, todo, todo?, todo lo que está dentro del paréntesis, no lo que está cerquita de la puerta del paréntesis. Todo lo que está dentro del paréntesis. ¿Cómo quedaría entonces, José Carlos?
A: 3a-b-a.
E: 3a-b-a, ¿de acuerdo David?, ¿Y Pedro?
A: Eso es...
E: 3a-b-a.
A: Pero...
E: 3a-b-a.
A: Sólo, ... yo sólo...
E: El apartado g.
A: Yo lo reduje.
E: ¿Eh?
A: Yo lo reducí.
E: Sí, ... lo reduje, ...
A: Lo reduje.
E: Porque no es lo mismo, está mal, ese verbo irregular. Lo reduje... Pero espera ¡no!, no estamos hablando de la solución final. Estamos hablando del paso; ahora veremos cómo queda el final. 3a-b ... Pedro, ¿qué más?
A: Nada.
E: ¿Está clarito David?, repítelo a ver si ya la señorita te lo oye bien.
A: 3a-b-a.
E: 3a-b-a. Pero cójanse de sus preciosas cabezas para que no se vuelvan a confundir. Cuando

el menos está delante del paréntesis se va a cambiar todo. Entonces, ahora, ¿cuál es la solución, Mari Carmen, de 3a-b-a?
A: 4a,...
E: ¿Y por qué pone usted 4a?, a ver, dime, explíquenos por qué.

A: Porque... le di el valor 1 a la "a".
E: ¡Aaahhh!, ¡eso es otra historia distinta! Porque le diste el valor 1 a "a". ¿Y si tú le das el valor 1 a "a"...?, ¿tú tenías 3a-b-a?, ¿y aquí qué te queda?
A: ...
E: Si le das el valor 1 a la "a", ¿qué te queda?,... 3 por "a" es 1.
A: ...
E: ¿Pero tú le pusiste un 1? Pregunto, ¿tú le pusiste un 1?
A: ...
E: Porque te equivocaste o pusiste un 3 aquí.
A: ...
E: ¿Qué?
A: Un 3.
E: 3, y después, -b.
A: Sí.
E: ¿Y aquí menos... menos a?, pero no dices que valía 1 el "a".
A: Es que primero puse: 3a-b-a y después le di 1 como valor.
E: Sí, por eso digo, ¿cómo le diste tú el valor uno a esta expresión? O sea, si "a" vale 1, se llama así en matemáticas, entonces, ¿cuánto vale esto?
A: Menos 1-a,...
E: ¿-1-a?, entonces al que le diste el valor 1 es a "b", ¿no? Si tú me dices que ¿no?, si tú nos dices a todos, que aquí pusiste 3a-1-a, no es a "a" a la que le has dado el valor 1, sino a "b", ¿está claro? ¿A "b" entonces, a "b" es al que le diste el valor 1? "b" igual 1, entonces te queda 3a, ¿no?, menos 1-a, ¿no?
A: ...
E: Entonces ya sabes que no se puede hacer porque "b" no sabemos cuánto vale. Si te lo hubieran dicho sí; de todas maneras ésta a qué es igual ahora. 3a-1-a. ¡No te despistes Yurena! 3a-1-a, ¿a qué es igual?
A: ... 2a...
E: 2a.
A: ...
E: No, lo que está en la pizarra, ¿2a?
A: ...
E: ¿Qué te queda aquí por poner?
A: Menos 1
E: Menos 1, eso sería lo que tú pusiste, ¿no?, que no vale porque "b" no vale 1. Pero si nosotros tenemos, 3a-b-a, sin darle valores, ¿a qué es igual?
A: ...
E: ¿Y se puede hacer algo ahí? Gracias. ¿Se puede hacer algo aquí? ¿Se puede reducir algo, se puede juntar algo, Nayra?
A: Sí.
E: ¿Sí?, ...¿Rómulo?
A: 2...
E: A ver, a ver, ¿Nayra?

A: 2a-b.
E: ¡2a-b! Pero no 4a, porque esto tiene aquí un signo de restar. 2a-b ¿pusieron todos esa solución?, o alguno a parte de ella se equivocó,... o alguna; que capaces de decir que como no pregunté alguna no me lo dicen, ... del sexo. Bueno el h. A ver qué pasa con el h, que ya no tienen razón ya de equivocarse. ¿Rómulo?

A: No lo he hecho.
E: Pero a ver.
A: (a-b+c)...
E: No, no, el g, el g, ... el h, perdón.
A: Ah!, el h, (a+b)+b igual a a+2b.
E: A a+2b, ¡claro!, porque como tiene que delante del paréntesis no tiene nada, a+b+b, a+2b, ¿no?, porque b+b es 2b. Sara, el siguiente.
A: No lo tengo.
E: Pero, a ver, no importa, venga, rápido. ¡Que ya lo tenían que tener con el tiempo que han tenido! ¡Mira éste distraído ahora... pensando en ... para que oigas las explicaciones! ¿En tu casa tienes tiempo, te sientas una vez en tu casa por la tarde a estudiar?, ¿eh?
A: Espera a ver cuánto es...
E: Pero mira, escucha, ¿te sientas tú por la tarde alguna vez a estudiar?
A: ¿Eh? .. ¡Claro!
E: ¡Claro! Porque ahí es donde tú tienes que trabajar sólo, a tu aire, pero aquí no, para eso vienes aquí por la mañana, para que te den un poco de orientación, y cuando vas a tu casa, fíjate, puedes estar hasta la una de la mañana estudiando. No pasa nada, a tu aire, lo que tú quieras, con tus padres que te ayudan a estudiar. ¿Te ayudan?
A: ¿Eh?, no.
E: Pues por eso, ya sabes tú a lo que me refiero que tienes tiempo para ti solo. A ver, Sara.
A: Eee”¡mm!”...
E: I de Italia.
A: “¡mm!””¡mm!”... 2a...
E: ¿Tú hiciste dire..., lo que estás haciendo directamente?
A: No.
E: ¿Qué hiciste? A ver.
A: “¡mm!”m a, quitar los paréntesis.
E: ¿Cómo?
A: a-b+c+b-a.
E: Vale. A-b+c+b-a, no hay que hacer nada porque los paréntesis tienen todos + delante. ¿De acuerdo?, a-b+c+b-a, ¿y ahora qué hiciste?
A: Después sumé las a...
E: ¿Y por qué las sumáste?
A: ...
E: ¡Ah!, ¿qué pasó... ahí?, a-b+c+b-a, ¿qué te quedó? ... tampoco lo hizo...¿Ruymán?
A: ... a, a-b... y -c.
E: ¿Y se acabó?, ¿y el b y el -a lo dejamos de paseo?
A: ...
E: ¿Rómulo?
A: Me da igual a c, ... sí.
E: ¿Da igual a c, por qué?
A: Porque +a-a cero, -b+b cero, ...

E: Sí, entonces qué queda.
A: c.
E: c, ¿y qué pasa con el resto... que está retrasadillo, retrasadillo?, a-b+c+b-a, -b+b fuera, -a+a de paseo y queda c.
A: Sí.
E: El siguiente, a ver, a ver, a ver, a ver, Padilla.

A: 2a+2b.
E: ¿2a+2b, porque lo hiciste directo o quitaste el paréntesis?
¿Eh?, ¿le quitaste paréntesis?, ¿cómo te quedó quitándole el paréntesis?
A: “¡mm!”m a+b “¡mm!”m aaa-b.
E: a+b y después en el otro lado del cuaderno a-b suelto. ¿No hay ningún signo ahí?
A: No.
E: Entonces, léelo bien, ¡shsh!, a callar José Carlos, léelo bien: a+b.
A: a+b+a-b.
E: ¿Sin paréntesis ya?, ¿no?, y ahora, ¿de dónde salieron esos resultados que tú diste? .. ¿2a+2b, de dónde salieron? ¿No hay nadie ahí que se vaya de paseo?
A: Sí.
E: ¿Quién se va de paseo ahí, María Ángeles?
A: ...
E: ¿No se va ninguno, Yurena?
A: Es que cambia 2a más, “¡mm!”m, ¿menos por más?, ¿cuánto es?
E: ¿Y dónde ves tú el por, todos esos “pores” que tú te estás inventando y que no están escritos ahí? Esos “pores” que tú estás diciendo: más por menos, y menos p... ¿dónde están esos “pores”? ¿Tú ves ahí algún por? a+b+a-b, ¿quién se va de paseo, Lidia?
A: el b.
E: Los dos b juntos, +b-b fuera, ¿y queda cuánto Jonay?
A: 2a.
E: 2a. ¡Simple! .. ¿Está claro? No estén añadiendo operaciones donde no hay. El siguiente: (2a+b)-b, ¡ese ya pan comido! ¿A ver Cristo?
A: ¡Eee”¡mm!”m! 2a.
E: 2a. Porque +b y -b se van. 5a+(b+a); ¿Jaime?
A: Es que no sé el resultado...
E: A ver, a ver, ¡shsh! La L, la L de latín, venga... 5a+(b+a), ... ¿Sergio?
A: 6a+b.
E: 6a+b. ¿Dónde está ése, dónde está ésa, ese retraso, que parece que hoy...? El siguiente, (2x+y)-(x-y). ¡Ojo, ojo, ojo! .. ¿Davinia?
A: No lo he hecho.
A: ¿Profesora?
E: ¡Shshs!
A: ¡Ah ya! ..
E: ¿Dayda?
A: x.
E: ¿Por qué?
A: Porque se va dos x menos uno...
E: O sea, dos, ¿quitaste paréntesis Rómulo?
A: ...
E: ¿Cómo te quedó quitando paréntesis? Dilo alto para que... yo sé que anda muy distraído,

escucha.
A: ...
E: ¿Cómo quitaste el paréntesis? A ver, ¡venga!, ¡dilo, dilo!
A: 2h, ...
E: ¿Cómo que h?
A: 2x, 2x+y-x menos, +y.
E: ¿Y entonces?, 2x+y-x+y.

A: 2y, 2y...
A: ... x+2y.
E: x+2y, ¿están de acuerdo?
A: Sí, sí, sí...
E: ¿Dayda?, x+2y, porque 2x-x, después de quitar el paréntesis es x. Dos manzanas menos una manzana, dos ventanas menos una ventana, 2x-x, es x, luego +y+y, 2y. El siguiente. A ver, ahora voy, vamos a pararnos un minuto para que hagan el n y el o, a ver si ninguno, ni ninguna se equivoca... Cojan la cabeza, lo revisan, lo miran otra vez, a ver si no se equivoca ninguno.
A: Ya.
E: Espera un poco, míralo despacio...
A ver esos dos, los dos mirando para la puerta. Eso es como cuando uno dicta un problema en clase, y lo vuelve a dictar para que cojan los datos bien, y entonces la segunda dictada de la profesora, están todos así atentos a la libreta. Y ustedes en vez de mirar su libreta y revisarlo estaban mirando para no sé dónde. ¡Siéntate bien! A ver, ¿qué pasa aquí? A ver si todos al unísono, son capaces de ir dictando lo que yo tengo que escribir. ¿Saben qué es al unísono? Todos a la vez. A ver, ¡venga!
A: ...
E: Todos quiere decir todos, Mari Carmen, todos quiere decir todos... Todos, a ver.
A: ...
E: No, no, paso a paso. Después ya veremos el resultado final.
A: x+y+x-y.
E: ¡Vale!, ¿cuánto queda?
A: 2x, ya está, ...¡no!, y ¿menos por más, cuánto es?
E: ¡Y vuelta con el menos por más!, te voy a decir ya, ¿dónde ves tú eso?
A: ¡Bueno!, pero queee...
E: No, pero no, no, no... eso te va a, a llevar a confusión. No inventes, no, no, no. Pero fíate de mí que soy más vieja que tú, que soy casi tu abuela.
A: Ja, ja, ja...
E: ¡Claro!, ¡fíjate! Si tú empiezas a ponerle, desde ahora la edad que tienes, a añadir operaciones, vas a ser el k.o. en matemáticas, y no tienes necesidad... en tú... operaciones. Aquí, ¿qué pasa ahora, Yurena?
A: Se van las y, y queda 2x.
E: 2x. Se van las y, ¡no!, se van las íes, que es plural. No es yes en inglés, sino las íes. Y griega, se van las íes, se van las (x) equis, se van las aes, ... ¿está claro? El siguiente, ¡que ese estará ya perfecto! A ver José Carlos, si no te has equivocado, ¿cuál es el resultado final?
A: ¿En el último de todos?
E: Sí, el último de todos.
A: Estooo...
E: ¿Tomás?

A: 2x.
E: ¿2x?
A: No.
E: Sí, pero no digas así 2x, ¿cómo te ha salido a ti 2x?
A: 2x+x...
E: ¡Vale!, 2x+x-y, ¿y ahora qué puedes hacer?, con lo que te queda: 2x+x-y. ¡El trasiego ese que tienes tú siempre con el borrador! ¡No me convence a mí eso de estar para detrás! Mira para el cuaderno y al material. A ver.

A: ¿Yo?
E: No, Tomás.
A: ...
E: ¿Por qué?, ¡oh!, porque tú tengas 20 pesetas, porque si tú le debes a una persona 100 pesetas, no la puedes quitar, -100. ¡Claro!, y si una cosa que tiene un descuento de 10%, pues mira ¡qué gaita!, ¿no?, vas a comprar en una rebaja al 10%, y como tú no le quitas el 10% tienes que pagar más. No se puede quitar, Zeben.
A: 3x-y.
E: 3x-y. ¿Todos lo tienen, ...Elena?
A: Sí, sí.
E: 3x-y, ¿está claro ya? A ver la ficha anterior, la 14, si se fijan, se han equivocado bastante ahí ¡eh! No mucho, pero se han equivocado. No se tenían que haber equivocado ya en esa hoja, porque en esa hoja, ¿hay algo nuevo? .., ¿en esa hoja que acabamos de ver? No hay nuevo, lo único nuevo es que ustedes pongan la cabeza. No hay nada nuevo, porque está hecha justo basándose en todo lo anterior. A ver la 14.
Ahora a pensar, a escribir y se acabó, hasta que no pregunte, para que no se distraigan los demás.

15.1 TRANSCRIPCIONES DE LA SESIÓN AUDIO 1.

E: ¿Qué te falta ahora?, ¿qué te falta? No te va a dejar nada. Tú trabaja con lo que tienes. Cada uno trabaja con lo que tiene, nada más, si alguien le falta... si alguien no tiene bolígrafo o lápiz. Todos tienen bolígrafo o lápiz, pues todos pueden trabajar. Primero, y además son parecidos a los que ya han hecho, o sea, que no tienen ningún problema. No deberían tener, a lo mejor tienen, pero no deberían tener. Ni tampoco hace falta que se copie uno por el otro, porque no hace falta, sino ir trabajando. A ver Irene, ¿qué has hecho con el primero de todos?, ¡claro, que se oiga bien!
A: -4-3+2=-7+2=-5.
E: Igual a menos cinco, ¡vale! Los que no tengan menos cinco lo tachan porque lo tienen mal. Da menos cinco. No nos vamos a detener más ahí porque eso lo hemos repasado varias veces. Pero no borren, ¡qué siguen borrando, Saray! ¡No borren, sino tachen! No borren, sino tachen. No va a pasar nada. Jonay, el siguiente, ¿qué pusiste?
A: ¿Es el 1?
E: ¿Eh? El 1, hemos visto el 1 a). A ver el 1 b).
A: Menos 10.
E: Menos 10, ¿por qué? A ver. Vete diciendo lo que hiciste.
A: +3-4, y después menos y más, menos; -5+2.
E: 3-4, ¿no? Repítelo otra vez, fuerte.
A: 3-4-5+2.
E: ¿Y cuánto te salió?
A: Menos 10.
E: Menos 10. ¿Están de acuerdo todos que sale menos 10?
A: No, no, no.
E: 3, -4, -5, son -9, ¿no?, -9+5, ¿cuánto es?
A: -4.
E: -4, ¿están de acuerdo?
A: Sí.
E: ¡Vale!, seguimos. Los que lo tienen mal, pues lo van corrigiendo. A ver ésta... por ejemplo. ¿Rómulo? A ver el tercero.
A: En el tercero puse: 2-4+3-2-3+1.
E: ¡Vale!, y después, ¿qué sigue?
A: Puse: +6-9=-3.
E: ¿De acuerdo?, ... ¿o no?
A: ¿3? Sí.
A: Bueno tres.
A: Sí.
A: Yo puse 3 sólo.
E: A ver: 2-4+3-2... en la pizarra.
A: ¡Ay! ¡Dios, es verdad!
-3+1, ¿esto es lo que pusiste, no, Rómulo? Muy bien, y ahora, ¿qué hay que hacer? A ver, Yurena.
A: ...
E: ¿Yurena?
A: Ee"¡mm!"m, juntar los positivos y los negativos.
E: Juntar los positivos y los negativos. ¿Están de acuerdo?, ¿o se puede hacer otra cosa?
A: Sí.

E: A la vista de esto.
A: Hacerlo ya directamente.
E: ¿Cómo?
A: Eeehhh.
E: ¿Lo mismo que ella dice pero hacerlo directamente?
A: Sí.
E: ¿Hay alguna cosa ahí que se pueda hacer?
A: ¿El qué?
E: A la vista de esto, ¿hay algo más que se pueda hacer? ¡Aprovechen las cosas que van aprendiendo! Porque +2, -2, +3, -3, eran los opuestos que deba cuánto ¿Yaiza?, ¿los opuestos?
A: Cero.
E: Cero Pero más fuerte porque ese cero no se te habrá oído ahí. Bueno.
Seguimos. Pero repito que no borren sino que tachen. El siguiente. A ver por ejemplo, "¡mm!"m, Juan Jesús, el d).
A: Me parece que lo tengo mal.
E: A ver.
A: Multipliqué 3 por 2.
E: ¡Sí!
A: ... que me da 6...
E: Sí.
A: ... y después por 4.
E: ¿Por 4 el 6?
A: Sí.
E: ¿Están de acuerdo?
A: No, no.
E: ¿Tú estás de acuerdo?, ¿tú mismo estás de acuerdo contigo?
A: Debería de hacerse, me parece que es 6 por 4.
E: 6 por 4, es lo que tú hiciste.
A: Oooo, ¿3 por 4?
E: 3 por 4. ¡Claro!, porque has hecho 3 por 2 y luego lo has multiplicado por 4. Es como si tuvieras esto: ... ¿no? ¿3 por 2, Yurena, y ...?
A: Y 3 por 4.
E: Y 3 por 4, ¿no?
A: Sí, sí.
E: ¿Alguien lo hizo distinto, esa parte hasta ahí? .. ¿Ruymán, tú cómo lo hiciste?
A: ...
E: ¿Eh?, más fuerte.
A: Yo no lo tengo hecho.
E: No lo tienes hecho. A ver Jaime.
A: Yo puse 3 por 2+4 que son 6.
E: 3 por 6. ¿Y qué propiedad es ésa?, ¿esa propiedad por la cual tú has hecho 2+4? Porque tú lo que has hecho es sustituir lo que estaba en el paréntesis por algo, ¿no? ¡Fuerte!, ¿y esa propiedad cuál es? .. A ver alguien que, ¿qué propiedad es ésa?, que hemos sustituido lo que estaba ahí dentro por un número.
A: Distributiva.
E: ¿Distributiva?, ¿seguro? ¿Hemos separado para distribuir?

A: No.

E: ¿Irene?
A: Que juntamos lo...
A: Asociativa, ...
A: Asociativa.
E: ¡Asociativa! ¿Y cuál, es, hemos hecho alguna distributiva, o ya hemos hablado algo de distributiva? ¿Hemos hecho algo de distributiva?
A: No.
A: Sí.
E: ¿Eh?, ¿esto qué es?
A: Distributiva.
E: Distributiva, ¿no? Ya la habíamos hecho antes, ¿no? Se puede hacer bien 3 por 6, ó 3x2+3x4, porque 3x6, ¿cuánto es Ruymán?
A: Eee"¡mm!"m, 24, "¡mm!"m, a ver, 18.
E: 18, ¿no?, ¿y 3x2?, ¿David?
A: Eeee 6.
E: 6. ¿Y 3x4?
A: 12.
E: 12. Entonces 12 y 6, ¿cuánto es Juan Jesús?
A: 16, eee"¡mm!"m, 18.
E: 18. Lo mismo que le dio a Ruymán. Hacerlo de una manera o de otra. ¿Cómo sigue ese ejercicio Coello, el d)? Tenemos 3x6, ¿y ahora?
A: 3x6+3...
E: Sí.
A: ... +2.
E: +2. ¿Cuánto es en total?
A: Que es igual a: 18+3+2, que es igual a 23.
E: 23. ¿De acuerdo?
A: Sí.
E: O +23, ó 23, da lo mismo. El siguiente: e), a ver: ¿Davinia?
A: 4-11+2+3-5+6+2.
E: ¿Por qué +2? .., ¿por qué has puesto ahí +2?
A: ...
E: ¿Eh?
A: Porque tiene el signo positivo.
E: ¿Tiene el signo positivo el 2? .., ¿eh? Cuando un número está junto a un paréntesis... ¿esto significa a +3?, ... ¿esto significa 2+3? ¡Atiendan, atiendan!, José Carlos, no te despistes. ¿Esto significa 2+3?, ¿qué significa?
A: Dos por tres.
E: Dos por tres, ¿no?, Davinia, ¿entonces cómo quedaría? .. Vete diciéndolo otra vez.
A: +2+3-5+6... por 2.
E: ¿Por 2 aquí?
A: ... -5+6 por 2.
E: ¿Cómo -5+6? ¿Qué hago con esto, así como está? A ver.
A: Se pone ahora un paréntesis...
E: Da -10. ¿Se pone un paréntesis, dónde?
A: Un paréntesis en el men... el 5 y en el 6. Menos 10.

E: ¿Así?
A: Yo lo puse en el 2.

E: ¿Así? Eso ya lo hicimos una vez.
A: Yo si lo p..., el paréntesis se lo puse en el 2.
E: ¿eh?
A: En el 2.
E: ¿En el 2, cómo? ¿Así?
A: Terminé de hacerlo y puse -5+6 por 2, eeehhh, entre paréntesis.
E: ¿Y -5+6, cuánto te dio?
A: Es que todavía no lo he hecho.
E: ¡Ah!
A: Y yo puse aquí, eh, 4-9, porque ya lo quité. Lo hice en el paréntesis, -9+3-6+6 por 2.
E: ¿Y qué variaría eso si tuviéramos así, la última expresión así? ¿Es lo mismo que lo que está escrito? A ver, ¿ es lo mismo que lo que está escrito, Zeben? ¿Esto es lo mismo que lo que está escrito?
A: ...
E: ¿Eh? ¿Que lo que está escrito en el papel, sí o no?
A: No.
E: La última parte, digo la última parte.
A: No, no, no...
E: ... la última parte... Menos (5-6) por 2...
A: No, no...
E: No. ¿Y esto?
A: "¡mm!"m, no, sí.
A: En... en el, ... dentro del paréntesis tiene el menos y fuera tiene el más. Ahí arriba.
E: Aquí. ¿Y entonces lo que pusimos antes? A ver, a ver, a ver, ¿qué pasa aquí? Porque esto, esta explicación ya la hice yo un día.
¡Qué desastre!
A: ...
E: ¡Mujer y por qué coges el...!
A: ...
E: A lo mejor tengo yo la culpa, pero los que están, ya está,... distrayendo,...
A: ...
E: A ver, ¡venga!, así no hay problema, si no te la voy a echar. Tranquila.
A: ...
E: Digo yo: ¿eso es lo mismo que está en el papel o no?
A: Sí.
E: Rómulo, ¿es lo mismo?
A: ¿El qué?
E: ¿Esto que lo que está en el papel?, menos 2 por 5, más, menos 6. ¿Es lo mismo que lo que está en el papel en el ejercicio e)?
A: ¿e)?,...¿cuál es profe?, ... dígame el ejercicio.
E: Yaiza, ¿es lo mismo? ¿Esto es lo mismo que lo que está en el papel... en el e)?
A: ...
E: ¿Irene?
A: ...
E: ¿En qué se distingue esto de esto?,... ¿esto no es multiplicado?

A: Sí, sí, sí.
E: ¿Y si es multiplicado, se puede alterar el orden?
A: Sí, sí.

E: ¿Y es lo mismo esto que esto, o no?
A: Sí, sí.
A: Sí, sí se puede alterar,...
E: ¡Claro!, ¡qué más da! Si esto lo llamo yo a, ¿no?, menos 2a, ¿no?, sería esto. Yurena no te despistes que el otro día ya te despistaste bastante. Menos (5-6) por 2 es: menos a por 2, ¿es lo mismo -2a que menos a por 2?
A: Sí, sí.
E: ¿Sí o no?
A: Sí, sí.
E: ¿No es lo mismo esto?
A: Sí, sí.
E: ¿Sí o no?
A: Sí, sí.
E: ¿Juan Jesús?
A: Sí.
E: -3x, no es lo mismo que -x por 3.
A: Sí.
E: Es lo mismo, ¡qué más da, que sea am, que sea ma! Entonces aquí, ¿cuál sería el resultado? Porque ustedes todas esas operaciones que han ido diciendo, se han olvidado de que el 2 multiplica al 5 y multiplica al 6.
A: ¡Sss! “¡mm!”m... 10, ee”¡mm!” 2 por...
E: Menos 10 más 12.
A: ...ee”¡mm!” 12.
E: Si lo hacemos de la otra manera, ¿cuánto queda 5-6, Coello?
A: ¡Eeehh!, a ver, ... ¿una, no?, “¡mm!”m, ¡ah!, sí.
E: Sí porque lo que está dentro del paréntesis, ¿a qué es igual? Zeben, ¿a qué es igual? Lo que está dentro del paréntesis en el papel, ¿Jonay?
A: Menos 1.
E: ¡Menos 1!, ¿menos 1 por 2?, ... ¿menos 1 por 2, que está fuera, cuánto es?
A: Menos 2.
E: Menos 2. ¡Menos 2! ¿Y el menos que tienen delante?
A: Más 2.
E: Más 2. Pero tienen aquí un menos, ¿no? +2. La última parte, digo, +2. Si ustedes dicen ahora: -5+6, ¿cuánto es -5+6?
A: Uno, uno...
E: Menos 5+6, o sea, quitándole el paréntesis, ...
A: Más 1, +1, +1, ...
E: ¡ Más 1!, y ¿+1 por 2?
A: Menos, ... esto...
A: Más 2.
A: Más 2.
E: ¡Qué desastre de muchacho!, ¡ponte allí detrás!
A: ...
E: Ten en cuenta que si vas a un instituto o a una F.P., volando... no te van a estar cambiando

todos los días de sitio. Bueno, seguimos. El f). A ver el f, ¡háganlo! Éste salía +2. El resultado lo tiene aparte 4-9+3, ¿no?, era lo que hallé aparte. 11-2 era 9, 4-9, -5, -5+3, -2, -2+2, ¿cuánto es?
A: Cero.

A: ¿Cómo era?, cóm... ¡jolín!
E: 4-9+3, ¿no?, ¡menos!, 11-2 es 9, 5-6 es menos 1 por 2. 4-9+3+2=-5+5= a cero.
A ver. Lo tachan los que lo tienen mal. Lo van haciendo paso a paso; lo que pasa es que ustedes se quieren saltar pasos. Pero esto, apréndanselo de una vez, que cuando está por detrás multiplicado es lo mismo que si está por delante: exactamente igual. ¿Qué pasa Juan Jesús?
A: Ésta...
E: No, no, no, pregunta en alto.
A: Yo puse 4-11+2+3-10+12.
E: ¿Por qué sacas, de dónde sacas tú el -10?
A: Pues multiplico 2 por 5, que me da 10...
E: Muy bien.
A: ... 2 por 6, 12, que menos por menos me da más.
E: Sí, ¡vale!, y te tiene que salir cero después de hacer todas las operaciones.
A: Sí.
E: Pues ya está, da lo mismo.
A: Sólo que hice una.
E: Pues ya está, pues está bien. Si te da cero al final da lo mismo los pasos o el camino por el que vayas. ¡Está bien! El f). El f), ¿Saray?, a ver. ¿Cómo lo haces el f)?,... ¡fuerte!
A: Cuatro más, más 3...
E: ¡Sigue! ¿Qué tienes que hacer con ese paréntesis?
A: Sumarlo.
E: ¿Eh?
A: Sumar con el otro paréntesis.
E: Lo sumás con el otro paréntesis. De acuerdo, si tú lo quieres hacer así. ¿Y cuánto es?
A: 8.
E: ¿El qué es 8?
A: ... lo que está dentro del paréntesis.
E: ¿4+3?
A: 7.
E: ¡7!, ¿y luego? .. ¡7!, sigue. ¿Por qué 7?, 4-3, ¿cuánto es?
A: Uno.
E: ¡Uno!, ¿y 7+1?, ¿es cero?
A: 8.
E: 8. Siete más 1, 8. Si quitas el paréntesis 4+3, ¡"¡ssh...!"!, 4+3+4-3, se van el 3 y el 3.
A: Sí.
E: Y queda 8. Es otra manera de hacerlo. Ahora, el siguiente. Lo van a trabajar un rato ustedes... y después ya lo ponemos en común.
A: ¿El 2?
E: El 2. ¿Quién es el 8?, ...¿eh? A ver Daniel, empieza tú a hacer el n). Pero, o sea, quiero decir que empieces a trabajar de abajo para arriba. ¿Y el 10, quién es?
A: Yo.
E: Pues de abajo para arriba, también en vez de trabajar a), b), c), d), empiezas: n), m), hacia

desde abajo para arriba los apartados, empezar a resolverlos de abajo para arriba: ¿entiendes? .. ¿el 3, quién es?
A: Yo.
E: Pues, Coello, también, de abajo para arriba. Unos de arriba para abajo y otros de abajo para arriba. Los que ya lo tienen, la hoja siguiente. Se darán cuenta, los que están empezando por debajo que tienen ahí lo mismo que antes, ¿no?, paréntesis con números que están multiplicando al paréntesis. A ver, ¿alguien que tenga alguna solución y la quiera decir?
A: ¿De cuál?
E: Del primero ya, ...Por ejemplo el a).
A: Yo. 8, 8a+4b.
E: 8a+4b.
E: Sí, sí. El segundo, ¿Rómulo?
A: 2+3x.
E: 2+3x. Nayra, ¿cómo hizo el b), el apartado b)?
A: Lo dejé igual.
E: Lo dejaste igual. O sea, que el otro día lo aprendiste, porque te acuerdas que tú te equivocaste ahí el otro día. En ése se equivocaron bastantes el otro día. A ver el tercero Tomás, c).
A: 3x-2t.
E: 3x-2t. ¿Qué? ¿Por qué se pone 3x-2t, Dayda?, Dayda no está. ¿Inmaculada? ¿Por qué se pone 3x-2t?
A: Porque son diferentes valores y no se pueden sumar.
E: Diferentes letras. Porque tienen las letras distintas, ¿no?, y no son, ¿cómo se llaman esos términos que tenían las letras con los grados iguales, que tú lo dijiste el otro día?
A: Semejantes.
E: Semejantes. Éstos no son semejantes, por eso no se pueden sumar. A ver el apartado d), ¿Jaime?
A: ¿El d)? El, ... 4a-b.
E: 4a-b. El apartado e), ¿Haridiam?
A: ...
E: A ver, dilo en alto que es facilito, el e).
A: a.
E: a. ¿Por qué?
A: Porque más por, ... más b, menos b, es cero.
E: Más b, menos b, es cero. El siguiente, ¿Zeben?
A: ¿El f)?
E: Ése.
A: Eeehhh, a+2b.
E: a+2b. Se dan cuenta que ya van más ligeritos haciéndolos.
A: Mercedes, ¿se puede poner 2b+a?
E: Sí. Es lo mismo porque, ¿por qué propiedad se puede poner lo mismo, Rómulo?
A: Por la conmutativa.
E: Por la conmutativa, ¿no? A ver el siguiente, a ver, por aquí, por aquí, por aquí, por aquí, ¿alguien que no haya dicho nada hoy? A ver, Yurena, por ejemplo tú, da lo mismo. Yurena. ¡Venga!, el siguiente, el g).
A: 3a-b-a.
E: ¡Vale!, ¿cuánto queda?
A: Eeehhh, 3...

E: ¿3a-b-a?
A: 4a...
A: 2a-b.
E: ¿4a-b?, ¿seguro?
A: ... yo creo que es 2a-b.
E: ¡2a-b!, ¿no?, ¡2a-b!, ¡ojo, eh!, 2a-b. Ahí ya no se tenían que equivocar.

A: Sí, sí, 2a-b.
E: A ver el siguiente, ¿Nayra? .. El h).
A: 5a-b+a.
E: No. ¡Shsh!, ¡sigue!
A: 6a+b.
E: 6a+b. Muy bien. El siguiente, ¿Yaiza?, y).
A: ... 2a+b-b... "¡mm!"m, 2a.
E: 2, ¿qué más?, ¿algo más? .. A ver: (3x+y)-(x-y), ¿Zeben?
A: 2x+2y.
E: 2x+2y. ¿De acuerdo o no?
A: Sí, sí...
E: ¿Ruymán, qué te dio a ti?
A: 2x.
E: ¿Sólo 2x? Vete diciéndome cómo llegaste a 2x.
A: 3... 3x... más x,...
E: ¡No!, pero antes de eso, ¿qué pusiste? Para quitar paréntesis, ¿no? ¿Quitaste paréntesis?
A: No.
E: ¿No?
A: No, puse...
E: ¿Directamente?
A: ...
E: ¡Ah!, ¿y qué pasó con el -y que tienes en el paréntesis segundo?, ... ¿qué signo tiene ahora?
A: Más, menos, menos por más, ...
E: Entonces cómo es. Pero más fuerte, pero vocaliza más para que se te oiga, a ver. Vuelve a decirlo entero, el apartado j).
A: 3x+y...
E: Sigue...
A: y, menos x menos y...
E: ¿Por qué -x-y?, pero...
A: -3x por -x, son 2x, y +y...
E: No. 3x por 2x, no. 3x-x, ¿no?
A: ... y +y por menos...
E: Por, no, ...
A: ... menos por menos es más...
E: ¡Ah, bueno!
A: ... menos por menos es más...
E: Entonces, ¿cómo te queda?
A: A ver, 2x por...
E: ¿Por?
A: No, más 2y.

E: 2x+2y. ¿Y esto se puede expresar de alguna otra manera? A ver, a ver, a ver... ¿Esto aquí se puede expresar de otra manera en matemáticas? ¿Hay algo ahí que se pueda hacer y se pueda expresar igual? Alguna expresión que sea equivalente a ésa.
A: ...
E: ¿No?
A: 2x...
E: ¿No?
A: 2x por 2y.

E: ¿x por 2y?
A: 2x por 2y.
E: ¿Multiplicado da lo mismo que sumar?
A: No.
E: A ver. Una expresión que sea...
A: x por 2 por y.
E: x por 2 por y. ¿Es lo mismo que aquello?
A: No.
Eeehhh, pones: 2 igual... ó 2 por, a ver...
A: No, 2x, 2x+x, 2x.
E: 2 por x más y.
A: ...
E: 2 por x más y.
A: ...
E: ¿2 por x más y?
A: ...
E: ¿Eh?, ¿Héctor?, ¿qué propiedad es ésta?, ¿2 (x+y), pasarla para allá, qué propiedad es?
A: Distributiva.
E: Distributiva, y... ¿de allá para acá?
A: ...
E: Sacar factor común. El 2 es un factor común.
A: ¿Estaba bien?
E: La operación... esto está bien. La operación inversa de la distributiva es: SACAR FACTOR COMÚN. Porque aquí el factor común es el 2, ¿no? Bueno. A ver, estábamos en el, el k), a ver, k), ¿quién lo tiene hecho, k)? A ver ésta, ¿Inmaculada?
A: 7h-3g.
E: ¿7h-3g?
A: No, no...
E: A ver, a ver, a ver...
A: No, no...
E: ¡Sh!, a ver.
A: Eee”¡mm!”m, 5, a ver, lo voy a hacer primero: 5h-3g-2h.
E: ¡”¡mm!”hh!
A: Son...
E: ¿Tomás?
A: 3h...
A: 5h-3g-2h igual...
E: ¿Igual a... ?
A: 3e, menos 3e.

E: ¿3e?, ¿y de dónde sacaste la e?, ¡ah!, ¡menos 3g!
A: Yo seño.
A: ... ... 3h, ...
E: ¡Shshshsh!, a ver Inmaculada.
A: 3h, 3h-3g.
E: 3h-3g. ¿Se puede hacer algo más?
A: Sí, poner 3 por, eh, abro paréntesis h+g.
E: ¿h+g? ..¡h-g!
A: ¡Ay Dios, es verdad!

E: Es el mismo caso que antes, se dan cuenta. 5h-3g-2h, que queda: 3h-3g, que también se puede expresar de esta manera: 3 por h-g. ¿Qué?
A: Que... 5h menos eh, el menos, cambio de signo, ¿no?
E: ¿Cómo?
A: Cuando esté el menos delante se cambia el signo de dentro.
E: Sí.
A: Entonces sería 5h-2h.
E: ¿Por qué 2h? Sí menos 2h.
A: Entonces sería 7h-3g.
E: ¿Por qué? ¿Por qué 7? ¿5 menos 2?
A: ... 5h-3a, menos 3g.
E: y-2h. ¿Qué pasa con el paréntesis, que lo cogieron nada más que la mitad? ¡No borres! Es que el paréntesis, ¿no hay que cambiarle el signo a todo lo que está dentro del paréntesis?
A: Sí, sí.
E: En la cinta que les grabé el otro día dice, ... en la cinta del otro día decía esta misma frase: tengan en cuenta que el menos delante del paréntesis no sólo afecta al que está cerca de la puerta sino a todo.
A: ¿Usted lo grabó?
E: ¿Eh?
A: La otra vez, ¿usted lo grabó?
E: Grabamos un poquito nada más para ver si se oía en la clase. Se oía, pero no se oía bien porque estaba detrás. Bueno, seguimos. A ver, el siguiente, ¿cuál es el resultado?
A: ¿El l)?
E: A ver, ¿Ruymán?
A: Eeeh,. El l)...
E: El l), la l).
A: 6a+4b.
E: 6a+4b. ¿De acuerdo? Ése no tiene ningún problema, son todos positivos. Bueno, ¡que tampoco tendría ya que tener problemás los negativos!, porque ya sabemos cómo se hacen. Lo que pasa es que no se fijan lo suficiente. ¿Está claro? A ver, el siguiente, ¿quién lo estaba haciendo? A ver, Coello, el siguiente, el l), despacito.
A: 3a-15-5a+10.
E: ¿Por qué más 10?
A: Eehh... a ver...
E: Claro, claro...¿Tú lo tienes igual, David? ¿Lo tienes igual? ¿3a-15-5a+10?
A: Porque se multiplica...
E: ¡Shshsh!, espera a ver, que David también lo estaba haciendo. ¿A ver, David? ¿Tú que tienes?

A: “¡mm!””¡mm!”...
E: No se te oye nada... a ver... A ver, ¡fuerte!
A: Yo puse 3 por 5...
E: ¡Más fuerte!
A: ...
E:¿A ver?
A: 3 por 5...
E: ¿Cómo que 3 por 5?, y la a, ¿qué pasó con ella?, ¿no la usaste? A ver, “¡mm!”m, ¿Pedro?
A: No lo tengo.
E: ¿No lo tienes?

A: ...
E: A ver, a ver, a ver, ¿Tomás?
A: 3 por a menos 5, menos 5... a +2, igual a: 3 por 2a menos 10, igual a: 2a+5.
A: Está bien.
A: No, yo tengo otra cosa.
E: ¡Shshsh! No, pero miren, no es cuestión de que yo tengo otra cosa sino hay que saber... ¡shshsh!, por qué está bien o por qué está mal. ¿A ver Zeben?
A: ¿Eh?
E: A ver, ¿cómo harías tú ese ejercicio?
A: ¿Lo que tengo hecho? Puse 3a-15...
E: Sí.
3 por a menos 15...
A: Menos 5a, menos 10.
E: Menos 10.
A: Ya, que es que tienes que multiplicar, menos 5, más 2, que es menos 10.
E: ¡Claro!, y ahora, ¿qué quedaría como resultado?
A: Menos 2a, menos 25.
E: ¡Shshshsh!
A: Menos 2a, menos 25.
E: ¿Qué?
A: Menos 2a, menos 25.
E: 3 por a, menos 5a, es menos 2a; luego quedaba...
A: Menos 25.
E: ... 15 menos, 3 por 5, 15, menos, 5 por 2, 10.
A: Que es menos 25.
E: Menos 25, ¿no?
A: Sí.
E: 3 por a, menos 3 por 5, menos 5 por a, menos 5 por 2. ¿Qué propiedad es ésa José Carlos?
A: Conmutativa.
E: ¿Conmutativa?
A: Sí.
A: Distributiva.
E: Distributiva. Pero, pero, pero apréndetelo. Conmutativa: tú me das yo te doy, tú me das yo te doy, tú me das yo te doy... Permutar, cambiar. Pero, ¡claro!, lo que no puede ser es distributiva eso... ¡Esto, conmutativa! El siguiente, a ver ¿David? El último, despacito.
A: “¡mm!”m, 2, -2a por 3...
E: ¿Cuánto es?

A: ¿Eh? 6, menos 6.
E: ¿Menos 6, qué?
A: Menos 6a.
E: Menos 6a, y la a que está pegada al 3, ¿qué hiciste con ella?
A: Menos 6a...
E: O sea, menos 2a, ¿tú que has multiplicado?
A: Menos 2 por 3.
E: Menos 2a por 3a, ¿no?; ¿esto es lo que estás multiplicando?
A: Sí.
E: ¿Y a qué es igual eso?
A: Menos 6a.

E: ¿Menos 6a? ¿Nayra, esto es igual a -6a?
A: No, no.
A: Menos 6a...
E: Pero Tomás si estuvieras más pendiente de aquí que de allá, se te haría muchísimo mejor. Y Nayra igual, y Rómulo igual; más pendiente de aquí que de lo de ustedes, porque si no, no se aclaran.
A: ...
E: ¿Están todos de acuerdo que es -6a?
A: No, no, no...
A: Sí.
A: Yo no.
E: A ver, ¿Rómulo?
A: Es 6a.
E: ¡Shshsh!, menos 6, ¿cuánto vale a por a?
A: a por a, a, a, a...
A: 2a.
A: ¿Puede repetir la pregunta que no la entendí?
E: ¿a por a?
A: 2a.
E: ¿4 por 4?
A: 16.
E: ¿Y a qué equivale, a 4+4?
A: No, no, no...
E: Dos veces 4.
A: No, sí, no...
E: Estamos multiplicando 2a por...
A: a por a, a ele... a elevado a 2.
A: 2 por a... ¿da eso?
E: ¿Por qué no?
A: Sí, ¿no?
E: ¡Shshsh!, ¿por qué no? A ver. Por aquí dicen a elevado al cuadrado. ¿Por qué? Saray, no escribas nada en la mesa.
A: ...
E: A ver...
A: Pues sí, porque 2, porque a elevado al cuadrado... es a por a.
E: a por a, es a elevado al cuadrado, 3 por 3, es 3 al cuadrado, 4 por 4, 4 al cuadrado, 5 por 5, 5

al cuadrado... Entonces sería menos 6, ¿qué más?
A: a al cuadrado.
E: a al cuadrado. ¿Qué más, Saray? .. ¿Cómo sigue?
A: No lo tengo...
E: No, ya sé que no lo tienes, ¿pero cómo sigue?
A: No, no sé.
E: ¿Yurena?
A: Más 3.
E: ¿Cómo que más si no hemos acabado con el paréntesis?
A: ...
E: Sigue Jaime.
A: ...

E: Hemos multiplicado por 3a, ¿ahora por qué falta que multiplicar?
A: Por b.
E: Por b, y entonces, ¿cómo es?
A: Menos 2a por b.
A: Pero si todavía...
E: ¡Shshsh!, pero escuchen. Escuchen porque yo no me he enterado ni ustedes se han podido enterar de lo que ella dijo. A ver, Yurena.
A: Menos 2a por más b.
E: Y por más b. Y, ¿cuánto es, menos 2a multiplicado por más b?
A: Eso no se puede hacer, ¿no?
E: ¿Cuánto es -2a, Irene, multiplicado por +b?
A: ...
E: Están haciendo esto, ¿no?
A: Se pone igual...
E: ¡Multiplicado, no sumado!
E: ¿Cuánto es -2a multiplicado por +b?
A: Menos...
E: ¿Menos?
A: Menos 2 por a más b.
E: ¿Por qué +b?, si estamos multiplicando. Si ya han dicho menos por más, ¿de dónde sale ese menos que dicen ustedes?
A: ...
E: Menos por más, menos, y luego: 2ab y se acabó. 2ab, porque las letras cuando están unas junto las otras...
A: ¡Ah!, ya... sí...
E: ... es que están multiplicando, ¿no? Entonces, ¿cómo quedaría la primera expresión, del primer paréntesis, Zeben?
A: Eh, ... menos 6a, menos 2a por b.
E: A ver José Carlos, ¿cómo quedaría?
A: Sí, sí... -6, -6 al cuadr..., -6 al cuadrado, ee”¡mm!”...
E: ¿Jaime?
A: ¿Más a, +b?
E: ¿Pedro?
A: ...
E: ¿David? .. A ver, ¿cómo quedaría? .. ¿Davinia?

A: Menos 6a al cuadrado, menos 2ab.
E: Menos 6a al cuadrado, menos 2ab. Porque estamos multiplicando lo que está delante del paréntesis, por todo lo que está dentro del paréntesis. Menos por más, menos, 6a al cuadrado, menos por más menos 2ab. Vamos a ver ahora el segundo paréntesis, ¿Ruymán? .. Es lo mismo o similar al primero. A ver. ¿Cómo te quedaría el primero? La primera parte del segundo paréntesis... ¿Qué hay que multiplicar?
A: 3b por menos b.
E: No, ¿antes que menos b no hay nada?
A: ¡Ah!, 2a.
E: Entonces, ¿cuánto te queda?
A: ...
E: ... pesado... un... A ver, ¿3b por 2a? .. ¿Jonay?
A: 3b y 2a, ¿no?

E: ¿Pero qué han hecho para multiplicar en el primer paréntesis?
A: ¡Eh!, 4 por y.
E: 4 por y.
A: Más 6.
E: Más 6.
A: Igual a 18.
E: Igual a 18. A ver, Jaime, el siguiente.
A: Eh! .. Eh! ..
E: Cuando haya paréntesis, o crean ustedes que va paréntesis, lo dicen.
A: Eh! .. Eh! ..
A: ¿Puede repetirlo profe el f)?
E: 4y más 6, igual a 18. No, el f) no lo hemos dicho, estamos diciendo el e).
A: Em!, 3 por x, más..., más,...
E: x por 2, de todas maneras se puede poner x por 2.
A: x al cuadrado...
E: ¿Sí? ¿x por 2 es lo mismo que x al cuadrado?
A: No.
E: 2x, entonces, ¿cómo sería?
A: 3 por..., 3 por x más 2x...
E: ¡Mjhmjh!
A: Igual a 54.
E: ¿No lleva paréntesis ninguno?
A: Sí, sí...
E: ¿Quién dijo sí?, ¿quién dijo sí? A ver, no importa. ¿Quién dijo sí?
A: Jonay.
E Jonay, a ver. ¿Dónde llevaría el paréntesis?
A: 3 por...
E: 3 por abres paréntesis, x+2x, cierras paréntesis, igual a 54. El doble de 5 menos 4, ¿Irene?
A: ... 5 menos 4...
E: El doble, el doble de 5 menos 4... ¿Inmaculada?
A: 2 por 5 menos 4. 2 por paréntesis, 5 menos 4.
E: ¿Por qué 2 por, paréntesis, 5 menos 4?, 10 menos 4 que es 6, por ejemplo. Con paréntesis no, porque ahí no tienes ninguna coma donde te pares... doble de 5 menos 4, sino doble de 5 menos 4...

A: ...
E: A ver h): el número que representa 15 unidades menos que x, Juan Jesús.
A: El número que representa, E”¡mm!”m!, 15 unidades...
E: ¿Zeben?
A: a por 15.
E: ¿A ver?
A: x menos 15.
E: x menos 15. El número que representa 15 unidades menos que x: x menos 15. ¿De dónde sacaste tú esa a? Te inventaste esa a. A ver Coello lo que cuesta una goma de borrar si 4 cuestan g pesetas.
A: Cuatro dividido entre g... ¿Eh?, es que no lo he hecho.
E: No importa, piensa, no lo digas a lo loco, a ver.... ¡Shshsh!
A: Eehh! .. g dividido entre 4.
E: g dividido entre 4. ¡Claro!, no 4 dividido entre g, sino el total dividido entre 4.

A: Ya, ya...
E: El triplo de 3+2, menos 4. Tomás. ... ¿Davinia?
A: 3x por...
E: ¿Por qué 3x? El triplo de 3+2, menos 4.
A: El triplo de 3+2, menos 4.
E: ¿Yurena?
A: 3 por 3 más 2, menos 4.
E: 3 por 3 más 2, menos 4. 3 por 3, 9, más 2, ...
A: Sí, sí, menos 4...
E: ¿Cuánto es 3 por 3, 9, más 2?
A: 3 por 3, 9, más 2, 11, menos 4.
E: 11 menos 4.
11 menos 4. Ésa sería la expresión, ¿no? Pero el resultado sería, ¿cuánto Yurena?
A: ... 11-4.
E: ¿Yaiza?
A: Eheheh, ...
E; ¿Saray, cuánto?
A: Siete.
E: ¿Cuánto?
A: Siete, siete.
E: Siete. 11-4, 7. Andan ustedes como lentos en cálculos tan sencillitos. El doble de un número más 8 es igual a 20. ¿Ruymán?
A: 2 por 8, ... 2 por más 8 igual a 20.
E: ¡Muy bien!, Jonay, el siguiente...
A: 2, ... 2x por h, más i.
E: ¿De dónde sacas la x?
A: ...
E: Léelo... léelo tú. A ver si te suena eso que escribiste, léelo. Léelo, a ver, léelo, léelo.
A: El doble de la diferencia entre h e i.
E: A ver, el doble de la diferencia entre h e i. ¿Te suena eso que tú escribiste, Juan Jesús? .. A ver.
A: Ee”¡mm!”, 2...
E: ¿Nayra?

A: h menos i por 2.
E: h menos i por 2, ó, 2 por h menos i. Cuando tú dices h menos i, ¿hay algo especial?
A: ¡Ah!, paréntesis.
E: ¡Paréntesis! h menos i, paréntesis. José Carlos, el siguiente. El cuadrado de la suma de 3 y 5. Los cuadrados son tus fuertes, a ver. El cuadrado de la suma de 3 y 5... ¿Cómo sería la expresión, Zeben?
A: 3 al cuadrado, más 5 al cuadrado.
E: ¿Están de acuerdo? ¿3 al cuadrado más 5 al cuadrado?
A: No.
E: Eso sería la suma de los cuadrados de 3 y 5, y aquí dice el cuadrado de la suma de 3 y 5.
A: 3 más 5, elevado a 2.
A: Entre paréntesis 3 más 5, elevado a 2.
E: ¿Y cuánto es?
A: ... Eehh...
E: ¿Cuánto es 3 más 5 elevado al cuadrado?

A: ... Eehh, 8 por 8, 16.
E: 8 por 8, 16. ¡Muy bien! 8 por 8 son 64.
A: 64.

15.2 TRANSCRIPCIONES DE LA SESIÓN AUDIO 2.

E: Porque ayer me despisté yo y no le di la vuelta... ¿Te situaste Daniel, Mari Carmen? ¿Se situaron? En la hojita segunda en el apartado m), estábamos. A contrastarlo con los que tengan al lado, los que tengan al lado, los que no, pues nada. Pero los que tengan al lado, a ver, si más o menos ya lo tienen terminado. Si no lo tienen terminado, si le pueden explicar al vecino... en un momentito. Y después ya pasamos a revisarlos... Puedes revisar con ellos, con ellos dos... con ellos si quieres... ... sin cambiarse de sitio. A ver, ¿qué les dio?
A: No.
E: A ver lo que les dio.
A: Sí.
E: Discutid un poco, por qué lo tienen distinto, si lo tienen igual, y por qué...
A: Tienes que poner aquí m...
E: Tienes que poner, no. ¡Creo que tienes que poner! Porque a lo mejor tú no tienes la razón. Tú también te equivocas, ¿no? ¿Alguna vez te has equivocado?
A: ...
E: No es cuestión de que se lo copien sino que se lo expliquen al vecino.
A: Tú pusiste aquí... cuatro por... x.
A: Más siete, ... igual a 49.
E: ¿Ya está?, ¿David, cómo va eso? Bueno.
A: ... siete por tres...
E: ¿Empezamos a corregir? .. A ver, ¿el 4?
A: ...
E: ¿El 4, quién es? A ver, ¿el 4, quién es? .. Pues, a ver Daida, el primero, el m). El cuadrado de la suma de 3 y 5.
A: 3+5 elevado a dos.
E: ¡3+5 elevado a dos!
A: Sí, ... sí.
E: ¿Sí? ¿Hay que poner algún símbolo? ¿Eh?
A: Sí, entre paréntesis.
E: ¿Sí?, ¿entre paréntesis, qué?
A: 3+5.
E: 3+5, ¿no? ¿De qué otra manera se puede leer eso, en vez del cuadrado de la suma de 3 y 5? Leer, no dar resultado, que eso no es dar el resultado. ¿De qué otra manera se puede leer?
A: 3+5 elevado al cuadrado.
E: 3+5 elevado al cuadrado. ¿Está claro? O sea, que da lo mismo que diga 3+5 elevado al cuadrado, que el cuadrado de 3+5. Para que no se equivoquen como ayer que ponían 3 al cuadrado más 5 al cuadrado. ¿Cómo se leería 3 al cuadrado más 5 al cuadrado? Estas cosas ya no se pueden equivocar, ¿cómo se leería esto?
A: 3 al cuadrado más 5 al cuadrado.
E: 3 al cuadrado más 5 al cuadrado, o la suma, ... la suma de 3 al cuadrado más 5 al cuadrado. Que no es lo mismo que lo que está escrito ahí, que el cuadrado de la suma. Entonces, la suma de cuadrados. Y otra cosa es el cuadrado de la suma. Igual que... esto es la suma de cubos, ¿no?, y esto es, ¿qué?
A: El cuadrado de la suma.
E: ¿El cuadrado?
A: El cubo de la suma.
E: El cubo de la suma, que se puede leer 3+5 elevado al cubo. ¿Está claro? Una cosa es el

cuadrado de la suma, que primero tengo que hacer la suma y elevarla al cuadrado, que es lo que tengo aquí, y otra cosa es que yo sume cuadrados, o sume cubos o sume lo que sea. A ver, el (4x2, 8), el 8, ¿quién es el 8?
A: Yo.
E: Pues venga Davinia. A ver. El precio de, calcular, el precio de m tenis a 3500 pesetas cada uno.
A: Yo soy el 7.
E: ¿Eh?
A: David es el 8.
E: David, a ver David.
A: m por 3500.
E: ¡Más fuerte!
A: m por 3500.
E: ¡Así es como tú tienes que hablar!, m por 3500, para que no...
A: Falta uno.
E: Sí. A ver, José Carlos...
A: Entre paréntesis x+y, Ee"¡mm!", ... elevado al cuadrado.
E: Muy bien, entre paréntesis x+y elevado al cuadrado. Ojo que hay que decir bien la palabra paréntesis, porque oigo yo hasta muchos profesores y no quiero decir dónde ni nombrarlos, porque hasta ustedes los conocen que dicen paréntises; se dice paréntesis, paréntesis, hipótesis, paréntesis. Hay que hablar clarito y la e es una e y la y es una y. Porque... en fin, ya que no quiere ser ninguno maestro, igual le da a uno por aprender idiomás y sale al extranjero, enseñan español y lo enseñan mal.
A: ¿Lo dije mal yo?
E: No, no, no, tú lo dijiste bien, pero me acordé ahora para que lo pronuncien bien. El cuádruplo del número de vídeos de un club...
A: No, es que nos falta uno profe.
E: ... más 7 vídeos... ¡Shsh! ¿Por qué no estaba usted atendiendo cuando... que lo dije? ¿Te acuerdas?
A: Falta el precio de m tenis.
E: El cuádruplo..., ¿qué dices...?
A: Que falta el precio de...
E: Lo dijo David antes y bien claro y bien fuerte. El cuádruplo del número de vídeos de un club más 7 vídeos son 39 vídeos. Ese interrogante, ¡fuera!, porque me colé yo ahí. Quítenle ese interrogante que sobra porque estamos, siempre. ¿Qué es lo que hay que leer siempre para este tipo de pregunta? ¿Se acuerdan, Irene, Pedro, qué había que leer para resolver esta pregunta?, ¿aparte del resultado? .. A ver, ¿Jonay? ¿Qué es lo que hay que leer? .. A ver, ...¿qué... qué es lo que hay que leer para resolver p)? Porque si yo no leo nada más que eso, ¿qué? No sabemos lo que tenemos que hacer, ¿qué es lo que hay que leer?
A: ...
E: A ver, ¿Jonay?
A: ¿Cómo expresarías...
E: ¿Cómo expresarías con signos, letras y números el cuádruplo del número de vídeos de un club más 7 vídeos, son 39 vídeos. Por eso no lleva interrogantes. No se está preguntando nada. Entonces, ¿cómo sería, Juan Jesús?
A: 4 por v más 7 igual a 39.
E: ¿Por v, por v...?
¡Muy bien! 4 por v+7 igual a 39. 4 por a, ó 4 por lo que quieras. El siguiente, Yaiza.

A: Ee”¡mm!”...
E: ¿Nayra? .. ¿Davinia? .. ¿Quién lo tiene?
A: Yo.
E: A ver, ¿Coello?
A: ¡Ee”¡mm!”! 7 +, entre paréntesis x por 2, cierro paréntesis, por 3+1 igual a 34.
E: A ver, a ver, 7+, x por 2...
A: Sí, x por 2, sí...
E: Sí, ¿y qué más?
A: Por 3 más cierro paréntesis...
E: Por 3 aquí...
A: Sí, por 3+1 igual a 34.
E: O sea, 7 añadiendo, ¿qué pasó ahí, qué es añadir...? ¿Qué es añadir una cosa? Tú estás haciendo un postre para traer aquí a la fiesta de octavo y dices, añadir aceite. ¿Qué es añadir aceite?
A: Ponerla.
E: Ponerla. Entonces eso en matemáticas traducido, ¿qué sería?
A: Suma.
E: ¡Sumar! Y, ¿dónde está la dificultad? Se quedan con la boca abierta por el gerundio ése de añadiendo, de añadir. Añadiendo. Fíjense la falta que hace no decir todos los días rollo, y qué rollo, y como esas cosas que dicen ustedes ahora... y no sé cuántas cosas más. ¡Claro! Y después llega una cosa de éstas y no entienden nada, no entienden nada. Añadir, el verbo añadir, no se paran a pensar qué significa añadir 7, añadiendo 7. O sea, 7 más. El triplo del doble de un número, o el doble de un número por 3, que es exactamente igual, más 1, igual a 34. Eso está correcto, está muy bien, Coello... 7 más, voy a ponerlo aquí mejor porque yo lo escribí mal. Por 3 más 1 igual a 34. Incluso como aquí no hay ninguna suma se puede poner 7+3 por, ¿no?, el doble de un número más 1 igual a 34. ¡Ay, los del añadir! ¿Quiénes no entendían la palabra añadir?, o por lo menos antes de yo decirlo. ¿Quiénes no? A ver, ¿todos la entendían? Entonces, ¿dónde estaba la dificultad al hacerlo? ¿Davinia, dónde te encontraste tú bloqueada para hacerlo? .. A ver.
A: En el triplo del doble de un número.
E: No, pero sí, es bueno que lo digas. O sea, el triplo del doble. ¿Te ha quedado claro ya el triplo del doble? El triplo del doble, multiplicar por 3 y multiplicar por 2, que viene a ser multiplicar por 6. Pero poniéndolo así. Y además, no hay que hacer nada más porque aquí no dice que reduzca sino cómo expresarías. Si alguien quiere reducir, reduce, pero aquí sólo dice cómo lo expresarías. A ver el siguiente que lo van a pensar un poco y después ya lo pondremos en común. ¡Vale! Pero pensarlo significa callados porque si no... no desconecto el casete..
E: Menos mal... que para nosotros no hay problema ninguno. Bueno nunca hay problemás porque decir uno lo que siente, no hay problemás.
Cinco amigos han ido a tomar un refresco cada uno. Todos han tomado lo mismo. En total han pagado x pesetas. ¿Cómo expresas el valor de cada refresco?, ¿Tomás?
A: x entre 5.
E: x entre 5, x partido por 5. ¿Está claro? Es el mismo que habíamos puesto, 4 partido por... Pero en general es eso, ¿no?, x dividido por 5. ¡Muy bien! A ver, el siguiente. ¿Daida? ¿Cómo expresarías la edad de una madre y su hijo hoy y dentro de 12 años, sabiendo que actualmente la edad de ella es 10 veces la de su hijo? Puedes ayudarte de algún cuadro. Ejercicios de ese tipo ya hemos hecho, ¿no? De un cuadro o de lo que ustedes quieran, yo le he puesto ahí “pueden”, no significa que lo tengan que hacer. Pero yo, una pista, como dicen

ustedes, una pista. A ver, ¿Daida?
A: Pues...
E: Ustedes piensen que fueran ustedes por ejemplo y su madre. Ya está Yurena otra vez despistada. No se despisten, que si el lápiz, que si la goma... No se resignen a decir no lo sé, sino a pensar...
¿Qué? A ver, ¿qué se te ocurre hacer a ti ahí? No que lo tengas hecho sino, ¡shsh!, y todos a escuchar. A ver. ¿Qué se te ocurre a ti hacer ahí?
Léelo, a ver si leyéndolo... Yo soy una persona que, te lo confieso, sinceramente, que si no leo las cosas, yo, o sea, las asumo mucho menos, o sea, yo puedo escuchar que me están leyendo y, y necesito tener, o sea, necesito, no, pero quiero decir que me entero muchísimo más si tengo el texto delante, si yo lo leo. No que me lo lean, sino si yo lo leo. ¿Cómo expresarías...? Léelo tú.
A: ¿Cómo expresarías la edad de una madre y su hijo hoy y dentro de 12 años, sabiendo que actualmente la edad de ella es 10 veces la de su hijo?
E: Bueno. A ver... x por 10, ¿qué?, ¿qué sería para ti, x por 10? ¿Eh? ¿Qué sería?
A: x la madre, multiplicado por 10.
E: No, pero, pero, mira a ver, tú misma has dicho, no, ¿por qué has dicho no? A ver, ¿por qué tú has dicho no? Explícanos porque tú misma te has dado cuenta que, ... y dices, no... ¿Por qué?
A: Porque no.
E: Pero, ¿por qué no?
A: Porque está mal, porque... multiplicar la edad de la madre por diez, no da...
E: No da la edad del hijo. Entonces, ¿cómo sería? .. ¿Nayra?
A: Yo lo hice en forma de un cuadrado. ¡Cuadrado como se hizo en la clase! El niño tiene x, y la madre tiene x por 10. Y dentro de 12 años el niño tiene x más 12 y la madre tiene x más 12 por 10.
E: ¿x+12 por 10?
A: No, ... y entonces tiene el hijo...
E: ¡Shshsh! Espera, espera, con calma, pues ya le están diciendo no, Juan Jesús le dice no a todo el mundo.
A: No, no, a todo el mundo.
E: ¡Ahí! No, ahí y cuando habla otro, a otro, hay que aclararlo. Él dice. Tú pusiste en forma de cuadro, ¿cómo?, ¿así? .. Vete tú allí rápido y ponlo, ¡corre!, ¡corre!, ¡rápido! A ver... Él ha tenido un gesto importante al ir a la pizarra, ¿saben cuál es? Que, normalmente, cuando a ustedes se le dice que vayan a la pizarra quieren ir con la libreta. Eso significa que alguien te dijo, porque si tú lo sabes hacer, aunque no lleves la libreta, lo puedes hacer. ¿Está claro? Muchas veces se llevan la libreta porque se los dijo el vecino, entonces tienen que llevar la libreta para copiar lo que tienen en la libreta. No, no porque su cabeza le permite hacerlo...
A ver..., ahora tú vas... tú lo mismo ahí, ahí, Zeben, vas a leer lo que está escrito en la pizarra. ¿Cómo leerías tú eso, si tú tuvieras esa expresión? .. Niño+10x, x por 10, x+12, x+12 por 10... A ver, ¿cómo lo leerías tú eso?
A: ...
E: No, pero como un texto. Como si fuera un texto del cuaderno. Olvídate de lo que está escrito aquí. ¿Qué expresa eso? Tú dilo.
A: Un niño, un niño tiene x...
E: Sí, pero estás hablando...
A: Un niño tiene x...
E: ... A ver...

A: Un niño tiene x años y su madre tiene, ee"¡mm!", 10 veces más que él. ¿Qué edad tendrá dentro de 12 años?
E: ¿Quién?
A: Los dos.
E: ¿Qué edad tendrán?
A: "¡mm!"j.
E: ¿Ahí te sale la edad que tendrán? .. ¿Ahí sale la edad que tendrán? Ustedes están resolviendo la ecuación. ¿Qué es lo que sale ahí? .. ¿Qué es eso que está escrito?
A: La expresión.
E: La expresión. ¿Se dan cuenta la diferencia? Una cosa es la expresión y otra cosa es la edad, preguntarte los años. Por ejemplo, hay una cosa muy importante, cuando ustedes tienen un niño pequeñito de infantil, si se fijan, el niño dice "¡mm!"m, que esta cantidad de pesetas que tiene es mayor que ésta. Tiene más, pero no sabe cuánto es más. Cuando el niño va subiendo los niveles y sabe cuánto tiene más, 28 pesetas, 29 pesetas, 2 pesetas, ... pero cuando es pequeño lo único que sabe es que es más. ¿Está claro la diferencia? 10 es expresión y otra cosa es la solución. ¿Está correcto eso?
A: ¿Eso... ? Sí.
A: Me parece que no.
E: A ver, Juan Jesús, te parece que no, ¿por qué?
A: Yo qué sé, pues, ahí tendrías que restar la edad que tiene, a ver, ...
E: Todos parece que están conformes con eso, ¿no?
A: Yo pienso que sí.
A: No.
E: A ver, toca la casualidad que ustedes hacen la operación, ¿qué edad tiene la madre dentro de 12 años? A ver.
A: Tendría que ser x por 12.
A: 12x más 10.
E: ¿Eh?
A: x por 10 más 12.
E: x por 10 más 12. Y entonces con eso que está escrito, Zeben, ¿qué, qué edad tendría la madre dentro de 12 años? Con lo que está escrito.
A: Eheheh...
E: Si tú haces esa operación.
A: 12x por 10.
E: ¿Cómo?
A: 12x por 10.
E: No, no, lo que está escrito aquí. Esto si tú lo resuelves, ¿qué te da? David, ¿qué te da esto si se resuelve?
A: x 120.
E: x 120, ¿verdad?, entre los dos...
A: ...
E: Con el bolígrafo en la mano, la voz baja... ¡fuerte!, que te oiga la señorita.
A: x por 120.
E: ¿x por 120?
A: x más 120.
E: x más 120, ó sea que dentro de 12 años la pobre madre la has cargado tú con 120 años... ¡Fíjate tú! Piensen los disparates, por eso les digo yo, los disparates, quiere decir, las equivocaciones, no, no lo estoy diciendo mal... me explico, ¡entiéndanme! Sino que hay que

uno revisar, es decir, esto tiene sentido. Igual que decía antes, Irene; no tiene sentido que la madre tenga, ¿no?, que el hijo tenga 10 veces la edad de la madre. Por eso es muy importante leer los ejercicios al final, para ver si tiene sentido. Entonces aquí, ¿qué pasa? .. Ustedes han dicho también x+10, ¡no!, x+12, ¿cómo dijeron?, ¡no!
A: ... No...
E: x por 10 más 12. x por 10 que era la edad que tenía la madre hoy, ¿no?
A: Sí.
E: +12, o sin paréntesis, porque no hace falta paréntesis, x por 10+12. ¿Está clara ya la diferencia? ¡Ojo, ojo, porque esto lo hemos puesto varias veces y se siguen equivocando! A ver, el siguiente: ¿cuál es la expresión de la suma de sus edades actualmente? ¡Mª del Carmen Sigut! .. A ver, ¿cuál es la expresión de la suma de sus edades actualmente? Rápido, porque si lo puso Zeben en la pizarra. ¿Cuáles son las edades actuales? Rápido y fuerte. A ver.
A: x y... y...
E: x y... Rápido, ¡venga!
A: x y, más 12x...
E: No, no. Las edades actuales de, de, ¿de quién estamos expresando las edades actuales?
A: De la madre y del niño.
E: De la madre y del niño. Entonces, ¿cuáles son las edades actuales? .. ¿Davinia?
A: x y x por 10.
E: x y x por 10. ¿Cómo sería entonces la solución al apartado b)? .. Sí, cómo se dice ahí, ¿cómo contestas tú al apartado b)?, ¿Coello?
A: x por 10, ... más x.
E: x por 10, más x, pero, ¿no estás seguro? Porque lo dices así como preguntando. x por 10 más x. La edad de la madre y la edad del niño hoy. Zeben, el apartado c).
A: Ee”¡mm!”, ...¿lo leo?
E: Sí.
A: ¿Cuál, cuál es la expresión del doble de la suma de sus edades dentro de doce años?
E: ¡A ver!
A: Es x+12.
E: ¡Bien!
A: x, entre paréntesis, x por 10... más 2.
E: Ese sería la d, la d... ¿Eh?
A: Esa sería la de la madre.
E: Sí.
A: Entre paréntesis x por 10, cierro paréntesis +12 por 2.
E: Por 2, ... o sea el doble: 2 por ¿no? Luego viene una suma, ¿de qué? De las edades de dentro de doce años. La suma de las edades dentro de doce años eran x+12, ¿no?, y x por 10 más 12. Sumamos todo eso y multiplicamos por 2. Ahora lo van ustedes a expresar y van a intentar reducirlo a lo más sencillo que se pueda esa expresión. Que ahí sí se pueden hacer cosas...
A: La de la madre sólo.
E: El ejercicio c). Reducirlo al máximo. Aquí para que te quedara el cuadro, ¿no? Bien, para que les quedara bien... Por ejemplo, ¿no? .. Se acuerdan que hicieron uno sobre una década... para que quede... Doble de la suma de sus edades dentro de 12 años... A ver, Rómulo, ¿cómo sería?
A: No sé hacerlo.
E: ¿Eh?
A: No sé hacerlo.

E: No sabes hacer el doble de otra cosa.
A: ...
E: ¿Eh?
A: No sé.
E: Pero pregunto, ¿no sabes tú calcular el doble de una expresión? ¿Qué se hace para el doble?
A: Multiplicar por dos.
E: Multiplicar por dos. ¿Y qué es lo que tienes tú que multiplicar por dos, según lo que dice aquí?
A: 12.
E: ¿Por qué 12? ¿Léelo a ver si te dice que es el doble de 12?
A: ¿12 por 2?
E: ¡Escucha! Léelo.
A: x+12...
E: No, no, no, no... Lee el apartado c).
A: x+12...
E: El apartado c), que lo leas tú el enunciado.
A: ¡Ah! ¿Cuál es la expresión del doble de la suma de sus edades dentro de 12 años?
E: Entonces, ¿tú crees que es 12 por 2?
A: 12 por...
E: ¿Yaiza? .. ¿Inmaculada? .. ¿Saray? .. ¿Irene? .. ¿Cuál es la suma de las edades, Tomás, dentro de 12 años? La suma de las edades dentro de 12 años, ¿cuál es?
A: x por 10 más 12.
E: ¿Sólo esa? ¿Ésa es la suma de las edades dentro de 12 años? Eso que me acabas de decir, ¿qué es?
A: La del niño x+12 y la de la madre x más 10 por 12.
E: ¿x más 10 por 12?, ó ¿x...
A: x por 10 más 12.
E: Exacto. Entonces, ¿cuál sería la suma de, de sus edades? ¿Qué había que hacer? .. Si tú dices que la edad del niño es x+12 y la edad de la madre es x por 10 más 12, ¿cómo sería la suma de las edades?, ¿Yaiza? .. ¿Cómo se expresaría? .. ¿Davinia? .. ¿"¡mm!"? .. ¿Cómo se expresaría? .. ¿Yurena? .. ¿Pedro? ..
A: Eee, ... 2x por 1 más 12 por 2.
E: A ver, ... ¿Tú dices aquí?
A: ¡Eh! Sí.
E: 2x por 10 más 12 por 2. Esto, ¿qué es? Esto que tú has puesto aquí, ¿qué es?
A: El doble de la suma de...
E: ¿Aquí está la suma de las dos edades? .. Esto es esto, ¿no? El doble de esto, ¿no? Está muy bien hecho el doble, ¿no?, porque hay que multiplicar por cada uno... paréntesis, es esto el doble de todo esto... ¿Pero aquí están las sumás de las edades? El ejercicio, ¿qué dice? Léelo otra vez... El ejercicio, ¿qué dice David? ..
A: ¿Cuál es la expresión del doble de la suma de las edades dentro de 12 años?
E: ¡Vale! Esto que está escrito aquí, ¿qué es, Pedro? El doble, ¿de qué?
A: De la edad de la madre.
E: De la edad de la madre, ¿cuándo?
A: Dentro de 12 años.
E: Exacto. ¿Y qué te falta entonces? ¿Ahí está lo que corresponde al ejercicio? ¿Qué te falta?
A: Eehh, la edad del niño.

