

**UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA**

**«Unicidad, capas límite y núcleos muertos en  
problemas elípticos degenerados »**

**Autor: Jorge José García Melián  
Director: Dr. D. José Claudio Sabina de Lis**

**Departamento de Análisis Matemático**

## ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS .....	III
INTRODUCCIÓN .....	V

### Capítulo 1

PRELIMINARES UNIDIMENSIONALES .....	1
1.1 REGULARIDAD DE LAS SOLUCIONES .....	1
1.2 PROBLEMAS DE TIPO LOGÍSTICO Y SUS PERTURBACIONES .....	3
1.2.1 Aplicaciones al problema logístico .....	7
1.2.2 Perturbaciones sublineales del problema logístico .....	8
1.3 CAPAS DE TRANSICIÓN INTERNAS .....	13
1.3.1 Homogeneizaciones simples .....	14
1.3.2 Homogeneizaciones simples con pico .....	19
1.3.3 Homogeneizaciones múltiples: ceros del mismo orden .....	23
1.3.4 Homogeneizaciones múltiples: ceros de distinto orden .....	27
1.3.5 Casos degenerados .....	28

### Capítulo 2

ESTUDIO DE CAPAS LÍMITE .....	31
2.1 PROBLEMAS DE TIPO LOGÍSTICO .....	32
2.1.1 Existencia y unicidad de soluciones positivas .....	32
2.1.2 El fenómeno de homogeneización .....	35
2.1.3 Estimaciones de la capa límite .....	37
2.2 APLICACIONES A LA ECUACIÓN LOGÍSTICA Y PERTURBACIONES .....	41
ANEXO AL CAPÍTULO 2	

### Capítulo 3

FENOMENOLOGÍA DE NÚCLEOS MUERTOS .....	47
3.1 CONDICIÓN NECESARIA PARA LA EXISTENCIA DE NÚCLEO MUERTO .....	47
3.2 EXISTENCIA DE NÚCLEOS MUERTOS Y ESTIMACIONES .....	48
3.3 APLICACIONES A LA ECUACIÓN LOGÍSTICA .....	53

## Capítulo 4

UNICIDAD EN DOMINIOS RADIALES. PROBLEMA DE CAUCHY .....	55
4.1 EL PROBLEMA DE CAUCHY .....	55
4.1.1 <i>Demostración de resultados: el caso no singular</i> .....	61
4.1.2 <i>El caso singular</i> .....	63
4.1.3 <i>Continuidad respecto a datos iniciales y parámetros</i> .....	73
4.1.4 <i>Diferenciabilidad respecto a <math>d</math></i> .....	75
4.2 UNICIDAD CON HOMOGENEIZACIÓN SIMPLE .....	80
4.2.1 <i>Resultados preliminares</i> .....	80
4.2.2 <i>El problema en bolas</i> .....	82
4.2.3 <i>El problema en anillos</i> .....	87
4.2.4 <i>Necesidad de la hipótesis de homogeneización en §4.2.2</i> .....	89
4.3 APLICACIONES AL PROBLEMA LOGÍSTICO PERTURBADO .....	93
4.4 EXISTENCIA DE NÚCLEOS MUERTOS .....	94

## Capítulo 5

5 UNICIDAD EN EL CASO NO SINGULAR .....	97
5.1 EXISTENCIA DE SOLUCIONES .....	97
5.2 RESULTADOS PRELIMINARES .....	99
5.3 UNICIDAD DE SOLUCIONES .....	103
ANEXO AL CAPÍTULO 5 .....	108
APÉNDICE A .....	111
APÉNDICE B .....	117
REFERENCIAS .....	123

# Agradecimientos

Esta memoria ha sido realizada bajo la dirección del Dr. D. José Claudio Sabina de Lis, a quien expreso mi más sincero agradecimiento.

También quiero dar gracias de una forma especial al Dr. D. Julián López Gómez por sus interesantes sugerencias durante la investigación que dio lugar a la presente memoria, así como a los compañeros del departamento que de alguna forma u otra me han apoyado en estos años. En particular, a Juan Diego y Rodrigo por resolver mis problemas con los ordenadores.

# **Introducción**

# Introducción

El tema principal de esta memoria será el estudio del comportamiento cualitativo de las soluciones positivas de problemas de la forma

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda f(u) & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

cuando el parámetro  $\lambda > 0$  tiende a infinito. Como es habitual,  $\Delta_p$  representa el operador laplaciano- $p$ , definido en sentido distribucional en  $W_0^{1,p}(\Omega)$  con valores en  $W^{-1,p'}(\Omega)$ ,  $p > 1$ ,  $p' = p/(p-1)$ , como  $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ , y  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  es un dominio acotado regular. Una parte importante de la memoria tratará también de algunas perturbaciones de (1).

Como es de esperar, la estructura de la no linealidad  $f$  determina los aspectos de existencia, unicidad y perfil asintótico de las soluciones de (1). En una parte de la memoria estudiaremos el problema “modelo” donde  $f$  es una función continua tal que  $f(u) \sim mu^{p-1}$  cuando  $u \rightarrow 0+$ ,  $m > 0$ ,  $f(u)/u^{p-1}$  es decreciente en  $u \geq 0$  y  $f$  admite un (único) cero  $\bar{u}_0$  de orden  $k > 0$ . Estas hipótesis serán llamadas (H1) a lo largo de toda la memoria (véanse los Capítulos 1, 2 y 3).

El paradigma de esta clase de problemas es la versión para el laplaciano- $p$  de la ecuación logística en dinámica de poblaciones ( $p = 2$ , [61], [62]), también llamada ecuación de Fisher en genética de poblaciones ( $p = q = 2$ , [30], [61]). Concretamente,

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda m |u|^{p-2} u - |u|^{q-1} u & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{L}$$

donde  $m$ ,  $p$ ,  $q$  son constantes positivas tales que  $p > 1$ ,  $q > p - 1$  y  $\lambda$  es un parámetro positivo. El cambio de escala  $u = (\lambda m)^{\frac{1}{q-p+1}} v$ , reduce el problema (L) al formato (1) en el que se cumplen las hipótesis anteriores. Además, uno de los objetivos más importantes de la memoria es el estudio del problema perturbado

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda m |u|^{p-2} u - |u|^{q-1} u + g(u) & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{LP}$$

donde  $g = o(u^{p-1})$  cuando  $u \rightarrow 0+$  y  $g = o(u^q)$  cuando  $u \rightarrow +\infty$  (cf. hipótesis (Hg) y (Hg)' en los Capítulos 1, 2 y 4).

Bajo las hipótesis (H1), resulta ya conocido que (1) admite una única solución positiva  $u_\lambda$  sólo cuando  $\lambda > \sigma_{1,p}/m$ , siendo  $\sigma_{1,p}$  el autovalor principal de  $-\Delta_p$  en  $\Omega$  (véase el §2.1.1 para

una discusión sobre el problema de autovalores). Una demostración de este hecho se dio por vez primera en [27] (los trabajos [48] y [49], aunque son posteriores a [27], sólo proporcionan existencia y unicidad para  $\lambda$  grande). Se puede probar además que

$$0 < u_\lambda(x) \leq \bar{u}_0, \quad x \in \Omega. \quad (2)$$

Uno de nuestros objetivos es analizar el comportamiento de la solución  $u_\lambda$  de (1) cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Describamos en primer lugar la fenomenología que vamos a estudiar. La primera propiedad de la que nos ocuparemos es la de “homogeneización”, es decir, la validez del límite

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u_\lambda = \bar{u}_0, \quad (3)$$

uniformemente sobre compactos de  $\Omega$ . Este tipo de comportamiento interior ha sido estudiado en el caso semilineal ( $p = 2$ ) en una serie de artículos. Por ejemplo [7], [15], [21], [31], [34], [76] (también [65] para condiciones de contorno tipo Neumann y [60] para sistemas elípticos de tipo cooperativo).

El segundo fenómeno que estudiaremos es consecuencia de la interacción entre la condición de contorno  $u_\lambda|_{\partial\Omega} = 0$  y el proceso de homogeneización. De hecho, cuando  $\lambda$  crece,  $u_\lambda$  varía desde valores próximos a  $\bar{u}_0$  cada vez más cerca de  $\partial\Omega$  hasta  $u = 0$  en  $\partial\Omega$ , dando lugar a una capa límite. En particular, resulta claro que habrá de tenerse

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu} = -\infty,$$

sobre  $\partial\Omega$ , donde  $\nu$  es la normal exterior unitaria en  $\partial\Omega$ . Medir el “ancho” de la capa límite consiste en encontrar una estimación lo más exacta posible de la forma en que diverge  $\partial u_\lambda / \partial \nu$ . Para el caso semilineal, estas estimaciones han sido obtenidas en [31] y [76].

Un tercer aspecto del comportamiento de  $u_\lambda$  para  $\lambda$  grande, consecuencia de la degeneración de  $\Delta_p$ , consiste en la aparición de “núcleos muertos” (“dead” o “flat” cores). Esto quiere decir que el conjunto  $\mathcal{O}_\lambda := \{x \in \Omega : u_\lambda(x) = \bar{u}_0\}$  puede ser no vacío para  $\lambda$  suficientemente grande, dependiendo de los valores relativos de  $p$  y  $k$ , el orden de  $\bar{u}_0$ . Tal tipo de fenómeno se encuadra en el campo de las fronteras libres (cf. [26] para una introducción al tema). En el contexto de (1), los núcleos muertos han sido estudiados en [47] (en dimensión  $N = 1$ ), [53] (bajo simetría radial) y [51] (en dominios generales).

Una de las consecuencias de la metodología empleada para el estudio de los problemas precedentes es que el comportamiento de las soluciones es “esencialmente” unidimensional. Es por ello que analizaremos en detalle la versión unidimensional del problema (1), estudiando la homogeneización, formación de capas límite y núcleos muertos para familias de soluciones  $\{u_\lambda\}$  con máximo próximo a un cero  $\bar{u}_0$  de  $f$ . Más aún, emprendemos un estudio exhaustivo y clasificatorio de todas las homogeneizaciones múltiples que pueden presentar las familias  $\{u_\lambda\}$  de soluciones cuando se aproximan a ceros distintos de  $f$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Por su novedad, presentamos fórmulas explícitas que localizan de manera exacta las “capas de transición interna” (transition layers) que separan las regiones donde  $u_\lambda$  converge a distintos ceros de  $f$ .

En este contexto unidimensional nos ocuparemos también del caso en que la homogeneización múltiple involucra ceros de  $f$  de orden  $k < p - 1$ . Este escenario proporciona ejemplos explícitos de existencia de infinitas familias de soluciones con la propiedad de homogeneización. Esta situación de referencia nos permitirá “medir” el carácter óptimo de las condiciones para la unicidad en dimensiones superiores.

En el ambiente  $N$ -dimensional desarrollaremos un estudio completo de los tres fenómenos anteriores: homogeneización, capas límite y núcleos muertos, para el problema (1), donde  $f$  satisface (H1). El ejemplo más significativo es el problema logístico (L). Por otra parte, la experiencia del caso semilineal  $p = 2$  (cf. [31]) invita a estudiar la presencia de estos comportamientos en perturbaciones de orden inferior en el infinito. Para el problema logístico (L), (LP) representa el ejemplo canónico de este tipo de perturbaciones.

El análisis que permite estudiar las propiedades de homogeneización, capa límite y núcleo muerto se apoya fuertemente en la unicidad de soluciones, por lo que no es directamente aplicable al problema (LP). En efecto, hasta donde sabemos, la unicidad de soluciones positivas de (LP) en un dominio general es todavía un problema abierto bastante complicado. En el caso de referencia  $p = 2$  se sabe que la unicidad no es cierta si  $\lambda$  es del orden de  $\sigma_{1,p}/m$  ([20]), aunque la solución positiva es única si  $\lambda$  es suficientemente grande (cf. [7], [16], [31], [76]). Tal unicidad se prueba por lo general usando argumentos de continuación, donde la linealidad del operador  $-\Delta$  es crucial. Este método es impracticable cuando tratamos con  $-\Delta_p$ ,  $p \neq 2$ . De hecho, el gran obstáculo al considerar las linealizaciones formales de problemas como (1), (L) ó (LP) es que no se dispone de la teoría espectral necesaria. En efecto, tales ecuaciones degeneran en los puntos “a priori” desconocidos donde se anula el gradiente de las soluciones. Más aún, en presencia de núcleos muertos, donde la degeneración se extiende a todo un conjunto con interior no vacío, las linealizaciones formales carecen de sentido.

Por tanto, para avanzar en el estudio de la unicidad de soluciones positivas de (LP) parece razonablemente justificado el análisis de una situación simétrica. Estudiaremos así el problema (LP) cuando  $\Omega = D$ , un dominio con simetría radial, es decir, una bola o un anillo. En el caso de la bola para  $p = 2$  y soluciones positivas, el célebre teorema de Gidas-Ni-Nirenberg ([45]) reduce el estudio a soluciones radiales (para  $p = 2$ , hay una larga relación de trabajos que se apoyan en GNN para estudiar (1); cf. por ejemplo [73], [74] para condiciones bastante generales sobre la no linealidad). Esto no es cierto para anillos, pues por ejemplo en [18] se considera una ecuación con infinitas soluciones no radiales. Sin embargo, el resultado de GNN no es válido en general para el laplaciano- $p$  (véase [53]). Dos casos conocidos en los que el Teorema de GNN es válido son cuando se sabe a priori que la solución tiene un único punto crítico en el centro de la bola ([8]) o cuando  $p = N$ , bajo condiciones bastante restrictivas sobre la no linealidad ([52]). Además, incluso en el caso  $D = B$ , los resultados de [8] no son aplicables si  $p > 2$ , por la presencia de núcleos muertos. En el contexto de (LP), no sólo conseguiremos probar que la solución radial positiva es única para  $\lambda$  grande, sino que seremos capaces – mediante una aplicación especial del método de sub y supersoluciones (cf. Apéndice B) – de probar que ésa es la única solución de (LP) para  $\lambda$  grande.

Nos ocuparemos además de problemas de la forma (1) en bolas, en el régimen de parámetros donde no es posible la aparición de núcleos muertos (véase más adelante). La situación es

básicamente la misma que en el caso  $p = 2$ , donde se han construido familias de soluciones radiales positivas con máximo próximo a un cero  $\bar{u}_0$  de  $f$  (cf. [73], [53]), mostrándose en algunos casos la unicidad de tales familias (cf. [74] y para dominios generales [7], [16] [31] y [76]). Aquí seguiremos el enfoque de [16], obteniendo estimaciones adecuadas de las soluciones y demostrando que son no degeneradas para  $\lambda$  grande.

Es muy importante destacar una diferencia fundamental entre el caso singular  $0 < k < p - 1$  ( $k$  el orden de  $\bar{u}_0$  como cero de  $f$ ) y el no singular  $k \geq p - 1$ : en el último, es suficiente con que una familia de soluciones radiales positivas  $\{u_\lambda\}$  cumpla  $\max u_\lambda \rightarrow \bar{u}_0$  para que sea homogeneizante, y esto proporciona la unicidad (esta propiedad es válida para el anillo independientemente de la relación entre  $k$  y  $p$ ). Sin embargo, en el caso singular y en la bola, la condición  $\max u_\lambda \rightarrow \bar{u}_0$  no es suficiente para la unicidad, y se pueden construir todas las familias de soluciones que queramos sin que ninguna de ellas sea homogeneizante (cf. §4.2.4).

Una vez expuesta la fenomenología que vamos a tratar, presentemos de forma más concreta nuestros resultados.

En el Capítulo 1 estudiaremos problemas unidimensionales de la forma

$$\begin{aligned} - \varphi_p(u')' &= \lambda f(u) & 0 < x < 1 \\ u(0) &= u(1) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

donde  $\varphi_p(z) = |z|^{p-2}z$ ,  $z \in \mathbb{R}$  y  $\lambda$  es un parámetro positivo. Los resultados obtenidos serán necesarios a la hora de tratar con los casos  $N$ -dimensionales. Después de un breve preliminar sobre regularidad de soluciones (§1.1), estudiamos el problema (4) bajo las hipótesis (H1) sobre  $f$ . Probaremos que bajo estas condiciones (4) posee una única solución positiva  $u_\lambda$  cuando  $\lambda > \sigma_{1,p}/m$ , donde  $\sigma_{1,p}$  es el autovalor principal de

$$\begin{aligned} - \varphi_p(u')' &= \lambda \varphi_p(u) & 0 < x < 1 \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

El problema (4) fue estudiado en [47], donde se consideraron además soluciones con cambios de signo. Nuestra demostración, sin embargo, es diferente de la de [47], y pone de manifiesto que la afirmación sobre la unicidad en su Teorema 2.1 ([47, pág 423]) puede obtenerse de sus hipótesis (2.3) sin necesidad de requerir además la condición (2.7).

Asimismo, obtenemos la estimación (2) y la homogeneización (3) para la única solución positiva  $u_\lambda$  de (4). Más aún, la estimación sobre la capa límite toma la forma

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-1/p} u'(0) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} -\lambda^{-1/p} u'(1) = (p' F(\bar{u}_0))^{1/p}, \tag{5}$$

donde  $F(\bar{u}_0) = \int_0^{\bar{u}_0} f(s) ds$  (cf. Teorema 1.2.2). Por otro lado, demostramos en el Teorema 1.2.3 que si el orden  $k$  del cero  $\bar{u}_0$  de  $f$  y  $p$  cumplen la relación  $0 < k < p - 1$ , entonces para  $\lambda \geq \lambda^*$  el conjunto  $\mathcal{O}_\lambda = \{x \in (0, 1) : u_\lambda(x) = \bar{u}_0\}$  es no vacío, dando además una expresión explícita de  $\lambda^*$  y  $\mathcal{O}_\lambda$  en términos de  $f$  y  $p$ . Esto nos permite, de forma inmediata, obtener la estimación  $\text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \{0, 1\}) \sim C \lambda^{-1/p}$ , donde  $C$  viene dada explícitamente en términos de  $f$  y  $p$ .

Como hemos resaltado previamente, todos estos resultados son aplicables a la versión unidimensional del problema logístico (L):

$$\begin{aligned} - \quad & \varphi_p(u')' = \lambda|u|^{p-2}u - |u|^{q-1}u \quad 0 < x < 1 \\ & u(0) = u(1) = 0 . \end{aligned}$$

Mediante un tratamiento análogo, estudiamos la versión unidimensional del problema (LP), es decir,

$$\begin{aligned} - \quad & \varphi_p(u')' = \lambda|u|^{p-2}u - |u|^{q-1}u + g(u) \quad 0 < x < 1 \\ & u(0) = u(1) = 0 , \end{aligned}$$

obteniendo al menos una solución positiva  $w_\lambda$  cuando  $\lambda > \sigma_{1,p}/m$ . Esta solución es además única para  $\lambda$  grande, tiene la propiedad de homogeneización y satisface la estimación de capa límite (5).

Una segunda parte del Capítulo 1 (§1.3) está dedicada a caracterizar el conjunto de soluciones positivas de (4), sin imponer ninguna hipótesis de monotonía sobre  $f$ . Solamente supondremos que  $f$  es  $C^1$  excepto quizá en sus ceros, que serán de orden finito. Nuestro propósito es clasificar todas las posibles familias de soluciones positivas  $\{u_\lambda\}$  para las que, llamando  $\bar{u}_\lambda = \max u_\lambda$ , se tenga

$$\bar{u}_\lambda \rightarrow \bar{u}_0 \quad \text{cuando } \lambda \rightarrow +\infty . \quad (6)$$

Para ello, es imprescindible conocer la estructura del conjunto  $\mathcal{N} := \{u \in [0, \bar{u}_0] : F(u) = F(\bar{u}_0)\}$ , con  $F(u) = \int_0^u f(s)ds$ . Dependiendo del número de ceros de  $f$  que haya en el conjunto  $\mathcal{N}$  y del orden de cada cero, se presenta una fenomenología distinta. El caso más interesante (y la aportación más significativa de este primer capítulo) aparece cuando el conjunto  $\mathcal{N}$  consta de varios ceros del mismo orden, generándose en estas condiciones las capas de transición interna. Es decir, si  $\mathcal{N} = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  y todos los  $u_i$  son ceros de orden  $k$  de  $f$ , entonces existe una única familia de soluciones positivas  $\{u_\lambda\}$  tales que se da (6), y unos números  $\xi_0 = 0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{m-1} < \xi_m = 1/2$  tales que  $u_\lambda \rightarrow u_{j+1}$  uniformemente sobre compactos de  $(\xi_j, \xi_{j+1})$ ,  $j = 0, 1, \dots, m-1$  (cf. §§1.3.4 y 1.3.5). Por tanto, se determina con exactitud la posición asintótica de las capas de transición.

Por otro lado, si el orden de los ceros de  $\mathcal{N}$  es menor que  $p-1$ , aparecen núcleos muertos en las soluciones de (4). La presencia de estos núcleos muertos hace que la unicidad no sea válida ni siquiera para  $\lambda$  grande, debido a la presencia de infinitas familias homogeneizantes. Para  $p > 2$ , este resultado está contenido en [47] para un tipo específico de no linealidad.

En el Capítulo 2 estudiaremos los fenómenos de homogeneización y capa límite para la única solución positiva  $\{u_\lambda\}$  de (1) cuando  $f$  cumple las hipótesis (H1). Nuestra estimación de la capa límite toma la forma

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu} = -(p'F(\bar{u}_0))^{1/p} , \quad (7)$$

uniformemente en  $\partial\Omega$ , donde  $\nu$  es la normal exterior unitaria en  $\partial\Omega$ . Este resultado fue obtenido, en el caso  $p = 2$  y para dominios convexos en [31]. El caso  $p \neq 2$ , todavía para dominios convexos, fue tratado en [38], y el caso general en [41] (véase también [40]).

La estrategia consiste en obtener una estimación superior del límite (7) cuando  $\Omega = B$ , una bola de  $\mathbb{R}^N$ , y una estimación interior en el caso  $\Omega = A$ , un anillo. Para ello son necesarios los resultados unidimensionales obtenidos en el Capítulo 1 (en particular, el Teorema 1.2.2). El caso general se deduce entonces mediante una comparación adecuada, haciendo uso esencial de la unicidad de soluciones de (1) en cualquier dominio acotado regular.

Todas estas afirmaciones son ciertas para la única solución positiva del problema logístico, denotada por  $\theta_{\lambda,m}$ . Además, se puede probar, empleando también argumentos de comparación, que todas las posibles familias  $\{v_\lambda\}$  de soluciones positivas del problema logístico perturbado (LP) se comportan de la misma forma. Esto es consecuencia de que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\lambda_0 > 0$  tal que si  $v$  es una solución positiva de (LP) con  $\lambda \geq \lambda_0$ , entonces

$$\theta_{\lambda,m-\varepsilon} \leq v \leq \theta_{\lambda,m+\varepsilon} \quad \text{en } \Omega . \quad (8)$$

En el Capítulo 3 nos ocuparemos de los núcleos muertos. Como ya se ha dicho, la degeneración de  $\Delta_p$  permite que para la solución positiva  $u_\lambda$  de (1) y  $\lambda$  grande el conjunto  $\mathcal{O}_\lambda = \{x \in \Omega : u_\lambda(x) = \bar{u}_0\}$  sea no vacío. La primera observación es que sólo pueden desarrollarse tales núcleos muertos cuando el orden  $k$  de  $\bar{u}_0$  satisface  $k < p - 1$ .

Por otro lado, se demostró en [51] que los núcleos muertos  $\mathcal{O}_\lambda$  aparecen cuando  $\lambda$  es mayor o igual que un cierto valor crítico  $\lambda^* > \sigma_{1,p}/m$ , proporcionando una estimación de la proximidad de  $\mathcal{O}_\lambda$  a la frontera de la forma  $0 < \text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega) \leq C_0 \lambda^{-1/p}$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ , sin información explícita sobre  $C_0$ . La existencia de núcleos muertos fue demostrada independientemente en la investigación que ha dado lugar a la presente memoria. Más aún, en el §3.2, se mejoran los resultados de [51] en dos aspectos. Por un lado, estimamos el valor de  $\lambda^*$  en términos de la no linealidad  $f$  y ciertas constantes geométricas asociadas a  $\Omega$ . Por otro lado, como contribución más importante, obtenemos una estimación exacta de la distancia de  $\mathcal{O}_\lambda$  a la frontera  $\partial\Omega$  de la forma

$$\text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega) \sim C \lambda^{-1/p} \quad \text{cuando } \lambda \rightarrow +\infty , \quad (9)$$

donde  $C$  viene expresada explícitamente en términos de  $f$  y  $p$ . Estas propiedades se recogen en el Teorema 3.2.1, el principal resultado del capítulo. Es importante destacar que las técnicas empleadas en el capítulo, al apoyarse de manera fundamental en la unicidad de soluciones de (1), no son válidas para estudiar la formación de núcleos muertos en el problema (LP). Nótese además que la estimación (8) tampoco ofrece información sobre posibles núcleos muertos de las soluciones  $v$  de (LP). Sin embargo, después de demostrar la unicidad de soluciones positivas de (LP) para  $\lambda$  grande en bolas y anillos, es posible establecer que *todas* las soluciones positivas de (LP) en un dominio arbitrario  $\Omega$  desarrollan un núcleo muerto  $\mathcal{O}_\lambda$  para  $\lambda$  suficientemente grande, teniéndose además la estimación (9) (§4.4). Hasta donde sabemos, es éste el primer resultado donde sin unicidad “a priori” se establece la existencia de núcleos muertos para todas las posibles soluciones de un problema.

En el Capítulo 4, el más importante de la memoria, nos centraremos en estudiar la unicidad de soluciones para  $\lambda$  grande del problema (LP), cuando el dominio  $\Omega = D$  es una bola o un

anillo. De hecho, nos ocuparemos de la clase más general de problemas:

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda f(\lambda, u) & \text{en } D \\ u &= 0 & \text{en } \partial D, \end{aligned} \quad (10)$$

donde  $f(\lambda, \cdot)$  tiene un cero fijo  $\bar{u}_0$  de orden  $0 < k < p - 1$  (véanse detalles precisos en el §4.2). Este tipo de problemas incluye, después de una normalización, al problema logístico perturbado (LP).

En cuanto al problema (10), demostraremos la existencia de una única familia homogeneizante, en el sentido (3), de soluciones radiales positivas. De hecho, la condición (3) es fundamental para la unicidad de soluciones con máximo próximo a  $\bar{u}_0$  cuando  $\lambda$  es grande, como se demuestra en el contraejemplo de la sección 4.2.4 (cf. Corolario 4.2.13). Esta peculiaridad marca una diferencia fundamental con respecto al caso no degenerado (cf. Capítulo 5).

Tratar con soluciones radiales de (10) es reducir el problema al estudio de una ecuación diferencial ordinaria. En efecto, si  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  es una solución radial débil de (10) entonces como  $u \in C^1(\bar{\Omega})$  (Teorema A.3 del Apéndice A) se tiene que  $u = u(r)$ , con  $r = |x|$ , mientras  $u, r^{N-1}\varphi_p(u') \in C^1(J)$  define una solución clásica del problema

$$\begin{aligned} -(r^{N-1}\varphi_p(u'))' &= r^{N-1}\lambda f(\lambda, u) \\ u'(d) &= 0, \quad u(R) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

donde  $J = [0, R]$  en el caso de la bola y  $J = [a, R]$  en el anillo. En cuanto a las condiciones de contorno en (11), si llamamos  $u_0 = \sup_D u$ ,  $d \in J$  se elige de tal forma que  $u(d) = u_0$ . Por esa razón, en el §4.1 centraremos nuestro interés en el estudio del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} -(r^{N-1}\varphi_p(u'))' &= r^{N-1}f(\lambda, u) \\ u(d) &= u_0, \quad u'(d) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

donde tendremos presente que  $u_0$  va a jugar el papel de máximo de una solución radial (hemos reescalado  $\lambda$  en (12)), y  $d\lambda^{-1/p}$  medirá el tamaño de un posible núcleo muerto.

Para aclarar las dificultades que surgen cuando tratamos con (12), nótese que éste se puede escribir en la forma alternativa:

$$\begin{aligned} u' &= \varphi_{p'}(v) & u(d) &= u_0 \\ v' &= -\frac{N-1}{r}v - f(\lambda, u) & v(d) &= 0, \end{aligned}$$

donde  $p' = p/(p-1)$  es el conjugado de Hölder de  $p$ . Por eso, ya que  $v(d) = 0$ , resulta que no son aplicables a (12) los resultados clásicos de existencia y unicidad de soluciones si, por ejemplo,  $p > 2$ , independientemente de la regularidad de  $f$ . Si además  $d = 0$ , entonces (12) se vuelve singular en  $r = 0$ , y la teoría estándar de ecuaciones diferenciales no se puede aplicar en ningún caso.

Por otro lado, si  $f(\lambda, u_0) = 0$ , aparece otra fuente de singularidad en el problema, tal y como fue observado en [32]. En efecto, se da allí el ejemplo de  $f(\lambda, u) = 8(1-u)$  y  $p = 4$ , mostrándose que (12) tiene al menos las soluciones

$$u \equiv 1, \quad u = 1 - ar^2, \quad u = 1 + ar^2,$$

donde  $a = (1/(N + 2))^{1/2}$ . Asimismo, Walter ([84]) señala mediante el método de sub y super-soluciones, que el problema (12) con  $f(\lambda, u) = 1 - u^{p-1}$  ( $p > 2$ ) y  $u_0 = 1$ , tiene una solución distinta de la trivial  $u \equiv 1$ .

Por tanto, nuestro interés en el §4.2 se centrará en el caso singular  $f(\lambda, \bar{u}_0) = 0$  de (12). El principal resultado es la existencia de una única solución no trivial  $u = u(r)$  de (12), en el sentido de que  $u(r) < \bar{u}_0$  si  $0 < r \leq \delta$  (obsérvese que  $u \equiv \bar{u}_0$  es ya solución de (12)). En cuanto a  $f$ , supondremos que  $\bar{u}_0$  es un cero de orden  $k$ , es decir,  $f(\lambda, u) \sim \gamma(\lambda)(\bar{u}_0 - u)^k$  cuando  $u \rightarrow \bar{u}_0^-$ ,  $\gamma(\lambda) \neq 0$ , para una cierta constante positiva  $k$ . Se demuestra que  $\gamma(\lambda) > 0$  y  $0 < k < p - 1$  es una condición necesaria y suficiente para la existencia de soluciones no triviales (Teorema 4.1.3). Más aún, si el comportamiento de  $f$  a ambos lados de  $\bar{u}_0$  es como  $f(\lambda, u) \sim \gamma(\lambda)\varphi_{k+1}(\bar{u}_0 - u)$  cuando  $u \rightarrow \bar{u}_0$ , nuestro análisis nos permitirá encontrar todas las infinitas soluciones restantes de (12) (Corolario 4.1.6). Este parece ser el primer estudio sistemático del caso singular. La existencia y unicidad se basan en estimaciones a priori locales de las soluciones no triviales que permitan tratar el problema de punto fijo asociado (cf. [64] para un tratamiento menos constructivo de este caso). El enfoque de existencia y unicidad adoptado en la memoria es además crucial para abordar seguidamente la dependencia regular en datos y parámetros.

Las soluciones radiales positivas  $u_\lambda$  de (10) que se homogeneizan a  $\bar{u}_0$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$  se corresponden cuando  $d, \lambda \rightarrow +\infty$  con la solución no trivial  $u = u(\cdot, \bar{u}_0, \lambda, d)$  de (12). Esto implica que la homogeneización y la formación de núcleos muertos dependen del comportamiento de dicha solución cuando  $d, \lambda \rightarrow +\infty$ . Por tanto, la dependencia continua de la solución  $u = u(\cdot, u_0, \lambda, d)$  de (12) respecto a  $d$  y  $\lambda$ , así como la derivabilidad respecto a  $d$ , son fundamentales en nuestro análisis, y se estudian en los §§4.1.3 y 4.1.4. De hecho, la solución no trivial  $u = u(\cdot, \bar{u}_0, \lambda, d)$  converge local y globalmente a la solución no trivial del problema unidimensional

$$\begin{aligned} -\varphi_p(u')' &= \bar{f}(u) \\ u(0) &= \bar{u}_0, \quad u'(0) = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

donde  $\bar{f} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda, \cdot)$ . Finalmente, la unicidad de soluciones positivas de (10) se consigue demostrando que tales soluciones son la única perturbación cuando  $d, \lambda \rightarrow +\infty$  de la solución no trivial de (13).

En el Capítulo 5 analizaremos el problema (1) en el caso no singular, es decir, sin la presencia de núcleos muertos. De acuerdo con los resultados del Capítulo 3, si  $\bar{u}_0$  es un cero de  $f$  de orden  $k \geq p - 1$ , y consideramos soluciones positivas  $u$  con máximo próximo a  $\bar{u}_0$  para  $\lambda$  grande, se tiene  $0 < u < \bar{u}_0$ , por lo que estamos en una situación semejante al caso  $p = 2$ . Sin embargo, los métodos usados en el caso semilineal para demostrar unicidad se basan normalmente en argumentos de continuación, fuertemente dependientes de la diferenciabilidad del operador  $\Delta$  (cf. [74], [16]). Por ello, nos restringiremos de nuevo al ámbito de las soluciones radiales. En este contexto, es posible demostrar que el operador inverso de  $-\Delta_p + m$  es diferenciable, circunstancia que es interesante en sí misma. Los resultados de este capítulo son una adaptación de las ideas en [16] (véase también [76]).

El primer paso es demostrar la existencia de una familia homogeneizante de soluciones  $\{u_\lambda\}$  de (1). En el caso  $p = 2$ , esto es una consecuencia de los resultados de [73]. Para  $p \neq 2$  haremos

uso, igualmente, del hecho de que la integral

$$T(\bar{u}) = \frac{1}{(p')^{1/p}} \int_0^{\bar{u}} \frac{ds}{(F(\bar{u}) - F(s))^{1/p}}$$

diverge cuando  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0$ . Una vez establecida la existencia de esta familia, obtenemos estimaciones precisas de todas las soluciones con máximo próximo a  $\bar{u}_0$ . De hecho, es posible demostrar que para  $\lambda$  grande, todas las soluciones radiales positivas  $u$  con  $\bar{u}_0 - \varepsilon \leq \max u < \bar{u}_0$  están en el intervalo ordenado  $[z_\lambda, \bar{u}_0]$ , donde  $z_\lambda$  es una subsolución de (1) y  $\bar{u}_0$  hace el papel de supersolución. En particular, se obtiene que cualquier familia  $\{u_\lambda\}$  con  $\max u_\lambda \rightarrow \bar{u}_0$  es homogeneizante, en contraste con la situación en que  $k < p - 1$  (cf. §4.2.4).

Si elegimos  $m > 0$  para que  $f(u) + mu$  sea una función creciente en  $[0, \bar{u}_0]$ , resulta que el problema (1) es equivalente a la ecuación de punto fijo

$$u = K_{\lambda m}(\lambda f(u) + \lambda mu) \quad (14)$$

donde  $K_{\lambda m}$  es el operador inverso de  $-\Delta_p + \lambda m$  bajo condiciones de Dirichlet homogéneas. La unicidad de soluciones radiales positivas de (1) con máximo próximo a  $\bar{u}_0$  cuando  $\lambda$  es grande es entonces consecuencia de que todos los puntos fijos de (14) tienen índice 1.

Para probar esto es necesario, según se ha dicho, disponer de la diferenciabilidad del operador  $K_{\lambda m}$ . La obtendremos haciendo uso de la expresión explícita para  $K := K_0$ , combinándola con el teorema de las funciones implícitas.

Es importante destacar que el problema (1) en el caso no singular en un anillo se trata con el mismo tipo de herramientas, y se ha omitido aquí por brevedad.

La memoria finaliza con dos apéndices, en los que se recogen algunos resultados de regularidad para ecuaciones con el laplaciano- $p$ , y una variante, adaptada a los fines de la memoria, del método de sub y supersoluciones.

Debe reseñarse finalmente que parte del contenido de esta memoria ha sido divulgado en varios congresos nacionales e internacionales. A saber: *Workshop on Reaction Diffusion Systems*, organizada en Tenerife en enero de 1995, con cargo al proyecto *E. C. Program on Human Capital & Mobility "Reaction Diffusion Systems"* con el contrato ERBCHRXCT93-0409; *Second World Congress of Nonlinear Analysts*, celebrado en Atenas en julio de 1996 ([38]); *XV CEDYA-V CMA*, Vigo, septiembre de 1997 ([40]) y *The Delft Meeting on Functional Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*, Delft, mayo de 1998. Tales actividades fueron financiadas por los proyectos: "Reaction Diffusion Systems" antes citado; DGICYT PB93-0465 y DGES PB96-0621.

# **Capítulo 1**

## **Preliminares unidimensionales**

# Capítulo 1

## Preliminares unidimensionales

En este capítulo estudiaremos resultados de existencia, unicidad y comportamiento respecto a  $\lambda$  de las soluciones positivas de problemas de la forma

$$\begin{aligned} - \quad \varphi_p(u')' &= \lambda f(u) & 0 < x < l \\ u(0) &= u(l) = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde  $\varphi_p(z) = |z|^{p-2}z$ ,  $z \in \mathbb{R}$  y  $\lambda > 0$ .

Obtendremos una descripción precisa de los fenómenos de homogeneización, capa límite y núcleos muertos para las soluciones positivas de (1.1) y algunas de sus perturbaciones. Cuando  $f$  satisface las hipótesis (H1) de la introducción, los resultados aquí obtenidos serán fundamentales en los Capítulos 2 y 3.

Asimismo, estudiaremos en detalle las familias de soluciones positivas  $\{u_\lambda\}$  de (1.1) con máximo próximo a un cero de  $f$ , interesándonos particularmente en las capas de transición interna y en la aparición de múltiples núcleos muertos.

### 1.1 Regularidad de las soluciones

Vamos a analizar en esta sección la regularidad que poseen las soluciones débiles de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} - \quad \varphi_p(u')' &= f(u) & 0 < x < l \\ u(0) &= u(l) = 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Por solución débil entenderemos una función  $u \in W_0^{1,p}(0, l)$  que verifique

$$\int_0^l \varphi_p(u'(x))\phi'(x)dx = \int_0^l f(u(x))\phi(x)dx. \tag{1.3}$$

para toda  $\phi \in W_0^{1,p}(0, l)$ . Veremos que si  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$ , toda solución débil es clásica<sup>1</sup>, en el sentido de que  $u \in C^1[0, l]$ ,  $\varphi_p(u') \in C^1[0, l]$  y se cumple la ecuación en (1.2) en todo punto del intervalo  $(0, l)$ .

---

<sup>1</sup>Es importante resaltar la diferencia con el concepto estándar de solución clásica, que requiere  $u \in C^2$ .

La demostración de este hecho es elemental, y está basada en consideraciones generales en los espacios de Sobolev en dimensión 1 (cf. [13, Cap. 8]).

**Teorema 1.1.1** *Supongamos que  $f$  es una función continua en  $\mathbb{R}$ , y que  $u \in W_0^{1,p}(0, l)$  es una solución débil de*

$$\begin{aligned} - \varphi_p(u')' &= f(u) & 0 < x < l \\ u(0) &= u(l) = 0. \end{aligned}$$

*Entonces  $u \in C^1[0, l]$ ,  $\varphi_p(u') \in C^1[0, l]$  y se cumple la ecuación en todo punto de  $(0, l)$ . Es decir,  $u$  es una solución clásica de (1.2).*

*Demostración.* Si  $u \in W_0^{1,p}(0, l)$ , módulo redefinición en un conjunto de medida nula, se tiene que

$$u(x) = \int_0^x u'(s) ds ,$$

y por tanto  $u$  es absolutamente continua, y derivable casi todo punto (cf. [66, Teorema 8.3.3]). Además, siendo  $\varphi_p(u') \in L^{p'}(0, l)$ ,  $f(u) \in L^\infty(0, l)$ , y como  $-f(u)$  es la derivada débil de  $\varphi_p(u')$ , concluimos que  $\varphi_p(u') \in W^{1,p'}(0, l)$ . Razonando como antes,  $\varphi_p(u')$  es absolutamente continua, derivable en casi todo punto y para  $x_0 \in (0, l)$ :

$$\varphi_p(u'(x)) = \varphi_p(u'(x_0)) - \int_{x_0}^x f(u(s)) ds .$$

De aquí se deduce, de la misma forma, que  $\varphi_p(u')$  es  $C^1$ , con lo que, integrando por partes en (1.3) tenemos

$$\int_0^l (\varphi_p(u'(x))' + f(u(x))) \phi(x) dx = 0 ,$$

para toda  $\phi \in W_0^{1,p}(0, l)$ . Por eso,  $\varphi_p(u')' + f(u) = 0$  en casi todo punto de  $(0, l)$ , y al ser  $\varphi_p(u')'$  continua,  $u$  verifica la ecuación en (1.2) en todo punto. Claramente,  $u$  verifica también las condiciones de contorno.  $\square$

Como consecuencia de este resultado, y del hecho de que  $\varphi_{p'}$  es  $C^1(\mathbb{R})$  si  $1 < p \leq 2$  y  $C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$  si  $p > 2$ , obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 1.1.2** *Sean  $f$  una función continua en  $\mathbb{R}$ , y  $u \in W_0^{1,p}(0, l)$  una solución débil de (1.2). Entonces  $u \in C^2[0, l]$  si  $1 < p \leq 2$ , y  $u \in C^2([0, l] \setminus Z)$  si  $p > 2$ , donde  $Z = \{x \in [0, l] : u'(x) = 0\}$ .*

Queda pendiente la cuestión de si  $u$  puede ser  $C^2$  en los puntos de  $Z$ . En general, no puede serlo, como demuestra la siguiente proposición (compárese con el Teorema 4.1.1).

**Proposición 1.1.3** *Sea  $f$  una función continua en  $\mathbb{R}$ , y  $u \in W_0^{1,p}(0, l)$  una solución débil de (1.2). Si  $x_0 \in Z = \{x \in [0, l] : u'(x) = 0\}$ , se tiene*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u'(x)}{\varphi_{p'}(x - x_0)} = -\varphi_{p'}(f(u(x_0))) .$$

*En particular, si  $p > 2$ ,  $u$  no es  $C^2$  en ningún punto  $x_0 \in Z$  en el que  $f(u(x_0)) \neq 0$ .*

*Demostración.* Fijado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que para  $|s - x_0| \leq \delta$  se tiene  $|f(u(s)) - f(u(x_0))| \leq \varepsilon$ . Por eso, para  $x > x_0$ :

$$-\varphi_p(u'(x)) = \int_{x_0}^x f(u(s)) ds \leq (f(u(x_0)) + \varepsilon)(x - x_0)$$

y de la misma forma

$$-\varphi_p(u'(x)) = \int_{x_0}^x f(u(s)) ds \geq (f(u(x_0)) - \varepsilon)(x - x_0) .$$

De aquí se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{-\varphi_p(u'(x))}{x - x_0} = f(u(x_0)) .$$

Para obtener el límite por la izquierda se procede de la misma manera.

Si  $p > 2$  y  $f(u(x_0)) \neq 0$ , se tiene  $1/(p - 1) < 1$ , con lo que el límite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u'(x)}{x - x_0}$$

no puede ser finito, y no existe la derivada de  $u'$  en  $x_0$ . □

Un ejemplo típico de esta situación se obtiene cuando consideramos el problema de autovalores. Sin embargo, es importante destacar que existen situaciones en las que  $u \in C^2$ , incluso en problemas  $N$ -dimensionales,  $N \geq 2$  (véase la Observación 4.2.7 b).

## 1.2 Problemas de tipo logístico y sus perturbaciones

Vamos a estudiar ahora la existencia, unicidad y comportamiento cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$  de las soluciones de problemas de tipo logístico unidimensionales. Es decir, problemas de la forma

$$\begin{aligned} -\varphi_p(u')' &= \lambda f(u) & 0 < x < l \\ u(0) &= u(l) = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde la no linealidad  $f$  verifica las siguientes hipótesis

$$(H1)_1 \quad f \text{ es continua en } \mathbb{R}^+, \text{ y verifica } \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = m > 0.$$

(H1)<sub>2</sub> la función  $f(u)/u^{p-1}$  es decreciente si  $u > 0$ .

(H1)<sub>3</sub>  $f$  tiene un cero positivo  $\bar{u}_0$  de orden  $k > 0$ . Es decir, existe una constante  $C_0 > 0$  tal que

$$\lim_{u \rightarrow \bar{u}_0^-} \frac{f(u)}{(\bar{u}_0 - u)^k} = C_0.$$

Tales condiciones serán referidas en toda la memoria como hipótesis (H1). Bajo estas hipótesis, el problema (1.1) ha sido estudiado en [47], donde se consideraban además soluciones con diferentes signos (cf. Introducción).

Recordemos de la sección anterior que toda solución débil  $u$  de (1.1) en  $W^{1,p}(0, l)$  verifica  $u \in C^1[0, l]$  y  $\varphi_p(u') \in C^1[0, l]$ , con lo que nos proporciona una solución clásica de la ecuación. El siguiente resultado nos da con precisión la existencia y unicidad de soluciones positivas de (1.1).

**Teorema 1.2.1** *Supongamos que  $f$  satisface (H1). Entonces, el problema*

$$\begin{aligned} - \varphi_p(u')' &= \lambda f(u) & 0 < x < l \\ u(0) &= u(l) = 0, \end{aligned}$$

posee, para cada  $\lambda > \lambda_{\min}(l) := \frac{p-1}{m} \left(\frac{2}{l}\right)^p \left(\frac{(\pi/p)}{\text{sen}(\pi/p)}\right)^p$  una única solución clásica positiva  $u = u_\lambda(x)$ , que verifica  $0 < u_\lambda(x) \leq \bar{u}_0$ .

*Demostración.* Si  $u$  es una solución clásica de (1.1), entonces  $u_1 = u(x)$ ,  $v_1 = |u'|^{p-2}u'$  es solución en  $[0, l]$  de

$$\begin{aligned} u_1' &= |v_1|^{p'-2}v_1 \\ v_1' &= -\lambda f(u_1), \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde  $p'$  es el conjugado de Hölder de  $p$ ,  $1/p + 1/p' = 1$ . Puesto que  $E(u_1, v_1) = |v_1|^{p'}/p' + \lambda F(u_1)$ ,  $F(u) = \int_0^u f(s) ds$ , es una integral primera de (1.4), podemos afirmar que para cada solución de (1.1), existe una constante  $C$  tal que:

$$|u'(x)|^p + p'\lambda F(u(x)) = C \quad x \in [0, l]. \tag{1.5}$$

Ahora realizaremos un análisis detallado de la existencia y unicidad de las soluciones de (1.1). En virtud de (1.5), cualquier solución positiva está relacionada con su máximo  $\bar{u} = \sup_{0 < x < l} u(x)$  mediante

$$|u'|^p = p'\lambda(F(\bar{u}) - F(u)). \tag{1.6}$$

Puesto que  $F$  es una función creciente,  $\bar{u}$  es el único valor crítico de  $u = u(x)$ . Llamando  $x_1 = \min\{x : u = \bar{u}\}$ ,  $x_2 = \max\{x : u = \bar{u}\}$ , se tiene que  $u$  es creciente antes de  $x_1$ , decreciente después de  $x_2$ , mientras que  $u = \bar{u}$  en  $x_1 \leq x \leq x_2$ . Por eso, se deduce de (1.6) que:

$$\int_0^{u(x)} \frac{ds}{(F(\bar{u}) - F(s))^{1/p}} = (p'\lambda)^{1/p} x \quad 0 < x < x_1, \tag{1.7}$$

y que

$$\int_0^{u(x)} \frac{ds}{(F(\bar{u}) - F(s))^{1/p}} = (p'\lambda)^{1/p}(l-x) \quad x_2 < x < l. \quad (1.8)$$

Además, (1.7) y (1.8) implican que  $u$  es simétrica respecto a  $l/2$ , y que:

$$\int_0^{\bar{u}} \frac{ds}{(F(\bar{u}) - F(s))^{1/p}} = (p'\lambda)^{1/p}x_1. \quad (1.9)$$

Obsérvese que el caso degenerado  $x_1 < x_2$  puede darse sólo si  $\bar{u} = \bar{u}_0$  ya que  $u(x) = \bar{u}$  en  $x_1 \leq x \leq x_2$  y la ecuación (1.4) llevan a  $f(\bar{u}) = 0$ .

A efectos posteriores, es conveniente introducir la notación  $I(u) = \int_0^u \frac{ds}{(F(u) - F(s))^{1/p}}$ .

Entonces se tienen las siguientes propiedades de la integral  $I$ :

- i)  $I = I(u)$  es creciente en  $0 < u < \bar{u}_0$ .
- ii)  $I(0+) = \lim_{u \rightarrow 0+} I(u) = \left(\frac{p}{m}\right)^{1/p} \frac{(\pi/p)}{\text{sen}(\pi/p)}$ .
- iii)  $I(u_0-) = \lim_{u \rightarrow u_0-} I(u) = \begin{cases} +\infty & k \geq p-1 \\ < +\infty & k < p-1. \end{cases}$

En efecto, i) es consecuencia de la expresión  $I(u) = \int_0^1 \left(\int_s^1 \sigma^{p-1} h(u\sigma) d\sigma\right)^{-1/p} ds$ ,  $0 < u < \bar{u}_0$ , y del carácter decreciente de  $h(u) := f(u)/u^{p-1}$ .

En cuanto a ii), se obtiene, usando la expresión anterior para  $I$ :

$$I(0+) = \left(\frac{p}{m}\right)^{1/p} \int_0^1 \frac{ds}{(1-s^p)^{1/p}}. \quad (1.10)$$

Con un cambio de variable llegamos a

$$\begin{aligned} I(0+) &= \left(\frac{p}{m}\right)^{1/p} \frac{1}{p} \int_0^1 (1-t)^{-1/p} t^{1/p-1} dt = \left(\frac{p}{m}\right)^{1/p} \frac{1}{p} B\left(\frac{1}{p}, 1 - \frac{1}{p}\right) = \\ &= \left(\frac{p}{m}\right)^{1/p} \frac{1}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \left(\frac{p}{m}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{\pi/p}{\text{sen}(\pi/p)}, \end{aligned}$$

donde  $B$ ,  $\Gamma$  son las funciones eulerianas Beta y Gamma (cf. [1, Fórmula 6.1.17]).

Se deduce de (1.9) y las propiedades anteriores que  $I(0+) < I(\bar{u}) < (p'\lambda)^{1/p} \frac{l}{2}$ . Por tanto, la existencia de soluciones positivas de (1.1) sólo es posible si  $\lambda > \frac{1}{p'} \left(\frac{2}{l} I(0+)\right)^p = \lambda_{\min}(l)$  (obsérvese que el número  $m \lambda_{\min}(l)$ , según la expresión (1.10), coincide con el valor para  $\sigma_{1,p}(l)$  calculado en [47], ecuación (0.4)).

Ahora podemos describir las soluciones positivas de (1.1) en términos de su máximo  $\bar{u}$ , de la forma siguiente:

A) Si  $k \geq p - 1$ , la integral  $I(\bar{u}_0-)$  diverge, y (1.1) admite, para cada  $\lambda_{\min} < \lambda < +\infty$  una única solución positiva  $u = u_\lambda(x)$  cuyo máximo  $\bar{u} = \bar{u}_\lambda$  es la única solución de la ecuación

$$I(\bar{u}) = (p'\lambda)^{1/p} \frac{l}{2}, \quad (1.11)$$

(la solución es única en base a la propiedad i) de  $I$ ). Nótese además que la solución  $\bar{u} = \bar{u}_\lambda$  de (1.11) es creciente en  $\lambda$  si  $\lambda_{\min} < \lambda < +\infty$ , verificando  $\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_{\min}} \bar{u}_\lambda = 0$  y  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \bar{u}_\lambda = \bar{u}_0$ . De hecho, la solución de (1.1) se puede obtener a partir de  $\bar{u}_\lambda$  mediante la fórmula:

$$\int_0^{u(x)} \frac{ds}{(F(\bar{u}_\lambda) - F(s))^{1/p}} = (p'\lambda)^{1/p} x, \quad 0 < x < \frac{l}{2}. \quad (1.12)$$

Obsérvese que  $x_1 = x_2 = \frac{l}{2}$  en este caso.

B) Si  $k < p - 1$ , la integral  $I(\bar{u}_0-)$  converge, y pueden darse dos opciones. La primera corresponde al régimen  $\lambda_{\min} < \lambda \leq \lambda^*(l) := \frac{1}{p'} \left( \frac{2}{l} I(u_0-) \right)^p$ . En este caso (1.11) posee una familia creciente de soluciones  $\bar{u} = \bar{u}_\lambda$ , con  $\bar{u}_\lambda \rightarrow 0+$  si  $\lambda \rightarrow \lambda_{\min}+$ , y  $\bar{u}_\lambda \rightarrow \bar{u}_0$  cuando  $\lambda \rightarrow \lambda^*-$ . Como en el caso anterior, la solución positiva de (1.1) puede ser descrita en términos de su máximo  $\bar{u}_\lambda$  usando (1.12).

Si  $\lambda > \lambda^*$  entonces  $(p'\lambda)^{-1/p} I(u_0-) < \frac{l}{2}$  y de (1.7) y (1.8) podemos deducir que la única solución  $u = u(x)$  de (1.1) viene dada por

$$\int_0^{u(x)} \frac{ds}{(F(\bar{u}_0) - F(s))^{1/p}} = (p'\lambda)^{1/p} x, \quad 0 < x < d(\lambda), \quad (1.13)$$

mientras que  $u \equiv u_0$  si  $d(\lambda) \leq x \leq \frac{l}{2}$ , siendo  $d(\lambda) = (p'\lambda)^{-1/p} I(\bar{u}_0-)$ .

Esto finaliza la demostración del teorema. □

La existencia de expresiones casi explícitas para la solución  $u_\lambda$  como (1.12) y (1.13), y la integral primera nos permiten de manera muy sencilla, estudiar los fenómenos de homogeneización y capa límite. Concretamente, se tiene:

**Teorema 1.2.2** *Supongamos que  $f$  verifica (H1), y sea  $u_\lambda$  la única solución positiva de la ecuación (1.1) para  $\lambda > \lambda_{\min}$ . Entonces*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u_\lambda = \bar{u}_0$$

*uniformemente sobre compactos de  $(0, l)$ . Además,*

$$u'_\lambda(0) = -u'_\lambda(l) \sim \lambda^{1/p} (p'F(\bar{u}_0))^{1/p} \quad \text{cuando } \lambda \rightarrow +\infty, \quad (1.14)$$

*donde  $F(\bar{u}_0) = \int_0^{\bar{u}_0} f(s) ds$ .*

*Demostración.* Dado  $\varepsilon > 0$ , denotemos por  $x_{\lambda,\varepsilon}$  al único punto de  $(0, l/2)$  tal que  $u_\lambda(x_{\lambda,\varepsilon}) = \bar{u}_0 - \varepsilon$ . En virtud de (1.12) y (1.13) tenemos

$$x_{\lambda,\varepsilon} = (p'\lambda)^{-1/p} \int_0^{\bar{u}_0 - \varepsilon} \frac{ds}{(F(\bar{u}_\lambda) - F(s))^{1/p}},$$

donde  $\bar{u}_\lambda = \max u_\lambda$ . Por eso, al ser la integral convergente,  $x_{\lambda,\varepsilon} \rightarrow 0$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . De ello, y de la simetría de  $u_\lambda$  se deduce la convergencia uniforme sobre compactos.

