UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

«Derivadas algebraicas asociadas a operadores fraccionarios»

Autor: Victor Manuel Almeida Lozano
Director: Dr. D. José Rodríguez Expósito

Departamento de Análisis Matemático

Contenido

Prólogo

Esta memoria, se desarrolla fundamentalmente, en torno al cálculo operacional de tipo Mikusinski, dando el concepto de derivada algebraica sobre un anillo y a la busqueda de estas derivadas algebraicas sobre determinados anillos de funciones cuya operación producto es definida mediante una convolución, para luego establecer un método, parcial, para hallarlas.

Todo esto nos lleva como objetivo, a poder usar la derivada algebraica en la resolución de ciertas ecuaciones diferenciales e integro-diferenciales, obteniéndose propiedades de convolución, de una forma sencilla y elegante, para las soluciones de dichas ecuaciones.

Dos campos del Análisis Matemático, cuyo desarrollo coincide históricamente, se conjugan en torno a este objetivo: cálculo fraccionario y cálculo operacional.

El origen de los operadores fraccionarios (Cálculo fraccionario), se situa a finales del siglo XVIII en una carta que Leibniz envió a L'Hopital, en la cual respondía a una pregunta previa acerca del significado que podía tener la expresión $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ si $n = \dfrac{1}{2}$. No obstante, ha de pasar algo más de un siglo, hasta que a mediados del siglo XIX, autores como

Liouville, Riemann y Holmgren, entre otros, desarrollasen estudios sistemáticos que diesen respuesta a la cuestión inicial. En concreto en 1847, Riemann propone la siguiente definición para la integral de orden fraccionario

$$\frac{d^{-r}}{dx^{-r}}u(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_c^x (x-k)^{r-1}u(k)dk$$

definición, ésta, que para $c = 0$, y bajo la denominación de integral fraccionaria de Riemann-Liouville, será utilizada a lo largo de esta memoria. Una lectura más pausada y profunda sobre el desarrollo histórico de este campo, así como distintas versiones para los operadores fraccionarios y propiedades de estos, puede hacerse en [45], [56], [29], [34], [58] y [42].

Algo más tardío en sus orígenes, pero más o menos paralelo en su desarrollo, es el cálculo operacional, cuyo creador, según la mayor parte de la literatura matemática, fue Heaviside quien a finales del siglo XIX, para resolver ecuaciones diferenciales asociadas a estudios sobre oscilaciones electromagnéticas y otros problemas físicos, hacía uso del operador $D = \dfrac{d}{dt}$ como un ente algebraico y generaba un cálculo simbólico que llevaba a encontrar soluciones particulares de las ecuaciones tratadas. La falta de rigor matemático en sus desarrollos, tal y como se refleja en el siguiente ejemplo, llevó a que sus trabajos no fuesen aceptados por la comunidad científica del momento. La ecuación

$$y' + ay = e^t$$

puede ser escrita en la forma

$$(D + a)y = e^t$$

donde D representa al operador derivada $\dfrac{d}{dt}$. Una de las posibles manipulaciones que propondría Heaviside, sería:

$$y = \frac{e^t}{D+a} = \frac{1}{a}\frac{e^t}{1+\frac{D}{a}} = \frac{1}{a}[1 - \frac{D}{a} + \frac{D^2}{a^2} - ...]e^t =$$
$$= [\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} - ...]e^t = \frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}}e^t = \frac{e^t}{a+1}$$

obteniéndose de manera formal una solución.

A partir de entonces han sido múltiples los intentos para dar rigor al cálculo operacional de Heaviside. Aunque fue Lévy, en 1926, el primero en utilizar la idea de trabajar con un anillo de funciones con las leyes de composición

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t)$$
$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)du$$

permitiendo la identificación de la función constante 1 con el operador integral y la convolución n veces de esta función con el operador

$$I^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^t (t-u)^{n-1}f(u)du$$

llegando incluso a introducir, como una derivada de orden n, el operador I^{-n}; hubo de esperarse hasta 1950 a que los trabajos del matemático polaco J. Mikusinski aportasen una base teórica para el cálculo operacional. En 1953 este matemático publicó, en Varsovia, su libro titulado **Operational Calculus**, el cual fue traducido al inglés en 1959 [36], en el que se desarrolla de forma exhaustiva la teoría base del cálculo operacional y que ha servido como referencia a múltiples trabajos posteriores.

La idea principal de la teoría de Mikusinski, al igual que Lévy, fue considerar las operaciones suma y convolución sobre el conjunto de funciones complejas continuas definidas sobre valores reales no negativos, el cual con dichas operaciones adquiría la estructura de anillo conmutativo no unitario , que además, basándose en un teorema debido a Titchmarsh [60], carecía de divisores de cero. La originalidad en el trabajo de Mikusinski la constituyó el hecho de extender este anillo a su cuerpo de fracciones, siguiendo el mismo proceso que el que lleva a construir el cuerpo $\mathbb{Q}$ a partir del anillo $\mathbb{Z}$. Ya en este punto y conocida la identificación de la función constante 1 con el operador integral I, se demostró que el inverso algebraico, en el cuerpo de fracciones, de la función constante 1, el cual fue denotado por s, verificaba que:

$$s * f(t) = f'(t) + f(0)$$

lo que daba explicación al tratamiento como ente algebraico del operador diferencial en los trabajos de Heaviside.

A raíz de los trabajos de J. Mikusinski, muchos han sido los matemáticos que han desarrollado diferentes cálculos operacionales asociados a diferentes operadores: V.A. Ditkin y A. P. Prudnikov [14] y [46], I. H. Dimovski [13], V. Kiryakova [28], N.A. Meller [35], E.L. Koh [30], J.J. Betancor [12], J.A. Alamo y J. Rodríguez [2], [3] y [54], etc. Sin embargo en estos trabajos no se menciona la idea de derivada algebraica que Mikusinski incluía en el suyo, y que va a ser la idea central en esta memoria.

J. Mikusinski define en su libro la derivada algebraica, sobre las funciones del anillo, como el operador

$$\mathcal{D}f(t) = -tf(t)$$

extendiéndola luego al cuerpo de fracciones de la siguiente manera

$$\mathcal{D}\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{[\mathcal{D}f(t)] * g(t) - f(t) * [\mathcal{D}g(t)]}{g(t) * g(t)}$$

y demuestra que esta derivada algebraica actúa sobre las potencias de s como la derivada usual lo hace sobre las potencias de t. Para profundizar algo más en el concepto de derivada algebraica, se puede acudir a [23] y [31].

Décadas más tarde autores como W. Kierat [24], K. Skornik [25] y [26], P. Antosik [11], K. Yosida [62] y [63], entre otros, utilizan la derivada algebraica de Mikusinski para resolver ciertas ecuaciones diferenciales clásicas. Son precisamente estos trabajos los que motivaron el desarrollo de esta memoria la cual hemos dividido en cinco capítulos:

En el capítulo primero se introduce la definición del concepto de derivada algebraica sobre un anillo, desarrollándose un somero estudio, basado en los trabajos de J. Mikusinski, de sus propiedades. Asimismo se muestran algunos ejemplos concretos de tales derivadas. Se termina este capítulo haciendo mención al concepto de derivada algebraica que comparece en los trabajos de D. Rolewiczs [47]-[53], acerca de operadores invertibles.

En el segundo capítulo se presenta a través de los trabajos de W. Kierat [24], K. Skornik [25] y [26], P. Antosik [11] K. Yosida [62] y [63], y otros, el uso de la derivada algebraica en la resolución de ciertas ecuaciones diferenciales clásicas, obteniéndose en alguno de los casos propiedades de convolución para las correspondientes soluciones. Siguiendo la misma técnica que la empleada por estos autores se plantea la resolución de ecuaciones en las que comparece el operador diferencial de orden fraccionario de Riemann-Liouville el cual se denota por D^{δ} y cuya definición es $D^\delta f(t) = D^n I^{n-\delta} f(t) \quad (n-1 < \delta \leq n)$, siendo

$$I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau$$

el correspondiente operador integral.

En el siguiente capítulo se comienza, a modo de introducción, haciendo un resumen del cálculo operacional que para el operador $D = \dfrac{d}{dt}$ desarrollaron Ditkin y Prudnikov [14] usando la convolución

$$(f \otimes g)(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$$

para luego definir una derivada algebraica asociada a éste, cuya expresión es

$$\mathcal{D} f(t) = (I - t) f(t)$$

siendo

$$I f(t) = \int_0^t f(u) du.$$

En el capítulo cuarto se definen, y estudian, tres derivadas algebraicas asociadas al operador D^δ, en relación con tres convoluciones distintas:

$$\mathcal{D}_1 f(t) = -\frac{I^{\delta-1}}{\delta} t f(t)$$

asociada a la convolución de Mikusinski,

$$\mathcal{D}_2 f(t) = [I^\delta - \frac{I^{\delta-1}}{\delta} t] f(t)$$

para la convolución

$$(f \odot g)(t) = \frac{D^{\delta}}{\Gamma(\delta)} \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

introducida por Alamo y Rodríguez [2], y

$$\mathcal{D}_{\lambda} f(t) = (\frac{1-\lambda}{\mu} I^{\mu} - \frac{1}{\mu} I^{\mu-1} t) f(t)$$

para la convolución, definida por Luchko y Srivastava [33],

$$(f *_{\lambda} g)(t) = I^{\lambda-1} \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = I^{\lambda-1}(f * g)(t) \quad (\lambda \geq 1)$$

donde $I^{\lambda-1}$ representa el operador integración fraccionaria de Riemann-Liouville y $*$ la convolución de Mikusinski. En todos los casos se usarán, éstas, para resolver ciertas ecuaciones diferenciales e integro-diferenciales.

Ya en el último capítulo se empieza exponiendo la ususal técnica del uso del teorema de semejanza de Meller en la búsqueda de convoluciones para operadores a partir de uno dado y su convolución, tal y como han mostrado autores como, I. Domovski [13], V. Kiryakova [29], J.A. Alamo, J. Rodríguez [2], etc. En esta parte se plantea el uso de esta técnica para encontrar derivadas algebraicas a partir de una dada, demostrando que además existe una perfecta transmisión de propiedades. Se acaba este capítulo, y con ello la memoria, ilustrando con ejemplos lo expuesto. Así, se presentan derivadas algebraicas asociadas, entre otros, a los operadores $D_\beta = \beta^{-1} t^{1-\beta} \frac{d}{dt}$, $D_\beta^\delta = D_\beta^n I_\beta^{n-\delta}$, siendo

$$I_\beta^\alpha = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t^\beta - \tau^\beta)^{\alpha-1} \tau^{\beta-1} f(\tau) d\tau$$

el operador integral de orden fraccionario generalizado de Riemann-Liouville estudiado por A.C. Mcbride [34].

Capítulo I

La derivada algebraica

I.1 Introducción

En este capítulo de carácter introductorio, a efectos de una mejor lectura de esta memoria, se comenzará dando la definición de derivada algebraica en un anillo y su extensión de un anillo de integridad a un cuerpo cociente. Asimismo, se da la definición de un anillo diferencial, de ideales diferenciales y homomorfismo diferencial.

Todo ello permite, basándose en los trabajos de J. Mikusinski, dar la definición de derivada algebraica por él utilizada y hacer un resumen de sus propiedades.

Como ejemplos ilustrativos de derivadas algebraicas asociadas a cálculos operacionales discretos, se mencionarán algunos trabajos de T. Fényes y M. Hayashi.

Por otra parte, a efectos comparativos con lo dado, se presentará la definición de derivada algebraica introducida por D. Prezeworska-Rolewicz.

Para terminar el capítulo se mencionan algunas definiciones y propiedades, enmarcadas dentro del cálculo fraccionario, que serán de utilidad en el desarrollo de esta memoria.

I.2 Generalidades

Tomando como referencia los trabajos de Mikusinski [37] y [38], se introduce una definición de derivada algebraica y se hace un resumen de sus propiedades.

Definición I.2.1 *Dado una anillo conmutativo* $(A, +, .)$*, se denomina derivada algebraica sobre* A *a todo operador* $D : A \to A$*, verificando que para cualquier par de elementos* a*,* b *en* A

$$D(a + b) = Da + Db \tag{I.2.1}$$

$$D(a.b) = Da.b + a.Db \tag{I.2.2}$$

No es complicado comprobar que tal operador verifica las siguientes propiedades:

i) $D0 = 0$

ii) $D(-a) = -Da$

iii) $D(a - b) = Da - Db$

iv) $D(\sum_{i=1}^{n} a_i) = \sum_{i=1}^{n} Da_i$

v) $D(\prod_{i=1}^{n} a_i) = \sum_{i=1}^{n} a_1...a_{i-1}.(Da_i).a_{i+1}...a_n$

Definición I.2.2 *Por recurrencia se define la aplicación iterada del operador derivada algebraica.*

$$\begin{cases} D^n a = D(D^{n-1}a) \quad (n = 1, 2, 3, ...) \\ \\ D^0 a = a \end{cases}$$

A continuación se enumeran una serie de teoremas, proposiciones y definiciones, todas ellas extraidas del trabajo de Mikusinski [37], encaminadas a dar condiciones de resolubilidad a ecuaciones en A que involucran al operador D.

Proposición I.2.1 *Dados dos elementos a y b, de A, tales que al menos uno de ellos no es un divisor de cero, entonces*

$$Da.b - a.Db = 0 \Rightarrow D^m a.D^n b - D^n a.D^m b = 0 \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

Definición I.2.3 *Un elemento $c \in A$ se dice constante si $Dc = 0$.*

Dadas la propiedades de D es fácil comprobar que $(C, +, .)$ es un subanillo de A, siendo C el subconjunto de las constantes de A, verificándose además

vi) $D(c.a) = c.Da$ para cualquier $c \in C$ y cualquier $a \in A$

vii) $Da = Db \ \Rightarrow \ a = b + c$ donde $c \in C$ y $a, b \in A$

Definición I.2.4 *Los elementos $a_1, \ a_2, \ ..., a_n$ de A se dicen linealmente dependientes si existen $c_1, \ c_2, \ ..., c_n \in C$ no todos nulos , tales que*

$$c_1 a_1 + c_2 a_2 + ... + c_n a_n = 0$$

Supóngase ahora que el anillo A no tiene divisores de cero y que la derivada algebraica verifica además la propiedad

$$Da.b - a.Db = 0 \ \Rightarrow \ a \textit{ y } b \textit{ son linealmente dependientes.} \tag{I.2.3}$$

Nota I.2.1: Piénsese que la propiedad recíproca siempre es cierta.

Proposición I.2.2 *Para que los elementos* $a_1, ..., a_n$*, de* A*, sean linealmente dependientes, es condición necesaria y suficiente que*

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & . & . & a_n \\ Da_1 & . & . & Da_n \\ . & . & . & . \\ D^{n-1}a_1 & . & . & D^{n-1}a_n \end{vmatrix} = 0$$

Proposición I.2.3 *Sea* A *un anillo conmutativo sin divisores de cero con una derivada algebraica* D *verificando (I.2.3), entonces la ecuación*

$$a_n D^n x + ... + a_1 Dx + a_0 x = 0$$

admite como mucho n *soluciones linealmente independientes.*

En caso de que el anillo A carezca de divisores de cero, puede ser extendido a un cuerpo de fracciones A^* de la siguiente manera:

$$A^* = A \times (A - \{0\}) / \sim$$

donde $\sim$ es la relación de equivalencia definida por

$$(a, b) \sim (c, d) \;\Leftrightarrow\; a.d = b.c$$

Es usual representar por $\dfrac{a}{b}$ a la clase de equivalencia del par (a, b) así como definir las operaciones en A^* como sigue:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + b.c}{b.d}$$

$$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$$

El anillo A es siempre isomorfo a una parte de A^* y en ese sentido se considera $A \subset A^*$. En caso de que en A haya definida una derivada algebraica, es común extender ésta al cuerpo de fracciones definiéndola como

$$D\frac{a}{b} = \frac{Da.b - a.Db}{b.b}$$

siendo sencillo comprobar que la extensión de D sigue verificando las propiedades (I.2.1) y (I.2.2), e incluso (I.2.3) independientemente de que lo haga en A o no.