E: Entonces... y entonces, ¿cuánto tienes que sumar ahí?
A: Eehh... x+12.
E: ¿Sólo x+12?
A: Sí.
E: ¿Yurena?
A: x+10+12.
E: x+10 por... ¡Fíjate que tú has dicho! Tú has hecho aquí el doble de la edad de la madre y aquí dice sólo la edad del niño dentro de 12 años más el doble de la edad de la madre, ¿dice el enunciado? .. ¿Qué dice el enunciado, Coello?
A: Eeehhh... ¿Cuál es la expresión del doble de la suma...?
E: Entonces, ¿cómo hay que ponerlo?
A: Eehh... 2 por x más 10, cierro paréntesis, ... 2 por abro paréntesis x por 10 cierro paréntesis +12.
E: ¿Sí? O sea es, tú has puesto el doble de la edad del niño dentro de 12 años, ¿no?
A: Espera que me confundí, ya sé.
E: A ver. A ver... Vete diciendo.
A: ¿Eh? ¡Ah! 2 por...
E: 2 por...
A: Sí, abro paréntesis...
E: Fíjate lo que dices, lee la última parte después del doble de... El doble de la suma. O sea que aquí tiene que haber una suma, porque dice el doble de la suma, aquí tiene que haber una suma. Vamos a ver ahora, ¿qué vamos a sumar? Fíjate Juan Jesús que estos esquemás son muy importantes, y Rómulo y Yaiza y todos, Irene, que están todos así... Doble de la suma, luego si hay una suma, ya hay que poner un paréntesis. ¿Qué es lo que vamos a sumar aquí, Coello?
A: Eehh, ... x por 10+12.
E: x por 10 más 12, ¿qué es?
A: ¿12?
E: x por 10 +12, ¿qué es? .. Aquí.
A: La edad de la madre.
E: La edad de la madre, ¿no? .. x por 10+12. Eso es una cosa, ¿no? ¿No? Se pone aquí un corchete porque nos hace falta. Y ahora, ¿qué más?
A: Eehh... A ver.
E: Ya hemos puesto...
A: ¡Ah! Sí.
E: ¿Y ahora?
A: Después cierro el paréntesis, eh!, después abro otro...
E: Sí.
A: +x+12.
E: x+12. La edad del hijo dentro de 12 años; la edad de la madre dentro de 12 años; las sumo y el doble. No tienen nada más que ir leyendo y traduciendo despacito. El doble significa multiplicar por dos, pues “2 por”; ¡se acabó! “La suma de”, pues tengo que poner una suma. ¿Qué es lo que voy a sumar? Así no se equivocan, así, no se equivocan. Vamos a seguir ahora. ¿Qué pasa? Porque ahora vamos a resolverlos de dentro para afuera; primero lo que está dentro. ¿Cómo resuelvo yo todo esto que está aquí? X por 10+12+x+12. ¿Se pueden quitar los paréntesis?
A: ¡Claro!
E: Irene, ¿se pueden quitar los paréntesis? ¿Cómo se quitaban los paréntesis aquí? Vete

dictando.
A: ¡”¡mm!””¡mm!”!
E: ¿Yurena? .. ¿Cómo quitamos los paréntesis esos que están dentro de los corchetes? .. ¿Cómo los quitamos?
A: ... solucionando...
E: ¿Eh?
A: Solucionando lo que hay dentro de ellos.
E: Pero, ¿cómo, cómo? .. No hay que hacer nada de memoria. ¿Qué es lo que vamos a hacer ahora? ¿Qué... cuál sería el camino que sigue, Zeben? .. ¿Davinia?
A: Se soluciona lo de dentro y...
E: Pero, ¿cómo? Pero, sí, pero, ¿cómo? No me vuelvan a decir que se soluciona lo de dentro porque en eso estamos. ¡Venga, ya! .. Zeben.
A: Pongo el primer paréntesis, lo resuelvo y me da: 10x+12.
E: Lo dejas como está, ¿no?, y, ¿se puede hacer algo más?
A: No, y el segundo se queda como está. Y después multiplico...
E: Pero entonces cómo queda. Vuélvemelo a decir. Dos, ... tú di cómo queda la expresión para que la gente la vaya apuntando Yo te voy diciendo si está bien. A ver.
A: Eh... en el primer paréntesis me queda...
E: No, desde el principio.
A: 2 por...
E: 2 por...
A: 2 por, corchete, paréntesis, paréntesis, eh! 10x+12, cierro paréntesis, más x+12 cierro el paréntesis y el corchete. Y después pongo 2 por 10x+2 por 12+2 por x+ 2 por 12.
E: ¡Muy bien! Pues eso. Eso se puede hacer. O sea, él lo único que ha hecho es decir: como aquí no tengo sino signo más, no afecta para nada. Y esto es el doble por x por 10, más el doble por 12 más el doble de x, +2 por 12. Eso está bien. Se puede hacer de otra manera. Eso está bien.
A ver, sigue Irene, ¿qué hacemos ahora ahí? ¿A qué es igual esa expresión? ¿Cómo seguiría? .. ¿Davinia? .. ¿Mari Carmen? .. ¿José Carlos? .. ¿Jaime? .. ¿Juan Jesús?
A: ¡”¡mm!”m! ¡Eeehhh! Sumás a.
E: ¡Ahí tenemos una expresión! Ahora igual a qué, para seguir trabajando, igual a qué.
A: Igual a...
E: ¿Pedro? .. ¿Cómo sigues ahí? .. ¿Jonay?
A: Pues multiplicando.
E: A ver, a ver. Tú dilo...
A: 20x.
E: 20x.
A: +24.
E: +24.
A: +2x.
E: +2x.
A: +24.
E: +24. Y todos los que han dicho que no saben, realmente no saben hacer eso, Irene, por ejemplo... Tú no me digas a mí que tú no sabes hacer 2 por x y por 10. O sea, no me digan a mí que no. Ustedes son tremendamente cómodos, ¿eh? Pero, pero muy recómodos, cómodos no, recómodos. Porque decirme a mí que no saben hacer ahí 2 por 10 y por x. Yaiza sigue, tenemos 20x más 24+2x+24. Sigue.
A: “Eh...”.

E: ¿Qué hay que hacer ahora? .. ¿Si se puede hacer algo más?
A: Sí.. 20x le sumás las 2x.
E: ¡Muy bien! ¿Cuánto queda?
A: 22x.
E: 22x.
A: Y sumar 24 más 24 que da 48.
E: 20x+48. ¿Se puede hacer algo más? ¿20x+48? .. ¿A ver?
A: 22x, ... 22x.
E: ¿Eh?, perdón, sí. 22x+48. ¿Se puede hacer algo más?
A: No.
E: No. ¿Por qué?
A: Porque 48 no tiene x.
E: Porque 48 no tiene x. ¿Cómo se llaman los términos que tienen x y los que no lo tienen? Los que no tienen las letras iguales con los exponentes iguales. No son ¿qué?
A: Semejantes.
E: Semejantes. Bueno. Andamos un poco... A ver, el siguiente, que creo yo que... ¡en fin! Es fácil... Lo lees, Rómulo, a ver si sale sobre la marcha.
A: No sé hacerlo... Pero yo lo leo, yo lo leo.
E: ¡La suerte que tienes... porque tú me dices a mí que no sabes hacerlo con la cabeza que tienes! ..Pero... la nalgada que te pegaba. Ni se sabe, así, con todas... Como si tú me dices... No lo sé. Tienes madre tú, quiero decir, viva. Todos tenemos madre. No, ¡claro!, no. Cada uno tiene la desgracia de no tener su madre para... cuando llegue a casa.
A: Pues sí.
E: ¿Tienes, ¿no? Entonces fíjate tú si tú le dices a tu madre no, yo no sé calentar la leche, pues para ti es...
... ¿Está claro? Bueno era dificilísimo éste. Una cosa horrible. A ver el siguiente. Si ya somos capaces de que ninguno se equivoque, ni ninguna. Así que pongan la cabeza para que ninguno se equivoque. Lo leen bien, lo resuelven y después de resolverlo lo vuelven a leer, a ver, se equivocaron. Vuélvanlo a leerlo los que ya lo tienen terminado. Para que no se equivoquen nada.
A: ...
E: A ver, ¿ya está? ¿Ya está revisado, vuelto a leer después de terminado, a ver si nadie se equivoca?
A: Sí.
E: Tomás, todos, revisando todos. Para ver si ahora somos capaces de que nadie se equivoque. Saray, ¡ojo!, porque tú no tienes por qué quedarte detrás.
A: ...
E: ¿Hay aquí alguno aficionado a la filatelia?
A: ¿Qué es eso?
E: A coleccionar sellos.
E: ¡Vaya! Menos mal que alguien no sabe la palabra. Filatelia, coleccionar sellos. No han visto: Exposición filatélica, que a veces hacen en las fiestas de Mayo y en muchos sitios. A coleccionar sellos, ¿hay alguno aquí? .. ¿Yurena? .. ¿Zeben? .. Apréndanselo todos “Filatelia”. ¿Está claro?, coleccionar sellos, filatelia. Pues a ver Yurena, ¿qué hiciste? Ese se lo dejamos a los coleccionistas. A ver, ¿cómo hicieron el problema? A ver, léelo, por favor... Léelo, léelo, el ejercicio 7... ¡Shshsh!
A: Jorge tiene un número de sellos que representamos por a. Indica el número de sellos que tienen sus amigos. a) Pepe tiene la mitad que Jorge.

E: ¿Solución?
A: a partido por dos.
E: a partido por dos.
A: ... partido por a, ¿no?
E: ¿Cómo, cómo? ¿El qué está partido por a?
A: Un medio partido por a... Un medio por a.
E: Un medio por a, ó, a partido por dos, que es lo mismo. Un medio por a, es lo mismo que a partido por dos porque esto es como si tuviera, ¿no? ¡Ojo, ojo!, que estas cosas son muy importantes. Bueno tiene 5 sellos menos que Jorge. A ver, Zeben.
A: a-5.
E: a-5. ¿Está claro? No, 5-a. Sino 5 sellos menos que Jorge: a...
A: ... el 5 como dijo profe.
E: ¿Eh?
A: Lo de Pepe, ¿cuánto dijo?
E: a partido por 2... María tiene 100 sellos más que Jorge, Juan Jesús.
A: a+100.
E: a+100. ¡Ojo! Para que nadie se equivoque. Julio tiene el doble que María... y 3 sellos más... A ver, Jaime.
A: 2 por, 2 por 100.
E: ¿2 por?
A: 100.
E: ¿Por qué 2 por 100?
A: Porque es el doble de María.
E: A ver, ¿Rómulo?
A: 2 por 100+3, ¿no?
E: ¿Tomás?
A: a por 2+3.
E: ¿a?
A: ...por 2 más 3.
E: ¿Por qué a por 2?
A: ...
E: Espera a ver. Pero vamos a ver las razones. ¿Por qué tú has puesto a por 2?
A: Por el doble.
E: Pero el doble de quién. No es el doble de cualquiera. No te ha puesto el doble que Jorge, que te ha puesto el doble que María... Y, ¿cuántos tenía María?
A: 200.
E: ¿200? ..¿no?
A: 100.
E: ¿María tenía 100? Coello, ¿María tenía 100?
A: No, no... 100+a.
E: 100+a. A ver, entonces Haridian, ¿cómo sería el apartado d)?
A: 2 por, entre paréntesis, a+100, cierro paréntesis +3.
E: 2 por ¿entre paréntesis?
A: a+100...
E: Sí.
A: Cerramos paréntesis, +3.
E: ¡Esto sí está bien!
A: Sí.

E: Pero no entiendo por qué... ¿quiénes no lo tenían, quiénes lo tenían bien? .. Muy bien.
A: Yo lo tenía, entre paréntesis, pero puse a+200+3.
E: No, porque tendría que ser 2a+200. Porque es el doble del total, no es el doble de 100 sólo, sino te dice el doble de todo lo que tenía María. Si tú te acostumbras a hacerlo como lo hiciste antes, no te equivocas. Como tú hiciste antes el de la madre y el hijo. Si hubieras puesto: María tiene a+100, al poner el doble te das cuenta que es una suma, y que tienes que... ¿Está claro? Bueno. Pues ahora déjenme las hojitas éstas ahí que yo las voy a recoger y cojan su cuaderno, que lo tienen, y cojan la ficha 16. ¡Qué es facilísima!
A: ...
E: La ficha 16 es muy fácil. Yo voy recogiendo esto. ¡Shshsh! No, no, pero para que cada uno trabaje tiene cada uno su material. No hace falta hablar.
A: ¿La ficha?
E: 16. La que... el otro día hicimos la 15, la 16.
A: ...
E: ¡Es muy fácil! ¡Muy fácil!, porque tienen aquí la teoría que les hace falta.
A: ¡Profe, profe!
E: ¿Ya está? .. el de hoy. ¡Vale! ¡Muy bien! ¡Shshsh!
A: ...
E: ... de lo que era el perímetro.
A: Sí.
E: ¿Alguno no se acordaba? Rómulo, ¿quién más no se acordaba de lo que era el perímetro? Todos los demás sí. Pues muy bien. Entonces más fácil la ficha... Calcula el perímetro de esa figura. A ver... ¿Irene? .. ¿Cuánto es?
A: 20+4+18+2.
E: ¡Vale!, y, ¿cuánto es?
A: "¡mm!"m, ¿a ver?
E: ¡Vete haciéndolo en alto! ¡Vete haciéndolo en alto! No pasa nada. ¡Venga!
A: 44.
E: 44. ¿Está claro? ¿Todos los que lo tenían hecho les dio 44?
A: Sí.
E: ¡Muy bien! 20 + 8 + 20 + 18 + 2 + 4, 18 y 2, 20, 20 y 20, 40, 44. ¡Ojo con el segundo! Parte de esta figura no está dibujada. Hay n lados iguales en total, todos de longitud 2. Halla su perímetro, ¿Coello?
A: Eehh, a ver... el 4.
A: El 2, el 2.
A: El 2, n por 2.
E: n por 2. ¿Alguien ha puesto otra cosa? Los que se equivocaron, tachen. ¿Alguien ha puesto otra cosa que no sea n por 2?
A: Sí.
E: A ver, ¿qué pusieron? Pedro, ¿tú qué pusiste?
A: n por 2.
E: ¿Cuánto?
A: n por 2.
E: n por 2. ¿Alguien que haya puesto otra solución? ¿Todos pusieron n por 2?
A: Sí.
E: ¡Qué bien! Todos, todos, todos, o alguien no lo puso. ¿Yurena? ¿Quién más no lo puso?
A: Yo puse n+2... Profe, es que lo hice todo rápido ahí.
E: No es que hacer rápido, sino con, rápido sí, ¡Como dice aquello! ¡Sin prisa, pero sin pausa!

A ver, Yurena y, ¿tú qué pusiste, mi hija? ¿Tú qué pusiste? .. ¿No lo habías hecho?
A: Sí.
E: ¿Qué pusiste? A ver, no pasa nada.
A: 30.
E: 30, ¿por qué?
A: Porque sumé todos los lados.
E: ¡Claro! Como si estuviera cerrado el polígono, ¿no? Pero dense cuenta que está abierto, además que lo decía el texto. O sea, no hay 15 lados, sino n lados, ¿no? A ver, el siguiente. A ver si somos capaces de hacerlo rápido, ¿Jaime?, el 3 para quitar esta ficha.
A: h por 4.
E: ¿h por?
A: 4+7.
E: ¿+7?
A: Sí.
E: ¿Por qué +7, José Carlos?
A: No, +7, no, +3.
E: ¿Más?
A: 3.
E: ¿Más?, ¿qué? Pero es que no se te entiende... Yo te entendí un 3, cuando dijiste la t. ¿Tú no le entendiste la t como un 3? ¿O tú entendiste t? ¿O tú no entendiste nada? .. ¡Fuerte! A ver.
A: h por 4+t.
E: h por 4+t. ¡Otra expresión!
A: 4 por h+t.
E: 4 por h, hay que pararse un poquito, porque no hay paréntesis, y si decimos seguido parece que 4, paréntesis h+t. ¿Está claro? 4 por h, nos paramos +t. ¡Ah! No está claro. ¿Inmaculada?
A: ¡No! Sí, sí.
E: ¡Ah! Digo que si ustedes lo dicen 4 por h+t. Es esto. Y esto no es. Es 4 por h, hay que pararse, porque es otro término, +t. El siguiente. ¿Pedro?
A: 16u... al cuadrado.
E: ¿Están de acuerdo, 16u al cuadrado?
A: No.
E: ¿Nayra? .. ¿A qué es igual el perímetro de un polígono? ¿16u al cuadrado no es multiplicar 16 por u al cuadrado? ¿Pedro? ¿Sí o no?
A: Sí.
E: ¿Y eso es el perímetro? ¿Se calcula así? Rómulo, cierra un momentito por favor, para acabar esta ficha. Gracias. ¿Cómo es entonces?
A: ¡Eehh! Multiplicándolo todo.
E: ¿Multiplicándolo todo? Mira a ver el ejercicio 1. El principio del ejercicio 1, ¿qué dice?
A: El perímetro de esta figura es igual a...
E: ¿Eh?
A: El perímetro de esta figura es igual a 6+3+4+2.
E: Entonces, ¿cuál sería el perímetro ahí?
A: 5+6+5+u+u.
E: +u+u. ¿Y eso cuánto es? ¿Nayra? ¿Cuánto es eso? 5+5+6+u+u, ¿cuánto es? .. ¿Ya lo hiciste?
A: Sí, 16u.
E: 16u. No. ¿Zeben?
A: Yo profe. 16+2u.

E: 16+2u. 16+2u. El último... 16+2u. El último a ver... ¿Rómulo? .. A ver. El último es muy importante. A ver... n+n... date cuenta que estás calculando, ¿qué? .. Yaiza, ¿qué estamos calculando?
A: El perímetro.
E: El perímetro. ¿Cómo sería la expresión del último?
A: ¡Eehh!
E: ¡Shshsh! ¡Cállense porque hay que dejar esto terminado! José Carlos... lo puedes dejar bien. A ver.
A: 2p.
E: 2p.
A: +2m.
E: +2m.
A: +2n.
E: +2n.
E: 2p+2m+2n, ó p+m+n por 2, ó m+n por 2 más p por2, todo eso vale, ¿no? Es lo mismo que está ahí, pero repetido. Porque el perímetro es la medida de todo. ¿Está claro? Bueno. Colóquenlo bien, por favor.

15.3 TRANSCRIPCIONES DE LA SESIÓN AUDIO 3.

E: El ejercicio segundo ... es ... ¿qué figura es ésa?, ¿qué figura es?
(Los alumnos murmuran unos segundos)
E: Pentágono ... pero no se ha oído ... tengo yo que repetirlo ... ¿qué figura es ésa?
As: Pentágono.
(La profesora también repite la palabra junto con los alumnos)
E: A ver ... ¿quieres leer Alicia los lados de ese pentágono, lo que está expresado ahí? ¿Qué letras tiene, para que lo aclaremos para todos?
A: e y ...
E: ele, ele ... sí, es que la "l" de la máquina saben que hace así. e e e e I (ele) e e e e l (ele)
E:... Importante... una fórmula que yo les voy a decir a ustedes que es ésta.
(La profesora escribe en la pizarra L^2 SER, mientras habla).
E: Cuando ustedes están estudiando, en general, en esta parte a lo mejor nos quedaríamos en ésta ... eso es una fórmula que significa l (ele) cuadrado o sea, leer dos veces, leer una, que puede ser general, la ficha entera a ver de qué va, la ficha ... en ese caso concreto. Luego, leerla por partes. Luego subrayar ... así como si están trabajando un tema de naturales o preparando un control o geografía o lo que sea.. hacer un esquema y luego un resumen. Cuando se haga todo eso, dicen los expertos en educación, que ya se va a saber el tema. Pero hay que hacer todo eso ... No de entrada lo leo una vez y no me entero y digo que no sé hacerlo. En ese caso como no tienen ni que subrayar ni que hacer esquemás, nos quedaríamos aquí, o sea, leerlo una vez entero, a ver qué pasa, a ver qué me va, si va de geometría, si va de álgebra, si va parecida a la ficha anterior y después a ir por partes.
E: ¿Acabaron la 17? ... sí ... ¿alguien no la ha acabado? ..... que venga Yurena para que corrijamos ésa que es del mismo estilo que la del otro día ...
E: Estamos revisando la 17 bien para que la recojamos ... la revisemos rápido, sin equivocarnos...
E: ¿Qué dio el resultado de la 17, a? Fuerte.
A: 13.
E: ¿Trece? El perímetro ... ¿qué ... c6mo se calcula el perímetro de una figura?
A: Sumando.
E: Sumando ¿qué?
A: 9 y 4.
E: Di tú una figura en general, olvídate de esa que está ahí ... si yo quiero hallar el perímetro de esta pizarra ... ¿qué tengo que sumar? El perímetro ¿qué entiendes tú por el perímetro? ¿qué has visto en el perímetro de la página anterior? ... en el ejercicio de la página anterior... ¿por qué has puesto tú trece?
A: 9+4.
E: ... y los otros lados ¿qué? ... Jaime.
A: ehh ...
E: Fuerte.
A: eh ... 4 + 4.
E: más cuatro ...
A: y 9 + 9.
E: y nueve más nueve ... ¿por qué?
A: Porque se suman los lados.
E: Se suman las longitudes de todos sus lados, Tomás. Táchalo y ponlo bien ... además lo tenían hecho la, la teoría la tenían en el ejercicio primero de la ficha anterior. Cuando ustedes

no se acuerden ... que estén trabajando ... no se acuerdan nada porque han estado un día con trescientas peor que yo ... van a la ficha anterior y para eso lo tienen ahí ... esto no es ningún examen ... a ver, José Carlos, el siguiente.
A: eehh ... f por 3.
E: f por 3 ¿de qué otra manera se podría expresar?
A: 3x.
E: 3x ¿de qué otra manera? Venga ...
(La profesora da chasquidos con los dedos)
A: f + f + f.
E: f + f + f. Muy bien. El siguiente David.
A: eehh
E: Fuerte ... para que no tenga que repetir ...
A: e por 4 más l (ele).
E: ¿más?
A:... más l (ele).
E: más l (ele)... e por 4 más l (ele) ... ¿de qué otra manera Jonay?
A: sin .... eehh
E: e + e + e + e ... ¿ya te lo aprendiste bien, José Carlos?, que dos por x es más e... al cuadrado e + e + e + e ¿más?
A: l (ele).
E: ... más l (ele) ... de la de la l (ele) tienes que saber la e bien que para eso está muy claro...e + e + e + e ¿qué? Yaiza, el siguiente.
A: "¡mm!".
E:... de la b
A: "¡mm!" v 2v
E: Y ¿cómo quedarla? ¿se puede hacer algo más ahí? v + v ...
A: 2v ... (La profesora interrumpe al alumno)
E: 2v + 20 + 12 ¿ se puede hacer algo más?
A: Sí. (Los alumnos responden en conjunto)
E: Nayra ... Nayra...
A: 2v + 32.
E: 2v + 32. Yurena ¿está claro? 2v + 32. El siguiente, Daida.
A: r por 4.
E: r por 4. ¿Qué otra manera, Miriam?
A: 4r.
E: 4r ¿no? 6 David.
A:-...o r r ...
E: ¿Y tú te llamás David?
A: r + r + r + r.
E: Vale ... el siguiente...eehh Juan Jesús.
A: "¡mm!""¡mm!""¡mm!" ... 6 + 14 + 4 + 24 ...
A: 6 (Este alumno corrige al anterior).
A: Sí, sí.
E: A ver
A: 6 + 14 + 4 y 44.
E: ¿Por qué 6 + 14 + 4? Explícalo porque algunos están poniendo una cara de asombrados.
A: Porque sumé "¡mm!""¡mm!" 3 + 3.
E: Sí.

A: Después 7 + 7.
E: Sí.
A: Y después 2 + 2.
E: 2 + 2 ¿Alguien ha hecho otra cosa?   David, ¿qué pusiste?
A: 3 por 2 + 3 por 2 + 2 por 7.
E: Muy bien ... ¿alguien ha hecho otra cosa? Hagan el resultado total, que sean los resultados totales ...
A: 24 (Algunos alumnos repiten la misma cifra)
E: ¿Cuánto?
As: 24.
E: ¿24?
A: Sí.
E: Bueno...¿Alguien se le ha ocurrido que esa raya en medio afectaba? .... No ... sino todos hicieron el per... ¿qué?
A: Yo hice otra cosa.
E: A ver ... Coello.
A: eehhh 7 + 2, entre paréntesis, después por 2 más ... entre paréntesis ... 3 por 2 ... y da 24 ..
E: Muy bien ... y el resultado da el mismo ¿no? ... Tengan en cuenta que, a veces, cuando a ustedes les aparece este tipo de figuras empiezan a pensar que la línea que tienen dentro afecta ... y no afecta para nada ... es como cuando uno compra una casa o tiene una casa ¿no? o conviene ahora para el año que viene hay aquí un ... una sala de música y entonces ponen un tabique ahí pero el exterior sigue siendo el mismo ... lo que nos interesa que es el perímetro, sigue siendo el mismo ... y en ese caso el área sería la misma, lo que pasa que yo divido como me conviene ... ¿no? ..como cuando uno cambia los muebles de su sitio pero no interviene para nada saber ... a ver José Carlos ¿tú qué pusiste?
A: Nada ... es que yo no había puesto nada y después puse los resultados..
E: No habías puesto nada...
A: Porque ...
E: Pero ... ¿por qué? a ver Explica tú por qué no habías puesto nada.
A: No lo entendí.. no ...
E: Pero ¿qué es lo que no entendías ¿qué tenías que calcular? ... pero pregúntamelo ...
E: y ¿qué es el perímetro?
A: “¡mm!””¡mm!””¡mm!”m.
E: El perímetro de un polígono, ¿qué es?
A: Espere ... lo de ...
E: ... a ver ¿cómo lo expresas tú un poquito mejor?
A: Longitud de..
E: Muy bien ... ¿longitud de ... ? No te entendí lo que dijiste ahí en medio, pero no importa ... es que no ... yo, por lo menos no te he entendido ... no sé los demás... la longitud rrr”¡mm!” y no sé lo que dijiste ahí en ese trocito...la longitud ¿de qué?
A: de un solar o ...
E: de un solar, por ejemplo, ¿no? de un solar de esta forma. Y ¿cómo calcularías tú esa longitud? ¿Cómo calculas tú la longitud de un solar? Ahora van a cambiar este colegio para otro lado o van a hacer lo de las fiestas de mayo ¿cómo calculan los solares?
A: Por sus lados.
E: Por sus lados ¿no? Contorno. El contorno y el perímetro es lo mismo. Por eso, cuando uno se va a tomar las medidas, lo que pasa es que ahora ya se trabaja ... ahora ya se está volviendo a recuperar lo de las modistas ¿no? Decían contorno, perímetro ... y decían

contorno de pecho y te median por aquí, contorno de cintura y te median por aquí ... contorno o perímetro que es lo mismo ... contorno o perímetro ... todos los lados ... entonces ¿cómo lo vas a calcular ahí, en ese caso? Pero rápido ...
A: 3 + 3, 7 + 7 y 2 +...
E: Claro, porque sería ... aunque no tenga las dimensiones ahí, Tomás, ¿ te das cuenta? aunque no tenga las dimensiones ahí, es que ¿cómo se llamaba eso que te quedaban dos, dos líneas paralelas y otras dos líneas paralelas? Se acuerdan que eso lo vimos un día ... decíamos que los, los trozos, los tramos las longitudes de paralelas que quedan entre paralelas son iguales. Si esta línea y esta son paralelas (la profesora dibuja en la pizarra) ¿no? l; ésta y ésta que son paralelas miden lo mismo, que es lo mismo que ocurre ahí ¿no? .. a ver ... el siguiente. Lee el siguiente ... Cristo.
A: En las fichas anteriores, si recuerdas, has utilizado eehh números ...
E: Tú ¿con qué los relacionas?
A: ... que ...
E: Ahí dice, ¿que le relacionen? ... Yurena ...
A: ... que se relacionen ...
E: Ah, que se relacionen ... a ver...
A: La señora álgebra ...
E: ¿álgebra? ¿se dice álgebra? (Algunos alumnos se ríen)
A: al ... alge ... álgebra.
E: ... álgebra...sigue.
A: La señora ari.. aritmética
E: ... parecido a Geometría, nombre de señor o de señora
A: Geometría.
E: Claro y dilo otra vez, dilo otra vez porque sabes matemáticas (alumnos y profesora hablan a la vez) ... rápido
A: La señora ... álgebra ... álgebra (un/a alumno/a le ayuda) La señora aritmética y la señora Geometría ...
E: ... a ver ... di los tres nombres ... ee esta.. rápido ...
A: La señora álgebra, la señora aritmética, aritmética y la señora geometría (se oyen risas) (..)
E:... mi madre ... álgebra, aritmética y geometría ... a ver ... álgebra, aritmética y geometría (los alumnos repiten con la profesora) ¿Hemos dado algo de álgebra? .. Inmaculada ...
A: Sí..
E: Sí. ¿Hemos dado algo de aritmética?
E: Sí. Y ¿hemos dado algo de geometría?
As: Sí.
E: Hace un momento ¿no? estábamos hablando de pentágonos, perímetros, etc. ... Sigue leyendo, Coello.
A: ¿Yo? Y para ello, representaremos, con elementos geométricos los números, las letras, las fórmulas, etc. (...). Para que sea más fácil nos vamos a poner de acuerdo sobre algunas situaciones: Primero, cuando te encuentres...
E: De acuerdo ¿no? “3” es lo mismo que: 3 x 1 ó que 1 x 3, “a” es igual a a x 1 que 1 x a. Por eso ustedes cuando tienen 3a + a, 3a + a ¿cúanto es?
A: ¿3a + a?, 4a
E: 4 a, ¿por qué? Porque la a esa que está ahí es como 1 x a ¿no? Sigue.
A: eehh. Actividad uno, rellena los cuadritos en a) 2= 2x
E: no..dos por ...
A: 2 por 1 = 1 por 2.

E: Vale. 2= 2 por 1 = 1 por 2.
A: 6 = 6 por 1= 1 por 6.
E: Sigue, ...Zeben.
A: Cuando te encuentres con una letra sola, te vas a imaginar..
E: No, ahí hay una a, que te encuentras con la unidad, porque en los verbos, la a, la e, son distintos tiempos y entonces hay que escribirlos bien y hay que leerlos bien ... venga.
A: Ejemplo, “a” es lo mismo que a x 1.
E: ... ¿Claro lo que significa es ficha? Son que estamos poniéndonos de acuerdo para los convenios. Ustedes ya van con ventaja porque, entre otras cosas, ustedes ya han dado 7º, han dado algo de letras, hemos dado este año algo de letras, ya lo sabían más o menos pero ahora nos vamos a poner de acuerdo para que cada vez que aparezca una cosa de éstas ... va a ser así ... ¿Hay alguna duda de esta ficha, hasta ahora? Bueno... entonces seguimos ... ahora piensen ... piensen, piensen sobre la 19 y la 20 ... trabajen sobre la 19 y la 20 ... un ratito ...
E: ... Mari Carmen, tú ... en la (ficha) 19.
A: Ahora (...) por un rectángulo (...) ejemplo 3.
(La alumna se supone que ha leído el enunciado de la ficha).
E: ¿Qué dice el primer acuerdo, David?
A: 3=3 ...
E: No eso no dice el primer acuerdo, lo que dice la ficha 18 ¿qué dice? ... a ver ... el primer acuerdo ... léelo ...
A: ... un momento ...
E: No, si no hace falta de memoria ... el primer acuerdo, ¿cuál es?
A: Cuando te encuentres un nú ...
E:.Fuerte.
A: Cuando te encuentres un solo número, un número ...
E: Ahora el primer acuerdo que acaba de decir él¿no? ¿qué viene a decir el primer acuerdo? a ver ... ya de memoria... ¿qué quiere decir el primer acuerdo? ... que cuando hay ...
A: Un número ...
E: Un número o una letra ... es lo mismo que multiplicarlo por 1, que no varía ¿no? por eso aquí como aparece el 3, Mari Carmen ¿a qué es igual el 3?
A: eehhh.
E: Lo tienes ahí escrito ... a 3 ¿ 3 a qué es igual? Lo tienes ahí escrito ...
A: (por lo bajo) 3 x 1
E: 3 por 1 pero más fuerte que no se te oye ... 3 x 1, 1 x 3 sigue...
E: ... como todo el mundo tiene la ficha delante.
A: Ejemplo t.
E: No, ejemplo t no, todavía no lo han leído, quedaría representado ...
A: Quedaría representado así.
E: ... y qué, ¿cómo explicarías tú eso que está ahí? Tú imagínate que yo estoy aquí y no tengo la ficha ¿cómo me explicarías cómo está representado? ... a ver, ... supuesto que ahora entra la señorita por ahí y no tiene la ficha delante ¿cómo le explicas tú como queda representado eso? ¿cómo traduces tú lo que está ahí dibujado a palabras para explicarlo a una persona que no lo tiene ... delante ... Si tú tuvieras que explicarlo y yo no hubiera traído hoja y le estoy explicando a ustedes cómo se representa esto ... a ver, ¿cómo lo expresarías? ¿Qué características tiene, Daida?
(La alumna responde pero no se le entiende)
E: ... dividido en tres partes ¿así? ... a ver ¿Están todos de acuerdo en que bastaría eso para yo hacerme a la idea de lo que está escrito ahí?, ¿un rectángulo dividido en tres partes? Por

ejemplo, esto es lo primero que está escrito ahí ...
A: Dice uno ...
E: Un rectángulo dividido en ...
As: Tres partes iguales..
E: Tres partes iguales y, ..y si a mí se me hubiera ocurrido, ... ustedes me dicen un rectángulo dividido en tres partes iguales y yo hago esto (la profesora dibuja en la pizarra). Vamos a suponer que están iguales ... ... ¿el que está ahí dibujado primero?
A: No.
E: ¿qué falta? ¿qué quiere decir?
A: 1 x ... 3 x 1
E: 1 x 3 y 3 x 1 ... eso es lo que está ahí representado en ese rectángulo ¿cómo, cómo ustedes?
A: No ... un rectángulo está dividido en tres partes.
(Los alumnos hacen comentarios)
E: Entonces es que está dividido en tres partes, ... ¿Esto es lo que está dibujado ahí lo primero?
A: No.
E: Si ustedes me dicen a mí se representa con un rectángulo dividido en tres partes iguales ... yo dibujo esto...(Los alumnos vuelven a hacer comentarios).
E: Ah, entonces no lo han dicho bien ... piensen la importancia que tiene cuando uno dice las cosas y sobre todo en matemáticas para hacer ejercicios y problemás, decir bien lo que quieren decir... ¿qué caracteríticas, Daida, tiene ese rectángulo para que yo me haga clara idea de lo que tú me quieres decir? de lo que está ahí ... ¿qué tienes que decir?
E: Un rectángulo ...(Los alumnos dan varias respuestas entrecortadas).
E ... divididos en tres partes iguales ... horizontalmente y verticalmente, es que lo de horizontal y vertical es si tuviéramos una línea sola porque esta parte también es horizontal ... sería de base 1 ¿de altura 3? o de base 3 altura 1 ... ¿está claro? ... porque línea vertical, línea horizontal muy bien...pero claro ... es, tres partes, fíjense que eso es muy importante en matemáticas, pero muy importante ... tres partes ... un triángulo dividido en tres partes ya nos dimos cuenta que teníamos que decir iguales y además es ... para que yo lo haga exactamente sería 1 por 3, 1 de base y 3 de altura o al revés. Seguimos ... a ver Jonay Sigue ...... es en la letra, léelo bien...
A: Cuando te encuentres con una letra sola, te vas a imaginar..
E: ... te encuentras por la unidad ¿está claro? ..Entonces ahí ¿qué podrías poner tú en esas dos figuras que tienes ahí? en las dos del ejemplo t ... ¿ que se te ocurre a ti lo primero de todo poner ahí, Yurena? ... Juan Jesús ...
A: t “¡mm!””¡mm!””¡mm!” t por 1.
E:... o sea poner en la figura un 1 en la base ¿no? y en la otra un 1 en la altura ¿no? pues ahora ya, ya pueden dibujar los otros dos, los otros cuatro que tienen ahí, los ejemplos que tienen ahí ... representarlos bien ... a ver ... Cristo que parece que ya lo tiene ... ¿qué pusiste tú para representar con rectángulos el 2?
A: Puse 1 por 2 y 2 por 1. ...2 = 1 y entonces puse ...
E:¿2 = 1? Uiuiuiuiui ... ¿cómo iría el mundo 2 = 1? Esto parece ¿cómo es? miren esa lógica del 1..
A: Nooo ... 1 por 2 ...
E:... Pues mira que todo el rato que llevamos explicando cómo se dice eso y ahora lo dices ..“echado” ... lo que estás es ... de mí, que no es lo mismo..(El alumno intenta disculparse mientras la profesora habla).
E:... base y altura, el rectángulo tiene que ser como si yo te digo ... ese muchacho cuando él tiene su nombre y su apellido y su cabeza y...

A: ... yo puse un 1.
E:...en base un 1 ...
A: ... partido entre dos.
E: ¿cómo va a ser 1 partido entre 2?
A: ... puse en el ... de la base..ésa..del rectángulo.. el 2.
E: ¿ en la base un 2?
A: Sí.
E: No, no, sí muy bien y ... ¿un 1 en qué?
A: ... en la base de los lados ...(Los alumnos murmuran las respuestas).
E: ¿Cómo ... “¡ssh...!”h ... cómo se llama eso? La base..
A: Ah, en la altura un 1 y en la base un 1
E: Vaya ...menos mal ... la altura ... y dividiste entre dos partes iguales ... porque has dicho dos partes y tienen que se iguales, venga el despiste ... ni te despites ni hagas despistar al vecino porque hasta ahora no se ha despistado ... no lo vayas a despistar tú ahora ... a ver ... bien, a ver ... x ... ¿qué pusiste Yurena? para representar el apartado b.
A: Puse un rectángulo.
E: Sí.
A: ...en la base puse x
E: Bien.
A: y en la altura 1.
E: Vale ... y ¿nada más que esa representación hiciste? ... Vale. Daida.
A: Un rectángulo y debajo puse 1 y en la altura x.
E: ¿Pusiste sólo ese? Vale, muy bien ... no ... no pero no importa. Ahora, ..¿qué pasó con esa x? ¿Le pusieron divisiones o no le pusieron divisiones?
As: No, no.
E: ¿Alguien le puso divisiones? ¿a la x? ¿José Carlos? ¿Le pusiste divisiones?
A: No, porque no se sabe cuánto vale ...
E: No se sabe cúanto vale ... Está claro ya, ya van viendo, ya van asumiendo lo que significan las letras? ¿Van asumiendo ya? A las letras no les puede poner uno el valor que se le ocurre, eso es como cuando uno compra una letra en Penedo y después la tiene que rellenar para pagar la nevera ¿entiendes? Allí está blanco y después hay que ponerle lo que toque.
E: Representa con rectángulos, y, Jaime ... ¿Cómo representaste y?
A: Puse ... eehh ... eehh ...
E: Altura ¿de qué? ¿del pozo?
A: ... del rectángulo.
E: Ah, del rectángulo no, de un rectángulo, de uno que tú has dibujado. Un rectángulo con ...
A: ... con base y.
E: Con base y ... y ¿está dividido?, Oswaldo.
A: No.
E: No. ¿Y altura?
A: Uno.
E: Uno ... Y ¿nada más que eso pusiste?
A: ... y otro ...
E: Sí.
A: ... ah no ...
E: No, vale.¿Alguien puso los dos?
As: Sí.
E: Sí, acostúmbrense a poner los dos porque como suele ocurrir, eh, que no siempre los

dibujos en los problemás vienen igual, por ejemplo, yo, a veces, aquí no porque me interesa que ustedes lo vean, pero según el espacio que tengo para poner un examen ¿no? lo pongo colocado de una manera o de otra, para aprovechar la hoja ... a ver...dime .... a ver ... el b ...
A: eh ... a ver ... ¿lo de los rectángulos de abajo?
E: Sí, sí, sí rectángulos...
A: ... lados iguales ... que uno de base tenía 1 y ...
E: Claro ... exacto ... seis partes iguales ... no pueden decir seis lados porque seis lados sería un hexágono ... no se puede decir.. y ustedes enseguida se fijan en los balones de reglamento que si tiene esta forma, que si tiene la otra, que si tiene ¿no? le dibujan ... entonces sería 6 por 1, 1 por 6 ¿no? seis partes iguales o seis unidades iguales...¿no? porque la unidad no tiene porque ser metros, centímetros ¿no? sino que es ... si yo tengo un espacio ¿no? (La profesora escribe en la pizarra) ... lo puedo dividir en las unidades ... no sé ... lo puedo dividir, bueno, pues en dos partes ... la unidad vale esto, lo puedo dividir en cuatro partes, la unidad vale esto, lo puedo dividir en ocho partes, la unidad vale esto ... la unidad es una cantidad arbitraria, por eso, se puede decir seis unidades iguales que no coinciden seguro con las que puso el compañero. ¿Está claro? ... la 20 ... vamos rapidito ...... lo que hemos hecho anterior es fácil vayan grabando ya eso de que cuando hay letras no se pueden poner ... ¿sabes? ... lo que está escrito ... leer bien lo que está escrito y luego intentar resolverlo... no se acostumbren a la primera enseguida y a preguntar ni al padre, ni a la madre, ni a la señorita, ni al profesor, sino a sus cabezas primero...(Los alumnos trabajan en la nueva ficha).
E:... uno, por ejemplo, 3 por x ¿cuántos rectángulos va a haber ahí?
A: Dos.
E: Yurena.
A: Dos.
E: ¿Dos? ¿por qué? (La alumna responde).
E: ... tres y en otros la x ... a ver a ver ...
A: Yo hice el rectángulo 1 y después...
E: ... ¿qué dices tú que pusiste? ¿dos rectángulos separados? un rectángulo ... fíjate arriba donde pone 2 por 3 y z por t ... ¿hay dos rectángulos?,..¿para representar 2 por 3? . pero es la misma expresión ... 2 por 3 ó 3 por 2 ... no es 1 para el 2 y otro para el 3 ... ¿te das cuenta? o sea, no es que hayas puesto dos rectángulos, uno para una dimensión y otro para otra dimensión ... Coello ¿cómo lo pusiste tú?
A: Yo igual que Cristo.
E: ¿Igual que Cristo? Y Haridiam ...
A: Igual que Cristo.
E: Igual que Cristo. Tengan en cuenta que, a veces, cuando ustedes dicen 3 de altura...hacen esto ... (la profesora escribe en la pizarra) porque lo que es 3 es esto, luego esto es lo que tenía que estar así en todo caso...porque les he visto a todos por ahí que tienen algunos fallos de ese, de ese tipo ... ¿está claro ya que 3 por x es un sólo rectángulo de base 3 y altura x o de base x y altura 3 ... Yurena ¿te quedó claro? ... otra cosa es que hagamos dos representaciones pero no dos rectángulos distintos, uno para una y ahora mismo es como si tú dijeras... la base se te convierte en un rectángulo y la altura se te convierte en otro rectángulo... el siguiente... 4 por b... Nayra...(La alumna responde)
E: ¿Eh? (preguntando). (La alumna responde).
E:... Ah ... pues perdona ... no hace falta regla ... ahora no estamos aquí en dibujo ni estamos en otra hora ... ahora lo que nos interesa es el concepto matemático de cómo representar una expresión con un rectángulo, es lo que nos interesa ahora que sea más o menos perfecto eso ya es otra cosa ... a ver este ... José Carlos ¿qué pusiste en 4 por b?

A:... en la altura x y en base 4.
E: Y ¿por qué ésa ... dónde sacaste 4x? ... ¿dónde sacaste esa x?
A: Ah ...
E: Pero vuélvelo a decir ...
A: en la x va una b.
E: la b ... pero no lo borres, táchalo.
A: ¿El qué, profesora? ¿de altura?
E: Un rectángulo de base 4 y altura b, por ejemplo.
A: No.
E: ... de base 4 y altura b.
A: No. (Otro alumno dice que sí)
E: o de base b y altura 4, ya está el señor rectángulo...da lo mismo 4 por b que b por 4, o sea a estas alturas no te has enterado que es lo mismo, ...tengan en cuenta que un solo rectángulo ...
A: Sí no, yo hice los dos...
E: Y estoy viendo por ahí que han hecho dos ...
A: Sí.
E: Pero dos significa dos expresiones distintas del mismo rectángulo ... (la profesora escribe en la pizarra) ... o hago esto ... 1,2,3,4...yo creo que sean iguales ¿no? o hago esto ... aquí lo que le quieran poner...¿no? .. b ... 1, 2, 3 y 4 pero lo que no pueden hacer es representar el 4 y encima representar la b ¡ojo! ó 4 por b ó b por 4 ... lo que no pueden hacer es representar 4 aquí y aparte la b, porque entonces es lo mismo que hizo Yurena pero pegadito.
A: Ah no..
E: ¿Está claro? Un solo rectángulo ... bueno ... 4+ b .. a ver ¿qué pasa ahí? ... 4 + b ¡ojo con la ficha donde tienen 1os convenios! que la tienen que ir a mirar para saber qué hacen con eso ... 4 + b ¿Ahí hay alguna diferencia, Haridiam, con la ficha anterior ... con el ejercicio anterior? ..el b con el a ¿se distinguen en algo? ... ¿qué se suman? ..entonces ¿cómo hiciste tú la representación del apartado a?
A: Yo...
E: El a.
A: ¿El a? ... rectángulos...
E: ... ¿y en el apartado b?
A: Puse ...
E: ¿Pusiste ... ? ¿A alguien le da igual? ... entonces ¿qué pasó? ..fíjate bien
a ver; ... ¿le da igual uno que el otro? (Los alumnos responden).
E: ¿Eh? .. éste ... déjame ver cómo lo hiciste.
A: Yo puse 4 en la base y al la...y en la misma base que está al lado b.
E:... ¿se va a caer el 4? ...el 4 no lleva nada debajo y se va a caer y además ... y yo, yo le haría casi una ahí... ahí y aquí ¿qué pasa? ¿qué va? ... ¿x? ... a ver mira a ver..
¿ya tú vas a jugar con la tiza? ... a ver ..¿qué pones ahí...no, no ... ya sé que tú hiciste eso pero mira a ver ... si tú me dices por ... tú esto por ... ¿hasta dónde va ir el 4?
A: Hasta aquí.
E: ¿Hasta aquí? ¿y la altura cuánto vale?
E: ... en este ejercicio, toma, yo te lo presto..
E: Entonces cuando yo tengo un número solo ¿a qué es igual?
A: A 1.
E: Entonces ¿se puede poner ahí un 1 o no? Se puede poner un 1 ahí? ¿Sí?
E: Les he dicho 1 ¿han ido ustedes a leer los convenios otra vez a ver si tiene alguna relación y les da alguna pista para representar eso? ... a ver... Jaime ... Elizabeth.

E: ¿Por qué pusiste tú eso que está ahí? ..eso que está en la pizarra ¿por qué lo pusiste?
A: Porque como era...
E: Ah, está bien ... te estás riendo y encima lo tienes bien...lo único que pasa que no saben buscar la explicación pero eso está bien ... ¿cómo se representa el 4, Daida? ..4 por 1... entonces ahí ¿se puede poner un l? ¿a la izquierda? Sí...cuenta con uno ahí ..4 por 1 ¿no? ... y que no se cae el 1 quítale esa raya de debajo a los 4 o a los 7 una raya debajo ...eso es... de verdad... a ver no, no ¿qué va a estar? y la b ¿qué pasa?,..vayan otra vez al convenio, cuando hay una letra sola ¿a qué equivale?
A: A la letra por 1.
E: A la letra por 1 ... entonces ¿qué pasa con el otro lado de acá?, ¿cuánto vale? ...
(Los alumnos dan respuestas)
E: Por eso está bien ... 4 por 1 + b 1 ... pero no basta con hacer las cosas bien, sino saber por qué están bien, no basta con hacer las cosas mal o decir "esto está mal" y tú lo tienes bien, algunos estarán muy seguros, gracias, algunos meterán mucho ruido, yo lo tengo mal .... mal.
A: Yo lo tenía así pero ...
E: ¿Sí? .... ¿lo tenías así? ...Oh, pero no importa, lo que quiero decirte, lo que quiero es que lo entiendan que va el 1 aunque no lo pongan y lo que entiendo Zeben lo que entiendo ... es que si yo le pongo... si esto mide uno...esto tiene que medir 4 veces más aproximadamente ... ¿no? Claro, lo que puedo poner es, por ejemplo, esto ... no debo poner... (la profesora escribe en la pizarra) bueno, “poner” ya saben ustedes que el papel aguanta todo, yo no puedo poner que esto... ustedes comprenderán que no estoy trastornada... que esto resulta raro ... si este trocito mide 1 cómo va a medir todo eso 4. ¿Está claro? o sea, esto tiene que ser proporcional... si yo pongo aquí, por ejemplo, 4 sería más o menos esto... como ven no es un 1... para ser 4 por 1 tendría que ponerlo por aquí... más o menos... ¿no?, claro... tiene que ser proporcional... pero se tienen que fijar y tienen que leer e intentar aprender por sí mismos, por sí mismos, ustedes ya son hombres y mujeres que tienen que aprender a ser autodidactas, aprender por sí mismos ... nosotros somos ... son buenas y nada más ... y pregunta al final, Haridiam,..¿son iguales? ¿las representaciones?, ¿son iguales lo que da 4 por b y lo que da 4 + b? ... pueden ser iguales porque ... ¿cuantos rectángulos aparecen en 4 por b? ... uno ... ¿cuántos términos, términos, se acuerdan que yo les dije dos veces o ... recuerdo haberlo dicho ... los términos se separan por el signo + ó - fuera del paréntesis, ¿se acuerdan cuando hacían ustedes las operaciones? se coge hasta que llega al + o hasta que llega al -...entonces aquí 4 por b ¿cuántos rectángulos hay? 1 ¿cuántos términos hay? ¿en 4 por b? ¿en 2 por 3 cuántos términos hay? ... a ver ... Inmaculada ... términos,..¿hay dos términos en 4 por b? Si los términos, escucha Yurena, si los términos se separan por los signos + o - fuera del paréntesis, ¿cuántos términos hay en 4b, Inmaculada? .. los términos se separan en matemáticas, en álgebra se separan por el signo + o - fuera del paréntesis. ¿Cuántos términos hay en 4 por b? .. Inmaculada... ¿dos? .. Coello... Cuando ustedes tienen muchas letras y números y tal... para hasta el +, hasta el -, ¿no? fuera del paréntesis...entonces hay un término, no hay suma ahí ... un término, 4 por b es un término, 4 por b + 7 ¿cuántos términos tiene Daida? ...4 por b + 7 ¿cuántos términos hay? ... dos... pero a ti no se te ha oído nada... David no te ha oído nada David, ¿cuántos términos hay en 3 x + 8 + y? (La profesora escribe en la pizarra) ...3 x + 8 + y ¿cuántos términos hay?
A: Tres.
E: Tres. ¿Cuántos hay semejantes, José Carlos? ... 3 x + 8 +y...¿Cuántos términos hay semejantes ahí? ... Yurena ...
A: Ninguno.
E: Ninguno...3 x 8 1y ...
E: ¿Cuánto?

A: Uno.
E: Uno.
A: Uno.
E: ¿Que tiene? ¿qué dimensiones?
A: Eeeehh ... b de altura y 4 de base.
E: (repitiendo junto con el alumno esto último) de base. Y también se puede representar b de base y 4 de altura (esto también lo repiten todos los alumnos). Rectángulo.4+b ¿cuántos rectángulos necesita?
A: Dos.
E: Dos. Y además que estén pegados que es la misma expresión ¿no? Si yo tuviera que representar 3x que está arriba ¿no? Ya lo tienen representado delante ... 3x + 4b ¿cómo sería? (La profesora escribe en la pizarra).
E: 3x + 4b ... Háganlo. Pongan el enunciado para representar esto a ver qué pasa. 3x + 4b. (Los alumnos reproducen en voz baja sus cálculos mentales).
E: 3x + 4b a ver cómo lo representarían ¿cuántos rectángulos hacen falta?
A: Dos. (Otros alumnos repiten después).
E: Dos, el primero ¿qué dimensiones tiene, Cristo?
E: El primero ¿qué dimensiones tiene? el primer rectángulo para representar 3x + 4b. ¿Qué tienes tú para hallar la dimensión?
E: ¿Eh? ... que eso, o sea, ¿cómo se llaman esas dimensiones del rectángulo? Dime ¿cómo se llaman las dimensiones de un rectángulo? (Los alumnos hablan por lo bajo).
E: Esto sería el total ¿no?, pero las dimensiones, cuando a ti te dan los datos de un rectángulo ¿qué dimensiones son?
A: La base.
E: La base. ¿Qué más?
As: La altura.
E: y la altura. Entonces ... es ... para representar... Coello... 3x + 4b ¿qué dimensiones tiene el primer rectángulo? (Un alumno responde por lo bajo).
E: ¿3x de altura y 4b de base?
A: No.
A: 3 de altura y x de base.
E: 3 altura y x de base por ejemplo. (Un alumno habla por lo bajo mientras la profesora explica).
E: El primer rectángulo y pegado ...
A: 4 de ...
E: 4 de altura y b de base o al revés, ahí sí que se puede cambiar porque aquí no me han puesto ninguna condición. Yo puedo poner x por 3 ó 3 por x ó 4 b ó b por 4 ...¿ de acuerdo? ... qué poco piensan...

15.4 TRANSCRIPCIONES DE LA SESIÓN AUDIO 4.

E: ... que cuando teníamos nosotros por ejemplo, un sólo término ... ponme un ejemplo de un sólo término ...
A: eeehhh ....
E: ... escucha y cállate ...
A: ¿un sólo término?
E: Sí, tú ponme un ejemplo donde aparezca un término nada más ...
E: ¿Cómo? .. Tú mismo...
A: eeehhh 2, ...
E: Otro.
A: 4.
E: Otro.
A: No sé.
E: Otro "¡mm!""¡mm!" ... Cristo..un ... otro ... otra expresión de un sólo término.
A: 3 ¿no?
E: Sí, muy bien ... otro ...
A: 5x..
E: 5x (mientras ha habido esta conversación la profesora ha estado escribiendo las respuestas en la pizarra) ... porque me daba la sensación ... ¿por qué ustedes dijeron esto, Juan Jesús? ... ¿por qué no te saliste de poner nada más que una letra o un número?
A: Porque...
E: ¿Entendiste con un sólo término o una letra o un número? ¿no?
A: Sí..
E: ¡Ojo, eh! que siempre que no haya signo + 6 - fuera del paréntesis todo es el mismo término ... (la profesora escribe en la pizarra)... todo esto ... como no hay ningún + ni ningún, todo eso, es un sólo término ... ¿está claro? ..¿cuántos rectángulos hacían falta, Jonay, dibujar para representar un término?
A: ¿Lo tengo que hacer?
E: "¡mm!" (afirmando).
A: 1.
E: ¿eh?
A: l... 2...
E: ¿Para representar un término cuántos rectángulos hacen falta? ... para representar b ¿cuántos rectángulos hacen falta?
A: 1.
E: 1 ... y ¿para esto? ... y ¿para esto? ..
As: l...1...2 ...
E: ¿Uno? ¿Seguro? ... ¿cómo se representa esto, Daida? 3x. Yurena ¿cómo se representa esto? ¿cómo se podría representar esto?
A: con un rectángulo ...
E: un rectángulo ... y ¿qué? ¿qué características tiene ese rectángulo?
A: que la altura es 3 y la base x.
E: la altura de 3 y la base x... ó...
As: la base 3 y la altura x.
E: la base x y la altura 3..¿está claro? ...para cada término un sólo rectángulo ... lo que pasa es que ustedes ahora sólo están trabajando con menos letras ... pero es para un término uno sólo ... para dos términos un ejemplo de dos términos, David un ejemplo de dos términos una

expresión ... que tenga dos términos ...
A: 5 por x + 2.
E: 5 por x ... muy bien...5 por x + 2 (la profesora lo escribe en la pizarra) ... como aquí hay un + y no hay paréntesis ... hay dos términos si yo hubiera puesto esto ¿cuántos términos hay?
As: eehhheehh ... dos ... dos ...
E: ¿Por qué 2? ¿dónde está ahí un + o un - fuera del paréntesis?
A: ... no es + 2... 5 por x y 5 ...
E: 5x 5 por 2 pero también lo puedo representar con un sólo rectángulo ¿no? ... porque si yo pongo esto así ... 1, 2, 3, 4, 5 ¿no? y aquí pongo 1, 2 y aquí pongo x ... ¿no?, ¿cuál es el área de este rectángulo? ¿el área? ... para calcular el área ahí Yaiza ... esta Sara ¿cómo sería? ¿ cómo sería el área de un rectángulo? en general ... pero fuerte ... ¿cómo sería el área de un rectángulo? ..el área de un rectángulo cualquiera.. si tú quieres forrar esa pizarra ahora porque vas a adornar la clase ¿cómo calculas el papel que te hace falta? ... ¿eh? ...
A: ... ¿se suman todos sus lados?
E: Si yo ¿se suman todos sus lados..pongo una tirita de papel.. claaaro así ... ¿ya está forrada la pizarra? ... eh, Sara... ¿está forrada la pizarra?, ¿qué es eso que tú me acabas de decir? Daida ...
A: El perímetro.
E: El perímetro ... pero el perímetro no me sirve para ... para ocupar el área...(Los alumnos comentan sobre la idea).
E: ¿La base por la altura? entonces ¿cuál es el área de ese rectángulo? ...(Los alumnos siguen dando respuestas al azar).
E: ¿Cómo se halla el área de un rectángulo?
A: Multiplicado por la base ...
E: Se multiplica la base..¿cuánto vale la altura?
As: Dos.
E: La altura vale ... 2... ¿hasta aquí?
As: No. 2x...
E: ¿La altura vale este trozo? ...
As: No.
E: ¿Cuánto vale la altura?
As: 2x.
E: ¿2x? ¿2 multiplicado por x?
As: No.
A: 2 + x + x.
E: 2 + x ... 2 + x ... luego ¿qué hay algo ahí x+2?, ¿no? ... entonces, esto ¿puede expresar el área de ese rectángulo?
A: Sí.
E: ¿La base cuánto vale?
As: 5.
E: 5, y ¿la altura?
As: 2x ... 2+x ...
E: 2 + x 6 x + 2 ¿no? Entonces, ¿esto es el área del rectángulo? ¿sí o no?
As: Sí.
E: Entonces, la expresión de esto es el área del rectángulo ... pero claro, es que Cristo decía ... puede ser dos rectángulos pero dentro de ese que luego lo voy a sumar, retomar... ¿no? .. porque si yo pongo aquí ... que es lo que tú me decías ¿no? ... tú decías 5x + 10 ¿no? 5x ¿qué es? ... este trozo de aquí,..¿no? ..¿cuánto mide esto? ... Sx ... te estás perdiendo la explicación

más importante, Yaiza e Irene...5 por x, que es este rectángulo ¿no? ..y este de aquí abajo ¿cuánto mide? ...
As: 2 ...
E: El rectángulo ... dentro del área ... ¿cuánto mide? ... este trozo..
A: 5.
E: ¿5? ...cinco será este borde pero este trozo ¿cuánto mide?
A: 10.
E: 10 ... entonces, 5 por 2 + 5 por x porque es el resultado de esto que da lo mismo ... luego, aunque tú pongas aquí dos rectángulos, los puedes unir,..¿no? y eso sería el área del rectángulo.
A: ¿5x + 10?
E: Claro, 5x + 10 que es lo mismo 5 por 2...+ 5 por x ... o 5 por x + 5 por 2... o sea, que la representación en geometría coincide con la representación que hemos hecho en álgebra ... y que coincide además con lo que ustedes ya tenían que conocer ... base por altura ... área de la pizarra de la superficie de la pizarra, base por altura... área del corcho, base por altura ... área de la ... del cristal, qué hace ese señor para llenar un cristal lleno de libros coge la base y coge la altura ... base por altura..y si no el cristal se cae.. no la varillita de alrededor que sería el perímetro ... porque con la varillita de alrededor no se cae el cristal ... ¿de acuerdo? ... bueno... sigan trabajando ahí a ver qué pasa ...
E: Haridiam, ¿hay alguna duda de la ficha 21, el apartado a ... o sea al principio de todo? ... ¿hay alguna duda? ¿algo que tú no entiendas ahí? ... no hay nada que no entiendas ... o sea.. son distintas representaciones ¿no? distintas representaciones de esas expresiones que tienen dos términos ¿no? ... lo mismo que hacíamos ayer por partes ¿no? 3 por 1, 1 por 3, lo único que pasa que ahora aquí lo colocamos juntos ... porque es el mismo término ... están pegados, están yuxtapuestos, están como dicen ahora, los chalés esos de moda ¿no? chalés adosados ... ¿no? chalés adosados ... todas esas urbanizaciones que están haciendo por ahí ¿no? pegados los unos a los otros ... el siguiente ¿hay alguna duda..2.x+6? ¿hay alguna duda en cuanto a ver ... porque da lo mismo ... ¿no es lo no es lo mismo que tú pongas lo que tú decías antes ... no es lo mismo que tú sumes estas dos ... que pongas la base multiplicado por la altura? ... ¿no es la misma área? ¿sí o no? ¿es la misma área? ... ¿no es la misma área si tú sumás estas dos? ... si tú vas a forrar esta pizarra ¿no? y pones un papel hasta aquí ... y luego pones otro papel hasta aquí ¿no es lo mismo que si tú pones un papel corrido? ... ¿no ocupa lo mismo?
A: Sí.
E: ... y ¿6 no ocupa lo mismo que tú lo pongas de una manera u otra? Tú imagínate que tienes ... 6 folios ... esos que tienes ahí ¿no? ...los 6... tú los puedes poner de muchas maneras.
E: ...y ¿éstos no son 6 ? ... (La profesora escribe en la pizarra)
E: ... pero sigue siendo la misma área ... luego, son áreas equivalentes ... ¿alguien se había dado cuenta de dónde salía el 2 por 3? ¿o no? ..el 6 éste que se transformó en 2 por 3 ¿se habían dado cuenta o no? .¿ninguno? ... ¿ninguno se había dado cuenta ? ... es que claro si tú faltas un día y yo no puedo estar repitiendo mi hijo... porque la gente tiene que seguir... la gente tiene que aprovechar ... ¿está claro que 6 da lo mismo como lo coloque ... que 6 es lo mismo que 2 por 3? Si yo tengo que ocupar 6 cuadraditos o tengo que usar 6 cuadraditos ... no se acuerdan el ... también, por ejemplo, el cubo de Rubick, ese de colorines, que se giraba ... ¿no? ... para ponerlo todo en las mismás caras del mismo color ... los cubos esos que hay ¿no? se llama el cubo de Rubick ... bueno, pues esos también todo cambian pero no le quitas ningún cubo ... lo cambias de posición ... pero no le quitas ningún cubo ... aquí estamos igual pero estamos en el plano ... es como si yo digo ... yo, me regalan 7 cristales me regalan 7 cristales...yo necesito poner unas ventanas, pues yo digo ... según qué me interese ... me

interesa poner 6 y 1, me interesa poner 4 y 3, pues porque me interesa poner un trozo de madera en la puerta y no quiero cristales arriba ... o sea, pero yo ocupo los 7 cristales... entonces, aquí ¿cuánto había que ocupar, Cristo, cuánto había que utilizar? ...
A: eehhh...
E: ¿Cuánto había que utilizar en el ejercicio b? ... eso que tú me acabas de preguntar ... ¿cuántos había que utilizar?, ¿cuántas unidades había ahí? ... para usar ... Juan Jesús...
A: eeehhhh ...
E: Haridiam...6 ... había que usar 6 porque había un 6 ... 2x + 6... en 2x ya no había problema porque era igual que ayer ¿no? entonces había que usar 6...pues se puede usar de todas las maneras posibles ... intenten ustedes ahí deba...ahí debajo no, por detrás ... en esa ficha ... en esa ficha ... representar 6 cuadraditos iguales de todas las maneras posibles 6 cuadraditos iguales de todas las maneras posibles ayer teníamos 3 ¿no? cuando había un 3 decíamos 3 por 1, 1 por 3 ... porque era por multiplicar, si yo lo quiero sumar puedo poner dos uno, 1 1 1 ocupen 6 cuadraditos de todas las maneras posibles ... a ver piensen un poquito a ver cuánto sale.
E: ... y poniéndolos en la pizarra...y van diciendo el nombre de cada uno y lo ponen en la pizarra para que se quede grabado ... cada uno se va levantando y va poniendo y cuando ya está el dibujo que está ... el que ha hecho en la pizarra no sale otra vez ... ¿no han hecho ninguno todavía? ¿ya hiciste uno? ..pues a la pizarra ya enseguida ...
(Un alumno se levanta y va hacia la pizarra)
E: ... que quede bien clarito ... ¿no tienes ahí alguna unidad si se puede poner alguna unidad? ... es un número, o sea, la unidad ¿cuánto vale? ... sí ... ¿cuánto vale? ..
E: ...eso que está representado ahí ¿cuánto es? ...
A: seis partes ...
E: 6 partes entonces, 6 partes ¿de cuánto..6 por cuánto? ...
A: por 1.
E: por 1...y ésta ... esto que está puesto aquí ¿cuánto vale? ¿cuánto vale? ...
E: ..tú lo has hecho? ¿cuánto vale esto-? ... ¿cuánto vale esto, David ... lo que hiciste tú, eh?
A: 1.
E: l..pero es que no se te ha oído nada, no te pongas los dedos en la boca ... 1¿no?, tú lo que has escrito, 1, ... ahora yo pregunto si eso vale 1 ... ¿esto puede valer 1? ...
A: Claro ...
E: ... cómo puede valer tu altura lo mismo que la mía, digo yo, ... entonces ¿qué pasa ahí? ¿qué podrías hacer? ... esa misma representación pero ponla bien ... parecida a esa, ponla bien ... ponla bien porque si ya te das cuenta que ... es una cosa...un 1 no puede valer dos cosas distintas en el mismo ejercicio ... una unidad eh? ... ¿cómo lo puedes representar? eh?
A: ...con el mismo tamaño ...
E: ... pon el mismo tamaño, te están diciendo a ver ... claro la unidad puede valer distinto, según el ejercicio, según los papeles que cada uno haya hecho, pero en el mismo ejercicio no puede valer cosas distintas ...
E: ... puede que todas las unidades valgan lo mismo...¿cuánto vale este trocito? ... ¿Y éste? tampoco tienen que siempre representar igual ¿no? ¿te das cuenta ya lo que es? .. ¿qué vale 1 ahí? ... cállate...a ver ... 1 ... esto vale 1, esto vale 1 y esto vale l? ..entonces ¿qué es lo que vale l? ... ¿ésta y ésta valen l? Y ¿éstas de aquí cuánto valen? ... ¿cuánto valen estas de aquí? ... a ver ... ¿cuánto vale cada trocito?
A: Uno.
E: Uno..¿esto es lo mismo que esto? ... entonces ¿qué es lo que tienes que corregir? ... a ver ¿qué es lo que tienes que corregir? ... ¿no te das cuenta? a ver ... David ... mira a ver ... ¿cómo

lo colocarías ahí? vete vete a la pizarra a ver ... colócalo..a ver...a ver... no, no, no te sientes... ¿cómo que no?
A: Sí, sí.
E: ¿Qué significa que tiene que valer lo mismo? ..
A: ... mismo tamaño...
E: el mismo tamaño pues ponlo del mismo tamaño ... ponlo venga ... tienen un miedo a la pizarra como si se los fuera a comer ... como si ...se los va a tragar..eh? A? ..no sé, mira a ver cómo representarías tú eso bien hecho ... (Los alumnos hacen comentarios por lo bajo).
E: ... a ver...a ver Juan Jesús .... a ver..no, no, pero... a ver.
A: ...esta medida aquí es igual que ésta, ésta y ésta no ...sé... lo...
E: Bueno, pues venga pero ¿ya está hecho? ... ponle a todos los segmentos que tiene esa figura, ponle unidades..a todos ... a ver, pero rápido ... un 1 ... a todos los segmentos que aparecen ahí ... a todos ... ayúdale David ... a colocar ... y ayúdale tú también a colocar ahí las unidades; venga ... coge otra tiza. Venga... venga, venga...
E: ... miren el dibujo que está en la pizarra ... en ese dibujo ¿hay más segmentos... que los que está el poniéndole dos números? . más fuertito porque entonces no se va a ver nada de atrás ... a ver ... ¿hay más segmentos? ... ahí dibujados, Tomás... ¿hay más segmentos? ... Daida...¿cuáles son? ...
A: las rayas que dividen el rectángulo ...
E: las rayas que dividen el rectángulo..¿cuánto miden esas rayas? ...
A: Dos ...
E: ... por dos..¿por qué? .en este problema concreto ¿esto puede medir 2? ..y ¿esto puede medir 2?
E: ... todos valen 1 ¿cómo van a valer 2? ... si son paralelas entre paralelas ... todos valen l, luego todos hay que representarlos ... aproximadamente con el mismo tamaño ... ¿está claro ya? ... es que .si no) lo hacen al revés ... ahora, si yo en vez de poner ese ... a ver ... otra forma de ponerlo al revés ... todos los que tengan otra distinta van a la pizarra y lo van colocando ... venga Inés otra ... si ya está escrita no la pones ... a ver... coge tizas, que hay tizas ahí de todo tipo ... ¿qué unidades tiene? .. se puede poner como ustedes quieran, con tal de que ocupen 6... a ver ¿cuántas unidades tienes ahí? .. sí, entonces por cuál... ¿qué es lo que valdría 1 ahí? ... 6... a ver cuál es el que tú hiciste aproximada? .no seas de mala idea ... estamos aquí sin regla ¿no? Muy bien ... así a ver, a ver ... ¿qué diferencia ves tú entre ése y ése, a ver, Yurena?
A: que esta es ... (Algún alumno se ríe).
E: ¿no están iguales? ... lo tienes bien ... o sea, lo único que pasa que ... tú no le puedes poner esto más grande para que resulte vertical ... porque seguimos explicando, Tomás, seguimos explicando que todos tienen que medir 1 ... todos tienen que medir 1, porque si no no es el rectángulo ... a ver..otro dibujo que tenga otro..no ... te estás haciendo el despistado, venga Jonay, venga tengan en cuenta que están representando 6, 6, lo que ocupa 6 Daida ¿tienes otro? ... ponlo allí ...
E: a ver Jonay..¿qué...ese rectángulo..cuánto mide? ..
A: 6 .... x ..
E:...y ¿eso es lo que te pedía...lo que tenías que poner en el problema? .. esa es la primera parte ¿no? sería 6 por x ¿no? ... no es 6 por 1 ¿no? ... pero no lo borres, táchalo, táchalo ... porque tú has representado 6 por x., ¿ves? 6 por 1 ... eh! .. otro..a ver ... Cristo ... siéntate derechito ... siéntate derechito ... ¿está claro ya lo que significa el 6, el 4, el 2? ¿no? parece la lotería ... significa ¿no?, que yo tengo que ocupar por 6 unidades o 4 unidades o 2 unidades ... y ¿éste que diferencia tiene con el que tú tenías?
A: Es lo mismo.

