

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

**«Sobre la convergencia de aproximantes tipo
Padé bipuntuales y fórmulas de cuadratura»**

**Autor: Carlos Javier Díaz Mendoza
Director: Dr. D. Pablo González Vera**

Departamento de Análisis Matemático

Agradecimientos

Quiero expresar mi más profunda gratitud a los profesores Pablo González Vera y Ramón Orive Rodríguez por su dedicación en la realización de esta tesis. Asimismo, quiero expresarles mi agradecimiento por los conocimientos que me han transmitido así como por la estrecha colaboración desinteresada, llena de paciencia y confianza que no sólo han sido vitales para que esta memoria sea hoy una realidad sino que además han dado lugar a una amistad inquebrantable.

Mi agradecimiento también a los miembros del Departamento de Análisis Matemático por el apoyo y la confianza hacia mi persona, en particular, a los compañeros de “ Matemática Aplicada ” y de “ Variable Compleja ” para quienes he sido una continua “pesadilla”. Gracias a Tere y a Antonio por el cariño, paciencia, comprensión y los ánimos que me han brindado en todo momento.

Gracias, por supuesto, a mi familia, especialmente a Maife por su inagotable cariño, paciencia, comprensión y sacrificios durante todos estos años. A ella y a mis hijos va dedicada esta tesis.

Carlos Javier Díaz Mendoza
La Laguna, Mayo de 2000

A Maife, Alba y Carlos

Contenido

Prólogo	1
I Aproximación de Padé y fórmulas de cuadratura	9
I.1 Sobre la convergencia de los Aproximantes de Padé	10
I.1.1 Convergencia de las filas de la tabla de Padé. Extensiones y generalizaciones	15
I.1.2 Convergencia de la diagonal de la tabla de Padé	28
I.2 Fórmulas de cuadratura	43
II Fórmulas de cuadratura basadas en polinomios de Laurent	75
II.1 Aspectos algebraicos	75
II.2 Fórmulas de cuadratura sobre $[0, \infty)$	88
II.2.1 Convergencia.	88
II.2.2 Resultados numéricos	99
II.3 Fórmulas de cuadratura en $[0, b)$	114
III Aproximantes tipo Padé en dos puntos	123
III.1 Aproximantes tipo Padé en dos puntos para el caso clásico	124
III.1.1 Aspectos teóricos	124
III.1.2 Resultados numéricos	137
III.2 Aproximantes tipo Padé en dos puntos para el caso no clásico	145
III.3 Aproximantes de Padé multipuntuales	157
III.4 Aplicaciones a fórmulas de cuadratura	170
Conclusiones y problemas abiertos	175
Bibliografía	187

Prólogo

La creciente matematización de las ciencias, desde las usualmente denominadas “ puras ” (Física, Química, Biología, entre otras) a las “ tecnológicas ” (Ingeniería, Arquitectura, ...), pasando por las de tipo socio-económico, demanda cada vez más el uso de técnicas de Análisis Numérico y de la Teoría de Aproximación para la resolución de una gran variedad de modelos matemáticos. La irrupción de los ordenadores digitales en las últimas décadas del siglo XX y la generalización de su uso han hecho que esta tendencia se haya manifestado con especial intensidad en los últimos veinte años.

En este sentido, una de las técnicas de uso más frecuente en numerosas aplicaciones es la de Aproximación de Funciones, la cual, constituye el núcleo fundamental de esta memoria. Debemos precisar que utilizamos el término de Teoría de Aproximación en un sentido amplio; esto es, nos referimos al conjunto de técnicas constructivas destinadas no sólo a aproximar el valor de una función en un conjunto de puntos, sino también a las conducentes a resolver numéricamente un amplio abanico de problemas que involucran a funciones, incluyendo, por ejemplo, la Integración Numérica (Fórmulas de Cuadratura y Cubatura) o la resolución de ecuaciones integro-diferenciales.

En esencia, la idea central subyacente en la Teoría de Aproximación es muy simple: Se trata de emular en lo posible el comportamiento de funciones “complicadas” (ya sea porque no se conoce una expresión explícita de las mismas o porque resultan “poco manejables” matemáticamente) mediante funciones mucho más sencillas (Aproximantes). El tipo de Aproximante utilizado y el criterio para optimizar su elección viene determinado en buena medida por la naturaleza de las funciones a aproximar y de los problemas concretos que queremos resolver.

Por razones obvias de sencillez en la manipulación e idoneidad en cuanto a propiedades algebraicas (linealidad, etc.), los Aproximantes considerados en primer lugar son los Polinomios. Es bien sabido que éstos proporcionan aproximaciones de alta calidad,

amén de una computación extremadamente simple, en el caso de funciones suficientemente “suaves” (“roly-poly”, en terminología acuñada en el texto clásico de Rice [116]). Sin embargo, cuando las funciones originales presentan comportamientos no demasiado “suaves” (bajo orden de diferenciabilidad, ...) o tratamos de aproximar nuestra función en la cercanía de singularidades, el uso de Polinomios puede tornarse claramente ineficaz (al menos desde un punto de vista numérico).

En este contexto, las alternativas más frecuentes al uso de Polinomios son las Funciones Racionales y las denominadas Funciones “ Splines ” (esencialmente, aproximantes polinómicos a trozos). Las primeras consisten simplemente en cocientes de Polinomios, con lo cual retienen buena parte de las propiedades de sencillez de estos últimos. Desde nuestro punto de vista, las funciones Racionales presentan la enorme ventaja de ser meromorfas en \mathbb{C} , por lo cual permiten el uso exhaustivo de la Teoría de Funciones de Variable Compleja para el estudio de su convergencia.

Dentro de este marco general de aproximación de funciones, una de las técnicas más usadas, por su sencillez, es la de Interpolación. Como es bien sabido, ésta consiste en imponer que el valor del Aproximante coincida con el de la función original en un conjunto de puntos prefijados (nodos de interpolación), pudiendo algunos de éstos (o todos) ser coincidentes, en cuyo caso la coincidencia entre Aproximante y función se extenderá a una o varias derivadas (orden de contacto). Lógicamente, el caso más simple dentro de este esquema general de Interpolación es aquel en el cual el conjunto de nodos se reduce a un único punto (generalmente el origen). Esta situación se conoce como Problema de Interpolación de Taylor, cuya versión racional da origen a los denominados Aproximantes de Padé. Si bien este concepto, de interpolar funciones mediante aproximantes racionales, está ya presente en la obra de grandes matemáticos de los siglos XVIII y XIX, como Jacobi, Frobenius, Krönecker, Cauchy, etc., es en la Tesis de H. Padé (1892) donde se realiza el primer estudio sistemático de las propiedades algebraicas de tales aproximantes. Este y otros grandes matemáticos de finales del XIX y/o principios del XX, como Montessus de Ballore, A. Markov, T. Stieltjes, entre otros,

contribuyeron a cimentar la Teoría de la Interpolación Racional (o de la Aproximación de Padé), tanto en relación a los aspectos algebraicos como a los primeros resultados sobre convergencia de sucesiones de estos aproximantes. En este último sentido destacan los clásicos teoremas de Markov, Stieltjes y Montessus de Ballore que, en un afán de completitud, reproduciremos y comentaremos en el primer capítulo de la presente memoria.

Tal y como comentamos anteriormente, el inicio reciente de la era digital, con la consiguiente posibilidad de implementar algoritmos numéricos cuya aplicación resultaba impensable unos años atrás, impulsó y renovó el interés por esta teoría, produciéndose en la segunda mitad del siglo XX, fundamentalmente en su último cuarto, un buen número de importantes resultados que han contribuido a que hoy podamos contemplar la Teoría de la Interpolación Racional como un edificio coherente, sólido y, en muchos aspectos, bien acabado, aunque a la par, pujante y lleno de expectativas, especialmente en lo relativo a las aplicaciones. A este respecto, cabe citar las importantes aportaciones de matemáticos, algunos de ellos en plena actividad, como O. Perron, G. Baker, J. Nuttall, H. Wallin, A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, H. Stahl, G. López Lagomasino, E. B. Saff o D. S. Lubinsky, entre muchos otros. Estas aportaciones, fundamentalmente en el estudio de la convergencia de sucesiones de Interpolantes Racionales a diversas clases de funciones, no sólo han estado dedicadas al estudio del caso unipuntual (Aproximante de Padé clásico), sino también al multipuntual (Problema de interpolación Racional de Cauchy-Jacobi) o a los denominados (en terminología debida a C. Brezinski) Aproximantes tipo-Padé, que permiten prefijar de antemano la totalidad o parte de los polos del aproximante racional, en base al posible conocimiento que se tenga sobre la estructura de las singularidades de la función a aproximar. En este último aspecto, cabe resaltar, especialmente, las aportaciones de J. L. Walsh y T. Bagby, así como otras, más recientes que detallaremos a lo largo de la memoria.

Tal y como señalamos al principio, otro de los problemas capitales de la Teoría de Aproximación, que ha venido ocupando a buena parte de la comunidad matemática a lo

largo de los siglos, es el de la integración aproximada de funciones. Mucho antes de que cupiera vislumbrar, tan siquiera remotamente, la posterior formalización rigurosa de conceptos como los de Integral de Riemann o Lebesgue, ya en la Grecia clásica, genios universales como Eudoxio o Arquímedes se interesaron por el problema de determinar el área comprendida entre una curva y el eje de abscisas, legando a la posteridad el conocido Método de Exhaución.

Desde nuestra perspectiva actual, podemos sintetizar el problema señalando que la mayor parte de las técnicas de integración numérica consisten en lo que se denomina fórmulas de cuadratura lineales; las cuales, emulando el concepto de las Sumas de Riemann (o del Método de Exhaución) tratan de aproximar el valor de la integral de la función en un cierto intervalo a través de una combinación lineal de ciertos valores funcionales (en los puntos denominados “nodos”), ponderados mediante determinados “pesos”. En este contexto, las reglas de cuadratura más simples serían las que se corresponden con Sumas de Riemann elementales, tales como las conocidas Reglas del Punto Medio, Trapezoidal o de Simpson (o sus variantes compuestas, producidas al descomponer el intervalo en pequeños subintervalos). La indudable sencillez y elegancia de tales cuadraturas elementales se ve a menudo empañada por la lentitud de su convergencia al valor de la integral. Una de las vías usadas para obtener fórmulas de cuadratura lineales con mayor estabilidad numérica y mayor velocidad de convergencia ha sido la de “liberar” a los “pesos” de las Sumas de Riemann de su condición de longitudes de subintervalos en cuyo interior se encuentren los “nodos”. La idea consiste, entonces, en determinar el valor de dichos “pesos” mediante algún criterio de optimización (destinado a garantizar que la fórmula de cuadratura proporcione buenos resultados para integrandos dentro de una clase lo más amplia posible). Históricamente, dos de los criterios más usados con este fin han sido los siguientes:

- Imponer que la fórmula de cuadratura coincida con la integral de un interpolante (originariamente un polinomio) del integrando. Este criterio determina los “ pesos ”.
- Determinar los “ pesos ” de manera que la fórmula de cuadratura integre exacta-

mente familias de funciones simples (usualmente, polinomios) lo más amplias posibles.

Lo que puede resultar sorprendente, a primera vista, es que ambos criterios resultan coincidentes, en el sentido de que conducen al mismo conjunto de “pesos” y, consecuentemente, a la misma fórmula de cuadratura. Tales fórmulas de cuadratura se denominan, de manera natural, interpolatorias, y tal vez su versión más conocida (no necesariamente la más eficaz) la constituyen las fórmulas de Newton-Cotes (usando nodos equidistantes). Por otra parte, el intento de aumentar al máximo esa capacidad de integración exacta de familias de funciones elementales (grado de precisión) nos lleva a la construcción de las denominadas fórmulas de cuadratura Gaussianas, mediante una elección muy particular de los nodos de integración, que conecta nuestro problema con otro de los temas clave de la Matemática Aplicada contemporánea: Los Polinomios Ortogonales.

En cuanto al desarrollo moderno de esta teoría, y dentro de los aspectos más conectados con nuestra investigación, queremos destacar dos temas fundamentales:

- La obtención de fórmulas de cuadratura eficaces para el caso de integrales con función “peso” (función de densidad en el sentido de Riemann-Stieltjes) compleja. Esta problemática se complica aún más cuando, además, el intervalo de integración no está acotado.
- La generalización de las fórmulas de cuadratura “ polinómicas ” (en el sentido de que integran exactamente ciertos subespacios de polinomios) mediante el uso de funciones básicas más generales, como por ejemplo las racionales (en particular, uno de los casos más simples es el de los llamados Polinomios de Laurent).

Como veremos en lo que sigue, en nuestra investigación hemos abordado conjuntamente ambos problemas.

Una vez hecho este breve y, tal vez, apresurado recorrido por estos grandes temas de Teoría de Aproximación, permítasenos introducir sucintamente el contenido de la presente memoria. Ésta se presenta estructurada en tres capítulos, estando dedicado el primero de ellos a introducir y sistematizar el conjunto de resultados previos a nuestra

propia investigación, y los otros dos a la exposición de nuestros resultados en cuanto a Fórmulas de cuadratura (Capítulo II) y Teoría de Aproximación de Padé (Capítulo III).

En el amplio capítulo introductorio a ambos tópicos (por otra parte, íntimamente relacionados entre sí), tratamos de hacer un recorrido histórico por los principales hitos que jalonan el desarrollo de ambas teorías, haciendo especial hincapié en los aspectos que más directamente inciden en nuestros resultados. Con este primer capítulo pretendemos, si se nos permite la inmodestia, presentar de forma integrada y parcialmente novedosa un cuerpo de resultados cuya relación sistematizada resulta, creemos, de difícil acceso en la literatura corriente sobre estos tópicos. Es nuestra aspiración, en este sentido, contribuir a llenar en algo ese hueco.

El segundo capítulo está dedicado a nuestras contribuciones en el estudio de fórmulas de cuadratura, centrándonos fundamentalmente en aquellas que son exactas en subespacios de Polinomios de Laurent y concediendo especial atención al caso en que el intervalo de integración no está acotado. En este sentido, además de tratar de obtener teoremas que garanticen la convergencia de sucesiones de fórmulas de cuadratura para amplias clases de integrandos y estimar las correspondientes velocidades de convergencia, tratamos de ofrecer elecciones de nodos que conduzcan a algoritmos eficaces desde el punto de vista computacional.

Finalmente, en el tercer capítulo, se estudia la posibilidad de recuperar funciones meromorfas en el plano complejo mediante Aproximantes de Padé bipuntuales con los polos total o parcialmente prefijados (tipo-Padé). En este aspecto, distinguimos dos situaciones generales:

- El primer caso se refiere a funciones meromorfas fuera de un cierto compacto K del plano complejo extendido. Los resultados obtenidos son válidos para funciones de la clase más general posible, siempre que el dominio de meromorfía, esto es, $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$, sea regular con respecto al Problema de Dirichlet. Finalmente, se muestra la extensión de estos resultados a casos más generales en los que la función es meromorfa en un abierto

con un número finito de componentes conexas (cada una de ellas regular con respecto al Problema de Dirichlet) y/o el esquema de interpolación empleado es multipuntual.

- En el segundo caso consideramos la posibilidad de que el cerrado K no esté acotado, centrándonos en el supuesto de que $K = [0, \infty)$ (de esta forma, además, los nodos de interpolación estarían en los extremos del intervalo conflictivo; con lo cual, en general, estaremos trabajando con desarrollos asintóticos). Las funciones estudiadas serán las denominadas Funciones Meromorfas de tipo Stieltjes, en la línea de trabajos precedentes de autores como A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, G. López Lagomasino y A. Martínez Finkelshtein.

Capítulo I

Aproximación de Padé y fórmulas de cuadratura

Como ya se indicó en el prólogo, a lo largo de esta memoria se abordarán dos temas importantes del análisis moderno; por un lado, la teoría de aproximación de funciones meromorfas y por otro, la convergencia de fórmulas de cuadratura.

En lo que concierne a la teoría de aproximación nos centraremos, básicamente, en la convergencia de aproximantes tipo Padé (funciones racionales que satisfacen ciertas condiciones de interpolación con parte de los polos libres). Este tipo de problemas goza de un gran interés. Muestra de ello son las numerosas contribuciones que recientemente se han obtenido, véanse por ejemplo [4, 5, 6, 7, 84, 85], que ponen de relieve por un lado, la ventaja numérica para el cálculo de estos aproximantes sobre los de Padé clásicos (con todos sus polos libres) y por otro, la aplicación a una familia más amplia de funciones, consiguiendo, en situaciones particulares, incluso iguales ratios de convergencia que los aproximantes de Padé.

En lo referente a fórmulas de cuadratura, analizaremos la convergencia de las de tipo interpolatorio y, en determinados casos, obtendremos la velocidad de convergencia; tratando de optimizar, por un lado, la amplitud de la familia de funciones para la cual se consigue dicha convergencia y por otro, la sencillez en la determinación de los nodos.

En este capítulo introductorio, haremos un breve recorrido histórico, seleccionando aquellos resultados que influyeron de forma decisiva en nuestra investigación. En este

sentido, iremos introduciendo, de forma sucesiva, todas las definiciones más usuales.

Esta paridad nos ha obligado a dividir el capítulo en dos secciones para dar más claridad a la exposición; a pesar de que, como veremos, existe una relación íntima entre los dos tópicos. La primera de ellas está dedicada a la aproximación racional y la segunda a las fórmulas de cuadratura.

I.1 Sobre la convergencia de los Aproximantes de Padé

En esta sección, nuestro interés está centrado en una breve exposición histórica, deteniéndonos sólo en aquellos resultados que de alguna forma hayan influido en nuestra investigación (para un recorrido histórico exhaustivo de la aproximación racional mediante interpolantes recomendamos, entre otros [20, 29, 31], y dentro de un contexto más general [92, 125]). En la teoría de aproximación y, en particular, en la aproximación racional de tipo interpolatorio ocupan un papel destacado aquellos aproximantes con polos libres, es decir, los APROXIMANTES DE PADÉ, AP en lo sucesivo, los cuales reciben este nombre en honor al matemático francés Henri Padé (1863-1953), quien en su tesis doctoral (1892) estudió con detalle esta clase de funciones racionales. Sin embargo, no fue Padé el primero en considerar su aplicación; hay constancia de una carta que Georges Anderson envió a William Jones en 1731 en la que aparecen unas funciones racionales que son AP. Tales funciones también fueron estudiadas por Leonhard Euler (1707-1783). Sin embargo, ni Anderson, ni Euler eran conscientes de la propiedad principal de los AP, esto es, la coincidencia de los coeficientes de su desarrollo en serie con el de la serie a aproximar tanto como sea posible. A saber, el primero que se percató de este hecho fue Joseph Louis Lagrange (1736-1813), quien cuando estudiaba las soluciones de ecuaciones diferenciales mediante fracciones continuas, transformaba los convergentes en funciones racionales, a las cuales les exigía que los coeficientes de su desarrollo en serie de potencias coincidieran con los de la solución tanto como fuera posible.

Más tarde, durante el siglo XIX, numerosos matemáticos de reconocido prestigio,

con aportaciones puntuales, fueron dotando a esta teoría de una base sólida. En particular, Cauchy (1821) en su “ Cours d’Analyse ” extiende el polinomio de interpolación de Lagrange al caso racional; luego, Jacobi, en 1846, simplifica la fórmula de Cauchy y además incluye la repetición de los nodos de interpolación (interpolación de Hermite). Por otro lado, Frobenius, en 1881, obtiene unas igualdades que hoy día llevan su nombre, sentando las bases para el posterior desarrollo algebraico de los AP. En este mismo año, Krönecker hace un tratamiento sobre la existencia de interpolantes racionales, proporcionando incluso algoritmos mediante fracciones continuas para calcularlos. En general, la posible inexistencia de interpolantes racionales impulsa el desarrollo de los aproximantes de Padé, que vienen a ser las soluciones del problema de interpolación racional linealizado y que, como veremos, siempre existen. Pero fue en 1892, bajo la dirección de Charles Hermite, cuando Padé estudió de forma rigurosa y sistemática esta clase de funciones racionales, siendo el primero que las clasificó en una tabla de doble entrada que hoy lleva su nombre, TABLA DE PADÉ, e inició el estudio de la estructura de dicha tabla (en cuanto a propiedades algebraicas). A finales del siglo XIX y principios del XX, se obtuvieron numerosas propiedades algebraicas relacionadas con la tabla, pero hubo, como veremos en la exposición, muy pocos resultados sobre convergencia. El verdadero desarrollo de esta teoría tiene lugar a partir de los años 60, como consecuencia de dos hechos fundamentales: por un lado, se encuentran aplicaciones en la física, la química, el análisis numérico, e.t.c., ver [16, 17], surgiendo así el interés teórico y por otro, se produce la generalización del uso de los ordenadores digitales que permitían realizar cálculos que anteriormente resultaban tediosos y enormemente costosos. Fruto de ello surgieron, a su vez, las distintas generalizaciones de este tipo de aproximantes. La clase de funciones aproximantes que definió Padé puede formularse de una forma muy sencilla.

En efecto, dado un desarrollo en serie en potencias de z ,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu} z^{\nu} \tag{I.1.1}$$

Padé propuso encontrar una función racional

$$\Pi_{n,m}(f) = \frac{P_{n,m}}{Q_{n,m}}$$

de forma que

$$i) \quad P_{n,m} \in \mathbb{P}_n \quad y \quad Q_{n,m} \in \mathbb{P}_m \quad Q_{n,m} \not\equiv 0 \tag{I.1.2}$$

$$ii) \quad Q_{n,m}(z)f(z) - P_{n,m}(z) = A_{n,m} z^{n+m+1} + \dots \quad z \rightarrow 0$$

donde $A_{n,m}$ es una constante que puede ser nula y el miembro derecho de ii) es una serie en potencias crecientes de z , en principio sólo formal (si (I.1.1) es convergente, ésta lo es). Como es habitual, \mathbb{P}_n denota el conjunto de polinomios de grado n a lo sumo y \mathbb{P} es el espacio de todos los polinomios.

A partir de estas condiciones, el cálculo de $\Pi_{n,m}(f)$ se reduce a resolver un sistema de ecuaciones lineales, ya que si realizamos el producto $Q_{n,m} \cdot f$, obtenemos

$$Q_{n,m}(z)f(z) = a_0^n f_0 + (a_0^n f_1 + a_1^n f_0)z + (a_0^n f_2 + a_1^n f_1 + a_2^n f_0)z^2 + \dots \tag{I.1.3}$$

siendo

$$Q_{n,m}(z) = a_0^n + a_1^n z + a_2^n z^2 + \dots + a_m^n z^m.$$

Si anulamos los coeficientes que acompañan a las potencias desde z^{n+1} hasta z^{n+m} , obtenemos un sistema homogéneo de m ecuaciones con $m+1$ incógnitas, $\{a_i^n\}_{0 \leq i \leq m}$, los coeficientes de $Q_{n,m}$, que como sabemos tiene siempre solución distinta de la trivial. Una vez determinado $Q_{n,m}$, $P_{n,m}$ sería el polinomio de Taylor de grado n de $Q_{n,m} \cdot f$, es decir, la suma de los primeros $n+1$ términos del desarrollo (I.1.3). De esta forma, el cálculo del AP resulta sumamente sencillo de computar. Conviene resaltar que aunque no hay unicidad en la determinación de $Q_{n,m}$ y, como consecuencia, tampoco en la de $P_{n,m}$, sí la hay para el cociente; por lo tanto, $\Pi_{n,m}(f)$ existe y es único. Por otra parte, obsérvese que el AP también se puede definir como aquel elemento del subconjunto de las funciones racionales (ver [136])

$$R_{n,m} = \left\{ \frac{P(z)}{Q(z)} \mid P \in \mathbb{P}_n \quad y \quad Q \in \mathbb{P}_m : Q \not\equiv 0 \right\},$$

que satisface el siguiente problema extremal

$$f(z) - \Pi_{n,m}(f)(z) = L_{n,m} z^\nu + \text{términos de mayor grado en } z \quad z \rightarrow 0 \quad (\text{I.1.4})$$

donde $L_{n,m}$ es una constante no nula y ν es un entero positivo lo mayor posible; es decir, el AP es la mejor aproximación local a f en $z = 0$ en $R_{n,m}$. Así, los aproximantes de Padé constituyen la extensión natural del desarrollo de Taylor en la clase de las funciones racionales. Pero a diferencia de los polinomios de Taylor, estos no son necesariamente interpolantes, ya que se demuestra que la igualdad (I.1.4), como consecuencia de la unicidad y de (I.1.2), se transforma en :

$$f(z) - \Pi_{n,m}(f)(z) = \hat{A}_{n,m} z^{n+m+1-d_n} + \dots z \rightarrow \infty$$

donde $d_n \in \mathbb{N}$ se denomina defecto de interpolación de $\Pi_{n,m}(f)$ en $R_{n,m}$, y cuya presencia está motivada por el hecho de que $P_{n,m}$ y $Q_{n,m}$ pueden no ser primos entre sí y ambos anularse en $z = 0$ (si $Q_{n,m}$ tiene un cero en $z = 0$ de orden d_n , entonces $P_{n,m}$ también posee, al menos, un cero de ese mismo orden); de aquí que reciban el nombre de aproximantes y no de interpolantes. Pero si existiese el correspondiente interpolante racional, necesariamente coincidiría con el AP (ver [136] para los detalles). A la función racional $\Pi_{n,m}(f)$ se le suele denotar por $[n/m]_f$ y se le denomina APROXIMANTE DE PADÉ de la función f . De acuerdo a sus dos subíndices, se pueden ordenar en una tabla de la siguiente forma

[0, 0]	[1, 0]	[2, 0]	...
[0, 1]	[1, 1]	[2, 1]	...
[0, 2]	[1, 2]	[2, 2]	...
⋮	⋮	⋮	⋱

Como ya se ha comentado, dicha tabla recibe el nombre de “ Tabla de Padé ”. La m -ésima fila de la tabla de Padé está formada por la sucesión $\{\Pi_{n,m}(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ con m fija, y a la sucesión $\{\Pi_{n,m}(f)\}_{m \in \mathbb{N}}$ con n fija se le denomina la n -ésima columna de la tabla de Padé, pudiendo también denominar diagonal principal de la tabla de Padé a la sucesión $\{\Pi_{n,n}(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$, y de forma análoga, j -ésima paradiagonal de la tabla a la

sucesión formada por $\{\Pi_{n,n+j}(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$, con j fijo. Finalmente, obsérvese que la fila cero está formada por los polinomios de Taylor de la función f .

Sobre las propiedades algebraicas de los aproximantes y la estructura de la tabla de Padé, hay una extensa bibliografía en la que aparecen detalladamente dichos resultados, como pueden ser [18, 30, 74, 135]. Sólo citaremos, en este punto, que una de las propiedades más importantes para la convergencia es la estructura de bloques que posee dicha tabla; en el sentido de que sólo puede haber elementos iguales dentro de un bloque cuadrado, de forma que si hay un bloque infinito, entonces f es necesariamente una función racional¹. Se dice que la tabla de Padé es normal cuando ningún elemento de ella se repite. Fue Padé, en su memoria doctoral antes mencionada, el primero que estudió esta propiedad en casos particulares y quien demostró en 1899 que la función exponencial tiene una tabla de Padé normal².

La utilización de este tipo de aproximantes racionales tiene dos objetivos principales, y parte de nuestra investigación está orientada a dar respuestas parciales a uno de ellos, usualmente denominado “ problema directo ” , que se basa en la recuperación de funciones holomorfas más allá del dominio de convergencia de su desarrollo de Taylor. El otro, mucho más complejo, es el “ problema inverso ”, en cuyo estudio destaca fundamentalmente Gonchar, y que consiste en obtener propiedades globales de la función a partir de propiedades locales y del estudio del comportamiento de los aproximantes. Excepcionalmente, a lo largo de la exposición, citaremos algunos de estos resultados por mor de completitud. El problema de la convergencia para los aproximantes de Padé consiste en determinar cuándo la sucesión de AP $[n/m]_f$ converge, y cuándo lo hace a f , si n y/o m tienden a infinito, o lo que es lo mismo, si $n + m \rightarrow \infty$. Según el tipo de funciones que queramos aproximar, las sucesiones más interesantes de las anteriormente mencionadas son :

- a) Las filas $\{[n/m_0]\}_{n \in \mathbb{N}}$, $m_0 \in \mathbb{N}$.
- b) La diagonal principal $\{[n/n]\}_{n \in \mathbb{N}}$.

¹Recibe el nombre de criterio de Kröneckner.

²La normalidad de la tabla es equivalente a la carencia de defecto de interpolación de los AP.

Como veremos, el problema de la convergencia de ellas es de naturaleza totalmente distinta. Con el fin de estructurar mejor este repaso, hemos dividido lo que resta de esta sección en dos subsecciones: la primera trata sobre algunos resultados sobre la convergencia de las filas de la tabla de Padé y la segunda, sobre la convergencia de la diagonal principal; siendo quizás este último tipo de sucesiones el que más interés ha suscitado, en parte por su estrecha relación con otros tópicos del análisis, como pueden ser las fracciones continuas, los polinomios ortogonales, las fórmulas de cuadratura, e.t.c..

I.1.1 Convergencia de las filas de la tabla de Padé. Extensiones y generalizaciones

Es natural que si queremos recuperar una función meromorfa con un número finito de polos en su dominio de meromorfía, debemos usar aproximantes racionales y escoger como candidatos a aquellos que posean al menos el mismo número de polos, tratando de que el resto de los polos sea expulsado del dominio de meromorfía, o bien se acumule en la frontera. Este análisis elemental, constituye el núcleo del enfoque a seguir en nuestra exposición.

La característica más importante de este tipo de sucesiones de funciones racionales es el hecho de que su denominador es de grado acotado (por el número de la fila), perteneciendo así a un espacio finito dimensional, facilitando considerablemente el estudio de su convergencia. El primer resultado en esta línea fue obtenido en 1902 por R.F. Bernard, “Viscounti de Montessus de Ballore” [44], y es generalmente referenciado como “Teorema de Montessus de Ballore”, en el cual usando resultados de Hadamard sobre la localización de polos de una función expresada en serie de potencias, demostró el siguiente resultado para funciones meromorfas. Para ello debemos introducir previamente algunos conceptos.

Siendo $f(z)$ como en (I.1.1) con radio de convergencia $R_0(f)$, admitiremos que la función admite prolongación analítica en un dominio mayor y denotaremos también por f dicha prolongación analítica fuera de $D_0(f) = \{|z| < R_0(f)\}$. Para cada $m \in \mathbb{N}$,

definimos $D_m(f)$ como el mayor disco centrado en $z = 0$ donde f admite una extensión meromorfa con no más de m polos, siendo $R_m(f)$ su radio. Denotaremos por $D_\infty(f)$ al máximo disco donde f admite una extensión meromorfa. Diremos que $m \in M(f)$ si hay exactamente m polos en $D_m(f)$.

Teorema I.1.1 Teorema de Montessus de Ballore

Sea f una función holomorfa en $z = 0$, con extensión meromorfa a $D_m(f)$ y supongamos que $m \in M(f)$. Entonces

1. A partir de un n suficientemente grande, los polinomios $Q_{n,m}$ tienen grado m y los ceros de $Q_{n,m}$ convergen a los polos de f en $D_m(f)$, de acuerdo con su multiplicidad.

2.

$$\Pi_{n,m}(f)(z) \rightrightarrows^3 f(z) \text{ en } D_m^*(f)^4$$

Setenta años después, a partir de los resultados obtenidos por A.A. Gonchar (véase [64, 65]), se puede deducir el siguiente resultado cuantitativo (ver [92] para los detalles).

Teorema I.1.2 *En las mismas condiciones que en el teorema anterior, se tiene*

1. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|Q_{n,m} - Q_m\|^{\frac{1}{n}} = \theta < 1$ donde $Q_m(z) = \prod_{k=1}^m (z - \zeta_k)$, siendo ζ_k los polos de f en $D_m(f)$.

2. $R_m(f) = \frac{\rho}{\theta}$ donde $\rho = \max_{1 \leq k \leq m} |\zeta_k|$.

3. Sea K compacto de $D_m^*(f)$, entonces

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|f - \Pi_{n,m}(f)\|_K^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sup\{|z| : z \in K\}}{R_m(f)}$$

donde $\|\cdot\|_K$ denota la norma uniforme en K .

³Aquí y en lo sucesivo $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$ en D significa que la convergencia es uniforme en compactos de D .

⁴Si Ω es un dominio de meromorfía, denotamos por Ω^* al correspondiente dominio de holomorfia, esto es, $\Omega^* = \Omega \setminus \{\text{polos de } f\}$.

En 1., la norma que se use no es relevante, por tratarse de elementos de un espacio finito dimensional. Además, Gonchar demostró que no sólo hay convergencia geométrica en $D_m^*(f)$, sino que también hay convergencia uniforme en cada subconjunto compacto de la frontera de $D_m(f)$, formado por puntos donde converja la serie en potencias de z de la función $Q_m(z)f(z)$, habiendo divergencia fuera de la clausura de $D_m(f)$.

Por otro lado, Gonchar en [65] estudió el problema inverso, caracterizando el dominio de m -meromorfía a partir del comportamiento de los polos del aproximante de Padé. Si definimos

$$\Delta(p) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |Q_{n,m}(p)|^{\frac{1}{n}}$$

y denotamos por $\mu(p)$ el número de ceros de $Q_{n,m}$ que se acumulan en p con velocidad geométrica cuando n tiende a infinito, el resultado es el siguiente:

Teorema I.1.3 *Sea $f(z)$ una función holomorfa en $z = 0$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $a \in D_m(f)$ y f tiene un polo en a .
2. $\Delta(a) < 1$.

Además, si 1. ó 2. se cumple, entonces:

$$R_m(f) = \frac{|a|}{\Delta(a)}$$

$$\nu = \mu(a)$$

donde ν es el orden del polo de f en a .

Como consecuencia de estos resultados, surge una cuestión, ¿qué ocurre cuando $m \notin M(f)$, es decir, cuando el número de polos μ en D_m es inferior a m ?. En este caso los elementos de la sucesión podrán tener un polo más que la función; la clave está, por tanto, en preguntarse qué es lo que hacen esos polos de más. En esta línea, surge entonces una conjetura propuesta por Baker y Graves-Morris en [19], que es la siguiente.

Conjetura I.1.1 *Para toda función que verifique (I.1.1) y para cualquier valor de m , existe una subsucesión de la fila m -ésima de la tabla de Padé asociada a f verificando*

$$\Pi_{n,m}(f)(z) \xrightarrow[n \in \Lambda]{} f(z) \quad \text{en } D_m^*(f) \quad (\text{I.1.5})$$

donde $\Lambda = \Lambda(f, m) \subset \mathbb{N}$ depende de f y de m .

Fruto de los intentos por demostrar la veracidad de la conjetura son algunos resultados parciales. Así para $m = 0$, estamos ante el desarrollo de Taylor, para el que sabemos que converge toda la sucesión. Y para el caso $m = 1$ y $\mu = 0$, la validez de la conjetura fue establecida por Beardon en [23]; sin embargo más de una década después, Buslaev, V.I., Gonchar, A.A. y Suetin, S.P. en [36] proporcionaron un ejemplo en el que no es posible obtener dicha subsucesión, cuando $m = 2$ y $\mu = 0$, quedando invalidada tal conjetura. No obstante, dichos autores proporcionaron una respuesta parcial positiva.

Teorema I.1.4 *Sea f como en (I.1.1) y sea μ el número de polos de f en $D_m(f)$, con $R_m(f) < \infty$. Supongamos que $\mu < m$. Entonces existe una sucesión del tipo (I.1.5) que converge uniformemente en compactos de $D_m^*(f) \setminus S$, donde S es un conjunto con no más de $m - \mu - 1$ puntos.*

Obsérvese que si $\mu = m - 1$, entonces $S = \emptyset$ y por lo tanto, la conjetura es cierta para este caso, obteniéndose asimismo el resultado de Beardon para $m = 1$ y $\mu = 0$. Por otra parte, demostraron que la conjetura era cierta si $D_m(f) = \mathbb{C}$, de lo que se sigue que cualquier función entera posee sucesiones convergentes del tipo (I.1.5) para todo m .

Como puede comprobarse, todos estos resultados se refieren a la posibilidad de recuperar con convergencia uniforme una función meromorfa en un disco centrado en $z = 0$, ¿qué ocurriría si el dominio de meromorfía Ω no es un disco centrado en el origen, sino un dominio acotado arbitrario en \mathbb{C} con el origen en su interior?. Aplicando el teorema de Montessus de Ballore no recuperaríamos la función en todo su dominio de meromorfía. Este problema lo resuelve Gonchar, quien proporciona un método alternativo en el intento de recuperar la función en todo su dominio, mediante una

función racional

$$\pi_{n,m}^{\mathbb{B}}(f) = \frac{P_{n,m}}{Q_{n,m}T_{n-m}}$$

verificando:

1. $P_{n,m} \in \mathbb{P}_n$ y $Q_{n,m} \in \mathbb{P}_m$ $Q_{n,m} \neq 0$
2. $Q_{n,m}(z)(T_{n-m}(z)f(z)) - P_{n,m}(z) = A_{n,m}z^{n+m+1} + \dots \quad z \rightarrow 0$

A la función racional $\pi_{n,m}^{\mathbb{B}}(f)$ se le denomina APROXIMANTE TIPO PADÉ de f en $z = 0$ asociado al esquema de polos \mathbb{B} , ATP en adelante⁶. Su existencia y unicidad se obtienen como consecuencia de la existencia y unicidad del AP, ya que

$$T_{n-m}\pi_{n,m}^{\mathbb{B}}(f) = \Pi_{n,m}(T_{n-m}f)$$

Nótese que aunque son funciones racionales de orden n (numerador y denominador de grado n a lo sumo, es decir, perteneciente a $R_{n,n}$), el número de parámetros libres es exactamente el mismo que el de $\Pi_{n,m}(f)$, es decir, $n + m + 1$. Ahora sí estamos en condiciones de enunciar el mencionado resultado de Gonchar (ver [64]).

Teorema I.1.5 *Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{C} conteniendo al origen y regular con respecto al problema de Dirichlet, es decir, que posee función de Green $g_{\Omega}(z;0)$ con singularidad en el origen. Supongamos que se verifica:*

$$\frac{|z|}{|T_n(z)|^{\frac{1}{n}}} \rightrightarrows \lambda e^{(-g_{\Omega}(z,0))} \quad \text{en } \Omega \quad \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{I.1.6})$$

Si f es meromorfa con m polos en Ω , siendo holomorfa en $z = 0$, entonces

1. *A partir de un n suficientemente grande, los polinomios $Q_{n,m}$ tienen grado m y los ceros de $Q_{n,m}$ convergen a los polos de f en Ω , de acuerdo con su multiplicidad.*
2. *Si K es un compacto de Ω^* , entonces*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \pi_{n,m}^{\mathbb{B}}(f) \right\|_K^{\frac{1}{n}} \leq \max[e^{-g_{\Omega}(z;0)} : z \in K].$$

⁶Usaremos Π y π para denotar los AP y ATP, respectivamente.

y definiendo, en este caso, $T_n(z) = \prod_{j=1}^n (z - b_j)^*$.

Teorema I.1.6 *En las mismas hipótesis del teorema anterior, exigiendo que el esquema de polos satisfaga (I.1.7), son equivalente las siguientes afirmaciones:*

1. $f \in M(\Omega)$ y $p_1, p_2, p_3, \dots, p_m$ son los polos de f en Ω (contando multiplicidad).

2. Existe un polinomio $Q(z) = \prod_{k=1}^m (z - p_k)$: $p_j \in \Omega \setminus \{0\}$, $j = 1, 2, 3, \dots, m$, verificando

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|Q_{n,m} - Q\|^{\frac{1}{n}} \leq \lambda < 1 \quad ; \quad \text{con } \lambda = \max_{1 \leq j \leq m} e^{-g_\Omega(p_j; 0)}$$

donde la norma usada en el apartado 2 no es relevante, ya que estamos trabajando en espacios finito dimensionales. Estos resultados fueron mejorados por Gonchar en [65], obteniendo un resultado análogo al de los aproximantes de Padé, conseguido anteriormente por él mismo (ver pag. 17).

Unos años antes, E.B. Saff extendió el teorema de Montessus de Ballore a una familia de funciones racionales con polos libres más generales que los AP y que reciben el nombre APROXIMANTES DE PADÉ MULTIPUNTUALES, que pasamos a definir. Consideremos el esquema de puntos de interpolación \mathbb{A} :

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1} & & & & & & \\ a_{1,2} & a_{2,2} & & & & & \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \cdots & a_{n,n} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{array}$$

Denotemos por $W_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - a_{k,n})^*$.

Sea Ω un dominio de $\hat{\mathbb{C}}$, supongamos que los elementos del esquema de interpolación \mathbb{A} están en Ω y consideremos f una función holomorfa en Ω . Nos planteamos el problema de encontrar

$$P_{n,m} \in \mathbb{P}_n \quad \text{y} \quad Q_{n,m} \in \mathbb{P}_m \quad Q_{n,m} \neq 0$$

verificando:

$$1. \quad \frac{Q_{n,m} \cdot f - P_{n,m}}{W_{n+m+1}} \in H(\Omega),$$

y cuando el dominio Ω es no acotado, debemos imponer además

$$2. \quad \frac{Q_{n,m}(z)f(z) - P_{n,m}(z)}{W_{n+m+1}(z)} = L_{n,m} \frac{1}{z^{l+1}} + \dots \quad z \rightarrow \infty \quad l = \min\{n, m\}$$

El segundo miembro de 2 indica que se trata de un desarrollo en serie en potencias crecientes de $\frac{1}{z}$ y $H(\Omega)$ es el conjunto de las funciones holomorfas en Ω . A la función racional $\Pi_{n,m}^{\mathbb{A}}(f) = \frac{P_{n,m}}{Q_{n,m}}$ se le denomina APROXIMANTE DE PADÉ MULTIPUNTUAL de f , APM en lo sucesivo, asociado al esquema de interpolación \mathbb{A} . La existencia y determinación del APM se prueba, exactamente igual que el caso clásico ($a_{i,n} = 0, \forall i, n$), es decir, a partir de la teoría de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos, (ver [123] para un estudio exhaustivo de la existencia y unicidad de estos aproximantes y de todos los que trataremos en nuestra memoria). Podemos pues, enunciar el siguiente teorema de Saff (ver [117]).

Teorema I.1.7 *Sea E un conjunto compacto cuyo complementario O es regular con respecto al problema de Dirichlet, en el sentido de que O posee función de Green $g_O(z; \infty)$ con singularidad en el infinito. Sea Γ_ρ ($\rho > 1$) la curva de nivel $g_O(z; \infty) = \log \rho$, y denotemos por E_ρ al interior de Γ_ρ . Supongamos que los elementos del esquema de interpolación \mathbb{A} no tienen puntos de acumulación en O y satisfacen la relación*

$$|W_n(z)|^{\frac{1}{n}} \asymp \text{Cap}(E) \cdot e^{g_O(z; \infty)} \quad \text{en } O,$$

donde $\text{Cap}(E)$ es la capacidad logarítmica de E . Supongamos, además, que f es holomorfa en E ⁷ y meromorfa con m polos en E_ρ . Si S es un compacto de E_ρ^* , entonces

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|f - \Pi_{n,m}^{\mathbb{A}}(f)\|_S^{\frac{1}{n}} \leq e^{\max\{g_{E_\rho}(z; \infty) : z \in S\}},$$

cuando $S = E$, la ratio es $\frac{1}{\rho}$. Si en el teorema hacemos $a_{i,n} = 0 \quad \forall i, n$ y $E = \mathbb{D}_0$, se vuelve a recuperar el teorema clásico de Montessus de Ballore.

⁷Por lo tanto siempre existe un abierto donde f es holomorfa y contiene a los nodos a partir de un n suficientemente grande.

Como es de suponer, en la situación multipuntual también podemos plantearnos desplazar los polos que están fijos en el infinito, surgiendo de este modo, los APROXIMANTES TIPO PADÉ MULTIPUNTUALES, cuya formulación es la extensión natural del caso clásico, que comentaremos brevemente.

Sea Ω un dominio en $\hat{\mathbb{C}}$ y $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la familia de polinomios asociada al esquema de polos \mathbb{B} contenido en el complementario de Ω y consideremos una función f en $H(\Omega)$. Si consideramos la función $T_{n-m} \cdot f$, estaría en $H(\Omega')$ donde $\Omega' = \Omega \cap \mathbb{C}$ y se puede determinar su APM asociado al esquema de puntos de interpolación \mathbb{A} . Se sigue que para $n \geq m$,

existen $P_{n,m} \in \mathbb{P}_n$ y $Q_{n,m} \in \mathbb{P}_m$ $Q_{n,m} \neq 0$ verificando:

1.
$$\frac{Q_{n,m} \cdot (T_{n-m} \cdot f) - P_{n,m}}{W_{n+m+1}} \in H(\Omega).$$

2. Si el dominio es no acotado, entonces

$$\frac{Q_{n,m}(z)(T_{n-m}(z)f(z)) - P_{n,m}(z)}{W_{n+m+1}(z)} = L_{n,m} \frac{1}{z^{m+1}} + \dots \quad z \rightarrow \infty$$

Al cociente $\pi_{n,m}^{\mathbb{A},\mathbb{B}}(f) = \frac{P_{n,m}}{Q_{n,m}T_{n-m}}$ se le denomina Aproximante tipo Padé Multipuntual de f , ATPM de ahora en adelante, asociado al esquema de interpolación \mathbb{A} con polos fijos en el esquema \mathbb{B} . En este sentido, puede decirse que fue Gonchar en [64], quien dio un resultado bastante general, utilizando el concepto de condensador correspondiente a dos compactos (ver Bagby [13]), que viene a generalizar la condición (I.1.6) impuesta en el Teorema I.1.5 en la página 20 por el mismo autor. Concretamente:

Sean E y F dos compactos disjuntos de $\hat{\mathbb{C}}$, siendo $G = \hat{\mathbb{C}} \setminus (E \cup F)$ regular con respecto al problema de Dirichlet y sea h la medida armónica de la frontera de F , $\partial(F)$, con respecto a G (en el punto z); es decir, h es la función armónica que vale 1 en $\partial(F)$ y 0 en $\partial(E)$. Entonces existen esquemas de puntos (véase también Walsh [137, Cap. XII]):

$a_{1,1}$						$b_{1,1}$				
$a_{1,2}$	$a_{2,2}$					$b_{1,2}$	$b_{2,2}$			
$a_{1,3}$	$a_{2,3}$	$a_{3,3}$				$b_{1,3}$	$b_{2,3}$	$b_{3,3}$		
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots			\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	
$a_{1,n}$	$a_{2,n}$	$a_{3,n}$	\cdots	$a_{n,n}$		$b_{1,n}$	$b_{2,n}$	$b_{3,n}$	\cdots	$b_{n,n}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

denotados por \mathbb{A} y \mathbb{B} , respectivamente, tales que $\mathbb{A} \subset E$ y $\mathbb{B} \subset F$, verificando

$$\prod_{k=1}^n \left| \frac{z - a_{k,n}}{z - b_{k,n}} \right|^{\frac{1}{n}} \Rightarrow e^{\frac{h(z) - h(\infty)}{C}} \quad \text{en } G$$

Donde $C = C(E, G)$ es la capacidad del condensador, también llamada capacidad de Green de E con respecto a G . En esta situación diremos que $(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{P}(E, G)$. En este caso, se obtiene el siguiente resultado (ver [64]):

Teorema I.1.8 *Sea f una función holomorfa en un compacto E y meromorfa en un dominio $D = E \cup G$ tal que el número de polos $\mu = \mu(f, D) < +\infty$. Supongamos que el esquema de interpolación \mathbb{A} y el de los polos \mathbb{B} satisfacen $(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathcal{P}(E, G)$. Entonces, la sucesión $\{\pi_{n,\mu}^{\mathbb{A},\mathbb{B}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ verifica:*

1. *A partir de un n suficientemente grande, los polos libres de $\pi_{n,\mu}^{\mathbb{A},\mathbb{B}}$ son atraídos por los de f en D , de acuerdo con su multiplicidad.*
2. *Sea K un compacto de D^* , entonces*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|f - \pi_{n,m}^{\mathbb{A},\mathbb{B}}(f)\|_K^{\frac{1}{n}} \leq e^{\frac{\max\{h(z); z \in K\} - 1}{C}}$$

Si particularizamos el esquema de interpolación \mathbb{A} , tomando todos los $a_{i,n} = 0$, $\forall i, n$ ($E = \{0\}$), obtenemos el Teorema I.1.5 y si hacemos que el esquema de polos satisfaga $b_{i,n} = \infty$ ($F = \{\infty\}$), con las oportunas modificaciones obtenemos el resultado de Saff.

Como hemos visto, la distribución de los polos fijos está influenciada por la distribución de los puntos de interpolación. J. Walsh hizo un estudio sistemático en [137], en la situación particular $m = 0$, es decir, cuando no hay polos libres. Se trata de la extensión natural del polinomio de interpolación cuando, en lugar de fijar los polos en el infinito, los desplazamos según nuestro interés. En este tratado se establece el concepto de dualidad entre los puntos de interpolación y los polos de los aproximantes, proporcionando condiciones necesarias y suficientes para la convergencia, trabajo que fue completado por Bagby en [14, 15]. Hemos de decir que gran parte de la investigación realizada por nosotros en este área está fuertemente influenciada por estos últimos trabajos.

En esta misma línea, Ambroladze y Wallin reescribieron estos resultados en [8] usando la maquinaria moderna de la teoría del potencial. Esta nueva interpretación les facilitó la extensión en [9], que permite que los nodos se acumulen en la frontera del dominio, en tanto que hasta ahora el esquema de nodos estaba compactamente contenido en el dominio de holomorfa. Todos estos resultados, y en particular el Teorema I.1.5 junto con el Teorema I.1.8, nos llevaron a tratar de encontrar esquemas de polos apropiados asociados a una situación multipuntual particular, la denominada bipuntual. Para fijar ideas, introduciremos seguidamente el tipo particular de aproximantes que son objeto de estudio en esta memoria. El esquema de interpolación A sólo está formado por $z = 0$ y por $z = \infty$. Sea Ω un dominio en $\hat{\mathbb{C}}$, tal que contiene al origen y al infinito y $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la familia de polinomios asociada a un esquema de polos \mathbb{B} contenida en $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. Consideremos una función f en $M(\Omega)$ (meromorfa en Ω), holomorfa en $z = 0$ y $z = \infty$, con m polos en Ω . Entonces, la función $T_{n-m}(z)f(z)$ está en $M(\Omega')$ y se puede determinar su APM asociado al esquema de interpolación formado por $z = 0$ y $z = \infty$. Se sigue que $W_n(z) = z^{p(n)}$, donde $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tal que $0 \leq p(n) \leq n+m+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, de modo que si $n \geq m$, entonces existe una única función racional

$$\frac{P_{n,m}}{T_{n-m} \cdot Q_{n,m}}$$

satisfaciendo

1. $P_{n,m} \in \mathbb{P}_n$ y $Q_{n,m} \in \mathbb{P}_m$ $Q_{n,m} \not\equiv 0$
2. $Q_{n,m}(z)T_{n-m}(z)f(z) - P_{n,m}(z) = A_{n,m} z^{p(n)} + \dots \quad z \rightarrow 0$
3. $Q_{n,m}(z)T_{n-m}(z)f(z) - P_{n,m}(z) = B_{n,m} \left(\frac{1}{z}\right)^{m+1-p(n)} + \dots \quad z \rightarrow \infty$

A la función racional $\frac{P_{n,m}}{T_{n-m}Q_{n,m}}$ se la denomina APROXIMANTE TIPO PADÉ BIPUNTUAL de f asociado a $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, relativo a la sucesión $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ y la denotaremos $(p(n)/n+m)_f^{\mathbb{B}}$. Su existencia y unicidad, se desprende como consecuencia de la existencia y unicidad del APM, ya que

$$T_{n-m} (p(n)/n+m)_f^{\mathbb{B}} = \Pi_{n,m}^{\{0,\infty\}}(T_{n-m}f)$$

Uno de los resultados que se puede deducir a partir de los obtenidos en [46], puede considerarse como una respuesta práctica a la elección de la parte fija de los polos. En síntesis, se trata de un problema de discretización efectiva, concepto que analizaremos en el último capítulo.

Teorema I.1.9 *Sea Ω un dominio regular y $f \in M(\Omega)$, siendo holomorfa en $z = 0$ y en $z = \infty$. Supongamos que f tiene m polos en Ω contando multiplicidades. Sea $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de enteros no negativos tal que para cada n , $0 \leq p(n) \leq n + m + 1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = \theta \in [0, 1]$. Consideremos además dos sucesiones $\{k(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{h(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de enteros no negativos verificando:*

$$p(n) = p(m) + k(n), \quad 0 \leq k(n) \leq n - m \quad \text{y} \quad k(n) + h(n) = n - m, \quad n \geq m.$$

Si escogemos como esquema de polos fijos \mathbb{B} a aquellos que dan lugar a la siguiente sucesión de polinomios $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$:

$$T_{n-m}(z) = \tilde{L}_{k(n)}(z)L_{h(n)}(z)$$

donde $\tilde{L}_{k(n)}(z) = z^{k(n)}\hat{L}_{k(n)}(\frac{1}{z})$ verifica⁸

$$\left| \hat{L}_n(z) \right|^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \text{Cap}(K^{-1}) \cdot e^{g_{K^{-1}}(z;0)} \quad \text{en } \Omega^{-1}$$

y $L_{h(n)}(z)$ verifica

$$\left| L_n(z) \right|^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \text{Cap}(K)e^{g_K(z;\infty)} \quad \text{en } \Omega$$

Entonces

1. *A partir de un n suficientemente grande, los polinomios $Q_{n,m}$ tienen grado m y los ceros de $Q_{n,m}$ convergen a los polos de f en Ω , de acuerdo con su multiplicidad.*
2. *Si S es un subconjunto compacto de Ω^* entonces*

$$\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \|f - (k(n)/n + m)_f^{\mathbb{B}}\|_S^{\frac{1}{n}} \leq e^{-\max\{p \cdot g_{K^{-1}}(z;0) + (1-p)g_K(z;\infty) : z \in S\}}$$

donde $K = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$.

⁸Si $A \subset \hat{\mathbb{C}}$, denotaremos por $A^{-1} = \{z \in \hat{\mathbb{C}} / \frac{1}{z} \in A\}$.

I.1.2 Convergencia de la diagonal de la tabla de Padé

Originariamente, el estudio de la convergencia de la diagonal de la tabla de Padé es el que mayor interés despertó, ya que está íntimamente relacionado con el de las fracciones continuas, que en el siglo XIX era la herramienta por excelencia en la teoría de aproximación, principalmente en el estudio de desarrollos asintóticos de una familia importante de funciones que estudiaremos más adelante. Por otro lado, el estudio de la diagonal resulta necesario cuando se pretende aproximar funciones meromorfas con infinitos polos, ya que no se pueden usar las sucesiones anteriores, que sólo dejan un número finito de polos libres para reproducir las singularidades de la función a aproximar y el resto los fijan en el infinito; como consecuencia de ello, debemos liberar esos polos surgiendo así la sucesión diagonal. Por contra, este grado de libertad de los polos ocasiona un inconveniente fundamental para la diagonal que la diferencia de las anteriores sucesiones y es que el número de polos no permanece acotado. Este hecho complica considerablemente la obtención de criterios de convergencia, ya que como veremos, en general, no se tiene control sobre ellos y por lo tanto no podemos garantizar a priori si reproducen las singularidades de la función a aproximar.

Sea f una función holomorfa en un dominio Ω tal que $0 \in \Omega$. Se tiene entonces que f admite el siguiente desarrollo en potencias de z en un entorno del $z = 0$.