Proposición I.2.4 *Sea A un anillo conmutativo sin divisores de cero con una derivada algebraica definida sobre él. Sea C el conjunto de las constantes en A y sean A^* y C^* sus respectivos cuerpos cocientes, entonces: C^* coincide con el conjunto de los elementos constantes de A^* si y sólo si la derivación verifica la propiedad (I.2.3) en A.*

Para ilustrar lo expuesto comentaremos que la derivada habitual de funciones satisface las propiedades (I.2.1) y (I.2.2), respecto a la suma y producto de funciones. Podemos tomar por A distintos anillos de funciones, por ejemplo:

- Las funciones $C^{\infty}[(\alpha, \beta)]$. Este anillo tiene divisores de cero, por lo que la proposición I.2.1 es aplicable, no así las proposiciones I.2.2, I.2.3 y I.2.4.

- El anillo de los polinomios en una variable con coeficientes reales. Este anillo no tiene divisores de cero. El conjunto de las constantes es el compuesto por los coeficientes reales. Además se verifica la propiedad (I.2.3). Por lo que son aplicables las cuatro proposiciones.

Aunque no de forma tan explícita, en los trabajos de Mikusinski [39], [40] y [41], también se cita el concepto de derivada algebraica, bajo el nombre de "una derivación", y se utiliza en la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales abstractas en anillos y espacios vectoriales sobre cuerpos de característica cero.

Para terminar esta sección, comentar que se ha recurrido a los trabajos de Mikusinski para introducir el concepto y propiedades generales de la derivada algebraica, lo cual tiene su justificación en el hecho de ser a este autor al que se seguirá en el desarrollo de este trabajo. Sin embargo existen otros autores como I. Kaplanski [23], que introducen la derivada algebraica con pequeñas diferencias, tal y como se refleja a continuación.

Definición I.2.5 *Una derivada en un anillo A, es una aplicación aditiva*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ a & \longrightarrow & a' \end{array}$$

verificando

$$(ab)' = a'b + ab'$$

Se escribirá a'', a''', ... , $a^{(n)}$ para simbolizar a las derivadas sucesivas. Por inducción se prueba la regla de Leibnitz

$$(ab)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{(i)} b^{(n-i)}$$

Si a' conmuta con a, se tiene que

$$(a^n)' = na^{n-1}a'$$

En caso de que A tenga elemento unidad, su derivada es necesariamente cero lo que lleva a que si a es regular, diferenciando en $aa^{-1} = 1$, se obtenga que

$$(a^{-1})' = -a^{-1}a'a^{-1}$$

Definición I.2.6 *Un anillo diferencial es un anillo conmutativo con una derivación definida.*

En cualquier anillo diferencial A, los elementos con derivada cero forman un subanillo C, llamado el anillo de las constantes, lo que ya había sido comentado a través de los trabajos de Mikusinski, pero Kaplanski va un poco más allá y comenta que en caso de que A sea un cuerpo, necesariamente C también lo es.

Se dice que un ideal I de un anillo diferencial A es un ideal diferencial si la derivación es cerrada en I.

Definición I.2.7 *Sean A y B dos anillos diferenciales, un homomorfismo diferencial de A a B es un homomorfismo algebraico que además conmuta con la derivada.*

I.3 El cálculo operacional de Mikusinski y su derivada algebraica

En el año 1953 Mikusinski publica su libro (traducido al inglés en 1959) [36], en el cual presenta su cálculo operacional. En el año 1960 publica el trabajo "Remarks on the algebraic derivative in the operational calculus" [38], en el cual demuestra algunas propiedades adicionales, no incluidas en su libro, de su derivada algebraica. En esta sección se hará un resumen de los resultados expuestos en estos trabajos y que serán de utilidad en el desarrollo de los próximos capítulos.

Sea $\mathcal{C}$ el anillo de funciones a valores complejos continuas sobre el intervalo $0 \leq t < \infty$ y considérese en él la suma usual de funciones y el producto

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

No es complicado deducir que $(\mathcal{C}, +, *)$ es un anillo conmutativo no unitario que además carece de divisores de cero [60]. Lo que permite entonces construir el correspodiente cuerpo de fracciones

$$\mathcal{M} = \mathcal{C} \times (\mathcal{C} - \{0\}) / \sim$$

y representar a los elementos de éste por $\dfrac{p}{q}$, los cuales son llamados operadores.

La función constante $f(t) = 1$ puede ser identificada con el operador integral, en el sentido de que

$$(1 * f)(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

Denotando por l a dicha función es fácil comprobar que

Proposición I.3.1 *Sea* $lf(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$, *entonces* $l^k = \dfrac{t^{k-1}}{\Gamma(k+1)}$ $(\forall k \in \mathbb{N})$

El anillo $\mathcal{C}$ se identifica con un subanillo de $\mathcal{M}$ mediante el isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ f & \longrightarrow & \dfrac{lf}{l} \end{array}.$$

El cuerpo de los números complejos también puede embeberse en $\mathcal{M}$ asignando a cada $\alpha \in \mathbb{C}$ el llamado operador numérico $[\alpha] = \dfrac{\{\alpha\}}{l}$, donde $\{\alpha\}$ representa la función constante con valor α.

Se ha de resaltar el hecho de que Mikusinski hace hincapié en la diferencia entre las constantes α y las funciones constantes $\{\alpha\}$, lo que viene motivado porque la convolución de dos funciones constantes no vuelve a ser una función constante

$$\{\alpha\} * \{\beta\} = \{\alpha\beta t\}$$

Los llamados operadores numéricos reciben su nombre dado que juegan, en $\mathcal{M}$, el papel de las constantes en $\mathcal{C}$, de hecho se verifica que

$$[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta]$$

$$[\alpha].[\beta] = [\alpha\beta]$$

Nota I.3.1: Más adelante quedará reflejado que estos operadores representan las constantes en el cuerpo. En general, y salvo que hayan posibles confusiones, se representará por α al operador $[\alpha]$. Dentro de estos operadores se encuentran el cero y la unidad del cuerpo.

Se denota por s al inverso algebraico de l, es decir, $s = \frac{1}{l}$, el cual se denomina operador diferencial ya que en cierto modo se identifica con el operador derivada usual $\frac{d}{dt}$, tal y como se refleja en las siguientes reglas operacionales:

$$\frac{d}{dt}f(t) = sf(t) - f(0) \tag{I.3.1}$$

$$\frac{d^n}{dt^n}f(t) = s^n f(t) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0) \tag{I.3.2}$$

las cuales permiten identificar ciertos operadores con funciones de $\mathcal{C}$. Tomando en (I.3.1) $f(t) = e^{\alpha t}$ se obtiene

$$e^{\alpha t} = \frac{1}{s - \alpha}$$

a partir de aquí, usando la definición de la convolución y el método de inducción, se puede expresar

$$\frac{1}{(s-\alpha)^n} = \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}e^{\alpha t}$$

Teniendo en cuenta las conocidas fórmulas

$$senx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

es fácil llegar a

$$e^{\alpha t} cos\beta t = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2 + \beta^2}$$

$$\frac{1}{\beta} e^{\alpha t} sen\beta t = \frac{1}{(s-\alpha)^2 + \beta^2}$$

que para el caso $\alpha = 0$ se reducen a

$$\frac{1}{\beta} sen\beta t = \frac{1}{s^2 + \beta^2}$$

$$cos\beta t = \frac{s}{s^2 + \beta^2}$$

Mikusinski define en $\mathcal{C}$ la derivada algebraica $\mathcal{D}f(t) = -tf(t)$, extendiéndola al cuerpo $\mathcal{M}$, tal y como ya se ha comentado, de la siguiente manera:

$$\mathcal{D}\frac{p}{q} = \frac{[\mathcal{D}p] * q - p * [\mathcal{D}q]}{q^2} \quad p, q \in \mathcal{C} \;\; q \neq 0$$

demostrando que se verifican las propiedades que se enumeran en la siguiente proposición

Proposición I.3.2 *Para cualquier par de elementos $a, b \in \mathcal{M}$ y para cualquier operador numérico α*

a) $\mathcal{D}(a + b) = \mathcal{D}a + \mathcal{D}b$

b) $\mathcal{D}(a.b) = \mathcal{D}a.b + a.\mathcal{D}b$

c) $\mathcal{D}\dfrac{a}{b} = \dfrac{[\mathcal{D}a].b - a.[\mathcal{D}b]}{b^2} \quad b \neq 0$

d) $\mathcal{D}\alpha = 0$

e) $\mathcal{D}(\alpha.a) = \alpha.\mathcal{D}a$

f) $\mathcal{D}1 = 0$

g) $\mathcal{D}l^n = -nl^{n+1}$

h) $\mathcal{D}s^n = ns^{n-1}$

De la combinación de estas propiedades se puede concluir que la actuación de la derivada algebraica sobre expresiones polinómicas, en el operador s, con coeficientes constantes en $\mathcal{M}$ es como sigue

$$\mathcal{D}(\alpha_n s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + ... + \alpha_0) = n\alpha_n s^{n-1} + ... + 2\alpha_2 s + \alpha_1$$

lo que sugiere que el operador $\mathcal{D}$ pueda ser considerado como una derivada usual respecto al operador s.

En la proposición I.3.2 apartado **d)** se nos muestra que la derivada algebraica de los operadores numéricos es cero, pero más aún, se puede demostrar la propiedad recíproca.

Proposición I.3.3 $\mathcal{D}x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = [\alpha]$.

A continuación se introduce el concepto de función operacional, continuidad y derivabilidad según Mikusinski, para ilustrar después, [38], la acción de la derivada algebraica sobre algunas de éstas.

Partiendo de la identificación de la función constante 1 con el operador integral, es sencillo comprobar, usando el método de inducción, que

$$l^n = \frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$$

lo que permite generalizar a potencias reales positivas

$$l^\alpha = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$$

Expresiones como esta, dan la idea de que se pueden considerar funciones operacionales $f(\alpha)$ como aquellas que asignan un operador, es decir, un elemento del cuerpo $\mathcal{M}$ a cada número α. A partir de aquí se introducen los conceptos de continuidad y derivabilidad como sigue

Definición I.3.1 *Una función operacional $f(\alpha)$ se dice continua en un intervalo finito (abierto o cerrado) K, si puede ser representada en dicho intervalo como el producto de un operador $q \in \mathcal{M}$ y una función* *paramétrica* $f_1(\alpha, t)$ *tal que la función* f_1 *es continua (en el sentido usual) en el dominio* Ω $(\alpha \in K\ ,\ 0 \leq t < \infty)$*, es decir,* $f(\alpha) = q.f_1(\alpha, t)$*.*

Es evidente que con esta definición cualquier función $f(\alpha, t)$ continua en el sentido usual en el dominio Ω es continua en el sentido operacional (bastaría con tomar $q = 1$). Sin embargo, tal y como refleja el siguiente ejemplo, hay funciones no continuas en el sentido usual, que si son continuas en el sentido operacional.

$$H(\alpha, t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq t < \alpha \\ 1 & si \quad 0 \leq \alpha \leq t \end{cases}$$

$H(\alpha, t)$ es discontinua, sobre la línea $\alpha = t$, en el sentido usual, sin embargo es continua en el sentido operacional ya que

$$H(\alpha) = sh_1(\alpha, t)$$

siendo $h_1(\alpha, t)$ la función continua

$$h_1(\alpha, t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq t < \alpha \\ t - \alpha & si \quad 0 \leq \alpha \leq t \end{cases}$$

y dado que

$$lH(\alpha, t) = \int_0^t H(\alpha, \tau) d\tau = h_1(\alpha, t)$$

Definición I.3.2 *Una función operacional $f(\alpha)$ se dice continuamente diferenciable en un intervalo finito K si puede representarse por $f(\alpha) = q.f_1(\alpha,t)$, siendo $q \in \mathcal{M}$ un operador y f_1 una función cuya derivada parcial $\frac{\partial}{\partial\alpha} f_1(\alpha,t)$ es una función continua en el dominio Ω ($\alpha \in K$, $0 \leq t < \infty$). La derivada operacional de f queda definida por*

$$f'(\alpha) = q.\frac{\partial}{\partial\alpha} f_1(\alpha,t)$$

Nota I.3.2: Curiosamente la derivación operacional verifica las propiedades usuales de la derivada (suma, producto, cociente, etc.)

Como ejemplo consideremos la función operacional

$$f(\alpha) = sH(\alpha,t) = s^2 h_1(\alpha,t) = s^3 l h_1(\alpha,t) = s^3 h_2(\alpha,t)$$

donde la función h_2 viene dada por la expresión

$$h_2(\alpha,t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq t < \alpha \\ \frac{1}{2}(t-\alpha)^2 & si \quad 0 \leq \alpha \leq t \end{cases}$$

y tiene como derivada parcial respecto de α la función continua en el dominio Ω $(0 \leq \alpha \leq \alpha_0 \ , \ 0 \leq t < \infty))$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} h_2(\alpha,t) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq t < \alpha \\ -(t-\alpha) & si \quad 0 \leq \alpha \leq t \end{cases}$$

siendo α_0 un número positivo arbitrario.

Finalmente la derivada operacional de $f(\alpha)$ vendría dada por

$$f'(\alpha) = s^3 \frac{\partial}{\partial \alpha} h_2(\alpha, t) \quad para \;\; 0 \leq \alpha \leq \alpha_0$$

Tal y como se había adelantado, se expondrán algunas propiedades de la derivada algebraica en relación con la derivada de una función operacional.

Proposición I.3.4 *Si $f(\alpha)$ es una función operacional continuamente derivable, se tiene que*

$$\mathcal{D} f'(\alpha) = [\mathcal{D} f(\alpha)]'$$

Definición I.3.3 *Dado un operador $w \in \mathcal{M}$, se define e^w como el valor para $\alpha = 1$ de la solución $f(\alpha) = e^{w\alpha}$ de la ecuación diferencial*

$$f'(\alpha) = w f(\alpha) \quad (f(0) = 1)$$

con lo que e^w existe para un operador dado w si y sólo si hay solución no trivial de la ecuación diferencial. Algunas notas sobre la función exponencial operacional pueden verse en [27].

Proposición I.3.5 *Si existe e^w, entonces:*

$$\mathcal{D} e^w = e^w \mathcal{D} w$$

Proposición I.3.6 *Si la ecuación $\mathcal{D}x = wx$ tiene solución, el cociente entre dos soluciones, no nulas, es un operador numérico.*

Proposición I.3.7 *Si $\mathcal{D}u = w$ y la ecuación $\mathcal{D}x = wx$ es resoluble, entonces toda solución es de la forma αe^u, siendo α un número.*

A continuación se muestran, ilustrándolos con algún ejemplo, los conceptos de sucesión y serie de operadores convergentes en el sentido Mikusinski.