La estimación (1.14) es una sencilla consecuencia de (1.6), ya que  $u'_\lambda(0) = (p'\lambda)^{1/p} F(\bar{u}_\lambda)^{1/p} \sim (p'\lambda)^{1/p} F(\bar{u}_0)^{1/p}$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Esto concluye la demostración del Teorema 1.2.2.  $\square$

Nótese que, cuando la integral  $I(\bar{u}_0-)$  es finita (éste es el caso si  $k < p - 1$ ), ha quedado patente la aparición de núcleos muertos (cf. Introducción) para valores de  $\lambda$  suficientemente grandes. De hecho, tenemos expresiones explícitas del conjunto  $\mathcal{O}_\lambda = \{x : u_\lambda(x) = \bar{u}_0\}$  y del valor  $\lambda^*$  a partir del cual aparecen los núcleos muertos. De ahora en adelante, usaremos la notación

$$C(f, p) = \frac{1}{p'} (2I(\bar{u}_0-))^p. \quad (1.15)$$

**Corolario 1.2.3** *Supongamos que  $f$  verifica las hipótesis (H1) y que el orden del cero  $\bar{u}_0$  verifica  $0 < k < p - 1$ . Entonces existe un valor  $\lambda^*(l)$ , dado por  $\lambda^*(l) = C(f, p)/l^p$  tal que, para  $\lambda \geq \lambda^*$  se tiene*

$$\mathcal{O}_\lambda = \{x \in (0, l) : u_\lambda(x) = \bar{u}_0\} = [d(\lambda), l - d(\lambda)],$$

siendo  $d(\lambda) = C(f, p)^{1/p} \lambda^{-1/p} / 2$ . En particular

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1/p} \text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \{0, l\}) = \frac{C(f, p)^{1/p}}{2}.$$

### 1.2.1 Aplicaciones al problema logístico

Todos los resultados anteriores son válidos para el problema logístico (L) tal y como hemos dicho anteriormente. En efecto, introduciendo el cambio de variable  $u = (\lambda m)^{\frac{1}{q-p+1}} v$  en (L) llegamos al problema

$$\begin{aligned} - \varphi_p(u)' &= u^{p-1} - u^q \quad 0 < x < l \\ u(0) &= u(l) = 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

que está en las hipótesis (H1) con  $m = 1$ ,  $\bar{u}_0 = 1$ ,  $k = 1$  y  $C_0 = (q - p + 1)$ . Aplicando los Teoremas 1.2.1, 1.2.2 y 1.2.3 al problema (1.16) obtenemos:

**Teorema 1.2.4** *Sean  $p, q, m$  números reales tales que  $p > 1$ ,  $q > p - 1$  y  $m > 0$ . Entonces el problema logístico*

$$\begin{aligned} - \varphi_p(u)' &= \lambda m u^{p-1} - u^q \quad 0 < x < l \\ u(0) &= u(l) = 0, \end{aligned} \quad (\text{L})$$

admite, para  $\lambda > \lambda_{\min}$ , una única solución positiva  $\theta_{\lambda,m}$ , que cumple  $0 < \theta_{\lambda,m} \leq (\lambda m)^{\frac{1}{q-p+1}}$ . Se tiene además que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-\frac{1}{q-p+1}} \theta_{\lambda,m} = m^{\frac{1}{q-p+1}}$$

uniformemente sobre compactos de  $(0, l)$ . Por otra parte,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-\frac{q+1}{p(q-p+1)}} \theta'_{\lambda,m}(0) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} -\lambda^{-\frac{q+1}{p(q-p+1)}} \theta'_{\lambda,m}(l) = m^{\frac{q+1}{p(q-p+1)}} \left( \frac{q-p+1}{(q+1)(p-1)} \right)^{1/p}.$$

Si además  $p > 2$ , entonces para  $\lambda \geq \lambda^* = \frac{(q+1)(p-1)}{m} \left\{ \frac{2B(p,q)}{l} \right\}^p$ , se tiene  $\mathcal{O}_\lambda = [d(\lambda), l - d(\lambda)]$ , donde

$$d(\lambda) = \frac{(q+1)^{1/p} (p-1)^{1/p}}{m^{1/p}} B(p, q) \lambda^{-1/p}$$

En particular,  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1/p} \text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \{0, l\}) = \frac{(q+1)^{1/p} (p-1)^{1/p}}{m^{1/p}} B(p, q)$ . Aquí  $B(p, q)$  denota a la integral convergente:

$$B(p, q) = \int_0^1 \frac{ds}{[(q-p+1) - (q+1)s^p + ps^{q+1}]^{1/p}}. \quad (1.17)$$

## 1.2.2 Perturbaciones sublineales del problema logístico

A continuación vamos a estudiar perturbaciones adecuadas de la ecuación logística. Las perturbaciones que consideraremos, a pesar de romper la “monotonía” de la no linealidad, hacen que ésta mantenga la propiedad de tener un único cero para  $\lambda$  grande, lo que conlleva que las soluciones de dichas ecuaciones tengan propiedades análogas a las de (L) cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Concretamente, estudiaremos

$$\begin{aligned} - \varphi_p(u')' &= \lambda m u^{p-1} - u^q + g(u) & 0 < x < l \\ u(0) &= u(l) = 0, \end{aligned} \quad (\text{LP})$$

donde  $g \in C^1(\mathbb{R})$  verifica la hipótesis

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{g(u)}{u^{p-1}} = 0, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{g'(u)}{u^{q-1}} = 0. \quad (\text{Hg})$$

Para obtener estimaciones de las soluciones positivas de (LP) vamos a estudiar los ceros positivos de  $g(\lambda, u) := \lambda m u^{p-1} - u^q + g(u)$ . Afirmamos que, para cada  $\lambda > 0$  existe un mayor cero positivo  $u = \bar{u}_0(\lambda) > 0$  de  $g(\lambda, \cdot)$  tal que  $g(\lambda, u) < 0$  si  $u > \bar{u}_0(\lambda)$ . De hecho, como consecuencia de (Hg),

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{g(\lambda, u)}{u^{p-1}} = \lambda m > 0 \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{g(\lambda, u)}{u^q} = -1,$$

que implica la existencia de  $\bar{u}_0(\lambda)$ . Por otro lado, nótese que la igualdad

$$m - \frac{\bar{u}_0(\lambda)^{q-p+1}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \frac{g(\bar{u}_0(\lambda))}{\bar{u}_0(\lambda)^{p-1}} = 0,$$

implica  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \bar{u}_0(\lambda) = +\infty$ . Por eso,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\bar{u}_0(\lambda)}{(m\lambda)^{1/(q-p+1)}} = 1, \quad (1.18)$$

que nos proporciona una estimación asintótica exacta de  $\bar{u}_0(\lambda)$ . Obsérvese que todo esto es válido para cualquier cero positivo de  $g(\lambda, \cdot)$  cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ . De hecho, veamos que  $\bar{u}_0(\lambda)$  es el *único* cero positivo de  $g(\lambda, \cdot)$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . De no ser así, existirían sucesiones  $\lambda_n$ ,  $\xi_n^1$ ,  $\xi_n^2 \rightarrow +\infty$  tales que  $\xi_n^1 \neq \xi_n^2$ ,  $g(\lambda_n, \xi_n^i) = 0$  y  $(\lambda_n m)^{-\frac{1}{q-p+1}} \xi_n^i \rightarrow 1$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . El Teorema de Rolle nos proporcionaría una sucesión  $\eta_n$  de forma que  $(\lambda_n m)^{-\frac{1}{q-p+1}} \eta_n \rightarrow 1$  y  $g_u(\lambda_n, \eta_n) = 0$ . Pero entonces

$$\frac{\lambda_n m(p-1)}{\eta_n^{q-p+1}} - q + \frac{g'(\eta_n)}{\eta_n^{q-1}} = 0,$$

y haciendo  $n \rightarrow \infty$  llegamos a  $p-1-q=0$ , una contradicción. Por eso, para  $\lambda$  grande, se tiene  $g(\lambda, u) > 0$  si  $u \in (0, \bar{u}_0(\lambda))$  y  $g(\lambda, u) < 0$  si  $u > \bar{u}_0(\lambda)$ .

Estamos ahora en disposición de analizar el problema (LP). Estudiaremos primeramente las cuestiones de existencia y estimaciones de las soluciones.

**Teorema 1.2.5** *Supongamos que  $p > 1$ ,  $q > p-1$ ,  $m > 0$  y que  $g$  verifica las hipótesis (Hg). Entonces:*

*i) (LP) no tiene soluciones positivas si  $\lambda \leq \underline{\lambda}/m$ , donde  $\underline{\lambda} = \inf_{u \geq 0} \frac{u^q - g(u)}{u^{p-1}}$ , y existe al menos una solución positiva  $w_\lambda$  si  $\lambda > \lambda_{\min}$ .*

*ii) Todas las soluciones positivas  $u$  de (LP) verifican  $0 < u \leq \bar{u}_0(\lambda)$ .*

*Demostración.* Es conveniente, por analogía con el problema logístico, introducir el cambio  $u = \bar{u}_0(\lambda)v$ , con lo que el problema (LP) se transforma en

$$\begin{aligned} - \varphi_p(v')' &= \lambda f(\lambda, v) \quad 0 < x < l \\ v(0) &= v(l) = 0, \end{aligned} \quad (1.19)$$

donde  $f(\lambda, v) = \lambda^{-1} \bar{u}_0(\lambda)^{1-p} g(\lambda, \bar{u}_0(\lambda)v) = mv^{p-1} - \lambda^{-1} \bar{u}_0^{q-p+1} v^q + \lambda^{-1} \bar{u}_0^{1-p} g(\bar{u}_0(\lambda)v)$ . Con esto, el único cero de  $f$  para  $\lambda$  grande es  $\bar{v}_0(\lambda) = 1$ . En lo que sigue, consideraremos el problema (1.19), teniendo en cuenta que todas las conclusiones obtenidas serán aplicables a (LP).

Igual que en el Teorema 1.2.1, toda solución  $v$  de (1.19) se puede parametrizar por su máximo  $\bar{v}$ , y se tendrá la igualdad

$$|v'(x)|^p = p' \lambda (F(\lambda, \bar{v}) - F(\lambda, v(x))), \quad (1.20)$$

donde  $F(\lambda, v) = \int_0^v f(\lambda, s) ds$ . Si  $\lambda \leq \underline{\lambda}/m$ , llegamos a que  $f(\lambda, v) \leq 0$  para todo  $v \geq 0$ , con lo que la función  $F(\lambda, \cdot)$  es decreciente en  $v \geq 0$ . Por eso,  $F(\lambda, v(x)) > F(\lambda, \bar{v})$ , para todo  $x$ , que contradice (1.20). Esto prueba la primera parte de i).

Para probar ii), tenemos que ver que todas las posibles soluciones positivas  $v$  de (1.19) verifican  $v \leq 1$ . A tal fin, nótese que  $F(\lambda, \cdot)$  es decreciente si  $v > 1$ ,  $v \sim 1$ . Por eso, si suponemos  $\bar{v} > 1$ , llegamos a  $F(\lambda, \bar{v}) < F(\lambda, v(x))$  para  $v(x) \sim \bar{v}$ , contradiciendo de nuevo (1.20).

Vamos a analizar ahora la existencia de soluciones positivas. Denotando

$$\bar{I}(\lambda, v) = \int_0^v \frac{ds}{(F(\lambda, v) - F(\lambda, s))^{1/p}}, \quad (1.21)$$

tendremos que las soluciones  $v = v_\lambda$  vienen caracterizadas por su máximo  $\bar{v}$  mediante la ecuación

$$\bar{I}(\lambda, \bar{v}) = (p'\lambda)^{1/p} \frac{l}{2}.$$

Un sencillo cálculo muestra que  $\lim_{v \rightarrow 0+} \bar{I}(\lambda, v) = I(0+)$ , uniformemente en  $\lambda$  sobre intervalos acotados, donde  $I$  denota a la integral correspondiente al problema logístico (véase Teorema 1.2.1, en particular (1.10)). Por eso, si  $\lambda > \lambda_{\min}$ , se tendrá que  $\bar{I}(\lambda, 0) - (p'\lambda)^{1/p} l/2 < 0$ .

Por otro lado, es fácil ver que  $\bar{I}(\lambda, v)$  converge si  $v \rightarrow 1$  cuando  $p > 2$ , mientras que  $\bar{I}(\lambda, v) \rightarrow +\infty$  si  $v \rightarrow 1$  y  $1 < p \leq 2$  (nótese que en este caso el orden del cero  $\bar{v}_0(\lambda) = 1$  es  $k = 1$ ). Llamemos  $\bar{I}_\infty(\lambda) = \sup \bar{I}(\lambda, v)$ , donde el supremo está extendido a todos los valores de  $v$  que hacen que la integral (1.21) tenga sentido (este es el caso si, por ejemplo,  $v > 0$ ,  $v \sim 0$ ). Dos situaciones pueden darse:

- A)  $\bar{I}_\infty(\lambda) - (p'\lambda)^{1/p} l/2 \geq 0$ . Este es siempre el caso si  $1 < p \leq 2$ , ya que  $\bar{I}_\infty(\lambda) = +\infty$ . Podemos garantizar que existe un valor  $\bar{v}$  tal que  $\bar{I}(\lambda, \bar{v}) = (p'\lambda)^{1/p} l/2$ . Por tanto, existe una solución  $v(x)$  que viene definida implícitamente, al igual que en los casos anteriores, por la ecuación

$$\int_0^{v(x)} \frac{ds}{(F(\lambda, \bar{v}) - F(\lambda, s))^{1/p}} = (p'\lambda)^{1/p} x, \quad 0 < x < \frac{l}{2},$$

y que es simétrica respecto a  $l/2$ .

- B)  $\bar{I}_\infty(\lambda) - (p'\lambda)^{1/p} l/2 < 0$ . Este es el caso en particular si  $p > 2$  para  $\lambda$  suficientemente grande, ya que  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \bar{I}_\infty(\lambda) = I(1)$ . Aquí estamos en el régimen de desarrollo del núcleo muerto. Es decir, existe  $d = d(\lambda)$  tal que

$$\int_0^{v(x)} \frac{ds}{(F(\lambda, 1) - F(\lambda, s))^{1/p}} = (p'\lambda)^{1/p} x, \quad 0 < x < d(\lambda),$$

y  $v \equiv 1$  en  $[d(\lambda), l - d(\lambda)]$ . En este caso, claramente  $d(\lambda) = (p'\lambda)^{-1/p} \bar{I}(\lambda, 1)$ .

(Nótese que, en este último caso, *todas* las posibles soluciones de (LP) para  $\lambda$  grande deben desarrollar núcleo muerto.) Con esto queda demostrado el teorema.  $\square$

Como ya se ha dicho, en esta clase de problemas sólo podemos esperar unicidad para  $\lambda$  suficientemente grande. Las estimaciones de la capa límite y de los núcleos muertos son entonces inmediatas.

**Teorema 1.2.6** *Supongamos que  $p > 1$ ,  $q > p - 1$ ,  $m > 0$  y que  $g$  verifica las hipótesis (Hg). Entonces, para  $\lambda$  suficientemente grande, el problema (LP) admite una única solución positiva  $w_\lambda$ , que verifica  $0 < w_\lambda \leq \bar{u}_0(\lambda)$ . Además, se tiene*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-\frac{1}{q-p+1}} w_\lambda = m^{\frac{1}{q-p+1}}$$

uniformemente sobre compactos de  $(0, l)$ . Por otra parte,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-\frac{q+1}{p(q-p+1)}} w'_\lambda(0) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} -\lambda^{-\frac{q+1}{p(q-p+1)}} w'_\lambda(l) = m^{\frac{q+1}{p(q-p+1)}} \left( \frac{q-p+1}{(q+1)(p-1)} \right)^{1/p}.$$

Si además  $p > 2$ , entonces para  $\lambda$  suficientemente grande, se tiene  $\mathcal{O}_\lambda = [d(\lambda), l - d(\lambda)]$ , siendo  $d(\lambda) = (p'\lambda)^{-1/p} \bar{I}(\lambda, 1)$ . En particular,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1/p} \text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \{0, l\}) = \frac{(q+1)^{1/p} (p-1)^{1/p}}{m^{1/p}} B(p, q), \quad (1.22)$$

donde  $B(p, q)$  viene dada por la expresión (1.17).

**Observación 1.2.7** La homogeneización y la estimación de la capa límite para la solución  $v_\lambda$  del problema logístico perturbado puede ser conseguida comparando  $v_\lambda$  con soluciones adecuadas del problema logístico (véase Capítulo 2). Sin embargo, hemos prescindido de esta demostración, puesto que en el caso unidimensional es inmediata (cf. Teorema 1.2.2).

*Demostración del Teorema 1.2.6.* Consideremos de nuevo el problema normalizado (1.19). La homogeneización de todas las posibles soluciones  $v_\lambda$  y la estimación de la capa límite se obtienen como en el Teorema 1.2.2. Pasemos pues a analizar la unicidad.

Para ello, es necesario distinguir los casos  $1 < p \leq 2$  y  $p > 2$ . Comencemos con  $1 < p \leq 2$ . La unicidad es consecuencia de que la ecuación

$$\bar{I}(\lambda, \bar{v}) = (p'\lambda)^{1/p} \frac{l}{2} \quad (1.23)$$

tiene una única solución para  $\lambda$  suficientemente grande. Por eso, basta con ver que  $\bar{I}$  es creciente respecto a la segunda variable si  $\lambda \rightarrow +\infty$ ,  $\bar{v} \sim 1$ .

Es conveniente reescribir  $\bar{I}$  en la forma

$$\bar{I}(\lambda, \bar{v}) = \int_0^1 \frac{ds}{((F(\lambda, \bar{v}) - F(\lambda, s\bar{v}))/\bar{v}^p)^{1/p}},$$

con lo que, llamando  $H(s, \bar{v}) = (F(\lambda, \bar{v}) - F(\lambda, s\bar{v}))/\bar{v}^p$ , tendremos

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{v}}(\lambda, \bar{v}) = -\frac{1}{p} \int_0^1 \frac{H_{\bar{v}}(s, \bar{v})}{H(s, \bar{v})^{(p+1)/p}} ds.$$

Además,  $H_{\bar{v}}(s, \bar{v}) = (\bar{v}f(\lambda, \bar{v}) - pF(\lambda, \bar{v}) - [s\bar{v}f(\lambda, s\bar{v}) - pF(\lambda, s\bar{v})])/\bar{v}^{p+1}$ . Llamemos  $z_\lambda(\bar{v}) = \bar{v}f(\lambda, \bar{v}) - pF(\lambda, \bar{v})$ . Entonces  $z'_\lambda(\bar{v}) = \bar{v}f_v(\lambda, \bar{v}) - (p-1)f(\lambda, \bar{v})$ , de donde  $z'_\lambda(1) \rightarrow -(q-p+1) < 0$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ , y esto implica que existen  $\lambda_0 > 0$ ,  $\delta > 0$  tales que  $z_\lambda$  es decreciente en  $[1-2\delta, 1]$  si  $\lambda \geq \lambda_0$ . Tomemos  $s_0 = (1-2\delta)/(1-\delta)$ . Entonces, si  $\bar{v} \in [1-\delta, 1)$ ,  $s \in [s_0, 1]$ ,  $\lambda \geq \lambda_0$ , tenemos  $1-2\delta \leq s_0\bar{v} \leq s\bar{v} \leq \bar{v} \leq 1$ , se donde se deduce que  $z_\lambda(\bar{v}) - z_\lambda(s\bar{v}) < 0$ . Por tanto,

$$-\frac{1}{p} \int_{s_0}^1 \frac{H_{\bar{v}}(s, \bar{v})}{H(s, \bar{v})^{(p+1)/p}} ds > 0,$$

si  $\bar{v} \in [1-\delta, 1)$ ,  $\lambda \geq \lambda_0$ . Si tenemos en cuenta que la integral permanece finita entre 0 y  $s_0$ , mientras que diverge entre  $s_0$  y 1 cuando  $\bar{v} \rightarrow 1$ ,  $\lambda \rightarrow +\infty$ , llegamos a que

$$\frac{\partial \bar{I}}{\partial \bar{v}}(\lambda, \bar{v}) > 0, \quad \bar{v} \sim 1 \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

que es lo que queríamos probar.

En cuanto al caso  $p > 2$ , basta con observar que todas las soluciones para  $\lambda$  grande desarrollan núcleo muerto, con lo que todas verifican el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} -\varphi_p(u')' &= \lambda f(\lambda, u) & 0 < x < l \\ u(0) &= 0, \quad u'(0) = (p'\lambda)^{1/p} F(\lambda, 1)^{1/p}, \end{aligned}$$

lo que nos da la unicidad. La estimación (1.22) es una consecuencia directa del hecho de que  $\mathcal{O}_\lambda = [d(\lambda), l - d(\lambda)]$ , con  $d(\lambda) = (p'\lambda)^{-1/p} \bar{I}(\lambda, 1)$ , junto con la convergencia  $\bar{I}(\lambda, 1) \rightarrow I(1)$ .  $\square$

**Observación 1.2.8** Nótese que para este problema no es inmediato conseguir estimaciones del primer valor  $\lambda^*$  a partir del cual aparecen los núcleos muertos. Todo lo que podemos decir es que es una solución de la ecuación

$$\bar{I}_\infty(\lambda) = (p'\lambda)^{1/p} \frac{l}{2}$$

(cf. Teorema 1.2.6).

### 1.3 Capas de transición internas

En esta sección vamos a estudiar problemas de la forma (1.1), pero sin imponer ninguna hipótesis de monotonía a la no linealidad  $f$ . Específicamente, estamos interesados en caracterizar todas las soluciones positivas cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$  (es importante destacar que, en general, la unicidad incluso para  $\lambda$  grande es imposible de conseguir). Puesto que muchos de los resultados que vamos a obtener son nuevos incluso en el caso semilineal, supondremos en lo que sigue que  $p = 2$ .

Por tanto, consideraremos el siguiente problema

$$\begin{aligned} - u'' &= \lambda f(u) & 0 < x < 1 \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned} \tag{1.24}$$

donde  $\lambda$  será un parámetro positivo. Supongamos que el problema (1.24) tiene una familia de soluciones positivas  $\{u_\lambda\}$  tal que, llamando  $\bar{u}_\lambda = \max u_\lambda$ , se tenga

$$\bar{u}_\lambda \rightarrow \bar{u}_0 \quad \text{cuando } \lambda \rightarrow +\infty. \tag{1.25}$$

Nuestro principal propósito será describir la geometría de las soluciones para las que este fenómeno tiene lugar (nótese que no se trata propiamente de una homogeneización, en el sentido de §1.2).

Sobre la no linealidad  $f$  haremos las siguientes hipótesis estructurales:

- i)  $f$  es  $C^1$ , excepto quizá en los ceros.
- ii) Todos los ceros de  $f$  tienen multiplicidad finita. Es decir, si  $f(u_0) = 0$ , entonces existen  $k > 0$  y  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma \neq 0$ , tales que

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \frac{f(u)}{\varphi_{k+1}(u_0 - u)} = \gamma.$$

En particular, la hipótesis ii) implica que  $f$  tiene un número finito de ceros en cualquier intervalo acotado. Nótese que, debido a la hipótesis i), el orden de los ceros de  $f$  puede ser cualquier número real positivo, y no necesariamente un entero.

Para propósitos futuros, es conveniente establecer la siguiente definición: si  $u_0$  es un cero de  $f$ , decimos que  $f$  es “par” si

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \frac{f(u)}{|u_0 - u|^k} = \gamma,$$

donde  $k > 0$  y  $\gamma$  es una constante no nula. Por oposición a esta definición, los ceros de orden  $k$  definidos anteriormente serán llamados a veces ceros “impares”.

Pasemos a continuación a determinar algunas propiedades preliminares del valor  $\bar{u}_0$  que aparece en (1.25). En primer lugar, la existencia de la integral primera  $H(u, u') = u'^2/2 + F(u)$ , donde  $F(u) = \int_0^u f(s)ds$ , nos proporciona que

$$F(\bar{u}_\lambda) = \frac{u'_\lambda(0)^2}{2} \geq 0,$$

con lo que  $F(\bar{u}_0) \geq 0$ . También se obtiene de la integral primera que  $F(u) < F(\bar{u}_\lambda)$  si  $0 \leq u < \bar{u}_\lambda$ , y por eso

$$F(u) \leq F(\bar{u}_0) \quad \text{si } 0 \leq u \leq \bar{u}_0. \quad (1.26)$$

Obsérvese que esta condición implica, en particular, que  $f(\bar{u}_0) \geq 0$ .

A la vista de (1.26), es conveniente estudiar la estructura del conjunto

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(\bar{u}_0) := \{u \in [0, \bar{u}_0] : F(u) = F(\bar{u}_0)\}. \quad (1.27)$$

Veamos una propiedad importante de  $\mathcal{N}$ .

**Lema 1.3.1** *El conjunto  $\mathcal{N}$  contiene al menos un cero de  $f$ . Es decir,  $F(\bar{u}_0)$  es un valor crítico de  $F$ . Además, si  $u \in \mathcal{N}$ ,  $u \neq 0$ ,  $u \neq \bar{u}_0$ , entonces  $u$  es un cero impar de  $f$  con  $\gamma > 0$ . Por otro lado, si  $0 \in \mathcal{N}$ , se tiene  $f(0) \leq 0$ .*

*Demostración.* En virtud de la desigualdad (1.26), se tiene que todos los elementos  $u \in \mathcal{N} \cap (0, \bar{u}_0)$  son máximos locales de  $F$ . Por tanto,  $F'(u) = f(u) = 0$ , y  $u$  debe ser un cero impar con  $\gamma > 0$ . Esto demuestra además que  $\mathcal{N}$  contiene un cero si  $\mathcal{N} \cap (0, \bar{u}_0) \neq \emptyset$ . En el caso en que  $\mathcal{N} \cap (0, \bar{u}_0) = \emptyset$ , si suponemos  $f(0) \neq 0$ , se tendrá, en base a (1.7), que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\bar{u}_\lambda} \frac{ds}{\sqrt{F(\bar{u}_\lambda) - F(s)}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{2},$$

así que, cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ , la integral debe diverger, lo cual es imposible a menos que  $f(\bar{u}_0) = 0$ .

Por otro lado, supongamos que  $0 \in \mathcal{N}$ . Si  $f(0) > 0$ , se tendrá que  $F(u) > F(0) = F(\bar{u}_0)$  para  $u > 0$ ,  $u \sim 0$ , contradiciendo (1.26). Por tanto,  $f(0) \leq 0$ .  $\square$

Empezaremos estudiando el caso en que  $f \in C^1(\mathbb{R})$ , es decir, el orden de todos los ceros de  $f$  es mayor o igual que 1. El otro caso será analizado en la Sección 1.3.5.

### 1.3.1 Homogeneizaciones simples

Son las que se dan cuando el conjunto  $\mathcal{N}$  sólo contiene un cero, que es  $\bar{u}_0$ , es decir  $\mathcal{N} = \{\bar{u}_0\}$ . Por tanto, se da la condición

$$F(u) < F(\bar{u}_0) \quad \text{si } 0 \leq u < \bar{u}_0,$$

cuando  $\bar{u}_0 > 0$ .

Veremos que es posible encontrarse con dos situaciones donde (1.25) puede darse. El primer caso, al que llamaremos homogeneización por defecto, se produce cuando  $\bar{u}_\lambda \rightarrow \bar{u}_0^-$ , mientras que el caso complementario, llamado homogeneización por exceso, se da si  $\bar{u}_\lambda \rightarrow \bar{u}_0^+$ . Es fácil de comprobar que la homogeneización por exceso sólo es posible si  $\bar{u}_0$  es un cero par de  $f$ .

En la homogeneización por defecto, la situación que se da es exactamente la misma que en §1.2 (nótese que es irrelevante que  $\bar{u}_0$  sea par o impar, ya que sólo el comportamiento de  $f$  a la izquierda de  $\bar{u}_0$  es importante en esta situación).

**Teorema 1.3.2** Sea  $\bar{u}_0 > 0$  un cero impar de  $f$  de orden  $k$ , de forma que

$$F(u) < F(\bar{u}_0) \quad \text{si } 0 \leq u < \bar{u}_0 .$$

Entonces, (1.24) admite una familia de soluciones positivas  $\{u_\lambda\}$  tales que:

(i) Existen  $\varepsilon > 0$ ,  $\lambda_0 > 0$  tales que, para  $\lambda \geq \lambda_0$ ,  $u_\lambda$  es la única solución positiva de (1.24) que cumple  $\bar{u}_0 - \varepsilon \leq \bar{u}_\lambda < \bar{u}_0$ , donde  $\bar{u}_\lambda = \max u_\lambda$ .

(ii) Si  $k = 1$ ,

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 - e^{-\sqrt{\gamma\lambda}/2}, \quad \lambda \rightarrow +\infty ,$$

mientras que, si  $k > 1$ ,

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 - \left( \frac{2B_k^2}{(k+1)\gamma} \right)^{\frac{1}{k-1}} \lambda^{-\frac{1}{k-1}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty ,$$

donde  $B_k = B(1/2 - 1/(k+1), 1/2)$ , y  $B$  es la función beta euleriana.

(iii) La familia  $\{u_\lambda\}$  se homogeneiza a  $\bar{u}_0$ , es decir,  $u_\lambda \rightarrow \bar{u}_0$  uniformemente sobre compactos de  $(0, 1)$ .

(iv)  $u'_\lambda(0) \sim \sqrt{2F(\bar{u}_0)}\lambda^{1/2}$ ,  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Observaciones 1.3.3** a) La propiedad (iii) justifica que llamemos a este fenómeno homogeneización simple, por analogía con los problemas en §1.2.

b) En el caso  $k \in \mathbb{N}$ , y  $f$  suficientemente regular,

$$\gamma = \frac{f^{(k)}(\bar{u}_0)}{k} (-1)^k$$

en virtud del desarrollo de Taylor de orden  $k$ .

*Demostración del Teorema 1.3.2.* Es fácil ver que la hipótesis sobre  $F$  nos lleva a que existe  $\delta > 0$  tal que

$$F(s) < F(u) \quad \text{si } 0 \leq s < u$$

para todo  $\bar{u}_0 - \delta \leq u \leq \bar{u}_0$ . Entonces, el problema  $-u'' = f(u)$  admite una solución tal que  $u(0) = u(2T(\bar{u})) = 0$ , donde

$$T(\bar{u}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\bar{u}} \frac{ds}{\sqrt{F(\bar{u}) - F(s)}} ,$$

y  $\bar{u} = u(1/2) = \max u$  (cf. la demostración del Teorema 1.2.1). Por dependencia continua se tiene que  $T(\bar{u}) \rightarrow +\infty$  cuando  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0^-$ , y entonces, poniendo  $\lambda = (2T(\bar{u}))^2$  y  $u_\lambda(x) = u(\lambda^{-1/2}x)$ , obtenemos una familia de soluciones de (1.24). Para probar la unicidad, es suficiente con proceder como en la demostración del Teorema 1.2.6.

Ahora pasemos a mostrar la estimación (ii), para lo cual obtendremos una estimación de  $T(\bar{u})$  cuando  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0$ . Tomemos  $\varepsilon > 0$ . Existe  $\delta > 0$  tal que

$$(\gamma - \varepsilon)(\bar{u}_0 - u)^k \leq f(u) \leq (\gamma + \varepsilon)(\bar{u}_0 - u)^k$$

si  $\bar{u}_0 - \delta \leq u \leq \bar{u}_0$ . Está claro que el comportamiento de  $T(\bar{u})$  es el mismo que el de la integral

$$T_\delta(\bar{u}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\bar{u}_0 - \delta}^{\bar{u}} \frac{ds}{\sqrt{F(\bar{u}) - F(s)}},$$

ya que la integral entre 0 y  $\bar{u}_0 - \delta$  permanece finita cuando  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0^-$ . Se tiene que:

$$\begin{aligned} T_\delta(\bar{u}) &\leq \sqrt{\frac{k+1}{2(\gamma - \varepsilon)}} \int_{\bar{u}_0 - \delta}^{\bar{u}} \frac{ds}{\sqrt{(\bar{u}_0 - s)^{k+1} - (\bar{u}_0 - \bar{u})^{k+1}}} = \\ &\sqrt{\frac{k+1}{2(\gamma - \varepsilon)}} (\bar{u}_0 - \bar{u})^{1 - \frac{k+1}{2}} \int_1^{\delta/(\bar{u}_0 - \bar{u})} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^{k+1} - 1}}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Procediendo de manera análoga, se obtiene una estimación inferior de  $T_\delta(\bar{u})$ , como la que aparece en (1.28), pero cambiando  $\gamma - \varepsilon$  por  $\gamma + \varepsilon$ . Por tanto, si  $k = 1$ , se tiene que

$$\int_1^{\delta/(\bar{u}_0 - \bar{u})} \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} \sim \log \frac{\delta}{(\bar{u}_0 - \bar{u})} \sim -\log(\bar{u}_0 - \bar{u}),$$

cuando  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0$ , mientras que, para  $k > 1$ , la integral converge al valor

$$\int_1^\infty \frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma^{k+1} - 1}} = \frac{1}{k+1} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{k+1}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{k+1} B_k.$$

Por eso, queda demostrado, en el caso  $k = 1$ , que

$$T(\bar{u}_\lambda) \sim -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \log(\bar{u}_0 - \bar{u}_\lambda), \quad (1.29)$$

cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . En particular, (ii) es consecuencia de la igualdad  $T(\bar{u}_\lambda) = \sqrt{\lambda}/2$  y de (1.29). Para  $k > 1$ , procedemos de forma análoga teniendo en cuenta que

$$T(\bar{u}_\lambda) \sim \frac{1}{2\gamma(k+1)} B_k (\bar{u}_0 - \bar{u}_\lambda)^{-\frac{k-1}{2}},$$

cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . La demostración de (iii) y (iv) es exactamente igual que la del Teorema 1.2.2.  $\square$

A continuación estudiaremos las homogeneizaciones simples por exceso, es decir, el caso en que existe una familia  $\{u_\lambda\}$  de soluciones de (1.24) tales que  $\bar{u}_\lambda = \max u_\lambda \geq \bar{u}_0$  y  $\bar{u}_\lambda \rightarrow \bar{u}_0$ . El cero  $\bar{u}_0$  debe ser par en tal caso.

**Teorema 1.3.4** Sea  $\bar{u}_0 > 0$  un cero par de  $f$  de orden  $k$  y supongamos que

$$F(u) < F(\bar{u}_0) \quad \text{si } 0 \leq u < \bar{u}_0 .$$

Entonces (1.24) admite una familia de soluciones positivas  $\{u_\lambda\}$  tales que:

(i) Existen  $\varepsilon > 0$ ,  $\lambda_0 > 0$  tales que para  $\lambda \geq \lambda_0$ ,  $u_\lambda$  es la única solución positiva de (1.24) que cumple  $\bar{u}_0 < \bar{u}_\lambda \leq \bar{u}_0 + \varepsilon$ , donde  $\bar{u}_\lambda = \max u_\lambda$ .

(ii) Si  $k = 1$ ,

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 - e^{-\sqrt{\gamma\lambda}/2}, \quad \lambda \rightarrow +\infty ,$$

mientras que, para  $k > 1$ ,

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 + \left( \frac{2}{(k+1)\gamma} \right)^{\frac{1}{k-1}} \left( \csc \left( \frac{\pi}{k+1} \right) + \cot \left( \frac{\pi}{k+1} \right) B_k \right)^{\frac{2}{k-1}} \lambda^{-\frac{1}{k-1}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty ,$$

siendo  $B_k$  como en el Teorema 1.3.2.

(iii) La familia  $\{u_\lambda\}$  se homogeneiza a  $\bar{u}_0$  en  $(0, 1)$ .

(iv) Si  $\bar{u}_0 > 0$ , entonces  $u'_\lambda(0) \sim \sqrt{2F(\bar{u}_0)}\lambda^{1/2}$ , cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

*Demostración.* Las afirmaciones (i), (iii) y (iv) se demuestran de forma semejante a los teoremas anteriores. Por ello, vamos a pasar a demostrar la estimación (ii). Igual que antes, necesitamos estimar la integral que define  $T(\bar{u})$ .

Puesto que, para  $\delta > 0$ , la integral entre 0 y  $\bar{u}_0 - \delta$  permanece finita, tenemos que

$$T(\bar{u}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\bar{u}} \frac{ds}{\sqrt{F(\bar{u}) - F(s)}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\bar{u}_0 - \delta}^{\bar{u}_0} \frac{ds}{\sqrt{F(\bar{u}) - F(s)}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\bar{u}_0}^{\bar{u}} \frac{ds}{\sqrt{F(\bar{u}) - F(s)}} ,$$

cuando  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0$ , donde  $\delta$  es tal que  $(\gamma - \varepsilon)|\bar{u}_0 - u|^k \leq f(u) \leq (\gamma + \varepsilon)|\bar{u}_0 - u|^k$ , si  $|\bar{u}_0 - u| < \delta$ . Procedamos a estudiar las dos integrales por separado. Para la primera, téngase en cuenta que, para  $0 < \bar{u}_0 - s < \delta$ , se tiene

$$F(\bar{u}_0) - F(s) \sim \frac{\gamma}{k+1} \left( (\bar{u}_0 - s)^{k+1} + (\bar{u} - \bar{u}_0)^{k+1} \right) ,$$

si  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0$ , y por eso

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\bar{u}_0 - \delta}^{\bar{u}_0} \frac{ds}{\sqrt{F(\bar{u}) - F(s)}} &\sim \sqrt{\frac{k+1}{2\gamma}} \int_{\bar{u}_0 - \delta}^{\bar{u}_0} \frac{ds}{((\bar{u}_0 - s)^{k+1} + (\bar{u} - \bar{u}_0)^{k+1})^{1/2}} = \\ &\sqrt{\frac{k+1}{2\gamma}} (\bar{u} - \bar{u}_0)^{-(k-1)/2} \int_0^{\delta/(\bar{u} - \bar{u}_0)} \frac{d\sigma}{(\sigma^{k+1} + 1)^{1/2}} \sim \\ &-\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \log(\bar{u} - \bar{u}_0) \end{aligned}$$

para  $u \rightarrow \bar{u}_0$ , si  $k = 1$ , teniéndose, si  $k > 1$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\bar{u}_0 - \delta}^{\bar{u}_0} \frac{ds}{\sqrt{F(\bar{u}) - F(s)}} \sim \sqrt{\frac{1}{2\gamma(k+1)}} (\bar{u} - \bar{u}_0)^{-(k-1)/2} B\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right), \quad (1.30)$$

cuando  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0$ . En cuanto a la segunda integral, nótese que, si  $-\delta < \bar{u}_0 - s < 0$ ,

$$F(\bar{u}_0) - F(s) \sim \frac{\gamma}{k+1} \left( (\bar{u} - \bar{u}_0)^{k+1} - (s - \bar{u}_0)^{k+1} \right),$$

cuando  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0$ , con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\bar{u}_0}^{\bar{u}} \frac{ds}{\sqrt{F(\bar{u}) - F(s)}} &\sim \sqrt{\frac{k+1}{2\gamma}} \int_{\bar{u}_0 - \delta}^{\bar{u}_0} \frac{ds}{((\bar{u} - \bar{u}_0)^{k+1} - (s - \bar{u}_0)^{k+1})^{1/2}} = \\ &\sqrt{\frac{k+1}{2\gamma}} (\bar{u} - \bar{u}_0)^{-(k-1)/2} \int_0^1 \frac{d\sigma}{(1 - \sigma^{k+1})^{1/2}}. \end{aligned}$$

Si  $k = 1$ , la integral tiende a una constante cuando  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0$ . Si  $k > 1$ , por el contrario,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\bar{u}_0}^{\bar{u}} \frac{ds}{\sqrt{F(\bar{u}) - F(s)}} \sim \sqrt{\frac{1}{2\gamma(k+1)}} (\bar{u} - \bar{u}_0)^{-(k-1)/2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{k+1}\right),$$

para  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0$ . Finalmente, se puede obtener una relación entre las integrales  $B(1/2 - 1/k + 1, 1/k + 1)$ ,  $B(1/2, 1/k + 1)$  y los números  $B_k$  definidos en el Teorema 1.3.2.

En efecto, en virtud de la fórmula 6.1.17 en [1], se tiene

$$B\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{k+1}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) B_k = \csc\left(\frac{\pi}{k+1}\right) B_k.$$

Análogamente, usando además 6.1.30 en [1], obtenemos

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{k+1}\right) = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \Gamma\left(\frac{1}{k+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k+1}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k+1}\right)} B_k = \cot\left(\frac{\pi}{k+1}\right) B_k.$$

Por ello, se tiene finalmente

$$T(\bar{u}) \sim -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \log(\bar{u} - \bar{u}_0) \quad (1.31)$$

cuando  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0$ , si  $k = 1$ , y

$$T(\bar{u}) \sim \sqrt{\frac{1}{2\gamma(k+1)}} (\bar{u} - \bar{u}_0)^{-(k-1)/2} \left( \csc\left(\frac{\pi}{k+1}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{k+1}\right) \right) B_k, \quad (1.32)$$

si  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0+$ , para  $k > 1$ . La estimación en (ii) se obtiene como en el Teorema 1.3.2.  $\square$

**Observaciones 1.3.5** a) Si  $\bar{u}_0 = 0$  y  $k > 1$ , la situación no varía sustancialmente. El único cambio significativo es que en la estimación (1.32) el término de la cosecante no aparece. Si  $k = 1$ , sin embargo, se tiene que  $T(\bar{u})$  tiende a una constante cuando  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0$ , por lo que no existen soluciones con máximo tendiendo a 0.

b) Si  $\bar{u}_0 = 0$ , la familia de soluciones  $\{u_\lambda\}$  no desarrolla una capa límite cerca de  $x = 0$ ,  $x = 1$ , pues  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u'_\lambda(0) = 0$ . En efecto, usando (ii), se tiene

$$u'_\lambda(0)^2 = 2\lambda F(\bar{u}_\lambda) \sim 2\lambda \frac{\gamma}{k+1} \bar{u}_\lambda^{k+1} \sim C \lambda^{-\frac{2}{k-1}},$$

donde  $C = \frac{2\gamma}{k+1} \left( \frac{2}{(k+1)\gamma} \right)^{\frac{1}{k-1}} \left( \csc\left(\frac{\pi}{k+1}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{k+1}\right) B_k \right)^{\frac{2}{k-1}}$ .

c) En el caso  $p \neq 2$ , las modificaciones de los resultados anteriores son mínimas. Nótese, en primer lugar, que la condición  $k \geq 1$  que hemos venido considerando se transforma ahora en  $k \geq p - 1$  (lo que excluye la presencia de núcleos muertos). En cuanto a las estimaciones de convergencia (ii) en el Teorema 1.3.2, se convierten en

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 - e^{-\frac{1}{2}(\gamma\lambda/p-1)^{1/p}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

si  $k = p - 1$ , y

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 - \left( 2 \left( \frac{k+1}{\gamma p'} \right)^{1/p} \frac{1}{k+1} \tilde{B}_k \right)^{\frac{1}{k-p+1}} \lambda^{-\frac{1}{k-p+1}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

si  $k > p - 1$ , donde  $\tilde{B}_k = B(1/p - 1/k + 1, 1 - 1/p)$ . En cuanto a (ii) en el Teorema 1.3.4, razonando de la misma forma, se llega a:

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 - e^{-\frac{1}{2}(\gamma\lambda/p-1)^{1/p}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

si  $k = p - 1$ , y

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 + \left( \frac{2^p}{(k+1)^{p-1} p' \gamma \lambda} \right)^{\frac{1}{k-p+1}} \left[ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right) \left( \csc\left(\frac{\pi}{k+1}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{k+1}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{p}\right) \right) \tilde{B}_k \right]^{\frac{p}{k-p+1}}$$

cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ , si  $k > p - 1$ .

### 1.3.2 Homogeneizaciones simples con pico

Estas homogeneizaciones se dan cuando el conjunto  $\mathcal{N}$  contiene un único cero, que no es  $\bar{u}_0$ . En este caso, y de acuerdo con observaciones anteriores, se tendrá  $f(\bar{u}_0) > 0$ .

**Teorema 1.3.6** *Supongamos que  $f(\bar{u}_0) > 0$ , y que  $u_1$ ,  $0 \leq u_1 < \bar{u}_0$ , es un cero impar de  $f$  de orden  $k$  tal que  $F(u_1) = F(\bar{u}_0)$ , y*

$$F(u) < F(\bar{u}_0) \quad \text{si } 0 < u < \bar{u}_0, \quad u \neq u_1,$$

*junto con  $f(0) < 0$  en el caso  $F(\bar{u}_0) = 0$ ,  $u_1 > 0$ . Entonces, existe una familia de soluciones positivas  $\{u_\lambda\}$  de (1.24) tales que*

(i) *Existen  $\varepsilon > 0$ ,  $\lambda_0 > 0$  tales que para  $\lambda \geq \lambda_0$ ,  $u_\lambda$  es la única solución positiva de (1.24) que cumple  $\bar{u}_0 < \bar{u}_\lambda \leq \bar{u}_0 + \varepsilon$ , donde  $\bar{u}_\lambda = \max u_\lambda$ .*

(ii) *Si  $k = 1$ ,*

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 + e^{-\sqrt{\gamma\lambda}/2}, \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

*mientras que, si  $k > 1$ ,*

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 + \frac{1}{f(\bar{u}_0)} \left( \frac{\sqrt{8}}{k+1} \csc\left(\frac{\pi}{k+1}\right) B_k \right)^{\frac{2(k+1)}{k-1}} \left( \frac{k+1}{\gamma} \right)^{\frac{2}{k-1}} \lambda^{-\frac{k+1}{k-1}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

*donde los  $B_k$  están definidos en el Teorema 1.3.2. Si  $u_1 = 0$ , sin embargo, las estimaciones son de la forma*

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 + e^{-\sqrt{\gamma\lambda}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

*si  $k = 1$ , y*

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 + \frac{1}{f(\bar{u}_0)} \left( \frac{\sqrt{2}}{k+1} \csc\left(\frac{\pi}{k+1}\right) B_k \right)^{\frac{2(k+1)}{k-1}} \left( \frac{k+1}{\gamma} \right)^{\frac{2}{k-1}} \lambda^{-\frac{k+1}{k-1}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

*si  $k > 1$ .*

(iii) *La familia  $\{u_\lambda\}$  se homogeneiza a  $u_1$  en  $(0, 1) \setminus \{1/2\}$ .*

(iv) *Si  $u_1 > 0$ , entonces  $u'_\lambda(0) \sim \sqrt{2F(\bar{u}_0)}\lambda^{1/2}$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ .*

*Demostración.* Probemos primeramente la unicidad (la existencia sigue las ideas del §1.2). Para ello, como en el Teorema 1.2.6, tenemos que probar que la integral

$$T(\bar{u}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\bar{u}_0} \frac{ds}{(F(\bar{u}) - F(s))^{1/2}}$$

es decreciente cuando  $u \sim \bar{u}_0$ ,  $u > \bar{u}_0$ . Es conveniente escribirla bajo la forma

$$T(\bar{u}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{ds}{H(s, \bar{u})^{1/2}}$$

donde  $H(s, \bar{u}) = (F(\bar{u}) - F(s\bar{u}))/\bar{u}^2$ . Por eso,

$$T'(\bar{u}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{H_{\bar{u}}(s, \bar{u})}{H(s, \bar{u})^{3/2}} ds .$$

Ahora nótese que  $H_{\bar{u}}(s, \bar{u}) = (z(\bar{u}) - z(s\bar{u}))/\bar{u}^3$ , donde  $z(\bar{u}) = \bar{u}f(\bar{u}) - 2F(\bar{u})$ . Además,  $z(\bar{u}_0) - z(u_1) = \bar{u}_0f(\bar{u}_0) > 0$ , con lo que  $H_{\bar{u}}(s, \bar{u}) > 0$  si  $\bar{u} \sim \bar{u}_0$ ,  $s \sim s_0 := u_1/\bar{u}_0$ . Por tanto, podemos tomar  $\delta > 0$  pequeño para que

$$\int_{s_0-\delta}^{s_0+\delta} \frac{H_{\bar{u}}(s, \bar{u})}{H(s, \bar{u})^{3/2}} ds > 0 . \quad (1.33)$$

Como las integrales entre 0 y  $s_0 - \delta$ , y entre  $s_0 + \delta$  y 1 permanecen finitas cuando  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0$ , mientras que la dada por (1.33) diverge, se tiene que  $T'(\bar{u}) < 0$  para  $\bar{u} \sim \bar{u}_0$ ,  $\bar{u} > \bar{u}_0$ , luego  $T$  decrece si  $\bar{u} \sim \bar{u}_0$ ,  $\bar{u} > \bar{u}_0$ .

Para demostrar (ii), basta con estimar la integral

$$T_{\delta}(\bar{u}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \int_{u_1-\delta}^{u_1} + \int_{u_1}^{u_1+\delta} \right) \frac{ds}{(F(\bar{u}) - F(s))^{1/2}} =: T_{1,\delta}(\bar{u}) + T_{2,\delta}(\bar{u}) ,$$

cuando  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0$ , ya que las demás integrales permanecen finitas cuando  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0$  (recuérdese que  $f(\bar{u}_0) > 0$ ). Por simetría, es suficiente con estimar la primera de ellas. Nótese que

$$F(\bar{u}) - F(s) = F(\bar{u}) - F(\bar{u}_0) + F(u_1) - F(s) \sim f(\bar{u}_0)(\bar{u} - \bar{u}_0) + \frac{\gamma}{k+1}(u_1 - s)^{k+1}$$

si  $0 < u_1 - s < \delta$ , para  $\delta$  suficientemente pequeño. Por eso,

$$\begin{aligned} T_{1,\delta}(\bar{u}) &\sim \frac{1}{\sqrt{2f(\bar{u}_0)(\bar{u} - \bar{u}_0)}} \int_{u_1-\delta}^{u_1} \frac{ds}{\left(1 + \frac{\gamma}{(k+1)f(\bar{u}_0)(\bar{u} - \bar{u}_0)}(u_1 - s)^{k+1}\right)^{1/2}} = \\ &\frac{1}{\sqrt{2f(\bar{u}_0)(\bar{u} - \bar{u}_0)}} \left( \frac{(k+1)f(\bar{u}_0)(\bar{u} - \bar{u}_0)}{\gamma} \right)^{\frac{1}{k+1}} \int_0^{\gamma\delta/((k+1)f(\bar{u}_0)(\bar{u} - \bar{u}_0))} \frac{d\sigma}{(1 + \sigma^{k+1})^{1/2}} = \\ &\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{f(\bar{u}_0)(\bar{u} - \bar{u}_0)} \right)^{\frac{k-1}{2(k+1)}} \left( \frac{k+1}{\gamma} \right)^{\frac{1}{k+1}} \int_0^{\gamma\delta/((k+1)f(\bar{u}_0)(\bar{u} - \bar{u}_0))} \frac{d\sigma}{(1 + \sigma^{k+1})^{1/2}} , \end{aligned}$$

cuando  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0$ . Esta última integral ya ha sido estimada en los casos anteriores (cf. (1.30)). Por tanto, teniendo en cuenta que  $T_{2,\delta}$  se comporta como  $T_{1,\delta}$ , obtenemos que

$$T(\bar{u}) \sim -\frac{2}{\sqrt{\gamma}} \log(\bar{u} - \bar{u}_0) , \quad (1.34)$$

para  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0$ , si  $k = 1$ , mientras que, para  $k > 1$ ,

$$T(\bar{u}) \sim \frac{\sqrt{2}}{k+1} \left( \frac{1}{f(\bar{u}_0)(\bar{u} - \bar{u}_0)} \right)^{\frac{k-1}{2(k+1)}} \left( \frac{k+1}{\gamma} \right)^{\frac{1}{k+1}} \csc\left(\frac{\pi}{k+1}\right) B_k , \quad (1.35)$$

cuando  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0$ . En el caso  $u_1 = 0$ , la integral  $T_{1,\delta}(\bar{u})$  no aparece, y por tanto, las estimaciones de  $T(\bar{u})$  en (1.34) y (1.35) se convierten en

$$T(\bar{u}) \sim -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \log(\bar{u} - \bar{u}_0)$$

cuando  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0$ , y

$$T(\bar{u}) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{k+1} \left( \frac{1}{f(\bar{u}_0)(\bar{u} - \bar{u}_0)} \right)^{\frac{k-1}{2(k+1)}} \left( \frac{k+1}{\gamma} \right)^{\frac{1}{k+1}} \csc \left( \frac{\pi}{k+1} \right) B_k,$$

si  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0$ , respectivamente. De estas estimaciones se deduce (ii). Para finalizar la demostración, veremos que  $u_\lambda \rightarrow u_1$  uniformemente sobre compactos de  $(0, 1) \setminus \{1/2\}$ . Sean  $x_{\lambda,\delta}^\pm$  los (únicos) puntos en  $(0, 1/2)$  tales que  $u_\lambda = u_1 \pm \delta$ . Tenemos que

$$x_{\lambda,\delta}^- = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^{u_1-\delta} \frac{ds}{(F(\bar{u}) - F(s))^{1/2}},$$

y, puesto que la integral permanece finita,  $x_{\lambda,\delta}^- \rightarrow 0$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Análogamente,

$$\begin{aligned} x_{\lambda,\delta}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^{u_1+\delta} \frac{ds}{(F(\bar{u}) - F(s))^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \left( \int_0^{\bar{u}} - \int_{u_1+\delta}^{\bar{u}} \right) \frac{ds}{(F(\bar{u}) - F(s))^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_{u_1+\delta}^{\bar{u}} \frac{ds}{(F(\bar{u}) - F(s))^{1/2}}. \end{aligned}$$

Como esta última integral también es finita, se tiene  $x_{\lambda,\delta}^+ \rightarrow 1/2$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Esto prueba la convergencia uniforme de  $u_\lambda$  sobre compactos de  $(0, 1) \setminus \{1/2\}$ .  $\square$

**Observaciones 1.3.7** a) En el caso en que  $F(\bar{u}_0) = 0$ , se puede ver que  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u'_\lambda(0) = 0$ , a pesar de la formación de una capa límite (cf. Observación 1.3.5 b)).

b) Cuando  $p \neq 2$ , las estimaciones en (ii) se traducen en

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 + e^{-\frac{1}{2}(\gamma\lambda)^{1/p-1}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

si  $k = p - 1$ , mientras que para  $k > p - 1$ ,

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 + \frac{1}{f(\bar{u}_0)} \left( \frac{4}{(p')^{1/p}(k+1)} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{p} \right) \csc \left( \frac{\pi}{k+1} \right) \tilde{B}_k \right)^{\frac{p(k+1)}{k-p+1}} \left( \frac{k+1}{\gamma} \right)^{\frac{p}{k-p+1}} \lambda^{-\frac{k+1}{k-p+1}},$$

cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ , donde los  $\tilde{B}_k$  están definidos en la Observación 1.3.5 b). Si  $u_1 = 0$ , sin embargo, las estimaciones son de la forma

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 + e^{-(\gamma\lambda)^{1/p-1}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

si  $k = p - 1$ , y

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 + \frac{1}{f(\bar{u}_0)} \left( \frac{2}{(p')^{1/p}(k+1)} \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{p} \right) \operatorname{csc} \left( \frac{\pi}{k+1} \right) \tilde{B}_k \right)^{\frac{p(k+1)}{k-p+1}} \left( \frac{k+1}{\gamma} \right)^{\frac{p}{k-p+1}} \lambda^{-\frac{k+1}{k-p+1}},$$

cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ , para  $k > p - 1$ .

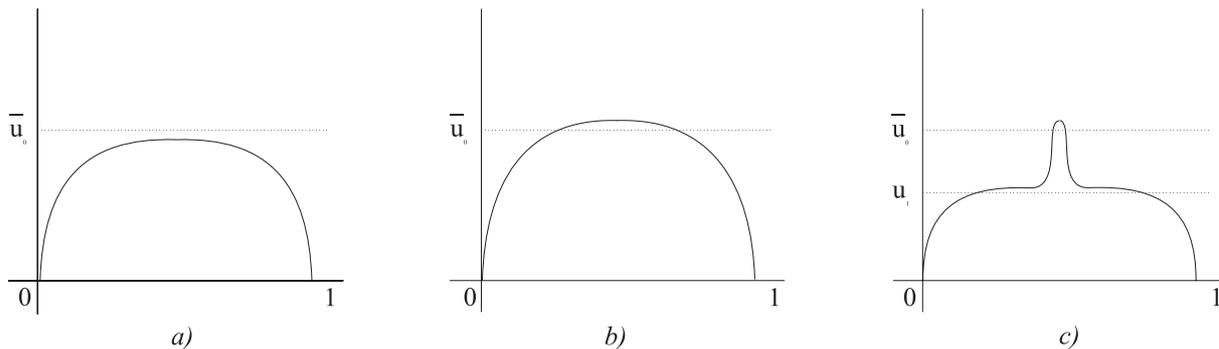


Fig. 1.1. Homogeneizaciones simples: a) por defecto, b) por exceso y c) con pico.

### 1.3.3 Homogeneizaciones múltiples: ceros del mismo orden

Las homogeneizaciones múltiples son las que se dan cuando el conjunto  $\mathcal{N}$  contiene más de un cero. Resulta claro que en este caso ha de ser  $\bar{u}_0 > 0$ . Empezaremos estudiando la situación simple en que todos los ceros de  $\mathcal{N}$  son de orden  $k$ . Es decir, si  $\mathcal{N} = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ , entonces

$$\lim_{u \rightarrow u_i} \frac{f(u)}{\varphi_{k+1}(u_i - u)} = \gamma_i,$$

con  $\gamma_i > 0$  (cf. Lema 1.3.2). Puede ocurrir que  $\bar{u}_0$  sea un cero de  $f$  o no. Supongamos, para comenzar, que  $f(\bar{u}_0) = 0$ . Por nuestras hipótesis estructurales sobre  $f$ ,  $\bar{u}_0$  debe ser un cero par, es decir,

$$\lim_{u \rightarrow \bar{u}_0} \frac{f(u)}{|\bar{u}_0 - u|^k} = \gamma > 0.$$

Por otro lado, nótese que, si  $F(\bar{u}_0) = 0$ , pueden darse dos situaciones:  $f(0) < 0$  o  $f(0) = 0$  junto con  $f(u) \sim -\gamma_0 u^k$  si  $u \rightarrow 0+$ . En este último caso denotaremos  $u_0 = 0$ , para homogeneizar la notación. Análogamente,  $u_{m+1} = \bar{u}_0$  y  $\gamma_{m+1} = \gamma$ .

El aspecto más interesante es la aparición de capas de transición interna, junto con la localización asintótica exacta de dichas capas.

**Teorema 1.3.8** *Supongamos que  $u_1, u_2, \dots, u_m$  son ceros impares de  $f$  de orden  $k$  tales que  $F(u_i) = F(\bar{u}_0) > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , y que  $\bar{u}_0$  es un cero par de orden  $k$ . Entonces, existe una familia de soluciones de (1.24) tales que*

(i) *Existen  $\varepsilon > 0$ ,  $\lambda_0 > 0$  tales que para  $\lambda \geq \lambda_0$ ,  $u_\lambda$  es la única solución positiva de (1.24) que cumple  $\bar{u}_0 < \bar{u}_\lambda \leq \bar{u}_0 + \varepsilon$ , donde  $\bar{u}_\lambda = \max u_\lambda$ .*

(ii) *Si  $k = 1$ ,*

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 + e^{-\sqrt{\lambda}/(2\sum_{i=1}^m \gamma_i^{-1/2})}, \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

*mientras que, si  $k > 1$ ,*

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 + \left( \frac{8B_k^2}{\gamma_{m+1}(k+1)} \right)^{\frac{1}{k-1}} \left[ \sum_{i=1}^m \left( \frac{\gamma_{m+1}}{\gamma_i} \right)^{\frac{1}{k+1}} \csc \left( \frac{\pi}{k+1} \right) + \cot \left( \frac{\pi}{k+1} \right) \right] \lambda^{-\frac{k+1}{k-1}},$$

*cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ , donde  $B_k$  están definidos en el Teorema 1.3.2.*

(iii) *Si llamamos*

$$\xi_j = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^j \gamma_i^{-\frac{1}{k+1}}}{\sum_{i=1}^{m+1} \gamma_i^{-\frac{1}{k+1}} + \gamma^{-\frac{1}{k+1}} \cos \left( \frac{\pi}{k+1} \right)}, \quad j = 1, \dots, m,$$

*$\xi_0 = 0$ ,  $\xi_{m+1} = 1/2$ , se tiene que  $u_\lambda \rightarrow u_{j+1}$  uniformemente sobre compactos de  $(\xi_j, \xi_{j+1})$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ .*

(iv)  *$u'_\lambda(0) \sim \sqrt{2F(\bar{u}_0)}\lambda^{1/2}$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ .*

*Demostración.* Como antes, tenemos que estudiar la divergencia a  $+\infty$  de la integral

$$T(\bar{u}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\bar{u}} \frac{ds}{(F(\bar{u}) - F(s))^{1/2}},$$

cuando  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0+$ . Supondremos, para simplificar, que  $k > 1$ . Se tiene que

$$T(\bar{u}) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sum_{i=1}^m \int_{u_i-\delta}^{u_i+\delta} + \int_{\bar{u}_0-\delta}^{\bar{u}} \right) \frac{ds}{(F(\bar{u}) - F(s))^{1/2}}. \quad (1.36)$$

Estimemos la integral  $i$ -ésima que aparece en (1.36). Nótese que, si  $0 < u_i - s < \delta$ , se tiene

$$F(\bar{u}) - F(s) = F(\bar{u}) - F(\bar{u}_0) + F(u_i) - F(s) \sim \frac{\gamma}{k+1}(\bar{u} - \bar{u}_0)^{k+1} + \frac{\gamma_i}{k+1}(u_i - s)^{k+1},$$

y por eso

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{u_i-\delta}^{u_i} \frac{ds}{(F(\bar{u}) - F(s))^{1/2}} \sim \sqrt{\frac{k+1}{2}} \int_{u_i-\delta}^{u_i} \frac{ds}{(\gamma(\bar{u} - \bar{u}_0)^{k+1} + \gamma_i(u_i - s)^{k+1})^{1/2}} =$$

$$\sqrt{\frac{k+1}{2\gamma}} \left(\frac{\gamma}{\gamma_i}\right)^{\frac{1}{k+1}} (\bar{u} - \bar{u}_0)^{-\frac{k-1}{2}} \int_0^{(\gamma_i/\gamma)^{1/k+1} \delta / (\bar{u} - \bar{u}_0)} \frac{d\sigma}{(1 + \sigma^{k+1})^{1/2}} \sim$$

$$\frac{1}{\sqrt{2(k+1)\gamma}} \left(\frac{\gamma}{\gamma_i}\right)^{\frac{1}{k+1}} (\bar{u} - \bar{u}_0)^{-\frac{k-1}{2}} \csc\left(\frac{\pi}{k+1}\right) B_k .$$

cuando  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0$ . El análisis de la integral entre  $u_i$  y  $u_i + \delta$  es completamente simétrico. En cuanto a la integral entre  $\bar{u}_0 - \delta$  y  $\bar{u}_0$ , se obtiene de (1.32) que

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\bar{u}_0 - \delta}^{\bar{u}_0} \frac{ds}{(F(\bar{u}) - F(s))^{1/2}} \sim \sqrt{\frac{2}{\gamma(k+1)}} (\bar{u} - \bar{u}_0)^{-\frac{k-1}{2}} \left( \csc\left(\frac{\pi}{k+1}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{k+1}\right) \right) B_k .$$

si  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0$ . Por tanto, combinando todas estas estimaciones, se tiene finalmente que

$$T(\bar{u}) \sim \sqrt{\frac{2}{\gamma(k+1)}} (\bar{u} - \bar{u}_0)^{-\frac{k-1}{2}} \left[ \sum_{i=1}^m \left(\frac{\gamma}{\gamma_i}\right)^{\frac{1}{k+1}} \csc\left(\frac{\pi}{k+1}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{k+1}\right) \right] B_k , \quad (1.37)$$

para  $\bar{u} \rightarrow \bar{u}_0$ , de donde se concluye (ii) como en casos anteriores.