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu} z^{\nu}$$

Consideremos el n -ésimo elemento $\frac{P_n}{Q_n}$ de la diagonal en la tabla de Padé, el cual denotaremos por $\Pi_n(f)$. Entonces, se tiene

$$i) \quad P_n \in \mathbb{P}_n \quad y \quad Q_n \in \mathbb{P}_n \quad Q_n \not\equiv 0 \tag{I.1.8}$$

$$ii) \quad Q_n(z)f(z) - P_n(z) = A_n z^{2n+1} + \dots \quad z \rightarrow 0$$

donde A_n es una constante que puede ser nula y el miembro derecho es una serie en potencias crecientes de z (hemos omitido un subíndice por ser iguales y para facilitar así la notación). Otra forma de expresar ii) es la siguiente:

$$\frac{Q_n(z)f(z) - P_n(z)}{z^{2n+1}} \in H(\Omega)$$

Entonces se sigue que

$$\frac{P(z)(Q_n(z)f(z) - P_n(z))}{z^{2n+1}} \in H(\Omega) \quad \forall P \in \mathbb{P}_{n-1}$$

de donde, aplicando el teorema de Cauchy, obtenemos:

$$\oint_{\Gamma} P(t) \cdot Q_n(t) \frac{f(t)}{t^{2n+1}} dt = 0 \quad , \quad \forall P \in \mathbb{P}_{n-1} \quad (\text{I.1.9})$$

siendo Γ cualquier curva cerrada de Jordan en Ω , que contiene al origen en su interior. Se sigue que el denominador es ortogonal al espacio vectorial de los polinomios de grado inferior al suyo; pero esta relación de ortogonalidad es, en general, no hermitiana, debido a que, por un lado, la curva de integración es arbitraria, contenida en Ω , y por otro, la función peso $\frac{f(t)}{t^{2n+1}}$ no sólo es compleja sino además variante (depende de n). Por tanto, de poco sirve la condición de ortogonalidad en general. Pero también sabemos que si en (I.1.9) hacemos el cambio de variable $t = \frac{1}{x}$, obtenemos

$$\oint_{\Gamma^{-1}} P(x) \hat{Q}_n(x) \hat{f}(x) dx = 0 \quad \forall P \in \mathbb{P}_{n-1}$$

donde $\hat{Q}_n(x) = x^n Q_n(\frac{1}{x})$ y $\hat{f}(x) = f(\frac{1}{x})$, con lo cual, aunque la condición de ortogonalidad sigue siendo no hermitiana, la medida ha dejado de ser variante. Como ya veremos, para una determinada familia de funciones, esta condición de ortogonalidad se convierte en hermitiana y permite deducir información acerca de los polos. Por ello, cuando se pretende estudiar la diagonal, lo normal es transformar el problema de interpolación en $z = 0$ a uno en $z = \infty$.

Por todo ello, consideraremos funciones holomorfas en un dominio Ω , con $\infty \in \Omega$, con su correspondiente desarrollo en serie de potencias en $\frac{1}{z}$:

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{\nu} \left(\frac{1}{z}\right)^{\nu}$$

Entonces, si definimos $\hat{P}_n(z) = z^n P_n(1/z)$ y $\hat{Q}_n(z) = z^n Q_n(1/z)$, con P_n y Q_n definidos en (I.1.8), se tendrá que \hat{P}_n y \hat{Q}_n satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} a) \quad & \hat{P}_n \in \mathbb{P}_n \quad \text{y} \quad \hat{Q}_n \in \mathbb{P}_n \quad \hat{Q}_n \neq 0 \\ b) \quad & \hat{Q}_n(z)f(z) - \hat{P}_n(z) = \tilde{A}_n \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1} + \dots \quad , \quad z \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (\text{I.1.10})$$

donde el miembro de la derecha en b) es un desarrollo en serie en potencias creciente de $\frac{1}{z}$. Al cociente $\Pi_n(f) = \frac{\hat{P}_n}{\hat{Q}_n}$ se le denomina Aproximante de Padé en el infinito, y será denotado por $AP(\infty)$ en lo sucesivo. Además, el $AP(\infty)$ verifica:

$$f(z) - \frac{\hat{P}_n(z)}{\hat{Q}_n(z)} = B_n \left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1-d_n} + \dots \quad z \rightarrow \infty \quad (\text{I.1.11})$$

donde d_n es el posible defecto de interpolación (el cual tiene lugar si $\deg \hat{Q}_n < n$). La importancia del estudio de la sucesión $\{\hat{Q}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, formada por los denominadores, en la convergencia de los aproximantes, se debe a que ésta depende exclusivamente de su comportamiento asintótico, como se puede deducir de la expresión del error que se obtiene a partir de (I.1.10). En efecto, al multiplicar ésta por $P \in \mathbb{P}_n$, se obtiene que la función $P(\hat{Q}_n \cdot f - \hat{P}_n)$, es holomorfa en Ω con un cero en el infinito; luego, si escogemos una curva cerrada de Jordan Γ contenida en Ω y con el ∞ en su exterior y aplicamos el teorema de Cauchy, para todo z perteneciente al dominio de holomorfia exterior a Γ , obtenemos

$$f(z) - \Pi_n(f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{P(z)\hat{Q}_n(z)} \oint_{\Gamma} \frac{P(t)\hat{Q}_n(t)}{t-z} f(t) dt \quad , \quad \forall P \in \mathbb{P}_n$$

donde se puede escoger P con el fin de probar resultados óptimos de convergencia.

En principio, como ya hemos resaltado, para funciones f generales poco se puede decir acerca de la localización de los polos, al tratarse de un producto interior no hermitiano. No obstante, el primer resultado sobre convergencia de diagonales fue dado para una familia de funciones que recibe el nombre de funciones de Markov, las cuales desempeñan un papel muy importante ya que muchas funciones elementales pertenecen a esta familia (logaritmos, raíces, e.t.c.); además de su importancia en la teoría espectral, polinomios ortogonales y fórmulas de cuadratura, entre otras aplicaciones.

Sea μ una medida finita de Borel positiva con soporte en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$. Se denomina función de Markov a la transformada de Cauchy $\hat{\mu}$ de la medida μ , esto es :

$$\hat{\mu}(z) = \int_a^b \frac{d\mu(x)}{z-x}.$$

Evidentemente, esta función es holomorfa en $\Omega = \hat{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$ y admite el siguiente

desarrollo en el ∞ , convergente para $|z| > b$,

$$\hat{\mu}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} \left(\frac{1}{z}\right)^{\nu+1}, \quad \text{donde} \quad c_{\nu} = \int_a^b x^{\nu} d\mu(x).$$

A los coeficientes c_{ν} se les denomina momentos de la medida μ . Cuando el soporte de la medida es discreto, su transformada es una función racional R , y por lo tanto, existirá un n_0 a partir del cual $R \equiv \Pi_n(R)$ para todo $n \geq n_0$. Para eliminar casos triviales, supondremos que la medida tiene soporte infinito. La propiedad que verifican los denominadores de la diagonal para esta clase de funciones puede reescribirse, usando el teorema de Fubini y el de Cauchy, de la siguiente forma:

$$\int_a^b x^l \hat{Q}_n(x) d\mu(x) = 0 \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (\text{I.1.12})$$

Por lo tanto, el denominador \hat{Q}_n del $AP(\infty)$, es el n -ésimo polinomio ortogonal con respecto a la medida μ . Ahora sí se trata de un producto interior hermitiano, y por lo tanto \hat{Q}_n posee todas las propiedades conocidas de los polinomios ortogonales clásicos, como puede ser la de tener sus ceros simples $\{x_{j,n}\}_{j=1}^n$ en (a, b) . Por consiguiente, no existen defectos de interpolación ($d_n = 0$) y consecuentemente la correspondiente tabla de Padé es normal. Además, la condición de interpolación (I.1.11) se transforman en :

$$\hat{\mu}(z) - \frac{\hat{P}_n(z)}{\hat{Q}_n(z)} = B_n \left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1} + \dots \quad z \rightarrow \infty,$$

con lo cual, por un lado el aproximante racional es un interpolante y, por otro, se pueden deducir las fórmulas de cuadratura gaussianas. En efecto, al ser $P \left(\hat{\mu} - \frac{\hat{P}_n}{\hat{Q}_n}\right)$, con $P \in \mathbb{P}_{2n-1}$, una función holomorfa Ω con un cero de orden dos en el ∞ , se verifica:

$$\oint_{\Gamma} P(z) \left(\hat{\mu}(z) - \frac{\hat{P}_n(z)}{\hat{Q}_n(z)}\right) dz = 0, \quad \forall P \in \mathbb{P}_{2n-1}$$

donde Γ es una curva cerrada de Jordan que rodea a $[a, b]$; de donde, aplicando el teorema de los residuos y el teorema de Cauchy, obtenemos las denominadas fórmulas de cuadratura de Gauss-Christoffel ⁹.

$$\int_a^b P(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,n} P(x_{i,n}), \quad \forall P \in \mathbb{P}_{2n-1}$$

⁹Ver [131] para más información.

donde $\lambda_{i,n}$ $1 \leq i \leq n$ son números positivos llamados COEFICIENTES DE CHRISTOFFEL, que están definidos de la siguiente forma:

$$\lambda_{i,n} = \int_a^b \frac{\hat{Q}_n(x)}{(x - x_{i,n})\hat{Q}'_n(x_{i,n})} d\mu(x)$$

Por lo tanto, los polos del $AP(\infty)$ son los nodos de la fórmula de cuadratura gaussiana y los pesos de ésta (coeficientes de Christoffel) son los residuos del primero.

Recíprocamente, y a partir de una fórmula de Gauss-Christoffel, si escogemos los nodos como los ceros del denominador de una función racional, y los números de Christoffel como sus residuos, entonces esa función racional es un $AP(\infty)$ de la función de Markov correspondiente. En este último análisis queda perfectamente clara la estrecha vinculación entre estos dos tópicos, los Aproximantes de Padé y las fórmulas de cuadratura gaussianas.

El primer resultado de convergencia de la diagonal fue dado por A.A. Markov, en [99], en términos de los convergentes de una determinada fracción continua. El teorema dice así.

Teorema I.1.10 Teorema de Markov

Sea μ una medida finita de Borel positiva con soporte compacto contenido en $[a, b]$. Si $\Omega = \hat{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$, entonces

$$\Pi_n(\hat{\mu})(z) \Rightarrow \hat{\mu}(z) \quad \text{en } \Omega$$

La ratio de la convergencia fue obtenida por W.B. Gragg en [73], quien demostró que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|\hat{\mu} - \Pi_n(\hat{\mu})\|_K^{\frac{1}{2n}} \leq \frac{1}{\rho(K)} \quad (\text{I.1.13})$$

para todo compacto K de Ω , donde $\rho(K) = \min\{|\Phi(x)|/x \in K\}$ y $\Phi(z)$ es la transformación conforme de Ω en el complementario del disco unidad, que deja al infinito invariante.

Para dar el siguiente paso en este tipo de resultados, tuvo que pasar casi un siglo, siendo Gonchar en [63] quien extendió el anterior resultado a ciertas perturbaciones de funciones de Markov, aunque restringiendo para ello la familia de medidas. Entendamos por tales perturbaciones el hecho de sumarle a la función de Markov una cierta

función racional. Es decir, vamos a trabajar con funciones meromorfas con la siguiente estructura:

$$f(z) = \int_a^b \frac{d\mu(x)}{z-x} dx + r(z) \quad , \quad \text{con} \quad r = \frac{P}{Q} \quad (\text{I.1.14})$$

donde $r(\infty) = 0$, siendo P y Q polinomios dados, Q con grado d , y estando su conjunto de ceros Z contenido en Ω . El teorema dice lo siguiente:

Teorema I.1.11 *Sea μ una medida finita de Borel positiva con soporte compacto F en \mathbb{R} . Supongamos que Δ es el menor intervalo que contiene a F y Ω su complementario en $\hat{\mathbb{C}}$. Si denotamos por $\Phi(z)$ a la transformación conforme de Ω en el complementario del disco unidad, conservando el punto del ∞ y por $L_n(z)$ al n -ésimo polinomio ortogonal mónico con respecto a μ . Si suponemos que se verifica:*

$$\frac{L_{n+1}(z)}{L_n(z)} \Rightarrow \frac{1}{2}\Phi(z) \quad \text{en} \quad \Omega, \quad (\text{I.1.15})$$

entonces para cualquier función de la forma (I.1.14), se tiene:

1. *Sea U un abierto de Ω tal que $\partial(U) \cap Z = \emptyset$. Entonces, a partir de un n suficientemente grande, dependiente de U , $\Pi_n(f)$ y f poseen el mismo número de polos en U de acuerdo con la multiplicidad.*

2. *Además ,*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|f - \Pi_n(f)\|_K^{\frac{1}{2n}} \leq \frac{1}{\rho(K)}$$

siendo K cualquier compacto de Ω^ y $\rho(K) = \min\{|\Phi(x)|/x \in K\}$.*

Obsérvese que este tipo de resultado es novedoso en nuestra exposición, ya que anteriormente se partía del conocimiento del número de polos. En este caso, dicha información no es necesaria, de manera que para este tipo de funciones los AP(∞) se convierten en útiles instrumentos para la detección del número y la localización de los polos, dado que cada polo de la función atrae tantos polos del aproximante como orden de multiplicidad tenga.

El propio Gonchar, en este mismo artículo, propone como ejemplo las medidas $\mu : \frac{d\mu}{dx} > 0$ c.p.t. que satisfagan la condición de *Szegö*, a saber:

$$\int_a^b \frac{\ln(\mu'(t))}{\sqrt{1-t^2}} dt > -\infty.$$

Asimismo, concluye que la condición de que el soporte esté contenido en \mathbb{R} es esencial, proporcionando al respecto un ejemplo. Más tarde, E. A. Rakhmanov en [110] demostró que la condición $\frac{d\mu}{dx} > 0$ c.p.t. es suficiente para que se cumpla (I.1.15) (por supuesto, las medidas de *Szegö* satisfacen esta condición). Además, Rakhmanov, en [111], demostró que no se puede debilitar la condición de la medida manteniendo la generalidad de la función racional r , y añadió que si se restringía la función racional al caso de tener coeficientes reales, se lograría extender el resultado clásico de Markov, obteniendo exactamente el mismo resultado que Gonchar para cualquier medida finita positiva de Borel. Posteriormente, Ambroladze y Wallin extienden en [6] el resultado a funciones que admiten la siguiente expresión

$$\hat{\mu}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z - p_k}$$

siendo $\hat{\mu}$ una función de Markov, los $a_k > 0$ y la sucesión de polos reales $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ contenida en el complementario del intervalo menor que contenga al soporte de la medida μ y tales que sólo se pueden acumular en los extremos de éste. A las correspondientes medidas $d\mu + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \delta_{p_j}$ se les suele denominar medidas de Nevai.

Unos años más tarde, Gonchar, A. A. y López Lagomasino en [68] extendieron el resultado de Rakhmanov usando APM, pero con condiciones más restrictivas de lo natural, que se concretan en exigir que la medida μ tenga $\frac{d\mu}{dx} > 0$ c.p.t., a pesar de que la perturbación racional tenga coeficientes reales.

Esencialmente, la única diferencia en las hipótesis con respecto al teorema de Saff para APM, es la simetría del esquema de interpolación con el fin de usar la teoría de polinomios ortogonales con respecto a medidas variantes. El enunciado es el siguiente.

Teorema I.1.12 *Sea μ una medida finita de Borel positiva con soporte F contenido en \mathbb{R} , verificando $\frac{d\mu(x)}{dx} > 0$ c.p.t. en F , siendo Δ el intervalo más pequeño que*

contiene a F y $r(z)$ una función racional con coeficientes reales. Si E es un compacto simétrico con respecto al eje real en Ω^* y escogemos en él un esquema de interpolación \mathbb{A} simétrico, que verifique:

$$|W_n(z)|^{\frac{1}{n}} \rightrightarrows e^{U_{\mu_E}(z)} \quad \text{en } \mathbb{C} \setminus E$$

entonces, se tiene que:

1. Para cualquier abierto U contenido en Ω tal que $\partial(U) \cap Z = \emptyset$, a partir de un n suficientemente grande, dependiente de U , $\Pi_n^{\mathbb{A}}(f)$ y f poseen el mismo número de polos en U de acuerdo con la multiplicidad.
2. Además, si K es un compacto de Ω^* , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \Pi_n^{\mathbb{A}}(f)\|_K^{\frac{1}{2n}} = \exp\left(-\frac{\sigma(K)}{C}\right).$$

donde $\sigma(K) = \min\{h(z)/z \in K\}$ y $C = C(E, G)$ denota la capacidad del condensador (E, F) , siendo $G = \mathbb{C} \setminus (E \cup F)$ y h la medida armónica de la frontera de E , $\partial(E)$, con respecto a G , y U_{μ_E} el potencial logarítmico de la distribución de equilibrio μ_E del condensador (E, F) .

Como cabría esperar, López Lagomasino, en [93], bajo las mismas hipótesis, extiende el resultado a $r(z)$ con coeficiente complejos.

Tengase en cuenta que todos estos resultados se caracterizan por el hecho de que el esquema de interpolación está compactamente contenido en el dominio de holomorfa. Fue este último autor en [94] quien obtuvo el mismo resultado permitiendo que el esquema de nodos contenido en \mathbb{R} se acumulase en uno de los extremos, siempre que la velocidad de acumulación no fuese “ excesiva ”. Recientemente, en un brillante artículo, López Lagomasino y Martínez Finkelshtein en [96] obtienen resultados cuantitativos para una determinada familia de funciones peso, obteniendo la ratio exacta de la velocidad cuando los nodos están exclusivamente en los extremos (situación bipuntual). Además, obtienen los resultados cualitativos que faltaban por estudiar. Hay que decir

que aunque no ha quedado explícitamente reflejado en la exposición, inmersa en todos estos resultados, subyace la teoría de polinomios ortogonales, incluso con respecto a medidas variantes, que por sí sola posee un gran interés.

No obstante, para esta clase de funciones (Markov) también posee un gran interés el uso de ATP. De hecho, en la literatura hay varias referencias, siendo quizás la primera significativa en el uso de ATP para funciones de Markov debida a Karlberg y Wallin quienes, en [84], fijan parte de los polos colocándolos en el soporte de la medida, de forma que el resultado dé lugar a una medida variante positiva. Concretamente, se tiene el siguiente:

Teorema I.1.13 *Sea μ una medida positiva de Borel finita soportada en $[a, b]$. Escogemos el esquema de polos fijos \mathbb{B} contenido en $[a, b]$ de tal forma que la sucesión de polinomios que define, $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tenga signo no negativo en $[a, b]$. Si tomamos el denominador del ATP de la forma $Q_{n-k(n)}T_{k(n)}$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = 0$, y K es un compacto de $\mathbb{C} \setminus [a, b]$, entonces*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|\hat{\mu} - \Pi_n(\hat{\mu})\|_K^{\frac{1}{2n}} \leq \frac{1}{\rho(K)} < 1$$

donde $\rho(K) = \min\{|\Phi(z)|/z \in K\}$, siendo $\Phi(z)$ la transformación conforme del complementario de $[a, b]$ en el complementario del disco unidad, con el infinito como punto invariante.

Unos años después, Cala y López Lagomasino en [38] generalizaron el resultado en función de un parámetro ($\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n}$) que mide la proporción de la cantidad de polos fijos, obteniendo incluso la velocidad exacta, aunque imponiendo, eso sí, que la medida tuviese $\frac{d\mu}{dx} > 0$ c.p.t.. Resultado que posteriormente generalizaron al caso multipuntual en [39], y que más tarde el primer autor extendió en [37] a una clase más amplia de medidas, denominadas regulares por Stahl y Totik, ver [127].

Recientemente, Ambroladze y Wallin en [10] obtienen los mismos resultados en el caso unipuntual con otro tipo de condiciones, incluyendo medidas positivas de Borel con soporte compacto en \mathbb{C} . También, estos mismos autores, en su empeño por elevar

el valor teórico y práctico de los $ATP(\infty)$ sobre los $AP(\infty)$, logran obtener en [5], para una subclase de las funciones de Markov, las mismas estimaciones de convergencia con ATP que con $AP(\infty)$ (además de la ya conocida ventaja de garantizar la convergencia para una clase más amplia de funciones).

Paralelamente al estudio iniciado por Markov para medidas positivas de Borel finitas de soporte compacto, Stieltjes realizó el estudio análogo para el caso de medidas finitas de Borel positivas en $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$. Ahora, las denominadas funciones de Stieltjes son las transformadas de Cauchy de medidas en \mathbb{R}^+ , esto es, funciones de la forma:

$$\hat{\mu}(z) = \int_0^{\infty} \frac{d\mu(x)}{z-x}$$

y se tiene, por tanto, que $\hat{\mu}$ es holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$. No obstante, conviene señalar que la motivación original de Stieltjes fue el estudio de criterios de sumabilidad para desarrollos divergentes del tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{1}{z}\right)^k \tag{I.1.16}$$

mediante el uso de fracciones continuas. Si la medida μ posee todos los momentos finitos $c_n = \int_0^{\infty} x^n d\mu(x)$, entonces $\hat{\mu}$ admite un desarrollo del tipo (I.1.16) que no es convergente pero sí asintóticamente convergente (ver [78] para los detalles). Como la existencia, la construcción y las propiedades elementales del $AP(\infty)$ son sólo una cuestión algebraica (resolución de un sistema de ecuaciones), se procede de forma análoga al caso de Markov, caracterizándose esta nueva situación por dos hechos que la hacen totalmente distinta a la anterior: uno es el de la interpolación en un punto de los extremos del soporte de la medida y el otro, el hecho de que los polinomios no son densos en el espacio de las funciones continuas en el soporte de la medida, por ser éste no acotado. La convergencia del $AP(\infty)$ tropieza con un problema fundamental: el denominado PROBLEMA DE MOMENTOS, que surge del hecho de que pueden existir dos medidas distintas que posean la misma sucesión de momentos. Es decir, a diferencia de lo que ocurre en el caso acotado, si la diagonal de aproximantes de Padé converge, no necesariamente lo hace a $\hat{\mu}$, y este problema se debe esencialmente a la no densidad de los polinomios.

Fue el propio Stieltjes en [128], quien dio la respuesta positiva al problema.

Teorema I.1.14 Teorema de Stieltjes

Si el problema de momentos está determinado entonces $\Pi_n(\hat{\mu})$ converge uniformemente a $\hat{\mu}$ en compactos de Ω .

En este sentido, se dice que el problema de momentos $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está determinado cuando existe una única medida μ que tiene a $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ por sucesión de momentos. Más tarde, fue Carleman en [40] quien dio una condición suficiente para que el problema de momentos esté determinado. A saber :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{c_n}} = \infty .$$

Por consiguiente, puede enunciarse el siguiente teorema.

Teorema I.1.15 Teorema de Stieltjes-Carleman

$$\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{c_n}} = \infty \text{ , entonces } \Pi_n(\hat{\mu})(z) \rightrightarrows \hat{\mu}(z) \text{ en } \Omega .$$

Pasaron muchos años hasta que López Lagomasino en [90], definiendo unos momentos generalizados y con una condición de tipo Carleman generalizada, extendió el resultado de Stieltjes-Carleman para APM, escogiendo el esquema de interpolación en $[-\infty, a]$ donde $a \in \mathbb{R}^-$. El mismo autor, en [91], extiende el resultado de Stieltjes-Carleman a perturbaciones reales de la transformada de Stieltjes, siendo todos estos resultados de tipo cualitativo. El primer resultado de tipo cuantitativo (estimación de la velocidad de convergencia) se puede deducir de los resultados obtenidos por Rakhmanov en [112], para la familia de pesos de tipo Freud, esto es, $w(x) = x^\alpha e^{ax^\gamma}$, obteniéndose la ratio de convergencia para el caso unipuntual en el infinito, como queda indicado en el siguiente teorema.

Teorema I.1.16 *Sea $w(x)$ una función peso en \mathbb{R}^+ con todos sus momentos finitos y satisfaciendo,*

$$\int_0^R \frac{\ln(w(x))}{x^{\frac{1}{2}}} dx > -\infty \quad , \quad \forall R > 0 .$$

Además, supongamos que existen dos constantes positivas γ y δ , con $\gamma > \frac{1}{2}$, tales que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\gamma} \left(\ln \frac{1}{w(x)} \right) = \delta .$$

Entonces, si denotamos por \hat{w} a la transformada de Stieltjes de w , se tiene que

$$|\hat{w}(z) - \Pi_n(\hat{w})(z)|^{\frac{1}{(2n)^{1-\frac{1}{2\gamma}}}} \Rightarrow e^{-\delta \frac{1}{2\gamma} D(2\gamma) \Re(\sqrt{-z})} \quad \text{en } \Omega ,$$

$$\text{donde } \sqrt{-1} = i \text{ y } D(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})} \right\}^{\frac{1}{\lambda}} .$$

Más de una década después, Bello y otros, en [24], extienden los resultados obtenidos en [38] por Cala y López Lagomasino a esta nueva situación para, esencialmente, la misma clase de funciones peso que Rakhmanov, consiguiendo la misma estimación de la velocidad de convergencia.

Finalmente, en el trabajo antes mencionado, López Lagomasino-Andrei Martínez, en [96], extienden el resultado de Rakhmanov al caso bipuntual considerando, al mismo tiempo, perturbaciones racionales de la transformada de Stieltjes.

En este contexto, los puntos de interpolación son exactamente los extremos del soporte de la medida, y la familia de funciones peso que consideran admiten los siguientes desarrollos asintóticos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(\frac{1}{z} \right)^{k+1} & , \quad z \rightarrow \infty \quad \text{cuando } |\arg(z)| > 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{k-1} & , \quad z \rightarrow 0 \quad \text{cuando } |\arg(z)| > 0 \end{aligned}$$

donde $c_k = \int_0^\infty x^k d\mu(x) < \infty \quad \forall k \in \mathbb{Z}$. Por un argumento análogo al caso unipuntual, podemos construir los aproximantes de Padé bipuntuales. En efecto, si denotamos $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de enteros no negativos que determina el orden de contacto en $z = 0$ con $0 \leq p(n) \leq 2n$, entonces existen polinomios P_{n-1} y Q_n tales que:

1. $P_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$ y $Q_n \in \mathbb{P}_n$ $Q_n \neq 0$
2. (a) $Q_n(z)f(z) - P_{n-1}(z) = A_n z^{p(n)} + \dots \quad z \rightarrow 0 \quad |\arg z| > 0 .$
 (b) $Q_n(z)f(z) - P_{n-1}(z) = B_n \left(\frac{1}{z}\right)^{n+1-p(n)} + \dots \quad z \rightarrow \infty \quad |\arg z| > 0 .$

La función racional $\Pi_n^{\{0,\infty\}}(f) = \frac{P_{n-1}}{Q_n}$ representa el n -ésimo APROXIMANTE DE PADÉ BIPUNTUAL (AP2) a f , relativo a la sucesión $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. El importante resultado de López Lagomasino y Martínez queda resumido en el siguiente teorema.

Teorema I.1.17 *Sea w una función peso definida de la siguiente forma:*

$$w(x) = x^\alpha e^{-\tau(x)},$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\tau(x)$ es una función continua en $(0, +\infty)$, verificando

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (sx)^\gamma \tau(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tau(x)}{(sx)^\gamma} = 1$$

para $\gamma > \frac{1}{2}$ y $s > 0$. Si se tiene que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{2n} = \theta$, entonces

$$\left| f(z) - \Pi_n^{\{0,\infty\}}(f)(z) \right|_{(2n)^{1-\frac{1}{2\gamma}}} \Rightarrow e^{-2D(2\gamma)} \left[(1-\theta)^{1-\frac{1}{2\gamma}} \Im(\sqrt{sz}) + \theta^{1-\frac{1}{2\gamma}} \Im\left(\sqrt{\frac{1}{sz}}\right) \right] \quad \text{en } \mathbb{D}^*.$$

Como podemos observar, esta familia de funciones peso es la extensión natural al caso bipuntual de la familia de pesos de Freud. Por nuestra parte, esencialmente inspirados en estos resultados, hemos logrado extender para las transformadas de Stieltjes perturbadas nuestros resultados obtenidos en [46], como ya veremos en la segunda sección del capítulo III.

En el análisis realizado hasta el momento, hemos escogido como familia de funciones a aproximar una clase muy especial, las transformadas de Cauchy, que aunque es una familia muy importante en las aplicaciones, es obviamente muy restringida. Conviene indicar que también se han podido conseguir resultados de convergencia para otras familias de funciones, como por ejemplo, las llamadas series de frecuencia de Polya, también denominadas series de coeficientes totalmente positivos, para las cuales Edrei en [56] y luego Arms-Edrei en [12] consiguen resultados bastante generales, entre los que destacamos el siguiente.

Teorema I.1.18 *Sea*

$$f(t) = A \cdot e^{\gamma t} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1 + \alpha_i \cdot t}{1 - \beta_i \cdot t},$$

donde A, γ, α_i y β_i son constantes positivas y la serie $\sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i + \beta_i)$ converge. Sea $\{\Pi_{m_k, n_k}(f)\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m_k}{n_k} = \lambda > 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} i) \quad P_{m_k}(t) &\Rightarrow A \cdot e^{\frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot \gamma t} \prod_{i=1}^{\infty} (1 + \alpha_i t) && \text{en } \mathbb{C}. \\ ii) \quad Q_{n_k}(t) &\Rightarrow e^{-\frac{\lambda}{\lambda+1} \cdot \gamma t} \prod_{i=1}^{\infty} (1 - \beta_i t) && \text{en } \mathbb{C}. \end{aligned}$$

donde $\Pi_{m_k, n_k}(f) = \frac{P_{m_k}}{Q_{n_k}}$. Y por lo tanto,

$$\Pi_{m_k, n_k}(f)(t) \Rightarrow f(t) \quad \text{en } \mathbb{C} \setminus \{\{\beta_i^{-1}\}_{i \in \mathbb{N}}\}.$$

Si además, $\gamma = 0$, entonces se consigue el mismo resultado, simplemente con la condición de que $\lim_{k \rightarrow \infty} m_k + n_k = \infty$.

Cabe preguntarse si la convergencia uniforme puede garantizarse sólo a partir de la analiticidad de la función; es decir, si una función es lo suficientemente analítica, ¿Su diagonal de Padé converge a ella?. La respuesta es negativa, ya que Wallin en [136] construye una función entera para la cual la diagonal permanece no acotada en \mathbb{C} salvo en el 0; por lo tanto, y en general, la analiticidad no es suficiente. Incluso en el caso aparentemente simple de funciones de tipo Markov, si permitimos que la medida no sea positiva, podemos tener serios problemas. Por ejemplo, en [124] se muestra como los AP(∞) diagonales a una función de tipo Markov de la forma:

$$f(z) = \int_{-1}^1 \frac{p(x)}{\pi \sqrt{1-x^2} (z-x)} dx,$$

con $p(x)$ un polinomio de grado 2 convenientemente elegido, tienen sus polos densos en todo \mathbb{C} (!). Así pues, para la convergencia uniforme se precisa de alguna propiedad estructural específica de la función, por lo que si pretendemos obtener resultados sólo a partir de la analiticidad de la función, debemos debilitar el tipo de convergencia, de tal forma que pequeños entornos de los polos donde ésta pueda fallar sean conjuntos excepcionales. En este sentido Nuttall en [106], demuestra:

Teorema I.1.19 Teorema de Nuttall

Sea f una función meromorfa en \mathbb{C} . Entonces $\{\Pi_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en medida planar sobre subconjuntos compactos de \mathbb{C} .

Luego, Pommerenke en [109] extiende este resultado en el sentido de la convergencia en capacidad logarítmica.

Teorema I.1.20 Teorema de Pommerenke

Sean E un conjunto compacto con $Cap(E) = 0$ y f una función holomorfa en $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$. Entonces, para todo $\epsilon > 0$, $\eta > 0$, $r > 1$ y $\lambda > 1$ existe un m_0 tal que para todo $m \geq m_0$ se tiene:

$$|f(z) - \Pi_{n,m}(f)(z)| < \epsilon^m, \quad \text{donde } n \text{ satisface } \frac{1}{\lambda} \leq \frac{n}{m} \leq \lambda$$

para $|z| \leq r$, con $z \notin E_{n,m} : Cap(E_{n,m}) < \eta$. Además, si K es un subconjunto compacto de $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ que no contiene ningún punto de acumulación de los polos de los aproximantes, la convergencia es uniforme en K .

Obsérvese que el teorema, además de garantizar la convergencia, proporciona una estimación de la velocidad, que es más rápida que la geométrica y que mejora el teorema de Nuttall, ya que la capacidad logarítmica mayor a la medida planar de Lebesgue ($m(K) \leq (Cap(K))^2$ para cualquier compacto K de \mathbb{C}). Estos dos últimos resultados fueron obtenidos también para las para-diagonales de la tabla de Padé. Este orden de convergencia implica la extensión univaluada de f en su dominio de definición; por lo tanto, en esta clase de funciones no se admiten los puntos de rama por singularidades. En este sentido, para las funciones multivaluadas (con puntos de rama) la convergencia debe ser más lenta. Fue Stahl quien estableció el primer resultado general para esta clase de funciones, demostrando previamente la existencia del dominio maximal de holomorfía D_f (a $K_f = \hat{\mathbb{C}} \setminus D_f$ se le denomina conjunto de capacidad mínima con respecto a f y viene caracterizado por una cierta propiedad de simetría, ver [121, 122, 126]) de las funciones que son localmente holomorfas en un dominio cuyo complementario tiene capacidad nula.

Teorema I.1.21 *Sea f una función localmente analítica en $\hat{\mathbb{C}} \setminus E$ con $\text{Cap}(E) = 0$, siendo f holomorfa en ∞ , entonces la diagonal de la tabla de Padé $\{\Pi_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en capacidad sobre subconjuntos compactos del dominio extremal D_f . Es más, si K es un subconjunto compacto de D_f , se sigue que para cualquier $\epsilon > 0$*

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \text{Cap} \left\{ z \in K : |f(z) - \Pi_{n,m}(f)(z)| \geq (g_{D_f}(z, \infty) + \epsilon)^{n+m} \right\} = 0$$

y

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \text{Cap} \left\{ z \in K : |f(z) - \Pi_{n,m}(f)(z)| \leq (g_{D_f}(z, \infty) - \epsilon)^{n+m} \right\} = 0$$

donde $N = \{(n_k, m_k) : \frac{n_k}{m_k} \rightarrow 1 \text{ cuando } \lim_{k \rightarrow \infty} n_k + m_k = \infty\}$

Por tanto, este resultado no sólo proporciona la convergencia, sino además la velocidad exacta de ésta. La clase de funciones para la cual es cierto estos resultados fue caracterizada, además de extenderse los resultados para APM y para la mejor aproximación racional (véase asimismo [67], así como [125] para una exposición exhaustiva).

I.2 Fórmulas de cuadratura

En esta sección haremos un breve recorrido histórico sobre las fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio, sin entrar en detalles, al objeto de resaltar tan sólo aquellos resultados que nos sirvieron de motivación para el desarrollo de nuestra investigación. Para una información más completa nos remitimos a los textos clásicos de Davis-Rabinowitz [42], Krylov [88] y Nikolski [102], entre otros, así como al interesante compendio de Gautschi [59]. Tal y como se trató en la sección anterior, y como veremos en esta exposición con más detalle, esta parte de las matemáticas está íntimamente relacionada con la teoría de los polinomios ortogonales, así como con la aproximación racional, fundamentalmente a través de las fracciones continuas (al menos en sus orígenes). En esencia, nuestro objetivo no es otro que evaluar integrales definidas de la forma:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Como es bien conocido, el cálculo de una integral definida es un problema matemático muy antiguo que se remonta hasta los tiempos de Eudoxio con el método de exhaustión,

desarrollado posteriormente por Arquímedes con el cálculo de áreas y volúmenes de algunas figuras geométricas y de magnitudes físicas tales como el centro de gravedad. El origen geométrico del problema relativo al cálculo del área comprendida entre un trozo de curva y el eje de abscisas influyó considerablemente, como es lógico, en las técnicas para aproximar dicha integral; ya que la reducción del área en cuestión a un mallado de figuras planas perfectamente conocidas determinó la aparición de las llamadas “ reglas primitivas ”, como pueden ser la regla rectangular o trapezoidal, entre otras (ver Nikolski [102], para más detalle). Todas ellas respondían a la siguiente fórmula de aproximación:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$$

Hoy en día, dicha fórmula parece natural a partir de la definición de integrabilidad de Riemann, pero su uso práctico data de algo más de doscientos años antes de Cristo. A la expresión

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) \quad (\text{I.2.1})$$

se la denomina FÓRMULA DE CUADRATURA DE n PUNTOS, y a los números λ_k y x_k se les llama, respectivamente, coeficientes (o “ pesos ”) y nodos de la fórmula de cuadratura. Pero fue Newton, en 1676, quien obtuvo un método general basado en un resultado que por sí sólo posee una importancia trascendental en la teoría de aproximación (obtenido también por Cotes de forma independiente). Nos referimos a la existencia, unicidad y construcción del polinomio interpolador. En efecto, es bien conocido, el siguiente resultado.

Teorema I.2.1 *Sea un conjunto de puntos $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ en $[a, b]$: $x_i \neq x_j \forall i, j$ y una función f definida en $[a, b]$. Entonces, existe un único polinomio de grado a lo sumo $n - 1$, verificando*

$$p_{n-1}(x_i) = f(x_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Si escribimos:

$$f(x) = p_{n-1}(x) + r_n(f, x) \quad \forall x \in [a, b] \quad (\text{I.2.2})$$

donde $r_n(f, x)$ denota el error de interpolación, se cumple

$$r_n(p, x) \equiv 0 \quad \forall p \in \mathbb{P}_{n-1}. \quad (\text{I.2.3})$$

Newton, además dio, explícitamente la expresión de dicho polinomio en términos de las diferencias divididas, con una expresión muy complicada y difícil de manejar. No obstante, un siglo más tarde, en 1795, Lagrange dedujo una expresión bastante más sencilla y útil para las posteriores generalizaciones, a saber:

$$p_{n-1}(x) = \sum_{j=1}^n l_{j,n}(x) f(x_j), \quad (\text{I.2.4})$$

donde $l_{j,n} \in \mathbb{P}_{n-1}$ y verifica que $l_{j,n}(x_i) = \delta_{i,j}$ ¹⁰. Estos polinomios recibe el nombre de polinomios fundamentales de Lagrange.

Haciendo uso de (I.2.2) y (I.2.4) obtenemos

$$I(f) = I_n(f) + E_n(f) \quad (\text{I.2.5})$$

donde

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx, \\ I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} f(x_j) \quad y \quad E_n(f) = I(r_n(f, \cdot))$$

siendo

$$\lambda_{j,n} = I(l_{j,n}). \quad (\text{I.2.6})$$

Obsérvese que, como consecuencia de (I.2.3), se obtiene

$$I(p) = I_n(p) \quad \forall p \in \mathbb{P}_{n-1}$$

Por esta razón, se dice que dicha fórmula de cuadratura tiene grado de exactitud (o de precisión) $n-1$, $d(I_n) = n-1$; recíprocamente, cualquier fórmula de cuadratura del tipo (I.2.1) que posea grado de exactitud $n-1$ se obtiene por el proceso de interpolación que acabamos de describir. Como consecuencia de esta caracterización, reciben el nombre

¹⁰ $\delta_{i,j}$ es la delta de Krönecker.

de FÓRMULA DE CUADRATURA DE TIPO INTERPOLATORIA, FCI de ahora en adelante.

Si denotamos por w_n al polinomio nodal, es decir:

$$w_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)$$

los polinomios fundamentales de Lagrange admiten la expresión:

$$l_{j,n}(x) = \frac{w_n(x)}{(x - x_j)w'_n(x_j)}$$

con lo cual (I.2.6) se transforma en

$$\lambda_{j,n} = I\left(\frac{w_n(\cdot)}{(\cdot - x_j)w'_n(x_j)}\right) \quad (\text{I.2.7})$$

Si los nodos se escogen equiespaciados, los correspondientes $\lambda_{j,n}$ reciben el nombre de números de Cotes, ya que fue él quien primero los estudió, computando algunos de ellos (estas fórmulas reciben el nombre de FÓRMULAS DE CUADRATURA DE NEWTON-COTES, y contienen, como caso particular, a las ya conocidas reglas rectangular, trapezoidal y de Simpson). Evidentemente, en toda esta teoría juega un papel fundamental la localización de los nodos (ya que en las FCI los pesos están determinados si se conoce el polinomio nodal w_n , por (I.2.7)). Entonces surge una importante cuestión, ¿podremos elegir los nodos de forma que se logre aumentar el grado de exactitud de la fórmula de cuadratura?. En principio, cabría pensar que se puede llegar hasta $2n - 1$, ya que al quedar n parámetros (nodos) por determinar, existiría la posibilidad, a priori, de aumentar en n el grado de exactitud de la fórmula de cuadratura, una dimensión por cada parámetro que fijemos. Fue Gauss, en 1814, quien, conocedor de la teoría desarrollada por Newton-Cotes y haciendo uso de su gran conocimiento sobre las series hipergeométricas, obtuvo el resultado esperado que, más tarde, en 1877, Christoffel generalizó para una clase más amplia de integrales. Analizaremos estos últimos resultados, ya que recogen las ideas innovadoras de Gauss y hacen uso del vínculo existente entre fórmulas de cuadratura y fracciones continuas. Las integrales a las cuales extendió Christoffel los resultados de Gauss reciben el nombre de integrales “ pesadas ” (o ponderadas):

$$I(f) = \int_a^b f(x)\rho(x)dx \quad (\text{I.2.8})$$

donde ρ es una función positiva integrable en $[a, b]$ (función de densidad), siendo a, b t.q. $-\infty < a < b < \infty$ (Gauss hizo el estudio para $\rho \equiv 1$). El objetivo del problema es buscar una colección de puntos $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$, para los cuales la correspondiente FCI sea exacta para polinomios de grado menor o igual a $2n - 1$, es decir:

$$I(f) = I_n(f) + E_n(f) \quad : \quad E_n(p) = 0 \quad \forall p \in \mathbb{P}_{2n-1} \quad (\text{I.2.9})$$

De la teoría clásica de fracciones continuas, se sabe que la función $\hat{\rho}$ (transformada de Cauchy de ρ) posee una fracción continua asociada

$$\hat{\rho}(x) = \frac{\beta_0}{x - \alpha_0} - \frac{\beta_1}{x - \alpha_1} + \frac{\beta_2}{x - \alpha_2} - \dots$$

cuyos coeficientes α_k y β_k son reales y $\beta_k > 0$. Además, es sabido que su n -ésimo convergente $C_n(x)$ verifica:

$$\hat{\rho}(x) - C_n(x) = O\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right) \quad , \quad x \rightarrow \infty \quad (\text{I.2.10})$$

donde C_n es una función racional del tipo $R_{n-1,n}$, que denotaremos por $\frac{p_{n-1}}{q_n}$ y que posee todos los polos simples y contenidos en $[a, b]$, ya que tanto su denominador como su numerador satisfacen la ecuación en diferencias :

$$L_{k+1}(t) = (t - \alpha_k)L_k(t) - \beta_k L_{k-1}(t) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

con datos iniciales $L_{-1} \equiv 0$ y $L_0 \equiv 1$ para el numerador y $L_{-1} \equiv -1$ y $L_0 \equiv 0$ para el denominador.

De aquí, podemos descomponer C_n en fracciones simples dando lugar a la expresión

$$I\left(\frac{1}{x - \cdot}\right) - \sum_{k=1}^n \frac{a_j}{x - x_j} = O\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right) \quad x \rightarrow \infty \quad (\text{I.2.11})$$

Así, aplicando el desarrollo

$$\frac{1}{x - t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{x^{k+1}}$$

que es uniformemente convergente cuando x es lo suficientemente grande, en (I.2.11), obtenemos

$$I(t^k) = I_n(t^k) \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1$$

donde $I_n(f) = \sum_{j=1}^n a_j f(x_j)$, deduciéndose el siguiente resultado.

Teorema I.2.2 *Si escogemos como nodos de la fórmula de cuadratura (I.2.1) los polos del convergente C_n y como pesos los respectivos residuos, podemos construir la fórmula de cuadratura de grado de exactitud máxima $2n - 1$, y recíprocamente.*

Esta fórmula de cuadratura recibe el nombre de GAUSS-CHRISTOFFEL, que denotaremos por FCG. Christoffel no sólo extendió los resultados de Gauss para integrales pesadas, sino que además generalizó la teoría desarrollada por Jacobi en 1826, que unificaba los resultados de Newton-Cotes y los de Gauss de una forma muy elegante, relacionando por primera vez los polinomios ortogonales con esta teoría. A saber:

Teorema I.2.3 *La fórmula de cuadratura (I.2.1) es exacta en el espacio de polinomios \mathbb{P}_{n-1+k} , con $1 \leq k \leq n$, si y sólo si se satisfacen las dos condiciones:*

1. *La fórmula de cuadratura es interpolatoria.*
2. $I(w_n \cdot p) = 0$, $\forall p \in \mathbb{P}_{k-1}$.

donde w_n es el polinomio nodal.

Un breve análisis de este resultado nos permitirá hacer tres interpretaciones distintas, que aunque en el caso polinómico conducen a la misma respuesta, este no será el caso para posteriores generalizaciones. En primer lugar, la de su motivación, que es conseguir fórmulas de cuadratura de grado máximo de exactitud (lo que se denomina “ la vía gaussiana ”). En segundo lugar, si escogemos los nodos como los ceros del elemento de \mathbb{P}_n que es ortogonal a \mathbb{P}_{n-1} , en este caso el polinomio nodal coincide con el n -ésimo polinomio ortogonal con respecto al peso ρ (ésta daría lugar a la denominada “ vía ortogonal ”). Finalmente, el enfoque obtenido cuando se escogen como nodos los ceros del n -ésimo polinomio ortogonal al espacio en el que es exacta la FCI (la denominaremos “ vía Tchebyshev ”, cuyo nombre vendrá justificado por el hecho de que en determinadas situaciones el correspondiente polinomio nodal satisface propiedades análogas a los polinomios clásicos de Tchebyshev). Vamos a describir el proceso que

realizó Christoffel para conseguir este resultado, ya que además de estar presente en las posteriores generalizaciones, nos va a permitir establecer la conexión con los polinomios ortogonales y la aproximación de Padé. Para ello introdujo varias funciones especiales, a saber:

$$\hat{\rho}(x) = \int_a^b \frac{\rho(t)}{x-t} dt \quad P_{n-1}(x) = \int_a^b \frac{w_n(x) - w_n(t)}{x-t} \rho(t) dt$$

$$\sigma_n(x) = \int_a^b \frac{w_n(t)}{x-t} \rho(t) dt$$

Una simple manipulación nos conduce a :

$$w_n(x)\hat{\rho}(x) - P_{n-1}(x) = \sigma_n(x) \quad (\text{I.2.12})$$

Cuando x es suficientemente grande, podemos expresar $\sigma_n(x)$ de la siguiente forma:

$$\sigma_n(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\theta_l}{x^{l+1}} \quad , \quad \theta_l = \int_a^b t^l w_n(t) \rho(t) dt$$

sustituyendo esta igualdad en (I.2.12), obtenemos:

$$w_n(x)\hat{\rho}(x) - P_{n-1}(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\theta_l}{x^{l+1}}$$

dado que por definición P_{n-1} es un polinomio de grado a lo sumo $n-1$ y w_n es un polinomio de grado n . De la igualdad anterior se sigue que $\frac{P_{n-1}}{w_n}$ es el aproximante tipo Padé en el infinito de $\hat{\rho}$ (con todos los polos fijos). Si ahora exigimos que $\theta_l = 0$ con $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$, obtenemos:

$$w_n(x)\hat{\rho}(x) - P_{n-1}(x) = \sum_{l=n}^{\infty} \frac{\theta_l}{x^{l+1}}$$

donde ahora w_n es el n -ésimo polinomio ortogonal Q_n asociado a ρ y, por lo tanto, $\frac{P_{n-1}}{Q_n}$ es el aproximante de Padé de la función $\hat{\rho}(x)$ (por la unicidad de éste y teniendo en cuenta que el convergente C_n verifica la misma igualdad, ver (I.2.10), ambos coinciden). Esta propiedad de los polinomios ortogonales, es decir, la de ser los denominadores de los correspondientes convergentes de la fracción continua asociada a la transformada de Cauchy de su peso, era el procedimiento que se seguía durante el siglo XIX para

el estudio de tales familias de polinomios. Cabe resaltar que este análisis nos proporciona un camino para encontrar fórmulas de cuadratura intermedias por medio de los aproximantes tipo de Padé ($\theta_l = 0$, $l = 0, 1, 2, \dots, k : k < n - 1$), con parte de los polos libres; la idea que, casi un siglo después, Kronrod usó para sus métodos de implementación. Posteriormente, Stieltjes, en 1894, extiende todos estos resultados a integrales de la forma:

$$\int_a^b f(t) d\varphi(t) \quad (\text{I.2.13})$$

donde φ es una función acotada, monótona creciente, con un número infinito de valores en (a, b) , que se denomina medida de Stieltjes.

Unos años antes, Markov en 1885, obtuvo mediante otros argumentos los mismos resultados que Christoffel, estableciendo una expresión del error $E_n(f)$ en términos de la suavidad de la función. La idea de partida es el uso del polinomio de interpolación de Hermite asociado a f , para lo cual es necesaria la existencia de la derivada de f en los nodos de interpolación.

Teorema I.2.4 *Sea un conjunto de puntos en $[a, b]$, $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} : i \neq j \forall i, j$ y f una función arbitraria definida en $[a, b]$ y derivable en dichos puntos. Entonces, existe un único polinomio H_n de grado a lo sumo $2n - 1$, verificando:*

$$\begin{aligned} H_n(x_i) &= f(x_i) \\ H'_n(x_i) &= f'(x_i) \end{aligned} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Además si f es derivable con continuidad hasta el orden $2n$ en $[a, b]$, es decir, $f \in C^{2n}([a, b])$, entonces $\forall x \in [a, b]$, $\exists \xi_n = \xi_n(x) \in (a, b)$ t.q.

$$f(x) - H_n(x) = \frac{f^{(2n)}(\xi_n)}{2n!} w_n^2(x)$$

Si hacemos uso de la anterior igualdad (I.2.8), se obtiene

$$I(f) = I_n(f) + \frac{f^{(2n)}(\zeta_n)}{2n!} \cdot \gamma_n,$$

siendo

$$\gamma_n = \int_a^b w_n^2(t) \rho(t) dt$$

y en este caso:

$$I_n(f) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) + \sum_{k=0}^n A_k f'(x_k)$$

Si exigimos que $A_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, se concluye que los nodos son necesariamente los ceros del n -ésimo polinomio ortogonal Q_n con respecto a la función peso ρ . Por tanto,

Teorema I.2.5 *Si f es una función de $C^{2n}([a, b])$, entonces el resto $E_n(f)$ en la ecuación (I.2.9) es igual a*

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\zeta_n)}{2n!} \gamma_n,$$

donde $\gamma_n = \int_a^b Q_n^2(t) \rho(t) dt$, siendo Q_n el n -ésimo polinomio ortogonal mónico con respecto a la función peso ρ y ζ_n un valor en (a, b) .

Por supuesto, para el caso de una FCI es posible obtener un resultado similar. Así, si $f \in C^n([a, b])$, entonces (I.2.5) se transforma en :

$$I(f) = I_n(f) + \frac{1}{n!} \int_a^b f^{(n)}(\xi_n(t)) w_n(t) \rho(t) dt$$

Cabe señalar que ya Heine, en 1881, había obtenido otra expresión del error para las FCI para una clase más restrictiva de funciones: las holomorfas en un entorno U del intervalo $[a, b]$, de la siguiente forma:

$$E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\sigma_n(z)}{w_n(z)} f(z) dz \quad (\text{I.2.14})$$

siendo Γ una curva cerrada de Jordan que rodea al intervalo $[a, b]$ y contenida en U . Sin embargo, este tipo de expresiones tenía un uso bastante limitado, ya que exigía demasiada regularidad a la función, en tanto que lo que se perseguía era que las fórmulas de cuadratura fuesen convergentes para una familia de funciones lo más amplia posible. En este sentido, siguiendo la demostración clásica relativa a la estimación del error para integrandos continuos en las fórmulas gaussianas obtenida por Bernstein, podemos deducir fácilmente (ver [41]).

Teorema I.2.6 *Si la fórmula de cuadratura (I.2.1) es exacta en \mathbb{P}_{n-1+k} , entonces para toda función continua se tiene:*

$$|E_n(f)| \leq (c_0 + A_n)M_{n-1+k}(f) \quad (\text{I.2.15})$$

donde $c_0 = \int_a^b \rho(t) dt$, $\sum_{k=1}^n |\lambda_{j,n}| \leq A_n$ y $M_k(f) = \inf_{P \in \mathbb{P}_k} \|f - P\|_\infty$, siendo $\|\cdot\|_\infty$ la norma del máximo y $M_k(f)$ denota al usualmente denominado error “mini-max”.

Finalmente, Sydow, en 1978, demostró en [129], sólo para el caso gaussiano e integrandos analíticos, el siguiente resultado.

Teorema I.2.7 *Si consideramos la fórmula de cuadratura de Gauss-Christoffel (I.2.9), entonces una estimación del resto es*

$$|E_n(f)| \leq 4 \cdot c_0 (1 - \varrho^{-2})^{-1} \varrho^{-2n} \cdot \max_{z \in \Gamma_\varrho} |f(z)| \quad (\text{I.2.16})$$

siendo Γ_ϱ una elipse con focos a y b , y tal que la suma de semiejes es ϱ , en cuyo interior es holomorfa la función f .

Estudiadas algunas de las distintas expresiones del error, a partir de ahora nos centraremos en el estudio de la convergencia de sucesiones de FCI para clases de funciones lo más amplia posible, tratando de considerar nodos de fácil computación. Para ello, planteamos el siguiente problema:

Dada una tabla de nodos \mathbb{X} contenidos en un intervalo finito $[a, b]$, de la siguiente forma

$$\begin{array}{ccccccc} x_{1,1} & & & & & & \\ x_{1,2} & x_{2,2} & & & & & \\ x_{1,3} & x_{2,3} & x_{3,3} & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ x_{1,n} & x_{2,n} & x_{3,n} & \cdots & x_{n,n} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{array}$$

siendo $a \leq x_{1,n} < x_{2,n} < \cdots < x_{n,n} \leq b$, $\forall n$, consideramos las fórmulas de cuadratura interpolatorias de n puntos $\{x_{j,n}\}_{j=1}^n$, asociadas a las integrales

$$I(f) = \int_a^b f(x) d\varphi(x)$$

que, como sabemos, satisfacen

$$I(f) = I_n(f) + E_n(f)$$

donde

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} f(x_{j,n}) \quad \text{y} \quad E_n(p) = 0, \quad \forall p \in \mathbb{P}_{n-1}$$

Nuestro objetivo es escoger la tabla de nodos \mathbb{X} de forma que las fórmulas de cuadratura converjan, es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = I(f) \quad \forall f \in A, \quad (\text{I.2.17})$$

de manera que la familia de funciones A sea lo más amplia posible.

Un primer resultado de convergencia cualitativo lo dio Stieltjes para las fórmulas de cuadratura de Gauss-Christoffel, en 1894, considerando integrandos Riemann-Stieltjes integrables. Posteriormente, Steklov dio un resultado más general, válido para cualquier familia de fórmulas de cuadratura.

Teorema I.2.8 *Sea un intervalo finito $[a, b]$ y supongamos que todos los pesos $\{\lambda_{j,n}\}_{j=1}^n$ de la sucesión de fórmulas de cuadratura asociada a la integral (I.2.13) son positivos. Si hay convergencia para cualquier polinomio, entonces también la hay para cualquier función Riemann-Stieltjes integrable.*

Más tarde, Pólya dio una caracterización de la convergencia para cualquier familia de fórmulas de cuadratura, pero a cambio limitó la amplitud de la familia de integrandos.

Teorema I.2.9

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = I(f) \quad \forall f \in C([a, b]) \quad \text{si y sólo si}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(p) = I(p) \quad \text{para todo } p \in \mathbb{P}. \\ ii) \quad \sum_{j=1}^n |\lambda_{j,n}| \leq K \quad \text{para todo } n, \end{array} \right.$$

donde K es una constante positiva.

(este teorema de Pólya puede verse como un caso particular del teorema de Banach-Steinhaus para operadores lineales continuos). Obsérvese que las fórmulas de cuadratura de Gauss-Christoffel satisfacen estas dos condiciones: la primera, por ser exacta para cualquier polinomio tomando un n suficientemente grande, y la segunda, dado que los pesos son positivos ($\lambda_{j,n} = I(l_{j,n}^2)$) y $\sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} = \int_a^b d\varphi(t) = c_0$. Por lo tanto, convergen para las funciones continuas. Pero el teorema de Steklov permite ampliar la clase hasta las Riemann-Stieltjes integrables (resultado que ya había sido obtenido por Stieltjes). Es precisamente la condición, la positividad de los pesos, la que pretenden imitar las FCI, dependiendo de la elección de nodos, o en su defecto, la acotación uniforme, ya que la convergencia para polinomios la tenemos garantizada por el carácter interpolatorio.