Definición I.3.4 *Una sucesión de operadores $\{a_n\} \subset \mathcal{M}$ se dice convergente al límite $a \in \mathcal{M}$ si existe un operador $q \in \mathcal{M}$ tal que $\{\frac{a_n}{q}\}$ sea una sucesión de funciones de $\mathcal{C}$ casi uniformemente convergente a $\frac{a}{q}$.*

Nota I.3.3: Por casi uniformemente convergente se entiende, uniformemente convergente en todo intervalo finito.

A modo de ejemplo, considérese la sucesión de término general

$$a_n = \frac{s^2 n^2}{s^2 + n^2}$$

la cual es convergente, ya que tomando $q = s^4$ se obtiene que

$$\frac{a_n}{s^4} = \frac{n^2}{s^2(s^2 + n^2)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + n^2} = t - \frac{1}{n}\sin(nt) = f_n(t)$$

Claramente $f_n(t)$ tiende casi uniformemente a t, por lo que a_n converge a

$$s^4 t = s^4 l^2 = s^2.$$

Es de destacar el hecho de que toda sucesión de funciones en $\mathcal{C}$ casi uniformemente convergente, es convergente en el sentido operacional, sin embargo el recíproco no es cierto. Piénsese en la sucesión de funciones $f_n(t) = \cos(nt)$, la cual en sentido operacional tiende a cero, ya que $\cos(nt) = \dfrac{s}{s^2 + n^2}$ y bastaría con tomar $q = s$.

Las propiedades usuales (unicidad del límite y operaciones con límites) se verifican para el caso operacional, con alguna restricción para el caso del cociente.

Para las series de operadores las cosas son como usualmente, es decir, se dice que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \; .... = A$$

si la sucesión de sumas parciales

$$A_n = a_0 + a_1 + \; ... \; + a_n$$

converge a A, por ejemplo:

$$1 + l + l^2 + l^3 + \ .... \ = \frac{1}{1-l}$$

ya que la sucesión de sumas parciales

$$1 + l + l^2 + \ ... \ + l^n = s\{1 + t + \ ... \ + \frac{t^n}{\Gamma(n+1)}\}$$

converge al operador

$$se^t = \frac{s}{s-1} = \frac{1}{1-l}$$

Mikusinski dedica el cuarto capítulo de su libro [36], al estudio de las series de potencias de operadores, estableciendo los siguientes resultados:

Proposición I.3.8 *Sea $\{a_n\} \in \mathcal{M}$ una sucesión arbitraria de operadores, si la serie*

$$a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + ...$$

es convergente para un cierto número $\lambda = \lambda_1$, entonces es convergente en el disco $|\lambda| < \lambda_1$.

Proposición I.3.9 *Si la serie*

$$\Psi(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + ...$$

converge para algún valor $\lambda = \lambda_1 \in \mathbb{C}$, donde $a_i \in \mathbb{C}$, entonces la serie

$$\Psi(f) = a_0 + a_1 f + a_2 f^2 + ...$$

es operacionalmente convergente para cualquier función $f \in \mathcal{C}$.

Ejemplos:

1. La serie
$$\frac{1}{1-\lambda} = 1 + \lambda + \lambda^2 + ...$$
es convergente para $|\lambda| < 1$. Entonces la serie
$$\frac{1}{s-\alpha} = l\frac{1}{1-\alpha l} = l + \alpha l^2 + \alpha^2 l^3 + ... = \{1 + \frac{\alpha t}{1!} + \frac{\alpha^2 t^2}{2!} + ...\}$$
es convergente para cualquier número complejo α, lo cual prueba, de otra manera, la ya mencionada igualdad
$$\frac{1}{s-\alpha} = e^{\alpha t}.$$

2. La serie
$$\cos\lambda = 1 - \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^4}{4!} - ....$$
es convergente para cualquier valor de λ, por lo tanto la serie
$$\cos\frac{1}{s^2} = 1 - \frac{1}{2!s^4} + \frac{1}{4!s^8} - .....$$
es convergente. Nótese que
$$\frac{1}{s^2} = l^2 = \frac{t}{1!} \in \mathcal{C}.$$

Haciendo uso de estos resultados el autor define la potencia de exponente real β de los operadores $1 + f \;\; (f \in \mathcal{C})$, como
$$(1+f)^\beta = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} f^k$$

comprobando que se verifica la igualdad

$$(1+f)^{\beta}(1+f)^{\gamma} = (1+f)^{\beta+\gamma}$$

de la cual se puede deducir, tomando $\gamma = -\beta$, que

$$(1+f)^{-\beta} = \frac{1}{(1+f)^{\beta}}$$

Una vez definida las potencias de exponente real para dos operadores a y b, se define la potencia de su producto de forma usual, como

$$(ab)^{\beta} = a^{\beta} b^{\beta}$$

lo que permite demostrar la veracidad de, entre otras, igualdades como la siguiente

$$\frac{1}{(s-\alpha)^{\beta}} = l^{\beta}(1-\alpha l)^{-\beta} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\beta}{k} (-\alpha)^k l^{k+\beta} =$$

$$= \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!} = \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{\alpha t}$$

En [43], D. Nikolic-Despotovic y B. Stankovic, estudian la convergencia de algunas series de operadores en el cuerpo de Mikusinski, tales como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{s+\beta_n} \quad (a_n \in \mathcal{M})$$

siendo $0 < \beta_0 < \beta_1 < \ldots\ldots, \beta_n \;\rightarrow\; \infty, n \;\rightarrow\; \infty$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s^2 + 4n^2\pi^2}$$

identificando para $0 < \nu < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{s^{2\nu} + 4n^2\pi^2} = \frac{e^{-s^\nu}}{1 - e^{-s^\nu}} - \frac{1}{s^\nu} + \frac{1}{2}$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16\pi^2 n^2}{(s^{2\nu} + 4n^2\pi^2)^2} = \frac{e^{-s^\nu}}{s^\nu(1 - e^{-s^\nu})} - \frac{e^{-s^\nu}}{(1 - e^{-s^\nu})^2} + \frac{1}{2s^\nu}$$

Algunas propiedades más sobre la derivada algebraica de Mikusinski estudiadas por autores como Kierat, Skornik, Yosida, etc. serán mencionadas en siguientes capítulos, a medida que vayan siendo necesitadas.

Debe resaltarse, antes de finalizar esta sección, que numerosos autores han dedicado algunos de sus trabajos a profundizar en el cálculo operacional de Mikusinski, obteniéndose como resultado un enriquecimiento del mismo. Entre otros, se mencionan los trabajos de Yosida [62], [63] y [64], Okamoto [44], Gesztelyi [20] y Prudnikov [46].

I.4 Otras derivadas algebraicas conocidas

En esta sección se pretende mostrar ejemplos de derivadas algebraicas aplicadas a cálculos operacionales discretos, así como presentar otro concepto de derivada algebraica aplicado al estudio de la invertibilidad de operadores.

En 1975, T. Fényes y P. Kosik, [19], estudian la aplicación de un cálculo operacional discreto y su correspondiente derivada algebraica en la resolución de ecuaciones en diferencias. Para ello, definen sobre el conjunto E de las sucesiones reales $a = \{a_n\}$, las siguientes operaciones:

$$a + b : \quad \{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$$

$$ab : \quad \{a_n\}\{b_n\} = \{\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\}$$

demostrando que es un anillo conmutativo y unitario sin divisores de cero y que por tanto puede ser extendido a su correspondiente cuerpo de fracciones. El elemento unidad viene dado por $\{\delta_{0,n}\}$, donde $\delta_{0,n}$ denota el símbolo de Kronecker.

Es de destacar que el producto utilizado por estos autores respresenta la versión discreta de la convolución de Mikusinski, por lo que debe esperarse que el papel que juegan los operadores integral y diferencial en el cálculo operacional de Mikusinski, lo desempeñen, en este cálculo operacional discreto, los operadores suma y diferencia. La función $h = \{1\}$ que toma el valor 1 para todo $n = 0, 1, 2, ...$, se identifica con el operador sumación, ya que:

$$h\{a_n\} = \{1\}\{a_n\} = \{\sum_{k=0}^{n} a_k\}$$

El operador

$$q = \frac{1}{h-1}$$

se identifica con el operador diferencia, y su propiedad fundamental viene dada por

$$q\{a_n\} = \{\Delta a_n\} + (1+q)a_0$$

donde

$$\{\Delta a_n\} = \{a_{n+1} - a_n\}$$

Los autores definen en el anillo E la operación

$$Da = D\{a_n\} = \{-na_n\}$$

que constituye la versión discreta de la derivada algebraica de Mikusinski, y resulta sencillo comprobar que dicha operación verifica las propiedades.

$$D\{a_n + b_n\} = D\{a_n\} + D\{b_n\}$$

$$D[\{a_n\}\{b_n\}] = \{a_n\}D\{b_n\} + \{b_n\}D\{a_n\}$$

es decir, constituye una derivada algebraica en el anillo E, siendo alguna de sus propiedades más importantes:

$$Dq = 1 + q$$

y

$$D[(1+q)^k] = k(1+q)^k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

En años sucesivos T. Fényes, [15], [16],[17] y [18], introduce el llamado cálculo operacional discreto de Mikusinski basado en el producto de Dirichelt.

Sea el conjunto E dotado de las operaciones

$$a+b: \quad \{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$$

$$ab: \quad \{a_n\}\{b_n\} = \{\sum_{\nu|n} a_n b_{\frac{n}{\nu}}\}$$

donde $\nu|n$ significa que ν es divisor de n, las cuales dan a E la estructura de anillo conmutativo sin divisores de cero, cuyo correspondiente cuerpo de fracciones, denominado el cuerpo de operadores discretos de Mikusinski, es denotado por M_D y sus elementos son llamados M_D-operadores.

Se define la función operacional $\delta(\alpha)$ con $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ como

$$\delta(\alpha) = \frac{\delta(N_1)}{\delta(N_2)} \in M_D \quad \alpha = \frac{N_1}{N_2},\ (N_1,\ N_2 \in \mathbb{N})$$

donde

$$\delta(N) = \{\delta(n,N)\}, \quad N \in \mathbb{N}$$

$$\delta(n,N) = \begin{cases} 0 & si \quad n \neq N \\ 1 & si \quad n = N \end{cases}$$

El elemento unitario de E y M_D es precisamente $\delta(1) = 1$. Se denota por E^* el subanillo de M_D cuyos elementos son de la forma

$$x = \frac{a}{\delta(\alpha)}, \quad \alpha \in \mathbb{Q}^+,\ a \in E.$$

Evidentemente, $E \subset E^*$.

La función exponencial e^a para $a \in E$ se define como su serie de Taylor operacional, la cual converge punto a punto.

La definición de la derivada algebraica dada por T. Fenyés es

$$D(a) = \{-a_n.logn\}, \quad a \in E$$

$$D(x) = \frac{bD(a) - aD(b)}{b^2}, \quad a,b \in E,\ b \neq 0,\ x = \frac{a}{b}$$

verificando, entre otras, las propiedades:

- $D\alpha = 0 \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \mathbb{C}$
- $D[\delta(\beta)] = -log\beta\delta(\beta) \quad \beta \in \mathbb{Q}^+$
- $D[\frac{a}{\delta(\epsilon)}] = \frac{-log\frac{n}{\epsilon}.a_n}{\delta(\epsilon)} \in E^* \quad a \in E,\ \epsilon \in \mathbb{Q}^+$
- $D(e^a) = D(a)e^a \quad a \in E$

La integral algebraica, denotada por $\int$, es el operador inverso de D.

Fenyés demostró, en un principio para E^* y luego para M_D, que las tres proposiciones siguientes se verifican.

Proposición I.4.1 *Si $x \in E^*$ y $D(x) = 0$, entonces x es un número arbitrario.*

Proposición I.4.2 *Sean $a \in E$ y $\epsilon \in \mathbb{Q}^+$. Entonces $\int \frac{a}{\delta(\epsilon)}$ existe en el anillo E^* si y sólo si $\epsilon \notin \mathbb{N}$ ó $\epsilon \in \mathbb{N}$ y $a(\epsilon) = 0$. Además,*

$$\int \frac{a}{\delta(\epsilon)} = \frac{-\frac{a_n}{log\frac{n}{\epsilon}}}{\delta(\epsilon)} + c \quad c \in \mathbb{R},\ \mathbb{C}$$

Proposición I.4.3 *La ecuación diferencial algebraica*

$$D(x) - ax = 0 \quad a \in E$$

tiene solución no trivial en E^* si y sólo si $e^{-a_1} \in \mathbb{Q}^+$ en cuyo caso la solución adquiere la forma

$$x = c\delta(e^{-a_1})exp[\int (a - a_1)]$$

Otro ejemplo de derivada algebraica es debido a M. Hayashi [21], el cual considera sobre el conjunto

$$K_{N^*} = \{f/f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C},\ \exists m_f \in \mathbb{Z},\ \forall n < m_f,\ f(n) = 0\}$$

las operaciones suma usual y el producto de Cauchy

$$(f * g)(n) = \sum_{a+b=n} f(a)g(b), \quad f, g \in K_{N^*}, \quad a, b, n \in \mathbb{Z}$$

Se denota por R_{N^*}, el conjunto de todas las funciones definidas sobre $\mathbb{Z}$ que se anulan en $\mathbb{Z} - N^*$ ($N^* = \mathbb{N} - \{0\}$) las cuales se denominan funciones aritméticas ordinarias. R_{N^*} es un dominio conmutativo subintegral y se corresponde con la parte de las funciones analíticas en K_{N^*}, por lo que puede identificarse K_{N^*} con el cuerpo de fracciones de R_{N^*}, además se pueden considerar R_{N^*} y $\mathbb{C}$ como subanillos de K_{N^*}, se identifica un número complejo α con la función

$$f_\alpha(n) = \begin{cases} \alpha & si \quad n = 0 \\ 0 & si \quad n \neq 0 \end{cases}$$

el elemento unidad en K_{N^*} es la función f_1. La función inversa μ de la función constante $l = \{1\}$ en R_{N^*}, denominada función aditiva de Mobius, viene dada por

$$\mu(k) = \begin{cases} 1 & si \quad k = 0 \\ -1 & si \quad k = 1 \\ 0 & si \quad k \neq 0, k \neq 1 \end{cases}$$

El autor introduce la función $h = 1 - \mu$ cuya inversa h^{-1} no pertenece a R_{N^*} y que verifica

$$h^n(k) = \begin{cases} 1 & si \quad n = k \\ 0 & si \quad n \neq k \end{cases}$$

También define una norma en K_{N^*} como $||f|| = 2^{-n(f)}$, siendo $n(f)$ el primer entero para el que $f(k) \neq 0$, y la correspondiente distancia $d(f, g) = ||f - g||$. Con esto se demuestra que K_{N^*} es un cuerpo topológico completo y que R_{N^*} es un subanillo topológico de K_{N^*}. Inmersos en esta estructura topológica se puede comprobar que todo elemento f de K_{N^*} admite un desarrollo de Laurant

$$f = \sum_{n=n(f)}^{\infty} f(n)h^n$$

considerándose a R_{N^*} como el anillo de todas las series de potencias en h.