Para probar (iii), tomemos  $\delta > 0$ , y sea  $x_{\lambda,\delta}$  el único punto en el intervalo  $(0, 1/2)$  tal que  $u_\lambda = u_{j+1} - \delta$ . Entonces

$$\sqrt{\lambda} x_{\lambda,\delta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{u_{j+1} - \delta} \frac{ds}{(F(\bar{u}) - F(s))^{1/2}} \sim \sqrt{\frac{2}{\gamma(k+1)}} (\bar{u} - \bar{u}_0)^{-\frac{k-1}{2}} \csc\left(\frac{\pi}{k+1}\right) B_k \sum_{i=1}^j \left(\frac{\gamma}{\gamma_i}\right)^{\frac{1}{k+1}}$$

cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Como además  $T(\bar{u}) \sim \sqrt{\lambda}/2$ , tenemos, gracias a (1.37), que  $x_{\lambda,\delta} \rightarrow \xi_j$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ .  $\square$

**Observación 1.3.9** El caso  $F(\bar{u}_0) = 0$  puede incluirse en el teorema anterior, teniendo en cuenta solamente que si  $f(0) = 0$ , las expresiones en (ii) y (iii) deben ser sustituidas por

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 + \left(\frac{8B_k^2}{\gamma(k+1)}\right)^{\frac{1}{k-1}} \left[ \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma_0}{\gamma_i}\right)^{\frac{1}{k+1}} + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\gamma}{\gamma_i}\right)^{\frac{1}{k+1}}\right) \csc\left(\frac{\pi}{k+1}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{k+1}\right) \right]$$

cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ , y

$$\xi_j = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2}\gamma_0^{-\frac{1}{k+1}} + \sum_{i=1}^j \gamma_i^{-\frac{1}{k+1}}}{\frac{1}{2}\gamma_0^{-\frac{1}{k+1}} + \sum_{i=1}^{m+1} \gamma_i^{-\frac{1}{k+1}} + \gamma^{-\frac{1}{k+1}} \cos\left(\frac{\pi}{k+1}\right)}, \quad j = 1, \dots, m,$$

respectivamente. En cuanto a la capa límite, la situación es similar a la señalada en la Observación 1.3.7 a).

Veamos a continuación lo que ocurre en el caso  $f(\bar{u}_0) > 0$ . La demostración de este teorema es completamente análoga a la del anterior, usando las estimaciones de las integrales obtenidas previamente, y no la daremos aquí.

**Teorema 1.3.10** *Supongamos que  $u_1, u_2, \dots, u_m$  son ceros impares de  $f$  de orden  $k$ , tales que  $F(u_i) = F(\bar{u}_0) > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , y que  $f(\bar{u}_0) > 0$ . Entonces, existe una familia de soluciones de (1.24) tales que*

(i) *Existen  $\varepsilon > 0$ ,  $\lambda_0 > 0$  tales que para  $\lambda \geq \lambda_0$ ,  $u_\lambda$  es la única solución positiva de (1.24) que cumple  $\bar{u}_0 < \bar{u}_\lambda \leq \bar{u}_0 + \varepsilon$ , donde  $\bar{u}_\lambda = \max u_\lambda$ .*

(ii) *Si  $k = 1$ ,*

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 + e^{-\sqrt{\lambda}/(2\sum_{i=1}^m \gamma_i^{-1/2})}, \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

*mientras que, si  $k > 1$ ,*

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 + \frac{1}{f(\bar{u}_0)} \left( \frac{\sqrt{8}B_k}{k+1} \right)^{\frac{2(k+1)}{k-1}} \left[ \sum_{i=1}^m \left( \frac{k+1}{\gamma_i} \right)^{\frac{1}{k+1}} \csc \left( \frac{\pi}{k+1} \right) \right]^{\frac{2(k+1)}{k-1}} \lambda^{-\frac{k+1}{k-1}} \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

*donde los  $B_k$  están definidos en el Teorema 1.3.2.*

(iii) *Si llamamos*

$$\xi_j = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^j \gamma_i^{-\frac{1}{k+1}}}{\sum_{i=1}^m \gamma_i^{-\frac{1}{k+1}}}, \quad j = 1, \dots, m,$$

*$\xi_0 = 0$ , se tiene que  $u_\lambda \rightarrow u_{j+1}$  uniformemente sobre compactos de  $(\xi_j, \xi_{j+1})$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ .*

(iv)  *$u'_\lambda(0) \sim \sqrt{2F(\bar{u}_0)}\lambda^{1/2}$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ .*

**Observación 1.3.11** De nuevo, en el caso  $p \neq 2$ , los cambios que sufre la estimación (ii) en el Teorema 1.3.10 son mínimos. De hecho, tal estimación se convierte en

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 + e^{-\sqrt{\lambda}/2(p'\gamma/2)^{1/p} \left( \sum_{i=1}^m \gamma_i^{-1/2} \right)^{-1}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

para  $k = p - 1$ , mientras que, si  $k > p - 1$ ,

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 + \frac{1}{f(\bar{u}_0)} \left( \frac{4\tilde{B}_k}{(p')^{1/p}(k+1)} \right)^{\frac{p(k+1)}{k-p+1}} \left[ \sum_{i=1}^m \left( \frac{k+1}{\gamma_i} \right)^{\frac{1}{k+1}} \csc \left( \frac{\pi}{k+1} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{p} \right) \right]^{\frac{p(k+1)}{k-p+1}} \lambda^{-\frac{k+1}{k-p+1}}$$

cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ , mientras que la expresión de  $\xi_j$  en (iii) no resulta alterada.

### 1.3.4 Homogeneizaciones múltiples: ceros de distinto orden

Veamos a continuación lo que ocurre cuando en el conjunto  $\mathcal{N}$  hay varios ceros de distinto orden. Básicamente, los ceros de orden superior dominan a los restantes, formándose una capa de transición interna sólo por efecto de estos ceros. Por simplicidad, consideraremos solamente el caso  $F(\bar{u}_0) > 0$ ,  $f(\bar{u}_0) > 0$ .

**Teorema 1.3.12** *Supongamos que  $\mathcal{N} = \{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n\}$ , donde  $u_1, u_2, \dots, u_m$  son ceros de  $f$  de orden  $k > 1$ , y  $v_1, v_2, \dots, v_n$  de órdenes respectivos  $k_i$ ,  $1 \leq k_i < k$ . Si  $f(\bar{u}_0) > 0$ , entonces, existe una familia de soluciones de (1.24) tales que*

(i) *Existen  $\varepsilon > 0$ ,  $\lambda_0 > 0$  tales que para  $\lambda \geq \lambda_0$ ,  $u_\lambda$  es la única solución positiva de (1.24) que cumple  $\bar{u}_0 < \bar{u}_\lambda \leq \bar{u}_0 + \varepsilon$ , donde  $\bar{u}_\lambda = \max u_\lambda$ .*

(ii) *Si  $k = 1$ ,*

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 + e^{-\sqrt{\lambda}/(2\sum_{i=1}^m \gamma_i^{-1/2})}, \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

*mientras que, si  $k > 1$ ,*

$$\bar{u}_\lambda \sim \bar{u}_0 + \frac{1}{f(\bar{u}_0)} \left( \frac{\sqrt{8}B_k}{k+1} \right)^{\frac{2(k+1)}{k-1}} \left[ \sum_{i=1}^m \left( \frac{k+1}{\gamma_i} \right)^{\frac{1}{k+1}} \csc \left( \frac{\pi}{k+1} \right) \right]^{\frac{2(k+1)}{k-1}} \lambda^{-\frac{k+1}{k-1}} \quad \lambda \rightarrow +\infty,$$

*donde  $B_k$  están definidos en el Teorema 1.3.2.*

(iii) *Si llamamos*

$$\xi_j = \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^j \gamma_i^{-\frac{1}{k+1}}}{\sum_{i=1}^m \gamma_i^{-\frac{1}{k+1}}}, \quad j = 1, \dots, m,$$

*$\xi_0 = 0$ , se tiene que  $u_\lambda \rightarrow u_{j+1}$  uniformemente sobre compactos de  $(\xi_j, \xi_{j+1})$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ .*

(iv) *Si  $F(\bar{u}_0) > 0$ , entonces  $u'_\lambda(0) \sim \sqrt{2F(\bar{u}_0)}\lambda^{1/2}$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ .*

*Demostración.* Nótese primeramente que  $f(u) \sim \gamma'_i \varphi_{k_i+1}(v_i - u)$ ,  $u \sim v_i$ , con  $\gamma'_i > 0$  y  $1 \leq k_i < k$ . La demostración es exactamente igual a la del Teorema 1.3.8, sin más que tener en cuenta que

$$\begin{aligned} T(\bar{u}) &\sim \frac{\sqrt{2}}{k+1} \left( \frac{1}{f(\bar{u}_0)(\bar{u} - \bar{u}_0)} \right)^{\frac{k-1}{2(k+1)}} \csc \left( \frac{\pi}{k+1} \right) B_k \sum_{i=1}^m \left( \frac{k+1}{\gamma_i} \right)^{\frac{1}{k+1}} + \\ &\sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{2}}{k_i+1} \left( \frac{1}{f(\bar{u}_0)(\bar{u} - \bar{u}_0)} \right)^{\frac{k_i-1}{2(k_i+1)}} \csc \left( \frac{\pi}{k_i+1} \right) B_{k_i} \left( \frac{k_i+1}{\gamma'_i} \right)^{\frac{1}{k_i+1}} \sim \\ &\frac{\sqrt{2}}{k+1} \left( \frac{1}{f(\bar{u}_0)(\bar{u} - \bar{u}_0)} \right)^{\frac{k-1}{2(k+1)}} \csc \left( \frac{\pi}{k+1} \right) B_k \sum_{i=1}^m \left( \frac{k+1}{\gamma_i} \right)^{\frac{1}{k+1}}, \end{aligned}$$

ya que  $(k_i - 1)/(k_i + 1) < (k - 1)/(k + 1)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ .  $\square$

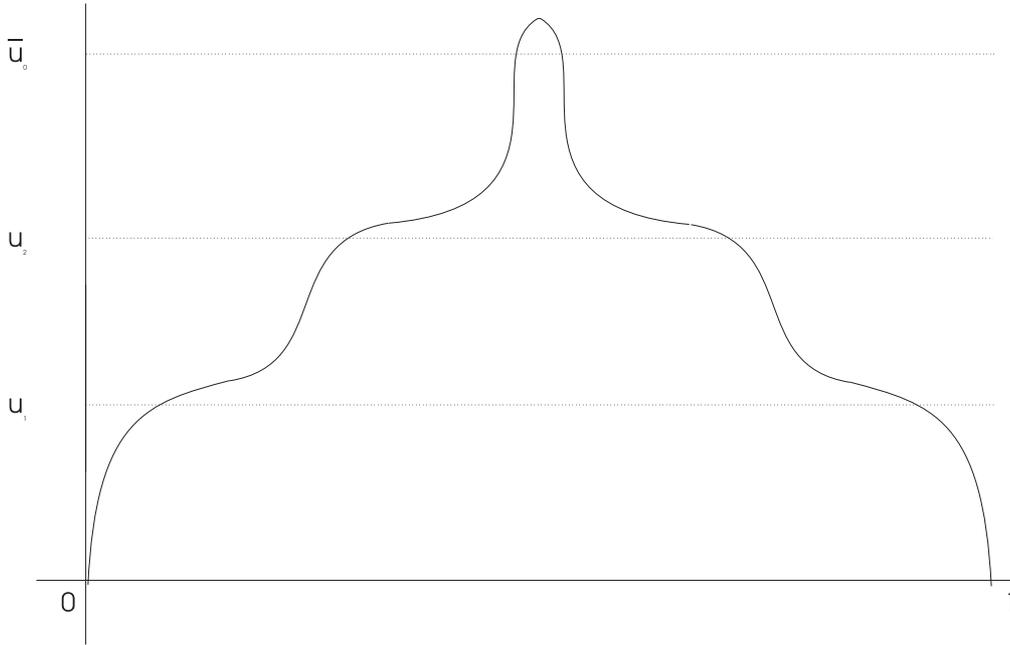


Fig. 1.2. Homogeneización múltiple. Caso en el que  $\mathcal{N} = \{u_1, u_2, \bar{u}_0\}$  y  $f(\bar{u}_0) > 0$ .

**Observación 1.3.13** En el caso  $p \neq 2$ , las estimaciones en (ii) del Teorema 1.3.12 quedan alteradas según lo recogido en la Observación 1.3.11.

### 1.3.5 Casos degenerados

Pasemos a estudiar a continuación el caso en el que los ceros de  $f$  tienen órdenes menores que 1. Específicamente, supongamos que los ceros del conjunto  $\mathcal{N}$  son  $u_1 < u_2 < \dots < u_m$ , con órdenes respectivos  $k_1, k_2, \dots, k_m$ ,  $0 < k_i < 1$ . Por tanto,  $F(u_i) = F(\bar{u}_0)$ , y para simplificar supondremos  $F(\bar{u}_0) > 0$  y  $f(\bar{u}_0) > 0$ .

Vamos a describir la forma exacta de las soluciones de (1.24) para  $\lambda$  grande, cuando  $\bar{u}_\lambda = \max u_\lambda$  cumple  $\bar{u}_\lambda \rightarrow \bar{u}_0$ .

En primer lugar, definimos

$$T_{i-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \frac{ds}{\sqrt{F(\bar{u}_0) - F(s)}}, \quad i = 1, 2, \dots, m+1, \quad (1.38)$$

donde, para homogeneizar la notación, hacemos  $u_0 = 0$ ,  $u_{m+1} = \bar{u}_0$ . Nótese que todas las integrales son convergentes, ya que los órdenes  $k_i$  de los ceros cumplen  $0 < k_i < 1$ . Análogamente, definimos implícitamente las funciones  $u = U_i(x)$ ,  $0 \leq x \leq T_i$  como

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_{u_i}^u \frac{ds}{\sqrt{F(\bar{u}_0) - F(s)}} = x, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (1.39)$$

y prolongamos  $U_i$  por cero fuera del intervalo  $[0, T_i]$ .

Para  $\lambda$  suficientemente grande, se tiene

$$2 \sum_{i=0}^m T_i < \sqrt{\lambda}.$$

Por eso, podemos tomar números positivos  $d_i, d'_i$  tales que

$$\sum_{i=0}^{m-1} d_i + d'_i = \sqrt{\lambda} - 2 \sum_{i=0}^m T_i. \quad (1.40)$$

Introducimos los puntos  $\xi_0, \dots, \xi_m, \xi'_0, \dots, \xi'_m$  de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= 0 \\ \xi_{i+1} &= \xi_i + T_i + d_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \\ \xi'_m &= \xi_m + 2T_m \\ \xi'_{i-1} &= \xi'_i + T_{i-1} + d'_{i-1}, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Finalmente, denotando por  $\chi$  a la función característica del intervalo unidad, definimos la función  $u = u(\xi, d_i, d'_i)$ :

$$u(\xi) = \sum_{i=0}^m U_i(\xi - \xi_i) + \sum_{i=0}^{m-1} u_{i+1} \chi\left(\frac{\xi - \xi_i - T_i}{d_i}\right) + \sum_{i=0}^m U_i(\xi'_i - \xi) + \sum_{i=0}^{m-1} u_{i+1} \chi\left(\frac{\xi - \xi'_{i+1}}{d'_i}\right). \quad (1.41)$$

La expresión dada por (1.41) es el perfil exacto de una solución de

$$\begin{aligned} -u'' &= f(u) & 0 < x < \sqrt{\lambda} \\ u(0) &= u(\sqrt{\lambda}) = 0, \end{aligned} \quad (1.42)$$

con máximo próximo a  $\bar{u}_0$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Por tanto, las funciones  $u_\lambda(x) = u_\lambda(\sqrt{\lambda}x, d_i, d'_i)$  son soluciones de (1.24) para  $\lambda$  suficientemente grande. Resumiendo, tenemos

**Teorema 1.3.14** *Sean  $u_1 < u_2 < \dots < u_m$  ceros de orden  $0 < k_i < 1$  de  $f$  tales que  $F(u_i) = F(\bar{u}_0) > 0$  y  $f(\bar{u}_0) > 0$ . Entonces, existen  $\varepsilon > 0$ ,  $\lambda_0 > 0$ , tales que para toda solución positiva  $u$  de (1.24) con  $\lambda \geq \lambda_0$  y  $\bar{u}_0 \leq \bar{u} \leq \bar{u}_0 + \varepsilon$ ,  $\bar{u} = \max u$ , existen números positivos  $d_1, \dots, d_m, d'_1, \dots, d'_m$  cumpliendo (1.40), tales que  $u = u_\lambda(\sqrt{\lambda}x, d_i, d'_i)$ , dada por (1.41).*

**Observaciones 1.3.15** a) En este caso, la homogeneización es trivial, ya que, para cualquier solución  $u$  de (1.24) con  $\lambda$  grande, se tiene que  $u \equiv u_{i+1}$  en  $[\lambda^{-1/2}T_i, \lambda^{-1/2}\xi_i]$ , mientras que  $u \equiv u_{i+1}$  en  $[\lambda^{-1/2}\xi'_{i+1}, \lambda^{-1/2}(\xi'_i - T_i)]$ .

b) Cuando en el conjunto  $\mathcal{N}$  hay algún cero de  $f$  de orden  $k \geq 1$ , los ceros de orden menor que 1 no juegan ningún papel en cuanto a las estimaciones (ii) de los Teoremas 1.3.2, 1.3.4, 1.3.6, 1.3.8, 1.3.10 y 1.3.12. Sin embargo, se puede probar, de forma análoga a la demostración del Teorema 1.3.14, que no se da la unicidad de soluciones con máximo próximo a  $\bar{u}_0$ .

c) Si  $p \neq 2$ , la situación es exactamente la misma, con la salvedad de que ahora la degeneración se traduce en  $0 < k < p - 1$ , y las integrales en (1.38) y (1.39) deben sustituirse por

$$T_{i-1} = \frac{1}{(p')^{1/p}} \int_{u_{i-1}}^{u_i} \frac{ds}{(F(\bar{u}_0) - F(s))^{1/p}}, \quad i = 1, 2, \dots, m+1,$$

y

$$\frac{1}{(p')^{1/p}} \int_{u_i}^u \frac{ds}{(F(\bar{u}_0) - F(s))^{1/p}} = x, \quad i = 1, 2, \dots, m+1,$$

respectivamente. Las soluciones  $u$  de (1.42) vienen dadas todavía por la expresión (1.41), para unos  $d_i, d'_i$  convenientes.

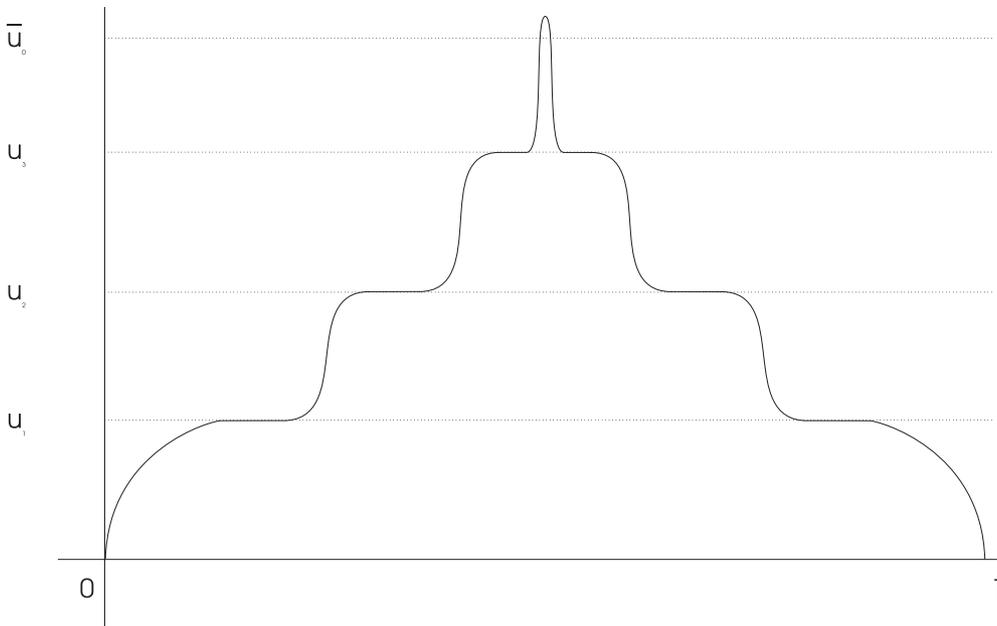


Fig. 1.3. Homogeneización múltiple en presencia de núcleos muertos. Caso en el que  $\mathcal{N} = \{u_1, u_2, u_3, \bar{u}_0\}$  y  $f(\bar{u}_0) > 0$ .

## **Capítulo 2**

### **Estudio de capas límite**

## Capítulo 2

# Estudio de capas límite

En el presente capítulo vamos a estudiar el comportamiento interior y en la frontera de las soluciones positivas de problemas de la forma

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda f(u) & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  es un dominio acotado, cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . La no linealidad  $f$  que consideraremos será de tipo logístico, es decir,  $f(u) \sim m u^{p-1}$  cuando  $u \rightarrow 0+$ ,  $m > 0$ ,  $f(u)/u^{p-1}$  es decreciente en  $u \geq 0$ , y  $f$  admite un único cero positivo  $u = \bar{u}_0$  de orden  $k > 0$  (cf. hipótesis (H1) en §2.1). El problema (2.1) incluye, después de un cambio de variable, a la ecuación logística:

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda m |u|^{p-2} u - |u|^{q-1} u & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{L}$$

donde  $m, p, q$  son constantes positivas,  $p > 1$ ,  $q > p - 1$ , y  $\lambda > 0$ .

Estudiaremos la homogeneización de la única solución positiva  $u_\lambda$  de (2.1), es decir, el límite  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u_\lambda(x) = \bar{u}_0$ , uniformemente sobre compactos de  $\Omega$ , y obtendremos una estimación exacta de la capa límite de la forma

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu} \sim -C \lambda^{1/p}$$

donde  $\nu$  es la normal exterior unitaria, y  $C$  es una constante que se expresa explícitamente en términos de  $f$  y  $p$ .

Los resultados se aplican a la ecuación logística (L), así como a sus perturbaciones sublineales:

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda m |u|^{p-2} u - |u|^{q-1} u + g(u) & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{LP}$$

donde  $g$  es un término de perturbación de pequeña amplitud en  $u = 0$  y de orden inferior a  $u^q$  cuando  $u \rightarrow +\infty$ . Comparando la ecuación (LP) con problemas logísticos convenientes, probaremos que las soluciones positivas de (LP) se homogeneizan, dando una estimación precisa de la correspondiente capa límite.

## 2.1 Problemas de tipo logístico

En esta sección, nos vamos a ocupar del estudio de la existencia, unicidad, dependencia respecto a parámetros y comportamiento cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$  de las soluciones positivas de problemas de contorno de la forma:

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda f(u) & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde  $p > 1$ ,  $\lambda$  es un parámetro positivo y  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  es un dominio acotado de clase  $C^{2,\mu}$  para algún  $0 < \mu < 1$ . Supondremos que la no linealidad  $f$  cumple las hipótesis (H1) del Capítulo 1.

A saber:

(H1)<sub>1</sub>  $f$  es continua en  $\mathbb{R}^+$ , y verifica  $\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = m > 0$ .

(H1)<sub>2</sub> La función  $f(u)/u^{p-1}$  es decreciente si  $u > 0$ .

(H1)<sub>3</sub>  $f$  tiene un cero positivo  $\bar{u}_0$  de orden  $k > 0$ . Es decir, existe una constante  $C_0 > 0$  tal que:

$$\lim_{u \rightarrow \bar{u}_0^-} \frac{f(u)}{(\bar{u}_0 - u)^k} = C_0.$$

### 2.1.1 Existencia y unicidad de soluciones positivas

Empezaremos describiendo algunos resultados básicos sobre existencia, unicidad y dependencia respecto a  $\lambda$  de las soluciones de (2.1). En los siguientes resultados, el autovalor principal  $\lambda = \sigma_{1,p}$  del operador  $-\Delta_p$  en  $\Omega$  con condiciones de Dirichlet homogéneas jugará un papel destacado. Concretamente, consideremos el problema de autovalores:

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda |u|^{p-2} u & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde las soluciones se consideran en  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . A diferencia del caso  $p = 2$ , la estructura global del conjunto de autovalores de (2.2) no es conocida completamente aún. Entre los resultados que se encuentran en la literatura debe destacarse el de la existencia de una sucesión de autovalores  $\{\sigma_n\}$  de (2.2) tal que  $\sigma_n \rightarrow +\infty$  (cf. [4], [35]). La prueba hace uso de la teoría de Lusternik-Schnirelman, que permite a su vez obtener estimaciones de  $\sigma_n$  cuando  $n \rightarrow +\infty$  (cf. [36], [33]). En cualquier caso, es inmediato comprobar que cualquier autovalor  $\lambda$  de (2.2) verifica  $\lambda \geq C^{-1}$ , donde  $C$  es cualquier constante válida en la desigualdad de Poincaré en  $W_0^{1,p}(\Omega)$ . Por eso, está bien definido el siguiente número positivo:

$$\sigma_{1,p} = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p}{\int_{\Omega} |u|^p}. \quad (2.3)$$

Por otro lado, usando los métodos directos del cálculo de variaciones (cf. [75, Cap. 1]) se puede demostrar que  $\sigma_{1,p}$  es en efecto el primer autovalor de (2.2). Además, si el dominio  $\Omega$  es  $C^{2,\mu}$  para algún  $0 < \mu < 1$ , se demostró en [3] que  $\sigma_{1,p}$  es simple, aislado y es el único autovalor asociado a una autofunción positiva (véase [9] cuando  $\partial\Omega$  es conexo, [24], [10] en bolas de  $\mathbb{R}^N$ ,

[57] sin regularidad sobre  $\partial\Omega$  y [39] cuando  $\Omega$  es  $C^{1,\mu}$  y (2.2) contiene pesos). Por tanto,  $\sigma_{1,p}$  tiene una única autofunción positiva  $\phi$  asociada de forma que  $|\phi|_\infty = 1$ . Se tiene también, en virtud por ejemplo del Teorema A.3 del Apéndice A, que  $\phi \in C^{1,\beta_0}(\overline{\Omega})$  para algún  $0 < \beta_0 < 1$ .

Para una discusión completa del problema (2.2) unidimensional, véase [22] y [84]. En cuanto a problemas de autovalores con convección, véase [5] ( $N \geq 2$ ) y [43] para un análisis minucioso del caso unidimensional. En [6] se tratan además algunas cuestiones sobre el segundo autovalor.

El siguiente teorema proporciona la información básica sobre el problema (2.1). Las cuestiones de existencia y unicidad de soluciones son conocidas en la literatura, pero incluimos una demostración por completitud.

**Teorema 2.1.1** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un dominio acotado de clase  $C^{2,\mu}$  para algún  $0 < \mu < 1$ . Supongamos que  $f$  cumple las hipótesis (H1). Entonces:*

(i) (2.1) tiene al menos una solución no negativa  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  sólo cuando

$$\lambda > \frac{\sigma_{1,p}}{m}. \quad (2.4)$$

(ii) Si se cumple la relación (2.4), entonces (2.1) tiene una única solución positiva  $u_\lambda$ , que verifica la estimación

$$0 < u_\lambda(x) \leq \bar{u}_0, \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.5)$$

(iii) Existe  $0 < \beta_0 < 1$  tal que  $u_\lambda \in C_0^{1,\beta_0}(\overline{\Omega})$  para cada  $\lambda > \sigma_{1,p}/m$ .

(iv) La familia de soluciones positivas  $\{u_\lambda\}$  bifurca desde cero en  $\lambda = \sigma_{1,p}/m$ . Además, la aplicación  $\lambda \rightarrow u_\lambda$  es continua y creciente de  $[\sigma_{1,p}/m, +\infty)$  en  $C_0^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ , para cada  $0 \leq \beta < \beta_0$ .

*Demostración.* Comencemos con (i). Sea  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  una solución débil no negativa de (2.1). Entonces podemos tomar  $u$  como función test en la formulación débil de (2.1) y usar la caracterización variacional (2.3) del primer autovalor para obtener:

$$\int_\Omega |\nabla u|^p = \lambda \int_\Omega \frac{f(u)}{u^{p-1}} |u|^p < \lambda m \int_\Omega |u|^p \leq \frac{\lambda m}{\sigma_{1,p}} \int_\Omega |\nabla u|^p,$$

de donde  $\lambda > \sigma_{1,p}/m$ .

Para demostrar (ii) haremos uso del método de sub y supersoluciones, del cual introducimos una demostración en el Apéndice B. Puesto que

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\lambda f(u)}{u^{p-1}} = \lambda m > \sigma_{1,p},$$

obtenemos, en virtud del Teorema B.7 del Apéndice B, que  $\underline{u} = \delta\phi$  es una subsolución, donde  $\phi$  es la autofunción principal asociada a  $\sigma_{1,p}$  normalizada de forma que  $|\phi|_\infty = 1$ , y  $0 < \delta \leq \bar{u}_0$  es suficientemente pequeño. Puesto que, claramente,  $\bar{u}_0$  es una supersolución y  $\underline{u} \leq \bar{u}_0$ , obtenemos la existencia de una solución  $u_\lambda \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ,  $u_\lambda > 0$ , que verifica la estimación (2.5).

Para probar que  $u_\lambda$  es la única solución no negativa, usaremos la Proposición 1 de [3] (véase también [27]). En primer lugar, demostraremos que todas las posibles soluciones positivas de

(2.1) verifican la estimación (2.5). En efecto, si  $v$  es cualquier solución positiva de (2.1), y tomamos  $\varphi = (v - \bar{u}_0)^+$  como función test en la formulación débil de (2.1), encontramos que

$$\int_{\Omega} |\nabla(v - \bar{u}_0)^+|^p = \lambda \int_{\{v > \bar{u}_0\}} f(v)(v - \bar{u}_0) \leq 0 ,$$

de donde  $(v - \bar{u}_0)^+ = 0$ , es decir,  $v \leq \bar{u}_0$ . Como consecuencia del Teorema A.3,  $v \in C_0^{1,\beta_0}(\bar{\Omega})$  para algún  $0 < \beta_0 < 1$  (con lo que también (iii) queda probada). En particular, el principio fuerte del máximo (cf. [81]) implica  $v > 0$  en  $\Omega$ , y  $\frac{\partial v}{\partial \nu} < 0$  en  $\partial\Omega$ , donde  $\nu$  es la normal exterior unitaria a  $\partial\Omega$ . Por tanto,

$$\frac{u_\lambda}{v}, \frac{v}{u_\lambda} \in L^\infty(\Omega) ,$$

y entonces, en virtud de la Proposición 1 de [3],

$$I(u_\lambda, v) = \left\langle \frac{-\Delta_p u_\lambda}{u_\lambda^{p-1}} - \frac{-\Delta_p v}{v^{p-1}}, u_\lambda^p - v^p \right\rangle \geq 0 .$$

Pero, por otro lado, por la propiedad (H1)<sub>2</sub> de  $f$ ,

$$I(u_\lambda, v) = \int_{\Omega} \left( \frac{f(u_\lambda)}{u_\lambda^{p-1}} - \frac{f(v)}{v^{p-1}} \right) (u_\lambda^p - v^p) < 0 ,$$

si suponemos  $v \neq u_\lambda$ . Por eso, la única opción posible es  $v = u_\lambda$ , y la unicidad queda probada.

Veamos que  $u_\lambda$  es creciente respecto a  $\lambda$ . Sean  $\sigma_{1,p}/m < \lambda < \mu$ . Puesto que  $f \geq 0$  en el intervalo  $[0, \bar{u}_0]$ ,  $u_\lambda$  es subsolución de

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \mu f(u) & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Tomando  $\bar{u}_0$  como supersolución, de la unicidad se desprende que  $u_\lambda \leq u_\mu$ .

Para finalizar la demostración del teorema, sea  $\lambda_n \rightarrow \bar{\lambda}$ , con  $\lambda_n > \sigma_{1,p}/m$ , y soluciones positivas  $u_{\lambda_n}$ . En virtud del Teorema A.3 del Apéndice A, podemos conseguir la cota uniforme

$$|u_{\lambda_n}|_{1,\beta_0} \leq M, \quad n \in \mathbb{N},$$

y se deduce que para cada  $0 < \beta < \beta_0$ , existe una subsucesión  $u_k = u_{\lambda_{n_k}}$  tal que  $u_k \rightarrow \bar{u}$  en  $C_0^{1,\beta}(\bar{\Omega})$ . Por tanto,  $\bar{u}$  es una solución débil no negativa de (2.1) con  $\lambda = \bar{\lambda}$ . Si  $\bar{\lambda} > \sigma_{1,p}/m$ , entonces  $\lambda_{n_k} \geq \bar{\lambda} - \varepsilon > \sigma_{1,p}/m$  para  $\varepsilon$  convenientemente pequeño y  $k$  grande. Por eso,  $u_k \geq u_{\bar{\lambda}-\varepsilon} > 0$ , y se concluye que  $\bar{u} > 0$ , de donde  $\bar{u} = u_{\bar{\lambda}}$ . La unicidad del límite implica  $u_\lambda \rightarrow u_{\bar{\lambda}}$ . Si, por el contrario,  $\bar{\lambda} = \sigma_{1,p}/m$ , entonces  $\bar{u} = 0$ , y  $u_\lambda \rightarrow 0$ . Esto demuestra también la aseveración sobre bifurcación desde el cero.  $\square$

**Observaciones 2.1.2** a) Una demostración alternativa sobre la existencia de soluciones del problema (2.1) se encuentra en [27], donde se usan técnicas variacionales, que extienden a  $p \neq 2$  los resultados del caso semilineal  $p = 2$ , obtenidos previamente en [14].

b) Las conclusiones (y la demostración) del teorema anterior permanecen inalteradas si se permite  $m = +\infty$  en la hipótesis (H1)<sub>1</sub>. En ese caso, el valor  $\sigma_{1,p}/m$  debe ser sustituido por cero.

c) La condición en (H1)<sub>2</sub> de que  $f(u)/u^{p-1}$  sea decreciente puede remplazarse por la de que sea no creciente. Sin embargo, hay ligeras diferencias en las conclusiones del teorema. En primer lugar, si  $u_m := \sup\{u \geq 0 : f(u)/u^{p-1} = m\}$  es cero, las conclusiones son las mismas. Sin embargo, si  $u_m > 0$ , aparecen una serie de cambios.

En relación con (i), se concluye de la misma forma que las soluciones no negativas no son posibles si  $\lambda < \sigma_{1,p}/m$  ó  $\lambda = \sigma_{1,p}/m$  y  $\sup_{\Omega} u > u_m$ . En cambio, si  $\lambda = \sigma_{1,p}/m$ , podemos construir la familia de soluciones  $u_{\sigma_{1,p}/m,t} = t\phi$ , con  $0 < t \leq u_m$ .

En cuanto a (ii), la unicidad sigue siendo cierta si  $\lambda > \sigma_{1,p}/m$ . En efecto, si existiesen dos soluciones  $u, v$ , entonces  $I(u, v) = 0$ , y por tanto  $u = cv$  para una cierta constante  $c > 0$  (Proposición 1 de [3]). Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $c < 1$ . Si llamamos  $r(z) = f(z)/z^{p-1}$ , obtenemos que  $r(u(x)) = r(cv(x))$ , para todo  $x \in \Omega$ , y entonces  $r(u(x)) = m$ , para todo  $x \in \Omega$ , de donde  $\sup_{\Omega} u \leq u_m$ . Pero  $u$  cumple

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda m u^{p-1} & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

y se tendría que  $\lambda m$  es un autovalor mayor que  $\sigma_{1,p}$ , asociado a una autofunción positiva. Puesto que esto no es posible,  $u = v$ , y la unicidad sigue siendo válida.

En cuanto a los resultados de regularidad y monotonía en (iii) y (iv), siguen siendo ciertos (de hecho, la unicidad de  $u_{\lambda}$  implica la monotonía y la continuidad para  $\lambda > \sigma_{1,p}/m$ ). Además, como  $\sup_{\Omega} u_{\lambda} > u_m$  si  $\lambda > \sigma_{1,p}/m$ , se concluye usando los argumentos de compacidad antes descritos que el único posible límite de  $u_{\lambda}$  cuando  $\lambda \rightarrow \sigma_{1,p}/m+$  en  $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$  para  $0 < \beta < \beta_0$  es precisamente  $u = u_m\phi$ , lo cual conlleva que  $\lim_{\lambda \rightarrow \sigma_{1,p}/m+} u_{\lambda} = u_m\phi$  en  $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ .

Finalmente, nótese que en este caso el conjunto de soluciones no triviales de (2.1) puede ser parametrizado de la siguiente forma:  $(\lambda(s), u_{\lambda(s)})$ , con  $\lambda(s) = \sigma_{1,p}/m$ ,  $u_{\lambda(s)} = s\phi$  si  $0 \leq s \leq u_m$  y  $\lambda(s) = \sigma_{1,p}/m + (s - u_m)$ ,  $u_{\lambda(s)} = u_{\lambda}$  para  $s > u_m$ . Es decir, se produce una *bifurcación vertical* en  $\lambda = \sigma_{1,p}/m$ .

d) Los resultados recogidos en este epígrafe se encuentran en [41], bajo la hipótesis adicional  $f \in C^{\mu}(\mathbb{R}^+)$ . En este caso, (iii) se puede mejorar de la siguiente forma: existe  $\varepsilon = \varepsilon(\lambda)$  tal que  $u_{\lambda} \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega_{\varepsilon}})$ , donde  $\gamma = \min\{\mu, k, p - 1\}$  (véase el Teorema A.5 en el Apéndice A).

### 2.1.2 El fenómeno de homogeneización

Vamos ahora a analizar el comportamiento de las soluciones positivas de (2.1) cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Concretamente, el primer fenómeno del que nos ocuparemos es la “homogeneización” de  $\{u_{\lambda}\}$

hacia  $\bar{u}_0$ , es decir, en la validez del límite

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u_\lambda(x) = \bar{u}_0, \quad x \in \Omega, \quad (2.6)$$

uniformemente sobre compactos de  $\Omega$ . Nuestro primer resultado establece que, en efecto, las soluciones de (2.1) se homogeneizan hacia  $\bar{u}_0$ . Aunque esto es consecuencia de los resultados en §2.1.3, daremos una demostración que es una adaptación de la del Teorema 2.1 en [31].

**Teorema 2.1.3** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un dominio acotado de clase  $C^{2,\mu}$  para algún  $0 < \mu < 1$ , y para cada  $\lambda > \sigma_{1,p}/m$  sea  $u_\lambda$  la única solución positiva de (2.1), con  $f$  satisfaciendo las hipótesis (H1). Entonces*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u_\lambda(x) = \bar{u}_0, \quad x \in \Omega,$$

*uniformemente sobre compactos de  $\Omega$ .*

*Demostración.* Sea  $K \subset \Omega$  un subconjunto compacto. Puesto que, en virtud del Teorema 2.1.1,  $u_\lambda \leq \bar{u}_0$  para todo  $\lambda > \sigma_{1,p}/m$ , es suficiente demostrar que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\lambda(\varepsilon)$  tal que  $u_\lambda \geq \bar{u}_0 - \varepsilon$  en  $K$  si  $\lambda \geq \lambda(\varepsilon)$ . Fijemos  $x_0 \in K$ , y tomemos  $R > 0$  de forma que  $B_R = B_R(x_0) \subset \Omega$ . Para  $\varepsilon > 0$  fijo, elegimos  $\lambda_0 = \lambda_0(x_0, \varepsilon)$  tal que

$$\frac{\sigma_{1,p}(B_R)}{\lambda_0} \leq \frac{f(\bar{u}_0 - \varepsilon/2)}{(\bar{u}_0 - \varepsilon/2)^{p-1}}.$$

donde  $\sigma_{1,p}(B_R)$  denota al autovalor principal de  $-\Delta_p$  en  $B_R$  (nótese que esto puede hacerse porque  $f(\bar{u}_0 - \varepsilon/2)/(\bar{u}_0 - \varepsilon/2)^{p-1} > 0$ ). Según el Teorema 2.1.1, si  $\lambda \geq \lambda_0$ , entonces  $u_\lambda \geq u_{\lambda_0}$ . Además,  $u_{\lambda_0}$  es supersolución del problema

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda_0 f(u) & \text{en } B_R \\ u &= 0 & \text{en } \partial B_R, \end{aligned} \quad (2.7)$$

que tiene una única solución  $u_{\lambda_0}^{B_R}$ . Por tanto,  $u_\lambda \geq u_{\lambda_0}^{B_R}$  en  $B_R$ . Veamos ahora que  $\underline{u} = (\bar{u}_0 - \varepsilon/2)\phi$ , donde  $\phi$  es la autofunción positiva asociada a  $\sigma_{1,p}(B_R)$  con  $|\phi|_\infty = 1$ , es una subsolución. En efecto, como  $f(u)/u^{p-1}$  es decreciente, se tiene que

$$\frac{f((\bar{u}_0 - \varepsilon/2)\phi)}{(\bar{u}_0 - \varepsilon/2)^{p-1}\phi^{p-1}} \geq \frac{f(\bar{u}_0 - \varepsilon/2)}{(\bar{u}_0 - \varepsilon/2)^{p-1}} \geq \frac{\sigma_{1,p}(B_R)}{\lambda_0},$$

de donde, al ser  $\phi$  autofunción:

$$-\Delta_p \underline{u} = (\bar{u}_0 - \varepsilon/2)^{p-1} \sigma_{1,p}(B_R) \phi^{p-1} \leq \lambda_0 f(\underline{u}),$$

y por tanto  $\underline{u}$  es una subsolución. De la unicidad de soluciones del problema (2.7), y puesto que  $u = \bar{u}_0$  es una supersolución, se obtiene  $u_\lambda \geq (\bar{u}_0 - \varepsilon/2)\phi$  en  $B_R$ . Además, como  $\phi$  es radialmente simétrica,  $\phi(x_0) = 1$ , y podemos elegir  $R_1 = R_1(x_0, \varepsilon)$  de manera que

$$\phi(x) \geq \frac{\bar{u}_0 - \varepsilon}{\bar{u}_0 - \varepsilon/2} \quad \text{en } B_{R_1}(x_0),$$

lo cual implica que  $u_\lambda(x) \geq \bar{u}_0 - \varepsilon$  en  $B_{R_1}(x_0)$  para  $\lambda \geq \lambda_0$ . Un argumento de compacidad completa la demostración.  $\square$

### 2.1.3 Estimaciones de la capa límite

Como vimos en la introducción, la homogeneización de las soluciones de (2.1) hacia  $\bar{u}_0$ , junto con la condición de contorno  $u = 0$  en  $\partial\Omega$ , lleva a que  $\frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu} \rightarrow -\infty$  sobre  $\partial\Omega$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . En esta sección nos ocuparemos de estudiar exactamente cómo es el comportamiento de  $\frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu}$ . El principal resultado es el siguiente.

**Teorema 2.1.4** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un dominio acotado de clase  $C^{2,\mu}$  para algún  $0 < \mu < 1$  y supongamos que  $f$  satisface (H1). Si  $u = u_\lambda(x)$  denota a la única solución positiva de (2.1),*

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda f(u) & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

cuando  $\lambda > \sigma_{1,p}/m$ , entonces

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-1/p} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu}(x) = -(p'F(\bar{u}_0))^{1/p}, \quad (2.8)$$

uniformemente sobre  $\partial\Omega$ , donde  $\nu$  es la normal exterior unitaria y  $F(\bar{u}_0) = \int_0^{\bar{u}_0} f(s) ds$ .

La demostración del Teorema 2.1.4 se va a llevar a cabo en varios pasos. Recordemos primeramente que en el caso unidimensional  $N = 1$  de (2.1), la estimación (2.8) es válida en virtud del Teorema 1.2.2. Esta información se usará para obtener algunos resultados auxiliares en los que  $\Omega$  es una bola o un anillo de  $\mathbb{R}^N$ , y así proceder finalmente a la demostración de (2.8) en un dominio arbitrario  $\Omega$ .

En primer lugar vamos a estudiar el caso en que  $\Omega = B_R$  es una bola de  $\mathbb{R}^N$ ,  $\{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$ . Obtendremos una estimación superior del límite en (2.8). En el caso general en que  $\Omega$  es un dominio regular, podrá obtenerse una estimación superior de  $\lambda^{-1/p} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu}(x_0)$ ,  $x_0 \in \partial\Omega$ , eligiendo una bola conveniente tangente a  $\partial\Omega$  en  $x_0$ .

Antes de enunciar nuestro siguiente resultado, vamos a hacer una breve recapitulación de propiedades básicas del caso radial  $\Omega = B_R$ . Si  $u = u(x)$  denota, para  $\lambda > \sigma_{1,p}(R)/m$ , a la única solución positiva de (2.1), entonces  $u$  debe ser radial, es decir  $u(x) = u(r)$  con  $r = |x|$ . En efecto,  $u$  es  $C^1$  (Teorema 2.1.1, (iii)) y como la versión débil de  $-\Delta_p u = \lambda f(u)$  es invariante por rotaciones, la unicidad conlleva la afirmación deseada. En particular,  $u \in C^1([0, R])$ ,  $u'(0) = u(R) = 0$ . Por otro lado

$$\int_0^R \varphi_p(u') \varphi' r^{N-1} dr = \lambda \int_0^R f(u) \varphi r^{N-1} dr,$$

para toda  $\varphi \in C^1([0, R])$ ,  $\varphi'(0) = \varphi(R) = 0$ , y entonces argumentos similares a los de §1.1 nos permiten llegar a que  $r^{N-1} \varphi_p(u') \in C^1([0, R])$  y que  $-(r^{N-1} \varphi_p(u'))' = \lambda r^{N-1} f(u)$  se verifica puntualmente en  $0 < r < R$ . Por eso podemos asegurar que  $u = u(r)$  es una solución clásica del problema

$$\begin{cases} - (r^{N-1} \varphi_p(u'))' = \lambda r^{N-1} f(u) & 0 < r < R \\ u'(0) = u(R) = 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

en el sentido del Capítulo 1 (§1.1).

**Lema 2.1.5** Sea  $f = f(u)$  una función continua que verifica (H1) y para  $\lambda > \sigma_{1,p}(R)/m$ , sea  $u = u_\lambda(r)$ ,  $0 < r < R$ , la única solución positiva de (2.1) en la bola  $\Omega = B_R$ . Entonces, la derivada en la dirección de la normal exterior  $u'_\lambda(R)$  satisface

$$\limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-1/p} u'_\lambda(R) \leq -(p' F(u_0))^{1/p}. \quad (2.10)$$

*Demostración.* Fijemos  $\lambda > \frac{\sigma_{1,p}(R)}{m}$  y sea  $u = u_\lambda(r)$ ,  $0 < r < R$ , la solución positiva de (2.9). Para poder conseguir una estimación adecuada de  $u_\lambda$  es conveniente eliminar la dependencia de  $r$  del segundo miembro de (2.9). Para ello, nótese que tal ecuación puede escribirse en la forma:

$$-r^\theta \varphi_p(r^\theta u')' = \lambda r^{p\theta} f(u), \quad (2.11)$$

donde  $\theta = (N-1)/(p-1)$ . Por tanto, es natural introducir un cambio de variable  $\rho = \rho(r)$  de manera que  $d\rho/dr = \pm r^{-\theta}$ . Si tomamos el signo menos y normalizamos para que  $\rho(R) = 0$ , la expresión del cambio es la siguiente:

$$\rho = g(r) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta} (R^{1-\theta} - r^{1-\theta}) & p \neq N \\ \log\left(\frac{R}{r}\right) & p = N. \end{cases}$$

Nótese que  $0 < \rho < T$  si  $0 < r < R$  donde  $T = +\infty$  para  $p \leq N$ , y  $T = R^{1-\theta}/(1-\theta)$  cuando  $p > N$ .

Haciendo  $v(\rho) = u(g^{-1}(\rho))$  en (2.9) llegamos al problema

$$\begin{aligned} -\varphi_p(v')' &= \lambda (g^{-1}(\rho))^{p\theta} f(v) & 0 < \rho < b \\ v(0) &= v'(T) = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

donde  $' = d/d\rho$ . Fijemos  $0 < b < T$ . Si para  $\lambda > \sigma_{1,p}(R)/m$ ,  $v = v_\lambda(\rho) = u_\lambda(g^{-1}(\rho))$  denota a la única solución positiva de (2.12), entonces

$$-\varphi_p(v')' \geq \lambda (g^{-1}(b))^{p\theta} f(v),$$

cuando  $0 < \rho < b$ . Por tanto,  $v_\lambda$  es supersolución de

$$\begin{aligned} -\varphi_p(v')' &= \lambda (g^{-1}(b))^{p\theta} f(v) & 0 < \rho < b \\ v(0) = v(b) &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Resaltemos que (2.13) tiene una única solución positiva  $v = \underline{v}_\lambda(\rho, b)$  cuando  $\lambda$  verifica  $\lambda > \lambda_{\min}(b)/(g^{-1}(b))^{p\theta}$  (véase el Teorema 1.2.1). Podemos por tanto concluir que  $0 < \underline{v}_\lambda(\rho, b) \leq v_\lambda(\rho)$  si  $0 < \rho < b$ , de donde se deduce

$$0 < \underline{v}'_\lambda(0, b) \leq v'_\lambda(0),$$

cuando  $\lambda > \max\left\{\sigma_{1,p}(R)/m, \lambda_{\min}(b)/(g^{-1}(b))^{p\theta}\right\}$ . Esta desigualdad implica

$$0 < \frac{\lambda^{-1/p}}{R^\theta} \frac{d\underline{v}_\lambda}{d\rho}(0, b) \leq -\lambda^{-1/p} \frac{du_\lambda}{dr}(R). \quad (2.14)$$

En virtud del Teorema 1.2.2,  $\lambda^{-1/p} \frac{du_\lambda}{d\rho}(0, b) \sim (g^{-1}(b))^\theta (p'F(\bar{u}_0))^{1/p}$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Por eso, tomando límites inferiores en (2.14) obtenemos que

$$\left(\frac{g^{-1}(b)}{R}\right)^\theta (p'F(\bar{u}_0))^{1/p} \leq \liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} -\lambda^{-1/p} \frac{du_\lambda}{dr}(R),$$

es decir,

$$\limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-1/p} \frac{du_\lambda}{dr}(R) \leq -\left(\frac{g^{-1}(b)}{R}\right)^\theta (p'F(\bar{u}_0))^{1/p}. \quad (2.15)$$

Haciendo  $b \rightarrow 0+$  llegamos a la desigualdad (2.10), con lo que concluye la demostración del Lema 2.1.5.  $\square$

A continuación nos dedicaremos a obtener una estimación inferior del límite (2.8) en el caso del anillo  $A(a, R) = \{x \in \mathbb{R}^N : 0 < a < |x| < R\}$ , pero sólo en los puntos de  $\partial A$  en los que  $|x| = a$ . Esto nos permitirá, en el caso de un dominio  $C^{2,\mu}$  arbitrario  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , estimar el límite inferior  $\liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0)$  en cualquier punto  $x_0 \in \partial\Omega$ . En esa situación general, elegiremos un anillo  $A(a, R; y_0) := A(a, R) + y_0$ ,  $\Omega \subset A(a, R; y_0)$  tangente a  $\partial\Omega$  en  $x_0$ .

Al igual que en el caso de la bola, la solución positiva de (2.1) en  $\Omega = A(a, R)$  correspondiente a  $\lambda > \sigma_{1,p}(A)/m$  debe ser radial,  $u = u_\lambda(r)$ ,  $a < r < R$ ,  $r = |x|$ . Además,  $u_\lambda$  y  $\varphi_p(u'_\lambda)$  son  $C^1$  en  $a \leq r \leq R$ , y por tanto  $u_\lambda$  es una solución clásica del problema

$$\begin{aligned} - (r^{N-1} \varphi_p(u'_\lambda))' &= \lambda r^{N-1} f(u) & a < r < R \\ u(a) = u(R) &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

En relación con éste, tenemos el siguiente resultado:

**Lema 2.1.6** *Consideremos el problema (2.1) en el anillo  $A(a, R) = \{x \in \mathbb{R}^N : 0 < a < |x| < R\}$  siendo  $f = f(u)$  una función continua que satisface (H1). Para  $\lambda > \sigma_{1,p}(A)/m$  sea  $u = u_\lambda(r)$  la única solución positiva de (2.1) en ese anillo. Entonces,*

$$\liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} -\lambda^{-1/p} u'_\lambda(a) \geq -(p'F(\bar{u}_0))^{1/p}. \quad (2.17)$$

*Demostración.* Siguiendo la idea usada en la demostración del Lema 2.1.5, la variable  $r$  puede eliminarse del primer miembro de (2.16) introduciendo una nueva variable  $\rho = \rho(r)$  mediante la expresión

$$\rho = g(r) = \begin{cases} \frac{1}{1-\theta} [r^{1-\theta} - a^{1-\theta}] & p \neq N \\ \log\left(\frac{r}{a}\right) & p = N, \end{cases}$$

donde  $\theta = (N-1)/(p-1)$ . Obsérvese que ahora  $d\rho/dr = r^{-\theta}$  y que  $0 < \rho < T$  cuando  $a < r < R$ , siendo  $T = g(R)$ . Llamando  $v(\rho) = u(g^{-1}(\rho))$ , el problema (2.16) se puede escribir como

$$\begin{aligned} - \varphi_p(v')' &= \lambda (g^{-1}(\rho))^{p\theta} f(v) & 0 < \rho < T \\ v(0) = v(T) &= 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde  $' = d/d\rho$ .

Si  $v_\lambda$  designa a la única solución positiva de (2.18) y  $\lambda > a^{-p\theta} \lambda_{\min}(T)$ , entonces  $v_\lambda$  es supersolución del problema

$$\begin{aligned} - \varphi_p(v')' &= \lambda a^{p\theta} f(v) & 0 < \rho < T \\ v(0) &= v(T) = 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Podemos por tanto deducir que, para  $\lambda > a^{-p\theta} \lambda_{\min}(T)$ ,

$$0 < v_\lambda^-(\rho) \leq v_\lambda(\rho) \quad 0 < \rho < T, \quad (2.20)$$

donde  $v_\lambda^-$  es la única solución positiva de (2.19). Del Teorema 1.2.2 se deduce que  $v_\lambda \rightarrow \bar{u}_0$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ , uniformemente en compactos de  $0 < \rho < T$ .

Elegimos un número positivo  $0 < b < T/2$  y consideramos el problema auxiliar en el intervalo  $0 < \rho < b$ ,

$$\begin{aligned} - \varphi_p(w')' &= \lambda (g^{-1}(b))^{p\theta} f(w) & 0 < \rho < b \\ w(0) &= 0, \quad w(b) = v_\lambda(b), \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde  $v_\lambda$  es la solución positiva de (2.18) correspondiente a  $\lambda > \sigma_{1,p}(A)/m$ . Obsérvese que (2.21) puede tener como mucho una solución positiva. De hecho, basta con repetir el argumento usado para demostrar la unicidad en el Teorema 2.1.1. Por otro lado, la solución positiva  $v_\lambda(\rho)$  de (2.19) es subsolución de (2.21) mientras que  $w^+ = \bar{u}_0$  define una supersolución. Por tanto, (2.21) tiene, para cada  $\lambda > \sigma_{1,p}(A)/m$ , una única solución positiva  $w = w_\lambda(\rho)$  tal que

$$0 < v_\lambda(\rho) \leq w_\lambda(\rho) \quad 0 < \rho < b, \quad (2.22)$$

lo que implica que

$$v_\lambda'(0) \leq w_\lambda'(0) = \left\{ (w_\lambda'(b))^p + \lambda p' (g^{-1}(b))^{p\theta} F(v_\lambda(b)) \right\}^{1/p}. \quad (2.23)$$

Afirmamos que  $(w_\lambda'(b))^p/\lambda \rightarrow 0$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . En efecto, si reescalamos la ecuación en (2.21) haciendo  $\tilde{w}_\lambda(s) = w_\lambda(\lambda^{-1/p}s)$ , tenemos

$$-\varphi_p(\tilde{w}')' = (g^{-1}(b))^{p\theta} f(\tilde{w}) \quad 0 < s < \lambda^{1/p}b, \quad (2.24)$$

de donde se obtiene que  $\tilde{w}'_\lambda$  está acotada. Tomemos una sucesión  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  y sea  $w_n := \tilde{w}_{\lambda_n}$ . Pasando a una subsucesión, podemos suponer que  $w_n'(\lambda_n^{1/p}b) \rightarrow c$  y  $w_n \rightarrow \bar{w}$  uniformemente en intervalos acotados de  $[0, +\infty)$ . Supongamos que  $c > 0$ . Usando la ecuación (2.24) llegamos a que  $w_n \rightarrow \bar{w}$  en  $C_{\text{loc}}^1[0, +\infty)$ , y que  $\bar{w}$  es solución de (2.24) con  $\bar{w}(0) = 0$ ,  $\bar{w}'(0) = (c^p + F(\bar{u}_0))^{1/p}$ . Pero esto lleva a la existencia de  $s_0 > 0$  tal que  $\bar{w}'(s_0) = c$ ,  $\bar{w}(s_0) = \bar{u}_0$ , que implica  $\bar{w}(s) > \bar{u}_0$  si  $s \sim s_0$ ,  $s > s_0$ , contradiciendo que  $\bar{w} \leq \bar{u}_0$ . De forma análoga se descarta el caso  $c < 0$ , por lo que  $c = 0$ , y la afirmación queda probada, al ser la sucesión  $\{\lambda_n\}$  arbitraria.