E: ... no, no pero ... parecido ¿no? .. o sea, ocupa lo mismo pero qué ... ¿qué expresarías tú para distinguir el uno del otro? ¿en qué dis ... ?
A: ... en que..que esto vale 1 pero es que aquí hay 3.
E: Exacto.
A: y aquí hay 2.
E: o sea, ayer ya dijimos que como ... eso tenía un nombre, ¿cómo se llamaba esto que decíamos ayer? ...
A:.... que de base tiene 2 y de altura tiene 3.
E: Y ¿aquí?
A: ...en la base tiene 3 y en la altura 2 ...
E: ... y son equivalentes ¿no? ¿está claro ya lo que significa eso? Bueno, pues siéntate... después el otro ejercicio..2x + 6 por 1 ya está claro ¿no? .. ahora intenten representar el otro, ¿cuántos rectángulos hará falta para representar el apartado c? Daida... ¿cuántos rectángulos harán falta... cuántos términos hay? ¿cuántos términos hay? los términos ... a ver en el la ficha 21 apartado c ¿cuántos términos hay? ...Yurena...
A: Dos.
E: Dos ... pero dicen que está bien decir el signo + o - fuera del paréntesis ... ¿Cuántos signos + hay ahí?
A: Uno.
E: Uno ... y uno separa los términos ... dos términos ¿no?, ¿cuántos rectángulos te hacen falta para representarlos ... si hay 2 términos? Irene... Yurena ...
A: 2.
E: 2... 2 términos 2 tú tenías 1 ... entonces vayan representando 3 + 4.y, y vayan representando 6.y + 3 ...
E:... tú lo tienes representado ya, Yurena?, pues, pon uno ahí a ver ... ¿alguien que tenga mal representado 3 + 4.y que lo vea yo primero ... por qué está equivocado? ...
E: ...esa unidad ... ¿cuál es la unidad en ese ejercicio? ... la unidad ... ha ocupado un 1 para que tú digas que esto vale 3 y esto vale 4 ...
E:... ¿por qué tú pones un 4 aquí? (...)...en la unidad ... porque cuando digo 4 manzanas hay una manzana que es la unidad ¿la y es la unidad? ... la unidad ... a ver ...
E: ... es que has puesto aquí un 1 y aquí has puesto un 3 ¿eso es posible Irene? .... ponte un poquito para allá Irene ¿esto es posible que esto valga uno y esto valga 3? no, no pero ... táchalo e intenta ponerlo bien y los demás que sigan trabajando ... tengan en cuenta que si yo a la unidad le llamo ... este tamaño todo el ejercicio tiene que valer este tamaño..si yo le llamo chiquitito pues todo el ejercicio .... yo siempre pongo para el ejemplo de la unidad cuando uno sube el vuelto de unos pantalones o de una falda ... se usa la minifalda la que quiere usar minifalda...si yo me voy de pues entonces le subo un trocito ... (la profesora ha estado escribiendo en la pizarra mientras realiza esta explicación)... pero le subo parejo...no a ser esas loquinarias que van por ahí con una punta para abajo, una punta para arriba y ustedes se echan unas risas cuando van por ahí así, saben? ... horribles, horribles ... con una punta para abajo, una punta para arriba.. entonces, cojo un trocito y voy marcando y a toda la falda le subo lo mismo ... esa es la unidad ... pero yo la unidad la puedo coger más grande o más chiquitita, lo mismo si subo el vuelto a unos pantalones, puedo subir ... ésa es la unidad, lo que no le subo un trocito aquí, después otro más arriba y después otro más abajo ... porque entonces no es la unidad ... a ver ahora ... ¿cuál es la unidad? ... ¿cómo el 1? ...pero en, en dimensiones, en longitudes ... ¿qué es para ti la unidad? .no, no yo no lo he visto muy claro y Yaiza como no está mirando, menos todavía.. ¿cuál es la unidad? ... a ver ... ¿cuál es la unidad, para ti qué es? ... ¿qué es lo que tú dices...de aquí, aquí? eso es la unidad ... ¿cuál es aquí la

unidad de dónde llega, hasta dónde llega la unidad para ti? Pedro ¿de dónde llegará? ¿lo entiendes eso? ... ¿por qué? a ver ... ¿por qué tú no entiendes que eso, eso ... por qué no lo entiendes ... a ver? ayúdale David, ¿por qué no se entiende eso? ..Rómulo ¿por qué no se entiende esto? (La profesora lo señala en la pizarra) ... Daida...
A: porque si era uno lo partió ... partido por...
E: si era 1 lo partió en 3..
A: Sí.
E: ... o sea ¿qué es para ti la unidad? aquí ... o sea, tiene que haber una cosa que tú digas de aquí a aquí le llamo 1 ... ah pues pon una letrita ahí esta poniéndola de aquí a aquí.. una letra la que tú quieras ¿esa qué letra es? ¿a? ... ¿este trocito? ¿no? vale ... si este trocito ... si este trocito.. este ¿no? ¿no? mira a ver ahora si esto está bien ... ¿cuántos trocitos hay abajo?
A: Tres.
E: Tres ... entonces no puedes poner un 1 ... y ¿cuántos trocitos habrá donde tienen el 3? ... junto a 1 no ... táchalo..a ver ... otro..a ver otro...
A: Espérate ¿está bien?
E: No sé, vete a la pizarra a ver ... ruédate para el otro lado. (Un alumno se ha levantado y se dirige a la pizarra) ... ¿tú no tienes ninguno, Carlos? ... vete con uno, uno cualquiera ... venga los demás sigan trabajando, sigan pensando, a ver qué pasa... lo que se siguen confundiendo que la unidad valga distinto y la unidad siempre vale lo mismo ...
E: a ver este ejercicio que nos dice ... 3 + 4.y ... 3 + 4. y... ¿qué significa 3 según el convenio aquel de la página 17 me parece que era...qué significa 3, Jonay? ... ¿a qué es igual 3?
A: ... ¿verdad?
E: Sí, ya lo creo... venga, venga ...
E: ... los que han entrado ahora, perdonen, se le ha ocurrido dar las gracias a la señorita ... por haberse preocupado de que ustedes vinieran ... puso una cara de asombro de todos ...
A: ... no nosotros íbamos a venir de todas maneras ...
E: Bueno, bueno pero por lo menos, por lo menos ella ha sido consciente de que ustedes faltaban ... ustedes tienen que aprender en la vida que malo es el día que nadie los echa en falta, no ven las pobres abuelas cuando dicen mi hijo ya ni se acuerda de mí, ya no sabe ni donde vivo, ... ¿no lo han oído nunca eso? o la madre que dice “ustedes ni se acuerdan que me tienen que decir dónde fuiste”... malo es el día que ya a la gente le de lo mismo que ustedes existan o no existan, aprendan o no aprendan ... estamos en la página 21, sitúense en el ejercicio c, apartado c ... a ver 4... a ver esto es...4..por y, muy bien éste está bien, eh! .. miren ... si la unidad es este trocito ¿no? ..aquí ¿qué dice? .. 3 por 1, que es el primer término que está escrito ahí ¿no? ... y si la unidad es este trocito... esto vale 4 ... acostúmbrense ahora que están trabajando con letras a poner el 4 muy clarito ... porque se suele confundir con la 1 ... si al final no saben si tienen un 4 o la 1 o sea, 4 por y, que no saben cuánto vale ... éste está bien, vamos a ver éste era otro ¿no? ... 3 ... pero claro, esto ¿cuánto mide? ... no sé quién puso éste, ¿quién puso éste? ..
A: Yo.
E: Sara, aquí la unidad es ésta ¿no? ... bueno, más o menos te vamos ésta por ésta válida ¿no? aquí hay 4 y aquí hay 3 ... pero ¿cuánto mide esto? ... ¿cuánto tiene que medir? ... porque el ejercicio era 3 + 4.y..¿no? ... ¿cuánto tiene que medir esto ... para que esto valga 3? ... Sara ... 3 ... 3 de aquí y de alto ¿cuánto tiene que medir? ... para que esto sea cierto ... para que te dé 3 ¿cuánto tiene que medir?
A: 1.
E: 1 ... y ¿eso vale 1 ... según tu dibujo? ... no ... lo más que puedes poner es una cosita por aquí ¿no? ... o sea, que tachan esto y hasta aquí ... esto sería 3 por 1 ¿no? + 4 por y pero no 3...

por eso es bueno que le vayan poniendo a cada una de las dimensiones le vayan poniendo su ... ¿cómo se llama? .su ... di... sus unidades sean letras o sea lo que sea.. Sigan con el siguiente 6.y + 3 ... a ver si ya .... otra ... 6.y +3 ... perdona pero no ... no me había dado cuenta ... ahora 6.y + 3 ... ¿cuántos rectángulos van a hacer falta?
A: Dos.
E: Dos ¿no? ... 1...a ver Davinia ... el de 6 y ¿cómo se podría representar? .. 6 y ¿cómo se podría representar? Jaime ... según lo vimos ayer ¿cómo se puede representar 6 y? ...
Soplo... Haridiam...
A: El rectángulo y lo dividimos en seis partes. (La alumna contesta pero no se le entiende muy bien).
E: ¿Lo dividimos en 6 partes? ... un rectángulo ... vamos a representar el primer término ¿no? (La profesora dibuja en la pizarra), 1,2,3,4,5.6..¿vale? ... ¿qué dimensiones tiene este rectángulo?
A: De base y y de altura ... 6.
E: ... base y, y de altura 6? ...
As: No.
E: Entonces y vale 6 ... si tú dices que esto vale 6 ¿no? esto tendríamos que dividirlo en 6 partes ...
E: Haridiam, ¿qué pasaría ahí? ... ¿dónde está el fallo? Irene.:.
A: Sería al revés para ...
E: Claro que es al revés ... lo que tú has dividido en 6 partes no es este trozo? ... pues esto es lo que vale 6 ¿no? y esto vale ”y”, que no sabes cuánto es ... no sabes cuánto ¿está claro? la parte que tú divides es la que realmente vale 6 porque tú ves que la longitud está dividido en 6 partes ... si tu cojes esto y lo divides así ... esto es lo que está dividido en 6 partes, no esto que no lo has dividido..¿está claro? y ¿el segundo término, Davinia? 3 ... ¿a qué es igual 3? lo que pasa es que ustedes no van a los convenios, o sea, ¿cómo se ... qué representa un número, cómo se puede representar un número que lo hicieron lo primero de todo en la ficha 17 ... ¿a qué es igual 3?
A: 3 por 1.
E: 3 por l..entonces ¿cómo lo representaríamos? ..a ver Davinia.. dime yo, lo voy haciendo ...
A: Un cuadrado ...
E: Un cuadrado ¿aquí? ...
A: No, un cuadrado...dividido en tres partes ...
E: Dividido en tres partes, ¿así? y ahora para arriba ¿qué? ... lo que ya tengo dividido que esto vale 3 y ahora ¿qué tengo que poner de altura ... para que me dé esto?
A: 1.
E: 1 ... entonces tengo que hacer ... tener en cuenta no lo que a mí se me ocurra sino que yo le he llamado a esto 1, luego tendré que ponerlo por aquí ... esto es lo que vale 1 ... 6 ... ¿no? ... por y..que no sé cuánto vale + 3 (La profesora va escribiendo en la pizarra)..por l.. ¿está claro? ... 6 por y + 3 por l. Bueno, pues sigan la siguiente..la 22 ...
E: ... apartado a, b y c, Sara, ¿cuántos rectángulos nos van a hacer falta para representarlos, en el apartado a?
A: Dos.
E: Dos ... ¿cuántos términos hay?
A: Dos.
E: Dos..”¡mm!”m Daida... ¿en el apartado b?
A: Dos.
E: ¿Cuántos términos hay?

A:Dos.
E: Juan Jesús, ¿el apartado c?
A: Dos.
E: Dos.¿cuántos términos hay?
A: Dos.
E: Dos... ese 7 que está en el apartado c, Coello..ese 7 que está en el apartado c ... ¿a qué equivale? ... en la página 22, *si..* en el apartado c hay 2 x + 7 ... ese 7 ¿a qué es equivalente? Cristo ... 7 = 7 por 1 o 1 por 7 ¿no?, entonces cómo se... o sea, ya sabemos ... ya tienen un montón de pistas...les he recordado que las unidades tienen que ser iguales ... eehhh Daida y Sara les han recordado y quién era el otro ... y Juan Jesús que tienen que ser 2 rectángulos porque hay 2 términos, ¿no? entonces ... a ver qué pasa ... ya no se tienen que equivocar...
(Un alumno responde por lo bajo).
E: a ver ... esta ... Inmaculada ¿cómo representarías 2x? ¿2x con un rectángulo? ... ... ¿qué características tendría ese rectángulo., Jonay?
A: 2 de altura y x de base.
E: de base ¿no? o x de altura y 2 de base, perfecto ... ¿ya lo hiciste 2x + 3x? (la profesora habla con sus alumnos en cada mesa)... sí, sí, pueden pasar los que ya han terminado pero revísenla bien para que no se equivoquen ... ya ustedes no tienen que equivocarse en eso porque ha... habido suficientes aclaraciones, suficientes observaciones, además no es tan difícil sino decir "una unidad vale lo mismo la que yo le ponga", "la que yo quiera pero a todo el ejercicio" y cuando no sé cuánto vale, no le pongo ninguna unidad, porque no sé cuánto vale ...... en este por ejemplo ¿no? está bien ... 2 por x que no saben cuánto valen ... 2 ¿es esto? ... quiere decir que esta es la unidad y aquí 1, 2 y 3 por x, aquí otra manera de representarlo x vale esto, aquí tengo que repetir Irene, venga aquí donde tú te equivocaste ¿no? Tengo que poner la misma distancia porque los dos se llaman x y si a esto le llamo 2, quiero decir que la mitad es 1, luego para marcar 3 tengo que subir 3 aquí ¿alguno otro tiene alguna otra expresión? ... ¿de éste? .. (señalando en la pizarra) ¿no?, bueno ... vayan haciendo el otro ... ah ya es la hora ... pues recojan entonces ....

ANEXO 16

16.1 Protocolo entrevistas. Primera fase. Junio 93.

FICHA 1

Fíjate muy bien

Un niño/a tiene en el bolsillo izquierdo boliches y en el derecho tiene tres más que en el izquierdo.

SITUACIÓN	Bolsillo izquierdo	bolsillo derecho
RERESENTACIÓN	boliches	boliches + 3

INTENTA ESCRIBIR LA REPRESENTACIÓN DE LA SIGUEITNE SITUACIÓN

Pepe mide 8c m más que Juan y Eduardo mide 4 cm más que Juan.

SITUACIÓN	Pepe	Juan	Eduardo
RERESENTACIÓN	……..	……..	…………

Utilizando una sola letra rellena el siguiente esquema para el ejercicio siguiente: Pepe mide 8 cm más que Juan y Eduardo mide 4 cm más que Juan".

SITUACIÓN:	……..	……..	…………
RERESENTACIÓN:	……..	……..	…………

AQUÍ TIENES UNA SITUACIÓN Y SU REPRESENTACIÓN Y TÚ TIENES QUE ESCRIBIR LA HISTORIA. ¿DE ACUERDO?

SITUACIÓN:	Paquete de leche	mantequilla	café
RERESENTACIÓN:	pesetas	pesetas - 20	pesetas + 100

La historia podría ser: ………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

FICHA 2

1) CUANDO TE ENCUENTRES UN NÚMERO SOLO, TE VAS A IMAGINAR QUE ES UN PRODUCTO DEL NÚMERO QUE TE ENCUENTRAS POR LA UNIDAD.

Ejemplo: Si tienes un "3", es lo mismo que: 3 x 1 ó que 1 x 3.

Actividad 1: Rellena los "cuadritos" en:

a) 2 = 2 x ☐ = ☐ x 2

b) 6 = 6 x ☐ = ☐ x 6

2) CUANDO TE ENCUENTRES CON UNA LETRA SOLA, TE VAS A IMAGINAR QUE ES UN PRODUCTO DE LA LETRA QUE TE ENCUENTRAS POR LA UNIDAD.

Ejemplo: "a" es lo mismo que: a x 1 ó que 1 x a.

Actividad 2: Rellena los "cuadritos" en:

a) x = ☐ . = . ☐

b) y = . ☐ = ☐ .

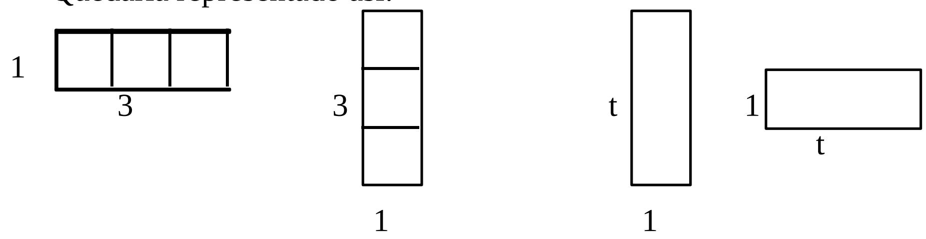
NOTA: Utilizamos “.” como símbolo de multiplicar para no confundirnos con la “x”.

3) CADA VEZ QUE APARECE UN NÚMERO SOLO O UNA LETRA SOLA, LA REPRESENTAREMOS POR UN RECTÁNGULO

<u>Ejemplo:</u> 3
Por el primer acuerdo
$3 = 3 . 1 = 1 . 3$

<u>Ejemplo:</u> t
Por el segundo acuerdo
$t = t . 1 = 1 . t$

Quedaría representado así:



FICHA 3

Representa con rectángulos:

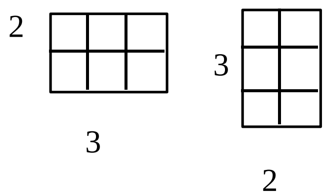
a) 5 b) y

FICHA 4

Representar mediante rectángulos: a) 2 . 3 y
b) z . t, se haría así:

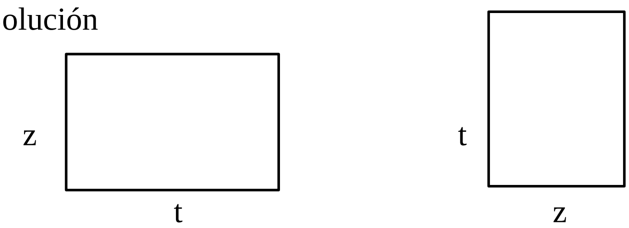
a) 2 . 3

Solución



b) z . t

Solución



Representa

2 . x

FICHA 5

Representa

a) 4 . b b) 4 + b

¿Son iguales? ¿Por qué?

FICHA 6

ESCRIBE LAS OPERACIONES SIGUIENTES EN LENGUAJE ALGEBRAICO

1. El triple de x:
2. El doble de n menos 4:
3. El producto de a, b, c:
4. El precio de m kilogramos de manzanas a y ptas. el kg.:
5. El triple de la suma de a y b:
6. El doble de la diferencia entre h e y:
7. El número siguiente a g:
8. El número anterior a h:
9. El cuadrado de la suma de x e y:
10. El triple del cuadrado de b:

FICHA 7

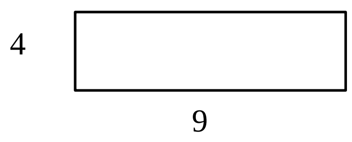
ESCRIBE LAS OPERACIONES SIGUIENTES EN LENGUAJE ALGEBRAICO

1. El perímetro y el área de un cuadrado de t metros de lado
   p = ……………. A = ……………..

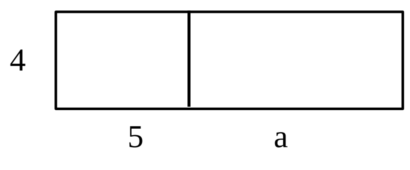
2. El perímetro y el área de un rectángulo de “y” metros de largo y “x” metros de ancho.

FICHA 8

Calcula el perímetro de las figuras siguientes:



perímetro =

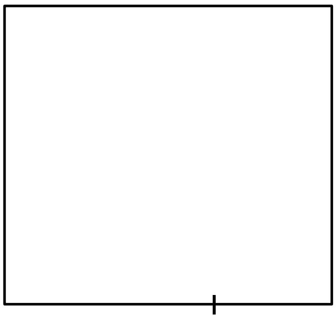


perímetro =

FICHA 9

Calcula el perímetro de las siguientes figuras:

8



perímetro =

6 a

3

7 2

perímetro =

FICHA 10

Traduce a lenguaje algebraico las frases e ideas siguientes:

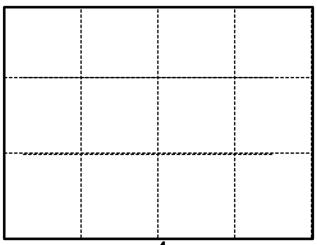
a) El precio de v cintas de vídeo a 2500 pesetas cada una.
b) Lo que cuesta una pelota, si 3 cuestan p pesetas.
c) La diferencia de dos números distintos cualesquiera.
d) El número que representa 50 unidades menos que el número d.
e) Un número cualquiera.
f) La tercera parte del número f.
g) El triplo de un número cualquiera.
h) La suma de tres números distintos cualesquiera.

FICHA 11

Calcula el área de las siguientes figuras:

a)

3

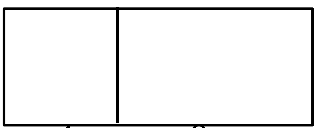


4

A =

b)

4

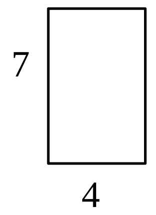


4 8

4

A =

c)

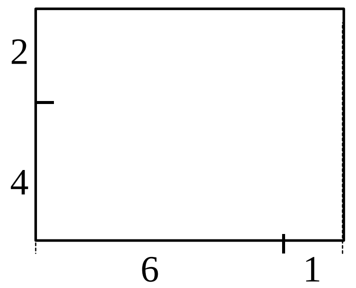


A =

FICHA 12

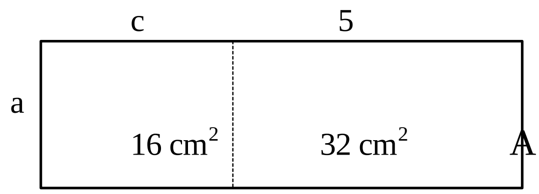
Calcula el área de las siguientes figuras:

a)



A =

b)



A =

FICHA 13

4 sumado a n se puede escribir como n + 4.
Suma 4 a cada una de los siguientes:

8   n + 5   3 n

n multiplicado por 4 se puede escribir como 4 n.
Multiplica por 4 cada uno de los siguientes:

8   n + 5   3 n

a + 3 a puede ser escrito de forma más simplificada como **4 a**.
Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible.

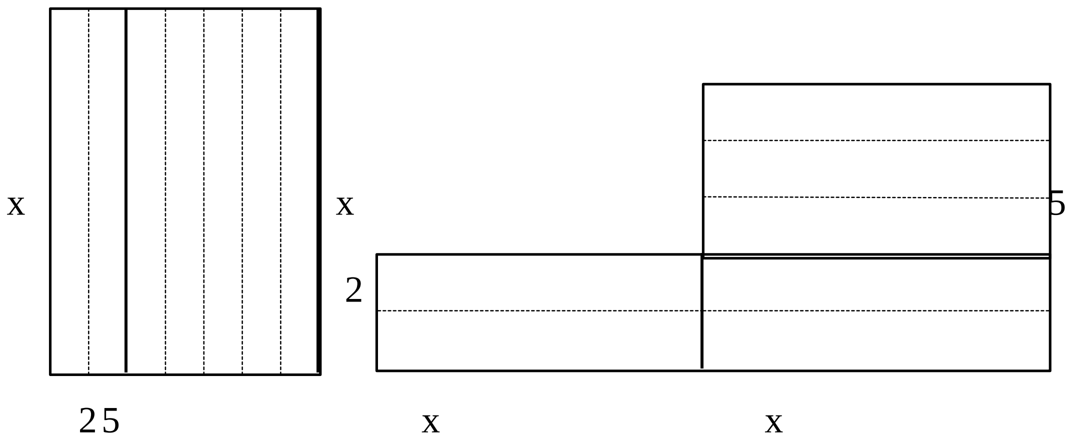
2 a + 5 a =	3 a - (b + a) =
2 a + 5 b =	a + 4 + a - 4 =
(a + b) + a =	3 a - b + a =
2 a + 5 b + a =	(a + b) + (a - b)
(a - b) + b =	

FICHA 14

INTENTA REPRESENTAR

a) 2 . x + 3 . x   b) 2 . x + 3 . y   c) 2 . x + 7

observando que 2 . x + 5 . x, quedaría representado:



a) 2 . x + 3 . x

b) 2 . x + 3 . y

c) 2 . x + 7

FICHA 15

USANDO EL LENGUAJE ALGEBRAICO REPRESENTA ESTAS SITUACIONES. RECUERDA QUE TIENES QUE UTILIZAR LETRAS PARA REPRESENTAR LOS DATOS DESCONOCIDOS.

1. “En la clase de Matemáticas, Juan hizo tres ejercicios más que Maribel y Sandra un tercio de Juan”
2. “Pilar tiene 5 pesetas menos que Sergio y Fermín tiene el doble que los otros dos juntos.”

FICHA 16

USANDO EL LENGUAJE ALGEBRAICO REPRESENTA ESTAS SITUACIONES

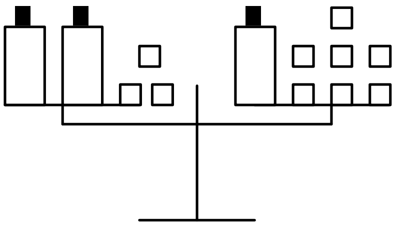
Juan tiene ocho caramelos más que Jaime

Tres hermanos tienen más cantidades de dinero. María tiene 50 pesetas más que Miguel y Pablo tiene el doble que los otros dos juntos.

FICHA 17

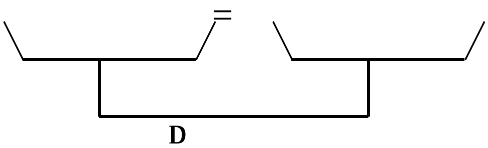
Representar (a + 5). b; (x + 3).2; (y + e) . 3, mediante rectángulos, y utilizar un cuadro de doble entrada.

FICHA 18

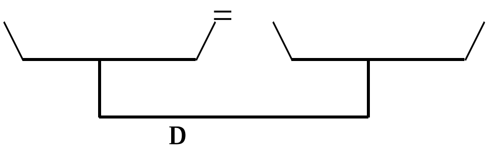
Observa esta balanza. (Todas las botellas pesan igual).		**Expresa la situación de la balanza.**

FICHA 19

Representa con la balanza:
Añadiéndole 3 kilos al peso de una lata de pintura, elpeso es 9 kilos.

BALANZA	EXPRESIÓN SIMBÓLICA
	

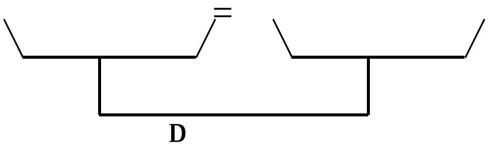
3 pins valen 45 pesetas.

BALANZA	EXPRESIÓN SIMBÓLICA
	

FICHA 20

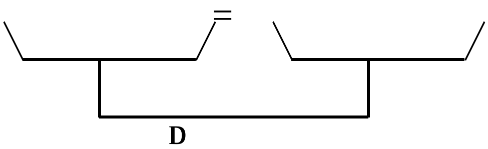
El peso de 5 paquetes de cartulinas es 10 kilos.

BALANZA	EXPRESIÓN SIMBÓLICA



El triplo del peso de un libro más 2 kilos es 5 kilos.

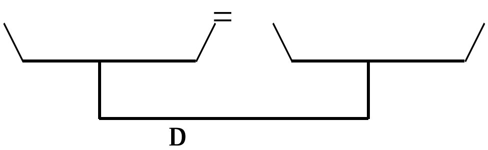
BALANZA	EXPRESIÓN SIMBÓLICA



FICHA 21

Simbolizando un número de balones con “o”, representa: “la suma de un número de balones más el doble del mismo número de balones, es igual a 24.

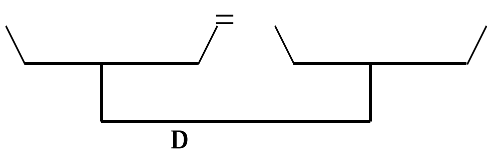
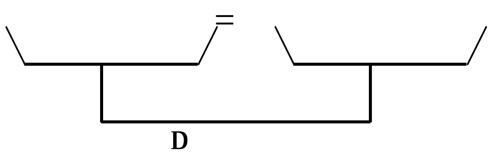
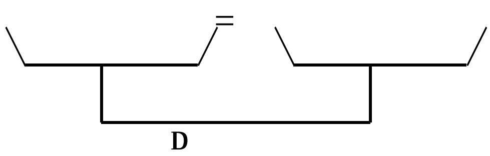
BALANZA	EXPRESIÓN SIMBÓLICA



FICHA 22

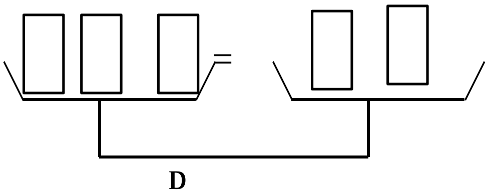
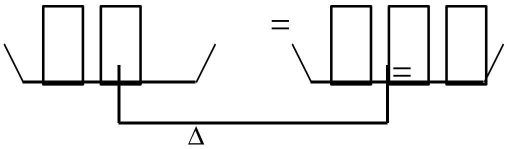
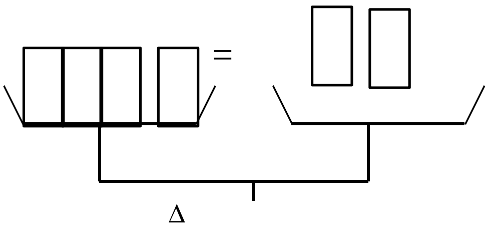
Completa la siguiente tabla:

(Sugerencia: Representa los números con “o” y los datos desconocidos con   ).

BALANZA	**ALGEBRAICO**
	x + 3 = 2 x
BALANZA	**ALGEBRAICO**
	4 x = 2 x + 6
BALANZA	**ALGEBRAICO**
	3 x + 2 = 5

FICHA 23

Expresa con números y símbolos las siguientes situaciones:

BALANZA	EXPRESIÓN SIMBÓLICA
	
	
	

FICHA 24

Resuelve la siguiente ecuación: $4x = 2x + 6$

BALANZA	ALGEBRAICO

Resuelve la siguiente ecuación: $x + 3 = 2x$.

BALANZA	ALGEBRAICO

Resuelve la siguiente ecuación: $3x + 2 = 5$.

BALANZA	ALGEBRAICO

FICHA 25

La suma de un número más el doble del mismo número es igual a 36, ¿cuál es el número?

FICHA 26

Hallar la solución de las ecuaciones siguientes:

a) $3 + x = 5$

b) $3x + 8 = 20$

c) $2x + 3 = 5x$

FICHA 27

Rellena los vacíos como se indica en el primer apartado de cada columna.

x	------------	x + 4	x	-----------	4x
6	------------		6	-----------	
r	------------		r	------------	
b + 2	----------		b + 2	----------	

Si $a = 2b$, ¿en qué se transforma $5a + 3$?

FICHA 28

a + 3 a puede ser escrito de forma más simplificada como **4 a**.

Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible.

2 a + 5 a = 3 a - (b + a) =
2 a + 5 b = a + 4 + a - 4 =
(a + b) + a = 3 a - b + a =
2 a + 5 b + a = (a + b) + (a - b)
(a - b) + b =

La "paga" que da un padre a un niño cada semana es de "p" pesetas, ¿cómo expresarías el dinero que reúne ese niño durante 6 semanas?

FICHA 29

Rellena los vacíos como se indica en el primer apartado de cada columna.

x ------------ x + 3   x ----------- 7x   x ----------- 5x +3
6 ------------   2 -----------   3 -----------
n ------------   r------------   4 -----------
b + 2 ----------   b + 2 ----------   2a -------------

Calcula:
a) 6. (b + a)
b) (a+2).3
c) (a+2).(b+a)
d) a . (b - c)

FICHA 30

Escribe de las siguientes expresiones cuál es la más grande y cuál la más pequeña:

más pequeña   más grande

n+1, n+4, n-3, n, n-7
Razona tu respuesta.

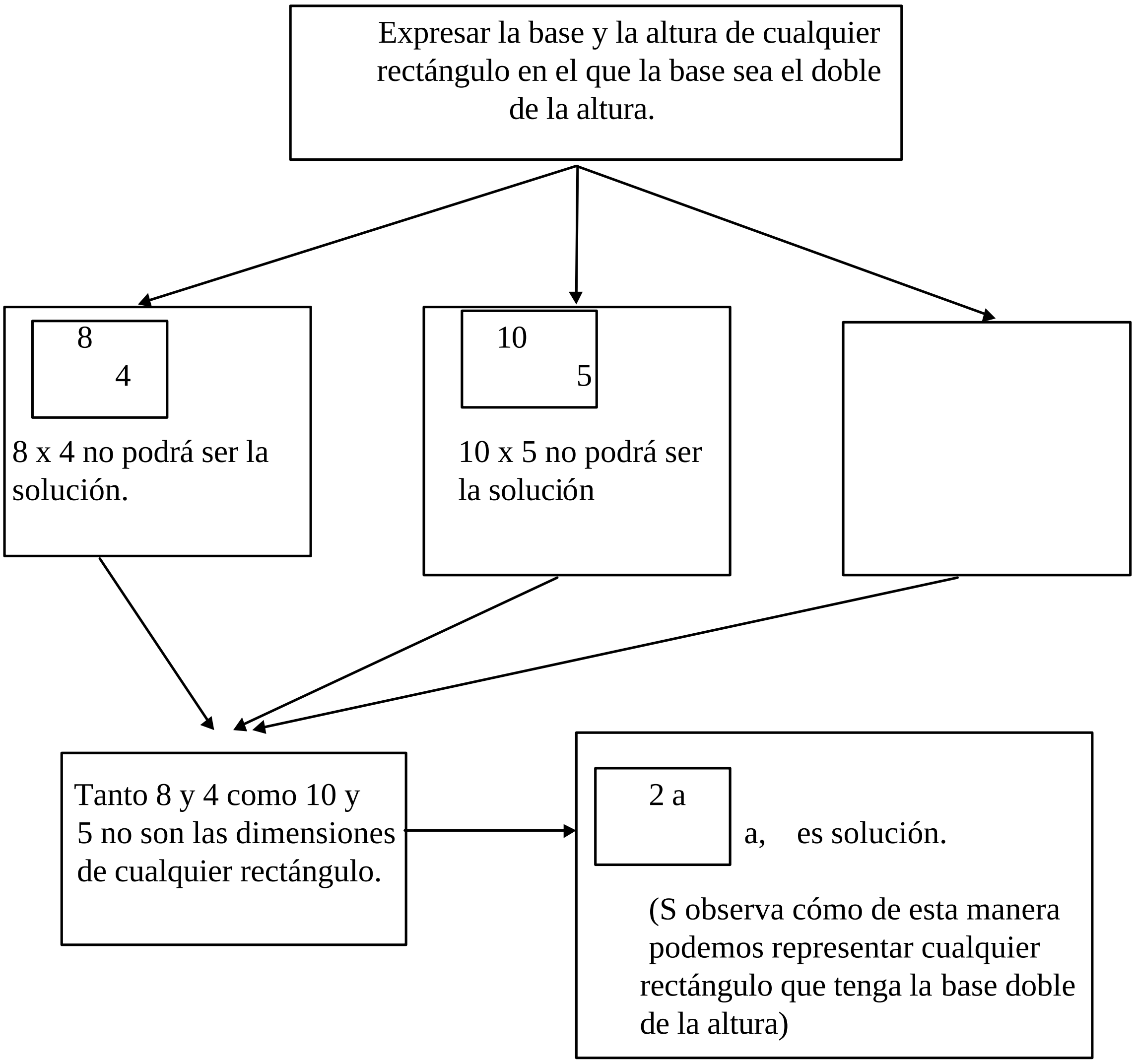
FICHA 31

En un supermercado un kilo de peras cuesta b pesetas; un kilo de manzanas cuesta 5 pesetas más que el de peras; un kilo de plátanos 13 pesetas menos que el de peras, y un kilo de uvas 8 pesetas más que el kilo de plátanos.

Completa la siguiente tabla:

Peso	Peras	Manzanas	Plátanos	Uvas
1 Kg.	b	b + 5	b - 13	(b - 13) + 8
2 Kg.		2 . (b + 5) = 2b + 10		
10 Kg.				

FICHA 32



FICHA 33

Expresar la base y la altura de cualquier rectángulo cuya base exceda en 5 unidades a la altura: la base y la altura difieren en 10 unidades.

Representa con rectángulos los resultados.

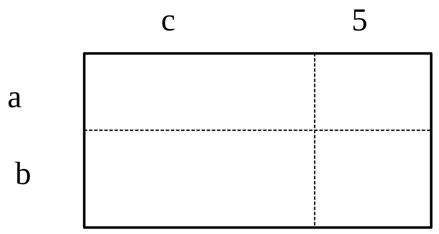
FICHA 34

¿Es igual $(a + b)^2$ que $a (b +a) + b (b + a)$.

Para responder, representa previamente la última expresión.

FICHA 35

El producto $(a + b) (c + 5)$ se puede escribir utilizando el área del rectángulo de lados $a + b$ y $c + 5$, como:



$(a + b) (c + 5) = a . c + a . 5 + b . c + b . 5$

Escribe los siguientes productos:

a) $a . (b + 5) =$
b) $(a + 3) (b + 2) =$
c) $(a + b) (a + b) =$
d) $(a + b + 3) (a + b + 3) =$

FICHA 36

Un rectángulo tiene una altura "m". Si la base es doble de la altura:

a) ¿Cuánto vale el perímetro?
b) ¿Cuánto vale el área?

FICHA 37

El peso de 2 barras de metal más 3 kilos, es 7 kilos.

BALANZA	**ALGEBRAICO**

4 bolsas de pastas de chocolate pesan 20 kilos.

BALANZA	**ALGEBRAICO**

FICHA 38

El doble del peso de un bolígrafo más 8 gramos es 3 veces el peso del bolígrafo.

BALANZA	**ALGEBRAICO**

Simbolizando un número de balones con "o", representa: "la suma de un número de balones más el doble del mismo número de balones. Es igual a 24.

BALANZA	**ALGEBRAICO**

FICHA 39

El precio de 2 lápices más 8 pesetas es 3 veces el precio de un lápiz.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA

El triplo del número de discos de un cantante más 4 es 7 veces el número de discos.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA

FICHA 40

Resuelve la siguiente ecuación: $4x = 2x + 6$

GEOMÉTRICO	ALGEBRAICO

FICHA 41

Resuelve la siguiente ecuación: $4x = 2x + 6$

GEOMÉTRICO	ALGEBRAICO

El precio de un bolígrafo incrementado en 7 pesetas, es 23 pesetas.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA

FICHA 42

ESCRIBE LAS OPERACIONES SIGUIENTES EN LENGUAJE ALGEBRAICO:

1. El triple de x.
2. El doble de n menos 4.
3. El producto de a, b, c.
4. El precio de m kilogramos de manzanas a y ptas. el kg.
5. El triple de la suma de a y b.
6. El doble de la diferencia entre h e y.
7. El número siguiente a g.

8. El número anterior a h.

9. El cuadrado de la suma de x e y.

10. El triple del cuadrado de b.

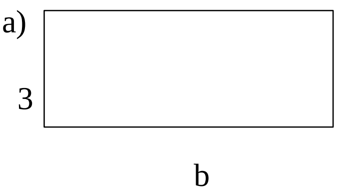
FICHA 43

Traduce a lenguaje algebraico las frases e ideas siguientes:

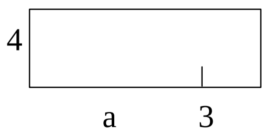
a) El precio de m discos a 760 pesetas cada uno.
b) Lo que cuesta un lápiz, si 15 cuestan P pesetas.
c) El número que representa 50 unidades menos que el número h.
d) El número que es la cuarta parte del número y.

FICHA 44

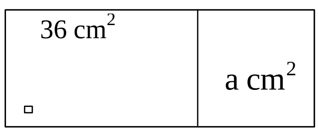
Calcula el área de las siguientes figuras:

a)


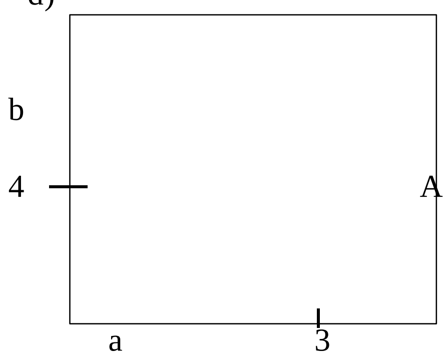
A=

b)


A =

c)


A =

d)


A =

FICHA 45

Representa con la BALANZA:

1. Añadiéndole 3 kilos al peso de una lata de pintura, el peso es 9 kilos.

BALANZA	ALGEBRAICO

2. Al añadir 7 kilos al peso de una bolsa de manzanas, el resultado es 7 kilos más dos kilos.

BALANZA	ALGEBRAICO

3. El triplo del peso de un libro más 2 kilos es 5 kilos.

BALANZA	ALGEBRAICO

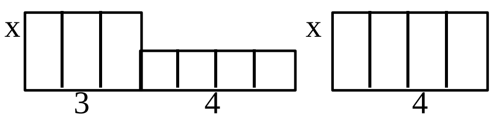
FICHA 46

Completa la siguiente tabla:

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
	x + 3 = 2 x
REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
	4 x = 2 x + 6
REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
	3x + 2 = 5

FICHA 47

Tres veces la edad de un niño más 4 es exactamente 4 veces su edad.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
	3 x + 4 = 4 x

La edad de Pepito más 4 unidades es la edad de su hermano mayor, 10 años.

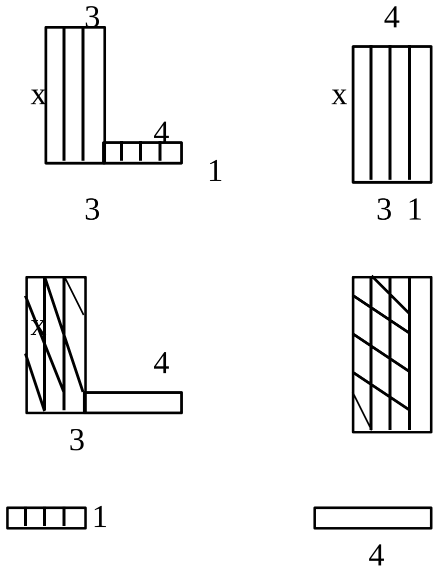
REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA

6 más 3 veces el precio de una goma es igual a 5 veces el precio de la goma.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA

FICHA 48

Observa la siguiente RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN: 3 x + 4 = 4 x

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
	$3x + 4 = 4x$ $3x - 3x + 4 = 4x - 3x$ $4 = x$

FICHA 49

Añadiéndole 4 cm al triplo de la medida de la longitud de un segmento, se obtiene oro segmento cuya medida es la del primero incrementada en 8 unidades.

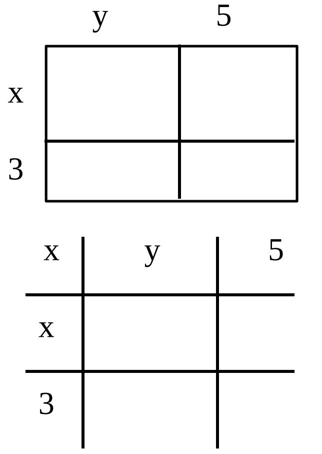
REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA

El valor de una pegatina aumentada en 4, es 2 veces el valor de la pegatina.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA

FICHA 50

Completa las actividades del cuadro siguiente:

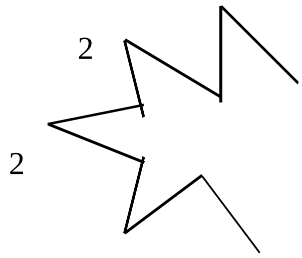
(x + 3) x (y + 5)		(x + 3) x (y + 5) = = x x 5 + x x y + 3 x y + 3 x 5
(3 + a) x (4 + x)		(3 + a) x (4 + x)

FICHA 51

Dibuja los dos rectángulos que se te indican: El primero tiene “x” centímetros de largo por “e” centímetros de alto. Al segundo se le aumenta 2 centímetros por cada lado.

Parte de esta figura no está dibujada.
Hay n lados en total, todos de longitud 2.
Halla su perímetro.

P =



FICHA 52

4 sumado a n se puede escribir como n + 4.
Suma 4 a cada una de los siguientes:

8 n + 5 3 n

n multiplicado por 4 se puede escribir como 4 n.
Multiplica por 4 cada uno de los siguientes:

8 n + 5 3 n

16.2 Protocolo entrevistas. Segunda fase. Septiembre 93.

Sesión 1ª

ACTIVIDAD 1:

Escribe las operaciones siguientes en lenguaje algebraico:

1. El doble de **m.**
2. El cuadrado de la suma de **x** e **y.**
3. El cuadrado de **z.**
4. El producto de **a, b, c.**
5. El precio de **x** kilogramos de papas a 75 pesetas el kg.
6. El doble de la diferencia entre **h** e **i.**
7. Un número cualquiera.
8. La tercera parte del número **f.**
9. El triplo de un número cualquiera.
10. La suma de tres números distintos cualesquiera.

ACTIVIDAD 2:

La "paga" que da un padre a un niño cada semana es de "p" pesetas, ¿cómo expresarías el dinero que reúne ese niño durante la semana?

ACTIVIDAD 3:

¿Cómo expresarías el precio de "x" cintas cassettes a 750 pesetas cada una?

ACTIVIDAD 4:

¿Cuánto gasta un niño que compra "y" cromos a 50 pesetas?

ACTIVIDAD 5:

$2a + 5a =$	$3a - (b + a) =$ ....
$2a + 5b =$	$a + 4 + a - 4 =$ ....
$(a + b) + a =$	$3a - b + a =$ ....
$2a + 5b + a =$	$(a + b) + (a - b) =$ ....
$(a - b) + b =$	$6 (a + b) - 3a =$ ....
$(3 - a) b + ab =$	$3 (2 + a) - 3 =$ ....
$2 (a + b) =$	$(3 + x) y =$ ....

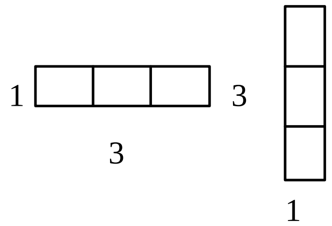
CADA VEZ QUE APARECE UN NÚMERO SOLO O UNA LETRA SOLA, LA REPRESENTAREMOS POR UN RECTÁNGULO.

Ejemplo: 3

Por el primer acuerdo

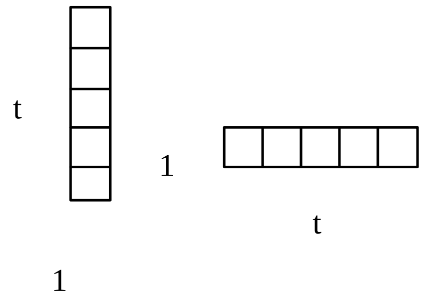
$$3 = 3 . 1 = 1 . 3$$

Quedaría representado así:



Ejemplo: t

Por el segundo acuerdo



ACTIVIDAD 1: Representa con rectángulos:

a) 2   b) x

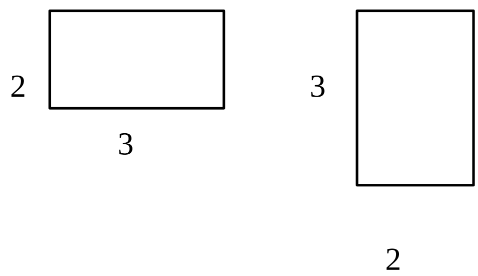
CADA VEZ QUE APARECE UN PRODUCTO DE DOS FACTORES, LO REPRESENTAMOS TAMBIÉN POR UN RECTÁNGULO.

a) 2 . 3   b) z . t

Quedaría representado así:

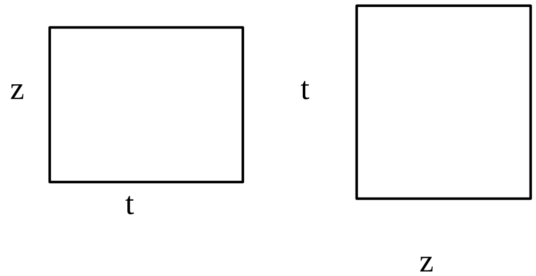
a) 2 . 3

Solución:



b) z . t

Solución:



ACTIVIDAD 1:

Representa: 3 . x.

ACTIVIDAD 2:

Representa:

a) 4 . b   b) 4 + b

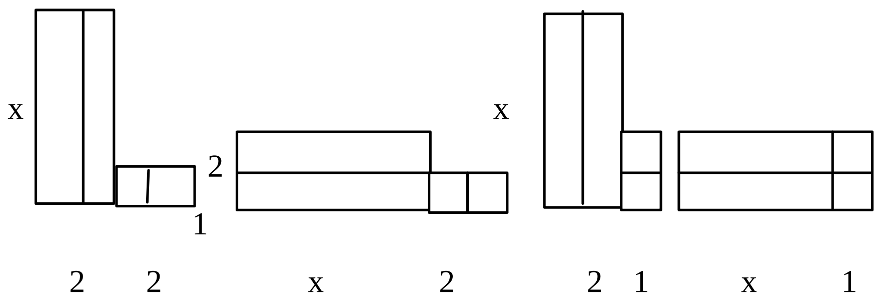
¿Son iguales? ¿Por qué?

REPRESENTAMOS AHORA:

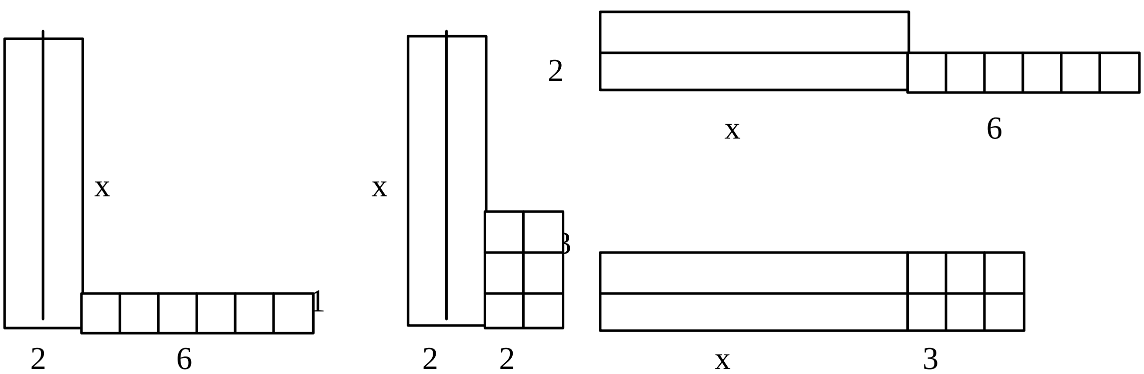
a) 2 . x + 2   b) 2 . x + 6

Nos quedaría:

a) 2 . x + 2 = 2 . x + 2 . 1



b) 2 . x + 6 = 2 . x + 6 . 1



ACTIVIDAD 1:

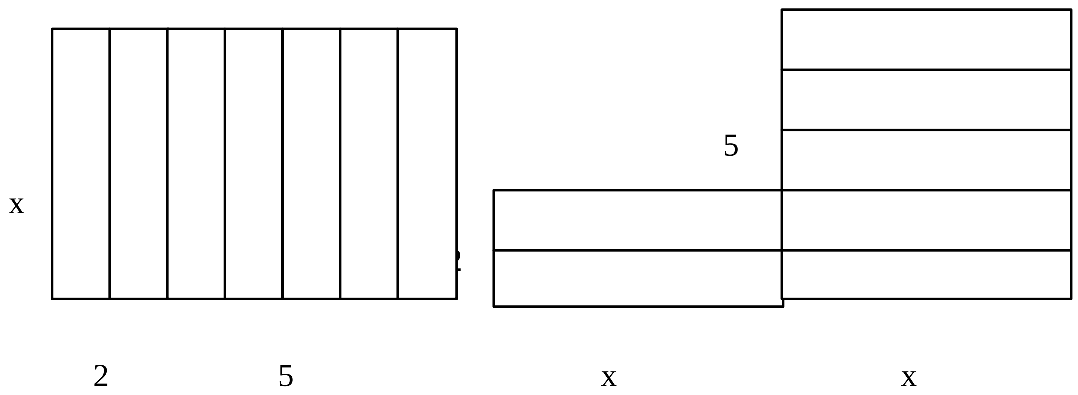
a) 3 + 4 . y b) 6 . y + 3

ACTIVIDAD 2:

Representa ahora:

a) 2 . x + 3 . x b) 2 . x + 3 . y c) 2 . x + 7

observando que 2 . x + 5 . x, quedaría representado:



a) 2 . x + 3 . x

b) 2 . x + 3 . y

c) 2 . x + 7

ACTIVIDAD 1:

n sumado a 5 se puede escribir **5 + n.**

Suma 4 a cada una de las siguientes expresiones:

8	n + 5	3n	2n + 4
....	....	....	....

ACTIVIDAD 2:

n multiplicado por 4 se puede escribir como **4n.**

Multiplica por 4 cada uno de las siguientes expresiones:

8	n + 5	3n	2n + 4
....	....	....	....

ACTIVIDAD 3:

Calcular:

a) $2 . a + 5 + 5. a + 3 =$

b) $3 . a + 5 . b + 6 + 4 . b =$

c) $2 . m + 6 . n + 5 . 3 . n =$

d) $6 . a + 5 - 4 - 3 . a =$

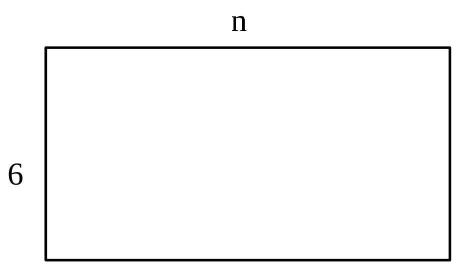
e) $2 . a + 3 . a - 5 + 3 =$

f) $3 . a + 5 . b + 4 . b - 5 =$

ACTIVIDAD 1:

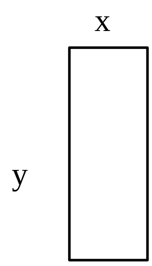
Calcula el perímetro de las siguientes figuras:

a)



P =

b)

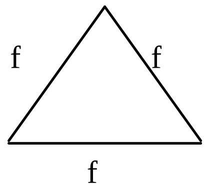


P =

c)

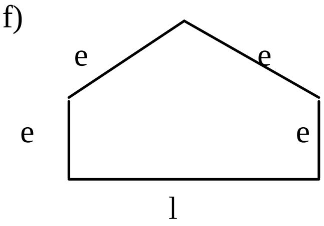
P =

e)



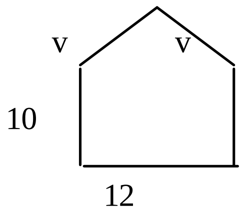
P = ...

f)



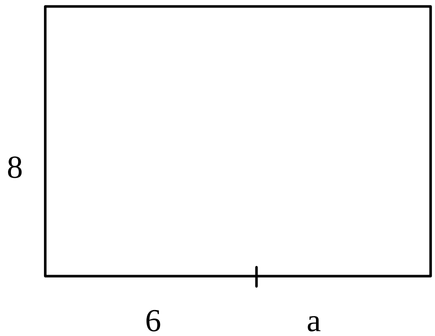
P = ...

g)



P = ...

h)



P =

i)

P =

ACTIVIDAD 2:

Calcula:

a) $2 . a + x + y =$

b) $2 . 8 + 6 + 2 . a =$

c) $5 + 3 . x + 2 =$

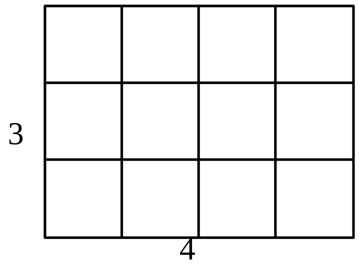
d) $4 . x + x =$

e) $3 . a + 4 + 2 . a =$

ACTIVIDAD 1:

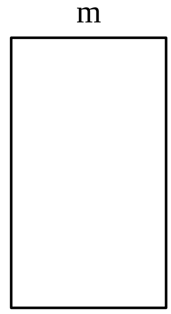
Calcula el área de las siguientes figuras:

a.1)



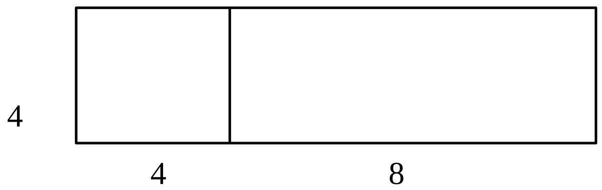
A =

a.2)



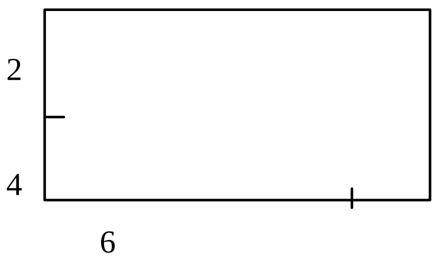
A =

b)



A =

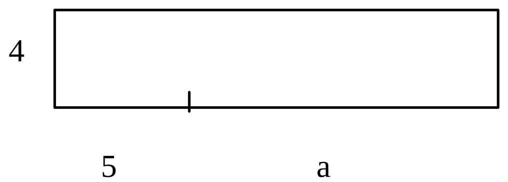
c)



A =

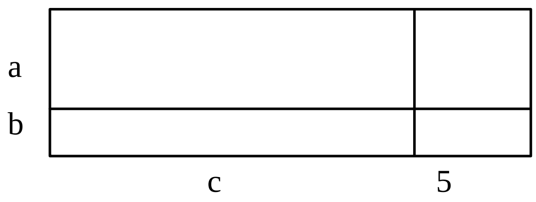
1

d)



A =

e)



A =

ACTIVIDAD 2:

Calcula:

a) $3 (3 + a) =$

b) $(a + b) 6 =$

c) $a (6 + x) =$

d) $(a + 5) . (2 + b) =$

e) $(x + y) . (a + b) =$

ACTIVIDAD 1:

Representa y escribe:

a) El doble de "x" más el triplo de "y".

b) El perímetro y el área de un cuadrado de "k" metros de lado.

P = P =

c) Jaime tiene un número desconocido de caramelos y Juan tiene 8 caramelos más que él, ¿cómo expresarías el número de caramelos de Juan?

d) El perímetro y el área de un rectángulo de "y" metros de largo y "x" metros

de ancho.

P = P =

ACTIVIDAD 2:

Calcula:

a) 3 . a + 5 + 7 =

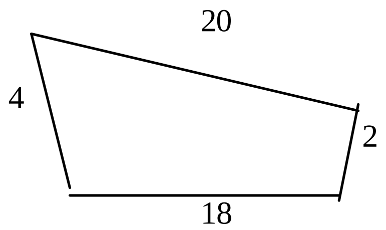
b) 3 (a + b) =

c) (x + 3) 2 =

ACTIVIDAD 3:

Calcula el perímetro de estas figuras:

a)

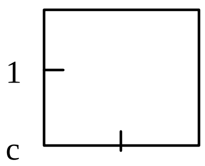


b)

ACTIVIDAD 4:

Calcular las áreas de estas figuras:

a)



b)

m 2 m 4

A = A =

Sesión 2ª:

ACTIVIDAD 1:

Calcula:

a) $6\,(3 + 5) =$

b) $(a + 5) . b =$

c) $(7 - 2) . 3 =$

d) $3 . (b + a) =$

e) $(a + 2) . 3 =$

ACTIVIDAD 2:

Calcula:

a) $(2 + 7) . 4 =$

b) $(x - 3) . 2 =$

c) $a . (b - c) =$

d) $(a + 2) . (b + a) =$

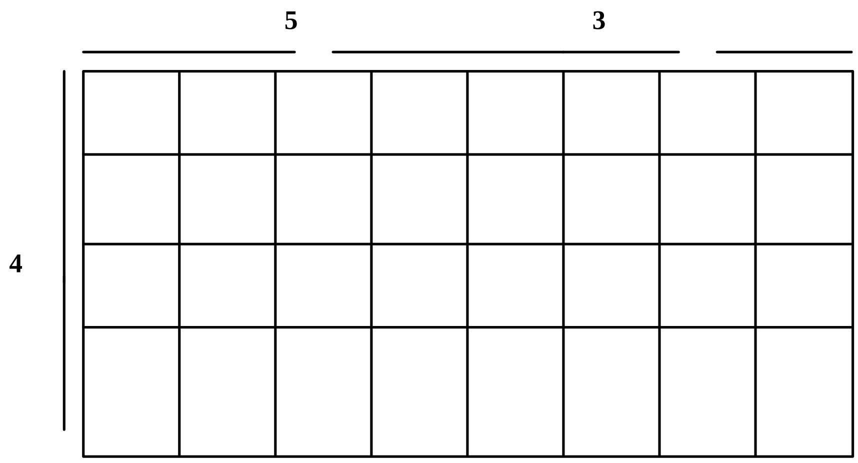
e) $(y + c) . 3 =$

ACTIVIDAD 3:

¿Es igual $(a + b)^2$ que $a . (b + a) + b . (b + a)$?

Para responder, calcula previamente las expresiones por separado.

TENIENDO EN CUENTA QUE 4 x (5 + 3) SE PUEDE REPRESENTAR GRÁFICAMENTE.



Y MÁS ESQUEMÁTICAMENTE

x	5	3
4	4 x 5	4 x 3

ES DECIR, 4 (5 + 3) = 4 . 5 + 4 . 3.

ACTIVIDAD 1:

Representar y calcular (a + 5) . b; (x + 3) . 2; (y + c . 3, mediante rectángulos, y utilizar un cuadro de doble entrada como el del ejemplo anterior.

EXPRESIÓN Y CÁLCULO	**REPRESENTACIÓN**	**ESQUEMA**
(a + 5) . b =		**x**
(x + 3) . 2 =		**x**
(y + c) . 3 =		**x**

OBSERVA QUE (a + 4) x (b + 3) LO PODRÍAMOS REPRESENTAR GRÁFICAMENTE.

	b	**3**
a	*a x b*	*a x 3*
4	*4 x b*	*4 x 3*

Y PODEMOS ESQUEMATIZARLO:

x	b	3
a	a x b	a x 3
4	4 x b	4 x 3

ES DECIR, (a + 4) x (b + 3) = a x b + a x 3 + 4 x b + 4 x 3

ACTIVIDAD 2:

Completa las actividades del cuadro siguiente:

(x + 3) . (y + 5) =	y 5 x 3	X y 5 x 3
(3 + a) . (4 + x) =		X
(x + y) . (a + b) =		X

ACTIVIDAD 1:

Completa el cuadro siguiente:

4 x (3 + 2) =		
4 x (5 + b) =		
a x (5 + b) =		
a x (c + d) =		
(3 + a) x (4 + x) =		
(x + y) x (a + b) =		

ACTIVIDAD 1:

Calcula:

a) $(5 + 3) . 4 =$

b) $a . (b + c) =$

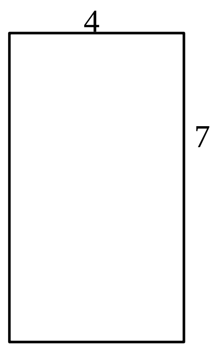
c) $(m + n) . p =$

d) $(b + c) . (x + y) =$

ACTIVIDAD 2:

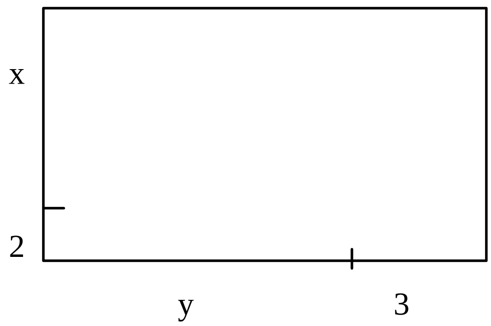
Calcula el área de las figuras siguientes:

a)



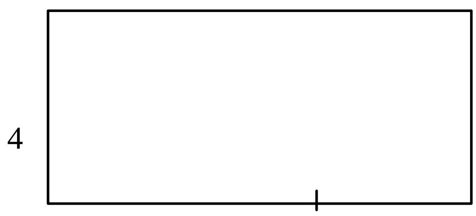
A =

b)



A =

c)



A =

m 3

ACTIVIDAD 1:

Como quieras, calcula:

a) $x \cdot (b + 5) =$

b) $(a + 3) \cdot (b + 2) =$

c) $(x + y) \cdot 2 =$

ACTIVIDAD 1:

a) Si $a = 7$, $b = 3$ y $c = 5$, calcula $a + b + c =$

b) Si $a = 3$, $b = 7$ y $c = 2$, calcula $a - b + c =$

c) Si $a = 9$, $b = 8$ y $c = 6$, calcula $a + b - c =$

d) Si $a = 2$, $b = 8$ y $c = 3$, calcula $a \times (b - c) =$

ACTIVIDAD 2:

a) ¿En qué se transforma $a + 4$, si $a = 3$?

b) ¿En qué se transforma $4b$, si $b = 5$?

c) ¿En qué se transforma $5c - 4$, si $c = 6$?

d) ¿En qué se transforma $5b + 2a$, si $a = 3$ y $b = 4$?

ACTIVIDAD 1:

Completa la tabla siguiente:

a	(3 + a)	a	(3 – a)	(3 + a) . (3 – a)
4				
1				

ACTIVIDAD 2:

Completa la tabla siguiente:

a	b	3a + b	a^2	b^2
4	5			
1	3			
n	t + 3			

ACTIVIDAD 3:

En un supermercado, un kilo de peras cuesta b pesetas; un kilo de manzanas cuesta 5 pesetas más que el de peras; un kilo de plátanos 13 pesetas menos que el de peras, y un kilo de uvas 8 pesetas más que el kilo de plátanos. Completa esta tabla.

Peso	Peras	Manzanas	Plátanos	Uvas
1 kg	b	b + 5	b - 13	(b – 13) + 18
2 kg		2 . (b + 5) = = 2 . b + 10		
10 kg				

ACTIVIDAD 1:

Representa y escribe:

a) $3(a + 4)$

b) $(x + y)(4 + a)$

ACTIVIDAD 2:

Escribe los siguientes productos:

a) $a \cdot (b + 5) =$

b) $(a + 3)(b + 2) =$

c) $(a + b)(a + b) =$

ACTIVIDAD 3:

Rellena los vacíos como se indica en el primer apartado de cada columna:

$x \rightarrow x + 4$	$x \rightarrow 4x$	$x \rightarrow 3x + 2$
$6 \rightarrow$	$6 \rightarrow$	$3 \rightarrow$
$r \rightarrow$	$r \rightarrow$	$4 \rightarrow$
$b + 2 \rightarrow$	$b + 2 \rightarrow$	$2a \rightarrow$

Ahora, si $a = 2b$, ¿en qué se transforma $5a + 3$?

ACTIVIDAD 4:

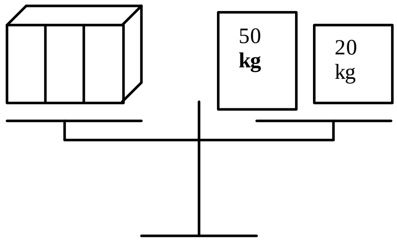
Completa la tabla siguiente:

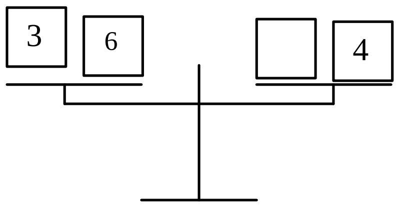
x	(4 + x)	x	(4 – x)	(4 + x) . (4 – x)
3				
t + 2				
p – 1				

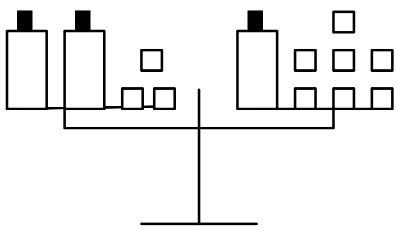
3ª Sesión:

APELLIDOS Y NOMBRE: ____

ACTIVIDAD 1:

Observa que los pesos de cada lado son iguales.		**Escribe la igualdad numérica que expresa la situación de la balanza.**

Explica aquí la situación reflejada en el dibujo.		**3 kg + 6 kg =** **= 4 kg +** $\square$

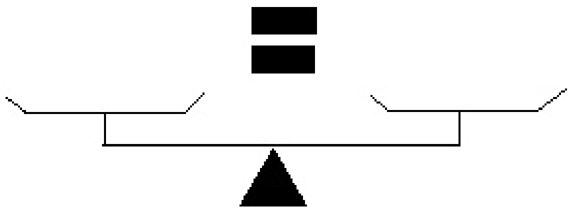
Observa esta balanza. (Todas las botellas pesan igual).		**Expresa la situación de la balanza.**

Representa con la **BALANZA:**

ACTIVIDAD 1:

El peso de una enciclopedia de la música incrementado en 7 kilos, es 23 kilos.

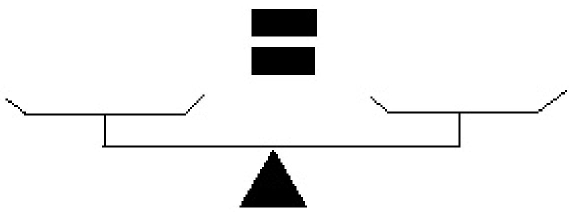
BALANZA	**EXPRESIÓN SIMBÓLICA**



ACTIVIDAD 2:

El doble del peso de un bolígrafo mas 8 gramos es 3 veces el peso del bolígrafo.

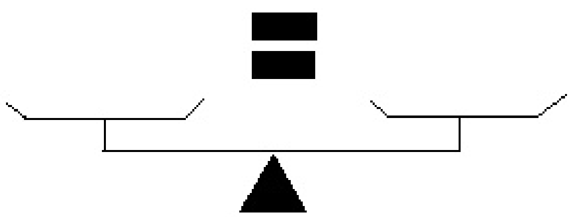
BALANZA	**EXPRESIÓN SIMBÓLICA**



ACTIVIDAD 3:

2 veces el peso de un lote de libros que tiene un niño mas 6 kilos es igual a 5 veces el peso del lote de libros más 3 kilos.