Basándose en todo lo anterior se define, en K_{N^*} la derivada algebraica

$$Df = \sum_{n=n(f)}^{\infty} nf(n)h^{n-1} \quad para \;\; f = \sum_{n=n(f)}^{\infty} f(n)h^n$$

la cual verifica las siguientes propiedades:

- $Df = 0$ si y sólo si $f = f_\alpha$
- $D(\alpha f) = \alpha Df$ para $\alpha \in \mathbb{C}$

- $Dh = 1$ y $Dh^n = nh^{n-1}$ $n \in \mathbb{Z}$
- $Df^n = nf^{n-1}Df$
- $De^f = e^f Df$ donde se define $e^f = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n}{\Gamma(n+1)}$

En 1970 [47], D. Przeworska-Rolewicz presenta un concepto distinto de derivada algebraica, el cual usará principalmente en el estudio de la invertibilidad de operadores. La autora trabajando en un espacio vectorial X sobre un cuerpo $\mathcal{F}$ de característica cero y para cualquier operador lineal A que transforma a X en él mismo, introduce la siguiente notación: $\mathcal{D}_A$ representa el dominio del operador A, E_A su rango o recorrido, Z_A su núcleo cuya dimensión α_A se denomina nulidad de A y por último I representa al operador identidad.

Definición I.4.1 *Un operador lineal $D : X \to X$ se dice una derivada algebraica si existe un operador lineal $R : X \to X$ tal que*

a) $RX \subset \mathcal{D}_D$ *y* $\mathcal{D}_R = X$

b) $DR = I$

c) *el operador $I - \lambda R$ es invertible para todo escalar λ*

El operador R recibe el nombre de integral algebraica. El núcleo Z_D de D se denomina espacio de las constantes respecto a D.

Algunas propiedades de la derivada y la integral algebraica son expuestas a continuación

i) $D^k R^k = I$ para $k = 1, 2, ...$

ii) $(D - \lambda I)^k (I - \lambda R)^k = D^k$ para cualquier $\lambda \in \mathcal{F}$ y $k = 1, 2, ...$

iii) $(D - \lambda I)^k (I - \lambda R)^k R^k = I$ para cualquier $\lambda \in \mathcal{F}$ y $k = 1, 2, ...$

Estas propiedades permiten establecer de una forma sencilla que

$$Z_{D-\lambda I} = \{(I - \lambda R)^{-1} z \ : \ z \in Z_D\} = (I - \lambda R)^{-1} Z_D$$

lo que lleva a asegurar que la expresión general de la solución de la ecuación

$$(D - \lambda I)x = y, \quad y \in X, \quad \lambda \in \mathcal{F}$$

viene dada por

$$x = (I - \lambda R)^{-1}(Ry + z), \quad donde \quad z \in Z_D$$

en particular si $\lambda = 0$ tenemos que $x = Ry + z$ con $z \in Z_D$ es la expresión general de la solución de la ecuación $Dx = y$.

Las propiedades:

- para cada m, si $z_k \in Z_D$, $z_k \neq 0$ $(k = 0, 1, ..., m)$, entonces los elementos z_0, Rz_1, ..., $R^m z_m$ son linealmente independientes.

- si $m = dim\ Z_D$ y z_1, ..., $z_m \in Z_D$ son linealmente independientes, entonces para cualquier $k = 1, 2, ...$ los elementos $R^k z_1$, ..., $R^k z_m$ son linealmente independientes.

permiten concluir que

$$Z_{D^k} = \{\sum_{m=0}^{k-1} R^m z_m \ :\ z_m \in Z_D\} \quad para \quad k = 1, 2, ...$$

igualdad, ésta, que es útil para obtener la siguiente

$$Z_{(D-\lambda I)^k} = \{(I - \lambda R)^{-k} \textstyle\sum_{m=0}^{k-1} R^m z_m \ :\ z_m \in Z_D\} = (I - \lambda R)^{-k} Z_{D^k}$$

$$(k = 1, 2, ...,\ \lambda \in \mathcal{F})$$

a partir de lo cual es sencillo demostrar que la expresión de la solución general de la ecuación

$$(D - \lambda I)^k x = y, \quad y \in X, \quad \lambda \in \mathcal{F} \ \ (k = 1, 2, ...)$$

viene dada por

$$x = (I - \lambda R)^{-k}(R^k y + \sum_{m=0}^{k-1} R^m z_m) \quad z_0, ..., z_{k-1} \in Z_D$$

que para el caso en que $\lambda = 0$ dice que la solución general de la ecuación $D^k x = y$ es

$$x = R^k y + R^{k-1} z_{k-1} + ... + Rz_1 + z_0$$

En 1972 [48], D. Przeworska-Rolewicz, siguiendo la misma línea, introduce el concepto de operador inicial para una derivada algebraica

Definición I.4.2 *Sea D una derivada algebraica sobre X con una integral algebraica R. Un operador lineal F, definido sobre X, se dice un operador inicial para D si*

a) $FX = Z_D$ *y* $F^2 = F$

b) $FR = 0$ *sobre* X

De la definición se sigue inmediatamente que

- $Z_D \cap Z_F = \{0\}$
- $DF = 0$ sobre X

La llamada fórmula de Taylor para un operador inicial F y para cualquier entero positivo n, viene dada por

$$I = \sum_{k=0}^{n-1} R^k F D^k + R^n D^n \quad \textit{sobre } \mathcal{D}_{D^n}$$

la cual es utilizada, entre otras cosas, (caso $n = 1$) para demostrar que la condición necesaria y suficiente para que F sea un operador inicial para D y R es que

$$F = I - RD \quad \textit{sobre } \mathcal{D}_D$$

y en la obtención de la solución única del problema de valores iniciales

$$Q(D)x = y, \quad y \in X$$

$$FD^j x = y_j, \quad y_j \in Z_D \quad (j = 0, 1, ..., N-1;\ N = grad\, Q(t))$$

donde $Q(D) = \sum_{k=0}^{N} Q_k D^k$ siendo $Q_0, ..., Q_{N-1}$ operadores definidos sobre X y $Q_N = I$. Si escribimos $Q(t,s) = \sum_{k=0}^{N} Q_k t^k s^{N-k}$, entonces

$$Q(D) = Q(I,R)D^N + \sum_{m=0}^{N-1} (\sum_{k=0}^{m} Q_k R^{m-k}) F D^m$$

fórmula, ésta, que junto con la suposición de que $Q(I,R)$ es invertible nos lleva a la expresión de la solución única del problema planteado

$$x = R^N [Q(I,R)]^{-1} [y - \sum_{m=0}^{N-1} (\sum_{k=0}^{m} Q_k R^{m-k}) y_m] + \sum_{k=0}^{N-1} R^k y_k$$

A continuación se muestran tres ejemplos sencillos para ilustrar el concepto de operador inicial

1. Sea $X = C\{[0,1]\}$, $D = \frac{d}{dt}$, $(Rx)(t) = \int_{t_0}^{t} x(u)du$, $(Fx)(t) = x(t_0)$, donde

   $0 \leq t_0 < 1$. Nótese que $dim Z_D = 1$.

2. $X = C\{[0,1] \times [0,1]\}$, $(DX)(t,s) = \frac{\partial x(t,s)}{\partial t}$,
   $(Rx)(t,s) = \int_{t_0}^{t} x(u,s)du$, $(Fx)(t,s) = x(t_0, s)$. En este caso $dim Z_D = \infty$.

3. $X = \{x = \{x_n\} \ : \ n = 1, 2, ...\}$, $Dx = \{x_{n+1} - x_n\}$, $Rx = \{y_n\}$ donde $y_1 = 0$ y $y_n = \sum_{k=1}^{n-1} x_n$ para $n = 2, 3, ...$, $Fx = x_1$.

En 1973 se publica el libro "Equations with transformed argument" [53], en el cual la autora introduce una modificación a su definición de derivada algebraica, generando el concepto de derivada algebraica sobre un anillo. Sea X un anillo conmutativo con estructura de $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

Definición I.4.3 *Si dado un operador lineal D sobre X existe otro operador lineal R actuando sobre X y tal que*

1. $RX \subset \mathcal{D}_D$ *y* $\mathcal{D}_R = X$
2. $DR = I$
3. *el operador $I - Rp$ es invertible para cualquier $p \in X$*
4. $D(xy) = xDy + yDx$ *para todo $x, y \in X$*

entonces D se dice una derivada algebraica sobre X y R es su correspondiente integral algebraica.

En particular, si el anillo X tiene elemento unidad, de la condición tercera puede deducirse que el operador $I - \lambda R$ es invertible para todo escalar λ, lo que nos indicaría que D también sería una derivada algebraica sobre el espacio vectorial X en el sentido de la definición I.4.1.

A partir de esta definición no es complicado comprobar la veracidad de la siguiente proposición

Proposición I.4.4 *Si X posee elemento unidad e, entonces:*

1. $D(\lambda e) = 0$ *para cualquier escalar* λ.

2. $Dx^n = nx^{n-1}Dx$ *para todo* $x \in X$ *y* $n = 1, 2, \ldots$.

3. *Existe* $g \in X$ *tal que* $Dg = e$, *el cual denotamos por* $g = Re$.

Propiedades análogas a las mostradas para la derivada algebraica sobre un espacio vectorial son demostradas y utilizadas en la resolución de ecuaciones que involucran al operador D y sus iteraciones enteras.

Por último comentar que durante este mismo año y los siguientes la autora realizó trabajos como [49], [50] y [51] donde profundizaba algo más en estas ideas, asociando a una derivada algebraica D una familia de operadores$\{R_\gamma\}$ inversos por la derecha de D y los correspondientes operadores iniciales $\{F_\gamma\}$ generalizando las fórmulas y resultados presentados.

I.5 Operadores fraccionarios de Riemann-Liouville y sus generalizados

En [56], se define el operador integración fraccionaria de Riemann-Liouville como

$$I^{\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\xi)^{\nu-1} f(\xi) d\xi \quad (\nu > 0)$$

siendo f localmente integrable en $[0, \infty)$. Es importante resaltar que si $\nu = n \in \mathbb{N}$, entonces I^{ν} se reduce a la n-ésima integral de f.

Este operador verifica, entre otras, las propiedades:

$$\left.\begin{array}{l} I^0 f = \lim\limits_{\nu \to 0} I^{\nu} f = f \\[2ex] D I^{\nu+1} f = I^{\nu} f \quad (D = \frac{d}{dt}) \\[2ex] I^{\nu} I^{\mu} f = I^{\nu+\mu} f \quad (\nu, \mu > 0) \\[2ex] I^{\nu} t^k = \dfrac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(\nu+k+1)} t^{\nu+k} \quad (k+1 > 0,\ \nu \geq 0) \end{array}\right\} \qquad \text{(I.5.1)}$$

La derivada fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\nu > 0$ de una función $f \in C^n([0, \infty))$, se define de la siguiente manera

$$D^{\nu} f = D^n I^{n-\nu} f \quad (n - 1 < \nu \leq n)$$

verificando, entre otras, las propiedades

$$\left.\begin{array}{l} D^{\nu} I^{\mu} f = I^{\mu-\nu} f \quad (\nu, \mu, \mu-\nu \in \mathbb{R}^{+}) \\ \\ D^{\nu} t^{k} = \dfrac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\nu+1)} t^{k-\nu} \quad (-1 < k < \infty,\ 0 < \nu \leq k) \end{array}\right\} \tag{I.5.2}$$

El operador de integración fraccionaria generalizado de Riemann-Liouville estudiado en [34], viene expresado por

$$I_{\beta}^{\nu} f(t) = \frac{\beta}{\Gamma(\nu)} \int_{0}^{t} (t^{\beta} - \xi^{\beta})^{\nu-1} \xi^{\beta-1} f(\xi) d\xi \quad (\nu, \beta > 0)$$

y verifica las leyes de índice

$$\left.\begin{array}{l} I_{\beta}^{\alpha} I_{\beta}^{\delta} = I_{\beta}^{\alpha+\delta} = I_{\beta}^{\delta} I_{\beta}^{\alpha} \\ \\ t^{\beta\alpha} I_{\beta}^{\delta} t^{\beta\gamma} = I_{\beta}^{-\gamma} t^{\beta\delta} I_{\beta}^{-\alpha} \quad (\alpha+\delta+\gamma = 0,\ \beta > 0) \end{array}\right\} \tag{I.5.3}$$

Relacionado con el operador I_{β}^{δ} se define un nuevo operador

Definición I.5.1 *Sea $\beta > 0$ y $f(t)$ función derivable en $[0, \infty)$, definimos entonces el operador*

$$D_{\beta} f(t) = \frac{d}{dt^{\beta}} f(t) = \frac{1}{\beta} t^{1-\beta} D f(t)$$

y haciendo uso de este operador, podemos introducir el siguiente

Definición I.5.2 *Sea $\delta > 0$, $n-1 < \delta \leq n$ y f función derivable hasta el orden n en $[0, \infty)$, entonces*

$$D_{\beta}^{\delta} f = D_{\beta}^{n} I_{\beta}^{n-\delta} f$$

no es complicado comprobar que

$$D_\beta^\delta I_\beta^\delta f = f$$

En el trabajo [2] se introduce el operador, T^β, potencia del argumento

Definición I.5.3 *Sea $\beta \in \mathbb{R}^+$ y sea $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$. Se define el operador*

$$T^\beta f(t) = f(t^\beta)$$

teniendo como propiedades más importantes:

$$\left.\begin{array}{l} T^1 f(t) = f(t) \\ \\ T^\alpha T^\beta f(t) = T^\beta T^\alpha f(t) = T^{\alpha\beta} f(t) \\ \\ T^\beta T^{\frac{1}{\beta}} = T^1 \end{array}\right\} \qquad \text{(I.5.4)}$$

y se demuestran las siguientes proposiciones

Proposición I.5.1 *Si f es localmente integrable en compactos de $[0, \infty)$, entonces*

$$T^\beta I^\delta f = I_\beta^\delta T^\beta f$$

o de forma equivalente

$$I^\delta = T^{\frac{1}{\beta}} I_\beta^\delta T^\beta \quad , \quad I_\beta^\delta = T^\beta I^\delta T^{\frac{1}{\beta}}$$

Proposición I.5.2 *Si f es derivable hasta el orden n en $[0,\infty)$, se cumple que*

$$T^{\beta}D^{\delta}f = D^{\delta}_{\beta}T^{\beta}f$$

o bien

$$D^{\delta} = T^{\frac{1}{\beta}}D^{\delta}_{\beta}T^{\beta} \quad , \quad D^{\delta}_{\beta} = T^{\beta}D^{\delta}T^{\frac{1}{\beta}}$$

Capítulo II

La derivada de Mikusinski en la resolución de ecuaciones diferenciales

II.1 Introducción

En este capítulo se comienza presentando un pequeño resumen, basado en los trabajos de K. Yosida [62]y [63], W. Kierat y K. Skornik [24], [25],[26] y [57], en los cuales se conjuga el uso del cálculo operacional de Mikusinski y su derivada algebraica para resolver múltiples ecuaciones diferenciales.

En la segunda parte, usando las mismas técnicas que los mencionados autores, se presenta la resolución de ciertas ecuaciones diferenciales de orden fraccionario. La mayoría de los resultados expuestos en esta parte del capítulo están recogidos en [10].