Como tenemos además que  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} v_\lambda(b) = \bar{u}_0$ , (2.23) nos permite llegar a

$$\limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-1/p} v_\lambda'(0) \leq (g^{-1}(b))^\theta (p' F(\bar{u}_0))^{1/p}.$$

Por tanto

$$\limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-1/p} u'_\lambda(a) \leq \frac{(g^{-1}(b))^\theta}{a^\theta} (p'F(\bar{u}_0))^{1/p}. \quad (2.25)$$

Haciendo  $b \rightarrow 0+$  en (2.25), obtenemos la estimación (2.17). Esto concluye la demostración del Lema 2.1.6.  $\square$

*Demostración del Teorema 2.1.4.* Elegimos  $x_0 \in \partial\Omega$  arbitrario, con normal exterior unitaria  $\nu = \nu(x_0)$ . Puesto que  $\partial\Omega$  es una superficie de clase  $C^{2,\mu}$  (cf. [46]), es posible encontrar puntos  $y_i \in \Omega$ ,  $y_e \in \mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega}$  y números positivos  $R_i$ ,  $a$ ,  $R_e$  tales que la bola  $B_i := B_{R_i}(y_i) \subset \Omega$ , el anillo  $A_e := A(a, R_e, y_e) = \{a < |x - y_e| < R_e\}$  contiene a  $\Omega$ , es decir  $\Omega \subset A_e$ , siendo  $B_i$  y  $A_e$  tangentes a  $\partial\Omega$  en  $x_0$ .

Puesto que  $u_\lambda$  es supersolución del problema (2.1) en la bola  $B_i$  (que tiene una solución única  $u_{\lambda, B_i}$ ), se tiene que  $u_{\lambda, B_i}(x) \leq u_\lambda(x)$  si  $x \in B_i$ . Entonces  $\frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu}(x_0) \leq \frac{\partial u_{\lambda, B_i}}{\partial \nu}(x_0)$  cuando  $\lambda > \sigma_{1,p}(R_i)/m$ . El Lema 2.1.5 implica que

$$\limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-1/p} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu}(x_0) \leq \limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-1/p} \frac{\partial u_{\lambda, B_i}}{\partial \nu}(x_0) \leq -(p'F(\bar{u}_0))^{1/p}. \quad (2.26)$$

De la misma forma, consideremos el problema (2.1) tomando como dominio  $\Omega$  el anillo  $A_e$ , y sea  $u_{\lambda, A_e}$  su única solución positiva, para  $\lambda > \sigma_{1,p}(A_e)/m$ . Entonces, como  $u_{\lambda, A_e}$  es supersolución de (2.1), tenemos igual que antes que  $u_\lambda(x) \leq u_{\lambda, A_e}(x)$  para todo  $x \in \Omega$ . Por tanto,  $\frac{\partial u_{\lambda, A_e}}{\partial \nu}(x_0) \leq \frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu}(x_0)$ . Por otro lado, si  $r = |x - y_e|$ , entonces  $u_{\lambda, A_e} = u_{\lambda, A_e}(r)$ , mientras que  $\frac{\partial u_{\lambda, A_e}}{\partial \nu}(x_0) = -u'_{\lambda, A_e}(a)$  ( $' = d/dr$ ). Aplicando el Lema 2.1.6 concluimos que

$$-(p'F(\bar{u}_0))^{1/p} \leq \liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1/p} \frac{\partial u_{\lambda, A_e}}{\partial \nu}(x_0) \leq \liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1/p} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu}(x_0). \quad (2.27)$$

Finalmente, combinando (2.26) y (2.27) llegamos a la desigualdad deseada (2.8) en  $x_0 \in \partial\Omega$ . Además, como la compacidad de  $\partial\Omega$  nos permite efectuar una elección de  $a$ ,  $R_i$ ,  $R_e$  independiente de la posición de  $x_0$  en  $\partial\Omega$ , el límite (2.8) es de hecho uniforme. Con esto finaliza la demostración del Teorema 2.1.4.  $\square$

## 2.2 Aplicaciones a la ecuación logística y perturbaciones

En esta sección vamos a estudiar casos particulares de problemas de contorno. El primero es la versión para el laplaciano-p de la ecuación logística con difusión:

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda m |u|^{p-2} u - |u|^{q-1} u && \text{en } \Omega \\ u &= 0 && \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (\text{L})$$

donde  $m$ ,  $p$ ,  $q$  son constantes positivas,  $p > 1$ ,  $q > p - 1$ , y  $\lambda$  es un parámetro positivo. También vamos a estudiar perturbaciones de (L) de orden inferior en el infinito, como

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda m |u|^{p-2} u - |u|^{q-1} u + g(u) && \text{en } \Omega \\ u &= 0 && \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (\text{LP})$$

donde el término de perturbación verifica  $g \in C(\mathbb{R}^+)$  y

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{g(u)}{u^{p-1}} = 0, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{g(u)}{u^q} = 0. \quad (\text{Hg})'$$

Obsérvese que esta hipótesis es ligeramente más débil que (Hg) del Capítulo 1.

Veremos que el problema (L) está en el marco de los resultados de la sección 2.1, obteniendo en particular estimaciones precisas de la capa límite, que comprobaremos que también son válidas para todas las posibles soluciones positivas del problema (LP).

De hecho, introduciendo, como en el Capítulo 1, el cambio de escala  $u = (\lambda m)^{1/(q-p+1)}v$ , las soluciones positivas de (L) satisfacen

$$\begin{aligned} -\Delta_p v &= \lambda m(v^{p-1} - v^q) & \text{en } \Omega \\ v &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (2.28)$$

que está en las condiciones de la Sección 2.1, con  $\bar{u}_0 = 1$ ,  $k = 1$  y  $C_0 = m(q-p+1)$ . Por tanto, como consecuencia del Teorema 2.1.1, obtenemos:

**Teorema 2.2.1** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un dominio acotado de clase  $C^{2,\mu}$  para algún  $0 < \mu < 1$ , con  $m > 0$ ,  $p > 1$  y  $q > p - 1$ . Entonces*

*i) Existe una solución positiva de (L) en  $W_0^{1,p}(\Omega)$  sólo cuando  $\lambda > \sigma_{1,p}/m$ . En tal caso, la solución es única, y será denotada por  $\theta_{\lambda,m}$ .*

*ii) Para cada  $\lambda > \sigma_{1,p}/m$ ,  $\theta_{\lambda,m}$  verifica*

$$0 < \theta_{\lambda,m} \leq (\lambda m)^{\frac{1}{q-p+1}}, \quad x \in \Omega.$$

*Además, existe  $0 < \beta_0 < 1$  tal que  $\theta_{\lambda,m} \in C_0^{1,\beta_0}(\bar{\Omega})$ , y la aplicación  $\lambda \rightarrow \theta_{\lambda,m} \in C_0^{1,\beta}(\bar{\Omega})$  es creciente y continua para cada  $0 \leq \beta < \beta_0$ .*

Vamos a estudiar a continuación el problema (LP). Sea  $\bar{u}_0(\lambda) = \sup\{u > 0 : g(\lambda, u) = 0\}$  el mayor cero positivo de  $g(\lambda, u) = \lambda m u^{p-1} - u^q + g(u)$ . Recuérdese entonces (cf. §1.2.2) que  $\bar{u}_0(\lambda)$  es el único cero positivo de  $g(\lambda, \cdot)$  para  $\lambda$  grande, que verifica además

$$\bar{u}_0(\lambda) \sim (\lambda m)^{\frac{1}{q-p+1}}, \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

Consideraremos ahora las cuestiones de existencia y estimaciones de las soluciones positivas de (LP). En primer lugar, observemos que, llamando  $\underline{\lambda} := \inf_{u \in \mathbb{R}^+} (u^q - g(u))/u^{p-1}$ , entonces  $g(\lambda, u) \leq 0$  si  $u \geq 0$ , cuando  $\lambda \leq \underline{\lambda}/m$ . Como consecuencia, no pueden existir soluciones positivas de (LP) si  $\lambda \leq \underline{\lambda}/m$ . En efecto,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p = \int_{\Omega} g(\lambda, u) u \leq 0,$$

y  $u$  debe ser cero. En cuanto a la existencia de soluciones positivas, usando exactamente el mismo argumento que en el Teorema 2.1.1, encontramos que para  $\lambda > \sigma_{1,p}/m$ , el problema (LP)

admite al menos una solución positiva  $u \in C_0^{1,\beta_0}(\overline{\Omega})$  para algún  $0 < \beta_0 < 1$  (donde  $\beta$  no depende de  $\lambda$ ). Además, toda posible solución positiva satisface

$$0 < u(x) \leq \bar{u}_0(\lambda), \quad x \in \Omega. \quad (2.29)$$

Es conveniente recalcar que el procedimiento para demostrar la homogeneización de las soluciones de (L) y la estimación (2.8) de la capa límite depende fuertemente de la unicidad de soluciones positivas de (L). Por tanto, no se puede proceder de la misma forma que en §2.1.

Sin embargo, probaremos que es posible deducir la homogeneización, y estimar la correspondiente capa límite de las soluciones de (LP) (independientemente de que sean únicas). De hecho, vamos a ver que todas las soluciones de (LP) para  $\lambda$  grande están comprendidas entre dos soluciones de ecuaciones de la forma (L), que son tanto más próximas cuanto más grande es  $\lambda$ . En efecto, sea  $u$  una solución de (LP). Entonces

$$-\Delta_p u = \lambda \left( m + \frac{1}{\lambda} \frac{g(u)}{u^{p-1}} \right) u^{p-1} - u^q \quad \text{en } \Omega.$$

Probemos que es posible hacer el término  $g(u)/\lambda u^{p-1}$  tan pequeño como queramos sin más que tomar  $\lambda$  grande. Fijando  $\varepsilon > 0$ , nótese que  $|g(u)| \leq \varepsilon u^q$  si  $u \geq u_\varepsilon$ , para un cierto  $u_\varepsilon > 0$ . Usando la estimación (2.29) obtenemos

$$\sup_{x \in \Omega} \frac{1}{\lambda} \frac{|g(u(x))|}{u(x)^{p-1}} \leq \frac{1}{\lambda} \sup_{0 \leq u \leq u_\varepsilon} \frac{|g(u)|}{u^{p-1}} + \frac{1}{\lambda} \sup_{u_\varepsilon \leq u \leq \bar{u}_0(\lambda)} \frac{|g(u)|}{u^{p-1}}.$$

El primer término del miembro derecho es claramente del orden de  $\varepsilon$  para  $\lambda$  grande. En cuanto al segundo término se tiene que  $|g(u)/u^{p-1}| \leq \varepsilon u^{q-p+1} \leq \varepsilon \bar{u}_0(\lambda)^{q-p+1}$ . Puesto que  $\bar{u}_0(\lambda)^{q-p+1}$  se comporta como  $\lambda m$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ , este término también es del orden de  $\varepsilon$  para  $\lambda$  grande.

En particular, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\lambda(\varepsilon) > 0$  tal que, si  $u$  es una solución positiva de (LP) con  $\lambda \geq \lambda(\varepsilon)$ , entonces

$$\lambda(m - \varepsilon)u^{p-1} - u^q \leq -\Delta_p u \leq \lambda(m + \varepsilon)u^{p-1} - u^q \quad \text{en } \Omega.$$

La unicidad de las soluciones positivas de (L) nos lleva entonces a las estimaciones:

$$\theta_{\lambda, m-\varepsilon} \leq u \leq \theta_{\lambda, m+\varepsilon}. \quad (2.30)$$

Por tanto, para el problema (LP), podemos establecer el siguiente resultado.

**Teorema 2.2.2** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un dominio acotado de clase  $C^{2,\mu}$  para algún  $0 < \mu < 1$ , con  $m > 0$ ,  $p > 1$  y  $q > p - 1$ . Supongamos que  $g$  cumple la hipótesis (Hg)'. Entonces*

*i) No hay soluciones positivas de (LP) en  $W_0^{1,p}(\Omega)$  si  $\lambda \leq \inf_{u>0} \frac{u^q - g(u)}{u^{p-1}}$ , y existe al menos una si  $\lambda > \sigma_{1,p}/m$ .*

*ii) Para  $\lambda > 0$ , sea  $\bar{u}_0(\lambda) := \sup\{u > 0 : \lambda m u^{p-1} - u^q + g(u) = 0\}$ . Entonces, todas las soluciones positivas  $u$  de (LP) satisfacen*

$$0 < u(x) \leq \bar{u}_0(\lambda), \quad x \in \Omega,$$

donde  $\bar{u}_0(\lambda) \sim (\lambda m)^{\frac{1}{q-p+1}}$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Además  $u \in C_0^{1,\beta_0}(\bar{\Omega})$  para cierto  $0 < \beta_0 < 1$ .

iii) Para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\lambda(\varepsilon) > 0$  tal que cualquier solución  $u$  de (LP) con  $\lambda \geq \lambda(\varepsilon)$  cumple (2.30)

$$\theta_{\lambda,m-\varepsilon} \leq u \leq \theta_{\lambda,m+\varepsilon}, \quad \text{en } \Omega .$$

Usaremos a continuación los resultados de la sección 2.1 para caracterizar el comportamiento de la solución  $\theta_{\lambda,m}$  de (L) cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Además, como consecuencia de las estimaciones (2.29), tenemos también que las soluciones positivas de (LP) se comportan como las de (L). Más precisamente

**Corolario 2.2.3** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un dominio acotado de clase  $C^{2,\mu}$  para algún  $0 < \mu < 1$ , con  $m > 0$ ,  $p > 1$  y  $q > p - 1$ . Supongamos que  $g$  cumple la hipótesis (Hg)'. Si  $\{u_\lambda\}$  denota a la familia de soluciones positivas de (L) o bien cualquier familia de soluciones positivas de (LP) cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ , entonces*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-\frac{1}{q-p+1}} u_\lambda = m^{\frac{1}{q-p+1}}$$

uniformemente sobre compactos de  $\Omega$ . Además,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-\frac{q+1}{p(q-p+1)}} \frac{\partial u_\lambda}{\partial \nu} = -m^{\frac{q+1}{p(q-p+1)}} \left( \frac{q-p+1}{(q+1)(p-1)} \right)^{1/p}$$

uniformemente en  $\partial\Omega$ .

**Observación 2.2.4** A la vista de los argumentos usados anteriormente, se puede estudiar otro tipo de problemas cuyas soluciones positivas se comportan como las de (2.1). De hecho, si consideramos

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda f(u) + g(u) & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.31}$$

donde  $f$  verifica (H1) y  $g \in C(\mathbb{R})$  es tal que  $g = o(u^{p-1})$  cuando  $u \rightarrow 0+$  y  $g = o(f)$  cuando  $u \rightarrow +\infty$ , es posible demostrar que para toda familia  $\{u_\lambda\}$  de soluciones positivas de (2.31) con  $\lambda \rightarrow +\infty$  son ciertas las conclusiones de los Teoremas 2.1.3 y 2.1.4.

## Anexo al Capítulo 2.

La estimación de la capa límite en el caso radial se puede obtener de manera alternativa mediante ideas análogas a las de [76]. En dominios generales, sin embargo, el uso de estas técnicas requiere algún tipo de *sweeping principle*, que no es válido en general para operadores de la

forma  $-\Delta_p + M\varphi_p$ ,  $M > 0$ . En efecto, se sabe que para tales operadores no es válido en general el principio de comparación fuerte (ver [83]).

Veamos cómo se puede demostrar el Lema 2.1.5. La solución  $u_\lambda$  de (2.1) verifica

$$u_\lambda(r) = \int_r^R \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{\rho}{s} \right)^{N-1} \lambda f(u_\lambda(\rho)) d\rho \right) ds .$$

Llamemos  $U_\lambda(x) = u_\lambda(R - \lambda^{-1/p}x)$ ,  $0 < x < \lambda^{1/p}R$ . Mediante un cambio de variable en la integral, es fácil ver que  $U_\lambda$  verifica

$$U_\lambda(x) = \int_0^x \varphi_{p'} \left( \int_s^{\lambda^{1/p}} \left( \frac{\lambda^{1/p} - \rho}{\lambda^{1/p} - s} \right)^{N-1} f(U_\lambda(\rho)) d\rho \right) ds .$$

Además,  $U_\lambda$  y  $U'_\lambda$  están uniformemente acotadas, pues  $0 < U_\lambda \leq \bar{u}_0$ . Por tanto, para cada sucesión  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  podemos encontrar una subsucesión (denotada de nuevo por  $\{\lambda_n\}$ ) tal que  $U_{\lambda_n} \rightarrow \bar{U}$  en  $C^1_{\text{loc}}[0, +\infty)$ . Esto lleva a que  $\bar{U}$  verifica

$$\bar{U}(x) = \int_0^x \varphi_{p'} \left( \int_s^{+\infty} f(\bar{U}(\rho)) d\rho \right) ds$$

(compárese con el Teorema 4.1.8). En particular,  $\bar{U}$  es solución del problema unidimensional

$$\begin{aligned} -\varphi_p(\bar{U}')' &= f(\bar{U}) \\ \bar{U}(0) &= \bar{U}'(+\infty) = 0 , \end{aligned}$$

de donde  $|\bar{U}'(0)|^p = p'F(\bar{u}_0)$ , y llegamos a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\lambda_n^{-1/p} u'_{\lambda_n}(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} U'_{\lambda_n}(0) = \bar{U}'(0).$$

La elección arbitraria de la sucesión  $\{\lambda_n\}$  nos lleva entonces a que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} -\lambda^{-1/p} u'_\lambda(R) = (p'F(\bar{u}_0))^{1/p} .$$

□

## **Capítulo 3**

# **Fenomenología de núcleos muertos**

## Capítulo 3

# Fenomenología de núcleos muertos

Como hemos señalado en la introducción, la degeneración del laplaciano- $p$  permite que una solución positiva  $u$  de un problema de la forma

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda f(u) & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega \end{aligned} \quad (3.1)$$

desarrolle un núcleo muerto. Es decir, que el conjunto  $\{x \in \Omega : u(x) = \bar{u}_0\}$ , donde  $\bar{u}_0$  es un cero de  $f$ , sea no vacío. En este capítulo veremos que si  $f$  satisface las hipótesis (H1) de los Capítulos 1 y 2 y el orden del cero  $\bar{u}_0$  de  $f$  y  $p$  cumplen una cierta relación óptima, entonces la única solución positiva  $u_\lambda$  de (3.1) desarrolla un núcleo muerto  $\mathcal{O}_\lambda$  para  $\lambda \geq \lambda^*$ . Obtendremos una estimación de  $\lambda^*$  en términos de  $f$ ,  $p$  y del dominio  $\Omega$ , así como el comportamiento exacto de la distancia de  $\mathcal{O}_\lambda$  a la frontera, que es de la forma  $\text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega) \sim C\lambda^{-1/p}$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ , donde  $C$  viene expresada explícitamente en términos de  $f$  y  $p$ .

### 3.1 Condición necesaria para la existencia de núcleo muerto

Nuestro primer objetivo es conseguir una condición necesaria (que veremos en §3.2 que también es suficiente) para la aparición de núcleos muertos en las soluciones de (3.1). La herramienta fundamental en este caso es el principio fuerte del máximo en [81].

**Teorema 3.1.1** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un dominio acotado de clase  $C^{2,\mu}$  para algún  $0 < \mu < 1$ , y supongamos que  $f$  verifica la hipótesis (H1)<sub>3</sub> de los Capítulos anteriores. Si se tiene la relación*

$$k \geq p - 1, \quad (3.2)$$

*entre  $p$  y  $k$ , el orden del cero  $\bar{u}_0$  de  $f$ , entonces toda solución positiva  $u$  de (3.1) con  $0 < u \leq \bar{u}_0$  satisface*

$$0 < u < \bar{u}_0 \quad x \in \Omega. \quad (3.3)$$

*Demostración.* Sea  $u$  una solución positiva de (3.1). Si llamamos  $v = \bar{u}_0 - u$ , entonces  $v$  es una solución no negativa de

$$-\Delta_p v + \lambda f(\bar{u}_0 - v) = 0 \quad x \in \Omega. \quad (3.4)$$

Pero  $f(\bar{u}_0 - v) = C_0 v^k h_1(v)$ , siendo  $h_1$  una función continua y positiva en  $0 < u < \bar{u}_0$  y  $\lim_{v \rightarrow 0^+} h_1(v) = 1$ . Puesto que (3.4) lleva a

$$-\Delta_p v + \lambda C_0 \left( \sup_{0 \leq v \leq \bar{u}_0} h_1 \right) v^k \geq 0 \quad x \in \Omega,$$

y, gracias a (3.2), la integral  $\int_{0^+}^a \frac{dv}{(v^{k+1})^{1/p}}$ , con  $a > 0$ , diverge, podemos aplicar el principio fuerte del máximo en [81] para concluir que  $v > 0$ , es decir,  $u < \bar{u}_0$ .  $\square$

### 3.2 Existencia de núcleos muertos y estimaciones

El principal resultado de este capítulo es que las soluciones de (3.1) desarrollan un núcleo muerto  $\mathcal{O}_\lambda$  cuando  $\lambda$  sobrepasa un cierto valor crítico  $\lambda^* > \sigma_{1,p}/m$ . Para estimar  $\lambda^*$  y  $\text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega)$ , necesitamos introducir alguna notación. Definimos el radio interior  $R_\Omega$  del dominio  $\Omega$  como el radio de la mayor bola contenida en  $\Omega$ , es decir,  $R_\Omega := \sup\{R > 0 : B_R(x_0) \subset \Omega, \text{ para algún } x_0 \in \Omega\}$ . También definimos la “anchura”  $L_\Omega$  de  $\Omega$  como la mínima distancia entre hiperplanos paralelos que contienen a  $\Omega$ . De manera más precisa, para cada  $\eta \in S^{N-1} := \{x : |x| = 1\}$ , existe  $x_\eta \in \partial\Omega$  tal que  $\Omega \subset \{x : (x - x_\eta)\eta \geq 0\}$ . Sea  $l_\eta$  el mínimo  $l > 0$  que cumple  $\Omega \subset \{x : 0 \leq (x - x_\eta)\eta \leq l\}$ . Entonces  $L_\Omega = \inf_{\eta \in S^{N-1}} l_\eta$ .

Nuestro principal resultado es el siguiente.

**Teorema 3.2.1** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un dominio acotado de clase  $C^{2,\mu}$ ,  $0 < \mu < 1$ , y  $f = f(u)$  una función continua que satisface las hipótesis (H1), mientras que  $p > 1$  y el orden  $k$  del cero  $\bar{u}_0$  de  $f$  guardan la relación*

$$0 < k < p - 1. \quad (3.5)$$

*Entonces existe un primer valor positivo  $\lambda^*$  de  $\lambda$ ,  $\lambda^* > \frac{\sigma_{1,p}}{m}$ , tal que, para cada  $\lambda \geq \lambda^*$  la solución positiva  $u_\lambda$  de (3.1) desarrolla un núcleo muerto. Es decir,*

$$\mathcal{O}_\lambda = \{x \in \Omega : u_\lambda(x) = \bar{u}_0\} \neq \emptyset \quad \text{para todo } \lambda \geq \lambda^*.$$

Además,

(i) *El valor  $\lambda^*$  se puede estimar en los términos siguientes:*

$$C(f, p) \frac{1}{L_\Omega^p} \leq \lambda^* \leq C(f, p) \left( \frac{C_\theta}{2R_\Omega} \right)^p, \quad (3.6)$$

donde  $C(f, p) := \frac{1}{p'} \left( \int_0^{\bar{u}_0} \frac{2 ds}{(F(\bar{u}_0) - F(s))^{1/p}} \right)^p$ ,  $\theta = \frac{N-1}{p-1}$ , y  $C_\theta = \theta^{\frac{\theta}{\theta-1}}$  si  $p \neq N$  mientras que  $C_\theta = e$  para  $p = N$ .

(ii) Para la distancia del núcleo muerto  $\mathcal{O}_\lambda$  a la frontera  $\partial\Omega$ , se verifica la siguiente estimación asintótica exacta:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1/p} \text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega) = \frac{C(f, p)^{1/p}}{2}. \quad (3.7)$$

**Observación 3.2.2** Nótese que el valor exacto para  $\lambda^*$  en el caso unidimensional  $\Omega = (0, l)$  (véase el Corolario 1.2.3) se obtiene de (3.6) haciendo  $L_\Omega = 2R_\Omega = l$  y  $N \rightarrow 1$  en la expresión para  $C_\theta$ .

Para probar el Teorema 3.2.1, procederemos como en el §2.1.3. Es decir, analizaremos el problema (3.1) en una bola  $B_R$  y en un anillo  $A$ , usando los resultados unidimensionales contenidos en el Corolario 1.2.3. Finalmente, procederemos como en la demostración del Teorema 2.1.4.

Consideremos el problema (3.1) en una bola  $B_R$  de  $\mathbb{R}^N$ . Según lo visto en §2.1.3, se tiene que la única solución positiva  $u_\lambda$  verifica la ecuación

$$\begin{aligned} - (r^{N-1} \varphi_p(u'))' &= \lambda r^{N-1} f(u) & 0 < r < R \\ u'(0) &= u(R) = 0. \end{aligned}$$

Vamos a obtener una estimación superior de  $\lambda^*$  y del límite en (3.7) en este caso.

**Lema 3.2.3** Sea  $f = f(u)$  una función continua que verifica (H1) y para  $\lambda > \sigma_{1,p}(R)/m$ , sea  $u = u_\lambda(r)$ ,  $0 < r < R$ , la única solución positiva de (3.1) en la bola  $\Omega = B_R$ . Entonces  $u_\lambda$  desarrolla un núcleo muerto  $\mathcal{O}_\lambda = \{x : u_\lambda(x) = \bar{u}_0\}$  al menos cuando  $\lambda \geq \lambda^*(R) := C(f, p)(C_\theta/2R)^p$ , y se tiene la estimación

$$\limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega) \leq \frac{C(f, p)^{1/p}}{2}.$$

*Demostración.* Con el cambio de variable  $\rho = g(r)$  introducido en el Lema 2.1.5, y llamando  $v(\rho) = u(g^{-1}(\rho))$ , obtenemos

$$\begin{aligned} - \varphi_p(v')' &= \lambda (g^{-1}(\rho))^{p\theta} f(v) & 0 < \rho < b \\ v(0) &= v(T) = 0. \end{aligned}$$

Elijamos  $0 < b < T$  y consideremos el siguiente problema de contorno:

$$\begin{aligned} - \varphi_p(v')' &= \lambda (g^{-1}(b))^{p\theta} f(v) & 0 < \rho < b \\ v(0) &= v(2b) = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

(cf. la demostración del Lema 2.1.5), problema que tiene una única solución  $\underline{v}_\lambda(\cdot, b)$  si  $\lambda > g^{-1}(b)^{-p\theta} \lambda_{\min}(2b)$ . Definiendo

$$w_\lambda = \begin{cases} v_\lambda(\rho), & 0 < \rho \leq b \\ v_\lambda(2b - \rho), & b < \rho < 2b \end{cases}$$

obtenemos una supersolución débil de (3.8) (cf. Teorema B.8 en el Apéndice B). En particular,

$$0 < \underline{v}_\lambda(\rho, b) \leq v_\lambda(\rho) \leq \bar{u}_0 \quad 0 < \rho < b.$$

Nótese ahora que  $v = \underline{v}_\lambda(\rho, b)$  desarrolla un núcleo muerto para cada  $\lambda \geq C(f, p)/(2b(g^{-1}(b))^\theta)^p$ . Por tanto, podemos asegurar la aparición de núcleos muertos al menos cuando  $\lambda$  es mayor que

$$\lambda^*(R) = \inf \frac{C(f, p)}{(2b(g^{-1}(b))^\theta)^p} = \frac{1}{2^p} \frac{C(f, p)}{\sup (b(g^{-1}(b))^\theta)^p},$$

donde el ínfimo y el supremo deben tomarse en  $0 < b < T$ . Es fácil ver que el valor máximo de  $b(g^{-1}(b))^\theta$  es  $R/C_\theta$ .

Vamos a estimar ahora la distancia del núcleo muerto a la frontera. Puesto que  $u_\lambda(r)$  es decreciente y  $\underline{v}_\lambda(\rho, b)$  desarrolla el núcleo muerto

$$\mathcal{O}_\lambda(b) = \left[ \frac{C(f, p)^{1/p}}{2g^{-1}(b)^\theta \lambda^{1/p}}, b - \frac{C(f, p)^{1/p}}{2g^{-1}(b)^\theta \lambda^{1/p}} \right],$$

para  $\lambda > (2bg^{-1}(b)^\theta)^{-p}C(f, p)$  llegamos entonces a que

$$u_\lambda(x) = \bar{u}_0 \quad \text{cuando } |x| \leq g^{-1} \left( \frac{C(f, p)^{1/p}}{2g^{-1}(b)^\theta \lambda^{1/p}} \right).$$

Por tanto,

$$0 < \text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial B) \leq R - g^{-1} \left( \frac{C(f, p)^{1/p}}{2g^{-1}(b)^\theta \lambda^{1/p}} \right).$$

Si llamamos  $d(\lambda) := R - g^{-1} \left( C(f, p)^{1/p} / (2g^{-1}(b)^\theta \lambda^{1/p}) \right)$ , se obtiene que

$$d(\lambda) = \frac{C(f, p)^{1/p}}{2} \left( \frac{R}{g^{-1}(b)} \right)^\theta \lambda^{-1/p} + o(\lambda^{-1/p}) \text{ cuando } \lambda \rightarrow +\infty.$$

Puesto que

$$\limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1/p} \text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial B) \leq \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1/p} d(\lambda) = \frac{C(f, p)^{1/p}}{2} \left( \frac{R}{g^{-1}(b)} \right)^\theta, \quad (3.9)$$

se obtiene, pasando al límite cuando  $b \rightarrow 0+$ , que

$$\limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1/p} \text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial B) \leq \frac{C(f, p)^{1/p}}{2},$$

con lo que concluye la demostración del lema. □

Analicemos a continuación el problema (3.1) en un anillo  $\Omega = A(a, R)$ . Como en el caso de la bola, la única solución positiva  $u_\lambda$  si  $\lambda > \sigma_{1,p}/m$  es radial, con lo que define una solución clásica del problema

$$\begin{aligned} - (r^{N-1}\varphi_p(u'))' &= \lambda r^{N-1}f(u) & 0 < r < R \\ u(a) &= u(R) = 0. \end{aligned}$$

En el siguiente lema obtendremos una estimación inferior de la distancia del núcleo muerto  $\mathcal{O}_\lambda$  a la parte de la frontera de  $A$  dada por  $|x| = a$ .

**Lema 3.2.4** *Consideremos el problema (3.1) en el anillo  $A(a, R) = \{x \in \mathbb{R}^N : 0 < a < |x| < R\}$  siendo  $f = f(u)$  una función continua que satisface (H1). Para  $\lambda > \sigma_{1,p}(A)/m$  sea  $u = u_\lambda(r)$  la única solución positiva de (3.1) en tal anillo. Entonces  $u_\lambda$  desarrolla un núcleo muerto  $\mathcal{O}_\lambda$  para  $\lambda$  suficientemente grande, y se tiene*

$$\liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1/p} \text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \{|x| = a\}) \geq \frac{C(f,p)^{1/p}}{2}. \quad (3.10)$$

*Demostración.* La existencia de núcleos muertos para  $\lambda$  grande se obtiene como en la demostración del Teorema 3.2.1 (véase más adelante). Pasemos a probar la estimación (3.10).

Al igual que en el Lema 2.1.6, consideramos el cambio de variable  $\rho = g(r)$ , que nos lleva al problema

$$\begin{aligned} - \varphi_p(v') &= \lambda(g^{-1}(\rho))^{p\theta} f(v) & 0 < \rho < T \\ v(0) &= v(T) = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Consideremos por tanto el problema auxiliar

$$\begin{aligned} - \varphi_p(w') &= \lambda(g^{-1}(b))^{p\theta} f(w) & 0 < \rho < b \\ w(0) &= 0, \quad w(b) = \bar{u}_0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde  $b$  es un número fijo,  $0 < b < T/2$ . De la misma forma que anteriormente, se puede ver que (3.12) tiene una única solución positiva  $w = \underline{w}_\lambda(\rho, b)$  para  $\lambda$  suficientemente grande. Además, si  $\rho(\lambda) := \frac{1}{2} \frac{C(f,p)^{1/p}}{(g^{-1}(b))^\theta} \lambda^{-1/p}$ , entonces  $\underline{w}_\lambda = \bar{u}_0$  para  $\rho(\lambda) \leq \rho \leq b$ , y  $0 < \underline{w}_\lambda < \bar{u}_0$  en  $0 < \rho < \rho(\lambda)$ .

Por otro lado, como  $v_\lambda$  es solución de (3.11) en  $0 < \rho < T$ , es subsolución de (3.12) en  $0 < \rho < b$ . Por eso,

$$0 < v_\lambda(\rho) \leq \underline{w}_\lambda(\rho, b) \leq \bar{u}_0 \quad \text{si } 0 < \rho < b.$$

De aquí se concluye que

$$u_\lambda(x) \leq \underline{w}_\lambda(g(r), b) < \bar{u}_0,$$

si  $x \in \Omega$  y  $a < r < g^{-1}(\rho(\lambda))$ , donde  $r = |x|$ . Esto significa que

$$\text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \{|x| = a\}) \geq g^{-1}(\rho(\lambda)) - a. \quad (3.13)$$

Ya que  $(g^{-1}(\rho(\lambda)) - a) = C(f,p)^{1/p}/2(a/g^{-1}(b))^\theta \lambda^{-1/p} + o(\lambda^{-1/p})$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ , concluimos de (3.13) que

$$\liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1/p} \text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \{|x| = a\}) \geq \frac{C(f,p)^{1/p}}{2} \left( \frac{a}{g^{-1}(b)} \right)^\theta.$$

Esta estimación, cuando  $b \rightarrow 0+$  nos conduce a

$$\liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1/p} \text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \{|x| = a\}) \geq \frac{C(f, p)^{1/p}}{2},$$

con lo que queda demostrado el lema.  $\square$

*Demostración del Teorema 3.2.1.* Ahora consideraremos el problema (3.1) en un dominio acotado  $\Omega$  de clase  $C^{2,\mu}$  para algún  $0 < \mu < 1$ . Introducimos  $\lambda^*$  como el primer valor de  $\lambda > \frac{\sigma_{1,p}}{m}$  (en principio posiblemente infinito) tal que  $\mathcal{O}_\lambda \neq \emptyset$ . Nótese que  $\mathcal{O}_\lambda = \emptyset$  si  $\lambda > \frac{\sigma_{1,p}}{m}$  es suficientemente próximo a  $\frac{\sigma_{1,p}}{m}$ . De hecho (véase el Teorema 2.1.1 - (iv))  $u_\lambda$  bifurca desde la solución trivial en  $\lambda = \frac{\sigma_{1,p}}{m}$ . Por tanto,  $\lambda^* > \frac{\sigma_{1,p}}{m}$ . Usando de nuevo el Teorema 2.1.1 -(iv), se deduce que  $\lambda^* < +\infty$  implica  $\mathcal{O}_\lambda \neq \emptyset$  para todo  $\lambda \geq \lambda^*$ , ya que la familia  $\{u_\lambda\}$  es continua y creciente en  $\lambda$ .

Vamos a estimar  $\lambda^*$  por debajo. Siguiendo la terminología precedente al enunciado, elegimos  $\eta \in S^{N-1}$  y  $x_\eta \in \partial\Omega$ ,  $l_\eta > 0$  tales que  $\Omega \subset \{x : 0 < (x - x_\eta)\eta < l_\eta\}$ . Definimos  $u = u_\lambda^+(x) = w_\lambda(\xi)$ , donde  $\xi = (x - x_\eta)\eta$  y  $w_\lambda$  designa a la única solución positiva de

$$\begin{aligned} - \varphi_p(u')' &= \lambda f(u) & 0 < \xi < l_\eta \\ u(0) &= u(l_\eta) = 0, \end{aligned}$$

( $' = d/d\xi$ ) correspondiente a  $\lambda > \lambda_{\min}(l_\eta)$ . Es claro que  $u_\lambda^+$  es supersolución de (3.1) en  $\Omega$ . Por otro lado, según el Corolario 1.2.3,  $w_\lambda$  no desarrolla un núcleo muerto para  $\lambda < C(f, p)/l_\eta^p$ . Por eso, se tiene necesariamente  $\lambda^* \geq C(f, p)/l_\eta^p$ , de donde

$$\lambda^* \geq \frac{C(f, p)}{\inf_{\eta \in S^{N-1}} l_\eta^p},$$

que implica la estimación inferior en (3.6).

Para obtener la estimación superior, consideramos una bola  $B$  de radio  $R$  contenida en  $\Omega$ . Sea  $u_{\lambda,B}$  la única solución positiva de (3.1) en  $B$  para  $\lambda$  suficientemente grande. Entonces  $u_\lambda \geq u_{\lambda,B}$  en  $B$ , y ello conlleva que  $u_\lambda$  tiene un núcleo muerto para  $\lambda \geq \lambda^*(R)$ . Por eso,  $\lambda^* \leq \inf \lambda^*(R) = \lambda^*(R_\Omega)$ , donde el ínfimo debe ser tomado sobre todos los  $R > 0$  tales que  $B_R(x_0) \subset \Omega$  para algún  $x_0 \in \Omega$ , y esto demuestra (3.7).

Para probar la estimación de la distancia de  $\mathcal{O}_\lambda$  a  $\partial\Omega$ , tomamos  $x_0 \in \partial\Omega$  y elegimos  $B$  de forma que sea tangente a  $\partial\Omega$  en  $x_0$ , y  $B \subset \Omega$ , tenemos

$$\text{dist}(x_0, \mathcal{O}_\lambda) \leq \text{dist}(x_0, \mathcal{O}_{\lambda,B}),$$

donde  $\mathcal{O}_{\lambda,B} = \{x \in B : u_{\lambda,B}(x) = \bar{u}_0\}$ . Entonces, se tendrá que

$$\limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1/p} \text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega) \leq \frac{C(f, p)^{1/p}}{2}. \quad (3.14)$$

Para obtener la estimación inferior en (3.7), tomamos un punto  $x_0 = x_0(\lambda) \in \partial\Omega$  de tal forma que  $\text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega) = \text{dist}(x_0, \mathcal{O}_\lambda)$ , y usamos el anillo  $A_e = \{x : a < |x - y_e| < R_e\}$ ,  $\Omega \subset A_e$ ,  $A_e$  tangente a  $\partial\Omega$  en  $x_0$ , que fue introducido en la demostración del Teorema 2.1.4. Recuérdese que  $u_\lambda \leq u_{\lambda, A_e}$  en  $\Omega$ , donde  $u = u_{\lambda, A_e}(r)$  es la única solución positiva de (3.1) en  $A_e$ ,  $r = |x - y_e|$ . Por tanto, si  $\mathcal{O}_{\lambda, A_e} = \{x : u_{\lambda, A_e}(x) = \bar{u}_0\}$ , tenemos

$$\liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1/p} \text{dist}(x_0, \mathcal{O}_{\lambda, A_e}) \leq \liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1/p} \text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega), \quad (3.15)$$

y la estimación (3.7) es consecuencia de (3.15), (3.10) y (3.14).  $\square$

### 3.3 Aplicaciones a la ecuación logística

A continuación vamos a usar el estudio realizado en la sección anterior para efectuar un análisis de los núcleos muertos en las soluciones positivas del problema logístico

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda m |u|^{p-2} u - |u|^{q-1} u && \text{en } \Omega \\ u &= 0 && \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (\text{L})$$

Para ello, analizaremos las soluciones del problema normalizado (2.28). En virtud del Teorema 3.1.1, las soluciones de (2.28) pueden tener núcleos muertos  $\{x : v_\lambda = 1\}$  sólo cuando  $p > 2$ . Aplicando los resultados del Teorema 3.2.1 a (2.28), obtenemos:

**Corolario 3.3.1** *Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un dominio acotado de clase  $C^{2,\mu}$  con radio interior  $R_\Omega$ . Entonces la solución positiva  $\theta_{\lambda, m}$  de (L) con  $p > 2$  desarrolla un núcleo muerto  $\mathcal{O}_\lambda = \{x \in \Omega : \theta_{\lambda, m} = (\lambda m)^{1/p}\}$  al menos cuando*

$$\lambda \geq \frac{(q+1)(p-1)}{m} \left\{ \frac{C_\theta B(p, q)}{R_\Omega} \right\}^p,$$

donde  $C_\theta$  es como en el Teorema 3.2.1 y  $B(p, q)$  designa la integral convergente

$$B(p, q) = \int_0^1 \frac{ds}{[(q-p+1) - (q+1)s^p + ps^{q+1}]^{1/p}}.$$

(cf. (1.17)). Además,

$$\text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega) \sim \frac{(q+1)^{1/p}(p-1)^{1/p}}{m^{1/p}} B(p, q) \lambda^{-1/p}, \quad (3.16)$$

cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

**Observación 3.3.2** Obsérvese que, al contrario que en el Capítulo 2, las conclusiones del Teorema 3.2.1 no se pueden extender, usando argumentos de comparación, a las perturbaciones (LP) del problema logístico (L). De hecho, las soluciones de (L) que aparecen en la estimación (2.30) desarrollan núcleos muertos, pero correspondientes a diferentes valores de  $\bar{u}_0$ , a saber:  $\bar{u}_0 = (m \pm \varepsilon)^{1/(q-p+1)}$ . Sin embargo, podremos concluir que todas las posibles soluciones positivas de (LP) forman núcleos muertos, que también satisfacen (3.16), cuando probemos en el Capítulo 4 la unicidad de soluciones positivas de (LP) para  $\lambda$  grande en bolas y anillos.

**Capítulo4**  
**Unicidad en dominios radiales.**  
**Problema de cauchy**

## Capítulo 4

# Unicidad en dominios radiales. Problema de Cauchy

En este capítulo estudiaremos la unicidad para  $\lambda$  grande de las soluciones radiales positivas de

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda f(\lambda, u) & \text{en } D \\ u &= 0 & \text{en } \partial D, \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde  $D \subset \mathbb{R}^N$  es un dominio acotado con simetría radial y  $f$  satisface hipótesis naturales. Este tipo de problemas es lo suficientemente general como para englobar a las perturbaciones (LP) de la ecuación logística (cf. introducción).

Para ello, obtendremos resultados generales sobre existencia y unicidad de soluciones, y lo que es más importante, continuidad respecto a  $u_0$ ,  $\lambda$ ,  $d$  y diferenciabilidad respecto a  $d$  bajo condiciones singulares, del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} -(r^{N-1} \varphi_p(u'))' &= r^{N-1} f(u) \\ u(d) &= u_0, \quad u'(d) = 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Estudiaremos con detalle el caso límite  $d, \lambda \rightarrow +\infty$ , que será determinante cuando consideremos el problema (4.1).

También obtenemos la existencia de núcleos muertos  $\mathcal{O}_\lambda$  para todas las posibles soluciones de (LP) en un dominio general  $\Omega$  cuando  $\lambda$  es grande, junto con una estimación exacta de la distancia de  $\mathcal{O}_\lambda$  a  $\partial\Omega$ .

### 4.1 El problema de Cauchy

El estudio de las soluciones radiales del problema (4.1) conduce al análisis de las soluciones clásicas del problema de Cauchy (4.2), que vamos a estudiar usando la siguiente versión “trasladada”

$$\begin{aligned} -((r+d)^{N-1} \varphi_p(u'))' &= (r+d)^{N-1} f(\lambda, u) \\ u(0) &= u_0, \quad u'(0) = 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde  $' = d/dr$ ,  $\varphi_p(z) = |z|^{p-2}z$ ,  $z \in \mathbb{R}$ ,  $p > 1$ . En (4.3), el número  $d \geq 0$  será observado como un parámetro. El término solución clásica debe ser entendido como en el Capítulo 1. Además, tendremos siempre en mente que  $u_0$  es el máximo de  $u = u(r)$  en un dominio radialmente simétrico  $D$ , y por tanto estudiaremos las soluciones de (4.3) menores o iguales que  $u_0$ .

Para comenzar la descripción de nuestros resultados sobre el problema de Cauchy, vamos a considerar en primer lugar el caso “no singular”, en el que  $u_0$  no es un cero de  $f(\lambda, \cdot)$  (véase [32], [59], [64]).

**Teorema 4.1.1** *Supongamos que  $f(\lambda, u_0) \neq 0$ , y que existe  $\delta_1 > 0$  tal que  $f(\lambda, \cdot)$  es Lipschitziana en  $|u - u_0| \leq \delta_1$ . Entonces, para cada  $d \geq 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que (4.3) tiene una única solución en  $[0, \delta]$ . Además, podemos elegir  $\delta$  independiente de  $d$ . Se tiene también la siguiente estimación:*

$$u(r) = u_0 - Cr^{p'} + o(r^{p'}), \quad \text{cuando } r \rightarrow 0+, \quad (4.4)$$

donde  $p' = p/(p-1)$ ,  $C = \varphi_{p'}(f(\lambda, u_0)/N)/p'$  si  $d = 0$  y  $C = \varphi_{p'}(f(\lambda, u_0))/p'$  cuando  $d \neq 0$ .

**Observaciones 4.1.2** a) La estimación (4.4) nos da el comportamiento exacto de una solución radial positiva  $u = u(r)$  de (4.1) cuando  $r \sim 0$ , suponiendo que su máximo  $u_0 = \sup_B u = u(0)$  no es un cero de  $f(\lambda, \cdot)$ . En particular, si  $p > 2$ ,  $u$  no es nunca  $C^2$  en este caso.

b) La demostración del Teorema 4.1.1 se basa en la contractividad del operador

$$Tu(r) = u_0 - \int_0^r \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{\rho + d}{s + d} \right)^{N-1} f(\lambda, u(\rho)) d\rho \right) ds \quad (4.5)$$

definido en el espacio  $C[0, \delta]$ . De hecho, nótese que las soluciones  $u$  de (4.3) son puntos fijos de  $T$  mientras que, recíprocamente, todo punto fijo de  $T$  en  $C[0, \delta]$  es necesariamente una función  $C^1$  tal que  $(r+d)^{N-1}\varphi_p(u') \in C^1[0, \delta]$  y  $((r+d)^{N-1}\varphi_p(u'))' = -(r+d)^{N-1}f(\lambda, u)$ , siendo por tanto una solución clásica de (4.3). Sin embargo, si  $f$  es solamente continua, podemos aplicar el teorema de punto fijo de Schauder para obtener la existencia de al menos una solución de (4.3), independientemente del valor de  $f(\lambda, u_0)$  (véase, por ejemplo, [84], [64]).

c) Una inspección cuidadosa de la demostración del Teorema 4.1.1 nos muestra que la conclusión sigue siendo válida si  $f(\lambda, u_0) = 0$ , siempre que  $1 < p \leq 2$  (nótese que, de hecho, la teoría estándar de e.d.o.'s es también aplicable), siendo la única solución  $u \equiv u_0$ . El hecho fundamental es que se mantenga un balance adecuado entre  $p$  y  $k$ , el orden del cero de  $f$ . Más concretamente, se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.3** *Supongamos que  $f(\lambda, \cdot)$  es continua en  $0 < |u - \bar{u}_0| \leq \delta_1$  para cierto  $\delta_1 > 0$ , y que  $u = \bar{u}_0$  es un cero de orden  $k > 0$  de  $f(\lambda, \cdot)$  en el sentido de que*

$$\lim_{u \rightarrow \bar{u}_0} \frac{f(\lambda, u)}{\varphi_{k+1}(\bar{u}_0 - u)} = C \quad (4.6)$$

para cierta constante no nula  $C = C(\lambda)$ . Entonces, la única solución de (4.3),  $u_0 = \bar{u}_0$ , es la trivial,  $u \equiv \bar{u}_0$  tanto si  $C < 0$  como si  $C > 0$ , pero se da la desigualdad

$$k \geq p - 1. \quad (4.7)$$

A continuación vamos a describir el caso “singular”  $f(\lambda, \bar{u}_0) = 0$  del problema de Cauchy (4.3).

Antes de introducir las hipótesis sobre  $f$ , es conveniente destacar que sólo vamos a tratar ceros  $u = \bar{u}_0$  de  $f(\lambda, \cdot)$  aislados, y de orden finito. Por otro lado, se puede ver que  $f(\lambda, u) > 0$  si  $u < \bar{u}_0$ ,  $u \sim \bar{u}_0$ , es una condición necesaria para que  $\bar{u}_0$  sea candidato a máximo de una solución radial positiva  $u = u(r)$  de (4.1). Si suponemos que  $u = \bar{u}_0$  tiene orden  $k$ , en vista del Teorema 4.1.3, las siguientes condiciones sobre  $f$  son bastante naturales (cf. hipótesis (H2) en el Capítulo 1):

(H2)<sub>1</sub> Existe  $\bar{u}_0$  tal que  $f(\lambda, \bar{u}_0) = 0$ , para todo  $\lambda$  y la derivada  $\partial f / \partial u$  existe y es continua en  $\mathbb{R} \times [\bar{u}_0 - \delta_1, \bar{u}_0)$  para algún  $\delta_1 > 0$ .

(H2)<sub>2</sub>  $\bar{u}_0$  es un cero de orden  $k$  de  $f$  en el sentido de que

$$\frac{-\partial f}{\partial u}(\lambda, u) = (\gamma(\lambda)k + R(\lambda, u))(\bar{u}_0 - u)^{k-1}, \quad (4.8)$$

para unas ciertas funciones continuas  $\gamma(\lambda) > 0$  y  $R$ , cumpliéndose  $R(\lambda, \bar{u}_0) = 0$  y  $0 < k < p - 1$ .

Cuando estudiemos el caso asintótico  $\lambda \rightarrow +\infty$  necesitaremos también la hipótesis

(H2)<sub>3</sub>  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \gamma(\lambda) = \bar{\gamma} > 0$  y  $R(\lambda, u) \rightarrow \bar{R}(u)$  uniformemente en  $[\bar{u}_0 - \delta_1, \bar{u}_0]$ .

Después de una normalización, el problema logístico perturbado (LP) cumple estas hipótesis (ver §4.3). En realidad, la dependencia tan especial (4.8) de  $f$  respecto al parámetro  $\lambda$  no juega ningún papel en cuanto a la existencia y unicidad de la solución no trivial, sino a la hora de estudiar la dependencia de las soluciones respecto a parámetros y datos iniciales. No obstante, es conveniente introducir estas hipótesis desde el principio para homogeneizar la notación.

Observemos que (H2) sólo restringe el comportamiento de  $f$  en  $u < \bar{u}_0$ ,  $u \sim \bar{u}_0$ , y que además el orden  $k$  de  $\bar{u}_0$  es cualquier número real, no necesariamente entero. En particular, también se tiene

$$\lim_{u \rightarrow \bar{u}_0^-} \frac{f(\lambda, u)}{(\bar{u}_0 - u)^k} = \gamma(\lambda). \quad (4.9)$$

Nuestros principales resultados en relación con el caso singular de (4.3) están contenidos en el siguiente teorema.

**Teorema 4.1.4** *Supongamos que  $f$  satisface las hipótesis  $(H2)_1$  y  $(H2)_2$ . Entonces, el problema de Cauchy singular*

$$\begin{aligned} -((r+d)^{N-1}\varphi_p(u'))' &= (r+d)^{N-1}f(\lambda, u) \\ u(0) &= \bar{u}_0, \quad u'(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

*tiene, para cada  $d \geq 0$ , una única solución no trivial  $u$  en  $0 \leq r \leq \delta$ , es decir,  $u(r) < \bar{u}_0$  si  $0 < r \leq \delta$ , donde  $\delta$  se puede elegir independiente de  $d$ . Además,*

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\bar{u}_0 - u(r)}{r^\alpha} = \begin{cases} C_N, & d = 0 \\ C_1, & d > 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

donde  $\alpha = p/p - k - 1$  y

$$C_N = \left( \frac{\gamma(\lambda)}{(\alpha k + N)\alpha^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p-k-1}}.$$

**Observaciones 4.1.5** a) Nótese que, bajo las hipótesis  $(H2)_1$  y  $(H2)_2$  sobre  $f$ , se puede dar una información más precisa sobre el problema de Cauchy singular (4.3). A saber, la existencia de una única solución no trivial  $u$  de (4.3) en un intervalo de la forma  $[-\delta, 0]$ , en el sentido de que  $u(r) < \bar{u}_0$  si  $-\delta \leq r < 0$ , que también satisface la estimación (4.11).

b) El resultado de existencia y unicidad de la solución no trivial, así como el Corolario 4.1.6 más adelante, pueden deducirse de los resultados en [64] (en particular del Corolario  $h$ , página 54), construyendo una supersolución adecuada.

Las propiedades mostradas en el Teorema 4.1.4 y Observación 4.1.5 se deducen de las condiciones impuestas a  $f(\lambda, \cdot)$  en  $u < \bar{u}_0$ ,  $u \sim \bar{u}_0$ . Si el comportamiento de  $f$  cerca de  $\bar{u}_0$  comprende los dos lados, se puede dar una descripción completa de las soluciones no triviales que parten del valor  $u = \bar{u}_0$  con derivada cero en  $r = d$ . En otras palabras, si cambiamos  $(H2)$  por

$(H2)'_1$   $\partial f / \partial u$  existe y es continua en  $\mathbb{R} \times ([\bar{u}_0 - \delta_1, \bar{u}_0] \cup (\bar{u}_0, \bar{u}_0 + \delta_1])$ , con  $f(\lambda, \bar{u}_0) = 0$ .

$(H2)'_2$  existen funciones continuas  $\gamma(\lambda) > 0$  tales que  $R(\lambda, \bar{u}_0) = 0$  y

$$-\frac{\partial f}{\partial u}(\lambda, u) = (\gamma(\lambda)k + R(\lambda, u))|u - \bar{u}_0|^{k-1}.$$

Bajo estas condiciones, una única solución no trivial  $u_1(r) > \bar{u}_0$  llega a  $u = \bar{u}_0$  desde  $r < 0$ , y otra tal solución  $u_2(r) > \bar{u}_0$  sale de  $u = \bar{u}_0$  hacia  $r > 0$ . El siguiente corolario, una especie de versión singular de la propiedad del punto de silla (cf. [50]), proporciona una descripción detallada del conjunto de las infinitas soluciones de (4.3) (véase la Figura 4.1). Los resultados están expresados en términos del problema original (4.2).

**Corolario 4.1.6** *Supongamos que  $f$  satisface (H2)'. Entonces, para cada  $d \geq 0$ , existe  $\delta = \delta(d)$  y cuatro soluciones únicas:  $u^-(\cdot, d-)$ ,  $u^+(\cdot, d-)$  definidas en  $d-\delta \leq r \leq d$  y  $u^-(\cdot, d+)$ ,  $u^+(\cdot, d+)$  definidas en  $d \leq r \leq d+\delta$  del problema singular (4.2) con  $u_0 = \bar{u}_0$ , que son no triviales en el sentido de que  $u^-(\cdot, d-) < \bar{u}_0$  (respectivamente  $u^+(\cdot, d-) > \bar{u}_0$ ) en  $d-\delta \leq r < d$  y  $u^-(\cdot, d+) < \bar{u}_0$  ( $r. u^+(\cdot, d+) > \bar{u}_0$ ) para  $d < r \leq d+\delta$ . Además,  $u^\pm(\cdot, \pm d)$  cumplen las estimaciones*

$$\begin{aligned} u^\pm(r, d-) &\sim \bar{u}_0 \pm C(d-r)^\alpha + o((d-r)^\alpha) \quad \text{cuando } r \rightarrow d- \\ u^\pm(r, d+) &\sim \bar{u}_0 \pm C(r-d)^\alpha + o((r-d)^\alpha) \quad \text{cuando } r \rightarrow d+, \end{aligned}$$

donde  $C$  y  $\alpha$  son como en (4.11). Por otra parte, dada cualquier otra solución  $u = u(r)$  de (4.2) definida en  $d-\delta \leq r \leq d+\delta$ , existen  $d-\delta \leq d_1 \leq d \leq d_2 \leq d+\delta$  tales que  $u = u^-(\cdot, d_1-)$  o  $u = u^+(\cdot, d_1-)$  en  $d-\delta \leq r \leq d_1$ ,  $u \equiv \bar{u}_0$  en  $d_1 < r < d_2$  y  $u = u^-(\cdot, d_2+)$  o  $u = u^+(\cdot, d_2+)$  en  $d_2 \leq r \leq d+\delta$ .

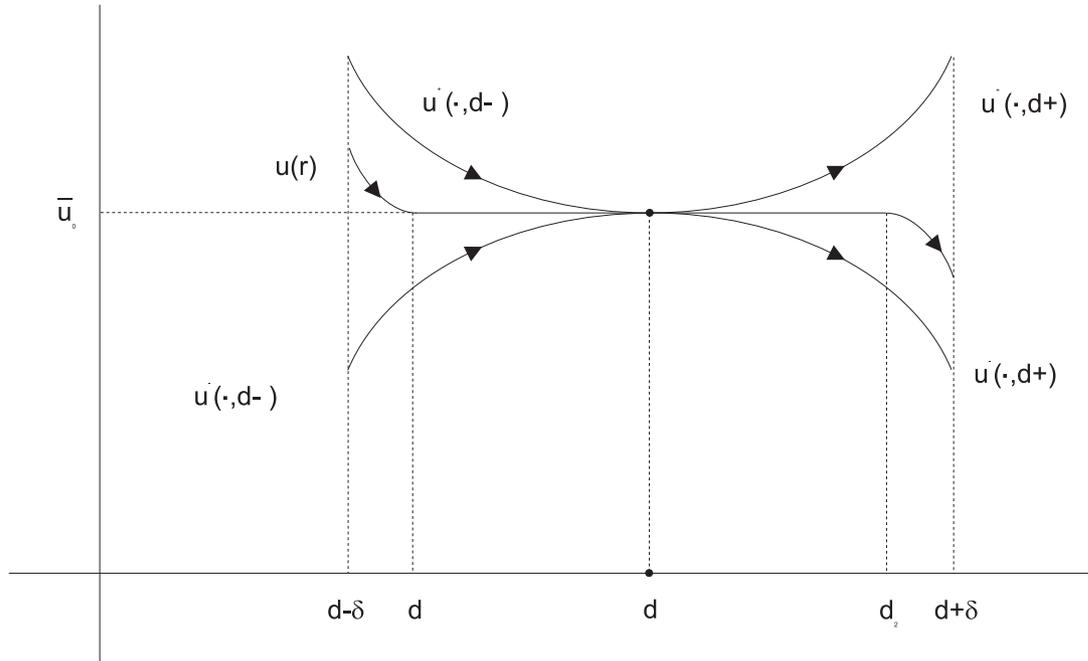


Fig. 4.1. Las soluciones no triviales del problema (4.2).

**Observación 4.1.7** Si escribimos la ecuación  $(r^{N-1}\varphi_p(u'))' = -r^{N-1}f(\lambda, u)$  como el sistema unidimensional  $u' = v$ ,  $\varphi_p(v)' = -f(\lambda, u) - \frac{N-1}{r}\varphi_p(v)$  y dibujamos el diagrama de fases con el convenio de que las órbitas comienzan en  $v = 0$  cuando  $r = 0$ , encontramos que

$$(u, v) = \begin{cases} (u^\pm(\cdot, 0-), \frac{du^\pm}{dr}(\cdot, 0-)) & \text{si } -\delta \leq r < 0 \\ \bar{u}_0 & \text{si } r \geq 0, \end{cases}$$

parametriza una especie de variedad estable degenerada  $W_s$  asociada al punto crítico  $(u, v) = (\bar{u}_0, 0)$ . Análogamente,

$$(u, v) = \begin{cases} (u^\pm(\cdot, 0+), \frac{du^\pm}{dr}(\cdot, 0+)) & \text{si } 0 < r \leq \delta \\ \bar{u}_0 & \text{si } r \leq 0, \end{cases}$$

describe para  $0 < r \leq \delta$  una especie de variedad inestable degenerada  $W_u$  en  $(u, v) = (\bar{u}_0, 0)$  (véase la Figura 4.2).