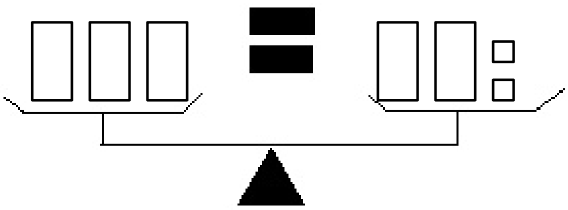
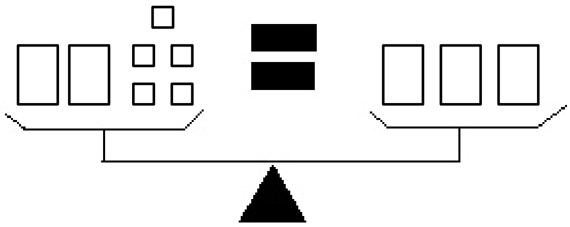
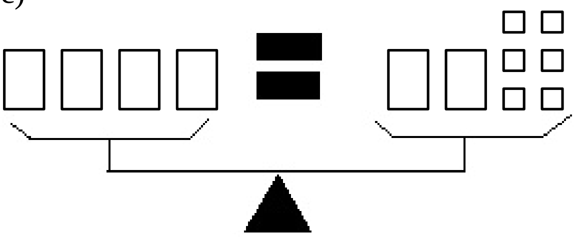
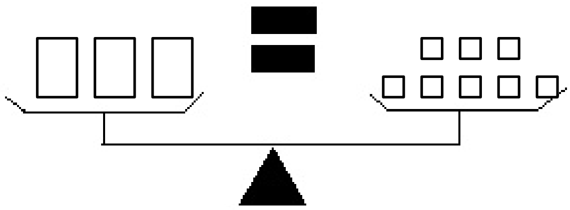
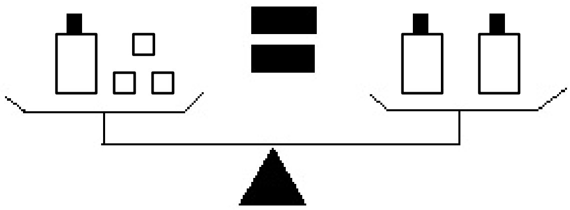
BALANZA	**EXPRESIÓN SIMBÓLICA**



ACTIVIDAD 1:

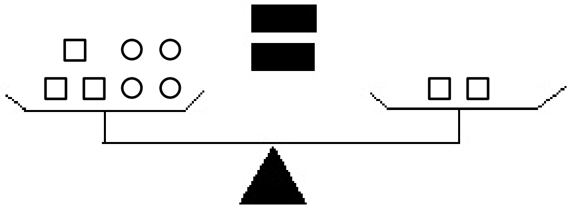
Expresa con números y símbolos las siguientes situaciones:

Los cuadrados pequeños representan 1 kg.

BALANZA	EXPRESIÓN SIMBÓLICA
a) 	
b) 	
c) 	
d) 	
e) 	

ACTIVIDAD 1:

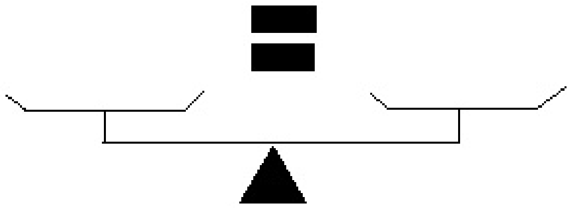
Observa:

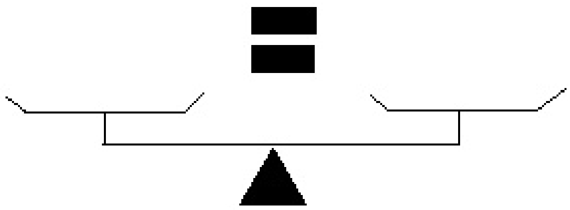
BALANZA	ALGEBRAICO
	$\boxed{3x + 4 = 2x}$

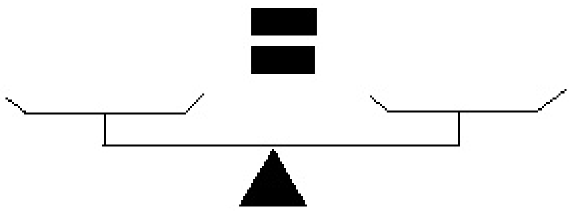
ACTIVIDAD 2:

Completa la siguiente tabla:

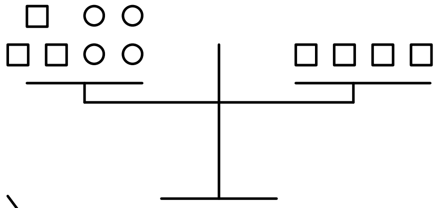
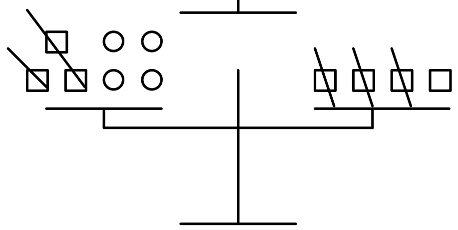
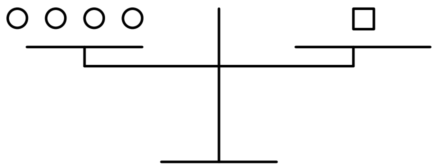
(Sugerencia: Representa los números con O y los datos desconocidos con □).

BALANZA	ALGEBRAICO
	$\boxed{x + 3 = 2x}$

BALANZA	ALGEBRAICO
	$\boxed{4x = 2x + 6}$

BALANZA	ALGEBRAICO
	$\boxed{3x + 2 = 5}$

Observa la siguiente RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN: 3x + 4 = 4x.

BALANZA	ALGEBRAICO
	$3.\,x + 4 = 4\,.\,x$
	$3\,.x - 3\,.\,x + 4 = 4\,.\,x - 3\,.\,x$
	$4 = x$

ACTIVIDAD 1

Resuelve la siguiente ecuación: x + 3 = 2x.

BALANZA	ALGEBRAICO

Resuelve la siguiente ecuación: 3x + 2 = 5.

BALANZA	ALGEBRAICO

ACTIVIDAD 1:

Hallar la solución de las siguientes ecuaciones:

a) $3 + x = 5$

b) $4x + 3 = 2x + 7$

c) $5x = 20$

d) $2x + 1 = 9$

e) $2x + 3 = 5x$

f) $3x + 4 = 7$

ACTIVIDAD 2:

La suma de un número más es doble del mismo número es igual a 36, ¿cuál es el número?

ACTIVIDAD 3:

El triplo de un número de discos de un cantante más 4 es de 7 veces el número de discos, ¿cuál es el número de discos?

ACTIVIDAD 4:

2 veces el número de estudiantes de una clase particular más 6 es 5 veces el número de estudiantes de la clase más 3. ¿Cuál es el número de estudiantes?

ACTIVIDAD 5:

3 reglas valen 18 pesetas. ¿Cuánto vale cada regla?

Sesión 4ª:

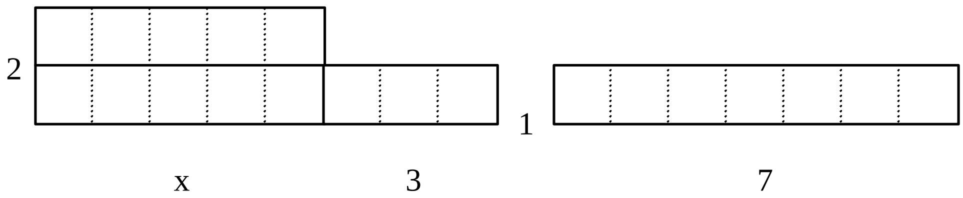
INTRODUCCION

Vamos ahora a hacer otro tipo de **REPRESENTACIONES** cuyas situaciones se dan en el **LENGUAJE HABITUAL.**

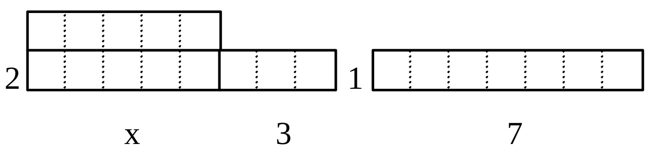
Lo vamos a hacer con **LENGUAJE GEOMÉTRICO** aprovechando lo que has practicado ya.

Ejemplo1:

El doble de la cantidad de pesetas que tiene Juan más 3, es igual a 7.

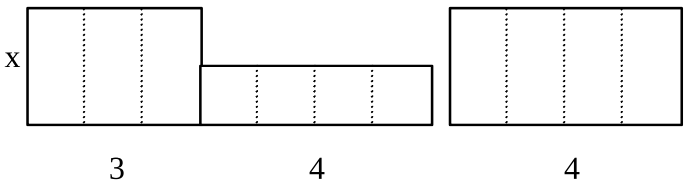


Podríamos ahora colocarlo en esta tabla:

REPRESENTACION GEOMÉTRICA	**EXPRESIÓN ALGEBRAICA**
	$2x + 3 = 7$

Ejemplo 2:

Tres veces la edad de un niño más 4 es exactamente 4 veces su edad.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	**EXPRESIÓN ALGEBRAICA**
	$3x + 4 = 4x$

ACTIVIDAD 1:

El valor de una pegatina aumentada en 4, es de 2 veces el valor de la pegatina.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA

ACTIVIDAD 2:

El precio de un bolígrafo incrementado en 7 pesetas, es de 23 pesetas.

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA

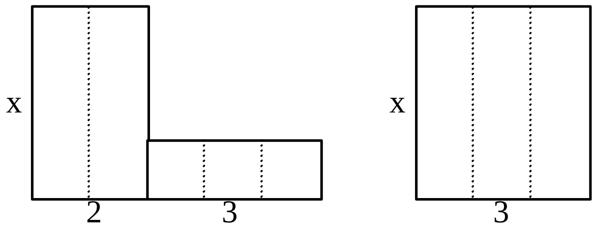
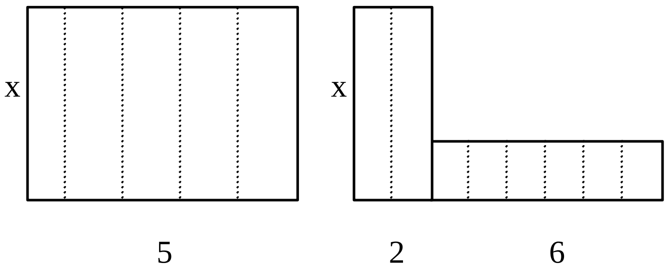
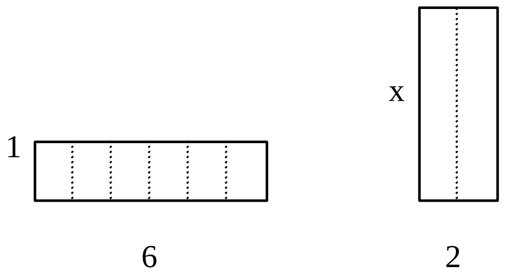
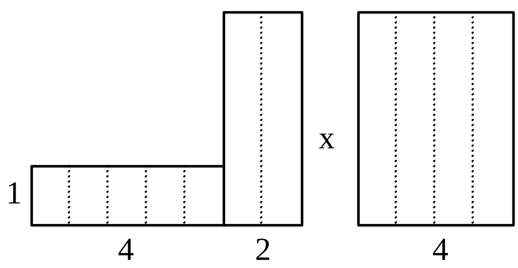
ACTIVIDAD 3:

2 veces el número de estudiantes de una clase particular más 6 es de 5 veces el número de estudiantes de la clase más 3.

REPRESENTACIÓN GEOMETRICA	EXPRESION ALGEBRAICA

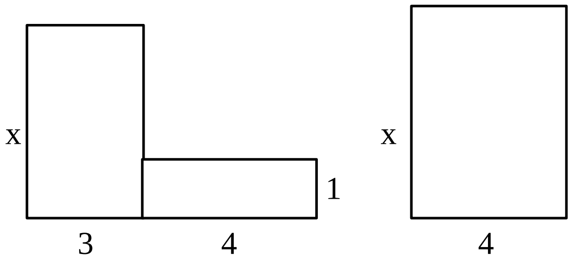
ACTIVIDAD 1:

Expresa con números y símbolos las siguientes situaciones:

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
	
	
	
	

ACTIVIDAD 1:

Observa:

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
	$3x + 4 = 4x$

ACTIVIDAD 2:

Completa la siguiente tabla:

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
	$x + 3 = 2x$
REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	**EXPRESIÓN ALGEBRAICA**
	$4x = 2x + 6$
REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA	**EXPRESIÓN ALGEBRAICA**
	$3x + 2 = 5$

ACTIVIDAD 1:

Hallar la solución de las ecuaciones siguientes:

a) $3 + x = 5$

e) $10x = 50$

b) $3x + 8 = 20$

f) $2x + 3 = 5x$

c) $4x + 3 = 2x + 7$

g) $7x = 14$

d) $5x + 3 = 33$

h) $10 - x = 6$

ACTIVIDAD 2:

El peso de 2 barras de metal más 3 kilos, es 7 kilos. ¿Cuánto pesa cada barra?

ACTIVIDAD 3:

4 bolsas de pastas de chocolate pesan 20 kilos. ¿Cuánto pesa cada bolsa?

ACTIVIDAD 4:

2 veces el precio de un lote de revistas más 6000 pesetas es igual a 5 veces el precio del lote de revistas más 3000 pesetas, ¿cuál es el precio?

AHORA RESUELVE LOS SIGUIENTES EJERCICIOS, HACIENDO USO DEL MÉTODO ALGEBRAICO, GEOMÉTRICO O CON LA BALANZA, O CON VARIOS DE ELLOS.

ACTIVIDAD 1:

3 pins valen 45 pesetas, ¿cuánto vale cada pin?

ACTIVIDAD 2:

El triplo del peso de una jarra grande más 5 kilos es igual a 17 kilos, ¿cuál es el peso de la jarra?

ACTIVIDAD 3:

2 veces el peso de un lote de libros que tiene un niño más 6 kilos es igual a 5 veces el peso del lote de libros más 3 kilos. ¿Cuál es el peso del lote?

AHORA INTENTA EXPRESAR A QUÉ MODELO RECURRIRÍAS SI TUVIERAS QUE RECURRIR A UNO (BALANZA, GEOMÉTRICO, ALGEBRAICO) PARA RESOLVER LOS EJERCICIOS.

¿POR QUÉ VAS A ÉSE?

16.3 Protocolo entrevistas Tercera fase. Junio 96.

Sesión 1ª:

ACTIVIDAD 1:

Realiza las siguientes operaciones indicando los pasos que vas dando has llegar al resultado final.

a) (+ 5) + (- 20) =

b) (- 2) . (+ 5) =

c) (+ 24) : (- 6) =

d) 5 - (6 + 7) + 4 =

e) 3 - 6 - (- 5 + 4) - 2 + 1 =

f) 6 . (7 + 5) - (- 8) + 4 =

ACTIVIDAD 2:

a + 3a puede se escrito de forma más simplificada como **4a.** Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible:

2a + 5a = ...

2a + 5b = ...

(3 - a) b + ab = ...

2a + 5b + a = ...

3a - (b + a) = ...

a + 4 + a - 4 = ...

3 (2 + a) - 3 = ...

(a + b) + (a - b) = ...

ACTIVIDAD 1:

Representa la siguiente historia: en octavo A hay un grupo de niñas. En octavo B hay 5 niñas menos que en octavo A y en octavo C, hay el doble número de niñas que en octavo B, ¿cómo expresarías la situación?

ACTIVIDAD 2:

Carlos tiene 5 boliches. Su abuelo le ha comprado 8 más. Si su amigo Pedro tiene el doble que él y su amigo Fernando el triplo de los que tiene Carlos. ¿Cómo expresarías los boliches que tiene Pedro y los que tiene Carlos?

Carlos tiene .... boliches.
Pedro tiene .... boliches.
Fernando tiene .... boliches.

ACTIVIDAD 1:

¿Cómo expresarías con signos, letras y números las expresiones siguientes:

a) Un número cualquiera,

b) El doble de un número,

c) El triplo de un número cualquiera,

d) La mitad de un número,

e) La suma de dos números distintos,

f) La suma de tres números distintos cualesquiera.

g) La diferencia de dos números distintos cualesquiera.

ACTIVIDAD 1:

ESCRIBE LAS OPERACIONES SIGUIENTES EN LENGUAJE ALGEBRAICO.

a) El triple de la suma de a y b.

b) El doble de la diferencia entre h e i.

c) El cuadrado de la suma de x e y.

d) El triple del cuadrado de b.

e) El producto de x por la suma de a y b.

f) El triple de la diferencia entre b y c.

ACTIVIDAD 1:

¿Cómo expresarías con signos, letras y números las expresiones siguientes:

a) El número siguiente a g.

b) El número anterior a h.

c) El número posterior a j.

d) El triple del cuadrado de b.

e) El número que representa 50 unidades menos que el número d.

f) El doble de x más cuatro por y.

g) El cuadrado de x más 6, todo por 7 más n.

h) n más cuatro, todo por z más 2.

i) x al cuadrado más y por 7 más m.

ACTIVIDAD 1:

Escribe las operaciones siguientes en el lenguaje algebraico.

1. El doble de m.

2. La tercera parte del número f.

3. El cuadrado de z.

4. El producto de a, b, c.

5. El precio de v kilogramos de papas a 75 pesetas el kg.

6. El doble de la diferencia entre h e i.

ACTIVIDAD 1:

¿Cómo expresarías con signos, letras y números las expresiones siguientes:

a) La entrada de un cine vale 175 pesetas, ¿cómo expresarías el gasto de un niño que ha ido 5 veces a ese cine?

b) La “paga” que da un padre a un niño cada semana es de “p” pesetas, ¿cómo expresarías el dinero que reúne ese niño durante 6 semanas?

ACTIVIDAD 2:

¿Cómo expresarías con signos, letras y números las expresiones siguientes:

a) Un chófer de un colegio hizo “n” viajes en un día, transportando 50 niños en cada viaje. ¿Cómo expresarías el número total de niños que transportó ese día?

b) El dueño de un estanco vende 135 periódicos cada día, ¿cómo expresarías el número total de periódicos vendidos en dos semanas (14 días)?

ACTIVIDAD 1:

¿Cómo expresarías con signos, letras y números las expresiones siguientes:

a) Juan tiene ocho caramelos más que Jaime.

b) Miguel tiene el doble de caramelos que Ana.

c) Pepe tiene la mitad de dinero que Antonio y Luis el doble que Antonio.

d) Tres hermanos tienen unas cantidades de dinero. María tiene 50 pesetas más que Miguel y Pablo tiene el doble que los dos juntos.

e) Juan tiene el triplo de edad que su hijo Antonio.

f) Miguel vino a clase el doble de días que Carlos, y Fátima el triple que Miguel.

g) En clase de Matemáticas Juan hizo tres ejercicios más que Maribel y Sandra un tercio de Juan.

h) Al final de una partida de boliches, Pepe tenía tres boliches más que Luis, y Sara la mitad de Pepe.

¿Cuál de los tres tiene más? .... ¿Por qué? ....

ACTIVIDAD 1:

Completa el siguiente cuadro de edades, suponiendo que actualmente Pedro tiene doble edad que Sergio, Marta tiene ocho años más que Pedro y Toni tiene doce menos que la suma de las edades de Marta y Sergio.

	Pedro	Toni	Marta	Sergio
Edad Actual				X
Edad dentro de una década				

ACTIVIDAD 1:

Calcula y reduce, cuando sea posible, las siguientes expresiones:

a) $4 + 3y =$

b) $3a - (b - c) =$

c) $a + a + 3b + 5a =$

d) $5y - 2t =$

e) $(a - b) + b =$

f) $3a - b + a =$

g) $3a + (b + a) =$

h) $(a + b) + b =$

i) $(a - b + c) + (b - a) =$

j) $(a + b) + (a - b) =$

k) $(2a + b) - b =$

l) $5a + (b + a) =$

m) $(2x + y) - (x - y) =$

n) $(x + y) + (x - y) =$

o) $2x + (x - y) =$

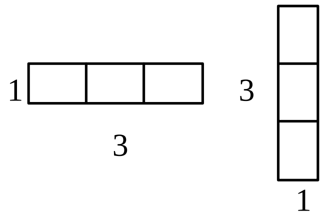
CADA VEZ QUE APARECE UN NÚMERO SOLO O UNA LETRA SOLA, LA REPRESENTAREMOS POR UN RECTÁNGULO.

Ejemplo: 3

Por el primer acuerdo

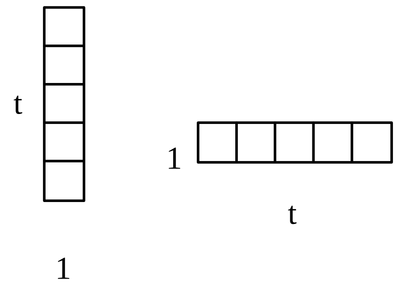
$$3 = 3 . 1 = 1 . 3$$

Quedaría representado así:



Ejemplo: t

Por el segundo acuerdo



ACTIVIDAD 1: Representa con rectángulos:

a) 2   b) x

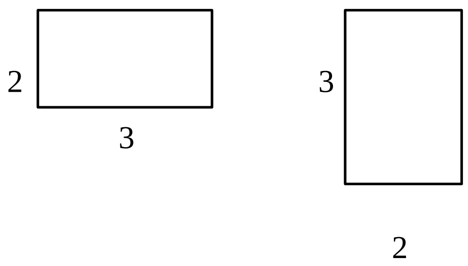
CADA VEZ QUE APARECE UN PRODUCTO DE DOS FACTORES, LO REPRESENTAMOS TAMBIÉN POR UN RECTÁNGULO.

a) 2 . 3   b) z . t

Quedaría representado así:

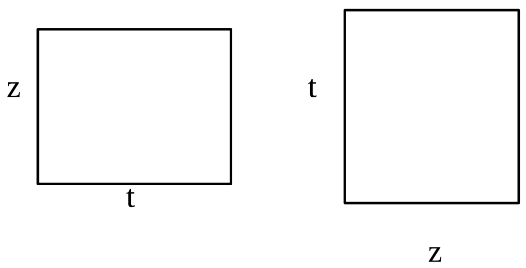
a) 2 . 3

Solución:



b) z . t

Solución:



ACTIVIDAD 1:

Representa: 3 . x.

ACTIVIDAD 2:

Representa:

a) 4 . b b) 4 + b

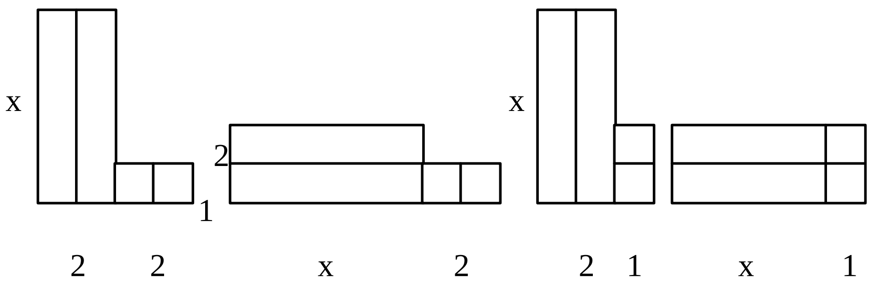
¿Son iguales? ¿Por qué?

REPRESENTAMOS AHORA:

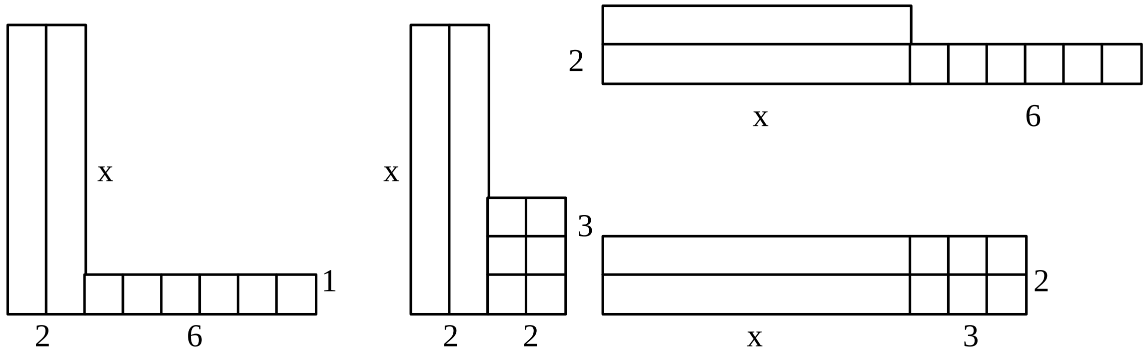
a) $2 . x + 2$ b) $2 . x + 6$

Nos quedaría:

a) $2 . x + 2 = 2 . x + 2 . 1$



b) $2 . x + 6 = 2 . x + 6 . 1$



ACTIVIDAD 1:

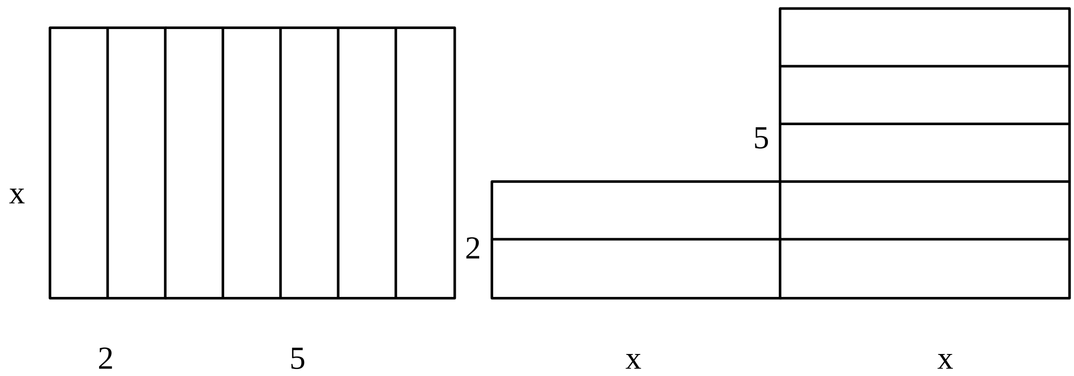
a) 3 + 4 . y   b) 6 . y + 3

ACTIVIDAD 2:

Representa ahora:

a) 2 . x + 3 . x   b) 2 . x + 3 . y   c) 2 . x + 7

observando que 2 . x + 5 . x, quedaría representado:



a) 2 . x + 3 . x

b) 2 . x + 3 . y

c) 2 . x + 7

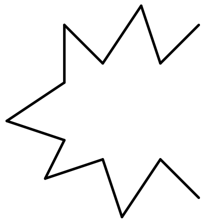
ACTIVIDAD 1:

Saca factor común en la siguiente expresión: $6x + 3y$.

Sesión 2ª

ACTIVIDAD 1:

Parte de esta figura no está dibujada.



Hay n lados en total, todos de longitud 2.

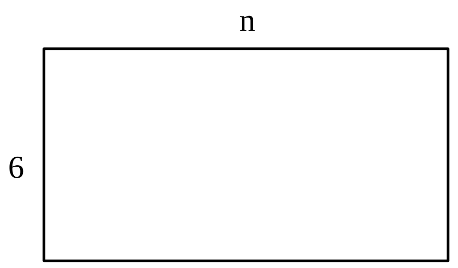
Halla su perímetro.

P = ...

ACTIVIDAD 1:

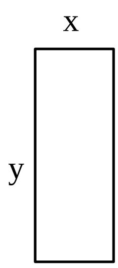
Calcula el perímetro de las siguientes figuras:

a)



P =

b)

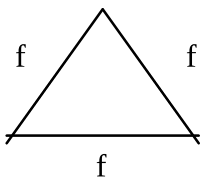


P =

c)

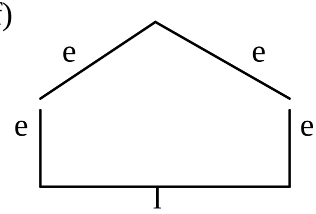
P =

e)



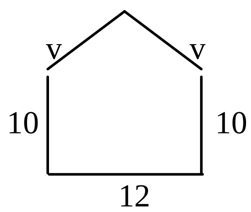
P = ...

f)



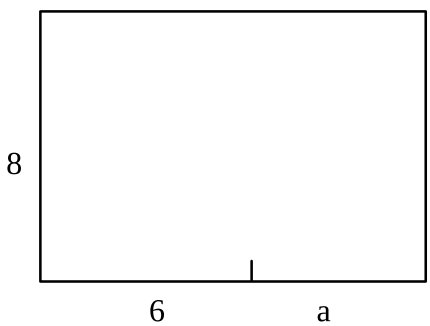
P = ...

g)



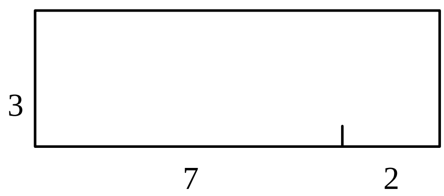
P = ...

h)



P =

i)

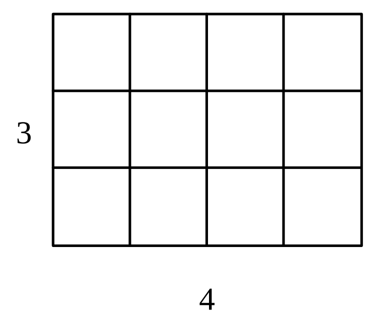


P =

ACTIVIDAD 1:

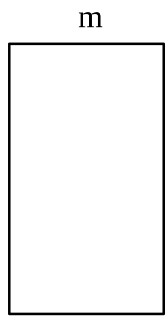
Calcula el área de las siguientes figuras:

a.1)



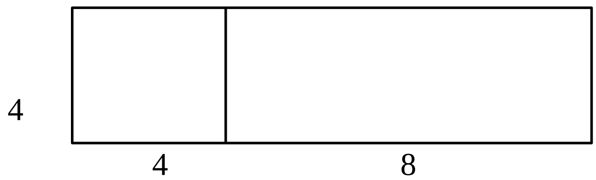
A =

a.2)



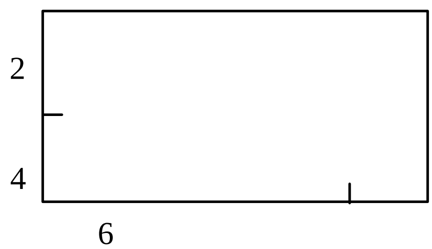
A =

b)



A =

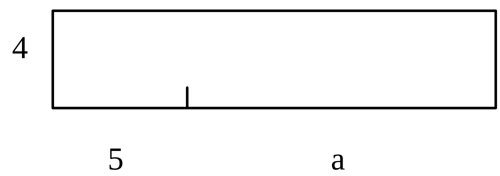
c)



A =

1

d)



A =

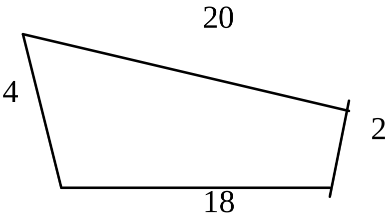
e)

A =

ACTIVIDAD 1:

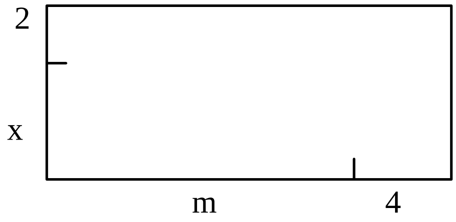
Calcula el perímetro de estas figuras:

a)



P =

b)

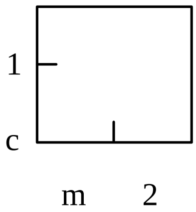


P =

ACTIVIDAD 2:

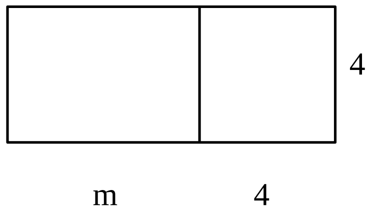
Calcular las áreas de estas figuras:

a)

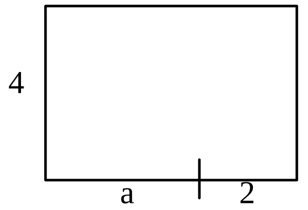


A =

b)



A =

<table>
<tr><th>MODELO GEOMÉTRICO</th><th>VISUALIZACIÓN SIMPLIFICADA</th><th>EXPRESIÓN ALGEBRAICA</th></tr>
<tr><td>
</td><td><table><tr><td>x</td><td>a</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>4 x a</td><td>4 x 2</td></tr></table></td><td>4 x (a + 2) = 4 x a + 4 x 2</td></tr>
</table>

OBSERVA QUE (a + 4) x (b + 3) LO PODRÍAMOS REPRESENTAR GRÁFICAMENTE.

	b	**3**
a	a x b	a x 3
4	4 x b	4 x 3

Y PODEMOS ESQUEMATIZARLO:

x	b	3
a	a x b	a x 3
4	4 x b	4 x 3

ES DECIR, (a + 4) x (b + 3) = a x b + a x 3 + 4 x b + 4 x 3

ACTIVIDAD 1:

Completa el cuadro siguiente:

4 x (3 + 2) =		
4 x (5 + b) =		
a x (5 + b) =		
a x (c + d) =		
(3 + a) x (4 + x) =		
(x + y) x (a + b) =		

ACTIVIDAD 1:

Completa el cuadro siguiente donde intervienen más de dos sumandos, como lo hiciste en el ejemplo anterior.

(a + b + 2) . (3 + c)		

1. Calcula y reduce, cuando sea posible las siguientes expresiones:

a) $(x + y) . 3 =$

b) $(2a + b) . 3 =$

c) $x . (y + x) =$

d) $4 . (a + b) =$

e) $3 . (4a + b) =$

f) $(x + y) (x + y) =$

ACTIVIDAD 1:

n multiplicado por 4 se puede escribir como **4n.**

Multiplica por 4 cada uno de las siguientes expresiones:

8	n + 5	3n	2n + 4
....	....	....	....

ACTIVIDAD 2:

Rellena los vacíos como se indica en el primer apartado de cada columna:

x ➔ x + 3	x ➔ 7x	x ➔ 5x + 3
6 ➔	2 ➔.........	3 ➔.............
n ➔	3x ➔	k ➔ ....
b + 2 ➔	p ➔	2k ➔ ....

ACTIVIDAD 1:

Completa la tabla siguiente:

a	(3 + a)	a	(3 – a)	(3 + a) . (3 – a)
4				
1				

ACTIVIDAD 2:

Completa la tabla siguiente:

a	b	3a + b	a^2	b^2
4	5			
1	3			
n	t + 3			

ACTIVIDAD 3:

En un supermercado, un kilo de peras cuesta b pesetas; un kilo de manzanas cuesta 5 pesetas más que el de peras; un kilo de plátanos 13 pesetas menos que el de peras, y un kilo de uvas 8 pesetas más que el kilo de plátanos. Completa esta tabla.

Peso	Peras	Manzanas	Plátanos	Uvas
1 kg	b	b + 5	b - 13	(b – 13) + 18
2 kg	2 . (b + 5) = = 2 . b + 10			
10 kg				

1. a) ¿En qué se transforma $a + 4$, si $a = 2$?

b) ¿En qué se transforma $4a$, si $a = 2$?

c) ¿En qué se transforma $5a - 3$, si $a = 3$?

d) ¿En qué se transforma $5b + 2a$, si $a = 3$ y $b = 4$?

2. a) Si $a = 2b$, ¿en qué se transforma $5a + 3$?

b) Si $a = b + 3$, ¿en qué se transforma $5a + 3b$?

c) Si $a = 2b$, ¿en qué se transforma $(a + 3)(3 – a)$?

d) Si $a = 2$, $b = 8$, $c = 3$, ¿en qué se transforma $a(b – c)$?

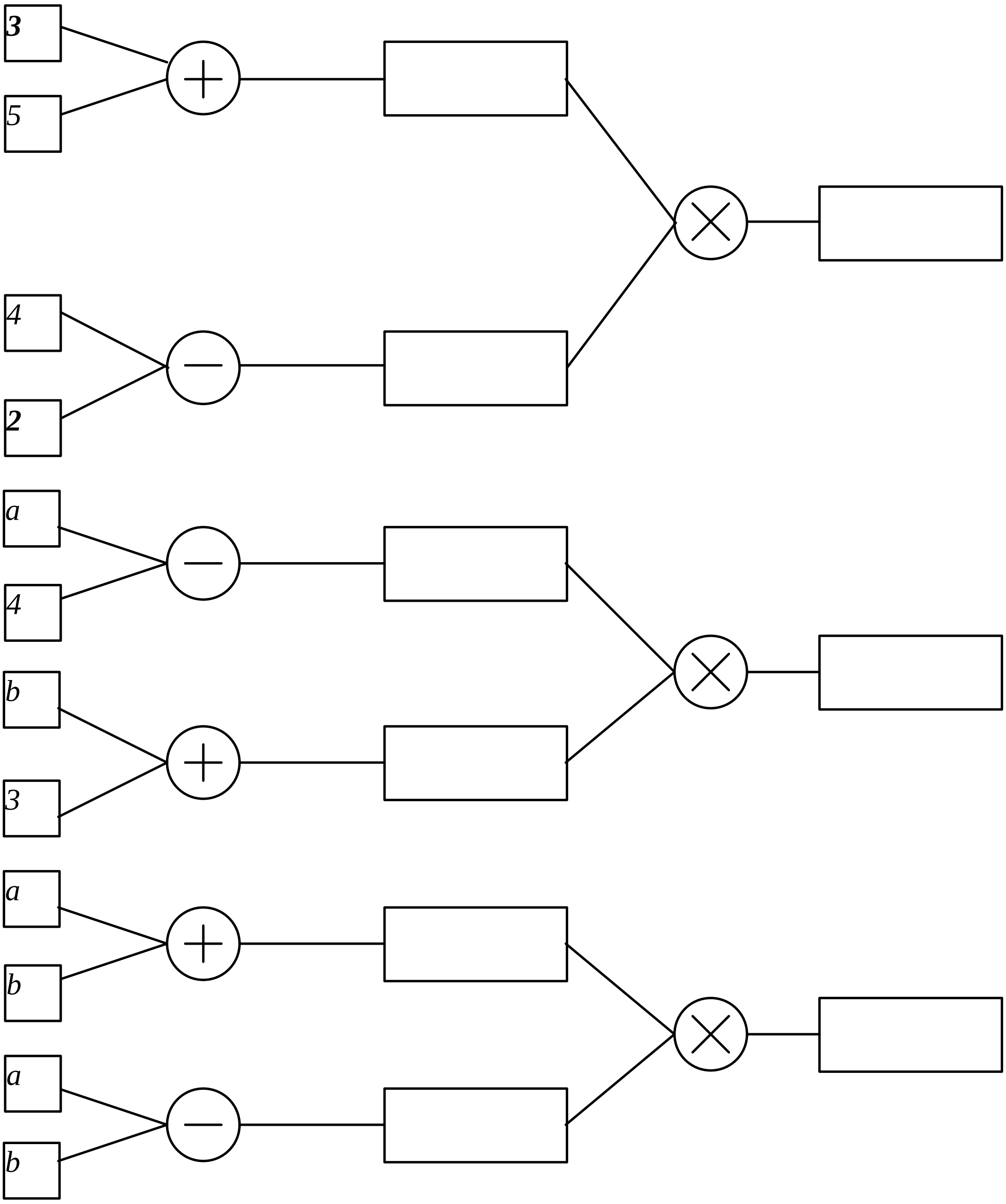
e) Si $a = 2b$, ¿en qué se transforma $5a - 3$?

f) Si $a = 3$, $b = 7$, $c = 2$ ¿en qué se transforma $a - b + c$?

1. En cada caso halla las situaciones que se hacen para pasar de las expresiones de las columnas A a la B. (Puede haber más de una posibilidad).

A	B
a) 5x – 17	5 (y + 1) - 17
b) 6x + 8	3y + 8
c) 2x . 3y – z	6 x p
d) e (j + z)	(j + z) (f – 2)
e) 21 . 7m + 8	14m + 8
f) 2 + 10 (p + 20)	2 + 10 q
g) a (2b + 6)	a d + c
h) r – (z + t)	a – b – c
i) v x	h r h v
j) $(a + b)^2$	$(3x + 5q)^2$
k) x (y + 2t)	x y + x z

1. Completa los siguientes diagramas:



¿Cuál es el resultado de (a + b) (a – b)?

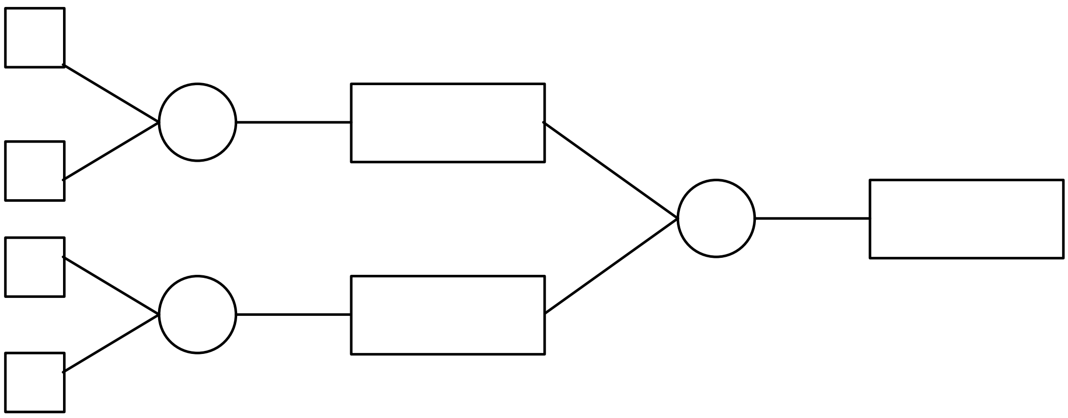
1. ¿Cuál sería el resultado de (a + b) (a – b), si:

$a = x^2$

y

$b = 2y$

¿Cómo lo harías sobre este diagrama?



ANEXO 17

17.1 Transcripciones de las entrevistas. Primera fase. Junio 93.

Alumna A. Sesión 1ª. (E: entrevistadora; A: Alumno/a)

E: Empieza a trabajar un poco ahí, a ver...
Puedes leer en alto.
A: Leo en alto.
E: Sí.
A: Un niño tiene en el bolsillo izquierdo boliches y en el derecho tiene tres más que en el izquierdo. Situación: bolsillo izquierdo, bolsillo derecho; representación: boliches, boliches más tres.
E: Lo entiendes, ¿no?
A: Sí.
E: Bien. Ahora a ver la situación nueva que tienes ahí.
¿Qué es lo que significa ahí Juan?
A: ¿Juan? Pues lo que mide Juan... y aquí mide lo que mide Juan más cuatro centímetros.
E: Procura hacerlo cortito para que te quepa. Y a Juan, ¿qué le correspondería entonces, si tuvieras que expresarlo de otra manera? ¿Cómo lo podrías hacer?
A: Pues, “x”.
E: “x”. Y si a Juan lo representas con x, ¿cuántos tendría Pepe?
A: x más cuatro. No, Pepe x más ocho.
E: ¿Y Eduardo?
A: x más cuatro.
E: Bueno pues ponlo ahí.
Bueno, ¿entonces cómo quedaría la expresión correcta, si fueras a trabajar un problema o lo que sea? ¿Cómo te quedaría la expresión?
A: Representación: Pepe x más ocho; Juan x y Eduardo x más cuatro.
E: Bien, la siguiente.
A: Utilizando una sola letra rellena el siguiente esquema para el ejercicio siguiente: “Pepe mide ocho centímetros más que Juan y Eduardo mide cuatro centímetros más que Juan”.
E: ¿Qué diferencia hay entre ese ejercicio y el anterior?
A: Es el mismo lo que pasa es que tú tienes que ponerlo todo.
E: Bueno entonces aquí te quedaría x...
A: x más ocho, Juan x y Eduardo x más cuatro.
E: Vale.
A: Aquí tienes una situación y su representación y tú tienes que escribir la historia. ¿De acuerdo?
Situación: Paquete de leche, mantequilla, café; representación: pesetas, pesetas menos veinte y pesetas más cien.
E: ¿Qué historia le podrías poner tú a esas expresiones, a esa situación?
A: Que el paquete de leche vale “x” pesetas, la mantequilla lo que vale el paquete de leche menos veinte pesetas y el café vale el paquete de leche más cien pesetas.
E: Bien. Si tú tuvieras un problema Ana, como está ahí. La mantequilla vale el paquete de leche...¡no!. El paquete de leche vale “x” pesetas, la mantequilla vale el paquete de leche menos veinte pesetas. Fíjate que has puesto, la mantequilla, ¿tú crees que eso está así muy correcto? ¿Puede ser la mantequilla un almacén?
A: Un paquete de mantequilla.
E: ¿Y en lo del café?
A: También, un paquete.
E: Ves la diferencia, ¿no?
A: Sí.
E: Lee en alto.
A: Cuando te encuentres un número sólo, te vas a imaginar que es un producto del número que te encuentras por la unidad. Por ejemplo: si tienes un “tres”, es lo mismo que tres por uno o que uno por tres.
Actividad uno: rellena los cuadritos en...
...que dos es igual a dos por uno y también esto es igual a uno por dos; seis es igual a seis por uno y también es igual a uno por seis.
E: ¿Eso tiene algún nombre? ¿Esa propiedad?
A: La conmutativa.
Cuando te encuentres una letra sola, te vas a imaginar que es un producto de la letra que te encuentras por la unidad. Ejemplo: “A” es lo mismo que “A” por uno o que uno por “A”. Rellena los cuadritos en...
...que “X” es igual a “X” por uno y también es igual a uno por “X”; y que “Y” es igual a uno por “Y” y que

también es igual a “Y” por uno. Utilizamos “.” como símbolo de multiplicar para no confundirnos con la “x”. Cada vez que aparece un número solo o una letra sola, la representamos por un rectángulo. Ejemplo: tres; por el primer acuerdo, tres es igual a tres por uno, es igual a uno por tres.
E: Tú dijiste antes que eso era la propiedad conmutativa, ¿de qué?
A: De la multiplicación.
E: ¿Está claro, no?
A: Sí.
E: Teniendo en cuenta eso, ¿cómo representarías “S” y cómo representarías “Y”?
¿Podrías representarlo de otra manera, eso mismo?
A: Sí, poniéndolo así. Poniéndolo en vertical.
E: Y, ¿qué elementos tiene el rectángulo?
A: Pues aquí tiene cinco de base y de altura uno.
E: ¿Y en el otro caso?
A: Tendría de altura cinco y de base uno.
E: Pon el otro, aunque no hace falta. Y ahí, ¿ocurriría lo mismo?
A: Sí, de base “Y” y de altura uno.
Representar mediante rectángulos: a) dos por tres y b) zeta por te. Se haría así:
E: Lo ves, ¿no? Que es lo que hiciste antes.
A: Sí. Represento...
E: E: ¿Se puede representar de otra manera?
A: Sí, también poniendo en vertical, de base “dos” y de altura “x”.
E: Representa por rectángulos.
A: Este también se podría poner de base “b” y de altura “cuatro”.
E: ¿Eso se podría poner de otra manera?
A: Sí, poniendo de base uno y de altura...
E: Bueno, inténtalo, ¿a ver?
¿Se podía haber separado de otra manera?
A: Cambiando esto de lugar...¡no!. Cambiando esto primero y luego esto.
E: ¿Y se puede poner todavía de otra manera?
A: De otra manera. Yo creo que no.
E: ¿No se puede más?
O sea, sólo es, tú dices, ponerle aquí o ponerle aquí debajo. No hay más forma.
A: Sí.
E: Representa aquí cuatro...
A: Ah! También así.
E: ¿Son iguales estas dos representaciones?
A: ¿Éstas?
E: Sí.
A: Son diferentes porque aquí está multiplicando y aquí es una suma.
E: ¿Ya leíste el enunciado?
A: Escribe las operaciones en lenguaje algebraico.
E: ¿Qué es lo que entenderías por lenguaje algebraico?
A: Pues, en vez de representarlo diciéndolo con letras, es expresarlo por medio de signos.
E: Podrías poner, ¿que esto es igual que esto? ¿Expresa lo mismo?
A: En éste sí porque te dice que tres veces “x”, y aquí dice tres veces “x”.
E: ¿Y en los otros no?
A: Aquí también porque dice el doble de...
E: ¿Por qué te fijaste en éste?
A: ¿En cuál?
E: En éste. ¿No estabas mirando éste?
A: Sí, porque también era doble y aquí era... y estaba buscando un doble o triple para ver cómo era y... y aquí como dice doble de la diferencia entre “h” e “y” y como te dice el doble “n”, menos cuatro significa que...
E: ¿Por qué te paraste ahí?
A: Porque estaba pensando si era el doble de “n” o era el doble de la resta ésta de “n” menos cuatro.
E: Exacto. Pero por qué tú al leer te paraste, o sea, que si yo esto te lo escribo aquí, ¿es lo mismo? Porque esto es lo que tú has leído, ¿no? En un momento de las veces que has leído, has leído eso. ¿Es lo mismo esta expresión que ésta que yo he puesto aquí?
A: No.
E: Entonces, ¿cuál sería la expresión correcta? Si tú crees que no son iguales.
A: Yo creo que es el doble de “n” menos cuatro. Es que no sé porque aquí la coma te dice que es el doble de “n”

menos cuatro, y aquí no hay coma...
E: Entonces, ¿cómo quedaría la expresión?
A: Con paréntesis quedaría.
E: Ahí con paréntesis, ¿y allí?
A: Sin paréntesis.
E: Está claro.
A: Sí, sí.
E: Por eso tú aquí estabas comparando, éste por ejemplo con éste, ... eso lo mismo, pero de otra manera.
Eso que acabas de escribir el doble de "n" menos cuatro o doble de..., ¿qué propiedad es? ¿Tiene algún nombre especial? El doble de... "n" menos cuatro, el doble de "n" menos "y", el doble de...
A: Déjame ver...
E: Esto expresa igual que tú me decías antes..., ¿esto expresa alguna propiedad?
A: La distributiva.
E: La distributiva, ¿de qué?
A: De... aquí sería de la suma y aquí de la resta.
E: La distributiva de la suma y de la resta.
A: Sí.
Escribe las operaciones siguientes en lenguaje algebraico. El perímetro y el área de un cuadrado de "t" menos lado.
E: ¿Tú normalmente sueles dibujar?
A: Sí, cuando son cosas de geometría, sí.
Cuatro "t", porque como son cuatro...
E: ¿Cuatro qué?
A: Para hallar el perímetro, ¿no?, se suman todos los lados y en vez de poner "t" más "t" más "t" más "t", entonces ponemos cuatro por "t".
"t" por "t" es igual a "t" al cuadrado.
El perímetro y el área de un rectángulo de "y" metros de largo y "x" metros de ancho.
E: ¿Esto se podría simplificar más?
A: No.
E: ¿Se podría expresar de otra manera?
A: "x" más "x" más "y" más "y".
E: ¿De alguna otra manera se puede expresar?
A: A no ser cambiando el orden; no sé, poniendo "y" primero... alterando...
E: ¿Y qué más? No se puede poner de otra manera, dos "x" más dos "y".
A: No, aquí no se puede simplificar más ya, porque no son términos semejantes.
E: Pero y expresarlos de otra manera, no más simplificada sino de otra manera.
A: No. No porque si tú sumás esto, no, al tener esto ya, te sale luego este paso, y después de este paso, no puedes hacerlo.
E: ¿Y tú podrías calcular el perímetro sumando la base y la altura y multiplicarlos por dos?
A: También.
E: Hazlo, a ver.
¿xy por dos, sería el perímetro?
A: No.
E: Sobre todo, las expresiones son equivalentes, ¿no?
A: Sí.
Calcula el perímetro de las figuras siguientes.
E: Luego, lo otro sería lo que tú decías antes, cambiando el orden qué, que sería, ¿qué propiedad?
A: La conmutativa.
E: Y pasar de aquí a ahí, ¿qué propiedad sería?
A: De aquí a aquí, sacar factor común, y de aquí a aquí sería la distributiva.
E: Eso se podría hacer en un cuadro de entrada.
A: Sí.
E: ¿Cómo?
¿Ése es el perímetro? ¿Eso que tú has calculado es el perímetro?
A: A no, esto es el área, ¿tacho?
E: Sí.
¿Se puede hacer algo más?
¿Y esto te quedaría así cuando tú estás trabajando, pasando los renglones sin signo ninguno?
A: Calcular el perímetro de las siguientes figuras.
E: ¿A ver? Vete señalando aquí lo que has ido poniendo.

A: El tres éste, el siete éste, luego este tres, este siete y luego este dos y este dos.
E: ¿Podrías expresarlo de otra manera? Sin ir poniéndolo así, paso a paso, mirando la figura.
A: Poner dos por tres, dos por siete y dos por dos.
Traduce a lenguaje algebraico las frases e ideas siguientes: el precio de “v” cintas de vídeo a dos mil quinientas pesetas cada una.
E: ¿Y ahí puede haber algún signo?
A: Aquí no importa porque...
E: ¿Y esta expresión y esto es lo mismo? ¿No cabe ahí algún símbolo?
A: Sí, igual. Porque te dice “x” o “v” cintas por dos mil quinientas pesetas cada una.
Lo que cuesta una pelota, si tres cuestan “p” pesetas.
Aquí he puesto “p” entre tres, porque si tres valen “p” pesetas, pues la diferencia de dos números distintos cualesquiera.
“x menos “b” porque son dos números que no conocemos.
E: ¿No está bien?
A: Creo que sí. Pero es que me acuerdo cuando tú viniste, pusiste algo de esto, y estuvimos... me parece que es así.
E: ¿Cuál es la duda? ¿Por qué te presenta a ti duda?
A: Por esta palabra.
E: Por esa palabra, “cualesquiera”, ¿qué significa “cualesquiera”?
A: Cualquiera.
El número que representa cincuenta unidades menos que el número “d”.
E: ¿ “x” qué es?
A: Cincuenta unidades.
E: ¿Y eso es lo que te dice el ejercicio?
Aquí, ¿qué lees tú?
A: Cincuenta unidades que es igual a “x” menos “d”.
E: Cincuenta menos “d”. Lee ahora el texto.
A: El número que representa cincuenta unidades menos que el número “d”.
E: ¿Es lo mismo?
A: Es que me dice, el número que representa cincuenta unidades, y es un número... a no ser dos por veinticinco pero no es un número.
E: Pero tú crees que es lo mismo un número que representa cincuenta unidades menos que “d”. ¿Quién es más grande el número que has obtenido o “d”?
A: ¿Para hacer la resta?
E: No, tú piensa, en ese enunciado, el número ese ¿qué es más grande o más pequeño que “d”?
A: Más pequeño.
E: Más pequeño. Y esta “x”, ¿es mayor o menor que “d”?
A: Mayor, no, no sabes. Depende de lo que valga “d”, porque a lo mejor puede ser éste mayor que éste y te da una...
E: Pero no quedamos que “x” es igual a cincuenta.
A. Sí.
E: Pero no sabemos lo que es “d”, entonces, no sé, si...Y yo si te digo el número cincuenta menos “d” unidades. ¿Cuál sería la expresión?
A: Pues, el número cincuenta menos “d” unidades.
E: Luego, ¿da lo mismo que yo diga cincuenta menos “d” que yo a “d” quitarle cincuenta?
A: No es lo mismo.
E: A cincuenta le quitas “d” y eso te dice el texto. Aquí a cincuenta le has quitado “d”.
A: Yo creo que sí.
E: Sí.
A: Calcula el área de las siguientes figuras. Como es un rectángulo y el área es base por altura, y los multiplico.
E: Y ahí, no pusiste primero la altura...
A: Aquí puse altura por base que es lo mismo. Aquí puse cuatro más ocho porque aquí te dice que cuatro y ocho es la base.
E: Eso significa que tú estás entendiendo que es suma, que la longitud es la suma. ¿Se puede calcular ese área de otra manera?
A: Sí, por separado, calculando.
E: ¿Cuánto sería?
A: Cuatro al cuadrado más ocho por uno, esto quedaría...
E: La misma figura no puede tener datos distintos, ¿qué has hecho en el primer caso? ¿Cómo lo has resuelto la primera vez?

A: Pues, suponiendo que esto es un rectángulo entero, le he puesto la altura cuatro por la base que es cuatro más ocho.
E: Eh, entonces está bien. Ahora el otro.
A: Y aquí lo he contado por separado, entonces sumaría y sería cuatro por cuatro, (que es cuatro al cuadrado), que es dieciséis más ocho por una.
E: ¿Qué figuras tienes ahí entonces?
A: Dos.
E: ¿Qué tipos de figuras?
A: Un cuadrado y un rectángulo.
E: ¿Y cómo hallas el área de un rectángulo?
A: Base por altura.
E: ¿Cuánto mide la base?
A: La base ocho y la altura cuatro. Calcular el área de las siguientes figuras. Aquí he puesto esto como es, un rectángulo, porque aquí se supone, ¿no?, que esto mide seis. No puede ser un cuadrado, entonces sería base por altura. La altura es dos más cuatro y la base seis más uno.
E: ¿De qué otra manera se puede calcular el área de este rectángulo?
A: Sacando factor común.
E: ¿Dónde está el factor común? Y de aquí mirando a la figura, ¿se puede calcular de otra manera el área? ¿Mirando a la figura, podrías hacerlo de otra manera? ¿O no? Siempre tienes que hacer...
A: No, porque siempre tienes que sumar en la altura estos dos. No puedo sumar éste con éste, ni éste con éste y en la base estos dos.
E: Dibuja allí un rectángulo que tenga de base dos más “x” y de altura tres más “y”.
A: Dos más “x” por tres más “y”.
E: Dos más “x” por tres más “y”. Pero ¿esa zona que has independizado qué? ¿Por qué pusiste esas rayas? ¿Por qué trazaste eso?
A: Éstas son las dos partes y éstas las tres. A no ser que “y” sea esto y “x” sea eso.
E: ¿”y” sea cuál?
A: Esto.
E: Pero, ¿esas separaciones que tú has hecho ahí podrían dar lugar al área?
A: No.
E: No, ¿por qué?
A: Es todo esto. Todo lo que está dentro de aquí.
E: Todo esto.
Y si tuvieras aquí dentro otras figuras, ¿podrías calcular el área?
A: Sí.
E: ¿Sería lo mismo que seis por siete?
A: Sí, sí porque lo que importa..., ¿son rayas o son polígonos?
E: Son polígonos, que tú conoces. Podría ser otro dibujo. Tú tienes una hoja, la rellenas de cartulina y, ¿el área de esa hoja tiene que ser coincidente con el área que tenía?
A: Sí, porque lo que importa es la extensión, no que tenga...
Si tú te pones y rayas todo esto, no importa las rayas que ponga o tengas escrito.
E: ¿Entonces para ti el área es la extensión que ocupa?
A: Sí.

Alumna A. Sesión 2ª.

A: Aquí no hace falta que pongamos paréntesis, porque como no hay ninguna multiplicación, pues aunque pongas paréntesis es lo mismo.
Y aquí tampoco se puede poner paréntesis porque aquí predomina la multiplicación.
E: Y, ¿cómo quedarían los resultados?
A: Pues, aquí nueve más “n” y aquí no puedo simplificar más porque...
“n” multiplicado por cuatro se puede escribir como cuatro “n” multiplicado por cuatro cada uno de los siguientes.
Ocho por cuatro... aquí se debe poner paréntesis porque lo que multiplicas es todo esto y si no pusiéramos paréntesis multiplicarías sólo la “n”.
Y aquí sí había que poner paréntesis. No, no hace falta, es lo mismo poner paréntesis que no.
Siete “a” se puede hacer una ecuación entera semejante.
E: ...ya.
A: Aquí no se puede hacer más pequeño porque no son términos semejantes y aquí, los paréntesis es como si no existieran porque como es una suma, no una multiplicación... Y se podría sumar “a” más “a” que sería dos ”a” y después sumamos el “b”. Y aquí no se puede simplificar más porque no son términos semejantes... Aquí...aquí lo

que se puede sumar es estas “a” más “a” que sería tres ”a” y luego el cinco “b” y ya no se puede simplificar más.
...Y aquí quedaría “a” porque los paréntesis es como si no existieran, ¿no? Como una suma y si tenemos “b” y le quitamos “b” nos queda cero.
Aquí como hay un signo delante del paréntesis se puede cambiar.
E: ¿Se puede cambiar?
A: Lo de dentro.
E: ¿Se puede?
A: Sí porque hay un signo menos.
E: ¿Pero se puede cambiar?, o, ¿se tiene que cambiar?
A: Se puede.
E: Si tú no quieres... ¡No lo cambias!
A: Yo sí que lo cambio.
E: ¿Pero no es obligación cambiarlo?
A: No, pero es mejor porque si no... es mejor cambiarlo porque así tú tienes todos los términos y luego ya simplificamos.
E: ¿Y, por qué lo cambias, el signo?
A: Es como si aquí hubiera un uno, y es una propiedad distributiva.
E: Ah, muy bien.
Entonces te quedaría dos “a” menos “b”.
Y aquí quedaría dos “a” porque cuatro le quitas cuatro te queda cero. Y aquí lo que te queda es “a”, que son dos “a”.
Aquí cuatro “a”. Se suman tres “a” más “a” y le restas “b”.
Aquí es como si no hubiera paréntesis porque aquí hay un signo más y quedaría dos “a” , porque “b” menos “b” es cero.
Intenta representar dos “x” más tres “x”; “b”, dos “x” más tres “y”; “c”, dos “x” más siete observando que dos “x” más cinco por “x” quedaría representado:
¿Eso se parece a lo que ya hiciste?
A: Sí, “¡mm!”m. Se representa primero el rectángulo.
E: ¿Se podría representar de otra manera?
A: Sí, poniendo esto en vertical y luego poniéndolo encima.
E: ¿A ver? ¿El último de abajo? ¿Qué estabas pensando?
A: ¿En éste?
E: Sí.
A: Que para hallar el área, que cómo sería porque como tenemos éste... tendría que darse por separado quitando éste.
E: ¿Qué te daría, si lo sabes?
A: Daría “x” más “x”, dos “x”. Para hallar el área “x” más “x”...ah!... Dos por “x” al cuadrado y luego...
E: ¿Por qué “x” al cuadrado?
A: Son dos “x” y la altura es “x”, “x” más “x”. No, perdón. Dos “x”, dos “x”.
E: Ese sería el área, ¿de qué?
A: De esto.
E: Ejem. Y entonces, ¿qué tendrías que hacer?
A: Sumarle “x” por uno, “x”.
E: Y aquí, ¿cómo lo calcularías?
A: Sería dos más tres, seis por “x”.
E: ¿Dos más tres?
A: Cinco.
E: ¿Y aquí, abajo, cómo sería?
A: Esto, no. Quedaría dos por “x” y siete por una.
E: Y siete por una. ¿Cuando tú haces los problemas, Ana, sueles utilizar el rectángulo?, ¿o no?
A: Para hallar las ecuaciones no.
E: Para hallar las ecuaciones ¡no!. ¿Para hallar las áreas?
A: Para las áreas sí.
E: ¿Aunque no te lo pidan?
A: No, además Amor quiere que lo dibujemos en el cuaderno.
En la clase de matemáticas, Juan hizo tres ejercicios... usando el lenguaje algebraico representa estas situaciones. Recuerda que tienes que utilizar letras para representar los datos desconocidos.
En la clase de matemáticas, Juan hizo tres ejercicios más que Maribel y Sandra un tercio de Juan.
E: Y aquí donde tú pones... Juan “x” más tres, ¿tú crees que eso es correcto? ¿Tú crees que eso es correcto? Juan igual ·”x” más tres o Maribel igual a “x” o, ¿podría expresarse de otra manera más correcta?

Porque..., ¿qué es lo que significa ahí Juan?
A: ¿Juan? Pues lo que..., dice que Juan hizo tres ejercicios más que Maribel, entonces si Maribel hizo “x”.
E: Pero entonces, ¿qué es lo que significa “x”? ¿”x” significa Maribel?
A: No, los ejercicios que hace Maribel.
Usando el lenguaje algebraico representa estas situaciones: Juan tiene ocho caramelos más que Jaime.
Como dice que Juan tiene ocho más que Jaime, pues a Jaime le doy el valor de “x” y le sumo ocho, ¿no? Y luego para pasar lo que tiene Juan pues sería “x” más ocho, lo que tiene Jaime más ocho.
E: ¿Y no te quedaría mejor si desde el principio tú pones en vez de Juan igual a “x” más ocho, Jaime igual a “x”, pondrías “x” igual a caramelos que tiene Jaime?
A: Sí.
E: ¿No queda mejor?
A: Sí.
E: Que Juan, Pepe... tú lo que tienes es que cambiar o añadir cosas, pero realmente la “x”, lo que significa cuando tú escribes la “x”, lo que para tí está significando en los caramelos que tienes ahí.
A: Sí.
E: Realiza.
A: Tres hermanos tienen unas cantidades de dinero, María tiene cincuenta pesetas más que Miguel y Pablo tiene el doble que los otros dos juntos.
E: ¿Qué pasaría si llamamos al dinero que tiene María “x”?
A: Que así no podemos llamarlo, “x”.
E: ¿No es correcto? Bueno, vamos a suponer que el dinero que tiene María es “y” o de “y”, ¿no? Entonces con María, en un problema el dinero se llamaría “y”, y me da esas mismas condiciones, ¿cuánto tendría Miguel?
A: Pues “y” menos cincuenta.
E: ¿Y Pablo?
A: El doble de “y” más.
E: ¡Vale!

Alumna A. Sesión 3ª.

E: ¿Te lo leíste?
A: Sí.
E: ¿Qué dice ese ejercicio?
A: Representar “b” por la suma de “a” más cinco; el doble de la suma tres más “x” y el triple de las suma “y” más “c”, mediante rectángulos y utilizar un cuadro de doble entrada.
E: Te dije uno sólo, ¿cuál vas a elegir?
A: El primero.
E: Por ejemplo.
A: Bueno, le di dos valores a las botellas, “x” a una botella sola. Y a dos rectángulos “b”. Entonces puse como había dos botellas dos “x”, más tres “b”, como había tres, bueno, si como había tres de esos cartuchos y puse igual a una botella que es “x” y como habían siete de esas cajitas, pues siete “b”.
E: Pasa a la otra ficha.
A: Representa con la balanza: añadiéndole tres kilos al peso de una lata de pintura, el peso es nueve kilos.
Balanza.
Como dice que si añadiéndole tres kilos al peso de la pintura el peso... Pues una lata de pintura, le añado tres kilos y los tres kilos los representé como unos pesos y cada una valía un kilo y luego puse, estas pesas, puse nueve, que eran nueve kilos.
¿Aquí ponía expresión simbólica?
E: Sí.
A: “b” el peso, pues tres “b” igual a nueve “b”; ¡eh!, a la lata de pintura le di el valor de “x” y al peso de “b”.
Debajo, eh, un cuadradito le di el valor de un pins que es igual a “x” y un peso de cuarenta y cinco kilos tiene el valor de “b”. Y como los tres pins valen cuarenta y cinco pesetas, pues los tres pins y los tres pesos de cuarenta y cinco kilos. La expresión simbólica sería: tres “x” igual a cuarenta y cinco.
A: El peso de cinco paquetes de cartulinas es diez kilos. Entonces... en un rectángulo le voy a dar el valor del peso de un paquete de cartulinas. Y los diez kilos por medio de un peso. Luego..., y puse, como eran cinco paquetes de cartulina y cada..., y el peso de una le di el valor de un cuadrito, puse cinco de estos paquetitos y como hacen igual a diez kilos pues hice un peso de diez kilos.
La expresión simbólica sería cinco “x” igual a diez, ya que yo a “x” le di el valor de un peso de un paquete de cartulinas.
El triplo de..., el triplo del peso de un libro más dos kilos es quince, es cinco kilos.
A un círculo le voy a dar el peso de un libro, que también le voy a poner “x”. El valor de un kilo. Voy a hacer un cuadro igual a “b”.

En la parte izquierda de la balanza pongo tres círculos porque dice que es el..., que es el triplo del peso de un libro. Entonces pongo tres círculos. Y en la pesa, ¡no!, más dos cuadritos que son dos kilos, que es igual a cinco cuadraditos, que son cinco kilos.
La expresión simbólica sería: tres “x”, la “x” es el peso de un libro, más dos “b”, la “b” es igual a un kilo, es igual a cinco “b”.
Simbolizando un número de balones con “o”, representa: “la suma de un número de balones más el doble del mismo número de balones, es igual a veinticuatro”.
La “o” hago como si fuera el número de balones... y como dice que más el doble del mismo número, pues pongo dos círculos más, ¡no!, ¡uno más!
E: Cada uno de los círculos ¿qué representa?
A: Un número de balones que no sabes... y es igual a veinticuatro. Pues veinticuatro lo voy a representar con un... triángulo. El número de balones le voy a poner “x” y el veinticuatro “b”.
La expresión simbólica sería: dos “x” porque como decía que era la suma del número de balones más el doble del mismo. ¡Pues sería dos “x” más y también igual a veinticuatro que es el peso! No el peso no, el peso no.
Completa la siguiente tabla: (Sugerencia: representa los números con “o” y los datos desconocidos con “o”).
E: Elige uno, el que tú quieras.
A: Como dice que “x” más tres es igual a dos “x”, pues la “x” la represento con un cuadradito, un dato desconocido, y pongo tres círculos porque cada número... Y es igual a una “x”, que es un valor, que no sabemos y dos círculos.
E: Elige también uno.
A: Expresa con números y símbolos las siguientes situaciones.
Le voy a dar un valor a las botellas y otro a los pesos. A las latas le doy “x” y a los pesos les doy “b”.
Pongo tres “x”, pues como hay tres latas, pues serían tres “x”... y dos “x” más dos “b”; dos latas y dos pesos.
¿Y aquí debajo qué es lo que tengo que poner?
E: ¿Cómo?
A: Aquí, ¿el algebraico?
E: ¿Cuál es la expresión algebraica?
A: Ah!. A los círculos para los números y los cuadraditos, partes desconocidas. Entonces como eran cuatro “x” pues cuatro circulitos y la “x” como dato desconocido pues sería un cuadrado y es igual a dos “x” más seis, pues dos círculos. Luego la “x” como dato desconocido y seis circulitos.
E: ¿Y ése? ¡Pero mira a ver el enunciado de ese ejercicio!
A: ¡Ah!. Resuelve la siguiente ecuación.
E: ¿Es lo mismo que antes?
A: No.
E: ¿Tú siempre que vas a resolver la ecuación vas al algebraico primero?
A: ¿Eh?
E: ¿No resuelves algebraicamente primero?
A: Sí. Yo, lo que está sumando, para restarlo, pongo las “x” a un lado. Bueno, primero los denominadores.
E: ¿Qué significa eso en la balanza lo que está sumando pasa restando?
A: Pues es, para quitar, es como si aquí lo que estorba, para dejar el seis solo, ¿no? Poner todo a este lado. Lo que estorba es el dos “x”, ¿no? Entonces como está sumando pues le resta los dos. Y aquí empieza a quedarse sin nada, o sea, que ya no tengo que restarle.
E: Vale, ¿y qué sería eso en la balanza? ¿Eso que tú me estás diciendo le resto los dos?
A: Si le resto los dos, sigue igual de equilibrada, es como si le sumara los dos.
E: Si pero, ¿y qué es? ¿Y cómo te quedaría en la balanza?
A: Me quedaría cuatro “x” como a los dos le resto menos dos igual a dos “x”, menos dos “x” más seis. Y dos “x” menos dos “x” se va. Y me quedaría cuatro “x” menos dos “x” igual a seis.
E: Sí, ahora, yo te digo eso en la balanza. Eso que tú has hecho en la balanza, ¿qué tendrías que hacer? ¿Cuál es el equivalente en la balanza?
A: Pues como aquí le he quitado. Ahí, como le he quitado una “x” que está representado por esto, se queda sin nada. Y sería menos cuadros, dos.
E: ¿Pero tú no le has quitado aquí dos “x” a cada lado?
A: Sí.
E: ¿Ya se lo quitaste aquí? ¿En la balanza?
A: Es que como aquí hay más de una “x”.
E: ¿Mira a ver si está bien representado eso?
¿No te tendría que dar igual que en el mismo problema?
A: Sí.
E: ¿Cuatro “x” se representa así? ¿En la balanza? ¿Qué significa el redondelito, perdona, qué significa?
A: Los números, o sea, esto es igual a uno.