II.2 La derivada algebraica y la ecuación diferencial de Laplace

En [62] y [63], K.Yosida, muestra que la ecuación de Laplace

$$\begin{cases} a_2 t y''(t) + (a_1 t + b_1) y'(t) + (a_0 t + b_0) y(t) = 0 \\ \\ y(0) = 0 \quad (si\ a_2 \neq b_1) \end{cases} \tag{II.2.1}$$

se puede escribir, haciendo uso de (I.3.1), (I.3.2) y la derivada algebraica de Mikusinski, como:

$$-a_2 \mathcal{D}[s^2 y(t) - y'(0)] - a_1 \mathcal{D}[s y(t)] + b_1 s y(t) - a_0 \mathcal{D} y(t) + b_0 y(t) = 0$$

y aplicando las propiedades de la derivada algebraica, se obtiene la ecuación operacional

$$-(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)\mathcal{D} y = (2a_2 s + a_1 - b_1 s - b_0) y$$

que puede ser escrita, en la forma

$$\frac{\mathcal{D} y}{y} = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{(-2a_2 + b_1)s - a_1 + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

y que siempre que el polinomio $p(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$ admita dos raíces distintas α_1 y α_2 de modo que

$$\frac{q(s)}{p(s)} = \frac{\gamma_1}{z - \alpha_1} + \frac{\gamma_2}{z - \alpha_2} \quad (\gamma_1\ ,\ \gamma_2 \in \mathbb{C})$$

entonces el operador

$$y = C(s - \alpha_1)^{\gamma_1}(s - \alpha_2)^{\gamma_2} \quad (C \neq 0,\ \alpha_1,\ \alpha_2\ \textit{operadores numericos})$$

es solución de la ecuación operacional.

Para ello demuestra en primer lugar que la acción de la derivada algebraica de Mikusinski sobre las potencias naturales de los operadores l y s, puede extenderse a cualquier potencia, incluso compleja, tal y como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición II.2.1 *Sea l el operador $lf(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ y s el operador inverso algebraico de l, es decir, $s = \frac{1}{l}$, entonces*

a) $\mathcal{D}l^\gamma = -\gamma l^{\gamma+1}$

b) $\mathcal{D}s^\gamma = \gamma s^{\gamma-1}$

y las dos propiedades siguientes, la segunda de las cuales es muy importante en la resolución de la ecuación operacional y la primera es utilizada para demostrar la segunda; que se dan como:

Proposición II.2.2

a) $\mathcal{D}(1-\alpha l)^\gamma = \gamma\alpha l^2(1-\alpha l)^{\gamma-1}$

b) $\mathcal{D}(s-\alpha)^\gamma = \gamma(s-\alpha)^{\gamma-1}$

El autor ilustra el empleo de los resultados obtenidos con algunos ejemplos, tales como

Ejemplo 1 (La ecuación diferencial de Bessel):

Dada la ecuación diferencial

$$t^2x''(t) + tx'(t) + (t^2-\alpha^2)x(t) = 0$$

que con el cambio de variable $x(t) = t^{-\alpha}y(t)$, se transforma en

$$ty''(t) - (2\alpha-1)y'(t) + ty(t) = 0$$

ecuación del tipo (II.2.1), con $a_0 = 1$, $a_2 = 1$, $b_1 = -(2\alpha-1)$, $a_1 = b_0 = 0$ y cuya expresión operacional, siguiendo los pasos anteriores, viene dada por

$$\frac{\mathcal{D}y}{y} = \frac{-\alpha-\frac{1}{2}}{s+i} + \frac{-\alpha-\frac{1}{2}}{s-i}$$

teniendo en cuenta que

$$\frac{\mathcal{D}(v_1.v_2)}{v_1.v_2} = \frac{\mathcal{D}v_1}{v_1} + \frac{\mathcal{D}v_2}{v_2}$$

y que

$$\frac{\mathcal{D}(s+\alpha)^{\gamma}}{(s+\alpha)^{\gamma}} = \frac{\gamma}{(s+\alpha)}$$

es fácil deducir la expresión de la solución de la ecuación operacional como

$$y = C(s+i)^{-\alpha-\frac{1}{2}}(s-i)^{-\alpha-\frac{1}{2}} = C(s^2+1)^{-\alpha-\frac{1}{2}} =$$
$$= Cl^{2\alpha+1}(1+l^2)^{-\alpha-\frac{1}{2}} = C\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\alpha-\frac{1}{2}}{k} l^{2k+2\alpha+1}$$

Dado que,

$$\binom{-\alpha-\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-\alpha-\frac{1}{2})(-\alpha-\frac{3}{2})...(-\alpha-k+\frac{1}{2})}{k!} =$$
$$= (-1)^k\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+3)...(2\alpha+2k-1)}{2^k k!} =$$
$$= \frac{(-1)^k}{2^k k!}\frac{(2\alpha+1)(2\alpha+2)...(2\alpha+2k)}{2^k(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+k)} = \frac{(-1)^k}{2^k}\frac{\Gamma(2\alpha+2k+1)\Gamma(\alpha+1)}{k!\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(\alpha+k+1)}$$

eligiendo $C = \dfrac{\Gamma(2\alpha+1)}{2^{2\alpha}\Gamma(\alpha+1)}$ y haciendo uso de la identificación de las potencias de l, se obtiene

$$y = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1))}(\frac{t}{2})^{2k+2\alpha}$$

y por tanto, al ser multiplicada por $t^{-\alpha}$ se obtiene la función de Bessel de primera especie y de orden α

$$x(t) = J_{\alpha}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\alpha+k+1))}(\frac{t}{2})^{2k+\alpha}$$

sin necesidad de utilizar el, tan conocido, método de Frobenius

Ejemplo 2 (La ecuación diferencial de Laguerre):

Para la ecuación diferencial

$$ty''(t) - (t + \alpha - 1)y'(t) + (\alpha + \lambda)y(t) = 0$$

su expresión operacional es

$$\frac{\mathcal{D}y}{y} = \frac{-1 - \alpha - \lambda}{s} + \frac{\lambda}{s-1}$$

con solución

$$y = Cs^{-1-\alpha-\lambda}(s-1)^{\lambda} = Cl^{1+\alpha}(1-l)^{\lambda} = C\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\lambda}{k}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+\alpha+1)}t^{k+\alpha}$$

la cual para $C = \dfrac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}$, $\lambda = n \in \mathbb{N}$ y multiplicada por $t^{-\alpha}$, queda como

$$t^{-\alpha}y = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-k}\frac{(-t)^k}{k!} = L_n^{(\alpha)}(t)$$

es decir, el polinomio de Laguerre de grado n y orden α.

Basándose en estos trabajos de Yosida, W. Kierat publica en 1993 [24]. En este trabajo se resuelve la ecuación

$$a_n t x^{(n)}(t) + (a_{n-1}t + b_{n-1})x^{(n-1)}(t) + ... + (a_0 t + b_0)x(t) = 0 \quad \text{(II.2.2)}$$

donde $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ para $i = 0, 1, ..., n$; $t \in [0, \infty)$

El autor define la exponecial del operador $\gamma(s-\alpha)^{-k}$, como la suma de la serie de potencias

$$exp[\gamma(s-\alpha)^{-k}] = 1 + \frac{\gamma(s-\alpha)^{-k}}{2!} + \frac{\gamma^2(s-\alpha)^{-2k}}{3!} + ...$$

serie convergente dado que es de las que comparecen en la proposición I.3.9, y demuestra que

$$\mathcal{D}exp[\gamma(s-\alpha)^{-k}] = exp[\gamma(s-\alpha)^{-k}]\gamma(-k)(s-\alpha)^{-k-1}$$

lo que permite, en unión de las propiedades ya vistas, resolver la ecuación

$$\frac{\mathcal{D}x}{x} = \frac{Q(s)}{P(s)} \tag{II.2.3}$$

siendo P y Q polinomios con coeficientes complejos y $grad\ Q < grad\ P$. Para ello, se escribe la ecuación (II.2.3) como

$$\frac{\mathcal{D}x}{x} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k-i} \frac{\gamma_{ij}}{(s-\alpha_i)^j} \qquad (\alpha_i,\ \gamma_{ij} \in \mathbb{C}) \tag{II.2.4}$$

siendo los números complejos α_i las raíces del polinomio

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0, \quad k_i \in \mathbb{N}, \ \ k_1 + k_2 + ... + k_r = grad\ P.$$

a partir de aquí y dado que

$$\frac{\mathcal{D}(v_1.v_2...v_n)}{v_1.v_2...v_n} = \frac{\mathcal{D}v_1}{v_1} + \frac{\mathcal{D}v_2}{v_2} + ... + \frac{\mathcal{D}v_n}{v_n}$$

se pueden resolver de forma separada las ecuaciones

$$\frac{\mathcal{D}x}{x} = \frac{\gamma_{ij}}{(s-\alpha_i)^j} \tag{II.2.5}$$

si v_{ij} es solución de (II.2.5), entonces el elemento

$$v = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{k_i} v_{ij}$$

es una solución de la ecuación (II.2.4).

Dado que

$$c(s-\alpha_i)^{\gamma_{i1}} \qquad (c \in \mathbb{C})$$

es una solución de (II.2.5) para $j = 1$ y que

$$c\ exp[\frac{\gamma_{ij}}{-j+1}(s-\alpha_i)^{-j+1}]$$

lo es para $j = 2, 3, ..., k_i$. Se concluye que

$$v = C \prod_{i=1}^{r} (s-\alpha_i)^{\gamma_{i1}} \prod_{j=2}^{k_i} exp[\frac{\gamma_{ij}}{-j+1}(s-\alpha_i)^{-j+1}]$$

satisface la ecuación (II.2.4).

Por último comentar que en caso de que v esté en $\mathcal{C}$, constituye una solución de la ecuación diferencial (II.2.2), ya que ésta puede ser escrita en la forma (II.2.3) con ayuda del cálculo operacional de Mikusinski.

A modo de ilustración, se aportan como ejemplos la resolución de las siguientes ecuaciones, estudiadas por N. Hayek [22]:

Ejemplo 3

$$\begin{cases} ty'' + (1-\nu)y' - y = 0 \\ \\ \lim\limits_{t\to 0^+} y(t) = 0 \quad (\nu > 0) \end{cases}$$

ecuación del tipo (II.2.1), con $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $b_0 = -1$ y $b_1 = 1-\nu$. Por lo que dicha ecuación puede expresarse, en forma operacional, como

$$\frac{\mathcal{D}y}{y} = \frac{(-\nu-1)s-1}{s^2} = \frac{-\nu-1}{s} + \frac{-1}{s^2}$$

la cual admite como solución al operador

$$y = s^{-\nu-1}exp(s^{-1}) = s^{-\nu-1}[1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{2!s^2} + ... + \frac{1}{n!s^n} + ...] =$$

$$= l^{1+\nu}[1 + l + \frac{l^2}{2!} + ... + \frac{l^n}{n!} + ...]$$

el cual se identifica con la función

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l^{n+1+\nu}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+\nu}}{n!\Gamma(n+1+\nu)} = t^{\nu}C_{\nu}(-t) = t^{\nu}E_{\nu}(t)$$

siendo $E_{\mu}(t)$ la función modificada de Bessel-Clifford de primera especie y de orden μ , [22].

No presenta dificultad comprobar que efectivamente $y(t)$ es solución de la ecuación de partida, haciendo uso de las igualdades

$$C'_{\mu}(t) = -C_{\mu+1}(t)$$

$$tC_{\mu+2}(t) - (\mu+1)C_{\mu+1}(t) + C_{\mu}(t) = 0$$

Por otro lado, atendiendo a la expresión operacional de $t^{\mu}E_{\mu}(t)$, es fácil comprobar que se verifican las dos igualdades siguientes:

i) $D^{\delta}[t^{\mu}E_{\mu}(t)] = D^{\delta}l^{1+\mu}exp[s^{-1}] = l^{1+\mu-\delta}exp[s^{-1}] = t^{\mu-\delta}E_{\mu-\delta}(t)$ $(\mu - \delta > 0)$

ii) $I^{\delta}[t^{\mu}E_{\mu}(t)] = l^{1+\mu+\delta}exp[s^{-1}] = t^{\mu+\delta}E_{\mu+\delta}(t)$

siendo I^{δ} y D^{δ} los ya mencionados operadores de Riemann-Liouville. Se puede observar que siguen un comportamiento similar al caso en que $\delta = n \in \mathbb{N}$, como fué estudiado en [22].

Ejemplo 4

$$\begin{cases} ty'' + (1-\nu)y' + y = 0 \\ \lim\limits_{t\to 0^+} y(t) = 0 \quad (\nu > 0) \end{cases}$$

en este caso, $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $b_0 = 1$ y $b_1 = 1 - \nu$. Por lo tanto se transforma la ecuación en

$$\frac{\mathcal{D}y}{y} = \frac{(-\nu-1)s+1}{s^2} = \frac{-\nu-1}{s} + \frac{1}{s^2}$$

la cual admite como solución al operador

$$y = s^{-\nu-1}exp(-s^{-1}) = s^{-\nu-1}[1 - \frac{1}{s} + ... + \frac{(-1)^n}{n!s^n} + ...] =$$

$$= l^{1+\nu}[1 - l + \frac{l^2}{2!} - ... + \frac{(-1)^n l^n}{n!} + ...]$$

el cual se identifica con la función

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{l^{n+1+\nu}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+\nu}}{n!\Gamma(n+1+\nu)} = t^{\nu} C_{\nu}(t)$$

siendo $C_{\mu}(t)$ la función de Bessel-Clifford de primera especie y de orden μ , [22].

Nuevamente podemos comprobar la veracidad de las siguientes igualdades:

i) $D^{\delta}[t^{\mu} C_{\mu}(t)] = t^{\mu-\delta} C_{\mu-\delta}(t) \quad (\mu - \delta > 0)$

ii) $I^{\delta}[t^{\mu} C_{\mu}(t)] = t^{\mu+\delta} C_{\mu+\delta}(t)$

En la misma línea en 1993 [25], 1994[57] y 1995 [26] W. Kierat y K. Skornik presentan trabajos en los que resuelven la ecuación diferencial de Laguerre

$$tx''(t) + (1-t)x'(t) - ax(t) = 0 \quad a \in \mathbb{C}$$

obteniendo la solución operacional

$$x_a = s^{a-1}(s-1)^{-a} = l(1-l)^{-a}$$

la cual como función de $\mathcal{C}$ se representa por

$$x_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} (-1)^k \frac{t^k}{k!}$$

y que para los valores de $a = -k$ con $k = 0, 1, 2, 3, ...$ representa al polinomio de Laguerre L_k.

Haciendo uso de la expresión operacional es muy fácil concluir la propiedad de convolución

$$\frac{d}{dt}[x_a * x_b] = x_{a+b}$$

la cual pone de manifiesto que los polinomios de Laguerre verifican

$$\frac{d}{dt}\int_0^t L_m(t-\tau)L_n(\tau)d\tau = L_{m+n}(t)$$

De forma análoga y basándose en el hecho de que dado el operador $\mathcal{T}^\alpha f(t) = e^{\alpha t}f(t)$, se puede escribir

$$\mathcal{T}^\alpha x_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-a}{k}(-1)^k\frac{t^k}{k!}e^{\alpha t}$$

cuya representación en $\mathcal{M}$ viene dada por

$$x_{a,\alpha} = (s-\alpha)^{-1}[1 - \frac{1}{s-\alpha}]^{-a}$$

no es complicado demostrar que

$$(\frac{d}{dt} - \alpha)[x_{a,\alpha} * x_{b,\alpha}] = x_{a+b,\alpha}$$

y atendiendo de nuevo al hecho de que para $a = -k$ y $\alpha = \frac{-1}{2}$ la función $\mathcal{T}^\alpha x_a(t)$ representa la función de Laguerre de orden k, se establece que

$$(\frac{d}{dt} + \frac{1}{2})\int_0^t \text{Ł}_m(t-\tau)\text{Ł}_n(\tau)d\tau = \text{Ł}_{m+n}(t)$$

donde $Ł_k$ denota a la mencionada función de Laguerre.