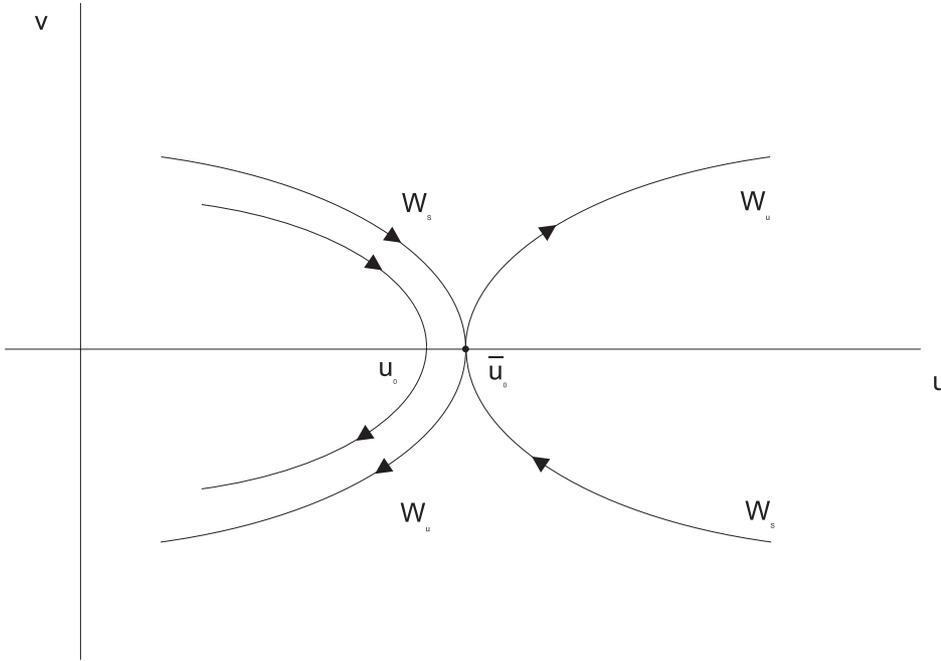


Fig. 4.2. Variedades estable e inestable del punto crítico  $(u, v) = (\bar{u}_0, 0)$ .

Para completar el estudio del problema de Cauchy, vamos a estudiar a continuación la dependencia en los datos iniciales. Esta información resultará fundamental a la hora de estudiar la unicidad de soluciones radiales positivas de (4.1) en el §4.2. Este es nuestro primer resultado en esta dirección.

**Teorema 4.1.8** *Supongamos que  $f$  satisface las hipótesis  $(H2)_1$  y  $(H2)_2$ , y sea  $u(r, u_0, d, \lambda)$  la única solución (respectivamente solución no trivial) de (4.3) para  $\bar{u}_0 - \delta_1 \leq u_0 < \bar{u}_0$  (resp.  $u_0 = \bar{u}_0$ ). Entonces, para  $\varepsilon > 0$  pequeño y  $\Lambda \subset \mathbb{R}$  un intervalo acotado, existe  $\delta > 0$  tal que la aplicación  $u(\cdot, u_0, d, \lambda)$  es continua en  $(u_0, d, \lambda) \in [\bar{u}_0 - \varepsilon, \bar{u}_0] \times [0, +\infty) \times \Lambda$  con valores en  $C^1[0, \delta]$ . Además,  $u(\cdot, u_0, d, \lambda)$  converge en  $C^1[0, \delta]$ , cuando  $d \rightarrow +\infty$  a la única solución (no trivial en el caso  $u_0 = \bar{u}_0$ ) del problema unidimensional*

$$\begin{aligned} -(\varphi_p(u'))' &= f(\lambda, u) \\ u(0) &= u_0, \quad u'(0) = 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Si  $f$  verifica  $(H2)_3$ , entonces  $u(\cdot, u_0, d, \lambda)$  converge en  $C^1[0, \delta]$  a la única solución (no trivial si  $u_0 = \bar{u}_0$ ) de (4.12), con  $f(\lambda, u)$  remplazado por  $\bar{f}(u) = (-\bar{\gamma} + \bar{R}_1(u))(\bar{u}_0 - u)^k$ , siendo  $\bar{R}_1(u) = \frac{1}{(\bar{u}_0 - u)^k} \int_u^{\bar{u}_0} \bar{R}(s)(\bar{u}_0 - s)^{k-1} ds$ .

Nuestro próximo resultado extiende la regularidad en los datos iniciales a derivabilidad con respecto a  $d$ .

**Teorema 4.1.9** Sean  $\varepsilon > 0$ ,  $\Lambda$  y  $u(r, u_0, d, \lambda)$  como en el enunciado del Teorema 4.1.8. Entonces, para cada  $d_0 > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que la aplicación  $d \rightarrow u(\cdot, u_0, d, \lambda)$  es derivable con valores en  $C^1[0, \delta]$  para cada  $(u_0, d, \lambda) \in [\bar{u}_0 - \varepsilon, \bar{u}_0] \times [d_0, +\infty) \times \Lambda$ . Además, la función  $v = \frac{\partial u}{\partial d}(\cdot, u_0, d, \lambda)$  verifica la ecuación

$$\begin{aligned} -((r+d)^{N-1}|u'|^{p-2}v')' &= \frac{1}{p-1}(r+d)^{N-1} \left( \frac{\partial f}{\partial u}(\lambda, u)v - \frac{N-1}{(r+d)^2} \varphi_p(u') \right) \\ v(0) &= v'(0) = 0, \end{aligned}$$

y la aplicación  $(u_0, d, \lambda) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial d}(\cdot, u_0, d, \lambda)$  es continua en  $[\bar{u}_0 - \varepsilon, \bar{u}_0] \times [d_0, +\infty) \times \Lambda$  con valores en  $C^1[0, \delta]$ . También se cumple que  $\frac{\partial u}{\partial d}(\cdot, u_0, d, \lambda) \rightarrow 0$  cuando  $d \rightarrow +\infty$  en  $C^1[0, \delta]$ , uniformemente en  $\lambda \in \Lambda$ .

**Observación 4.1.10** a) Como consecuencia del Teorema 4.1.9, se tiene que la solución no trivial  $u = u(r, \bar{u}_0, d, \lambda)$  es regular en las variables  $(r, d)$ , hecho que será esencial en los resultados de unicidad del §4.2.

### 4.1.1 Demostración de resultados: el caso no singular

*Demostración del Teorema 4.1.1.* Nuestro objetivo será demostrar que el operador

$$Tu(r) = u_0 - \int_0^r \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} f(\lambda, u(\rho)) d\rho \right) ds$$

es contractivo, si lo consideramos en  $C[0, \delta]$  para  $\delta$  pequeño. Sin pérdida de generalidad, supondremos  $f(\lambda, u_0) > 0$ . Reduciendo  $\delta_1$  si fuera necesario, podemos tener también  $f(\lambda, u) \geq f(\lambda, u_0)/2$  en  $u_0 - \delta_1 \leq u \leq u_0 + \delta_1$ . Si  $u \in \bar{B}_{\delta_1}(u_0) := \{u \in C[0, \delta] : |u - u_0|_\infty \leq \delta_1\}$  tenemos

$$|u_0 - Tu(r)| \leq \int_0^r \varphi_{p'} \left( \int_0^s f(\lambda, u(\rho)) d\rho \right) ds \leq \frac{M^{\frac{1}{p-1}}}{p'} \delta^{p'},$$

donde  $M = M(\lambda) := \sup\{|f(\lambda, u)| : |u - u_0| \leq \delta_1\}$ . Eligiendo  $\delta$  suficientemente pequeño, llegamos a que  $T$  es invariante en  $\bar{B}_{\delta_1}(u_0)$ . Veamos que  $T$  es de hecho contractivo en  $\bar{B}_{\delta_1}(u_0)$ . En efecto, si  $u, v \in \bar{B}_{\delta_1}(u_0)$ ,

$$|Tu(r) - Tv(r)| \leq$$

$$\int_0^r \left| \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} f(\lambda, u(\rho)) d\rho \right) - \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} f(\lambda, v(\rho)) d\rho \right) \right| ds.$$

Aplicando el teorema del valor medio a la última expresión, llegamos a

$$\begin{aligned} & \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} f(\lambda, u(\rho)) d\rho \right) - \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} f(\lambda, v(\rho)) d\rho \right) = \\ & \frac{1}{p-1} |\xi(s)|^{p'-2} \int_0^s \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} (f(\lambda, u(\rho)) - f(\lambda, v(\rho))) d\rho, \end{aligned}$$

donde  $\xi(s)$  es un valor comprendido entre las dos integrales en la primer línea de la igualdad. Puesto que  $f(\lambda, \cdot)$  es lipschitziana en  $|u - u_0| \leq \delta_1$ , con constante de Lipschitz  $L = L(\lambda)$ ,

$$|Tu(r) - Tv(r)| \leq \frac{L}{p-1} \int_0^r |\xi(s)|^{p'-2} |u - v|_\infty s ds.$$

Por tanto, necesitamos una estimación para  $\xi(s)$ . Para ello, tenemos que considerar dos casos por separado:  $1 < p \leq 2$  y  $p > 2$ .

Si  $1 < p \leq 2$ ,  $p' - 2 \geq 0$  teniendo que estimar  $\xi(s)$  por exceso. Obsérvese que

$$\int_0^s \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} f(\lambda, u(\rho)) d\rho \leq Ms,$$

y que disponemos de una estimación similar para  $v$ . Luego  $|\xi(s)|^{p'-2} \leq M^{p'-2} s^{p'-2}$ , y obtenemos

$$|Tu(r) - Tv(r)| \leq \frac{L}{p-1} M^{p'-2} \int_0^r |u - v|_\infty s^{p'-1} ds \leq \frac{L}{p} M^{p'-2} \delta^{p'} |u - v|_\infty,$$

que implica la contractividad para  $\delta$  pequeño e independientemente de  $d$ .

Si  $p > 2$ , estimamos  $\xi(s)$  por defecto:

$$\int_0^s \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} f(\lambda, u(\rho)) d\rho \geq \frac{f(\lambda, u_0)}{2N} \left( (s+d) - \frac{d^N}{(s+d)^{N-1}} \right) \geq \frac{f(\lambda, u_0)}{2N} s,$$

y entonces  $|\xi(s)|^{p'-2} \leq (f(\lambda, u_0)/2N)^{p'-2} s^{p'-2}$ . En este caso

$$|Tu(r) - Tv(r)| \leq \frac{L}{p-1} \left( \frac{f(\lambda, u_0)}{2N} \right)^{p'-2} \int_0^r |u - v|_\infty s^{p'-1} ds \leq \frac{L}{p} \left( \frac{f(\lambda, u_0)}{2N} \right)^{p'-2} |u - v|_\infty \delta^{p'},$$

y conseguimos la contractividad tomando  $\delta$  pequeño, independientemente de  $d$ . Puesto que el carácter contractivo de  $T$  nos garantiza la existencia de un único punto fijo, la primera parte del Teorema 4.1.1 está demostrada. La estimación (4.4) es consecuencia de la ecuación de punto fijo (4.5) teniendo en cuenta que  $f(\lambda, u) = f(\lambda, u_0) + o(1)$  y  $\varphi_{p'}(f(\lambda, u)) = \varphi_{p'}(f(\lambda, u_0)) + o(1)$  cuando  $u \rightarrow u_0$ .  $\square$

**Observación 4.1.11** La solución  $u$  de (4.3) dada por el Teorema 4.1.1 se puede prolongar con unicidad a un intervalo de la forma  $-\delta \leq r \leq \delta$ . Nótese, de hecho, que si  $d = 0$  basta con extender  $u$  como una función par en  $[-\delta, \delta]$ . Si  $d > 0$ , cálculos similares a los anteriores nos dan contractividad de  $T$  en una bola cerrada de  $C[-\delta, \delta]$  si  $\delta$  cumple, por ejemplo,  $0 < \delta < \frac{d}{2}$ .

*Demostración del Teorema 4.1.3.* Comencemos con un comentario general. Si  $u \in C^1$ ,  $(r + d)^{N-1} \varphi_p(u') \in C^1$  es una solución clásica de (4.3) en  $0 \leq r \leq \delta$  entonces  $(u, v) = (u(r), \varphi_p(u(r)))$  es solución de

$$\begin{cases} u' &= \varphi_{p'}(v) & u(d) &= \bar{u}_0 \\ v' &= -\frac{N-1}{r+d}v - f(\lambda, u) & v(d) &= 0, \end{cases} \quad (4.13)$$

Por eso,

$$\frac{d}{dr}(|v|^{p'} + p'F(\lambda, u)) = -\frac{p'(N-1)}{r+d}|v|^{p'} = -\frac{p'(N-1)}{r+d}|u'|^p \leq 0, \quad (4.14)$$

si  $0 \leq r \leq \delta$ , donde  $F(\lambda, u) = \int_0^u f(\lambda, s)ds$ . Esto quiere decir que la expresión  $H(\lambda, u, v) := |v|^{p'} + p'F(\lambda, u) = |u'|^p + p'F(\lambda, u)$  es no creciente en  $r$ .

Si suponemos ahora que  $C < 0$  en (4.6), entonces  $H(\lambda, u, v) = F(\lambda, \bar{u}_0) + |v|^{p'} - C|u - \bar{u}_0|^{k+1} + o(|u - \bar{u}_0|^{k+1})$  tiene un mínimo local en  $(u, v) = (\bar{u}_0, 0)$ , así que  $H(\lambda, u(r), v(r))$  se mantiene constante en  $0 \leq r \leq \delta$  y (4.14) implica  $u \equiv \bar{u}_0$ , como queríamos probar.

En cuanto al caso  $C > 0$  en (4.6) y  $k \geq p-1$ , nótese que, puesto que  $H(\lambda, u, v)$  es decreciente, se tiene que  $-u'(r) \leq (p'F(\lambda, \bar{u}_0) - F(\lambda, u(r)))^{1/p}$  para  $0 \leq r \leq \delta$  y cualquier solución positiva  $u$ . Integrando, obtenemos

$$\int_{u(r)}^{\bar{u}_0} \frac{ds}{(F(\lambda, \bar{u}_0) - F(\lambda, s))^{1/p}} \leq (p')^{1/p}(r-d),$$

donde  $d = \sup\{r > 0 : u(r) = \bar{u}_0\}$ . Pero esto es imposible, ya que la integral diverge.  $\square$

## 4.1.2 El caso singular

El objetivo de la presente sección es dar la demostración del Teorema 4.1.4. Debe resaltarse que vamos a probar la existencia y unicidad de una solución *no trivial*  $u$ , en el sentido de que  $u(r) < \bar{u}_0$  si  $0 < r \leq \delta$ . De hecho,  $u \equiv \bar{u}_0$  es una solución obvia de (4.3) y, como establece el Corolario 4.1.6, este problema tiene otras tres soluciones bastante diferenciadas, además de un número infinito obtenido a partir de ellas. Por tanto, la unicidad dependerá fuertemente de saber encontrar el espacio adecuado donde “a priori” deben estar todas las soluciones no triviales.

Para normalizar, haremos el cambio de variable  $v = \bar{u}_0 - u$  (aunque a la nueva variable la volveremos a llamar  $u$ , por simplicidad), y buscaremos soluciones positivas. El problema (4.3) se convierte entonces en

$$\begin{aligned} -((r+d)^{N-1} \varphi_p(u'))' &= -(r+d)^{N-1} g(\lambda, u) \\ u(0) &= 0, \quad u'(0) = 0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

donde  $g(\lambda, u) = f(\lambda, \bar{u}_0 - u)$ . Por tanto,  $g$  verifica

$$\frac{\partial g}{\partial u}(\lambda, u) = (k\gamma(\lambda) + r(\lambda, u))|u|^{k-1},$$

siendo  $r(\lambda, u) = -R(\lambda, \bar{u}_0 - u)$ . A lo largo de las secciones 4.1.2, 4.1.3 y 4.1.4 trataremos con el problema (4.15), teniendo presente que todas las conclusiones obtenidas son válidas para (4.3).

Por consiguiente, nuestro objetivo es elegir un subespacio  $\mathcal{E}_\delta$  de  $C[0, \delta]$  de forma que el operador

$$Tu(r) = \int_0^r \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{\rho + d}{s + d} \right)^{N-1} g(\lambda, u(\rho)) d\rho \right) ds \quad (4.16)$$

mantenga  $\mathcal{E}_\delta$  invariante y sea contractivo.

La forma natural de hallar  $\mathcal{E}_\delta$  es conseguir estimaciones precisas para todas las posibles soluciones no triviales de (4.15) cuando  $r \rightarrow 0+$ . Estas estimaciones se detallan en la siguiente proposición.

**Proposición 4.1.12** *Sea  $u$  una solución no trivial,  $u(r) > 0$  cuando  $0 < r \leq \delta$  de (4.15). Entonces*

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \frac{u(r)}{r^\alpha} = \begin{cases} C_N, & d = 0 \\ C_1, & d > 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

donde  $\alpha = \frac{p}{p-k-1}$  y

$$C_N = \left( \frac{\gamma(\lambda)}{(\alpha k + N)\alpha^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p-k-1}}.$$

La estrategia seguida para demostrar la estimación (4.17) está basada en el uso del problema unidimensional  $N = 1$  para obtener subsoluciones, y en un análisis conveniente del problema “normalizado” obtenido al despreciar en (4.15) los términos de orden superior en  $u$ . Dicho problema normalizado se estudia en el siguiente resultado.

**Lema 4.1.13** *Fijemos  $\delta > 0$ . Para cada  $\mu > 0$  y  $d \geq 0$ , el problema*

$$\begin{aligned} -((r+d)^{N-1}\varphi_p(u'))' &= -(r+d)^{N-1}\mu u^k \\ u(0) &= 0, \quad u'(0) = 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

tiene al menos una solución  $u$  en  $[0, \delta]$  que cumple

$$\left( \frac{\mu}{(\alpha k + N)\alpha^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p-k-1}} \leq \frac{u(r)}{r^\alpha} \leq \left( \frac{\mu}{(\alpha k + 1)\alpha^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p-k-1}} \quad (4.19)$$

si  $0 < r < \delta$ , donde  $\alpha = p/(p-k-1)$ .

*Demostración.* Usaremos el método de sub y supersoluciones (cf. [82] y Apéndice B). Como candidatos a sub y supersolución tomaremos funciones de la forma  $u = \beta r^\alpha$ , con  $\alpha$  como en el enunciado, y  $\beta$  una constante positiva. Puesto que las soluciones de (4.18) son puntos fijos del operador

$$\tilde{T}u(r) := \int_0^r \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} \mu u(\rho)^k d\rho \right) ds$$

en  $C[0, \delta]$ ,  $u_1$  será una subsolución si  $u_1 \leq \tilde{T}u_1$  y  $u_2$  una supersolución si  $u_2 \geq \tilde{T}u_2$ . Tomando  $u_i = \beta_i r^\alpha$ ,  $i = 1, 2$  y teniendo en cuenta que

$$\frac{\rho}{s} \leq \frac{\rho+d}{s+d} \leq 1, \quad d \geq 0, \quad 0 \leq \rho < s,$$

un cálculo directo nos conduce a

$$\frac{1}{\alpha} \left( \frac{\mu \beta_i^k}{\alpha k + N} \right)^{p'-1} r^\alpha \leq \tilde{T}u_i(r) \leq \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\mu \beta_i^k}{\alpha k + 1} \right)^{p'-1} r^\alpha,$$

para  $i = 1, 2$ . Por tanto,  $(u_1, u_2)$  será un par de sub y supersoluciones si elegimos  $\beta_1, \beta_2$  para que se cumpla

$$\beta_1 \leq \left( \frac{\mu}{(\alpha k + N)\alpha^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p-k-1}} \leq \left( \frac{\mu}{(\alpha k + 1)\alpha^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p-k-1}} \leq \beta_2.$$

Puesto que  $u_1 \leq u_2$ , el método de sub y supersoluciones nos proporciona la existencia de al menos una solución de (4.18) que cumple (4.19).  $\square$

**Observaciones 4.1.14** a) Es importante destacar que en el problema unidimensional,  $N = 1$ , la única solución no trivial posible viene dada por

$$u_\mu(r) = \left( \frac{\mu}{(\alpha k + 1)\alpha^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p-k-1}} r^\alpha. \quad (4.20)$$

Esto es consecuencia de que cualquier solución debe satisfacer la ecuación

$$\frac{p-1}{p} |u'(r)|^p - \frac{\mu}{k+1} u(r)^{k+1} = 0, \quad 0 \leq r \leq \delta, \quad (4.21)$$

y entonces (4.20) se obtiene de (4.21) mediante separación de variables. Para uso posterior, fijaremos la notación

$$T_\mu u(r) = \int_0^r \varphi_{p'} \left( \int_0^s \mu u(\rho)^k d\rho \right) ds$$

donde  $u \in C[0, \delta]$ .

b) Cuando  $d = 0$ , se puede obtener una solución explícita de (4.18), que verifica (4.19). A saber:

$$u(r) = \left( \frac{\mu}{(\alpha k + N)\alpha^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p-k-1}} r^\alpha.$$

Como consecuencia del Teorema 4.1.4, esta será la única solución posible de (4.18) si  $d = 0$ .

*Demostración de la Proposición 4.1.12.* Primeramente, nótese que, por las condiciones impuestas a  $f$ , para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta' > 0$  tal que

$$(\gamma(\lambda) - \varepsilon)u^k \leq g(\lambda, u) \leq (\gamma(\lambda) + \varepsilon)u^k$$

si  $0 \leq u \leq \delta'$ . Sea  $u$  una solución no trivial arbitraria de (4.15). Si  $\delta$  es suficientemente pequeño, entonces  $0 \leq u(r) \leq \delta'$ , siempre que  $0 \leq r \leq \delta$ . Por tanto,  $g(\lambda, u(\rho)) \leq (\gamma(\lambda) + \varepsilon)u(\rho)^k$ , para  $0 \leq \rho \leq \delta$ . Puesto que  $u$  es un punto fijo del operador  $T$ ,

$$u(r) \leq T_{\gamma(\lambda)+\varepsilon}u(r) = \int_0^r \varphi_{p'} \left( \int_0^s (\gamma(\lambda) + \varepsilon)u(\rho)^k d\rho \right) ds,$$

es decir,  $u$  es subsolución de  $T_{\gamma(\lambda)+\varepsilon}$ . Por otro lado, disminuyendo  $\delta$  si fuese necesario, siempre podemos comparar  $u$  con una supersolución de  $T_{\gamma(\lambda)+\varepsilon}$ . Por ejemplo, con la solución exacta del problema

$$\begin{aligned} -\varphi_p(u')' &= -(\gamma(\lambda) + \varepsilon)u^k \\ u(0) &= \eta, \quad u'(0) = 0, \end{aligned}$$

donde  $\eta > 0$  es suficientemente pequeño. Por tanto, la sucesión creciente  $T_{\gamma(\lambda)+\varepsilon}^m u$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , converge en  $C[0, \delta]$  a un punto fijo de  $T_{\gamma(\lambda)+\varepsilon}$ . De acuerdo con la Observación 4.1.14 a), este punto fijo es  $u = u_\mu$  dado por (4.20) con  $\mu = \gamma(\lambda) + \varepsilon$ . Es decir, hemos demostrado que

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{u(r)}{r^\alpha} \leq \left( \frac{\gamma(\lambda) + \varepsilon}{(\alpha k + 1)\alpha^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p-k-1}}.$$

Haciendo tender  $\varepsilon$  a cero, obtenemos

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{u(r)}{r^\alpha} \leq C_1, \quad (4.22)$$

donde  $C_1$  es la constante dada en el enunciado.

Ahora vamos a estimar el límite inferior. Consideraremos por separado los casos  $d > 0$  y  $d = 0$ . Comencemos con  $d > 0$ , observando que  $(\rho + d)/(s + d) \geq d/(d + \delta)$  si  $0 \leq s \leq r \leq \delta$ . Por eso,

$$u(r) \geq \int_0^r \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{d}{d+\delta} \right)^{N-1} (\gamma(\lambda) - \varepsilon)u(\rho)^k d\rho \right) ds,$$

con lo que  $u$  es supersolución de  $T_\mu$ , con  $\mu = \left( \frac{d}{d+\delta} \right)^{N-1} (\gamma(\lambda) - \varepsilon)$ . Veamos que  $\underline{u} = \eta u$  es subsolución de  $T_\mu$  para  $0 < \eta < 1$  pequeño (nótese que  $\underline{u} \leq u$ ). Para ello, es suficiente con que

$$\eta \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{\rho + d}{s + d} \right)^{N-1} g(\lambda, u(\rho)) d\rho \right) \leq \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{d}{d+\delta} \right)^{N-1} \eta^k (\gamma(\lambda) - \varepsilon)u(\rho)^k d\rho \right)$$

para todo  $0 \leq s \leq \delta$ . Teniendo en cuenta que  $g(\lambda, u(\rho)) \leq (\gamma(\lambda) + \varepsilon)u(\rho)^k$  si  $0 \leq \rho \leq \delta$ , la desigualdad anterior es consecuencia de que

$$\eta^{p-1} \left( \frac{\rho + d}{s + d} \right)^{N-1} (\gamma(\lambda) + \varepsilon) \leq \eta^k \left( \frac{d}{d+\delta} \right)^{N-1} (\gamma(\lambda) - \varepsilon), \quad 0 < \rho < s < \delta.$$

Por tanto, eligiendo  $\eta$  para que se tenga

$$0 < \eta \leq \left[ \left( \frac{\gamma(\lambda) - \varepsilon}{\gamma(\lambda) + \varepsilon} \right) \left( \frac{d}{d + \delta} \right)^{2(N-1)} \right]^{\frac{1}{p-k-1}},$$

obtenemos que  $\underline{u} \geq T_\mu \underline{u}$ . La existencia de un único punto fijo  $u_\mu$  de  $T_\mu$  implica entonces que  $u \leq u_\mu$ . Al igual que antes, la expresión (4.20) para  $T_\mu$  implica que

$$\liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{u(r)}{r^\alpha} \geq \left( \frac{\gamma(\lambda) - \varepsilon}{(\alpha k + 1)\alpha^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p-k-1}} \left( \frac{d}{d + \delta} \right)^{\frac{N-1}{p-k-1}}.$$

Haciendo tender  $\varepsilon$  y  $\delta$  a cero, y recordando (4.22), llegamos a

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{u(r)}{r^\alpha} = C_1,$$

siempre que  $d > 0$ . Con esto hemos probado una parte de la estimación (4.17).

Estudiaremos a continuación el caso  $d = 0$ . Sea  $u$  cualquier solución no trivial de (4.15), y tomemos  $\varepsilon$  y  $\delta$  como antes. Para cada  $0 < d \leq \delta/2$ , sea  $u = u_{d,\mu}$  la solución de (4.18) dada por el Lema 4.1.13. Definamos  $w(r) = 0$  para  $0 \leq r \leq d$ , mientras que  $w(r) = u_{d,\gamma-\varepsilon}(r-d)$  si  $d < r \leq d + \delta/2$ . Se tiene que  $u(r) > w(r)$  si  $0 < r \leq d + \delta/2$ . En caso contrario, y llamando  $r_0 = \sup\{r_1 \geq d : u(r) > w(r), 0 < r \leq r_1\}$  obtendríamos  $r_0 \leq d + \delta/2$  y

$$\begin{aligned} u(r_0) &\geq \int_0^{r_0} \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{\rho}{s} \right)^{N-1} (\gamma(\lambda) - \varepsilon) u(\rho)^k d\rho \right) ds > \\ &\int_0^{r_0} \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{\rho}{s} \right)^{N-1} (\gamma(\lambda) - \varepsilon) w(\rho)^k d\rho \right) ds = w(r_0), \end{aligned}$$

que es claramente incompatible con la elección de  $r_0$ . Por ello,  $u(r) > w(r)$  en  $0 < r \leq d + \delta/2$ . En particular,  $u(r) > u_{d,\gamma(\lambda)-\varepsilon}(r-d)$  si  $d \leq r \leq d + \delta/2$  para todo  $0 < d \leq \delta/2$ . Por tanto, la estimación (4.19) conduce a

$$\frac{u(r)}{r^\alpha} \geq \left( \frac{r-d}{r} \right)^\alpha \left( \frac{\gamma(\lambda) - \varepsilon}{(\alpha k + N)\alpha^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p-k-1}} \quad (4.23)$$

si  $d \leq r \leq d + \delta/2$ . Eligiendo  $d = r/2$  en (4.23) y tomando límites inferiores cuando  $r \rightarrow 0^+$ , seguido del límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , llegamos a

$$\liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{u(r)}{r^\alpha} \geq \left( \frac{1}{2} \right)^\alpha C_N,$$

que, junto con (4.22), nos permite concluir la estimación

$$0 < a := \liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{u(r)}{r^\alpha} \leq b := \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{u(r)}{r^\alpha} < +\infty,$$

para cualquier solución no trivial  $u$  de (4.15) con  $d = 0$ . Para finalizar la demostración tenemos que ver que  $a = b = C_N$ . Para ello, fijemos  $\varepsilon > 0$  convenientemente pequeño, para que se tenga  $u(r) \leq (b + \varepsilon)r^\alpha$  y  $g(\lambda, u(r)) \leq (\gamma(\lambda) + \varepsilon)u(r)^k$  cuando  $r$  es suficientemente pequeño. Puesto que  $u$  es un punto fijo de  $T$  con  $d = 0$ , llegamos fácilmente a

$$\frac{u(r)}{r^\alpha} \leq \left( \frac{(\gamma(\lambda) + \varepsilon)(b + \varepsilon)^k}{(\alpha k + N)\alpha^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p-1}},$$

para  $r$  pequeño. Haciendo  $r \rightarrow 0+$  y luego  $\varepsilon \rightarrow 0+$  obtenemos

$$b \leq \left( \frac{\gamma(\lambda)b^k}{(\alpha k + N)\alpha^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p-1}},$$

y por tanto  $b \leq C_N$ . Un argumento simétrico nos proporciona  $a \geq C_N$ , con lo que concluye la demostración de la Proposición 4.1.12.  $\square$

Una vez que hemos establecido la estimación (4.17) para todas las soluciones no triviales del problema de valor inicial (4.15), estamos preparados para demostrar la existencia y unicidad de tales soluciones (Teorema 4.1.4). Este será uno de los resultados más importantes de la presente sección.

En virtud de la Proposición 4.1.8, eligiendo  $\delta > 0$  suficientemente pequeño, todas las soluciones no triviales de (4.15) están en

$$\mathcal{E}_\delta := \left\{ u \in C[0, \delta] : \sup_{0 < r \leq \delta} \frac{|u(r)|}{r^\alpha} < +\infty \right\}. \quad (4.24)$$

Es fácil de comprobar que  $\mathcal{E}_\delta$  es un espacio de Banach con la norma

$$\|u\| := \sup_{0 < r \leq \delta} \frac{|u(r)|}{r^\alpha}. \quad (4.25)$$

Por brevedad, supondremos que  $d > 0$  y  $k \geq 1$ , siendo el tratamiento de los casos restantes completamente similar.

La Proposición 4.1.12 sugiere considerar en  $\mathcal{E}_\delta$  el siguiente subconjunto cerrado:

$$B_\eta := \left\{ u \in \mathcal{E}_\delta : C_1 - \eta \leq \frac{u(r)}{r^\alpha} \leq C_1 + \eta, \quad 0 < r \leq \delta \right\}$$

donde  $\eta > 0$  (nótese que  $B_\eta$  es la bola cerrada con centro  $C_1 r^\alpha$  y radio  $\eta$ ). Nuestro objetivo será demostrar que para  $\eta, \delta$  suficientemente pequeños, el operador

$$Tu(r) = \int_0^r \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{\rho + d}{s + d} \right)^{N-1} g(\lambda, u(\rho)) d\rho \right) ds$$

es contractivo en  $B_\eta$ , para lo cual usaremos varios lemas. Primeramente, obsérvese que las condiciones (4.8) y (4.9) sobre  $f$  y la definición de  $g$  implican, para cada  $\varepsilon > 0$ , la existencia de un  $\delta' > 0$  tal que

$$(\gamma(\lambda) - \varepsilon)u^k \leq g(\lambda, u) \leq (\gamma(\lambda) + \varepsilon)u^k \quad (4.26)$$

$$(\gamma(\lambda)k - \varepsilon)u^{k-1} \leq -\frac{\partial g}{\partial u}(\lambda, u) \leq (\gamma(\lambda)k + \varepsilon)u^{k-1}$$

siempre que  $0 \leq u \leq \delta'$ . Puesto que, para cada  $u \in B_\eta$  se tiene que  $0 \leq u(r) \leq (C_1 + \eta)r^\alpha \leq (C_1 + \eta)\delta^\alpha$ ,  $0 \leq r \leq \delta$ , mientras podemos elegir  $\delta$  para que  $(C_1 + \eta)\delta^\alpha \leq \delta'$ ; cada  $u \in B_\eta$  cumple

$$(\gamma(\lambda) - \varepsilon)(C_1 - \eta)^k r^{\alpha k} \leq g(\lambda, u(r)) \leq (\gamma(\lambda) + \varepsilon)(C_1 + \eta)^k r^{\alpha k} \quad (4.27)$$

$$(\gamma(\lambda)k - \varepsilon)(C_1 - \eta)^{k-1} r^{\alpha(k-1)} \leq -\frac{\partial g}{\partial u}(\lambda, u(r)) \leq (\gamma(\lambda)k + \varepsilon)(C_1 + \eta)^{k-1} r^{\alpha(k-1)}$$

si  $0 \leq r \leq \delta$ . Como pasamos a detallar, es una simple cuestión de cálculo probar que  $T(B_\eta) \subset B_\eta$ , eligiendo  $\delta$  y  $\delta'$  adecuadamente pequeños.

**Lema 4.1.15** *Para todo  $\eta > 0$ , existe  $\delta_0 > 0$  tal que si  $0 < \delta \leq \delta_0$ ,  $T$  es invariante en  $B_\eta \subset \mathcal{E}_\delta$ . Además,  $\delta_0$  se puede elegir independiente de  $d \geq d_0 > 0$ , y de  $\lambda$  en intervalos compactos.*

*Demostración.* Como consecuencia de (4.27) tenemos, para  $u \in B_\eta$ ,

$$\begin{aligned} Tu(r) &= \int_0^r \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{\rho + d}{s + d} \right)^{N-1} g(\lambda, u(\rho)) d\rho \right) ds \\ &\leq \int_0^r \varphi_{p'} \left( \frac{(\gamma(\lambda) + \varepsilon)(C_1 + \eta)^k}{\alpha k + 1} s^{\alpha k + 1} \right) ds = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{(\gamma(\lambda) + \varepsilon)(C_1 + \eta)^k}{\alpha k + 1} \right)^{\frac{1}{p-1}} r^\alpha, \end{aligned}$$

y por tanto  $\frac{Tu(r)}{r^\alpha} \leq C_1 + \eta$  suponiendo que

$$\left( \frac{\gamma(\lambda) + \varepsilon}{(\alpha k + 1)\alpha^{p-1}} \right)^{\frac{1}{p-k-1}} \leq C_1 + \eta,$$

que es claramente cierto si  $\varepsilon = 0$ . Por eso podemos elegir  $\varepsilon$  (y por tanto  $\delta$  y  $\delta'$ ) pequeños para obtener

$$\frac{Tu(r)}{r^\alpha} \leq C_1 + \eta.$$

De forma similar, podemos obtener una estimación inferior:

$$\frac{Tu(r)}{r^\alpha} \geq \frac{1}{\alpha} \left( \frac{(\gamma(\lambda) - \varepsilon)(C_1 - \eta)^k}{\alpha k + 1} \right)^{\frac{1}{p-1}} \left( \frac{d}{d + \delta} \right)^{\frac{N-1}{p-1}},$$

así que  $Tu \in B_\eta$  si elegimos  $\varepsilon$  y  $\delta$  pequeños. Claramente, la elección de  $\varepsilon$  y  $\delta$  no depende de  $d$  si  $d \geq d_0 > 0$ , ni de  $\lambda$  en intervalos compactos.  $\square$

Nuestro siguiente objetivo es probar que el operador  $T$  es contractivo cuando lo restringimos a  $B_\eta$ , con respecto a la norma  $\|\cdot\|$  introducida anteriormente, con tal de elegir  $\eta$  y  $\delta$  pequeños.

**Lema 4.1.16** *Existen  $\eta_0, \delta_0 > 0$  tales que si  $0 < \eta \leq \eta_0, 0 < \delta \leq \delta_0$ , el operador  $T : B_\eta \rightarrow B_\eta$  es contractivo. Además,  $\eta_0$  y  $\delta_0$  no dependen de  $\lambda$ . Si  $1 < p \leq 2$ ,  $\eta_0$  y  $\delta_0$  no dependen de  $d$ , y para  $p > 2$  son también independientes de  $d$  en intervalos de la forma  $[d_0, +\infty)$ .*

*Demostración.* Sean  $u, v$  funciones arbitrarias en  $B_\eta$ . Entonces

$$|Tu(r) - Tv(r)| \leq \int_0^r \left| \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} g(\lambda, u(\rho)) d\rho \right) - \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} g(\lambda, v(\rho)) d\rho \right) \right| ds. \quad (4.28)$$

Usando el Teorema del Valor Medio,

$$\begin{aligned} & \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} g(\lambda, u(\rho)) d\rho \right) - \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} g(\lambda, v(\rho)) d\rho \right) = \\ & \frac{1}{p-1} |\xi(s)|^{p'-2} \int_0^s \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} (g(\lambda, u(\rho)) - g(\lambda, v(\rho))) d\rho, \end{aligned} \quad (4.29)$$

siendo  $\xi(s)$  una función comprendida entre las dos primeras integrales de (4.29). Vamos a estimar el término  $|\xi(s)|^{p'-2}$ . Como en la sección 4.1.1, tenemos que distinguir los casos  $1 < p \leq 2$  y  $p > 2$ . Si  $1 < p \leq 2$ , debemos estimar  $\xi(s)$  por exceso. Puesto que  $u \in B_\eta$ , la primera desigualdad en (4.27) implica

$$\int_0^s \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} g(\lambda, u(\rho)) d\rho \leq \frac{(\gamma(\lambda) + \varepsilon)(C_1 + \eta)^k}{\alpha k + 1} s^{\alpha k + 1},$$

y lo mismo para  $v$ . Por eso,

$$|\xi(s)|^{p'-2} \leq \left( \frac{(\gamma(\lambda) + \varepsilon)(C_1 + \eta)^k}{\alpha k + 1} \right)^{p'-2} s^{(\alpha k + 1)(p'-2)}.$$

Si  $p > 2$ , tenemos que  $p' - 2 < 0$  y  $\xi(s)$  tiene que ser estimada por defecto. Así,

$$\int_0^s \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} g(\lambda, u(\rho)) d\rho \geq \frac{(\gamma(\lambda) - \varepsilon)(C_1 - \eta)^k}{\alpha k + 1} \left( \frac{d}{d + \delta} \right)^{N-1} s^{\alpha k + 1},$$

satisfaciéndose una estimación análoga para la integral con  $v$ . Por tanto,

$$|\xi(s)|^{p'-2} \leq \left( \frac{(\gamma(\lambda) - \varepsilon)(C_1 - \eta)^k}{\alpha k + 1} \right)^{p'-2} \left( \frac{d}{d + \delta} \right)^{(N-1)(p'-2)} s^{(\alpha k + 1)(p'-2)}.$$

Por otro lado,  $g(\lambda, u(\rho)) - g(\lambda, v(\rho)) = \frac{\partial g}{\partial u}(\lambda, \chi(\rho))(u(\rho) - v(\rho))$ , donde  $\chi(\rho)$  es una función intermedia entre  $u(\rho)$  y  $v(\rho)$ . Luego

$$\begin{aligned} |g(\lambda, u(\rho)) - g(\lambda, v(\rho))| & \leq (\gamma(\lambda)k + \varepsilon)\chi(\rho)^{k-1}|u(\rho) - v(\rho)| \\ & \leq (\gamma(\lambda)k + \varepsilon)(C_1 + \eta)^{k-1}\rho^{\alpha(k-1)}|u(\rho) - v(\rho)|. \end{aligned}$$

Como  $|u(\rho) - v(\rho)| \leq \rho^\alpha \|u - v\|$ , la última integral en (4.29) queda estimada como

$$\int_0^s \left( \frac{\rho + d}{s + d} \right)^{N-1} |g(\lambda, u(\rho)) - g(\lambda, v(\rho))| d\rho \leq \frac{(\gamma(\lambda)k + \varepsilon)(C_1 + \eta)^{k-1}}{\alpha k + 1} \|u - v\| s^{\alpha k + 1}.$$

Sustituyendo todas las estimaciones en (4.28) llegamos finalmente a

$$\frac{|Tu(r) - Tv(r)|}{r^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha(p-1)} \left( \frac{(\gamma(\lambda) + \varepsilon)(C_1 + \eta)^k}{\alpha k + 1} \right)^{p'-2} \frac{(\gamma(\lambda)k + \varepsilon)(C_1 + \eta)^{k-1}}{\alpha k + 1} \|u - v\|$$

para  $1 < p \leq 2$ , es decir,  $T$  es lipschitziana con una constante que, para  $\varepsilon = \delta = 0$  se reduce a  $k/(p-1) < 1$ . Por tanto,  $T$  es contractiva en  $B_\eta$  si tomamos  $\varepsilon, \eta$  suficientemente pequeños, independientemente de  $d$  y de  $\lambda$  en intervalos compactos.

Si  $p > 2$ , obtenemos de (4.29)

$$\|Tu - Tv\| \leq \frac{1}{\alpha(p-1)} \left( \frac{(\gamma(\lambda) - \varepsilon)(C_1 - \eta)^k}{\alpha k + 1} \right)^{p'-2} \left( \frac{d}{d + \delta} \right)^{(N-1)(p'-2)} \frac{(\gamma(\lambda)k + \varepsilon)(C_1 + \eta)^{k-1}}{\alpha k + 1} \|u - v\|,$$

y otra vez para  $\varepsilon = \eta = \delta = 0$ , la constante de Lipschitz de  $T$  se reduce a  $k/(p-1) < 1$ . Por tanto, eligiendo  $\varepsilon, \eta$  y  $\delta$  pequeños,  $T$  es también contractivo en  $B_\eta$ , independientemente de  $\lambda$  en intervalos compactos. Sin embargo,  $\delta$  es independiente de  $d$  sólo cuando está alejado de cero. Esto concluye la demostración del Lema 4.1.16.  $\square$

*Demostración del Teorema 4.1.4.* De los Lemas 4.1.15 y 4.1.16, la discusión previa a ambos y el teorema de Banach, se deduce inmediatamente la existencia y unicidad local de soluciones no triviales de (4.15). La afirmación de que el intervalo  $[0, \delta]$  de existencia de las soluciones puede ser elegido independientemente de  $d$  será probada más tarde, en la demostración del Teorema 4.1.8.  $\square$

*Demostración del Corolario 4.1.6.* Para demostrar la existencia de las cuatro soluciones  $u^\pm(\cdot, d^\pm)$  de (4.3), haremos uso del problema (4.15).

Sea  $v_1$  la solución no trivial positiva de (4.15) dada por el Teorema 4.1.4. Entonces

$$u^-(r, d+) = \bar{u}_0 - v_1(r - d), \quad d \leq r \leq d + \delta.$$

Para obtener  $u^+(\cdot, d+)$  necesitamos probar la existencia de una única solución negativa  $v_2$  de (4.15). A tales efectos, consideremos

$$\begin{aligned} -((r + d)^{N-1} \varphi_p(u'))' &= -(r + d)^{N-1} h(\lambda, u) & 0 < r \leq \delta \\ u(0) &= 0, \quad u'(0) = 0, \end{aligned} \tag{4.30}$$

donde  $h(\lambda, u) = -g(\lambda, -u)$ . En virtud de las hipótesis (H1)',  $h$  cumple (H1) con  $\bar{u}_0 = 0$ . Por tanto, existe una única solución positiva  $v$  de (4.30), pues basta con hacer  $v_2 = -v$ , y

$$u^+(r, d+) = \bar{u}_0 + v_2(r - d), \quad d \leq r \leq d + \delta.$$

Por otro lado, la existencia de una solución no trivial  $v_1 > 0$  en  $-\delta \leq r \leq 0$  de (4.15) puede obtenerse teniendo en cuenta que  $w_1(r) = v_1(-r)$  es una solución no trivial de

$$\begin{aligned} -((r-d)^{N-1}\varphi_p(w'))' &= (r-d)^{N-1}g(\lambda, w) & 0 < r \leq \delta \\ w(0) &= 0, \quad w'(0) = 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Dicho problema es el mismo que (4.15), pero considerando valores negativos de  $d$  (nótese de paso que el problema permanece invariante si  $d = 0$ ). La existencia y unicidad de  $w_2$  se obtiene repitiendo los Lemas 4.1.15 y 4.1.16, pero observando que ahora aparece el grupo  $(\rho-d)/(s-d)$  en lugar de  $(\rho+d)/(s+d)$ . Como consecuencia, debemos restringir  $\delta$  para tener  $0 < \delta < d$  y se debe usar la estimación

$$1 \leq \left( \frac{\rho-d}{s-d} \right) \leq \frac{d}{d-\delta} \quad \text{si} \quad 0 \leq \rho \leq s \leq \delta.$$

Por tanto, las conclusiones del Teorema 4.1.4 también son aplicables para valores negativos de  $d$ , y aseguran la existencia de una única solución  $w_2$  de (4.31) en  $0 \leq r \leq \delta$ , que cumple  $w_2(r) > 0$  y (4.11). Por tanto,

$$u^-(r, d-) = \bar{u}_0 + w_2(d-r) \quad \text{si} \quad d-\delta \leq r \leq d.$$

La existencia de  $u^+(\cdot, d-)$  se obtiene argumentando como en la primera parte de la demostración.

En cuanto a la última afirmación, sea  $u \not\equiv \bar{u}_0$  cualquier solución de (4.2) definida en  $|r-d| \leq \delta$  y llamemos  $d_2 := \sup \{r \geq d : u \equiv \bar{u}_0 \text{ en } [d, r]\}$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer la existencia de una sucesión  $r_n > d_2$ ,  $r_n \rightarrow d_2$  tal que  $u(r_n) > 0$ , y  $|u(r)| \leq K$  en  $d_2 \leq r \leq d+\delta$ , donde elegimos  $K > 0$  para que  $f(\lambda, \cdot) > 0$  en  $\bar{u}_0 - K \leq u < \bar{u}_0$ .

Se tiene que  $u'(r_n) > 0$  para todo  $n$ . De hecho, si  $u'(r_{n_0}) \leq 0$  para algún  $n_0$ , entonces  $u'(r) < 0$  cuando  $r < r_{n_0}$ ,  $r \sim r_{n_0}$  (en el caso de la igualdad, basta con usar el Teorema 4.1.1). Pongamos  $r^* := \inf \{r < r_{n_0} : u' < 0 \text{ en } (r, r_{n_0})\}$ . Claramente,  $r^* > d_2$  y  $u'(r^*) = 0$ , mientras que  $f(\lambda, u(r^*)) > 0$ . El Teorema 4.1.1 implicaría que  $u(r) < u(r^*)$  si  $r > r^*$  es suficientemente próximo a  $r^*$ , que es imposible. Por tanto,  $u'(r_n) > 0$  para todo  $n$ .

Tomemos ahora uno de esos  $r_n$ , por ejemplo,  $r_{n_1}$ , y sea  $d_2^* := \inf \{r < r_{n_1} : u' < 0 \text{ en } (r, r_{n_1})\}$ . Necesariamente  $d_2^* \geq d_2$ . Para finalizar la demostración, basta con ver que  $d_2 = d_2^*$ , lo que implica que  $u$  es la solución no trivial de (4.10) correspondiente a  $d = d_2$ . Supongamos  $d_2^* > d_2$ . Usando los argumentos anteriores, este caso es sólo compatible con  $u(d_2^*) = 0$ . Además, debe existir  $d_2 < r_{n_2} < d_2^*$  de forma que  $u'(r_{n_2}) > 0$ . Por tanto, el Teorema de Rolle nos proporcionaría otro valor  $r_{n_2} < r_1^* < d_2^*$  tal que  $u'(r_1^*) = 0$ , junto con  $u(r_1^*) > 0$ . Como vimos antes, esto no es posible, y queda demostrada nuestra afirmación.

Finalmente, la existencia de  $d_1$  y el comportamiento correspondiente de  $u$  antes de  $d_1$  se demuestra simétricamente. Con esto finaliza la demostración del Corolario 4.1.6.  $\square$

### 4.1.3 Continuidad respecto a datos iniciales y parámetros.

En esta sección daremos una prueba del Teorema 4.1.8. Es decir, veremos que la solución  $u(r, u_0, d, \lambda)$  de (4.3) es continua respecto a  $(u_0, d, \lambda)$  con valores en  $C^1[0, \delta]$ . Para ello estudiaremos de nuevo el problema (4.15).

*Demostración del Teorema 4.1.8.* El primer paso consiste en probar que todas las soluciones de (4.15) con dato inicial  $0 \leq u_0 \leq \varepsilon$  están definidas en un intervalo común  $[0, \delta]$ , donde  $\delta$  no depende de  $d \geq 0$  (con lo que se concluirá la demostración del Teorema 4.1.4) ni de  $\lambda$  en intervalos acotados.

Sea  $\Lambda \subset \mathbb{R}$  un intervalo acotado, y llamemos

$$\begin{aligned}\bar{\gamma} &= \sup_{\Lambda} \gamma(\lambda) \\ \underline{\gamma} &= \inf_{\Lambda} \gamma(\lambda) \\ \bar{R}(u) &= \inf_{\Lambda} r(\lambda, u) \\ \underline{R}(u) &= \sup_{\Lambda} r(\lambda, u) .\end{aligned}$$

Claramente,  $\bar{R}$ ,  $\underline{R}$  son funciones continuas tales que  $\bar{R}(0) = \underline{R}(0) = 0$ , y  $\underline{\gamma} > 0$ . Además, como

$$(k\underline{\gamma} + \underline{R}(u))|u|^{k-1} \leq \frac{\partial g}{\partial u}(\lambda, u) \leq (k\bar{\gamma} + \bar{R}(u))|u|^{k-1} \quad (4.32)$$

para  $\lambda \in \Lambda$  y  $u \in \mathbb{R}$ , se tiene, definiendo

$$\begin{aligned}g_1(u) &= \int_0^u (k\bar{\gamma} + \bar{R}(s))|s|^{k-1} ds \\ g_2(u) &= \int_0^u (k\underline{\gamma} + \underline{R}(s))|s|^{k-1} ds ,\end{aligned}$$

que  $g_1, g_2$  son funciones  $C^1$  que cumplen

$$g_2(u) \leq g(\lambda, u) \leq g_1(u), \quad \lambda \in \Lambda, \quad u \in \mathbb{R} .$$

Como además,  $g_1, g_2$  están en las hipótesis del Teorema 4.1.4, podemos concluir que los problemas

$$\begin{aligned}-(\varphi_p(u'))' &= -g_1(u) \\ u(0) &= \varepsilon, \quad u'(0) = 0 ,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}-(r^{N-1}\varphi_p(u'))' &= -r^{N-1}g_2(u) \\ u(0) &= 0, \quad u'(0) = 0 ,\end{aligned}$$

tienen unicidad de soluciones no triviales para cada  $\varepsilon > 0$ . Denotemos a tales soluciones por  $\bar{u}$ ,  $\underline{u}$ , respectivamente, que están definidas en  $[0, \delta]$ , donde  $\delta = \delta(\varepsilon)$ .

Nótese que la condición (4.32) implica además que podemos elegir  $\varepsilon > 0$  para que  $g(\lambda, \cdot)$  sea creciente en  $[0, 2\varepsilon]$ . Empequeñeciendo  $\delta$  si fuera necesario, podemos suponer que  $0 \leq \underline{u} \leq 2\varepsilon$  en

$[0, \delta]$ . Claramente,  $\underline{u}(r) < \bar{u}(r)$  si  $0 \leq r \leq \delta$ . Tomemos  $u_0 \in [0, \varepsilon]$ . Entonces  $\underline{u}$  y  $\bar{u}$  forman un par de sub y supersoluciones para la ecuación de punto fijo

$$u(r) = u_0 + \int_0^r \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{\rho + d}{s + d} \right)^{N-1} g(\lambda, u(\rho)) d\rho \right) ds \quad (4.33)$$

y por tanto (4.33) tiene una solución  $v$  en  $[0, \delta]$ , que satisface  $\underline{u}(r) \leq v(r) \leq \bar{u}(r)$ . Debido a la unicidad local  $v(r) = u(r, u_0, d, \lambda)$  en un intervalo de la forma  $[0, \delta_1]$  para algún  $\delta_1 > 0$ . Esta igualdad es, sin embargo, cierta en  $[0, \delta]$ . En efecto, sea  $\delta_0 = \sup\{r_1 > 0 : v(r) = u(r, u_0, d, \lambda), 0 \leq r \leq r_1\}$  y supongamos que  $\delta_0 < \delta$ . Entonces  $u(r, u_0, d, \lambda)$  es solución de

$$\begin{aligned} -((r+d)^{N-1} \varphi_p(u'))' &= -(r+d)^{N-1} g(\lambda, u) \\ u(\delta_0) &= v(\delta_0), \quad u'(\delta_0) = v'(\delta_0). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Si  $v'(\delta_0) \neq 0$  concluimos, como consecuencia de la teoría estándar de ecuaciones diferenciales, que  $u(r, u_0, d, \lambda) = v(r)$  para  $r > \delta_0$ , próximo a  $\delta_0$ , que contradice la maximalidad de  $\delta_0$ . Si, por otro lado,  $v'(\delta_0) = 0$ , nótese que  $v(\delta_0) \geq \underline{u}(\delta_0) > 0$  y, por el Teorema 4.1.4, (4.34) admite de nuevo una única solución a la derecha de  $\delta_0$ , contradiciendo la elección de  $\delta_0$ . Por tanto,  $\delta_0 = \delta$  y queda probada la afirmación.

Hemos visto que  $\underline{u}(r) \leq u(r, u_0, d, \lambda) \leq \bar{u}(r)$  para todo  $0 \leq r \leq \delta$ ,  $0 \leq u_0 \leq \varepsilon$ ,  $d \geq 0$  y  $\lambda \in \Lambda$ . Esto, junto con la expresión para  $u$  en (4.33) nos ayuda a conseguir cotas uniformes para  $u(\cdot, u_0, d, \lambda)$  y su derivada  $u'(\cdot, u_0, d, \lambda)$ . Por tanto, en base al teorema de Ascoli-Arzelá, el conjunto

$$\{u(\cdot, u_0, d, \lambda) : 0 \leq u_0 \leq \varepsilon, d \geq 0, \lambda \in \Lambda\},$$

es precompacto en  $C[0, \delta]$ .

Sean  $\{u_{0n}\} \subset [0, \varepsilon]$ ,  $\{d_n\} \subset [0, +\infty)$  y  $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$  sucesiones tales que  $u_{0n} \rightarrow u_0$ ,  $d_n \rightarrow d_0$  y  $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ , no estando excluido el caso  $d_0 = +\infty$ . Vamos a probar que  $u_n := u(\cdot, u_{0n}, d_n, \lambda_n) \rightarrow u(\cdot, u_0, d_0, \lambda_0)$  en  $C^1[0, \delta]$ . Tomemos una subsucesión  $u_{n_k}$  tal que  $u_{n_k} \rightarrow \hat{u}$  en  $C[0, \delta]$ . Puesto que

$$\left( \frac{\rho + d_{n_k}}{s + d_{n_k}} \right)^{N-1} g(\lambda_{n_k}, u_{n_k}(\rho)) \rightarrow \left( \frac{\rho + d_0}{s + d_0} \right)^{N-1} g(\lambda_0, \hat{u}(\rho))$$

para cada  $\rho$  en  $[0, s]$ ,  $0 < s < \delta$ , el teorema de la convergencia dominada implica

$$\int_0^s \left( \frac{\rho + d_{n_k}}{s + d_{n_k}} \right)^{N-1} g(\lambda_{n_k}, u_{n_k}(\rho)) d\rho \rightarrow \int_0^s \left( \frac{\rho + d_0}{s + d_0} \right)^{N-1} g(\lambda_0, \hat{u}(\rho)) d\rho$$

para cada  $s \in [0, \delta]$ . Entonces

$$\int_0^r \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{\rho + d_{n_k}}{s + d_{n_k}} \right)^{N-1} g(\lambda_{n_k}, u_{n_k}(\rho)) d\rho \right) ds \rightarrow \int_0^r \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{\rho + d_0}{s + d_0} \right)^{N-1} g(\lambda_0, \hat{u}(\rho)) d\rho \right) ds$$

y esto conlleva que  $\hat{u}$  es solución de

$$\hat{u}(r) = u_0 + \int_0^r \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{\rho + d_0}{s + d_0} \right)^{N-1} g(\lambda_0, \hat{u}(\rho)) d\rho \right) ds.$$

Por tanto,  $\hat{u}(r) = u(r, u_0, d_0, \lambda_0)$  en  $[0, \delta]$ . Siendo la subsucesión arbitraria, tenemos  $u_n \rightarrow u(\cdot, u_0, d_0, \lambda_0)$  en  $C[0, \delta]$ . Pero entonces la ecuación de punto fijo que verifica  $u_n$  nos proporciona

$$u'_n(r) = \varphi_{p'} \left( \int_0^r \left( \frac{\rho + d_n}{s + d_n} \right)^{N-1} g(\lambda_n, u_n(\rho)) d\rho \right),$$

de donde se concluye que  $u'_n \rightarrow u'(\cdot, u_0, d_0, \lambda_0)$  en  $C[0, \delta]$ .

Para finalizar, nótese que en el caso  $d_n \rightarrow d_0 = +\infty$ , llegamos a que  $\hat{u}$  es solución de

$$\hat{u}(r) = u_0 + \int_0^r \varphi_{p'} \left( \int_0^s g(\lambda_0, \hat{u}(\rho)) d\rho \right) ds,$$

coincidiendo por tanto con la única solución del problema unidimensional  $N = 1$  en (4.15).  $\square$

#### 4.1.4 Diferenciabilidad respecto a $d$

Lo que haremos a continuación es probar que la solución  $u(r, u_0, d, \lambda)$  de (4.15) es diferenciable respecto a  $d$  para  $d > 0$ . Consideraremos solamente el caso singular  $u_0 = 0$ , pues su dificultad excede largamente la del caso no singular, que no siendo inmediato, es sin embargo más sencillo.