E: Vale, ¿y el otro?
A: Un número desconocido.
E: ¿Y la cantidad desconocida a qué es igual? ¿A cuántas cantidades desconocidas?
A: A una.
E: ¿A una?, entonces mira a ver si está bien representado. ¿Tú dices que tienes cuatro cantidades desconocidas? ¿Cuatro “x”?
A: ¿También tenía que poner otras cuatro “x”?
E: ¿Por qué?
¿Tú me acabas de decir que cada cuadradito representa una cantidad conocida o desconocida?
A: Si tenía que poner esto, entonces aquí te quito esto, esto y me queda...
E: Espera, espera, espera...
A: Así, ya está.
E: ¿Cuánto “x” es lo que tú tienes representado en el primer platillo?
A: Si es que si le pongo cuatro y cuatro me da.
E: No, no, aparte de que te dé... aparte de que te dé, ¿no? Aparte de que te dé, que tú busques, que me parece muy bien. Yo pregunto cuando tú me acabas de decir que un cuadradito representa una unidad de lo desconocido y que un redondelito significa una unidad de lo conocido, ¿sí o no?
A: Sí.
E: Entonces, cuando yo digo cuatro “x”, ¿qué es lo que significa cuatro “x”?
A: Cuatro unidades desconocidas.
E: Exacto, ¿entonces cómo se representa cuatro unidades desconocidas?
A: Por cuatro cuadraditos; cuatro círculos y cuatro cuadraditos.
E: O sea, entonces sería cuatro unidades conocidas y cuatro desconocidas, ¿no?
A: Sí.
E: ¿Según lo que tú me dijiste, eso es lo que dice el primer miembro de la ecuación?
A: Dice cuatro desconocidas.
E: ¿Y cómo se representarían cuatro unidades desconocidas?
A: Cuatro cuadraditos.
E: Pon cuatro cuadraditos, ¿y el segundo miembro?
A: Eh, dos partes desconocidas, que serían dos cuadraditos y seis desconocidas.
E: Ahora, ¿qué tiene que hacer? Ahora...¿qué es lo que tú hiciste antes?
A: Quitar... como aquí lo que me sobra es esto, para hallar lo que es la “x”, le estorban dos cantidades desconocidas, entonces lo que hacemos, le restamos a los dos que como esto es una igualdad, da igual sumar, restar, multiplicar o lo que sea, siempre que sea lo mismo a las dos no pasa nada. Entonces sería menos dos “x” que sería esto, le quitaríamos esto, nos quedaría en esta balanza esto de quitarle cuatro “x”, no dos “x”. Nos quedaría dos de esto, ya lo tengo.
E: Ya!. ¿Y entonces qué te quedaría? ¿Te queda igual a lo que tenías en el otro lado? ¿Te queda igual a lo que tenías en el álgebra?
A: Sí.
E: ¿Es lo mismo? ¿Es equivalente la situación?
A: Sí, dos “x” igual a seis.
E: ¿Y ahora? El otro ya está. Y el otro, ¿cuánto vale entonces en la balanza? ¿Cómo sería la representación del otro en la balanza de la solución?
A: Pues se supone que sí. Por lógica si aquí hay dos y aquí hay seis sería la mitad.
E: ¡Vale!
A: La suma de un número más el doble del mismo número es igual a treinta y seis, ¿cuál es el número?
La suma de un número, que no sé qué valor es, le pongo “x”.
E: ¿A la suma?
A: Sí, porque dice a la suma del número, pues a eso le voy a poner “x”.
E: ¿A la suma de un número? ¿A la suma de un número con quién? ¿Tiene sentido decir la suma de un número?
A: No.
E: ¿Te da seguridad el álgebra, Ana, cuando estás trabajando?
A: Sí, pero cuando pones la suma de un número, no sé lo que es porque es una cosa tan rara...
E: ¿Raro?
A: No lo entiendo, la suma de un número.
E: Pero sigue leyendo, ¿no?
A: La suma de un número más el doble del mismo número. ¡O sea, que es un número solo, es igual a treinta y seis!. ¿Cuál es el número? Doce.
¿Paso la hoja?
E: ¿Tú no utilizas normalmente ningún modelo ni la balanza, ni la representación para hacerlo?

A: No, como ya sé cómo se pasa.
¿Las explico?
E: Ya está.

Alumna A. Sesión 4ª.

A: Expresión algebraica. “x” más tres igual a dos “x”.
E: ¿Cómo está estructurada esa ficha? En columnas, en filas, en apartados...
A: En dos columnas. Una para que tú representes la expresión algebraica que tienes en el cuadrado de al lado. “x” más tres. Puse una “x”, le puse de base a un rectángulo “x”, sin ninguna medida y la altura uno, pegado a ese rectángulo le puse otro de base tres y de altura uno. Estos dos rectángulos los puse igual a otro, de base dos y de altura “x”.
E: “Eh...”...
A: El siguiente... La siguiente expresión algebraica es cuatro “x” igual a dos “x” más seis. Entonces puse un rectángulo de base cuatro y de altura “x” que es igual a un... a dos rectángulos, uno que tiene de base dos y de altura “x” y otro que está unido que tiene de base seis y de altura uno.
Luego la otra expresión algebraica es tres “x” más dos, y le pongo unido otro de base dos y de altura uno y éste es igual a cinco, a un rectángulo de base cinco y de altura uno.
E: Entonces mirando esto, Ana. ¿Cuántos rectángulos tendrán que salir... en cada uno de los ejercicios que tú te plantees para trabajar?
A: Depende de cuántos términos haya.
E: O sea, que hay un..., ¿hay un rectángulo por cada término?
A: Sí.
E: Un rectángulo por cada término.
A: Sí porque... aquí hay un rectángulo para éste o éste...
E: Exprésalo, porque no se ve.
A: Para la expresión “x” más tres igual a dos “x”, pues para “x” hay un rectángulo, para tres otro y para dos “x” otro. Para el que está debajo...
E: Mira, ¿cuáles son los que tienen que estar unidos?
A: Los que están antes del signo igual.
E: ¿Cómo se llaman esos que están antes del signo igual en una ecuación?
A: Miembro.
E: En el primer miembro, ¿no?
A: Primer miembro.
E: ¿Y eso que hay en esta primera ficha qué es lo que representa? O sea, ¿qué es lo que tú crees que representa todo esto?
A: Es como una expresión algebraica, ¿no?, que en vez de ponerla con números y letras, pues puesta en cuadrado.
E: O sea, ¿pasarla de un lenguaje a otro?
A: Sí.
E: ¿En qué lenguaje está pasado esta ficha?
A: Del algebraico al geométrico.
E: Bien.
A: Añadiendo cuatro centímetros al triplo de la medida de la longitud de un segmento, se obtiene otro segmento cuya medida es la del primero incrementada en ocho unidades.
E: Ten en cuenta que no se ve.
A: Vale..., ¿qué es incrementar?
E: ¿Qué es lo que significa incrementar? ¿No sabes?
Aumentar, incrementar, el incremento, la variación... Cuando se dice el incremento de la temperatura se dice la variación de la temperatura.
A: Pues como decía, añadiéndole cuatro al triplo de la medida de la longitud de un segmento, pues como la longitud del segmento no sabemos lo que es le doy el valor de “x”. Entonces pongo cuatro más tres “x” que le he añadido cuatro centímetros al triple de la longitud del segmento. Y como dice se obtiene otro segmento cuya medida es la del primero...
E: ¿Qué es lo que significa la “x”? Eso es lo primero que tienes que poner.
A: La medida de longitud del segmento.
E: ¿Entonces?
A: Ah, si entonces, como dice eso tiene otro segmento cuya medida es la del primero sería “x” incrementada en ocho unidades. Ahora lo represento. Pues para representar pues como hay cuatro más tres “x” serían dos rectángulos. El primero tendría de base cuatro y de altura uno y unido está otro de base tres y de altura “x” y estos dos rectángulos son iguales a otro rectángulo de base, de altura “x” y de base uno; unido a otro de base

ocho y de altura uno.
E: ¿Qué es lo que intentaste hacer al principio?
A: ¿Al principio?
E: Aquí, cuando empezaste a hacer una rayita, aquí. ¿Qué es lo que intentabas hacer?
A: "¡mm!"...dividirlo entre dos. O sea, como es par dividirlo entre dos entiendes cómo es, par dividirlo entre dos, luego entre otros dos...
E: Porque era un segmento cuya longitud era par.
A: Sí.
E: Entonces dijiste, bueno, es más fácil para representarlo, dividido entre dos cuatro y dividido entre dos, dos.
A: El valor de una pegatina aumentada en cuatro, es dos veces el valor de la pegatina.
Al valor de la pegatina la voy a llamar "x", y como dices el valor de una pegatina aumentada en cuatro, pues sería "x" más cuatro. Como dice que es igual a dos veces el valor de la pegatina, pues sería dos "x".
Representado sería de base "x" y de altura uno, y unido a él, otro rectángulo de base cuatro y de altura uno, y éste, estos dos rectángulos serían igual a otro de base dos y de altura "x".
E: ¿Qué significaría cuando tú dices tiene que ser igual? ¿Qué es lo que son iguales ahí?
A: Estos dos rectángulos son iguales a éste.
E: Sí, pero, ¿qué es lo que es igual? Estos dos rectángulos pero, ¿qué del rectángulo?
Porque del rectángulo tú, ¿qué puedes decir?
A: Es el área todo igual, el área.
E: ¿Las áreas son equivalentes?
A: Sí.
E: ¿Las del primero y segundo miembro?
A: Sí.
El precio de dos lápices más ocho pesetas es tres veces el precio de un lápiz.
Pues a un lápiz le voy a dar "x".
E: ¿Un lápiz?
A: "¡mm!", sí.
E: Pero, ¿cómo a un lápiz?
A: Pues el precio de un lápiz.
E: Tienes la costumbre siempre de poner en el rectángulo de arriba y casi siempre es aquí.
A: "¡mm!", sí.
E: Porque lo hiciste también en el cuadernillo que trabajaste en clase.
A: Sí.
El precio de dos lápices sería dos "x" más ocho como es, o sería igual a tres veces el precio del lápiz pues tres "x".
Representado sería, dos "x" sería, debajo un rectángulo de base dos y de altura "x". Podría ser un cuadrado depende de lo que valga la "x" y unido a otro rectángulo de base ocho y de altura uno. Estos dos rectángulos son iguales a otro rectángulo de base tres...
E: Equivalen, ¿no?
A: Equivalen... y de altura "x".
A: El triple de un número de discos de un cantante más cuatro es siete veces el número de discos.
E: Vuélvelo a leer.
A: El triplo del número de discos de un cantante...
E: ¿Qué leíste antes?
A: El triple.
E: No. Ahí está escrito triplo.
De un número de discos de un cantante...
A: ¡Ah!
El triplo del número de discos de un cantante más cuatro es siete veces el número de discos.
Pues a "x" le voy a poner el número de discos de un cantante.
Como dice el triplo de un número de discos, pues sería tres "x" más cuatro y es, siete veces el número de discos, pues siete "x".
Al representarlo sería un rectángulo de base tres y de altura "x" y unido otro a él, de base cuatro y de altura uno y éste es igual a otro rectángulo de base siete y de altura "x".
E: "¡mm!", bien.
A: El peso de dos barras de metal más tres kilos es siete kilos.
El peso de dos barras lo voy a llamar "x". Como dice el peso de dos barras pues sería dos "x".
E: ¿Por qué?
A: No. "x", "x". Y más tres kilos, más tres kilos es igual a siete. Sería un rectángulo de base tres y de altura uno y unido a él otro rectángulo de base "x" y de altura uno. Y éste es igual a un rectángulo de base siete y de altura

siete, y de altura uno.
El precio de un bolígrafo incrementado en siete pesetas es veintitrés pesetas.
A: Pues a “x” le voy a llamar el precio de un bolígrafo. Como dice precio de un bolígrafo pues sería “x” más incrementar siete pesetas, más siete es igual a veintitrés. Sería un rectángulo de base siete y de altura uno y pegado a él otro de base uno y de altura “x”. Y éste es igual a un rectángulo de base veintitrés y de altura uno.
Tres veces la edad de un niño más cuatro es exactamente cuatro veces su edad.
Representación geométrica: un rectángulo de base tres y de altura “x”, y unido a él un rectángulo de base cuatro y de altura uno y éste es igual a un rectángulo de base cuatro y de altura “x”. Expresión algebraica: tres “x” más cuatro es cuatro “x”.
La edad de Pepito más cuatro unidades es la edad de su hermano mayor, diez años.
E: Empieza a ver por allá.
A: Empiezo por aquí. No porque no nos queda lo que vale...
E: ¿”x” es el hermano mayor?
A: No, edad.
E: ¿Te resulta muy difícil, no?
A: No.
E: ¿O, porque estás menos acostumbrada...?
A: Pues, hago un rectángulo de base “b”.
E: ¿Por qué de base “b”?
A: Porque le di el valor... “b” la edad de Pepito y la altura uno y junto a él otro de base cuatro y de altura uno y éste es igual a eso, a la edad del hermano que son diez años y altura uno.
E: Vale.
A: ¿Éste no se hace?
E: Éste es similar.
Observa la siguiente resolución de la ecuación tres “x” más cuatro igual a cuatro “x”.
E: ¿Hay ahí un matiz distinto en ese ejercicio?
A: Que te pone todas las formas.
E: ¿Y es..., consiste en lo mismo que la otra ficha?
A: Sí.
E: ¡Qué!. ¿En qué se distingue? .. ¿En qué se distingue?
A: Que aquí solamente te pide una forma de cada miembro.
E: ¿Cómo que una forma?
A: De representación de cada miembro y aquí te pide todas las posibles.
Aquí ha puesto, por ejemplo, tres “x” más cuatro, pues ha puesto tres formás diferentes.
E: ¿Sí?
A: Tres modos.
E: ¿Has leído la ficha para poderla comparar? ¿La has leído?
A: No. Y además quiere que resuelvas la ecuación.
E: Entonces, aquello quedamos que era la traducción de un lenguaje a otro.
A: Sí. ¿Apunto todas las maneras posibles?
E: Es que tú, ¿tú crees que ahí están todas las maneras posibles?
A: No.
E: ¿Entonces qué es eso?
A: Representando y luego en ves de hacer lo de la balanza, si por ejemplo aquí al cuatro le sobra, lo quieres quitar, pues le restas cuatro a cada miembro. Entonces aquí le va quitando, paso por paso igual que la balanza. Lo que pasa es que es un rectángulo.
Como es “x” más tres igual a dos “x”, pues la “x” le pongo de base “x” y de altura uno y unido a él otro rectángulo de base tres y de altura uno.
Es igual a otro rectángulo de base “x” y de altura dos.
Entonces como “x” más tres es igual a dos “x” y aquí lo que me molesta es el tres, pues a cada miembro le resto menos tres. En el primer miembro quedaría “x” más tres, menos tres, es igual a “x”.
E: ¿Sí?
A: Porque más tres y menos tres se va. Porque sería igual a cero.
E: ¿Y por qué igual a dos “x”?
A: Ah!. Sería “x” igual a dos “x” menos tres. Entonces representando quedaría la “x”. La “x” sola porque tienes este tres. Éste es el rectángulo y lo vas a quitar, ...te quedas sin nada...
E: Sí, pero entonces, ¿cómo lo representarías ahí?
¿Podrías representar un rectángulo negativo?
A: Quitando esto, se quedaría todo menos esto.
E: Sí pero, ¿cómo representas aquí el otro?

A: ¿Éste?
E: Sí. Tú me lo representas en el segundo miembro. Si tú me dijiste que era similar a la balanza, ¿No es que vas quitando las mismas cosas?
A: Sí, parecido. Lo que quitas es el tres.
E: ¿Y como es en el modelo geométrico, qué tendrías que hacer? Porque claro expresar menos tres un área, ¿un área puede ser menos tres? Un área que tú me dijiste antes, me parece, cuando estábamos hablando que era una extensión para ti, ¿no?
A: Sí, como todas.
E: Entonces digo, ¿hubiera podido valer menos tres?
A: No, pero para quitar, para poder hallar la “x”...
E: Sí, pero como aquí estás trabajando con un tema en niveles geométricos, por ejemplo, ¿puedes representar un área menos tres?
Te das cuenta como el lenguaje algebraico permite muchas cosas, pero teóricas, pero no reales.
A: Sí.
E: Porque fíjate una realidad como ésta, ¿no? Tú tienes un rectángulo, ¿qué pretendes hacer tú ahí con esa situación? ¿Qué puedes quitar tú ahí?
A: Me quedaría...
E: ¿Qué puedes quitar tú en los dos sitios para que se mantenga el equilibrio?
A: Menos dos.
E: Menos dos, ¿de dónde?
A: Puedo quitar menos dos, en vez de quitar menos tres...
E: ¿Y de dónde quitas menos dos?
A: Entonces me daría aquí y me daría aquí uno.
E: Sí, pero yo estoy hablando en este modelo que tú estás trabajando aquí, porque esto está correcto, ¿no?
A: Sí.
E: Todo este ejercicio está correcto en papel, ¿no?
A: Sí.
E: Es la diferencia de lo que significa las matemáticas aquí y las matemáticas reales. ¿Tú en un papel no puedes decir que en la ecuación el área te dio menos veintisiete?
A: Sí.
E: ¿Y tú puedes creer que haya un terreno que mida menos veintisiete?
A: No.
E: Y entonces a ver aquí. Tú en esa situación que tú tienes aquí, eh, ¿qué es lo que tú puedes hacer?
A: Que daría menos uno.
E: Si tu tienes esta expresión, ¿no?, esto es un miembro y esto es otro miembro. ¿Cómo puedes tú seguir trabajando paralelamente con los dos miembros? Sin que se altere... fíjate aquí.
¿Qué es lo que tú estás haciendo en los dos miembros aquí? En esta segunda ecuación.
A: Igual que éste, lo que pasa es que lo que le quita después es el menos tres “x”. No, no...
E: Si lo que le quitas es menos tres “x” será que le quitas tres “x”. Lo que pasa es que lo expresas con menos, ¿no?
A: Sí, sí...
E: Claro porque tú este número, ¿no lo tienes aquí? ¿El menos no lo puedes representar aquí con un rectángulo?
A: Porque tienes cuatro “x” y le puedes quitar tres “x”.
E: Sí, y aquí ¿no puedes hacer lo mismo?
A: No, porque sólo es tres.
E: ¿Y las “x” no las puedes comparar?
A: No porque tú no puedes poner menos dos “x” menos tres.
E: ¿Pero cuántas “x” te vienen en el primer miembro y cuántas te vienen en el segundo?
A: Una y aquí dos.
E: ¿Dos nada más? ¿Una a cada lado o en una tienes una “x” y en la otra tienes dos “x”?
A: Dos “x”.
E: ¿Entonces? ¿Hay algo que tú aquí puedas quitar simultáneamente a la vez?
El tres está claro que no, porque no lo tienes aquí. ¿Lo tienes aquí? ¿Lo tienes aquí o lo puedes quitar en otro lado?
A: No.
E: ¿Entonces qué es lo que puedes quitar? ¿Puedes quitar algo?
¿Lo de aquí, esto es una situación común aquí?
A: No.
E: ¿Hay alguna “x”?
A: Una “x”.

E: Una “x”, ¿dónde?
A: Aquí, aquí hay dos...
E: Sí.
A: ...pero una “x” es como esto.
E: ¿Y ésa la puedes quitar?
A: Sí.
E: ¿Y qué te quedaría?
A: Una “x” y aquí tres.
E: ¿Y entonces qué problema hay?
A: Que son diferentes.
E: Es importante que esas diferencias las veas, ¡eh!, Ana? O sea, que depende de cómo tú estés trabajando. O sea, si tú estás trabajando geometría y no te acuerdas del trapecio lo transformas en otra cosa, ¿no?, para poderlo calcular, pues aquí igual.
¿Por qué me muestras “x”?
A: Porque es “x” menos dos.
E: Sí.
A: Sí porque...¡ah!, no menos dos..., menos uno, menos uno.
E: ¿Entonces cuánto sale?
A: A uno.
E: ¿Sí? ¿Entonces no te coincide con el de allá? ¿No te tiene que coincidir? ¿Te tiene que coincidir la solución en el modelo geométrico que en el algebraico?
A: Sí.
E: ¿Entonces qué pasó? ¿Por qué has puesto tú que “x” es igual a uno?
A: Porque... ¡ah!. No, tres.
Resuelve la siguiente ecuación cuatro “x” es igual a dos “x” mas seis.
Y representado sería un rectángulo de base cuatro y de altura “x” y esto es igual a un rectángulo de base dos y de altura “x”.
E: ¿A ver si ahora eres capaz de seguir por ahí, por el modelo geométrico?
A: Después un rectángulo de base seis y de altura uno.
E: ¡Vale!
A: Ahora déjame quitar, quitarle seis a cada uno de los miembros.
E: ¿Se puede hacer esto sin mirar aquí? ¿Aquí se puede quitar seis?
A: No, tenemos que quitarle a cada lado dos “x”. Y nos quedaría aquí, dos “x” y aquí seis. Entonces son seis “x” quedaría a tres. Espera...
E: ¿Por qué igual a seis?
A: Porque lo que hago aquí, como las “x” están en el segundo pasan al otro lado restando.
E: Pero lo otro estaba bien, ¿no? Lo que tachaste.
A: Sí.
E: ¿Lo que no tiene concordancia con aquello?
A: Entonces “x” sería igual a tres.
E: ¿De qué manera se te ocurre a ti, Ana, que se podría representar eso para... porque te das cuenta que estás forzando a tenerle que quitar... por ejemplo aquí no puedes quitar el seis sino que tienes que quitar el otro? ¿De qué otra manera se te ocurre a ti que se podría hacer?
A: El de la balanza y...
E: No, pero usando el modelo geométrico.
¿Como este seis...?
A: ¡Ah!. Sin esto.
E: Sí.
A: Ir tachando los dibujos tienes a lo mejor esto.
E: “¡mm!”m.
A: Hasta con un dibujo lo puedes hacer solo. Le quitas aquí las dos, ¿no? Ahí puedes quitarle dos.
E: Sí.
A: Entonces te quedaría dos “x” igual a seis.
E: Sí. ¿Y a ti por ejemplo te parece a ti que se podría pasar... qué es lo que estamos haciendo nosotros, cuando tachamos, que dices tú tachar, qué es lo que hacemos? ¿Qué operación hacemos?
A: Restar, restar.
E: Restar, ¿ves? ¿Y entonces cómo se te ocurre a ti que yo podría pasar esto al primer miembro también? ¿En esta representación visual geométrica? ¿Para que no tuvieras que hacer tú este tipo de cosas? ¿No tuvieras tú que tachar? Sino como a ti te salga al principio, tú lo puedes hacer en los dos modelos.
A: Restarle a los dos, los dos seis.

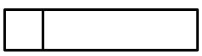
E: Exacto. ¿Y cómo, cómo? ¿Aquí se te iría? ¿Por que qué sería restar aquí en este modelo? Porque cómo no vas a poner menos tal.
A: Pues esto menos y otro igual.
E: ¿Eso es lo que tú has hecho aquí, por ejemplo? ¿Lo que está hecho aquí? ¿Cómo haces tú para restar?
A: ¡Ah!. Tachar.
E: Tachar, ¿no? Entonces, si es tachar, en definitiva, tú tienes aquí un área de dos "x" y un área de cuatro "x" y le vas a quitar lo dos, ¿lo mismo, no?
A: Sí.
E: Porque si unas personas tienen unos terrenos equivalentes, venden la misma cantidad cada uno y se quedan con lo mismo. Ahora digo yo: ¿Cómo se te ocurre a ti que tú esto lo podrías pasar, el seis, lo podrías pasar al otro miembro, sin que se alterase la ecuación?
A: Restándole a los dos, sí, restándole seis.
E: Sí, restándole seis. ¿Cómo te quedaría aquí, representado en la hoja, geométricamente esa resta de seis, para no poner menos seis? ¡Porque así serían dos algebraicos!
A: No sé.
E: ¿Cómo representas tú restar dos "x"?
A: Menos dos "x".
E: No, en el geométrico.
A: Tachando.
E: Tachando, ¿no?
A: Pero es que aquí no hay números, solamente hay "x".
E: ¿No puedes tachar?
A: No.
E: Y entonces, ¿qué se te ocurre a ti hacer? Por ejemplo si tú quisieras representar esto.
A: Es que, cuando yo estaba estudiando el álgebra, una chica ponía como si fuera un globito que tenía. Claro, si lo cortabas se caía... algo de un globo era. No me acuerdo... en la balanza, un globo me parece... no sé.
E: Pero si tú quieres representar por ejemplo esto que tú tenías aquí y lo tachaste aquí, ¿qué se te ocurre a ti que se podría hacer? ¿Cómo yo podría expresar esto aquí? Date cuenta que no puedo poner signo.
A: Sumándole doce a los dos.
E: ¿Sumándole doce a los dos?
A: Sí.
Entonces me daría igual.
E: ¡Ah!. Claro, no hemos quedado que si en la balanza...
A: Sí, pero si le pones doce y le quitas seis te da seis.
E: ¡Exacto!
A: Ahí no, pero...
E: ¿Entonces? No dijiste antes que tachábamos, ¿no? Si tú tachas aquí se te vas dos "x" con dos "x". Entonces digo: ¿Cómo podrías tú poner, cómo se te ocurre a ti poner este menos seis en el primer miembro? Para que tú cuando vengas digas , bueno, aquí hay una cosa que a mí me dice ya que es un negativo. En ese modelo, en el modelo con rectángulo, ¿cómo te parece a ti que tú lo ves y dices ¡ah!, ahí hay una cantidad que se está restando? Que es lo mismo que un negativo, ¿no?
A: Sí.
E: Entonces, ¿cómo lo verías tú? Si tú vieras esto aquí, ¿qué es lo que entiendes tú ahí?
A: Que tres "x" se va.
E: ¿Se está restando?
A: Sí.
E: ¿Y aquí que se está restando cuánto?
A: Tres "x".
E: Entonces, ¿cómo podría yo poner por ejemplo este seis aquí, que a mí viéndolo me indique que es un menos seis y no un mas seis?
A: ¿Poniendo un rectángulo como éste, tachado?
E: Exacto. Con lo cual se puede trabajar con el modelo con los positivos y con los negativos, ¿no? Igual que lo que tú haces. O sea, igual que lo que tú haces cuando quieres, ¿no?, tachas cuando te conviene, puedes representar lo negativo exactamente igual, ¿lo ves? Te sirve para todas las ecuaciones.
A: Sí.
E: Es como si tú tuvieras aquí tres "x". En vez de tres "x" mas dos igual a cinco tú tuvieras tres "x" igual a cinco menos dos, ¿qué hacías? Colocabas el cinco y tachabas el dos, ¿no? Pero si tú tuvieras aquí tres "x" menos cinco igual a menos dos... inténtalo hacer, o sea, en vez de esta ecuación vamos a suponer que estuviera aquí: tres "x" menos cinco igual a menos dos, ¿es equivalente a la anterior? A la que estaba escrita.
A: No, es diferente.

E: ¿Por qué?
A: No, es igual, es igual.
E: ¿Entonces cómo representarías tú eso?
A: Pondría un rectángulo de tres "x", de base tres y de altura "x", y como es menos cinco, otro rectángulo unido, de base cinco, tachado, de base cinco y de altura uno tachado. Y éste es igual a otro rectángulo tachado también de base dos y de altura uno.
E: Entonces ahora puedes seguir exactamente el mismo proceso que sigues pero sin tachar.
A: ¿Lo hago?
E: Sí. ¿Te gusta hacer el álgebra, no?
A: Sí, es fácil.
Como éste resta dos, aquí le quito otros dos, entonces...
E: ¿Segura?
A: No, no, no.
E: ¿Por qué?
A: Porque si le quito allí y aquí, aquí no me queda nada.
E: ¿Y qué pasa?
A: Me quedaría un rectángulo.
E: ¿Te queda uno por uno o no te quedaría nada?
A: No, nada.
E: Nada, ¿no? Entonces cómo... ¿y esto aquí se puede expresar de alguna manera, algo aquí para que quede equilibrado?
A: ¿Esto?
E: Esto es lo que tú tienes aquí, ¿no?
A: Sí.
E: Lo que te ha quedado aquí es eso. ¿No es eso?
A: Sí.
E: Entonces ahora... cómo dices tú que ahora te molesta, te sobra, lo que está acompañando a la "x", al término de la "x", ¿qué es lo que está sobrando? ¿Y ahí qué te quedaría?
A: Me quedaría éste.
E: ¿Y esto te quedaría así?
A: ¡Ah!. Esto no, esto no. Porque al sumar me queda mas.
E: Claro, pero es que además aquí se ve, si esto lo has pasado para acá.
A: Entonces se supone que hay tres "x". Si hay tres "x" pues es igual a tres y dé bien. No, a ver. Como hay tres sería uno.
E: ¿Te diste cuenta ya cómo son los dos modelos?
A: Sí.
E: ¿Qué es lo que representa entonces, en definitiva, Ana, los modelos? ¿Para qué te han servido los modelos esos? ¿Para qué sirven?
A: Para hacer las ecuaciones de otra forma, que no sea siempre número. Por si a lo mejor no te acuerdas de alguna cosa, pues lo haces por medio de cuadrados. Te da igual o por medio de balanza, que es lo mismo.
E: ¿Y qué estás haciendo también, otra cosa, a parte de eso, estás haciendo alguna traducción de algo?
A: Sí, de una..., de una expresión algebraica.
E: Sí pero y eso, ¿qué tipo de lenguaje sería?
A: Estamos pasando del lenguaje algebraico al geométrico.
E: Y también has pasado del geométrico al algebraico.
A: Y también si tú no sabes a lo mejor hacer las ecuaciones, te ponen esto y tú puedes hallar el hacerlo.
E: O sea, que te puede servir para..., aunque no sea álgebra, es sencillamente hacer unas reglas como la balanza, como si estuvieras pesando, ¿no? ¡Vale!.

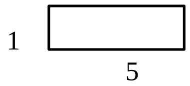
Alumna I. Sesión 1ª.
E: A ver, copiándolo...
A: Yo pondría x, no, 3x igual a...
E: ¿Aquí tienes que igualar algo?
A: No, x+3x.
E: Bien.
A: Y después... 4x.
E: ¿Ahí tendría que poner 4x? Donde está el boliche, ¿eh? Pon lo que tú creas.
A: Si los boliches son la x... o sea, la x es el boliche, 4x.
E: Pues ponlo, tú pon lo que creas que tienes que poner.
A: Pero es que si no sé cuánto vale la x...

E: Lo verás así, ¿no?
A: Pues entonces ya está.
E: ¿Ya está?
A: Sí.
E: Sigue el otro, deja un espacio.
A: Juan... Pepe mide x, Juan x+8 y Eduardo mide x+8+4.
E: ¿Quién es x?
A: La altura de Pepe.
E: Bueno, pues ponlo ahí. Sigue con el siguiente.
A: ¿Con una letra?
E: Sí.
A: Sería la altura de Pepe “x”, la altura de Juan “v”...
E: Ponlo ahí.
A: La altura de Eduardo “j”.
E: ¿Quién es “x”?
A: x= Pepe; v= Juan; j =Eduardo.
E: Y eso coincide con lo que dice el problema, ¿no?
A: Sí.
E: Te coincide. ¿Cuánto vale “x”?
A: “v” vale x+8 porque, ¿si no sé lo que vale “x”...?
E: Pues ponlo, ponlo, si tú crees que “v” vale x+8 ponlo.
A: “j” vale x+8+4.
A: Si un paquete de leche...
E: Sí.
A: ...cuesta 20 ptas. más que la mantequilla y el café 100 ptas. más.
E: Si el paquete de leche empezaste tú, ¿no?
A: Sí, si el paquete de leche cuesta 20 ptas. más que el de mantequilla...
E: Sí.
A: Y el paquete de café 100 ptas. más que el de la leche.
E: Mira a ver qué dice ahí. Tú escribe lo que tú creas que dice ahí.
A: No sé, no estoy segura...
E: No importa.
A: Si el paquete de leche cuesta 20 ptas. más que el de mantequilla y el café 100 ptas. más que la leche.
E: ¿Por qué has puesto tú ahí que cuesta 20 ptas. más?
A: El paquete de mantequilla cuesta 20 ptas. menos que el de la leche.
E: Claro.
A: Y el de café cuesta 100 ptas. más que el de mantequilla.
E: El paquete de leche cuesta, ¿20 ptas. más...?
A: 20 ptas. menos.
E: No, el paquete de leche cuesta... a ver...
A: ¡Ah, sí!. 20 ptas. más que el de mantequilla y el café 100 ptas. más que la leche.
E: Ése léelo despacito que nada más es para recordar.
Si quieres leerlo en alto..., ¿te acuerdas?
A: Un poco. Se le da la vuelta.
E: ¿Cómo?
A: ¿Se le da la vuelta?
E: Ya, pero empieza a leerlo desde aquí despacio.
A: Si tienes un “3”, es lo mismo que: 3 x 1 ó que 1x 3.
E: Claro, ¿cómo te quedarían entonces esos cuadritos de ahí?
A: 2 = 2 x 1 ó 1 x 2.
E: Bien. Haz ahora el segundo.
A: Cuando te encuentres con una letra sola te vas a imaginar que es un producto de la letra que te encuentras por la unidad. Ejemplo: “a” es lo mismo que a x 1 ó que 1 x a.
E: ¿Por qué pones a x 1?
A: ¡Ah, que es x!
E: No pasa nada.
A: Cada vez que aparece un número solo o una letra sola la representaremos por un rectángulo. Por ejemplo...
E: ¿No? Mira a ver ahora. Yo te dejo esto aquí... si quieres mirarlo... más o menos, tranquila, como te salga.
A: Representa con rectángulos.

a) 5



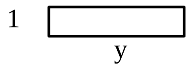
E: Bien, ¿eso qué representa?
A: 5 x 1.
E: 5, ¿cuánto tiene de base ese rectángulo?
A: ¿Esto? 5 y aquí va el 1.



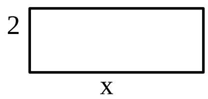
E: Vale, ahora represéntalo ahí.

b) y

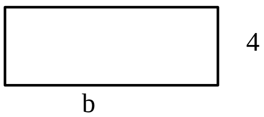
A:



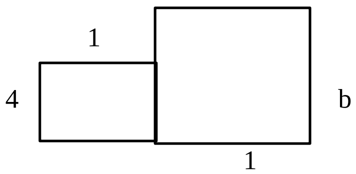
¿Y ahí no le marcas nada?
A: No.
E: ¿Por qué?
A: Porque no sé lo que vale.
E: Bien. A ver...
A: Representa desde aquí...
E: Sí, aquí tienes unos modelos...
A: 2 x x.



E: El 2 está así, no le pones nada más. ¿Por qué pones ahí un 2 y en el otro lado la x?
2. ¿Y se puede representar de otra manera?
A: Creo que no.
E: Bien. Pasamos a otra hoja.
A: 4 x b.

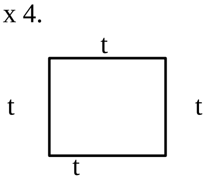


E: El otro, ¿es igual?
A: No, no me acuerdo cómo se hacía...¡ah!, ya, ya...

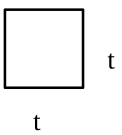


E: ¿Qué significan los cuatros? ¿A quién es igual el cuatro? Cuando tú lo representaste antes...
A: ¿Aquí?
E: En el anterior. No importa, sigue.
A: A 4 x 1.
E: Y el cuatro ese estaba marcado, ¿no? Son cuatro, son cuatro unidades iguales que ésta, ¿no?
A: Sí.
E: Son unidades, aquí hay cuatro unidades iguales que ésta.
A: Sí, más o menos.
E: Más o menos, vale, las marcas más o menos o las dejas así.
A: Las dejo así.
E: Bueno, contesta ahí a eso.
A: ¿Son iguales? ¿Por qué?
No, porque...Lo puse en minúscula...

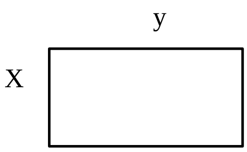
E: ¿Eh?
A: Lo puse en minúscula...
E: ¿Lo pusiste...? No importa.
A: No, porque uno es sumado y el otro multiplicado.
E: Bien, mira a ver éste.
A: El triple de x=3x.
El doble de n menos 4=2N-4
El producto de a, b, c=
El precio de “m” kilos de manzanas a “y” pesetas el kilo y x m = J ptas. el kilo.
E: ¿Ahí has puesto “J” ptas. el kilo?
A: Sí.
E: O sea, que cada kilo vale “J” pesetas.
A: Sí.
E: ¿Éste no sabes cómo?
A: ¿El segundo?
E: ¿Qué dice ahí?
A: El producto de a...
E: b y c, ¿no? Dice escribe...,¿qué dice aquí?
A: Escribe las operaciones siguientes en lenguaje algebraico.
E: Vale. Producto de a, b, c, no sabes expresarlo.
A: A x B x C.
E: Sí, producto de A x B x C.
A: A x B x C = H.
El triple de la suma de a y b: 3 (a+b).
El doble de la diferencia entre h e y:
Esta “y” qué es, ¿un número...?
E: No, esa es una conjunción para unir a y b, o sea, el producto de x por la suma de dos constantes que son dos letras que son “a” y “b”; como si dijéramos Isabel y Sergio, por ejemplo.
A: El producto de x por la suma de a y b: x . (a + B).
El triple de la diferencia entre b y c: 3 . (B - C).
El cuadrado de la suma de x e y: (x+y)2 .
El triple del cuadrado de b: 3b2 .
E: ¿Éste no sabes cómo? El doble de la diferencia entre h e y, h - i, ¿lo pongo?
E: Sí.
A: 2 (H - I).
E: ¿Te acuerdas qué era el perímetro?
A: La suma de todos los lados.
E: Pues venga.
¿Cuánto mide el lado de ese perímetro, el lado de ese cuadrado?
A: t.
E: t, ¿qué es lo primero que vas a hacer?
A: Poner t por 4.
E: t por 4, ¿qué?
A: Lados, el t por 4 es el valor del lado multiplicado por cuatro porque tiene cuatro lados.
E: Vale.
A: P = t x 4.



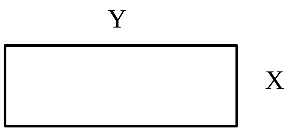
E: ¿Esos cuatro lados son iguales?
A: Se supone que tendrían que serlo...
E: ¿Por qué? Pero, ¿por qué?
A: Porque es un cuadrado.
E: Bien, ahora el área.
A: El área es lado por lado. A = t x t.



E: Y ¿cuánto es T x T?, ¿se puede expresar de otra manera?
A: No.
E: ¿Tú normalmente cuando haces los ejercicios calculas primero y después haces el dibujo o haces el dibujo y después calculas?
A: Calculo y después hago el dibujo.
E: Bien.
A: Tendría que poner “2y” y “2x”.
E: ¿Eso qué sería?
A: Los dos lados.
E: No, pero eso, ¿qué expresaría? “2y” y “2x”, ¿qué expresaría?
A: Sería “y”..., ¡ay no!. Sí.
E: Sí.
A: Y “x”, para saber los dos sería “2y” y “2x”.
E: Y eso qué sería “2 . y” y “2 . x”, ¿qué es lo que estás calculando ahí?
A: El perímetro.
E: Vale, hazlo.
A:



P = 2 Y + 2 X

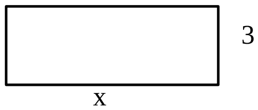


A = Y . X

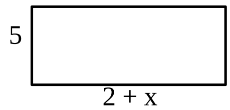
E: Está bien.
E: ¿Cuál sería el perímetro aquí?
A: ¿El perímetro de estos dos? Sería 18+8...
E: ¿Cuánto es?
A: 26.
E: Bien, ¿y éste?
A: ¿Este partido?
E: En principio no está partido. Como si fuese una cartulina que tuviera una marquita. Hállale el perímetro.
A: 4 y 4 = 8 y 5 y 5 = 10; 18 más, más...
E: Ese cuatro que tú estás diciendo 4 y 4 = 8, ¿de dónde lo estás sacando? ¿Cuál sería el cuatro que tú estás sumando?
A: El cuatro que está aquí y éste.
E: Para hallar el perímetro, mira a ver, marca qué es para ti el perímetro ahí.
A: ¿El perímetro? Todos sus lados.
E: Vale, entonces...
A: 4 y 4 = 8 y 5a y 5a, ¿10a?
E: Pon lo que tú creas que es. Acuérdate lo que me dijiste que era el perímetro...
A: La suma de todos los lados 8+10a sería igual a 18a.
E: Ahora éste es otro. Calcula el perímetro.
A: P=16+12a=28a.
E: ¿De dónde lo sacaste eso?
A: 8 y 8 = 16; 6a y 6a = 12a.
E: Esto vale 6a, esta distancia vale 6a.
A: Sí.
E: Sí.
A: Bueno, se supone que lo suma...
E: Se supone, ¿qué?
A: Que lo suma. P=16+12a=28a.
E: A ver éste...
A: P = 9 + 6 = 15.
E: 15.
A: Sí.
E: A ver, mira a ver de dónde lo sacaste. Toma marca ahí que es lo que estuviste sumando.
A: Sumé 7 + 2 y me dio 9.

E: Sí.
A: Está mal.
E: ¿Qué está mal?
A: Porque 9 y 9 son 18.
E: ¡Ah!, mira a ver.
A: Sería 18+6 y sería...24.
E: Ajá, ¿de dónde sacaste el seis?
A: De los lados.
E: De los lados, ¿eh? A ver, ¿cómo calcularías el área?
A: ¿Éste?
E: Sí.
A: 12 cm^2.
E: 12 cm^2, ¿por qué? ¿Por qué son centímetros?
A: Porque si yo multiplico 3 . 4 son 12, necesito tener...
E: ¿Necesitas tener?
A: Esto también, serían los centímetros cuadrados.
E: Bueno, como tú creas. ¿El de abajo?
A: Sería 12 . 4...
E: Vete escribiéndolo si quieres. Creo que es más fácil.
A: A = b . h = 12 . 4 = 48 cm^2.
E: Y, ¿también tienes que poner cm^2?
A: Sí.
E: Y esta rayita que está ahí no pasa nada, para calcular el área, da lo mismo. ¿Qué sería ahí el área? Si tú pintaras el área, ¿qué sería el área?
A: ¿El área?
E: Sí, de esa figura.
A: Lo de dentro.
E: Márcalo. ¿Y lo de abajo?
A: A = b . h = 28 cm^2.
E: ¿Cuánto vale “b” ahí?
A: ¿La base?
E: Sí.
A: 4.
E: Calcula el área...
A: A = l . l = 6 . 7 = 42 cm^2.
E: ¿El de abajo?
A: Sería sumarlo...
E: ¿Por qué?
A: Porque ya está hallada.
E: Porque ya está hallada. Está hallada en parte, ¿no?
A: Sí.
E: ¿Cuánto daría entonces?
A: 48.
E: Sí. ¿48 cm?
A: Cuadrados.
E: Mira a ver éste ahora si te sale el perímetro.
A: Ay, ay, ay, no me sale.
E: ¿Cuánto es el perímetro de esto? A ver, léelo despacito. ¿Qué has dicho antes que era el perímetro?
A: La suma de todos los lados.
E: ¿Entonces? ¿Cuántos lados tiene ese? Léelo, no has leído el ejercicio, Isabel.
A: El lado.
E: El lado.
A: Pero es que la figura no está acabada...
E: Por eso, ¿no se puede hallar?
A: Supongo que será...n . 2.
E: ¿Por qué n . 2?
A: Los lados por la medida de cada uno.
E: Vale. ¿Cuántos lados había?
A: “n”.
E: “n”. ¿Y cuánto mide cada uno?

A: 2.
E: Entonces, ¿cuánto te sale?
A: n . 2.
E: Claro, sí es que es eso.
E: Mira a ver ahora éste y con eso te dejamos en paz. A ver cómo quedaría.
A:



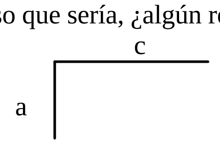
Pero creo que esto está mal porque no le puedo dar un valor a la x.
E: No, ahí sólo te dice que dibujes con x, no importa. Y ahora, ¿qué más te dice?, ¿ya está?



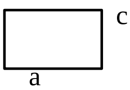
E: 2x, ¿qué significa 2x?
A: No.
E: Si tú hubieras puesto 2x, ¿qué significaba?
A: Que le multiplicaba a la “x” 2.
E: Le multiplicabas dos veces. Y si tienes 2+x, ¿qué significa?
A: Que le sumaba 2.
E: 2, ¿por qué? ¿Qué le has sumado? 2, ¿qué?
A: 2 cm.
E: 2 cm. Bien.

Alumna I. Sesión 2ª.

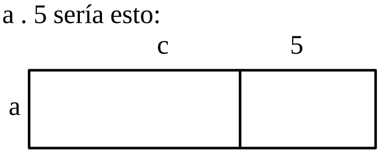
E: Empieza a leerlo ahora.
A: El producto de (a + b)(c + 5) se puede escribir utilizando el área del rectángulo de lados a+b y c+5, como:
E: ¿Entiendes esa figura? ¿Entiendes que corresponde a este enunciado? ¿Ves como está colocado allí? a, b, c, 5, lo ves, ¿no?
A: Sí.
E: Bien, mira a ver si entiendes esto. ¿Qué sería aquí a . c en el dibujo? Márcalo si quieres. Márcalo a ver qué correspondería en el dibujo a . c.
Eso que sería, ¿algún rectángulo? ¿Eso sería el área de un rectángulo?



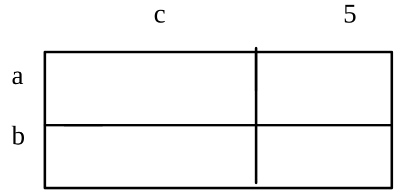
A: No.
E: ¿Entonces qué? ¿De un perímetro?
A: No, tampoco.
E: Entonces, ¿qué significaría aquí a . c?, en el dibujo.
A: La mitad del área del rectángulo.
E: Y...¿por qué la mitad?
A: Porque es al cuadrado...
E: Y, ¿qué es lo que sería el cuadrado?
A: Sería...a . c...
E: Y si tú tienes, por ejemplo, para representar a . c con los rectángulos, ¿cómo lo representarías? Si tú tuvieras que representar a . c con los rectángulos.
A: Así.
E: ¿Cómo? ¿Cómo quedaría? Pero cómo sería este rectángulo que corresponde a esta área, ¿cuál sería?
A:



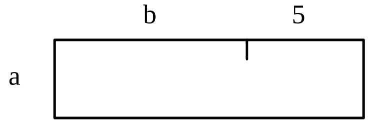
E: Ajá, ¿y a . 5?
A: a . 5 sería esto:



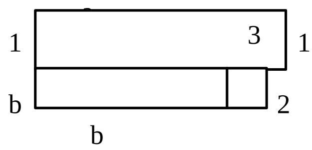
E: Y ¿b . c?



E: b . c, ¿hasta dónde?
A: Desde aquí hasta aquí.
E: El rectángulo, ¿no? Y, ¿b . 5?
A: Esto.
E: Entonces, ¿qué sería lo que está aquí debajo ahora? ¿Ya entendiste cómo se pasaba de aquí a aquí? O sea, ¿que este rectángulo era lo mismo que éste?
A: Sí.
E: ¿No? Y lo mismo que esto que (a + b) . (c + 5), ¿no? Un rectángulo con esta altura y esta base, o sea, ¿ahora aquí esto podría ser también como un rectángulo?
A: Sí.
E: Eso a ti a qué te suena, eso de a . (b + 5), ¿a qué te suena?
A: A rectángulo que tiene de base 5 y de altura b...
E: ¿De base?
A: No, a un rectángulo que le sumás ab y lo multiplicas por a...
E: Bueno, ¿cómo te quedaría dibujado eso? Parecido al de arriba, ¿cómo te quedaría dibujado? Fijándote en el de arriba.
A: a . (b + 5) = a . b + a . 5.

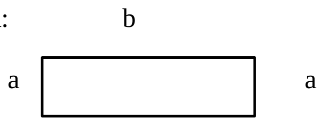


E: Entonces ese a . (b + 5) en el dibujo, ¿qué sería? ¿Qué representaría e esta expresión a.(b+5)? ¿Cómo quedaría representada en ese rectángulo? ¿De dónde hasta dónde? ¿Todo entero?
A: Sí.
E: Todo entero, ¿no? Bueno y, ¿a qué sería igual? Porque tú tienes unos igual, ¿no? ¿A qué sería igual eso?
A: ¿Lo puedo poner así?
E: Como tú quieras.
A: Sería a . b + a . 5.
E: Y ya está, y eso qué es. ¿Eso es alguna propiedad especial?
A:...
E: Ponlo, ponlo si tú crees que es a. b + a . 5. Vale, ¿y la de abajo? (a + 3) . (b + 2), ¿cómo sería?
A:

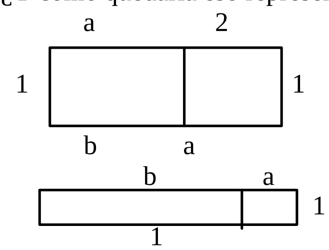


E: Éste aquí, ¿cuánto vale la altura?
A: a . b.
E: ¿La altura vale a . b, en éste?
A: ¿En éste de aquí?
E: Sí, la altura, ¿cuánto vale?
A: a . b.
E: ¿Y en éste?
A: a . 2.
E: ¿Que es lo mismo que aquí?
A: Sí.
E: ¿Y esto a ti a qué te suena? ¿Esto te suena de algo? 3 . (4 + 2). ¿Qué propiedad es ésa? ¿Qué operación se hace ahí?
A: ¿La distributiva?
E: ¿Y aquí hay propiedad distributiva?
A: ¿Ahí'. Sí.
E: ¿Sí? Está bien hecho, ¿entonces?
A: Sí.

E: ¿Y esto es como si fuese dos veces distributiva? “A” por estas dos, ¿no?, y “b” por estas dos, como si fuesen dos veces la distributiva. ¿Cómo te quedaría entonces eso? (a+3) . (b+2).
A: (a + 3) . (b + 2) = a . b + a .2 + 3 . b + 3 . 2.
E: ¿No dices que no la sabías hacer? Y ésta, ¿cómo sería entonces?, porque, ¿ésta es parecida a ésta? (a + b) . (a + b).
A: Sí.
E: ¿Sí? ¿Cómo te quedaría ésa? (a + b) . (a + b).
A: a .a + a . b + b .a + b . b.
E: ¿Y después se puede simplificar algo?
A: a^2 + a b + b a + b^2 .
E: Ponlo si tú crees que se puede expresar...
A: a^2 + (ab) 2 + b^2.
E: ¿ab+ab es ab2 ?
A: Sí.
E: Bueno. ¿Y cómo se te ocurre a ti que sería ese que está ahí, el (a + b + 3) . (a + b + 3)?
A: Haciendo la distributiva tres veces.
E: A ver, ¿haciendo la distributiva tres veces?
A: a .a + a . b + a . 3 + b . a + b . b + b . 3 + 3 . a + 3 . b + 3 . 3.
E: ¿Ahí se puede reducir algo?
A: Sí.
E: A ver, ¿es lo mismo a . 3 que 3 . a?
A: ¿a . 3 que 3 . a? Sí.
E: Vale.
A: a^2 + a b + 3 a + b a + b^2 + 3 b + 3 a + 3 b + 9.
E: El 3 . a y a . 3, ¿es lo mismo?
A: Sí.
E: Y a . b y b . a, ¿es lo mismo?
A: Sí.
E: ¿Y cómo te quedaría un rectángulo a . b?, por ejemplo.
A: ¿a . b?
E: Sí.
A:



E: Y ésta, resuélvela igual.
A. 6 . (b + a) = 6 . b + 6 . a.
E: ¿Esa también es la propiedad distributiva?
A: Sí. ¿Sigo?
E: Sí.
A: (a + 2) .3 = 3 . a + 3 . 2.
E: El otro.
A: (a + 2) . (b + a) = a .b + 2 a .a + 2 . b + 2 . a.
E: ¿Y cómo quedaría eso representado Isabel?, el rectángulo.
A:

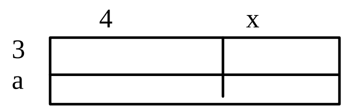


E: ¿Son dos rectángulos independientes?, ¿a+2 y b+a?
A: Sí.
E: Venga.
Y a ver aquí, ¿te acuerdas?
A: No.
E: Parecido a esto, ¿no?
A: (x + 3) . (y + 5).
E: Y ahora el de arriba, o sea esto, ¿qué valdría?, ¿cómo quedaría?

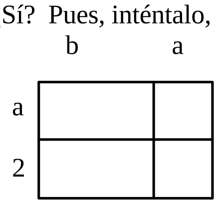
x . y	x . 5
3 . y	3 . 5

x	y	5
x	x . y	x . 5
3	3 . y	3 . 5

E: Entonces esto (x + 3) . (y + 5), ¿tiene que ver algo con el rectángulo?, ¿con ese rectángulo que está dibujado ahí?
A: Sí.
E: Qué, a ver, ¿qué representa x, 3, y, 5? ¿Qué representa todo eso?
A: Las medidas.
E: Las medidas x+3, ¿qué medida es?
A: La altura.
E: Y ¿y+5?
A: La base.
E: La base, entonces, por ejemplo, ¿esto se te parece a ti a eso? ¿Es muy distinto aquello que está allí a (x + 3) . (y + 5)?
A: No, yo creo que es lo mismo, sólo que aquí lo representaron de una manera y yo lo puse de otra.
E: O sea, que esta representación es lo mismo que aquella pero puesto de otra manera.
A: Sí, con otras medidas.
E: ¿Con otras medidas o de otra manera?
A: De otra manera.
E: Entonces ahí, ¿cómo lo representarías tú con rectángulos?
A: ¿Esto?
E: Sí.
A: (3 + a) . (4 + x).



E: ¿Y aquí? ¿Esto es lo mismo que esto? Parecido, pero con otras letras. Y si tú intentas poner este parecido a ese, ¿eso sería también un rectángulo? Porque tú has pintado aquí como si fuesen dos rectángulos, ¿no? ¿Esto se puede pintar como si fuese un rectángulo
(a + 2) . (b + a)?
A: Yo creo que sí.
E: ¿Sí? Pues, inténtalo, a ver.
A:



E: Bueno, ¿y esto coincide con lo que tú habías puesto antes? ¿Esto es lo mismo que esto? O sea, ¿esto coincide con esto?
A: Sí.
E: Bueno, vamos a ver aquí. A ver éste si te acuerdas cómo era.
¿Entiendes lo que quiere decir eso?
A: Suma cuatro. ¿Pongo los resultados?
E: Sí, si puedes sí.
A: 8 + 4 = 12; N + 5 + 4; 3 N + 4
E: Y ese N + 5 + 4, ¿se puede expresar de otra manera?
A: Sí: N + 5 + 4 = N + 9.
E: ¿Y el de acá?, 3 N + 4.
A: No porque habría que multiplicar el tres por la n y después sumarle cuatro.
E: Mira a ver el de abajo.
A: 8 . 4 = 32.
E: ¿Qué significa eso de 4n?
A: Cuatro multiplicado a n.

E: ¿4 multiplicado...? a n, ¿no? ¿Cuánto sale 8 . 4?
A: 32.
E: ¿Y el siguiente?
A: N +...
E: ¿Qué operación estás haciendo tú ahí?
A: N + 5 . 4.
E: Venga, muy bien, (N + 5) . 4 da N + 20?
A: 4 . 5 da 20.
E: Pon aquí lo que tú me estás diciendo N + 5 .4. Pon ahí delante la operación que estás haciendo.
A: N + 5 . 4 = N + 20.
E: Eso es lo mismo, ¿no? Multiplicar por cuatro esta expresión. Y aquí, ¿qué quedaría?
A: 3 N 4.
E: ¿Cuánto es eso? 3 N 4. ¿Qué es lo que significa?
A: 3 N por 4.
E: 3 N por 4 y entre el 3 y el N, ¿qué signo hay?
A: El por.
E: El por, ¿no?, aunque no se ponga. A ver, haz éste por ejemplo. Éste de aquí abajo. ¿Esto qué significa también? ¿Qué significa esto?
A: Por...
E: ¿4 por...?
A: x.
E: Y aquí, ¿cuál sería el resultado aquí?
A: b + 2 . x, ¿no?
E: A ver, aquí x, ¿en qué se transforma?
A: En cuatro.
E: En 4 . x, entonces, ¿en qué se transforma el seis? Si x se transforma en 4 . x, ¿en qué se transforma el seis?
A: En... no sé.
E: ¿Y R?
A: En R .4.
E: En R .4, bien , ponlo. Y si R se transforma en R . 4, ¿en qué se transforma el seis?
A:...
E: x se transforma en 4 . x, ¿no? ¿Y qué operación se hizo aquí?
A: Multiplicar.
E: ¿Y aquí?
A: Lo mismo.
E: Entonces con el seis, ¿qué hay que hacer?
A: Multiplicar.
E: Pues multiplicar.
A: Entonces, ¿es 24?
E: Claro, ¿está claro?
A: Sí.
E: Bueno, déjalo ahí, tranquila.

Alumna I. Sesión 3ª.

E: ¿Ya está? ¿Te das cuenta lo que es? ¿Qué representa esa balanza?
A: Que todas las botellas pesan igual.
E: ¿Y qué significa lo que está encima de cada platillo? ¿Qué quiere decir eso? Cuando la balanza está en esa posición.
A: Que cuatro vasos es igual que una botella.
E: ¿Dónde ves tú los vasos?
A: Éstos, aquí arriba.
E: ¿Qué cuatro vasos...?
A: Equivalen a una botella...
E: Pero yo lo que digo es que ¿dónde estás viendo tú los cuatro vasos?
A: Aquí: 1, 2, 3 y 4.
E: ¿Sólo hay cuatro?
A: Hay siete.
E: Hay siete vasos, o sea, que a cada una de estas cosas tú la llamas un vaso, ¿no? Éste que tiene una rayita. ¿Y aquí cuántos vasos hay?
A: Tres.

E: Tres. ¿Entonces dices tú que cuatro vasos...?
A: Equivalen a una botella.
E: Cuatro vasos equivalen a una botella, y ¿cómo expresarías eso aquí? Expresarías eso con signos. ¿Tú por qué dices que cuatro vasos equivalen a una botella? ¿Qué es lo que tú haces ahí? ¿Qué es lo que estás pensando ahí para qué...?
A: Porque si la balanza está nivelada es porque ésta tiene dos botellas y tres vasos y entonces tiene que ser que cuatro vasos equivalen a una botella...
E: ¿Dos botellas y tres vasos? Y si yo quiero averiguar el peso de la botella, ¿cómo lo calculo?
A: Supongo que sabiendo cuánto valen los vasos, entonces... balanza, y pones nada más y pones la botella después cuando esté desnivelada y vas poniendo vasos hasta que esté nivelado.
E: Muy bien. Pues pon eso todo ahí, eso que acabas de contar.
A: ¿Cómo? ¿Pongo lo de los vasos?
E: Vete representándolo a ver cómo quedaría todo eso que tú me estabas diciendo que estaba bien para hallar el peso de una botella. Vete dibujando la balanza, aquí, aquí o aquí, donde tú quieras.
A: La botella no me sale muy bien.
E: No importa. ¿Y cómo llegas de aquí a aquí? ¿Qué es lo que hiciste tú para llegar de aquí a aquí?
A: Quitarlo todo y poner sólo una botella.
E: O sea, quitaste una botella de aquí.
A: No, quito la botella y tres vasos y de aquí quito una botella y tres vasos.
E: Muy bien, muy bien. A ver aquí que quedaría. ¿Cómo lo expresarías ahí con signos? El mismo que has hecho, mira a ver lo que dice ahí: expresa la situación de la balanza.
A: Pondría x que es el peso de la botella.
E: Ponlo, ponlo. Tú vete diciendo qué es lo que vas escribiendo. x es el peso de la botella.
A: Sí, y es igual a v que sería el peso de los vasos.
E: El peso, ¿de qué vasos?
A: El peso de los cuatro vasos.
E: Sí, pero eso sería, ¿ésta o ésta?
A: Ésta. (1 botella y 4 vasos).
E: ¿Cuál es la situación inicial?
A: Que dos botellas y tres vasos pesan igual que siete vasos y una botella.
E: Muy bien. Escríbelo, muy bien, escríbelo ahí.
A: 2 x + 3 v = x + 7 v.
E: Y después, ¿qué es lo que hiciste?
A: Quitarlo todo.
E: Para pasar tú de aquí a aquí hiciste unas cosas, ¿no?
A: Lo quité todo.
E: Bueno, pues aquí que es lo que tendrías que hacer.
A:...
E: Venga, ¿cómo te quedaría?
A: Si lo quité todo no me quedaría nada.
E: Pero tú quieres llegar a esta situación, ¿no?, que es lo que tienes que hacer en esta expresión. ¿Esto qué es? Esto que está aquí es una expresión, ¿de qué? ¿Qué es lo que representa este igual?
A: Que esto que es lo que está en este platillo es igual a esto.
E: Entonces aquí, para pasar tú a aquí, ¿qué proceso tienes que hacer? ¿Qué operaciones tienes que hacer? ¿Qué es lo que has hecho? Tú dijiste que habías quitado, ¿qué?
A: Una botella y tres vasos.
E: ¿En dónde?
A: En cada platillo.
E: En cada platillo, entonces, ¿aquí qué tendrías que quitar?
A: Una botella y tres vasos.
E: Bueno, a ver cómo lo expresarías...
A: Pondría un... aquí detrás...
E: ¿Dónde?
A: No sé.
E: Esa igualdad, ¿qué representa? Representa una ecuación, una expresión, ¿qué es lo que representa?
A: Una expresión.
E: Vale, entonces como dices tú que quitarías a los dos miembros, ¿quitarías a los dos platillos? Y entonces, ¿cómo expresarías ahí que le quitas los dos platillos? ¿Qué es lo que representa esa expresión que tú has escrito, cada uno de los platillos?
O sea, tú has dicho que esto es lo mismo que esto. La expresión de esto, entonces aquí, ¿qué es lo que representa

cada platillo?
A: ¿Aquí?
E: Sí.
A:...
E: Muy bien, entonces, ¿qué es lo que hiciste tú aquí en el platillo para llegar a aquí y qué hiciste en el platillo para llegar a aquí?
A: O sea, yo tendría que coger y poner 2 x + 3 v...
E: Sí, muy bien.
A: ...y restarle 1 x y 3 v.
E: Muy bien, venga, perfecto.
A: 2 x + 3 v - x - 3 v =
E: Eso es lo que hiciste con el primer platillo, ¿no? ¿Y con el segundo?
A: Al segundo le quité la botella y le quité los vasos.
E: ¿Cuántos vasos?
A: Tres.
E: También, ¿no?, pues a ver...
A: x + 7 v - x - 3 v.
E: Y eso sería un platillo y esto el otro platillo, ¿no? ¿Y cómo estaban representados los dos platillos? ¿Qué es lo que los separaba?
A: El igual.
E: Venga ponlo ahí para que se vea que son iguales, ¿no? Entonces si haces las operaciones ahí, ¿qué te queda? Se te quedaría el dibujo aquí, ¿no? Y aquí, ¿qué te quedaría? ¿Cuál sería el final de eso?
A: x = 4 v.
E: Muy bien. ¿Y eso salía de aquí? Mira a ver si eso se parece a esto que tú tienes aquí. ¿De aquí sale x y de aquí salen los cuatro vasos?
A: Sí.
E: ¿Por qué?
A: Porque al restarle tres vasos a siete vasos quedan cuatro vasos.
E: ¿Y en el primer miembro?
A: ¿La x? Si le quitas a dos botellas una, te queda una.
E: Muy bien, y si le quitas los vasos, ¿qué pasó?
A: Que te quedas sin ningún vaso.
E: Que te quedas sin ningún vaso.
A ver cómo expresas eso, léelo bien.
A: Añadiéndole 3 kilos al peso de una lata de pintura, el peso es 9 kilos. X + 3 v = 9.
E: Aquí, ¿qué es lo que representa cada uno de estos?
A: Un kilo.
E: Y aquí, ¿es la misma representación?
A: Sí.
E: ¿Sí?
A: Sí, porque dice con la lata de pintura los tres kilos, nueve kilos.
E: Nueve kilos. Y aquí representaste los kilos, ¿con qué? ¿Qué es lo que representa aquí un kilo?
A: ¿Un kilo?
E: ¿Con qué está representado un kilo ahí?
A: Con un vaso.
E: ¿Y aquí? ¿Con qué está representado los nueve kilos?
A: Por un...
E: No, con vaso.
A: No.
E: ¿Un número?
A: Sí.
E: Vale, pues a ver aquí cómo te quedaría eso expresado simbólicamente.
A: x + 3 v = 9.
E: Vale y si tú ahora esto lo quisieras resolver igual que el de antes, ¿cómo harías? ¿Qué tendrías que hacer? ¿Qué es lo que hiciste antes para obtener el peso de la botella?
A: ¡Ah!. ¿Para poner el peso de la lata?
E: Sí, porque es lo que te pide, ¿no? Tendrías que hacer alguna operación, ¿no? Pero en principio lo único que has hecho es expresar lo que está aquí, ¿no?, expresarlo. Y, ¿cómo te quedaría expresado el de abajo?
A: ¿Éste?
E: Sí. ¿Cómo representarías eso? ¿Cómo lo expresarías?

A: Dibujaría los pins y pondría 45 ptas.
E: Venga, ponlo. ¿No te gusta trabajar con la balanza? Pues se te da. O es que te creías que no te iba a salir..., ¿y eso qué es?
A: 45 ptas. en monedas de duro.
E: Pues pon aquí lo que significa, ¿no? Porque date cuenta que tú me lo estás contando, si yo veo este dibujo o alguien que no esté aquí ve el dibujo, si a lo mejor viene y ve el dibujo ¿entiende que eso son 45 pesetas?
A: ¿Qué pongo, aquí debajo 45 pesetas?
E: No, mira a ver tú ahí qué es lo que significa cada una de las cosas que pusiste ahí.
A: Un duro.
E: Pues pon ahí a ver qué significa cada redondelito.
A: Un duro = 0.
E: Y aquí, ¿cómo te quedaría la expresión?
A: 3 P = 45.
E: Y “P”, ¿qué es?
A: Pins.
E: ¿Cuántos?
A: Tres.
E: ¿“P” significa tres pins?
A: No, tres es de los tres y la “P” es de pins.
E: O sea, “P” cada pins, cada uno de los pins se representa con “P”.
A: Sí.
E: Vale, tranquila. Vamos con otro.
A: ¿Cinco paquetes de cartulina?
E: Sí.
A: ¿Cómo averiguo eso? ¿Hago un cuadrado y lo parto en cinco?
E: Como tú quieras.
Cada una de las particiones, ¿qué representa?
A: Un paquete de cartulinas.
E: Vale. ¿Tú crees, Isabel, que cuando tú vas a la balanza por ahí hay pesas de todos los tamaños? De nueve kilos, de diez kilos, de once kilos...
A: No sé, yo nunca he visto una balanza.
E: ¡Ah, nunca la has visto!. Bueno, exprésalo ahí...
A: Sólo de esas electrónicas. Las cartulinas las tengo que representar con una letra, ¿no?
E: Como quieras. Lo que hiciste con las otras.
A: 5 J = 10 K.
E: Y “J”, ¿qué representa?
A: Una cartulina.
E: Una cartulina, ponlo aquí...
A: El triple del peso de un libro, ¿dibujo tres libros?
E: Dibújalos. ¿Da lo mismo el triplo del peso de un libro que el peso de tres libros iguales?
A: Sí.
E: Vale. ¿Cómo te quedaría?
A: 3 x = 5 k.
E: Mira a ver si pones aquí, escribes lo que representa “J” y aquí lo que representa “x”, lo mismo que dijiste.
A: “J” una cartulina, (su peso); “x” el peso de un libro.
E: Bien, muy bien.
A: Tendría que poner el balón...
E: Sí.
A: Aquí tengo que poner 24...
E: Son pesas, ¿no? Tú imagínate que tienes una pesa y pones en un lado el balón; en la otra, ¿qué tienes que poner? ¿Pones dos números pintados?
A: ¿Dibujo las pesas?
E: Sí. Tú imagínate que tienes una pesa, entonces tú pones en una un balón; en la otra, ¿tú crees que si le dibujas el dos y el cuatro se equilibra la pesa?, ¿eh?, je.
¿Cuántas pesas tienes ya? ¿Cuántas pesas?
A: Once.
E: ¿Estás representando cada una con una rayita en medio?
A: Sí.
E: ¿Cuántas hay?
A: Quince.

E: Pues mira a ver. ¿Puedes hacer alguna transformación ahí para que no tengas que dibujar más?
A: Tenía que haberlo hecho antes.
E: Corrígelo...
A: Quito estas tres...
E: ¿Cuántas te tienen que quedar?
A: Me quedaban cuatro. Si divido cada pesa en dos partes como si cada rayita fuese una pesa...
E: Vale. Pues pon aquí lo que significa cada representación que tienes ahí para que se sepa. Tú has dicho que cada uno de los trocitos esos de los rectangulitos vale, ¿cuánto?
A: Una pesa.
E: Vale ¿una...?
A: Es una pesa.
E: Es una pesa, o sea, que sería ¿cuántos kilos?
A: Veinticuatro.
E: O sea, cada barrita, cada una de estas cositas que tienes aquí, ¿cuánto vale?
A: Un kilo.
E: Un kilo, pero y ahí eso que está aquí representado, ¿representa esto mismo? Ese enunciado, léelo otra vez, a ver.
A: ¿Pondría otro balón?
E: ¿Otro? ¿Ahí dice que dos balones, el peso de dos balones es igual a veinticuatro?
A: Más el doble del mismo número...
E: ¿Entonces?
A: Sí, pero...
E: A ver si te das cuenta. Representa ahora aquí la expresión...
A: 2.
E: No, pero no te fijes por el dibujo. Fíjate por aquello a ver si te sale lo mismo.
A: 2 “o”.
E: Ese que representa, ¿el doble...?
A: El doble del número de balones.
E: ¿El doble del número de balones es igual a veinticuatro?
A: Sí.
E: Lo que dice el enunciado es eso. ¿El doble del número de balones es igual a veinticuatro?
A: Tenemos dos balones...
E: Pero léelo desde el principio seguido, a ver si te das cuenta...
A: Simbolizando un número de balones con “o”, representa: “la suma de un número de balones más el doble”.
E: Mira lo que te dice, ¿hay alguna operación?
A: Una suma.
E: ¿Tú has puesto ahí alguna suma? ¿Aquí?
A: No.
E: ¿Entonces?
A: 2 “o” + “o” = 24.
E: Ves que si te fijas te sale.
A ver ahora cómo representarías esto. Es fácil.
A: Isabel representa en la balanza: x + 3 = 2 x.
E: ¿El otro?
A: Isabel representa en la balanza: 4 x = 2 x + 6.
E: Mira a ver éste. Explícame éste a ver lo que hiciste; léelo.
A: Los dos círculos, porque son los números que conozco.
E: ¿Son los que conoces?
A: Sí.
E: ¿Esto qué representa?
A: 2 x.
E: Y 2 x, ¿qué significa? ¿Es distinta de esta x? ¿Cómo se representa esta x?
A: Con cuadrado...
E: Con cuadrado. Y estas 2 x, ¿cómo se representan?
A: ¡Ay!
E: ¿Te diste cuenta? Te equivocaste. Revisa éste ahora. Mira a ver 4x, ¿cómo se representaba?
A: Cuatro cuadrados.
E: Mira a ver éste ahora...
A: Isabel representa en la balanza: 3 x + 2 = 5.
E: ¿Te das cuenta ya de cómo se hace? La balanza no se te da mal. Yo no sé por qué le tienes tal cosa a la

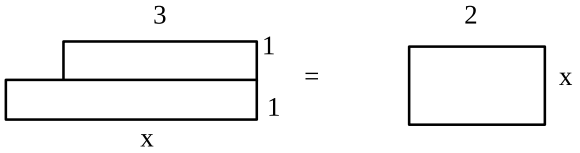
balanza si te puede ayudar a resolver las cosas y a aprender.
¿A ver ésa? Antes te daban la representación y te pedían la balanza, aquí ya tienes, las cosas están en la balanza, ¿cómo lo expresas ahí?
A: Yo pondría tres botes...
E: Ponlo.
A: 3 B = 2 B + 2 P.
E: 2 P. “P”, ¿qué significa?
A: Una pesa.
E: ¿Cada una de las pesas? Bueno, a ver la segunda...
A: 2 B + 5 P = 3 B.
E: ¿Y la otra?
A: 4 B = 2 B + 6 P.
E: A ver ése ahora. Las puedes poner en la balanza o sin balanza, como tú quieras. ¿Tú crees que la balanza te ayuda a resolverlo?
A: Es como el de las pelotas.
E: ¿Sí? Muy bien. ¿Quieres que te enseñe el de la pelota o no hace falta? Cuenta a ver si está bien. ¿Esto es lo mismo que esto?
A: No.
E: Ah, ja, ja.
A: La suma de un número más el doble del mismo... tenía que poner una letra...
E: Tú pon lo que quieras. Acuérdate que yo siempre les advertía que le pongan lo que significa cada letra, ¿no?, porque si no no se entiende.
A: 2 x + x = 36.
E: ¿Y es exactamente igual que el de la pelota? ¿En qué se distingue lo que pone aquí de lo que pone ahí?
A: Que aquí son balones y aquí es un número.
E: Vale, y aparte de eso, ¿en qué otra cosa? Lee bien el enunciado a ver si encuentras la diferencia.
A: No hay ninguna.
E: ¡Ah!. A ver. Un pasito más, ¿no? Que antes ya lo tienes representado y ahora, ¿cómo calculas cuál es el número?
A: ¿Haciendo la ecuación?
E: Muy bien.
A: Si yo la tengo separada por términos.
E: A ver, ¿cuánto es 2 x + x?
A: 3 x.
E: Bien.
A:3 x = 36; x = 36/3; x = 12.
E: Muy bien. Ahora éste de aquí.
A: ¿Tengo que hacer la balanza?
E: Como quieras. Si tú crees que no te va a ayudar y no tienes dudas..., hazlo como quieras.
A: 4 x = 2 x + 6; 4 x - 2 x = +6. Ahora le pongo el signo +, ¿no?
E: ¿Qué significa eso? Léelo, a ver 4 x - 2 x, ¿qué puede ser x? Di algo que represente x.
A: Un bote de salchichas.
E: Un bote de salchichas. Entonces cuatro botes de salchichas menos...
A: Dos botes de salchichas.
E: Sí. ¿Cuánto son cuatro botes de salchichas menos dos botes de salchichas?
A: Tendría que sumar...
E: Mira a ver...
A: La sumo y le pongo 6 x aquí.
E: ¿Por qué la sumas? Tú explícame como podría ser eso en el comedor, en tu casa... Tú tienes cuatro botes de salchichas y que es lo que sigue diciendo ahí...
A: Tengo cuatro botes de salchichas y me quitan dos...
E: Te quitan dos entonces, ¿cuántos te quedan?
A: Me quedarían dos.
E: ¿Te quedan?
A: Me quedan dos.
E: ¿Entonces? Entonces será el resultado, ¿no?
A: ¿Pero no dijiste que me quedaban seis?
E: No, te quedan...No lo que te dice es que el seis, ¿son botes de salchichas? o el seis es el peso, la cantidad o lo que vale.
A: ¡Ah!