Demostrado que las FCG convergen incluso para las funciones Riemann-Stieltjes integrables, faltaba estudiar la calidad de dicha convergencia, es decir, las estimaciones de la velocidad de convergencia. Bernstein, usando su estimación (I.2.15, pág. 52) y algunos resultados suyos y de Jackson, demuestra el siguiente:

Teorema I.2.10 *Sea $E_n(f)$ el error de la fórmula de cuadratura de Gauss-Christoffel.*

Entonces, se cumple:

1. *Si f está en $C^s([a, b])$, entonces $E_n(f) = O(\frac{1}{(2n)^s})$.*
2. *Si f es holomorfa en $[a, b]$, entonces $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |E_n(f)|^{\frac{1}{2n}} < 1$.*
3. *Si f es entera, entonces $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |E_n(f)|^{\frac{1}{2n}} = 0$.*

Una estimación mejor que la ofrecida en el apartado 2. se consigue utilizando el resultado anteriormente citado de Sydow, en términos de la mayor elipse en la cual la función es holomorfa en su interior; también puede deducirse a partir de la estrecha relación con los aproximantes de Padé, a partir de (I.2.14, pág.51) y de la estimación obtenida por W.B. Gragg para el error en los aproximantes de Padé (ver (I.1.13), pág. 32). Los resultados análogos para las fórmulas de cuadratura interpolatorias de grado $n - 1$ pasan por estimar A_n en la acotación dada en (I.2.15) por Bernstein. Para las FCI, la mejora del apartado 2, se consigue usando la misma fórmula del error obtenida

por Heine en (I.2.14) y haciendo uso de los resultados obtenidos por Gonchar (ver [63]) para aproximantes tipo Padé. En cuanto a la estimación de las fórmulas de cuadratura intermedias sólo se conocen algunos resultados para las denominadas FÓRMULAS DE CUADRATURA DE GAUSS-KRONROD, que escogen como parte fija de nodos los ceros de polinomios ortogonales (de grado inferior) con respecto a la medida asociada; pero para los únicos pesos que se han obtenido grandes avances son para los pesos de Jacobi $((b-x)^\alpha(x-a)^\beta \quad \forall x \in [a, b]$ con $\alpha > -1$ y $\beta > -1$) (ver [53, 54] y las referencias contenidas en ellos).

En general, los criterios de convergencia para las FCI pasan por el teorema de Pólya, con el cual, se llega a demostrar la convergencia para funciones continuas. Entonces surge una cuestión, ¿puede haber alguna elección de la tabla de nodos para la cual las correspondientes FCI converjan en las funciones Riemann-Stieltjes integrables?. En este sentido, una condición suficiente fue propuesta por Sloan, I.H. y Smith, W.E. en [120], estableciendo el siguiente resultado.

Teorema I.2.11 *Supongamos que la medida de Stieltjes $d\varphi(x)$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, es decir, $d\varphi(x) = \varphi'(x) dx$, siendo φ' positiva casi por todo e integrable de Lebesgue en $[a, b]$ y sea $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la familia de polinomios ortogonales con respecto a la función peso $\varphi'(x)$. Sea k una función peso compleja integrable Lebesgue, verificando:*

$$\int_a^b \frac{|k(x)|^2}{\varphi'(x)} dx < \infty. \quad (\text{I.2.18})$$

Si escogemos como nodos de la FCI los ceros de Q_n para evaluar la integral

$$\int_a^b f(x) k(x) dx < \infty ,$$

entonces (I.2.17) se cumple para cualquier función Riemann integrable. Además, se satisface:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |\lambda_{j,n}| f(x_{j,n}) = \int_a^b f(x) |k(x)| dx. \quad (\text{I.2.19})$$

Esta última igualdad afirma que cuando la función peso k es real, los pesos asintóticamente reproducen el signo de la función peso. Esta característica produce estabilidad numérica en su computación. Además, proporciona un método para evaluar integrales indefinidas, ya que si k satisface las hipótesis, también las satisface $k(x)u(x-d)u(c-x)$ (siendo u la función de Heaviside ¹¹), lo que permite evaluar

$$\int_c^d f(x)k(x) dx$$

donde $[c, d]$ es cualquier subintervalo de $[a, b]$. Por otro lado, $\int_a^b |k(x)| dx$ representa una estimación de la constante A_n en la acotación de Bernstein; consecuentemente, también para estas FCI pueden deducirse estimaciones de la velocidad en términos de la suavidad de la función, exactamente igual que en el caso gaussiano (ver Teorema I.2.10, pág.54), pero sustituyendo $2n$ por n , ya que varía el grado de exactitud de la FCI.

Podemos, por tanto, garantizar resultados de convergencia de FCI para una gama relativamente amplia de nodos disponiendo, además, de estimaciones del error en función del error de la mejor aproximación por polinomios (error “mini-max”). Surge, sin embargo, un problema adicional: es sabido que determinadas funciones con ciertos comportamientos son muy malas de aproximar por polinomios (por ejemplo, aquellas funciones que posean singularidades en las proximidades del intervalo o en los extremos del mismo). Esto sugiere la posibilidad de sustituir las funciones base usadas para la interpolación. Es decir, sustituir los polinomios por otra familia que permita reproducir dichas singularidades. La idea primitiva que subyace en las diferentes elecciones es la de, en lugar de fijar los polos en el infinito (interpretando los polinomios como la familia de funciones racionales con todos sus polos en el infinito), acercar los polos para tratar de reproducir las singularidades que posea el integrando, de tal forma que las funciones racionales elegidas sean integrables y por supuesto, densas en la familia deseada. Además, se trata de conservar la idea de ir creando espacios vectoriales enca-

¹¹ $u(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.

jados. Varios autores (Illán-López Lagomasino, Gautschi entre otros) han tratado desde diferentes ópticas de formalizar estas ideas, dando lugar a las fórmulas de cuadratura basadas en funciones racionales. A nuestros efectos, señalaremos el trabajo de Walter Van Assche e Ingrid Vanherwegen [133]. Estos autores, consideran el siguiente sistema de funciones base:

$$\left\{ \frac{1}{1+t_1x}, \frac{1}{1+t_2x}, \dots, \frac{1}{1+t_nx}, \dots \right\}$$

donde $t_i \in (a, b)$ y $x \in [a, b]$ tal que $[-b, -a]^{-1} \cap [a, b] = \emptyset$. Si algún $t_i \neq 0$ se repite κ_i veces, entonces según el orden de aparición, se va escogiendo de

$$\left\{ \frac{1}{1+t_ix}, \frac{1}{(1+t_ix)^2}, \dots, \frac{1}{(1+t_ix)^{\kappa_i-1}} \right\}.$$

Si el que se repite es $t_i = 0$ κ_i veces, se realiza la misma operación pero con el conjunto

$$\{1, x, x^2; \dots, x^{\kappa_i-1}\}.$$

Obsérvese que si $t_i = 0 \forall i$, estamos ante el caso clásico de los polinomios. Este conjunto de funciones racionales verifican la propiedad de ser un sistema de Markov para el intervalo $[a, b]$ (ver [103]); lo que nos va a permitir extender toda la teoría clásica, ya que, esencialmente, ésa es la propiedad que caracteriza a la familia de los polinomios desde el punto de vista de la interpolación; además de garantizar que se trata de un sistema linealmente independiente. Por lo tanto, el conjunto de todas las combinaciones lineales de tales funciones forma un espacio vectorial infinito dimensional, a cuyos elementos los denominaremos “ \mathbb{R} -polinomios”. A partir de ellas, definimos una sucesión de espacios vectoriales encajados R_n de la siguiente forma

$$R_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{1+t_kx} / a_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Es evidente que la dimensión de R_n es $n+1$. Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso clásico, nos planteamos construir FCI exactas en estos espacios encajados, es decir:

Dado un conjunto de puntos $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ en $[a, b] : x_i \neq x_j \forall i, j$, ¿existirán fórmulas de cuadratura verificando :

$$\int_a^b R(x)\rho(x) dx = \sum_{k=1}^n \lambda_{k,n}R(x_k) \quad \forall R \in R_{n-1} \quad ?$$

La respuesta depende de la existencia de un elemento de R_{n-1} que interpole al integrando, y que satisfaga todas las propiedades oportunas. Dicha existencia y las propiedades quedan satisfechas por tratarse de un sistema de Markov, pero su expresión explícita se obtiene resolviendo un problema asociado de interpolación. Recogemos dicho resultado en el siguiente teorema.

Teorema I.2.12 *Sea un conjunto de puntos $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ en $[a, b] : x_i \neq x_j \forall i, j$ y una función f arbitraria definida en $[a, b]$. Entonces, existe un único elemento L_n de R_{n-1} , verificando*

$$L_n(x_i) = f(x_i) \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Se sigue que

$$f(x) = L_n(x) + r_n(f, x) \quad \forall x \in [a, b], \quad (\text{I.2.20})$$

donde $r_n(f, x)$ denota el error de interpolación, verificándose

$$r_n(R, x) \equiv 0 \quad \forall R \in R_{n-1},$$

siendo

$$L_n(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j)r_{j,n}(x), \quad (\text{I.2.21})$$

con

$$r_{j,n}(x) = \frac{w_n(x)p_n(x_j)}{(x - x_j)w'_n(x_j)p_n(x)},$$

donde

$$p_n(x) = \prod_{i=1}^n (1 + t_i x).$$

Ahora, sustituyendo en

$$I(f) = \int_a^b f(x)d\varphi(x)$$

la igualdad (I.2.20) y haciendo uso de (I.2.21), obtenemos

$$I(f) = I_n(f) + E_n(f), \quad (\text{I.2.22})$$

donde

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} f(x_j) \quad y \quad E_n(f) = I(r_n(f, \cdot)),$$

siendo

$$\lambda_{j,n} = I(r_{j,n}).$$

Deduciéndose que

$$I(R) = I_n(R) \quad \forall R \in R_{n-1}.$$

Llegados a este punto, nos podemos plantear las mismas cuestiones que en el caso clásico, esto es, ¿puede existir alguna elección de nodos de tal forma que la fórmula de cuadratura sea exacta en R_{2n-1} ? La respuesta y el procedimiento de obtención se basan en la misma idea, surgiendo un teorema de tipo Jacobi. La demostración para el caso general, presentado aquí, sigue esencialmente los mismos pasos, que la realizada en el capítulo II para el caso límite de los polinomios de Laurent.

Teorema I.2.13 *La fórmula de cuadratura (I.2.22) es exacta en R_{n-1+k} con $1 \leq k \leq n$ si y sólo si*

1. *La fórmula de cuadratura es interpolatoria en R_{n-1} .*

2. $I\left(\frac{w_n}{p_{n+1}} \cdot R\right) = 0 \quad \forall R \in D_{k-1}$ donde $D_{k-1} = \left\{ \frac{P(x)}{\prod_{j=n+2}^{n+k} (1+t_j x)} / P \in \mathbb{P}_{k-1} \right\}$

La condición 2. es una condición de ortogonalidad con respecto a $d\varphi$, consiguiéndose el dominio de mayor exactitud R_{2n-1} cuando $\frac{w_n}{p_{n+1}}$ es el R-polinomio ortogonal a D_{n-1} . Por lo tanto, cuando las FCI tienen por nodos sus ceros dan lugar a las fórmulas de cuadratura gaussianas. Es aquí donde surge ya la primera diferencia con el caso polinómico, ya que en general D_{n-1} no coincide con R_{n-1} . Así, si escogemos como nodos de la fórmula de cuadratura a los ceros del n-ésimo R-polinomio perteneciente a R_n ortogonal a R_{n-1} surge la denominada fórmula de cuadratura ortogonal, FCO

en adelante, la cual, en general, no aumenta en exactitud con respecto a las funciones base. Y, finalmente, si escogemos como nodos a los ceros del R-polinomio $\frac{w_n}{p_n}$ ortogonal a R_{n-1} surgen las fórmulas de cuadratura que hemos denominado de Tchebyshev y que denotaremos por FCT (que tampoco aumentan el grado de exactitud con respecto a las funciones bases; es decir, siguen siendo exactas en R_{n-1}). Curiosamente, son las FCT las que más heredan las propiedades del caso clásico, como se puede ver en [100, 101]. En [133], Van Assche-Vanherwegen observan que en las dos primeras fórmulas de cuadratura sus nodos son los ceros del n-ésimo polinomio ortogonal con respecto a una medida que depende del número de nodos, esto es, lo que comúnmente se denomina una “ medida variante ”. En el caso de las FCT, la situación es similar. De esta forma, la correspondencia es la siguiente:

1. Los nodos de la FCG son los ceros del n-ésimo polinomio ortogonal con respecto a $\frac{d\varphi}{p_{2n}}$.
2. Los nodos de la FCO son los ceros del n-ésimo polinomio ortogonal con respecto a $\frac{d\varphi}{p_n \cdot p_{n+1}}$.
3. Los nodos de la FCT son los ceros del n-ésimo polinomio ortogonal con respecto a $\frac{d\varphi}{p_n^2}$.

Con respecto a los pesos $\lambda_{j,n}$ cabe señalar que en los tres casos éstos son positivos. En este mismo artículo se da un resultado cualitativo acerca de la distribución asintótica de los respectivos nodos (el tomar el intervalo $[-1, 1]$ es simplemente por comodidad).

Teorema I.2.14 *Supongamos que la distribución asintótica de los parámetros $\{ t_i : 1 \leq i \leq n \}$, $n = 1, 2, \dots$ viene dada por una medida ν en $[-1, 1]$, es decir, para toda función f continua en $[-1, 1]$ tenemos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(t_k) = \int_{-1}^1 f(x) d\nu(x)$$

Si $\nu = p\delta_{-1} + q\delta_1 + r\delta_0 + [1 - (p + q + r)]\nu_0$, donde δ_a denota la masa de Dirac concentrada en a , y $p, q, r > 0$, $p + q + r \leq 1$, y $\int_{-1}^1 \log|t| d\nu_0(t) < \infty$, entonces

la distribución asintótica de los nodos de las fórmulas de cuadratura anteriores viene dada por la siguiente medida

$$\mu = p\delta_1 + q\delta_{-1} + r\mu_0 + [1 - (p + q + r)]\mu_b$$

donde μ_0 es la distribución “ arcoseno ” en $[-1, 1]$ (distribución de equilibrio con respecto al potencial logarítmico), con función peso

$$\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

y μ_b es una medida absolutamente continua en $[-1, 1]$ con función peso

$$\mu'_b(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{1+xt} d\nu_0(t)$$

Haciendo un simple análisis, se deduce a primera vista que cuando los polos de las funciones base se acumulan cerca de algún extremo, los nodos tienden hacia él, y si éstos se acumulan en el infinito, entonces los nodos se van hacia el interior del intervalo (situación clásica). Este análisis ha permitido poner de manifiesto que para determinados integrandos estas fórmulas son mucho más eficientes que las FCG usuales, en el sentido de que cuando, por ejemplo, el integrando posee una singularidad en 1, el hecho de que acumulemos más nodos cerca de dicho punto permite obtener más información del comportamiento del integrando donde posee dicha singularidad; lo cual se añade al hecho de que estamos tratando de aproximar por funciones base que tratan de reproducirla (ver [60, 61, 133] para más detalles). Además, existen expresiones explícitas de los R-polinomios para unos determinados pesos (ver [131] para las FCG y FCO y ver [2] para las FCT).

También en [133], Van Assche-Vanherwegen obtienen una estimación del error así como un resultado de convergencia para las FCG y FCO. Por otro lado, Min en [103] realizó un estudio análogo para las FCT. Estas aportaciones las recogemos conjuntamente en el siguiente teorema. Si denotamos por $E_n^G(f)$, $E_n^O(f)$ y $E_n^T(f)$ el error en las fórmulas de cuadratura gaussiana, ortogonal y de Tchebyshev, respectivamente, se sigue que:

Teorema I.2.15 *Sea f_n la mejor aproximación de $f \in C([a, b])$ en R_n , entonces:*

1. Si $t_1 = 0$, entonces para la FCO se tiene que

$$|E_n^O(f)| \leq 2c_0 \|f - f_n\|_\infty$$

donde $c_0 = \int_a^b d\varphi(x)$.

2. Para la FCG existe una constante positiva M verificando

$$|E_n^G(f)| \leq M \|f - f_{2n-1}\|_\infty$$

3. Para la FCT existe una constante positiva K verificando

$$|E_n^T(f)| \leq K \|f - f_{n-1}\|_\infty$$

Para obtener teoremas de convergencia, necesitamos el siguiente resultado clásico (ver Achiezer [2]), que da una condición para garantizar la densidad de los R-polinomios en $C([a, b])$ en función de la velocidad de aproximación de los polos a los extremos del intervalo:

Teorema I.2.16

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |c_k|) = \infty \quad , \quad \text{donde} \quad c_k = -\frac{1 + \sqrt{1 - t_k^2}}{t_k} \quad (\text{I.2.23})$$

si y sólo si

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n \text{ es denso con la norma uniforme en } C([a, b])$$

Ahora, del Teorema I.2.16 y teniendo en cuenta que los pesos en tales cuadraturas son positivos se puede enunciar el siguiente resultado de convergencia, también contenido en los artículos referidos.

Corolario I.2.1 *Sea $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ verificando (I.2.23). Entonces, para los tres tipos de cuadraturas mencionados se tiene que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = I(f)$$

para toda función Riemann-Stieltjes integrable en $[a, b]$.

También, de los resultados obtenidos por López-Lagomasino en [93, 94] para aproximantes multipuntuales de Padé, se obtienen criterios de convergencia totalmente novedosos, ya que introducen una condición de tipo Carleman sobre la integrabilidad de las funciones base, que se traducen en limitar la velocidad a los $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de acercamiento a los extremos del intervalo, que depende de la distribución $\varphi(x)$. Más explícitamente, si reordenamos los $\{t_i : 1 \leq i \leq 2n\}$ denotando por $\{t_i^+\}$ aquellos que están en $[0, 1)$, ordenados de menor a mayor $0 \leq t_1^+ \leq t_2^+ \leq \dots \leq t_{\ell_n}^+ < 1$, siendo ℓ_n el número de t_i con esta propiedad, y si definimos ahora $d\varphi_n = \frac{d\varphi}{p_{2n}}$, $p_{m,2n}(x) = \prod_{k=1}^m (1 + t_k^+ x)$ y $s_{m,n} = \int_a^b \frac{d\varphi(x)}{p_{m,2n}(x)}$, entonces tenemos:

Teorema I.2.17 *Si se verifica:*

$$\begin{aligned}
 a) \quad & \int_a^b d\varphi_n(x) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}. \\
 b) \quad & |s_{m,n}| \leq M_m \quad \forall n \in \mathbb{N}. \\
 c) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\ell_n} s_{m,n}^{-\frac{1}{2m}} = +\infty.
 \end{aligned} \tag{I.2.24}$$

Entonces para los tres tipos se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = I(f)$$

para toda función Riemann-Stieltjes integrable en $[a, b]$.

Si sustituimos los $\{t_i^+\}$ por los $\{t_i^-\}$, que serán los que estén en $(-1, 0]$, se consigue exactamente lo mismo. Como se puede ver, este resultado es sólo cualitativo; sin embargo, en un trabajo posterior [96], el mismo autor con Martínez-Finkelshtein, obtiene un resultado cuantitativo para una determinada familia de funciones peso, escogiendo los $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ exactamente en 1 y -1 (caso no contemplado hasta el momento). Además, se obtienen estimaciones del error, para funciones holomorfas, muy parecidas al caso clásico.

Con todo, hemos de decir que en 1984 ya había surgido la primera generalización por parte de Illán y López-Lagomasino [76], al permitir que los parámetros $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

podrían ser complejos conjugados cuyas partes reales estén compactamente contenidas en $(-1, 1)$. En general, estas fórmulas de cuadratura no quedan englobadas en la extensión clásica, aunque se trata de generalizaciones (motivadas por su íntima conexión con los aproximantes de Padé multipuntuales) que de una forma u otra amplían el conjunto de funciones que integran exactamente, aunque no pertenezcan, en principio, a la familia de funciones base. Es aquí donde, las FCG pierden su importancia en favor de las otras dos. En efecto, combinando los resultados de Van Assche-Vanherwegen en [133], de Min en [100], de López Lagomasino-Martínez en [96] y con los de Bultheel y otros en [34] obtenemos:

Teorema I.2.18 *Sea k una función compleja integrable en $[a, b]$ y ρ una función integrable positiva casi por todo, que satisfacen:*

$$\int_a^b \frac{|k(x)|^2}{\rho(x)} dx < \infty$$

y sean los $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ verificando:

1. La caracterización de densidad (I.2.23).

o bien

2. La condición de tipo Carleman (I.2.24).

Si escogemos como nodos de la FCI, los nodos de la FCT asociados a ρ para el cálculo de integrales del tipo:

$$I(f) = \int_a^b f(x) k(x) dx < \infty.$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = \int_a^b f(x) k(x) dx$$

para toda función Riemann integrable. Además, con una estimación para integrandos continuos de tipo Bernstein para la condición 1, se sigue que:

$$|I(f) - I_n(f)| \leq C_1 \omega(f, \frac{1}{n}) + C_2 \prod_{j=1}^n c_j$$

donde $\omega(f, \frac{1}{n})$ es el módulo de continuidad de f y C_1, C_2 constantes positivas.

Obteniéndose, en esta última situación, calidad de convergencia en función de la suavidad del integrando. Ahora bien, si usamos las ideas de Sloan-Smith en [120] y algunos resultados de Min en [100], podemos extender los resultados (pero ahora para las FCO).

Teorema I.2.19 *Sea k una función compleja integrable en $[a, b]$ y sea ρ una función integrable positiva casi por todo, que satisfacen:*

$$\int_a^b \frac{|k(x)|^2}{\rho(x)} dx < \infty$$

y sean los $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ verificando:

1. *La caracterización de densidad (I.2.23).*

o bien

2. *la condición de tipo Carleman (I.2.24).*

Si construimos la FCI con los nodos de la FCO asociada a ρ para el cálculo de integrales del tipo:

$$I(f) = \int_a^b f(x) k(x) dx < \infty$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_{j,n} f(x_{j,n}) = \int_a^b f(x) k(x) dx$$

para toda función Riemann integrable. Más aún, puede probarse que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |\lambda_{j,n}| |f(x_{j,n})| = \int_a^b |f(x)| |k(x)| dx \quad (\text{I.2.25})$$

para la misma clase de funciones. Y para la condición 1 se consigue una estimación para integrandos continuos de tipo Bernstein de la forma:

$$|I(f) - I_n(f)| \leq M_1 \omega(f, \frac{1}{n}) + M_2 \prod_{j=1}^n c_j$$

donde M_1 y M_2 son constantes positivas.

De (I.2.25) se infiere la estabilidad numérica del proceso de cuadratura, y de la acotación de tipo Bernstein, se sigue que podemos estimar el orden de la convergencia en función

de la suavidad del integrando. En este mismo contexto, puede establecerse igualmente, un resultado de este tipo para la familia particular de funciones peso estudiadas por López-Lagomasino y Martínez-Finkelshtein en [96], con una estimación de la velocidad de convergencia para las funciones holomorfas en un entorno de $[a, b]$ que mejorarían considerablemente las que se consiguen mediante los teoremas anteriores, ya que dependen de lo grande que sea el dominio de holomorfía.

Los resultados comentados hasta el momento hacen referencia a la integración de funciones en intervalos acotados. A continuación nos centraremos en el caso no acotado. Estamos interesados en el estudio cuando el intervalo de integración es $[0, \infty)$, aunque algunos de los resultados que citaremos fueron formulados originariamente para $(-\infty, +\infty)$, han sido adaptados a nuestro caso mediante el sencillo cambio de variable $t^2 = x$.

Por lo tanto, ahora nuestro problema es evaluar integrales de Riemann-Stieltjes impropias del tipo:

$$\int_0^{\infty} f(t) d\varphi(t) \quad (\text{I.2.26})$$

Inicialmente, a la medida de Stieltjes $d\varphi(t)$ le exigiremos que los momentos sean finitos

$$c_k = \int_0^{\infty} t^k d\varphi(t) < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

lo cual es una condición natural si se pretende construir fórmulas de cuadratura exactas en el espacio de los polinomios. En realidad, el pasar de las fórmulas de cuadratura basadas en funciones racionales con polos prefijados fuera del intervalo finito $[a, b]$ a fórmulas de cuadratura para el intervalo $[0, \infty)$ que sean exactas para polinomios hasta un cierto grado, puede interpretarse a través del simple cambio de variable

$$t = \frac{x - a}{b - x} ; t \in [0, \infty) ; x \in [a, b],$$

como una “ situación límite ” del primero de los procesos, en el sentido que todos los polos de las funciones racionales son prefijados en $x = b$. La construcción de las FCI en \mathbb{P}_{n-1} se hace exactamente igual que en el caso acotado. Fue Stieltjes en [128] quien desarrolló la teoría para este tipo de integrales. En su análisis, tuvo que enfrentarse

a un obstáculo que no se presentaba en el caso acotado, y es que, en este caso, el desarrollo de la transformada de Cauchy de la medida de Stieltjes mediante desarrollo en serie en potencias de $\frac{1}{x}$ es asintótico, es decir:

$$\hat{\varphi}(x) = \int_0^\infty \frac{d\varphi(t)}{x-t} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{1}{x^{k+1}}, \quad x \rightarrow \infty \quad : \quad x \in \{z \in \mathbb{C} : |\arg(z)| < \pi\}$$

Asimismo, formalizó toda la teoría algebraica de polinomios ortogonales con respecto a la medida de Stieltjes $d\varphi(t)$, a partir de la teoría de fracciones continuas; aunque con un interés secundario, ya que estaba interesado fundamentalmente en la convergencia de determinadas fracciones continuas. El hecho de trabajar con desarrollos asintóticos dio origen a un nuevo problema, que también lleva su nombre: el PROBLEMA DE MOMENTOS DE STIELTJES, el cual, como es bien sabido, consiste en que dada una sucesión $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de números reales positivo hay que encontrar una distribución φ t.q. $c_n = \int_0^\infty t^n d\varphi(t)$. Si tal distribución existe y es única se dice que el problema de momentos está determinado, y si existe pero no es única es indeterminado.

Stieltjes, a partir de las FCG, construye con los pesos una sucesión monótona creciente de funciones de distribución F_n no negativas definidas en \mathbb{R}^+ , como sigue:

$$F_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < x_{1,n} \\ \sum_{j=1}^l \lambda_{j,n} & \text{si } x_{l,n} \leq t < x_{l+1,n} \quad , \text{ con } 1 \leq l \leq n-1 \\ c_0 & \text{si } x_{n,n} \leq t < \infty \end{cases}$$

donde $\{x_{j,n}\}_{j=1}^n$ son los nodos de la FCG. La sucesión $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está uniformemente acotada ($F_n(t) \leq c_0$) y según el teorema de selección de Grommer [135], existe una subsucesión $\{F_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ y una función positiva monótona creciente F definida en \mathbb{R}^+ , verificando:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(t) = F(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

y si además g es una función tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0$, es decir, $g \in C_0(\mathbb{R}^+)$, entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^\infty g(t) dF_{n_k}(t) = \int_0^\infty g(t) dF(t).$$

A partir de aquí es fácil demostrar que esta medida dF posee los mismos momentos que $d\varphi$. Pero dado que aquí no podemos usar el argumento de densidad de los polinomios

en $C_0(\mathbb{R}^+)$, no se puede garantizar, por tanto, que $dF(t) = d\varphi(t)$, ni tampoco la convergencia de las FCG en $C_0(\mathbb{R}^+)$. Sin embargo, de los resultados de Stieltjes se logra este objetivo (ver [128]).

Teorema I.2.20 *Las fórmulas de cuadratura de tipo Gauss-Christoffel construidas para aproximar (I.2.26) convergen para toda función Riemann-Stieltjes integrable en \mathbb{R}^+ si el problema de momentos está determinado.*

Obsérvese que, tan sólo por el hecho de que el problema de momentos esté determinado, y al ser las fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio, podemos asegurar la convergencia en la clase de las funciones f localmente Riemann integrable, que satisfagan la siguiente condición de crecimiento polinómico en el infinito (ver [132]):

$$\exists x_0 > 0 \text{ y un } P \in \mathbb{P} \quad : \quad |f(x)| \leq |P(x)| \quad \forall x : x \geq x_0$$

Como señalamos anteriormente, una condición suficiente para la unicidad del problema de momentos la dio Carleman (ver [40]) y radica en la divergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2k]{c_k}}.$$

El siguiente resultado relevante en este sentido fue obtenido por Uspensky (ver [132]). A partir de una estimación de los momentos, logró pasar de las funciones continuas con cierto crecimiento polinómico en el infinito a funciones integrables con crecimiento exponencial en el mismo, estableciendo el siguiente resultado:

Teorema I.2.21 *Sea ρ una función peso integrable positiva c. p. t. en \mathbb{R}^+ . Supongamos que los momentos satisfacen la condición:*

$$\frac{c_n}{(2n+1)!} < CR^n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{I.2.27}$$

donde C y R son constantes positivas. Entonces las FCG convergen para toda función Riemann integrable en cualquier intervalo finito de \mathbb{R}^+ que verifique

$$|f(x)| < \frac{e^{rx^{\frac{1}{2}}}}{x^{1+\rho}} \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty,$$

donde $0 < \rho < 1$ y $r = \frac{1}{R}$.

Téngase en cuenta que este resultado es aplicable, en particular, a integrales del tipo:

$$\int_0^{\infty} f(x)e^{-ax^\gamma} dx \quad \text{con } \gamma > \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad a > 0,$$

ya que los momentos correspondientes a estos pesos verifican “ sobradamente ” la condición (I.2.27); aunque obviamente con este resultado no se optimiza la clase de funciones admisibles, que son las que verifican:

$$|f(x)| < \frac{e^{ax^\gamma}}{x^{1+\rho}} \quad , \quad \text{en lugar de} \quad |f(x)| < \frac{e^{rx^{\frac{1}{2}}}}{x^{1+\rho}}$$

como se deduce del Teorema I.2.21. Esta cuestión la solventaremos posteriormente con un resultado más general (véase sección 2 del capítulo II).

En lo referente a las FCI, éstas presentan los mismos problemas que en el caso acotado, con ciertas sutilezas añadidas. La respuesta positiva volvieron a darla Smith y otros en [107], con el siguiente resultado que permite una parte de la clase de funciones considerada por Uspensky.

Teorema I.2.22 *Sea $k(x)$ una función integrable Lebesgue verificando*

$$\int_0^{\infty} \frac{|k(x)e^{\frac{x}{2}}x^{\frac{1}{2}}|^p}{x^{\frac{1}{2}}} dx < \infty \quad (\text{I.2.28})$$

para algún $p > 1$, y sea f una función Riemann integrable en cualquier intervalo finito de \mathbb{R}^+ , verificando

$$|f(x)| < C \frac{e^{\frac{x}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} \quad , \quad x \rightarrow \infty,$$

donde C es una constante. Entonces, $k \cdot f \in L_1(\mathbb{R}^+)$, y si escogemos como nodos de las FCI los ceros del n -ésimo polinomio ortogonal Q_n con respecto al peso $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_{j,n} f(x_{j,n}) = \int_a^b f(x)k(x)dx,$$

y además se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |\lambda_{j,n}| f(x_{j,n}) = \int_a^b f(x)|k(x)|dx.$$

Asimismo, se logran estimaciones del error en base a la suavidad de la función y de su crecimiento (por supuesto, con la norma uniforme pesada).

Corolario I.2.2 *En las condiciones del teorema anterior, si f es continua se obtiene que*

$$|E_n(f)| \leq DM_{n-1}(f, h)$$

siendo D una constante positiva. Si además f es derivable con continuidad hasta el orden r y $|f^{(r)}(x)| \leq C \cdot h(x)$, para cierta constante C , entonces

$$E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^{\frac{r}{2}}}\right)$$

donde $h(t) = \frac{e^{\frac{t}{2}}}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}$ y $M_n(f, h) = \min_{P \in \mathbb{P}_n} \|(f - P)h\|_{\infty}$

Nótese que de la condición (I.2.28) se deduce que el correspondiente problema de momentos para $k(x)$ está determinado. Paralelamente, y en base a los resultados de Rakhmanov en [112] sobre la asintótica de polinomios ortogonales con respecto a los pesos de tipo Laguerre de la forma: $x^{\alpha}e^{-rx^{\gamma}}$, se puede estimar la velocidad de convergencia de las FCG para estos pesos cuando el integrando es analítico en un entorno de \mathbb{R}^+ .

Como consecuencia de los mismos argumentos que en el caso acotado, dependiendo del integrando, puede resultar más efectiva la aproximación del integrando por funciones racionales, en lugar de polinomios. Esto nos conduciría, nuevamente, a sustituir el espacio de los polinomios por el espacio generado por:

$$\left\{ \frac{1}{1+t_1x}, \frac{1}{1+t_2x}, \dots, \frac{1}{1+t_nx}, \dots \right\},$$

donde $t_i \in [0, \infty)$ y $x \in \mathbb{R}^+$, con las mismas observaciones que en el caso acotado. Para la construcción de las fórmulas de cuadratura se procede exactamente igual. En cuanto a la convergencia, el primer resultado lo dan Illán y López-Lagomasino, en un contexto más general (ver [77]).

Teorema I.2.23 *Sea la sucesión $\{t_i\}_{i \in I}$ y J el correspondiente conjunto de los subíndices, sin contar multiplicidades. Supongamos que*

$$\sum_{i \in J} \frac{1}{1 + \sqrt{t_i}} = \infty.$$

Entonces, la sucesión de FCG, verifica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_{j,n} f(x_{j,n}) = \int_a^b f(x) d\varphi(x),$$

para toda función Riemann-Stieltjes integrable en \mathbb{R}^+ , tal que se anule en el infinito, siendo $d\varphi(x)$ cualquier medida de Stieltjes.

Si $\exists l$ tal que $t_l = 0$, entonces podemos incluir hasta las de comportamiento polinómico, en función de la multiplicidad. Por supuesto, aquí no tiene sentido plantearse el problema de momentos ya que la fórmula es exacta en una familia total¹² de $C_0(\mathbb{R}^+)$.

Ahora bien, si hacemos un análisis de las funciones base, observamos que poseen polos en $-\frac{1}{t_i}$; luego, si nos planteamos la situación límite $t_i \rightarrow 0^+$ y para el resto de las funciones base, $t_i \rightarrow +\infty$, obtenemos funciones que tienen al ∞ y al 0 por polos, respectivamente, surgiendo así de forma natural la familia de funciones base

$$\left\{ \dots, \frac{1}{x^n}, \dots, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x}, 1, x, x^2, \dots, x^n, \dots \right\}.$$

Al espacio generado a partir de las combinaciones lineales de ellas se le denomina espacio vectorial de los polinomios de Laurent Λ , abreviadamente L-polinomios; es decir:

$$\Lambda = \left\{ \sum_{k=m}^n a_k x^k \mid a_k \in \mathbb{C}, m, n \in \mathbb{Z} \ m \leq n \right\}. \quad (\text{I.2.29})$$

En el mismo sentido, definimos los subespacios vectoriales

$$\Lambda_{m,n} = \left\{ \sum_{k=m}^n a_k x^k \mid a_k \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{con } n, m \in \mathbb{Z}, \ m \leq n$$

donde la dimensión es: $\dim(\Lambda_{m,n}) = n + m + 1$ (obsérvese que $\bigcup_{m,n} \Lambda_{m,n} = \Lambda$ y que $\Lambda_{0,n} = \mathbb{P}_n$ es el espacio vectorial de los polinomios de grado a lo sumo n , de lo cual se sigue que $\bigcup_n \Lambda_{0,n} = \mathbb{P}$). Para que este sistema de funciones base tengan sentido debemos garantizar que son integrables Riemann-Stieltjes en sentido impropio. Por ello, en lo que resta de esta sección, vamos a ocuparnos de medidas para las cuales esté garantizada dicha integrabilidad: es decir, trabajaremos con medidas de Stieltjes $d\varphi$,

¹²Una familia de funciones es total cuando las combinaciones lineales finitas de ellas son densas.

que satisfagan la siguiente condición:

$$c_n = \int_0^\infty x^n d\varphi(x) < \infty \quad , \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Como quedará consignado en el capítulo II de la memoria, parte de nuestra investigación ha estado dedicada al estudio de fórmulas de cuadratura para integrales definidas asociadas a este tipo de medidas $d\varphi$.

Por supuesto, la convergencia de la sucesión de fórmulas de cuadratura también tropieza con un problema de momentos doble; es decir, ya no son sólo los momentos positivos $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ los que deben caracterizar la medida, sino también los momentos negativos $\{c_{-n}\}_{n \in \mathbb{N}}$. Este problema de momentos (denominado “ PROBLEMA FUERTE DE MOMENTOS ”) fue planteado y resuelto por W.B. Jones y otros en [78]. No obstante, puede establecerse una condición suficiente de tipo Carleman (ver [3]) de la siguiente forma.

Teorema I.2.24

$$\text{Si } \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-\frac{1}{2n}} = \infty \quad \text{o bien} \quad \text{si } \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}^{-\frac{1}{2n}} = \infty$$

entonces el problema fuerte de momentos tiene solución única.

El objetivo, pues, es evaluar integrales del tipo:

$$I(f) = \int_0^\infty f(x) d\varphi(x)$$

donde f , en general, es una función integrable Riemann-Stieltjes con respecto al integrador $d\varphi$. Surge inmediatamente una cuestión: ¿en qué dirección habrá que crecer (en potencias positivas o negativas de x) para construir los subespacios encajados que permitan definir las FCI ?. Una primera respuesta la dan Jones-Thron-Waadeland en [78] en su resolución del problema fuerte de momentos de Stieltjes, donde demuestran que la transformada de Cauchy de la medida de Stieltjes posee asociada una fracción continua llamada T-fracción positiva, cuyo n -ésimo convergente C_n satisface:

$$\hat{\varphi}(z) - C_n(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right) \quad , \quad z \rightarrow -\infty \tag{I.2.30}$$

$$\hat{\varphi}(z) - C_n(z) = O(z^{n+1}) \quad , \quad z \rightarrow 0^- ,$$

siendo C_n una función racional del tipo $R_{n-1,n}$ que denotaremos por $\frac{\tilde{p}_{n-1}}{\tilde{q}_n}$. Además, se demuestra que los ceros del denominador \tilde{q}_n son positivos, simples y están separados por los de \tilde{p}_{n-1} , de lo cual se sigue que C_n admite la siguiente descomposición en fracciones simples:

$$\frac{\tilde{p}_{n-1}(x)}{\tilde{q}_n(x)} = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{j,n}}{x - x_{j,n}} \quad \text{con } \lambda_{j,n} > 0,$$

la cual, sustituida en (I.2.30), junto con

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(z) &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{z^{j+1}} \cdot c_j + \frac{1}{z^{n+1}} \int_0^\infty \frac{x^n \cdot d\varphi(x)}{z - x} \\ \hat{\varphi}(z) &= \sum_{j=1}^n z^{j-1} \cdot c_{-j} + z^n \int_0^\infty \frac{d\varphi(x)}{x^{n+1}(z - x)}, \end{aligned}$$

y procediendo con C_n como en el caso clásico, permite obtener:

$$\int_0^\infty \mathcal{R}(x) d\varphi(t) = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} \mathcal{R}(x_{j,n}) \quad \mathcal{R} \in \Lambda_{n,n-1}.$$

Aparece así la primera fórmula de cuadratura exacta en ciertos subespacios de L-polinomios. Además, como era de esperar, se trata de fórmulas gaussianas. De aquí se puede deducir que el denominador del convergente \tilde{q}_n satisface:

$$\int_0^\infty x^j \tilde{q}_n(x) \frac{d\varphi(x)}{x^n} = 0 \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Si reescribimos lo anterior y denotamos por V_n a $\frac{\tilde{q}_n(x)}{x^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}}$, donde $[\cdot]$ es la parte entera, se obtiene

$$\int_0^\infty V_l(x) \cdot V_k(x) d\varphi(x) = M_{l,k} \cdot \delta_{l,k} \quad \forall l, k \text{ con } M_{l,k} > 0.$$

Surge así el concepto de L-polinomios ortogonales, que como hemos comentado, aparece vinculado a las T-fracciones positivas, al igual que los polinomios ortogonales a las S-fracciones. Así pues, los primeros pasos en el desarrollo de la teoría de los L-polinomios ortogonales vienen dados como consecuencia de la teoría de las T-fracciones positivas (véase [79, 80, 81, 82], entre otras, para un estudio más exhaustivo). Cabe señalar, asimismo, que de (I.2.30) se desprende que el convergente C_n coincide con el aproximante de Padé en dos puntos de la función $\hat{\varphi}$. Incluso, Jones-Thron-Waadeland

en [78] obtienen la fórmula del error del AP2 que, como veremos más adelante en un marco más general, será de gran utilidad para estudiar el error en las fórmulas de cuadratura.

El intento de formalizar esta teoría separándola de sus orígenes (fracciones continuas) y darle estructura propia constituye el objetivo fundamental del capítulo II de esta memoria, cuyos resultados están recogidos en [33, 34, 35].

Capítulo II

Fórmulas de cuadratura basadas en polinomios de Laurent

En este capítulo desarrollaremos nuestros resultados sobre las fórmulas de cuadratura que integran exactamente ciertos subespacios de L-polinomios. Hemos dividido el capítulo en tres secciones: la primera, en la que se expondrá el planteamiento de nuestro objetivo y los aspectos algebraicos para el posterior estudio de la convergencia. La segunda, en la que se detallarán los resultados de convergencia obtenidos para aquellas integrales en las que el dominio de integración es $[0, \infty)$ y la última, en la que se presentarán los resultados conseguidos cuando el intervalo de integración es $[0, b]$ con $0 < b < \infty$.

II.1 Aspectos algebraicos

Nuestro propósito es evaluar las integrales de la forma:

$$I(f) = \int_0^{\infty} f(x) d\varphi(x), \quad (\text{II.1.1})$$

donde f es, en general, una función integrable Riemann-Stieltjes con respecto a $d\varphi$ en sentido impropio con el infinito y/o el origen como únicas singularidades, siendo φ una función acotada, monótona creciente que toma un número infinito de valores en $(0, \infty)$ (función de distribución). A la medida asociada a φ y que también denotaremos por “ φ ”, esto es, $\varphi(A) = \int_A d\varphi(x)$, denominada medida de Stieltjes, le exigiremos que sus

momentos, tanto positivos como negativos, existan. Es decir:

$$c_n = \int_0^\infty x^n d\varphi(x) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Pretendemos aproximar (II.1.1) por medio de una expresión de la forma:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k), \quad (\text{II.1.2})$$

que como ya hemos visto recibe el nombre de FÓRMULA DE CUADRATURA DE n PUNTOS. Recordemos que a los números $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ se les denominan pesos de la fórmula de cuadratura y a los puntos $\{x_k\}_{k=1}^n$, nodos, los cuales deben ser distintos y estar en $(0, \infty)$. Por lo tanto, dicha expresión depende de $2n$ parámetros.

Como consecuencia de la integrabilidad de las potencias tanto positivas como negativas, se consigue la integrabilidad de cualquier potencia, en efecto:

si definimos $c(t) = \int_0^\infty x^t d\varphi(x)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, entonces dado un $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $\exists n \in \mathbb{Z}$ satisfaciendo $n - 1 < t < n$. Así pues, $\exists \rho$, tal que $0 < \rho < 1$, de modo que $t = n - \rho$. Finalmente, usando la desigualdad de Holder para $(\frac{1}{\rho}, \frac{1}{1-\rho})$, se obtiene

$$c(t) = \int_0^\infty x^{n-\rho} d\varphi \leq c_{n-1}^\rho c_n^{1-\rho}.$$

Por lo tanto, cabe esperar que el conjunto de integrandos esté formado por funciones que puedan poseer un comportamiento polinómico en el infinito y permanecer no acotadas en el origen. Por ello, resulta natural escoger como funciones base para la interpolación:

$$\left\{ \dots, \frac{1}{x^n}, \dots, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x}, 1, x, x^2, \dots, x^n, \dots \right\}$$

que constituyen un sistema de Markov en cualquier intervalo $(c, d) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$, formando así un conjunto linealmente independiente, y sus combinaciones lineales finitas generan un espacio vectorial infinito dimensional denominado espacio vectorial de los polinomios de Laurent Λ , abreviadamente L-polinomios, tal y como se definieron en (I.2.29, pag.71).

Consideramos, a su vez, los subespacios vectoriales:

$$\Lambda_{m,n} = \left\{ \sum_{k=m}^n a_k x^k / a_k \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{con } m, n \in \mathbb{Z} \quad m \leq n$$

El primer problema al que nos enfrentamos es la dirección en la que se deberá crecer, ya que existen dos posibilidades: bien en potencias negativas, bien en positivas. Vamos a considerar recubrimientos de Λ que conserven la idea de subespacios vectoriales propios encajados. Para ello, partimos de dos sucesiones de números naturales monótonas crecientes $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{q(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ verificando $p(n) + q(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} q(n) = \infty$. Estas sucesiones son las que van a establecer el orden de crecimiento en Λ , definiendo los subespacios $\mathcal{R}_n = \Lambda_{-p(n), q(n)}$, cuya dimensión es $n + 1$, verificándose que $\mathcal{R}_{n-1} \subset \mathcal{R}_n$ y $\Lambda = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_n$. Nuestro primer objetivo será construir fórmulas de cuadratura que sean exactas en \mathcal{R}_{n-1} . Para ello, debemos garantizar la existencia del L-polinomio interpolador en \mathcal{R}_{n-1} , como así sucede, por tratarse de un sistema de Markov; no obstante, el siguiente teorema nos proporciona su expresión explícita, necesaria posteriormente para obtener los criterios de convergencia.

Teorema II.1.1 *Sea un conjunto de puntos $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ en $(0, \infty) : x_i \neq x_j \quad \forall i, j$ y una función f arbitraria definida en $[0, \infty)$. Entonces existe un único elemento L_n de \mathcal{R}_{n-1} , verificando*

$$L_n(x_i) = f(x_i) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

de lo cual se sigue que

$$f(x) = L_n(x) + r_n(f, x) \quad \forall x \in (0, \infty) \quad (\text{II.1.3})$$

donde $r_n(f, x)$ denota el error de interpolación L-polinómica que satisface

$$r_n(L, x) \equiv 0 \quad \forall L \in \mathcal{R}_{n-1} \quad (\text{II.1.4})$$

siendo

$$L_n(x) = \sum_{j=1}^n f(x_j) L_{j,n}(x)$$

con

$$L_{j,n}(x) = \frac{w_n(x) x_j^{p(n-1)}}{(x - x_j) w'_n(x_j) x_j^{p(n-1)}} \quad (\text{II.1.5})$$

donde $w_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)$ es el polinomio nodal, verificándose que $L_{j,n}(x_i) = \delta_{j,i}$ ¹.

¹ $\delta_{i,j}$ es la delta de Krönecker

Demostración:

Si denotamos por $P_{n-1}[x^{p(n-1)}f, \cdot]$ al polinomio de grado a lo sumo $n-1$ que interpola a la función $x^{p(n-1)} \cdot f$ en los puntos $\{x_i\}_{i=1}^n$, sabemos por (I.2.4, pag. 45) que:

$$P_{n-1}[x^{p(n-1)}f, x] = \sum_{j=1}^n x_j^{p(n-1)} f(x_j) \frac{w_n(x)}{(x-x_j)w'_n(x_j)},$$

de donde

$$x^{p(n-1)}f(x) = P_{n-1}[x^{p(n-1)}f, x] + \tilde{r}_n(x^{p(n-1)}f, x) \quad \forall x \in [0, \infty)$$

donde $\tilde{r}_n(x^{p(n-1)}f, x)$ es el error en la interpolación polinómica. Dividiendo la igualdad por $x^{p(n-1)}$ se obtiene (II.1.3), con lo cual $L_n(x) = \frac{P_{n-1}[x^{p(n-1)}f, x]}{x^{p(n-1)}}$, y el resto de la demostración se obtiene de forma inmediata. ■

Al sustituir en (II.1.1) la igualdad (II.1.3) obtenemos

$$I(f) = I_n(f) + R_n(f)$$

donde

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} f(x_j) \quad \text{y} \quad R_n(f) = I(r_n(f, \cdot)),$$

siendo

$$\lambda_{j,n} = I(L_{j,n}). \quad (\text{II.1.6})$$

Se sigue entonces de (II.1.4) que

$$I(L) = I_n(L) \quad \forall L \in \mathcal{R}_{n-1}. \quad (\text{II.1.7})$$

A toda fórmula de cuadratura que satisfaga (II.1.7) diremos que posee grado de exactitud $n-1$, y escribiremos $d(I_n) = n-1$. Recíprocamente, cualquier fórmula de cuadratura (II.1.2) exacta en \mathcal{R}_{n-1} , se demuestra que se puede obtener a partir del proceso de interpolación que acabamos de describir; de ahí que reciban el nombre de FÓRMULAS DE CUADRATURA INTERPOLATORIAS asociadas a las sucesiones $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{q(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, FCI de ahora en adelante. Concretando, dados n puntos arbitrarios no nulos distintos entre sí siempre podemos encontrar FCI exactas en \mathcal{R}_{n-1} . Ahora bien,

en la fórmula de cuadratura (II.1.2) hay $2n$ parámetros libres y hasta ahora sólo hemos fijado n exigiendo que los pesos satisfagan (II.1.6). Como éstos dependen a su vez del polinomio nodal w_n , es natural plantearse el hecho de que si al escoger de alguna forma apropiada los nodos, podremos aumentar el grado de exactitud de la FCI. La respuesta viene dada por un teorema de tipo Jacobi. Señalemos, previamente, que como consecuencia de las propiedades de la medida φ , podemos definir un producto interior sobre los L-polinomios de la siguiente forma:

$$\langle L, Q \rangle = \int_0^\infty L(x) \cdot Q(x) d\varphi(x) \quad \forall L, Q \in \Lambda$$

con lo cual tiene sentido hablar de ortogonalidad, pudiendo enunciar el siguiente resultado (resaltar que $I(L \cdot Q) = \langle L, Q \rangle$).

Teorema II.1.2 *La fórmula de cuadratura (II.1.2) es exacta en \mathcal{R}_{n-1+k} con $1 \leq k \leq n$ si y sólo si*

1. *La fórmula de cuadratura es interpolatoria en \mathcal{R}_{n-1} .*

2. $I\left(\frac{w_n}{x^{p(n)}} \cdot L\right) = 0$, $\forall L \in \mathcal{D}_{k-1}$, donde $\mathcal{D}_{k-1} = \left\{ \frac{P(x)}{x^{r(k)}} / P \in \mathbb{P}_{k-1} \right\}$ siendo $r(k) = p(n-1+k) - p(n)$.

Demostración:

" \Rightarrow " 1. Es inmediato por hipótesis.

Para demostrar 2., sólo hay que tener en cuenta que

$$\frac{w_n}{x^{p(n)}} \cdot L \in \mathcal{R}_{n+k-1} \iff L \in \mathcal{D}_{k-1}.$$

Luego, como es exacta en \mathcal{R}_{n-1+k} , tenemos que

$$I\left(\frac{w_n}{x^{p(n)}} \cdot L\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_{j,n} \frac{w_n(x_k)}{x_k^{p(n)}} \cdot L(x_k) = 0 \quad \text{ya que } w_n(x_k) = 0, \quad 1 \leq k \leq n$$

" \Leftarrow " $\forall R \in \mathcal{R}_{n-1+k}$ sabemos que existe un único L-polinomio interpolador $L_n[R] \in \mathcal{R}_{n-1}$ satisfaciendo:

$$R(x) - L_n[R](x) = \frac{w_n(x)}{x^{p(n)}} \cdot \frac{P(x)}{x^{p(n-1+k)-p(n)}} \quad \text{con } P \in \mathbb{P}_{k-1}.$$

luego,

$$I(R - L_n[R]) = I\left(\frac{w_n(x)}{x^{p(n)}} \cdot \frac{p(x)}{x^{p(n-1+k)-p(n)}}\right)$$

como la fórmula de cuadratura es interpolatoria por 1., y $L_n[R]$ está en \mathcal{R}_{n-1} se tiene que:

$$I(R) = I_n(L_n[R]) + I\left(\frac{w_n(x)}{x^{p(n)}} \cdot \frac{P(x)}{x^{p(n-1+k)-p(n)}}\right)$$

de donde se sigue la demostración a partir de la condición de ortogonalidad 2. y del hecho de que $I_n(L_n[R]) = I_n(R)$. ■

Tomando $k = n$ conseguimos exactitud en \mathcal{R}_{2n-1} de forma que la función $\frac{w_n(x)}{x^{p(n)}}$ es ortogonal a \mathcal{D}_{n-1} con respecto a la medida $d\varphi$, siendo éste, además, el dominio máximo de exactitud y surgiendo así la FÓRMULA DE CUADRATURA “ GAUSSIANA ”, denotada por FCG. Queda garantizado que sus nodos están donde cabría esperar, esto es, en $(0, \infty)$, ya que, de hecho, los nodos son los ceros del n -ésimo polinomio ortogonal con respecto a la medida $\frac{d\varphi(x)}{x^{p(2n-1)}}$, y sabemos por la teoría general de polinomios ortogonales que sus ceros están en el interior de la envolvente convexa del soporte de la medida, que en este caso es $(0, \infty)$. En definitiva, la condición de ortogonalidad que genera las FCG puede interpretarse de la siguiente forma:

$$\left\langle \frac{w_n}{x^{p(n)}}, L \right\rangle = 0 \quad , \quad \forall L \in \mathcal{D}_{n-1} = \left\{ \frac{P}{x^{p(2n-1)-p(n)}} / P \in \mathbb{P}_{n-1} \right\} .$$

Dado que, en general, $p(2n-1) - p(n) \neq p(n-1)$, entonces a diferencia del caso polinómico ($p(n) = 0, \forall n$), vemos que $\mathcal{D}_{n-1} \neq \mathcal{R}_{n-1}$. Surge así otro tipo de cuadratura: la que hemos denominado FÓRMULA DE CUADRATURA “ ORTOGONAL ”, basada en escoger como nodos los ceros del n -ésimo L-polinomio de \mathcal{R}_n ortogonal a \mathcal{R}_{n-1} con respecto a la medida $d\varphi$ (de ahí su nombre). Se puede ver que su dominio máximo de exactitud es $\Lambda_{-p(n-1)-p(n), q(n)+q(n-1)}$. Los nodos están localizados en $(0, \infty)$, ya que en este caso son los ceros del n -ésimo polinomio ortogonal con respecto a la medida $\frac{d\varphi(x)}{x^{p(n-1)+p(n)}}$. Finalmente, señalar que surge otra fórmula de cuadratura al considerar como nodos de la FCI los ceros del L-polinomio $\frac{w_n(x)}{x^{p(n-1)}}$ ortogonal al dominio de exactitud \mathcal{R}_{n-1} , obtenemos la FÓRMULA DE CUADRATURA DE “ TCHEBYSHEV ”, FCT en lo

que sigue, que será exacta en $\Lambda_{-2p(n-1),2q(n-1)+1}$. En este caso los nodos serán los ceros del n -ésimo polinomio ortogonal a $\frac{d\varphi(x)}{x^{2p(n-1)}}$. En los tres tipos, sus pesos son positivos y satisfacen $\sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} = c_0$. Pero, como veremos, las únicas que extienden, en general, la igualdad clásica $\lambda_{j,n} = I(L_{j,n}^2)$ son las FCO y FCT, con $L_{j,n}$ dado por (II.1.5). En efecto, se tiene el siguiente resultado:

Corolario II.1.1 *Si denotamos por $\lambda_{j,n}^O$ y por $\lambda_{j,n}^T$ a los pesos de la FCO y FCT, respectivamente, entonces $\lambda_{j,n}^O = \lambda_{j,n}^T = I(L_{j,n}^2)$*

Demostración:

Como $L_{j,n}$ pertenece a \mathcal{R}_{n-1} por (II.1.5), entonces $L_{j,n}^2$ está en $\Lambda_{-2p(n-1),2q(n-1)}$, donde son exactas la FCT y la FCO ($p(n-1) \leq p(n)$), y como $L_{j,n}(x_i) = \delta_{j,i}$, se obtiene el resultado. ■

Esta propiedad falla para las FCG ya que en general $\Lambda_{-2p(n-1),2q(n-1)} \not\subset \mathcal{R}_{2n-1}$. Pero veremos que podemos deducir unos L-polinomios $\{\ell_{j,n}\}_{j=1}^n$ con las mismas propiedades. Su obtención es una consecuencia de la extensión del resultado de Markov al caso de los L-polinomios. A tal efecto introduciremos la construcción del L-polinomio de Hermite.