Para probar diferenciabilidad de la solución no trivial  $u(r, 0, d, \lambda)$  de (4.15) respecto a  $d$ , comentaremos algunas propiedades preliminares. Antes que nada, si derivamos la ecuación (4.15) respecto a  $d$  y denotamos por  $v$  a la función  $\partial u / \partial d(r, 0, d, \lambda)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} -((r+d)^{N-1}|u'|^{p-2}v')' &= \frac{-1}{p-1}(r+d)^{N-1} \left( \frac{\partial g}{\partial u}(\lambda, u)v + \frac{N-1}{(r+d)^2} \varphi_p(u') \right) \\ v(0) &= v'(0) = 0. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Denotaremos, para simplificar,

$$\begin{aligned} h(r) &= \frac{1}{p-1} \frac{N-1}{(r+d)^2} \varphi_p(u'(r)) \\ z(r) &= \frac{1}{p-1} \frac{\partial g}{\partial u}(\lambda, u(r)). \end{aligned}$$

Nótese que  $h(r) \sim \frac{N-1}{d^2(p-1)} (C_1 \alpha)^{p-1} r^{\alpha k+1}$ , y  $z(r) \sim \frac{1}{p-1} \gamma(\lambda) k C_1^{k-1} r^{\alpha(k-1)}$  cuando  $r \rightarrow 0+$ . Además, como consecuencia del Lema 4.1.16, podemos asegurar que para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\begin{aligned} \frac{|g(r)|}{r^{\alpha(k-1)}} &\leq \frac{\gamma(\lambda) k C_1^{k-1}}{p-1} + \varepsilon \\ \frac{r^{(\alpha-1)(p-2)}}{|u'(r)|^{p-2}} &\leq \frac{1}{(C_1 \alpha)^{p-2}} + \varepsilon \end{aligned} \quad (4.36)$$

si  $0 < r \leq \delta$ , independientemente de  $d \geq d_0$ , para un  $d_0 > 0$  fijo, e independientemente de  $\lambda$  en intervalos acotados.

Por otro lado, debemos precisar un subespacio conveniente de  $C[0, \delta]$  a donde pertenezcan los cocientes incrementales

$$\partial_h u := \frac{u(\cdot, 0, d+h, \lambda) - u(\cdot, 0, d, \lambda)}{h}, \quad (4.37)$$

y donde deban converger hacia  $\frac{\partial u}{\partial d}$  cuando  $h \rightarrow 0+$ . Claramente,  $\partial_h u \in \mathcal{E}_\delta$ , siendo  $\mathcal{E}_\delta$  el espacio definido por (4.24), con la norma (4.25).

Nuestro objetivo más inmediato es probar que (4.35) tiene una solución única en  $\mathcal{E}_\delta$ .

**Lema 4.1.17** *Para cada  $d_0 > 0$  y  $\Lambda \subset \mathbb{R}$  intervalo acotado, existe  $\delta > 0$  tal que el problema (4.35) tiene una única solución  $v_d$  en  $\mathcal{E}_\delta$  para  $d \geq d_0$ ,  $\lambda \in \Lambda$ .*

*Demostración.* Nuestra intención es probar que el operador

$$\mathcal{T}v(r) = \int_0^r \frac{1}{|u'(s)|^{p-2}} \int_0^s \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} (h(\rho) + z(\rho)v(\rho)) d\rho ds$$

es contractivo en  $\mathcal{E}_\delta$ . Pero primero, debemos comprobar que  $\mathcal{T}$  está bien definido. De hecho, si  $v \in \mathcal{E}_\delta$ :

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}v(r)| &\leq \int_0^r \frac{1}{|u'(s)|^{p-2}} \int_0^s (|h(\rho)| + |z(\rho)||v(\rho)|) d\rho ds \leq \\ &\int_0^r \frac{1}{|u'(s)|^{p-2}} \int_0^s \left( D\rho^{\alpha k} + \left( \frac{\gamma(\lambda)kC_1^{k-1}}{p-1} + \varepsilon \right) \rho^{\alpha k} \|v\| \right) d\rho ds = \\ &\frac{(p-1)D + (\gamma(\lambda)kC_1^{k-1} + \varepsilon(p-1))\|v\|}{(p-1)(\alpha k + 1)} \int_0^r \frac{s^{\alpha k+1}}{|u'(s)|^{p-2}} ds \leq \\ &\frac{1}{\alpha} \frac{(p-1)D + (\gamma(\lambda)kC_1^{k-1} + \varepsilon(p-1))\|v\|}{(p-1)(\alpha k + 1)} \left( \frac{1}{(C_1\alpha)^{p-2}} + \varepsilon \right) r^\alpha, \end{aligned}$$

donde  $D := \sup_{0 < r \leq \delta} h(r)/r^{\alpha k}$ . Por tanto,  $\|\mathcal{T}v\| < +\infty$ , y  $\mathcal{T}v \in \mathcal{E}_\delta$ . Demostrar que  $\mathcal{T}$  es contractivo es ahora más sencillo que en el §4.1.2. De hecho, si  $v, w \in \mathcal{E}_\delta$ , entonces

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}v(r) - \mathcal{T}w(r)| &\leq \int_0^r \frac{1}{|u'(s)|^{p-2}} \int_0^s |z(\rho)||v(\rho) - w(\rho)| d\rho ds \leq \\ &\int_0^r \frac{1}{|u'(s)|^{p-2}} \int_0^s \left( \frac{\gamma(\lambda)kC_1^{k-1}}{p-1} + \varepsilon \right) \rho^{\alpha k} \|v - w\| d\rho ds \leq \\ &\frac{\gamma(\lambda)kC_1^{k-1} + \varepsilon(p-1)}{(p-1)(\alpha k + 1)} \|v - w\| \int_0^r \frac{s^{\alpha k+1}}{|u'(s)|^{p-2}} ds \leq \\ &\frac{1}{\alpha} \frac{\gamma(\lambda)kC_1^{k-1} + \varepsilon(p-1)}{(p-1)(\alpha k + 1)} \left( \frac{1}{(C_1\alpha)^{p-2}} + \varepsilon \right) \|v - w\| r^\alpha \end{aligned}$$

y se concluye, como en los casos anteriores, que  $\mathcal{T}$  es Lipschitz, con una constante que, cuando  $\varepsilon = 0$  se reduce a  $k/(p-1) < 1$ . Por tanto, tomando  $\varepsilon$  (y por tanto  $\delta$ ) pequeño,  $\mathcal{T}$  es contractivo en  $\mathcal{E}_\delta$ , independientemente de  $d \geq d_0$ ,  $\lambda \in \Lambda$ , y el teorema de Banach finaliza la demostración.  $\square$

Ahora procederemos a obtener estimaciones de los cocientes incrementales  $\partial_h u$  dados por (4.37). Para simplificar, denotemos  $u_d = u(\cdot, 0, d, \lambda)$ . Resulta que las estimaciones óptimas involucran a la norma  $\|\cdot\|$ .

**Lema 4.1.18** *Sean  $d_0 > 0$ , y  $\Lambda \subset \mathbb{R}$  un intervalo acotado. Existe  $M = M(d_0, \Lambda)$  tal que  $\|\partial_h u\| \leq M$  para cada  $d \geq d_0$ ,  $\lambda \in \Lambda$  y  $0 < |h| \leq h_0$ , con  $h_0 > 0$  suficientemente pequeño.*

*Demostración.* Restando las ecuaciones de punto fijo que verifican  $u_{d+h}$  y  $u_d$ , y aplicando el teorema del valor medio:

$$u_{d+h}(r) - u_d(r) =$$

$$\frac{1}{p-1} \int_0^r |\xi_h(s)|^{p'-2} \int_0^s \left[ \left( \frac{\rho+d+h}{s+d+h} \right)^{N-1} g(\lambda, u_{d+h}(\rho)) - \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} g(\lambda, u_d(\rho)) \right] d\rho ds$$

siendo  $\xi_h(s)$  una función intermedia entre las dos integrales respecto a  $\rho$ . Podemos aplicar de nuevo el teorema del valor medio a la expresión en la última integral:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\rho+d+h}{s+d+h} \right)^{N-1} g(\lambda, u_{d+h}(\rho)) - \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} g(\lambda, u_d(\rho)) = \\ & g(\lambda, u_{d+h}(\rho)) \left[ \left( \frac{\rho+d+h}{s+d+h} \right)^{N-1} - \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} \right] + \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} (g(\lambda, u_{d+h}(\rho)) - g(\lambda, u_d(\rho))) = \\ & g(\lambda, u_{d+h}(\rho)) \frac{(N-1)(s-\rho)}{(s+\zeta_h)^2} \left( \frac{\rho+\zeta_h}{s+\zeta_h} \right)^{N-2} h + \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} \frac{\partial g}{\partial u}(\lambda, \eta_h(\rho))(u_{d+h}(\rho) - u_d(\rho)) \end{aligned}$$

donde  $\eta_h(\rho)$  está comprendida entre  $u_d(\rho)$  y  $u_{d+h}(\rho)$ , y  $\zeta_h$  entre  $d$  y  $d+h$ . Por eso,  $\partial_h u$  verifica:

$$\begin{aligned} \partial_h u(r) &= \frac{1}{p-1} \int_0^r |\xi_h(s)|^{p'-2} \int_0^s \left[ (N-1) \frac{s-\rho}{(s+\zeta_h)^2} \left( \frac{\rho+\zeta_h}{s+\zeta_h} \right)^{N-2} g(\lambda, u_{d+h}(\rho)) \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} \frac{\partial g}{\partial u}(\lambda, \eta_h) \partial_h u(\rho) \right] d\rho ds. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Vamos a estimar ahora estas integrales. Recordemos que, para  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$C_1 - \varepsilon \leq \frac{u_d(r)}{r^\alpha} \leq C_1 + \varepsilon, \quad 0 < r \leq \delta,$$

independientemente de  $d$  en  $[d_0, +\infty)$  y de  $\lambda$  en  $\Lambda$ . De hecho, esto está implícito en el enunciado del Lema 4.1.15. Por tanto, usando la desigualdad (4.26),

$$\left| \frac{\partial g}{\partial u}(\lambda, \eta) \right| \leq (\gamma(\lambda)k + \varepsilon)\eta^{k-1} \leq (\gamma(\lambda)k + \varepsilon)(C_1 + \varepsilon)^{k-1}\rho^{\alpha(k-1)}$$

si  $0 \leq \rho \leq \delta$ . Además, el mismo argumento nos lleva a que  $|g(\lambda, u_{d+h}(\rho))| \leq (\gamma(\lambda) + \varepsilon)(C_1 + \varepsilon)^k \rho^{\alpha k}$  si  $0 \leq \rho \leq \delta$ . Luego

$$\begin{aligned} |\partial_h u(r)| &\leq \frac{1}{p-1} \int_0^r |\xi(s)|^{p'-2} \left[ \int_0^s (\gamma(\lambda)k + \varepsilon)(C_1 + \varepsilon)^{k-1} \rho^{\alpha(k-1)} |\partial_h u(\rho)| d\rho \right. \\ &\quad \left. + \int_0^s \frac{(N-1)}{d^2} (\gamma(\lambda) + \varepsilon)(C_1 + \varepsilon)^k \rho^{\alpha k} d\rho \right] ds \leq \end{aligned}$$

$$\frac{1}{p-1} \int_0^r |\xi(s)|^{p'-2} \left( \frac{(\gamma(\lambda)k + \varepsilon)(C_1 + \varepsilon)^{k-1}}{\alpha k + 1} \|\partial_h u\| + \frac{(N-1)(\gamma(\lambda) + \varepsilon)(C_1 + \varepsilon)^k}{d^2(\alpha k + 1)} s \right) s^{\alpha k + 1} ds$$

(nótese que  $\partial_h u \in \mathcal{E}_\delta$  para todo  $h$ ). Es el momento de estimar  $\xi_h(s)$ . Puesto que  $u_{d+h} \rightarrow u_d$  en  $C^1[0, \delta]$  cuando  $h \rightarrow 0$  (cf. Teorema 4.1.8), el límite

$$\int_0^s \left( \frac{\rho + d + h}{s + d + h} \right)^{N-1} g(\lambda, u_{d+h}(\rho)) d\rho \rightarrow \int_0^s \left( \frac{\rho + d}{s + d} \right)^{N-1} g(\lambda, u_d(\rho)) d\rho$$

es uniforme en  $0 \leq s \leq \delta$  cuando  $h \rightarrow 0$ . Por tanto, para  $h$  suficientemente pequeño:

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon) \int_0^s \left( \frac{\rho + d}{s + d} \right)^{N-1} g(\lambda, u_d(\rho)) d\rho &\leq \int_0^s \left( \frac{\rho + d + h}{s + d + h} \right)^{N-1} g(\lambda, u_{d+h}(\rho)) d\rho \leq \\ &(1 + \varepsilon) \int_0^s \left( \frac{\rho + d}{s + d} \right)^{N-1} g(\lambda, u_d(\rho)) d\rho. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos

$$\int_0^s \left( \frac{\rho + d}{s + d} \right)^{N-1} g(\lambda, u_d(\rho)) d\rho = -\varphi_p(u'_d) \quad (4.39)$$

y entonces  $|\xi(s)|^{p'-2} \leq (1 - \varepsilon)^{p'-2} / |u'_d(s)|^{p-2}$  si  $p > 2$  (el caso  $1 < p \leq 2$  se trata de forma similar). Disminuyendo  $\delta$  si fuera necesario para obtener (4.36), llegamos a

$$\begin{aligned} |\partial_h u(r)| &\leq \frac{1}{p-1} \left( \frac{(\gamma(\lambda)k + \varepsilon)(C_1 + \varepsilon)^{k-1}}{\alpha k + 1} \|\partial_h u\| + \frac{(N-1)(\gamma(\lambda) + \varepsilon)(C_1 + \varepsilon)^k}{d^2(\alpha k + 1)} r \right) \\ &\quad \cdot \frac{(1 - \varepsilon)^{p'-2}}{\alpha} \left( \frac{1}{(C_1 \alpha)^{p-2}} + \varepsilon \right) r^\alpha, \end{aligned}$$

que implica, para una cierta constante  $B > 0$ :

$$\|\partial_h u\| \leq \frac{1}{p-1} \frac{(1 - \varepsilon)^{p'-2}}{\alpha} \left( \frac{1}{(C_1 \alpha)^{p-2}} + \varepsilon \right) \frac{(\gamma(\lambda)k + \varepsilon)(C_1 + \varepsilon)^{k-1}}{\alpha k + 1} \|\partial_h u\| + B.$$

Como en todos los casos anteriores, el primer coeficiente del segundo miembro se reduce a  $k/(p-1) < 1$  para  $\varepsilon = 0$ , así que, eligiendo y fijando  $\varepsilon$  pequeño, tenemos

$$\|\partial_h u\| \leq A\|\partial_h u\| + B,$$

donde  $0 < A < 1$ . Esto implica la existencia de  $M > 0$  de forma que  $\|\partial_h u\| \leq M$ , independientemente de  $h$ .  $\square$

En el resultado anterior, hemos obtenido una estimación uniforme de  $\|\partial_h u\|$ ,  $0 < |h| < h_0$ . Puesto que  $|\partial_h u|_\infty \leq \delta^\alpha \|\partial_h u\| \leq \delta^\alpha M$ , también tenemos una estimación uniforme de  $|\partial_h u|_\infty$  que, a la vista de (4.38), nos proporciona una estimación uniforme para  $|(\partial_h u)'|_\infty$ .

*Demostración del Teorema 4.1.9.* Gracias a la observación anterior, hemos visto que toda sucesión  $\{\partial_{h_n} u\}$  con  $h_n \rightarrow 0$ , admite una subsucesión, denotada de nuevo por  $\{\partial_{h_n} u\}$ , que converge a alguna  $\hat{v} \in C[0, \delta]$ . Veremos a continuación que  $\hat{v}$  debe coincidir con  $v_d$ , la única solución de (4.35) en  $\mathcal{E}_\delta$ . Por tanto,  $\partial_h u \rightarrow v_d$  en  $C[0, \delta]$ .

Para ello, nótese primero que  $\partial_{h_n} u \rightarrow \hat{v}$  en  $C[0, \delta]$ , junto con la estimación para  $\|\partial_{h_n} u\|$ , implican que  $\hat{v} \in \mathcal{E}_\delta$ . Por otro lado, introduzcamos, en la expresión (4.38) para  $v_n := \partial_{h_n} u$ , las funciones  $\xi_n := \xi_{h_n}$ ,  $\eta_n = \eta_{h_n}$  y  $\zeta_n := \zeta_{h_n}$ . Puesto que  $\eta_n(\rho)$  es una función intermedia entre  $u_d(\rho)$  y  $u_{d+h_n}(\rho)$ , se sigue que  $\eta_n \rightarrow u_d$  y  $\partial g/\partial u(\lambda, \eta_n) \rightarrow \partial g/\partial u(\lambda, u_d)$  uniformemente en  $[0, \delta]$ , y por la misma razón  $\xi_n \rightarrow -\varphi_p(u'_d)$  uniformemente en  $[0, \delta]$ . Por tanto, tomando límites en (4.38), llegamos a

$$\begin{aligned} \partial_h u(r) = & \frac{1}{p-1} \int_0^r \frac{1}{|u'_d(s)|^{p-2}} \int_0^s \left[ \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} \frac{\partial g}{\partial u}(\lambda, u_d(\rho)) \hat{v}(\rho) \right. \\ & \left. + (N-1) \frac{s-\rho}{(s+d)^2} \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-2} g(\lambda, u_d(\rho)) \right] d\rho ds, \end{aligned} \quad (4.40)$$

ya que  $\zeta_n \rightarrow d$ . Además, podemos transformar la última integral respecto a  $\rho$  mediante una integración por partes, como sigue

$$\begin{aligned} \int_0^s (s-\rho)(\rho+d)^{N-2} g(\lambda, u_d(\rho)) d\rho &= \int_0^s \frac{s+d}{(\rho+d)^2} \left( \int_0^\rho (\tau+d)^{N-1} g(\lambda, u_d(\tau)) d\tau \right) d\rho = \\ \int_0^s (s+d)(\rho+d)^{N-3} \left( \int_0^\rho \left( \frac{\tau+d}{\rho+d} \right)^{N-1} g(\lambda, u_d(\tau)) d\tau \right) d\rho &= - \int_0^s (s+d)(\rho+d)^{N-3} \varphi_p(u'_d(\rho)) d\rho. \end{aligned}$$

Introduciendo esta expresión en (4.40) nos da

$$\hat{v} = \frac{1}{p-1} \int_0^r \frac{1}{|u'_d(s)|^{p-2}} \int_0^s \left( \frac{\rho+d}{s+d} \right)^{N-1} \left[ \frac{\partial g}{\partial u}(\lambda, u_d(\rho)) \hat{v}(\rho) + \frac{N-1}{(\rho+d)^2} \varphi_p(u'_d(\rho)) \right] d\rho ds.$$

Puesto que, como ya se ha dicho,  $\hat{v} \in \mathcal{E}_\delta$ , se tiene que  $\hat{v} = v_d$ , la única solución de (4.35) en  $\mathcal{E}_\delta$ . Por tanto,  $\partial_h u \rightarrow v_d$  en  $C[0, \delta]$ , y esto, como en los casos anteriores, usando la ecuación de punto fijo (4.38), nos lleva a  $(\partial_h u)' \rightarrow v'_d$  cuando  $h \rightarrow 0$  en  $C[0, \delta]$ .

Para probar la continuidad de  $v_d$  como función de  $(u_0, d, \lambda)$  con valores en  $C^1[0, \delta]$ , obsérvese que la estimación  $\|\partial_h u\| \leq M$  nos proporciona estimaciones uniformes para  $v_d(\cdot, u_0, d, \lambda)$  con  $(u_0, d, \lambda) \in [0, \varepsilon] \times [d_0, +\infty) \times \Lambda$ . Usando la ecuación de punto fijo  $v_d = \mathcal{T}(v_d)$  llegamos a que  $\{v_d(\cdot, u_0, d, \lambda)\}$  es equicontinuo y por tanto precompacto en  $C[0, \delta]$ . El mismo argumento que en la demostración del Teorema 4.1.8 nos da la continuidad de  $v_d$  en  $(u_0, d, \lambda)$ . Lo que es más importante, el valor límite de  $\mathcal{T}$  cuando  $d \rightarrow +\infty$  nos conduce al operador

$$\bar{\mathcal{T}}v = \frac{1}{p-1} \int_0^r \frac{1}{|u'(s)|^{p-2}} \int_0^s \frac{\partial g}{\partial u}(\lambda, u(\rho)) v(\rho) d\rho ds,$$

donde  $u$  es la única solución (no trivial si  $u_0 = 0$ ) de (4.12). El único punto fijo de  $\bar{\mathcal{T}}$  en  $\mathcal{E}_\delta$  es  $v = 0$ . Por tanto,  $v_d(\cdot, u_0, d, \lambda) \rightarrow 0$  en  $C^1[0, \delta]$  cuando  $d \rightarrow +\infty$ , y esto finaliza la demostración del Teorema 4.1.9.  $\square$

## 4.2 Unicidad con homogeneización simple

En esta sección estudiaremos las soluciones radiales positivas del problema de contorno (4.1)

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda f(\lambda, u) & \text{en } D \\ u &= 0 & \text{en } \partial D, \end{aligned} \quad (4.41)$$

donde  $D$  es un dominio acotado radialmente simétrico de  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$ , es decir, una bola  $B = \{x : |x| < R\}$  o un anillo  $A = \{x : 0 < a < |x| < R\}$ , y  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Supondremos que  $f$  es sublineal en el sentido de que tiene un cero positivo  $\bar{u}_0$  de orden  $k \in \mathbb{R}$ . Por eso, vamos a restringirnos al estudio de soluciones radiales positivas que cumplen  $u(x) \leq \bar{u}_0$ , descartando otras posibles soluciones que excedan  $\bar{u}_0$  en algún punto. Específicamente, examinaremos en detalle las familias de soluciones radiales positivas  $\{u_\lambda\}_{\lambda \geq \lambda_0}$  de (4.1) que cumplen  $\sup_D u_\lambda \leq \bar{u}_0$ , tales que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u_\lambda(x) = \bar{u}_0, \quad (4.42)$$

uniformemente sobre compactos de  $D$  (cf. Capítulo 2). Para referencia futura, cualquier familia  $\{u_\lambda\}_{\lambda \geq \lambda_0}$  que cumpla (4.42) será llamada *homogeneizante*. A continuación vamos a probar (cf. Teoremas 4.2.4 y 4.2.7) que existe una única familia con estas características, suponiendo que  $f$  satisface hipótesis bastante naturales.

### 4.2.1 Resultados preliminares

Antes de seguir adelante, necesitamos establecer algunas propiedades preliminares sobre las soluciones radiales de (4.1). Supondremos en lo que sigue que  $f$  verifica las hipótesis (H2)<sub>*i*</sub>,  $i = 1, 2, 3$  del §4.1.

En primer lugar, si  $u$  es una solución débil de (4.1) que verifica  $0 \leq u(x) \leq \bar{u}_0$  en  $D$ , el Teorema A.3 del Apéndice A implica que  $u \in C^{1, \beta_0}(\bar{\Omega})$  para algún  $0 < \beta < 1$ . Si además  $u$  es

radialmente simétrica y ponemos  $u(x) = u(r)$ , se obtiene como en el §2.1.3 que  $u$  y  $r^{N-1}\varphi_p(u')$  son  $C^1$  en  $0 \leq r \leq R$ , si  $D = B$ , mientras que  $u, \varphi_p(u')$  son  $C^1[a, R]$  en el caso  $D = A$ . En bolas,  $u = u(r)$  es una solución clásica del problema

$$\begin{aligned} -(r^{N-1}\varphi_p(u'))' &= \lambda r^{N-1}f(\lambda, u), & 0 < r < R \\ u'(0) &= u(R) = 0, \end{aligned} \quad (4.43)$$

mientras en anillos  $u$  cumple la misma ecuación en  $a \leq r \leq R$  y condiciones de contorno  $u(a) = u(R) = 0$ .

En segundo lugar, cualquier solución radial positiva de (4.1) en bolas  $B$  verifica  $u_0 := u(0) = \sup_B u = \sup_{0 \leq r \leq 1} u(r)$ . Además,  $u(r)$  es decreciente en  $0 \leq r \leq R$ . De hecho, estas dos afirmaciones son consecuencias del hecho de que  $H(\lambda, u, u') = |u'|^p + p'\lambda F(\lambda, u)$ ,  $F(\lambda, u) = \int_0^u f(\lambda, s)ds$ , es decreciente en  $r$  (cf. (4.14)). Por tanto, las soluciones radiales positivas  $u$  de (4.1) se pueden parametrizar por su máximo  $u_0$  mediante el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} -(r^{N-1}\varphi_p(u'))' &= \lambda r^{N-1}f(\lambda, u), & 0 < r < R \\ u(0) &= u_0, \quad u'(0) = 0. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Si  $D$  es un anillo  $A$  y  $u = u(r)$  es una solución de (4.1) con  $0 < u(r) \leq \bar{u}_0$  en  $a < r < R$  y máximo  $u_0 := \sup_A u$ , se tiene que  $u_0 = u(r_0)$  para algún  $a < r_0 < R$ , que en principio es desconocido. Sin embargo, razonando como antes en  $r_0 \leq r \leq R$  e invirtiendo  $r$  en  $a \leq r \leq r_0$ , se llega de nuevo a que  $u$  es decreciente (respectivamente, creciente) en  $r_0 \leq r \leq R$  (resp.  $a \leq r \leq r_0$ ). Por la misma razón, (4.46) sigue siendo válida, y  $u = u(r)$  es solución de

$$\begin{aligned} -(r^{N-1}\varphi_p(u'))' &= \lambda r^{N-1}f(\lambda, u), & a < r < R \\ u(r_0) &= u_0, \quad u'(r_0) = 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Asimismo, el comportamiento de  $H(\lambda, u, u')$  también implica  $F(\lambda, u) \leq F(\lambda, u_0)$  en  $0 \leq u < u_0$ . Puesto que tenemos en mente (4.42),  $u_0 = u_0(\lambda) \rightarrow \bar{u}_0$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ , y entonces  $\bar{F}(u) \leq \bar{F}(\bar{u}_0)$  si  $0 \leq u < \bar{u}_0$ , siendo  $\bar{F}$  el límite uniforme de  $F(\lambda, \cdot)$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . De hecho, pediremos la condición más fuerte

$$\bar{F}(u) < \bar{F}(\bar{u}_0) \quad \text{para todo } 0 \leq u < \bar{u}_0. \quad (4.46)$$

En efecto, si  $f$  no depende de  $\lambda$  y  $N \geq 2$ , los resultados en el §1.4 implican que la condición (4.46) es necesaria para tener una familia que cumpla (4.42).

En base a las anteriores observaciones, es razonable pedir, además de las hipótesis (H2)<sub>1</sub>, (H2)<sub>2</sub> y (H2)<sub>3</sub>, la siguiente condición de energía (cf. (H3) en el Capítulo 1):

(H3)  $f(\lambda, \cdot)$  es  $C^1$  en  $\mathbb{R}$  y  $\bar{F}(u) = \int_0^u \bar{f}(s) ds$  satisface la desigualdad (4.46).

**Observaciones 4.2.1** a) Ha sido demostrado en el Capítulo 1 (cf. §1.3.5) que en el caso unidimensional  $N = 1$  de (4.1) la condición  $\bar{F}(u) \leq \bar{F}(\bar{u}_0)$  en  $0 \leq u < \bar{u}_0$  permite la existencia de infinitas familias homogeneizantes  $\{u_\lambda\}$ , en contraste con nuestro resultado de unicidad, Teorema 4.2.5.

b) Por otro lado, para  $N = 1$ , la sola condición (4.46) es suficiente para asegurar la existencia de una única familia cumpliendo (4.42). Sin embargo, como consecuencia del Corolario 4.2.13, esto no es cierto si  $N \geq 2$ .

### 4.2.2 El problema en bolas

Nuestro próximo objetivo será estudiar las familias homogeneizantes de (4.1) cuando  $D$  es una bola de  $\mathbb{R}^N$ . El primer resultado asegura que todas las soluciones radiales positivas que pertenezcan a una familia homogeneizante  $\{u_\lambda\}$  desarrollan un núcleo muerto  $\mathcal{O}_\lambda = \{x : u_\lambda(x) = \bar{u}_0\}$ , para  $\lambda$  suficientemente grande.

**Lema 4.2.2** *Supongamos que  $f$  satisface las hipótesis (H2) y (H3). Sea  $\{u_\lambda\}$  una familia homogeneizante de soluciones radiales positivas de (4.1) en  $B$ . Entonces existe  $\lambda_0 > 0$  tal que el conjunto  $\{x : u_\lambda(x) = \bar{u}_0\}$  es no vacío para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ .*

*Demostración.* En primer lugar, nótese que, si hacemos  $w(r) = u(\lambda^{-1/p}r)$ , (4.44) se puede escribir como

$$\begin{aligned} -(r^{N-1}\varphi_p(w'))' &= r^{N-1}f(\lambda, w) \\ w(0) &= u_0, \quad w'(0) = 0. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Por tanto,  $w(\lambda^{1/p}R) = 0$  si  $u = u(r)$  es una solución radial de (4.1).

Supongamos que la conclusión del lema no es cierta. Podemos, pues, encontrar una sucesión  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  tal que, llamando  $u_{0n} = \sup_B u_{\lambda_n}$ , se tenga

$$u_{0n} < \bar{u}_0 \quad \text{para todo } n.$$

Entonces  $w_n(r) = u_{\lambda_n}(\lambda_n^{-1/p}r)$  es solución de (4.47) con  $u_0 = u_{0n}$ , y además  $w_n(r) > 0$  si  $0 \leq r < \lambda_n^{1/p}R$ ,  $w_n(\lambda_n^{1/p}R) = 0$ .

Nótese que de la hipótesis de homogeneización (4.42) se tiene, para  $r_0 > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  dados,

$$\bar{u}_0 - \varepsilon \leq w_n(r) \leq \bar{u}_0 \quad \text{en } 0 \leq r \leq r_0,$$

suponiendo que  $n \geq n_0 = n_0(r_0, \varepsilon)$ . Por otro lado, el Teorema 4.1.8 (véanse también las Observaciones 4.1.10) nos garantiza que  $w_n \rightarrow \bar{w}$  en  $C^1[0, \delta]$  para un cierto  $\delta > 0$ , donde  $\bar{w}$  es la única solución no trivial de

$$\begin{aligned} -(r^{N-1}\varphi_p(w'))' &= r^{N-1}\bar{f}(w) \\ w(0) &= \bar{u}_0, \quad w'(0) = 0. \end{aligned}$$

Puesto que  $\bar{w}(\delta) < \bar{u}_0$ , podemos elegir  $\varepsilon > 0$  de forma que  $w_n(\delta) \leq \bar{u}_0 - 2\varepsilon$  para  $n$  grande, que está en clara contradicción con (4.42). Esto demuestra el lema.  $\square$

Para poder enunciar nuestro próximo resultado, introduzcamos alguna notación. Sea  $u$  una solución radial positiva de (4.1) con un núcleo muerto  $\mathcal{O}$ . Puesto que  $u$  es decreciente en  $|x|$ , se

tiene que  $\mathcal{O} = B_{R_0}(0)$ , para cierto  $R_0 > 0$ . Esto implica que la solución  $w(r) = u(\lambda^{-1/p}r)$  de (4.47) en  $0 \leq r \leq \lambda^{1/p}R$  satisface  $w = \bar{u}_0$  si  $r \leq d$  y  $0 < w < \bar{u}_0$  en  $d < r < \lambda^{1/p}R$ ,  $d$  dado por  $d = \lambda^{1/p}R_0$ . Por tanto,  $v(r) = w(r + d)$  define, en el intervalo  $[0, \lambda^{1/p}R - d]$  una solución no trivial del problema (4.3) en el §4.1, con  $u_0 = \bar{u}_0$ , es decir,

$$\begin{aligned} -((r + d)^{N-1}\varphi_p(v'))' &= (r + d)^{N-1}f(\lambda, v) \\ v(0) &= \bar{u}_0, \quad v'(0) = 0. \end{aligned} \tag{4.48}$$

El siguiente resultado nos da una primera información sobre el comportamiento de  $d = d(\lambda)$  en una familia homogeneizante  $\{u_\lambda\}$  de (4.1).

**Lema 4.2.3** *Sea  $\{u_\lambda\}$  una familia de soluciones radiales positivas de (4.1) verificando (4.42). Entonces  $d(\lambda) \rightarrow +\infty$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ .*

*Demostración.* Supongamos que existe una sucesión  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  tal que  $d_n := d(\lambda_n)$  está acotada. Pasando a una subsucesión si fuera necesario, tenemos que  $d_n \rightarrow d_0 \geq 0$ . Poniendo  $v_n(r) = u_{\lambda_n}(\lambda_n^{-1/p}(r + d_n))$ , el Teorema 4.1.8 implica que  $v_n \rightarrow \bar{v}$  en  $C^1[0, \delta]$  para cierto  $\delta > 0$ , siendo  $\bar{v}$  la única solución no trivial de

$$\begin{aligned} -((r + d_0)^{N-1}\varphi_p(v'))' &= (r + d_0)^{N-1}\bar{f}(v) \\ v(0) &= \bar{u}_0, \quad v'(0) = 0. \end{aligned}$$

Sin embargo,  $\bar{v}(\delta) < \bar{u}_0$ , y esto contradice la hipótesis de homogeneización. Por tanto,  $d(\lambda) \rightarrow +\infty$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ .  $\square$

Teniendo en cuenta los lemas anteriores, resulta que el comportamiento relevante de una solución  $u$  perteneciente a una familia homogeneizante ocurre en el intervalo  $\lambda^{-1/p}d < r \leq R$ . Cuando escribimos tales soluciones  $u$  como  $v(r) = u(\lambda^{-1/p}(r + d))$ , este comportamiento viene determinado por las soluciones no triviales de (4.3) cuando  $d \rightarrow +\infty$ . Recíprocamente, el problema de encontrar familias homogeneizantes  $\{u_\lambda\}$  se traduce al de construir soluciones no triviales  $v$  de (4.3) tales que  $v(T) = 0$  para algún valor positivo  $T = T(\lambda, d)$ , cuando  $\lambda, d \rightarrow +\infty$ . Por tanto, vamos a efectuar un análisis pormenorizado de tales soluciones.

En primer lugar, recordemos que los Teoremas 4.1.4 y 4.1.8 nos garantizan que existe una solución no trivial positiva de (4.3) de tal forma que  $v(\cdot, d, \lambda)$  converge en  $C^1[0, \delta]$  cuando  $\lambda, d \rightarrow +\infty$  a la única solución no trivial  $v_\infty$  del problema unidimensional (cf. Teorema 3.1.5),

$$\begin{aligned} -(\varphi_p(v'))' &= \bar{f}(v) \\ v(0) &= \bar{u}_0, \quad v'(0) = 0. \end{aligned} \tag{4.49}$$

Debido a la hipótesis de energía (H3) impuesta a  $\bar{f}$ , podemos extender  $v_\infty$  hasta conseguir una solución positiva en  $0 \leq r \leq T_0$ , donde  $T_0$  viene dado por la integral convergente:

$$T_0 = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{1/p} \int_0^{\bar{u}_0} \frac{ds}{(\bar{F}(\bar{u}_0) - \bar{F}(s))^{1/p}}, \tag{4.50}$$

con  $\bar{F}(u) = \int_0^u \bar{f}(s) ds$ . De hecho,  $v_\infty(r) > 0$  en  $0 \leq r < T_0$ ,  $v_\infty(T_0) = 0$  y está definida implícitamente por la ecuación

$$r = \left( \frac{p-1}{p} \right)^{1/p} \int_v^{\bar{u}_0} \frac{ds}{(\bar{F}(\bar{u}_0) - \bar{F}(s))^{1/p}}.$$

En particular,  $v'_\infty(T_0) = -(p'\bar{F}(\bar{u}_0))^{1/p}$ . Nótese que  $v_\infty$  puede ser extendida incluso hasta  $[0, T_0 + \varepsilon]$ , donde  $\varepsilon > 0$  es suficientemente pequeño, de forma que  $v'_\infty < 0$  en  $0 < r \leq T_0 + \varepsilon$  (cf. Capítulo 1).

A continuación vamos a demostrar que la solución no trivial local  $v(r, d, \lambda)$  de (4.3) se puede extender al intervalo  $0 \leq r \leq T_0 + \varepsilon$  para  $\varepsilon$  pequeño y  $\lambda, d$  suficientemente grandes. Si esto no fuera cierto, existirían sucesiones  $\lambda_n, d_n \rightarrow +\infty$  y  $\delta \leq r_n \leq T_0 + \varepsilon$  tales que  $v'_n(r_n) = 0$  ( $v_n = v(\cdot, d_n, \lambda_n)$ ). Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $r_n \rightarrow r_0$ . Definamos

$$\hat{v}_n(r) = \begin{cases} v_n(r), & 0 \leq r \leq r_n \\ v_n(r_n), & r_n \leq r \leq T_0 + \varepsilon. \end{cases}$$

El teorema de Ascoli-Arzelá nos garantiza entonces que  $\{\hat{v}_n\}$  es precompacto en  $C[0, T_0 + \varepsilon]$ . Por tanto, podemos tomar una subsucesión  $\hat{v}_{n_k}$  de forma que  $\hat{v}_{n_k} \rightarrow \hat{v}$  en  $C[0, T_0 + \varepsilon]$ . Por eso tenemos

$$\hat{v}(r) = \bar{u}_0 - \int_0^r \varphi_{p'} \left( \int_0^s \bar{f}(\hat{v}(\rho)) d\rho \right) ds,$$

para todo  $0 \leq r < r_0$ , y esto implica que  $\hat{v} = v_\infty$  en  $[0, r_0)$ . Sin embargo, esto está en contradicción con el hecho de que  $\hat{v}'(r_0) = v'_\infty(r_0) < 0$ . Por ello, la solución no trivial  $v(\cdot, d, \lambda)$  de (4.3) se puede extender al intervalo  $0 \leq r \leq T_0 + \varepsilon$  para  $\lambda$  y  $d$  grandes.

Además, como  $v(\cdot, d, \lambda) \rightarrow v_\infty$  en  $C^1[0, T_0 + \varepsilon]$  cuando  $\lambda, d \rightarrow +\infty$  se tiene  $v'(\cdot, d, \lambda) < 0$  en  $0 < r \leq T_0 + \varepsilon$ , junto con  $v(T_0 + \varepsilon, d, \lambda) < 0$  para  $\lambda$  y  $d$  grandes. Esto nos lleva a obtener la existencia de un único  $T = T(d, \lambda)$  tal que  $v(r, d, \lambda) > 0$  si  $0 \leq r < T$  y  $v(T, d, \lambda) = 0$ , cuando  $\lambda$  y  $d$  son suficientemente grandes. Además,  $T(d, \lambda) \rightarrow T_0$  cuando  $\lambda, d \rightarrow +\infty$ .

En el próximo resultado obtendremos una propiedad fundamental de la aplicación  $T = T(d, \lambda)$ .

**Lema 4.2.4** *Existen  $d_0, \lambda_0 > 0$  tales que la función  $T : (d_0, +\infty) \times (\lambda_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$  es derivable respecto a  $d$ . Además,  $\lim_{\lambda, d \rightarrow +\infty} T'_d(d, \lambda) = 0$ .*

*Demostración.* Puesto que  $v'(\cdot, d, \lambda) < 0$  y  $v'_\infty < 0$  en  $(0, T_0 + \varepsilon]$  para  $\lambda$  y  $d$  grandes, la familia  $\{v(\cdot, d, \lambda)\}$  cae dentro del régimen de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias para la ecuación (4.3) en cualquier intervalo de la forma  $\delta \leq r \leq T_0 + \varepsilon$  para  $\delta > 0$  tan pequeño como se quiera. Por otro lado,  $v(\cdot, d, \lambda)$  es derivable respecto a  $d$  en un intervalo fijo de la forma  $0 \leq r \leq \delta$  (Teorema 4.1.9). Por tanto, la unicidad estándar en ecuaciones diferenciales ordinarias implica que  $v(\cdot, d, \lambda)$  es derivable respecto a  $d$  con valores en  $C^1[0, T_0 + \varepsilon]$  para  $\lambda$  y  $d$  grandes.

La discusión que precede al lema implica que  $v'(T, d, \lambda) < 0$  para  $\lambda$  y  $d$  grandes y  $T$  cerca de  $T_0$ . Por eso, podemos aplicar el teorema de las funciones implícitas para resolver en  $T$  la ecuación

$$v(T, d, \lambda) = 0 \quad (4.51)$$

para  $\lambda$  y  $d$  grandes en un entorno de  $T = T_0$  concluyendo que  $T = T(d, \lambda)$  es la única solución, por tanto derivable respecto a  $d$ . Además, derivando con respecto a  $d$  en (4.51) obtenemos

$$T'_d(d, \lambda) = -\frac{v_d(T(d, \lambda), d, \lambda)}{v'(T(d, \lambda), d, \lambda)},$$

donde  $v_d$  denota a la derivada respecto a  $d$ . Como del Teorema 4.1.9 – propiamente enunciado – se tiene  $v_d(\cdot, d, \lambda) \rightarrow 0$  en  $C^1[0, T_0 + \varepsilon]$  cuando  $\lambda, d \rightarrow +\infty$ , resulta que  $T'_d(d, \lambda) \rightarrow 0$  cuando  $\lambda, d \rightarrow +\infty$ .  $\square$

Podemos ya establecer un teorema de existencia y unicidad de familias homogeneizantes para el problema (4.1).

**Teorema 4.2.5** *Supongamos que  $f$  verifica las hipótesis (H2) y (H3). Entonces el problema (4.1)*

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda f(\lambda, u) & \text{en } B \\ u &= 0 & \text{en } \partial B \end{aligned}$$

donde  $B$  es una bola de  $\mathbb{R}^N$ , admite una única familia de soluciones radiales positivas  $\{u_\lambda\}$  verificando  $0 < u_\lambda \leq \bar{u}_0$  y

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u_\lambda(x) = \bar{u}_0$$

uniformemente en compactos de  $B$ . Además, todas las soluciones  $u_\lambda$  desarrollan un núcleo muerto  $\mathcal{O}_\lambda = \{x : u_\lambda(x) = \bar{u}_0\}$  para  $\lambda$  suficientemente grande.

La misma herramienta desarrollada para demostrar el Teorema 4.2.5 nos conduce también a conseguir estimaciones exactas de los núcleos muertos y de la capa límite (compárese con los Capítulos 2 y 3).

**Teorema 4.2.6** *Supongamos que  $f$  verifica las hipótesis (H2) y (H3). Entonces, la única familia homogeneizante  $\{u_\lambda\}$  del problema (4.1) dada en el teorema previo satisface, si  $\mathcal{O}_\lambda = \{x : u_\lambda(x) = \bar{u}_0\}$ , la siguiente estimación:*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1/p} \text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial B) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^{1/p} \int_0^{\bar{u}_0} \frac{ds}{(\bar{F}(\bar{u}_0) - \bar{F}(s))^{1/p}}. \quad (4.52)$$

Asimismo, se da la siguiente estimación exacta de la capa límite cerca de  $\partial B$ :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-1/p} u'_\lambda(R) = - (p' \bar{F}(\bar{u}_0))^{1/p}, \quad (4.53)$$

donde  $\bar{F}(\bar{u}_0) = \int_0^{\bar{u}_0} \bar{f}(s) ds$ .

*Demostración de los Teoremas 4.2.5 y 4.2.6.* Sin pérdida de generalidad, supondremos que el radio de la bola es  $R = 1$ . De hecho, el cambio de escala  $y = R^{-1}x$  reduce (4.1) a un problema en la bola unidad, donde  $R^p \lambda$  sustituye a  $\lambda$ . Ninguna de las estimaciones (4.52) o (4.53) resulta afectada por este cambio.

Por otro lado, cualquier solución radial positiva  $u_\lambda$  que pertenezca a una familia homogeneizante debe desarrollar un núcleo muerto  $\{u_\lambda(x) = \bar{u}_0\} = \{x : |x| \leq \lambda^{-1/p}d\}$ , donde  $d = d(\lambda)$  (cf. Lemma 4.2.2). Por eso,

$$u_\lambda(r) = v(\lambda^{1/p}r - d, d, \lambda),$$

siendo  $v(\cdot, d, \lambda)$  la única solución no trivial de (4.3) que, definida en  $0 \leq r < T(d, \lambda)$ , cumple  $v(T(d, \lambda), d, \lambda) = 0$  ( $\lambda$  y  $d$  suficientemente grandes). Este es el caso si  $\lambda \rightarrow +\infty$  en virtud del Lema 4.2.3.

Por tanto, el problema de encontrar familias homogeneizantes  $\{u_\lambda\}$  de (4.1) se reduce al de resolver la ecuación en  $d$ :

$$T(d, \lambda) + d = \lambda^{1/p}, \quad (4.54)$$

cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Puesto que el Lema 4.2.4 nos garantiza que  $\lim_{\lambda, d \rightarrow +\infty} T'_d(d, \lambda) = 0$ , (4.54) nos proporciona  $d$  como función de  $\lambda$ ,  $d = d(\lambda)$  para  $\lambda \geq \lambda^*$  ( $\lambda^*$  un número positivo suficientemente grande). En particular, la unicidad de soluciones de (4.54) para  $\lambda \geq \lambda^*$  implica la de la familia homogeneizante así construida. Para obtener  $\{u_\lambda\}$  es suficiente con definir

$$u_\lambda(r) := \begin{cases} \bar{u}_0 & 0 \leq r \leq \lambda^{-1/p}d(\lambda) \\ v(\lambda^{1/p}r - d(\lambda), d(\lambda), \lambda) & \lambda^{-1/p}d(\lambda) < r \leq 1. \end{cases}$$

Con esto queda demostrado el Teorema 4.2.5. En cuanto a la estimación (4.52) nótese que la ecuación (4.54) nos lleva a

$$\lambda^{1/p} \text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial B) = T(d(\lambda), \lambda),$$

y por tanto (4.52) es consecuencia de que  $\lim_{\lambda, d \rightarrow +\infty} T(d, \lambda) = T_0$ , donde  $T_0$  viene dado por (4.50).

Para finalizar, vamos a probar (4.53). Llamemos  $r(\lambda) = \lambda^{-1/p}d(\lambda)$ . Si multiplicamos la ecuación en (4.43) por  $u'_\lambda(r)$  e integramos en el intervalo  $[r(\lambda), r]$  obtenemos la siguiente “identidad de energía”:

$$\frac{p-1}{p} |u'_\lambda(r)|^p + (N-1) \int_{r(\lambda)}^r \frac{|u'_\lambda(s)|^p}{s} ds = \lambda(F(\lambda, \bar{u}_0) - F(\lambda, u_\lambda(r))). \quad (4.55)$$

Esto implica en particular que el término  $|u'_\lambda(r)|^p/\lambda$  está acotado en  $0 \leq r \leq 1$  por  $C := 2\frac{p}{p-1} \sup_{0 \leq s \leq \bar{u}_0, \lambda \geq \lambda^*} |F(\lambda, s)|$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Por eso,

$$\frac{1}{\lambda} \int_{r(\lambda)}^1 \frac{|u'_\lambda(s)|^p}{s} ds \leq \frac{C}{r(\lambda)} (1 - r(\lambda)) \rightarrow 0$$

cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Por tanto, basta con hacer  $r = 1$  y  $\lambda \rightarrow +\infty$  en (4.55) para obtener

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{|u'_\lambda(1)|^p}{\lambda} = p' \bar{F}(\bar{u}_0),$$

que es la estimación deseada.  $\square$

**Observaciones 4.2.7** a) Si el orden  $k$  del cero  $\bar{u}_0$  de  $f$  en (H2) verifica la desigualdad contraria

$$k \geq p - 1,$$

todavía se puede demostrar la existencia de una familia homogeneizante  $\{u_\lambda\}$  de soluciones radiales positivas de (4.1) (de hecho, también se verá en el Capítulo 5 que dicha familia es única). Sin embargo, en este caso no es posible la aparición de núcleos muertos, aunque todavía sigue desarrollándose una capa límite cerca de  $\partial B$ , que también viene estimada por (4.53).

b) Nótese que, como  $u_\lambda(r) = v(\lambda^{1/p}r - d)$ , con  $v$  solución del problema (4.3), el Teorema 4.1.4 implica que

$$u'_\lambda(r) \sim C \left( r - \lambda^{-1/p}d \right)^{\frac{p}{p-k-1}} \quad \text{cuando } r \rightarrow \lambda^{-1/p}d +.$$

Es decir, la relación

$$p \leq 2(k + 1)$$

resulta ser una condición necesaria y suficiente para que  $u_\lambda \in C^2(\bar{B})$ .

### 4.2.3 El problema en anillos

Veremos a continuación que los Teoremas 4.2.5 y 4.2.6 son también válidos cuando el dominio  $D$  es un anillo  $A$ . La diferencia más significativa con el caso de la bola es que la condición  $\sup_A u_\lambda \rightarrow \bar{u}_0$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$  (junto con (H3)) resulta ser suficiente para la unicidad. No es éste el caso en la bola, como se verá en el §4.2.4 (Corolario 4.2.13).

**Teorema 4.2.8** *Supongamos que  $f$  satisface (H2) y (H3). Entonces, existe una única familia de soluciones radiales positivas  $\{u_\lambda\}$  de (4.1) en  $A = \{x : a < |x| < R\}$  que satisface*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sup_A u_\lambda = \bar{u}_0. \quad (4.56)$$

**Teorema 4.2.9** *Supongamos que  $f$  satisface (H2) y (H3). Si  $\{u_\lambda\}$  denota a la única familia de soluciones radiales positivas de (4.1) dada en el teorema previo y denotamos por  $\mathcal{O}_\lambda := \{x \in A : u_\lambda = \bar{u}_0\}$ , tenemos la siguientes estimaciones exactas:*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1/p} \text{dist}(\{|x| = a\}, \mathcal{O}_\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1/p} \text{dist}(\{|x| = R\}, \mathcal{O}_\lambda) = T_0, \quad (4.57)$$

donde,

$$T_0 = \left( \frac{p-1}{p} \right)^{1/p} \int_0^{\bar{u}_0} \frac{ds}{(\bar{F}(\bar{u}_0) - \bar{F}(s))^{1/p}}.$$

Además,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-1/p} \frac{du_\lambda}{dr}(a) = - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-1/p} \frac{du_\lambda}{dr}(R) = (p' \bar{F}(\bar{u}_0))^{1/p}, \quad (4.58)$$

siendo  $\bar{F}(\bar{u}_0) = \int_0^{\bar{u}_0} \bar{f}(s) ds$ .

*Demostración del Teorema 4.2.8.* Como en el caso en que  $D$  es una bola, empezaremos probando que todas las soluciones  $u_\lambda$  en la familia desarrollan un núcleo muerto  $\mathcal{O}_\lambda = \{x : u_\lambda(x) = \bar{u}_0\}$  cuando  $\lambda$  es suficientemente grande. De hecho, supongamos, como en la demostración del Lema 4.2.2, que podemos encontrar una sucesión  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  tal que  $\bar{u}_{0n} = u_{\lambda_n}(r_n) = \sup_A u_{\lambda_n}$ ,  $a < r_n < R$  cumple  $\bar{u}_{0n} < \bar{u}_0$  para todo  $n$ .

Definiendo  $v_n(r) = u_{\lambda_n}(\lambda_n^{-1/p}(r + \hat{r}_n))$ , donde  $\hat{r}_n = \lambda_n^{1/p} r_n$ ,  $0 \leq r \leq \rho_n$ ,  $\rho_n := \lambda_n^{1/p} R - \hat{r}_n$  resulta que  $v_n$  es la solución de

$$\begin{aligned} -((r + \hat{r}_n)^{N-1} \varphi_p(v'))' &= (r + \hat{r}_n)^{N-1} f(\lambda, v) \\ v(0) = \bar{u}_{0n} \quad v'(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Como  $\lambda_n^{1/p} a < \hat{r}_n < \lambda_n^{1/p} R$ , entonces  $\hat{r}_n \rightarrow +\infty$ . Razonando como en el §4.2.2, podemos prolongar  $v_n$  para  $n$  grande, al intervalo  $[0, T_0 + \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$  pequeño y  $T_0$  dado por (4.50). Así,  $v_n \rightarrow v_\infty$  en  $C^1[0, T_0 + \varepsilon]$ , siendo  $v_\infty$  la única solución no trivial de (4.49), definida en  $[0, T_0 + \varepsilon]$ .

Obsérvese que podemos elegir  $\varepsilon$  de forma que  $v_\infty > 0$  si  $r < T_0$ , mientras  $v_\infty < 0$  si  $T_0 < r \leq T_0 + \varepsilon$ . De aquí se concluye que  $\liminf \rho_n \geq T_0$  y simétricamente  $\limsup \rho_n \leq T_0$ . Por eso,  $\rho_n \rightarrow T_0$ , es decir,  $r_n = R - \lambda_n^{-1/p} \rho_n \rightarrow R$ .

Argumentando de manera simétrica, podemos prolongar  $v_n$ , para  $n$  convenientemente grande, al intervalo  $-T_0 - \varepsilon \leq r \leq 0$  cumpliéndose  $v_n = v_n(r) \rightarrow v_\infty(-r)$  en  $C^1[0, T_0 + \varepsilon]$ . Nótese que ahora  $v_n$  es positiva en  $\rho_n^- < r \leq 0$ , con  $\rho_n^- := -\hat{r}_n - \lambda_n^{1/p}$ , y  $v_n(\rho_n^-) = 0$ . Esto nos lleva a  $\lim \rho_n^- = -T_0$ , concluyéndose que  $r_n \rightarrow a$ , que es ciertamente imposible. Resumiendo, toda solución  $u_\lambda$  debe desarrollar un núcleo muerto

$$\mathcal{O}_\lambda = \{x : u_\lambda = \bar{u}_0\} = \{x : a < r_1(\lambda) \leq |x| \leq r_2(\lambda) < R\},$$

para  $\lambda$  suficientemente grande.

Llamando  $d_i(\lambda) = \lambda^{1/p} r_i(\lambda)$ ,  $i = 1, 2$ , se tiene de forma inmediata, en contraste con el Lema 4.2.3, que  $d_i \rightarrow +\infty$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . En particular  $u_\lambda < \bar{u}_0$  si  $r > \lambda^{-1/p} d_2(\lambda)$  (respectivamente  $r < \lambda^{-1/p} d_1(\lambda)$ ). Por tanto, reducimos el problema de construir la familia  $\{u_\lambda\}$  al de encontrar los valores de  $d_i$  como funciones de  $\lambda$ . De hecho, una vez que consigamos esto,  $u_\lambda$  vendrá definida como

$$u_\lambda(r) = \begin{cases} u^-(\lambda^{1/p} r, d_1(\lambda)-, \lambda) & \lambda^{1/p} a \leq \lambda^{1/p} r < d_1(\lambda) \\ \bar{u}_0 & d_1(\lambda) \leq r \leq d_2(\lambda) \\ u^-(\lambda^{1/p} r, d_2(\lambda)+, \lambda) & d_2(\lambda) \leq \lambda^{1/p} r < \lambda^{1/p} R, \end{cases} \quad (4.60)$$

donde hemos usado la terminología del Corolario 4.1.6.

Finalmente, la existencia de  $d_2$  se obtiene al resolver, para  $\lambda \rightarrow +\infty$ , la ecuación

$$d_2 + T(d_2, \lambda) = \lambda^{1/p} R,$$

donde  $T$  es el primer cero positivo de  $v(\cdot, d_2, \lambda)$ , y  $v(\cdot, d_2, \lambda)$  la única solución no trivial de (4.3) con  $d = d_2$ . En cuanto a  $d_1$ , nótese que (4.3) tiene una única solución no trivial  $v(\cdot, d, \lambda)$  definida en  $r < 0$  y que satisface  $v(\cdot, d, \lambda) < \bar{u}_0$  (cf. Corolario 4.1.6). Un análisis semejante al del §4.2.2 nos muestra que  $v(\cdot, d, \lambda)$  tiene, para  $\lambda$  y  $d$  grandes, un primer cero negativo  $\hat{T} = \hat{T}(d, \lambda)$ , tal que  $\hat{T}'_d(d, \lambda) \rightarrow 0$  cuando  $\lambda, d \rightarrow +\infty$ . Por eso,  $d_1$  viene caracterizado por ser la única solución de

$$d_1 + \hat{T}(d_1, \lambda) = \lambda^{1/p} a,$$

cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Esto concluye la demostración del Teorema 4.2.8.  $\square$

La demostración de las estimaciones (4.57) y (4.58) (Teorema 4.2.8) es exactamente igual que la de (4.52) y (4.53), y por eso se omite.

#### 4.2.4 Necesidad de la hipótesis de homogeneización en §4.2.2

En esta sección vamos a ver cómo la hipótesis de homogeneización (4.42) resulta imprescindible para los resultados de unicidad de soluciones radiales positivas del problema

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda f(u) && \text{en } B \\ u &= 0 && \text{en } \partial B, \end{aligned} \tag{4.61}$$

donde  $B$  es una bola en  $\mathbb{R}^N$  (Teorema 4.2.5). Construiremos una función  $f$  que cumple las hipótesis (H2) y (H3), junto con una familia de soluciones radiales positivas  $\{v_\lambda\}$  de (4.61) para las que se tiene

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \max_B v_\lambda = \bar{u}_0, \tag{4.62}$$

pero no hay homogeneización. Esto implica que, además de la solución  $u_\lambda$  obtenida en el Teorema 4.2.5 (véanse las Observaciones 4.2.14), existe otra solución positiva  $v_\lambda \neq u_\lambda$  con  $\sup v_\lambda = \bar{u}_0$  para  $\lambda$  grande.

El siguiente contraejemplo se basa en estudiar el espacio de fases radial asociado a (4.61) para lograr una conexión en tiempo finito entre  $\bar{u}_0$  y otro cero  $u_1 < \bar{u}_0$  de  $f$ . Pensamos que la construcción de tal conexión tiene interés en sí misma.

A tal efecto, construimos una familia de funciones  $f_\tau$  de la siguiente forma: fijamos los dos ceros  $0 < u_1 < \bar{u}_0$ , y definimos  $f$  de forma que  $u = \bar{u}_0$ ,  $u = u_1$  satisfagan las hipótesis (H2). Ahora consideraremos el parámetro  $u_1 \leq \tau \leq \bar{u}_0$ , que hará las veces de cero intermedio. Para  $\tau = u_1$ , tomamos  $f_\tau \geq 0$  en  $[0, \bar{u}_0]$ . A medida que  $\tau$  crece,  $f_\tau$  será positiva en  $[0, u_1)$ , negativa en  $(u_1, \tau)$  y positiva en  $(\tau, \bar{u}_0)$ , hasta llegar a un valor de  $\tau = \tau_1$  en el que  $F_{\tau_1}(u_1) = F_{\tau_1}(\bar{u}_0)$ . La no linealidad resultante la denotaremos por  $f_\tau$ .