Para finalizar esta sección se ha de resaltar que aunque, tal y como reflejan en su trabajo [26] los autores, la propiedad de convolución relativa a los polinomios de Laguerre fue probada por Ditkin y Prudnikov [14], sin hacer uso del cálculo operacional y que la que concierne a las funciones de Laguerre puede demostrarse usando la transformada de Fourier. Se aprecia que, siempre y cuando se esté familiarizado con el cálculo operacional, el método empleado es bastante más sencillo y ante todo plantea una vía no excesivamente complicada para obtener propiedades de convolución análogas para otras funciones especiales. De hecho esta fue una de las principales ideas que motivó el desarrollo, en parte, de esta memoria.

II.3 Ecuaciones diferenciales de orden fraccionario

En esta sección se trasladarán las técnicas usadas en [25], [26], [62] y [63], a la resolución de cierta ecuación diferencial de orden fraccionario en la que comparece el operador diferencial de Riemann-Liouville D^{δ}, asociando a éste la convolución de Mikusinski.

Siguiendo a J. Mikusinski [36], se considera el anillo de funciones

$$\mathcal{C}^n = \{f(t) : f(t) \in C^n([0,\infty)) \ , \ [D^k f(t)]_{t=0} = 0, \quad k = 0,1,2,...,n-2\}$$

y la ecuación diferencial de orden fraccionario

$$\begin{cases} tD^{\delta+1}x(t) + (1-t)D^{\delta}x(t) - aD^{\delta-1}x(t) = 0 \\ \\ (a \in \mathbb{C} \ , \ \delta > 1 \ , \ \delta \in \mathbb{R}) \end{cases} \tag{II.3.1}$$

donde, como se sabe

$$D^{\delta} = D^n I^{n-\delta} \quad (n-1 < \delta \leq n) \tag{II.3.2}$$

y

$$\begin{cases} I^{\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\xi)^{\nu-1} f(\xi) d\xi \ \ (\nu > 0) \\ \\ I^0 f(t) = f(t) \end{cases} \tag{II.3.3}$$

siendo I^{ν} el operador integral de orden ν de Riemann-Liouville.

Usando (II.3.2), y (II.3.3) y efectuando el cambio $y(t) = I^{n-\delta}x(t)$, la ecuación (II.3.1) se transforma en

$$tD^{n+1}y(t) + (1-t)D^n y(t) - aD^{n-1}y(t) = 0 \tag{II.3.4}$$

Para resolver (II.3.4) se hará uso de la siguiente proposición:

Proposición II.3.1 *Sea la función $y(t) = I^{n-\delta}x(t)$, entonces*

$$[D^k y(t)]_{t=0} = [\frac{d^k y(t)}{dt^k}]_{t=0} = 0 \quad (k = 0,1,...,n-1)$$

Demostración.

La función $D^k y(t)$ puede ser expresada, (teorema 3, Pag 62) [42], por

$$D^k y(t) = D^k I^{n-\delta} x(t) =$$

$$= I^{n-\delta} D^k x(t) + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{t^{n-\delta-k+r}}{\Gamma(n-\delta-k+r+1)} [D^r x(t)]_{t=0}$$

y dado que $x(t) \in \mathcal{C}^n$ y $k = 0, 1, ..., n-1$, es fácil comprobar que efectivamente

$$[D^k y(t)]_{t=0} = [I^{n-\delta} D^k x(t)]_{t=0} = 0$$

A partir de la proposición II.3.1 y usando la derivada algebraica de Mikusinski

$$\mathcal{D} f(t) = -t f(t)$$

se establece que

Proposición II.3.2 *La función*

$$y_{a,n}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} (-1)^k \frac{t^{k+n-1}}{\Gamma(k+n)}$$

es solución de la ecuación (II.3.4). Además se verifica que

$$\frac{d^n}{dt^n}[y_{a,n} * y_{b,n}](t) = y_{a+b,n}(t)$$

Demostración.

Usando la igualdad (I.3.2),

$$D^n f(t) = s^n f(t) - s^{n-1}[f'(t)]_{t=0} - s^{n-2}[f^{(2)}(t)]_{t=0} - \dots - [f^{(n-1)}(t)]_{t=0}$$

y la proposición II.3.1 la ecuación (II.3.4) se transforma en

$$-\mathcal{D}[s^{n+1}y(t) - y^{(n)}(0)] + s^n y(t) + \mathcal{D}[s^n y(t)] - as^{n-1}y(t) = 0$$

que con el uso de las propiedades de la derivada algebraica de Mikusinski, se reduce a

$$(s^n - s^{n+1})\mathcal{D}y(t) + s^{n-1}(n - a - ns)y(t) = 0$$

o bien a su expresión equivalente

$$\frac{\mathcal{D}y(t)}{y(t)} = \frac{n-a-ns}{s^2-s} = \frac{a-n}{s} + \frac{-a}{s-1}$$

una de cuyas soluciones viene dada por

$$y_{a,n}(t) = s^{a-n}(s-1)^{-a} = l^n(1-l)^{-a} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} (-1)^k \frac{t^{k+n-1}}{\Gamma(k+n)}$$

Usando la expresión operacional de $y_{a,n}(t)$ es fácil demostrar la propiedad de convolución ya que

$$y_{a,n}(t) * y_{b,n}(t) = l^n(1-l)^{-a} l^n (1-l)^{-b} = l^{2n}(1-l)^{-(a+b)}$$

y dado que l^n se identifica con I^n, siendo I el operador integración, tenemos que

$$\frac{d^n}{dt^n}[y_{a,n} * y_{b,n}](t) = y_{a+b,n}(t)$$

A partir de estos resultados y efectuando los correspondientes cálculos, es fácil establecer la siguiente proposición

Proposición II.3.3 *La función $x_{a,\delta}(t) = D^{n-\delta}y_{a,n}(t)$ es solución de la ecuación (II.3.1).*

A continuación comprobaremos que la función $x_{a,\delta}(t)$ verifica propiedades análogas a las de $y_{a,n}(t)$.

Proposición II.3.4 *La función $x_{a,\delta}(t)$ solución de la ecuación (II.3.1) verifica que:*

a) $x_{a,\delta}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} (-1)^k \frac{t^{k+\delta-1}}{\Gamma(k+\delta)} = l^\delta(1-l)^{-a}$

b) $D^\delta[x_{a,\delta} * x_{b,\delta}](t) = x_{a+b,\delta}(t)$

c) $x_{a,\delta}(t) = \dfrac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\ {}_1F_1(a,\delta,t)$

Demostración.

No es difícil probar **a)**, usando las dos igualdades siguientes

- $D^{\alpha}t^k = \dfrac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)}t^{k-\alpha} \quad (-1 < k < \infty,\ 0 < \alpha \leq k)$ [2]

- $l^{\delta} = \dfrac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}$ [36]

ya que

- $x_{a,\delta}(t) = D^{n-\delta}y_{a,n}(t) = D^{n-\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-a}{k}(-1)^k\dfrac{t^{k+n-1}}{\Gamma(k+n)} =$
$= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-a}{k}(-1)^k\dfrac{t^{k+\delta-1}}{\Gamma(k+\delta)} = l^{\delta}(1-l)^{-a}$

La demostración de **b)** es consecuencia inmediata de **a)**, teniendo en cuenta que l^{δ} se identifica con el operador I^{δ}, integral de Riemann-Liouville de orden δ, el cual es inverso por la derecha de D^{δ}.

Para **c)**, se puede representar la función $x_{a,\delta}(t)$, según **a)** por

$$x_{a,\delta}(t) = \frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{(\delta)_k}\frac{t^k}{\Gamma(k+1)} = \frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\ {}_1F_1(a,\delta,t)$$

siendo ${}_1F_1(a,\delta,t)$ la función hipergeométrica confluente y donde, en [59],

- $\dbinom{-a}{k} = \dfrac{(-1)^k(a)_k}{\Gamma(k+1)}$

- $\Gamma(k+\delta) = (\delta)_k\Gamma(\delta)$

- $(a)_0 = 1 \ ; \ (a)_n = a(a+1)(a+2)...(a+n-1) \qquad n = 1,2,3,....$

II.4 Las funciones $x_{a,\delta,\alpha}(t)$.

Siguiendo un proceso similar al usado en la sección anterior, se pueden obtener resultados análogos para las funciones

$$x_{a,\delta,\alpha}(t) = e^{\alpha t} x_{a,\delta}(t)$$

Proposición II.4.1 *La función $y_{a,n,\alpha}(t) = e^{\alpha t} y_{a,n}(t)$, donde $y_{a,n}(t)$ es solución de la ecuación diferencial (II.3.4), verifica que:*

$$(\frac{d}{dt} - \alpha)^n [y_{a,n,\alpha} * y_{b,n,\alpha}](t) = y_{a+b,n,\alpha}(t)$$

Demostración.

La demostración se basa en el hecho de que $e^{\alpha t} \dfrac{t^{n-1}}{\Gamma(n)} = \dfrac{1}{(s-\alpha)^n}$ (cf., [36]), con lo que

$$y_{a,n,\alpha}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} (-1)^k \frac{t^{k+n-1}}{\Gamma(k+n)} e^{\alpha t} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} (-1)^k \frac{1}{(s-\alpha)^{k+n}} =$$

$$= \frac{1}{(s-\alpha)^n} [1 - \frac{1}{s-\alpha}]^{-a} = l^n (1-\alpha l)^{-n} [\frac{1-(\alpha+1)l}{1-\alpha l}]^{-a}$$

y para concluir

$$(\frac{d}{dt} - \alpha)^n [l^n (1-\alpha l)^{-n}] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k D^k \alpha^{n-k} l^n (1-\alpha l)^{-n} =$$

$$= (1-\alpha l)^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (\alpha l)^{n-k} = 1$$

Ahora se probará la misma propiedad para las funciones $x_{a,\delta,\alpha}(t) = e^{\alpha t} x_{a,\delta}(t)$, siendo $x_{a,\delta}(t)$ una solución de la ecuación (II.3.1). Para ello es necesario introducir primero la siguiente definición

Definición II.4.1 *Sea* $D = \dfrac{d}{dt}$ *el operador derivada usual y* $\delta > 1$ *un número real, definimos el operador*

$$(D-\alpha)^{\delta} f(t) = \begin{cases} D^{\delta} f(t) & si\ \alpha = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\delta}{k} (-1)^k \alpha^{\delta-k} D^k f(t) & si\ \alpha \neq 0 \end{cases} \tag{II.4.1}$$

Obviamente esta definición sólo tiene sentido sobre el conjunto de las funciones $f(t)$ para las que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\delta}{k} (-1)^k \alpha^{\delta-k} D^k f(t)$$

es convergente.

No obstante se observa que dicho conjunto es no vacío, ya que al menos los polinomios pertenecen a él, dado que para ellos la serie se trunca convirtiéndose en una suma finita.

Con el fin de saber si el operador $(D-\alpha)^{\delta}$ puede ser aplicado sobre la función $x_{a,\delta,\alpha}(t)$, es necesario trabajar en el cuerpo de fracciones de Mikusinski [36], y así establecer la siguiente proposición.

Proposición II.4.2 *La función $x_{a,\delta,\alpha}(t)$, se puede expresar como*

$$x_{a,\delta,\alpha}(t) = (s-\alpha)^{-\delta}(1-\frac{1}{s-\alpha})^{-a} = l^{\delta}(1-\alpha l)^{-\delta}[\frac{1-(\alpha+1)l}{1-\alpha l}]^{-a}$$

Demostración.

Dado que

$$x_{a,\delta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-a}{k}(-1)^k\frac{t^{k+\delta-1}}{\Gamma(k+\delta)}$$

y

$$\frac{1}{(s-\alpha)^{\delta}} = l^{\delta}(1-\alpha l)^{-\delta} = l^{\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\delta}{k}(-1)^k(\alpha l)^k =$$

$$= \frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha t)^k}{\Gamma(k+1)} = \frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}e^{\alpha t}$$

se tiene

$$x_{a,\delta,\alpha}(t) = e^{\alpha t}x_{a,\delta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-a}{k}(-1)^k\frac{t^{k+\delta-1}}{\Gamma(k+\delta)}e^{\alpha t} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-a}{k}(-1)^k(\frac{1}{s-\alpha})^{k+\delta} = (\frac{1}{s-\alpha})^{\delta}(1-\frac{1}{s-\alpha})^{-a}$$

La definición II.4.1 fue enunciada en términos de funciones, pero no plantea problemas el generalizarla para los elementos del cuerpo de fracciones de Mikusinski $\mathcal{M}$, lo que permite establecer la siguiente proposición.

Proposición II.4.3 *Sea* $m_{a,\delta,\alpha} = (s-\alpha)^{-\delta}(1-\frac{1}{s-\alpha})^{-a}$ *perteneciente a* $\mathcal{M}$*, entonces*

$$(D-\alpha)^{\delta}[m_{a,\delta,\alpha}.m_{b,\delta,\alpha}] = m_{a+b,\delta,\alpha}$$

Demostración.

Del hecho que

$$(D-\alpha)^{\delta}[l^{\delta}(1-\alpha l)^{-\delta}] = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\delta}{k}(-1)^k\alpha^{\delta-k}l^{\delta-k}(1-\alpha l)^{-\delta} =$$

$$(1-\alpha l)^{-\delta}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\delta}{k}(-1)^k(\alpha l)^{\delta-k} = 1$$

y

$$(s-\alpha)^{-\delta} = l^{\delta}(1-\alpha l)^{-\delta}$$

se deduce que

$$(D-\alpha)^{\delta}[m_{a,\delta,\alpha}.m_{b,\delta,\alpha}] = (D-\alpha)^{\delta}(s-\alpha)^{-2\delta}(1-\frac{1}{s-\alpha})^{-(a+b)} =$$

$$= (s-\alpha)^{-\delta}(1-\frac{1}{s-\alpha})^{-(a+b)} = m_{a+b,\delta,\alpha}.$$

Este último resultado permite concluir la veracidad de la siguiente proposición.

Proposición II.4.4 *Dadas las funciones* $x_{a,\delta,\alpha}(t)$ *y* $x_{b,\delta,\alpha}(t)$*, se tiene que*

$$(D-\alpha)^{\delta}[x_{a,\delta,\alpha} * x_{b,\delta,\alpha}](t) = x_{a+b,\delta,\alpha}(t) \qquad \text{(II.4.2)}$$

Demostración.

$x_{a,\delta,\alpha}(t)$ y $x_{b,\delta,\alpha}(t)$ son funciones continuas así que pertenecen a $\mathcal{C}$, el anillo generador del cuerpo de fracciones de Mikusinski, por lo que pueden ser identificadas con los operadores $m_{a,\delta,\alpha}$ y $m_{b,\delta,\alpha}$ respectivamente. lo que lleva, haciendo uso de la proposición II.4.3, a garantizar (II.4.2).

II.5 Ecuaciones diferenciales más generales.