Lema II.1.1 *Sea un conjunto de puntos $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset (0, \infty) : x_i \neq x_j \ \forall i, j$ y sean otros dos conjuntos de puntos $\{y_k\}_{1 \leq k \leq n}, \{y'_k\}_{1 \leq k \leq n}$. Entonces, existe un único elemento $\mathcal{H}e_n$ de \mathcal{R}_{2n-1} , verificando*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}e_n(x_i) &= y_i \\ & i = 1, 2, \dots, n \\ \mathcal{H}'e_n(x_i) &= y'_i \end{aligned}$$

Además,

$$\mathcal{H}e_n(x) = \sum_{j=1}^n y_j \mathcal{S}_{j,n}(x) + \sum_{j=1}^n y'_j \mathcal{T}_{j,n}(x). \quad (\text{II.1.8})$$

Donde los L -polinomios fundamentales de Hermite $\mathcal{S}_{j,n}$ y $\mathcal{T}_{j,n}$ admiten la siguiente expresión:

$$\mathcal{S}_{j,n}(x) = [1 - 2s_{j,n}(x)(x - x_j)\ell'_{j,n}(x_j)]\ell_{j,n}^2(x) \quad (\text{II.1.9})$$

$$\mathcal{T}_{j,n}(x) = s_{j,n}(x)(x - x_j)\ell_{j,n}^2(x)$$

siendo $\ell_{j,n}(x) = \frac{w_n(x) \cdot x_j^{k(n)}}{(x - x_j)w'_n(x_j)x^{k(n)}}$, con $k(n) = \left[\frac{p(2n-1)}{2} \right]$ y $s_{j,n} =$

$$\left(\frac{x_j}{x} \right)^{\frac{1 - (-1)^{p(2n-1)}}{2}}, \text{ donde } [\cdot] \text{ denota parte entera.}$$

Demostración:

La existencia y la unicidad se deducen a partir del caso polinómico. En efecto, si denotamos por He_n al polinomio de Hermite que verifica las condiciones:

$$He_n(x_i) = x_i^{p(2n-1)} \cdot y_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$He'_n(x_i) = p(2n-1)x_i^{p(2n-1)-1} \cdot y_i + x_i^{p(2n-1)} \cdot y'_i,$$

sabemos que (véase [41])

$$He_n(x) = \sum_{j=1}^n A_{j,n}(x)y_i + \sum_{j=1}^n B_{j,n}(x)y'_i,$$

donde:

$$A_{j,n}(x) = \left\{ 1 - \frac{l''_{j,n}(x_j)}{l'_{j,n}(x_j)}(x - x_j) \right\} \{l_{j,n}^2(x)\} \cdot x_j^{p(2n-1)} + (x - x_j)\{l_{j,n}^2(x)\} \cdot \frac{p(2n-1)}{x_j} \cdot x_j^{p(2n-1)}$$

$$B_{j,n}(x) = (x - x_j)\{l_{j,n}^2(x)\} \cdot x_j^{p(2n-1)}$$

Siendo $\{l_{j,n}\}_{j=1}^n$ los polinomios fundamentales de Lagrange. A continuación, si dividimos He_n por $x^{p(2n-1)}$ e identificamos, obtenemos:

$$\mathcal{S}_{j,n}(x) = \frac{A_{j,n}(x)}{x^{p(2n-1)}} \quad \text{y} \quad \mathcal{T}_{j,n}(x) = \frac{B_{j,n}(x)}{x^{p(2n-1)}},$$

de donde, podemos deducir (II.1.9). ■

Obsérvese que $\ell_{j,n}(x) = \frac{l_{j,n}(x)x_j^{k(n)}}{x^{k(n)}}$, con lo cual estamos en condiciones de enunciar el siguiente lema.

Lema II.1.2 *Sea f una función que admite derivada hasta el orden $2n$ en un intervalo abierto que contiene los puntos $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n} \subset (0, \infty)$, tales que $x_i < x_{i+1}$ y definimos por $F(x) = \frac{f(x)}{x^{p(2n-1)}}$. Entonces*

$$F(x) - \mathcal{H}e_n[F](x) = \frac{f^{(2n)}(\xi_n)}{2n!} \frac{w_n^2(x)}{x^{p(2n-1)}}, \quad \xi_n \in (\min\{x, x_1\}, \max\{x, x_n\}) \quad (\text{II.1.10})$$

Aquí hemos denotado por $\mathcal{H}e_n[F]$ al L -polinomio de Hermite que interpola a F .

Demostración:

Como en el caso polinómico ($p(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$), supongamos que $x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y definamos

$$V(t) = [F(t) - \mathcal{H}e_n[F](t)]t^{p(2n-1)} - K(x)w_n^2(t) \quad (\text{II.1.11})$$

donde $K(x) = \frac{x^{p(2n-1)}[F(x) - \mathcal{H}e_n[F](x)]}{w_n^2(x)}$. Entonces, V se anula en x, x_1, \dots, x_n . Además, como $t^{p(2n-1)}\mathcal{H}e_n[F]$ es un polinomio y $f = t^{p(2n-1)} \cdot F$, la función V posee la misma regularidad que f .

Aplicando el teorema de Rolle deducimos que V' tiene n ceros distintos de los x, x_1, \dots, x_n . Por otro lado, de las condiciones de interpolación, se puede deducir que $V'(x_j) = 0$ para $j = 1, \dots, n$. Así, V' tiene $2n$ ceros distintos en $(\min\{x, x_1\}, \max\{x, x_n\})$. Aplicando reiteradamente el teorema de Rolle, deducimos que $V^{(2n)}(\xi) = 0$ para algún $\xi = \xi(x) \in (\min\{x, x_1\}, \max\{x, x_n\})$. Pero, como $x^{p(2n-1)}\mathcal{H}e_n[F] \in \mathbb{P}_{2n-1}$ por (II.1.11) tenemos que

$$V^{(2n)}(\xi) = f^{(2n)}(\xi) - (2n)!K(x) = 0,$$

como queríamos ver. ■

Si ahora sustituímos en (II.1.1) las expresiones (II.1.10) - (II.1.8) y aplicamos el teorema del valor medio para integrales definidas, obtenemos que:

$$\int_0^\infty F(x)d\varphi(x) = \sum_{j=1}^n W_{j,n}F(x_j) + \sum_{j=1}^n \tilde{W}_{j,n}F'(x_j) + \frac{f^{(2n)}(\zeta_n)}{2n!} \int_0^\infty \frac{w_n^2(x)}{x^{p(2n-1)}}d\varphi(x)$$

donde

$$W_{j,n} = \int_0^\infty \mathcal{S}_{j,n}(x) d\varphi(x) \quad \text{y} \quad \tilde{W}_{j,n} = \int_0^\infty \mathcal{T}_{j,n}(x) d\varphi(x).$$

Si ahora exigimos que $\tilde{W}_{j,n} = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, se sigue que:

$$W_{j,n} = \int_0^\infty \ell_{j,n}^2(x) d\varphi(x)$$

ya que $\mathcal{S}_{j,n}(x) = \ell_{j,n}^2(x) - 2\ell'_{j,n}(x_j)\mathcal{T}_{j,n}(x)$. Obtenemos así el siguiente resultado,

Teorema II.1.3 *Sea f de clase $2n$ en $[0, \infty)$ y definamos $F(x) = \frac{f(x)}{x^{p(2n-1)}}$. Entonces*

$$\int_0^\infty F(x) d\varphi(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} F(x_j) + \frac{f^{(2n)}(\zeta_n)}{2n!} \int_0^\infty \frac{w_n^2(x)}{x^{p(2n-1)}} d\varphi(x), \quad \zeta_n \in (0, \infty) \quad (\text{II.1.12})$$

siendo $\lambda_{j,n} = I(\ell_{j,n}^2)$ los pesos de la FCT.

Demostración:

Sólo quedaría identificar $\lambda_{j,n}$ con $W_{j,n}$, pero eso es inmediato, ya que si en la igualdad (II.1.12) hacemos $f = p$, siendo p cualquier polinomio de grado a lo sumo $2n - 1$, el resto se anula. Por lo tanto, la fórmula de cuadratura es exacta en \mathcal{R}_{2n-1} , es decir, gaussiana. Y si en esa misma igualdad introducimos $\ell_{j,n}^2$, se obtiene que $\lambda_{j,n} = W_{j,n}$. ■

Se puede demostrar que para los nodos de las dos fórmulas de cuadratura restantes se verifica $\ell_{j,n} = L_{j,n}$, ya que para la ortogonal $k(n) = \lceil \frac{p(n-1)+p(n)}{2} \rceil = p(n-1)$ y para la de Tchevyshev $k(n) = \lceil \frac{2p(n-1)}{2} \rceil = p(n-1)$. Señalemos que con este resultado se ha obtenido una expresión del error que ya había sido deducida por Jones-Njåstad-Thron en [81] para el caso particular de la situación balanceada $p(n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. Finalmente, obsérvese que las fórmulas de cuadratura gaussianas y ortogonales coinciden si $p(2n-1) = p(n-1) + p(n)$.

A continuación y al objeto de demostrar nuestro principal resultado de esta sección, necesitamos los siguientes lemas, los cuales permitirán extender las denominadas “DESIGUALDADES DE TCHEBYSHEV-MARKOV-STIELTJES” ([131]).

Lema II.1.3

Sean \tilde{p} , k y n enteros no negativos tales que $0 \leq \tilde{p} \leq 2n - 1$ y $1 \leq k \leq n - 1$ siendo $\tilde{q} = 2n - 2 - \tilde{p}$. Consideremos n números reales positivos distintos dos a dos $\{x_j\}_{j=1}^n$, ordenados de menor a mayor, $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Entonces existe un L -polinomio $L \in \Lambda_{-\tilde{p}, \tilde{q}}$ verificando

1. $L(x_i) = 1, \quad i = 1, \dots, k.$

2. $L(x_i) = 0, \quad i = k + 1, \dots, n.$

3. $L(x) \geq 0, \quad \forall x > 0.$

4. $L(x) \geq 1, \quad \forall x \in (0, x_k].$

Demostración:

Para $\tilde{p} = 0$, estamos en la situación polinómica y el resultado es bien conocido (se puede encontrar en [41]). Procedamos entonces a la demostración para $1 \leq \tilde{p} \leq 2n - 1$. La existencia y unicidad de L es consecuencia de la existencia y unicidad del polinomio $P \in \mathbb{P}_{2n-2}$ que satisface las siguientes condiciones de interpolación:

1. $P(x_j) = x_j^{\tilde{p}}, \quad j = 1, \dots, k.$
2. $P(x_j) = 0 \quad j = k + 1, \dots, n.$

3. $P'(x_j) = \tilde{p} \cdot x_j^{\tilde{p}-1}, \quad j = 1, \dots, k - 1.$
4. $P'(x_j) = 0, \quad j = k + 1, \dots, n.$

De esta forma, nuestro $L(x) = \frac{P(x)}{x^{\tilde{p}}} \in \Lambda_{-\tilde{p}, \tilde{q}}$ satisface las siguientes condiciones de interpolación (recordemos que los x_i son positivos y diferentes dos a dos):

$$L(x_i) = 1, \quad i = 1, \dots, k.$$

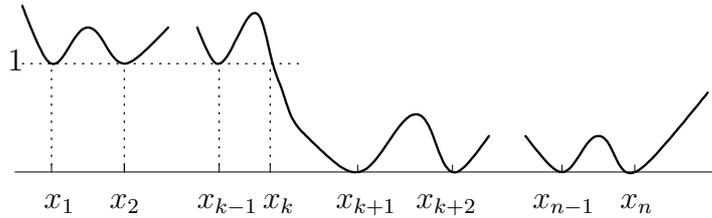
$$L(x_i) = 0, \quad i = k + 1, \dots, n.$$

$$L'(x_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad i \neq k.$$

Ahora, comprobaremos que este L -polinomio posee las propiedades requeridas.

Usando el teorema de Rolle, se deduce que L' se anula en al menos $2n - 3$ puntos en $(0, x_n)$. Si $\tilde{p} = 2n - 2$, se tiene que $L'(x) = x^{-(\tilde{p}+1)} \tilde{P}(x)$, con $\tilde{P} \in \mathbb{P}_{2n-3}$. Por

tanto, L' tiene exactamente $2n - 3$ ceros en $(0, x_n)$, de forma que éste sólo puede tener el comportamiento descrito en la figura siguiente, verificando así L las condiciones del lema.



Diag. II.1: La función $L(x)$

Si $\tilde{p} \neq 2n - 2$, entonces $L'(x) = x^{-(\tilde{p}+1)}\tilde{Q}(x)$, con $\tilde{Q} \in \mathbb{P}_{2n-2}$. Se sigue entonces que L' tiene $2n - 2$ ceros, de los cuales $2n - 3$ son como los de la figura anterior.

Nuestro objetivo es demostrar que el cero que queda por determinar de L' no puede estar en $(0, x_n)$. Esto es inmediato para $\tilde{p} > 2n - 2$, ya que $L(\infty) = 0$ y como $L(x_n) = 0$, debe existir algún punto $\xi > x_n$ donde $L'(\xi) = 0$. Supongamos, finalmente que $0 < \tilde{p} < 2n - 2$. Sabemos que \tilde{Q} tiene al menos $2n - 3$ ceros positivos. Si por reducción al absurdo el otro cero también es positivo, entonces sabemos que, por las igualdades de Cardano-Vieta, los coeficientes de \tilde{Q} son no nulos. Pero si $0 < \tilde{p} \leq 2n - 3$,

$$L(x) = x^{-\tilde{p}}P(x) \quad , \quad P(x) = \sum_{j=0}^{2n-2} b_j x^j \in \mathbb{P}_{2n-2}.$$

luego,

$$L'(x) = x^{-(\tilde{p}+1)}\tilde{Q}(x) \quad , \quad \tilde{Q}(x) = -\tilde{p}P(x) - xP'(x) = \sum_{j=0}^{2n-2} a_j x^j$$

donde $a_0 = -\tilde{p}b_0$ y $a_j = b_j(j - \tilde{p})$ para $1 \leq j \leq 2n - 2$. Se sigue que $a_{\tilde{p}} = 0$, llegando así a una contradicción. Por lo tanto, el cero que quedaba por determinar en el caso $1 \leq \tilde{p} \leq 2n - 3$ es necesariamente negativo. Así, el comportamiento de L está descrito por la figura anterior. ■

El siguiente lema se obtiene de forma similar.

Lema II.1.4

Sean \tilde{p} , k y n enteros no negativos verificando $0 \leq \tilde{p} \leq 2n - 1$ y $1 \leq k \leq n - 1$, siendo \tilde{q} tal que $\tilde{p} + \tilde{q} = 2n - 2$. Sean $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ números reales. Entonces existe un L-polinomio $R \in \Lambda_{-\tilde{p}, \tilde{q}}$ verificando las condiciones

1. $R(x_i) = 1, \quad i = 1, \dots, k.$
2. $R(x_i) = 0, \quad i = k + 1, \dots, n.$
3. $R(x) \leq 0, \quad \forall x \geq x_{k+1}.$
4. $R(x) \leq 1, \quad \forall x > 0.$

Ahora, estamos en condiciones de establecer el siguiente teorema.

Teorema II.1.4 Desigualdades de Tchebyshev-Markov-Stieltjes

Sea $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} f(x_{j,n})$ la FCG . Entonces

$$\int_0^{x_{k,n}} d\varphi(x) < \lambda_{1,n} + \lambda_{2,n} + \dots + \lambda_{k,n} < \int_0^{x_{k+1,n}} d\varphi(x)$$

donde k es un entero positivo verificando $1 \leq k \leq n - 1$.

Demostración:

Sea el L-polinomio L como en el lema II.1.3, donde reemplazamos los puntos x_j por los nodos de la FCG . Como $L \in \mathcal{R}_{2n-1}$, donde es exacta la FCG, entonces se sigue que:

$$\int_0^{\infty} L(x) d\varphi(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} L(x_{j,n}) = \sum_{j=1}^k \lambda_{j,n}.$$

Así,

$$\int_0^{x_{k,n}} d\varphi(x) \leq \int_0^{x_{k,n}} L(x) d\varphi(x) < \sum_{j=1}^k \lambda_{j,n}.$$

Por otro lado, usando el L-polinomio R como en el lema II.1.4, se sigue de forma similar que

$$\sum_{j=1}^k \lambda_{j,n} = \int_0^{\infty} R(x) dx < \int_0^{x_{k+1,n}} R(x) d\varphi(x) \leq \int_0^{x_{k+1,n}} d\varphi(x).$$

■

Observación II.1.1 Se obtiene el mismo resultado para las FCO y FCT.

II.2 Fórmulas de cuadratura sobre $[0, \infty)$

En esta sección vamos a exponer nuestros resultados en cuanto a fórmulas de cuadratura sobre $[0, \infty)$ se refiere. Dividiremos la sección en dos subsecciones: la primera tratará sobre los resultados de convergencia de las fórmulas de cuadratura y la segunda, sobre los resultados numéricos que con carácter ilustrativo y al objeto de contrastar los resultados teóricos serán introducidos.

II.2.1 Convergencia.

En primer lugar vamos a dar una caracterización de la convergencia de las FCG, que será clave para nuestros resultados, en términos del comportamiento de los pesos. Para simplificar, supondremos que φ es absolutamente continua en $(0, \infty)$, con lo cual existirá φ' , positiva casi por todo, de modo que al integrando se le exigirá ser Riemann-Stieltjes integrable en sentido propio o impropio con respecto φ' , obteniéndose básicamente los mismos resultados. Así, tenemos en primer lugar el siguiente:

Teorema II.2.1 Sean $\{\lambda_{j,n}\}_{j=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, los pesos de la FCG. Entonces: $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = I(f)$ para cualquier f Riemann-Stieltjes integrable con respecto a φ' en $[0, \infty)$, si y sólo si $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{j,n} = 0$, uniformemente en j .

Demostración:

“ \Leftarrow ” Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{j,n} = 0$, uniformemente en j y sea f cualquier función verificando que $f \cdot \varphi'$ es integrable en $[0, \infty)$. Definimos $h(x) = \int_0^x \varphi'(s) ds$. Como hemos supuesto que $\varphi'(x) > 0$ c.p.t., entonces h es continua y estrictamente creciente en $(0, \infty)$ y $h(\infty) = \int_0^\infty \varphi'(x) dx = c_0$. Si denotamos por $y_{j,n} = h(x_{j,n})$, $j = 1, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$, entonces, por el Teorema II.1.4, podemos establecer que

$$0 < y_{1,n} < \lambda_{1,n} < y_{2,n} < \lambda_{1,n} + \lambda_{2,n} < y_{3,n} < \lambda_{1,n} + \lambda_{2,n} + \lambda_{3,n} < \dots$$

Como h es continua, existe $\theta_{j,n}$ tal que

$$\lambda_{1,n} + \lambda_{2,n} + \dots + \lambda_{j,n} = h(\theta_{j,n}) =: \tilde{y}_{j,n}, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

y denotamos por $\tilde{y}_{0,n} = 0$ y $\tilde{y}_{n,n} = \sum_{k=1}^n \lambda_{j,n} = c_0$. Se tiene que, $\tilde{y}_{j+1,n} - \tilde{y}_{j,n} = \lambda_{j,n} \rightarrow 0$ uniformemente en j . Ahora, la función $\tilde{f}(y) = f(h^{-1}(y))$ es Riemann integrable en $[0, c_0]$ (en sentido propio o impropio) y como la expresión $\sum_{j=1}^n \tilde{f}(y_{j,n})(\tilde{y}_{j+1,n} - \tilde{y}_{j,n})$ es una suma de Riemann en $[0, c_0]$, podemos escribir

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_0^\infty f(x)\varphi'(x) dx = \int_0^{c_0} \tilde{f}(y) dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \tilde{f}(y_{j,n})(\tilde{y}_{j+1,n} - \tilde{y}_{j,n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} f(x_{j,n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f). \end{aligned}$$

“ \Rightarrow ” Sea $f = \chi_{[a,b]}$, la función característica de cualquier intervalo $[a, b] \subset [0, \infty)$, donde b puede ser incluso ∞ , es decir,

$$f(x) = \chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}.$$

Entonces $\chi_{[a,b]} \cdot \varphi'$ es integrable y por hipótesis:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{a \leq x_{j,n} \leq b} \lambda_{j,n} = \int_a^b \varphi'(x) dx > 0.$$

Supongamos por reducción al absurdo que existe una sucesión $\{l(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de números naturales tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{l(n),n} = A \neq 0.$$

Obsérvese que para cualquier j , $1 \leq j \leq n$, $\lambda_{j,n} < \sum_{k=1}^n \lambda_{k,n} = c_0$. Consideremos la sucesión $x_{l(n),n}$ (o posiblemente una subsucesión) que necesariamente converge a un cierto x , es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{l(n),n} = x$, donde x puede ser finito o infinito. Si x es finito, entonces podemos elegir un $\epsilon > 0$ tal que

$$\int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \varphi'(s) ds < \frac{A}{2}$$

de lo que se sigue que

$$A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{x-\epsilon \leq x_{j,n} \leq x+\epsilon} \lambda_{j,n} = \int_{x-\epsilon}^{x+\epsilon} \varphi'(s) ds.$$

que es un absurdo (el absurdo proviene de haber negado la hipótesis). De forma análoga, si $x = \infty$, elegimos un $M > 0$, tal que $\int_M^\infty \varphi'(x) dx < A/2$, que nos conduce a la misma contradicción. Por lo tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{j,n} = 0$ uniformemente en j . ■

Además, como consecuencia de los resultados obtenidos por López-Lagomasino en [91] y por Illán-López en [77], se logra obtener un resultado general para cualquier elección $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. En efecto, vale el siguiente.

Teorema II.2.2 *Sea $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de enteros no negativos tal que $0 \leq p(n) \leq n$ y sea φ una función de distribución para la que existen los momentos c_n , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; con $c_n = \int_0^\infty x^n d\varphi(x)$. Entonces,*

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} n - p(n) = \infty \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-\frac{1}{2n}} = \infty \quad (A)$$

$$\text{o bien,} \quad (II.2.1)$$

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \infty \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}^{-\frac{1}{2n}} = \infty \quad (B)$$

podemos asegurar que las FCG convergen para toda función Riemann-Stieltjes integrable con respecto al integrador $d\varphi$.

Concluimos, pues, que basta con exigir que se dé (II.2.1) para garantizar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{j,n} = 0$ uniformemente en j .

Una consecuencia inmediata de los dos teoremas anteriores y usando los mismos argumentos que Uspensky en [132], se obtiene el siguiente corolario

Corolario II.2.1 *Sea f una función verificando:*

1. $f(x)$ es Riemann integrable en cualquier subintervalo $[0, a] \subset [0, \infty)$ y sean M y m tales que

$$|f(x)| \leq x^m, \quad \forall x \geq M, \quad M \geq 0, \quad m \in \mathbb{N}$$

y se verifique la condición (A) de (II.2.1)

ó bien

2. $f(x)$ es Riemann integrable en cualquier subintervalo $[b, \infty) \subset (0, \infty)$ y existen dos constantes k y h tal que

$$|f(x)| \leq x^{-k}, \quad \forall x \leq h, \quad h \geq 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

y se verifique la condición (B) de (II.2.1).

Entonces, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = I(f)$, siendo $\{I_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ la correspondiente sucesión de FCG.

Parece lógico que se pueda asegurar la convergencia de nuestras fórmulas de cuadratura para integrandos con comportamiento similar al de un L-polinomio en los extremos de $[0, \infty)$, dada la integrabilidad de éstos. Pero si pretendemos extender tales resultados de convergencia a otra clase de integrandos de comportamiento más general, debemos añadir alguna restricción a los momentos $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Precisamente, éste es nuestro objetivo: imponer condiciones sobre el tamaño de los momentos que garanticen la convergencia de las fórmulas de cuadratura para integrandos positivos pertenecientes a la clase más amplia posible, con vistas a demostrarlo para los integrandos mayorados por éstos, de forma similar al corolario anterior.

En este sentido, supondremos inicialmente que los momentos verifican:

$$c_n \leq C\Gamma((n + \theta + 1)\gamma)R^{n\gamma}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{II.2.2})$$

o bien

$$c_{-n} \leq \hat{C}\Gamma((n - \hat{\theta} - 1)\gamma)\hat{R}^{n\gamma}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{II.2.3})$$

donde $\theta > -1$, $\hat{\theta} < -1$, C, \hat{C}, R y \hat{R} son constantes positivas, $0 < \gamma \leq 2$, y $\Gamma(s)$ denota a la función Gamma. Nótese que bajo estas condiciones, los momentos $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, y por lo tanto las integrales $I(f)$ y las FCG $\{I_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$, dependerán de γ . Además, se satisfacen las condiciones de tipo Carleman contenidas en la condición (II.2.1) del Teorema II.2.2.

En el siguiente teorema haremos uso de la función de Mittag-Leffler ([55]), definida por

$$E_\gamma(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{\Gamma(\gamma k + 1)}, \quad \forall y \in \mathbb{C}, \quad (\text{II.2.4})$$

que es una función entera. La técnica que utilizamos para su demostración está inspirada en la usada por Uspensky en [132].

Teorema II.2.3 *Supongamos que los momentos satisfacen (II.2.2) y que $\lim_{n \rightarrow \infty} q(n) = \infty$. Entonces, para cualquier función localmente Riemann integrable verificando*

$$|f(x)| \leq \frac{e^{rx^{1/\gamma}}}{x^{1+\theta+\rho}}, \quad r = \frac{1}{R}, \quad 0 < \rho < 1, \quad \theta > -1 \quad (\text{II.2.5})$$

para los x a partir de un x_0 en adelante, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = I(f)$$

siendo $\{I_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ la correspondiente sucesión de fórmulas gaussianas.

Demostración:

Nuestro objetivo es demostrar que la integral

$$I \left(\frac{E_\gamma(r^\gamma x)}{1 + x^{1+\theta+\rho}} \right)$$

existe, y como el integrando es una función positiva, el teorema estaría probado asimismo para cualquier integrando f tal que $|f|$ la minore.

Sea $b > 0$. Como consecuencia de la convergencia uniforme de la serie (II.2.4) en $[0, b]$, podemos garantizar que

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{E_\gamma(r^\gamma x)}{1 + x^{1+\theta+\rho}} \varphi'(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^n \frac{r^{\gamma l}}{\Gamma(\gamma l + 1)} \int_0^b \frac{x^l}{1 + x^{1+\theta+\rho}} \varphi'(x) dx \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^{\gamma l}}{\Gamma(\gamma l + 1)} \int_0^b \frac{x^l}{1 + x^{1+\theta+\rho}} \varphi'(x) dx \\ &\leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^{\gamma l}}{\Gamma(\gamma l + 1)} \int_0^{\infty} \frac{x^l}{1 + x^{1+\theta+\rho}} \varphi'(x) dx. \end{aligned} \quad (\text{II.2.6})$$

Veamos que la serie (II.2.6) es convergente. En efecto,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^l}{1 + x^{1+\theta+\rho}} \varphi'(x) dx \leq \int_0^{\infty} x^{l-1-\rho-\theta} \varphi'(x) dx = c(l-1-\rho-\theta).$$

Por otro lado, dado que $\theta > -1$, existirán un n_θ natural y un número real positivo $\omega_\theta < 1$ tales que $\theta = n_\theta - \omega_\theta$. Por consiguiente, recordando que $c(t) = \int_0^{\infty} x^t \varphi'(x) dx$, se sigue que

$$c(l-1-\theta-\rho) = c(l-1-n_\theta+\omega_\theta-\rho)$$

$$= \begin{cases} c(l-1-n_\theta) & \text{si } \omega_\theta - \rho = 0 & (A) \\ c(l-n_\theta-\rho_\theta) & \text{si } \omega_\theta - \rho = 1 - \rho_\theta & : 0 < \rho_\theta < 1 & (B) \\ c(l-n_\theta-1-\rho_\theta) & \text{si } \omega_\theta - \rho = -\rho_\theta & : 0 < \rho_\theta < 1 & (C) \end{cases} \quad (\text{II.2.7})$$

Considerando el caso II.2.7 (A) y con la estimación de los momentos positivos (II.2.2), obtenemos

$$c(l-1-\theta-\rho) = c(l-1-n_\theta) \leq C\Gamma(\gamma(l-n_\theta+\theta)) \cdot R^{\gamma(l-1-n_\theta)}, \quad l \geq n_\theta + 1.$$

Sustituyendo en (II.2.6), se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^{\gamma l}}{\Gamma(\gamma l + 1)} \int_0^{\infty} \frac{x^l}{1+x^{1+\theta+\rho}} \varphi'(x) dx &\leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r^{\gamma l}}{\Gamma(\gamma l + 1)} c(l-1-\theta-\rho) \\ &= \sum_{l=0}^{n_\theta} \frac{r^{\gamma l}}{\Gamma(\gamma l + 1)} c(l-1-n_\theta) \\ &\quad + \sum_{l=n_\theta+1}^{\infty} \frac{r^{\gamma l}}{\Gamma(\gamma l + 1)} c(l-1-n_\theta) \\ &\leq \sum_{l=0}^{n_\theta} \frac{r^{\gamma l}}{\Gamma(\gamma l + 1)} c(l-1-n_\theta) \\ &\quad + CR^{-\gamma(1+n_\theta)} \sum_{l=n_\theta+1}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma(l-n_\theta+\theta))}{\Gamma(\gamma l + 1)} \end{aligned} \quad (\text{II.2.8})$$

Ahora, usando la fórmula de Stirling (ver [55]).

$$\Gamma(z) = e^{-z} z^{z-1/2} (2\pi)^{1/2} \left[1 + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \dots \right], \quad z \rightarrow \infty \text{ cuando } |\text{Arg}(z)| < \pi,$$

se sigue que las expresiones

$$\frac{\Gamma(\gamma(l-n_\theta+\theta))}{\Gamma(\gamma l + 1)} \quad \text{y} \quad \frac{1}{l^{1+\gamma\rho}}$$

son equivalentes cuando $l \rightarrow \infty$ en el sentido de que el cociente tiende a un número finito. Concluimos que la serie (II.2.8) es convergente y por tanto, la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{E_\gamma(r^\gamma x)}{1+x^{1+\theta+\rho}} \varphi'(x) dx$$

existe y es finita (el razonamiento es totalmente análogo para los casos (B) y (C) de (II.2.7)). Usando el comportamiento asintótico de la función E_γ (ver [55]),

$$E_\gamma(z) = \frac{1}{\gamma} \exp(z^{1/\gamma}) + O\left(\frac{1}{|z|}\right), \quad \text{cuando } z \rightarrow \infty \text{ en } |\text{Arg}(z)| \leq \gamma\pi/2,$$

obtenemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\gamma E_\gamma(x)}{\exp(x^{1/\gamma})} \right| = 1. \quad (\text{II.2.9})$$

Así, de (II.2.5) y (II.2.9), concluimos que $I(f)$ existe y procediendo de forma análoga a la demostración del corolario II.2.1 se completa la demostración. ■

Si ahora, en lugar de la condición (II.2.2), consideramos la (II.2.3), conseguimos un resultado similar, procediendo para su demostración de modo similar.

Teorema II.2.4 *Supongamos que los momentos negativos satisfacen (II.2.3) y que la sucesión $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ verifica $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \infty$. Entonces, para toda función Riemann integrable en cualquier intervalo de la forma $[a, \infty)$, ($a > 0$), satisfaciendo*

$$|f(x)| \leq \frac{e^{\hat{r}/x^{\frac{1}{\gamma}}}}{x^{\hat{\theta}-\rho}}, \quad \hat{r} = 1/\hat{R}, \quad 0 < \rho < 1, \quad \hat{\theta} < -1, \quad \text{con } x < x_0$$

y siendo x_0 suficientemente pequeño, se verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = I(f).$$

siendo $\{I_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ la correspondiente sucesión de fórmulas gaussianas.

Observación II.2.1 *Se llega al mismo resultado si en lugar de usar las FCG usamos las FCO o bien las FCT.*

Observación II.2.2 *Téngase en cuenta que si $p(n) = 0$ para todo $n = 1, 2, \dots$, recuperamos las fórmulas de cuadratura gaussianas clásicas. Si hacemos $\gamma = 2$, y $\theta = 0$, obtenemos los resultados de convergencia de Uspensky [132].*

Otros resultados de convergencia en esta línea fueron obtenidos por González Concepción y otros en [69] para la situación balanceada $p(n) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ con $\gamma = 2$ y $\theta = 0$.

Observación II.2.3 *Las funciones peso estudiadas por López-Lagomasino y Martínez-Finkelshtein en [96] tienen la forma:*

$$\varphi'(x) = x^\alpha e^{-\tau(x)} \quad x \in (0, \infty) \quad (\text{II.2.10})$$

$$\text{donde } \lim_{x \rightarrow 0^+} (sx)^{\gamma_1} \tau(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (sx)^{-\gamma_2} \tau(x) = A > 0,$$

siendo $\tau(x)$ una función continua en $(0, \infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $s > 0$, con $\gamma_1 > 1/2$ y $\gamma_2 > 1/2$.

Tales funciones peso satisfacen nuestras condiciones (II.2.2) y (II.2.3) para elecciones de θ y $\hat{\theta}$ apropiadas (como veremos en la subsección relativa a los resultados numéricos).

Supongamos ahora que queremos estimar la integral

$$I(f) = \int_0^{\infty} f(x) k(x) dx$$

donde en general la función peso k no conserva el signo (puede incluso tomar valores complejos). En esta situación no tiene sentido hablar de fórmulas gaussianas, pues nada podemos asegurar sobre la localización de los nodos. A tal efecto, utilizaremos FCI con una especial elección de los nodos de modo que estemos en condiciones de poder extender los resultados de Sloan-Smith obtenidos en [120] al caso no acotado.

Teorema II.2.5 *Sea k una función posiblemente compleja satisfaciendo:*

$$\int_0^{\infty} \frac{|k(x)|^2}{\varphi'(x)} dx < \infty \quad (\text{II.2.11})$$

Sea $\{I_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de FCI que tienen por nodos los de la FCO para φ' para el cálculo de integrales del tipo:

$$I(f) = \int_0^{\infty} f(x) k(x) dx < \infty.$$

1. Si la sucesión $\{q(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ verifica que $\lim_{n \rightarrow \infty} q(n) = \infty$ y los momentos $c_n = \int_0^{\infty} x^n \varphi'(x) dx$, $n = 0, 1, \dots$ satisfacen (II.2.2)

o bien

2. La sucesión $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ verifica $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \infty$ y los momentos $c_{-n} = \int_0^{\infty} x^{-n} \varphi'(x) dx$, $n = 1, 2, \dots$ satisfacen (II.2.3).

Se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = \int_0^{\infty} f(x) k(x) dx \quad (\text{II.2.12})$$

y además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |\lambda_{j,n}| f(x_{j,n}) = \int_a^b f(x) |k(x)| dx$$

donde, para el apartado 1, f es cualquier función localmente integrable en $[0, \infty)$ que satisface

$$|f(x)| \leq c \cdot \frac{e^{\frac{d}{2}x^{\frac{1}{\gamma}}}}{x^{1+\theta+\rho}} \quad \text{tal que } d = \frac{1}{R}, \quad c > 0, \quad 0 < \rho < 1 \quad \text{y } \theta > -1 \quad (\text{II.2.13})$$

a partir de un x_0 suficientemente grande; mientras que para el apartado 2, f será cualquier función integrable en $[a, \infty)$ para todo $a > 0$, verificando

$$|f(x)| \leq \tilde{c} \cdot \frac{e^{\frac{\hat{d}}{2}x^{-\frac{1}{\hat{\gamma}}}}}{x^{\hat{\theta}-\rho}} \quad \text{tal que } \hat{d} = \frac{1}{\hat{R}}, \quad \tilde{c} > 0, \quad 0 < \rho < 1 \quad \text{y } \hat{\theta} < -1, \quad x < \tilde{x}_0, \quad (\text{II.2.14})$$

para un cierto \tilde{x}_0 suficientemente pequeño.

Demostración:

Recuérdese que $\mathcal{R}_n = \Lambda_{p(n),q(n)}$ siendo $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{q(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones de enteros no negativos tales que $p(n) + q(n) = n$, y que para cualquiera de las dos condiciones sobre los pesos, el espacio de los L-polinomios es denso en

$$L_2(\varphi') = \left\{ f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} / f \text{ es medible y } \int_0^\infty |f(x)|^2 \varphi'(x) dx < \infty \right\}$$

con la norma que induce el citado producto interior, a saber:

$$\langle L, R \rangle = \int_0^\infty L(x) \cdot R(x) \varphi'(x) dx,$$

Obsérvese además que se trata de un espacio Hilbert (ver [131]).

En consecuencia, siguiendo el proceso de ortogonalización en Λ asociado a $\{\mathcal{R}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, podemos construir una base ortonormal maximal $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, es decir:

$$\int_0^\infty L(x) \cdot V_n(x) \varphi'(x) dx = 0 \quad \forall L \in \mathcal{R}_{n-1} \quad \text{con } V_n \in \mathcal{R}_n.$$

De donde se sigue que:

$$\int_0^\infty V_k(x) \cdot V_l(x) \varphi'(x) dx = \delta_{k,l} \quad \forall k, l \in \mathbb{N}$$

Seguidamente, denotaremos por $\lambda_{j,n}(\rho)$ a los pesos (en general complejos) de la FCI asociada al peso ρ , teniendo por nodos los de la FCO asociada al peso φ' . Vamos

a establecer una propiedad que relaciona los pesos $\lambda_{j,n}(k)$ con los $\lambda_{j,n}(\varphi')$ bajo la condición (II.2.11), de forma paralela a lo hecho en [34, 120]. En efecto, la condición (II.2.11) es equivalente a que $\frac{k}{\varphi'} \in L_2(\varphi')$; así, al tratarse $\frac{k}{\varphi'}$ de un elemento de $L_2(\varphi')$ admite el siguiente desarrollo de Fourier:

$$\frac{k(x)}{\varphi'(x)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k V_k(x) \quad (\text{II.2.15})$$

Ahora, recordando que

$$\lambda_{j,n}(k) = \int_0^{\infty} L_{j,n}(x) k(x) dx, \quad \text{con } L_{j,n} \in \mathcal{R}_{n-1} \text{ y } L_{j,n}(x_{k,n}) = \delta_{j,k},$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} \lambda_{j,n}(k) &= \int_0^{\infty} L_{j,n}(x) \frac{k(x)}{\varphi'(x)} \varphi'(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \int_0^{\infty} L_{j,n}(x) \cdot V_k(x) \varphi'(x) dx \end{aligned}$$

y como $L_{j,n} \in \mathcal{R}_{n-1}$, se sigue por la ortogonalidad que

$$\lambda_{j,n}(k) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \int_0^{\infty} L_{j,n}(x) \cdot V_k(x) \varphi'(x) dx.$$

Ahora bien, como $L_{j,n} \cdot V_k \in \Lambda_{-p(n)-p(n-1), q(n)+q(n-1)}$, con $k : 0 \leq k \leq n-1$ y la FCO es exacta en ese espacio, tenemos que

$$\lambda_{j,n}(k) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k \lambda_{j,n}(\varphi') \cdot V_k(x_j),$$

dado que $L_{j,n}(x_i) = \delta_{i,j}$. Esta igualdad se reduce a :

$$\lambda_{j,n}(k) = \lambda_{j,n}(\varphi') \cdot S_{n-1}^{\frac{k}{\varphi'}}(x_j), \quad (\text{II.2.16})$$

siendo $S_{n-1}^{\frac{k}{\varphi'}}(x_j)$ la suma parcial del desarrollo de Fourier (II.2.15).

Vamos a demostrar el teorema para la situación 1. Queremos ver que para todo $\epsilon > 0$ existe un $n_0(\epsilon)$, tal que para todos los n mayores que él se cumpla:

$$\left| \int_0^{\infty} f(x) |k(x)| dx - \sum_{k=1}^n |\lambda_{j,n}(k)| f(x_{j,n}) \right| \leq \epsilon$$

cuando la función f satisface (II.2.13). La demostración de (II.2.12) se hace de forma análoga pero sin valor absoluto, y la de las funciones del tipo (II.2.14) se hace exactamente igual con las consideraciones oportunas.

Sea ϵ fijo y ω una función verificando la condición de integrabilidad (II.2.11). Entonces:

$$\left| \int_0^\infty f(x)|k(x)|dx - \sum_{j=1}^n |\lambda_{j,n}(k)|f(x_{j,n}) \right| \leq \left| \int_0^\infty f(x)|k(x)|dx - \int_0^\infty f(x)|\omega(x)|dx \right| \\ + \left| \sum_{j=1}^n |\lambda_{j,n}(k)|f(x_{j,n}) - \sum_{j=1}^n |\lambda_{j,n}(\omega)|f(x_{j,n}) \right| + \left| \int_0^\infty f(x)|\omega(x)|dx - \sum_{j=1}^n |\lambda_{j,n}(\omega)|f(x_{j,n}) \right|,$$

si definimos $\|f\|_h = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f(x)h(x)|$, donde $h(x) = x^{\frac{1+\theta+\rho}{2}} \cdot e^{-\frac{d}{2}x^\gamma}$, con $d = \frac{1}{R}$ y usamos la linealidad de los pesos con respecto a la función peso, llegamos a que

$$\left| \int_0^\infty f(x)|k(x)|dx - \sum_{j=1}^n |\lambda_{j,n}(k)|f(x_{j,n}) \right| \leq \|f\|_h \left\{ \left| \int_0^\infty |k(x) - \omega(x)| \left(\frac{e^{d \cdot x^\gamma}}{x^{1+\theta+\rho}} \right)^{\frac{1}{2}} dx \right| \right. \\ \left. + \left| \sum_{j=1}^n |\lambda_{j,n}(k - \omega)| \left(\frac{e^{d \cdot x_{j,n}^\gamma}}{x_{j,n}^{1+\theta+\rho}} \right)^{\frac{1}{2}} \right| \right\} + \left| \int_0^\infty f(x)|\omega(x)|dx - \sum_{j=1}^n |\lambda_{j,n}(\omega)|f(x_{j,n}) \right| \\ \leq \|f\|_h \left\{ \left| \int_0^\infty \left| \frac{k(x)}{\varphi'(x)} - \frac{\omega(x)}{\varphi'(x)} \right| \left(\frac{e^{d \cdot x^\gamma}}{x^{1+\theta+\rho}} \right)^{\frac{1}{2}} \varphi'(x) dx \right| + \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n}(\varphi') \left| S_{n-1}^{\frac{k}{\varphi'} - \frac{\omega}{\varphi'}}(x_{j,n}) \right| \left(\frac{e^{d \cdot x_{j,n}^\gamma}}{x_{j,n}^{1+\theta+\rho}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ + \left| \int_0^\infty f(x)|\omega(x)|dx - \sum_{j=1}^n |\lambda_{j,n}(\varphi')| S_{n-1}^{\frac{\omega}{\varphi'}}(x_{j,n}) |f(x_{j,n})| \right|.$$

Para llegar a la última desigualdad se ha usado (II.2.16). Así, si denotamos por $\tilde{k} = \frac{k}{\varphi'}$ y por $\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\varphi'}$, teniendo en cuenta que $\tilde{k}, \tilde{\omega} \in L_2(\varphi')$ y aplicando la desigualdad de Schwarz, se sigue que

$$\left| \int_0^\infty f(x)|k(x)|dx - \sum_{j=1}^n |\lambda_{j,n}(k)|f(x_{j,n}) \right| \\ \leq \|f\|_h \cdot \left\{ \|\tilde{k} - \tilde{\omega}\|_2 \left(I \left(\frac{e^{d \cdot x^\gamma}}{x^{1+\theta+\rho}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{j,n}(\varphi') |S_{n-1}^{\tilde{k} - \tilde{\omega}}(x_{j,n})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{j,n}(\varphi') \frac{e^{d \cdot x_{j,n}^\gamma}}{x_{j,n}^{1+\theta+\rho}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ + \left| \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n}(\varphi') |S_{n-1}^{\tilde{\omega}}(x_{j,n})| f(x_{j,n}) - \int_0^\infty f(x)|\omega(x)|dx \right|.$$

Al ser $|S_{n-1}^{\tilde{k}-\tilde{\omega}}|^2 \in \Lambda_{-p(n)-p(n-1), q(n)+q(n-1)}$ se sigue que

$$\left(\sum_{j=1}^n \lambda_{j,n}(\varphi') |S_{n-1}^{\tilde{k}-\tilde{\omega}}(x_{j,n})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|S_{n-1}^{\tilde{k}-\tilde{\omega}}\|_2 \leq \|\tilde{k} - \tilde{\omega}\|_2$$

debiéndose esto último a la desigualdad de Bessel (ver [41]).

Como \mathbb{P} es denso en $L_2(\varphi')$, existe un polinomio Q tal que $\|Q - \tilde{k}\|_2 < \epsilon$. Con Q , fijamos ω , estableciendo $\tilde{\omega} = Q$, es decir, $\omega = Q \cdot \varphi'$; así podemos asegurar que $\exists \tilde{n}_0$ tal que para todo n mayor que él se verifica que $S_{n-1}^{\tilde{\omega}} = S_{n-1}^Q = Q$ y

$$\left| \int_0^\infty f(x)|k(x)|dx - \sum_{j=1}^n |\lambda_{j,n}(k)|f(x_{j,n}) \right| \leq \epsilon \cdot \|f\|_h \left\{ \left(I\left(\frac{e^{d \cdot x^\gamma}}{x^{1+\theta+\rho}}\right) \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{j,n}(\varphi') \frac{e^{d \cdot x_{j,n}^\gamma}}{x_{j,n}^{1+\theta+\rho}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ + \left| \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n}(\varphi') |Q(x_{j,n})|f(x_{j,n}) - \int_0^\infty f(x)|Q(x)|\varphi'(x)dx \right|.$$

sabemos que $\frac{e^{d \cdot x^\gamma}}{x^{1+\theta+\rho}}$ y $|Q| \cdot f$, donde f cumple (II.2.13), satisfacen las hipótesis del Teorema II.2.3. Se sigue entonces que existe un \hat{n}_0 tal que para los n mayores que él, el segundo sumando se puede hacer menor que ϵ , mientras que el primer sumando está acotado por $C \cdot \epsilon$ para cierta constante C positiva. Para concluir la demostración, basta tomar $n_0 = \max\{\tilde{n}_0, \hat{n}_0\}$. ■

II.2.2 Resultados numéricos

En esta sección vamos a comparar la efectividad de nuestras fórmulas de cuadratura (FCG) que llamaremos de ahora en adelante “tipo Gauss”, con las clásicas gaussianas.

A tal efecto, nos limitaremos a la función peso:

$$\omega(x) = \frac{e^{-(x+\frac{1}{x})}}{\sqrt{x}}, \quad x \in (0, \infty). \quad (\text{II.2.17})$$

Se trata de un caso particular de las funciones pesos comentadas anteriormente en la observación II.2.10, estudiadas en [96]:

$$\rho(x) = x^\alpha e^{-\tau(x)} \quad (\text{II.2.18})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (sx)^{\gamma_1} \tau(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (sx)^{-\gamma_2} \tau(x) = A > 0,$$

siendo τ una función continua en $(0, \infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $s > 0$, con $\gamma_1 > 1/2$ y $\gamma_2 > 1/2$. Así, escogiendo $\tau(x) = x + \frac{1}{x}$, $\alpha = -\frac{1}{2}$, $s = 1$ y $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ obtenemos nuestra función peso.

En primer lugar, comprobaremos, en general, que estos pesos ρ satisfacen, bien para θ o bien para $\hat{\theta}$ apropiados, las condiciones (II.2.2) ó (II.2.3) impuestas por nosotros.

Así, para γ_1 y $\gamma_2 > \frac{1}{2}$, definamos

$$h(x) = x^{\gamma_2} + \frac{1}{x^{\gamma_1}}, \quad \gamma_1, \gamma_2 > \frac{1}{2},$$

entonces, por (II.2.18) y la continuidad de τ en $(0, \infty)$, así como por su comportamiento en los extremos, podemos deducir que existen constantes positivas B_0 y B_1 verificando:

$$B_0 \leq \frac{\tau(x)}{h(x)} \leq B_1 \quad \forall x \in [0, \infty)$$

y por lo tanto,

$$\exp(-B_1 h(x)) \leq \exp(-\tau(x)) \leq \exp(-B_0 h(x)), \quad \forall x \in [0, \infty). \quad (\text{II.2.19})$$

Si para cada entero k , denotamos por d_k a los momentos de ρ en (II.2.18), es decir:

$$d_k = \int_0^\infty x^k x^\alpha \exp(-\tau(x)) dx,$$

se sigue de (II.2.19) que :

$$d_k \leq \int_0^\infty x^k x^\alpha \exp(-B_0 h(x)) dx.$$

Así, si denotamos por

$$\mu_k = \int_0^\infty x^k x^\alpha \exp(-B_0(x^{\gamma_2} + \frac{1}{x^{\gamma_1}})) dx$$

entonces, bastará comprobar que $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ satisface las condiciones requeridas.

Primero, consideraremos los momentos μ_k con $k \in \mathbb{N}$. Distinguiremos dos casos:

1. $\alpha > -1$. Entonces, podemos tomar $\alpha = \theta$. En efecto,

$$\mu_k = \int_0^\infty x^k x^\theta e^{-B_0 x^{\gamma_2}} e^{-B_0 \frac{1}{x^{\gamma_1}}} dx \leq \int_0^\infty x^k x^\theta e^{-B_0 x^{\gamma_2}} dx.$$

si hacemos el cambio de variable $B_0 x^{\gamma_2} = t$, $x = \left(\frac{1}{B_0}\right)^{\frac{1}{\gamma_2}} t^{\frac{1}{\gamma_2}}$, obtenemos:

$$\mu_k \leq \left(\frac{1}{B_0}\right)^{\frac{k+\theta+1}{\gamma_2}} \gamma_2^{-1} \int_0^\infty t^{\frac{k+\theta+1}{\gamma_2}-1} e^{-t} dt = \left(\frac{1}{B_0}\right)^{\frac{\theta+1}{\gamma_2}} \gamma_2^{-1} \Gamma\left(\frac{1}{\gamma_2}(k+\theta+1)\right) \left(\frac{1}{B_0}\right)^{\frac{k}{\gamma_2}}.$$

2. $\alpha \leq -1$. En este caso podemos encontrar $\rho \geq 0$ tal que $\alpha + \rho = \theta$, con $\theta > -1$, de modo que,

$$\mu_k = \int_0^\infty x^k x^\theta e^{-B_0 x^{\gamma_2}} \frac{e^{-B_0 \frac{1}{x^{\gamma_1}}}}{x^\rho} dx.$$

Pero como $\frac{e^{-B_0 \frac{1}{x^{\gamma_1}}}}{x^\rho} \leq K$ para todo $x \in [0, \infty)$, se sigue que:

$$\mu_k \leq K \int_0^\infty x^k x^\theta e^{-B_0 x^{\gamma_2}} dx,$$

con $\theta > -1$, que se reduce al caso anterior.

A continuación, consideraremos los momentos $\mu_{-(k+1)}$ con $k \in \mathbb{N}$. Con el cambio de variable $x = \frac{1}{t}$, podemos escribir

$$\mu_{-(k+1)} = \int_0^\infty x^{-(k+1)} x^\alpha e^{-B_0(x^{\gamma_2} + \frac{1}{x^{\gamma_1}})} dx = \int_0^\infty t^k t^{-(1+\alpha)} e^{-B_0(t^{\gamma_1} + \frac{1}{t^{\gamma_2}})} dt$$

si denotamos por $\tilde{\alpha} = -(1+\alpha)$ y se procede con $\tilde{\alpha}$ exactamente igual que como se hizo con α en los casos anteriores, se concluye (II.2.19) en cualquier caso.

En definitiva, los resultados de la subsección anterior se pueden aplicar a las funciones peso (II.2.18) y en particular, al peso en consideración (II.2.17). Nuestro objetivo será estimar la integral:

$$I(f) = \int_0^\infty f(x) \frac{e^{-(x+1/x)}}{\sqrt{x}} dx, \quad (\text{II.2.20})$$

para diferentes elecciones del integrando f . Como elección de la sucesión $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, tomaremos la denominada situación “balanceada”, es decir, $p(n) = \left[\frac{n+1}{2}\right]$, $n \in \mathbb{N}$, donde $[\cdot]$ es parte entera.

Básicamente, para poder calcular las fórmulas de cuadratura $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} f(x_{j,n})$ será necesario computar los pesos y los nodos. Para ello usaremos la relación existente entre las fórmulas de cuadratura y la aproximación de Padé. Sabemos que los nodos de la fórmula de cuadratura de tipo Gauss son los ceros de n-ésimo polinomio ortogonal

Q_n con respecto a la función peso $\frac{\omega(x)}{x^{p(2n-1)}}$ (siendo $p(2n-1) = \lfloor \frac{2n}{2} \rfloor = n$). En este caso concreto (ver [113]), se puede deducir una relación de recurrencia a tres términos para la sucesión $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, a saber:

$$Q_{n+1}(x) = (x-1)Q_n(x) - \frac{n}{2}xQ_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

con condiciones iniciales $Q_0(x) \equiv 1$ y $Q_1(x) = x-1$. Ello nos va a permitir calcularlos recursivamente. Ahora, si consideramos el aproximante de Padé en dos puntos $[n/n]$ de $F_\omega(z) = \int_0^\infty \frac{\omega(x)}{z-x} dx$, esto es, $[n/n]_{F_\omega}(z) = P_{n-1}(z)/Q_n(z)$, con $P_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$, se demuestra que $\{P_n\}_{n \geq 0}$ satisface la misma relación de recurrencia que $\{Q_n\}_{n \geq 0}$ (ver [113]), es decir ,

$$P_n(x) = (x-1)P_{n-1}(x) - \frac{n}{2}xP_{n-2}(x), \quad n \geq 1$$

aunque, ahora, con las condiciones iniciales $P_{-1} \equiv 0$ y $P_0 = c_0$.

Teniendo en cuenta que, por la descomposición en fracciones simples,

$$[n/n]_{F_\omega}(z) = \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{j,n}}{z-x_{j,n}},$$

se desprende que

$$\lambda_{j,n} = \frac{P_{n-1}(x_{j,n})}{Q'_n(x_{j,n})}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Se concluye, por tanto, que las fórmulas de cuadratura de tipo Gauss en este caso pueden ser computadas fácilmente.

A efectos de comparar estas fórmulas de cuadratura de tipo Gauss con las clásicas fórmulas gaussianas, escribiremos

$$I(f) = \int_0^\infty f(x) \frac{e^{-(x+1/x)}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^\infty f(x) e^{-1/x} \cdot \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^\infty g(x) \beta(x) dx = I_\beta(g),$$

con $g(x) = f(x) \exp(-1/x)$ y $\beta(x) = \exp(-x)/\sqrt{x}$. Así, la integral $I_\beta(g)$ será estimada por medio de las fórmulas de cuadratura de Gauss-Laguerre de orden $-1/2$.

Denotaremos esta fórmula por:

$$\tilde{I}_n(g) = \sum_{j=1}^n B_{j,n} \cdot g(t_{j,n}).$$

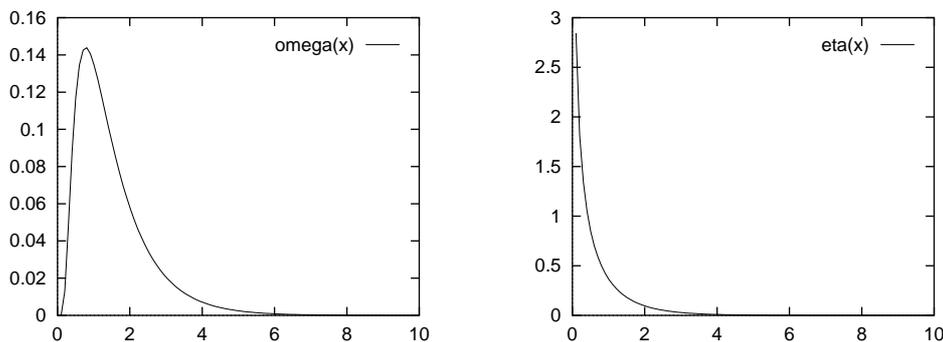
Recuérdese que $\tilde{I}_n(g)$ es exacta para los polinomios de grado menor o igual que $2n-1$, mientras que nuestra fórmula de cuadratura de tipo Gauss es exacta en $\Lambda_{-n,n-1}$. La construcción de las fórmulas de Gauss-Laguerre $\tilde{I}_n(g)$ requiere de los momentos $\delta_0, \dots, \delta_{2n-1}$, con $\delta_j = \int_0^\infty x^j \exp(-x)/\sqrt{x} dx$, mientras que las fórmulas de tipo Gauss $I_n(f)$ requieren de los momentos c_{-n}, \dots, c_{n-1} . Veremos que la inclusión de momentos c_k de índices positivos y negativos proporciona excelentes resultados numéricos.