En virtud del Teorema 4.1.4, el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} -((r+d)^{N-1}\varphi_p(u'))' &= (r+d)^{N-1}f_\tau(u) \\ u(0) &= \bar{u}_0, \quad u'(0) = 0 \end{aligned} \quad (4.63)$$

tiene para cada  $d_0 \geq 0$  y  $u_1 \leq \tau \leq \tau_1$ , una única solución no trivial, que será denotada por  $u_\tau$ , en un intervalo de la forma  $[0, \delta]$ , donde  $\delta$  no depende de  $\tau$ . Como hemos visto en el §4.2.2, tal solución se puede prolongar de forma única siempre que  $u' < 0$ . Veamos una propiedad importante de  $u_\tau$ .

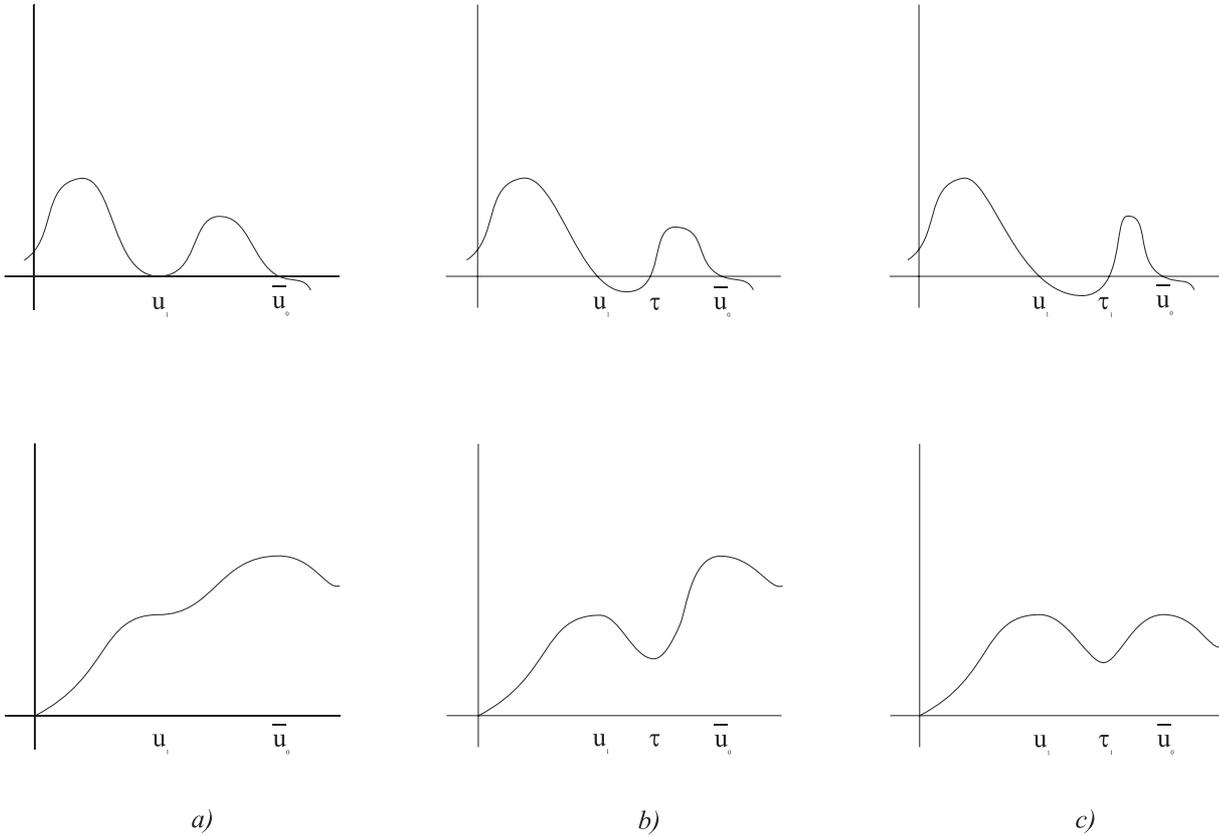


Fig. 4.3. Variación de  $f_\tau$  y  $F_\tau$  respecto al parámetro  $\tau$ : a)  $\tau = u_1$ , b)  $0 < \tau < \tau_1$  y c)  $\tau = \tau_1$ .

**Lema 4.2.10** Para  $\tau = u_1$ , existe  $T = T(u_1) > 0$  tal que  $u' < 0$  en  $[0, T]$ ,  $u > 0$  en  $[0, T)$  y  $u(T) = 0$ .

*Demostración.* Puesto que  $f_{u_1} > 0$  en  $(u_1, \bar{u}_0)$ , se tiene que  $u = u_{u_1}$  cumple

$$\varphi_p(u'(r)) = - \int_0^r \left( \frac{\rho + d_0}{r + d_0} \right)^{N-1} f_{u_1}(u(\rho)) d\rho < 0, \quad (4.64)$$

en  $[0, \delta]$ . Por tanto, podemos prolongar  $u$  a  $[0, +\infty)$ , teniéndose siempre (4.64) (ya que  $f_{u_1} \geq 0$ ). Supongamos que  $u(r) > 0$  para todo  $r$ . Esto implica que  $\lim_{r \rightarrow +\infty} u(r) = l \geq 0$ ,  $\lim_{r \rightarrow +\infty} u'(r) = 0$ . Necesariamente  $f(l) = 0$ , es decir,  $l = u_1$ . Veamos que esto no es posible.

En efecto, sea  $d > 0$ . Entonces  $v_d(r) = u(r + d)$  es solución del problema

$$\begin{aligned} -((r + d)^{N-1} \varphi_p(v'))' &= (r + d)^{N-1} f(v) \\ v(0) &= u(d), \quad v'(0) = u'(d). \end{aligned}$$

En virtud del Teorema 4.1.8,  $v_d \rightarrow v_\infty$  en  $C^1[0, \delta]$  cuando  $d \rightarrow +\infty$ , para un  $\delta > 0$ , donde  $v_\infty$  es la solución no trivial de

$$\begin{aligned} -\varphi_p(v') &= f(v) \\ v(0) &= u_1, \quad v'(0) = 0. \end{aligned}$$

Por eso, debe obtenerse que  $u(\delta + d) = v_d(\delta) \leq u_1 - \varepsilon$  si  $d$  es suficientemente grande, lo que contradice que  $\lim_{r \rightarrow +\infty} u(r) = u_1$ . Esto finaliza la demostración.  $\square$

**Teorema 4.2.11** *Sea  $f_\tau$ ,  $u_1 \leq \tau \leq \tau_1$  como antes. Existen  $\tau^*$ ,  $u_1 < \tau^* < \tau_1$  y  $T^* > 0$  tales que para la solución  $u = u_{\tau^*}$  de (4.63) se tiene  $u(T^*) = u_1$  y  $u'(T^*) = 0$ .*

*Demostración.* Consideremos el conjunto

$$\mathcal{A} := \{ \tau \in [u_1, \tau_1] : \exists T = T(\tau) > 0, u'_\tau < 0 \text{ en } [0, T], u > 0 \text{ en } [0, T], u(T) = 0 \}.$$

Por la continuidad de las soluciones respecto a  $\tau$  (Teorema 4.1.8) y el Lema 4.2.10, se tiene que  $[u_1, u_1 + \varepsilon] \subset \mathcal{A}$  para  $\varepsilon > 0$  convenientemente pequeño. Sea  $\tau^* = \sup \mathcal{A}$ .

Llamemos  $u = u_{\tau^*}$ . Supongamos que  $u' < 0$  en  $[0, +\infty)$ . Veamos que en tal caso debe existir un  $T > 0$  tal que  $u(T) = 0$ . En caso contrario, debería ser  $u > 0$  en  $[0, +\infty)$ . Esto implicaría, como en el Lema 4.2.10, que  $\lim_{r \rightarrow +\infty} u(r) = u_1$ ,  $\lim_{r \rightarrow +\infty} u'(r) = 0$ , que ya vimos que es imposible. Por ello,  $u(T) = 0$  para algún  $T$ , y como  $u' < 0$  en  $[0, T]$ , por dependencia continua (Teorema 4.1.8), se debe tener que  $u'_\tau < 0$  en  $[0, T + \varepsilon]$ , para  $\varepsilon > 0$  pequeño y  $u_\tau(T(\tau)) = 0$  para algún  $T(\tau) \leq T + \varepsilon$ , si  $\tau > \tau^*$ ,  $\tau \sim \tau^*$ . Esto contradice la elección de  $\tau^*$ .

La discusión anterior prueba la existencia de  $T^* > 0$  tal que  $u'(T^*) = 0$ . Claramente,  $u(T^*) < \tau^*$ . Supongamos que  $u_1 < u(T^*)$ . Entonces, puesto que  $f(u(T^*)) < 0$ ,  $u' > 0$  si  $r > T^*$ ,  $r \sim T^*$  (Teorema 4.1.1). Por dependencia continua,  $u'_\tau > 0$  si  $r > T^*$ ,  $r \sim T^*$  y  $\tau < \tau^*$ ,  $\tau \sim \tau^*$ . Esto contradice de nuevo la definición de  $\tau^*$ , y el teorema queda demostrado.  $\square$

Podemos construir ya una  $f$  adecuada, junto con una familia de soluciones radiales positivas de (4.61) cumpliendo (4.62), pero no (4.42).

**Teorema 4.2.12** *Existe  $f = f(u)$  cumpliendo las hipótesis (H2) y (H3), de forma que el problema (4.61) admite una familia de soluciones radiales positivas  $\{v_\lambda\}$  con*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \max_B v_\lambda = \bar{u}_0$$

*que no tiene la propiedad de ser homogeneizante.*

**Corolario 4.2.13** *Para la  $f$  dada en el teorema anterior, existen al menos dos soluciones radiales positivas de (4.61) para  $\lambda$  grande.*

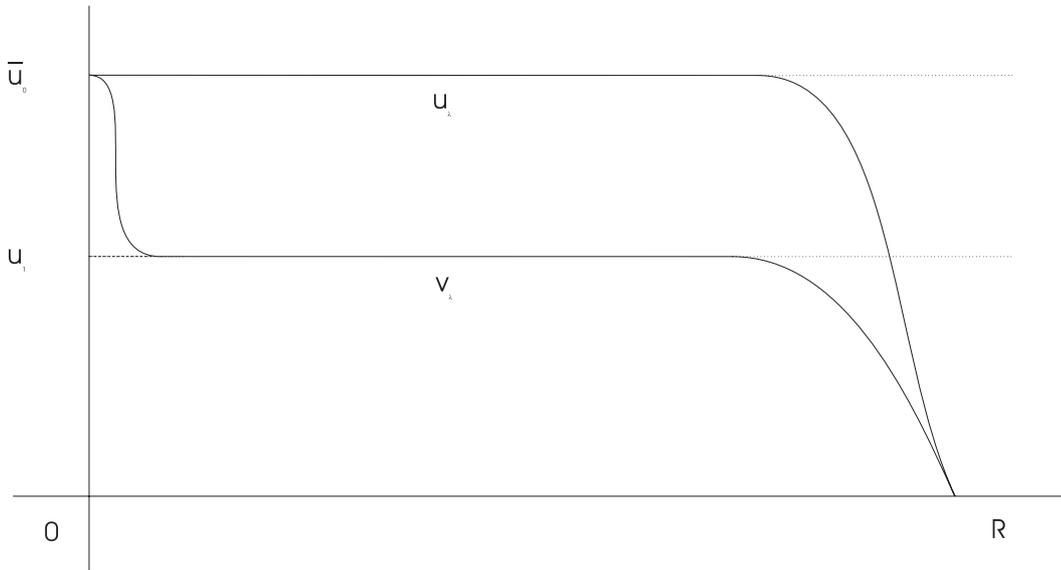


Fig. 4.4. Las soluciones  $u_\lambda$  y  $v_\lambda$  del problema (4.61) con  $f = f_{\tau^*}$ .

**Observación 4.2.14** Un análisis cuidadoso de la demostración del Teorema 4.2.12 revela que se puede construir  $f$  de forma que (4.61) tenga tantas soluciones radiales positivas como se quiera (en un número finito) para  $\lambda$  grande.

*Demostración del Teorema 4.2.12.* Fijemos  $d_0 > 0$  y  $0 < u_1 < \bar{u}_0$ . Sea  $f = f_{\tau^*}$  dada por el Teorema 4.2.11. Entonces el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} -(r^{N-1}\varphi_p(u'))' &= r^{N-1}f(u) \\ u(0) &= \bar{u}_0, \quad u'(0) = 0 \end{aligned}$$

tiene una solución positiva que cumple  $u \equiv \bar{u}_0$  en  $[0, d_0]$ ,  $u_1 < u < \bar{u}_0$  en  $(d_0, d_0 + T^*)$  y  $u(T^*) = u_1$ ,  $u'(T^*) = 0$ .

Redefinamos  $f$  en  $[0, u_1)$  (lo que no afecta la conexión obtenida en el Teorema 4.2.11) de forma que  $f$  cumpla las hipótesis (H2),  $f(0) > 0$  y  $F(u) < F(u_1)$  para  $0 \leq u < u_1$ . De esta forma, si consideramos  $d > d_0 + T^*$  suficientemente grande, según los resultados en §4.2.2, la única solución no trivial de

$$\begin{aligned} -(r^{N-1}\varphi_p(u'))' &= r^{N-1}f(u) \\ u(d) &= u_1, \quad u'(d) = 0 \end{aligned}$$

cumple que  $u > 0$  en  $[d, T(d))$  y  $u(T(d)) = 0$ , para un cierto  $T(d) > 0$ . Al igual que en §4.2, esto nos proporciona una familia de soluciones radiales positivas de (4.61), cuyo máximo es  $\bar{u}_0$ , pero que no es homogeneizante. Esto termina la demostración del teorema.  $\square$

### 4.3 Aplicaciones al problema logístico perturbado

En esta sección analizaremos la unicidad y el comportamiento asintótico cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$  de las soluciones positivas del problema logístico perturbado

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda m u^{p-1} - u^q + g(u) & \text{en } D \\ u &= 0 & \text{en } \partial D, \end{aligned} \quad (\text{LP})$$

donde  $m, p, q$  son constantes positivas,  $p > 2$ ,  $q > p - 1$ ,  $\lambda > 0$  es un parámetro positivo y  $D$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^N$  con simetría radial.

El término de perturbación  $g = g(u) \in C^1$  va a satisfacer la hipótesis

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{g(u)}{u^{p-1}} = 0, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{g'(u)}{u^{q-1}} = 0. \quad (\text{Hg})$$

Obsérvese que (Hg) implica, en particular,  $g(0) = 0$  y  $g = o(u^q)$  cuando  $u \rightarrow +\infty$ .

Recordemos que  $g(\lambda, u) = \lambda m u^{p-1} - u^q + g(u)$  tiene un único cero positivo  $\bar{u}_0(\lambda)$  para  $\lambda$  grande, que es además simple (cf. el §1.2.2).

Si cambiamos  $u$  en (LP) por  $u/\bar{u}_0(\lambda)$ , y volvemos a llamar  $u$  a la nueva incógnita, llegamos al problema equivalente

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda f(\lambda, u) & \text{en } D \\ u &= 0 & \text{en } \partial D, \end{aligned} \quad (4.65)$$

donde  $f(\lambda, u) = m u^{p-1} - \bar{u}_0(\lambda)^{q-p+1} u^q / \lambda + g(\bar{u}_0(\lambda)u) / (\lambda \bar{u}_0(\lambda)^{p-1})$ . Con este cambio, resulta que  $f(\lambda, u)$  tiene un cero fijo  $\bar{u}_0 = 1$ , que es simple para  $\lambda$  suficientemente grande. De la hipótesis (Hg) se concluye además que tanto  $g(\bar{u}_0(\lambda)u) / (\lambda \bar{u}_0(\lambda)^{p-1})$  como  $g'(\bar{u}_0(\lambda)u) / (\lambda \bar{u}_0(\lambda)^{p-2})$  convergen a cero uniformemente en  $0 \leq u \leq 1$ , cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$ . Por tanto,  $f(\lambda, u) \rightarrow \bar{f}(u)$  y  $\partial f / \partial u(\lambda, u) \rightarrow \bar{f}'(u)$  uniformemente en  $0 \leq u \leq 1$  cuando  $\lambda \rightarrow +\infty$  donde  $\bar{f}(u) = m(u^{p-1} - u^q)$ . Es decir,  $f(\lambda, u)$  satisface las hipótesis del §4.2, y son aplicables en este caso los Teoremas 4.2.5, 4.2.6, 4.2.8 y 4.2.9.

Sin embargo, podemos mejorar las conclusiones de dichos teoremas, en dos aspectos: el primero de ellos es que, en base al Teorema 2.2.2, todas las familias de soluciones positivas de (4.65) son homogeneizantes. El segundo se refiere a la simetría de soluciones. El hecho de que todas las familias sean homogeneizantes, junto con una aplicación cuidadosa del método de sub y supersoluciones, nos lleva a que no existen soluciones no radiales para  $\lambda$  suficientemente grande. Por tanto, la solución positiva de (LP) obtenida en el Teorema 2.2.2 es única para  $\lambda$  suficientemente grande en un dominio acotado radialmente simétrico.

Recogemos estas reflexiones en el siguiente resultado. El dominio  $D$  será una bola  $B = \{x : |x| < R\}$  o un anillo  $A = \{x : 0 < a < |x| < R\}$ ,  $a, R > 0$ .

**Teorema 4.3.1** *Supongamos que  $m > 0$ ,  $p, q$  satisfacen  $q > p - 1$ ,  $p > 2$  y que el término de perturbación  $g = g(u)$  verifica (Hg). Entonces existe  $\lambda_0 > 0$  tal que para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ , el problema (LP) tiene una única solución positiva  $u = u_\lambda(x)$  en  $D$  (por tanto, radialmente simétrica). Además, el conjunto  $\mathcal{O}_\lambda = \{x : u_\lambda(x) = \bar{u}_0(\lambda)\}$  es no vacío, y*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1/p} \text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial B) = m^{-1/p} B(p, q), \quad (4.66)$$

donde

$$B(p, q) = \left(\frac{q+1}{p-1}\right)^{1/p} \int_0^1 \frac{ds}{(q-p+1 - (q+1)s^p + ps^q)^{1/p}}. \quad (4.67)$$

*Demostración.* La existencia y unicidad de una familia de soluciones radiales positivas  $\{u_\lambda\}$  de (LP) para  $\lambda$  grande es consecuencia de los Teoremas 4.2.5 y 4.2.8. Veamos que, de hecho, para  $\lambda$  grande no existen otras soluciones que las radiales.

En efecto, supongamos que (4.65) admite otra familia  $\tilde{u}_\lambda = \tilde{u}_\lambda(x)$ ,  $\lambda \geq \lambda_2$  de soluciones positivas no radiales en  $D$ . El Corolario B.4 del Apéndice B sobre sub y supersoluciones radiales nos permitirá concluir que  $\tilde{u}_\lambda = u_\lambda$  para  $\lambda$  suficientemente grande. De hecho, puesto que  $\underline{u} = \tilde{u}_\lambda$  es subsolución y  $\tilde{u}_\lambda \leq \bar{u} := \bar{u}_0(\lambda)$ , que es supersolución radial de (4.65), entonces  $\tilde{u}_\lambda \leq u_\lambda \leq \bar{u}_0(\lambda)$  en  $D$ ,  $\lambda \geq \lambda_2$ . De la misma forma, la positividad de  $\tilde{u}_\lambda$  en  $D$  y el principio fuerte del máximo nos permiten encontrar  $\varepsilon > 0$  tal que  $0 < \varepsilon \phi(x) < \tilde{u}_\lambda(x)$  si  $x \in D$ , siendo  $\phi$  la autofunción principal de  $-\Delta_p$  en  $D$ , que es radial (cf. [10]). Puesto que  $\underline{u} := \varepsilon \phi$  es una subsolución radial de (4.65) si  $\lambda > \sigma_{1,p}/m$  (haciendo  $\varepsilon$  más pequeño si fuera necesario), obtenemos  $\varepsilon \phi \leq u_\lambda \leq \tilde{u}_\lambda$  en  $D$ , que nos conduce al resultado deseado  $\tilde{u}_\lambda = u_\lambda$  en  $D$  si  $\lambda > \max\{\lambda_2, \sigma_{1,p}/m\}$ . La estimación (4.66) se obtiene inmediatamente de (4.52) teniendo en cuenta que en este caso  $\bar{F}(u) = m/pu^p - 1/(q+1)u^{q+1}$ .  $\square$

## 4.4 Existencia de núcleos muertos

Tal y como estudiamos en el Capítulo 3, la única solución positiva  $u_\lambda$  del problema logístico

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda m u^{p-1} - u^q & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (\text{L})$$

con  $m > 0$ ,  $p > 2$ ,  $q > p - 1$ , y  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un dominio acotado regular, desarrolla un núcleo muerto  $\mathcal{O}_\lambda = \{x \in \Omega : u_\lambda(x) = (\lambda m)^{1/(q-p+1)}\}$  si  $\lambda$  excede un cierto valor crítico  $\lambda^* > \sigma_{1,p}/m$ . Como vimos allí, este hecho depende fuertemente de la unicidad de soluciones positivas de (L) en un dominio arbitrario. Esta unicidad también nos permitió estimar de forma exacta la distancia  $\text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega)$  de  $\mathcal{O}_\lambda$  a la frontera  $\partial\Omega$  (es decir, la estimación (3.16) del Capítulo 3).

Nuestro próximo objetivo es mostrar que todas las posibles soluciones positivas  $u = u(x)$  del problema perturbado (LP) también desarrollan un núcleo muerto  $\mathcal{O}_\lambda = \{x \in \Omega : u = \bar{u}_0(\lambda)\}$  para  $\lambda$  suficientemente grande, teniéndose además la misma estimación exacta (3.16) para la distancia  $\text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega)$ .

**Teorema 4.4.1** *Sea  $\Omega$  un dominio acotado de  $\mathbb{R}^N$  de clase  $C^{2,\mu}$ ,  $0 < \mu < 1$ , y  $\{u_\lambda\}_{\lambda \geq \lambda_0}$  una familia arbitraria de soluciones positivas de*

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda m u^{p-1} - u^q + g(u) && \text{en } \Omega \\ u &= 0 && \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{LP}$$

donde  $p > 2$ ,  $q > p - 1$ . Si el término de perturbación  $g$  satisface la hipótesis (Hg) del §4.2, y  $\bar{u}_0(\lambda)$  es el único cero positivo de  $g(\lambda, u) = \lambda m u^{p-1} - u^q + g(u)$  para  $\lambda$  grande, entonces existe  $\lambda^*$  tal que, para  $\lambda \geq \lambda^*$  los conjuntos  $\mathcal{O}_\lambda = \{x : u_\lambda(x) = \bar{u}_0(\lambda)\}$  son no vacíos, y verifican la estimación

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1/p} \text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega) = m^{-1/p} B(p, q),$$

donde  $B(p, q)$  es la expresión dada por (4.67).

*Demostración.* La demostración es una ligera modificación de la del Teorema 3.2.1. Sea  $u_\lambda$  una solución positiva arbitraria de (LP) para  $\lambda$  grande. Fijemos  $x_0 \in \partial\Omega$ , y tomemos una bola  $B \subset \Omega$  tangente a  $\partial\Omega$  en  $x_0$ . Está claro que  $u_\lambda$  es una supersolución de

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda m u^{p-1} - u^q + g(u) && \text{en } B \\ u &= 0 && \text{en } \partial B, \end{aligned} \tag{4.68}$$

porque  $u_\lambda \geq 0$  en  $\partial B$ . En base al Teorema 4.4.1, designemos por  $u_{\lambda,B}$  a la única solución positiva de (4.68). Del método de sub y supersoluciones se concluye que  $u_{\lambda,B} \leq u_\lambda$  en  $B$ , y puesto que  $u_\lambda \leq \bar{u}_0(\lambda)$ , esto implica que  $\mathcal{O}_\lambda$  es no vacío para  $\lambda$  grande. Además, llamando  $\mathcal{O}_{\lambda,B} = \{x \in B : u_{\lambda,B}(x) = \bar{u}_0(\lambda)\}$ , tenemos  $\mathcal{O}_{\lambda,B} \subset \mathcal{O}_\lambda$  y de aquí  $\text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, x_0) \leq \text{dist}(\mathcal{O}_{\lambda,B}, x_0)$ . Por tanto,  $\lambda^{1/p} \text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega) \leq \lambda^{1/p} \text{dist}(\mathcal{O}_{\lambda,B}, \partial B)$ , luego

$$\limsup_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1/p} \text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega) \leq m^{-1/p} B(p, q),$$

siendo  $B(p, q)$  la expresión en (4.67).

En cuanto al límite complementario, elijamos  $x_0 = x_0(\lambda) \in \partial\Omega$  tal que  $\text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega) = \text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, x_0)$ . Entonces, podemos encontrar dos números positivos  $a, R > 0$  y un punto  $z \in \mathbb{R}^N$  tales que el anillo  $A = \{x : a < |x - z| < R\}$  contenga a  $\Omega$  y sea tangente a  $\partial\Omega$  en  $x_0$ . En base al Teorema 4.4.1, sea  $u_{\lambda,A}$  la única solución positiva del problema

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda m u^{p-1} - u^q + g(u) && \text{en } A \\ u &= 0 && \text{en } \partial A, \end{aligned} \tag{4.69}$$

para  $\lambda$  suficientemente grande. Definamos  $\underline{u} = \underline{u}_\lambda(x) \in W_0^{1,p}(A)$  como  $\underline{u}_\lambda(x) = u_\lambda(x)$  en  $\Omega$  y  $\underline{u}_\lambda = 0$  si  $x \in A \setminus \Omega$ . En virtud del Teorema B.8 del Apéndice B,  $\underline{u}_\lambda$  es subsolución de (4.69). Por tanto,  $u_\lambda \leq u_{\lambda,A}$  en  $\Omega$ , y  $\mathcal{O}_\lambda \subset \mathcal{O}_{\lambda,A} := \{x : u_{\lambda,A}(x) = \bar{u}_0(\lambda)\}$ . Por eso,  $\text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, x_0) \geq \text{dist}(\mathcal{O}_{\lambda,A}, x_0)$  de donde

$$\liminf_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{1/p} \text{dist}(\mathcal{O}_\lambda, \partial\Omega) \geq m^{-1/p} B(p, q).$$

Con esto queda demostrada (4.66). □

**Capítulo 5**  
**Unicidad en el caso no singular**

## Capítulo 5

# Unicidad en el caso no singular

En este último capítulo, trataremos con soluciones radiales positivas de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda f(u) & \text{en } B \\ u &= 0 & \text{en } \partial B, \end{aligned} \tag{5.1}$$

(donde  $B \subset \mathbb{R}^N$  es la bola unidad) en el caso no singular, es decir, sin la presencia de núcleos muertos. Supondremos que  $f$  verifica las hipótesis

$$(H4)_1 \quad f \in C^1(\mathbb{R})$$

$$(H4)_2 \quad f(\bar{u}_0) = 0, \text{ y } f'(u) = (-\gamma + R(u))(\bar{u}_0 - u)^{k-1}, \text{ siendo } R \text{ una función continua que verifica } R(\bar{u}_0) = 0 \text{ y } \gamma > 0.$$

$$(H4)_3 \quad k \geq p - 1.$$

$$(H4)_4 \quad F(u) < F(\bar{u}_0) \text{ para todo } 0 \leq u < \bar{u}_0, \text{ donde } F(u) = \int_0^u f(s) ds.$$

La situación para este tipo de problemas es, como ya hemos observado en la introducción, análoga a la del caso semilineal, y difiere considerablemente de la tratada en el capítulo anterior. Precisamente, en virtud de  $(H4)_3$ , éste es el caso complementario.

Como hipótesis técnica, consideraremos a lo largo del capítulo que  $p \geq 2$ .

### 5.1 Existencia de soluciones

Veamos que, bajo las hipótesis anteriores, podemos garantizar la existencia de una familia homogeneizante de soluciones. La primera observación importante es que, según la hipótesis  $(H4)_3$  y el Teorema 3.1.1, las soluciones positivas  $u$  de (5.1) tales que  $u \leq \bar{u}_0$  cumplen  $0 < u < \bar{u}_0$ .

**Teorema 5.1.1** *Supongamos que  $f$  cumple las hipótesis  $(H_4)$ . Entonces existen  $\eta > 0$ ,  $\lambda_0 > 0$  tales que para todo  $\lambda \geq \lambda_0$ , el problema (5.1) tiene al menos una solución positiva  $u_\lambda$  que verifica  $\bar{u}_0 - \eta \leq \max u_\lambda < \bar{u}_0$ . Además, la familia  $\{u_\lambda\}$  es homogeneizante, es decir*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u_\lambda = \bar{u}_0$$

*uniformemente sobre compactos de  $B$ .*

*Demostración.* Vamos a probar que existe  $\eta > 0$  tal que para la solución del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} - (r^{N-1} \varphi_p(u'))' &= r^{N-1} f(u) \\ u(0) &= u_0, \quad u'(0) = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

(que es única en virtud del Teorema 4.1.1) con  $\bar{u}_0 - \eta \leq u_0 < \bar{u}_0$ , existe  $T > 0$  con  $u(T) = 0$ . Denotaremos a esta solución por  $u(\cdot, u_0)$ .

En primer lugar, nótese que las soluciones de (5.2) y sus derivadas están uniformemente acotadas en  $r \geq 0$ . De hecho (véase (4.55)),

$$|u'(r)|^p + p'(N-1) \int_0^r \frac{|u'(s)|^p}{s} ds = p'(F(u_0) - F(u(r))),$$

con lo que se obtiene que  $|u'(r)|^p \leq p'(F(u_0) - F(u(r)))$  si  $r \geq 0$ . Elijamos  $\varepsilon > 0$  y  $R > 0$  tales que

$$(N-1) \frac{|u'(r)|^{p-1}}{r} \leq \varepsilon, \quad r \geq R.$$

Por tanto, para  $r \geq R$  se tendrá  $-\varphi_p(u')' = f(u) + (N-1)\varphi_p(u')/r \geq f(u) - \varepsilon$  y, siempre que  $u' \leq 0$ , llegamos a  $-\varphi_p(u')'u' \leq (f(u) - \varepsilon)u'$ , es decir,

$$(|u'(r)|^p + p'F_\varepsilon(u(r)))' \geq 0, \quad r \geq R, \quad (5.3)$$

donde  $F_\varepsilon(u) = F(u) - \varepsilon u$ , y  $F(u) = \int_0^u f(s)ds$ . Obsérvese que  $f - \varepsilon$  tiene un cero  $\bar{u}_0(\varepsilon) < \bar{u}_0$  de forma que  $\bar{u}_0(\varepsilon) \rightarrow \bar{u}_0$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , teniéndose además la condición de energía  $F_\varepsilon(u) < F_\varepsilon(\bar{u})$ ,  $0 \leq u < \bar{u}$ , para  $\bar{u} \in [\bar{u}_0(\varepsilon) - \delta(\varepsilon), \bar{u}_0(\varepsilon)]$ , y un cierto  $\delta(\varepsilon) > 0$ .

Además,  $f$  es positiva y decreciente en  $[\bar{u}_0 - \delta, \bar{u}_0]$ , para un  $\delta > 0$  adecuado. Tomemos  $\varepsilon > 0$  de forma que  $\bar{u}_0(\varepsilon) - \delta(\varepsilon) > \bar{u}_0 - \delta$ . Puesto que  $f > 0$  en  $[\bar{u}_0(\varepsilon) - \delta(\varepsilon), \bar{u}_0]$ , existe  $\eta(\varepsilon) > 0$  tal que si  $\bar{u}_0 - \eta(\varepsilon) \leq u_0 < \bar{u}_0$  entonces  $\bar{u}_0(\varepsilon) \leq u(R, u_0) < \bar{u}_0$ . De la misma forma, también es posible elegir  $R_1 > 0$ ,  $\eta'(\varepsilon) > 0$  tales que  $\bar{u}_0 - \eta'(\varepsilon) \leq u_0 < \bar{u}_0$  implique  $\bar{u}_0(\varepsilon) - \delta(\varepsilon) \leq u(R_1, u_0) \leq \bar{u}_0(\varepsilon)$ .

En resumen, hemos demostrado que si  $\bar{u}_0 - \eta'(\varepsilon) \leq u_0 < \bar{u}_0$ , entonces  $\bar{u}_0(\varepsilon) - \delta(\varepsilon) \leq u(R_1, u_0) \leq \bar{u}_0(\varepsilon)$ . Por tanto, si  $r \geq R_1$ , se tendrá, en virtud de (5.3), que  $|u'(r)|^p \geq |u'(R_1)|^p + p'(F_\varepsilon(u(R_1)) - F_\varepsilon(u(r)))$ , para  $r \geq R_1$ . En particular, esto implica que siempre  $u'(r) < 0$ , y entonces

$$u'(r) \leq u'(R_1), \quad r \geq R_1.$$

Integrando esta desigualdad tenemos que

$$u(r) \leq u(R_1) + u'(R_1)(r - R_1), \quad r \geq R_1,$$

por lo que  $u$  debe anularse para algún  $T = T(u_0)$ , tal que  $T(u_0) \leq R_1 - u(R_1)/u'(R_1)$ . De esta forma, tenemos una aplicación  $T : [\bar{u}_0 - \eta, \bar{u}_0) \rightarrow R^+$  que es continua (Teorema 4.1.5). Esto proporciona de manera estándar una familia de soluciones  $\{u_\lambda\}_{\lambda \geq \bar{\lambda}}$  (cf. Capítulo 1).

Para completar la demostración del Teorema es suficiente ver que  $T(u_0) \rightarrow +\infty$  cuando  $u_0 \rightarrow \bar{u}_0 -$ . Supongamos que esto no es cierto, y que existe una sucesión  $u_{0n} \rightarrow \bar{u}_0$  tal que  $T(u_{0n})$  está acotada. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $T(u_{0n}) \rightarrow T_0 > 0$ , y que  $u_n := u(\cdot, u_{0n}) \rightarrow \bar{u}$  uniformemente en  $[0, T_0]$  (cf. Teorema 4.1.9), donde  $\bar{u}$  es solución del problema

$$\begin{aligned} - (r^{N-1} \varphi_p(u'))' &= r^{N-1} f(u) \\ u(0) &= \bar{u}_0, \quad u'(0) = 0. \end{aligned}$$

Del Teorema 4.1.3 se deduce que  $\bar{u} \equiv \bar{u}_0$ . Por otro lado, debería tenerse que  $\bar{u}(T_0) = 0$ , que es imposible. Esto demuestra el teorema.  $\square$

**Observación 5.1.2** De un análisis similar al llevado a cabo en la demostración del Teorema 5.1.1 se concluye que todas las soluciones radiales de (5.1) en el intervalo  $[0, \bar{u}_0]$  cumplen  $u'(r) < 0$  si  $r > 0$ .

## 5.2 Resultados preliminares

En esta sección vamos a ver algunos resultados auxiliares, que tienen que ver con la linealización del laplaciano- $p$  con simetría radial, y que serán fundamentales a la hora de demostrar la unicidad de familias homogeneizantes.

Es bien sabido que, para  $m > 0$  y  $f \in C(\bar{B})$ , existe una única solución débil de la ecuación

$$\begin{aligned} -\Delta_p u + mu &= f & \text{en } B \\ u &= 0 & \text{en } \partial B \end{aligned}$$

(cf. [58]), tal que  $u \in C^{1,\beta}(\bar{B})$  para algún  $0 < \beta < 1$  (Teorema A.3 del Apéndice A). De hecho, se tiene la estimación

$$|u|_{1,\beta} \leq C = C(N, p, |f|_\infty) \quad (5.4)$$

(cf. Teoremas A.1 y A.3). Si además  $f$  es radialmente simétrica, también lo es  $u$ , así que, identificando  $f$  y  $u$  como funciones de  $r = |x|$ , se verifica

$$\begin{aligned} - (r^{N-1} \varphi_p(u'))' + mr^{N-1}u &= r^{N-1}f(r) \quad 0 < r < 1 \\ u'(0) &= 0, \quad u(1) = 0, \end{aligned}$$

donde  $' = d/dr$  (véase el Capítulo 4). De esta forma, podemos definir un operador  $K_m : C[0, 1] \rightarrow C^1[0, 1]$  dado por  $u = K_m(f)$ , que es compacto en virtud de la estimación (5.4). Es fácil comprobar que en el caso  $m = 0$ ,  $K := K_0$  viene dado por la expresión

$$K(f)(r) = \int_r^1 \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{\rho}{s} \right)^{N-1} f(\rho) d\rho \right) ds.$$

Por comodidad notacional, seguiremos llamando  $K_m$  a la restricción de estos operadores a  $C^1[0, 1]$ .

Volviendo al problema (5.1), si tomamos  $m > 0$  tal que  $f'(u) + m > 0$  en  $[0, \bar{u}_0]$ , tenemos que las soluciones radiales de (5.1) se corresponden con los puntos fijos del problema

$$u = K_{\lambda m}(\lambda f(u) + \lambda mu) .$$

Denotemos  $T_\lambda(u) = K_{\lambda m}(\lambda f(u) + \lambda mu)$ .  $T_\lambda$  es un operador compacto en  $C^1[0, 1]$  y creciente en el intervalo  $[0, \bar{u}_0]$ . Nuestro primer objetivo es demostrar que  $T_\lambda$  es diferenciable en un entorno de sus puntos fijos. Para ello, resulta conveniente examinar primero la diferenciabilidad del operador  $K$ . El siguiente resultado es un caso particular del Teorema 2.1 de [43].

**Teorema 5.2.1** *Supongamos que  $f \in C^1[0, 1]$  es tal que  $f(0) \neq 0$  y  $u'(r) \neq 0$  para  $0 < r \leq 1$ , donde  $u = Kf$ . Entonces  $K$ , como operador definido en  $C^1[0, 1]$ , es diferenciable-Fréchet en  $f$ , y se tiene*

$$DK(f)g = \frac{1}{p-1} \int_r^1 \frac{1}{|u'(s)|^{p-2}} \int_0^s \left(\frac{\rho}{s}\right)^{N-1} g(\rho) d\rho ds \quad (5.5)$$

para toda  $g \in C^1[0, 1]$ . En particular,  $w = DK(f)g$  es solución de la ecuación

$$\begin{aligned} - (r^{N-1}|u'|^{p-2}w')' &= \frac{r^{N-1}}{p-1}g(r) \quad 0 < r < 1 \\ w'(0) &= 0, \quad w(1) = 0. \end{aligned}$$

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $f(0) > 0$ . En base al Teorema 4.1.1 se tiene que

$$u'(r) \sim -Cr^{\frac{1}{p-1}}, \quad r \rightarrow 0+$$

para una cierta constante  $C > 0$ . Existe por tanto una constante  $c > 0$  tal que  $|u'(s)|/s^{\frac{1}{p-1}} \geq c$  para  $0 < s \leq 1$ , de donde la expresión (5.5) está bien definida. Llamémosla  $R(g)$ . Entonces se tendrá que

$$\begin{aligned} |(K(f+g) - K(f) - R(g))'(s)| &\leq \left| \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left(\frac{\rho}{s}\right)^{N-1} (f(\rho) + g(\rho)) d\rho \right) - \right. \\ &\quad \left. \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left(\frac{\rho}{s}\right)^{N-1} f(\rho) d\rho \right) - \frac{1}{p-1} \frac{1}{|u'(s)|^{p-2}} \int_0^s \left(\frac{\rho}{s}\right)^{N-1} g(\rho) d\rho \right| \leq \\ &\frac{1}{p-1} \left| |\xi(s)|^{p'-2} - \frac{1}{|u'(s)|^{p-2}} \right| \int_0^s \left(\frac{\rho}{s}\right)^{N-1} |g(\rho)| d\rho \leq \frac{1}{p-1} \left| s|\xi(s)|^{p'-2} - \frac{s}{|u'(s)|^{p-2}} \right| |g|_1, \end{aligned}$$

donde  $\xi(s)$  es una función intermedia comprendida entre las integrales  $\int_0^s \left(\frac{\rho}{s}\right)^{N-1} (f(\rho) + g(\rho)) d\rho$  y  $\int_0^s \left(\frac{\rho}{s}\right)^{N-1} f(\rho) d\rho$ . Por eso, cuando  $|g|_1 \rightarrow 0$  se tiene que

$$\xi(s) \rightarrow \int_0^s \left(\frac{\rho}{s}\right)^{N-1} f(\rho) d\rho = -|u'(s)|^{p-1}$$

uniformemente en  $[0, 1]$ . Veamos que, de hecho,  $\xi(s)/s \rightarrow -|u'(s)|^{p-1}/s$  uniformemente en  $[0, 1]$ . En efecto,

$$\left| \frac{1}{s} \int_0^s \left( \frac{\rho}{s} \right)^{N-1} (f(\rho) + g(\rho)) d\rho - \frac{1}{s} \int_0^s \left( \frac{\rho}{s} \right)^{N-1} f(\rho) d\rho \right| \leq |g|_1, \quad (5.6)$$

y como  $\xi(s)/s$  es un valor intermedio, se tiene lo requerido. Esto implica

$$|(K(f+g) - K(f) - R(g))'(s)| \leq \frac{1}{p-1} s^{\frac{1}{p-1}} \left| \left( \frac{|\xi(s)|}{s} \right)^{p'-2} - \left( \frac{|u'(s)|^{p-1}}{s} \right)^{p'-2} \right| |g|_1 = o(|g|_1),$$

cuando  $|g|_1 \rightarrow 0$ . De la misma forma  $|K(f+g) - K(f) - R(g)|_\infty = o(|g|_1)$  cuando  $|g|_1 \rightarrow 0$ . Con esto concluye la demostración del Teorema 5.2.1.  $\square$

**Corolario 5.2.2** *Supongamos que  $f \in C^1[0, 1]$  es tal que  $f(0) \neq 0$  y  $u'(r) \neq 0$  para  $r > 0$ , donde  $u = Kf$ . Entonces  $K$  es  $C^1$  en un entorno de  $f$  en  $C^1[0, 1]$ .*

*Demostración.* Veamos en primer lugar que  $K$  es diferenciable en un entorno de  $f$ . Nótese que, en virtud de (5.6), si  $|g|_1$  es pequeña, se tiene que

$$\frac{|v'(s)|^{p-1}}{s} \geq c > 0$$

en  $(0, 1]$ , donde  $v = K(f+g)$ . A la vista de la demostración del Teorema 5.2.1, esta condición resulta ser suficiente para la diferenciabilidad de  $K$  en  $f+g$ . Además, si  $h \in C^1[0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} |(DK(f+g)h - DK(f)h)'(s)| &\leq \frac{1}{p-1} \left| \frac{1}{|u'(s)|^{p-2}} - \frac{1}{|v'(s)|^{p-2}} \right| \int_0^s \left( \frac{\rho}{s} \right)^{N-1} |h(\rho)| d\rho \leq \\ &\frac{1}{p-1} s \left| \frac{1}{|u'(s)|^{p-2}} - \frac{1}{|v'(s)|^{p-2}} \right| |h|_1 \leq \frac{1}{p-1} \left| \left( \frac{s^{\frac{1}{p-1}}}{|u'(s)|} \right)^{p-2} - \left( \frac{s^{\frac{1}{p-1}}}{|v'(s)|} \right)^{p-2} \right| |h|_1 \end{aligned}$$

de donde se obtiene, en virtud de (5.6), que

$$\sup_h \frac{|DK(f+g)h - DK(f)h|_1}{|h|_1} \rightarrow 0$$

cuando  $g \rightarrow 0$  en  $C^1[0, 1]$ . Esto demuestra el Corolario 5.2.2.  $\square$

Podemos ahora obtener, como consecuencia del teorema de las funciones implícitas, la diferenciabilidad del operador  $T_\lambda$  en sus puntos fijos del intervalo  $[0, \bar{u}_0]$ .

**Corolario 5.2.3** *Sea  $u$  un punto fijo del operador  $T_\lambda$  en el intervalo  $[0, \bar{u}_0]$ , con  $f(u(0)) \neq 0$ . Entonces  $T_\lambda$  es  $C^1$  en un entorno de  $u$  y se tiene que para toda  $g \in C^1[0, 1]$ ,  $w = DT_\lambda(u)g$  es solución del problema*

$$\begin{aligned} -(r^{N-1}|u'|^{p-2}w')' + \frac{r^{N-1}}{p-1}\lambda mw &= \frac{r^{N-1}}{p-1}(\lambda f'(u) + \lambda m)g \\ w'(0) = 0, \quad w(1) &= 0. \end{aligned}$$

*Demostración.* Veamos que  $K_{\lambda m}$  es diferenciable en  $\lambda f(u) + \lambda mu$ . El resto se deducirá de la regla de la cadena. Llamemos  $\hat{f} = \lambda f(u) + \lambda mu$ . Resolver la ecuación  $-\Delta_p v + \lambda mv = f$  es equivalente a resolver

$$\mathcal{F}(v, f) := v - K(f - \lambda mv) = 0.$$

Veamos que podemos aplicar el teorema de las funciones implícitas. En efecto,  $\mathcal{F}(u, \hat{f}) = 0$ , y se tiene, en virtud del Corolario 5.2.2, que  $K$  es  $C^1$  en un entorno de  $\hat{f} - \lambda mu = \lambda f(u)$ , (pues  $f(u(0)) \neq 0$  y  $u'(r) < 0$  si  $r > 0$ , Observación 5.1.2). Por eso,  $\mathcal{F}$  es  $C^1$  respecto a sus dos variables. Supongamos que existe  $g$  tal que  $D_v \mathcal{F}(u, \hat{f})g = g + DK(\hat{f} - \lambda mu)\lambda mg = 0$ . Entonces  $g$  es solución de

$$\begin{aligned} -(r^{N-1}|u'|^{p-2}g')' + \frac{r^{N-1}}{p-1}\lambda mg &= 0 \\ g'(0) = 0, \quad g(1) &= 0, \end{aligned}$$

y como consecuencia  $g \equiv 0$ . Por tanto,  $D_v \mathcal{F}(u, \hat{f})$  es un isomorfismo. En efecto,  $D_v \mathcal{F}(u, \hat{f})$  es una perturbación compacta de la identidad, y por ello un operador de Fredholm de índice cero.

El teorema de las funciones implícitas nos garantiza la existencia de una única función  $R$  que es  $C^1$ , tal que  $\mathcal{F}(v, f) = 0$  implica  $v = R(f)$  en un entorno de  $(u, \hat{f})$ . Por unicidad,  $R(f) = K_{\lambda m}(f)$ , y entonces  $K_{\lambda m}$  es  $C^1$ . Además,

$$D_v \mathcal{F}(u, \hat{f})DK_{\lambda m}(\hat{f}) + D_f \mathcal{F}(u, \hat{f}) = 0,$$

de donde se deduce que  $w = DK_{\lambda m}(\hat{f})g$  es solución de la ecuación

$$\begin{aligned} -(r^{N-1}|u'|^{p-2}w')' + \frac{r^{N-1}}{p-1}\lambda mw &= \frac{r^{N-1}}{p-1}g \\ w'(0) = 0, \quad w(1) &= 0. \end{aligned}$$

La afirmación del enunciado es consecuencia inmediata de la regla de la cadena.  $\square$

Para finalizar con los preliminares, necesitamos analizar una cuestión relativa a un problema de autovalores para  $DT_\lambda$ . Recordemos que el radio espectral de un operador lineal acotado  $L$  viene definido como

$$\text{spr}(L) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|L^n\|^{1/n}$$

(cf. [85]). Además, se tiene que  $|\mu| \leq \text{spr}(L)$  para todos los valores espectrales de  $L$ , en particular los posibles autovalores  $\mu$ . Tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 5.2.4** *Sea  $u$  un punto fijo de  $T_\lambda$ . Si  $\sigma = \text{spr}(DT_\lambda(u)) > 0$ , entonces  $\sigma$  es un autovalor de  $DT_\lambda(u)$  que admite una autofunción  $v$  tal que  $v(r) > 0$  si  $0 \leq r < 1$ .*

*Demostración.* Veamos que el operador  $DT_\lambda(u)$  es positivo. Es decir, que  $g \geq 0$  implica que  $DT_\lambda(u)g \geq 0$  (esto es en realidad una sencilla consecuencia del principio del máximo débil). Si llamamos  $w = DT_\lambda(u)g$ , se tiene

$$\begin{aligned} -(r^{N-1}|u'|^{p-2}w')' + \frac{r^{N-1}}{p-1}\lambda mw &= \frac{r^{N-1}}{p-1}(\lambda f'(u) + \lambda m)g \\ w'(0) = 0, \quad w(1) &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación por  $w^- = \max\{0, -w\}$ , integrando en  $(0, 1)$  e integrando por partes el primer miembro, obtenemos

$$\int_{w \leq 0} \left( r^{N-1}|u'|^{p-2}(w')^2 + \frac{r^{N-1}}{p-1}\lambda mw^2 \right) dr = \int_{w \leq 0} \frac{r^{N-1}}{p-1}(\lambda f'(u) + \lambda m)wg \, dr \leq 0,$$

de donde  $w^- \equiv 0$ . Por tanto,  $w \geq 0$ .

Puesto que  $DT_\lambda(u)$  es compacto, el teorema de Krein-Rutman ([2, Teorema 3.1]) nos garantiza la existencia de una autofunción  $v$  asociada a  $\sigma$  que verifica  $v \geq 0$ . Veamos que  $v > 0$ .

Supongamos que  $v(r_0) = 0$  en algún  $r_0 < 1$ . Puesto que  $v \geq 0$ , debe tenerse que  $v'(r_0) = 0$ . Además,  $v$  verifica la ecuación

$$-v'(r) = \frac{1}{p-1} \frac{\lambda}{\sigma} \frac{1}{|u'(r)|^{p-2}} \int_{r_0}^r \left( \frac{\rho}{r} \right)^{N-1} (f'(u) + m(1-\sigma))v(\rho) d\rho.$$

Por eso, denotando  $|v|_{\infty, \delta} = \sup_{|r-r_0| \leq \delta}$ , llegamos a que para una cierta constante  $C > 0$  se tiene,

$$|v'(r)| \leq C|v|_{\infty, \delta}.$$

Integrando obtenemos que  $|v|_{\infty, \delta} \leq C\delta|v|_{\infty, \delta}$ , de donde  $v \equiv 0$  en  $|r-r_0| \leq \delta$  si  $\delta$  es suficientemente pequeño. Un argumento de continuación nos lleva a que  $v \equiv 0$  en  $[0, 1]$ , que no puede ser. Por tanto,  $v(r) > 0$  si  $r \in [0, 1)$ .  $\square$

**Observación 5.2.5** Si el operador  $DT_\lambda(u)$  fuese fuertemente positivo, tendríamos automáticamente que  $v > 0$  y que  $\sigma$  es el único autovalor con una autofunción positiva. Para operadores uniformemente elípticos, esto es consecuencia del principio fuerte del máximo. En nuestro caso, sin embargo, el operador degenera si  $r = 0$ , y el principio fuerte del máximo sólo nos permitiría concluir que  $v(r) > 0$  si  $r > 0$ .

### 5.3 Unicidad de soluciones

Vamos a construir en primer lugar una subsolución de (5.1) que estimará por defecto a todas las posibles soluciones positivas en el intervalo  $[0, \bar{u}_0]$  para  $\lambda$  grande. Para ello, prolongaremos  $f$  de forma conveniente fuera de  $[0, \bar{u}_0]$ . Específicamente, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $f$  está acotada,  $f < 0$  en  $[\bar{u}_0, +\infty)$ ,  $f = 0$  en  $(-\infty, -1]$  y  $F(u) < F(\bar{u}_0)$  si  $-1 \leq u \leq 0$ .

Tomemos  $\varepsilon > 0$  de forma que  $f$  sea decreciente en  $[\bar{u}_0 - 2\varepsilon, \bar{u}_0]$ . Disminuyendo  $\varepsilon$  si fuera necesario, podemos encontrar un valor  $\lambda_1$  de  $\lambda$  de forma que la solución  $u_{\lambda_1}$  de (5.1) dada por el Teorema 5.1.1 cumpla  $u_{\lambda_1}(0) = \bar{u}_0 - \varepsilon$ . Por la condición impuesta a la energía, podemos prolongar  $u_{\lambda_1}$  hasta que  $u_{\lambda_1}(r_0) = -1$  para algún  $r_0 > 1$ , y  $u'_{\lambda_1}(r) < 0$  si  $r \in (0, r_0]$ . Como además  $f = 0$  en  $(-\infty, -1]$ ,  $u_{\lambda_1}$  verifica

$$\begin{aligned} -(r^{N-1}\varphi_p(u'))' &= 0, & r > r_0 \\ u(r_0) &= -1, & u'_{\lambda_1}(r_0) < 0, \end{aligned}$$

de donde se concluye integrando que

$$\begin{aligned} u(r) &= -1 + u'_{\lambda_1}(r_0) \frac{r_0^\theta r^{1-\theta} - r_0}{1-\theta}, & p \neq N \\ u(r) &= -1 + u'_{\lambda_1}(r_0) r_0 \log\left(\frac{r}{r_0}\right), & p = N, \end{aligned}$$

si  $r \geq r_0$ , siendo  $\theta = (N-1)/(p-1)$ . En particular,  $u_{\lambda_1}(r) < 0$  si  $r > 1$ . Con esta función vamos a construir una subsolución del problema (5.1).

**Proposición 5.3.1** *Sea  $u_{\lambda_1}$  como antes y definamos*

$$z_\lambda(r) = u_{\lambda_1} \left( \left( \frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^{1/p} r \right).$$

Entonces  $z_\lambda$  es subsolución de (5.1) para  $\lambda \geq \lambda_1$ .

*Demostración.* Claramente,  $z_\lambda$  verifica la ecuación. Además,  $z_\lambda(1) = u_{\lambda_1}((\lambda/\lambda_1)^{1/p}) < 0$ , pues  $u_{\lambda_1}(r) \leq 0$  si  $r \geq 1$ .  $\square$

La existencia de esta subsolución es fundamental. De hecho, para  $\lambda$  suficientemente grande, todas las soluciones radiales positivas con máximo mayor o igual que  $\bar{u}_0 - \varepsilon$  están por encima de ella.

**Teorema 5.3.2** *Existe  $\bar{\lambda} > 0$  tal que todas las soluciones radiales positivas  $u$  de (5.1) con  $\lambda \geq \bar{\lambda}$  y  $\bar{u}_0 - \varepsilon \leq \max u < \bar{u}_0$  verifican  $u \geq z_\lambda$ .*

*Demostración.* Si  $u$  es radial, se tiene que  $u(0) = \max u$  y  $u'(r) < 0$  si  $r > 0$  (Observación 5.1.1). Además, por la unicidad de soluciones del problema de Cauchy (Teorema 4.1.1)

$$\begin{aligned} -(r^{N-1}\varphi_p(w'))' &= r^{N-1}f(w) \\ w(0) &= u(0), & w'(0) &= 0, \end{aligned}$$

se debe tener que  $u = u_\lambda$  para algún  $\lambda$ , donde  $\{u_\lambda\}_{\lambda \geq \lambda_0}$  es la familia de soluciones dada por el Teorema 5.1.1. Por el carácter homogeneizante de dicha familia, fijado  $\delta > 0$ , existe  $\lambda_2$  tal que

si  $\lambda \geq \lambda_2$ ,  $u_\lambda(r) \geq \bar{u}_0 - \varepsilon$ , para todo  $r \in [0, 1 - \delta]$ . Como  $\max z_\lambda = \bar{u}_0 - \varepsilon$ , se tiene  $u \geq z_\lambda$  en  $[0, 1 - \delta]$ . Además,

$$z_\lambda(r) \leq z_\lambda(1 - \delta) = u_{\lambda_1} \left( \left( \frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^{1/p} (1 - \delta) \right) \leq 0 ,$$

si  $\lambda \geq \lambda_1/(1 - \delta)^p$ ,  $r \geq 1 - \delta$ . Por eso,  $u_\lambda \geq z_\lambda$  en  $[1 - \delta, 1]$ , y podemos tomar  $\bar{\lambda} = \max\{\lambda_1/(1 - \delta)^p, \lambda_2\}$ . Esto concluye la demostración del teorema.  $\square$

**Corolario 5.3.3** Sean  $\varepsilon, \bar{\lambda}$  como en el teorema anterior. Existe  $\Lambda > 0$  tal que toda solución positiva  $u$  de (5.1) con  $\lambda \geq \bar{\lambda}$  y  $\bar{u}_0 - \varepsilon \leq \max u < \bar{u}_0$  verifica  $u(r) \geq \bar{u}_0 - 2\varepsilon$  si  $0 \leq r \leq 1 - \Lambda\lambda^{-1/p}$ .

*Demostración.* Definimos la familia de subsoluciones

$$u_{t,\lambda}(r) = u_{\lambda_1} \left( \left( \frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^{1/p} (r - t) \right) ,$$

para  $0 \leq r \leq 1$  y  $t \in [0, 1 - (\lambda/\lambda_1)^{-1/p}]$ . Puesto que, en virtud del Teorema 5.3.2,  $u \geq u_t|_{t=0}$ , estamos en condiciones de aplicar el *sweeping principle* del anexo a este capítulo para obtener que  $u \geq u_t|_{t=1 - (\lambda/\lambda_1)^{-1/p}}$ . Sea  $0 < R < 1$  tal que  $u_{\lambda_1}(x) \geq \bar{u}_0 - 2\varepsilon$  si  $0 \leq x \leq R$ . Entonces  $u(r) \geq \bar{u}_0 - 2\varepsilon$  si  $0 \leq r \leq 1 - (1 - R)(\lambda/\lambda_1)^{-1/p}$ . Por eso, podemos tomar  $\Lambda = (1 - R)\lambda_1^{1/p}$ .  $\square$

**Observación 5.3.4** Esta situación contrasta con la que tratamos en el Capítulo 4 (cf. §4.2.4). En el presente caso, la hipótesis (H4)<sub>4</sub> basta para que toda familia de soluciones  $\{u_\lambda\}$  tal que  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \max u_\lambda = \bar{u}_0$  sea homogeneizante.

Del Teorema 5.3.2 se deduce que todas las soluciones radiales positivas de (5.1) con  $\lambda$  grande y máximo próximo a  $\bar{u}_0$  están en el intervalo ordenado  $[z_\lambda, \bar{u}_0]$ . Como además el operador  $T_\lambda$  definido anteriormente es creciente,  $z_\lambda \leq T_\lambda(z_\lambda)$  y  $T_\lambda(\bar{u}_0) \leq \bar{u}_0$ , resulta entonces que  $T_\lambda$  aplica el intervalo  $[z_\lambda, \bar{u}_0]$  en sí mismo.

Nótese además que  $T_\lambda$  es compacto, y no deja fijos los extremos del intervalo. Es por ello que el grado de Leray-Schauder de  $I - T_\lambda$  está bien definido ([2], [63]). Lo denotaremos por  $d(I - T_\lambda, (z_\lambda, \bar{u}_0), 0)$ . El índice de una solución  $u$  será denotado, como es usual, por  $i(I - T_\lambda, u, 0)$

Puesto que  $(z_\lambda, \bar{u}_0)$  es un conjunto convexo, tenemos que ([2], [37])

$$d(I - T_\lambda, (z_\lambda, \bar{u}_0), 0) = 1 .$$

Veamos que, cuando  $\lambda$  es suficientemente grande, todos los puntos fijos de  $T_\lambda$  en el intervalo  $[z_\lambda, \bar{u}_0]$  son aislados y de índice 1.