E: ¿El seis tiene alguna x detrás?
A: No.
E: ¿Entonces?
A: Entonces lo que sumo...
E: ¿No me acabas de decir que cuatro botes de salchichas si te quitan dos te quedan dos botes de salchichas?
A: Claro, tengo que resolver la ecuación.
E: Bueno y, ¿cómo te quedaría entonces? Eso que estamos comentando, ¿qué es? ¿El primer miembro o toda la ecuación?
A: El primer miembro.
E: Pues escríbelo entonces.
A: Pongo 6 x.
E: ¿Por qué 6 x?
A: Esto... 2 x.
E: ¡Ah!. ¿2 x igual a cuánto?
A: A seis.
E: ¿Cuánto vale entonces la x?
A: No me da.
E: No te da, ¿qué?
A: Porque si ahora tenemos que dividir...
E: Dividir, ¿el qué?
A: Seis entre dos.
E: ¿Y cuánto te da?
A: Tres.
E: Tres, ponlo. Y si tú a esto le llamas un bote de salchichas, lee lo que dice ahí.
A: Cuatro botes de salchichas igual a dos botes de salchichas más seis...
E: Más seis. No te dice que sean seis botes de salchichas, ¿no? Luego, ¿puede valer el bote de salchichas tres? ¿Puede pesar el bote de salchichas tres?
A: Sí.
E: ¿Te das cuenta? Porque aquí no hay x, no representa el bote de salchichas. A ver aquí.
A: 1 x + 3 = 2 x.
E: ¿Cómo te quedaría hay en la balanza?
A: Me quedaría 1 x.
E: Una x que puede representar, ¿qué?
A: Una botella de agua.
E: Bien, ponlo.
A: +3 = 2 x a dos botellas de agua.
E: Y ahora, ¿qué harías para calcular la x?
A: La ecuación.
E: ¿Y aquí? Si la quieres calcular con la balanza, ¿qué puedes hacer ahí?
A: Quitarlo todo.
E: A ver, cómo que quitarlo todo, a ver. Quitar la botella, las pesas, todo, y entonces, ¿no queda nada?
A: Poner una botella e ir poniendo pesas.
E: A ver, ¿qué te salió?
A: Que una botella equivale a tres vasos.
E: ¿Y qué es lo que hiciste tú para pasarla de aquí a aquí?
A: Restar.
E: Restarle, ¿qué?
A: Una botella y...
E: ¿A cada lado le quitaste una botella y tres pesas?
A: No, a cada lado le quité una botella.
E: A cada lado le quitaste una botella. Entonces aquí, ¿cómo se traduciría eso? Si tú aquí le has quitado una botella a cada lado, aquí, ¿cómo las quitarías?
Hacer la ecuación sin necesidad de balanza. la balanza te puede ayudar porque aquí te has dado cuenta, ¿no?, que quitándole una botella te da el resultado.
A: 1 x + 3 = 2 x; 1 x + 3 - 1 x = 2 x - x; 1 x = 3 v.
E: ¿Cuánto te queda entonces?
A: Así, ¿no?
E: ¿Y cómo te quedaría aquí?
A: Quedaría una botella igual a tres vasos.
E: Anótalo ahí. Vale, muy bien, a descansar.

Alumna I. Sesión 4ª.

E: Ahí tienes para representar, ¿no?, geométricamente unas situaciones que tienen expresión algebraica. ¿Cómo harías? Representando un rectángulo...

A:



x + 3 = 2 x

E: Ponle las dimensiones a los rectángulos. A ver, mira a ver, ¿cuánto mide el dos? ¿Dónde está el dos?

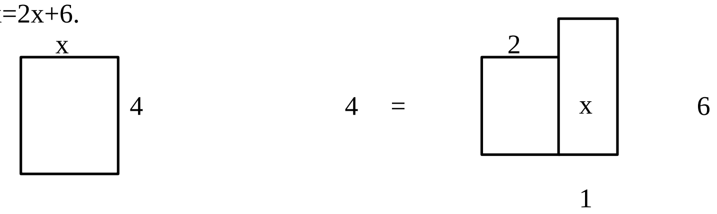
A: De altura.

E: De altura y el tres que tienes en el otro lado, ¿mide más el dos que el tres? ¿Cómo es eso? ¿Lo tienes bien? ¿Puede medir más el dos que el tres?

A: (Rectifica).

E: Bien mira a ver el siguiente.

A: 4x=2x+6.



E: Vete diciendo qué tienes en el primer miembro.

A: 4 x.

E: ¿Y en el otro?

A: 2 x + 6.

E: El valor de x, ¿tiene que ser el mismo?

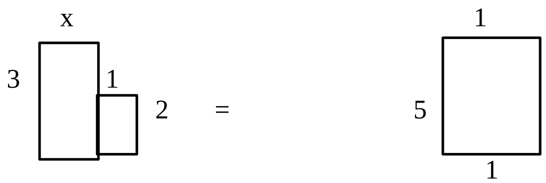
A: Sí.

E: ¿En los dos?

A: Creo que sí.

E: ¿Sí? Mira a ver el tercero.

A:



E: ¿Qué expresión tienes ahí?

A: 3 x + 2 = 5.

E: 3 x + 2 = 5. Vale, coge otra hoja... Lee el enunciado. A ver qué dice...

A: Añadiendo 4 cm. al triplo de la medida de longitud de un segmento, se obtiene otro segmento cuya medida es la del primero incrementada en ocho unidades.

E: Vale, mira a ver cómo lo harías.

A: No sé... al primer segmento lo llamaría... yo pondría...3 x + 4 = 3 x + 4 + 8.

E: A ver, pon lo que tú creas. Represéntalo.

A: 3 x + 4 = 3 x + 4 + 8.

E: ¿Siempre pondrías primero la parte algebraica o la representación geométrica, o según unos problemas unas cosas y otros otras?

A: Es que no sé representarlo.

E: ¿No sabes representarlo? ¿No te acuerdas cómo se representa 3 x + 4? Si lo acabas de hacer en la otra hoja.

A: ¿Con la cuerda?

E: ¿Cómo con la cuerda?

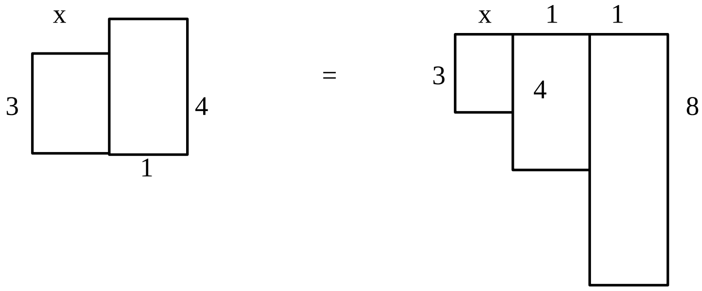
A: Dice que es un segmento, entonces qué hago...

E: Al triplo de la medida de la longitud de un segmento. x, ¿qué representa?

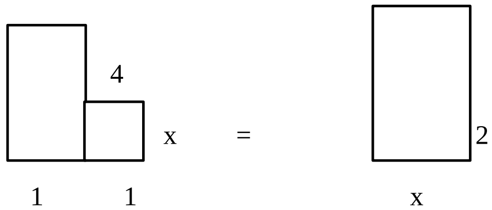
A: La longitud del segmento.

E: La longitud de un segmento cuya medida es la primera, la del primero incrementada en ocho unidades.

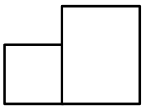
¿Cómo representarías tú eso aquí? La expresión que tienes aquí, ¿sabes representar eso?
A: Yo sé representar esto, pero eso no.
E: ¿Y esto no es lo mismo que esto?
A: Creo que sí.



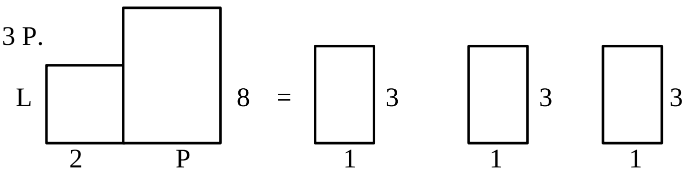
E: A ver el otro. ¿Qué dice el otro ejercicio?
A: El valor de una pegatina aumentada en cuatro, es dos veces el valor de la pegatina : x + 4 = 2 x.
E: Y ahora, la parte geométrica, ésa es fácil, ¿no?
Escribe lo que significa eso.



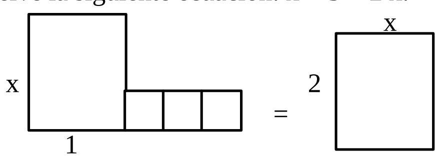
A: Que 4 x es igual a 2 x.
E: ¿Y eso es lo que dice ahí?
A: No.
E: ¿1 .x +...? ¿Y la x tiene que ser igual en los dos, en éste y éste?
A: Sí.
2 L + 8 P = 3 P. Ahí cómo lo dibujaría, ¿dos lápices?
E: Como tú quieras. Ahí dice representación geométrica. A ver cómo lo representarías tú.
A:



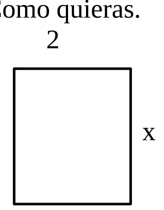
E: Lee otra vez el enunciado...
A: El precio de dos lápices más ocho pesetas es tres veces el precio de un lápiz.
E: A ver.
A: 2 L + 8 P = 3 P.



E: ¿Tú crees que está así bien? ¿Eso te coincide con lo que tienes escrito a la derecha?
A: Creo que sí.
E: Sí. (Cambia de hoja).
Vete leyendo a ver si lo entiendes..., ¿qué dice el enunciado?
A: Resuelve la siguiente ecuación: x + 3 = 2 x.

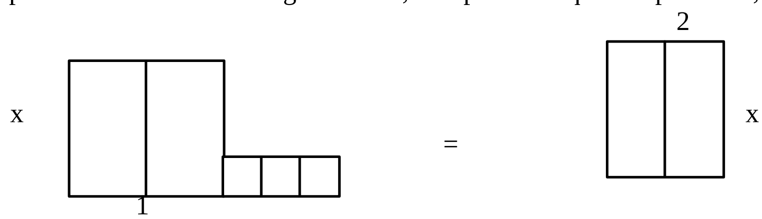


E: ¿Y la parte de la derecha? ¿Cómo quedaría?
A: x + 3 = 2 x. Tendría que resolver la ecuación.
E: Porque hay una diferencia con las fichas anteriores, ¿no? En las fichas anteriores, ¿qué te pedía? ¿Te pedía

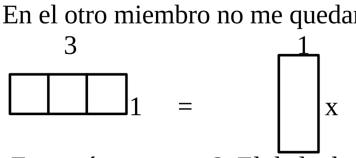
resolver la ecuación?
A: No.
E: ¿Qué te pedía entonces?
A: Que hiciera la representación.
E: La representación.
A: Sí.
E: Y aquí, ¿qué te pide?
A: La ecuación.
E: Pues venga, a ver si te sale..., ¿por dónde vas a empezar: por lo algebraico o por lo geométrico? ¿Por dónde vas a empezar a resolverla?
A: Por aquí.
E: Y ésa, ¿qué parte es?
A: La algebraica.
E: Venga.
A: -2 x + x = 3.
E: ¿Por qué has puesto ahí -2 x?
A: Porque al pasar del segundo miembro al primer miembro se le cambia el signo. -3 x = -3;
x = -3/ -3; x = +1.
E: ¿Cuánto te queda?
A: +1.
E: ¿Cuánto vale?
A: 1.
E: 1. Mira a ver ahora, sigue resolviéndolo con el geométrico a ver que te queda...
A: ¿Cómo que con el geométrico?
E: Sí, sólo has representado el enunciado y la ecuación la has resuelto... en la parte algebraica. Mira a ver si la puedes resolver con el geométrico...
Tienes representado el enunciado aquí, ¿no?
A: sí.
E: Y hay que seguir resolviéndolo. Entonces aquí para resolver esto, ¿qué tienen en común este miembro y este miembro?
A: La x.
E: La x. Entonces, ¿qué quedaría? Date cuenta que, es que claro, tú has puesto el uno mide casi tanto como el dos, ¿no? Y la x, ¿mide lo mismo aquí que aquí? ¿Cómo tendrías que hacerlo?
A: Cambiarlo...
E: Cambiarlo, ¿cómo?
A: Pones la x donde está el dos y el dos donde está la x.
E: Como quieras.


E: Eso sería un dos y eso una x, entonces ahora, ¿qué tienen en común esto con esto? O sea, que esto según tú desaparecería.
A: Sí, la x.
E: La x, y el 2 x y 1 x, ¿es lo mismo?
A: Son términos semejantes.
E: Son términos semejantes, pero un rectángulo que tiene “2 x” y un rectángulo que tiene “1x”. Lo que pasa que aquí esto para ti, ¿es lo mismo que esto?
A: ¿Esto y esto? No.
E: ¿Entonces qué parte en común tienen una y otra?
A: Ésta.
E: ¿Sólo el lado? Pero como área, ¿tienen algo en común? Porque, ¿cuál es el área de ese rectángulo?
A: 2 . x.
E: Y el de la derecha.
A: 1 . x.
E: Y hay algo metido en el otro, ¿si uno es 2 x y el otro 1 x? ¿Cuántas x tiene que haber ahí metidas?
A: ¿Aquí?
E: Sí.

A: Dos.
E: Dos y aquí una. Claro el dibujo no te ayuda. Para darte cuenta que aquí hay 2x, ¿cómo te quedaría ahí separada la unidad, el dos?
A: Una x aquí...
E: ¿Y cómo te quedaría el rectángulo? ¿Qué significa este trozo aquí?
A: Tendría que dividir...
E: Y cada una de esas partes, ¿cuánto es?
A: 1x.
E: 1x. ¿Y cómo tendría que estar eso representado aquí el 1x?
A: ¿Aquí?
E: Sí.
A: Igual que aquí.
E: Bueno, pues ponlo bien.
A: ¿Lo divido?
E: ¡Oh!. Es que tú tienes uno ahí y, ¿no te tiene que ocupar lo mismo que aquí o no? Y mira todo lo que te ocupa... Ponlo más o menos igual. O sea, esta parte de aquí desaparecería, por ejemplo, ¿no? Esto desaparece.

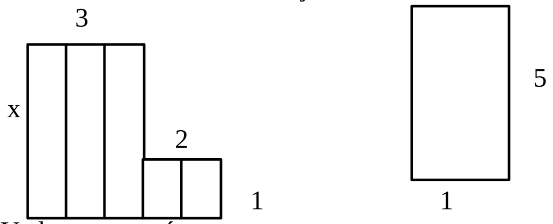


E: Entonces ahora, ¿qué tienen en común estas dos?
A: El 1x.
E: El 1x. Entonces, ¿tú puedes resolverla poniendo este 1x allí?
A: Sí.
E: Sí, pues intenta a ver, ¿pero lo vas a poner encima o le vas a quitar a este 2x?
A: ¿Se lo quito?
E: Cuando tú vas a resolver la ecuación, ¿qué es lo que buscas? Obtener ¿qué?
A: La x.
E: La x. Entonces aquí, ¿qué es lo que está mezclado con la x?
En este miembro, ¿qué es lo que está mezclado con la x?
A: El tres.
E: El tres, ¿no? Y si te interesa separarlo, ¿cómo te quedaría? Si tú lo pones esto allí, ¿qué te quedaría?
A: Me quedaría esto...
E: Eso, o le quitarías todo ese trozo...
A: Todo esto.
E: Todo eso le quitarás... Entonces pon el dibujo que te quedaba...
¿Ese te vuelve a quedar otra vez? Pues no dices que se lo vas a poner aquí.
A: No, éste.
E: ¡Ah!. Bueno.
A: Y después me quedarían los tres.
E: Lo de abajo y los tres.
A: Éste y los tres.
E: ¿Y en el otro miembro?
A: En el otro miembro no me quedaría nada. En este miembro me quedarían los tres y en éste, nada.



E: ¿Eso qué representa? El de la derecha.
A: ¿Éste?
E: Sí.
A: 1x.
E: 1x, ¿y el del otro lado?
A: 3, 1.
E: ¿Cuál te parece más fácil?
A: Ésta.
E: ¿Por qué? A ver, ¿por qué te parece más fácil?

A: Porque la de arriba tiene más x.
E: Vale, entonces haz la de abajo.
A:



A: Ya lo representé...
E: Vale, a ver algebraicamente...
A: 3 x + 2 = 5; 3 x = -2 + 5; 3 x = 3; x = 3/3; x = 1.
Si yo sumo se pone el signo del mayor, ¿no?
E: ¿Por qué? ¿Qué significa -2 + 5? ¿Qué significa si yo lo pongo en función de caramelos, de bolígrafos, de lo que sea... qué significa el cinco, que tengo o no tengo?
A: Que tengo.
E: Que tienes, por ejemplo, cinco ¿qué?
A: Cinco caramelos.
E: Cinco caramelos. ¿Y qué significa el -2?
A: Que me quitan dos.
E: Que te quitan dos y entonces, ¿cuántos te quedan? Siete.
A: Tres.
E: ¡Aaah!. Cuando tienen signos distintos no se suman, es una cosa que tú tienes y te la quitan. Mira a ver ahora el de la izquierda. ¿Cómo lo puedes hacer?
Tú le vas quitando la misma cantidad a los dos miembros, ¿no? Le vas a quitar lo mismo a los dos.
A: ¿Esto lo divido en cinco?
E: ¿Eh? Espera un momentito.

Alumno Z. Sesión 1ª.

A: Hola, me llamo Zebenzui y estudio 7º de E.G.B. en el grupo de 7ºA.
E: A ver si eso se parece a lo que tú ya hiciste.
A ver cómo te sale ahora. ¿Con eso se puede hacer algo más?
A: Reducirlo.
E: Si tú crees que todavía se puede operar más lo haces.
A ver, ¿qué estás pensando? ¿Qué duda tienes ahí?
A: Poner cuatro y cuatro por dos.
E: Ah!. Como tú quieras. Si tú crees que lo tienes que poner, lo pones.
A: No, es que ahora estoy dando ecuaciones y eso no sé hacerlo.
E: Y aquí, por ejemplo, es lo mismo, ¿no?
A: Sí.
E: Y, ¿qué transformación has hecho aquí?
A: En vez de multiplicarlo, porque es igual poner 6 x R que 6 R.
E: Vale.
A: a = 2 x b entonces sería 5 x (b + b) y esto se podría hacer: 10 b + 3. ¿Encuadro el resultado?
E: Como tú quieras, si tú crees que queda mejor lo encuadras.
A: 8 x 4; 4 x 1 = 4 x 5.
E: Y eso, ¿de dónde te sale? 4 x 1 es 4 x 5.
A: De multiplicar cuatro por cada uno.
E: Cuatro por cada uno. Bien.
A: Y aquí 4 x 3 y entonces ahora resuelvo, ¿no? 8 x 4 = 32. Y aquí sería 4m + 20 y ésta 12 m.
E: Muy bien. Perfecto. A ver si te acuerdas de éste. ¿Te acuerdas de éste?
A: Lo de las ecuaciones.
E: Claro, mira el ejemplo.
A: Juan 8.
E: Juan, ¿qué es lo que representa ahí?
A: ¿Juan?
E: Ese Juan que tú has escrito ahí, ¿qué es lo que representa?
A: ¿Cómo que qué es lo que representa?
E: Sí, cuando tú has escrito aquí Juan, ¿qué es lo que representa?
A: La altura de Juan.
E: La altura de Juan, vale.
A: ¿Qué hago? ¿Lo pongo aquí también?
E: Como tú quieras, eso como tú creas.
A: Sería Juan + 8; Pepe - 8; Eduardo sería Juan + 4.
E: ¿Por qué ahí has puesto Pepe - 8?
A: Porque se supone que la altura que tiene Pepe es la de Juan + 8, entonces sería la que tiene Pepe...- 8. Juan es la altura que tiene Juan.
E: ¿Ves alguna diferencia de ese ejercicio con el anterior? Lo que dice el enunciado.
A: Es igual que ése.
E. Desde el principio sí, pero, ¿hay alguna diferencia entre los dos? ¿Te pone alguna condición nueva?
A: Que utilice la situación.
E: ¡Ah!. x que va a representar, ¿qué estás buscando? Di en alto lo que estás buscando, ¿qué estás tú pensando? ¿A qué le vas a dar el valor de la x? ¿A quién?
A: A las alturas.
E: De quién, ¿de alguno concreto?
A: De todos.
E: De todos.
A: A la altura de cada uno.
E: A la altura de cada uno le vas a llamar x.
A: A la altura de todos en general, me parece.
E: Entonces ya estaría hecho, ¿no? ¿Y eso es lo que dice el problema?
A: No.
E: A ver...tú pon lo que creas.
A: Es que yo me refiero que en vez de poner Pepe, Juan y todo eso pongo x en vez de esos nombres. La altura de cada uno va representada por la x.
E: Sí, sí, como tú quieras. ¿Entonces cómo te quedaría?
A: Entonces pondría x + 8, x - 8 y x + 4.
E: Y x sería entonces ¿qué? ¿Qué es lo que representa x en esto que tú has puesto?

A: La altura.
E: La altura, ¿de quién? De todos.
A: Sí, da igual.
E: Pues ponlo ahí.
A: La altura de Juan.
E: La altura de Juan o altura de Juan.
A: Lo tacho.
E: Como tú quieras.
Una situación y una representación, ¿qué historia le puedes tú poner a eso?
A: A ver:
1 paquete de leche cuesta x ptas.
1 paquete de mantequilla 20 ptas. menos.
1 paquete de café 100 ptas. más que el paquete de leche.
E: Muy bien, vamos a ver. Mira a ver si de éste también te acuerdas. ¿Tú te acuerdas que también lo hiciste?
A: Sí. "Ejercicio: a + 3 a puede ser escrito de forma más simplificada. Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible".
A: Aquí es como si fuera un 1.
E: O sea, que tú crees que aquí es como si tuviera un 1, ¿no?
A: Sí, empieza a sumar 1 a + 3 a = 4 a; 2 a + 5 a = 7 a; 2 a + 5 b =, aquí no se podría porque no son términos semejantes, no se podrían sumar.
E: Vale, entonces, ¿cómo te quedaría?
A: No se podría sumar, ¿cómo lo sumo?
E: ¿Y qué te queda entonces?
A: Eso así.
E: Pues así, pues ya está.
A: 7ab.
E: ¿Es lo mismo? Si tú crees que no se puede sumar, lo dejas como está, y si tú crees que se tiene que poner 7ab, pues...
A: Es que como no son términos semejantes, a mí me han enseñado eso como no son semejantes no se pueden sumar.
E: ¿Cuál sería entonces el resultado?, ¿Cómo mismo está?
A: Sí.
E: Pues ponlo, si tú crees que es así porque no son semejantes...
A: No, éste 2 a + 5 b = 7 a b.
E: Si tú crees.
A: 7ab y después éste (a + b) = a sería 2 a b + a =
E: ¿Por qué pones 2ab? ¿Qué crees tú?
A: Aquí delante de la "a" hay un 1 y delante de la "b" hay un 1, entonces se suman los coeficientes. Se pone 2 a b + a = 3 a^2 b.
E: ¿Por qué "a2" ?
A: Porque hay dos "a".
E: Vale.
A: 2a+5b+a=8 a^2 b.
E: O sea, cuando tú tienes a + a es "a2".
A: No, a + a= 2a.
E: No pasa nada, sigue.
Este caso (1º) y este caso (4º) para ti, ¿es lo mismo?
A: Sí, son iguales.
E: Son iguales, ¿no?
A: No, el resultado que tendríamos en este (4º) es mayor. Es que a y a será 2a elevado al cuadrado.
E: ¿Y este 2a que tienes aquí?
A: Ése es el que está multiplicando a la "a". Entonces no es al cuadrado y el anterior tampoco, 3ab y 8ab.
Y aquí (5º) me parece que sería así, ¿no?, ab porque sería 1a-1b sería ab, y más la b = 2b + a.
E: O sea, que sería 2b + a el resultado.
A: Sí.
E: Y este "menos", ¿qué hacemos?
A: Pues restar los coeficientes. Es que se supone que aquí tenemos 1 y aquí tenemos 1, entonces sería...
E: Aunque sea a y b no importa.
A: Es que eso es lo que sume antes (2º). Eso es lo que estaba diciendo antes, si no...Sí yo creo que es así. A ver éste (6º); 3a - (b + a) = 3a - 2ab = 0ba que es lo mismo, entonces sería 1ab.

E: O sea, aquí este 1, ¿de dónde lo has sacado? ¿De restar el 3 del 2 o del 2 del 3?
A: 3-2 que es 1. Puede ser 5a también...
E: Vale.
A: a + 4 + a - 4 =
E: ¿Qué piensas?
A: Es que yo aquí no puedo poner 4a porque entonces estaría multiplicando.
E: ¿Entonces?
A: Como no ponga... aquí tiene un 1. 5a, no. Sería 5a - 3a esto es igual a 2a.
E: O sea, que tú has sacado este 5, ¿de...?
A: Del 1 de la a + 4 y el 3 del 1 de la otra menos el otro 4.
E: Ya.
A: (3a - b + a) = 3a - 2 ba = ¿1ba? Sí, igual que el primero.
E: Bueno, (6º). ¿Esos paréntesis influyen en algo?
A: Claro, primero tengo que hacer éste y después éste.
Esto por lógica daría 1 porque si yo a a (a + b) le... ¡ah no! 2ab + ab = 3ab.
E: ¿De dónde sacaste ese dos?
A: De sumar el 1 y el 1 que hay aquí (0a + 0b) serían 2ab + y luego aquí le quito 1 serían 0, entonces es ab.
A: Ejercicio: “La paga que da un padre a un niño cada semana es de “p” pesetas. ¿Cómo expresarías el dinero que reúne ese niño durante seis semanas?
E: ¿Lo entiendes? Es un problema de la vida diaria.
A: La paga de un niño cada semana es “p” pesetas, ¿no? Entonces, ¿qué es lo que reúne el niño en seis semanas? “p” por seis.
E: “p” por seis es el dinero que reúne el niño durante las seis semanas, ¿no?
A: Sí.
E: Vamos a ver si te acuerdas de las representaciones.
A: Eso es lo peor que se me daba.
E: ¿Lo peor que se te daba?
A: Sí.
E: Ahí tienes todo el recuerdo de lo que hicimos. La primera parte es fácil,, ¿no?
A: 1º a) $2 = 2 \times \boxed{1} = 1 \times \boxed{2}$

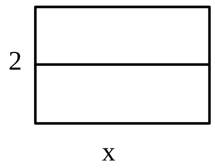
b) $6 = 6 \times \boxed{1} = \boxed{1} \times 6$

E: Eso ya te lo sabes, ¿no?
A: Sí.

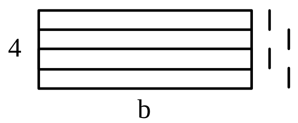
A: 2º a) $x = \boxed{1} \,.\, x = x \boxed{1}$

b) $y = y \,.\, \boxed{1} = \boxed{1} \,.\, y$

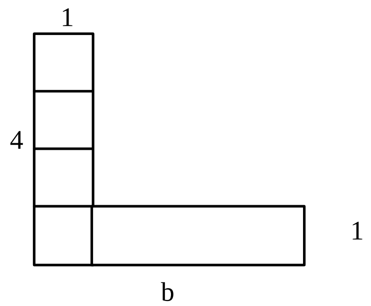
E: Vale. Eso era lo que tú habías usado antes, ¿no?
E: Estos trocitos, ¿tienen que ser iguales a éstos?
Representa con rectángulos:
a) 5 b) Y
A: Tienen que ser iguales, lo que pasa es que no tengo una regla.
Los que tienen que ser iguales son cada cuadrito.
E: Cada cuadrito, ¿sólo los verticales o también el horizontal?
A: Sí, iguales todos.
E: Todos iguales.
Márcalos ahí con el rotulador de alguna manera, que se vea como un arco o algo que se vea que es lo que tú consideras que tienen que ser iguales. El cuadrito horizontal tendría que ser igual a cada uno de los cuadritos verticales.
A: Sí.
E: Vale, muy bien.
Representar mediante rectángulos:
a) 2.3 b) z.t
Representa 2 . X.



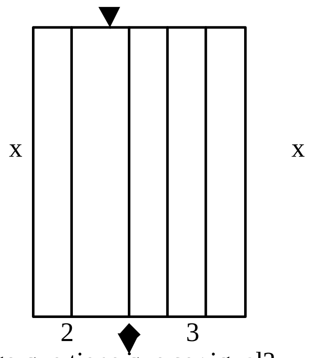
A: Así.
E: Nada más, no hay que ponerle nada más, ¿no? ¿Hay alguna diferencia de éste con éste?
A: Sí, eso representa un solo número y esto representa una multiplicación.
E: Una multiplicación.
Representa
a) 4 . b   b) 4 + b
a)   4 . b



E: ¿Esas también tienen que ser iguales?
A: Sí.
E: ¿Qué es lo que tienen que ser iguales?
A: Todas.
b)   4 + b



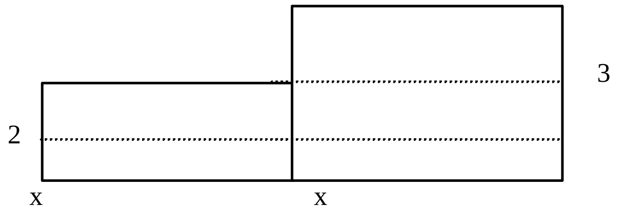
E: Ese trozo tiene que ser igual, ¿no?
A: Sí.
E: Bien.
¿Son iguales? ¿Por qué?
A: No, porque en el apartado “a” estoy representando una multiplicación y en el apartado “b” una suma.
E: Bien.
Intenta representar: a) 2 . x + 3 . x   b) 2 . x + 3 . y   c) 2 . x + 7
a)   2 . x + 3 . x



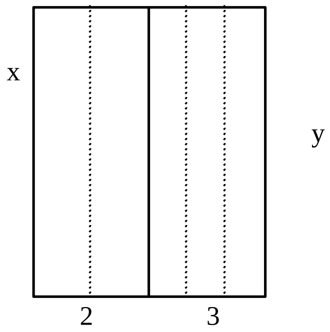
E: ¿Y ahí hay algo que tiene que ser igual?
A: Sí, todas las unidades.
E: Entonces quiere decir que esta representación tiene alguna diferencia con ésta, ¿no? Ésta tiene alguna condición concreta, ¿cuál era la condición?
A: De que cada una...
E: Las unidades...
A: Sí, cada unidad fuera igual.
E: Igual que éstas, ¿no? Pero no tiene más condiciones estas dos? Tú le has puesto ahí que la “x” es distinta de la “y” y aquí la “x” igual a la “y” o la “x” distinta de la “y”, ¿pueden ser las dos cosas?
A: Claro que pueden ser las dos cosas porque “x” puede tener el mismo valor que la “y” o pueden ser diferentes.

E: O sea, eso sería cuando tiene el mismo valor, esto cuando es diferente?
A: Sí.
E: ¡Ah!
Daría lo mismo Zeben si se pusiera x . 2 + x . 3?
A: Claro, ¿qué hago lo represento de otra forma?
E: Bueno, represéntalo de otra forma, sí.
A: Así.

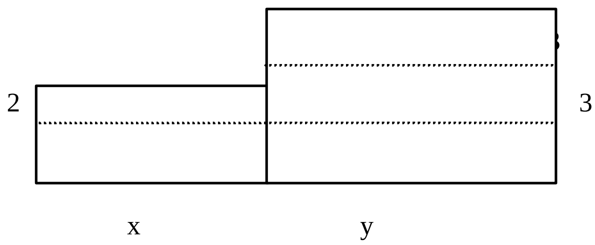
b) 2 . x + 3 . x

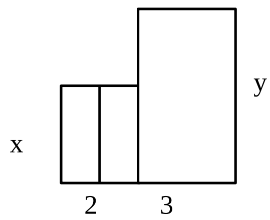


b) 2 . x + 3 . y

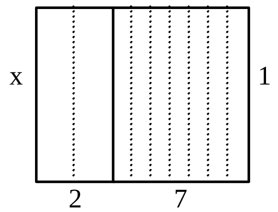


E: “x” e “y” son iguales, ¿no?
A: Bueno, así representado sí. Esto podría ser 29 y esto 115.
E: ¿Y la representación te quedaría igual si “x” e “y” son 29 y 115?
A: No.
E: ¿Cómo te quedaría?
A: Por ejemplo “x” quedaría más pequeño que la “y”.
E: ¿Y cómo te quedaría más o menos ese caso que dices tú x = 29 e y = 115? ¿Cómo te quedaría el dibujo?

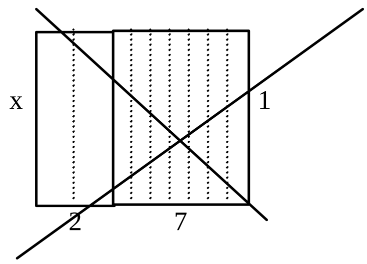




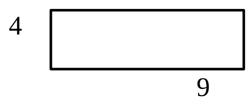
c) 2 . x + 7



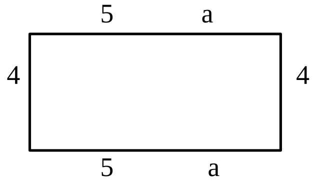
E: El 7 a qué equivale.
Z: A 7 unidades
E: Claro.
E: Eso representa 7 . 1.
Z: 7 y esto es 1.
E: ¿Sí?
Z: No esto tendría que ser la unidad.
E: Entonces ¿cómo te quedaría? No importa corrígelo.
E: Aquel entonces, ¿no está bien?
A: No.
E: Pues táchalo.



E: Aquel entonces, ¿no está bien?
ESCRIBE LAS OPERACIONES SIGUIENTES EN LENGUAJE ALGEBRAICO
2. El doble de n menos 4.
E: ¿Qué te gusta hacer más: los rectángulos o la otra parte?
A: ¿Esto?
E: Sí.
A: Esto.
E: Si yo aquí, Zeben, te pusiera esto, ¿cómo lo representabas?
A: El doble de “m”.
E: No de “n”, ¿es lo mismo que aquí? ¿Son iguales o hay alguna diferencia?
A: Que hay una coma.
E: Entonces, ¿cómo lo expresarías?
A: 2n-4.
E: O sea, que te queda igual que el otro.
A: Sí.
10. El triple del cuadrado de b.
A: Le puedo poner paréntesis aquí o no, no importa. También puedo poner el dos, se lo puedo poner...
E: ¿Dónde?
A: Yo puedo poner 3b2 ...
E: Ponlo de todas maneras, a ver eso que me estás diciendo ahí.
A: Puedo poner...
E: Eso es un punto de que...
A: Entonces éste no vale, ¿no?
E: No valía ése, ¿por qué?
Calcula el perímetro de las figuras siguientes:
a)

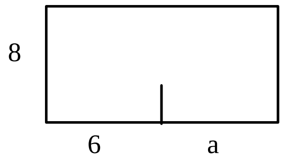


E: Esto lo tenías tú bien ayer.
A: 8 + 18 = 26.
E: ¿Cuál es el perímetro? ¿Qué es la idea de perímetro?
A: Es la suma de todos los lados.
E: Vale. ¿Te falta algo aquí arriba?
A: Poner aquí centímetros...
E: Poner...
A: No, nada porque aquí no pone centímetros ni nada.
E: Pues vale.
b)

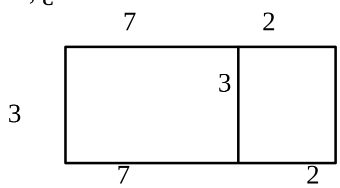


perímetro = 4 + 4 + 10 a = 8
4 + 4 + 5+ 5+ a + a = 8 + 10 + 2 a = 18 + a

E: ¿Ese es más difícil? No quedamos en que el perímetro, ¿qué era?
A: La suma de todos los lados.
E: Bueno, pues mira a ver, si quieres le puedes poner ahí las medidas en el rectángulo.
A: ¡Ah!. Aquí.
E: Como tú quieras, si te es más fácil.
A: 10a.
E: ¿Por qué 10a? ¿De dónde sacas 10a?
A: La suma de todos los lados. Serían éste más éste (5+5) y éste más éste (9+a).
E: Y éste más éste (9+a) es a
A: 2a, eso es 2a.
Calcula el perímetro de las siguientes figuras:
a)

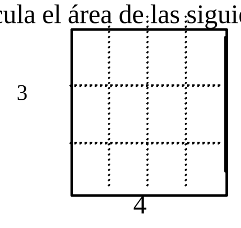


E: ¿Ese es igual que el de antes?
A: Sí, parecido, sí.
E: ¿Se puede hacer algo más?
A: No.
E: Bueno, ¿el otro...?
b)



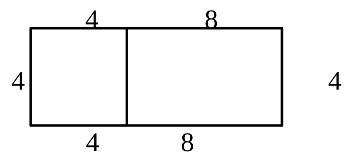
perímetro = 9 + 14 + 4 = 27

A: Es que esto son los dos.
E: Sí, pero, ¿cuál sería la figura tal? O sea, si yo tengo para hallar el perímetro de esta hoja y ahora le hago una raya aquí, ¿cuál es el perímetro de la hoja?
A: Primero hago esto y después hago esto.
E: El perímetro.
A: Sí.
E: ¿Qué era el perímetro?
A: La suma de todos los lados.
E: Y entonces si yo le pongo una raya aquí, ¿la suma varía? ¿El perímetro varía?
A: No.
Calcula el área de las siguientes figuras a)



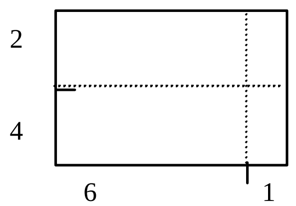
E. ¿Qué es eso de “b” y “a”?
A: La “b” es la base y la “a” es la altura.
E: ¿Falta algo?
A: ¿Eh?
E: Falta ponerle algo al 12.
A: Es que no expresa en lo que está.
E: Vale. El siguiente.

b)



E: Igual que tú el perímetro lo marcaste antes, marca ahí lo que sería el área.
A: Todo eso ahí.
E: Vale.
A: Primero lo hice por separado, en dos partes: l .l = 4 . 4 = 16. Y ahora éste sería:
b . a = 8 . 4 = 32; 16 + 32 = 48.
E: O sea, esta “b” es la misma que esta “b”.
A: Sí.
E: ¿Ya está?
A: Sí.
E: Y esto que sería, esta “a”.
A: Ésta es el área.
E: Sí y que sería este 48.
A: Sí.
E: Vale, mira a ver ése.
Calcula el área de las siguientes figuras:

a)



A: Puedo hacer una cosa aquí.
E: Sí, sí, lo que tú quieras y lo que tú necesites.
A: O sea ¿que el área vale 2 . 7?
E: No, esa...
A: Esa “a” que está aquí, esta “a” ¿qué significa?
A: El área.
E: El área ¿de quién?
A: En total
E: En total.
A: Es que tenía que haber empezado aquí.
E: No importa, le pones una llave o lo que tú quieras, con tal de que tú lo entiendas. A mí lo que me interesa es que lo entiendas o que me expliques lo que tú quieres decir. ¿Qué es 4 . 7? ¿Por qué ahora la base es igual a la de antes?
Haz puesto otra vez b . a.
A: Sí, la altura es 4 y la base 7.
E: Sí, hasta donde, o sea, ese área que estás calculando ahora desde donde llega, ¿cuál sería?
A: ¿El área?
E: Sí, ésta que tú has calculado aquí.
A: Ahora éste. Lo sumo y ya está.
E: ¿Cómo?
A: Le sumo esto y ya está.
E: Vale.
E: O sea, ¿aquí le pones cm2 y aquí no?
A: Es que aquí no expresa las unidades y aquí si me lo da.

E: Vale, vale.

Alumno Z. Sesión 2ª.

Rellena los vacíos como se indica en el primer apartado de cada columna.

x	------------	x + 3	x	-----------	7x	x	-----------	5x +3
6	------------	6 + 3	2	-----------	7. 2	3	-----------	5.3 + 3
n	------------	n + 3	r	------------	7r	4	-----------	5 . 4 + 3

b + 2 ------- b + 2 + 3   b + 2 ------- (b+2).7   2a ---------- 5(2a) + 3 = 10a + 3

E: ¿y cuál sería el resultado por ejemplo de éste?¿ se puede obtener otro resultado?
Z: ¿De éste?
E: Sí, del último.
Z: A ver, 10a + 3.
E: ¿Se puede hacer algo más?
Z: No sé.
E: ¿Qué has hecho en los tres casos?
Z: Aquí a la x había que sumarle un 3, entonces al "6" le sumé un 3, a la "n" le sumé un 3 y a la "b + 2" le sumé un 3.
E: Vale. ¿Y aquí por ejemplo?
Z: Pues... cogí a la x, bueno como aquí la x está multiplicada por 7, luego al "2" lo multipliqué por 7 y al "b + 2" por 7, hay que multiplicar todo esto por 7. ¿no?
E: Sí. ¿Y aquí?
Z: Y aquí como dice el ejemplo hay que multiplicar lo que ponga aquí por 5.x + 3, cogí y puse 5.3 + 3 y 4.5 + 3, y para multiplicar esto cogí y puse 5, paréntesis como es multiplicar 2a, 2a +3.
Calcula:
a) 6. (b + a) = 6.b + 6.a = 6b+ 6a
b) (a+2).3=3.a+3.2=3a+6
c) (a+2).(b+a)=a.b+a.a+2b+2a=ab+a2 + 2b + 2a
d) a . (b - c) = a.b - a.c =ab - ac
E: Eso ¿qué expresa? eso que está ahí ¿ qué expresa?
Z: Una distributiva.
E: ¿Y se pueden simplificar más esas expresiones?
Z: Sí.
E: Bien. Es importante que vayas comentando lo que tú vas pensando.

Escribe de las siguientes expresiones cuál es la más grande y cuál la más pequeña:

	n = 8	más pequeña	más grande
n+1, n+4, n-3, n,n-7		n - 7	n + 4

8+1=9, 8+4=12, 8-3=5, 8, 1.

E: ¿ Cuántas expresiones hay?
Z: Cinco.
E: Vale ¿cuál es la parte más grande y la más pequeña?
Z: No sé esto puede ser por ejemplo n - 3, esto puede ser más pequeño que éste porque esto puede ser 400 y esto puede ser un 2 a lo mejor.
E: Sí, pero puede ser en el mismo ejercicio, la "n'
Z: Tendría que tener el mismo, digo yo.
E: Y ¿ por qué dices tú entonces que es 400 y no ese número? ¿ te das cuenta de lo que estás diciendo, o sea, como si fuesen, tú has dicho no como si fuesen menos. ¿no?
Z: Yo lo que haría sería darle un valor a la "n" , un valor que me parezca para todas las expresiones y hacerlo así.
E: Bueno, a ver.
Z: Lo puedo poner aquí ¿no?
E: Sí, donde tú quieras. No se puede ver si no le damos un valor, si no le damos un valor no se puede ver.
Z: A "n" el 8, 8 + 1 = 9, 8 + 4 =12, 8 - 3 =5, 8, 1, el más pequeño me parece que es n - 7 y el más grande n + 4.
E: Tú fíjate a ver si eso tiene, intenta olvidar lo del 8 a ver si tiene algún sentido eso, a ver si tu ves porqué tiene que ser la más pequeña o porqué la más grande.

ESCRIBE LAS OPERACIONES SIGUIENTES EN LENGUAJE ALGEBRAICO
1. El triple de x: 3x
2. El doble de n menos 4: 2n - 4

3. El producto de a, b, c: a. b . c
4. El precio de m kilogramos de manzanas a y ptas. el kg.: m. y
5. El triple de la suma de a y b: 3 . (a + b)
6. El doble de la diferencia entre h e y: 2 (h - i)
7. El número siguiente a g: g + 1.
8. El número anterior a h: h - 1
9. El cuadrado de la suma de x e y: (x + y) 2
10. El triple del cuadrado de b: $3 b^2$
Z: Otra vez éste.
E: A ver si lo haces bien.
E: Bien.
Traduce a lenguaje algebraico las frases e ideas siguientes:
a) El precio de m discos a 760 pesetas cada uno.
m. 760
b) Lo que cuesta un lápiz, si 15 cuestan P pesetas.
15 lápices = cuestan "P" P: x
1 lápiz = costará "x"
p
x
e) El número que representa 50 unidades menos que el número h.
n - 50 = x
d) El número que es la cuarta parte del número y.
y/4
Z: ¿Qué hago?¿ lo escribo aquí?
E: Sí, sí, a ver que dice el enunciado.
Z: Que traduzca al lenguaje algebraico las siguientes ideas: El precio de m discos..
E: ¿ Qué vas a expresar?
Z: P: x, P/x
E: 0 sea, eso es el valor ¿de qué?
Z: De un lápiz.
E: El siguiente.
Z: ¿Qué hago le pongo igual a x?
E: ¿ El número es 50?
Z: No serán 50 unidades y entonces será x.
E: Bien.

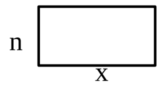
En un supermercado un kilo de peras cuesta b pesetas; un kilo de manzanas cuesta 5 pesetas más que el de peras; un kilo de plátanos 13 pesetas menos que el de peras, y un kilo de uvas 8 pesetas más que el kilo de plátanos.
Completa la siguiente tabla:

Peso	Peras	Manzanas	Plátanos	Uvas
1 Kg.	b	b + 5 b - 13	(b - 13) + 8	
2 Kg.		2 . (b + 5) = 2b + 10	2{(b - 13) + 8}	
10 Kg.				10{(b - 13)+ 8}

E: Calcular el peso de 2 kilos de uvas y de 10 kilos de uvas.
E: O sea, tú vas a calcular el peso de 2kg de uvas ¿no? y de 10 kg de uvas?
Z: 2.(b-13) + 8 y10 (b - 13) + 8.
E: Y esto ¿ cuánto sale?
Z: ¿Esto?
E: Eso es el doble de b - 13 y luego sumándole 8 - 1 0 veces b - 13 sumándole 8; ese sería el precio de 2 kg y de 10 kg.
E: ¿ Qué otro ejemplo podría poner tú ahí?
Z: 6 y 12.
E: 6 y 12. ¿no podría ser la solución esa?
Z: No.
E: ¿Por qué?
Z: Porque la base es el doble de la altura.... ¿ es que yo no sé las dimensiones del rectángulo? Expresar la base y la altura de cualquier rectángulo cuya base exceda en 5 unidades a la altura: la base y la altura difieren en 10 unidades.

Base = x

Altura = n

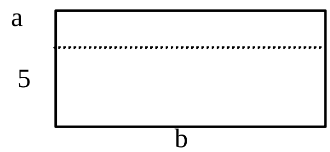


x + 5 = n
x-n= 10

E: ¿Hay alguna relación entre "n" y "x".
Z: Porque la base es 5 veces mayor que la altura.
E: ¿Es 5 veces mayor?
E: La base más 5 es igual a "n" ; la altura.
Z: x-n = 10.
E: O sea, que aquí la base + 5 es igual a la altura.
Represéntalo ahí a ver como te quedaría.
E: ¿Qué piensas poner?
Z: Ésta la segunda.
E: La segunda.
Z: Sí, x - n, x + 5.
E: ¿ Qué es más larga la base o la altura?
Z: La base. No entiendo el problema.
E: ¿Qué es lo que no entiendes?, ¿qué altura tiene el rectángulo? ¿qué quiere decir difiere? ¿cuánto tiene que valer la altura?
Z: La base - 5; me daría cero porque se la altura es x + 5....

Representar (a + 5). b; (x + 3).2; (y + e) . 3, mediante rectángulos, y utilizar un cuadro de doble entrada.

x	b
a	a . b
5	5.b

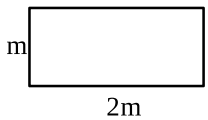


E: ¿Te acuerdas del cuadro de doble entrada?
Z: A ver ... ¿el cuadro de doble entrada?
Z: 5 y a.
E: ¿ También 5 y a?¿ eso es lo que expresa aquí?, ¿aquí qué dice?
Z: b
E: ¿Cómo te quedaría entonces?
Z: Me quedaría a. b y 5 . b
E: Y mediante rectángulo; utilizar un cuadro de doble entrada, el cuadro de doble entrada es ese ¿no?¿ cómo te quedaría con rectángulos? eso mismo, ese ejemplo mismo.
E: ¿ Este rectángulo?
Z: Sí, ya lo has representado con el cuadro de doble entrada ¿lo podías representar con rectángulo? ¿Esto en qué se parece a un rectángulo? Dibújalo a ver, a ver que le puedes poner ahí para que responda a esa expresión. Dibuja un rectángulo a ver si lo puedes poner. A ver si se parece en algo a eso. Ese “a” y ese"5" ¿dónde pueden estar? ¿No te sale?
Z: No.
E: ¿Y cómo representarías (x + 3). 2, qué quiere decir eso?
Z: Que el 2 multiplica a la x y al 3.
E: ¿ Y eso se puede parecer a un rectángulo? ¿No te acuerdas?
E: A ver si eres capaz de representar un rectángulo. ¿Te acuerdas cómo se representaba?
¿Cómo representas a (a + b)?
Z: No me acuerdo.
E: No te acuerdas.
Z: No

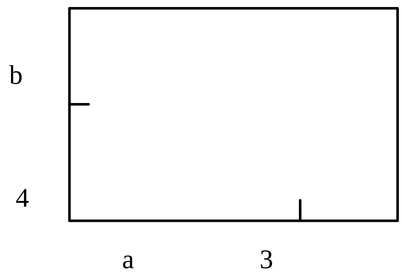
Escribe los siguientes productos:
a) a . (b + 5) = a.b + a.5
b) (a + 3) (b + 2) = a.b + a.2 + 3.b + 3.2
c) (a + b) (a + b) = a.a + a.b + b.a +b.b = a2+ ab +ba + b2 =a2 + 2ab + b2
d) (a + b + 3) (a + b + 3) =
E: ¿Eso puede ser algo más ?arriba, ahí, ahí.
E: a b ¿qué significa Zeben? cuando yo tengo a b ¿qué significa cuando yo tengo la expresión a b ¿ cuándo yo tengo las dos letras unidas qué significa? sumarla, restarla..

Z: Multiplicar.
E: ¿Multiplicar? ¿ Y por qué pones b2?
Z: Porque b.a es lo mismo que a.b.
E: Sí, entonces ¿es por el cuadrado? ¿es el cuadrado?
Z: ¡Ah! que está sumando, es 2ab.
E: 2ab, ese no hace falta que lo hagas, ¿Y esto se te parece ahora a esto?
Z: Sí, son iguales.
E: Son iguales, entonces aquí está representando un rectángulo ¿no? entonces no te da la luz para ver cómo representas éste por ejemplo, igual que está representado este aquí.

Un rectángulo tiene una altura "m” Si la base es doble de la altura:
a) ¿Cuánto vale el perímetro?: 2m + 4m = 6m
b) ¿Cuánto vale el área?: 2m.m =2m ^{2}



E: ¿Por qué 4m?
Z: 2m + 2m.
E: Y eso ¿ se puede representar de otra manera? ¿ 2m + 4m?
Z: Sí, 6m
E: Y el otro ¿el área?
Z: ¿Cuánto vale el área? b . a = 2m . m
E: Que es igual ¿no?
Z: Igual a 2m2.
E: Muy bien.
Calcula el área de las siguientes figuras:
d)



A = b . a = 3 + a . 4 + b = 12 ab = 3 a + 4 b

E: Haz éste solo.
Z: Es un cuadrado ¿no?
E: Un cuadrado, no tiene porqué ¿no? porque 4 y 3 parecido, o rectángulo próximo ... para ser un cuadrado tenía que ser: 4 + b = a + 3 ¿no?
Z: i Ah!. Sí.
Z: 3a + 4b.
E: Eso ¿qué es?, ¿el área?
Z: Sí.
E: ¿Cuánto vale la base del área?
Z: 3a.
E: 3 a, 3 veces a ¿ Y la altura?
Z: 4b.
E: 4b, ¿4 veces b?¿ Por qué pones + 4 + b ?¿ qué estás calculando?
Z: El ab.
USANDO EL LENGUAJE ALGEBRAICO REPRESENTA ESTAS SITUACIONES. RECUERDA QUE TIENES QUE UTILIZAR LETRS PARA REPRESENTAR LOS DATOS DESCONOCIDOS.
1. En la clase de Matemáticas, Juan hizo tres ejercicios más que Maribel, y Sandra un tercio de Juan.
Juan = 3 + x
Maribel = x
Sandra = (3+x)/3
E: Ese es parecido al de los boliches, al de los paquetes...
Z: Juan = hizo 3 ejercicios más que Maribel, Sandra = tercio de Juan.
E: Tú cuando trabajas con álgebra ¿mantienes todas esas letras?

Z: ¿Así?
E: ¿Ya está? Mira a ver ése.
2. Pilar tiene 5 pesetas menos que Sergio y Fermin tiene el doble que los otros dos juntos.
Pilar = x - 5 ptas
Sergio = x ptas   2x - 5
Fermín = 2 (2x - 5)
E: Puedes empezar por cualquiera, por el que tú quieras. x - 5 ¿por qué? ¿ el doble de Pilar?
Z: Porque aquí represento entre Sergio y Pilar...
E: ¿Cuánto?
Z: Porque si Pilar ... a ver... Pilar tiene 5 ptas menos que Sergio...
E: ¿ Qué significa eso de los otros dos juntos?
Z: Entre Sergio y Pilar juntos.
E: ¿Y cuánto tienen entre Sergio y Pilar? ¿ x -5?
Z: 2x - 5
E: Entonces...
Z: 2 (2x - 5)
E: Perfecto.

Alumno Z. Sesión 3ª.

A: Representa con la Balanza:
1. Añadiéndole 3 kilos al peso de una lata de pintura, el peso es 9 kilos.
E: La balanza está aquí ya ¿no?   Ya la tienes dibujada y todo.
Z: 9 kilos cada lado ¿no?
E: ¿Qué te parece a ti por lógica que significa eso?
Z: Bueno así, ¿no?
E: ¿Y eso qué es? ¿Dónde está la lata de pintura?
Z: Esta, no pero yo hice 2 pinturas ¡Ah! una lata, sería entonces la lata pesa 6 kilos, le añado una de 3...
E: ¿Pero eso es lo que dice el enunciado que representes? Tu imagínate que tienes la balanza con 2 platillos y vas a representar esa situación. ¿Te quedaría así?
Z: No.
E: Pues a ver si te explicas... porque ahí tú has representado igual ¿no? las pesas que la lata de pintura pero si tú piensas que tienes esa situación en el laboratorio o la ferretería.
E: Pero ¿cuál es la lata?
Z: Ésta.
E: ¿Y qué? pero si tú lo ves así, pero no, lo explicas, como se sabe que es la lata.
Z: La de 6 kg. la lata y le añado 3.
E: Y lo mismo que si fuese la pesa de 6 kilos ¿lo representas igual?
Z: Sí se supone que pesa 6 kilos.
E: Vale exprésalo ahora aquí.
Z: El triplo del peso de un libro más 2 kilos es 5 kilos.
E: ¿De dónde estás sacando eso?
Z:.3x; x = peso de un libro.
E: ¿Y eso es representar en la balanza esto que está escrito?
Z: ¿Cómo?
E: ¿Que si esto representa la situación? Léelo otra vez y vete confrontando lo que está escrito con lo que está representado.
Z: El triplo del peso de un libro más 2 kilos o dos de un kilo es 5 kilos.
E: Eso es lo que está representado ahí.
Z: 1 kilo cada libro.
E: Sí, pero que si esto, yo no te estoy preguntando cuánto vale cada kilo, sino que si esto
representa lo que está aquí?
Z: Sí.
E: ¿Sí? ¿Esto representa 5 kilos?
Z: Sí.
E: Sí. Vuélvelo a leer. ¿Ves?, o sea que.. esto coincide con esto, esta representación? 3x+2 = 5.
Z: 3x + 2 = 5.
El peso de 2 barras de metal más 3 kilos, es 7 kilos.
E: ¿Eso representa lo de arriba?
Z: Sí.
E: Aquí dice que es 7 kilos que dice otra vez que es el peso de 2 barras de metal más 3 kilos.

Z: ¿El peso de la barra de metal más 3 kilos?
E: ¿Qué es lo que tú has explicado ahí?
Z: ¡Ah! entonces tengo que poner 7 kilos.
E: Eso es lo que dice esto ¿ o no? dice esto o dice lo que me estás diciendo ahora.
Z: Eso dice otra cosa que esto.
E. ¡Ah! ¿esto es lo que tú está representando?
Z: Pero aquí no hay un igual.
E: Sí, un igual pero un igual que se relaciona con el enunciado.
Z: Pero ahí pone 7 kilos.
E: No, porque quién te ha dicho a ti si tú no copias esto que eso vale 7 kilos.
Z: Nadie.
E: Entonces ... Ahí qué dice x + 3 = 2x + 3 ¿no? ¿ y el problema qué decía? que 2x + 3 era cuanto 7 kilos. entonces sería 2x + 3 = 7.¿ Está claro?
Z: i Ah!.
E: Claro porque date cuenta que tu lo que vas a representar es esta situación entonces claro si yo te tapo esto yo quiero interpretar con esto, no te puedo entender.
Z: Vale.
E: Bueno.
4 bolsas de pastas de chocolate pesan 20 kilos.
Z: 4 bolsas de pastas...
E: De...
Z: De pastas.
E: Pastas ¿de qué? primero léelo entero.
Z: 4 bolsas de pastas de chocolate pesan 20 kilos.
E: ¿A ti te gusta el chocolate? ¿más que las papas?
Z: Yo chocolate ya no como mucho porque lo tengo aborrecido.
El doble del peso de un bolígrafo más 8 gramos es 3 veces el peso del bolígrafo.
Z: El doble del peso de un bolígrafo...
E: ¿Cambia?
Simbolizando un número de balones con “o”, representa : " la suma de un número de balones más el doble del mismo número de balones es igual a 24”.
Z: Simbolizando un número de balones con "o", representa: " la suma de un número de balones más el doble del mismo número de balones es igual a 24.
Z: ¿Aquí pongo la "o" de balones?
E: Como tú quieras. ¿Hace falta poner ahí el más? ¿Hace falta ponerlo? 0 tú pones una cosa en la balanza, o tú te pones encima...
Z: No, lo tacho. Un número de balones x, el doble del mismo número sería 2x. Es igual a 24, entonces sería “o" + “o” = 24.
E: Bien.
Resuelve la siguiente ecuación: 4x = 2x + 6
E: Esto está desequilibrado ¿no? ¿Por qué?
Z: Porque en la 2ª se supone que hay más peso que en la lª.
E: ¿Y si está desequilibrada se pone el signo igual? Porque sabes tú que hay más peso. Pues la otra no puede dar distinto ¿no?
Z: No.
E: Entonces es x ese número...
Z: Sí.
Z: El 3, 4.3 sería 12, entonces . ..aquí sería 2 ¿no? 2.3 sería más 6...
E: Sí es lo mismo. Claro pero el signo igual significa que está equilibrado.
Z: i Ah!. Sí.
E: Pero ahora date cuenta de lo que dice el enunciado. ¿Eso se corresponde con aquello?
Z: Sí 4x = 2x + 6.
E: ¿Ahora qué vas a hacer?
Z: A resolverlo.
E: Sí, ¿y con la balanza se puede resolver?
Z: ¿Cómo se resuelve con la balanza?
E :Esto estás de acuerdo que corresponde con esto ¿no? pues resuélvela como tú quieras
y después verás lo que pasa.
Z: 4x - 2x = 6; 2x = 6; x = 6/2; x = 3.
E: Bueno.

Resuelve la siguiente ecuación: x + 3 = 2x
Z: ¿Qué quiere decir esto?
E: Que 2x, dos manzanas o lo que sea, es igual a 6 kilos.
E: Y de ahí ya se saca que cada manzana vale ¿cuánto?
Z: 3
E: x = 3 ¿no? que sería lo mismo que aquí.
Luego que es lo que haces tu aquí, tú le quitas ¿no? 2x a cada lado, eso que tú llamabas la transposición de términos que viene a ser, tú le quitas 2x aquí y 2x aquí, aquí lo escribes y aquí se va.
Z: Aquí puedo sumar 2x y 4b o multiplicarlo o dividirlo.
E: Sí, sí por dos miembros. A ver el siguiente. A ver si lo resuelves aquí.
Z: ¿Aquí?
E: Sí.
Z: x + 3
E: ¿Qué puedes hacer ahí?   Sin que se altere la balanza. Tienes la balanza en equilibrio.
Z: Se quita de aquí 1 kilo.
E: Un kilo ¿aquí hay kilos para quitar?
Z: De aquí.
E: ¿Y le puedes quitar a un lado "si" y a otro "no"?
Z: Sí, le quito un kilo.
E: ¿Un kilo?
Z: Luego aquí le pongo dos.
E: Sí.
Z: Y aquí....
E: ¿Qué es eso? ¿qué estas pintando? ¿por qué pones 3x?
Z: Porque le había sumado 2.
E: ¿Le vas a sumar 2 a los dos?
Z: Sí, abajo el 2, arriba el 2; 1 y l.
E: ¿Y ahora?
Z: Y ahora =
E: ¿Qué puedes hacer ahí? ¿qué operaciones puedes hacer en esos dos platillos de la balanza para que no se estropee la situación?
Z: Quitarle 2.
E. Pues a ver .... le quitas 2 ¿a cuál?
Z: 2 de aquí y 2 de aquí.
E: Y ahora tenía 4x y le quitaste 3x también ¿no? escríbelo...
Z: 4x.
E: ¿Te das cuenta ya cómo se parece la balanza con esto? ¿Tú otras veces no lo habías hecho así? A ver ... vamos a hacer la última, pero sólo una, elige la que quieras.
Z: ¿La que yo quiera?
E: Sí.
Hallar la solución de las ecuaciones siguientes:
b) 2x+3= 5x
Z: 2x+3 =5x
E: Tú imagínate... o vete haciéndolo como si tuvieras la balanza ahí al lado, a ver qué es lo que hacías.
Z: 5x = 2x + 3
5x - 2x = 3
3x = 3
x = 3/3
x = 1
Le doy la vuelta.
E: Sí, ¿y qué sería en la balanza darle la vuelta?
Z: Coger el peso de uno ponerlo en el platillo y coger el peso del platillo y ponerlo encima.
E: ¿Y cuando tú pones aquí 5x - 2x eso qué es lo que sería en la balanza?
Z: Pues restarle 2x a cada uno, a cada platillo.
E: A cada platillo ¿no es eso? pon aquí la expresión quitándole a cada uno como si tuvieras en la balanza, que es lo que tú haces intermedio ¿no?
Z: 2x + 3 - 2x = 5x - 2x.
E: ¿Eso sería el 2º miembro o el 1º? Bueno dale la vuelta que da lo mismo.

Alumno Z. Sesión 4ª.

Z: Aquí lo represento con rectángulos ¿no?
E: Claro, es una representación geométrica.
Z: x + 3 y después igual a 2x.
E: ¿La x tiene que ser igual en el uno, y en el otro?
Z: ¿Eh? Sí.
E: Tiene que ser igual, otra cosa es que la dibujes más o menos, pero tiene que ser igual, ¿no? Mira a ver el último de abajo por ejemplo.
Z: 3x + 2.
E: ¿Eso qué es?
E: ¿Y 2?
Z: Eso que dice ahí 3.
E: Pero espera ese 3 y ese 2 ¿qué pasa? mide mucho más el 2 que el 3. ¿Cómo es eso?
Z: Lo tacho 3x.
E: ¿Y el uno puede ser más grande que el 2?
Z: No, pero es que no sé.
E: A qué tiene que ser igual esa cantidad equivale a l.
Z: A la unidad.
E: Sí pero en este dibujo, a qué tiene que ser igual, si lo hiciera, bien con la regla y todo.
Z: A la unidad.
E: A cuál unidad, cuál es la unidad aquí. Cuánto mide aquí la unidad, dónde está puesta, dónde está representada, cuando tú dices 3 aquí, ¿qué significa? ¿3 qué?
Z: 3 unidades.
E: Por eso te estoy preguntando que si el 1 .... hasta dónde quedaría más o menos, más aproximado.
Z: Un poco menos.
E: Claro, ¿ves?
Z: igual a 5.
E: ¿También tienen que ser iguales las unidades o no?
Z: Sí.
El precio de 2 lápices más 8 pesetas es 3 veces el precio de un lápiz.
Z: El precio de 2 lápices ¿qué lo hago con balance y eso...?
E: ¿Qué dice aquí?
Z: Geométrica.
E: ¿Y allí?
Z: Algebraica.
E: Sabes lo que significa ¿no?
Z: 2x + 8 pts.
E: A ti siempre que te dan un ejercicio ¿empiezas por lo algebraico?
Z: Después lo represento.
E: Vale.
Z: Es que no me ponen el enunciado del problema, sino que ponen la expresión 2x + 8
E: ¿Por qué la haces tan chiquitita? ¿cómo has representado la otra?
Z: ¿Esta?
E: Sí ¿cuál es la unidad ahí?
Z: Ésta, es que si la hago grande ...
E: Bueno, bueno.
E: Tienen que ser las "x" iguales ¿no?
Z: Sí.
E: Mira a ver con aquel.

El triplo del número de discos de un cantante más 4 es 7 veces el número de discos.
Z: El triplo del número de discos...
E: ¿Siempre lees por partes el problema?
Z: El triplo del número de discos....
E: Bien este no hace falta que lo hagas porque ya lo sabes hacer. Lo que sí te aconsejo que leas entero el problema para que después no tengas que decir coma o no coma.

Resuelve la siguiente ecuación: 4 x = 2 x + 6
2 x = 6x = 6/2   4 x = 2 x + 64 x - 2 x = 62 x = 6x = 6 / 2x = 3

Z: Resuelve el siguiente...
E: ¿Hay alguna diferencia entre estos enunciados ¿Qué diferencias ves?
Z: Ninguna, ahí lo tiene más desarrollado.
E: Ninguna.
Z: Aquí me pide $3x + 4 = 7x$.
E: ¿Y aquí qué tienes que buscar?
Z: El valor de la incógnita.
E: ¿Y aquí?
Z: Representarlo.
E: ¿Es lo mismo todo?
Z: No.
E: Aquí te pide cuánto es el número de discos del cantante. Aquí es diferente, o sea aquí sólo es expresarlo y ahí es resolverlo.
E: ¿Te parece que eso lo hiciste ya?
Z: Sí.
E: ¿En qué?
Z: Igual, haciendo la balanza lo puedo resolver. ¿Hago la balanza?
E: Mira a ver lo que te pide ahí.
Z: ¿Termino el resultado ahí?
E: Más arriba porque si lo vas a resolver ...
Z: Ahora al resolverlo le sumo 2.
E: Le sumas 2 ¿a quién?
Z: A cada término.
E: ¿Tú le sumaste algo? ¿Tú le sumaste 2 ahí?
Z: No.
E: ¿Qué es lo que tiene en común ésta y ésta? ¿Tiene algo en común?
Z: Sí, el 2x.
E: ¿Entonces, qué hiciste tú aquí?
Z: Quitar 2x.

17.2 Transcripciones de las entrevistas. Segunda fase. Septiembre 93.

Alumna A1. Sesión 1ª. (E: Entrevistadora; A: Alumna/o).

(La alumna escribe su nombre y apellidos al principio de la hoja)

E: Vete leyendo... léelo en voz alta... actividad 1... escribe las operaciones... ¡lee, lee, lee el enunciado!...

A: Actividad 1. Escribe las operaciones siguientes en el lenguaje algebraico. El doble de m... sería 2m.

E: "¡mm!"... (afirmando).

A: El cuadrado de la suma de x e y... $(x+y)^2$... El cuadrado de z... sería z^2... El producto de a, b y c... a·b·c ... El precio de x kilogramos de papas a 75 pesetas el kilogramo... "¡mm!"... x·75... El doble de la diferencia entre...e...

E: ¿Entre?

A: Entre h e i... 2·(h·i)... Un número cualquiera...x... La tercera parte del número f...F/3 ...

E: ¿Por qué pones esa efe mayúscula ahí? .. ¿es lo mismo? ..

A: No... yo que sé... (la alumna corrige la F por f)... El triple de un número cualquiera... 3·x... La suma de tres números distintos cualquiera...

E: Cualesquiera...

A: a+b+c... Actividad 2... la paga que da un padre a un niño cada semana es de "p" pesetas, ¿cómo expresarías el dinero que reúne ese niño durante 6 semanas? .. "¡mm!"... sería 6·p = x...

E: ...¿Cómo sabes que es "p"? .. p no puede ser porque si es p no puede ser 6p igual a p... entonces te daría... bueno, sí puede ser si le das una peseta... una peseta o un duro...

A: Actividad 3: ¿Cómo expresarías el precio de "x" cintas de cassettes a 750 pesetas cada una? .. (La alumna escribe x)... ¿Pongo cintas? ..

E: No... como tú quieras...(La alumna escribe x = 750)... ¿Cómo x es igual a 750? ..

A: x cintas...

E: Pero lee el enunciado a ver qué te dice...

(La alumna lee el enunciado)

E: ... y eso ¿qué significa x = 750... qué significa?

A: ...que x cintas son 750...

E: ¿Sí? .. o sea... que si tú vas ahí a Discos Manzana y compras 7 cintas te salen 750 y si compras 70 te salen 750...

A: No... x cintas...

E: ...o cintas o bolígrafos o lo que sea... rotuladores o cartapacios... ¿cuánto te cuestan 20 cintas cassettes a 750 pesetas? .. ¿cómo lo expresarías?

A: No sé... pues...

E: ...x ¿qué significa? ..

A: ¡Ah! cada una... cada una... (La alumna escribe 750·x)...cada...cada cinta ¿no? ..cada cinta 750...