Escogeremos como integrandos g a las siguientes funciones

i	$g_i(x)$
1	$\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$
2	$\frac{e^{-\frac{1}{x}}(x^2-1)\log(x)}{x}$
3	$\frac{e^{-\frac{1}{x}}\log(x)}{\sqrt{x}}$
4	$e^{-\left(\frac{\log(x)}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right)}$
5	$e^{-\frac{1}{x}} \sin x$
6	$\frac{e^{x-\frac{1}{x}}}{\sqrt{x} \cdot \log(1+x)}$
7	$\log(1+x)$

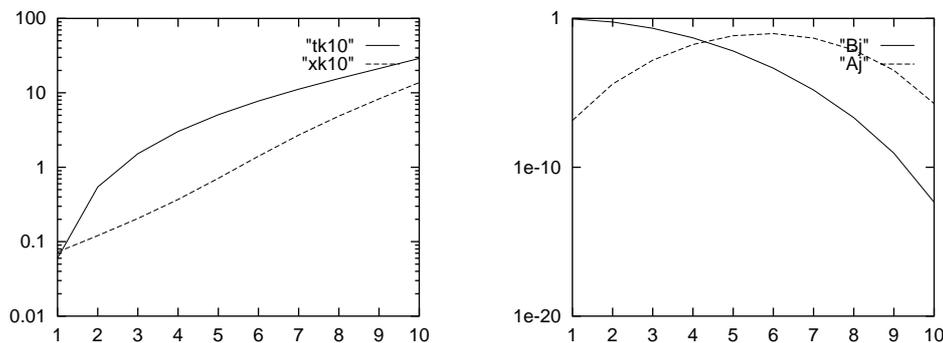
Podemos observar que los integrandos son continuos en \mathbb{R}^+ , pero poseen cierta singularidad en el origen a pesar de que admiten diferenciabilidad lateral en él, por lo tanto, es bien sabido que se les puede aplicar las fórmulas de cuadratura gaussianas a pesar de que como consecuencia de dicha singularidad la convergencia es ralentizada ya que los polinomios necesitan un gran esfuerzo para reproducirla, por ello es natural usar como funciones bases los L-polinomios ya que reproducen mejor dicho comportamiento.

Con carácter ilustrativo y a efectos de visualizar el comportamiento de los pesos w y β , en la siguiente figura hemos trazado las gráficas de $\omega(x) = x^{-1/2} \exp(-(x + 1/x))$ y $\beta(x) = x^{-1/2} \exp(-x)$.



Diag. II.2: Gráficas de los pesos $\omega(x) = x^{-1/2} \exp(-(x+1/x))$ y $\beta(x) = x^{-1/2} \exp(-x)$.

A continuación, la gráfica de la izquierda describe los nodos como funciones de k para la fórmula de cuadratura Gauss-Laguerre de 10 puntos, con línea continua y para la fórmula de cuadratura de tipo Gauss con línea discontinua. Y en la gráfica de la derecha, podemos ver los correspondientes pesos, A_j son los pesos $\lambda_{j,10}$ y B_j son los pesos de la fórmula de cuadratura de Gauss-Laguerre de 10 puntos.

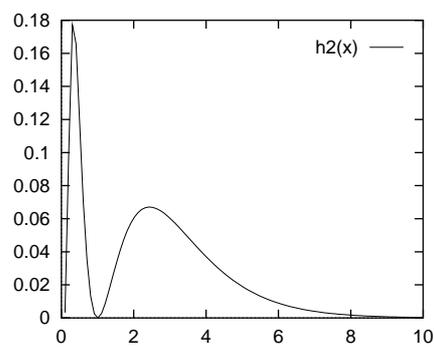
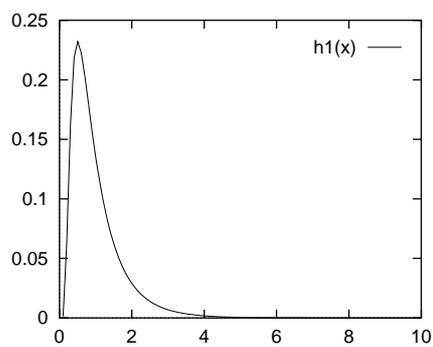
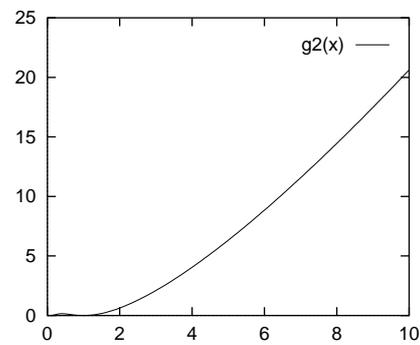
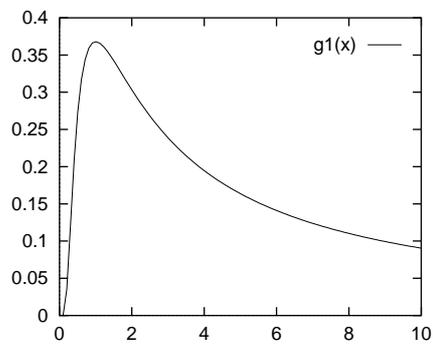
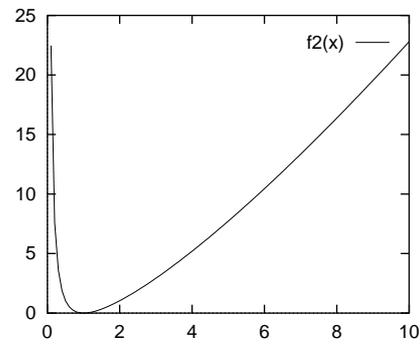
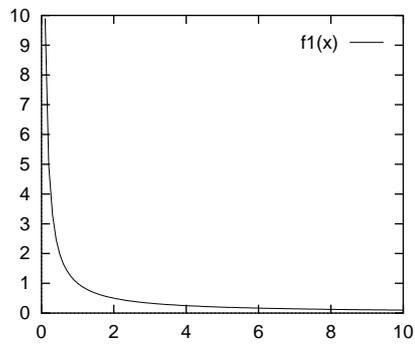


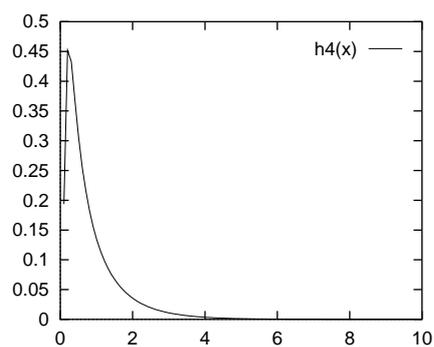
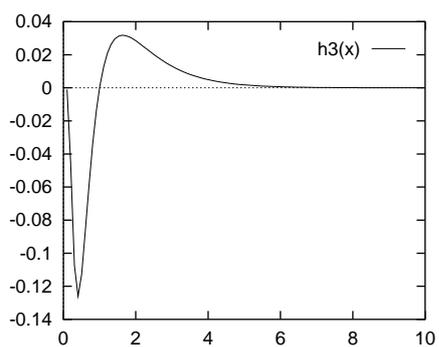
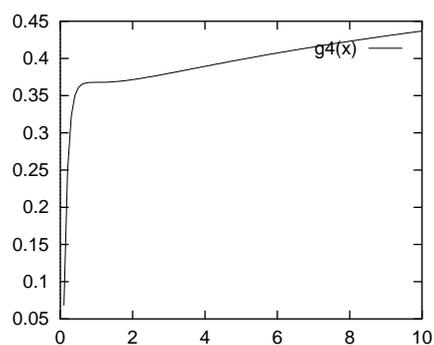
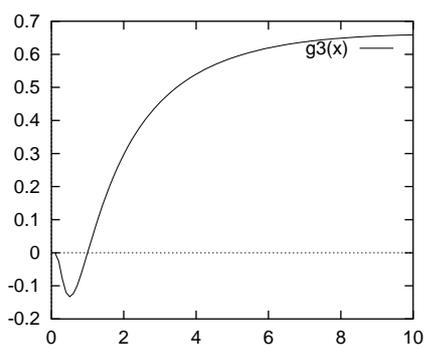
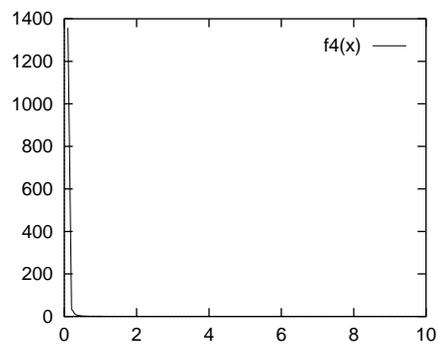
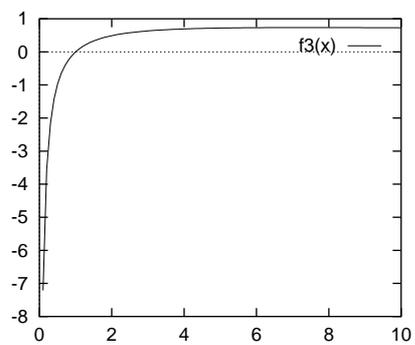
Diag. II.3: Nodos y pesos para las fórmulas de Gauss-Laguerre de 10 puntos (línea continua) y la fórmula de tipo Gauss de 10 puntos (línea discontinua)

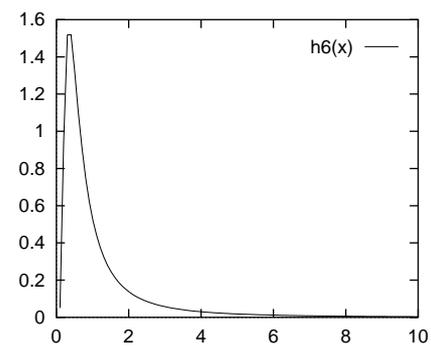
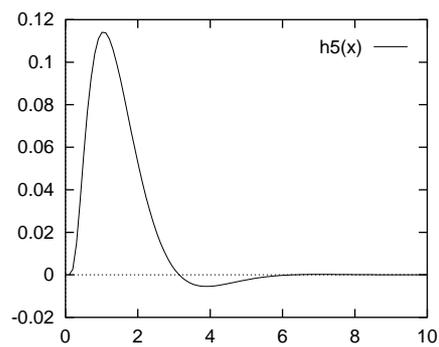
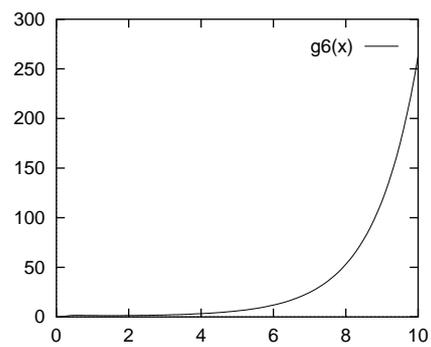
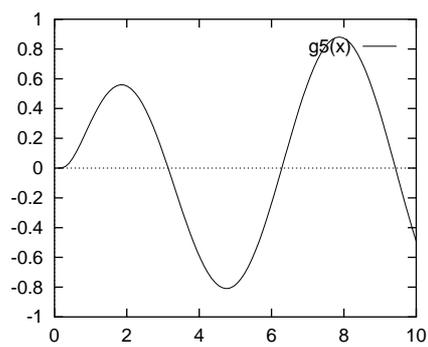
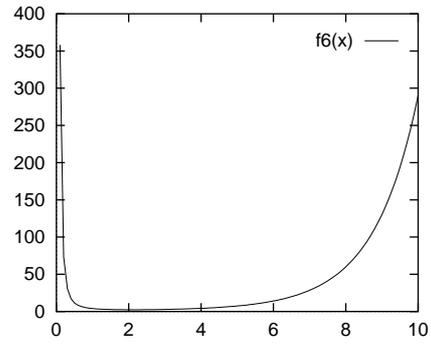
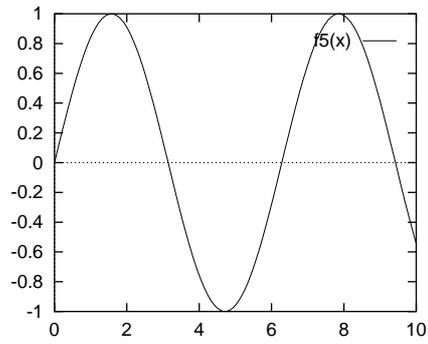
Téngase en cuenta, como muestra la anterior figura, que los ceros del n -ésimo polinomio ortogonal l_n de Laguerre se alejan hacia el infinito, huyendo de la zona en la cual la función peso β concentra mayor masa; este hecho viene dado al exigir que la fórmula de cuadratura sea exacta en \mathbb{P}_{2n-1} en cambio, en nuestro caso, los ceros del polinomio Q_n tienden, de una forma equilibrada, hacia el cero y el infinito, que es donde el peso ω posee menos masa. Esto viene determinado por el hecho de que la fórmula de cuadratura de tipo Gauss es exacta en \mathbb{P}_{n-1} y en $\Lambda_{-n,1}$.

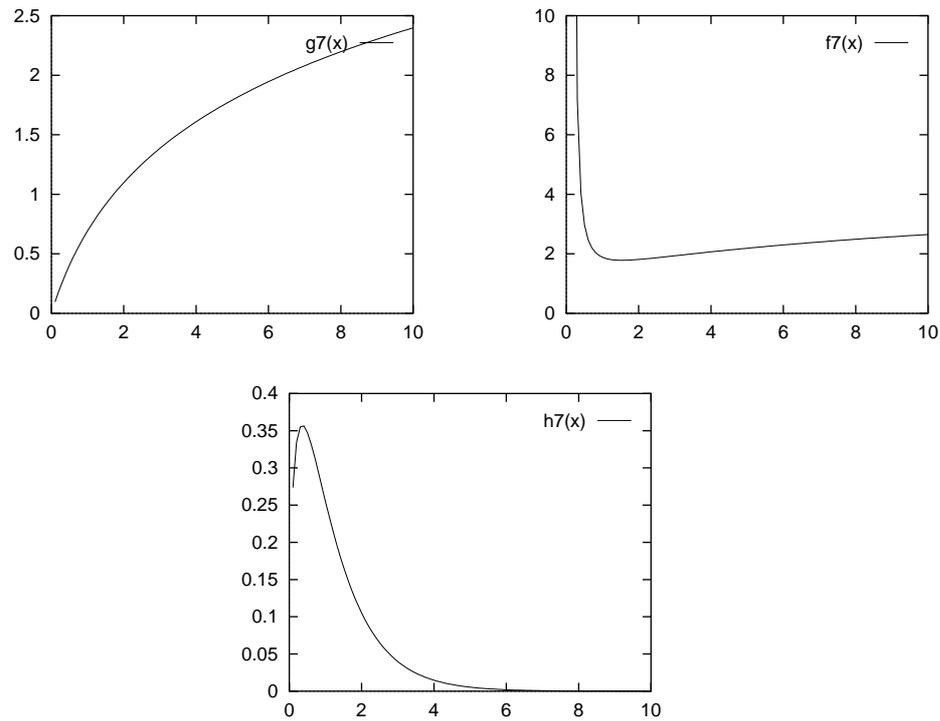
En general, la distribución asintótica de los ceros y nodos dependerá del parámetro $\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(2n-1)}{2n}$ (que en nuestro caso es $\theta = \frac{1}{2}$), como se puede deducir explícitamente de los resultados cuantitativos obtenidos por López-Martínez en [96] para los pesos (II.2.18); aunque, en general, se puede deducir de forma más intuitiva a partir del análisis cualitativo hecho por Van Assche-Vanherwegen en [133].

En las siguientes gráficas, se exponen los trazados de las gráficas de los integrandos g_i de la tabla anterior y de las funciones $f_i = g_i \cdot \exp(1/x)$, que serán los integrandos de la fórmula de tipo Gauss. Con carácter ilustrativo, también hemos incluido las gráficas de las funciones (integrando completo pesado) $h_i = f_i \cdot \omega = g_i \cdot \beta$.

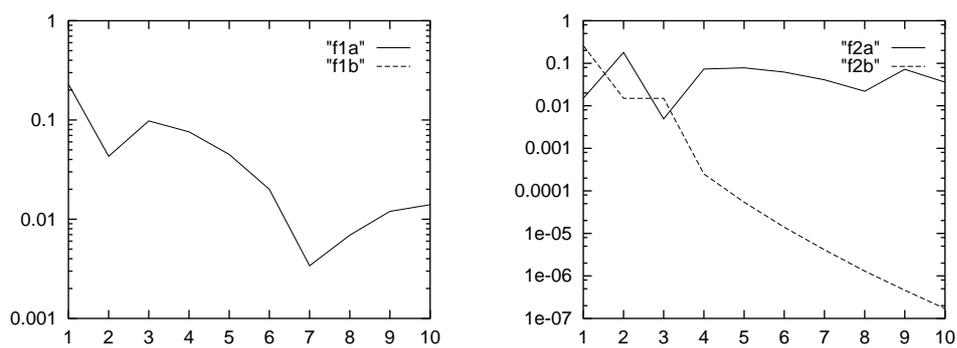


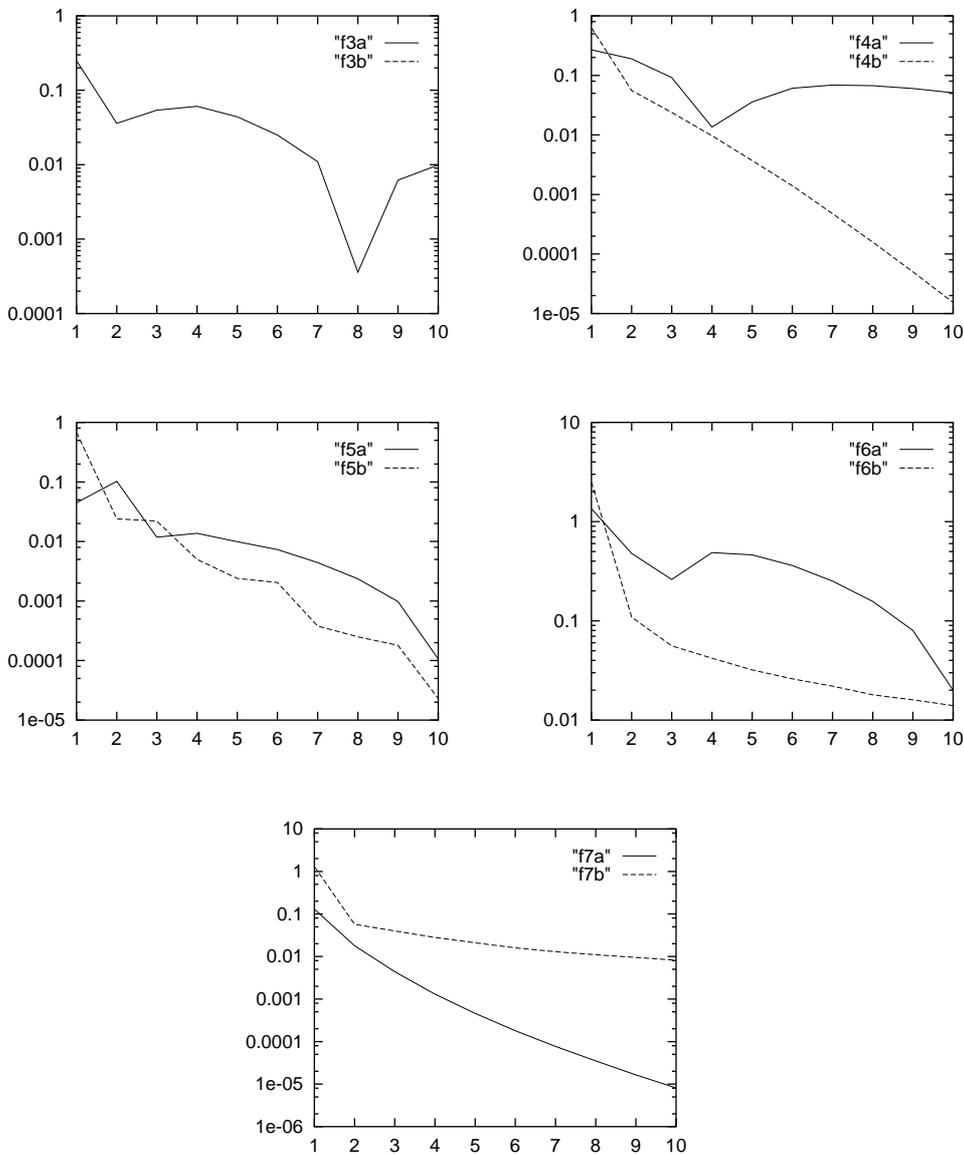






Finalmente, en las siguientes figuras, hemos dibujado a escala logarítmica, la gráfica como función de $n = 1, \dots, 10$, de los valores absolutos de los errores de la fórmula de Gauss-Laguerre y los de la fórmula de tipo Gauss. El trazo continuo corresponde a las fórmulas clásicas de Gauss, mientras que el discontinuo corresponde a las fórmulas de tipo Gauss.





Diag. II.4: Errores como función de n : $|I(f_i) - I_n(f_i)|$ (línea discontinua) y $|I_\beta(g_i) - \tilde{I}_n(g_i)|$ (línea continua)

En el ejemplo correspondiente a la función f_6 , observamos que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$. Por tanto, responde perfectamente a las características adecuadas para el uso de nuestras fórmulas de cuadratura; en cambio, vemos que los resultados no son muy buenos. La explicación radica en que esta función posee una singularidad

en $x = \infty$, lo cual produce una ralentización numérica de la velocidad de convergencia a pesar de que dicha singularidad es teóricamente absorbida por el peso.

En el ejemplo relativo a f_7 , lógicamente, al ser el factor $e^{1/x}$ absorbido por el peso, la integral se reduce a:

$$I(f_7) = \int_0^\infty \log(1+x) \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx,$$

y en este caso el integrando $g_7(x) = \log(1+x)$ tiene un buen comportamiento en el 0 y presenta un crecimiento lento hacia el infinito. Por tanto, parece lógico pensar que en esta integral se obtengan mejores resultados con la fórmula de cuadratura de Gauss-Laguerre ya que acumula más nodos para valores grandes, como queda reflejado en la gráfica de los nodos.

Vemos que para las funciones f_1 y f_3 , los errores para las fórmulas de cuadratura de tipo Gauss son iguales a cero. En el caso de f_1 es evidente ya que $x^{-1} \in \Lambda_{-n, n-1}$ para $n \geq 1$, teniendo en cuenta que las fórmulas de cuadratura son exactas en este subespacio. La explicación de los resultados tan sorprendentes para la función f_3 es la siguiente. Tenemos que :

$$\begin{aligned} I = I(f) &= \int_0^\infty f(x)\omega(x) dx = \int_0^\infty \frac{\log x}{x} \exp(-(x + 1/x)) dx \\ &= \int_0^1 \frac{\log x}{x} \exp(-(x + 1/x)) dx + \int_1^\infty \frac{\log x}{x} \exp(-(x + 1/x)) dx \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Si hacemos el cambio de variable $x = 1/t$ en I_2 , vemos que $I_2 = -I_1$ y se sigue que $I = 0$. La razón por la cual $I_n(f) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se debe a cierta simetría de la función peso $\omega(x) = x^{-1/2} \exp(-(x + 1/x))$.

En general, para $c > 0$, se dice que $\omega(x)$ es c -inversible en $(0, \infty)$ (ver [114]) sii

$$\omega(c/x) = \frac{x}{\sqrt{c}} \omega(x), \quad \forall x \in (0, \infty),$$

también en [114] se puede encontrar el siguiente resultado:

Teorema II.2.6 Si $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} f(x_{j,n})$ es la fórmula de cuadratura de tipo Gauss con n puntos, exacta en $\Lambda_{-n, n-1}$, con respecto a una función peso c -inversible ω ,

entonces

$$x_{j,n} = \frac{c}{x_{n+1-j}}, \quad j = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \quad n \geq 1,$$

$$\frac{\lambda_{j,n}}{\sqrt{x_{j,n}}} = \frac{\lambda_{n+1-j,n}}{\sqrt{x_{n+1-j,n}}}, \quad j = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor, \quad n \geq 1$$

donde $[x]$ es la parte entera de x .

Claramente, la función peso (II.2.17) es c -inversible con $c = 1$. En consecuencia, los nodos de la correspondiente fórmula de cuadratura verificarán

$$x_{n+1-j,n} = 1/x_{j,n}, \quad j = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

Además, cuando n es impar, es decir, $n = 2k + 1$, entonces $x_{k+1,n} = 1$. Con respecto a los pesos tendremos:

$$\lambda_{n+1-j,n} = \frac{\lambda_{j,n}}{x_{j,n}}, \quad j = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor.$$

Por otro lado, si $f(x) = x^{-1/2} \log x$, entonces $f(1/x) = -xf(x)$. Por lo tanto, obtenemos para $I_n(f)$ los siguiente resultados, según n sea par o impar

1. $n = 2k$:

$$\begin{aligned} I_{2k}(f) &= \sum_{j=1}^k \lambda_{j,n} f(x_{j,n}) + \sum_{j=k+1}^n \lambda_{j,n} f(x_{j,n}) \\ &= \sum_{j=1}^k [\lambda_{j,n} f(x_{j,n}) + \lambda_{n+1-j,n} f(x_{n+1-j,n})] \\ &= \sum_{j=1}^k \left[\lambda_{j,n} f(x_{j,n}) + \frac{\lambda_{j,n}}{x_{j,n}} f(1/x_{j,n}) \right] \\ &= \sum_{j=1}^k [\lambda_{j,n} f(x_{j,n}) - \lambda_{j,n} f(x_{j,n})] = 0. \end{aligned}$$

2. $n = 2k + 1$. Realizando las mismas manipulaciones que en el caso par, llegamos a que

$$I_{2k+1}(f) = \lambda_{k+1,n} f(x_{k+1,n}) = \lambda_{k+1,n} \log(1) = 0.$$

Así pues, las fórmulas de cuadratura son todas nulas.

Como conclusión de los ejemplos anteriores, podemos decir que las fórmulas de cuadratura de tipo Gauss compiten favorablemente con las gaussianas clásicas, teniendo en cuenta que ambas requieren el mismo esfuerzo computacional. En nuestra opinión, una de las razones que pudiera motivar la excelencia de los resultados numéricos radica en la distribución de los nodos, como cabe deducir de la figura II.3 . No obstante, pensamos que aún se debe hacer un análisis riguroso y con mayor profundidad al objeto de dar una respuesta categórica a tal conjetura.

Como comentario final a éste análisis numérico, estimamos oportuno hacer la siguiente advertencia: las limitaciones de las fórmulas de cuadratura gaussianas son bien conocidas. La convergencia es considerablemente lenta cuando el integrando posee algún comportamiento “ poco regular ” cerca del intervalo de integración. Nuestros ejemplos confirman esta circunstancia: el integrando $g(x)$ contiene el factor $e^{-\frac{1}{x}}$ y cuando el peso $\beta(x)$ no lo compensa, entonces la convergencia es muy lenta. Este tipo de comentario también es aplicable a las fórmulas de tipo Gauss. No obstante, con carácter general, y a la vista de los ejemplos expuestos, podemos decir que la convergencia de las fórmulas de cuadratura de tipo Gauss es más rápida. Si bien es verdad, que se pueden encontrar ejemplos donde tal cosa no sucede (véase por ejemplo el último), en los cuales las fórmulas gaussianas proporcionan mejores resultados.

Por otro lado, desde el punto de vista de una integración numérica de carácter práctico, uno podría preferir usar las llamadas reglas de integración automática (adaptativas, iterativas, etc.), que incluyen técnicas sofisticadas que van mucho más lejos del tipo de regla que hemos estudiado en esta memoria (para más detalles, véase [42, Cap.6] y referencias que se pueden encontrar allí). En modo alguno las llamadas fórmulas de tipo Gauss presentadas en esta memoria pretenden competir con tales integradores automáticos. Nuestro interés en estas fórmulas es principalmente teórico, motivado por su estrecha relación con los aproximantes de Padé bipuntuales.

Finalmente, cabe consignar que en la bibliografía consultada muy pocos experi-

mentos numéricos han sido desarrollados, siendo los presentados en esta memoria una primera aportación en tal sentido.

II.3 Fórmulas de cuadratura en $[0, b]$

En esta sección supondremos que la medida $d\varphi$ está soportada en un intervalo acotado de $[0, \infty)$, más concretamente, en intervalos de la forma $[0, b]$. Así pues, nos ocuparemos del cálculo de las integrales del tipo:

$$\int_0^b f(x) d\varphi(x) \quad (\text{II.3.21})$$

con $0 < b < \infty$, donde la medida $d\varphi$ sigue verificando las mismas propiedades que en la sección anterior, entre otras, la existencia de sus momentos tanto positivos como negativos. Tal circunstancia aconseja la utilización de los L-polinomios como funciones base de interpolación para construir fórmulas de cuadratura que, en ciertos casos, sean más eficientes que las clásicas (como así demuestran Jones-Njåstad-Thron, pioneros en este tipo de estudios en [81]). Estamos pues, en la misma situación que en la sección anterior, con la ventaja de que aquí podemos usar el hecho de que los polinomios son densos en el espacio de las funciones continuas en $[0, b]$; por lo tanto, siempre que involucremos a éstos no habrá dificultades con la indeterminación del problema de momentos. Esto, además, nos va a permitir obtener estimaciones de tipo Jackson. Nuestro análisis está inspirado en [81].

Iniciamos nuestra exposición recordando que los aspectos algebraicos estudiados en la sección anterior siguen siendo válidos aquí. En base a los argumentos dados en el primer capítulo, así como en la sección anterior, comenzamos primero estudiando los resultados de convergencia para las fórmulas de cuadraturas gaussianas, para luego concluir con los resultados sobre las FCI. El primer resultado, como punto de partida, es el siguiente, siendo su demostración inmediata.

Teorema II.3.1 *Supongamos que $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface que $\lim_{n \rightarrow \infty} [n - p(n)] = \infty$. En-*

tonces, las FCG verifican:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = I(f), \quad \forall f \in R(\varphi),$$

siendo $R(\varphi)$ el conjunto de las funciones Riemann-Stieltjes integrables con respecto al integrador $d\varphi$.

Demostración:

Sabemos que los pesos son positivos y satisfacen $\sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} = c_0$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} [n - p(n)] = \infty$, las FCG son exactas, para un n suficientemente grande, para cualquier polinomio. Basta ahora aplicar el teorema de Steklov (ver Teorema I.2.8, pag.53), que afirma que todas las fórmulas de cuadratura que converjan para los polinomios y tengan los pesos positivos convergen para $R(\varphi)$, concluyéndose así la demostración. ■

Observación II.3.1 *Conviene señalar que el resultado es independiente de las potencias negativas para las que son exactas las FCG.*

Si incluimos información a este respecto, obtenemos el siguiente:

Teorema II.3.2 *Supongamos que $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface que $\lim_{n \rightarrow \infty} [n - p(n)] = \infty$ y denotamos $m = \sup_{n \in \mathbb{N}} p(n)$. Entonces la sucesión de FCG verifica:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(F) = I(F), \quad \forall F \in \mathcal{F}_m([0, b]).$$

Siendo $\mathcal{F}_m([0, b])$ el conjunto de las funciones $F(x) = \frac{f(x)}{x^l}$ donde $f \in R(\varphi)$ y $l \in \mathbb{N} : l \leq m$. Si $f \in C([0, b])$, además,

$$|I(F) - I_n(F)| \leq 2c_{-l} M_{2n-1}(f)$$

para un n suficientemente grande, donde $M_k(f)$ es el denominado error minimax, esto es:

$$M_k(f) = \min_{P \in \mathbb{P}_k} \|f - P\|_\infty, \quad k = 0, 1, \dots$$

Demostración:

Por un resultado clásico sobre las funciones Riemann-Stieltjes integrables (ver [131]), sabemos que si M es la constante definida por:

$$M = \max\{|\inf_{x \in [0, b]} f(x)|, |\sup_{x \in [0, b]} f(x)|\},$$

entonces para todo $\epsilon > 0$, existen dos polinomios p y P verificando

$$-M - \epsilon \leq p(x) \leq f(x) \leq P(x) \leq M + \epsilon, \quad \forall x \in [0, b]$$

y

(II.3.22)

$$\int_0^b [P(x) - p(x)] d\varphi(x) < \epsilon .$$

Sea $\epsilon > 0$ fijo y p y P verificando (II.3.22). Entonces:

$$P(x) - p(x) \leq (M + \epsilon) - (-M - \epsilon) = 2(M + \epsilon), \quad x \in [0, b],$$

con lo cual, se obtiene

$$\int_0^b [P(x) - p(x)]^2 d\varphi(x) \leq \int_0^b 2(M + \epsilon)[P(x) - p(x)] d\varphi(x) \leq 2\epsilon(M + \epsilon). \quad (\text{II.3.23})$$

Si ahora definimos $R(x) = x^{-l}P(x)$ y $r(x) = x^{-l}p(x)$ (que son L-polinomios) y aplicamos (II.3.22), se sigue que:

$$r(x) \leq F(x) \leq R(x), \quad \forall x \in (0, b]. \quad (\text{II.3.24})$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} [n - p(n)] = \infty$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo n natural, $n \geq n_0$, se tiene:

$$r \in \mathcal{R}_{p(2n-1)} \quad \text{y} \quad R \in \mathcal{R}_{p(2n-1)}.$$

de donde

$$\int_0^b r(x) d\varphi(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_{n,j} r(x_{n,j}) \quad \text{y} \quad \int_0^b R(x) d\varphi(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_{n,j} R(x_{n,j}).$$

Usando la desigualdad de Schwarz y la estimación (II.3.23), podemos escribir:

$$\begin{aligned} I_n(R) - I_n(r) &= I(R - r) = \int_0^b \frac{P(x) - p(x)}{x^l} d\varphi(x) \\ &\leq \left[\int_0^b [P(x) - p(x)]^2 d\varphi(x) \right]^{1/2} \left[\int_0^b x^{-2l} d\varphi(x) \right]^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2\epsilon(M + \epsilon)c_{-2l}}. \end{aligned} \quad (\text{II.3.25})$$

Finalmente, para todo $n \geq n_0$, de (II.3.24)-(II.3.25) obtenemos

$$\begin{aligned}
|I(F) - I_n(F)| &= |I(F) - I(R) + I(R) - I_n(F)| \\
&\leq |I(F - R)| + |I(R) - I_n(F)| \\
&\leq I(R(x) - F(x)) + I_n(R - F) \\
&\leq I(R(x) - r(x)) + I_n(R - r) \\
&\leq 2\sqrt{2\epsilon(M + \epsilon)c_{-2l}}.
\end{aligned}$$

Esto prueba la primera parte del teorema.

Ahora, suponiendo que f es continua, si denotamos por P_{2n-1} a cualquier polinomio de grado menor o igual a $2n-1$ y por $L_n[F]$ al L-polinomio interpolador de F , y tenemos en cuenta que para un n suficientemente grande la FCG es exacta para $\frac{1}{x^l}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
|I(F) - I_n(F)| &\leq \left| \int_0^b \left(\frac{f(x)}{x^l} - \frac{P_{2n-1}(x)}{x^l} \right) d\varphi(x) \right| + \left| \int_0^b \left(\frac{P_{2n-1}(x)}{x^l} - L_n[F](x) \right) d\varphi(x) \right| \\
&\leq \rho_{2n-1}(f) \cdot c_{-l} + \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} \left| \left(\frac{P_{2n-1}(x_{j,n})}{x_{j,n}^l} - \frac{f(x_{j,n})}{x_{j,n}^l} \right) \right| \\
&= \rho_{2n-1}(f) \left(c_{-l} + \sum_{j,n} \lambda_{j,n} \frac{1}{x_{j,n}^l} \right) \\
&= 2c_{-l}\rho_{2n-1}(f)
\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. ■

Observación II.3.2 Si en el teorema anterior $m = \infty$, entonces el teorema es cierto para cualquier función $F(x)$ para la tal que exista un k de forma que $x^k \cdot F(x) \in R(\varphi)$.

Observación II.3.3 El mismo argumento sirve para demostrar un resultado análogo tanto para las FCO como para las FCT.

Seguidamente, nuestro objetivo es extender el resultado clásico de Erdős-Turán [57].

Para ello, definimos el siguiente conjunto funcional:

$$\mathcal{F}[0, b] = \{F : [0, b] \mapsto \mathbb{R} : F(x) = x^{-m} f(x) \text{ para algún } m \text{ entero } m \geq 0, f \in R(\varphi)\}.$$

Para esta clase de funciones, $I(F)$ existe como integral de Riemann-Stieltjes en sentido impropio, ya que f es Riemann-Stieltjes integrable y los momentos $\int_0^b x^m d\varphi(x)$ existen para todo entero m , y $R(\varphi)$ es cerrada para la multiplicación. Además, $\mathcal{F}([0, b])$ también lo es, por lo que si $F \in \mathcal{F}([0, b])$, se tiene que $F^2 \in \mathcal{F}([0, b])$. Así, podemos enunciar:

Teorema II.3.3 *Sea $F \in \mathcal{F}([0, b])$ y supongamos que la sucesión $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} [n - p(n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \infty$. Entonces, la sucesión $\{L_n[F]\}_{n \in \mathbb{N}}$ de los L -polinomios que interpola a F en los nodos de la FCO converge a F en $L_2(d\varphi)$, es decir,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n[F] - F\|_{L_2(d\varphi)}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^b |L_n[F](x) - F(x)|^2 d\varphi(x) = 0.$$

Demostración:

Sea $F(x) = \frac{f(x)}{x^m}$, entonces

$$\int_0^b |L_n[F](x) - F(x)|^2 d\varphi(x) = \int_0^b [F(x)]^2 d\varphi(x) + \int_0^b [L_n[F](x)]^2 d\varphi(x) - 2 \int_0^b F(x) L_n[F](x) d\varphi(x).$$

Y como,

$$L_n[F] \in \mathcal{R}_{n-1} = \Lambda_{p(n-1), q(n-1)}$$

se sigue que

$$(L_n[F])^2 \in \Lambda_{-2p(n-1), 2q(n-1)} \subset \Lambda_{-p(n)-p(n-1), q(n)+q(n-1)},$$

donde la FCO es exacta. Por lo tanto,

$$I\left([L_n[F]]^2\right) = \sum_{j=1}^n \lambda_{n,j} [L_n[F](x_{n,j})]^2 = I_n(F^2).$$

Por otro lado,

$$\left| \int_0^b F(x) L_n[F](x) d\varphi(x) \right|^2 \leq \left\{ \int_0^b [F(x)]^2 d\varphi(x) \right\} \left\{ \int_0^b [L_n[F](x)]^2 d\varphi(x) \right\} = I(F^2) I_n(F^2).$$

Y teniendo en cuenta que las FCO convergen para esta clase de funciones (ver observación II.3.3), se sigue

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(F^2) = I(F^2),$$

de donde tenemos

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^b |F(x) - L_n[F](x)|^2 d\varphi(x) \leq 4 \int_0^b [F(x)]^2 d\varphi(x). \quad (\text{II.3.26})$$

Ahora, si fijamos $\epsilon > 0$, usando el mismo resultado que en la demostración del teorema anterior, existe una constante positiva M y un polinomio $q(x)$ tal que $-M - \epsilon \leq f(x) \leq q(x) \leq M + \epsilon$, $\forall x \in [0, b]$ y

$$\int_0^b |f(x) - q(x)| d\varphi(x) < \epsilon.$$

Así, para cualquier $k > 1$,

$$\int_0^b |f(x) - q(x)|^k d\varphi(x) = \int_0^b |f(x) - q(x)|^{k-1} |f(x) - q(x)| d\varphi(x) \leq 2^{k-1} (M + \epsilon)^{k-1} \epsilon.$$

Si definimos $Q(x) = \frac{q(x)}{x^m}$, entonces (tomando $k = 4$), se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^b |F(x) - Q(x)|^2 d\varphi(x) &= \int_0^b |f(x) - q(x)|^2 \frac{d\varphi(x)}{x^{2m}} \\ &\leq \left\{ \int_0^b |f(x) - q(x)|^4 d\varphi(x) \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^b \frac{d\varphi(x)}{x^{4m}} \right\}^{1/2} \\ &\leq \sqrt{\epsilon} [2(M + \epsilon)]^{3/2} \sqrt{c_{-4m}}. \end{aligned} \quad (\text{II.3.27})$$

Como a partir de un n suficientemente grande se cumple que $L_n^Q = Q$, podemos escribir

$$F - L_n[F] = F - Q + Q - L_n[F] = F - Q - L_n[F - Q].$$

Teniendo en cuenta que $F - Q \in \mathcal{F}([0, b])$, junto con (II.3.26) y (II.3.27), se tiene que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^b |F(x) - L_n[F](x)|^2 d\varphi(x) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^b |(F - Q)(x) - L_n^{F-Q}(x)|^2 d\varphi(x) \\ &\leq 4 \int_0^b [F(x) - Q(x)]^2 d\varphi(x) \\ &\leq 4\sqrt{\epsilon} [2(M + \epsilon)]^{3/2} \sqrt{c_{-4m}}. \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_0^b [F(x) - L_n[F](x)]^2 d\varphi(x) = 0$$

concluyéndose así la demostración. ■

Observación II.3.4 Este resultado fue obtenido por Njåstad en [104] para la elección particular $p(n) = \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$.

Observación II.3.5 Procediendo de forma análoga se consigue el mismo resultado con los nodos de las FCT.

A continuación vamos a estudiar las FCI. El siguiente resultado es una consecuencia de la combinación de la teoría clásica y la teoría de los L-polinomios.

Teorema II.3.4 Sea k una función en general compleja verificando:

$$\int_0^b \frac{|k(x)|^2}{\varphi'(x)} dx = K_1 < \infty \quad (\text{II.3.28})$$

donde hemos supuesto que $d\varphi$ es absolutamente continua y φ' es su derivada positiva casi por todo e integrable Lebesgue. Bajo las hipótesis del teorema anterior, si denotamos por $\{I_n(F)\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de FCI con los nodos de la FCT. Entonces, tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(F) = I(F), \quad \forall F \in \mathcal{F}([0, b]), \quad \text{siendo } I(F) = \int_0^b F(x)k(x)dx < \infty.$$

Además, existe una constante positiva M tal que

$$|I(f) - I_n(f)| \leq M \rho_{q(n-1)}(f), \quad \forall f \in C[0, b]. \quad (\text{II.3.29})$$

siendo $q(n) = n - p(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Señalemos, para empezar, que por la condición (II.3.28) las funciones de $\mathcal{F}([0, b])$ son integrables Riemann-Stieltjes con respecto a $k(x)dx$. La convergencia en $\mathcal{F}([0, b])$ se debe al teorema anterior (ver observación II.3.5) y al uso de la desigualdad de Schwarz, ya que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^b F(x)k(x)dx - I_n(F) \right| &\leq \int_0^b |F(x) - L_n[F](x)| |k(x)| dx \\ &\leq \left(\int_0^b |F(x) - L_n[F](x)|^2 \varphi'(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^b \frac{|k(x)|^2}{\varphi'(x)} dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

donde $L_n[F](x)$ denota al L-polinomio interpolador de F .

Para la demostración de la segunda parte procederemos de la siguiente forma. Sea $P_n[f]$ el polinomio que interpola a f en los mismos nodos. Sabemos que $I_n(f) = I(L_n[f])$, o lo que es lo mismo, que $I_n(f) = \int_0^b P_n[\tilde{f}] \frac{k(x)}{x^{p(n-1)}} dx$, donde $\tilde{f}(x) = x^{p(n-1)} f(x)$.

Así, usando (II.3.28) y la desigualdad de Schwarz, obtenemos:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^b f(x) - L_n[f](x) k(x) dx \right| &= \left| \int_0^b \tilde{f}(x) - P_n[\tilde{f}](x) \frac{k(x)}{x^{p(n-1)}} dx \right| \\ &\leq K_1^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^b |\tilde{f}(x) - P_n[\tilde{f}](x)|^2 \frac{\varphi'(x)}{x^{2p(n-1)}} dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ahora, sea $\{\pi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de polinomios minimax para f . Es bien conocido (Teorema de aproximación de Weierstrass) que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \pi_n\|_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(f) = 0.$$

Y como $p(n-1) + q(n-1) = n-1$, se sigue que $P_n[\tilde{f}_n] = \tilde{f}_n$, si $\tilde{f}_n(x) = x^{p(n-1)} P_{q(n-1)}(x)$, con $P_{q(n-1)}$ un polinomio de grado a lo sumo $q(n-1)$; por tanto,

$$\begin{aligned} \|\tilde{f} - P_n[\tilde{f}]\|_{L_2(d\varphi_n)} &= \|\tilde{f} - \tilde{f}_n + \tilde{f}_n - P_n[\tilde{f}]\|_{L_2(d\varphi_n)} \\ &\leq \|\tilde{f} - \tilde{f}_n\|_{L_2(d\varphi_n)} + \|P_n[\tilde{f} - \tilde{f}_n]\|_{L_2(d\varphi_n)} \\ &\leq c_0^{\frac{1}{2}} \rho_{q(n-1)}(f) + \|P_n[\tilde{f} - \tilde{f}_n]\|_{L_2(d\varphi_n)}, \end{aligned}$$

donde hemos denotado por $d\varphi_n = \frac{d\varphi}{x^{2p(n-1)}}$.

Finalmente, las propiedades de ortogonalidad de los L-polinomios de Lagrange en el caso Tchebyshev nos conducen a

$$\begin{aligned} \|P_n[\tilde{f} - \tilde{f}_n]\|_{L_2(d\varphi_n)}^2 &= I_n^T \left([f - \pi_{q(n-1)}]^2 \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_{n,j}^T [f(x_{n,j}) - \pi_{q(n-1)}(x_{n,j})]^2 \leq \rho_{q(n-1)}^2(f) \sum_{j=1}^n \lambda_{n,j}^T \\ &= \rho_{q(n-1)}^2(f) \int_0^b d\varphi(x), \end{aligned}$$

donde el superíndice T denota que se trata de la FCT asociada a φ' . Si hacemos $M = 2(K_1 c_0)^{\frac{1}{2}}$, se obtiene (II.3.29). ■

Observación II.3.6 *Vemos que usando los resultados de Jackson podemos estimar la velocidad de convergencia de la sucesión $\{I_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ en función de la regularidad de la función f .*

Observación II.3.7 *Se consiguen los mismos resultados al escoger en $\{I_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ como nodos los de la FCO, ya que que sus L -polinomios de Lagrange también son ortogonales.*

Además, siguiendo la misma línea que en el caso no acotado, podemos demostrar que:

Teorema II.3.5 *Supongamos que $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface $\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [n - q(n)] = \infty$. Sea k una función compleja integrable Lebesgue que verifique:*

$$\int_0^b \frac{|k(x)|^2}{\varphi'(x)} dx < \infty.$$

Supongamos que escogemos como nodos de la FCI asociada a k los nodos de la FCO de φ' . Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = I(f) \quad \forall f \in \mathcal{F}[0, b].$$

y además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n |\lambda_{n,j}| f(x_{n,j}) = \int_0^b f(x) |k(x)| dx, \quad \forall f \in \mathcal{F}[0, b].$$

Demostración:

Para la demostración, se procede exactamente igual que en el Teorema II.2.5 . ■

Sólo resta decir que en base a la estrecha relación con los aproximantes de Padé, puede probarse que hay velocidad geométrica de convergencia (para el caso de integrandos holomorfos), obteniéndose estimaciones aún mejores que las dadas en los teoremas anteriores. En este sentido véase el capítulo 3, en la sección relativa a las aplicaciones a fórmulas de cuadratura.

Capítulo III

Aproximantes tipo Padé en dos puntos

En este capítulo nos centraremos en el estudio de los aproximantes de Padé y tipo Padé. Tal y como se trató en el primer capítulo, los aproximantes de Padé constituyen una extensión natural a la familia de funciones racionales de los polinomios de Taylor; es decir, se trata de escoger de una clase de funciones racionales a aquella que posea mayor contacto local con la función a aproximar. Cuando el contacto se realiza en dos puntos surgen así los denominados aproximantes de Padé bipuntuales o en dos puntos, de forma abreviada AP2. Si poseemos cierta información a priori, como por ejemplo el dominio de holomorfía de la función, obtenida a partir del conocimiento explícito de la función a aproximar o por otros medios, es muy útil usar dicha información, ya que ésta permite obtener buenos resultados para una familia más amplia de funciones que cuando se usan los aproximantes de Padé propiamente dichos.

Así pues, sea f una función holomorfa en un dominio Ω de $\hat{\mathbb{C}}$ (plano complejo compactificado). Si $0 \in \Omega$, se sabe que la función admite el siguiente desarrollo en serie en potencias de z :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k,$$

el cual es absoluta y uniformemente convergente en compactos de $\{z \in \mathbb{C} / |z| < a\}$ a f , siendo $a = \inf\{|z| / z \in \mathbb{C} \setminus \Omega\}$. Vemos que del dominio de holomorfía Ω , puede quedar una región en la cual no se puede aproximar la función mediante su desarrollo en serie

de potencias, siendo por lo tanto insatisfactorio su uso. En este sentido, el aproximante tipo Padé optimiza esta información y consigue aproximar a f en todo el dominio Ω , en el sentido de que podemos construir sucesiones de tales aproximantes que convergen a f uniformemente en compactos de Ω . En este contexto hay dos tipos de problemas: uno es el que acabamos de describir, comúnmente llamado caso clásico, y el otro se produce cuando $0 \in \partial(\Omega)$, es decir, cuando el punto en el que interpolamos está en la frontera del dominio de holomorfía; entonces, el anterior desarrollo se convierte en un desarrollo asintótico. En nuestra investigación hemos dado respuestas parciales a estas dos situaciones en el caso bipuntual.

Con el fin de estructurar nuestros resultados, hemos dividido este capítulo en cuatro secciones. En la primera sección, desarrollaremos los resultados relacionados con el caso clásico. En la segunda, abordaremos el caso en que la interpolación se realiza en puntos de la frontera. En la siguiente sección, haremos una generalización al caso multipuntual que, aunque no totalmente novedosa, es fruto del conocimiento adquirido a lo largo de nuestro doctorado y nos permitirá afrontar nuevos problemas en el futuro. Finalmente, en la cuarta y última sección, expondremos las aplicaciones de nuestros resultados a las fórmulas de cuadratura.

III.1 Aproximantes tipo Padé en dos puntos para el caso clásico

Hemos desglosado esta sección en dos subsecciones: Una que contiene los resultados teóricos y otra con algunos experimentos numéricos.

III.1.1 Aspectos teóricos

Supondremos conocido el dominio de holomorfía Ω , así como los desarrollos de Taylor de la función en dos puntos que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que son el origen y el infinito, contenidos ambos en el dominio de holomorfía. Es decir, partiremos de una función f holomorfa en Ω tal que $0, \infty \in \Omega$. Por lo tanto, f admitirá

sendos desarrollos en serie de potencias del tipo:

$$f_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \quad \text{cuando } z \rightarrow 0 \quad (\text{III.1.1})$$

$$f_{\infty}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^* \left(\frac{1}{z^k}\right) \quad \text{cuando } z \rightarrow \infty, \quad (\text{III.1.2})$$

donde ambos desarrollos en serie convergen absoluta y uniformemente en subconjuntos compactos de

$$D_0 = \{z \in \mathbb{C} / |z| < a\} \quad \text{y} \quad D_{\infty} = \{z \in \hat{\mathbb{C}} / |z| > b\}$$

respectivamente, donde $a = \min\{|z| / z \in K\}$ y $b = \max\{|z| / z \in K\}$, con $K = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ un subconjunto compacto de \mathbb{C} (sin pérdida de generalidad, hemos supuesto que $f(\infty) = 0$). Como hemos mencionado, el hecho de considerar como puntos de interpolación el origen y el infinito no es relevante, ya que mediante una transformación de Möbius adecuada siempre podemos reducir nuestro problema a esta situación, al ser la clase de las funciones racionales de orden n (a la que pertenecen los aproximantes con los que vamos a trabajar) invariante para este tipo de transformaciones.

Vamos a recordar brevemente la definición de aproximante tipo Padé bipuntual, asociado a f_0 y a f_{∞} . A tal efecto, consideremos dos números naturales k y n , verificando $0 \leq k \leq n$ y una familia de polinomios $\{T_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tal que para cada $m \in \mathbb{N}$, T_m es un polinomio de grado m y $T_m(0) \neq 0$. Entonces, existe un único polinomio P_{n-1} de grado a lo sumo $n-1$, verificando

$$f_0(z) - \frac{P_{n-1}(z)}{T_n(z)} = \mathcal{O}(z^k) \quad , \quad z \rightarrow 0$$

$$f_{\infty}(z) - \frac{P_{n-1}(z)}{T_n(z)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{n-k+1}}\right) \quad , \quad z \rightarrow \infty$$

y a la función racional $\frac{P_{n-1}}{T_n}$ se le denomina aproximante tipo Padé de f en dos puntos, abreviadamente ATP2, asociado al esquema de polos al que da lugar la familia de polinomios $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, y lo denotaremos por $(k/n)_f$.

Supongamos que Ω es de conectividad finita y que su frontera no contiene ningún punto aislado, es decir, $K = \hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ está formado por una unión finita de continuos

(compactos y conexos) que no se reduzcan a un punto. Se sabe que bajo esta situación siempre existe una curva cerrada de Jordan Γ (o una unión finita de curvas cerradas de Jordan, una para cada componente de K) que rodea a K , de forma que el origen esté en el exterior. Así, si $(k/n)_f$ es el ATP2 de f con denominador $T_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - b_k)$, donde los b_i no son necesariamente distintos, entonces usando la representación integral de Hermite del error en la interpolación racional con polos fijos, ver [137, pag.186-187], obtenemos

Lema III.1.1 *Sea Ω un dominio del tipo que acabamos de describir, tal que 0 y ∞ estén en Ω . Entonces, para todo $z \in \text{Ext}(\Gamma) \setminus \{b_i / i = 1, 2, \dots, n\}$ se tiene que*

$$f(z) - (k/n)_f(z) = \frac{z^k}{2\pi i T_n(z)} \oint_{\Gamma} \frac{T_n(t)f(t)}{(t-z)t^k} dt. \quad (\text{III.1.3})$$

Observar que en dicha expresión también se recogen las situaciones clásicas de $k = 0$ y $k = n$; esto es, aproximantes tipo Padé en el infinito y en el origen, respectivamente. A partir de la fórmula del error (III.1.3) se deduce que la convergencia de los aproximantes tipo Padé depende exclusivamente del comportamiento asintótico de los polinomios $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Surge así la siguiente definición.

Definición III.1.1 *Se dice que una sucesión de polinomios mónicos $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es extremal con respecto al compacto K si satisface*

$$|T_n(z)|^{\frac{1}{n}} \rightrightarrows {}^1\text{Cap}(K) \cdot |\psi(z)| \quad \text{en } \Omega, \quad (\text{III.1.4})$$

donde $\text{Cap}(K)$ es la capacidad logarítmica de K y ψ es la transformación conforme de Ω en el complementario del disco unidad, tal que el infinito permanece invariante.

Este comportamiento “ extremal ” implica que los ceros de esta familia de polinomios se acumulan asintóticamente en K . Existen familias de polinomios $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con dicha propiedad, como pueden ser los de Tchebyshev asociados a todo compacto con infinitos elementos, los de Fekete, Leja, etc. (ver [118]).

¹Recordar que por $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$ en Ω denotamos la convergencia uniforme en compactos de Ω .