**Teorema 5.3.5** *Existe  $\lambda^* > 0$  tal que para  $\lambda \geq \lambda^*$  todos los puntos fijos  $u$  de  $T_\lambda$  en el intervalo  $[z_\lambda, \bar{u}_0]$  son aislados y se tiene  $i(I - T_\lambda, u, 0) = 1$ .*

*Demostración.* Sea  $u \in (z_\lambda, \bar{u}_0)$  un punto fijo de  $T_\lambda$ . En virtud del Corolario 5.2.3,  $T_\lambda$  es diferenciable en  $u$ . Por tanto,

$$i(I - T_\lambda, u, 0) = (-1)^\chi,$$

donde  $\chi$  es la suma de las multiplicidades de los autovalores de  $DT_\lambda(u)$  que son mayores que 1, admitiendo que  $\text{spr}(DT_\lambda(u)) \neq 1$  (con lo cual  $u$  es aislado, [2, Teorema 11.4]). Bastará por ello con demostrar que  $\text{spr}(DT_\lambda(u)) < 1$ , para  $\lambda$  suficientemente grande.

Supongamos que existen sucesiones  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ ,  $u_n > 0$  de forma que  $\sigma_n = \text{spr}(DT_{\lambda_n}(u_n)) \geq 1$ . En virtud del Teorema 5.2.4,  $\sigma_n$  tiene una autofunción asociada  $v_n > 0$ , que normalizaremos tomando  $|v_n|_\infty = 1$ . Nótese que  $f'(u_n) \leq 0$  en  $[0, 1 - \Lambda\lambda_n^{-1/p}]$ , en virtud del Corolario 5.3.3. Las  $v_n$  cumplen entonces

$$-(r^{N-1}|u_n'|^{p-2}v_n')' \leq \frac{r^{N-1}}{p-1}f'(u_n)v_n \leq 0$$

en  $[0, 1 - \Lambda\lambda_n^{-1/p}]$ . Por el principio del máximo,  $v_n$  alcanzará el máximo en  $[1 - \Lambda\lambda_n^{-1/p}, 1]$ . Tomemos  $r_n \in [1 - \Lambda\lambda_n^{-1/p}, 1]$  tal que  $v_n(r_n) = 1 = \max v_n$ . Introducimos las funciones

$$U_n(x) = u_n(1 - \lambda_n^{-1/p}x)$$

$$V_n(x) = v_n(1 - \lambda_n^{-1/p}x),$$

para  $0 \leq x \leq \lambda_n^{1/p}$ . Puesto que  $u_n$  es solución de (5.1), se tiene que

$$U_n(x) = \int_{1-\lambda_n^{-1/p}x}^1 \varphi_{p'} \left( \int_0^s \left( \frac{\rho}{s} \right)^{N-1} \lambda_n f(u_n(\rho)) d\rho \right) ds,$$

y un cambio de variable en la integral nos lleva a que

$$U_n(x) = \int_0^x \varphi_{p'} \left( \int_s^{\lambda_n^{1/p}} \left( \frac{\lambda_n^{1/p} - \rho}{\lambda_n^{1/p} - s} \right)^{N-1} f(U_n(\rho)) d\rho \right) ds.$$

Análogamente,

$$V_n(x) = \frac{1}{p-1} \int_0^x \frac{1}{|U_n'(s)|^{p-2}} \int_s^{\lambda_n^{1/p}} \left( \frac{\lambda_n^{1/p} - \rho}{\lambda_n^{1/p} - s} \right)^{N-1} \left[ \frac{1}{\sigma_n} f'(U_n(\rho)) + m \left( \frac{1}{\sigma_n} - 1 \right) \right] V_n(\rho) d\rho ds.$$

Nótese ahora que  $U_n' \neq 0$  en  $[0, \lambda_n^{1/p}]$ . Por tanto (cf. Teorema 6.3 del Capítulo 4 de [54]),  $U_n, V_n \in C^{2,\beta}[0, \lambda_n^{1/p}]$ . Además,  $\{U_n\}, \{V_n\}$  son precompactos en  $C^2[0, T]$  para todo  $T > 0$ . Por tanto, podemos suponer que  $U_n \rightarrow \bar{U}, V_n \rightarrow \bar{V}$  en  $C_{\text{loc}}^2[0, +\infty)$ , donde

$$\bar{U}(x) = \int_0^x \varphi_{p'} \left( \int_0^{+\infty} f(\bar{U}(\rho)) d\rho \right) ds,$$

$$\bar{V}(x) = \frac{1}{p-1} \int_0^x \frac{1}{|\bar{U}'(s)|^{p-2}} \int_s^{+\infty} \left[ \frac{1}{\bar{\sigma}} f'(\bar{U}(\rho)) + m \left( \frac{1}{\bar{\sigma}} - 1 \right) \right] \bar{V}(\rho) d\rho ds ,$$

siendo  $\bar{\sigma} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$  (el caso  $\bar{\sigma} = +\infty$  no está, en principio, excluido, y entonces debe tomarse  $1/\bar{\sigma} = 0$ ). Por tanto,  $\bar{U}$ ,  $\bar{V}$  son soluciones de los problemas unidimensionales

$$\begin{aligned} -\varphi_p(\bar{U}')' &= f(\bar{U}) \\ \bar{U}(0) &= \bar{U}'(+\infty) = 0 , \end{aligned} \tag{5.7}$$

y

$$\begin{aligned} -(|\bar{U}'|^{p-2} \bar{V}')' &= \frac{1}{p-1} \left( \frac{1}{\bar{\sigma}} f'(\bar{U}) + m \left( \frac{1}{\bar{\sigma}} - 1 \right) \right) \bar{V} \\ \bar{V}(0) &= \bar{V}'(+\infty) = 0 , \end{aligned} \tag{5.8}$$

mientras  $0 \leq \bar{U} \leq \bar{u}_0$ ,  $0 \leq \bar{V} \leq 1$ . Como además las funciones  $V_n$  alcanzan su máximo en  $x_n = \lambda_n^{1/p}(1 - r_n) \leq \Lambda$ , se puede concluir que  $\bar{V} \not\equiv 0$ . Por tanto,  $\bar{V} > 0$ .

Por otro lado, nótese que  $\bar{U}$  verifica  $|\bar{U}'|^p = p'(F(\bar{u}_0) - F(\bar{U}))$ , junto con  $\bar{U}' > 0$  en  $[0, +\infty)$ . Derivando en (5.7), resulta que  $\bar{U}'$  es solución de la ecuación de segundo orden:

$$-(|\bar{U}'|^{p-2} (\bar{U}')')' = \frac{1}{p-1} f'(\bar{U}) \bar{U}' ,$$

y se deduce que  $\bar{U}' \in C^2[0, +\infty)$ .

Tomemos el menor  $C > 0$  para el que se verifica  $W := C\bar{U}' - \bar{V} \geq 0$  en  $[0, \Lambda + 1]$ .  $W$  tiene que anularse entonces en algún punto de  $[0, \Lambda + 1]$ . Además,  $W \in C^2[0, +\infty)$  y cumple la ecuación

$$-(|\bar{U}'|^{p-2} W')' = \frac{1}{p-1} \left( f'(\bar{U}) C\bar{U}' - \frac{1}{\bar{\sigma}} f'(\bar{U}) \bar{V} - m \left( \frac{1}{\bar{\sigma}} - 1 \right) \bar{V} \right) .$$

Por nuestra elección de  $m$ ,  $f'(\bar{U}) + m > 0$ , y como  $\bar{\sigma} \geq 1$ ,

$$-(|\bar{U}'|^{p-2} W')' \geq \frac{1}{p-1} f'(\bar{U}) W$$

en  $[0, \Lambda + 1]$ . Esto implica que

$$-(|\bar{U}'|^{p-2} W')' + \frac{m}{p-1} W \geq \frac{1}{p-1} (f'(\bar{U}) + m) W \geq 0 \tag{5.9}$$

en  $[0, \Lambda + 1]$ . Puesto que  $\bar{U}' \neq 0$  en  $[0, \Lambda + 1]$ , el operador en (5.9) es no degenerado, y podemos aplicar el principio fuerte del máximo para obtener que  $W > 0$  en  $(0, \Lambda + 1)$ . Además,  $W(0) > 0$  y como  $W$  debe anularse en algún punto llegamos a que  $W(\Lambda + 1) = 0$ . El principio del máximo de Hopf nos da entonces que  $W'(\Lambda + 1) < 0$ .

Por tanto, podemos tomar un  $\delta > 0$  pequeño tal que  $W < 0$  en  $(\Lambda + 1, \Lambda + 1 + \delta)$ . De hecho, esta desigualdad se da en  $(\Lambda + 1, +\infty)$ . En caso contrario, si llamamos  $\delta_0 = \sup\{\delta > 0 : W < 0 \text{ en } (\Lambda + 1, \Lambda + 1 + \delta)\}$ , tenemos que

$$\begin{aligned} -(|\bar{U}'|^{p-2} W')' &\geq \frac{1}{p-1} f'(\bar{U}) W \\ W(\Lambda + 1) &= W(\Lambda + 1 + \delta_0) = 0 . \end{aligned}$$

Puesto que  $f'(\bar{U}) \leq 0$  en  $[\Lambda + 1, +\infty)$ , el principio del máximo implica  $W \geq 0$  en  $[\Lambda + 1, \Lambda + 1 + \delta]$ , que no es posible. Por eso,  $W < 0$  en  $[\Lambda + 1, +\infty)$ .

Esto en particular nos lleva a

$$-(|\bar{U}'|^{p-2}W')' \geq 0$$

en  $[\Lambda + 1, +\infty)$ . Si integramos esta desigualdad, obtenemos

$$W(x) \leq W'(\Lambda + 1)|\bar{U}'(\Lambda + 1)|^{p-2} \int_{\Lambda+1}^x \frac{ds}{|\bar{U}'(s)|^{p-2}}, \quad (5.10)$$

de donde al diverger la integral si  $x \rightarrow +\infty$  (recuérdese que  $p > 2$ ) se tiene que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) = -\infty$ , que contradice el hecho de que  $W \geq -1$ . Esto concluye la demostración del Teorema 5.3.5.

□

Como consecuencia de los resultados anteriores,  $T_\lambda$  tiene, para  $\lambda$  grande, un único punto fijo  $u_\lambda$  en  $[z_\lambda, \bar{u}_0]$ . En conclusión, (5.1) tiene una única solución radial positiva  $u_\lambda$  con máximo próximo a  $\bar{u}_0$  cuando  $\lambda$  es suficientemente grande. Hemos obtenido así el siguiente resultado.

**Teorema 5.3.6** *Supongamos que  $f$  cumple las hipótesis  $(H_4)$ . Entonces existen  $\varepsilon > 0$ ,  $\lambda^* > 0$  tales que el problema*

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= \lambda f(u) & \text{en } B \\ u &= 0 & \text{en } \partial B \end{aligned} \quad (5.11)$$

*admite una única solución radial positiva  $u_\lambda$  con  $\bar{u}_0 - \varepsilon \leq \max u_\lambda < \bar{u}_0$ , si  $\lambda \geq \lambda^*$ . Además, la familia  $\{u_\lambda\}$  es homogeneizante, es decir*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} u_\lambda = \bar{u}_0$$

*uniformemente sobre compactos de  $B$ . Más aún, se tiene la siguiente estimación de la capa límite cerca de  $r = 1$ :*

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} -\lambda^{-1/p} u'_\lambda(1) = (p'F(\bar{u}_0))^{1/p},$$

*donde  $F(\bar{u}_0) = \int_0^{\bar{u}_0} f(s)ds$ .*

Debe observarse que para deducir la estimación de la capa límite basta con argumentar como en el anexo al Capítulo 2.

## Anexo al Capítulo 5.

En este anexo vamos a presentar una generalización del sweeping principle de Serrin (cf. [70], [68]) adecuada a nuestros propósitos (véase también [49]).

**Sweeping principle** Sea  $\{u_t\}_{t \in [0, a]} \subset W_0^{1,p}(\Omega) \cap C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$  una familia de subsoluciones del problema

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= f(u) & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde  $f$  es  $C^1$  y  $\Omega$  un dominio acotado regular de  $\mathbb{R}^N$ . Sea  $u > 0$  una solución de (5.12). Supongamos que la familia  $\{u_t\}$  verifica

(i)  $u_t < 0$  en  $\partial\Omega$ .

(ii) La aplicación  $t \rightarrow u_t \in C(\overline{\Omega})$  es continua.

(iii) El conjunto  $\{x : \nabla u_t(x) = 0\}$  consta de un único punto  $x_t$ , y para cada  $t$  se tiene que  $\nabla u(x_t) \neq 0$  o bien  $u(x_t) > u_t(x_t)$ .

(iv)  $u \geq u_t|_{t=0}$ .

Entonces  $u \geq u_t|_{t=a}$ .

*Demostración.* Consideremos el conjunto  $E = \{t \in [0, a] : u \geq u_t \text{ en } \Omega\}$ . Por las hipótesis (ii) y (iv),  $E$  es cerrado y no vacío. Veamos que también es abierto.

En efecto, supongamos que  $t_0 \in E$ , y definamos  $B_{t_0} := \{x \in \Omega \setminus \{x_{t_0}\} : u(x) = u_{t_0}(x)\}$ . El conjunto  $B_{t_0}$  es cerrado respecto a  $\Omega \setminus \{x_{t_0}\}$ . Para ver que es abierto, sea  $x_0 \in B_{t_0}$ . Puesto que  $u \geq u_{t_0}$  y  $u(x_0) = u_{t_0}(x_0)$ , debe tenerse  $\nabla u(x_0) = \nabla u_{t_0}(x_0) \neq 0$ , ya que  $x_0 \neq x_{t_0}$ . Entonces, eligiendo  $m > 0$  para que  $f(u) + mu$  sea creciente en un entorno de  $u(x_0)$ ,

$$-\Delta_p u + \Delta_p u_{t_0} + m(u - u_{t_0}) \geq 0 \quad \text{en } \Omega,$$

y puesto que los gradientes de  $u$  y  $u_{t_0}$  son no nulos, se tiene que  $L(u - u_{t_0}) \geq 0$ , donde  $L$  es un operador lineal uniformemente elíptico en un entorno de  $x_0$  (cf. Apéndice en [67]). Esto implica que  $u \equiv u_{t_0}$  en ese entorno, y  $B_{t_0}$  es abierto.

Puesto que  $\Omega \setminus \{x_{t_0}\}$  es conexo, debe tenerse que  $B_{t_0} = \Omega \setminus \{x_{t_0}\}$  ó  $B_{t_0} = \emptyset$ . La primera posibilidad implica  $u \equiv u_{t_0}$  en  $\overline{\Omega}$ , que es imposible, pues  $u_{t_0} < 0$  en  $\partial\Omega$ . La segunda nos lleva a que  $u > u_{t_0}$  en  $\Omega \setminus \{x_{t_0}\}$ . La hipótesis (iii) implica entonces que  $u > u_{t_0}$  en  $\Omega$ , y por tanto,  $u > u_t$  en  $\Omega$  para  $t \sim t_0$ , es decir,  $E$  es abierto.

Finalmente, como  $E$  es abierto, cerrado y no vacío, tenemos que  $E = [0, a]$ , con lo que  $u \geq u_t|_{t=a}$ .  $\square$

## **Apéndice**

## Apéndice A

En este Apéndice vamos a recoger algunos resultados sobre regularidad de soluciones de problemas de la forma

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= f(x) && \text{en } \Omega \\ u &= 0 && \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{A.1}$$

donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  es un dominio acotado de clase  $C^{2,\mu}$  para algún  $0 < \mu < 1$ . Una primera observación interesante es que, en general, (A.1) no admite soluciones clásicas, es decir, funciones  $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  tales que la ecuación en (A.1) se satisfaga puntualmente. Sin embargo, en algunos casos las soluciones sí son  $C^2$  (véanse Observaciones 4.2.7).

Es además importante destacar que el problema (A.1) ni siquiera tiene, por lo general, soluciones fuertes (cf. [46, Cap. 9]), esto es, funciones  $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{2,p}(\Omega)$  tales que la ecuación en (A.1) se satisfaga casi todo punto. Si  $f \in L^{p'}(\Omega)$ ,  $p' = p/(p-1)$ , se tendrá según los resultados en [71], [23] que  $u \in W_{\text{loc}}^{2,p}(\Omega)$  si  $1 < p \leq 2$  (cf. [72] para regularidad hasta la frontera). Para  $p > 2$ , la información óptima que puede darse sobre las soluciones es que  $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{p',p}(\Omega)$  (cf. [71]). De hecho, aunque  $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ , se puede dar el caso de que  $u \notin W_{\text{loc}}^{2,r}(\Omega)$  para ningún  $r > 1$  (véase el contraejemplo dado en [71, Teorema 6.1]).

Por tanto, las soluciones de (A.1) deben ser consideradas siempre en sentido débil. De ahora en adelante entenderemos por solución de (A.1) toda función  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  que cumpla

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi = \int_{\Omega} f(x) \phi$$

para toda  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  (o equivalentemente  $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ). No obstante los comentarios precedentes, si  $f \in L^\infty(\Omega)$ , las derivadas de primer orden de  $u$  son de hecho hölderianas.

Consideraremos un problema ligeramente más general que (A.1). Supondremos que  $f$  depende además de  $u$ , es decir,

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= f(x, u) && \text{en } \Omega \\ u &= 0 && \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{A.2}$$

Primero estudiaremos la acotación de las soluciones débiles de (A.2). Vamos a probar que si  $f$  cumple hipótesis adecuadas de crecimiento, todas las soluciones en  $W_0^{1,p}(\Omega)$  están en  $L^\infty(\Omega)$ . El siguiente resultado es la versión para soluciones débiles del Lema 10.8 de [46].

**Teorema A.1** *Supongamos que existe  $C_0 > 0$  tal que  $|f(x, u)| \leq C_0(1 + |u|^{p-1})$ , para  $u \in \mathbb{R}$ . Entonces, existe una constante  $C = C(N, p, C_0, \Omega)$  tal que*

$$|u|_\infty \leq C(|u|_p + 1), \tag{A.3}$$

para todas las soluciones de (A.2) en  $W_0^{1,p}(\Omega)$ .

*Demostración.* Nótese que, cuando  $p > N$ , el teorema de inmersión de Morrey ([46, Teor. 7.17]) nos garantiza que  $u \in C^\alpha(\overline{\Omega})$  para  $\alpha = 1 - N/p$ , dándose además la estimación

$$|u|_\alpha \leq C|u|_{1,p},$$

donde  $C = C(N, p, \Omega)$ . Como  $|u|_{1,p} \leq \sigma_{1,p}^{-1}|u|_p$ , donde  $\sigma_{1,p}$  es el autovalor principal de  $-\Delta_p$  en  $\Omega$ , se tiene la estimación deseada.

Por tanto, supondremos a continuación que  $1 < p \leq N$  (cuando  $p = N$ , las funciones de  $W_0^{1,p}(\Omega)$  no son necesariamente acotadas, [13]). Elijamos  $\beta \geq 1$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m > 1$  y definamos la función

$$H_m(z) = \begin{cases} z^\beta - 1, & 1 \leq z \leq m \\ \beta m^{\beta-1}z - ((\beta - 1)m^\beta + 1), & z > m. \end{cases}$$

Nótese que  $H'_m$  es creciente. Por eso, si definimos

$$G_m(v) = \int_1^v |H'_m(s)|^p ds,$$

se tiene  $G_m(v) \leq vG'_m(v)$ . Tomemos como función test  $\phi(x) = G_m(w(x))$ ,  $w = u^+ + 1$ , en la formulación débil de (A.2). Claramente,  $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ . Entonces

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi = \int_\Omega f(x, u) \phi. \quad (\text{A.4})$$

Pero, usando la definición de  $G_m$  y  $H_m$ ,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi = \int_\Omega |\nabla u^+|^p |H'_m(w)|^p = \int_\Omega G'_m(w) |\nabla w|^p.$$

Por otra parte:

$$\int_\Omega f(x, u) \phi = \int_\Omega f(x, u) G_m(w) \leq C_0 \int_\Omega (1 + |u^+|^{p-1}) w G'_m(w),$$

y como  $(1 + |z|^{p-1}) \leq C(p)(1 + |z|)^{p-1}$ , donde  $C(p) = \max\{1, 2^{2-p}\}$ , llegamos a

$$\int_\Omega f(x, u) \phi \leq C_0 C(p) \int_\Omega w^p G'_m(w).$$

Llevando todas estas estimaciones a (A.4), tenemos

$$\int_\Omega G'_m(w) |\nabla w|^p \leq C_0 C(p) \int_\Omega w^p G'_m(w).$$

Además, debido a la definición de  $H_m$  y  $G_m$ , tenemos, por un lado, que  $w^p G'_m(w) = |w H'_m(w)|^p$  y por otro, que  $G'_m(w) |\nabla w|^p = |\nabla H_m(w)|^p$ . Por eso,

$$\int_\Omega |\nabla H_m(w)|^p \leq C_0 C(p) \int_\Omega |w H'_m(w)|^p,$$

y como  $H_m(w) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , podemos aplicar la desigualdad de Sobolev para obtener un cierto  $s > p$  tal que

$$\left( \int_{\Omega} |H_m(w)|^s \right)^{1/s} \leq C' \left( \int_{\Omega} |\nabla H_m(w)|^p \right)^{1/p},$$

donde  $C' = C'(N, p, \Omega)$ , obteniendo finalmente que

$$\left( \int_{\Omega} |H_m(w)|^s \right)^{1/s} \leq C \left( \int_{\Omega} |w H'_m(w)|^p \right)^{1/p} \quad (\text{A.5})$$

(de ahora en adelante,  $C$  denotará constantes genéricas que dependen de  $N, p, C_0$  y  $\Omega$ ). Supongamos que  $w \in L^{p\beta}(\Omega)$ . Aplicando el teorema de la convergencia monótona, tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |w H'_m(w)|^p = \int_{\Omega} \beta^p w^{p\beta},$$

y entonces (A.5) nos lleva a

$$\left( \int_{\Omega} |w^\beta - 1|^s \right)^{1/\beta s} \leq (C\beta)^{1/\beta} \left( \int_{\Omega} w^{p\beta} \right)^{1/p\beta}.$$

Por otra parte, es fácil ver que

$$\left( \int_{\Omega} |w^\beta - 1|^s \right)^{1/s} \geq \left( \int_{\Omega} w^{\beta s} \right)^{1/s} - |\Omega|^{1/s-1/p} \left( \int_{\Omega} w^{p\beta} \right)^{1/p},$$

y llegamos entonces a

$$|w|_{\beta s} \leq (C\beta)^{1/\beta} |w|_{p\beta}.$$

A continuación, vamos a iterar esta desigualdad, por el procedimiento de Moser (cf. [46]). Elegimos  $\beta$  de la forma

$$\beta = \left( \frac{s}{p} \right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m,$$

para obtener que

$$|w|_{(s/p)^m s} \leq \prod_{j=1}^m \left( C \left( \frac{s}{p} \right)^j \right)^{(p/s)^j} |w|_p. \quad (\text{A.6})$$

Puesto que la constante en (A.6) se puede acotar independientemente de  $m$ , obtenemos, haciendo  $m \rightarrow +\infty$ , que

$$|w|_{\infty} \leq C |w|_p.$$

Teniendo en cuenta que  $|u^+|_{\infty} \leq |w|_{\infty}$  y que  $|w|_p \leq |u|_p + |\Omega|^{1/p}$ , tenemos

$$|u^+|_{\infty} \leq C(|u|_p + 1),$$

donde  $C = C(N, p, C_0, \Omega)$ . Puesto que  $-u$  es solución de una ecuación con las mismas características que (A.2), obtenemos una estimación similar para  $u^-$ , y combinando ambas se obtiene (A.3). Esto finaliza la demostración del teorema.  $\square$

**Observaciones A.2** a) Cuando sabemos que  $u|_{\partial\Omega} \in L^\infty(\partial\Omega)$ , por ejemplo  $u \in C(\overline{\Omega})$ , la condición  $u = 0$  en  $\partial\Omega$  no es importante en la demostración de este teorema. Una sencilla adaptación nos permite obtener

$$|u|_\infty \leq C(|u|_p + \sup_{\partial\Omega} |u| + 1) ,$$

en el caso en que  $u|_{\partial\Omega} \neq 0$ .

b) Usando los resultados de Serrin, [69], pueden obtenerse estimaciones locales de las normas  $|u|_\infty$ . Para conseguir estimaciones globales basta con hacer un argumento de reflexión respecto a  $\partial\Omega$ , como el que se lleva a cabo en [9] o [77]. Sin embargo, es imprescindible en este caso la condición de contorno  $u|_{\partial\Omega} = 0$ .

Vamos a estudiar a continuación la cuestión de hölderianidad de las derivadas primeras. Muchos autores han estudiado este problema para la ecuación (A.2) y otras similares. Entre ellos, cabe citar a Ural'tseva [80] y Uhlenbeck [79] (para sistemas homogéneos, que en particular incluyen la ecuación (A.2) con  $f = 0$ ), Evans [29] (en todos estos casos,  $p \geq 2$ ), Lewis [55] (donde  $1 < p \leq 2$ ), DiBenedetto [28] y Tolksdorf [78] (cubriendo los últimos el rango completo  $p > 1$ ). Sin embargo, todos estos resultados son de naturaleza local. Para obtener hölderianidad global, se puede proceder por reflexión respecto a  $\partial\Omega$ , como en [77] (aunque este procedimiento sólo es válido si la condición de contorno es homogénea) o de una forma más general, como en el artículo de Lieberman [56], que permite condiciones de contorno no homogéneas, que incluyen las de tipo Neumann.

El teorema principal de [56] (Teorema 1) aplicado al problema (A.2) nos proporciona el siguiente resultado.

**Teorema A.3** *Supongamos que  $\Omega$  es de clase  $C^{1,\mu}$  para algún  $0 < \mu < 1$ , y que existe una constante  $C_0 > 0$  tal que  $|f(x, u)| \leq C_0(1 + |u|^{p-1})$ , para  $u \in \mathbb{R}$ . Entonces, si  $u$  es una solución débil acotada de (A.2) con  $|u|_\infty \leq M$ , existe  $\beta = \beta(\mu, N, p, C_0)$  tal que  $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ . Además, se tiene la estimación*

$$|u|_{1,\beta} \leq C$$

donde  $C = C(\mu, N, p, C_0, M, \Omega)$ .

**Observación A.4** Dos casos importantes en que se da la condición sobre  $f$  impuesta en el Teorema A.3 son cuando  $f \in L^\infty(\Omega)$  sólo depende de  $x$  o cuando  $f \in C(\mathbb{R})$  sólo depende de  $u$ . Esta última será la situación más habitual a lo largo de la memoria.

Otra situación genérica con la que tendremos que tratar es la de soluciones positivas de la ecuación (A.2). Gracias al principio del máximo fuerte ([81]), es típico que el gradiente de las soluciones sea no nulo cerca de  $\partial\Omega$ , por lo que la ecuación en (A.2) se convierte en no degenerada cerca de la frontera. Se puede así mejorar la regularidad de las soluciones, lo que será crucial en relación con el método de sub y supersoluciones y las técnicas de comparación usadas en la memoria (cf. Teorema B.8). Nos restringiremos al caso en que  $f = f(u)$ .

**Teorema A.5** *Supongamos que  $\Omega$  es un dominio  $C^{2,\mu}$  para algún  $0 < \mu < 1$ , y que  $f$  es una función derivable. Sea  $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$  una solución positiva de*

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= f(u) & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{A.7}$$

y supongamos que la función  $f$  verifica

$$\liminf_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u)}{u^{p-1}} > -\infty. \tag{A.8}$$

Entonces existe un  $\varepsilon > 0$  tal que  $u \in C^{2,\mu}(\overline{\Omega_\varepsilon})$ , donde  $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \varepsilon\}$ .

*Demostración.* En virtud de la hipótesis (A.8), podemos encontrar  $M > 0$  tal que  $f(u) + Mu^{p-1} > 0$  si  $0 \leq u \leq \sup u$ . Por eso,  $u$  cumple  $-\Delta_p u + Mu^{p-1} > 0$  en  $\Omega$ , y como consecuencia del principio del máximo fuerte,  $\partial u / \partial \nu < 0$  en  $\partial\Omega$ , donde  $\nu$  es la normal exterior unitaria a  $\partial\Omega$ . En particular, como  $\nabla u$  es continua, podemos encontrar  $\varepsilon_0 > 0$  tal que  $|\nabla u| \geq c > 0$  en  $\overline{\Omega_{\varepsilon_0}}$ . Por eso, la ecuación en (A.7) es no degenerada en  $\Omega_{\varepsilon_0}$ .

Por otro lado,  $f(u(x))$  es diferenciable en  $\overline{\Omega}$ . De ahí, el Teorema 6.4 en el Capítulo 4 de [54] nos proporciona que  $u \in C_{\text{loc}}^{2,\mu}(\Omega_{\varepsilon_0})$ . Tomando  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , tendremos que  $u \in C^{2,\mu}(\partial\Omega_\varepsilon)$ , y el Teorema 6.3 del Capítulo 4 de [54] nos da  $u \in C^{2,\mu}(\overline{\Omega_\varepsilon})$ .  $\square$

## Apéndice B

En este apéndice demostramos algunos resultados sobre el método de sub y supersoluciones para ecuaciones con el laplaciano- $p$ . Concretamente, consideraremos el problema

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= f(u) & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{B.1}$$

donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  es un dominio acotado de clase  $C^{2,\mu}$  para algún  $0 < \mu < 1$ , y  $f$  es una función continua. Una subsolución de (B.1) es una función  $\underline{u} \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  tal que

$$\begin{aligned} -\Delta_p \underline{u} &\leq f(\underline{u}) & \text{en } \Omega \\ \underline{u} &\leq 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

en sentido débil, es decir

$$\int_{\Omega} |\nabla \underline{u}|^{p-2} \nabla \underline{u} \nabla \phi \leq \int_{\Omega} f(\underline{u}) \phi,$$

para toda función  $\phi \in C_0^1(D)$ ,  $\phi \geq 0$ . Análogamente definimos una supersolución  $\bar{u}$ , invirtiendo las desigualdades anteriores. La existencia de sub y supersoluciones ordenadas nos lleva a la existencia de una solución en el intervalo  $[\underline{u}, \bar{u}]$  (cf. [25]).

**Teorema B.1** *Supongamos que existen  $\underline{u}, \bar{u} \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$  sub y supersolución respectivamente de la ecuación (B.1), tales que  $\underline{u} \leq \bar{u}$ , y que  $f$  es continua. Entonces el problema (B.1) admite al menos una solución en el intervalo ordenado  $[\underline{u}, \bar{u}]$ .*

*Demostración.* Definimos el operador “truncamiento”, para  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  de la siguiente forma:  $Tu(x) = \max\{\underline{u}(x), \min\{u(x), \bar{u}(x)\}\}$ , con lo que obtenemos que  $T : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow W^{1,p}(\Omega)$  es continuo y acotado (cf. [25]). Consideremos la forma

$$B(u, v) = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v - \mathcal{F}(Tu)v, \quad u, v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

donde  $\mathcal{F} : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^{p'}(\Omega)$  es el operador de Nemytskii de  $f$ ,  $\mathcal{F}(u)(x) = f(u(x))$ , que es continuo y acotado en  $[\underline{u}, \bar{u}]$  (nótese que  $f \in L^\infty(a, b)$ , donde  $a = \inf \underline{u}$ ,  $b = \sup \bar{u}$ ). Se tiene entonces que  $B$  es coerciva en el sentido siguiente:

$$\frac{B(v, v)}{|v|_{1,p}} \rightarrow +\infty, \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega), |v|_{1,p} \rightarrow +\infty.$$

Por tanto (ver Teorema II.2.8 en [58]), existe  $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$  tal que  $B(u, \phi) = 0$  para toda  $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ , es decir,

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \phi = \int_{\Omega} f(Tu) \phi, \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Para demostrar el teorema, basta con ver que  $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ , ya que en tal caso  $T(u) = u$  y  $u$  sería solución de (B.1). A tal fin, tomamos como función test  $\phi = (u - \bar{u})^+$ . Entonces

$$\int_{\Omega} f(Tu)\phi = \int_{\{u > \bar{u}\}} f(\bar{u})(u - \bar{u}) \leq \int_{\{u > \bar{u}\}} |\nabla \bar{u}|^{p-2} \nabla \bar{u} (\nabla u - \nabla \bar{u})$$

y llegamos a

$$\int_{\{u > \bar{u}\}} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla \bar{u}|^{p-2} \nabla \bar{u}) (\nabla u - \nabla \bar{u}) \leq 0.$$

Aplicando la monotonía del laplaciano-p (Lema 1 en [78]) concluimos que  $(u - \bar{u})^+ \equiv 0$ , es decir,  $u \leq \bar{u}$ . Análogamente se prueba que  $u \geq \underline{u}$ .  $\square$

**Observación B.2** Esta demostración es una simplificación de la contenida en [25], que es válida en situaciones más generales. Véase también [17].

Cuando la regularidad de  $f$  lo permite, se puede dar información más precisa sobre las soluciones de (B.1) en el intervalo definido por una sub y una supersolución. Por ejemplo, si  $f$  es localmente Hölderiana, podemos usar el clásico esquema iterativo monótono (cf. [68], [2] junto con sus referencias para el caso lineal y [26] para el laplaciano-p).

**Teorema B.3** *Supongamos que existen  $\underline{u}, \bar{u} \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$  sub y supersolución respectivamente de la ecuación (B.1), tales que  $\underline{u} \leq \bar{u}$ , y que  $f$  es localmente  $\mu$ -Hölder continua. Entonces, existen  $\underline{u} \leq u_- \leq u_+ \leq \bar{u}$ ,  $u_-, u_+ \in C^{1,\beta_0}(\bar{\Omega})$  para algún  $0 < \beta_0 < 1$ , solución minimal, respectivamente maximal, de (B.1) en el intervalo  $[\underline{u}, \bar{u}]$ .*

*Demostración.* Puesto que  $f$  es localmente  $\mu$ -Hölder continua, podemos tomar una constante  $M > 0$  tal que la función  $g(u) := f(u) + M|u|^{\mu-1}u$  sea creciente en el intervalo  $[a, b]$ , donde  $a = \inf \underline{u}$  y  $b = \sup \bar{u}$  (ínfimo y supremo esenciales). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $\mu \leq p - 1$ .

Definimos  $u_1$  como la única solución en  $W_0^{1,p}(\Omega)$  de

$$\begin{aligned} -\Delta_p u + M|u|^{\mu-1}u &= g(\underline{u}) & \text{en } \Omega \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{B.2}$$

La unicidad de soluciones de (B.2) es consecuencia del principio de comparación débil (Lema 3.1 en [77]), y la existencia se sigue de que el funcional

$$J(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p} |\nabla u|^p + \frac{M}{\mu+1} |u|^{\mu+1} - g(\underline{u})u$$

es secuencialmente débilmente semicontinuo inferiormente y coercivo en  $W_0^{1,p}(\Omega)$  (obsérvese que  $J$  está bien definido, pues  $\mu + 1 \leq p$  y  $g(\underline{u}) \in L^{\infty}(\Omega)$ ). Por tanto, sabemos del cálculo de variaciones ([75]) que  $J$  admite un minimizante global en  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , que es solución de (B.2).

Análogamente, definimos la sucesión  $\{u_n\}$  tomando  $u_n$  como la única solución de (B.2), al sustituir  $g(\underline{u})$  por  $g(u_{n-1})$ .

Del principio de comparación débil,  $\underline{u} \leq u_{n-1} \leq u_n \leq \bar{u}$  para cada  $n$ , luego  $u_n \in L^\infty(\Omega)$  y  $u_- := \sup u_n$  es una función acotada que cumple  $\underline{u} \leq u_- \leq \bar{u}$ . Veamos que  $u_-$  es de hecho una solución de (B.1). Puesto que  $|g(u_{n-1}) - M|u_n|^{\mu-1}u_n|_\infty$  está uniformemente acotada por  $C_0 := \sup_{a \leq s \leq b} |g(s)| + M|s|^\mu$ , obtenemos en virtud del Teorema A.3 que

$$|u_n|_{C^{1,\beta_0}} \leq C,$$

para ciertas constantes  $0 < \beta_0 < 1$  y  $C > 0$ , que dependen solamente de  $N, p, C_0, a$  y  $b$ . Por tanto, para cada  $0 < \beta < \beta_0$ , existe una subsucesión  $\{u_{n_k}\}$  tal que  $u_{n_k} \rightarrow u_-$  en  $C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$ . Ya que  $u_n \rightarrow u_-$  puntualmente en  $\Omega$ , podemos tomar límites en

$$\int_{\Omega} |\nabla u_{n_k}|^{p-2} \nabla u_{n_k} \nabla \phi + M|u_{n_k}|^{\mu-1} u_{n_k} \phi = \int_{\Omega} g(u_{n_k-1}) \phi,$$

para obtener que  $u_-$  es solución de (B.1). De hecho, toda la sucesión  $\{u_n\}$  converge a  $u_-$  en  $C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$ . En efecto, supongamos que  $u_{n_j} \rightarrow u^*$  en  $C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$  para otra subsucesión. El que las  $\{u_n\}$  estén ordenadas puntualmente implica que  $u_- \leq u^*$  y  $u^* \leq u_-$ . Por eso,  $u_n \rightarrow u_-$  en  $C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$ , para todo  $0 < \beta < \beta_0$ .

La solución maximal  $u_+$  se obtiene de la misma forma como el límite en  $C^{1,\beta}(\bar{\Omega})$ , para todo  $0 < \beta < \beta_0$ , de una sucesión decreciente  $\{v_n\}$  que verifica  $\underline{u} \leq u_n \leq v_n \leq \bar{u}$ . De hecho  $u_+ := \inf v_n$ . De la discusión precedente se tiene finalmente que  $u_-$  es la solución minimal y  $u_+$  la maximal de (B.1) en el intervalo funcional  $[\underline{u}, \bar{u}]$ .  $\square$

Para su aplicación en los resultados de unicidad del Capítulo 4, necesitaremos una consecuencia más precisa del Teorema B.3, en el caso en que  $\Omega = D$ , un dominio acotado con simetría radial (es decir, una bola o un anillo).

**Corolario B.4** *Supongamos que  $\Omega$  es un dominio acotado radialmente simétrico  $D \subset \mathbb{R}^N$  y que el problema (B.1) tiene una subsolución  $\underline{u}$  y una supersolución  $\bar{u}$  tales que  $\underline{u} \leq \bar{u}$  y que  $\underline{u}$  (respectivamente  $\bar{u}$ ) es una función radialmente simétrica. Entonces, la solución minimal (resp. maximal) de (B.1) en el intervalo  $[\underline{u}, \bar{u}]$  es una función radialmente simétrica.*

*Demostración.* Sólo hay que observar que si, por ejemplo,  $\underline{u}$  es radial, entonces  $u_1$  es la solución de un problema invariante por rotaciones (cf. la ecuación (B.2)). Por tanto, como  $u_1 \in C^1(\bar{D})$ ,  $u_1$  ha de ser radial. Procediendo por inducción,  $u_n$  es una función radial para cada  $n$ , con lo que  $u_-$  será radial.  $\square$

**Observación B.5** También se pueden permitir discontinuidades en la función  $f$ , siendo válido el mismo resultado (cf. [12]).

El Teorema B.3 es, de hecho, consecuencia de un resultado más general, concerniente a la existencia de puntos fijos  $T(u) = u$ , para un operador compacto y creciente definido en un espacio

de Banach ordenado  $E$ . Para su uso en el Capítulo 4, nos restringiremos al caso  $E = C[0, \delta]$ , para algún  $\delta > 0$  (cf. Teorema 6.1 en [2]).

**Teorema B.6** *Sea  $T : C[0, \delta] \rightarrow C[0, \delta]$  un operador compacto y creciente. Supongamos que existen  $\underline{u}, \bar{u} \in C[0, \delta]$  tales que  $\underline{u} \leq T(\underline{u})$ ,  $\bar{u} \geq T(\bar{u})$  y  $\underline{u} \leq \bar{u}$ . Entonces el operador  $T$  admite un punto fijo minimal  $u_-$  y uno maximal  $u_+$  en el intervalo  $[\underline{u}, \bar{u}]$ .*

Finalmente, nos queda resolver la cuestión de cómo conseguir sub y supersoluciones. Puesto que nuestro objetivo es tratar siempre con problemas sublineales, la existencia de supersoluciones no ofrece problemas. Así, veamos a continuación dos métodos que usaremos para obtener subsoluciones *positivas*.

El primero de ellos es una adaptación directa de una célebre idea en [2] para el caso semilineal. En lo que sigue,  $\sigma_{1,p}$  denotará al autovalor principal de  $-\Delta_p$  en  $\Omega$  bajo condiciones de Dirichlet homogéneas, siendo  $\phi$  la autofunción positiva correspondiente, normalizada de forma que se tenga  $|\phi|_\infty = 1$  (véase la referencia al problema de autovalores en el §2.1.1).

**Teorema B.7** *Supongamos que  $f$  es una función continua en  $\mathbb{R}$  que verifica*

$$\liminf_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u)}{u^{p-1}} > \sigma_{1,p} , \quad (\text{B.3})$$

*Entonces  $\underline{u} = \delta\phi$  es subsolución de (B.1) si  $\delta > 0$  es suficientemente pequeño.*

*Demostración.* En virtud de (B.3) tenemos que, para  $\delta > 0$  suficientemente pequeño,  $f(u) \geq \sigma_{1,p}u^{p-1}$  en  $[0, \delta]$ . Por eso,

$$\int_{\Omega} |\nabla(\delta\phi)|^{p-2} \nabla(\delta\phi) \nabla\varphi = \sigma_{1,p} \int_{\Omega} (\delta\phi)^{p-1} \varphi \leq \int_{\Omega} f(\delta\phi) \varphi ,$$

para toda  $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$  no negativa, y  $\underline{u}$  es una subsolución de (B.1).  $\square$

El segundo método es la adaptación que hemos producido a partir de una situación estándar en el caso  $p = 2$  (véase [11]). Específicamente, supongamos que el problema

$$\begin{aligned} -\Delta_p u &= f(u) & \text{en } \Omega_0 \\ u &= 0 & \text{en } \partial\Omega_0 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

tiene una solución positiva acotada  $u$ , siendo  $\Omega_0 \subset \Omega$  un dominio con frontera  $C^{2,\mu}$  para algún  $0 < \mu < 1$ . Definimos

$$\underline{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega_0 \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega_0 . \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Veamos que  $\underline{u}$  es una subsolución del problema (B.1) si  $f$  satisface condiciones adecuadas.

**Teorema B.8** *Supongamos que el problema (B.4) tiene una solución positiva y acotada  $u$ , y que  $f$  es una función derivable tal que*

$$\liminf_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(u)}{u^{p-1}} > -\infty . \quad (\text{B.6})$$

*Entonces la función  $\underline{u}$  definida por (B.5) es subsolución de (B.1).*

*Demostración.* Tenemos que ver que

$$\int_{\Omega_0} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \leq \int_{\Omega_0} f(u) \varphi$$

para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\varphi \geq 0$  (mientras que sabemos que se cumple para toda  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_0)$ ).

Nótese que podemos aplicar el Teorema A.5 del Apéndice A, para obtener que  $u \in C^{2,\mu}(\overline{\Omega_{0\varepsilon}})$ , donde  $\Omega_{0\varepsilon} := \{x \in \Omega_0 : \text{dist}(x, \partial\Omega_0) < \varepsilon\}$ , y  $\varepsilon > 0$  es suficientemente pequeño. Además, del principio del máximo fuerte en [81] podemos concluir que  $\partial u / \partial \nu < 0$  en  $\partial\Omega_0$ , donde  $\nu$  es la normal exterior unitaria a  $\partial\Omega_0$ .

Elijamos  $\xi \in C^\infty(\Omega_0)$  tal que  $0 \leq \xi \leq 1$ ,  $\xi \equiv 1$  en  $\Omega_0 \setminus \overline{\Omega_{0\varepsilon}}$ . Con esta elección, podemos escribir cada  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$  en la forma  $\varphi = \xi\varphi + (1 - \xi)\varphi := \varphi_0 + \varphi_1$ . Así,

$$\int_{\Omega_0} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi = \int_{\Omega_0 \setminus \overline{\Omega_{0\varepsilon}}} f(u) \varphi_0 + \int_{\Omega_{0\varepsilon}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi_1 . \quad (\text{B.7})$$

Integrando por partes en el último término (teniendo en cuenta que  $u$  es  $C^2$ ),

$$\int_{\Omega_{0\varepsilon}} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi_1 = \int_{\Omega_{0\varepsilon}} f(u) \varphi_1 + \int_{\partial\Omega_0} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi_1 \leq \int_{\Omega_{0\varepsilon}} f(u) \varphi_1 ,$$

con lo que, volviendo a (B.7), tenemos que

$$\int_{\Omega_0} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi \leq \int_{\Omega_0 \setminus \overline{\Omega_{0\varepsilon}}} f(u) \varphi_0 + \int_{\Omega_{0\varepsilon}} f(u) \varphi_1 = \int_{\Omega_0} f(u) \varphi ,$$

que es lo que queríamos demostrar. □

## **Bibliografia**

# Referencias

- [1] **Abramowitz M., Stegun I.**, *Handkbook of mathematical formulas*, Dover Publications Inc., New York (1972).
- [2] **Amann H.**, *Fixed Point Equations and Nonlinear Eigenvalue Problems in Ordered Banach Spaces*, SIAM Review, **18** (1976), 620-709.
- [3] **Anane A.**, *Simplicité et isolation de la première valeur propre du  $p$ -Laplacien avec poids*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **305** (1987), 725-728.
- [4] **Anane A.**, *Etude des valeurs propres et de la résonance pour l'operateur  $p$ -Laplacien*, Thèse de doctorat, Université Libre de Bruxelles (1987).
- [5] **Anane A., Chakrone O., Gossez J. P.**, *Spectre d'ordre supérieur et problèmes de non-résonance*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **325** (1997), 33-36.
- [6] **Anane A., Tsouli N.**, *Sur la seconde valeur propre du  $p$ -Laplacien*, in Pitman Res. Notes Math. Ser. 343. Longman, Harlow (1996).
- [7] **Angenent S. B.**, *Uniqueness of the solution of a semilinear boundary value problem*, Math. Ann. **272** (1985), 129-138.
- [8] **Badiale M., Nabana E.**, *A note on radiality of solutions of  $p$ -Laplacian equation*, Appl. Anal. **52** (1994), 35-43.
- [9] **Barles G.**, *Remarks on uniqueness results of the first eigenvalue of the  $p$ -Laplacian*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **9** (1988), 65-75.
- [10] **Battacharya T.**, *Radial symmetry of the first eigenfunction for the  $p$ -Laplacian in the ball*, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), 169-174.
- [11] **Berestycki H., Lions P. L.**, *Some applications of the method of super and subsolutions*, En "Bifurcation and Nonlinear Eigenvalue Problems", Lecture notes in Physics 782, Springer-Verlag, Berlín (1980), 16-41.
- [12] **Bouguima S. M.**, *A quasilinear elliptic problem with a discontinuous nonlinearity*, Nonlinear Anal. **25**, 11 (1995), 1115-1121.

- [13] **Brézis H.**, *Análisis funcional*, Alianza Universidad Textos, Madrid (1984).
- [14] **Brézis H., Oswald L.**, *Remarks on Sublinear Elliptic Equations*, *Nonlinear Anal.* **10** (1986), 55-64.
- [15] **Cantrell R. S., Cosner C.**, *Diffusive logistic equations with indefinite weights: population models in disrupted environments*, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **112** (1987), 293-318.
- [16] **Clément P., Sweers G.**, *Existence and multiplicity results for a semilinear elliptic eigenvalue problem*, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* **14** (1987), 97-121.
- [17] **Clément P., Sweers G.**, *Getting a solution between sub- and supersolutions without monotone iteration*, *Rend. Instit. Mat. Univ. Trieste* **19** (1987), 189-194.
- [18] **Coffman C. V.**, *A non-linear boundary value problem with many positive solutions*, *J. Differential Equations* **54** (1984), 429-437.
- [19] **Coppel W. A.**, *Stability and Asymptotic Behaviour of Differential Equations*, Heath Mathematical Monographs, Boston (1965).
- [20] **Crandall M. G., Rabinowitz P.**, *Bifurcation from simple eigenvalues*, *J. Functional Anal.* **8** (1971), 321-340.
- [21] **Dancer N.**, *On the number of positive solutions of weakly non-linear elliptic equations when a parameter is large*, *Proc. London Math. Soc. (3)* **53** (1986), 429-452.
- [22] **Del Pino M., Elgueta M., Manásevich R.**, *A homotopic deformation along  $p$  of a Leray-Schauder result and existence for  $(|u'|^{p-2}u')' + f(t, u) = 0$ ,  $u(0) = u(T) = 0$ ,  $p > 1$* , *J. Differential Equations* **80** (1989), 1-13.
- [23] **De Thélin F.**, *Local regularity properties for the solutions of a nonlinear partial differential equation*, *Nonlinear Anal.* **6**, 8 (1982), 839-844.
- [24] **De Thélin F.**, *Sur l'espace propre associé à la première valeur propre du pseudo-laplacien*, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **303** (1986), 355-358.
- [25] **Deuel J., Hess P.**, *A criterion for the existence of solutions of nonlinear elliptic boundary value problem*, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **74**, 3 (1974), 49-54.
- [26] **Díaz J. I.**, *Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundaries. Volume I: Elliptic Equations*, Pitman Res. Notes in Math. Ser. 106, Pitman, London (1985).
- [27] **Díaz J. I., Saa J. E.**, *Existence et unicité des solutions positives pour certaines équations elliptiques quasilineaires*, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math* **305** (1987), 521-524.
- [28] **DiBenedetto E.**,  *$C^{1+\alpha}$  local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*, *Nonlinear Anal.* **7** (1983), 827-850.

- [29] **Evans L. C.**, *A new proof of local  $C^{1+\alpha}$  regularity for solutions of certain degenerate elliptic P.D.E.*, J. Differential Equations **45** (1982), 356-373.
- [30] **Fife P. C.**, *Mathematical aspects of reacting and diffusing systems*, Lecture Notes in Biomaths, 28. Springer-Verlag, Berlin/New York, (1979).
- [31] **Fraile J., López Gómez J., Sabina de Lis J.**, *On the Global Structure of the Set of Positive Solutions of Some Semilinear Elliptic Boundary Value Problems*, J. Differential Equations, **123** (1995), 180-212.
- [32] **Franchi B., Lanconelli E., Serrin J.**, *Existence and uniqueness of nonnegative solutions of quasilinear equations in  $\mathbb{R}^n$* , Adv. Math. **118** (1996), 177-243.
- [33] **Friedlander L.**, *Asymptotic behaviour of the eigenvalues of the  $p$ -Laplacian*, Comm. Partial Differential Equations **14** (8 & 9) (1989), 1059-1069.
- [34] **Furter J., López Gómez J.**, *Diffusion mediated permanence problem for an heterogeneous Lotka-Volterra competition model*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **127** (1997), 281-336.
- [35] **García Azorero J., Peral Alonso I.**, *Existence and nonuniqueness for the  $p$ -Laplacian: nonlinear eigenvalues*, Comm. Partial Differential Equations **12** (1987), 1389-1430.
- [36] **García Azorero J., Peral Alonso I.**, *Comportement asymptotique des valeurs propres du  $p$ -laplacien*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **307** (1988), 75-78.
- [37] **García Melián J.**, *Métodos topológicos y de comparación para ecuaciones y sistemas elípticos no lineales*, Memoria de Licenciatura. Universidad de La Laguna, Septiembre 1996.
- [38] **García Melián J., Sabina de Lis J.**, *The Behaviour of Stationary Solutions to Some Nonlinear Diffusion Problems*, En "Proceedings of the Second World Congress of Nonlinear Analysts", Nonlinear Anal. (30) **8** (1997), 5499-5504.
- [39] **García Melián J., Sabina de Lis J.**, *Maximum and Comparison Principles for Operators Involving the  $p$ -Laplacian*, J. Math. Anal. Appl. **218**, 1 (1998), 49-65.
- [40] **García Melián J., Sabina de Lis J.**, *Capas límite, núcleos muertos y principio de comparación en problemas de difusión no lineal*. Actas del XV CEDYA-V CMA, vol. II, 441-446. Servicio de publicaciones Universidad de Vigo, Colección Congresos (1998).
- [41] **García Melián J., Sabina de Lis J.**, *Stationary Profiles of Degenerate Problems when a Parameter is Large*, Diff. Int. Equations **13** (10-12) (2000), 1201-1232.
- [42] **García Melián J., Sabina de Lis J.**, *Uniqueness to quasilinear problems for the  $p$ -Laplacian in radially symmetric domains*, Nonlinear Anal. **43** (7) (2001), 803-835.

- [43] **García Melián J., Sabina de Lis J., Sanabria García M. A.**, *Eigenvalue analysis for the  $p$ -Laplacian under convective perturbation*, J. Comp. Appl. Math. **110** (1999), 73-91.
- [44] **García Melián J., Sabina de Lis J.**, *A local bifurcation theorem for degenerate equations with radial symmetry*, por aparecer en J. Differential Equations.
- [45] **Gidas B., Ni W. M., Nirenberg L.**, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. **68** (1979), 209-243.
- [46] **Gilbarg D., Trudinger S.**, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin (1983).
- [47] **Guedda M., Véron L.**, *Bifurcation phenomena associated to the  $p$ -Laplace operator*, Trans. Amer. Math. Soc. **310** (1988), 419-431.
- [48] **Guo Z.**, *Existence and uniqueness of positive radial solutions for a class of quasilinear elliptic equations*, Appl. Anal. **47** (1992), 173-190.
- [49] **Guo Z., Webb J. R. L.**, *Uniqueness of positive solutions for quasilinear elliptic equations when a parameter is large*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **124** (1994), 189-198.
- [50] **Hale J. K.**, *Ordinary Differential Equations*, Wiley Interscience, New York (1969).
- [51] **Kamin S., Véron L.**, *Flat core properties associated to the  $p$ -Laplace operator*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 1079-1085.
- [52] **Kesavan S., Pacella F.**, *Symmetry of positive solutions of a quasilinear elliptic equation via isoperimetric inequalities*, Appl. Anal. **54** (1994), 27-37.
- [53] **Kichenassamy S., Smoller J.**, *On the existence of radial solutions of quasilinear elliptic equations*, Nonlinearity **3** (1990), 677-694.
- [54] **Ladyzhenskaya O. A., Ural'tseva N. N.**, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Academic Press (1968).
- [55] **Lewis J.L.**, *Regularity of the derivatives of solutions to certain degenerate elliptic equations*, Indiana Univ. Math. J. **32** (1983), 849-858.
- [56] **Lieberman G. M.**, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal. **12** (1988), 1203-1219.
- [57] **Lindqvist P.**, *On the equation  $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda|u|^{p-2}u = 0$* , Proc. Amer. Math. Soc. **109**, 1 (1990), 157- 164.
- [58] **Lions J. L.**, *Quelques méthodes des résolutions des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villiers (1969).

- [59] **McKenna P. J., Reichel W., Walter W.**, *Symmetry and multiplicity for nonlinear elliptic differential equations with boundary blow-up*, Nonlinear Anal. **28** (1997), 1213-1225.
- [60] **Molina Meyer, M.**, *Global attractivity and singular perturbation for a class of nonlinear cooperative systems*, J. Differential Equations **128** (1996), 347-378.
- [61] **Murray J. D.**, *Mathematical Biology*, Biomathematics Texts Vol. 19, Springer Verlag, Berlin/New York (1993).
- [62] **Okubo A.**, *Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models*, Biomathematics Texts Vol. 10, Springer Verlag, Berlin/New York (1980).
- [63] **Rabinowitz P. H.**, *Théorie du degré topologique et applications à des problèmes aux limites non linéaires*, Paris VI et CNRS (1975).
- [64] **Reichel W., Walter W.**, *Radial solutions of equations and inequalities involving the  $p$ -Laplacian*, J. of Inequal. & Appl. **1** (1997), 47-71.
- [65] **Rubinstein J., Sternberg G., Keller J. B.**, *Fast reaction, slow diffusion and curve shortening*, SIAM J. Appl. Math. **49** (1989), 116-133.
- [66] **Rudin W.**, *Análisis real y complejo*, Alhambra (1979).
- [67] **Sakaguchi S.**, *Concavity properties of solutions to some degenerate quasilinear elliptic Dirichlet problems*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (IV) **14** (1987), 403-421.
- [68] **Sattinger D. H.**, *Monotone methods in nonlinear elliptic and parabolic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J. **21** (1972), 979-1000.
- [69] **Serrin J.**, *Local behaviour of solutions of quasi-linear elliptic equations*, Acta Math. **111** (1964), 247-302.
- [70] **Serrin J.**, *Nonlinear equations of second order*, A. M. S. Sympos. Partial Differential Equations, Berkeley, Agosto 1971.
- [71] **Simon J.**, *Regularité de la solution d'une équation non linéaire dans  $\mathbb{R}^N$* , En "Journées d'analyse non linéaire". Proceedings, Besançon, Francia (1977). Lecture notes in Mathematics 665, Springer-Verlag.
- [72] **Simon J.**, *Regularité de la solution d'un problème aux limites non linéaires*, Ann. Fac. Sci. Toulouse III (1981), 247-274.
- [73] **Smoller J., Wasserman A.**, *An existence theorem for positive solutions of semilinear elliptic equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **95** (1986), 211-216.
- [74] **Smoller J., Wasserman A.**, *On the monotonicity of the Time-Map*, J. Differential Equations **77** (1989), 287-303.

- [75] **Struwe M.**, *Variational Methods*, Springer Verlag, Berlin (1990).
- [76] **Sweers G.**, *On the maximum of solutions for a semilinear elliptic equation*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **108** (1988), 357-370.
- [77] **Tolksdorf P.**, *On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points*, Comm. Partial Differential Equations **8** (1983), 773-817.
- [78] **Tolksdorf P.**, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J. Differential Equations **51** (1984), 126-150.
- [79] **Uhlenbeck K.**, *Regularity for a class of nonlinear elliptic systems*, Acta Math. **138** (1977), 219-240.
- [80] **Ural'tseva N.N.**, *Degenerate quasilinear systems*, Zap. nauchno Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI) **7** (1968), 184-222. Trad. inglesa en Sem. Math. V. A. Steklov Mat. Inst. Leningrad **7** (1968), 83-99.
- [81] **Vázquez J. L.**, *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*, Appl. Math. Optim. **12** (1984), 191-202.
- [82] **Walter W.**, *Differential Inequalities*, in *Inequalities, Fifty years on from Hardy, Littlewood and Pólya*, Proc. of the Int. Conference London Math. Soc. (W. N. Everitt, ed.), Marcel Dekker Inc., New York, 1991.
- [83] **Walter W.**, *A new approach to minimum and comparison principles for nonlinear ordinary differential operators of second order*, Nonlinear Anal. **25** (1995), 1071-1078.
- [84] **Walter W.**, *Sturm-Liouville theory for the radial  $\Delta_p$  operator*, Math. Z. **227** (1998), pp. 175-185.
- [85] **Yosida K.**, *Functional Analysis*, Springer Verlag Berlin (1965).