E: Exacto... (La alumna tacha lo que había escrito anteriormente).

A: Actividad 4. ¿Cuánto gasta un niño que compra "y" cromos a 50 pesetas? ..

(La alumna escribe y·50 = x)

A: Actividad 5. a + 3 puede ser escrito de forma más simplificada como 4a. Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible... 2a + 5a = 7a... 2a + 5b = 7ab...

E: ¿Por qué 7ab?

A: ...o se quedaría así...

E: O será una cosa o será la otra... ¿son equivalentes 7ab a quedarse así? ..

A: ...es que como no tienen la misma parte b que a...

E: Entonces que... ¿se puede hacer algo con ella si no tienen la misma parte b que a? ..

A: No...

E: ¿Entonces?

(La alumna tacha lo que acaba de escribir)

A: ¿Qué pongo 2a...?

E: Sí, sí...

(La alumna escribe 2a 5b)

E: ¿2a por 5b pone ahí?

(La alumna corrige, 2a + 5b)

A: "¡mm!"...sería... "¡mm!"...2a + b...

E: "¡mm!" (Afirmando).

A: "¡mm!"... 2a + 5b + a... 3a + 5b... (a - b) + b...sería a - 2b...

E: ¿Por qué - 2b?

A: Porque aquí sumas + b y se van sumando los...

E: Ahí... ¿cómo quitarías el paréntesis? .. Quita el paréntesis aquí, aquí detrás (refiriéndose a otro ejercicio)...a ver que te daría... sí, quita el paréntesis... ¡aquí, aquí, aquí en este renglón!... (La profesora le indica con una flecha donde tiene que escribir)... si tú quitas el paréntesis ahí...

A: ¿Qué pongo? .. a - b + b...
E: ¿Cómo que - b? .. ¡aquí, en éste, en éste!
A: ¡Ah! ¿en éste? ..
E: Sí, en ese...
A: a + b + a
E: ...y esto... te quedaría igual a esto ¿no?
A: Sí.
E: 2 a + b...quítale aquí el paréntesis, a ver... (señalando al último ejercicio que había hecho).
(La alumna escribe a - b + b)
E: ...y, ¿es lo mismo que lo que tú pusiste antes?
A: No... sería 2 por b...
E: ¿Por qué 2b?
A: Porque se suman...
E: ¿Por qué se suman? ..
A: Porque tienen... el signo +...
E: ¿Sí? y esto entonces ¿no pinta nada? .. ¿no significa nada... así sin paréntesis? ..
A: Son diferentes... nada más...
E: ¿Cuánto es -3 + 3, -8 + 8, -20 +20, -9 + 9?
A: Cero...
E: ...y ¿-b + b?
A: Cero...
E: ...y ¿entonces? ¿por qué estás diciendo todo eso? ..
A: Entonces sería a + 2b...
E: No sé, no sé... tú pon lo que tú creas... no sé...
(La alumna tacha + 2b)
A: Yo creo que es a + b... para que pudiera dar cero... "¡mm!"... Esto
sería multiplicando ¿no? ..
E: "¡mm!" (afirmando)...
A: ¿No se puede sumar? ..3b - ab + ab...
E: ¿Cuánto es?
A: ...esto se resta... quedaría 3b...
E: ...a ver éste...
A: "¡mm!"... a + b... ab + a... a ver...
E: ¿Tú de dónde has sacado ese ab?
A: ...de aquí... a + b...
E: Pero, y ¿no quitas los paréntesis primero?
(La alumna tacha lo que escribió y ahora escribe 2a + b + a + b + a)
E: Pero ¿así quitas el paréntesis ese con el signo + ? .. ¿cómo se quita el paréntesis ese con el signo + ? ..
A: Cambiándole el signo...
E: ¿Por qué? ..
A: Porque está delante de un paréntesis y si le dejas el signo - no...
E: ..tanto si es un signo + como un signo -...
A: Sí.
(La alumna escribe (a + b) + a - b)
E: ...y el otro paréntesis primero... ¿no se puede quitar?
A: No...
E: Mira a ver éste... "¡mm!" (afirmando).
A: "¡mm!"...
(La alumna escribe 3a - b - a = b - 2a)
E: ¿Por qué -2a?
A: Porque estoy restando...
E: ¿Qué resta... qué resta hiciste?
A: Ésta...
E: ¿Cuál, cuál? .. ¡dilo, dilo!... ¿Qué has restado tú? ..
A: 3a - a
E: ...y ¿3a - a es igual a a - 2a? ..
A: Sí, porque restas 2a...
E: ...y ¿te da - 2a? .. a 3a le quitas una a y te queda - 2a...
(La alumna corrige y escribe = 2a - b)
A: 2a - b...

E: ¡2a - b!... eso sí... ahora éste (señalando a otro ejercicio). (La alumna escribe 2a)... ¡a ver éste! (señalando a otro ejercicio)...
A: "¡mm!"m...
(La alumna escribe 6 + 3a - 3 = 3 + 3a y se pasa a la siguiente hoja).
E: Vete mirando esto que es teoría... Cada vez que aparece un número sólo o una letra sola, la representaremos por un rectángulo...
(La alumna lo repite).
A: Ah... es el ejemplo... iba a decir... qué hago yo aquí... Representa con rectángulos... ¡ay, Dios! ... no traje la regla...
E: No, no hace falta...
(La alumna representa con rectángulos el apartado a y el b)
E: ¿Se pueden representar de alguna otra manera?
A: Sí.
E: ¿Y aquélla? .. ¿esta distancia tiene que ser igual a ésta?
A: No, si es x no...
E: ...y en este mismo problema ¿tampoco? ..
A: Eehh... la x no pero parece cualquier...
E: Sí, pero quiero decir que... esto, si yo por ejemplo en vez de poner esto pongo esta x y esto 1... ¿representa lo mismo que esto? ..
A: Sí... Cada vez que aparece un producto de dos factores, lo representaremos también por un rectángulo... ¿éste que es... ya el ejercicio? ..
E: Sí, muy bien... léelo... o sea, que según tu idea... yo aquí, como la z no sé cuánto vale, aunque aquí la z valga esto yo no puedo poner esto más tarde...
A: Claro, porque no sabes...
E: En el mismo problema...
A: Sí... no sabes...
E: ...Aunque la z sea la misma en el mismo problema...
A: No, porque z... si se representa como una medida exacta porque esto es z, ya no lo podrías poner en el medio... entonces no sería la misma z...
E: "¡mm!" (afirmando)... que es lo mismo que aquí...
A: Sí, sí...
E: Entonces qué... ¿se puede o no se puede?
A: No, no se puede...
(La imagen se corta y ya la alumna ha comenzado a hacer la actividad 1 de la página 3)
E: Bueno...
(La alumna continúa con la actividad 2)
A: ¿Son iguales? ..
E: ...y esa b de abajo ¿qué es? .. ¿esta b qué es? .. (La alumna tacha esa b) ...eso ¿qué medida tiene que tener? ..
A: 1.
E: 1... y este 1 y este 1 ¿son iguales?
A: No.
E: ¿Por qué?
A: Porque este mide más que este...
E: Pero ¿tienen que ser iguales? ...
A: Sí...
E: ...o sea... ¿que aquí la unidad puede valer esto porque pertenece al 4 y aquí la unidad puede valer esto porque pertenece a b? .. No te rías... Sí... aquí, aquí 4 · 1 has puesto ¿no? .. y este uno vale este trocito, la unidad...
A: "¡mm!" (afirmando).
E: ...y aquí has puesto b · 1 y aquí la unidad vale este trozo...
A: Sí...
E: Da lo mismo... se puede poner este 1 que valga este trozo y esta unidad que valga este trozo...
A: Sí...
E: ¡Sí!...
(La entrevistadora señala al siguiente ejercicio).
A: ¿Son iguales? .. No...
E: ¿Por qué?
A: Porque... porque en uno multiplicas y en el otro sumas...
E: No hace falta que lo escribas... porque ya sé que me lo dijiste... a ver éste, por ejemplo... observa éste... representamos ahora... 2 · x + 6...
A: ¿2x + 6? .. pero si ya está representado...

E: Por eso, para que lo observes... ¿Y éste, y éste...ya lo has mirado? .. ¡No!... pues tienes que mirarlo...
A: He mirado éste...
E: Por eso... sigue leyendo 2x + 6... a ver las otras representaciones... Son cuatro representaciones del mismo...
A: ¡Ah!... 2x...
E: ¿Te das cuenta cómo son? ..
A: "¡mm!" (afirmando).
(La alumna pasa al apartado b de la actividad 1 de la página 4).
E: ... y aquí ¿la y cuánto vale? ..
A: ¿La y? ..
E: ¿Eh? ..
A: No sé...
E: No sabes... y aquí la representas con la misma... ¿aquí no vale 1 en el dibujo que tú has puesto? ..¿no lo has representado como si valiese 1? ..
A: Sí...
E: ¿Podría ser de otra manera la representación?
A: Sí, sí...
(La alumna hace otra representación).
E: ...o sea... que podría valer 1 pero no necesariamente lo tiene que valer ¿no? .. mira a ver éste... (refiriéndose al segundo apartado (a) de la actividad número 2)
(La alumna hace un comentario).
E: ...y ¿de qué otra manera se podría representar?
A: "¡mm!"m...
(La alumna hace otra representación)
E: "¡mm!" (afirmando)...
(La profesora pasa a la siguiente hoja).
E: ¿Qué te quedaría en el primero? ..
A: ¿En el primero? 12... en el segundo me quedaría 9n ¿no? .. sería...
E: Sumándole n + 5 + 4 ¿te quedaría 9n? ..
A: No, no...¡n + 9!
E: ¡Fíjate Aída!... si te fijas... lo sabes bien...
(La alumna le suma 4 a todos los enunciados pero al primero no)
A: 3n + 4... 3 por n + 4...
E: 3n + 4...
A: 2n + 8...
E: Aquí tenías que poner... si esto lo vas a poner aquí el sumar 4... tendrías que sumarlo aquí también porque si no... no tiene sentido...
(La alumna escribe + 4 al lado del primer enunciado)
A: n multiplicado por 4 se puede escribir como 4n. Multiplica por 4 cada una de las siguientes expresiones...
(La alumna escribe los resultados de los dos primeros ejercicios añadiendo ·4 a los enunciados)
E: Aquí el 4 ¿lo multiplicaste por la expresión?
A: Lo multipliqué por... por 5... ¡ah! sí, sí...
E: ¿Por 5 lo multiplicas? ...¿qué es lo que te dice que multipliques por 4?
A: "¡mm!"... la expresión...
E: ¿Y cuál era la expresión?
A: n + 5...
E: ...y ¿por qué n + 5 entonces para multiplicarlo por 4 sólo le multiplicas el 5? ..
(La alumna corrige).
A: 4n... ¿es como si pusieras paréntesis? ..
E: "¡mm!" (afirmando)... pero ¿obligatoriamente tendrías que usar paréntesis?
A: Sí,..."¡mm!"... por 4 ¿no? .. 12n... 8n + 16...
E: ...a ver éste...
(La alumna hace el apartado d de la actividad 3)
E: ¿Por qué - 3a?
A: Porque tiene un signo - delante...
E: Oh!, pues... siempre que estés restando tendría que tener el signo - y... ¿6 - 3 es -3? ¿y 8 - 4 es -4? .. ¿Por qué está restando? .. ¿y 6a - 3a es -3a porque está restando? ..
(La alumna corrige lo que ha escrito después del =)
E: Porque 5 - 4 entonces tendría que ser -1 porque está restando...
A: Sí... eehh... 6 + 5...
E: ¿Qué es lo que puedes agrupar ahí, asociar? ..

A: El 6a y el 3a...
E: Bueno y ¿cuánto es 6a - 3a?
A: 3a...
E: ¿y 5 - 4?
A: 1...
E: ...a ver el último...
(La alumna escribe y dice en voz alta 3a + 5b - 4b - 5 = 3a + 9b - 5)
E: ...y ¿se puede hacer algo más?
A: ...que yo sepa no, porque ya no tiene nada más...
(Se ha pasado a la hoja 6)
A: ...lo de fuera...
E: Lo que mide el contorno...
A: Sí...
E: La medida del contorno...Pues venga ¿cuánto te quedaría? ..
(La alumna hace el ejercicio y escribe $6^2 \cdot n^2$)
E: ...y la medida del contorno es ¿6^2? ¿y n^2? ..
A: Sería 12 n^2 porque n ya...
E: ...y ¿por qué lo multiplicas 12 n^2 ? .. ¿Tú no me acabas de decir que es la medida del contorno? .. y la medida del contorno es...
(La alumna escribe leyendo en voz alta 6 + 6 + n + n y tacha lo anterior)
E: ¿Cuánto es?
A: 12 + n^2 ¿no?
E: ¿n + n es n^2?
A: n + n... 2n...
E: Eso es otra cosa... ¿y entonces? eso no puede quedar así... tendrías que poner un igual tal, tal, para que la expresión sea correcta...
(La alumna escribe 12 + n + n = 12 + 2n, luego hace el apartado b y escribe 2x + 2y)
E: ...no lo escribas sino dilo... ¿cuál sería el perímetro de esa figura? ..
A: 18... 22...
E: ¿Por qué, por qué 22? ..
A: 9 y 9... 18... y 4... 22...
E: Vale... a ver éste, por ejemplo...(señala al apartado g)
A: "¡mm!"m... sería 20... 32 + 2 · v...
E: ...¿y aquí? (señalando al apartado f)
A: ...¿en éste?
E: "¡mm!" (afirmando)
A: Sería h + 4e...
E: Muy bien... a ver éste... calcula éste... el a...
A: "¡mm!"m... 2 · a es 2a + x + y...
(La alumna sigue haciendo el apartado b y escribe 16 + 6 + 2a = 22+2a)
E: ...a ver estos dos perímetros que me despisté (refiriéndose a los apartados h e i de la actividad 1 anterior)... ¿Cómo los calcularías? .. Date cuenta que esto es hallando el perímetro entero...
A: Sí, sí... sería ... 14 + 9... (refiriéndose al apartado i)
E: ¿Por qué 9? ..
A: 3, 3 y 3 (señalando la figura)
E: ¿Cuál es el perímetro de esa figura? ..
A: Lo hago por separado, es que yo...
E: Yo... yo necesito... o sea lo que te pido es el perímetro de esta figura, tú te vales de lo que sea...
A: ¡Ah, el perímetro!...
(La alumna tacha lo anterior)
A: ...sería... 14 + 4 + 6 = 24...
E: ¿Podría incluirse este 3 en el perímetro?
A: Sí, sí... con... si se puede separar...
E: Sí, pero si tú vas a calcular el perímetro de la figura de dentro...
A: Ahí... bueno... entonces no...
E: ...¿esto pertenecería al perímetro? .. el perímetro de la figura... a ver éste...
(La alumna realiza el apartado h)
A: 16 + 12 + 2a =
E: ¿Cuánto es?
A: Sería... 28 + 2a

(La alumna hace el apartado a de la actividad 1 de la página 7 y ha escrito $3 \cdot 4 = 12$)
A: ... porque esto iría en...
E: ...y quien te ha dicho a ti que son 3 cm. o 4 cm.? ...
A: ...o "¡mm!"... o lo que sea al cuadrado...
E: Entonces no se puede poner nada ¿no? .. sería unidades al cuadrado... a ver aquí el área (señalando al apartado b) .
A: $m \cdot n$
E: ...a ver el siguiente... fíjate que vas a calcular el área de la figura completa... tú te vales de lo que tú quieras...
A: ...de la figura completa... "¡mm!"... a ver... $12 \cdot 4$...
E: "¡mm!" (afirmando)... el siguiente...
A: Sería $6 \cdot 7$...
E: El siguiente...
A: $4 \cdot 5a$...
E: ¿Por qué 5a?
A: Porque me da... de una parte de la figura pero de la otra no...
E: ...y ¿Por qué 5a, 5...?
A: 5 + a sería...
E: ¿Y se pondría así... $4 \cdot 5 + a$? .. 4 es la altura ¿no? ..
A: "¡mm!" (afirmando)
E: Y... 5 + a la base, pero aquí si tú fueras a efectuar eso ¿qué resultado te daría? .. El 4 de la altura ... ¿tiene que multiplicar a toda la base? ..
A: Sí.
E: ¡Sí! y, ¿aquí está multiplicando a toda la base? ..
(La alumna corrige el ejercicio y escribe $4 \cdot (5+a)$)
E: No te precipites, Aída, que tú tienes mucha tendencia a precipitarte y no hay necesidad...
A: ...a ver... "¡mm!"... $(a + b) \cdot (c + 5)$...
(La alumna ha escrito en el apartado e)
E: ¿Cómo se resolvería eso? ..
A: Haciendo como una ...
E: ¡Venga!
A: $= ac + 5a + bc + 5b$...
E: 5b... ¿esto que tienes hecho aquí, se parece en algo esto? (...)
(La alumna pasa al siguiente ejercicio de la página 8 y escribe $2x + 3y$)
A: El perímetro y el área de un cuadrado de "x" metros de lado.
E: Dice x... ¡no digas mentiras!...
A: ...de "k" metros cuadrados... eehh... metros de lado...
(La alumna escribe $A = 4 \cdot k$ y $P = k + k + k + k = 4k$)
E: ¿Es lo mismo k+k+k+k que 4k?
(La alumna tacha el 4k del área)
A: Sería $k \cdot k$ ...
E: ...y ¿cuánto es $k \cdot k$? .. ¿se puede expresar de otra manera? ..
A: "¡mm!"... k^2...
E:¿Y en el siguiente? ..
A: Jaime tiene un número desconocido de caramelos y Juan tiene 8 caramelos más que él, ¿cómo expresarías el número de caramelos de Juan? .. x + 8...
E: ¿Y x quién es? ..
A: x es el número de caramelos que tiene Jaime...
E: Bueno, lo tendrás que poner ¿no? .. lo que significa x porque si no ese x + 8 caramelos... ¿cuántos tendría Juan? ..
A: ¿Cuántos tendría Juan?
E: Supuesto que Jaime sea el que tiene x+8 caramelos ¿cuántos tendría Juan?
A: "¡mm!"m... x...
E: "¡mm!" (afirmando)... Si Jaime tiene x+8 Juan tiene...¿x caramelos?
A: No...tiene 8 más que ... o sería x+8+8...
E: Bueno... no, no hace falta que lo pongas porque eso es una suposición que te he hecho yo... a ver aquí, por ejemplo, el perímetro de éste... el de éste es fácil ¿no? .. ¿cuál sería el perímetro de éste? .. (señalando el apartado a de la actividad 3).
A: Sumando todo... sería 6+18... sería 30... 44...
E: Bien... ahora aquí... (señalando el apartado b).
A: $(2+x) \cdot (m+4)$...

E: ¿Qué estás calculando?
A: El perímetro...
E: ¡Ah! no, no... sería el área...
(La alumna tacha lo que había escrito)
E: ... a ver... ¿cuál sería el perímetro? ..
A: 2 · (2+x) + 2 · (m+4)...
E: Y el área, por ejemplo, de ésta... (señalando al apartado b de la actividad 4)... el área...
A: 4 · (4+m)...
E: Sigue, ¿cuánto es? ..
A: ...16+4m...
E: Vale, ¿entonces? ..

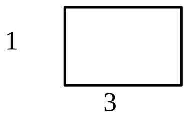
Alumna A2. Sesión 1ª.

A: Actividad 1: escribe las operaciones siguientes en lenguaje algebraico:
1. El doble de m... 2m
2. El cuadrado de la suma de x e y...
E: Léelo otra vez a ver que dice.
A: ¡Ah! el cuadrado de la suma de x e y... $(x + y)^2$...
3. El cuadrado de z... z^2
4. El producto de a · b · c... a × b × c...
E: ¿Eso se podría expresar de otra manera?
A: Sí.
E: ¿Cómo?
A: A ver... "3abc"...
E: ¿Tú crees? .. a × b × c, es lo mismo que tres veces "abc"? ..
A: ¡Ah, no! es verdad...
E: Pero digo yo que si eso mismo se puede expresar de otra manera...
A: "abc"...
E: ¿Y por qué se puede poner "abc"?
A: Porque aquí se supone que está entre medio de las letras un "por".
E: Y ahí sería igual esta expresión... a × b × c... a esta de... abc... ¿se podría poner el signo =?
A: Sí...
5. El precio de x kilogramos de papas a 75 pesetas el kg.
E: Tradúcelo eso en tu lenguaje, con tus palabras... ¿qué es lo que vas a expresar? ..
A: Cuál es el precio de tantos kilogramos que se supone a 75 pesetas el kilogramo... x · 75 pts...
E: ¿Eso se podía expresar de otra manera? .. ¿x · 75 se podría expresar de otra manera? ..
A: Sí, 75x
E: ¿Por qué significa lo mismo x · 75 que 75x? ..
A: Porque aquí se supone que está multiplicando y no hace falta ponerlo.
E: Sí, y qué propiedad es esa que te permite poner x · 75 = 75x.
A: La conmutativa.
E: ¿Y aquí se podría poner el signo =?
A: Aí, ¿lo pongo? ..
E: Sí, si quieres...
A: 6. El doble de la diferencia entre h e i... (h - i) · 2...
E: Y ahí también se podría poner de otra manera ¿no? ..
A: Sí, ¿lo pongo también? .. 2(h - i)
E: Y también se podría poner el signo =....
A: Sí... 7. Un número cualquiera... pues x, por ejemplo.
8. La tercera parte del número f... f : 3...
E: "f" dividido entre tres... ¿se podría expresar de otra manera f : 3? ..
A: Sí, f partido por tres...
E: "f" partido por tres... ¿y qué más? ..
A: ... y... a ver...
E: La tercera parte... ¿hay alguna otra expresión para decir la tercera parte? ..
A: Pues no sé, a ver... un número multiplicado por tres es igual a eso...
E: Un número multiplicado por tres es igual a eso... a ver cómo dices tú ahí... dijiste f / 3, de acuerdo...
A: Sí, f dividido entre tres... ¿y también lo escribo?

E: Sí, sí...
(La alumna escribe f / 3)
E: ¿Es lo mismo la tercera parte de un número f, que 1/3 del número f? ..
A: Sí, también.
E: ¿Es lo mismo? ..
A: Sí.
E: ¡Ah!... ¿y cómo se expresaría eso? ..
A: 1/3 de f.
E: ¡Ah!... esto sería igual: f:3 = f/3... y se podría poner también igual entonces a ...
A: 1/3 de f... sí, es verdad.
E: Ya... después...
A: 9. El triple de un número cualquiera... 3·x = 3x
E: Y aquí también le pones =...¿no? .. porque si no se presta a confusiones.
A: Sí, sí, también...
10. La suma de tres números distintos cualesquiera... A ver, pueden ser: x + a + b...
E: Bien.
A: Actividad 2... La paga que da un padre a un niño cada semana es de "p" pesetas... ¿Cómo expresarías el dinero que reúne este niño durante 6 semanas? ..
Pues... p · 6... ¿ya está? ..
E: ¿Se puede poner algo más? .. Ese p · 6, el resultado... ¿en qué sería? ..
A: En p6.
E: Sí, ¿pero en qué vendría dado el resultado? ..
A: Pues en pesetas: p · 6 = p6 pts... no, sería al revés, lo puse mal... 6p pts.
E: ¿No sabías que podía ser p · 6? ..
A: Sí.
E: Ten en cuenta que tú estás acostumbrada a poner las cosas sueltas sin el =, y eso se puede prestar a confusión... Bien...
A: Actividad 3: ¿Cómo expresarías el precio de x cintas de cassette a 750 pesetas cada una? .. Pues sería 750 por "x".
E: Muy bien.
A: Actividad 4: ¿Cuánto gasta un niño que compra "y" cromos a 50 pesetas? .. Pues... y · 50 pts.
E: Son fáciles, ¿verdad?
A: Sí, sí.
E: ¿Tú esperabas que iban a ser más difíciles?
A: La verdad es que sí.
Actividad 5: a + 3a puede ser escrito de forma más simplificada como 4a, escribe de forma más simplificada reduciendo hasta donde sea posible...
E: ¿Te acuerdas de éste?
A: Sí, sí... 2a + 5a = 7a... 2a + 5b = ... esto no se puede sumar porque no tiene la misma parte literal.
E: Entonces, ¿cómo quedaría?
A: 2a + 5b... (A + b) + a... esto no se puede sumar...
E: ¿No se puede sumar?
A: El paréntesis no se puede sumar porque no tiene la misma parte literal, entonces se quedaría así.
E: ¿Ese paréntesis afecta para algo? .. ¿Tú puedes quitar ahí el paréntesis?
A: Si se quita el "a" el paréntesis se puede sumar con el otro "a", y después sumarle el "b".
E: ¿Se puede hacer eso, hay algún factor que te impida quitar el paréntesis?
A: Es que hay que sumar lo que hay dentro del paréntesis.
E: ¿No se puede quitar el paréntesis?
A: No.
E: Donde hay una suma, ¿se quedaría igual entonces? .. ¿no hay otra manera de expresarlo? ..
A: Se supone que primero se tiene que sumar el paréntesis, pero como no se puede sumar...
E: Bueno, tú déjalo como creas.
A: No sé...
E: Tú mira otro a ver si se te ocurre algo. Por ejemplo este de debajo... ¿A éste se le puede poner un paréntesis sin que le afecte algo? .. 2a + 5b + a... ¿Da lo mismo ponerlo así que si lo pongo (2a + 5b)+ a... o esto otro 2a +(5b + a)?
A: No, yo creo que no. Aunque también tiene que ver la letra porque al tener la misma parte literal no se puede sumar... Pues no sé, yo sumaría primero (a + b)+ a ... y luego (2a + a)+ 5b = 3a + 5b... lo dejaría así, no se puede hacer más.
(a - b) + b =... estos dos no se pueden restar.

E: Lo dejas igual.
A: Yo creo que sí, es que no sé,... es que si tienes que hacer un paréntesis primero, lo tienes que hacer, pero es que al mismo tiempo tampoco se puede hacer.
E: Pero siempre tienes que hacer el paréntesis, por ejemplo esta situación... (a - b)+ b =... es la misma que esta... (3 - a) b + ab =... en (a - b) + b hay un más, y en (3 - a) b + ab hay un por... ¿es la misma situación?
A: No, pues no sé...
E: Hazlo como tú creas.
A: No sé ahora.
E: ¿Esto son dos cosas distintas? .. ¿los resultados serían distintos? .. Yo, cuando tengo por ejemplo...(3 + 7)- 8... y... 3 + 7 - 8... yo puedo hacer primero esto... (3 + 7) - 8... y luego esto... 3 + 7 - 8 ...
A: Sí.
E: ¿Y por qué aquí no lo puedo hacer? .. (a - b)+ b=... a - b + b=...
A: ¿Cómo que no lo puede hacer?
E: ¿Esto... (3+7)- 8... no es lo mismo que esto... 3 + 7 - 8 ? .. y le he quitado el paréntesis y tiene el mismo valor y entonces esto en qué se distingue, o sea, ¿esta situación... (a - b)+b=...a - b + b=... es distinta que ésta?
A: No, es igual, bueno a ver...
E: O sea, que al quitar el paréntesis cuando tengo aquí un más un menos ¿se puede hacer sin más? .. porque tú dijiste que aquí... (3+7)-8= ...3+7-8=... se puede hacer.
A: Sí.
E: Y ésta, ¿no es la misma situación que aquí? .. Bueno, si quieres lo ponemos... (a-b)- b=... a - b - b =... da lo mismo.
A: Sí, es la misma situación.
E: Bueno, mira a ver si te sirve para algo...
A: Claro que... ya, aquí si le quito el paréntesis, entonces ahora puedo sumar a+a y después le sumo la b... ya, sí, sí... (a+b)+ a =a + b + a = 2a+ b.
(a - b)+ b =
E: ¿Cuánto es (a - b)+ b = ?
A: A ver... una b restando y otra sumando se van... entonces me quedaría a nada más.
E: Pues ponlo.
A: ¿"a" nada más?
E: Si es lo que te queda... y ahora viene otro paréntesis, ¿y esa es la misma situación que ésta? .. (3-a) b + ab =...
A: Esta lo que pasa es que está multiplicando.
E: ¡Ah!
A: Entonces...
E: ¿Esa qué propiedad es? .. la diferencia con esa multiplicación.
A: ¿Cómo?
E: ¿Qué propiedad es ésta... (3-a) × b... es alguna propiedad especial?
A: La multiplicación... a ver, la conmutativa podría ser, bueno...
E: Intenta resolverla y después verás que propiedad es... ¿Cómo te quedaría efectuado ese paréntesis?
A: Es que claro, el paréntesis no se puede mezclar...
E: ¿Aquí que signo se supone que hay?
A: ¿Entre estos dos? .. (3-a) b + ab=... una multiplicación... ¡ah, claro!... (3-a)b + ab= (3-a) · b + ab = 3b - ab + ab = 3b
E: Haz este otro.
A: 3a - (b + a) = 3a - b - a = 3a - a - b = 2a - b
E: Mira a ver éste, si es más sencillo. A ver... a + 4 + a - 4 =... sería un +4 aquí, y otro -4... se irían, me quedaría sin nada, entonces me quedo con a^2 ... ¿no?
E: ¿Sí?
A: Sí, a ver...
E: ¿a+a es lo mismo que a^2 ?
A: ¡Ah, no! es verdad que es a+a, entonces sería 2a.
E: 2a... Mira a ver este ahora.
A: (a+b) + (a-b)
E: ¿Eso te suena a algo?
A: A igualdad de notable.
E: ¿Seguro? A ver... esto sería... no, no, no puede ser porque esto está sumando.
E: ¡Ah!... la igualdad de notable ¿cómo es?
A: Era multiplicando.
E: ¿Ahí se puede quitar el paréntesis?
A: No sé... bueno... Fíjate en los otros ejercicios que has hecho, a ver cuando has quitado el paréntesis, si

aparece eso.
A: Pues sí.
E: ¿Cómo te quedaría entonces?
A: Me quedaría entonces... a + b + a - b.
E: Entonces ¿después?
A: Y después me quedaría 2a.
E: Mira a ver el siguiente.
A: 6 (a+b)- 3a ... pues aquí se haría... como estos dos no se pueden sumar se haría una distributiva... sería 6a + 6b - 3a.
E: ¿Se puede reducir algo eso?
A: Sí, me quedaría 3a + 6b
E: ¿Vale?
A: Sí.
E: ¿Esa te suena?
A: Sí... Cada vez que aparece un número solo o una letra sola la representaremos con un rectángulo: Ejemplo 3, por el primer acuerdo quedaría representado así... 3 = 3·1 = 1·3 ...Ejemplo 1, por el segundo acuerdo...



E: ¿Cómo te quedaría entonces el resultado?
A: Actividad 1, representa con rectángulos... a) 2 = 2·1 = 1·2
E: ¿Y la x? ¿ésta cantidad tendría que ser igual a ésta?
A: ¿A ver? .. ¿si tendrían que ser las dos iguales? .. Sí... b) x = x·1 =1·x
E: La x vertical en este problema ¿tiene que ser igual a la x horizontal?
A: No sé.
E: Si a la x le das esta longitud para representarla de la otra manera, al girarlo ¿también tiene que ser la misma longitud?
A: Es que al ser x...
E: ¿Cualquier longitud?
A: Sí.
E: Pero en este problema, ¿esta x es la misma que ésta? .. ¿Las tres del enunciado son iguales?
A: Sí, creo que sí.
E: Si no tuvieran el mismo valor ¿se podría poner esto? .. $x^1 = x^2 \cdot 1 = 1 \cdot x^3$. Por ejemplo, si le pongo... $x^1 = 3$; $x^2 = 4$; $x^3 = 5$... ¿se podría poner esta expresión?
A: No.
E: Entonces ¿tiene que ser igual ésta a ésta?
A: Sí.
E: En el mismo problema tienen que ser iguales ¿no?
A: Sí, sí, sí... Cada vez que aparece un producto de dos factores, lo representaremos también por un rectángulo... a) 2·3 ...b) z·t.
E: ¿Está claro ya?
A: Sí.
E: Bueno, vamos a ver el otro.
A: Actividad 1... Representa 3 · x ...
E: ¿A ver el otro?
A: Actividad 2... Representa a) 4 · b
E: ¿A ver el otro?
A: ...b) 4 + b... ¿Son iguales? ¿Por qué? .. No, yo diría que no son iguales.
E: ¿Tú ves ahí que son iguales?
A: No.
Representamos ahora: a) 2 · x + 2.... b) 2 · x + 6... Quedaría representado así... a) 2 · x + 2 = 2 ·x + 2 · 1... b) 2 · x + 6 = 2 · x + 6 · 1..
E: ¿Cómo expresarías tú aquí lo que está dibujado?
A: ... 2·x + 6 = 2·x + 6·1 = 2x + 6 = 2x + 2·3 ...
E: ¿Y aquí? ¿Esas expresiones son equivalentes?
A: Sí... Actividad 1... Representa de todas las formas posibles... a) 3+4·y = 3·1+4·y... b) 6·y+3 = 6·y+3·1 ...
E: ¿De qué otra forma se puede representar eso?
A: Pues... (la alumna lo dibuja)...

E: Haz éste ahora, que estos dos son parecidos a éste...
A: ¿Éste?
E: Sí.
A: ... 2·x + 3·x... (la alumna lo dibuja)...
E: ¿Lo puedes hacer de otra manera?
A: ¿Este mismo?
E: Sí.
A: Pues... (la alumna lo dibuja de otra forma)... Actividad 1... A menudo n5 se puede escribir como 5+n. Suma 4 a cada una de las siguientes expresiones... 8... 8+4... n+5... (n+5)+ 4... 3n... (3n)+ 4... 2n+4... (2n+4)+ 4...
E: ¿Y tiene alguna otra expresión equivalente a esas que tienes ahí? Por ejemplo, 8+4 ... ¿tiene alguna otra expresión?
A: Sí, sería 8+4 = 12
E: La siguiente.
A: ...(n+5)+ 4 = 9+n... (3n) + 4 =...
E: ¿No se puede hacer nada más?
A: Podría ser +4 haciendo una distributiva ¿no?
E: ¿Distributiva?
A: ¡Ah, no! es una suma.
E: ¿Tú dices 4+3n? .. sería conmutativa.
A: Sí, pues podría sumar 4+3 y después a eso se le suma la n.
E: ¿Sí? ¿tú puedes separar el 3n...?
A: No, no, es verdad...
E: ¿Y aquí?
A: ...(2n + 4)+ 4 = 8 + 2n... Actividad 2, n multiplicado por 4 se puede escribir como 4n. Multiplica por 4 cada una de las siguientes expresiones... 8... 8·4 = 32... n+5... (n+5)· 4... 3n... 2n+4...
... n+5 = (n+5)· 4...
E: ¿Y cuánto es? ¿Ahí hay propiedad distributiva?
A: Sí.
E: Entonces ¿qué quedaría?
A: Entonces quedaría 20 + 4n... 3n = (3n)· 4
E: ¿Cuánto es?
A: Pues... podría ser 12n.
E: ¿Podría ser o tiene que ser?
A: No, tiene que ser... Y aquí sería 2n +4 = (2n+4)· 4
E: ¿Cuánto es?
A: ...16 + 8n
E: Vale, perfecto.
A: Actividad 3, calcular... c) 2·m + 6·n + 5 - 3·n = 2m + 6n + 5 - 3n = 2m + 3n +5... f) 3·a + 5·b + 4·b - 5 =...
E: Mira a ver si puedes hacer algo ahí ya. Lo mismo que hiciste aquí (refiriéndose al apartado c),... pero lo puedes hacer con la cabeza, sin necesidad de escribir, paso a paso... A ver...
A: ¡Eh!...
E: Pero vete diciendo lo que estás pensando.
A: Primero habría que reducirlos también un poco y pondría 3a.
E: ¿Qué condiciones tienen que tener para tú poderlo asociar? .. ¿para poderlo reunir para hacer las operaciones igual que hiciste aquí (refiriéndose al apartado c) para reducción de términos? ..
A: ¿”¡mm!”?
E: ¿Por qué tú cogiste por ejemplo estos dos y no este con este (refiriéndose al apartado c)... las "n" y no la "n" con la "m"...?
A: ¿Cuáles dos?
E: Tú cogiste el de 6n con 3n, ¿por qué no cogiste 2m con 6n?
A: Porque tienen que tener la misma parte literal.
E: Claro, entonces ponlo ahí.
A: Entonces yo haría aquí 3a + 5b + 4b - 5... entonces ahora haría 5b + 4b... ¿serían 9b?
E: Sí.
A: Entonces me quedaría 3a + 9b -5...
E: Bueno, pues escríbelo...
A: Actividad 1, calcula el perímetro de las figuras siguientes...
a) 6 6 ... 6 + n + 6 + n...
E: ¿Ése sería el perímetro?
A: Sí.

E: ¿6 + n + 6 + n? ¿Y cuánto sería según lo que estabas haciendo antes, 6 + n + 6 + n?
A: Pues sería 36...
E: ¿Por qué 36?
A: ¡Ah, no! lo multipliqué en vez de sumar, pues 12 + 2n.
E: Bueno, ponlo ahí... ¿Y aquí?
A: ... b) P = 2x + 2y...
E: ¿Aquí?
A: ... c) ... aquí un nueve y aquí un dos... sería P = 4+18...
E: ¿Y éste?
A: ... e)... este sería P = 3f... f)... P = 4e+k... g)... P = 2v+20+12...
E: Y éste, ¿cuánto es?
A: Pues 32+2v...
E: ¿Y aquí?
A: ... h)... serían 16+12+2a = 28 + 2a... i)... P = 6+4+14 = 24.

Alumna A4. Sesión 1ª.

(La alumna escribe su nombre y apellidos)
E: Vas leyendo... sobre todo es importante que todo lo que vayas pensando, lo vas diciendo... y se quede allí grabado...
A: Escribe las operaciones siguientes en lenguaje algebraico... el doble de m...
E: Vete haciéndolo... como tú creas que es...
(La alumna escribe 2m)
A: El cuadrado de la suma de x e y... (la alumna escribe $(x+y)^2$)... el cuadrado de z... (la alumna escribe z^2)...
E: Es fácil ¿no? ..
A: El producto de a, b y c... (la alumna escribe a·b·c)... el precio de x kilogramos de papas a 75 pesetas el kilogramo... (la alumna escribe 75·x)... el doble de la diferencia entre h e i... (la alumna escribe (h-i)·2)... un número cualquiera... (escribe z)... la tercera parte del número f... (escribe f/3)... el triple de un número cualquiera... (escribe 3·a)... la suma de tres números distintos... distintos cualesquiera... (escribe z+b+h)...
E: Venga... (la imagen se corta)
A: ...pesetas, ¿cómo expresarías el dinero que reúne ese niño durante seis semanas? .. (la alumna escribe 6p)... actividad 3... ¿Cómo expresarías el precio de "x" cintas de casete a 750 pts. cada una? .. (escribe 750x)... actividad 4... ¿Cuánto gasta un niño que compra "y" cromos a 50 pts.? .. (escribe 50y)... actividad 5... a+3a puede ser escrito de forma más simplificada como 4a... es...
E: ¿Estás de acuerdo con eso... que a+3a es 4a ?
A: ...sí... Escribe de forma más simplificada, resumiendo hasta donde sea posible...
E: ...¿Resumiendo dice ahí? ..
A: ...reduciendo... (la profesora se ríe)
(La alumna hace los dos primeros ejercicios).
E: ¿Por qué 7ab? ..
A: Bueno... no... sería 2a+5b..
E: ¿Por qué?
A: Porque no hay... en ésta no hay b... en ésta no hay b y en esta no hay a...
E: Táchalo, no pasa nada... (la alumna lo tacha)... ponlo bien... entonces, ¿cuál sería el resultado? .. que quedaría igual ¿no? ..
(La alumna escribe 2a+5b)
A: (a+b)+ a... sería... 2a + b... (lo escribe)... 2a + 5b + a... (escribe 3a + 5b) ...(a-b)+ b... sería... 2b... -a...
E: ...y 2b ¿por qué? ..¿es el mismo caso que éste? .. (lo señala).
A: No... este es restando...
E: Exacto... y entonces este b está restando y este b está sumando ¿no?
A: Se quedaría la a sola...
E: La a... (la alumna escribe a)... para que te diera lo que tú decías a+2b ¿qué tendría que ser... para que saliera ese resultado que tú decías?
A: Sumarlo... 3-a... b+ab...
E: Cuando tú dices 3-ab... ¿ahí hay algún signo? ..
A: ... eh... no... 3-a...
E: Sí...
A: ...por b...
E: Sí...
A: ...más ab...
E: Entonces ¿qué es lo primero que tienes que hacer ahí? ..
A: “¡mm!”...éste se quedaría igual...(lo señala).
E: ”¡mm!”
A: ... se quedaría igual...
E: Sí...
A: Porque...
E: ...y ¿al multiplicar por b qué pasaría?
A: Me quedaría 3-ab... menos... sería $3\text{-}b^2$...
E: ¿Por qué?
A: Porque b y b... no...
E: Pero ¿qué es lo primero? ..lo primero que tienes ahí, 3 menos a por b ¿qué es? ..¿qué propiedad es esa?
A: ...sería...sí, sería la distributiva.
E: La distributiva... entonces ¿qué tienes que hacer ahí? .. lo primero.
A: 3b - ab...
E: Claro...
A: ...a ver... 3b - ab... +ab...

E: Lo puedes escribir... no pasa nada... o sea, si tú te sientes más segura escribiéndolo no pasa nada...
A: 3b - ab + ab,,, sería 3b... (lo escribe)... 2a... 2 por a más b... sería 2a + 2b... (lo escribe).
E: A ver éste... (la imagen se corta)... ese ahí delante del paréntesis, ¿qué hace?
A: ¡Ah!... tengo que restar el 3a menos la suma de b+a...
E: "¡mm!" (afirmando)... ¿y se puede sumar ahí b y a ?
A: No...
E: Entonces, ¿qué hay que hacer con ese menos que está delante del paréntesis? .. ¿cómo quitas el paréntesis? .. ¿qué haces tú cuando tienes un + ... un - delante del paréntesis? .. ¿y se puede quitar? ..
A: Cambiando el signo y quitando el paréntesis...
E: ¿Entonces? ..
A: ...sería 3a - b - a... sería... (lo escribe).
E: ...y sabes ¿por qué se cambia el signo delante del... todo lo que está dentro del paréntesis... al tener un menos delante ?
A: Porque... menos... porque se supone que el número que no lleva signo lleva un +...
E: ...ya...
A: ... y entonces - y + ... sería - ...
E: ...- y + ... y ahí cuando tú dices y ¿a qué te estás refiriendo? .. a + ... a por... a resta... tú dices... tú estás leyendo así menos y más... ¿no? ..
A: "¡mm!" (afirmando).
E: ...y yo digo este "y" ¿qué significa... un más... significa un por...?
E: ¿Qué signo de operación hay... un más... un por... o qué es lo que hay ahí... para tú sacar el menos? .. un por... pero que se te oiga... un por ¿no? .. claro, porque si fuese un más... no sabes... ... -3+7... (lo escribe)... o -7+3...(lo escribe)... ¿el signo es siempre menos? (lo indica)... cuando tú estás sumando... siempre que tú tienes un menos y un más...
A: Sí...
E: ...¿aquí el signo te da menos? ..
A: No...
E: ¡Aahh!
A: ...según el número que haya...
E: Según el número que haya... luego aquí es porque es un por... me dijiste tú ¿no? ..
(La imagen se corta).
A: "¡mm!"...
E: Tú pon lo que tú creas...
A: ... -b... (la alumna ha escrito 3-b).
E: ¿A qué se puede sustituir "a", qué puede representar ahí?
A: ...no le puedo quitar esta a porque... éste está multiplicando y éste está restando... ¿no? .. y aquí...
E: ¿Entonces? ..
A: Pero aquí...
E: ¿Entonces? ..
A: ...se quedaría como está...
E: ¿Se quedaría 3a-b-a? .. ¿no se puede hacer nada más? ..
A: No...
E: Aquí, ¿qué hacías tú cuando tenías a+a ?
A: Sumarlo.
E: ¿Y aquí 3a-a? .. ¿no se puede hacer nada? ..
A: Restarlo...
E: ¿Y qué te quedaría?
A: 2a... (tacha lo anterior y lo escribe)... -b (lo escribe)... a+4+a+4... 5a+...
E: ¿Por qué 5a?
A: Porque... ... (no se le entiende).
E: Pero... ¿el 4 tiene a? ..
A: ¡Ah, no!... sería... entonces quedaría... si el 4 sumando y el 4 está restando se irían... quedaría 2a (lo escribe)...
E: Te das cuenta que si te fijas lo sabes hacer... tú piensa en lo que tú escribiste, sino piénsalo bien...
A: 3a-b+a... sería 4a-b... (lo escribe)... (a+b) + (a-b)... sería... a...
E: ¿Ahí podrías quitar el paréntesis? ..
A: Sí... por la distributiva...
E: ¿Ahí hay distributiva? .. ¿propiedad distributiva? ..
A: ¡Ah, no!... debería ser un por... no...
E: ¿Pero se pueden quitar los paréntesis? ¿no? ..
A: Sí.

E: Quítalos primero si quieres y después haces las operaciones.
A: a + b + a - b... (lo escribe).
E: Ahí no tienes que cambiar ¿no? .. porque no es como aquí... que está el menos delante del paréntesis... ¿qué te queda entonces?
A: 2a... (lo escribe).
E: “¡mm!” (afirmando).
A: Menos... no... 2a... 6·(a+b) - 3a... 6a + 6b - 3a (lo escribe)... quedaría 3a + 6b... 3·(2+a) - 3... sería 3·2... son 6 + 3a - 3... quedaría 3 + 3a... (3+x)y = 3y + xy... (escribe los resultados).
E: Ya y ¿eso... qué propiedad... hay alguna propiedad ahí?
(La imagen se corta y aparece la alumna leyendo el enunciado de la página 2).
A: ...un número solo o una letra sola, la representaremos por un rectángulo... ejemplo 3... por el primer acuerdo... 3 = 3·1 = 1·3... por el segundo acuerdo...
E: No, éste sería el ejercicio... ¿eh'... (lo separa con el bolígrafo)... termina de leerlo aquí...
A: Quedaría representado así... 1... 1 de altura y 3 de base... o 3 de altura y 1 de base...
E: Es lo mismo ¿no?
A: Por el segundo acuerdo... a ver...
E: ¿Qué se está representando aquí?
A: ... t... t de altura y 1 de base, o 1 de altura y t de base...
E: ...y ¿qué es lo que se está representando aquí?
A: ... el t es un número que no se sabe... entonces ponen un número...
E: A ver ahora aquí... el 2... ¿cómo representarías tú eso? ..
A: 2 = 2·1 = 1·2... (lo escribe)... quedaría...
E: Las unidades de la base y de la altura ¿tienen que ser iguales?
A: Sí... un poco torcido...
(La alumna empieza a hacer la representación).
E: Sí... da igual...
A: 1... y 2... (lo escribe)... 1 de base y 2 de altura... o 1 de altura y 2 de base...
E: “¡mm!” (afirmando).
A: ... o x de base y 1 de altura... (representa)...
(La imagen se corta, ya ha leído la segunda parte)... a ver...
E: ¿Lo ves claro?
A: Tendrías que... no sé... no sé...
E: Lo tienes aquí... lo tienes aquí... (lo señala).
A: ¡Ah!... quedaría representado así...2·3... 2 de altura y 3 de base... y de 3 de altura y 2 de base...
E: Y ¿el caso b? .. cuando los dos son letras...
A: ... una... no... una... una letra... una medida...
E: Una medida de z... y t...
(La imagen se corta y aparece la alumna realizando la actividad 1 de la página 3).
A: ...3... por x... (lo escribe).
E: ¿De qué otra manera se podría representar?
A: 3 de... de base y x de altura...
E: “¡mm!”... vale... y ¿la x tendría que ser igual a esa... la que pusieras para la otra representación?
A: Si son iguales sí... si quieres que se hagan como el anterior sí.
E: Sí, sí... o sea si es para representar en ese ejercicio ¿no? .. Vale... A ver éste... (refiriéndose a la actividad 2).
(La imagen se corta y la alumna ya está haciendo la el apartado a de la actividad 2).
E: ... y ahí también se podría hacer... ¿no? .. 4 de base y b de altura ¿no? .. y a ver ahora 4+b...
A: ...será 4·1 + b·1... (lo escribe).
E: “¡mm!” (afirmando)... vale...
(La alumna empieza con la representación).
A: 1... 4... de altura y 1 de base...
E: “¡mm!” (afirmando).
A: ... y b de altura ... serían... 1... o 1 de altura y b de base, o... 1 de base...
E: Pon uno cualquiera, el que tú quieras.
A: 1 de altura y b de base... (lo ha dibujado).
E: Vale...
(La imagen se corta)
E: ... y ¿es el 4+b? ...
A: No...
E: ¿Por qué?
A: Porque el 4 lo estás multiplicando, entonces tiene que ser todo en la misma zona... todo... en un mismo... en la

misma figura...
E: Sí, y ¿qué figura es?
A: ...rectángulo...
E: ...sólo un rectángulo...
A: ...y en la que se suma... tienen que ser dos rectángulos... el de 4·1... y el de b·1... y sumado...
E: Vale...
(La imagen se corta y aparece la alumna leyendo).
A: 2·x + 2 = 2·x + 2·1... 2 de base y x de altura... y 2 de base y 1 de altura... o 2 de altura y x de base... o 2 de base y 1 de altura...
E: Y estas expresiones, ¿también son equivalentes? .. (señalándolas).
A: Sí... porque tienen el mismo...
E: ... ya ¿y éstas? .. 2x +6... (la señala).
A: ¿2x... +6...? que daría... 2x + 6 equivale a 2x + 6·1... (señalando)... +6·1...
E: ¿Y éste?
A: También... porque está multiplicando...
E: Y, ¿es equivalente? .. ¿éste, este rectángulo es equivalente a éste? .. (se lo indica).

17.3 Transcripciones de las entrevistas. Tercera fase. Junio 96.

Alumno A6. Sesión 1ª

E: Lee, despacio, claro y enterándote de lo que lees. ¡Léelo, léelo pero hablando en alto!
A: Realiza las siguientes operaciones indicando los pasos que has dado hasta llegar al resultado final.
Menos veinte más cinco, quince.
E: ¿Y el signo está bien?
A: Sí
E: ¡Pero, no te pongas nervioso Jaime, calma! ¡A ver! Sigue, siguiente. Pero es que tú lo sabes hacer bien.
A: Menos por más, menos. Dos por cinco, diez. Más por menos, menos. Veinticuatro entre seis a cuatro.
E: Es que tú lo haces perfecto.
A: Eh! Cinco, menos cinco, se cambia el signo. Eh! Seis menos siete.
E: ¿Cómo que seis menos siete? ¿Qué es lo que cambias de signo?
A: Eh! El paréntesis.
E: ¿El paréntesis entero?
A: ¡Sí!
E: Mira a ver, fíjate bien. Es que tú solo se lo estás cambiando al siete. ¿Si tuvieses seis menos siete?
A: Ah, no! Menos seis, menos siete.
E: ¡Exacto! No te saltes pasos que no hace falta.
A: Menos trece más cuatro... serían...
E: No pero pon el más, ponlo separado. Mira con los nervios que no le dejan poner los signos. Despacio Jaime. Despacio y clarito y ya está, no pasa nada.
A: Eh... cinco más cuatro, nueve.
E: No, pero no pongas coma por el igual como tú siempre has puesto en el cuadernillo.
A: Menos trece, que serían...
E: No tengas prisa.
A: Menos cuatro.
E: ¡Vale! Los iguales que sean iguales y los menos que sean menos, no más o menos, sino menos o iguales. Venga sigue.
A: Eh... sería...eh... tres menos seis menos uno, menos dos, más uno.
E: ¿Por qué pusiste menos seis, menos uno? Así te estás saltando pasos y te equivocas.
E: Claro, no te saltes pasos porque te equivocas.
A: Eh... menos seis menos dos, menos ocho; y tres más uno, cuatro, más uno, cinco. Eh... menos tres. Eh... sería seis por...; siete más cinco son doce, menos ocho...
E: ¿Por qué menos ocho?
A: Porque se cambian de signo.
E: ¿Y dónde lo has cambiado?
A: ...menos ocho. Ah! Más.
E: ...pero pon igual, igual. Tienes la costumbre de no poner igual. Para que no se quede ahí, volando eso.
A: “a” más tres “a” puede ser escrito de forma más simplificada como cuatro “a”. Escribe de forma más simplificada, reduciendo hasta donde sea posible.
Dos “a” más cinco; siete “a”.
Dos “a” más cinco “b” ¡eh!. Siete “ab”.
E: ¿Por qué?
A: Por... dos más cinco, siete.
E: ¿Da lo mismo las letras que tengas detrás? Si tú crees que está bien sigue. ¿Ahí hay alguna propiedad especial? Tres menos “a”, todo por “b”. ¿Qué propiedad es esa? La que obedece.
A: La asociativa.
E: ¿La asociativa? ¿Qué vas a asociar? Hazlo, hazlo como te salga.
A: Conmutativa.
E: ¿Y eso es conmutativa? Conmutativa no es cambiar esto...
Sí, pero hazlo, luego ya veremos la propiedad.
¿No se puede simplificar nada?
A: Eh... sería...
E: Menos “ab”, más “ab”, más “ab” al cuadrado.
A: Ah!
E: ¿Qué estás pensando?
A: Eh... dos “a” por “a” sería... dos...
E: ¿Pero de dónde te sacas tú..., ustedes inventan, de dónde te sacas tú ese “por”, dónde ves simbolizado ese por, dónde lo ves ahí puesto? ¿Dónde? ¿Hay por?
A: No.

E: ¿Entonces? ¿Cuánto es? Dos “a” más “a”, ¿cuánto es? Nada, no importa. Pásate al otro.
A: Tres “y”.
E: ¿Cómo? Tres “y” más “xy”. ¡Vale! Sigue.
A: Seis “a” más...
E: Sí.
A: Eh... Representa la siguiente historia: En 8º A hay un grupo de niñas. En 8º B hay cinco niñas menos que en octavo A y en 8º C hay doble número de niñas que en 8º B. ¿Cómo expresarías la situación?
E: En octavo uff...pero no, no te precipites Jaime. Lee bien a ver si esto está bien.
En octavo B hay cinco niños. ¿A cinco niños le quitas los treinta de octavo A? ¡Pon lo que tú quieras!
A: A cinco niños menos que “x”.
E: ¿Cómo?
A: A cinco niños menos que “x”.
E: Y, ¿cómo se expresa a cinco niños menos que “x”? Cinco niñas menos “x”, no cinco niñas menos que “x”. Aquí dice cinco niñas menos “x·” ¿no? Tú imagínate ahora que el número de niñas de octavo A en ese colegio es treinta y cinco. ¿Cuántos tendría B y cuántos tendría C si “x” vale treinta y cinco?
A: Treinta.
E: ¿Por qué treinta? Cinco menos treinta y cinco ¿cuánto es? Menos... cinco menos treinta y cinco... Supón aquí cinco menos treinta y cinco.
A: ¡Ah!
E: Pon aquí “x” igual a treinta y cinco ¿no? ¡Por supuesto! ¿Cuántos tiene B y cuántos tiene C? ¡No!. Pero, con lo que tú has escrito aquí. No, no, con lo que... Pero vete aplicándolo ¿no?
A: Queda cinco.
E: Sí. Pero vete ya aplicándolo.
A: Cinco menos treinta y cinco.
E: O sea que la clase de octavo B tiene menos treinta niños.
A: Sería “x” menos cinco niños.
E: ¿Pero te das cuenta lo que está mal o no?
A: Sí, porque...
E: Es cinco menos que alguien, no algo menos que cinco. Es cinco menos que alguien, no ese algo menos que cinco.
A ver, ¿entonces cómo quedaría?
A: “x” menos cinco.
E: “x” menos cinco, ¿y octavo C?
A: “x” menos cinco por dos.
E: Te tienes que fijar porque si tú dices menos que o más que, ¿no?; pero menos que qué, menos que quién.
A: Carlos tiene cinco boliches. Su abuelo le ha comprado ocho más. Si su amigo Pedro tiene el doble que él y su amigo Fernando el triple de los que tiene Carlos, ¿cómo expresarías los boliches que tiene Pedro y los que tiene Carlos?
Carlos tiene trece...
E: ¡Bien!
A: ¿Cómo expresarías con signos, letras y números las expresiones siguientes?
Un número cualquiera, “x”. El doble de un número.
E: ¿Qué pusiste ahí?
A: O
E: En los más, los más, mira las íes. Ya no sabes lo que es una “y”, un cuatro, un más. Aquí le falta un poquito de raya ¿no?; fuerte, bien clarito.
A: Escribe las operaciones siguientes en lenguaje algebraico.
El triple, el triple de la suma...
E: Bien, ¿esto qué es?
A: ¡Ah!
E: ¿Se puede poner sin paréntesis? Sí porque no hay ninguna suma. ¿Y de qué otra manera se puede poner? No, ¿eso es lo mismo? Poniendo el coeficiente delante, ¿no? Tres “b” cuadrado. ¿Estás más tranquilo? Claro, ¡Si no te va a pasar nada!
A: Sí.
E: Mira qué rápido pasaste esa hoja.
A: ¿Cómo expresarías con signos, letras y números las expresiones siguientes?
El número siguiente a “g”.
E: ¿Por qué “h”? ¿ “h” puede valer veintinueve?
A: No.
E: Fíjate bien ahí. Estamos como aquello de octavo A y octavo B. Esa “d” se le quita a cincuenta.

A: Escribe las operaciones siguientes en lenguaje algebraico.
E: ¿Qué entiendes tú por lenguaje algebraico, Jaime?
A: Los..., se dicen con las letras y los números.
E: No estás leyendo, léelo, léelo.
A: ¿Qué pasa?
E: ¿Eso qué es? Y “a” por uno, “b” por uno y “c” por uno, ¿no es lo mismo que “a” por “b” por “c”? ¿Qué diferencia ves tú?
¿Y esto va suelto? Aquí no hay signo ninguno. ¿Esto va suelto? ¿Ah? ¿Dice el enunciado algo de sumar? ¿Eh? ¿Entonces? ¿Pero... a ver, qué estás pensando? Es que a mí me gustaría saber lo que estás pensando para ver lo que estás escribiendo ahí. ¡A ver! Tú vete diciendo lo que estás pensando. ¡Léelo otra vez!
A: El producto de a, b, c.
E: ¡Pues venga! ¡Claro, ya está! ¿Dónde ves tú ahí una suma? ¡Léelo alto!
A: El precio de “x” kilogramos de papas a setenta y cinco pesetas el kilo.
E: ¡Venga!. Sigue. Ahí parece que dice “h” menos uno ¿no? ¡Claro! Puntos sobre las íes que se dice.
A: ¿Cómo expresarías con signos, letras y números las expresiones siguientes?:
- La entrada de un cine vale ciento setenta y cinco pesetas, ¿cómo expresarías el gasto de un niño que ha ido cinco veces a ese cine?
- La paga que da un padre a un niño cada semana es de “p” pesetas, ¿cómo expresarías el dinero que reúne ese niño durante seis semanas?
Seis “p”.
¿Cómo expresarías con signos, letras y números las expresiones siguientes?:
- El chófer de un colegio hizo “n” viajes en un día, transportando cincuenta niños en cada viaje...
E: Yo creo que no se te entiende mucho, ¿verdad? Vocaliza un poco más.
A: El chófer de un colegio...
E: ¡Claro!.
A: hizo “n” viajes en un día, transportando cincuenta niños en cada viaje, ¿cómo expresarías el número total de niños que transportó ese día?
- El dueño de un estanco vende ciento treinta y cinco periódicos cada día, ¿cómo expresarías el número total de periódicos vendidos en dos semanas (catorce días)?
E: ¡Te das cuenta, ya! ¡Qué facilito!
A: ¿Cómo expresarías con signos, letras y números las siguientes expresiones?:
- Juan tiene ocho caramelos más que Jaime.
- Miguel tiene...
E: Y ¿qué es “x”?
A: ¡Caramelos!
- Miguel tiene el doble de caramelos que Ana.
E: ¡Pero vete diciendo lo que ves! Aquí “x”, ¿qué es lo que representa?
A: Caramelos.
E: Y aquí, otra cosa distinta totalmente, luego hay que poner lo que significa la “x” .
A: “x” son los caramelos que tiene Miguel y “2x” los que tiene Ana.
- Pepe tiene la mitad de dinero que Antonio y Luis el doble que Antonio.
Eh... Pepe sería “x” partido por dos... y Luis...”x” por dos.
E: ¡Claro! Pero tú no puedes hacer el ejercicio así porque aquí no se sabe lo que es Pepe, ni lo que es Pedro...¿lo entiendes?
A: Sí.
E: Tienes que ponerlo de alguna manera.
A: Pepe, Luis...
E: Mira a ver este por ejemplo.
A: En la clase de matemáticas Juan hizo tres ejercicios más que Maribel y Sandra un tercio de Juan. Um...Juan queda tres más “x”, “¡mm!”...Sandra un tercio de Juan...
E: ¿Y “x” qué es?
A: Eh! Los ejercicios de... los ejercicios.
E: ¿De quién?
A: De Maribel.
E: ¿Eh?
A: ¡Maribel!
E: Venga, ponlo y procura vocalizar.
A: Completa el siguiente cuadro de edades suponiendo que actualmente Pedro tiene doble edad que Sergio, Marta tiene ocho años más que Pedro y Toni tiene doce años menos que la suma de edades de Marta y Sergio.
E: Vuélvelo a leer si te hace falta o vete leyéndolo por parte; pero vete hablando de lo que estás diciendo, de lo

que estás pensando.
A: Pedro, aquí. Dos por “x” , ocho más dos por “x” y Toni doce menos, ocho más dos por “x”...
E: ¡Dice que Toni tiene doce años menos que todos los demás!
A: Hay que sumar...
E: O sea que yo sumo todo esto y lo resto de doce, ¿no?
A: Sí.
E: O sea que si uno tiene por ejemplo: si Sergio tiene siete años, Pedro tiene catorce, Marta tiene treinta y cuatro, dos por siete catorce, veintidós y Toni tiene ¡menos no sé cuánto!. Pero fíjate, dice... doce menos ¡fíjate bien! Fíjate bien porque estas son las cosas... doce años menos ¡ay perdón! que la suma. Tal, tal, tal. Luego tendrás que tener primero a lo que vas a restar ¿no?
A: Ocho, ¡ay!. Ocho más dos por “x” más dos por “x” menos doce.
E: ¿Qué significa una década?
A: Diez años. Dos por “x” más diez.
E: ¿Sergio se murió?
A: Calcula y reduce cuanto sea posible las siguientes expresiones:
A: No se puede hacer nada.
E: Eh, mira a ver este. ¿Por qué aquí no se puede hacer nada?
A: Porque no tiene... letra.
E: Aquí sí se puede hacer, y son dos letras... Por ejemplo aquí ¿eh? no se puede hacer nada.
A: No.
E: ¿Y aquí?
A: No.
E: Lo que pasa es que allí estabas más nervioso.
A: Tres “a”.
E: ¿Qué hiciste ahí?
A: Cambiar de signo.
E: ¿Y le cambias el signo y le dejas el paréntesis otra vez? ¿Y ahí se puede hacer algo?
A: No.
E: Bueno. A lo mejor te conviene irla sacando paso a paso, porque si no! Por si acaso te equivoques; pero como tú quieras. ¡Vete diciendo tú lo que estás haciendo en tu cabeza, vete tú diciéndolo! ¡A ver!.
A: “a” menos “a”, cero.
E: Pero más fuerte porque ahí no se oye nada.
A: Eh, menos “b” más “b”, se quedaría nada, cero; dos “a”.
A: Dos “a”. Seis “a” más “b”.
E: Así no te equivocas, haciéndolo paso a paso.
A: Tres “x”...
E: ¡Vale! ¿Te acuerdas de los dos rectángulos que vimos en clase?
A: Sí.
E: ¿Cómo se representaban la base y la altura?
A: Sí.
E: Bueno lo dejo aquí y no presentamos ese.
¿Qué expresaría tres por “x”?
A: ¡Eh!...altura tres y base “x”.
E: Un rectángulo de altura tres y de base “x”.
¿Y de qué otra cosa puede ser?
A: De base tres y de altura “x”.
E: ¿A ver este por ejemplo? Cuatro más “b”, ¿son iguales?
A: No.
E: ¿Por qué?
A: Porque éste son una,... que se tiene sería de “b” y este no.
E: ¿Qué se tiene?
A: Que a este cuatro se le añade “b” y se le añade un rectángulo de base “b” y altura “x”.
E: ¿”x”?
A: “x” o...
E: ¿O sea que esto puede ser lo mismo? ¿Cuánto tiene que medir esta altura?
A: “x”.
E: ¿”x”? ¿O sea que da lo mismo poner en una expresión cuatro más “b” que cuatro más “bx”? ¿Entonces? ¿Cómo se representa...? Porque, ¿cuánto mide esto de aquí?
A: “b”.
E: ¿Esto mide “b”?

A: Sí.
E: ¿Por qué has hecho esto así para representar el cuatro?
A: Porque es de base cuatro y altura uno.
E: Uno.
A: Porque es de base cuatro y altura uno.
E: Cuatro y uno, y “b” y uno. Vete poniendo las dimensiones del rectángulo en el dibujo. No, en las dimensiones, tú sólo has puesto la base. ¿Y?
A: No, uno.
E: ¡Vale! ¡A ver este! Y arriba, ¿qué tiene de altura? ¡Ah!. Pon igual. Fuerte manía a no poner igual. ¿Cuál es el factor común?
A: El tres.
E: ¡Claro!. Gracias.

Alumno A6. Sesión 2ª.

E: Vamos a ver cómo resuelves.
A: ¿Leo?
E: Lee, lee...
A: Parte de esta figura no está dibujada. Hay “n” lados en total, todos de longitud dos. Halla su perímetro.
E: “n” por dos. Muy bien. Ves que facilito.
A: Calcula el perímetro de las figuras siguientes.
E: Ya. ¿Se podría sacar...ahí algún factor común?
A: El dos.
E: El dos. ¿Cómo se podría expresar el dos, factor común? Como si fuese un factor común.
A: Dos por “n” por seis.
E: Vale, pero pon los iguales. No te acostumbres a no poner los iguales que se quedan las cosas perdidas.
Bien, vamos a ver aquí abajo.
Bien, ¿a qué es igual?, si es que se puede reducir algo.
¿Y algo más super ? Los iguales.
Bien. ¿Ya ahí los dos? ¿En la última expresión hay algún factor común?
A: No.
E: ¿No?
A: ¡Ah! Sí, dos.
E: ¿Y cómo te quedaría? ¡Vale! ¿A ver aquel?
A: Calcula el área de las siguientes figuras.
E: Vamos a ver esto. ¿Tú crees que has aprendido algo de álgebra?
A: Sí.
E: ¿En el examen respondiste algo?
A: Sí.
E: ¿El que hizo la señorita? Mira a ver, el último.
A: Ya.
E: ¿Te da igual?
A: No.
E: Fíjate en el dibujo, a ver si te ayuda algo el dibujo. Mira para el dibujo. ¿Qué es el área?
A: Esto.
E: Eso es para calcularlo pero... ¿Qué es? ¿Dónde lo...?
Subraya lo que a ti te parece que es el área de ese rectángulo. Eso sería de un rectángulo, pero del rectángulo total, ¿cuál sería el área?
Vamos a marcarla de rojo. Para ver. ¿Qué es el área para ti?
¿Eso es el área? Tú estás subrayando las dimensiones que tú multiplicas pero yo te digo: ¿Qué es el área?
A: Todo.
E: Todo, pero, pero espérate. En este folio, ¿cuál sería el área?
A: ¡Ah! Lo de dentro.
E: Entonces, raya lo de dentro, ¿no? Imagínate que esto es como un folio, ¿cuál es el área de este rectángulo?
A: Lo de dentro.
E: Lo de dentro. Entonces, ¿cómo rayarías tú lo de dentro?, ¿cómo marcarías lo que es el área? Con rojo.
A: Es que no sé como... pues así...
E: Márcalo, subráyalo, como si lo estuvieras pintando. ¿Qué es el área? Aquí, exacto. Eso es el área. Entonces a ver, si eso es el área todo, ¿cómo la calcularías? Olvídate de la fórmula de base por altura. Viendo eso, ¿cómo tú podrías calcular el área?

A: Pues...
E: Como si tú fueras a hacer un colage, ¿cómo te lo tendrías que hacer? ¿A qué sería igual?
A: Esto por esto, más esto por esto.
E: “a” por “c”. Mira a ver en ese dibujo, ¿qué es “a” por “c”?
¿Qué representa “a” por “c” en ese dibujo?
Ponlo dentro, ponlo dentro..., en la zona que corresponda. No, no, no, dentro, dentro. ¿Cuál es la zona que corresponde? ¡Dentro!, porque eso no es el área lo que tú me estás marcando.
A: ¡Ah!.
E: Pues ponlo ahí. “a” por “c”. Ponlo, ponlo. “a” por “c”.
¿Y tú dijiste “b” por cinco?
A: Sí.
E: Y ¿cuál sería “b” por cinco?
A: Esto.
E: ¿El qué? ¡A mí no me digas esto; tú ponlo dentro! A ver, ¿dónde crees que va “b” por cinco?
A: “b” por cinco.
E: ¿De dónde, hasta dónde llega?
A: De aquí hasta allí.
E: ¿Esto es “b” por cinco?
A: No.
E: ¿Qué es “b” por cinco?
A: Esto.
E: ¿Todo esto es “b” por cinco? ¿”b” hasta dónde llega?
A: Hasta aquí. “b”.
E: ¿Ese trocito?
A: “b”.
E: Eso es “b”. Y entonces dónde dices tú que es “b” por cinco.
¿Cuál es el área de “b” por cinco? ¿Qué rectángulo ahí de ese dibujo representa “b” por cinco? Quiere decir que tiene o “b” de base y cinco de altura o cinco de base y “b” de altura. ¿Cuál es la zona que vale “b” por cinco? Vamos a ponerle número. Esta la número uno. La zona uno, la zona dos, la zona tres y la zona cuatro.
¿Qué representa “b” por cinco? Ese “b” por cinco que tú has puesto ahí, ¿qué zona representa?
A: Tres...
E: ¿Cómo? ¡No! De la uno, de la dos, de la tres o de la cuatro, ¿qué zona representa?
A: ¡Eh!...La...
E: La tres ¿cuánto vale?
A: Tres.
E: La zona, la zona tres. Este trozo, la zona tres. ¿Cuánto vale ese trozo?
A: “b”.
E: “b” valdrá este trocito, pero la zona, la zona, la zona no es lo mismo que el borde.
A: “¡mm!”. “a” por “c”.
E: ¿Cómo?
A: “a” por “c”.
E: “a” por “c”. ¿Vale este trozo de aquí?
A: ¡Eh!...
E: ¿No me acabas de decir que “a” por “c” es este trozo de aquí?
¿Cuánto vale este trozo?
A: Tres.
E: La zona tres, y la zona tres. ¿Cuánto vale, con las letras que a ti te dio el problema? ¿Es un rectángulo la zona tres?
A: Sí.
E: ¿Cuánto mide la base de la zona tres?
A: “x”.
E: ¿Cómo que “x”? En ese problema, ¿cuánto mide?
A: “c”.
E: ¿Y la altura?
A: “b”.
E: Entonces, ¿cuánto vale esa zona?
A: “c” por “b”.
E: ¡Ah! ¡Menos mal! ¿Y la dos?
A: “a”, “a” por cinco.
E: ¿Y la cuatro?