De ahora en adelante, $\{k(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ será una sucesión de números enteros no negativos tales que $0 \leq k(n) \leq n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = \theta$, con $0 \leq \theta \leq 1$. Ahora, estamos en condiciones de enunciar nuestro primer resultado de convergencia.

Teorema III.1.1 *Supongamos que f y K verifican las condiciones anteriores y que $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface la propiedad (III.1.4) y $\theta = 0$. Entonces, la sucesión $\{(k(n)/n)_f\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f uniformemente en subconjuntos cerrados de Ω y además lo hace con velocidad geométrica, verificándose:*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(z) - (k(n)/n)_f(z)|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{|\psi(z)|} < 1 \quad \forall z \in \Omega.$$

Demostración:

Sea $C_\gamma = \{z \in \mathbb{C} / |\psi(z)| = \gamma\}$ ($\gamma > 1$) una curva de nivel de la transformación ψ . Si K es conexo, C_γ es una curva de Jordan cerrada que rodea a K . En el caso en que K es una unión finita de conexos, cuando γ es lo suficientemente próximo a 1, C_γ consiste en una unión finita de curvas cerradas de Jordan tal que cada una rodea a una y sólo una de las componentes conexas de K . Si ahora usamos la fórmula del error (III.1.3) con $\Gamma = C_\gamma$, llegamos a que

$$f(z) - (k(n)/n)_f(z) = \frac{z^{k(n)}}{2\pi T_n(z)} \oint_{C_\gamma} \frac{T_n(t)f(t)}{(t-z)t^{k(n)}} dt$$

para todo $z \in \text{Ext}(C_\gamma) : T_n(z) \neq 0$, de lo cual se tiene

$$|f(z) - (k(n)/n)_f(z)| \leq M \left| \frac{z^{k(n)}}{T_n(z)} \right| \cdot \max_{t \in C_\gamma} \left\{ \left| \frac{T_n(t)}{t^{k(n)}} \right| \right\},$$

donde M es una constante positiva. Así, aplicando la raíz n -ésima y teniendo en cuenta que $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface (III.1.4), que $\theta = 0$ y que $\text{Ext}(C_\gamma) = \{z \in \hat{\mathbb{C}} / |\psi(z)| > \gamma\}$, obtenemos:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(z) - (k(n)/n)_f(z)|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\gamma}{|\psi(z)|} < 1, \quad \forall z \in \text{Ext}(C_\gamma).$$

Así, si hacemos tender γ a 1, concluimos fácilmente la demostración. ■

Observación III.1.1 *Conviene aclarar que el hecho de que $\theta = 0$ no significa que la interpolación se dé exclusivamente en el infinito, ni tan siquiera que el número de veces*

que se interpola en el origen permanezca acotado. De hecho, la situación es bastante más general, permitiendo por ejemplo que $k(n) = [\sqrt{n}]$, siendo $[\cdot]$ la parte entera.

Para la otra situación límite, $\theta = 1$, cuando asintóticamente sólo estamos interpolando en el origen, la elección del teorema anterior no es óptima ya que sólo nos permite demostrar, siguiendo el mismo procedimiento, que hay convergencia geométrica en $G = \{z \in \mathbb{C} / |\psi(z)| > \frac{|z|}{a}\}$, dominio que está estrictamente contenido en Ω ; incluso si $Cap(K) > a$, entonces G se reduce a un dominio acotado que contiene al origen.

Otra lectura del resultado obtenido en el teorema anterior sería que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(z) - (k(n)/n)_f(z)|^{\frac{1}{n}} \leq e^{-g_{\Omega}(z, \infty)}$$

para todo $z \in \Omega$, donde $g_{\Omega}(z, \infty)$ es la función de Green de Ω con singularidad en el infinito, dado que $|\psi(z)| = e^{g_{\Omega}(z, \infty)}$, y está garantizada su existencia al ser Ω de conectividad finita y tal que su frontera carezca de puntos aislados. Esto sugiere que cuando la interpolación se realiza asintóticamente en el origen, $\theta = 1$, debemos escoger $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de tal forma que el resultado que se obtenga sea

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(z) - (k(n)/n)_f(z)|^{\frac{1}{n}} \leq e^{-g_{\Omega}(z, 0)},$$

donde $g_{\Omega}(z, 0)$ es la función de Green de Ω con singularidad en el origen, teniéndose que $e^{g_{\Omega}(z, 0)} = |\chi(z)|$, siendo χ la transformación conforme de Ω en el complementario del disco unidad de tal forma que el origen se transforma en el infinito. Por otro lado, se sabe que $g_{\Omega}(z, 0) = g_{\Omega^{-1}}(\frac{1}{z}, \infty)$, donde $\Omega^{-1} = \{z \in \hat{\mathbb{C}} / \frac{1}{z} \in \Omega\}$. Teniendo en cuenta que $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega^{-1} = K^{-1}$, siendo a su vez K^{-1} un compacto con las mismas propiedades topológicas que K , deducimos que si escogemos $\{\hat{T}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ extremal con respecto a K^{-1} y definimos $T_n(z) = z^n \hat{T}_n(\frac{1}{z})$ (“ polinomio recíproco ”), se sigue que:

$$\left| \frac{T_n(z)}{z^n} \right|^{\frac{1}{n}} \Rightarrow Cap(K^{-1}) |\chi(z)| \quad \text{en } \Omega \setminus \{0\}. \quad (\text{III.1.5})$$

Procediendo de forma análoga al teorema anterior, considerando ahora $C_{\gamma} = \{z \in \mathbb{C} / |\chi(z)| = \gamma\}$ con $\gamma > 1$, obtenemos el siguiente resultado .

Teorema III.1.2 Sean f y Ω como en el teorema anterior y $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que satisfice (III.1.5) y $\theta = 1$. Entonces, la sucesión $\{(k(n)/n)_f\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f uniformemente en subconjuntos cerrados de Ω , con velocidad geométrica, teniéndose que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(z) - (k(n)/n)_f(z)|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{|\chi(z)|} < 1 \quad \forall z \in \Omega.$$

Ahora, estudiaremos el caso propiamente bipuntual, es decir, cuando $0 < \theta < 1$. En este caso, las elecciones sugeridas tanto por el Teorema III.1.1 como por el Teorema III.1.2 no son buenas, ya que como vimos en una observación anterior, la bondad de la elección depende de la geometría del dominio Ω ; pudiéndose demostrar que para la elección del Teorema III.1.1 sólo se garantiza la convergencia en el dominio

$$\left\{ z \in \hat{\mathbb{C}} / |\psi(z)| > \left(\frac{|z|}{a} \right)^\theta \right\},$$

obteniéndose para la elección del Teorema III.1.2, la región

$$\left\{ z \in \hat{\mathbb{C}} / |\chi(z)| > \left(\frac{b}{|z|} \right)^{1-\theta} \right\}.$$

Con el fin de recuperar todo el dominio, debemos buscar una elección de $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con un comportamiento intermedio, surgiendo entonces el siguiente resultado.

Teorema III.1.3 Tomando f y Ω como en los teoremas anteriores, sea $\{h(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida a partir de $\{k(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, de forma que $h(n) = n - k(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Supongamos además que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = \theta$, con $0 \leq \theta \leq 1$, y que escogemos la sucesión $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de la siguiente forma:

$$T_n(z) = \tilde{L}_{k(n)}(z) \cdot L_{h(n)}(z), \quad (\text{III.1.6})$$

donde $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es extremal en K y $\tilde{L}_n(z) = z^n \hat{L}_n(\frac{1}{z})$, siendo $\{\hat{L}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ extremal en K^{-1} . Entonces, la sucesión $\{(k(n)/n)_f\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f uniformemente en subconjuntos cerrados de Ω , con velocidad geométrica, verificándose

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(z) - (k(n)/n)_f(z)|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{|\psi(z)|^{1-\theta} |\chi(z)|^\theta} < 1, \quad \forall z \in \Omega.$$

Demostración:

Definamos $\vartheta = (\psi)^{1-\theta}(\chi)^\theta$, la cual es una función holomorfa en $\Omega \setminus \{0, \infty\}$ que alcanza el valor mínimo en $\partial(\Omega)$, donde $\vartheta \equiv 1$. Si consideramos, como en los teoremas anteriores, $C_\gamma = \{z \in \mathbb{C} / |\vartheta(z)| = \gamma\}$ con $\gamma > 1$, una curva de nivel de la función ϑ , y aplicamos el lema III.1.1, con $\Gamma = C_\gamma$, teniendo en cuenta (III.1.4), (III.1.5) y (III.1.6), obtenemos

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(z) - (k(n)/n)_f(z)|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\gamma}{|\vartheta(z)|} < 1, \quad \forall z \in \text{Ext}(C_\gamma),$$

de donde, haciendo tender γ a 1, concluimos la demostración. ■

Obsérvese que en el caso particular, muy frecuente en las aplicaciones, en que $\partial(\Omega)$ es un intervalo (por ejemplo: Funciones tipo-Markov), es bien conocido que la misma ratio puede obtenerse mediante el uso de polinomios ortogonales con respecto a ciertas medidas variantes (véase, por ejemplo, [34]). En efecto, si $\partial(\Omega) = [a, b]$ ($0 < a < b$), bastará elegir T_n como el n -ésimo polinomio ortogonal con respecto a

$$d\sigma_n(x) = \frac{d\sigma(x)}{x^{2k(n)}}, \quad \text{siendo } \sigma' > 0 \text{ c.p.t. en } [a, b].$$

Sin embargo, nuestra elección de T_n (III.1.6) presenta la ventaja de ahorrar el cálculo de polinomios ortogonales con respecto a medidas variantes, con la consiguiente mejora en la eficacia computacional.

La idea, utilizada en el Teorema III.1.3, basada en la descomposición del denominador, nos va a permitir obtener un resultado análogo de convergencia para el caso en el que Ω no es conexo, sino de la forma $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_\infty$, donde Ω_0 y Ω_∞ son dominios de Jordan, en el sentido de que sus respectivas fronteras son curvas de Jordan cerradas, y tales que $\Omega_0 \cap \Omega_\infty = \emptyset$, con $0 \in \Omega_0$ y $\infty \in \Omega_\infty$. En lo que sigue, denotaremos por $\Gamma_0 = \partial(\Omega_0)$ y $\Gamma_\infty = \partial(\Omega_\infty)$. En esta situación los desarrollos (III.1.1) y (III.1.2) convergen absoluta y uniformemente en compactos de D_0 y D_∞ , respectivamente, donde ahora $a = \min_{t \in \Gamma_0} |t|$ y $b = \max_{t \in \Gamma_\infty} |t|$. Seguidamente, enunciaremos un lema que nos va a decir cómo elegir la descomposición del denominador. A tal efecto, véase [137, pag.214-215].

Lema III.1.2 1. Sea C una curva de Jordan que contiene al origen en su interior y $g(z, \infty)$ la función de Green del $\text{Ext}(C)$ con singularidad en el infinito. Si

denotamos por $\{L_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ a la sucesión de polinomios tal que el grado de L_n es n y escogemos sus ceros equidistribuidos sobre C con respecto a la medida $d\sigma = \frac{\partial g}{\partial \nu} \frac{|dt|}{2\pi}$, donde ν es la normal exterior de C y $|dt|$ el parámetro arco sobre C , entonces se verifica:

$$|L_n(z)|^{\frac{1}{n}} \rightrightarrows \text{Cap}(C) |\psi(z)| \quad \text{en } \text{Ext}(C).$$

Y además,

$$|L_n(z)|^{\frac{1}{n}} \rightrightarrows \text{Cap}(C) \quad \text{en } \text{Int}(C)$$

donde ψ es la transformación conforme del $\text{Ext}(C)$ en el complementario del disco unidad, conservando el punto del infinito.

2. Sea $g(z, 0)$ la función de Green del $\text{Int}(C)$ con polo en el origen. Sea $\{\tilde{L}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de polinomios tal que \tilde{L}_n tiene grado n y sus ceros son elegidos equidistribuidos en C según la medida $d\sigma' = -\frac{\partial g(z, 0)}{\partial \nu} \frac{|dt|}{2\pi}$. Se sigue que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\tilde{L}_n(z)}{z^n} \right| = |\chi(z)| \quad \text{en } \text{Int}(C) \setminus \{0\}.$$

Y por otro lado,

$$\left| \frac{\tilde{L}_n(z)}{z^n} \right|^{\frac{1}{n}} \rightrightarrows 1 \quad \text{en } \text{Ext}(C).$$

siendo χ la transformación conforme del $\text{Int}(C)$ en el complementario del disco unidad, tal que $\chi(0) = \infty$.

Si ahora escogemos la descomposición (III.1.6):

$$T_n(z) = \tilde{L}_{k(n)}(z) \cdot L_{h(n)}(z), \quad (\text{III.1.7})$$

donde $\{L_{h(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ se toma de tal forma que los ceros de $L_{h(n)}(z)$ son $h(n)$ puntos equidistribuidos en Γ_∞ según el apartado 1. del lema anterior (tomando $C = \Gamma_\infty$) y la sucesión $\{\tilde{L}_{k(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de tal forma que los ceros de $\tilde{L}_{k(n)}(z)$ son $k(n)$ puntos equidistribuidos en Γ_0 según el apartado 2. del mismo lema (tomando ahora $C = \Gamma_0$), entonces podemos concluir el siguiente resultado:

Teorema III.1.4 *Sea f holomorfa en Ω con las propiedades que acabamos de describir y sea $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de polinomios verificando (III.1.7), con $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = \theta$, $0 \leq \theta \leq 1$. Entonces, la sucesión $\{(k(n)/n)_f\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f en subconjuntos cerrados de Ω ; teniéndose, además:*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(z) - (k(n)/n)_f(z)|^{\frac{1}{n}} \leq \begin{cases} \frac{1}{|\chi(z)|^\theta} & \text{si } z \in \text{Int}(\Gamma_0) \\ \frac{1}{|\psi(z)|^{1-\theta}} & \text{si } z \in \text{Ext}(\Gamma_\infty). \end{cases}$$

Demostración:

Definamos las curvas de nivel $C_0 = \{z \in \mathbb{C} / |\chi(z)| = 1 + \epsilon\}$ con $\epsilon > 0$ y $C_\infty = \{z \in \mathbb{C} / |\psi(z)| = 1 + \epsilon'\}$ con $\epsilon' > 0$. Entonces $C_0 \subset \text{Int}(\Gamma_0)$ y $C_\infty \subset \text{Ext}(\Gamma_\infty)$. Así, usando el lema (III.1.1), obtenemos:

$$f(z) - (k(n)/n)_f(z) = \frac{z^k}{2\pi T_n(z)} \left\{ \oint_{C_0} \frac{T_n(t)f(t)}{(t-z)t^k} dt + \oint_{C_\infty} \frac{T_n(t)f(t)}{(t-z)t^k} dt \right\}.$$

Además, sabemos que:

$$\left| \frac{T_n(z)}{z^{k(n)}} \right|^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \begin{cases} [\text{Cap}(\Gamma_\infty)]^{1-\theta} |\psi(z)|^{1-\theta} & \text{si } z \in \text{Ext}(\Gamma_\infty) \\ [\text{Cap}(\Gamma_\infty)]^{1-\theta} |\chi(z)|^\theta & \text{si } z \in \text{Int}(\Gamma_0). \end{cases}$$

Separando nuestro estudio por regiones, si $z \in \text{Int}(C_0)$, entonces

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(z) - (k(n)/n)_f(z)|^{\frac{1}{n}} &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\|T_n\|_{C_0}}{\left| \frac{T_n(z)}{z^{k(n)}} \right|} + \frac{\|T_n\|_{C_\infty}}{\left| \frac{T_n(z)}{z^{k(n)}} \right|} \right|^{\frac{1}{n}} \\ &\leq \max \left\{ \frac{(1+\epsilon)^\theta}{|\chi(z)|^\theta}, \frac{(1+\epsilon')^\theta}{|\chi(z)|^\theta} \right\}. \end{aligned}$$

Con lo cual si ϵ y ϵ' tienden a cero, se concluye que es cierto el teorema para $z \in \text{Int}(\Gamma_0)$.

De forma análoga se procede con $z \in \text{Ext}(C_\infty)$, concluyendo así la demostración. ■

De hecho, en cualquiera de las situaciones anteriores se puede obtener un teorema para funciones meromorfas en Ω cuyas únicas singularidades sean polos finitos distintos del origen. Pero para ello debemos usar otro tipo de aproximantes, permitiendo que parte de los polos queden libres, es decir, que no estén todos fijados de antemano.

Vamos a recordar brevemente esta definición. Sean $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ dos sucesiones de enteros no negativos verificando $0 \leq m_n \leq n$ y $0 \leq p(n) \leq n + m_n$. Sea

$\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de polinomios tal que $\partial T_k = k$ y $T_k(0) \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}$. Entonces, existen dos polinomios no nulos Q_{m_n} y P_{n-1} verificando:

1. $Q_{m_n} \in \mathbb{P}_{m_n}$ y $P_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$
2. $\frac{Q_{m_n}(z)T_{n-m_n}(z)f(z) - P_{n-1}(z)}{z^{p(n)}} = O(1)$, $z \rightarrow 0$ (III.1.8)
3. $\frac{Q_{m_n}(z)T_{n-m_n}(z)f(z) - P_{n-1}(z)}{z^{p(n)}} = O\left(\frac{1}{z^{m_n+1}}\right)$, $z \rightarrow \infty$

A la función racional

$$\pi_n(f) = \frac{P_{n-1}}{Q_{m_n}T_{n-m_n}},$$

se le denomina aproximante tipo Padé en dos puntos de f con respecto a la sucesión $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ asociado a la familia de polinomios $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ polos libres, que es único (es el análogo a la m -ésima fila de la tabla de Padé ya que los polos fijos están situados en el infinito). Obsérvese que por las condiciones (III.1.8), si hacemos $m_n = 0$, $\forall n$, entonces el denominador T_n estaría totalmente fijado de antemano, dando lugar al ATP2. Por otra parte, si hacemos $m_n = n$, recuperamos el AP2.

De ahora en adelante, tomaremos $m_n = m$ para cada n ($n \geq m$). Estamos en condiciones, pues, de dar el siguiente resultado general.

Teorema III.1.5 *Sea f una función meromorfa en Ω , con m polos contando multiplicidades. Sea $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de enteros no negativos tal que para cada n , $0 \leq p(n) \leq n + m$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = \theta \in [0, 1]$. Consideremos además dos sucesiones $\{k(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{h(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de enteros no negativos verificando:*

$$p(n) = p(m) + k(n) , \quad 0 \leq k(n) \leq n - m \quad \text{y} \quad k(n) + h(n) = n - m , \quad n \geq m.$$

*Si escogemos $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $T_{n-m}(z) = \tilde{L}_{k(n)}(z)L_{h(n)}(z)$ como en el Teorema III.1.3, entonces $\{\pi_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f uniformemente en cerrados de Ω^{*2} con velocidad geométrica. Más aún, cada polo de f atrae tantos polos de $\pi_n(f)$ de acuerdo con su multiplicidad.*

²Recordar que Ω^* es el dominio obtenido de Ω después de haber suprimido los polos de f .

Demostración:

De las condiciones (III.1.8) donde hemos cambiado la notación por $Q_{m_n} = Q_m^n$, se tiene que

$$\frac{Q(z)Q_m^n(z)T_{n-m}(z)f(z) - Q(z)P_{n-1}(z)}{z^{p(n)}} = O(1) \quad , \quad z \rightarrow 0 \quad ,$$

$$\frac{Q(z)Q_m^n(z)T_{n-m}(z)f(z) - Q(z)P_{n-1}(z)}{z^{p(n)}} = O\left(\frac{1}{z}\right) \quad , \quad z \rightarrow \infty \quad ,$$

donde Q es el polinomio que tiene por ceros los polos de f . Entonces, si definimos la función h_n como:

$$h_n(z) = \frac{Q(z)Q_m^n(z)T_{n-m}(z)f(z) - Q(z)P_{n-1}(z)}{z^{p(n)}} \quad ,$$

se sigue que h_n es holomorfa en Ω y además $h_n(\infty) = 0$. Sea C_γ una curva de nivel de $\vartheta(z) = (\psi(z))^{1-\theta}(\chi(z))^\theta$ con γ suficientemente próxima a 1. Entonces, para todo z en el exterior de C_γ , utilizando el teorema de Cauchy, se obtiene

$$\begin{aligned} h_n(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\gamma} \frac{h_n(t)}{t-z} dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\gamma} \frac{Q(t)Q_m^n(t)T_{n-m}(t)f(t) - Q(t)P_{n-1}(t)}{(t-z)t^{p(n)}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\gamma} \frac{Q(t)Q_m^n(t)T_{n-m}(t)f(t)}{(t-z)t^{p(n)}} dt - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\gamma} \frac{Q(t)P_{n-1}(t)}{(t-z)t^{p(n)}} dt \quad , \quad \forall z \in \text{Ext}(C_\gamma) . \end{aligned}$$

Esta última integral es nula, por ser el integrando holomorfo en $\text{Int}(C_\gamma)$. Se obtiene, por tanto,

$$\frac{Q(z)Q_m^n(z)T_{n-m}(z)f(z) - Q(z)P_{n-1}(z)}{z^{p(n)}} = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\gamma} \frac{Q(t)Q_m^n(t)T_{n-m}(t)f(t)}{(t-z)t^{p(n)}} dt$$

de lo cual

$$Q(z)Q_m^n(z)f(z) - \frac{Q(z)P_{n-1}(z)}{T_{n-m}(z)} = \frac{1}{2\pi i} \frac{z^{p(n)}}{T_{n-m}(z)} \oint_{C_\gamma} \frac{Q(t)Q_m^n(t)T_{n-m}(t)f(t)}{(t-z)t^{p(n)}} dt \quad ,$$

como sabemos que $p(n) = p(m) + k(n)$, sustituyendo en la expresión anterior, se tiene que

$$Q_m^n(z)Q(z)f(z) - \frac{Q(z)P_{n-1}(z)}{T_{n-m}} = \frac{z^{p(m)}}{2\pi i} \frac{z^{k(n)}}{T_{n-m}(z)} \oint_{C_\gamma} \frac{T_{n-m}(t)Q_m^n(t)Q(t)f(t)}{t^{k(n)}(t-z)t^{p(m)}} dt \quad .$$

Si suponemos que los polinomios Q_m^n han sido normalizados de forma que la suma de los módulos de sus coeficientes sea la unidad, con coeficiente director positivo, y procedemos de la misma forma que en las demostraciones de los teorema anteriores, se concluye que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| Q(z)Q_m^n(z)f(z) - \frac{Q(z)P_{n-1}(z)}{T_{n-m}(z)} \right|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\gamma}{|\psi(z)|^{1-\theta}|\chi(z)|^\theta} < 1 \quad , \quad \forall z \in \text{Ext}(C_\gamma).$$

Como γ es arbitraria, se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Q \cdot Q_m^n (f - \pi_n(f))\|_K = 0 \quad , \quad \forall K \subset \Omega \text{ compacto}$$

Si denotamos $t_n = Q \cdot Q_m^n$

$$\begin{aligned} \{z \in \mathbb{C} / |f(z) - \pi_n(f)(z)| \geq \epsilon\} &\subset \left\{ z \in \mathbb{C} / \frac{|t_n(z)(f(z) - \pi_n(f)(z))|}{\epsilon} \geq |t_n(z)| \right\} \\ K \cap \{z \in \mathbb{C} / |f(z) - \pi_n(f)(z)| \geq \epsilon\} &\subset \left\{ z \in K / \frac{|t_n(z)(f(z) - \pi_n(f)(z))|}{\epsilon} \geq |t_n(z)| \right\} \\ \text{Cap}(\{z \in K / |f(z) - \pi_n(f)(z)| \geq \epsilon\}) &\leq \text{Cap}\left(\left\{ z \in K / \frac{\|t_n(f - \pi_n(f))\|_K}{\epsilon} \geq |t_n(z)| \right\}\right) \\ &= \left(\frac{\|t_n(f - \pi_n(f))\|_K}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{m+l_n}}, \end{aligned}$$

donde $m + l_n$ es el grado de t_n , que como sabemos está acotado por $2m$, se sigue que

$$\pi_n(f)(z) \xrightarrow{\text{Cap}} f(z) \quad \text{en } \Omega.$$

Como consecuencia de un resultado obtenido por Gonchar en [64], la convergencia en capacidad implica la convergencia en compactos en Ω^* , garantizando además, que cada polo de f atrae tantos ceros de Q_m^n de acuerdo con su multiplicidad. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_m^n(z) = \lambda Q(z) \quad , \quad \lambda \neq 0 \quad .$$

Por tanto, para todo K subconjunto compacto de Ω^* , existe una γ_K tal que $K \subset \text{Ext}(C_{\gamma_K})$ y un n_0 tal que para todo $n > n_0$, $Q_m^n(z) \neq 0 \forall z \in K$. Así, si procedemos de la misma forma que antes, se obtiene que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| f(z) - \frac{P_{n-1}(z)}{Q_m^n(z)T_{n-m}(z)} \right|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\gamma_K}{|\psi(z)|^{1-\theta}|\chi(z)|^\theta} < 1 \quad \forall z \in K,$$

al estar K alejado de los ceros de Q_m^n . Como lo anterior es cierto para cualquier K , se concluye la demostración. Finalmente, si hacemos tender γ_K a 1 obtenemos la estimación de la ratio. ■

En todos estos resultados existe un problema que hasta ahora no hemos podido solventar completamente, y que no es otro que poder garantizar descomposiciones del tipo (III.1.6) de fácil computación, para las cuales todos sus ceros sean simples (condición indispensable para las posteriores aplicaciones a fórmulas de cuadratura interpolatorias). Por el momento, sólo podemos garantizar que todos los ceros sean simples cuando usamos polinomios ortogonales variantes, tal y como comentamos en la observación posterior al Teorema III.1.3 .

El siguiente resultado es esencialmente un caso particular de los resultados contenidos en [127, Section 6.1] para el caso multipuntual, aunque se sigue directamente de [66].

Lema III.1.3 *Sea μ una medida finita de Borel positiva soportada en $[a, b]$ con $0 < a < b < \infty$ y $\{l(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de enteros no negativos verificando:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l(n)}{2n} = \theta \quad \text{con} \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Si Q_n es el n -ésimo polinomio ortonormal con respecto a $\frac{d\mu(x)}{x^{l(n)}}$. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |Q_n(x)|^{\frac{1}{n}} \geq \exp\{G_{[a,b]}(z; \nu) - V^\nu(z)\}$$

uniformemente en compactos de $\mathbb{C} \setminus [a, b]$ donde $\nu = \theta\delta_0 + (1-\theta)\delta_\infty$ y $G_{[a,b]}(z; \nu)$ denota el potencial de Green de la medida ν en $[a, b]$, definida de la siguiente forma:

$$G_{[a,b]}(z; \nu) = \int g_{[a,b]}(z; t) d\nu(t) = \theta g_{[a,b]}(z, 0) + (1-\theta)g_{[a,b]}(z; \infty),$$

siendo $g_{[a,b]}(z; t)$ la función de Green de $\hat{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$ con singularidad en $t \notin [a, b]$ y $V^\nu(z)$ el potencial logarítmico de la medida ν normalizado esféricamente, es decir,

$$V^\nu(z) = - \int_{|x| \leq 1} \log |z - x| d\nu(x) - \int_{|x| > 1} \log \left| 1 - \frac{z}{x} \right| d\nu(x).$$

Si, además, $\frac{d\mu}{dx} > 0$ c.p.t. en $[a, b]$, se tiene que :

$$|Q_n(z)|^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \exp\{G_{[a,b]}(z; \nu) - V^\nu(z)\}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [a, b] \quad (\text{III.1.9})$$

y

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |Q_n(z)|^{\frac{1}{n}} \leq \exp\{G_{[a,b]}(z; \nu) - V^\nu(z)\}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ahora, estamos en condiciones de dar el siguiente resultado.

Corolario III.1.1 Sea f una función holomorfa en $\Omega = \hat{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$ que se anula en el infinito y $\frac{d\mu}{dx} > 0$ c.p.t. en $[a, b]$. Si $\{k(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de enteros no negativos tal que para cada n , $0 \leq k(n) \leq n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = \theta \in [0, 1]$ y escogemos $T_n = Q_n$, donde Q_n es el polinomio ortogonal con respecto a $\frac{d\mu(x)}{x^{2k(n)}}$, entonces $\{(k(n)/n)_f\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f uniformemente en cerrados de Ω , y se tiene que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(z) - (k(n)/n)_f(z)|^{\frac{1}{n}} \leq \exp\{-G_{[a,b]}(z; \nu)\} \quad \forall z \in \Omega.$$

Demostración:

Como f es holomorfa en Ω y $f(\infty) = 0$, entonces a partir de la representación integral del error (III.1.3) obtenemos:

$$f(z) - (k/n)_f(z) = \frac{z^{k(n)}}{2\pi i Q_n(z)} \oint_{\Gamma} \frac{Q_n(t)f(t)}{(t-z)t^{k(n)}} dt,$$

de donde se sigue que

$$|f(z) - (k/n)_f(z)| \leq M \frac{|z|^{k(n)}}{|Q_n(z)|} \max_{t \in \Gamma} \frac{|Q_n(t)|}{|t|^{k(n)}}.$$

Concluimos la demostración usando el comportamiento asintótico (III.1.9). ■

III.1.2 Resultados numéricos

En esta subsección, ilustraremos numéricamente los resultados teóricos obtenidos. Para ello, hemos seleccionado una serie de ejemplos que usualmente aparecen en las aplicaciones. Contrastaremos los aproximantes tipo Padé bipuntuales ATP2 con los aproximantes tipo Padé ATP unipuntuales en el infinito y en el origen.

Denotaremos por $E_{(k,n)}$ al error de interpolación del aproximante tipo Padé bipuntual $(k/n)_f$ (recordamos que $0 \leq k \leq n$ es el orden de interpolación en el origen).

De los ejemplos más conocidos de las funciones holomorfas en un dominio cuyo complementario es compacto, destacan las denominadas funciones de tipo Markov, ya comentadas anteriormente en el capítulo I. Son aquellas que están definidas mediante la transformada de Cauchy de una medida, posiblemente compleja, con soporte compacto contenido en \mathbb{R} ; es decir, aquellas que admiten la siguiente representación:

$$\hat{\mu}(z) = \int \frac{d\mu(x)}{z-x}.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el soporte de μ es el intervalo $[a, b]$ con $-\infty < a < b < +\infty$. Además, admitiremos que el $0 \notin [a, b]$ y por lo tanto, podemos suponer que $a > 0$. Bajo estas condiciones, $\hat{\mu}$ es holomorfa en $\hat{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$ y $\hat{\mu}(z) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)$ ($z \rightarrow \infty$). Por tanto, μ admite los siguientes desarrollos en serie:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(z) &= - \sum_{k=0}^{\infty} c_{-(1+k)} z^k, & \text{cuando } |z| < a \\ \hat{\mu}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{1}{z^{k+1}}, & \text{cuando } |z| > b, \end{aligned}$$

donde a los coeficientes $c_k = \int_a^b x^k d\mu(x)$, $k \in \mathbb{Z}$, se les denomina momentos de la medida μ .

Nuestro primer análisis está dedicado al caso particular $\mu' \equiv 1$, lo que da lugar a la función

$$\int_a^b \frac{dx}{z-x} = \log \left(\frac{z-a}{z-b} \right),$$

con $0 < a < b < +\infty$, cuyos momentos vienen dados por:

$$c_i = \frac{b^{i+1} - a^{i+1}}{i+1}, \quad \forall i \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, \quad c_{-1} = \log \frac{b}{a},$$

que son fácilmente computables.

Si aplicamos el Teorema III.1.3 (pag.129) con $k = 0$, obtenemos la siguiente estimación de la velocidad del error del ATP en el infinito, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus [a, b]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |E_{(0,n)}(z)|^{\frac{1}{n}} \leq \left| 2 \left(\frac{z-a}{b-a} \right) - 1 + \left\{ \left(2 \left(\frac{z-a}{b-a} \right) - 1 \right)^2 - 1 \right\}^{\frac{1}{2}} \right|^{-1} < 1. \quad (\text{III.1.10})$$

Table III.1: Error del ATP en el infinito para la función $\log \frac{z-a}{z-b}$

z	$E_{(0,6)}$	$E_{(0,6)}^{\frac{1}{6}}$	$E_{(0,10)}$	$E_{(0,10)}^{\frac{1}{10}}$	$E_{(0,14)}$	$E_{(0,14)}^{\frac{1}{14}}$	λ
0.3	.658D-05	.136	.507D-08	.148	.256D-10	.175	.218
0.5	.307D-04	.176	.526D-07	.187	.441D-09	.214	.267
0.8	.110D-02	.321	.110D-04	.319	.194D-06	.331	.420
2.5	.307D-04	.176	.527D-07	.187	.874D-08	.265	.267
5.0	.229D-08	.036	.235D-13	.043	.235D-13	—	.072
10.0	.439D-11	.008	.527D-15	.029	.527D-15	—	.029
1.2 + 0.3 i	.132D-02	.331	.535D-04	.373	.101D-04	.439	.566
1.4 + 0.5 i	.333D-03	.268	.279D-05	.278	.397D-06	.348	.572
1.8 + 1.0 i	.635D-05	.136	.626D-08	.151	.166D-09	.200	.296

Si escogemos $[a, b] = [1, 2]$ y para la computación de $(0/n)_{\hat{\mu}}$ consideramos como denominador T_n al n-ésimo polinomio de Tchebyshev de primera clase en $[1, 2]$, en esta situación particular (III.1.10) se convierte en:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |E_{(0,n)}(z)|^{\frac{1}{n}} \leq \left| 2z - 3 + ((2z - 3)^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \right|^{-1} = \lambda < 1 \quad \text{para } z \in \mathbb{C} \setminus [1, 2].$$

En la tabla III.1 exponemos los resultados numéricos obtenidos para esta situación.

Como era de esperar, los mejores resultados se obtienen para aquellos z con $|z|$ grande y relativamente alejados del intervalo $[1, 2]$. Con el símbolo “ — ” denotamos aquellas entradas que por problemas de redondeo carecen de sentido.

Análogamente, si hacemos $k = n$ en el Teorema III.1.3 obtenemos la estimación de la velocidad del ATP en el origen, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus [a, b]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |E_{(n,n)}(z)|^{\frac{1}{n}} \leq |z| \left| 2a \left(\frac{b-z}{b-a} \right) - z + \left\{ \left(2a \left(\frac{b-z}{b-a} \right) - z \right)^2 - z^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right|^{-1} < 1, \tag{III.1.11}$$

que al escoger otra vez $[a, b] = [1, 2]$ y por denominador T_n al polinomio recíproco del n-ésimo polinomio de Tchebyshev de primera clase en $[0.5, 1]$, entonces (III.1.11) se

Table III.2: Error del ATP en el origen de la función $\log \frac{z-a}{z-b}$

z	$E_{(6,6)}$	$E_{(6,6)}^{\frac{1}{6}}$	$E_{(10,10)}$	$E_{(10,10)}^{\frac{1}{10}}$	$E_{(14,14)}$	$E_{(14,14)}^{\frac{1}{14}}$	λ
0.3	.721D-09	.030	.633D-14	.038	.633D-14	—	.048
0.5	.727D-07	.064	.249D-11	.069	.249D-11	—	.101
0.8	.471D-04	.190	.871D-07	.195	.917D-07	—	.268
2.5	.852D-03	.307	.841D-05	.310	.379D-06	.347	.420
5.0	.498D-05	.130	.535D-08	.148	.571D-10	.185	.240
10.0	.621D-06	.092	.325D-09	.112	.210D-11	.146	.200
1.2 + 0.3 i	.192D-02	.352	.202D-04	.339	.522D-05	.419	.628
1.4 + 0.5 i	.259D-03	.252	.514D-05	.295	.601D-06	.359	.516
1.8 + 1.0 i	.691D-04	.202	.228D-06	.216	.628D-08	.220	.436

particulariza en:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |E_{(n,n)}(z)|^{\frac{1}{n}} \leq \left| 4 - 3z + \left((2z - 3)^2 - z^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right|^{-1} = \lambda < 1 \quad \text{para } z \in \mathbb{C} \setminus [1, 2].$$

Los resultados numéricos para este caso se encuentran en la tabla III.2.

En ella podemos observar que los mejores resultados se obtienen cuando z está próximo al origen. Además, las estimaciones λ son bastante realistas.

Finalmente, estudiamos el ATP2 para el caso que usualmente se estudia, la situación “balanceada” (interpolación del mismo orden en el origen que en el infinito, $k(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, siendo $\lfloor \cdot \rfloor$ parte entera). Aplicando el Teorema III.1.3, esta nueva elección nos proporciona la siguiente estimación, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus [1, 2]$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |E_{(k(n),n)}(z)|^{\frac{1}{n}} \leq |z|^{\frac{1}{2}} \left(|2z - 3 + \sqrt{(2z - 3)^2 - 1}| \cdot |4 - 3z + \sqrt{(2z - 3)^2 - z^2}| \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Escogemos como denominador a $T_{h(n)}^{[1,2]} \cdot \left(z^{k(n)} T_{k(n)}^{[0.5,1]} \left(\frac{1}{z} \right) \right)$ (donde hemos denotado por $T_n^{[a,b]}$ al n -ésimo polinomio de Tchebyshev de primera clase en $[a, b]$). En la tabla III.3 están reflejados los resultados numéricos obtenidos para esta elección. Como podemos observar, son mejores globalmente cuando usamos ATP2.

Table III.3: Error del ATP bipuntual de la función $\log \frac{z-a}{z-b}$

z	$E_{(3,6)}$	$E_{(3,6)}^{\frac{1}{6}}$	$E_{(5,10)}$	$E_{(5,10)}^{\frac{1}{10}}$	$E_{(7,14)}$	$E_{(7,14)}^{\frac{1}{14}}$	λ
0.3	.135D-05	.105	.429D-10	.091	.105D-13	.100	.102
0.5	.279D-04	.174	.595D-08	.150	.746D-11	.160	.164
0.8	.327D-02	.385	.138D-04	.326	.202D-06	.332	.335
2.5	.201D-02	.355	.927D-05	.313	.112D-06	.318	.335
5.0	.190D-05	.111	.170D-09	.105	.697D-13	.114	.131
10.0	.308D-07	.055	.314D-12	.056	.416D-15	.057	.076
1.2 + 0.3 i	.401D-01	.585	.470D-03	.464	.116D-03	.523	.596
1.4 + 0.5 i	.104D-01	.467	.644D-04	.380	.621D-05	.424	.543
1.8 + 1.0 i	.438D-03	.275	.635D-06	.240	.587D-08	.258	.359

Nuestro segundo estudio está dedicado a la función Integral Exponencial E_n , definida por

$$E_n(\omega) = \int_1^\infty \frac{e^{-t\omega}}{t^n} dt \quad , \quad \Re(\omega) > 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

Como fácilmente se puede comprobar la función $E_n(\omega)$ satisface la siguiente fórmula de recurrencia

$$E_{n+1}(\omega) = \frac{e^{-\omega} - \omega E_n(\omega)}{n}$$

Por lo tanto, para su computación podemos restringir nuestra atención al cómputo de

$$E_1(\omega) = \int_1^\infty \frac{e^{-t\omega}}{t} dt \quad , \quad \Re(\omega) > 0$$

Si introducimos el cambio de variable $t = \frac{\sigma}{\omega}$, entonces

$$E_1(\omega) = \int_\omega^\infty \frac{e^{-\sigma}}{\sigma} d\sigma \quad , \quad |\text{Arg}(\sigma)| < \pi$$

y si ahora aplicamos el cambio de variable $x = 1 + \frac{1}{\sigma - \omega + 1}$, tras unas manipulaciones elementales, obtenemos que para $z \neq 1$ (ver [81]),

$$E_1(z) = e^{1-z} \left\{ E_1(1) + T \left(\frac{2-z}{1-z} \right) \right\}$$

Table III.4: Error del ATP en el infinito de la función E_1

z	$E_{(0,6)}$	$E_{(0,6)}^{\frac{1}{6}}$	$E_{(0,10)}$	$E_{(0,10)}^{\frac{1}{10}}$	$E_{(0,14)}$	$E_{(0,14)}^{\frac{1}{14}}$	λ
0.5	.548D-06	.090	.712D-08	.096	.135D-09	.103	.171
0.7	.378D-07	.039	.114D-10	.043	.983D-12	.063	.126
0.9	.246D-12	.008	.246D-12	—	.246D-12	—	.026
1.1	.688D-13	.006	.688D-13	—	.688D-13	—	.023
1.3	.198D-09	.024	.469D-12	.028	.469D-12	—	.065
1.5	.327D-08	.056	.996D-11	.042	.108D-11	.063	.101
1.7	.169D-07	.050	.925D-10	.057	.355D-12	.057	.139
1.9	.503D-07	.060	.393D-09	.067	.508D-11	.074	.159
2.1	.109D-04	.069	.111D-08	.076	.233D-10	.086	.183
2.5	.298D-06	.082	.438D-08	.090	.145D-09	.103	.225
3.0	.298D-06	.092	.119D-07	.102	.550D-09	.119	.268
5.0	.862D-06	.098	.343D-07	.116	.288D-08	.140	.381

donde T es la función de Markov dada por:

$$T(z) = \int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{z-x} dx$$

y $E_1(1) = 0.2193839343983436\dots$.

A diferencia del ejemplo anterior, el cálculo de los momentos $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ requiere algunos cálculos adicionales, que desarrollaremos a continuación.

Sea

$$c_{-k} = \int_1^2 \frac{e^{-\frac{1}{x-1}}}{x^k} dx \quad k \geq 1.$$

Si aplicamos el cambio de variable $\frac{1}{x-1} = t+1$, cuando $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} c_{-k} &= e^{-1} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(t+2)^k} ((t+2)-1)^{k-2} dt \\ &= e^{-1} \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-2}{j} (-1)^j \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(t+2)^{j+2}} dt \end{aligned} \quad (\text{III.1.12})$$

Table III.5: Error del ATP en el origen de la función E_1

z	$E_{(6,6)}$	$E_{(6,6)}^{\frac{1}{6}}$	$E_{(10,10)}$	$E_{(10,10)}^{\frac{1}{10}}$	$E_{(14,14)}$	$E_{(14,14)}^{\frac{1}{14}}$	λ
0.5	.663D-04	.201	.359D-05	.209	.235D-06	.217	.333
0.7	.443D-05	.128	.149D-06	.140	.594D-08	.150	.256
0.9	.184D-06	.075	.374D-08	.088	.926D-10	.099	.290
1.1	.216D-07	.052	.256D-09	.063	.454D-11	.073	.148
1.3	.620D-08	.042	.404D-10	.050	.134D-11	.064	.107
1.5	.641D-09	.029	.254D-11	.035	.689D-12	.060	.072
1.7	.211D-10	.017	.386D-12	.028	.366D-12	—	.040
1.9	.128D-12	.007	.109D-12	—	.109D-12	—	.016
2.1	.859D-13	.007	.859D-13	—	.859D-13	—	.012
2.5	.052D-10	.021	.243D-12	.026	.243D-12	—	.058
3.0	.201D-08	.035	.118D-10	.043	.564D-12	.060	.101
5.0	.390D-07	.058	.121D-08	.077	.374D-10	.091	.225

Si definimos,

$$H(z) = e^z E_1(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t+z} dt$$

obtenemos, por un lado,

$$\frac{d^k}{dz^k}(H(z)) = (-1)^k k! \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(t+z)^{k+1}} dt \tag{III.1.13}$$

y por otro (ver [1]),

$$\frac{d^k}{dz^k}(H(z)) = \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}(H(z)) + \frac{(-1)^k (k-1)!}{z^k}$$

de donde se sigue que

$$\frac{d^k}{dz^k}(H(z)) = H(z) + \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j (j-1)!}{z^j} . \tag{III.1.14}$$

Sustituyendo (III.1.14) en (III.1.13) obtenemos:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(t+z)^{k+1}} dt = \frac{(-1)^k}{k!} \left\{ H(z) + \sum_{j=1}^k \frac{(-1)^j (j-1)!}{z^j} \right\} \tag{III.1.15}$$

Table III.6: Error del ATP bipuntual de la función E_1

z	$E_{(3,6)}$	$E_{(3,6)}^{\frac{1}{6}}$	$E_{(5,10)}$	$E_{(5,10)}^{\frac{1}{10}}$	$E_{(7,14)}$	$E_{(7,14)}^{\frac{1}{14}}$	λ
0.5	.494D-04	.192	.221D-05	.196	.891D-07	.197	.239
0.7	.123D-05	.103	.214D-07	.110	.355D-09	.113	.180
0.9	.331D-08	.038	.131D-10	.043	.366D-12	.057	.087
1.1	.736D-09	.030	.220D-11	0.034	.276D-12	.055	.059
1.3	.125D-07	.048	.649D-10	.053	.208D-12	.054	.083
1.5	.167D-07	.050	.885D-10	.055	.401D-12	.058	.085
1.7	.696D-08	.044	.269D-10	.048	.364D-12	.057	.073
1.9	.307D-09	.027	.438D-12	.028	.110D-12	.050	.051
2.1	.448D-09	.028	.824D-12	.031	.824D-12	—	.047
2.5	.622D-07	.063	.563D-09	.070	.235D-11	.069	.112
3.0	.430D-06	.087	.838D-08	.098	.713D-10	.097	.164
5.0	.235D-05	.115	.144D-06	.139	.433D-08	.146	.293

Entonces, a partir de (III.1.12) y de (III.1.15), concluimos que para $k = 2, 3, \dots$

$$c_{-k} = -e \cdot E_1(2) \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-2}{j} \frac{1}{(j+1)!} - e^{-1} \left\{ \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k-2}{j} \frac{1}{(j+1)!} \sum_{h=1}^{j+1} \frac{(-1)^h (h-1)!}{2^h} \right\}$$

Para $k = 1$, se puede ver fácilmente que $c_{-1} = E_1(1) - e \cdot E_1(2)$ y para los momentos positivos

$$c_k = \int_1^2 x^k e^{-\frac{1}{x-1}} dx, \quad k = 0, 1, \dots,$$

por el mismo argumento que en el caso anterior, se verifica:

$$c_k = e^{-1} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{(t+1)^{j+2}} dt$$

y como consecuencia de (III.1.15), se deduce que para $k = 0, 1, \dots$,

$$c_k = E_1(1) \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!} + e^{-1} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{(-1)^{j+1}}{(j+1)!} \sum_{h=0}^{j+1} (-1)^h (h-1)!$$

Usando la misma elección de denominadores que en el ejemplo anterior, los resultados numéricos quedan reflejados en las tablas III.4-6.

En esta ocasión, podemos observar que en la tabla III.4, dedicada a las estimaciones del ATP en el infinito, los mejores resultados se consiguen para valores de z próximos a $z = 1$, que se corresponden con el punto del infinito mediante la transformación bilineal $\omega = \frac{2-z}{1-z}$.

Sin embargo, en la tabla III.5 se puede contrastar que los números son bastante mejores cuando z está relativamente cerca de $z = 2$ que se corresponde con $\omega = 0$ mediante la citada transformación. Al igual que en el ejemplo anterior de la tabla III.6 podemos deducir que los resultados son mejores, globalmente, cuando usamos ATP2.

III.2 Aproximantes tipo Padé en dos puntos para el caso no clásico

En esta sección daremos una respuesta al caso en el que los dos puntos pertenezcan a la frontera del dominio de meromorfa. Para ello nos limitaremos a la clase de funciones que se obtienen a partir de perturbaciones racionales de la transformada de Cauchy de una medida compleja soportada en $[0, \infty) = \mathbb{R}^+$. Más concretamente, sea μ una medida, en general compleja, soportada en \mathbb{R}^+ , verificando que las integrales

$$\int_0^{\infty} x^k d|\mu|(x)$$

son finitas para todo entero k y consideremos su transformada de Cauchy

$$\hat{\mu}(z) = \int_0^{\infty} \frac{d\mu(x)}{z-x},$$

siendo $\hat{\mu}$ holomorfa en $\mathbb{D} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, y sea $R = \frac{P}{Q}$ una función racional con numerador y denominador de grado a lo sumo m y tal que $R(\infty) = 0$. Si denotamos por \mathcal{Z} el conjunto de polos de R , que suponemos que están en \mathbb{D} , la clase de funciones que estudiaremos serán las que pueden expresarse de la siguiente forma:

$$f(z) = \hat{\mu}(z) + R(z), \tag{III.2.1}$$

siendo por tanto holomorfas en $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \mathcal{Z}$.

Ahora, las funciones (III.2.1) poseen desarrollos asintóticos:

$$f_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \quad \text{cuando } z \rightarrow 0, \quad z < 0,$$

$$f_{\infty}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^* \left(\frac{1}{z^k}\right) \quad \text{cuando } z \rightarrow \infty, \quad z < 0.$$

Como señalamos en el Capítulo I, el gran problema que ocasiona este tipo de desarrollos es que, en general, los coeficientes $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{f_k^*\}_{k=1}^{\infty}$ no determinan a la función f , al contrario de lo que sucede en el caso clásico, surgiendo así el denominado problema “FUERTE DE MOMENTOS”. No obstante, en la situación que nosotros estudiaremos, el problema fuerte de momentos estará determinado y no ocasionará problemas.

Usaremos los mismos aproximantes tipo Padé en dos puntos, con cierto número de polos libres, empleados en la primera sección en la página 133. Ahora, necesitamos obtener una representación integral del error. Ese es el contenido del siguiente resultado.

Lema III.2.1 *Sea f una función dada por (III.2.1) y $\pi_n(f)$ su aproximante tipo Padé bipuntual definido por las condiciones de interpolación (III.1.8) con respecto a la sucesión $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ y asociado a $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $m_n = m$, $\forall n \geq m$. Entonces,*

$$f(z) - \pi_n(f)(z) = \frac{z^{p(n)}}{Q(z)Q_m^n(z)T_{n-m}(z)} \int_0^{\infty} \frac{Q_m^n(t)T_{n-m}(t)Q(t) d\mu(t)}{z-t} \frac{d\mu(t)}{t^{p(n)}} \quad \forall z \in \mathbb{D}^*.$$

Demostración:

De las condiciones (III.1.8) con $m_n = m$ y denotando por $Q_m^n = Q_{m_n}$, la función racional $\pi_n(f) = \frac{P_{n-1}}{Q_m^n \cdot T_{n-m}}$ que satisface

1. $Q_m^n \in \mathbb{P}_m$ $Q_m^n \not\equiv 0$ y $P_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1}$.
2. $\frac{Q_m^n(z)T_{n-m}(z)f(z) - P_{n-1}(z)}{z^{p(n)}} = \mathcal{O}(1)$, $z \rightarrow 0$ $z < 0$.
3. $\frac{Q_m^n(z)T_{n-m}(z)f(z) - P_{n-1}(z)}{z^{p(n)}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^{m+1}}\right)$, $z \rightarrow \infty$ $z < 0$.

con $0 \leq p(n) \leq n + m$, existe y es única.

Se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{Q(z)Q_m^n(z)T_{n-m}(z)\hat{\mu}(z) - S_{n+m-1}(z)}{z^{p(n)}} &= \mathcal{O}(1) \quad , \quad z \rightarrow 0 \quad z < 0 \quad , \\ \frac{Q(z)Q_m^n(z)T_{n-m}(z)\hat{\mu}(z) - S_{n+m-1}(z)}{z^{p(n)}} &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right) \quad , \quad z \rightarrow \infty \quad z < 0 \quad , \end{aligned} \quad (\text{III.2.2})$$

donde S_{n+m-1} es un polinomio de grado a lo sumo $n + m - 1$. Por otra parte,

$$\begin{aligned} \frac{Q_m^n(z)T_{n-m}(z)Q(z)\hat{\mu}(z)}{z^{p(n)}} &= \\ \frac{1}{z^{p(n)}} \int_0^\infty \frac{t^{p(n)}Q_m^n(z)T_{n-m}(z)Q(z) - z^{p(n)}Q_m^n(t)T_{n-m}(t)Q(t)}{(z-t) \cdot t^{p(n)}} d\mu(t) &+ \\ \int_0^\infty \frac{Q_m^n(t)T_{n-m}(t)Q(t)}{z-t} \frac{d\mu(t)}{t^{p(n)}} &. \end{aligned}$$

Así,

$$\frac{Q_m^n(z)T_{n-m}(z)Q(z)\hat{\mu}(z) - F_{n+m-1}(z)}{z^{p(n)}} = \int_0^\infty \frac{Q_m^n(t)T_{n-m}(t)Q(t)}{z-t} \frac{d\mu(t)}{t^{p(n)}} \quad ,$$

donde F_{n+m-1} es un polinomio de grado a lo sumo $n + m - 1$ con la siguiente representación integral

$$F_{n+m-1}(z) = \int_0^\infty \frac{t^{p(n)}Q_m^n(z)T_{n-m}(z)Q(z) - z^{p(n)}Q_m^n(t)T_{n-m}(t)Q(t)}{z-t} \frac{d\mu(t)}{t^{p(n)}} \quad ,$$

verificando:

$$\begin{aligned} \frac{Q_m^n(z)T_{n-m}(z)Q(z)\hat{\mu}(z) - F_{n+m-1}(z)}{z^{p(n)}} &= \mathcal{O}(1) \quad , \quad z \rightarrow 0 \quad ; \quad z < 0 \quad , \\ \frac{Q_m^n(z)T_{n-m}(z)Q(z)\hat{\mu}(z) - F_{n+m-1}(z)}{z^{p(n)}} &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right) \quad , \quad z \rightarrow \infty \quad ; \quad z < 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{III.2.3})$$

Teniendo en cuenta (III.2.2) y (III.2.3), por la unicidad, necesariamente $\frac{S_{n+m-1}}{Q_m^n T_{n-m} Q} \equiv \frac{F_{n+m-1}}{Q_m^n T_{n-m} Q}$ y por lo tanto,

$$\hat{\mu}(z) + R(z) - \pi_n(f)(z) = \frac{z^{p(n)}}{Q_m^n(z)T_{n-m}(z)Q(z)} \int_0^\infty \frac{Q_m^n(t)T_{n-m}(t)Q(t)}{z-t} \frac{d\mu(t)}{t^{p(n)}} \quad ,$$

concluyendo así la demostración. ■

Ahora necesitamos algunos resultados que nos proporcionarán, tras una serie de manipulaciones, los “ candidatos ” oportunos $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ para conseguir convergencia en todo el dominio \mathbb{D}^* . El primero de ellos se debe a Rakhmanov [112, pag.157]).

Teorema III.2.1 *Sea g una función peso en \mathbb{R}^+ con todos los momentos positivos finitos, verificando*

$$\int_0^R \frac{\ln g(x)}{x^{\frac{1}{2}}} dx > -\infty \quad , \quad \forall R > 0$$

y supongamos que existen dos constantes positivas γ y δ , con $\gamma > \frac{1}{2}$ tales que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\gamma} \left(\ln \frac{1}{g(x)} \right) = \delta .$$

Sea $L_n(x, g)$ el n -ésimo polinomio ortonormal con respecto a la función peso g . Entonces,

$$\frac{\ln |L_n(z, g)|}{(2n)^{1-\frac{1}{2\gamma}}} \Rightarrow \delta^{\frac{1}{2\gamma}} D(2\gamma) \Re(\sqrt{-z}) \quad , \quad \text{en } \mathbb{D},$$

donde $\sqrt{-1} = i$ y $D(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\lambda+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \right\}^{\frac{1}{\lambda}}$.

El segundo resultado que necesitamos se debe a Levin y Lubinsky, ver [89, Corollary 1.5, pag.468].

Teorema III.2.2 *Sea $W_\alpha(x) = \exp(-|x|^\alpha)$; $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$. Entonces*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |P_n(x, W_\alpha^2)| W_\alpha(x) \sim^3 n^{\frac{1}{6} - \frac{1}{2\alpha}} \quad ,$$

donde $P_n(x, W_\alpha^2)$ denota el n -ésimo polinomio ortonormal con respecto a W_α^2 en \mathbb{R} .

De estos dos resultados se puede concluir la siguiente proposición.

Proposición III.2.1 *Consideremos la función peso $g_\gamma(t) = \frac{e^{-\delta t^\gamma}}{\sqrt{t}}$, $t \in \mathbb{R}^+$, con $\gamma > \frac{1}{2}$ y $\delta > 0$. Sea $L_n(t, g_\gamma)$ el n -ésimo polinomio ortonormal con respecto a la función peso g_γ . Entonces, para un n suficientemente grande, se cumple:*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |L_n(t, g_\gamma)| e^{-\delta t^\gamma} \leq A \left(\frac{2}{\delta} \right)^{\frac{1}{4\gamma}} \left[(2n)^{\frac{1}{6} - \frac{1}{4\gamma}} \right]$$

siendo A una constante positiva.