En [62], se demostró, tal y como ya se comentó al inico de este capítulo, que la ecuación diferencial

$$a_2 t y^{(2)}(t) + (a_1 t + b_1) y'(t) + (a_0 t + b_0) y(t) = 0 \tag{II.5.1}$$

se puede escribir como

$$\frac{\mathcal{D}y}{y} = \frac{q(s)}{p(s)} = \frac{(-2a_2 + b_1)s - a_1 + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

y que si la ecuación algebraica $p(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$, tiene dos raíces distintas α_1 y α_2, entonces

$$y = C(s - \alpha_1)^{\gamma_1}(s - \alpha_2)^{\gamma_2}$$

satisface la ecuación (II.5.1), siendo C una constante no nula y γ_1 , γ_2 números complejos verificando

$$\frac{q(s)}{p(s)} = \frac{\gamma_1}{s-\alpha_1} + \frac{\gamma_2}{s-\alpha_2}$$

Se recuerda también que haciendo uso del trabajo de Yosida, W. Kierat [24], determinó soluciones particulares de la ecuación diferencial.

$$a_n t x^{(n)}(t) + (a_{n-1}t + b_{n-1})x^{(n-1)}(t) + ... + (a_0 t + b_0)x(t) = 0 \quad \text{(II.5.2)}$$

transformándola en

$$\frac{\mathcal{D}x}{x} = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

concluyendo que el elemento de $\mathcal{M}$

$$v = C\prod_{i=1}^{r}(s-\alpha_i)^{\gamma_{i1}}\prod_{j=2}^{k_i} exp[\frac{\gamma_{ij}}{-j+1}(s-\alpha_i)^{-j+1}] \quad \text{(II.5.3)}$$

satisfacía la ecuación (II.5.2), siempre que v representase una función de $\mathcal{C}$, donde $C \in \mathbb{C}$, los números complejos α_i son las raíces del polinomio $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_0$ ($k_i \in \mathbb{N}$, $k_1 + ... + k_r = grad\, P$) y $\gamma_{ij} \in \mathbb{C}$ verificando

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{k_i}\frac{\gamma_{ij}}{(s-\alpha_i)^j}$$

El propósito de esta sección es el mostrar que el método expuesto en las secciones previas puede ser usado para determinar soluciones particulares de las ecuaciones diferenciales de orden fraccionario

$$a_n t D^{\delta} x(t) + (a_{n-1} t + b_{n-1}) D^{\delta-1} x(t) + ... + (a_0 t + b_0) D^{\delta-n} x(t) = 0 \quad \text{(II.5.4)}$$

donde

$$x(t) \in \mathcal{C}^n \quad , \quad n-1 < \delta \leq n \quad , \quad \delta > 1$$

y dado que $\delta - n \leq 0$, por $D^{\delta-n}x(t)$ se entenderá $I^{n-\delta}x(t)$.

Sea $y(t) = I^{n-\delta}x(t)$. La ecuación (II.5.4) puede ser escrita como,

$$a_n t D^n y(t) + (a_{n-1} t + b_{n-1}) D^{n-1} y(t) + ... + (a_0 t + b_0) y(t) = 0$$

por lo que haciendo uso de (II.5.3) y del hecho de que $x(t) = D^{n-\delta}y(t)$, se concluye

Corolario II.5.1 *Si el operador*

$$w = C s^{n-\delta} \prod_{i=1}^{r} (s - \alpha_i)^{\gamma_{i1}} \prod_{j=2}^{k_i} exp[\frac{\gamma_{ij}}{-j+1}(s-\alpha_i)^{-j+1}]$$

representa una función de $\mathcal{C}^n$, entonces satisface la ecuación (II.5.4).

Ejemplo 5

Dada la ecuación

$$\begin{cases} tD^{\delta}x(t) + (-2\alpha t + 1)D^{\delta-1}x(t) + (\alpha^2 t + \beta)D^{\delta-2}x(t) = 0 \\ \\ (x(t) \in \mathcal{C}^2, \;\; 1 < \delta < 2) \end{cases}$$

Obsérvese que para $\delta = 2$ se reduce a una ecuación del tipo (II.2.1). Por tanto considerando $\delta < 2$, y efectuando el cambio $y(t) = I^{2-\delta}x(t)$, se obtiene la ecuación diferencial

$$ty''(t) + (-2\alpha t + 1)y'(t) + (\alpha^2 t + \beta)y(t) = 0$$

la cual admite la expresión operacional

$$\frac{\mathcal{D}y}{y} = \frac{2\alpha + \beta - s}{(s-\alpha)^2} = \frac{-1}{s-\alpha} + \frac{\alpha+\beta}{(s-\alpha)^2}$$

siendo una de sus soluciones

$$y = (s-\alpha)^{-1} exp[-(\alpha+\beta)(s-\alpha)^{-1}] =$$

$$= \frac{1}{s-\alpha}[1 + \frac{-(\alpha+\beta)}{1!(s-\alpha)} + \frac{(\alpha+\beta)^2}{2!(s-\alpha)^2} + ... + \frac{(-1)^n(\alpha+\beta)^n}{n!(s-\alpha)^n} + ...]$$

Haciendo uso de la igualdad

$$\frac{1}{(s-\alpha)^n} = e^{\alpha t}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

se obtiene

$$y(t) = e^{\alpha t}[1 + \frac{-(\alpha+\beta)}{(1!)^2}t + \frac{(\alpha+\beta)^2}{(2!)^2}t^2 + ... + \frac{(-1)^n(\alpha+\beta)^n}{(n!)^2}t^n + ...].$$

Dado que la serie funcional

$$1 + \frac{-(\alpha+\beta)}{(1!)^2}t + \frac{(\alpha+\beta)^2}{(2!)^2}t^2 + ... + \frac{(-1)^n(\alpha+\beta)^n}{(n!)^2}t^n + ...$$

converge uniformemente en compactos de $[0, \infty)$, y como

$$x(t) = D^{2-\delta} y(t) = D I^{1-(2-\delta)} y(t) \tag{II.5.5}$$

se deduce que $x(t)$ vendrá dada por una serie funcional uniformemente convergente en compactos de $[0, \infty)$. Para obtener la expresión de dicha serie se usará la igualdad [42](pag.98)

$$D^{\nu}[t^{\lambda} e^{bt}] = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1-\nu)} t^{\lambda-\nu} \, {}_1F_1(\lambda+1, \lambda+1-\nu; bt) \quad (\lambda > -1)$$

con lo que

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\alpha+\beta)^n}{n! \Gamma(\delta+n-1)} t^{\delta+n-2} \, {}_1F_1(n+1, \delta+n-1; \alpha t) \tag{II.5.6}$$

Si en (II.5.5) hubiéramos aplicado la transformada de Laplace obtendríamos

$$X(p) = p^{2-\delta} Y(p) =$$

$$= p^{2-\delta} [\frac{1}{p-\alpha} - \frac{(\alpha+\beta)}{(p-\alpha)^2} + \frac{(\alpha+\beta)^2}{2!(p-\alpha)^3} + \ldots + \frac{(-1)^n (\alpha+\beta)^n}{n!(p-\alpha)^{n+1}} + \ldots]$$

por lo que:

$$x(t) = \frac{t^{2-\delta-1}}{\Gamma(2-\delta-1)} * \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\alpha+\beta)^k}{k!} \frac{t^k}{k!} e^{\alpha t}$$

$$= \frac{t^{2-\delta-1}}{\Gamma(2-\delta-1)} * e^{\alpha t} C_0[(\alpha+\beta)t]$$

y por la unicidad de las soluciones la serie (II.5.6) converge a x(t).

Ejemplo 6

$$\begin{cases} tD^{\delta+1}x(t) + (1-\nu)D^{\delta}x(t) - D^{\delta-1}x(t) = 0 \\ \\ (\delta > 1; \ \ n-1 < \delta \leq n) \ \ (x(t) \in \mathcal{C}^n) \ \ (\nu > 0) \end{cases}$$

tomando $I^{n-\delta}x(t) = y(t)$, se obtiene

$$tD^{n+1}y(t) + (1-\nu)D^n y(t) - D^{n-1}y(t) = 0 \quad (n \geq 2)$$

que operacionalmente, dado que $x(t) \in \mathcal{C}^n$, se expresa

$$\frac{\mathcal{D}y}{y} = \frac{(-\nu-n)s^n - s^{n-1}}{s^{n+1}} = \frac{-\nu-n}{s} + \frac{-1}{s^2}$$

y admite como solución al operador

$$y = s^{-\nu-n}exp(s^{-1}) = s^{-\nu-n}[1 + \frac{1}{s} + \frac{1}{2!s^2} + ... + \frac{1}{k!s^k} + ...] =$$

$$= l^{n+\nu}[1 + l + \frac{l^2}{2!} + ... + \frac{l^k}{k!} + ...]$$

el cual se identifica con la función

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l^{n+k+\nu}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{n+k-1+\nu}}{k!\Gamma(n+k+\nu)} = t^{n+\nu-1}E_{n+\nu-1}(t)$$

por lo tanto como:

$$x(t) = D^{n-\delta}y(t)$$

se tiene

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k-1+\delta+\nu}}{k!\Gamma(k+\delta+\nu)} = t^{\delta+\nu-1}E_{\delta+\nu-1}(t)$$

Ejemplo 7

De forma análoga al anterior ejemplo, se puede resolver la ecuación

$$\begin{cases} tD^{\delta+1}x(t) + (1-\nu)D^{\delta}x(t) + D^{\delta-1}x(t) = 0 \\ \\ (\delta > 1; \;\; n-1 < \delta \leq n) \;\; (x(t) \in \mathcal{C}^n) \;\; (\nu > 0) \end{cases}$$

tomando $y(t) = I^{n-\delta}x(t)$, se transforma en

$$tD^{n+1}y(t) + (1-\nu)D^n y(t) + D^{n-1}y(t) = 0 \quad (n \geq 2)$$

cuya expresión operacional es

$$\frac{\mathcal{D}y}{y} = \frac{(-\nu-n)s^n + s^{n-1}}{s^{n+1}} = \frac{-\nu-n}{s} + \frac{1}{s^2}$$

y con solución el operador

$$y = s^{-\nu-n}exp(-s^{-1}) = s^{-\nu-n}[1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{2!s^2} - ... + \frac{(-1)^k}{k!s^k} + ...] =$$

$$= l^{n+\nu}[1 - l + \frac{l^2}{2!} - ... + \frac{(-1)^k l^k}{k!} + ...]$$

el cual se identifica con la función

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{l^{n+k+\nu}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{n+k-1+\nu}}{k!\Gamma(n+k+\nu)} = t^{n+\nu-1}C_{n+\nu-1}(t)$$

y dado que

$$x(t) = D^{n-\delta}y(t)$$

se obtiene

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{\delta+k-1+\nu}}{k!\Gamma(\delta+k+\nu)} = t^{\delta+\nu-1}C_{\delta+\nu-1}(t)$$

Obsérvese que los ejemplos anteriores se reducen a los ejemplos (3) y (4), respectivamente, cuando $\delta = 1$.

Capítulo III

Una derivada para la convolución de Ditkin y Prudnikov

III.1 Introducción

Se comienza en este capítulo dando un pequeño resumen del cálculo operacional, que para el operador $D = \dfrac{d}{dt}$, desarrollaron Ditkin y Prudnikov [14]. Además de introducir las propiedades y definiciones más importantes, se hará especial referencia a las diferencias que éste presenta frente al cálculo operacional de Mikusinski.

En la segunada parte, siguiendo [4], se definirá una derivada algebraica asociada al mencionado cálculo operacional, la cual será usada en la resolución de algunas ecuaciones integro diferenciales, después de haber relizado un estudio para la misma y demostrando que posee propiedades análogas a las de la derivada algebraica de Mikusinski.

III.2 El cálculo operacional de Ditkin y Prudnikov

En [14], Ditkin y Prudnikov generaron un cálculo operacional asociado al operador $D = \dfrac{d}{dt}$, y que se denominará, en general, cálculo operacional de Ditkin y Prudnikov.

Para ello introdujeron los espacios

$$M = \{f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C} \; / \; f \textit{ absolutamente continua}\}$$

y

$$L = \{g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C} \; / \; g \textit{ integrable Lebesgue en } (0, A) \; \forall A > 0\}$$

Estos espacios M y L, como es bien sabido, están íntimamente relacionados por medio de los operadores derivación e integración, y la conocida expresión de la convolución utilizada por Mikusinski, ya que no es complicado comprobar que si $F(t) \in M$, entonces es derivable en casi todo punto (c.t.p.) y que además

$$F'(t) = f(t) \in L$$

y

$$F(t) = F(0) + \int_0^t f(\tau)d\tau$$

recíprocamente, si $g(t) \in L$, entonces

$$G(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau \in M$$

y $G'(t) = g(t)$ $(c.t.p.)$.

Por otro lado, si $f(t),\ g(t) \in L$ la integral

$$\int_0^t f(t-\psi)g(\psi)d\psi$$

existe c.t.p. y pertenece a L.

La integral

$$\int_0^t G(t-\psi)f(\psi)d\psi$$

con $G(t) \in M$ y $f(t) \in L$, pertenece a M.

Por último, si $F(t),\ G(t) \in M$ y se define

$$H(t) = \int_0^t F(t-\psi)G(\psi)d\psi$$

entonces existe $H'(t) \in M$.

Los autores definen el producto de dos funciones de M como

$$F(t) \otimes G(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t F(t-\psi)G(\psi)d\psi$$

comprobando que $(M, +, \otimes)$ es un anillo conmutativo y unitario sin divisores de cero, siendo la función constante $f(t) = 1$ el elemento unidad. Este hecho simplifica el cálculo operacional frente al de Mikusinski, no siendo necesario en este caso distinguir entre las funciones constantes y las constantes propiamente dichas.

Se construye el cuerpo de fracciones generado por M en la forma usual,

$$\mathfrak{m} = M \times (M - \{0\}) / \sim$$

y se le dota de las operaciones suma, multiplicación y producto por un escalar, definiéndolas tal y como lo hizo Mikusinski.

Como es usual el anillo M se identifica con un subanillo M_0 de $\mathfrak{m}$, mediante el isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & M_0 \subset \mathfrak{m} \\ F(t) & \rightsquigarrow & \frac{F(t)}{1} \end{array}$$

lo que constituye una identificación más natural que la del cálculo operacional de Mikusinski. En este caso los elementos cero y uno del cuerpo vienen representados respectivamente por

$$0 = \frac{0}{G(t)} \quad y \quad 1 = \frac{F(t)}{F(t)}$$

De forma análoga se considera que L es un subconjunto de $\mathfrak{m}$ ya que toda función $f(t) \in L$ puede identificarse con el operador $\dfrac{F(t)}{t} \in \mathfrak{m}$, siendo

$$F(t) = \int_0^t f(u)du$$

con $F(0) = 0$, escribiendo en tal caso

$$\frac{F(t)}{t} = F'(t) = f(t).$$

Los operadores de $\mathfrak{m}$ que pueden expresarse en la forma $\dfrac{F(t)}{t}$, con $F(0) = 0$ son llamados funciones y al proceso de reducción de un operador $\dfrac{H(t)}{G(t)}$ a la forma $\dfrac{F(t)}{t}$ se le denomina realización del operador. No todo operador admite realización, piénsese por ejemplo en el operador $\dfrac{1}{t}$.

El conjunto de los operadores $\dfrac{F(t)}{t}$, $F(0) = 0$ no es un anillo, ya que el producto de dos funciones no siempre es una función

$$\frac{F(t)}{t} = \frac{G(t)}{t} = \frac{\sqrt{t}}{t} \quad \Longrightarrow \quad \frac{F(t)}{t} \otimes \frac{G(t)}{t} = \frac{\pi}{4t}$$

El operador $\dfrac{F(t)}{t}$ puede considerarse como el producto del operador $\dfrac{1}{t}$ con la función $\dfrac{F(t)}{1} = F(t)$.