A: ¡Eh! “b” por cinco.
E: Entonces, ¿cuánto tiene que medir el área de ese rectángulo?
A: “a” por “c”, más “b” por “c”, más “b” por cinco, más “a” por cinco.
E: Ahora compara esto con esto. Son iguales estos ¿no?
Tienen que ser iguales. Pon el igual que se te olvida siempre. Pon el igual aquí.
Tú fíjate para pasar de aquí a aquí, ¿qué es lo que hay que hacer?
A: Eh... multiplicar esto por esto y esto por esto.
E: ¿Nada más?
A: Sí. “c” por “b”, más “c” por “a”, más “c” por cinco. No, no, no. “c” por “a”, más “c” por “b”, más cinco por “a”, más cinco por “b”.
E: Entonces aquí, por ejemplo, ¿cómo sería?
A: Cuatro por cinco, más cuatro por “a”.
E: A ver aquel y este... ¿Qué vas a calcular?
A: El perímetro.
E: ¿Lo leíste ya?
A: No.
E: Porque “p” podría haber representado otra cosa ¿no?, ¿verdad?
A: Calcula el perímetro de estas figuras.
E: Ya está el perímetro. O sea, tú vas a vallar el colegio, vas a vallarlo alrededor. Le pones vallas por allá y por esta calle estrecha y ya se acabó el perímetro. Ya está vallado ¿Ah?
Eso no se puede. Y, ¿de dónde salen esos cuadrados? ¿Qué es el perímetro?
A: La suma de todos los lados.
E: ¿Y cómo dibujarías tú ahí dos al cuadrado? En ese rectángulo.
¿Y por qué pones dos por dos? ¿Cuál sería el otro dos al que tú te estás refiriendo?
A: Éste.
E: ¡Vale!
A: Calcular el área de estas figuras.
E: ¿Qué estás calculando?
A: El área.
E: ¿De qué?
A: De esto.
E: ¡Vale!
E: Y cuatro por “m”, ¿qué es?
A: La altura... y la base.
E: ¿En la realidad?
A: Este trozo.
E: ¿Un trozo así? Cuando tú dices este trozo puede ser un área. Un trozo así, ¿puede ser un área?
A: No.
E: Pues a ver, ¿qué representa cuatro por “m”? ¿Qué es cuatro por “m”?
A: Esto y esto.
E: Sí, esto mide cuatro y esto mide “m”. Esto que tú pusiste aquí, ¿qué es?, ¿a qué corresponde en este dibujo?
¿Y este cuatro por cuatro a qué corresponde?
¿Tiene que ser una cosa vallada o tiene que ser un borde?
A: Vallada.
E: ¿Qué parte vallas tú para expresar cuatro por “m”?
¿Desde aquí hasta aquí? ¿Qué representa en ese rectángulo cuatro por “m”?
A: Esto.
E: ¿Y cuatro por cuatro?
A: Esto.
E: ¿Y ahora que le vas a sumar?
¡Qué cabeza! A ver éste.
¿Se podrían quitar esos paréntesis, Jaime? ¿Se podrían quitar? ¿Afectaría a la expresión? ¿Cómo quedaría entonces? Igual que se pierde. Y aquí se te perdió también.
¿Te suena algo? ¿Esto que yo le había puesto otro nombre?
A: Visualizaciones.
E: No se te ha entendido nada.
A: Visualización simplificada.
E: ¿Y por qué se decía visualización simplificada? ¿Qué significan esas palabras?
A: Que, que son más...
E: ...más simplificadas, más fáciles, más sencillas...Bueno, ¡vale!. Lee el de abajo.

A: Observa que “a” más cuatro por “b” más tres lo podríamos representar gráficamente.
E: ¿Lo entiendes?
A: Sí.
Y podemos esquematizarlo así. Eh, “a” por “b”, más “a” por tres, más cuatro por “b”, más cuatro por tres, es decir, “a” más cuatro por “b” más tres es igual a “a” por “b”, más “a” por tres, más cuatro por “b”, más cuatro por tres.
E: Pero, ¿lo entiendes?
A: Sí.
E: ¿Y sabes lo que ves, aquí y aquí, la relación que existe entre esto con esto? Las cuatro zonas que decíamos antes. ¡Pues vamos a ver!
Haz por ejemplo este, pero vamos a cambiar...
¡A ver!. Eso que estás representando, ¿qué es?
¿Y esto está terminado?
A: ¿Esto?
E: ¿Está terminada ya esa expresión?
A: ¡Ah! Esto.
E: ¿Se puede quitar el paréntesis? ..Y a ver el último.
...No, empieza la parte algebraica. ¿A ver?
Haz el modelo geométrico. ¿A ver? El geométrico.
Ponlo en el lado de allá. ¿Tú crees Jaime que los modelos geométricos ayudan para calcular el área del rectángulo?
A: Sí.
E: A ti, por ejemplo, si te dieran una cosa de éstas para calcular el área y no te acordaras, ¿qué harías? Este, este o... ¿por dónde empezarías? ¿Por éste...?
A: Completa el cuadro siguiente donde intervienen más de dos sumandos como hiciste en el ejemplo anterior.
E: ¡Empieza por donde quieras!
Ese ya te sale ¿no? Mira a ver el modelo geométrico. A ver si cuando vayan al instituto no se olvidan de esto cuando se vean apurados.
Esa rayita ahí ¿qué pasó? Es fácil ¿no?
A: Sí.
E: Bueno, vamos a hacer este porque..
A: Calcula y reduce cuando sea posible las siguientes expresiones.
E: ¿Vas a hacer algo más?
Es de donde partiste, porque aquí ya no se puede reducir más. ¿No es verdad?
¿Se puede hacer algo? ¿Qué estás pensando? ¿A ver?
A: Sacar factor común.
E: ¿Qué otra cosa se puede hacer? Vete leyéndolo... Léelo en alto a ver si te suena que se puede reducir algo.
A: “x” al cua... ¡Ah! Es por “x”.
E: Sigue. Eso no te simplifica más. No se puede reducir más. Eso no has reducido nada, eso es una cosa equivalente, ¿no? De todas maneras reducir tampoco es equivalente, también es equivalente. ¿Eso que tienes ahí al medio se puede hacer de otra manera?
A: “x” al cuadrado.
E: Ese es el primer término.
“xy” más “yx”, ¿a qué es igual?; “ab” más “ba”, ¿a qué es igual?
Si yo tengo, ¿se puede partir un término? Yo tengo “ab” más “ba”. ¿A qué es igual? Se puede hacer algo o no. ¿Son semejantes?
A: Sí.
E: ¿Entonces se puede hacer algo? ¿A qué sería igual?
A: A “axa” y a “bxb”.
E: O sea, que eso es lo mismo que si yo pongo “a” por “a”. ¿Dijiste?
A: Sí.
E: ¿A qué es igual “a” por “a”?
A: A “a” al cuadrado.
E: Y ¿ “b” por “b”?
A: A “b” al cuadrado.
E: ¿Y es equivalente a esto? ¿Cómo?
A: “a” por dos y “b” por dos.
E: ¿Y si saco factor común aquí?
¿Y eso es lo mismo que esto?
A: No, no sé.

E: ¿Es conmutativo el producto? ¿Da lo mismo tres por cuatro que cuatro por tres?
A: Sí.
E: ¿Y con las letras da lo mismo “x” por “y” que “y” por “x”, y “a” más “b” que “b” por “a”?
A: Sí.
E: Si yo pongo aquí “ab”, ¿a qué es igual?
Tú dices que se puede poner así, ¿no? Por la propiedad conmutativa, ¿sí o no? Y yo digo, esto ¿a qué es igual?
A: A “ab” por dos.
E: “xy” más “yx”, ¿a qué es igual?
A: “xy” por dos.
E: ¡Pues ponlo!
Sube el brazo, sujeta el papel.
Y esto que tú tienes aquí “x” más “y”, ¿se puede expresar como potencia de otra manera? ¿Esto que te ha salido aquí, qué es? El cuadrado de...”x” más el cuadrado de “y” más el doble de “xy”. ¿Y eso te suena a ti de algo? ¿Este término se repite?
A: Sí.
E: ¿Y cómo se podría expresar si un término se expresa como factor? ¿Cómo se podría expresar de otra manera?
A: Dos “x”.
E: ¿Dos “x”?
“x” más “y” por “x” más “y”, ¿es lo mismo que dos “x”? “a” por “a”, “b” por “b”, cuatro por cuatro, nueve por nueve, ocho por ocho. “b” por “b”... ¿A qué es igual eso?
A: A “x” por “x”.
E: Y cuando... ¿Esto es un factor en esta expresión?
A: Sí.
E: ¿Y cómo son estos factores entre sí?
“x” más “y” y “x” más “y”, ¿son diferentes?
A: No, son iguales.
E: Y entonces, ¿cómo se puede expresar eso de otra manera si son factores iguales?
A: “x” más “y” por dos.
E: ¿”x” más “y” por dos? O sea, ¿qué esto significa que es “x” más “y” por “x” más “y”?
Aquí te ha dado “x” por “x” más “y” por “y”... “x” más “y” al cuadrado.
A: “n” multiplicado por cuatro se puede escribir como cuatro “n”. Multiplica por cuatro cada una de las siguientes expresiones.
E: Más fuerte porque si no, no se va a ver nada, ¡más fuerte!
¿No te escribe el rotulador? ¡Coge otro!
A: Ocho “n” más doce.
E: ¿Estás seguro?
A: ¡Ay Dios!
Rellena los vacíos como se indica en el primer apartado de cada columna.
E: ¿Qué entiendes tú cuando has leído ahí, primer apartado de cada columna?
A: Esto.
E: ¿Eso qué es? ¿Eso que está ahí qué es?
...apartados de cada columna.
A: Apartados serían estos.
E: Primer apartado de cada columna. ¿Qué entiendes tú por primer apartado de cada columna?
A: El primero es éste.
E: ¿Cuál es la columna?
A: Ésta.
E: Y ¿cuál el primer apartado de la primera columna?
¿Ese es el primero?
A: Éste.
E: Ese. Y ¿cuál es el de la segunda columna el primer apartado?
A: Éste.
E: A ver qué entiendes tú de eso. Vete diciendo en alto lo que tú estás pensando cuando lees eso.
¿Qué crees tú que quiere decir eso?
¿Cómo?
A: Más tres.
E: Más tres.
A: Siete.
E: Sí.
Eso no se puede poner así porque si no sería “x” por ocho.

“x” más cinco más tres, ¡vale!.
¿Cómo rellenarías los otros?
¿En qué se transformaría el seis?
A: En dos por tres.
E: ¿Por qué en dos por tres? Pero fíjate que tú ahora vas a hacer el ejercicio relacionándolo con lo que ya está escrito. No al margen. Tú vas a relacionar esto con lo que dice...
¿Qué dice aquí?
A: Rellena los vacíos como se indica.
E: Como se indica. No, no que descompongas el seis sino rellena los vacíos con ese ejercicio concreto. ¿Qué dice en el primer apartado de la primera columna?
Estaba la “x”, ¿no? Y tú le has puesto que hay que sumarle el tres, ¿no?
¿Qué hacemos con el resto de los que están en esa columna? ¿Qué habrá que hacer?
A: Pues...
E: Mira a ver las otras columnas a ver si te da una pista, ¿no?
¿En qué se transforma “x”?
A: En seis.
E: ¿Y en qué se transformarían los otros elementos?
A: ¡Ah!. Seis más tres.
E: ¿Tú que crees?
A: No sé.
E: Pero fíjate que dice que lo hagas como está la primera columna. El primer apartado de esa columna dice que “x” se transforma en “x” más tres, ¿qué pasará con los otros?
A: Seis más tres.
E: Claro, ¿y el otro?
A: Seis por siete.
E: ¿De dónde sacas el seis?
A: ¡Eh!... Dos por siete.
E: ¿Y el otro?
A: En tres por cinco más tres.
E: ¡Pues venga!
Mira a ver en la última fila.
¿Puedes quitar el paréntesis de ahí?
¿Eso es equivalente a poner tres más “b” más dos?
A: Sí.
E: ¡Ponlo!. Sí es equivalente. Es lo mismo que antes.
¿Se puede hacer algo ahí? ¿Se podía o no se podía quitar los paréntesis?
A: Sí.
E: ¡Claro!. Porque no es un producto. Cuando es un producto es cuando no se puede quitar, se tiene que hacer la operación.
Porque, ¿si hubiera sido aquí un producto a quién hubiera sido igual?
No escuchaste, no te precipites. ¿Si yo tengo “b” más dos, todo entre paréntesis, multiplicado por tres a qué sería igual?
A: A “b” tres más seis.
E: ¡Bien, sigue!
Sigue a ver si se puede hacer algo ahí, al final ¡ya!.
A: En un supermercado un kilo de peras cuesta “b” pesetas; un kilo de manzanas cuesta cinco pesetas más que el de peras; un kilo de plátanos, trece pesetas menos que el de peras, y un kilo de uvas, ocho pesetas más que el kilo de plátanos. Completa esta tabla.
E: ¿Lo entiendes?
A: Peso, un kilo, peras “b”, manzanas “b” más cinco, plátanos “b” menos trece y uvas “b” menos trece más ocho.
E: ¿Qué significa esa “b”?
A: El kilo de peras.
E: ¿Cómo que el kilo de peras?
A: Las pesetas que...
E: ¿El precio?
A: Sí.
E: ¿Se puede hacer algo ahí?
¿Se puede reducir algo eso?
Si tú quisieras expresar el doble de esto sin hacerle nada, ¿qué es lo que harías?

¿Eso sería el doble de todo esto?, o ¿el doble hasta aquí? ¿Cómo podrías ponerlo si ya tienes un paréntesis? Sí, pero sin hacer la reducción. ¿Qué otro símbolo puedes tú utilizar cuando ya tienes un paréntesis? ¡Ponlo aquí fuera para que se vea bien!. ¿Qué otro símbolo puedes utilizar cuando ya tienes paréntesis y tienes que poner el doble o el triple o lo que sea? ¿Qué símbolo puedes poner para que te abarque todo? ¿Corchetes?, ¿no?
A: ¡Ah, sí!.
E: Es que si no, no coge a todo.
¡Ah!. Eso es otra cosa.
A: Si "a" es igual a dos "b", ¿en qué se transforma cinco "a" más tres?
E: ¿Y este...? A ver, a ver, ¿qué ibas a poner ahí? Nada.
A: Si "a" es igual a "b" más tres, ¿en qué se transforma cinco "a" más tres "b"?
E: ¡Qué feo el cinco!, ¿eh?
A: ¡Ay!
E: ¿Y por qué le pones ahí corchetes?
A: No sé.
E: Sí, pero el "a", ¿qué es lo que vale?
Cinco por "a", ¿hasta dónde llega "a"?
¿Aquí hasta dónde llega "a"? Y entonces, ¿por qué? Y entonces, ¿no significa que este cinco llega hasta aquí si lo pones delante del corchete?
Táchalo y ponlo bien, ¡anda!.
¿Te das cuenta?, ¿no? Síguelo haciendo a ver qué queda.
A: ¡Eh!...
E: No, éste, éste. No se ha acabado. ¡El igual!.
¡Déjalo ya! ¿Vale?

ANEXO 18

DATOS COMPLEMENTARIOS DEL CAPÍTULO 3.

1. Media, desviación típica, correlación ítem-total e índice de fiabilidad para cada ítem (Escala actitud hacia las Matemáticas).

DATA BELOW ARE BASED ON 177 COMPLETE CASES FOR 24 DATA ITEMS.

TEST SCORE STATISTICS

	TOTAL	TOTAL/ 24	ODD	EVEN
MEAN	28.797	1.200	14.819	13.977
STD DEV	7.574	0.316	3.955	4.185
STD ERR	0.571	0.024	0.298	0.315
MAXIMUM	47.000	1.958	23.000	24.000
MINIMUM	10.000	0.417	4.000	2.000
N CASES	177	177	177	177

INTERNAL CONSISTENCY DATA

SPLIT-HALF CORRELATION	.732
SPEARMAN-BROWN COEFFICIENT	.845
GUTTMAN (RULON) COEFFICIENT	.844
COEFFICIENT ALPHA - ALL ITEMS	.825
COEFFICIENT ALPHA - ODD ITEMS	.673
COEFFICIENT ALPHA - EVEN ITEMS	.715

APPROXIMATE STANDARD ERROR OF MEASUREMENT OF TOTAL SCORE FOR 15 Z-SCORE INTERVALS

Z SCORE	TOTAL SCORE		N	STD ERROR
< -3.25	<	4.180	0	.
-3.25 TO -2.75	4.180 TO	7.967	0	.
-2.75 TO -2.25	7.967 TO	11.754	2	4.743
-2.25 TO -1.75	11.754 TO	15.541	8	2.151
-1.75 TO -1.25	15.541 TO	19.329	13	3.199
-1.25 TO -.75	19.329 TO	23.116	16	3.897
-.75 TO -.25	23.116 TO	26.903	27	3.621
-.25 TO .25	26.903 TO	30.690	37	3.276
.25 TO .75	30.690 TO	34.477	35	2.478
.75 TO 1.25	34.477 TO	38.265	22	3.226
1.25 TO 1.75	38.265 TO	42.052	12	1.979
1.75 TO 2.25	42.052 TO	45.839	2	1.581
2.25 TO 2.75	45.839 TO	49.626	3	0.816
2.75 TO 3.25	49.626 TO	53.413	0	.
>= 3.25	>=	53.413	0	.

ITEM RELIABILITY STATISTICS

STANDARD	ITEM- TOTAL	RELIABILITY	EXCLUDING THIS ITEM

ITEM	LABEL	MEAN	DEVIATION	R	INDEX	R	ALPHA
1	M(1)	1.141	0.801	.424	.339	.332	.820
2	M(2)	1.299	0.807	.653	.526	.585	.808
3	M(3)	0.684	0.768	.372	.285	.280	.822
4	M(4)	1.209	0.718	.362	.260	.276	.822
5	M(5)	0.475	0.689	.582	.401	.517	.812
6	M(6)	0.655	0.705	.514	.362	.440	.815
7	M(7)	0.972	0.833	.540	.450	.455	.814
8	M(8)	1.712	0.564	.437	.247	.374	.818
9	M(9)	1.537	0.689	.545	.375	.476	.814
10	M(10)	0.616	0.713	.482	.343	.405	.817
11	M(11)	1.616	0.688	.240	.165	.151	.827
12	M(12)	0.831	0.701	.492	.345	.417	.816
13	M(13)	1.215	0.802	.585	.469	.508	.812
14	M(14)	1.350	0.738	.550	.405	.476	.813
15	M(15)	1.339	0.735	.434	.319	.351	.819
16	M(16)	1.412	0.676	.315	.213	.232	.824
17	M(17)	0.689	0.721	.388	.280	.303	.821
18	M(18)	0.734	0.754	.626	.472	.560	.809
19	M(19)	1.718	0.582	.414	.241	.347	.819
20	M(20)	0.949	0.865	.265	.229	.154	.830
21	M(21)	1.780	0.489	.405	.198	.349	.820
22	M(22)	1.763	0.499	.221	.110	.157	.825
23	M(23)	1.655	0.601	.233	.140	.156	.826
24	M(24)	1.446	0.704	.566	.398	.497	.813

2. Media, desviación típica, correlación item-total e índice de fiabilidad para cada ítem (Escala actitud hacia el Álgebra).

DATA BELOW ARE BASED ON 177 COMPLETE CASES FOR 24 DATA ITEMS.

TEST SCORE STATISTICS

	TOTAL	TOTAL/ 24	ODD	EVEN
MEAN	25.113	1.046	11.429	13.684
STD DEV	7.988	0.333	4.137	4.510
STD ERR	0.602	0.025	0.312	0.340
MAXIMUM	44.000	1.833	22.000	24.000
MINIMUM	2.000	0.083	2.000	0.000
N CASES	177	177	177	177

INTERNAL CONSISTENCY DATA

SPLIT-HALF CORRELATION	.706
SPEARMAN-BROWN COEFFICIENT	.828
GUTTMAN (RULON) COEFFICIENT	.826
COEFFICIENT ALPHA - ALL ITEMS	.839
COEFFICIENT ALPHA - ODD ITEMS	.686
COEFFICIENT ALPHA - EVEN ITEMS	.760

APPROXIMATE STANDARD ERROR OF MEASUREMENT OF TOTAL SCORE FOR 15 Z-SCORE INTERVALS

Z SCORE	TOTAL SCORE		N	STD ERROR
< -3.25	<	-0.848	0	.
-3.25 TO -2.75	-0.848 TO	3.146	1	2.000
-2.75 TO -2.25	3.146 TO	7.140	0	.
-2.25 TO -1.75	7.140 TO	11.134	13	2.801
-1.75 TO -1.25	11.134 TO	15.128	10	3.619
-1.25 TO -.75	15.128 TO	19.122	12	4.311
-.75 TO -.25	19.122 TO	23.116	28	4.404
-.25 TO .25	23.116 TO	27.110	39	4.010
.25 TO .75	27.110 TO	31.104	43	4.212
.75 TO 1.25	31.104 TO	35.098	14	4.018
1.25 TO 1.75	35.098 TO	39.092	12	4.272
1.75 TO 2.25	39.092 TO	43.086	4	2.598
2.25 TO 2.75	43.086 TO	47.080	1	0.000
2.75 TO 3.25	47.080 TO	51.074	0	.
>= 3.25	>=	51.074	0	.

ITEM RELIABILITY STATISTICS

ITEM	LABEL	MEAN	STANDARD DEVIATION	ITEM-TOTAL R	RELIABILITY INDEX	EXCLUDING THIS ITEM R	EXCLUDING THIS ITEM ALPHA
1	A(1)	1.079	0.806	.471	.379	.387	.833
2	A(2)	1.412	0.770	.568	.438	.498	.828
3	A(3)	0.678	0.754	.289	.218	.200	.840
4	A(4)	1.271	0.685	.412	.282	.337	.835
5	A(5)	0.345	0.542	.341	.185	.279	.836
6	A(6)	0.531	0.629	.521	.328	.460	.831
7	A(7)	1.017	0.799	.410	.327	.321	.836
8	A(8)	1.695	0.590	.461	.272	.400	.833
9	A(9)	1.249	0.778	.647	.503	.584	.825
10	A(10)	0.802	0.752	.518	.390	.444	.831
11	A(11)	0.983	0.792	.356	.282	.265	.838
12	A(12)	0.689	0.721	.510	.367	.438	. 831
13	A(13)	1.266	0.818	.551	.451	.474	.829
14	A(14)	1.559	0.671	.483	.324	.414	.832
15	A(15)	0.678	0.708	.457	.324	.383	.833
16	A(16)	1.237	0.744	.444	.330	.365	.834
17	A(17)	0.469	0.656	.236	.155	.156	.841
18	A(18)	0.695	0.750	.667	.500	.610	.824
19	A(19)	1.531	0.647	.606	.392	.551	.827
20	A(20)	1.158	0.836	.400	.334	.307	.837
21	A(21)	1.373	0.711	.540	.384	.472	.830
22	A(22)	1.294	0.632	.264	.167	.188	.840
23	A(23)	0.763	0.672	.287	.193	.207	.839
24	A(24)	1.339	0.780	.595	.464	.526	.827

3. ANÁLISIS FACTORIAL COMÚN (Escala Actitud Matemáticas).

MATRIX TO BE FACTORED

	M(1)	M(2)	M(3)	M(4)	M(5)
M(1)	1.000				
M(2)	0.258	1.000			
M(3)	-0.056	0.281	1.000		
M(4)	0.391	0.185	-0.044	1.000	
M(5)	0.227	0.232	0.220	0.165	1.000
M(6)	0.266	0.261	0.143	0.064	0.511
M(7)	0.091	0.450	0.278	0.142	0.299
M(8)	0.028	0.376	0.194	0.135	0.134
M(9)	0.149	0.362	0.172	0.161	0.189
M(10)	0.164	0.289	0.284	0.002	0.417
M(11)	0.006	0.146	-0.027	0.094	0.003
M(12)	0.002	0.290	0.215	0.037	0.389
M(13)	0.226	0.425	0.211	0.197	0.276
M(14)	0.213	0.422	0.036	0.235	0.262
M(15)	0.091	0.229	0.110	0.048	0.195
M(16)	0.258	0.261	0.110	0.148	0.077
M(17)	-0.012	0.228	0.170	-0.147	0.285
M(18)	0.371	0.307	0.128	0.155	0.449
M(19)	0.037	0.192	0.129	0.047	0.081
M(20)	0.279	-0.019	-0.067	0.390	0.268
M(21)	0.079	0.239	0.115	0.099	0.059
M(22)	-0.015	0.050	0.099	0.012	0.048
M(23)	0.019	0.050	0.070	-0.043	0.013
M(24)	0.209	0.332	0.167	0.240	0.262
	M(6)	M(7)	M(8)	M(9)	M(10)
M(6)	1.000				
M(7)	0.147	1.000			
M(8)	0.091	0.331	1.000		
M(9)	0.078	0.292	0.282	1.000	
M(10)	0.288	0.391	0.217	0.155	1.000
M(11)	0.076	0.050	0.093	0.268	-0.024
M(12)	0.271	0.301	0.034	0.177	0.311
M(13)	0.241	0.297	0.249	0.344	0.214
M(14)	0.265	0.237	0.283	0.353	0.202
M(15)	0.225	0.080	0.154	0.187	0.130
M(16)	0.132	0.231	0.149	0.095	0.001
M(17)	0.379	0.174	0.058	0.074	0.230
M(18)	0.445	0.267	0.166	0.155	0.399
M(19)	0.135	0.077	0.148	0.350	0.065
M(20)	0.073	0.100	0.074	0.178	-0.004
M(21)	0.026	0.109	0.241	0.401	0.016
M(22)	0.041	-0.057	0.078	0.025	0.109
M(23)	0.120	-0.132	0.090	0.146	-0.045
M(24)	0.116	0.359	0.224	0.298	0.218

	M(11)	M(12)	M(13)	M(14)	M(15)
M(11)	1.000				
M(12)	0.017	1.000			
M(13)	0.047	0.216	1.000		
M(14)	0.042	0.213	0.360	1.000	
M(15)	0.135	0.254	0.174	0.083	1.000
M(16)	-0.060	0.076	0.087	0.231	0.128
M(17)	-0.001	0.410	0.145	0.120	0.241
M(18)	0.043	0.460	0.225	0.279	0.315
M(19)	0.110	0.201	0.275	0.270	0.145
M(20)	-0.052	0.004	0.122	0.108	0.009
M(21)	0.269	0.006	0.308	0.167	0.270
M(22)	0.195	0.030	0.099	-0.004	0.250
M(23)	0.185	-0.018	0.060	0.145	0.213
M(24)	0.156	0.245	0.361	0.297	0.090
	M(16)	M(17)	M(18)	M(19)	M(20)
M(16)	1.000				
M(17)	0.054	1.000			
M(18)	0.082	0.431	1.000		
M(19)	0.138	0.101	0.164	1.000	
M(20)	0.142	-0.143	0.092	0.016	1.000
M(21)	-0.033	-0.018	0.148	0.436	-0.013
M(22)	-0.078	-0.001	0.178	0.139	-0.146
M(23)	-0.081	0.131	0.072	0.190	-0.034
M(24)	0.100	0.184	0.266	0.294	0.139
	M(21)	M(22)	M(23)	M(24)	
M(21)	1.000				
M(22)	0.388	1.000			
M(23)	0.184	0.387	1.000		
M(24)	0.302	0.044	0.136	1.000	

LATENT ROOTS (EIGENVALUES)

1	2	3	4	5
5.166	2.199	2.056	1.581	1.137
6	7	8	9	10
1.089	0.980	0.944	0.896	0.812
11	12	13	14	15
0.799	0.741	0.699	0.666	0.603
16	17	18	19	20
0.528	0.499	0.455	0.451	0.400
21	22	23	24	
0.396	0.334	0.304	0.265	

COMPONENT LOADINGS

	1	2	3	4
M(2)	0.678	0.023	0.076	-0.271
M(18)	0.644	-0.249	-0.220	0.334
M(13)	0.603	0.115	0.142	-0.111
M(5)	0.598	-0.370	-0.087	0.223
M(24)	0.576	0.129	0.158	-0.105
M(14)	0.569	0.031	0.230	-0.030
M(7)	0.562	-0.209	0.104	-0.462
M(9)	0.546	0.340	0.209	-0.176
M(12)	0.524	-0.289	-0.336	-0.034
M(6)	0.522	-0.298	-0.219	0.355
M(10)	0.515	-0.307	-0.228	-0.132
M(21)	0.408	0.667	0.017	0.004
M(22)	0.188	0.510	-0.338	0.295
M(4)	0.307	-0.010	0.615	0.279
M(20)	0.190	-0.172	0.582	0.293
M(17)	0.413	-0.265	-0.534	0.046
M(1)	0.385	-0.172	0.434	0.448
M(3)	0.371	-0.031	-0.253	-0.396
M(23)	0.182	0.487	-0.261	0.339
M(8)	0.450	0.181	0.133	-0.336
M(15)	0.414	0.174	-0.276	0.267
M(11)	0.192	0.460	-0.028	0.108
M(16)	0.280	-0.169	0.309	-0.095
M(19)	0.423	0.409	-0.013	-0.052

VARIANCE EXPLAINED BY COMPONENTS

1	2	3	4
5.166	2.199	2.056	1.581

PERCENT OF TOTAL VARIANCE EXPLAINED

1	2	3	4
21.526	9.161	8.568	6.588

ROTATED LOADINGS

	1	2	3	4
M(18)	0.735	0.169	0.227	0.133
M(6)	0.692	0.105	0.214	0.025
M(17)	0.682	0.051	-0.237	0.068
M(5)	0.666	-0.025	0.270	0.183
M(12)	0.634	-0.024	-0.097	0.245
M(10)	0.552	-0.112	-0.070	0.326
M(22)	0.114	0.684	-0.115	-0.049
M(23)	0.095	0.663	-0.028	-0.065
M(21)	-0.106	0.655	0.029	0.413
M(1)	0.228	0.042	0.713	0.066
M(4)	-0.048	0.034	0.713	0.198
M(20)	-0.014	-0.116	0.687	0.068
M(7)	0.258	-0.247	-0.004	0.676
M(2)	0.279	0.064	0.081	0.671
M(9)	-0.006	0.296	0.157	0.614
M(8)	0.010	0.090	0.005	0.598
M(13)	0.199	0.171	0.189	0.551
M(24)	0.169	0.174	0.196	0.536
M(14)	0.200	0.105	0.306	0.484
M(3)	0.257	-0.031	-0.316	0.439
M(19)	0.036	0.430	0.015	0.403
M(16)	0.067	-0.185	0.281	0.306
M(11)	-0.075	0.483	0.025	0.145
M(15)	0.384	0.441	0.025	0.080

VARIANCE EXPLAINED BY ROTATED COMPONENTS

1	2	3	4
3.199	2.287	2.125	3.391

PERCENT OF TOTAL VARIANCE EXPLAINED

1	2	3	4
13.331	9.531	8.852	14.128

MATRIX OF RESIDUALS

	M(18)	M(6)	M(17)	M(5)	M(12)
M(18)	0.000				
M(6)	0.089	0.000			
M(17)	0.083	-0.058	0.000		
M(5)	-0.121	0.005	0.108	0.000	
M(12)	-0.129	-0.097	0.053	-0.031	0.000
M(10)	-0.050	0.027	0.025	-0.063	-0.010
M(22)	0.000	-0.060	-0.094	0.033	-0.002
M(23)	-0.022	-0.035	-0.067	0.010	0.018
M(21)	-0.014	-0.080	-0.037	-0.082	0.046
M(1)	0.072	-0.072	-0.027	0.019	0.006

M(4)	-0.024	0.037	-0.048	0.027	0.032
M(20)	-0.088	-0.042	-0.086	0.089	-0.053
M(7)	0.001	-0.027	-0.017	-0.043	-0.005
M(2)	-0.088	0.010	-0.128	-0.073	-0.040
M(9)	-0.037	0.038	-0.002	0.018	-0.071
M(8)	0.029	0.025	0.041	-0.103	-0.104
M(13)	-0.005	0.008	-0.109	0.039	-0.116
M(24)	0.026	-0.016	-0.042	-0.003	-0.122
M(14)	-0.026	-0.117	-0.039	-0.057	-0.011
M(3)	-0.207	-0.109	0.121	-0.110	0.076
M(19)	0.028	-0.053	-0.009	-0.031	0.062
M(16)	0.015	0.017	0.077	0.086	0.029
M(11)	-0.006	0.027	0.086	-0.028	-0.014
M(15)	-0.013	-0.102	-0.044	-0.003	0.002

	M(10)	M(22)	M(23)	M(21)	M(1)
M(10)	0.000				
M(22)	-0.022	0.000			
M(23)	0.059	-0.053	0.000		
M(21)	0.003	-0.047	-0.113	0.000	
M(1)	-0.076	-0.000	0.026	0.003	0.000
M(4)	0.069	0.091	-0.036	0.031	0.026
M(20)	-0.151	-0.034	-0.117	0.053	-0.129
M(7)	0.031	-0.084	-0.099	-0.074	-0.044
M(2)	0.038	-0.115	-0.019	-0.022	-0.033
M(9)	-0.094	0.036	0.062	0.007	-0.057
M(8)	0.038	-0.038	-0.020	-0.082	-0.138
M(13)	-0.049	-0.037	0.007	0.059	-0.180
M(24)	-0.133	0.030	0.062	-0.008	-0.015
M(14)	0.051	-0.099	-0.132	-0.027	-0.037
M(3)	-0.054	0.032	0.041	0.063	0.017
M(19)	0.014	0.020	-0.064	-0.052	0.015
M(16)	-0.084	0.115	0.045	-0.128	0.131
M(11)	-0.008	0.051	0.069	-0.005	-0.004
M(15)	-0.074	-0.003	-0.115	-0.112	-0.017

	M(4)	M(20)	M(7)	M(2)	M(9)
M(4)	0.000				
M(20)	0.044	0.000			
M(7)	-0.106	-0.023	0.000		
M(2)	-0.071	0.000	-0.022	0.000	
M(9)	-0.062	0.004	-0.027	-0.086	0.000
M(8)	-0.017	-0.019	-0.117	0.003	0.152
M(13)	0.021	-0.060	0.008	0.018	-0.043
M(24)	-0.009	-0.011	-0.066	-0.019	-0.058
M(14)	-0.154	0.092	-0.031	0.018	-0.091
M(3)	-0.024	0.061	-0.023	-0.121	0.043
M(19)	-0.116	-0.009	-0.017	-0.089	-0.011
M(16)	-0.117	-0.025	0.008	-0.040	-0.088

M(11)	-0.118	-0.049	-0.031	0.097	-0.109
M(15)	0.002	0.030	-0.035	-0.074	-0.100

	M(8)	M(13)	M(24)	M(14)	M(3)
M(8)	0.000				
M(13)	0.064	0.000			
M(24)	-0.041	-0.034	0.000		
M(14)	0.087	0.030	0.008	0.000	
M(3)	-0.092	0.030	-0.043	0.029	0.000
M(19)	-0.039	-0.001	0.053	-0.008	0.013
M(16)	0.087	-0.137	0.011	-0.138	0.017
M(11)	0.063	0.030	-0.094	-0.071	0.068
M(15)	-0.099	0.070	-0.003	-0.006	-0.009

	M(19)	M(16)	M(11)	M(15)
M(19)	0.000			
M(16)	-0.025	0.000		
M(11)	-0.213	-0.084	0.000	
M(15)	-0.021	-0.046	0.046	0.000

4. ANÁLISIS FACTORIAL COMÚN (Escala Actitud Álgebra).

MATRIX TO BE FACTORED

	A(1)	A(2)	A(3)	A(4)	A(5)
A(1)	1.000				
A(2)	0.202	1.000			
A(3)	-0.051	0.063	1.000		
A(4)	0.299	0.195	0.103	1.000	
A(5)	0.015	0.160	0.161	0.007	1.000
A(6)	0.229	0.201	0.194	0.138	0.441
A(7)	0.217	0.338	0.028	0.147	0.117
A(8)	0.182	0.315	0.198	0.219	0.135
A(9)	0.203	0.442	0.146	0.245	0.132
A(10)	0.315	0.336	0.137	0.192	0.195
A(11)	-0.033	0.086	0.095	0.040	0.053
A(12)	0.042	0.231	0.138	0.045	0.376
A(13)	0.422	0.319	0.020	0.204	0.099
A(14)	0.295	0.243	-0.024	0.309	0.060
A(15)	0.134	0.109	0.113	-0.076	0.127
A(16)	0.374	0.303	-0.005	0.262	0.063
A(17)	-0.177	0.199	0.294	-0.032	0.261
A(18)	0.171	0.355	0.196	0.249	0.314
A(19)	0.277	0.411	0.038	0.236	-0.022
A(20)	0.326	0.171	0.045	0.429	0.042
A(21)	0.175	0.184	0.150	0.117	0.077
A(22)	-0.023	0.030	0.151	-0.014	-0.015
A(23)	0.045	0.004	0.016	-0.032	0.131
A(24)	0.362	0.313	0.061	0.198	0.111

	A(6)	A(7)	A(8)	A(9)	A(10)
A(6)	1.000				
A(7)	0.184	1.000			
A(8)	0.239	0.143	1.000		
A(9)	0.250	0.302	0.338	1.000	
A(10)	0.270	0.231	0.132	0.268	1.000
A(11)	0.177	0.081	0.219	0.264	0.051
A(12)	0.339	0.215	0.109	0.239	0.210
A(13)	0.198	0.209	0.191	0.305	0.324
A(14)	0.180	0.235	0.289	0.286	0.219
A(15)	0.194	-0.000	0.144	0.228	0.071
A(16)	0.033	0.136	0.242	0.269	0.134
A(17)	0.245	-0.048	-0.010	0.159	0.142
A(18)	0.415	0.160	0.237	0.343	0.344
A(19)	0.223	0.201	0.232	0.456	0.274
A(20)	0.087	0.140	0.121	0.166	0.230
A(21)	0.176	0.128	0.204	0.446	0.127
A(22)	0.076	-0.021	0.089	0.127	0.003
A(23)	0.258	-0.014	0.017	0.113	-0.003
A(24)	0.209	0.245	0.237	0.364	0.423

	A(11)	A(12)	A(13)	A(14)	A(15)
A(11)	1.000				
A(12)	0.228	1.000			
A(13)	0.016	0.236	1.000		
A(14)	-0.003	0.079	0.368	1.000	
A(15)	0.252	0.358	0.226	0.118	1.000
A(16)	0.026	0.032	0.212	0.368	0.188
A(17)	0.015	0.392	0.021	-0.095	0.240
A(18)	0.201	0.462	0.325	0.238	0.337
A(19)	0.249	0.160	0.310	0.318	0.250
A(20)	0.038	0.025	0.253	0.346	-0.029
A(21)	0.333	0.270	0.286	0.238	0.317
A(22)	0.123	0.213	0.024	-0.001	0.262
A(23)	0.279	0.174	0.073	-0.082	0.338
A(24)	0.137	0.167	0.284	0.307	0.239

	A(16)	A(17)	A(18)	A(19)	A(20)
A(16)	1.000				
A(17)	-0.112	1.000			
A(18)	0.251	0.188	1.000		
A(19)	0.290	0.066	0.381	1.000	
A(20)	0.239	-0.135	0.203	0.169	1.000
A(21)	0.153	-0.024	0.266	0.466	0.177
A(22)	0.128	0.131	0.153	0.130	-0.002
A(23)	0.079	0.073	0.249	0.108	-0.024
A(24)	0.173	0.021	0.370	0.449	0.195

	A(21)	A(22)	A(23)	A(24)
A(21)	1.000			
A(22)	0.196	1.000		
A(23)	0.173	0.151	1.000	
A(24)	0.312	0.153	0.153	1.000

LATENT ROOTS (EIGENVALUES)

1	2	3	4	5
5.471	2.481	1.650	1.248	1.178
6	7	8	9	10
1.104	1.007	0.895	0.864	0.847
11	12	13	14	15
0.746	0.691	0.684	0.637	0.611
16	17	18	19	20
0.591	0.564	0.522	0.450	0.427
21	22	23	24	
0.396	0.366	0.296	0.274	

COMPONENT LOADINGS

	1	2	3	4
A(18)	0.678	0.227	0.106	0.130
A(9)	0.667	0.009	-0.114	-0.324
A(19)	0.648	-0.104	-0.285	-0.148
A(24)	0.619	-0.103	-0.091	0.082
A(2)	0.593	-0.088	0.197	-0.253
A(13)	0.570	-0.201	0.057	0.260
A(21)	0.550	0.087	-0.436	-0.125
A(10)	0.529	-0.093	0.358	0.084
A(14)	0.516	-0.418	0.020	0.011
A(6)	0.516	0.314	0.300	0.202
A(17)	0.185	0.594	0.358	-0.182
A(12)	0.486	0.509	0.171	0.118
A(3)	0.226	0.323	0.194	-0.450
A(23)	0.243	0.394	-0.342	0.437
A(1)	0.487	-0.449	0.005	0.381
A(8)	0.474	-0.066	-0.039	-0.366
A(15)	0.433	0.416	-0.363	0.250
A(5)	0.323	0.383	0.485	0.202
A(11)	0.321	0.305	-0.426	-0.169
A(4)	0.411	-0.394	0.141	-0.154
A(22)	0.216	0.303	-0.352	-0.106
A(7)	0.409	-0.171	0.206	-0.088
A(16)	0.450	-0.330	-0.169	0.066
A(20)	0.386	-0.441	0.088	0.059

VARIANCE EXPLAINED BY COMPONENTS

1	2	3	4
5.471	2.481	1.650	1.248

PERCENT OF TOTAL VARIANCE EXPLAINED

1	2	3	4
22.797	10.337	6.875	5.200

ROTATED LOADINGS

	1	2	3	4
A(1)	0.708	0.068	0.015	-0.280
A(14)	0.659	-0.007	0.043	0.082
A(13)	0.590	0.247	0.124	-0.112
A(20)	0.589	-0.024	-0.081	0.019
A(4)	0.550	-0.020	-0.083	0.241
A(16)	0.547	-0.077	0.195	-0.023
A(24)	0.527	0.186	0.310	0.040
A(19)	0.504	0.012	0.481	0.218
A(5)	0.037	0.721	-0.069	0.034
A(12)	0.041	0.659	0.306	0.090
A(6)	0.213	0.657	0.134	0.031
A(17)	0.266	0.592	0.070	0.350
A(18)	0.367	0.541	0.324	0.084
A(15)	0.052	0.309	0.651	-0.180
A(21)	0.301	0.003	0.634	0.154
A(11)	-0.018	0.024	0.616	0.163
A(23)	-0.045	0.282	0.532	-0.398
A(22)	-0.080	0.039	0.507	0.096
A(3)	-0.101	0.267	0.108	0.550
A(8)	0.337	0.033	0.234	0.442
A(9)	0.428	0.133	0.412	0.437
A(2)	0.468	0.246	0.092	0.417
A(7)	0.412	0.171	-0.041	0.213
A(10)	0.481	0.414	-0.076	0.123

VARIANCE EXPLAINED BY ROTATED COMPONENTS

1	2	3	4
4.045	2.665	2.619	1.520

PERCENT OF TOTAL VARIANCE EXPLAINED

1	2	3	4
16.856	11.106	10.914	6.333

MATRIX OF RESIDUALS

	A(1)	A(14)	A(13)	A(20)	A(4)
A(1)	0.000				
A(14)	-0.030	0.000			
A(13)	0.155	-0.195	0.000		
A(20)	-0.020	-0.150	0.041	0.000	
A(4)	-0.049	-0.042	-0.039	-0.012	0.000
A(16)	0.041	-0.086	0.008	0.038	-0.033
A(24)	-0.026	0.018	-0.089	-0.132	-0.032
A(19)	0.061	-0.057	-0.045	-0.053	0.099
A(5)	0.007	-0.011	-0.131	-0.059	0.033
A(12)	-0.018	-0.035	0.015	-0.100	-0.131
A(6)	0.014	-0.037	-0.070	0.062	0.073
A(17)	-0.011	-0.016	-0.116	0.039	-0.083

A(18)	-0.045	0.018	0.061	-0.078	-0.088
A(15)	-0.149	-0.102	-0.005	-0.069	0.042
A(21)	0.017	0.024	0.064	-0.001	-0.047
A(11)	-0.017	0.057	0.063	-0.019	0.113
A(23)	0.068	0.025	-0.091	0.048	-0.164
A(22)	-0.107	-0.015	0.007	0.065	-0.069
A(3)	-0.027	0.037	-0.086	-0.054	-0.024
A(8)	-0.083	-0.099	0.109	0.093	0.031
A(9)	-0.004	-0.081	0.026	-0.033	0.102
A(2)	0.050	-0.029	0.025	0.049	-0.009
A(7)	-0.061	0.072	0.098	0.139	-0.020
A(10)	-0.017	-0.025	0.009	-0.072	-0.022

	A(16)	A(24)	A(19)	A(5)	A(12)
A(16)	0.000				
A(24)	-0.017	0.000			
A(19)	0.100	-0.087	0.000		
A(5)	0.002	0.027	-0.101	0.000	
A(12)	-0.098	-0.067	-0.081	-0.016	0.000
A(6)	0.077	0.074	0.008	-0.057	0.077
A(17)	-0.147	0.079	-0.038	-0.032	-0.071
A(18)	-0.103	-0.047	0.005	0.017	-0.038
A(15)	0.036	-0.050	0.021	-0.049	-0.101
A(21)	-0.102	-0.010	0.043	-0.026	-0.010
A(11)	-0.059	-0.064	0.025	-0.025	-0.079
A(23)	-0.107	-0.111	-0.111	0.012	-0.013
A(22)	-0.064	-0.089	-0.018	-0.056	-0.042
A(3)	0.037	-0.036	-0.147	-0.055	0.036
A(8)	-0.012	-0.106	-0.067	-0.059	-0.052
A(9)	0.021	-0.003	-0.114	-0.012	0.011
A(2)	-0.003	0.005	-0.046	-0.094	0.052
A(7)	0.023	0.063	0.075	0.049	-0.009
A(10)	-0.068	-0.000	-0.037	-0.032	0.111

	A(6)	A(17)	A(18)	A(15)	A(21)
A(6)	0.000				
A(17)	0.010	0.000			
A(18)	-0.038	0.021	0.000		
A(15)	-0.031	0.036	-0.015	0.000	
A(21)	-0.126	-0.032	0.018	0.073	0.000
A(11)	-0.079	0.003	-0.118	0.001	0.053
A(23)	-0.104	-0.040	0.062	0.052	0.088
A(22)	-0.019	-0.016	-0.055	-0.020	-0.045
A(3)	-0.074	-0.036	-0.026	-0.052	-0.054
A(8)	0.096	0.040	-0.077	-0.040	0.005
A(9)	-0.078	0.048	0.047	0.000	-0.084
A(2)	-0.207	0.027	0.009	0.022	-0.059
A(7)	0.009	-0.137	-0.080	-0.040	-0.165
A(10)	-0.055	-0.075	-0.106	-0.055	-0.040

	A(11)	A(23)	A(22)	A(3)	A(8)
A(11)	0.000				
A(23)	0.073	0.000			
A(22)	0.031	-0.087	0.000		
A(3)	-0.074	0.082	0.015	0.000	
A(8)	-0.069	0.034	0.025	-0.094	0.000
A(9)	-0.131	-0.044	-0.064	-0.024	0.048
A(2)	0.078	0.018	-0.011	-0.095	0.085
A(7)	0.012	-0.004	-0.026	-0.042	0.060
A(10)	-0.160	0.015	-0.027	0.024	-0.086

	A(9)	A(2)	A(7)	A(10)
A(9)	0.000			
A(2)	-0.116	0.000		
A(7)	-0.089	-0.095	0.000	
A(10)	-0.049	0.027	-0.024	0.000

ANEXO 19

DATOS COMPLEMENTARIOS DEL CAPÍTULO 4.

Características de los ítems de C_{21}

Situación	Nº ítem	Características datos
Representación Visual Geométrica	1	- Dimensiones rectángulos. - Rectángulo dividido en subrectángulos. - Caracteres numéricos exclusivamente.
	3	- Rectángulo dividido en subrectángulos. - Áreas de subrectángulos
	4	- Dimensiones del rectángulo - Caracteres alfanuméricos. - Rectángulo no subdividido en subrectángulos
	8	- Dimensiones del rectángulo. - Una dimensión (base) subdividida en tres partes dos expresadas literalmente y otra, numéricamente.
	9	- Dimensiones del rectángulo. - Cada dimensión subdividida en dos, una numérica y otra, literal.
Visualización Simplificada	2	- Dimensiones en cuadro de doble entrada. - Caracteres alfanuméricos. - Una dimensión subdividida en dos partes. - Dos productos que expresan áreas de subrectángulos.
	6	- Dimensiones en cuadro de doble entrada. - Caracteres alfanuméricos. - Una dimensión subdividida en tres partes. - Tres productos que expresan áreas de subrectángulos.
Expresiones Algebraicas	5	- Suma de áreas de dos subrectángulos. - Caracteres alfanuméricos.
	7	- Suma de áreas de dos subrectángulos. - Caracteres alfanuméricos. - El área de uno de los dos subrectángulos expresada por un único elemento (dato numérico), no por producto de dos dimensiones. Este dato es un número múltiplo del de una de las dimensiones del otro subrectángulo.
	10	- Suma de áreas de tres subrectángulos. - Caracteres alfanuméricos. - El área de uno de los tres subrectángulos está expresada por un único elemento (dato numérico), no por producto de dos dimensiones. Este dato es un número múltiplo de una de las dos dimensiones de los otros dos subrectángulos.

Características de los ítems de C_{22}

Representación	Nº ítem	Características datos
Geométrica	1	- Enunciado verbal - “Es” sustituye a “es igual” o “equivale”. - Contexto: edad - Ecuación resultante: x + 4 = 18
	3	- Enunciado verbal - Palabras clave: añadiendo, triplo, incrementada. - Contexto geométrico: longitudes de segmentos. - Ecuación resultante: 20 + 3x = x + 164
	5	- Enunciado verbal. - Contexto numérico. - Ecuación resultante: 5x -15 = 3x -3.
	2	- Enunciado en forma de ecuación del tipo: A + Bx = C con C > B.
	4	- Enunciado en forma de ecuación del tipo: A x + B = C x con C > A y A = 1
Balanza	6	- Enunciado verbal. - “Es” sustituye a “es igual” o “equivale”. - Contexto: edad. - Palabra clave: doble. - Ecuación resultante:2x - 6 = x
	7	- Enunciado en forma de ecuación del tipo: A + B x = C x + D con C > B y A > D
	8	- Enunciado verbal. - Contexto: cromos. - Ecuación resultante: x + 4 = 18
.	9	- Enunciado en forma de ecuación del tipo: A + B x = C con C > A
	10 11	- Enunciado verbal. - “Es” sustituye a “es igual” o “equivale”. - Contexto: edad. - Palabra clave: triplo. - Ecuación resultante: 3 x + 54 = 5 x

ANEXO 20

DATOS COMPLEMENTARIOS DEL CAPÍTULO 6.

Tabla de índices de dificultad de los ítems de la prueba T

Pregunta apartado nº ítem	**No resueltos**	**Errores**	**Aciertos**	**Indice Dificultad ID_i**
(1, a, 1)	-	1,2	16,15	16/17 = .941 15/17 = .882
(1, b, 2)	-	7,5	10,12	10/17 = .588 12/17 = .705
(1, c, 3)	-	6,3	11,14	11/17 = .647 14/17 = .823
(1, d, 4)	1,1	9,6	7,10	7/16 = .062 10/16 = .625
(1, e, 5)e	-	4,8	13,14	13/17 = .764 14/17 = .823
(1, f, 6)	-	6,4	11,13	11/17 = .647 13/17 = .764
(1, g, 7)	-	3,5	14,12	14/17 = .823 12/17 = .705
(1, h, 8)	-	2,2	14,15	14/17 = .823 15/17 = .882
(1, i, 9)	-	4,2	13,15	13/17 = .764 15/17 = .882
(1, j, 10)	-	5,3	12,13	12/17 = .705 13/17 = .764
(2, a, 11)	2,1	2,3	13,13	13/15 = .866 13/16 = .812
(2, b, 12)	2,1	13,16	2,0	2/15 = .133 0/16 = .000
(2, c, 13)	2,1	10,10	5,6	5/15 = .333 6/16 = .375
(3, a, 14)	15,1	2,5	0,11	0/2 = .000 11/16 = .687
(3, b, 15)	16,1	1,7	0,9	0/1 = .000 9/16 = .562
(3, c, 16)	16,3	1,12	0,2	0/1 = .000 2/14 = .142
(3, d, 17)	16,3	1,12	0,2	0/1 = .000 2/14 = .142
(3, e, 18)	16,9	1,7	0,1	0/1 = .000 1/8 = .125
(3, f, 19)	16,3	1,13	0,1	0/1 = .000 1/14 = .071
(4, a, 20)	1,1	6,4	10,12	10/16 = .625 12/16 = .750
(4, b, 21)	1,1	15,7	1,9	1/16 = .062 9/16 = .562

(4, c, 22)	1,1	13,7	3,9	3/16 = .187 9/16 = .562
(5, a, 23)	1,1	6,4	10,12	10/16 = .625 12/16 = .750
(5, b, 24)	1,1	16,11	0,5	0/16 = .000 5/16 = .312
(5, c, 25)	1,1	8,4	8,12	8/16 = .500 12/16 = .750
(6, a, 26)	0,0	1,1	16,16	16/17 = .941 16/17 = .941
(6, b, 27)	1,1	13,10	3,6	3/16 = .187 6/16 = .375
(6, c, 28)	4,1	9,4	4,12	4/13 = .307 12/16 = .750
(7, a, 29)	1,4	10,5	6,8	6/16 = .375 8/13 = .615
(7, b, 30)	1,4	16,12	0,1	0/16 = .000 1/13 = .076
(7, c, 31)	16,14	1,1	0,2	0/1 = .000 2/3 = .666
(8, a, 32)	-	4,0	13,17	13/17 = .764 17/17 = 1
(8, b, 33)	-	3,3	14,14	14/17 = .823 14/17 = .823
(8, c, 34)	-	6,8	11,9	11/17 = .647 9/17 = .529
(8, d, 35)	1,0	8,8	8,9	8/16 = .500 9/17 = .529
(8, e, 36)	-	4,2	13,15	13/17 = .764 15/17 = .882
(8, f, 37)	1,0	12,8	4,9	4/16 = .250 9/17 = .529
(8, g, 38)	1,0	11,9	5,8	5/16 = .312 8/17 = .470
(8, h, 39)	2,1	14,13	1,3	1/15 = .066 3/16 = .187
(9, a, 40)	11,1	5,3	1,13	1/6 = .166 13/16 = .812
(9, b, 41)	6,1	11,4	0,12	0/11 = .000 12/16 = .750
(9, c, 42)	9,2	7,1	1,14	1/8 = .125 14/15 = .933
(9, d, 43)	11,2	6,4	0,10	0/6 = .000 10/15 = .666
(9, e, 44)	10,1	5,9	2,7	2/7 = .285 7/16 = .437
(9, f, 45)	12,2	5,9	0,6	0/5 = .000 6/15 = .400

(9, g, 46)	12,2	4,3	1,12	1/5 = .200 12/15 = .800
(9, h, 47)	12,2	5,12	0,3	0/5 = .000 3/15 = .200
(10, 0, 48)	7,3	8,8	2,6	2/10 = .200 6/14 = .428
(11, a, 49)	15,9	2,2	0,6	0/2 = .000 6/8 = .750
(11, b, 50)	15,10	1,1	1,6	1/2 = .500 6/7 = .857
(11, c, 51)	16,10	0,2	1,5	1/1 = 1 5/7 = .714
(11, d, 52)	16,10	1,3	0,4	0/1 = .000 4/7 = .571
(12, a, 53)	3,0	8,7	6,10	6/14 = .428 10/17 = .588
(12, b, 54)	3,0	9,5	5,12	5/14 = .357 12/17 = .705
(12, c, 55)	8,0	5,4	4,13	4/9 = .444 13/17 = .764
(11, d, 56)	7,1	8,3	2,13	2/10 = .200 13/16 = .812
(13, a, 57)	8,8	8,9	1,0	1/9 = .111 0/9 = .000
(13, <u>a</u>, 58)	11,14	6,3	0,0	0/6 = .000 0/3 = .000
(13, b, 59)	12,14	5,3	0,0	0/5 = .000 0/3 = .000
(13, <u>b</u>, 60)	11,10	6,7	0,0	0/6 = .000 0/7 = .000
(14, a, 61)	12,8	2,4	3,5	3/5 = .600 5/9 = .555
(14, b, 62)	10,3	7,8	0,6	0/7 = .000 6/14 = .428
(15, a, 63)	4,0	13,9	0,8	0/13 = .000 8/17 = .470
(15, b, 64)	12,0	5,8	0,9	0/5 = .000 9/17 = .529
(15, c, 65)	13,0	3,6	1,11	1/4 = .250 11/17 = .647
(15, d, 66)	11,0	6,9	0,8	0/6 = .000 8/17 = .470
(15, e, 67)	12,0	5,17	0,0	0/5 = .000 0/17 = .000
(15, f, 68)	10,1	7,16	0,0	0/7 = .000 0/16 = .000
(15, g, 69)	15,6	2,6	0,5	0/2 = .000 5/11 = .454

(15, h, 70)	12,2	4,10	1,5	1/5 = .200 5/15 = .333
(15, i, 71)	16,4	1,10	0,3	0/1 = .000 3/13 = .230
(15, j, 72)	13,3	4,14	0,0	0/4 = .000 0/14 = .000
(16, a, 73)	6,0	11,14	0,3	0/11 = .000 3/17 = .176
(16, b, 74)	8,7	9,7	0,3	0/9 = .000 3/10 = .300
(16, c, 75)	10,6	7,11	0,0	0/7 = .000 0/11 = .000
(16, d, 76)	12,4	5,6	0,7	0/5 = .000 7/13 = .538
(16, e, 77)	10,8	7,9	0,0	0/7 = .000 0/9 = 000
(16, f, 78)	11,10	6,5	0,2	0/6= .000 2/7 = .285
(16, g, 79)	12,10	5,4	0,3	0/5 = .000 3/7 = .428
(16, h, 80)	13,8	4,8	0,1	0/4 = .000 8/9 = .888
(17, a, 81)	3,2	0,0	14,15	14/14 = 1 15/15 = 1
(17, a, 82)	3,2	4,5	10,10	10/14 = .714 10/15 = .666
(17, a, 83)	3,2	7,5	7,10	7/14 = .500 10/15 = .666
(17,b, 84)	3,3	0,1	14,13	14/14 = 1 13/14 = .928
(17, b, 85)	3,3	4,6	10,8	10/14 = .714 8/14 = .571
(17, b, 86)	3,3	8,7	6,7	6/14 = .428 7/14 = .500
(17, c, 87)	3,4	8,6	6,7	6/14 = .428 7/13 = .538
(17, c, 88)	3,4	9,10	5,3	5/14 = .357 3/13 = .230
(17, c, 89)	3,4	10,10	4,3	4/14 = .285 3/13 = .230
(18, a, 90)	6,4	6,3	5,10	5/11 = .454 10/13 = .769
(18, a, 91)	7,5	10,8	0,4	0/10 = .000 4/12 = .333
(18, a, 92)	8,5	9,9	0,3	0/9 = .000 3/12 = .250
(18, b, 93)	6,6	8,2	3,9	3/11 = .272 9/11 = .818

(18, <u>b</u>, 94)	8,6	9,7	0,4	0/9 = .000 7/11 = .636
(18, b, 95)	8,7	9,9	0,1	0/9 = .000 1/10 = .100
(19, a, 96)	6,2	6,7	5,8	5/11 = .454 8/15 = .533
(19, b, 97)	7,2	10,9	0,6	0/10 = .000 6/15 = .400
(19, c, 98)	7,3	10,8	0,6	0/10 = .000 6/14 = .428
(20, a, 99)	13,9	3,1	1,7	1/4 = .250 7/8 = .875
(20, <u>a</u>, 100)	17,10	0,1	0,6	0/0… 6/7 = .857
(20, b, 101)	13,11	3,1	1,5	1/4 = .250 5/6 = .833
(20, <u>b</u>, 102)	17,8	0,1	0,8	0/0 8/9 = .888

DATOS COMPLEMENTARIOS DEL CAPÍTULO 8**.**

1. Prueba t-Student de diferencias entre medias de ambas actitudes.

PAIRED SAMPLES T-TEST ON AM VS AA WITH 177 CASES
MEAN DIFFERENCE = 3.684
SD DIFFERENCE = 6.164
T = 7.951 DF = 176 PROB = 0.000

2. ANOVA factorial con dos factores (curso-sexo). Actitud Matemáticas.

LEVELS ENCOUNTERED DURING PROCESSING ARE:
CURSO
7.000 8.000
SEXO$
h m
DEP VAR: AM N: 177 MULTIPLE R: 0.227 SQUARED MULTIPLE R: 0.051

ANALYSIS OF VARIANCE

SOURCE	SUM-OF-SQUARES	DF	MEAN-SQUARE	F-RATIO	P
CURSO	192.323	1	192.323	3.454	0.065
SEXO$	199.835	1	199.835	3.589	0.060
CURSO*SEXO$	16.332	1	16.332	0.293	0.589
ERROR	9632.829	173	55.681		

3. ANOVA factorial con dos factores (curso-sexo). Actitud Álgebra

LEVELS ENCOUNTERED DURING PROCESSING ARE:
CURSO
7.000 8.000
SEXO$
h m
DEP VAR: AA N: 177 MULTIPLE R: 0.309 SQUARED MULTIPLE R: 0.095

ANALYSIS OF VARIANCE

SOURCE	SUM-OF-SQUARES	DF	MEAN-SQUARE	F-RATIO	P
CURSO	481.479	1	481.479	8.152	0.005
SEXO$	103.331	1	103.331	1.750	0.188
CURSO*SEXO$	117.074	1	117.074	1.982	0.161
ERROR	10217.316	173	59.060		

4. Porcentajes de respuestas a cada ítem, por cursos y sexos (Act. Matemáticas).

TABLA DE FRECUENCIAS DE LOS ÍTEMS M(1) A M(24

	0.000	1.000	2.000	TOTAL	N
M(1)	25.99	33.90	40.11	100.00	177.00
M(2)	22.03	25.99	51.98	100.00	177.00
M(3)	50.28	31.07	18.64	100.00	177.00
M(4)	17.51	44.07	38.42	100.00	177.00
M(5)	63.84	24.86	11.30	100.00	177.00
M(6)	48.02	38.42	13.56	100.00	177.00
M(7)	36.16	30.51	33.33	100.00	177.00
M(8)	5.65	17.51	76.84	100.00	177.00
M(9)	11.30	23.73	64.97	100.00	177.00
M(10)	51.98	34.46	13.56	100.00	177.00
M(11)	11.86	14.69	73.45	100.00	177.00
M(12)	34.46	48.02	17.51	100.00	177.00
M(13)	23.73	31.07	45.20	100.00	177.00
M(14)	15.82	33.33	50.85	100.00	177.00
M(15)	15.82	34.46	49.72	100.00	177.00
M(16)	10.73	37.29	51.98	100.00	177.00
M(17)	46.33	38.42	15.25	100.00	177.00
M(18)	45.20	36.16	18.64	100.00	177.00
M(19)	6.78	14.69	78.53	100.00	177.00
M(20)	40.11	24.86	35.03	100.00	177.00
M(21)	3.39	15.25	81.36	100.00	177.00
M(22)	3.39	16.95	79.66	100.00	177.00
M(23)	6.78	20.90	72.32	100.00	177.00
M(24)	12.43	30.51	57.06	100.00	177.00

TABLA DE FRECUENCIAS DE LOS ÍTEMS M(1) A M(24) POR CURSOS

CURSO	7.000			8.000		
	0.000	1.000	2.000	0.000	1.000	2.000
M(1)	36.67	26.67	36.67	14.94	41.38	43.68
M(2)	16.67	25.56	57.78	27.59	26.44	45.98
M(3)	42.22	35.56	22.22	58.62	26.44	14.94
M(4)	21.11	41.11	37.78	13.79	47.13	39.08
M(5)	65.56	22.22	12.22	62.07	27.59	10.34
M(6)	44.44	40.00	15.56	51.72	36.78	11.49
M(7)	33.33	22.22	44.44	39.08	39.08	21.84
M(8)	1.11	11.11	87.78	10.34	24.14	65.52
M(9)	6.67	22.22	71.11	16.09	25.29	58.62
M(10)	51.11	35.56	13.33	52.87	33.33	13.79
M(11)	7.78	10.00	82.22	16.09	19.54	64.37
M(12)	31.11	42.22	26.67	37.93	54.02	8.05
M(13)	25.56	22.22	52.22	21.84	40.23	37.93
M(14)	14.44	25.56	60.00	17.24	41.38	41.38
M(15)	12.22	27.78	60.00	19.54	41.38	39.08
M(16)	11.11	33.33	55.56	10.34	41.38	48.28
M(17)	43.33	38.89	17.78	49.43	37.93	12.64
M(18)	45.56	35.56	18.89	44.83	36.78	18.39
M(19)	1.11	13.33	85.56	12.64	16.09	71.26
M(20)	50.00	18.89	31.11	29.89	31.03	39.08
M(21)	1.11	12.22	86.67	5.75	18.39	75.86
M(22)	2.22	14.44	83.33	4.60	19.54	75.86
M(23)	5.56	20.00	74.44	8.05	21.84	70.11
M(24)	13.33	26.67	60.00	11.49	34.48	54.02

TABLA DE FRECUENCIAS DE LOS ÍTEMS M(1) A M(24) POR SEXOS

SEXO	HOMBRE			MUJER		
	0.000	1.000	2.000	0.000	1.000	2.000
M(1)	23.08	17.31	59.62	27.20	40.80	32.00
M(2)	19.23	23.08	57.69	23.20	27.20	49.60
M(3)	55.77	25.00	19.23	48.00	33.60	18.40
M(4)	15.38	44.23	40.38	18.40	44.00	37.60
M(5)	55.77	25.00	19.23	67.20	24.80	8.00
M(6)	38.46	42.31	19.23	52.00	36.80	11.20
M(7)	26.92	36.54	36.54	40.00	28.00	32.00
M(8)	5.77	5.77	88.46	5.60	22.40	72.00
M(9)	11.54	21.15	67.31	11.20	24.80	64.00
M(10)	50.00	40.38	9.62	52.80	32.00	5.20
M(11)	17.31	15.38	67.31	9.60	14.40	76.00
M(12)	32.69	48.08	19.23	35.20	48.00	16.80
M(13)	21.15	30.77	48.08	24.80	31.20	44.00
M(14)	13.46	32.69	53.85	16.80	33.60	49.60
M(15)	9.62	30.77	59.62	18.40	36.00	45.60
M(16)	1.92	40.38	57.69	14.40	36.00	49.60
M(17)	38.46	42.31	19.23	49.60	36.80	13.60
M(18)	36.54	34.62	28.85	48.80	36.80	14.40
M(19)	3.85	11.54	84.62	8.00	16.00	76.00
M(20)	23.08	40.38	36.54	47.20	18.40	34.40
M(21)	7.69	5.77	86.54	1.60	19.20	79.20
M(22)	5.77	15.38	78.85	2.40	17.60	80.00
M(23)	9.62	23.08	67.31	5.60	20.00	74.40
M(24)	13.46	25.00	61.54	12.00	32.80	55.20

5. Porcentajes de respuestas a cada ítem, por cursos y sexos (Act. Álgebra).

TABLA DE FRECUENCIAS DE LOS ÍTEMS A(1) A A(24)

	0.000	1.000	2.000	TOTAL	N
A(1)	28.81	34.46	36.72	100.00	177.00
A(2)	17.51	23.73	58.76	100.00	177.00
A(3)	49.72	32.77	17.51	100.00	177.00
A(4)	13.56	45.76	40.68	100.00	177.00
A(5)	68.93	27.68	3.39	100.00	177.00
A(6)	54.24	38.42	7.34	100.00	177.00
A(7)	31.07	36.16	32.77	100.00	177.00
A(8)	6.78	16.95	76.27	100.00	177.00
A(9)	20.90	33.33	45.76	100.00	177.00
A(10)	40.11	39.55	20.34	100.00	177.00
A(11)	32.20	37.29	30.51	100.00	177.00
A(12)	46.33	38.42	15.25	100.00	177.00
A(13)	23.73	25.99	50.28	100.00	177.00
A(14)	10.17	23.73	66.10	100.00	177.00
A(15)	46.33	39.55	14.12	100.00	177.00
A(16)	18.64	38.98	42.37	100.00	177.00
A(17)	62.15	28.81	9.04	100.00	177.00
A(18)	48.02	34.46	17.51	100.00	177.00
A(19)	8.47	29.94	61.58	100.00	177.00
A(20)	28.25	27.68	44.07	100.00	177.00
A(21)	13.56	35.59	50.85	100.00	177.00
A(22)	9.60	51.41	38.98	100.00	177.00
A(23)	37.29	49.15	13.56	100.00	177.00
A(24)	19.21	27.68	53.11	100.00	177.00

TABLA DE FRECUENCIAS DE LOS ÍTEMS A(1) A A(24) POR CURSOS

CURSO	7.000			8.000		
	0.000	1.000	2.000	0.000	1.000	2.000
A(1)	32.22	31.11	36.67	25.29	37.93	36.78
A(2)	11.11	14.44	74.44	24.14	33.33	42.53
A(3)	41.11	38.89	20.00	58.62	26.44	14.94
A(4)	12.22	44.44	43.33	14.94	47.13	37.93
A(5)	71.11	26.67	2.22	66.67	28.74	4.60
A(6)	47.78	42.22	10.00	60.92	34.48	4.60
A(7)	26.67	31.11	42.22	35.63	41.38	22.99
A(8)	3.33	10.00	86.67	10.34	24.14	65.52
A(9)	13.33	25.56	61.11	28.74	41.38	29.89
A(10)	34.44	40.00	25.56	45.98	39.08	14.94
A(11)	31.11	28.89	40.00	33.33	45.98	20.69
A(12)	34.44	41.11	24.44	58.62	35.63	5.75
A(13)	22.22	20.00	57.78	25.29	32.18	42.53
A(14)	11.11	16.67	72.22	9.20	31.03	59.77
A(15)	42.22	43.33	14.44	50.57	35.63	13.79
A(16)	15.56	37.78	46.67	21.84	40.23	37.93
A(17)	58.89	30.00	11.11	65.52	27.59	6.90
A(18)	40.00	35.56	24.44	56.32	33.33	10.34
A(19)	4.44	24.44	71.11	12.64	35.63	51.72
A(20)	31.11	21.11	47.78	25.29	34.48	40.23
A(21)	8.89	32.22	58.89	18.39	39.08	42.53
A(22)	8.89	45.56	45.56	10.34	57.47	32.18
A(23)	38.89	45.56	15.56	35.63	52.87	11.49
A(24)	18.89	24.44	56.67	19.54	31.03	49.43

TABLA DE FRECUENCIAS DE LOS ÍTEMS A(1) A A(24) POR SEXOS.

SEXO	HOMBRE			MUJER		
	0.000	1.000	2.000	0.000	1.000	2.000
A(1)	26.92	19.23	53.85	29.60	40.80	29.60
A(2)	13.46	19.23	67.31	19.20	25.60	55.20
A(3)	53.85	23.08	23.08	48.00	36.80	15.20
A(4)	15.38	50.00	34.62	12.80	44.00	43.20
A(5)	61.54	32.69	5.77	72.00	25.60	2.40
A(6)	46.15	48.08	5.77	57.60	34.40	8.00
A(7)	25.00	42.31	32.69	33.60	33.60	32.80
A(8)	3.85	9.62	86.54	8.00	20.00	72.00
A(9)	17.31	40.38	42.31	22.40	30.40	47.20
A(10)	44.23	38.46	17.31	38.40	40.00	21.60
A(11)	32.69	38.46	28.85	32.00	36.80	31.20
A(12)	38.46	36.54	25.00	49.60	39.20	11.20
A(13)	25.00	21.15	53.85	23.20	28.00	48.80
A(14)	11.54	21.15	67.31	9.60	24.80	65.60
A(15)	36.54	44.23	19.23	50.40	37.60	12.00
A(16)	13.46	40.38	46.15	20.80	38.40	40.80
A(17)	59.62	28.85	11.54	63.20	28.80	8.00
A(18)	46.15	32.69	21.15	48.80	35.20	16.00
A(19)	9.62	26.92	63.46	8.00	31.20	60.80
A(20)	17.31	28.85	53.85	32.80	27.20	40.00
A(21)	7.69	36.54	55.77	16.00	35.20	48.80
A(22)	13.46	46.15	40.38	8.00	53.60	38.40
A(23)	36.54	50.00	13.46	37.60	48.80	13.60
A(24)	26.92	23.08	50.00	16.00	29.60	54.40