³Dada dos sucesiones $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, decimos que " $a_n \sim b_n$ " si existen dos constantes positivas m y M tales que $m \leq \frac{a_n}{b_n} \leq M$ para todo n mayor que un cierto n_0 .

Demostración:

Primero vamos a comprobar que

$$\hat{L}_n(t^2, g_\gamma) = \hat{P}_{2n}(t, W_{2\gamma}^\delta) = \left(\frac{2}{\delta}\right)^\frac{n}{\gamma} \hat{P}_{2n}\left(\left(\frac{\delta}{2}\right)^\frac{1}{2\gamma} t, W_{2\gamma}^2\right),$$

donde si P es un polinomio, \hat{P} denota al correspondiente polinomio mónico.

En efecto, usando el cambio $x = t^2$, se sigue que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty x^j \hat{L}_n(x, g_\gamma) \frac{e^{-\delta x^\gamma}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^\infty t^{2j} \hat{L}_n(t^2, g_\gamma) e^{-\delta t^{2\gamma}} dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty t^{2j} \hat{L}_n(t^2, g_\gamma) e^{-\delta t^{2\gamma}} dt ; \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

y como $\hat{L}_n(t^2, g_\gamma) e^{-\delta t^{2\gamma}}$ es una función par, también se verifica

$$\int_{-\infty}^\infty t^{2j+1} \hat{L}_n(t^2, g_\gamma) e^{-\delta t^{2\gamma}} dt = 0 ; \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Consecuentemente,

$$\hat{L}_n(t^2, g_\gamma) = \hat{P}_{2n}(t, W_{2\gamma}^\delta).$$

Ahora, usando el cambio $\left(\frac{\delta}{2}\right)^\frac{1}{2\gamma} t = u$, se obtiene,

$$\int_{-\infty}^\infty t^j \hat{P}_{2n}(t, W_{2\gamma}^\delta) e^{-\delta t^{2\gamma}} dt = \left(\frac{2}{\delta}\right)^\frac{1+j}{2\gamma} \int_{-\infty}^\infty u^j \hat{P}_{2n}\left(\left(\frac{2}{\delta}\right)^\frac{1}{2\gamma} u, W_{2\gamma}^\delta\right) e^{-2u^{2\gamma}} du = 0,$$

para $j = 0, 1, \dots, 2n-1$, de donde:

$$\left(\frac{\delta}{2}\right)^\frac{n}{\gamma} \hat{P}_{2n}\left(\left(\frac{2}{\delta}\right)^\frac{1}{2\gamma} t, W_{2\gamma}^\delta\right) = \hat{P}_{2n}(t, W_{2\gamma}^2),$$

o equivalentemente

$$\hat{P}_{2n}(t, W_{2\gamma}^\delta) = \left(\frac{2}{\delta}\right)^\frac{n}{\gamma} \hat{P}_{2n}\left(\left(\frac{\delta}{2}\right)^\frac{1}{2\gamma} t, W_{2\gamma}^2\right).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \left\| L_n\left(t, \frac{e^{-\delta t^\gamma}}{\sqrt{t}}\right) e^{-\delta t^\gamma} \right\|_{\infty, \mathbb{R}^+} &= \frac{\left\| \hat{L}_n\left(t, \frac{e^{-\delta t^\gamma}}{\sqrt{t}}\right) e^{-\delta t^\gamma} \right\|_{\infty, \mathbb{R}^+}}{\|\hat{L}_n\|_2} = \\ \frac{\left\| \hat{L}_n(t^2, \frac{e^{-\delta t^\gamma}}{\sqrt{t}}) e^{-\delta t^{2\gamma}} \right\|_{\infty, \mathbb{R}}}{\|\hat{L}_n\|_2} &= \frac{\left\| \hat{P}_{2n}(t, e^{-\delta t^{2\gamma}}) e^{-\delta t^{2\gamma}} \right\|_{\infty, \mathbb{R}}}{\|\hat{L}_n\|_2} = \\ \left(\frac{2}{\delta}\right)^\frac{n}{\gamma} \frac{\left\| \hat{P}_{2n}(t, e^{-2t^{2\gamma}}) e^{-2t^{2\gamma}} \right\|_{\infty, \mathbb{R}}}{\|\hat{L}_n\|_2} &= \left(\frac{\delta}{2}\right)^\frac{1}{4\gamma} \left\| P_{2n}(t, e^{-2t^{2\gamma}}) e^{-2t^{2\gamma}} \right\|_{\infty, \mathbb{R}} \end{aligned}$$

Como la norma de \hat{L}_n satisface que $\|\hat{L}_n\|_2 = \left(\frac{2}{\delta}\right)^{\frac{1}{4\gamma} + \frac{n}{\gamma}} \cdot \|\hat{P}_{2n}(t, e^{-2t^{2\gamma}})\|_2$, haciendo uso del Teorema III.2.2 se concluye la demostración. ■

Ahora estamos en condiciones de enunciar uno de nuestros resultados fundamentales de esta sección.

Teorema III.2.3 *Sea f una función dada por (III.2.1) verificando:*

$$\int_0^\infty t^k e^{\delta t^\gamma + \delta' \frac{1}{t^\beta}} \frac{d|\mu|(t)}{t^{p(m)}} < \infty \quad ; \quad k = 0, 1, \dots, 2m, \quad (\text{III.2.4})$$

donde $\delta, \delta' > 0$; $\gamma, \beta > \frac{1}{2}$ y $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de enteros no negativos tal que para cada n , $0 \leq p(n) \leq n + m$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = \theta \in [0, 1]$. Además, consideremos dos sucesiones $\{k(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{l(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de enteros no negativos verificando:

$$p(n) = p(m) + k(n), \quad 0 \leq k(n) \leq n - m \quad \text{y} \quad k(n) + l(n) = n - m, \quad \text{con} \quad n \geq m.$$

Si definimos $T_{n-m}(z) = \tilde{L}_{k(n)}(z)L_{l(n)}(z)$, donde L_n representa el n -ésimo polinomio ortonormal con respecto a la función peso

$$w(t) = \frac{e^{-\delta t^\gamma}}{\sqrt{t}}, \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

y $\tilde{L}_{k(n)}(z) = z^{k(n)} \hat{L}_{k(n)}\left(\frac{1}{z}\right)$, donde \hat{L}_n denota el n -ésimo polinomio ortonormal con respecto a la función peso

$$\eta(t) = \frac{e^{-\delta' t^\beta}}{\sqrt{t}} \quad ; \quad t \in \mathbb{R}^+,$$

en estas condiciones, $\{\pi_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f uniformemente en compactos e \mathbb{D}^* con velocidad geométrica. Más aún, cada polo de f atrae tantos polos de $R_n(f)$ como indica su multiplicidad.

Demostración:

Aplicando el lema III.2.1, podemos escribir

$$Q_m^n(z)Q(z)f(z) - \frac{Q(z)P_{n-1}(z)}{T_{n-m}(z)} = \frac{z^{p(n)}}{T_{n-m}(z)} \int_0^\infty \frac{Q_m^n(t)T_{n-m}(t)Q(t)}{z-t} \frac{d\mu(t)}{t^{p(n)}}.$$

Como $T_{n-m}(z) = \tilde{L}_{k(n)}(z)L_{l(n)}(z)$ ($n > m$), se tiene

$$\begin{aligned} Q_m^n(z)Q(z)f(z) - \frac{Q(z)P_{n-1}(z)}{T_{n-m}(z)} &= \\ \frac{z^{p(m)+k(n)}}{z^{k(n)}\hat{L}_{k(n)}(\frac{1}{z})L_{l(n)}(z)} \int_0^\infty \frac{Q_m^n(t)Q(t)t^{k(n)}\hat{L}_{k(n)}(\frac{1}{t})L_{l(n)}(t)}{z-t} \frac{d\mu(t)}{t^{p(m)+k(n)}} &= \\ \frac{z^{p(m)}}{\hat{L}_{k(n)}(\frac{1}{z})L_{l(n)}(z)} \int_0^\infty \frac{Q_m^n(t)Q(t)\hat{L}_{k(n)}(\frac{1}{t})L_{l(n)}(t)}{z-t} \frac{d\mu(t)}{t^{p(m)}}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, obtenemos

$$Q_m^n(z)Q(z)f(z) - \frac{Q(z)P_{n-1}(z)}{T_{n-m}(z)} = \frac{z^{p(m)}}{\hat{L}_{k(n)}(\frac{1}{z})L_{l(n)}(z)} \int_0^\infty \frac{Q_m^n(t)Q(t)\hat{L}_{k(n)}(\frac{1}{t})L_{l(n)}(t)}{z-t} \frac{d\mu(t)}{t^{p(m)}},$$

luego, para cualquier $z \in \mathbb{D}^*$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left| Q_m^n(z)Q(z)f(z) - \frac{Q(z)P_{n-1}(z)}{T_{n-m}(z)} \right| &\leq \\ \frac{|z|^{p(m)}}{d(z, \mathbb{R}^+)|\hat{L}_{k(n)}(\frac{1}{z})||L_{l(n)}(z)|} \int_0^\infty |Q_m^n(t)||Q(t)||\hat{L}_{k(n)}(\frac{1}{t})||L_{l(n)}(t)| \frac{d|\mu|(t)}{t^{p(m)}} &\leq \\ \frac{|z|^{p(m)}}{d(z, \mathbb{R}^+)} \frac{\max_{t \in \mathbb{R}^+} (|\hat{L}_{k(n)}(\frac{1}{t})|e^{-\delta' \frac{1}{t^\beta}})}{|\hat{L}_{k(n)}(\frac{1}{z})|} \frac{\max_{t \in \mathbb{R}^+} (|L_{l(n)}(t)|e^{-\delta t^\gamma})}{|L_{l(n)}(z)|} & \\ \int_0^\infty |Q_m^n(t)||Q(t)|e^{\delta t^\gamma + \delta' \frac{1}{t^\beta}} \frac{d|\mu|(t)}{t^{p(m)}}. \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la suma de los módulos de los coeficientes de Q_m^n es igual a 1 y que el coeficiente director es positivo. Entonces, de (III.2.4) podemos deducir que existe una función continua M en \mathbb{D} tal que

$$\left| Q_m^n(z)Q(z)f(z) - \frac{Q(z)P_{n-1}(z)}{T_{n-m}(z)} \right| \leq M(z) \frac{\|\hat{L}_{k(n)}(t)e^{-\delta' t^\beta}\|_{\infty, \mathbb{R}^+}}{|\hat{L}_{k(n)}(\frac{1}{z})|} \frac{\|L_{l(n)}(t)e^{-\delta t^\gamma}\|_{\infty, \mathbb{R}^+}}{|L_{l(n)}(z)|}.$$

Supongamos primero que $\gamma = \beta$. Entonces, haciendo uso de la proposición III.2.1,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| Q(z) \left(Q_m^n(z)f(z) - \frac{P_{n-1}(z)}{T_{n-m}(z)} \right) \right|^{(2n)^{1-\frac{1}{\gamma}}} \leq \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |L_{k(n)}(\frac{1}{z})|^{(2n)^{1-\frac{1}{\gamma}}} |L_{l(n)}(z)|^{(2n)^{1-\frac{1}{\gamma}}}}.$$

Ahora, por el Teorema III.2.1, se infiere:

$$|L_{k(n)}(z)|^{\frac{1}{(2k(n))^{1-\frac{1}{2\gamma}}}} \Rightarrow e^{-\delta' \frac{1}{2\gamma} D(2\gamma) \Re(\sqrt{-z})} \quad z \in \mathbb{D}.$$

$$|L_{h(n)}(z)|^{\frac{1}{(2h(n))^{1-\frac{1}{2\gamma}}}} \Rightarrow e^{-\delta \frac{1}{2\gamma} D(2\gamma) \Re(\sqrt{-z})} \quad z \in \mathbb{D}.$$

de donde

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| Q_m^n(z) Q(z) f(z) - \frac{P_{n-1}(z) Q(z)}{T_{n-m}(z)} \right|^{\frac{1}{(2n)^{1-\frac{1}{\gamma}}}} \leq \quad (III.2.5)$$

$$e^{-D(2\gamma) \left[(1-\theta)^{1-\frac{1}{2\gamma}} \delta^{\frac{1}{2\gamma}} \Re(\sqrt{-z}) + \theta^{1-\frac{1}{2\gamma}} (\delta')^{\frac{1}{2\gamma}} \Re(\sqrt{-\frac{1}{z}}) \right]}.$$

Y teniendo en cuenta que

$$\theta^{1-\frac{1}{2\gamma}} (\delta')^{\frac{1}{2\gamma}} \Re(\sqrt{-\frac{1}{z}}) + (1-\theta)^{1-\frac{1}{2\gamma}} \delta^{\frac{1}{2\gamma}} \Re(\sqrt{-z}) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

concluimos que

$$Q_m^n(z) Q(z) f(z) - \frac{P_{n-1}(z) Q(z)}{T_{n-m}(z)} \Rightarrow 0 \quad \text{en } \mathbb{D}.$$

Cuando $\gamma > \beta$, de forma similar, se deduce que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| Q_m^n(z) Q(z) f(z) - \frac{P_{n-1}(z) Q(z)}{T_{n-m}(z)} \right|^{\frac{1}{(2n)^{1-\frac{1}{\gamma}}}} \leq \quad (III.2.6)$$

$$e^{-(1-\theta)^{1-\frac{1}{2\gamma}} \delta^{\frac{1}{2\gamma}} D(2\gamma) \Re(\sqrt{-z})}, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Análogamente, si $\gamma < \beta$, se sigue que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| Q_m^n(z) Q(z) f(z) - \frac{P_{n-1}(z) Q(z)}{T_{n-m}(z)} \right|^{\frac{1}{(2n)^{1-\frac{1}{\beta}}}} \leq \quad (III.2.7)$$

$$e^{-\theta^{1-\frac{1}{2\beta}} (\delta')^{\frac{1}{2\beta}} D(2\beta) \Re(\sqrt{-\frac{1}{z}})}, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

En cualquier caso, se verifica que

$$Q(z) \left(Q_m^n(z) f(z) - \frac{P_{n-1}(z)}{T_{n-m}(z)} \right) \Rightarrow 0 \quad \text{en } \mathbb{D},$$

y consecuentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Q \cdot Q_m \cdot f - \frac{Q \cdot P_n}{T_{n-m}}\|_K = 0 \quad , \quad \forall K \subset \mathbb{D} \text{ compacto} \quad .$$

$$\text{Sea } t_n = Q \cdot Q_m^n$$

$$\{z \in \mathbb{C} / |f(z) - \pi_n(f)(z)| \geq \epsilon\} \subset \left\{ z \in \mathbb{C} / \frac{|t_n(z)(f(z) - \pi_n(f)(z))|}{\epsilon} \geq |t_n(z)| \right\}$$

$$K \cap \{z \in \mathbb{C} / |f(z) - \pi_n(f)(z)| \geq \epsilon\} \subset \left\{ z \in K / \frac{|t_n(z)(f(z) - \pi_n(f)(z))|}{\epsilon} \geq |t_n(z)| \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{Cap}(\{z \in K / |f(z) - \pi_n(f)(z)| \geq \epsilon\}) &\leq \text{Cap}\left\{ z \in K / \frac{\|t_n(f - \pi_n(f))\|_K}{\epsilon} \geq |t_n(z)| \right\} \\ &= \left(\frac{\|t_n(f - \pi_n(f))\|_K}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{m+t_n}} \end{aligned}$$

donde $m + l_n$ es el grado del polinomio t_n que como sabemos está acotado por $2m$, se sigue que

$$\pi_n(f)(z) \xrightarrow{\text{Cap}} f(z) \quad \text{en } \mathbb{D}$$

Como consecuencia de un resultado obtenido por Gonchar en [64], la convergencia en capacidad implica la convergencia en compactos en \mathbb{D}^* , garantizando además, que cada polo de f atrae tantos ceros de Q_m^n de acuerdo con su multiplicidad. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_m^n(z) = \lambda Q(z) \quad , \quad \lambda \neq 0 \quad . \quad (\text{III.2.8})$$

Ahora, usando la fórmula del error dada en el lema III.2.1, se puede escribir

$$f(z) - \frac{P_{n-1}(z)}{Q_m^n(z)T_{n-m}(z)} = \frac{z^{p(n)}}{Q(z)Q_m^n(z)T_{n-m}(z)} \int_0^\infty \frac{Q_m^n(t)T_{n-m}(t)Q(t)}{z-t} \frac{d\mu(t)}{t^{p(n)}} \quad .$$

Sea K un subconjunto compacto de \mathbb{D}^* ($\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{q_j\}_{j=1}^m$), donde q_j son los ceros de Q) y definamos $d = \frac{d_K}{2}$ donde $d_K = \text{dist}(K, \{q_j\}_{j=1}^m)$. Como consecuencia de (III.2.8), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $n > n_0$, por el teorema de Hurwitz, se tiene que $Q_m^n(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C} \setminus [\bigcup_{j=1}^m \Delta(q_j, d)]$ y $\text{deg}(Q_m^n) = m$, donde $\Delta(q_j, d) = \{z \in \mathbb{C} : |z - q_j| < d\}$. Entonces,

$$\left| f(z) - \frac{P_{n-1}(z)}{Q_m^n(z)T_{n-m}(z)} \right| \leq \frac{|z|^{p(n)}}{d^{2m+1}|T_{n-m}(z)|} \int_0^\infty |Q_m^n(t)||Q(t)||\tilde{L}_{k(n)}(t)||L_{l(n)}(t)| \frac{d|\mu|(t)}{t^{p(n)}} \quad .$$

Así, procediendo de igual forma que antes, obtenemos las estimaciones (III.2.5), (III.2.6) y (III.2.7) en K , según el caso. Del hecho de que K es arbitrario se concluye la demostración. ■

A continuación, vamos a dar un resultado de convergencia para un caso particular de las funciones que acabamos de estudiar, el de las llamadas transformadas de Stieltjes, que se obtienen cuando en (III.2.1) hacemos $R \equiv 0$. Ello nos va a permitir establecer un resultado de convergencia para una elección de ATP2, en función de la convergencia de sucesiones de AP2 para una cierta medida positiva asociada a la medida en cuestión.

Teorema III.2.4 *Sea μ una medida en general compleja tal que $d\mu = \mu'(x)dx$, y consideremos una medida positiva de Borel finita $d\rho(x) = \rho'(x)dx$, verificando:*

$$\int_0^\infty \frac{|\mu'(x)|^2}{\rho'(x)} dx = K < \infty \quad (\text{III.2.9})$$

y cuyos momentos $d_k = \int_0^\infty x^k d\rho(x)$ existen $\forall k \in \mathbb{Z}$. Sea $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de enteros no negativos, con $0 \leq p(n) \leq n$ y supongamos que los momentos de la medida auxiliar $\rho'(x)dx$ satisfacen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n - p(n) = \infty \quad y \quad \sum_{j=1}^{\infty} d_j^{-\frac{1}{2j}} = \infty \quad (\text{III.2.10})$$

o bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(n) = \infty \quad y \quad \sum_{j=1}^{\infty} d_{-j}^{-\frac{1}{2j}} = \infty. \quad (\text{III.2.11})$$

Si escogemos como denominador del ATP2 $(p(n)/n)_{\hat{\mu}}$ al n -ésimo polinomio ortogonal mónico T_n asociado a la función peso $\frac{\rho'(x)}{x^{2p(n)}}$, entonces $\{(p(n)/n)_{\hat{\mu}}(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\hat{\mu}$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

Demostración:

Denotemos por $\tilde{E}_n(z) = \hat{\mu}(z) - (p(n)/n)_{\hat{\mu}}(z)$ al error de aproximación. Es fácil ver, a partir del lema III.2.1, tomando $Q(z) \equiv 1$ y $m_n = 0$, que

$$\tilde{E}_n(z) = \frac{z^{p(n)}}{T_n(z)} \int_0^\infty \frac{T_n(x)\mu'(x)}{x^{p(n)}(z-x)} dx \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty) \quad : \quad T_n(z) \neq 0.$$

Multiplicando y dividiendo por $\sqrt{\rho'(x)}$ y aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz junto con la condición (III.2.9), deducimos:

$$\begin{aligned}
 |\tilde{E}_n(z)|^2 &= \left| \int_0^\infty \frac{z^{p(n)} T_n(x)}{T_n(z) x^{p(n)}} \frac{\sqrt{\rho'(x)}}{x-z} \frac{\mu'(x)}{\sqrt{\rho'(x)}} dx \right|^2 \\
 &\leq \left\{ \int_0^\infty \left| \frac{z^{p(n)} T_n(x)}{T_n(z) x^{p(n)}} \frac{\sqrt{\rho'(x)}}{x-z} \right|^2 dx \right\} \left\{ \int_0^\infty \frac{|\mu'(x)|^2}{\rho'(x)} dx \right\} \\
 &\leq K \int_0^\infty \left| \frac{z^{p(n)} T_n(x)}{T_n(z) x^{p(n)}} \frac{\sqrt{\rho'(x)}}{x-z} \right|^2 dx \\
 &= K \frac{|z|^{2p(n)}}{|T_n(z)|^2} \int_0^\infty \frac{(T_n(x))^2 \rho'(x)}{x^{2p(n)} |x-z|^2} dx = K \cdot M_n(z). \quad (\text{III.2.12})
 \end{aligned}$$

Obsérvese que si denotamos por $E_n(z) = \hat{\rho}(z) - [2p(n)/n]_{\hat{\rho}}(z)$ al error de aproximación del AP2, entonces podemos concluir que la función $M_n(z)$ de la expresión (III.2.12) está acotada por $|E_n|$. En efecto, por el lema III.2.1, tomando $Q \equiv 1$ y $m_n = n$, y escogiendo como sucesión $\{2p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, obtenemos una expresión integral de E_n de la siguiente forma:

$$E_n(z) = \frac{z^{2p(n)}}{Q_n(z)} \int_0^\infty \frac{Q_n(x) \rho'(x)}{x^{2p(n)} z-x} dx.$$

Sabemos que en este caso el denominador del AP2 coincide con el n -ésimo polinomio ortogonal mónico con respecto a la función peso $\frac{\rho'(x)}{x^{2p(n)}}$. Luego, por la ortogonalidad, llegamos a que:

$$E_n(z) = \frac{z^{2p(n)}}{Q_n^2(z)} \int_0^\infty \frac{Q_n^2(x) \rho'(x)}{x^{2p(n)} z-x} dx = \frac{z^{2p(n)}}{Q_n^2(z)} \int_0^\infty \frac{Q_n^2(x)}{x^{2p(n)}} (\bar{z}-x) \frac{\rho'(x)}{|z-x|^2} dx$$

y tomando módulos,

$$|E_n(z)| = \left| \int_0^\infty \frac{|z|^{2p(n)}}{|Q_n(z)|^2} (\bar{z}-x) \frac{Q_n^2(x)}{x^{2p(n)}} \frac{\rho'(x)}{|z-x|^2} dx \right|.$$

Si denotamos por H_n a esta última integral y tomamos $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ tal que $\Im(z) \neq 0$, entonces

$$\Im(H_n(z)) = -\Im(z) \cdot \left| \frac{z^{2p(n)}}{Q_n^2(z)} \int_0^\infty \frac{Q_n^2(x)}{x^{2p(n)}} \frac{\rho'(x)}{|z-x|^2} dx \right| \quad (\text{III.2.13})$$

Si hacemos $T_n = Q_n$ y teniendo en cuenta (III.2.12) - (III.2.13), llegamos a que

$$\begin{aligned} |\hat{E}_n(z)| &\leq K \cdot M_n(z) = K \cdot \frac{|\Im(H_n(z))|}{|\Im(z)|} \\ &\leq K \cdot \frac{|H_n(z)|}{|\Im(z)|} \leq K \cdot \frac{|E_n(z)|}{|\Im(z)|}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty) : \Im(z) \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{III.2.14})$$

Por otro lado, si consideramos $z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ tal que $\Re(z) < 0$, entonces

$$\Re(H_n(z)) = \frac{|z|^{2p(n)}}{|Q_n(z)|^2} \int_0^\infty (\Re(z) - x) \frac{Q_n^2(x)}{x^{2p(n)}} \frac{\rho'(x)}{|z-x|^2} dx$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} |\Re(H_n(z))| &= \frac{|z|^{2p(n)}}{|Q_n(z)|^2} \int_0^\infty (x - \Re(z)) \frac{Q_n^2(x)}{x^{2p(n)}} \frac{\rho'(x)}{|z-x|^2} dx \\ &> \frac{|\Re(z)| |z|^{2p(n)}}{|Q_n(z)|^2} \int_0^\infty \frac{Q_n^2(x)}{x^{2p(n)}} \frac{\rho'(x)}{|z-x|^2} dx. \end{aligned} \quad (\text{III.2.15})$$

Con lo cual, teniendo en cuenta (III.2.12) y (III.2.15) se obtiene

$$\begin{aligned} |\tilde{E}_n(z)|^2 &\leq K \cdot M_n(z) \leq K \cdot \frac{|\Re(H_n(z))|}{|\Re(z)|} \\ &\leq K \cdot \frac{|H_n(z)|}{|\Re(z)|} \leq K \cdot \frac{|E_n(z)|}{|\Re(z)|}, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty) : \Re(z) < 0. \end{aligned} \quad (\text{III.2.16})$$

Finalmente, si denotamos por $d(z) = \min\{\Re(z), \Im(z)\}$, usando (III.2.14) y (III.2.16) obtenemos

$$|\tilde{E}_n(z)|^2 \leq \frac{K}{d(z)} |E_n(z)| \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty).$$

Como las condiciones (III.2.10) y (III.2.11) garantizan que el problema de momentos esté siempre determinado, se tiene, por tanto, que la sucesión de los correspondientes AP2 siempre converge. ■

Observación III.2.1 *Este resultado que acabamos de obtener es cualitativo; ahora bien, como hemos obtenido una estimación del error de aproximación del ATP2 en función del AP2, si logramos estimar la velocidad de este último lograríamos lo propio con el ATP2, obteniendo así un resultado cuantitativo. En este sentido, podemos ofrecer el siguiente resultado, escogiendo los pesos dentro de la familia de funciones estudiadas por López-Martínez [96].*

Corolario III.2.1 *Sea μ una medida en general compleja tal que $d\mu(x) = \mu'(x)dx$ y consideremos una medida finita de Borel positiva $d\rho(x) = \rho'(x)dx$ verificando:*

$$\int_0^\infty \frac{|\mu'(x)|^2}{\rho'(x)} dx = K < \infty \tag{III.2.17}$$

donde

$$\rho'(x) = x^\nu e^{-\tau(x)}, \quad x \in (0, \infty)$$

con $\nu \in \mathbb{R}$ y donde τ es una función continua en $(0, \infty)$, tal que existen $\gamma > \frac{1}{2}$ y $s > 0$ satisfaciendo

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (sx)^\gamma \tau(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\tau(x)}{(sx)^\gamma} = A > 0.$$

Sea $\{p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de enteros no negativos, tal que $0 \leq p(n) \leq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y denotemos por $\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n}$. Si escogemos como denominador del ATP2 $(p(n)/n)_{\hat{\mu}}$ al n -ésimo polinomio ortogonal mónico T_n con respecto a la función peso $\frac{\rho'(x)}{x^{2p(n)}}$, entonces $\{(p(n)/n)_{\hat{\mu}}\}_{n=1}^\infty$ converge a $\hat{\mu}$ uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$.

Además,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\hat{\mu}(z) - \{(p(n)/n)_{\hat{\mu}}(z)\}|^{\frac{1}{(2n)^r}} \leq e^{-D(2\gamma)} \left[(1-2\theta)^{1-\frac{1}{2\gamma}} \Im(\sqrt{sz}) + (2\theta)^{1-\frac{1}{2\gamma}} \Im\left(\sqrt{\frac{1}{sz}}\right) \right] \quad \text{en } \mathbb{D}$$

$$\text{donde } r = 1 - \frac{1}{2\gamma} \text{ y } D(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})} \right\}^{\frac{1}{\lambda}}.$$

III.3 Aproximantes de Padé multipuntuales

En esta sección estudiaremos la posibilidad de aproximar funciones meromorfas en abiertos de $\hat{\mathbb{C}}$ mediante aproximantes tipo Padé multipuntuales. De esta forma, pretendemos abordar el problema en el contexto más general posible.

Concretamente, partimos de una función f meromorfa en un abierto $D \subset \hat{\mathbb{C}}$ con un número finito de componentes conexas D_1, \dots, D_k . Supondremos que f tiene un total de m polos $p_1, \dots, p_m \in D \cap \mathbb{C}$ y denotaremos $Q(z) = \prod_{j=1}^m (z - p_j)$. Asumamos que cada componente D_j es un dominio regular con respecto al Problema de Dirichlet (para lo cual es suficiente que sea de conectividad finita y su frontera carezca de puntos

Se define su potencial logarítmico por:

$$V^\mu(z) = - \int \log |x - z| d\mu(x) .$$

Sea K un compacto y denotemos por $\mathcal{M}(K)$, al conjunto de todas las medidas positivas de Borel unitarias soportadas en K . Para cada $\mu \in \mathcal{M}(K)$, consideremos la energía del potencial logarítmico:

$$I(\mu) = \int V^\mu(z) dz = - \iint \log |x - z| d\mu(x) d\mu(z) .$$

Sabemos que si la capacidad logarítmica de K , $Cap(K)$, es positiva, entonces existe una única medida $\mu_K \in \mathcal{M}(K)$ (denominada distribución de equilibrio de K) que satisface el problema de equilibrio:

$$I(\mu_K) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}(K)} I(\mu) = \gamma(K) . \quad (\text{III.3.2})$$

A la constante $\gamma(K)$ se la denomina constante de Robin del compacto K y se tiene que $Cap(K) = e^{-\gamma(K)}$. Es bien conocido que μ_K está soportada en $\partial_\infty K$ (la frontera de la componente no acotada de $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$) y que si $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{P}(K)$ es regular para el problema de Dirichlet, donde $\mathbb{P}(K)$ es la envolvente polinomialmente convexa de K (esto es, la unión de K y sus posibles “ agujeros ”), entonces:

$$V^{\mu_K}(z) = \gamma(K), \quad z \in \mathbb{P}(K) ,$$

$$V^{\mu_K}(z) = \gamma(K) - g_{\mathbb{C} \setminus \mathbb{P}(K)}(z; \infty) , \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{P}(K) ,$$

donde $g_{\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{P}(K)}(\cdot; \infty)$ representa a la función de Green de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{P}(K)$ con singularidad en el punto del infinito, la cual será continua en \mathbb{C} y tal que $g_{\hat{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{P}(K)}(z; \infty) > 0$ en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{P}(K)$.

Para el estudio de numerosos problemas en teoría de aproximación es necesario hacer uso de una versión “ ponderada ” o “ pesada ” del problema de equilibrio (III.3.2). En este sentido, sea Σ un subconjunto cerrado de \mathbb{C} (ahora no necesariamente acotado) y denotemos por $\mathcal{M}(\Sigma)$, al igual que antes, al conjunto de medidas positivas de Borel unitarias con soporte en Σ .

Sea $\omega : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_+$ una función que verifica las siguientes propiedades:

1. ω es semicontinua superiormente.
2. $\omega > 0$ en un subconjunto Σ_0 de Σ de capacidad positiva.
3. Si Σ no está acotado, $|z|\omega(z) \rightarrow 0$, para $|z| \rightarrow \infty$, $z \in \Sigma$.

Se dice entonces que ω es un peso admisible en Σ . Sea, asimismo, $Q : \Sigma \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, tal que: $\omega(z) = \exp\{-Q(z)\}$. Para toda $\mu \in \mathcal{M}(\Sigma)$, consideramos la energía pesada:

$$I_\omega(\mu) = \iint \log \left[\frac{1}{|x-z|\omega(x)\omega(z)} \right] d\mu(x)d\mu(z) = I(\mu) + 2 \int Q d\mu .$$

En las condiciones anteriores sobre el peso ω (peso “admissible”), existe una única medida μ_ω , que denominaremos medida de equilibrio asociada a ω (o al campo externo Q) tal que:

$$I_\omega(\mu_\omega) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}(\Sigma)} I_\omega(\mu) = \gamma_\omega .$$

El soporte S_ω de μ_ω será un subconjunto compacto de Σ_0 de capacidad positiva. Si definimos $F_\omega = \gamma_\omega - \int Q d\mu_\omega$, se tendrá que:

$$(V^{\mu_\omega} + Q)(z) \leq F_\omega, \quad z \in S_\omega,$$

$$(V^{\mu_\omega} + Q)(z) \geq F_\omega, \quad \text{qu.e. } z \in \Sigma,$$

donde la notación “qu.e.” indica que la desigualdad anterior se verifica fuera de un conjunto excepcional de capacidad nula.

El principal problema en este caso es que, en general, no se conoce de antemano el soporte de μ_ω . Sin embargo, éste sí es conocido en un caso particular importante, que es precisamente el objeto de nuestro interés, el cual tiene lugar cuando el campo externo Q coincide con el potencial de una carga negativa unitaria soportada fuera de Σ . Ello está conectado con el concepto de “balayage” (barrido) de una medida. Concretamente, sea G un abierto en $\hat{\mathbb{C}}$ con frontera ∂G compacta y de capacidad positiva y μ una medida positiva de Borel finita con soporte compacto en G . Entonces, existen una única medida positiva μ' soportada en ∂G y una constante c tales que:

1. $\|\mu'\| = \|\mu\|$.

$$2. V^{\mu'-\mu}(z) = c = \int_{\Omega} g_{\Omega}(x; \infty) d\mu(x), \text{ qu.e. } z \notin G.$$

donde Ω denota a la componente no acotada (si existe) de G (si G está acotado, $c = 0$).

Esta noción de balayage o barrido de una medida juega un papel crucial en el estudio de la convergencia de interpolantes racionales. La relación de este concepto con el anterior de medida de equilibrio en presencia de un campo externo se establece en los siguientes términos. Si $Q = V^{-\sigma}$, con σ una medida unitaria soportada fuera de Σ , se tiene que $\mu_{\omega} = \sigma'$, esto es, la distribución de equilibrio no es otra que el balayage de σ de $\mathbb{C} \setminus \Sigma$ en $\partial\Sigma$. En este caso, el soporte S_{ω} de μ_{ω} es conocido: $S_{\omega} = \partial\mathbb{P}(\Sigma)$.

Para concluir este breve inciso sobre algunos tópicos de Teoría del Potencial, señalemos que para trabajar más cómodamente en nuestro caso, dado que los ceros de los polinomios que usaremos (y, consecuentemente, las masas de los potenciales) pueden tender a infinito, conviene hacer uso de la normalización esférica de polinomios y potenciales. En este sentido, y aunque en adelante no hagamos mención expresa de ello, supondremos que normalizamos cada polinomio $P(z) = \prod_{j=1}^n (z - \xi_j)$ en la forma:

$$P_*(z) = \prod_{|\xi_j| \leq 1} (z - \xi_j) \prod_{|\xi_j| > 1} \left(1 - \frac{z}{\xi_j}\right).$$

De la misma forma, utilizaremos la correspondiente normalización esférica para los potenciales logarítmicos. Así, para cualquier medida μ con soporte en $\hat{\mathbb{C}}$ (sin necesidad de imponer la condición anterior (III.3.1)), definimos:

$$V_*^{\mu}(z) = - \int_{|x| \leq 1} \log|x - z| d\mu(x) - \int_{|x| > 1} \log\left|1 - \frac{z}{x}\right| d\mu(x) .$$

Obsérvese que para medidas que satisfagan (III.3.1), V_*^{μ} y V^{μ} tan sólo difieren en una constante aditiva. Así, si a cada polinomio P le asociamos su medida contadora de ceros: $\mu(P) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{\xi_j}$, se tiene que $\frac{1}{n} \log|P_*| = -V_*^{\mu(P)}$. Es bien sabido (ver por ejemplo [67]) que si $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (con $P_n \in \mathbb{P}_n$, para cada n) es una sucesión de polinomios normalizados como antes y denotamos $\mu_n = \mu(P_n)$, entonces la convergencia de μ_n a una cierta medida unitaria μ (en la topología débil*) es equivalente a la convergencia en capacidad en $\hat{\mathbb{C}}$ de los potenciales normalizados $V_*^{\mu_n}$ a V_*^{μ} . Por consiguiente, si K

es un compacto de $\hat{\mathbb{C}} \setminus \text{sop}(\mu)$ que no contiene puntos de acumulación de los ceros de $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, se tendrá que:

$$\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{*} \mu \Rightarrow |P_n|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \exp(-V_*^\mu), \text{ uniformemente en } K.$$

En ([126], Sect.2) se hace un estudio exhaustivo de la extensión de resultados de Teoría del Potencial (balayage, ...) al caso en que se empleen potenciales esféricamente normalizados.

Estamos ahora en condiciones de plantear adecuadamente nuestro problema. Supongamos, pues, que la tabla \mathbb{A} sigue una distribución asintótica conocida. Así, si a cada fila \mathbb{A}_n (o lo que es lo mismo, a cada polinomio W_n) le asociamos la medida discreta unitaria (“contadora”):

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{a_{j,n}}, \quad (\text{III.3.3})$$

asumiremos que existe una medida unitaria α soportada en D tal que $\alpha_n \rightarrow \alpha$ ($n \rightarrow \infty$) en la topología débil* (por la compacidad débil*, sabemos que esto puede garantizarse al menos para una subsucesión infinita $\Lambda \subset \mathbb{N}$). En particular, supondremos que α es de la forma

$$\alpha = \sum_{j=1}^k \rho_j \alpha_j, \text{ con } \text{sop}(\alpha_j) \subset D_j, \quad (\text{III.3.4})$$

$$\alpha_j(D_j) = 1, \quad 0 < \rho_j \leq 1 \quad (j = 1, \dots, k) \text{ y } \sum_{j=1}^k \rho_j = 1.$$

Dada esta distribución α , consideremos α' , el balayage de α de D en ∂D . Por la unicidad del balayage (véase e.g. [118]), sabemos que α' debe ser de la forma:

$$\alpha' = \sum_{j=1}^k \rho_j \alpha'_j,$$

donde α'_j es el balayage de α_j de D_j en ∂D_j . Dada la regularidad de los dominios D_j , se tiene para $j = 1, \dots, k$,

$$V^{\alpha'_j - \alpha_j}(z) = \gamma_j = \text{const.}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus D_j,$$

$$V^{\alpha'_j - \alpha_j}(z) = \gamma_j - G_j(z; \alpha_j), \quad z \in D_j,$$

siendo $G_j(z; \alpha_j) = \int g_{D_j}(z; t) d\alpha_j(t)$, donde $g_{D_j}(z; t)$ denota a la función de Green de D_j con singularidad en $t \in D_j$, el denominado potencial de Green de α_j en D_j (véase por ejemplo [127]). La regularidad de D_j implica que $G_j(z; \alpha_j)$ es continua en \mathbb{C} y positiva en D_j .

A efectos de caracterizar la ratio de convergencia, introduzcamos la función:

$$G_D(z; \alpha) = \sum_{j=1}^k \rho_j G_j(z; \alpha_j) .$$

De esta forma, si denotamos $\gamma = \sum_{j=1}^k p_j \gamma_j$, se tiene:

$$\begin{aligned} V^{\alpha' - \alpha}(z) &= \gamma \quad , \quad z \in \mathbb{C} \setminus D \quad , \\ V^{\alpha' - \alpha}(z) &= \gamma - G_D(z; \alpha) \quad , \quad z \in D . \end{aligned} \tag{III.3.5}$$

Supongamos, finalmente, que denotamos por β la distribución asintótica del esquema \mathbb{B} ; esto es, asumimos que existe una medida unitaria β soportada en $\hat{\mathbb{C}} \setminus D$, tal que la sucesión de medidas contadoras normalizadas $\beta_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n \delta_{b_{nj}}$ ($n \in \mathbb{N}$) converge a β en la topología débil*.

Estamos ahora en condiciones de formular el siguiente resultado

Teorema III.3.1 *En las condiciones anteriores, Si $\beta = \alpha'$, denotando por α' al balayage de α de D en ∂D , y el esquema \mathbb{A} no tiene puntos de acumulación en ∂D , entonces:*

1. *La sucesión de aproximantes multipuntuales tipo Padé $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de la forma $r_n(z) = r_n(f, \mathbb{A}_n, \mathbb{B}_n; z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)T_{n-m}(z)}$ converge a f uniformemente en compactos de $D^* = D \setminus \{p_1, \dots, p_m\}$, teniéndose además que si E es un subconjunto compacto de D^* ,*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|f - r_n\|_{\infty, E}^{1/n} \leq \exp \{-\tau(E)\} < 1 \quad ,$$

donde $\tau(E) = \min_{t \in E} G_D(t; \alpha)$.

2. *Cada polo de f "atrae" tantos ceros de Q_n como indica su multiplicidad.*

Demostración:

Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos $\Gamma_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}/G_D(z; \alpha) = \varepsilon\}$. La regularidad de las componentes D_j de D implica que Γ_ε consiste en una unión finita de curvas de Jordan cuando ε está suficientemente próximo a 0. Si elegimos $\varepsilon > 0$ de forma que $\{p_1, \dots, p_m\} \subset \text{Int}(\Gamma_\varepsilon)$ y n suficientemente grande para que $\mathbb{A}_n \subset \text{Int}(\Gamma_\varepsilon)$ y $\mathbb{B}_n \subset \text{Ext}(\Gamma_\varepsilon)$, podemos escribir para $z \in \text{Int}(\Gamma_\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} Q(z) \left(\frac{Q_n T_{n-m} f - P_n}{W_{n+m+1}} \right) (z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\varepsilon} Q(x) \left(\frac{Q_n T_{n-m} f - P_n}{W_{n+m+1}} \right) (x) \frac{dx}{x-z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\varepsilon} \left(\frac{Q_n T_{n-m} Q f}{W_{n+m+1}} \right) (x) \frac{dx}{x-z} \end{aligned}$$

de donde

$$\left(Q_n Q f - \frac{Q P_n}{T_{n-m}} \right) (z) = \frac{W_{n+m+1}(z)}{2\pi i T_{n-m}(z)} \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(\frac{Q_n T_{n-m} Q f}{W_{n+m+1}} \right) (x) \frac{dx}{x-z} \quad (\text{III.3.6})$$

Dado que con la normalización utilizada en las secciones anteriores, la familia $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está uniformemente acotada en compactos de \mathbb{C} , y teniendo en cuenta que (Qf) es una función holomorfa en $\text{Int}(\Gamma_\varepsilon)$, al tomar raíces n -ésimas en (III.3.6) obtendríamos, por (III.3.5):

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \left(Q_n Q f - \frac{Q P_n}{T_{n-m}} \right) (z) \right|^{1/n} &\leq \exp \left\{ V^{\beta-\alpha}(z) - \min_{t \in \Gamma_\varepsilon} V^{\beta-\alpha}(t) \right\} \\ &= \exp \{ \gamma - G_D(z; \alpha) - (\gamma - \varepsilon) \} \\ &= \exp \{ \varepsilon - G_D(z; \alpha) \} . \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrariamente pequeño, se tiene que para cualquier compacto $K \subset D$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Q_n Q(f - r_n)\|_{\infty, K} = 0.$$

Por otro lado,

$$\{z \in \mathbb{C} / |f(z) - r_n(z)| \geq \varepsilon\} \subset \left\{ z \in \mathbb{C} / \frac{|t_n(z)(f(z) - r_n(z))|}{\varepsilon} \geq |t_n(z)| \right\},$$

donde hemos denotado por $t_n = Q \cdot Q_n$. Si K es cualquier compacto de D , se sigue que:

$$K \cap \{z \in \mathbb{C} / |f(z) - r_n(z)| \geq \varepsilon\} \subset \left\{ z \in K / \frac{|t_n(z)(f(z) - r_n(z))|}{\varepsilon} \geq |t_n(z)| \right\}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \text{Cap}(\{z \in K / |f(z) - r_n(z)| \geq \epsilon\}) &\leq \text{Cap}\left(\left\{z \in K / \frac{\|t_n(f - r_n)\|_K}{\epsilon} \geq |t_n(z)|\right\}\right) \\ &= \left(\frac{\|t_n(f - r_n)\|_K}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{m+l_n}} \end{aligned}$$

donde $m + l_n$ es el grado del polinomio t_n que sabemos que está acotado por $2m$, se sigue que

$$r_n(z) \xrightarrow{\text{Cap}} f(z) \quad \text{en } \Omega$$

Como consecuencia de un resultado obtenido por Gonchar en [64], la convergencia en capacidad implica la convergencia en compactos en D^* , garantizando además, que cada polo de f atrae tantos ceros de Q_n de acuerdo con su multiplicidad. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \lambda Q, \quad \lambda \neq 0, \quad (\text{III.3.7})$$

probando así el aserto 2 del teorema.

Una vez establecido lo anterior, es inmediato probar 1. En efecto, si E es un subconjunto compacto de D^* , existirán $\epsilon > 0$ y $\delta_j > 0$ ($j = 1, \dots, m$) tales que $E \subset \text{Int}(\Gamma_\epsilon)$ y, si denotamos por $U_j = D(p_j; \delta_j)$, se tiene que:

$$\left(\cup \overline{U_j}\right) \cap E = \emptyset \quad \text{y} \quad \overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset \quad \text{si } i \neq j.$$

Así, de (III.3.7), concluimos que para n suficientemente grande, todos los ceros de Q_n estarán en la unión de los $\overline{U_j}$ y, por tanto, existirá una constante $k(E) > 0$ tal que $|Q_n(z)Q(z)| \geq k(E), \forall z \in E$. Por consiguiente, aplicando nuevamente (III.3.6) se tiene:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|f - r_n\|_E^{1/n} \leq \exp\{-\tau(E)\} < 1.$$

■

Con respecto a este resultado de carácter bastante general, cabe hacer algunas observaciones. En primer lugar, el teorema hace referencia al uso de interpolantes racionales con polos parcialmente prefijados para recuperar a una función meromorfa en todo su dominio. La utilidad de interpolantes racionales con polos prefijados para

aproximar funciones holomorfas fue considerada exhaustivamente en el texto clásico de Walsh [137] y en algunos trabajos posteriores de Bagby [14, 15] y, más recientemente, en [8, 46, 71, 72] (éste último en conexión con fórmulas de cuadratura), entre otros. En cuanto a la aplicación (con polos parcialmente prefijados) para aproximar funciones meromorfas en un dominio, hay que destacar el trabajo de Gonchar [64], relativo al caso clásico de aproximación unipuntual. En el presente teorema el contexto es, en cierta medida, el más general posible. Además de utilizar aproximantes multipuntuales, correspondientes a esquemas de interpolación arbitrarios, el resultado es válido en abiertos de $\hat{\mathbb{C}}$ con un número finito de componentes conexas (siendo cada una de ellas regular con respecto al problema de Dirichlet). El hecho de permitir la no conexidad del abierto permite contemplar la aproximación simultánea de funciones distintas definidas en dominios disjuntos mediante una misma sucesión de funciones racionales, tema de interés en las aplicaciones y prácticamente no abordado hasta el momento, tal y como señala H. Stahl en [125]. En la literatura clásica, cabe citar como antecedentes, los artículos [58, 62], en los que se aborda la aproximación racional de funciones del tipo “signo” (que toman valores constantes distintos en compactos disjuntos).

En cada una de las componentes conexas de D , D_j ($j = 1, \dots, k$), la estimación de la ratio de convergencia viene dada por:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |(f - r_n)(z)|^{1/n} \leq \exp \{-p_j G_j(z; \alpha_j)\} < 1, \quad z \in D_j. \quad (\text{III.3.8})$$

La cota superior que figura en el miembro derecho de la desigualdad (III.3.8) es óptima. Para verlo más fácilmente, centrémonos en el caso en que D tiene una única componente conexa. En este caso, el miembro derecho de (III.3.8) vendría dado, simplemente por: $\exp \{-G(z; \alpha)\}$, donde $G(z; \alpha)$ denota el Potencial de Green de α en el dominio D . Esta cota superior se alcanza tomando como distribución asintótica de los polos, tal y como hemos visto, a α' , el balayage de α de D en el compacto ∂D . Sea, ahora, μ otra medida positiva unitaria soportada en $\mathbb{C} \setminus D$ (no necesariamente en ∂D). Entonces,

$V^{\alpha'} - V^\mu$ es una función armónica en D . Pero,

$$V^{\alpha'} - V^\mu = \left(V^{\alpha'} - V^\alpha \right) - (V^\mu - V^\alpha)$$

y como se tiene que

$$V^{\alpha'} - V^\alpha \equiv \gamma = \text{const. en } \partial D \text{ y } (V^\mu - V^\alpha)(z) \geq \inf_{t \in \partial D} (V^\mu - V^\alpha)(t), \text{ para } z \in \partial D,$$

obtenemos que

$$\left(V^{\alpha'} - V^\mu \right)(z) \leq \gamma - \inf_{t \in \partial D} (V^\mu - V^\alpha)(t), \text{ para } z \in \partial D,$$

y por la armonicidad, esto mismo es válido para $z \in D$. Por consiguiente,

$$\left(V^{\alpha'} - V^\alpha \right)(z) - \gamma \leq (V^\mu - V^\alpha)(z) - \inf_{t \in \partial D} (V^\mu - V^\alpha)(t), \forall z \in D,$$

haciendo uso de (III.3.5) se obtiene

$$-G_D(z; \alpha) \leq V^\mu(z) - V^\alpha(z) - \inf_{t \in \partial D} (V^\mu - V^\alpha)(t), \quad z \in D.$$

De esta forma, teniendo en cuenta el razonamiento aplicado en el teorema anterior (en base a la expresión integral del error) quedaría probada que la cota superior obtenida al tomar como distribución asintótica de polos a α' es óptima. Ciertamente, tal y como señalan Ambroladze y Wallin [8], no es estrictamente necesario tomar α' , pues basta considerar una medida μ soportada en $\hat{\mathbb{C}} \setminus D$ tal que su balayage μ' sobre ∂D coincida con α' (esta distinción tiene interés cuando el complementario de ∂D no es conexo; por ejemplo, cuando ∂D es una circunferencia). En efecto, en este caso, la cota superior anterior tomaría el mismo valor. Sin embargo, parece claro que la elección óptima es precisamente α' , ya que ésta “ dibuja ” con precisión la frontera ∂D del dominio de holomorfia (o meromorfia) de la función.

La existencia, para cada D_j ($j = 1, \dots, k$), de esquemas $\mathbb{B}^{(j)}$ cuya distribución asintótica coincida con el balayage de α'_j está garantizada: basta considerar los conjuntos de puntos de Fekete en ∂D_j correspondientes al peso $\omega = \exp(-Q)$, con el campo externo Q dado, en este caso, por $Q = -V^{\alpha_j}$ (ver [118, Theorem III.1.3]). En este sentido,

si ω es un peso admisible en un cerrado Σ , se dice que $\mathcal{F}_n = \{z_{1,n}, z_{2,n}, \dots, z_{n,n}\} \subset \Sigma$ es un conjunto de n puntos de Fekete con respecto a ω si el supremo:

$$\delta_n^\omega = \sup_{z_1, z_2, \dots, z_n} \left\{ \prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j| \omega(z_i) \omega(z_j) \right\}^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

se alcanza en \mathcal{F}_n . Bajo estas condiciones, en el citado teorema ([118, Theorem III.1.3]) se prueba que la sucesión de medidas contadoras normalizadas (unitarias) de los \mathcal{F}_n converge en la topología debil* a la medida de equilibrio de $\Sigma = \partial D_j$ con respecto al peso admisible ω , esto es,

$$\mu(\mathcal{F}_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{z_{j,n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{*} \alpha'_j.$$

De esta forma, combinando adecuadamente las tablas de Fekete para cada D_j , de acuerdo con los respectivos factores de ponderación p_j , obtendríamos el deseado esquema de polos \mathbb{B} . Pero si bien la existencia teórica de esquemas de polos que aseguren la convergencia está garantizada, otra cosa bien diferente es la posibilidad de computar de manera efectiva tales tablas. Esto nos lleva al problema de la discretización efectiva de una medida de equilibrio en un conjunto compacto, que constituye, fuera de algunos casos particulares bien conocidos, un problema esencialmente abierto.

En efecto, el problema planteado en su forma más general consistiría en discretizar una medida arbitraria μ (podemos suponer que es unitaria) en un compacto K de \mathbb{C} . No obstante, teniendo en cuenta que nuestro interés se centra en la aplicación a la interpolación racional, podemos ceñirnos al siguiente caso: Dado un dominio Ω en $\hat{\mathbb{C}}$ y una medida unitaria σ soportada en Ω , discretizar de forma efectiva la medida $\mu = \sigma'$, esto es, el balayage de σ de Ω en $\hat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. Sabemos que μ está soportada en $\partial\Omega = K$ y coincide, de hecho, con la distribución de equilibrio de K en presencia del campo externo creado por la carga unitaria negativa σ , esto es, $Q = V^{-\sigma}$. La complejidad de esta discretización efectiva es consecuencia, obviamente, de la combinación de dos factores: la complejidad de σ y el tipo de frontera K que tenga el compacto Ω .

Con respecto a la segunda de estas cuestiones, el caso más simple es aquel en que K consiste en un intervalo de la recta real. En efecto, al ser en este caso K polinomial-

mente convexo y con interior vacío, los polinomios ortogonales con respecto a medidas variantes proporcionan una respuesta positiva a nuestro problema. Así, si por ejemplo, $\mathbb{A} = \{a_{jn}, n \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, n\}$ es una tabla triangular infinita en Ω que se distribuye asintóticamente según σ , bastaría con tomar la tabla $\mathbb{T} = \{t_{jn}, n \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, n\}$ en K , de forma que para cada n , $T_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - t_{jn})$ sea el n -ésimo polinomio ortogonal con respecto a la medida σ_n , cuya densidad viene dada por: $\frac{\omega(x)}{|p_n(x)|^2}$, donde ω es cualquier función peso positiva en K y $p_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - a_{jn})$. Esta discretización de σ' ha sido usada en [34, 114], entre otros. Por tanto, en caso de que K sea un intervalo, podemos discretizar con cierta facilidad el balayage de σ , con independencia de la complejidad de esta medida. Sin embargo, si tomamos K algo más general (un arco o curva de Jordan), aunque el uso de polinomios ortogonales puede seguir resultando útil en algunos casos, en general el problema pasa a depender bastante de la complejidad de σ .

En este último sentido, si σ tiene un soporte discreto en Ω , esto es, $d\sigma = \sum_{j=1}^m \xi_j \delta_{a_j}$, con $a_j \in \Omega$, $\xi_j > 0$, $j = 1, \dots, m$ y $\sum_{j=1}^m \xi_j = 1$ (que se corresponde con un esquema de interpolación multipuntual con un número finito de nodos distintos, por ejemplo, el caso bipuntual del que nos ocupamos fundamentalmente en esta memoria), el problema se reduce básicamente a saber discretizar la medida de equilibrio (de Robin) ω_L siendo L un compacto. Teniendo en cuenta la invariancia del problema de equilibrio frente a transformaciones de Möbius, bastará considerar la familia de transformaciones $L_j(x) = \frac{x \cdot a_j + 1}{a_j + x}$, $j = 1, \dots, m$ y la correspondiente familia de compactos $E_j = L_j^{-1}(K)$. De esta forma, tomando $T_n(x) = \prod_{j=1}^m t_n^{(j)}(x)$, donde $t_n^{(j)}(x) = (x - a_j)^{n_j} \tilde{t}_n^{(j)}(L_j^{-1}(x))$ con $\tilde{t}_n^{(j)}$ el polinomio de grado n_j perteneciente a cualquier sucesión de polinomios mónicos extremales en E_j , eligiendo de forma adecuada n_j ($j = 1, \dots, m$) para que $\sum_{j=1}^m n_j = n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_j}{n} = \xi_j$ (siempre es posible), tendríamos resuelto el problema. Este es el enfoque empleado en las secciones previas a este capítulo para el caso bipuntual.

III.4 Aplicaciones a fórmulas de cuadratura

En esta última sección del capítulo obtendremos estimaciones de la velocidad de convergencia para fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorias exactas para L-polinomios (analizadas en el capítulo 2) cuando el integrando es analítico, gracias a la íntima relación existente entre éstas y los aproximantes tipo Padé bipuntuales. Como se expuso en las secciones anteriores, hemos obtenido resultados de convergencia usando aproximantes tipo Padé bipuntuales en dos situaciones distintas. Por un lado, cuando el esquema de interpolación está compactamente contenido en el dominio de holomorfía, y por otro, cuando los puntos forman parte de la frontera de dicho dominio. Con el fin de hacer que la lectura de esta sección tenga cierta independencia del resto de la memoria, introduciremos algunos conceptos necesarios.

Supongamos que pretendemos estimar

$$\int_a^b f(x)\omega(x) dx$$

con $0 \leq a < b \leq \infty$, siendo ω una función en general compleja de módulo integrable, verificando $\int_a^b x^k |\omega(x)| dx < \infty$, $k \in \mathbb{Z}$, y f una función tal que $f \cdot \omega$ sea integrable. Sabemos que existen $\{\lambda_{j,n}\}_{j=1}^n \subset \mathbb{C}$ y $\{x_{j,n}\}_{j=1}^n \subset [a, b]$: $x_i \neq x_j$ para $i \neq j$ (cuando $a = 0$ se exige que los $x_i \neq 0$) con los cuales podemos construir fórmulas de cuadratura del tipo

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} f(x_{j,n})$$

verificando

$$\int_a^b L(x)\omega(x)dx = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} L(x_{j,n}) \quad , \quad \forall L \in \Lambda_{-k,h} \quad , \quad (\text{III.4.1})$$

donde $\Lambda_{-k,h}$ es el siguiente subespacio n dimensional del espacio vectorial de los L-polinomios.

$$\Lambda_{-k,h} = \left\{ \sum_{j=-k}^{j=h} a_j x^j / a_j \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{con } k, h \in \mathbb{N} \text{ tal que } h + k = n - 1 .$$

Nuestro objetivo es estimar el error de estas fórmulas de cuadratura cuando el integrando es analítico en $[a, b]$, el cual denotaremos por $E_n(f)$. Se sigue que

$$E_n(f) = \int_a^b f(x) \omega(x) dx - \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} f(x_{j,n}), \quad (\text{III.4.2})$$

dato que f es analítica en $[a, b]$, podemos garantizar que existe una curva cerrada de Jordan Γ con el intervalo $[a, b]$ en su interior, para la cual se verifica:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(t)}{t-x} dt, \quad \forall x \in \text{Int}(\Gamma).$$

Al sustituir esta última igualdad en (III.4.2) y aplicar el Teorema de Fubini obtenemos que

$$\begin{aligned} E_n(f) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(t) \cdot \left(\int_a^b \frac{\omega(x)}{t-x} dx - \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} \frac{1}{t-x_{j,n}} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(t) \cdot \left(\hat{\omega}(t) - \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{j,n}}{t-x_{j,n}} \right) dt, \end{aligned} \quad (\text{III.4.3})$$

donde hemos denotado por $\hat{\omega}$ a la transformada de Cauchy de la medida $\omega(x)dx$.

A partir de la siguiente igualdad

$$\frac{1}{t-x} = \sum_{k=0}^m x^k \cdot \frac{1}{t^{k+1}} + \left(\frac{x}{t}\right)^{m+1} \cdot \frac{1}{t-x}, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

y de (III.4.1), obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}(t) - \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{j,n}}{t-x_{j,n}} &= \int_a^b \frac{\omega(x)}{t-x} dx - \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{j,n}}{t-x_{j,n}} \\ &= \sum_{j=0}^h \left(\int_a^b x^j \omega(x) dx \right) \cdot \frac{1}{t^{j+1}} - \sum_{j=0}^h \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} x_{j,n}^j \right) \cdot \frac{1}{t^{j+1}} \\ &\quad + \frac{1}{t^{h+1}} \cdot \int_a^b \frac{x^{h+1} \omega(x)}{t-x} dx - \frac{1}{t^{h+1}} \cdot \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} \frac{x_{j,n}^{h+1}}{t-x_{j,n}} \\ &= \sum_{j=0}^h E_n(x^j) \cdot \frac{1}{t^{j+1}} + E_n\left(\frac{x^{h+1}}{t-x}\right) \cdot \frac{1}{t^{h+1}} \\ &= E_n\left(\frac{x^{h+1}}{t-x}\right) \cdot \frac{1}{t^{h+1}} \end{aligned} \quad (\text{III.4.4})$$

por un argumento análogo, a partir de la igualdad:

$$\frac{1}{t-x} = -\sum_{j=0}^m \frac{1}{x^{j+1}} t^j + \left(\frac{t}{x}\right)^{m+1} \cdot \frac{1}{t-x}, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

y de (III.4.1) se tiene que:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}(t) - \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{j,n}}{t-x_{j,n}} &= \int_a^b \frac{\omega(x)}{t-x} dx - \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{j,n}}{t-x_{j,n}} \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \left(-\int_a^b \frac{\omega(x)}{x^{j+1}} dx \right) \cdot t^j - \sum_{j=0}^{k-1} \left(-\sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{j,n}}{x_{j,n}^{j+1}} \right) \cdot t^j \\ &\quad + t^k \cdot \int_a^b \frac{\omega(x)}{x^k \cdot (t-x)} dx - t^k \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{j,n}}{x_{j,n}^k \cdot (t-x_{j,n})} \\ &= -\sum_{j=0}^{k-1} E_n\left(\frac{1}{x^{j+1}}\right) \cdot t^j + E_n\left(\frac{1}{x^k \cdot (t-x)}\right) \cdot t^k \\ &= E_n\left(\frac{1}{x^k \cdot (t-x)}\right) \cdot t^k. \end{aligned} \tag{III.4.5}$$

Así de (III.4.4) y de (III.4.5), tenemos que $\sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{j,n}}{t-x_{j,n}}$ es el aproximante tipo Padé bipuntual $(k/n)_{\hat{\omega}}$ de la función $\hat{\omega}$. Si denotamos al error del ATP2 por $E_{(k,n)}$, entonces de (III.4.3) podemos concluir que:

$$E_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(t) E_{(k,n)}(t) dt$$

y, por tanto,

$$|E_n(f)| \leq \|f\|_{\Gamma} \cdot \max_{t \in \Gamma} |E_{(k,n)}(t)|.$$

Ahora, haciendo uso del corolario III.1.1 de la página 137, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario III.4.1 *Sea $0 < a < b < \infty$ y $\{I_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de fórmulas de cuadratura de tipo interpolatoria exacta en $\Lambda_{-k(n), h(n)}$, donde $\{k(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{h(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ son dos sucesiones monótonas crecientes de enteros no negativos, verificando $k(n) +$*

$h(n) = n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = \theta \in [0, 1]$, cuyos nodos son los ceros de Q_n , donde Q_n es el n -ésimo polinomio ortogonal con respecto a la función peso $\frac{p(x)}{x^{2k(n)}}$, siendo p cualquier función integrable y positiva en casi todo punto. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = \int_a^b f(x) \omega(x) dx$$

para toda función holomorfa en un entorno de $[a, b]$. Además, la convergencia es geométrica, teniéndose la siguiente estimación para la velocidad:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |E_n(f)|^{\frac{1}{n}} \leq e^{-\rho(f)},$$

con $\rho(f) = \max \{ \rho > 0 / f \text{ es holomorfa en } \Omega_\rho \}$ donde $\Omega_\rho = \{ z \in \hat{\mathbb{C}} / G_{[a,b]}(z; \nu) \leq \rho \}$ siendo $G_{[a,b]}(z; \nu)$ el potencial de Green para la medida $d\nu = \theta \delta_0 + (1 - \theta) \delta_\infty$ en el intervalo $[a, b]$.

En la situación $[a, b] = [0, \infty)$ debemos imponer ciertas limitaciones para las funciones peso ω y p . A partir del corolario III.2.1 de la página 157, podemos obtener el siguiente resultado.

Corolario III.4.2 Cuando $a = 0$ y $b = \infty$, en las hipótesis del corolario anterior debemos exigir además que p tenga la siguiente forma:

$$p(x) = x^\nu e^{-\tau(x)}, \quad x \in (0, \infty),$$

con $\nu \in \mathbb{R}$ y donde τ es una función continua en $(0, \infty)$, tal que existen $\gamma > \frac{1}{2}$ y $s > 0$ satisfaciendo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (sx)^\gamma \tau(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\tau(x)}{(sx)^\gamma} = A > 0,$$

y que ω satisfaga:

$$\int_0^\infty \frac{|\omega(x)|^2}{\mu'(x)} dx = K < \infty.$$

Entonces, se tiene que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(f) = \int_0^\infty f(x) \omega(x) dx,$$

para toda función holomorfa en un entorno de $[0, \infty]$ y además, la convergencia es geométrica con la siguiente estimación:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |E_n(f)|^{\frac{1}{(2n)^r}} \leq e^{-D(2\gamma)} \left[(1-\theta)^{1-\frac{1}{2\gamma}} \mathfrak{S}(\sqrt{sz}) + \theta^{1-\frac{1}{2\gamma}} \mathfrak{S}\left(\sqrt{\frac{1}{sz}}\right) \right] \quad \text{en } \mathbb{D},$$

donde $r = 1 - \frac{1}{2\gamma}$ y $D(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{\lambda+1}{2})}{\Gamma(\frac{\lambda}{2})} \right\}^{\frac{1}{\lambda}}$.

Conclusiones y problemas abiertos

A lo largo de la presente memoria, hemos abordado un conjunto de problemas relativos al binomio interpolación racional - fórmulas de cuadratura, deteniéndonos de forma especial en el estudio de interpolantes racionales con polos total o parcialmente prefijados (Aproximantes tipo-Padé) y en las correspondientes fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio (con nodos prefijados). Dentro de este amplio campo de trabajo, nos hemos centrado, de manera muy particular, en los resultados correspondientes a interpolación racional bipuntual (Aproximantes tipo-Padé en dos puntos, sin pérdida de generalidad, el origen y el punto del infinito) y en sus análogos en el terreno de la integración numérica, esto es, las fórmulas de cuadratura exactas en ciertos subespacios de Polinomios de Laurent (L-polinomios).

Para estos problemas, se presentan resultados tanto para el caso “clásico” o acotado como para el “no clásico”, y se pone un especial énfasis en proporcionar elecciones de polos (de los interpolantes racionales) o nodos (de las fórmulas de cuadratura) de fácil computación.

Pese a que nuestra modesta aspiración es presentar un abanico relativamente amplio de resultados (Capítulos II y III), así como un compendio previo que sirva de guía y de referencia para adentrar adecuadamente al lector en la materia (Capítulo I), es evidente que muchos temas relacionados con los aquí expuestos han quedado fuera de esta memoria, por limitaciones de espacio y tiempo, y habrán de ser objeto de futuros trabajos. Permítasenos exponer de forma sucinta algunos de los más destacados.

1. Aproximantes tipo-Padé y problema indeterminado de momentos.

En los capítulos anteriores, al considerar el uso de ATP o ATP2 para proporcionar sucesiones de interpolantes racionales convergentes en el caso no clásico (funciones meromorfas de tipo Stieltjes, interpolando en los extremos del intervalo $[0, \infty)$, para medidas μ en general complejas, hemos mantenido, no obstante, el requisito de que el problema de momentos para μ sea determinado. Sin embargo, surge de manera natural un importante interrogante: ¿puede suprimirse este requisito?, esto es, ¿podría darse la convergencia de sucesiones de ATP aunque el problema de momentos estuviese indeterminado?.

En la literatura clásica, los primeros ejemplos de problema indeterminado de momentos fueron proporcionados por T. Stieltjes, quién en [128] probó que la familia de funciones peso:

$$\omega_\lambda(x) = x^{-\log x} (1 + \lambda \sin(2\pi \log x)) \quad , \quad \text{para } \lambda \in [-1, 1]$$

tienen la misma sucesión de momentos. Es bien conocido que la condición de Carleman es suficiente para la determinación del problema de momentos, en tanto que, en sentido contrario, el Teorema de Krein (ver [86]) proporciona una condición suficiente para garantizar la indeterminación. Con posterioridad al trabajo de Stieltjes, pero también basándose en el estudio de ciertas fracciones continuas, Hamburger (ver [75]) extendió el estudio de Stieltjes de $[0, +\infty)$ a \mathbb{R} . Trabajos posteriores de autores como Riesz o Nevanlinna han enfocado esta teoría desde el punto de vista del análisis funcional y la teoría de funciones.

Stieltjes, en su trabajo original [128], comprobó que los convergentes de ciertas fracciones continuas (es decir, los Aproximantes de Padé), bajo ciertas condiciones (relativas a la indeterminación del problema de momentos) no convergían a una única función. De hecho, estableció la existencia de diferentes límites en $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty]$, para las subsucesiones de índice par e impar de los AP.

De todo lo dicho, se desprende el interés por estudiar en qué medida el uso de ATP (o ATP2, en el contexto del problema fuerte de momentos) puede contribuir a “resolver

” el problema indeterminado de momentos, eligiendo una sola del conjunto de funciones de Stieltjes cuyas medidas asociadas comparten la misma sucesión de momentos.

2. Fórmulas de cuadratura interpolatorias con nodos parcialmente prefijados y cuadraturas de tipo Turán.

De forma análoga al estudio de interpolantes racionales con polos parcialmente prefijados, objeto de buena parte de esta memoria, es interesante plantear en un contexto más amplio, el análisis de fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio con nodos parcialmente prefijados. La motivación para el uso de este tipo de fórmulas de cuadratura es variada; quizás, la utilidad más frecuente sea la de intentar adaptar el esquema de nodos a las particularidades del integrando. En este sentido, por ejemplo, si estamos integrando la función $f(x) = |x|$ en el intervalo $[-1, 1]$ puede resultar conveniente utilizar más nodos cerca del origen, donde se produce un “pico” de la función.

El problema, planteado en un contexto bastante general, podría enunciarse de la siguiente forma: Construir fórmulas de cuadratura interpolatorias del mayor grado de precisión posible (entendiendo por tal a la capacidad de integrar exactamente ciertas funciones básicas, como polinomios, polinomios de Laurent o funciones racionales), en el supuesto de que para cada $n \in \mathbb{N}$, una cantidad $m(n) \leq n$ de nodos (posiblemente creciente con n) estén prefijados de antemano. Este planteamiento general conlleva un serio problema: el hecho de prefijar parte de los nodos implica que para garantizar el mayor grado de precisión posible, los restantes nodos habrán de ser los ceros del polinomio ortogonal con respecto a la medida inicial μ modificada por el polinomio nodal correspondiente a los nodos prefijados, esto es:

$$d\mu_n(x) = t_{m(n)}(x)d\mu(x) \quad , \quad \text{con} \quad t_{m(n)}(x) = \prod_{j=1}^{m(n)} (x - \xi_j) \quad ,$$

siendo ξ_j ($j = 1, \dots, m(n)$) los nodos prefijados.

A la vista de esto, en base a la no positividad de $d\mu_n$, surgen de forma natural ciertos interrogantes:

- ¿Estarán los nuevos $n - m(n)$ nodos en $[-1, 1]$?

- ¿ Serán estos nuevos nodos simples?
- ¿ Podrá coincidir alguno de estos nuevos nodos con alguno de los anteriormente prefijados? Con carácter general, es imposible dar respuesta definitivas a estos tres interrogantes, debiendo conformarnos hasta la fecha con algunas respuestas parciales.

Llegados a este punto, es conveniente revisar algunos aspectos relacionados con este tema que han sido tratados en la literatura hasta el momento actual.

- Destacamos, en primer lugar unos trabajos de G. López Lagomasino y F. Cala Rodríguez (ver [38, 39]) en los que se persigue, como objetivo fundamental, obtener ratios exactas de convergencia para los correspondientes ATPM con polos parcialmente prefijados (deduciéndose, como simples corolarios, las correspondientes estimaciones para las fórmulas de cuadratura asociadas). Sin embargo, desde nuestro punto de vista, este enfoque presenta ciertas limitaciones. En primer lugar, para preservar la positividad de las medidas variantes, se impone que los nodos prefijados en el interior del intervalo sean dobles (lo cual, además, obliga a considerar cuadraturas de tipo Turán, es decir, combinaciones lineales no sólo de valores funcionales sino también de derivadas). En segundo lugar, el afán por proporcionar ratios exactas para los ATPM les lleva a limitar considerablemente la generalidad de la distribución asintótica de los polos prefijados.
- Otro enfoque interesante es el que se desprende de una serie de artículos de T. Bloom, D.S. Lubinsky y H. Stahl, cuyo objetivo inicial es caracterizar fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio que sean convergentes en el espacio de las funciones continuas en el intervalo (ver [25, 26, 27]). De aquí se deduce una sencilla vía, utilizando polinomios ortogonales variantes, para prefijar con total arbitrariedad la distribución asintótica de parte de los nodos de integración (aunque no permita prefijar, por supuesto, nodos

simples).

- Otro tema relacionado con nuestro problema es el de las denominadas fórmulas de cuadratura de Gauss-Kronrod. Este esquema de cuadratura, muy usado en la práctica, surge como alternativa computacional a las usuales reglas gaussianas. En síntesis, partiendo de una función peso ω positiva en $[-1, 1]$, tomamos los $2n + 1$ nodos de la fórmula de cuadratura I_{2n+1} de la siguiente forma:

- * n nodos son los correspondientes ceros del n -ésimo polinomio ortogonal P_n con respecto a ω (esto es, los nodos de la fórmula gaussiana I_n).
- * los restantes $n + 1$ nodos son los ceros del correspondiente polinomio de Stieltjes E_{n+1} , es decir, el $(n + 1)$ -ésimo polinomio ortogonal con respecto al peso (de signo variable) $\omega_n = P_n \cdot \omega$.

En su trabajo original, Kronrod (ver [87]), para el caso particular de la función peso de Legendre, $\omega \equiv 1$, probó que los ceros de E_{n+1} son simples y pertenecientes a $(-1, 1)$ y, además, se “entrelazan” con los de P_n ; teniéndose que los correspondientes pesos de la fórmula de cuadratura son positivos (lo cual garantiza la estabilidad numérica del método, así como la convergencia para funciones integrables). Trabajos posteriores de autores como S. Ehrlich, W. Gautschi, S. Notaris y F. Peherstorfer, han estudiado la posibilidad de extender este método para otras funciones peso, proporcionando asimismo diferentes estimaciones del error (véase, por ejemplo, [53, 105, 108]). No obstante, hasta ahora, la validez de estas propiedades “deseables” del esquema de Gauss-Kronrod sólo ha podido extenderse para tipos concretos de familias (modificaciones de la función peso de Chebyshev, funciones peso de tipo ultrasférico, ...).

- Otro tema de interés en si mismo, y estrechamente relacionado con el uso de fórmulas de cuadratura con nodos parcialmente prefijados, es el de las

anteriormente citadas cuadraturas de tipo Turán (que involucran valores de las derivadas de la función en los nodos, véase por ejemplo [119]). Evidentemente, este problema está vinculado con el estudio de la convergencia en procesos de interpolación de Hermite y Hermite-Fejer. No obstante, y al igual que en el apartado anterior, la mayor parte de los resultados positivos hasta la fecha se restringen al uso de familias particulares de nodos, como las asociadas a funciones peso de tipo-Jacobi generalizadas (véase al respecto el excelente tratado de Szabados y Vertesi [130]).

3. Fórmulas de cuadratura racionales para medidas complejas.

La aproximación de Padé multipuntual a Funciones de Markov está estrechamente vinculada al uso de fórmulas de cuadratura exactas en ciertos espacios de funciones racionales, tal y como puede verse en [68, 76]. Por ejemplo, si μ es una medida positiva de Borel soportada en $[-1, 1]$, y consideramos un esquema triangular infinito de puntos: $\mathbb{A} = \{a_{jn}, n \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, n\}$ compactamente contenido en $\hat{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$ y simétrico con respecto a \mathbb{R} (esto es, tal que $\mathbb{A}_n = \overline{\mathbb{A}_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\mathbb{A}_n = \{a_{jn}, j = 1, \dots, n\}$), entonces se verifica:

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el Aproximante de Padé multipuntual de $\hat{\mu}(z) = \int \frac{d\mu(x)}{z-x}$ correspondiente al esquema \mathbb{A} viene dado por:

$$[n - 1/n]_{\hat{\mu}}(z) = \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)}, \text{ siendo } Q_n \text{ el } n\text{-ésimo polinomio ortogonal con respecto}$$

a la medida variante $d\mu_n(x) = \frac{d\mu(x)}{W_{2n}(x)}$, con $W_{2n}(x) = \prod_{j=1}^{2n} (x - a_{jn})$.

2. La sucesión $\{[n - 1/n]_{\hat{\mu}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a $\hat{\mu}$ en compactos de $\hat{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$; teniéndose además que si la tabla \mathbb{A} se distribuye asintóticamente de acuerdo con una medida α de soporte compactamente contenido en $\hat{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$, la velocidad de convergencia será al menos geométrica, teniéndose que:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|\hat{\mu} - [n - 1/n]_{\hat{\mu}}\|_{\infty, K}^{1/2n} \leq \exp\{-\tau(K)\} < 1, \quad (\text{III.4.6})$$

para todo K compacto en $\hat{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$, donde $\tau(K) = \min_{t \in K} G_{\Omega}(t; \alpha)$ es el correspondiente Potencial de Green de α en $\Omega = \hat{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$.

Al igual que los Aproximantes de Padé “ clásicos ” (unipuntuales en infinito) están asociados a las Fórmulas de cuadratura gaussianas, exactas en subespacios maximales de polinomios, y los Aproximantes de Padé bipuntuales a las correspondientes Fórmulas de cuadratura exactas en subespacios maximales de L-polinomios, los AP multipuntuales llevan aparejadas familias de Fórmulas de cuadratura exactas en ciertos subespacios de funciones racionales con denominadores prefijados. Así, como puede verse en [76], por ejemplo, si denotamos por $\{x_j\}_{j=1}^n$ y $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$, respectivamente, a los ceros de Q_n y a los coeficientes de la descomposición en fracciones simples de $[n-1/n]_{\hat{\mu}}$, esto es, $[n-1/n]_{\hat{\mu}}(z) = \frac{P_{n-1}(z)}{Q_n(z)} = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{z - x_j}$, se tiene que:

$$\int F(x) d\mu(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j F(x_j)$$

para toda función racional F de la forma: $F(x) = \frac{P(x)}{W_{2n}(x)}$, con $P \in \Pi_{2n-1}$. Además, en estas condiciones puede garantizarse la convergencia de la sucesión de fórmulas de cuadratura gaussianas $I_n(F) = \sum_{j=1}^n \lambda_j F(x_j)$ para todo integrando F Riemann-Stieltjes integrable con respecto a $d\mu$. En el caso de integrandos F analíticos en un entorno de $[-1, 1]$, la convergencia es geométrica, y una estimación de la ratio puede obtenerse fácilmente aplicando (III.4.6).

De lo anterior se desprende que es esencial que la medida μ sea positiva, así como que el esquema de interpolación \mathbb{A} sea simétrico, para garantizar que para cada $n \in \mathbb{N}$ la correspondiente medida $d\mu_n$ sea positiva, por tanto, los polos del APM (nodos de la FC) son simples y pertenecen al intervalo $(-1, 1)$. Pero, ¿qué podemos hacer si la medida es compleja?. En la presente memoria hemos dado respuestas parciales a este problema, sobre todo en lo relativo al caso bipuntual, mediante el uso de Aproximantes tipo-Padé o de fórmulas de cuadratura interpolatorias (prefijando adecuadamente los polos/nodos). Pero, ¿existen medidas complejas “ admisibles ”, en el sentido de que para un $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, los ceros de los correspondientes polinomios

ortogonales tengan grado exactamente igual a n y sus ceros sean simples, y además se acumulen asintóticamente en $[-1, 1]$?. Un paso decisivo en la búsqueda de respuestas positivas a este problema (para el caso unipuntual clásico, de AP en el ∞) lo dio A. Magnus [98] al probar que la clase de medidas μ tales que: $d\mu(x) = \omega(x)dx$, con $\omega = p \cdot g$ siendo $p > 0$ a.e. en $[-1, 1]$ y $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua que no se anula en $[-1, 1]$, satisface dichas condiciones. En trabajos posteriores, se han producido otras extensiones de este tipo (clase de Nevai-Blumenthal compleja), en algunos casos haciendo uso de la teoría espectral para perturbaciones compactas de operadores (véase, por ejemplo, [21, 22, 95]).

Nuestro objetivo es extender estos resultados al caso de la aproximación multipuntual (o lo que es análogo, a las fórmulas de cuadratura gaussianas racionales). En este sentido, estudiaremos medidas complejas μ tales que sus correspondientes medidas variantes (ante un esquema de interpolación simétrico, como antes) verifiquen las propiedades deseadas.

4. Aproximantes de Padé en dos puntos matriciales.

En los últimos años conceptos escalares tales como polinomios ortogonales, fracciones continuas, funciones de Markov, aproximantes de Padé unipuntuales, e.t.c., han sido llevados a través de diversas extensiones y generalizaciones al campo matricial (véase al respecto los trabajos recientes de A. Durán [50, 51] y Pedro López [97] entre otros, además de las referencias allí citadas). Por otro lado, el concepto de Aproximante de Padé (y tipo Padé) bipuntual ha sido extendido por A. Draux (ver [49]) al contexto de una álgebra no conmutativa. No obstante, consideramos que el caso concreto del álgebra de las matrices de un determinado orden ofrece amplias posibilidades de estudio. En tal sentido, sólo conocemos la referencia [70] donde se establece una primera relación entre ciertos polinomios ortogonales de Laurent matriciales y los correspondientes Aproximantes de Padé en dos puntos. Al respecto consideramos fundamental, como un primer paso, sería establecer la “contrapartida” matricial del llamado “PROBLEMA FUERTE DE MOMENTOS” introducido en el caso escalar por Jones, Thron

y Waadeland en 1980 (ver [78]), el cual puede enunciarse en los términos siguientes, (Problema de Stieltjes): “ Dada una sucesión doblemente infinita $\mathcal{C} = \{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de matrices hermitianas de orden p con entradas complejas, encontrar una función matricial σ definida en $(0, \infty)$ simétrica y no decreciente (es decir, la matriz $\sigma(x_1) - \sigma(x_2)$ es definida no negativa si $x_1 > x_2$) de forma que:

$$C_k = \int_0^\infty x^k d\sigma(x) \quad ; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

5. Convergencia en norma L_p de sucesiones de polinomios de Laurent interpolantes.

Sea ω una función peso en $[a, b]$ ($0 \leq a < b \leq +\infty$) de forma que los momentos

$$c_k = \int_a^b x^k \omega(x) dx$$

existen para todo entero k . Al igual que en el caso polinómico, el estudio de la convergencia de las fórmulas de cuadratura $\{I_n(f)\}_{n \in \mathbb{N}}$ dadas por $I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} f(x_{j,n})$ asociadas a $I_\omega(f) = \int_a^b f(x) \cdot \omega(x) dx$, de forma que $I_\omega(L) = I_n(L) \quad \forall L \in \Lambda_{-p,q}$ ($p+q = n-1$), da lugar al problema de analizar la convergencia de sucesiones de polinomios de Laurent interpolantes en los nodos de la fórmula de cuadratura. Ya que como se ha visto en el Capítulo II,

$$I_\omega(f) - I_n(f) = \int_a^b (f(x) - L_n(f, x)) \omega(x) dx$$

siendo $L_n(f, \cdot) \in \Lambda_{-p,q}$ y tal que $L_n(f, x_{j,n}) = f(x_{j,n})$, $j = 1, 2, \dots, n$. Esto claramente motiva el planteamiento de la siguiente cuestión.

¿Para qué funciones peso ω y valores de $p > 1$ se cumple que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - L_n(f, x)|^p \omega(x) dx = 0$$

siendo $\{x_{j,n}\}_{j=1}^n$ $n = 1, 2, \dots$ los ceros de ciertos polinomios de Laurent ortogonales y f en una clase de funciones lo más amplia posible?

Obsérvese que el caso $b < +\infty$ y $p = 2$ fue estudiado en el capítulo II (teorema de tipo Erdős-Turán).

6. Aproximantes de Padé bipuntuales y fórmulas de cuadratura para funciones pesos con propiedades de simetría.

En la memoria presente se ha hecho un estudio genérico desde el punto de vista de la convergencia, tanto de fórmulas de cuadratura exactas en subespacios de los polinomios de Laurent, así como de las correspondientes sucesiones de aproximantes bipuntuales. En tal sentido creemos interesante caracterizar tanto las fórmulas de cuadratura como los aproximantes bipuntuales cuando la función peso satisface ciertas propiedades de simetría introducidas por A. Sri Ranga y otros en ([28]), a saber:

$$t^{1-p}\omega(t) = \left(\frac{\beta^2}{t}\right)^{1-p} \omega\left(\frac{\beta^2}{t}\right) \quad t \in (a, b) \quad (\text{III.4.7})$$

con $0 < \beta < b \leq \infty$, $a = \frac{\beta^2}{b}$ y $2p \in \mathbb{Z}$. Téngase en cuenta que la conocida “distribución log-normal generalizada” de gran importancia en ciertos problemas de predicción meteorológica,

$$d\psi_r(t) = \frac{\sqrt{q}}{2\lambda\sqrt{\pi}} \cdot t^r \exp\left[-\left(\frac{\ln(t)}{2\lambda}\right)^2\right] dt \quad t \in (0, \infty)$$

siendo $q = e^{-2\lambda^2}$, satisface (III.4.7) con $\beta = q^{p-r-1}$.

Al respecto conviene indicar que en los trabajos [47, 48] hemos abordado ya dicho problema para el caso particular de $p = \frac{1}{2}$, con resultados positivos.

7. Aproximantes de Padé simultáneos.

Durante las pasadas décadas, los llamados polinomios ortogonales múltiples se han convertido en un tópico de investigación muy importante, especialmente en la Europa Occidental. Al respecto, véanse por ejemplo los trabajos de Aptekarev [11], de Bruin [43] o el capítulo 4 del monográfico de Nikishin y Sorokin [103]. Tales polinomios están íntimamente relacionados con los llamados Aproximantes de Padé simultáneos, también conocidos hoy en día como APROXIMANTES DE HERMITE PADÉ.

Así supongamos dadas r funciones de Markov,

$$\begin{aligned} \mu_1(z) &= \int_{\Delta_1} \frac{d\mu_1(x)}{z-x} ; z \in \Delta_1 \\ \mu_2(z) &= \int_{\Delta_2} \frac{d\mu_2(x)}{z-x} ; z \in \Delta_2 \\ &\vdots \\ \mu_r(z) &= \int_{\Delta_r} \frac{d\mu_r(x)}{z-x} ; z \in \Delta_r , \end{aligned}$$

entonces, se trata de encontrar funciones que aproximen “ simultáneamente ” a estas r funciones de modo que la aproximación tenga un orden dado en el infinito. Utilizando la notación vectorial para r naturales n_1, n_2, \dots, n_r ; $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots, n_r)$ y $|\vec{n}| = n_1 + n_2 + \dots + n_r$, así como la terminología usada por Van Assche [134], la Aproximación de Hermite Padé “ Tipo I ” consiste en encontrar un vector de polinomios $(Q_{\vec{n},1}, Q_{\vec{n},2}, \dots, Q_{\vec{n},r})$ y un polinomio $P_{\vec{n}}$ tal que el grado de $Q_{\vec{n},j}$ sea menor o igual que $n_j - 1$, verificando:

$$(Q_{\vec{n},1} \cdot \mu_1 + Q_{\vec{n},2} \cdot \mu_2 + \dots + Q_{\vec{n},r} \cdot \mu_r)(z) - P_{\vec{n}}(z) = O\left(\frac{1}{z^{|\vec{n}|}}\right) \quad z \rightarrow \infty \quad \text{(III.4.8)}$$

Por otro lado, en la aproximación de Hermite-Padé “ tipo II ” se trata de encontrar un polinomio $Q_{\vec{n}}$ de grado $|\vec{n}|$ y polinomios $P_{\vec{n},1}, P_{\vec{n},2}, \dots, P_{\vec{n},r}$ de grado a lo sumo $|n| - 1$ tales que:

$$\begin{aligned} Q_{\vec{n}}(z)\mu_1(z) - P_{\vec{n},1}(z) &= O\left(\frac{1}{z^{n_1+1}}\right) \quad z \rightarrow \infty \\ Q_{\vec{n}}(z)\mu_2(z) - P_{\vec{n},2}(z) &= O\left(\frac{1}{z^{n_2+1}}\right) \quad z \rightarrow \infty \\ &\vdots \\ Q_{\vec{n}}(z)\mu_r(z) - P_{\vec{n},r}(z) &= O\left(\frac{1}{z^{n_r+1}}\right) \quad z \rightarrow \infty . \end{aligned} \quad \text{(III.4.9)}$$

Si suponemos que las medidas μ_j , $j = 1, 2, \dots, r$ admiten momentos positivos y negativos, esto es, las integrales

$$c_k^j = \int_{\Delta_j} x^k d\mu_j(x) < \infty \quad , \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad j = 1, 2, \dots, r ,$$

entonces las correspondientes funciones de Markov presentan desarrollos en series en el infinito y en el origen. Cabría, pues, plantearse la construcción del aproximante de

Hermite Padé bipuntuales bien del “ tipo I ” o del “ Tipo II ” repartiendo condiciones del tipo (III.4.8) y (III.4.9) tanto en el infinito como en el origen, respectivamente. Ello se traduce en el estudio de sucesiones de polinomios ortogonales de Laurent múltiples.

Bibliografía

- [1] Abramowitz, M. y Stengun, I. A., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York, 1972.
- [2] Achiezer, N. I., *Theory of approximation*, Ungar, New York, 1992.
- [3] Alden, E., *A survey of weak and strong moment problems with generalizations*, Dept. Math. Univ. Umeå, 1985.
- [4] Ambroladze, A. y Wallin, H., *Approximation by repeated Padé approximants*, J. Comput. Appl. Math. **62** (1995), 353-358.
- [5] Ambroladze, A. y Wallin, H., *Convergence Rates of Padé and Padé-type approximants*, J. Approx. Theory **86** (1996), 310-319.
- [6] Ambroladze, A. y Wallin, H., *Padé-type approximants of Markov and meromorphic functions*, J. Approx. Theory **88** (1997), 354-369.
- [7] Ambroladze, A. y Wallin, H., *Convergence of rational interpolants with preassigned poles*, J. Approx. Theory **89** (1997), 238 - 256.
- [8] Ambroladze, A. y Wallin, H., *Rational interpolats with prescribed poles, theory and practice*, Complex Variables **34** (1997), 399-413.
- [9] Ambroladze, A. y Wallin, H., *Rational interpolats with preassigned poles, theoretical aspects*, manuscrito.
- [10] Ambroladze, A. y Wallin, H., *Extremal polynomials with preassigned zeros and rational approximants*, Constr. Approx. **14** (1998), 209-229.

- [11] Aptekarev, A. J., *Multiple orthogonal polynomials*, J. Compt. Appl. Math. **99** (1998), 423-447.
- [12] Arms, R. J. y Edrei, A., *The Padé table and continued fractions generated by totally positive sequences*, in: Mathematical Essays dedicated to A. J. Mancintyre, Ohio Press, Athens, Ohio (1970), 1-21.
- [13] Bagby, T., *The modulus of a plane condenser*, J. Math. Mec. **17** (1967), 315-330.
- [14] Bagby, T., *On interpolation by rational function*, Duke Math J. **36** (1969), 95-104.
- [15] Bagby, T., *Rational interpolation with restricted poles*, J. Approx. Theory **7** (1973), 1-7.
- [16] Baker, G. A., *Advances in theoretical Physics*, (K. A. Brueckner, ed.) v. **1**, Academic Press, New York (1965), 1-58.
- [17] Baker, G. A., *The Padé approximant in theoretical Physics*, (G. A. Baker and J. L. Gammel, eds.) Academic Express, New York (1970), 1-39.
- [18] Baker, G. A., *Essentials of Padé approximants*, Academic Press, 1975.
- [19] Baker, G. A. y Graves-Morris, P. R., *Convergence of rows of the Padé table*, J. Math. Anal. Appl. **57** (1977), 323-339.
- [20] Baker, G. A. y Graves-Morris, P. R., *Padé approximants, Part I and II*, Encycl. of Math. Vol. **13** and **14**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981.
- [21] Barrios, D. López Lagomasino, G. y Torrano, E., *Distribution of zeros and the asymptotics of polynomials that satisfy three-term recurrent relations with complex coefficients*, Math USSR Sb. **184** No 11 (1993), 63-93.
- [22] Barrios, D., López Lagomasino, G., Martínez Finkelshtein, A. y Torrano, E., *On the domain of convergence and poles of complex J-fractions*, J. Approx. Theory **93** (1998), 177-200.

- [23] Beardon, A. F., *The convergence of Padé approximants*, J. Math. Anal. Appl. **21** (1968), 344-346.
- [24] Bello Hernández, M., Cala Rodríguez, F., Guadalupe, J. J. y López Lagomasino, G., *Convergence rate of Padé-type approximants for Stieltjes functions*, J. Comput. Appl. Math. **99** (1998), 47-54.
- [25] Bloom, T., Lubinsky, D. S. y Stahl, H., *Interpolatory integration rules and orthogonal polynomials with varying weights*, Numerical Algorithms **3** (1992), 55-66.
- [26] Bloom, T., Lubinsky, D. S y Stahl, H., *What distributions of points are possible for convergence sequences of interpolatory integration rules?*, Constr. Approx. **9** (1993), 41-58.
- [27] Bloom, T., Lubinsky, D. S y Stahl, H., *Distribution of points for convergent, interpolatory integration rules on $(-\infty, +\infty)$* , Constr. Approx. **9** (1993), 59-82.
- [28] Bracciali, C. F., Mc Cabe, J. H. y Ranga, A. S., *On a symmetry in strong distributions*, J. Comput. Appl. Math. **105** (1999), 187-198.
- [29] Brezinski, C., *A bibliography of Padé approximation and some matters*, Lect. Notes in Physics, v. **47** , Springer-Verlag, Berlin and New York, (1977), 245-267.
- [30] Brezinski, C., *Padé-type approximation and general orthogonal polynomials*, Birkhäuser-Verlag, Berlin, 1980.
- [31] Brezinski, C., *The long history of continued fractions and Padé approximants*, in “ Padé approximation and its applications. Ansterdan 1980 ”, M.G. de Bruin and H. Van Rossum eds., Lect. Notes in Math. v. **888**, Springer-Verlag, 1981.
- [32] Bultheel, A., González-Vera, P., y Orive, R., *Quadrature on the half line and two-point Padé approximants to Stieltjes functions. Part I. Algebraic aspects*, J. Comput. Appl. Math. **65** (1995), 57-72.

- [33] Bultheel, A., Díaz-Mendoza, C., González-Vera, P. y Orive, R., *On the convergence of certain Gauss-Type quadrature formulas for unbounded intervals*, Math. Comp. **69** (2000), 721-747.
- [34] Bultheel, A., Díaz-Mendoza, C., González-Vera, P., y Orive, R., *Quadrature on the half line and two-point Padé approximants to Stieltjes functions. Part-II. Convergence*, J. Comput. Appl. Math. **77** (1997), 53-76.
- [35] Bultheel, A., Díaz-Mendoza, C., González-Vera, P., y Orive, R., *Quadrature on the half line and two-point Padé approximants to Stieltjes functions. Part III. The unbounded case*, J. Comput. Appl. Math. **87** (1997), 95-117.
- [36] Buslaev, V. I., Gonchar, A. A. y Suetin, S. P., *On convergence of subsequences of the m -th row of a Padé table*, Math. USSR Sb. **48** No 2 (1984), 535-540.
- [37] Cala, F., *Multipoint rational approximants with peassigned poles*, Dept. Math., Univ. Umeå, Research reports **4** (1997).
- [38] Cala, F. y López Lagomasino, G., *From Padé to Padé-type approximants. Exact rate of convergence*, (Proc. Second Int. Conf. Approx. and Opt. in the Caribbean; M. Florenzano et al., eds.), Peter Lang Series in Approx. and Opt., (1995), 155-163.
- [39] Cala, F. y López Lagomasino, G., *Multipoint Padé-type approximants. Exact rate of convergence*, Constr. Approx. **14** (1998), 259-272.
- [40] Carleman T., *Les fonctions quasi-analytiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.
- [41] Cheney, E. W., *Introduction to approximation theory*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [42] Davis, P. J. y Rabinowitz, P., *Methods of numerical integration*, 2nd. ed., Academic press, New York, 1984.

- [43] De Bruin, M. G., *Simultaneous Padé approximants and orthogonality*, “ Polynômes orthogonaux et applications ”, (C. Brezinski et al. eds.), Lecture Notes in Math. **1171**, Springer-Verlag, (1985), 74-83.
- [44] De Montessus de Ballore, R., *Sur les fractions continues algébriques*, Bull. Soc. Math. France **30** (1902), 28-36.
- [45] Díaz-Mendoza, C., González-Vera, P. y Orive, R., *On convergence of two-point partial Padé approximants for meromorphic functions of Stieltjes type*, Preprint.
- [46] Díaz-Mendoza, C., González-Vera, P. y Orive, R., *On the convergence of two-point Padé-type approximants*, Numer. Math. **72** (1996), 295-312.
- [47] Díaz-Mendoza, C., González-Vera, P., y Orive, R., *Two-point Padé-type approximation to the Cauchy transform of certain strong distributions*, Continued fractions and geometric function theory (CONFUN) (Trondheim, 1997), J. Comput. Appl. Math. **105** (1999), 229-243.
- [48] Díaz-Mendoza, C., González-Vera, P., y Orive, R., *Padé approximants and quadratures related to certain strong distributions*, aceptado en el J. Comput. Appl. Math. .
- [49] Draux, A., *Two-point Padé-type and Padé approximants in a non-commutative algebra*. In “ Rational approximation and its applications in Mathematics and Physics ”. Lecture Notes in Mathematics **1237**. Springer, Berlin (1987), 51-62.
- [50] Durán, A., *Ratio asymptotics for orthogonal matrix polynomials* , J. Approx. Theory **100** (1999), 304-344.
- [51] Durán, A., *Ratio asymptotics and quadrature formulas* , Constr. Approx. **13** (1997), 271-286.
- [52] Ehrlich, S. *Error bounds for Gauss-Kronrod quadrature formulae*, Math. Comp. **62** (1994), 295-304.

- [53] Ehrich, S., *Asymptotic properties of Stieltjes polynomials and Gauss-Kronrod quadrature formulae*, J. Approx. Theory **82** (1995), 287-303.
- [54] Ehrich, S., *Asymptotic behaviour of Stieltjes polynomials for ultraspherical weight functions*, J. Comput. Appl. Math. **65** (1995), 135-144.
- [55] Erdelyi, A., *Higher transcendental functions*, v. **3**, Mc.Graw-Hill, New York, 1953.
- [56] Edrei, A., *Proof of a conjecture of Schoenberg on the generating functions of a totally positive sequence*, Canad. J. Math. **5**.(1953), 86-94.
- [57] Freud, G., *Orthogonal polynomials*, Pergamon Press, Oxford, 1971.
- [58] Ganelius, T., *Rational approximants in the complex plane and on the line*, Ann. Acad. Sci. Fennicae, A. I. Mathematic v. **2** (1976), 129-145.
- [59] Gautschi, W., *A survey of Gauss-Christoffel quadrature formulae*. (P.L. Butzer and F. Feher, eds.), E.B. Christoffel. The influence of this work on the mathematical and physical sciences, Birkhäuser-Verlag , Basel, (1981), 72-147.
- [60] Gautschi, W., *Gauss-type quadrature rules for rational functions*, *Numerical Integration IV*, (H. Brass and G. Hämmerlin, eds.), Birkhäuser-Verlag, Basel, v. **112** (1993), 111-130.
- [61] Gautschi, W., *On the computation of generalized Fermi-Dirac and Bose-Einstein integrals*, Comput. Phys. Comm. **74** (1993), 233-238.
- [62] Gonchar, A. A., *Problems connected with rational functions*, Math. USSR Sb. **7** No 4 (1969), 623-635.
- [63] Gonchar, A. A., *On the convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions*, Math. USSR Sb. **26** No 4 (1975), 555-575.
- [64] Gonchar, A. A., *On the convergence of generalized Padé approximants of meromorphic functions*, Math. USSR Sb. **27** No 4 (1975), 503-514.

- [65] Gonchar, A. A., *Poles of rows of Padé table and meromorphic continuation of functions*, Math USSR Sb. **43** No 4 (1982), 527-446.
- [66] Gonchar, A. A. y Rakhmanov, E. A., *Equilibrium measure and the distribution of zeros of extremal polynomials*, Math. USSR Sb. **53** No 1 (1986), 119-130.
- [67] Gonchar, A. A. y Rakhmanov, E. A., *Equilibrium distributions and the rate of rational approximation of analytic functions*, Math. USSR Sb. **62** No 2 (1989), 305-348.
- [68] Gonchar, A. A. y López Lagomasino, G., *On Markov's theorem for multipoint Padé approximants*, Math. USSR Sb. **34** No 4 (1978), 449-459.
- [69] González-Concepción, C., González-Vera, P. y Casasús, L., *On the convergence of certain quadrature formulas defined on unbounded intervals*, "Orthogonal polynomials and their applications" (J. Vinuesa, ed.), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., v. **117**, Marcel Dekker Inc., (1989), 147-151.
- [70] González-Concepción, C. , González-Vera, P. y Hendriksen, E., *Matrix orthogonal Laurent polynomials and two-point Padé approximants*, Numer. Algorithms **3** (1992), 201-210.
- [71] González-Vera, P. y Orive, R., *Optimization of two-point Padé-type approximants*, J. Comput. Appl. Math. **50** (1994), 325-337.
- [72] González-Vera, P., Jiménez Paíz, M., López Lagomasino, G. y Orive, R., *On the convergence of quadrature formulas connected with multipoint Padé-type approximants* , J. Math. Anal. Appl. **202** (1996), 747-775.
- [73] Gragg, W. B., *Truncation error bounds for g-fractions*, Numer. Math **118** (1968), 370-379.
- [74] Gragg, W. B., *The Padé table and its relation to certain algorithms of numerical analysis*, SIAM Rev. **14** (1972), 1-62.

- [75] Hamburger, H., *Über eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems*, Math. Ann. **81** (1920), 235-319; Math. Ann. **82** (1921), 120-164, 168-187,
- [76] Illán, J. y López Lagomasino, G., *A note on generalized quadrature formulas of Gauss-Jacobi type*, Constructive Theory of Function '84, Sofia, (1984), 513-518.
- [77] Illán, J. y López Lagomasino, G., *Sobre los métodos interpolatorios de integración numérica y su conexión con la aproximación racional*, Rev. Cienc. Mat (2) **8** (1987), 31-44.
- [78] Jones, W. B., Thron, W. J. y Waadeland, H., *A strong Stieltjes moment problem*, Trans. Amer. Math. Soc. **261** (1980), 503-528.
- [79] Jones, W.B. y Thron, W.J., *Orthogonal Laurent polynomials and gaussian quadrature*, Quantum Mechanics in Mathematics, Chemistry, and Physics, (K.E. Gustafson and W.P. Reinhardt, eds.), Plenum Press, New York, (1981), 449-455.
- [80] Jones, W. B. y Thron, W. J., *Survey of continued fraction methods of solving moment problems and related topics*, (W.B. Jones, W.J. Thron, H. Waadeland, eds.), Analytic theory of continued fractions, Lecture Notes in Math., v. **932**, Springer, Berlin, (1982), 4-37.
- [81] Jones, W. B., Njåstad, O. y Thron, W. J., *Two-point Padé expansions for a family of analytic functions*, J. Comput. Appl. Math. **9** (1983), 105-123.
- [82] Jones, W. B., Njåstad, O. y Thron, W. J., *Orthogonal Laurent polynomials and the strong Hamburger moment problem*, J. Math. Anal. Appl. **98** (1984), 528-554.
- [83] Kovaceva, R. K., *On rational approximants of meromorphic functions*, Soviet Math. Dokl. **19** No 4 (1978), 898-901.
- [84] Karlberg, L. y Wallin, H., *Padé-type approximants and orthogonal polynomials for Markov-Stieltjes functions*, J. Comput. Appl. Math. **32** (1991), 153-157.

- [85] Karlberg, L. y Wallin, H., *Padé-type approximants for functions of Markov-Stieltjes type*, Rocky Mountain J. Math v. **21** No 1 (1991), 437-449.
- [86] Krein, M. G., *On an extrapolation problem due to Kolmogorov*, Dokl. Akad. Nauk. USSR **46** (1945), 306-309.
- [87] Kronrod, A. S., *Nodes and weights of quadrature formulas. Sixteen-place tables*, Consultant Bureau, New York, 1965.
- [88] Krylov, V. I., *Approximate Calculation of integrals*, MacMillan, New York, 1962.
- [89] Levin, A. L. y Lubinsky, D. S., *Christoffel functions, orthogonal polynomials and Nevai's conjecture for Freud Weights*, Constr. Approx. **8** (1992), 463-535.
- [90] López Lagomasino, G., *Conditions for convergence of multipoint Padé approximants for functions of Stieltjes type*, Math. USSR Sb. **35** No 3 (1979), 363-376.
- [91] López Lagomasino, G., *On the convergence of Padé approximants for meromorphic functions of Stieltjes type*, Math USSR Sb. **39** No 2 (1981), 281-288.
- [92] López Lagomasino, G. y Vavilov, V. V., *Algunas cuestiones de la teoría de aproximación*, manuscrito, (1984).
- [93] López Lagomasino, G., *On the asymptotics of the ratio of orthogonal polynomials and convergence of multipoint Padé approximants*, Math USSR Sb. **56** No 1 (1987), 207-219.
- [94] López Lagomasino, G., *Convergence of Padé approximants of Stieltjes type meromorphic functions and comparative asymptotics for orthogonal polynomials*, Math USSR Sb. **64** No 1 (1989), 207-227.
- [95] López Lagomasino, G., Marcellán, F. y Van Assche, W., *Relative asymptotics for polynomials orthogonal with respect to a discrete Sobolev inner product*, Constr. Approx. **11** (1995), 107-137.

- [96] López Lagomasino, G. y Martínez Finkelshtein A., *Rate of convergence of two-point Padé approximants and logarithmic asymptotics of Laurent-type orthogonal polynomials*, Constr. Approx. **11** (1995), 255-286.
- [97] López Rodríguez, P., *Riesz's theorem for orthogonal matrix polynomials*, Constr. Approx. **15** (1999), 135-151.
- [98] Magnus, A. P., *Toeplitz matrix techniques and convergence of complex weight Padé approximants*, J. Comput. Appl. Math. **19** (1987), 23-38.
- [99] Markov, A. A., *Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues*, Acta Math. **19** (1895), 93-104.
- [100] Min, G., *Lagrange interpolation and quadrature formula in rational systems*, J. Approx. Theory **95** (1998), 123-145.
- [101] Min, G., *Lobatto-type quadrature formula in rational spaces*, J. Comput. Appl. Math. **94** (1998), 1-12.
- [102] Nikolski, S., *Fórmulas de Cuadratura* Mir, Moscú, 1990.
- [103] Nikishin, E. M. y Sorokin, V. N., *Rational approximations and orthogonality*, Transl. of Math. Monographs, A.M.S, Providence, Rhode Island, 1991.
- [104] Njåstad, O., *Laurent polynomials and gaussian quadrature*, in: T. Håvie, ed., *Romberg seminar on quadrature, interpolation, extrapolation and rational approximants*, Det Kongelige Norske Videnskabers Selskab Skrifter **No. 2**, (1989), 102-120.
- [105] Notaris, S., *On Gauss-Kronrod quadrature formulae of Chebyshev type*, Math. Comp. **58** (1992), 745-753.
- [106] Nuttall, J., *The convergence of Padé approximants of meromorphic functions*, J. Math. Anal. Appl. **31** (1970), 147-153.

- [107] Opie, A. H., Sloan, I. H. y Smith, W. E., *Product integration over infinite intervals I. Rules based on the zeros of Hermite polynomials*, Math. Comp., v. **40** , No. 162 (1983), 519-535.
- [108] Peherstorfer, F., *On Stieltjes polynomials and Gauss-Kronrod quadrature*, Math. Comp. **55** (1990), 649-664.
- [109] Pommerenke, Ch., *Padé approximants and convergence in capacity*, J. Math. Anal. Appl. **41** (1973), 775-780.
- [110] Rakhmanov, E. A., *On the asymptotics of ratio of orthogonal polynomials*, Math. USSR Sb. **32** (1977), 199-213.
- [111] Rakhmanov, E. A., *Convergence of diagonal Padé approximants*, Math USSR Sb. **33** No 2 (1977), 243-260.
- [112] Rakhmanov E. A., *On asymptotic properties of polynomials orthogonal on the real axis*, Math. USSR Sb. **47** No 1 (1984), 155-193.
- [113] Ranga, A. S. y McCabe, J. H., *On the extensions of some classical distributions*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **34** (1991), 12-29.
- [114] Ranga, A. S., *Another quadrature rule of highest algebraic degree* , Numer. Math. **28** (1994), 283-294.
- [115] Ransford, T., *Potencial theory in the complex plane*, London Math. Soc. Student Texts 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [116] Rice, J. R., *The approximation of functions. Linear theory*, Addison-Wesley, 1964.
- [117] Saff, E. B., *An extension of Montessus de Ballore's theorem on the convergence of interpolating rational functions*, J. Approx. Theory **6** (1972), 63-67.
- [118] Saff, E. B. y Totik, V., *Logarithmic potentials with external fields*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

- [119] Shi, Y. G. *On Turán quadrature formulas for the Chebyshev weight*, J. Approx. Theory **96** (1999), 101-110.
- [120] Sloan, I. H. y Smith, W. E. *Properties of interpolatory product integration rules*, SIAM J. Numer. Anal. **19** (1982), 427-442.
- [121] Stahl, H., *Extremal domain associated with an analytic function, I and II*, Complex Variables Th. and Appl **4** (1985), 311-338.
- [122] Stahl, H., *The structure of extremal domains associated with an analytic function*, Complex Variables Th. and Appl. **4** (1985), 339-354.
- [123] Stahl, H., *Existence and Uniqueness of rational interpolants with free and prescribed poles*. In: Approximation Theory, Tampa, Proceedings 1985-1986. Ed: E.B. Saff, Lect. Note. Math v. **1287**, Springer-Verlag, (1987), 180-208.
- [124] Stahl, H., *On the divergence of certain Padé approximants and the behaviour of the associated orthogonal polynomials*, Lect. Notes in Math. v. **1171**, Springer-Verlag, n. **4**, Berlin, (1985) 321-330.
- [125] Stahl, H., *General convergence results for rational approximants*, Approximation VI, v. **II** (College Station, TX, 1989), Academic Press, Boston, MA, (1989), 605-634.
- [126] Stahl, H., *The convergence of Padé approximants to functions with branch points*, J. Approx. Theory **91** (1997), 139-204.
- [127] Stahl, H. y Totik, V., *General Orthogonal Polynomials*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [128] Stieltjes, T. J., *Recherches sur les fractions continues*, Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse **8** (1884), 1-122; **9** (1885), 1-47.
- [129] Sydow, V., *Error estimates for gaussian quadrature formulae*, Numer. Math. **29** (1978), 59-64.

- [130] Szabados, J. y Vértesi, P., *Interpolation of functions*. World Scientific, 1990.
- [131] Szegő, G., *Orthogonal polynomials*, 5th ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., v. **23**, A.M.S., Providence, 1991.
- [132] Uspensky, J. V., *On the convergence of quadrature formulas related to an infinite interval*, Trans. Amer. Math. Soc **30** (1928), 542-559.
- [133] Van Assche, W. y Vanherwegen, I., *Quadrature formulas based on rational interpolation*, Math. Comp. **61** (1993), 765-783.
- [134] Van Assche, W., *Multiple orthogonal polynomials, irrationality and transcendence*. Contemp. Math. **236** (1999), 325-342.
- [135] Wall, H. S., *Analytic theory of continued fractions*, Van Nostrand, Princeton, New York, 1948.
- [136] Wallin, H., *On the convergence theory of Padé Approximants*, Linear Operator and Approx., ISNM, Birkhäuser-Verlag, Basel 20, (1972), 461-469.
- [137] Walsh, J., *Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain*, Coll. Pub. v. **20**, A.M.S. Providence 1969.