El operador $\dfrac{1}{t} = p$ juega un papel fundamental en el cálculo operacional de Ditkin y Prudnikov y recibe el nombre de operador diferencial, verificando las siguientes reglas operacionales

$$\left.\begin{aligned} F'(t) &= pF(t) - pF(0) \\ F^{(n)}(t) &= p^n F(t) - \sum_{k=1}^{n} p^k F^{(n-k)}(0) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.2.1)}$$

Con la ayuda de (III.2.1) y tomando las adecuadas funciones para cada caso se pueden obtener las reglas operacionales análogas a las obtenidas por Mikusinski

$$\left.\begin{aligned} &\frac{p}{p-\alpha} = e^{\alpha t} \\ &\frac{p}{(p-\alpha)^n} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha t} \\ &\frac{wp}{p^2+w^2} = sen(wt) \\ &\frac{p^2}{p^2+w^2} = cos(wt) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.2.2)}$$

El operador $p^{-1} = t$ inverso algebraico de p tiene la propiedad de identificarse con el operador integral I ya que

$$p^{-1} f(t) = t \otimes f(t) = \int_0^t f(u)du = If(t)$$

además, no es complicado comprobar que

$$p^{-n} = (p^{-1})^n = \frac{t^n}{n!}$$

verificándose

$$p^{-n}f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\psi)^{n-1}f(\psi)d\psi = I^n f(t)$$

III.2.1 Operadores Racionales

Uno de los problemas básicos en el cálculo operacional es investigar operadores de la forma $Z(p)$, donde $Z(\lambda)$ es una función de la variable λ, por ejemplo: $\dfrac{p}{p-\alpha}$, $\dfrac{p}{p^2+w^2}$, $(p^{-1})^n$.

Los operadores

$$Z(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$$

donde $P(\lambda)$ y $Q(\lambda)$ son polinomios, se denominan operadores fraccionarios. La condición necesaria y suficiente para que $Z(p)$ se reduzca a una función es que $grad\ (Q) > grad\ (P)$, y en dicho caso existe $\phi(t) \in M$ tal que

$$Z(p) = \phi(t)$$

teniéndose que para toda función $f(t) \in L$

$$Z(p)f(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \phi(t-\psi)f(\psi)d\psi$$

La función $\phi(t)$ puede determinarse, en general, descomponiendo $p^{-1}Z(p)$ en fracciones simples. Nótese que si se descompone en fracciones simples sólo $Z(p)$ se plantearía el problema de que las fracciones del tipo

$$\frac{A}{p-\alpha} \ \ y \ \ \frac{B}{p^2+\beta^2}$$

no podrían ser identificadas con funciones, ya que es necesario que aparezca p en el numerador, tal y como puede observarse en (III.2.2), para poder identificarlas con $Ae^{\alpha t}$ y $sen(Bt)$ respectivamente.

III.2.2 Operadores Transformables Laplace

Sea S el conjunto de funciones $f(t) \in L$ tales que su transformada de Laplace

$$f^*(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)dt$$

es absolutamente convergente, y sea S^* el conjunto de sus transformadas. Si para un operador $a \in \mathfrak{m}$, existe una representación $\dfrac{F(t)}{G(t)}$ tal que $F(t) \in S$ y $G(t) \in S' = S - \{0\}$, se dice que a es transformable Laplace y su transformada será la función

$$\bar{a}(z) = \frac{F^*(t)}{G^*(t)}$$

escribiéndose, simbólicamente, la transformación como

$$a \doteq \bar{a}(z) \tag{III.2.3}$$

Los autores denotan por $\mathfrak{n}$ al conjunto de elementos de $\mathfrak{m}$ transformables Laplace y por $\bar{\mathfrak{n}}$ al conjunto de sus transformadas, demostrando que $(\mathfrak{n}, +, \otimes)$ y $(\bar{\mathfrak{n}}, +, \cdot)$ son cuerpos isomorfos, mediante la transformación (III.2.3), siendo $\cdot$ el producto usual de funciones. No es complicado comprobar que $p \doteq z$, por lo que para cualquier operador racional se tiene

$$Z(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} \doteq \frac{P(z)}{Q(z)} = Z(z)$$

donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios.

Si el operador es una función $f(t) = \dfrac{F(t)}{t} \in S$, entonces

$$f(t) \doteq z f^*(z) = \bar{f}(z)$$

Dado que $\mathfrak{n}$ y $\bar{\mathfrak{n}}$ son isomorfos podrán ser considerados como el mismo conjunto en la resolución de múltiples problemas, lo que permitirá no hacer distinción entre el operador p y la variable compleja z, y escribir $f(t) = \bar{f}(p)$.

III.2.3 La realización de los operadores transformables Laplace.

El cuerpo de operadores $\mathfrak{n}$, forma en $\mathfrak{m}$ una clase importante de operadores.

Toda función medible con un factor de crecimiento no superior al de e^{qt}, es decir, verificando que para valores grandes de t

$$|f(t)| < ke^{qt} \tag{III.2.4}$$

donde k y q son constantes, pertenece al conjunto S. En el caso general la condición necesaria y suficiente para que una función $f(t) \in L$ pertenezca a S es que para una constante dada q

$$\lim_{t\to\infty} e^{-qt} \int_0^\infty f(u)du = 0$$

Por lo tanto el cuerpo $\mathfrak{n}$ es una extensión del anillo de funciones que satisfacen (III.2.4), donde q y k dependen de $f(t)$.

Si el operador a puede reducirse a la forma $f(t) = \dfrac{F(t)}{t}$ y $f(t) \in S$, se tiene

$$a = \frac{F(t)}{t} = pf^*(p)$$

con

$$f^*(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$

Cuando se resuelven problemas mediante el cálculo operacional, una de las cuestiones más importantes es la realización de los operadores, es decir, es necesario tener un criterio para saber cuando un operador dado se reduce a una función. Algunos teoremas relacionados con la transformada de Laplace sirven como criterio en múltiples casos. Por ejemplo: el operador $\sqrt{p}$ se reduce a una función ya que $\dfrac{\sqrt{p}}{p}$ satisface el siguiente teorema

Teorema III.2.1 *Sea $f^*(p)$ analítica en el semiplano Re $p > \gamma$ y tal que verifica las siguientes condiciones:*

1. $\displaystyle\lim_{\tau\to\pm\infty} \frac{f^*(\alpha+i\tau)}{\alpha+i\tau} = 0$, $(\alpha > \gamma)$
   y la convergencia en el semiplano $\alpha \geq \alpha_0 > \gamma$ es uniforme.

2. *Para todo $t \in \mathbb{R}$ existe el límite*

$$\lim_{w\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-iw}^{\alpha+iw} \frac{f^*(p)}{p} e^{pt}dp = \Psi(t)$$

3. *La función $\Psi(t)$ es absolutamente continua y existe la integral*

$$F(p) = \int_0^\infty \Psi'(t)e^{-pt}dt$$

Entonces $f^*(p) = F(p)$.

Así mismo Ditkin y Prudnikov establecen el siguiente teorema

Teorema III.2.2 *Si $\bar{a}(p)$ es un operador regular y $f(t) \in L$, entonces*

$$\bar{a}(p)f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{p^k} f(t) \qquad \text{(III.2.5)}$$

donde

$$\bar{a}(p) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{p^k} \quad (|p| > \rho)$$

Nota III.2.1: el operador $\bar{a}(p)$ se dice regular si la función $\bar{a}(p)$ es regular en un entorno del infinito.

La serie (III.2.5) es uniformemente convergente en todo intervalo cerrado $0 \leq t \leq T$. Como ejemplo orientativo, el operador $\dfrac{p}{\sqrt{p^2+\lambda^2}}$ es regular, por lo que

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+\lambda^2}} = (1+\frac{\lambda^2}{p^2})^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{p^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\lambda^4}{p^4} - ...... =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda t^2}{2!} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\lambda t^4}{4!} - ..... = J_0(\lambda t)$$

siendo $J_0(z)$ la función de Bessel de primera especie y orden 0.

III.2.4 Funciones operacionales

Es frecuente encontrar, en las aplicaciones del cálculo operacional a la resolución de problemas de la Física-Matemática, operadores dependientes de un parámetro λ, en dichos casos se escribe $a = a(\lambda)$ y se denomina a $a(\lambda)$ función operacional. Ejemplos de tales funciones son:

$$a(\lambda) = \frac{p}{p-\lambda} = e^{\lambda t} \quad (-\infty < \lambda < \infty)$$

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+\lambda^2}} = J_0(\lambda t)$$

Una función operacional $a(\lambda)$ se dice continua en el intervalo $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ si existe una representación (F, G) de $a(\lambda)$ tal que las funciones $F(t;\lambda)$ y $G(t;\lambda)$ son continuas respectos a la variables λ y t en el dominio $\Omega = \{\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1 \;\;,\;\; 0 < t < \infty\}$ y $G(t;\lambda)$ no es identicamente nula para nigún valor de λ.

Si para una función operacional $a(\lambda)$ existe una representación $(F(t;\lambda), G(t;\lambda))$ verificando que:

1. Las funciones F y G son derivables respecto a λ en $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$, y las derivadas parciales F_λ y G_λ pertenecen a M.

2. Las funciones F_λ y G_λ son continuas respecto a las dos variables en el dominio $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1 \;\;,\;\; 0 < t < \infty$.

entonces se dice que la función operacional $a(\lambda)$ es continuamente diferenciable en el intervalo $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$, escribiéndose

$$a'(\lambda) = \frac{F_\lambda \otimes G - F \otimes G_\lambda}{G \otimes G}$$

pudiéndose demostrar que esta definición de derivada es independiente de la representación elegida, y que verifica las propiedades usuales (derivada de la suma, del producto, etc.) de la derivada clásica.

Dada una función operacional $a(\lambda)$, si existe otra función operacional $A(\lambda)$ con derivada continua $A'(\lambda) = a(\lambda)$ en el intervalo $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$, se dice que $a(\lambda)$ es integrable y a $A(\lambda)$ se le denomina una integral indefinida de la función operacional $a(\lambda)$. Más aún, se define la integral definida de la función operacional $a(\lambda)$, como

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} a(\lambda)d\lambda = A(\lambda_1) - A(\lambda_0)$$

Por último comentar que la integral de una función operacional verifica propiedades análogas a las de la integral ordinaria.

III.2.5 Sucesiones y series de operadores

Una sucesión de operadores $a_n \in \mathfrak{m}$ se dice convergente al operador $a = \dfrac{F}{G}$, si existen representaciones (F_n, G_n) tales que:

1. $a_n = \dfrac{F_n}{G_n}$.
2. Las sucesiones $F_n(t)$ y $G_n(t)$ convergen a los límites $F(t)$ y $G(t)$, respectivamente, uniformemente en todo intervalo cerrado $0 \leq t \leq T$.

Al operador a se le denomina límite de la sucesión de operadores a_n, y no depende de la representación elegida para los a_n.

Ejemplos:

- Sea $a_n = cos(nt) = \dfrac{\frac{sen(nt)}{n}}{t}$. Aunque a_n no converge en el sentido clásico, es fácil comprobar que si lo hace en el sentido operacional, dado que

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{sen(nt)}{n} = 0$$

  en base a lo cual escribimos

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

- De forma similar, Dado $a_n = n\ sen(nt) = \dfrac{t - \frac{sen(nt)}{n}}{\frac{t^2}{2}}$, se tiene que

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{t}{\frac{t^2}{2}} = \frac{p^{-1}}{(p^{-1})^2} = \frac{1}{p^{-1}} = p$$

La convergencia operacional verifica las propiedades clásicas de paso al límite.

En cuanto a la convergencia de series operacionales, ésta queda definida en base a la convergencia de la sucesión de sumas parciales asociadas.

Haciendo uso del concepto de límite para sucesiones de operadores, podemos introducir el concepto de límite para funciones operacionales. Una función operacional $a(\lambda)$ tiene límite en el punto $\lambda = \lambda_0$ si dada cualquier sucesión λ_n convergente a λ_0 existe $\lim_{n\to\infty} a(\lambda_n)$ y no depende de la elección de la sucesión λ_n. En tal caso se escribirá

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} a(\lambda) = b$$

Como consecuencia puede asegurarse que si la función operacional $a(\lambda)$ es continua en el intervalo $\alpha \leq \lambda \leq \beta$, entonces para cualquier $\lambda_0 \in [\alpha, \beta]$ existe

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} a(\lambda) = a(\lambda_0)$$

III.3 Una derivada para el cálculo operacional de Ditkin y Prudnikov

Es claro, que la definición de la derivada algebraica, $Df(t) = -tf(t)$, dada por Mikusinski en [36], para la convolución

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\xi)g(\xi)d\xi$$

está íntimamente relacionada con la transformación integral de Laplace. Téngase en cuenta las dos siguientes cuestiones:

i) $\mathcal{L}\{[f * g](t)\}(s) = F(s).G(s)$, siendo $F(s)$ y $G(s)$ las respectivas transformadas de Laplace de las funciones f y g.

ii) $\mathcal{L}\{-tf(t)\}(s) = \dfrac{d}{ds}F(s)$

Puesto que, en esta sección la convolución que se va a considerar es la dada por Ditkin y Prudnikov

$$(f \otimes g)(t) = \frac{d}{dt}(f * g)(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t f(t-\psi)g(\psi)d\psi$$

el querer definir una derivada algebraica asociada a esta convolución, lleva de la misma manera, a considerar la transformada integral de Laplace-Carson,

$$\mathcal{A}\{f(t)\}(s) = \bar{f}(s) = s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = s\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

que permite obtener dos propiedades como la **i)** y la **ii)**, dadas para la transformada de Laplace.

Ya, Ditkin y Prudnikov [14], haciendo uso de los siguientes espacios de funciones:

$$M = \{f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C} / f \textit{ absolutamente continua}\}$$

$$S = \{f \ / \ f \ es \ transformable \ Laplace\}$$

demuestran que (la semejante a la Propiedad **i)**):

$$\mathcal{A}\{[f \otimes g](t)\}(s) = \bar{f}(s).\bar{g}(s)$$

Asimismo no es complicado comprobar que (la semejante a la Propiedad **ii)**):

$$\mathcal{A}\{(I-t)f(t)\}(s) = \frac{d}{ds}\bar{f}(s)$$

con $f \in S$, ya que

$$\mathcal{A}\{(I-t)f(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{(I-t)f(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{If(t)\}(s) + s\mathcal{L}\{-tf(t)\}(s) =$$

$$= s\frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) + s\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{d}{ds}[s\mathcal{L}\{f(t)\}(s)] = \frac{d}{ds}\mathcal{A}\{f(t)\}(s).$$

Demostrada esta propiedad, se está en condiciones de definir la derivada algebraica asociada a la convolución $\otimes$ y que se introduce en la:

Proposición III.3.1 *Sean* $f, g \in M$ *y* $\mathcal{D}f(t) = If(t) - tf(t)$, *entonces*

a) $\mathcal{D}[f(t) + g(t)] = \mathcal{D}f(t) + \mathcal{D}g(t)$

b) $\mathcal{D}[(f \otimes g)(t)] = [(\mathcal{D}f) \otimes g](t) + [f \otimes (\mathcal{D}g)](t)$

en otras palabras, $\mathcal{D}$ *es una derivada algebraica para el anillo* $(M, +, \otimes)$.

Demostración.

a) Obvio, dado el carácter lineal del operador $\mathcal{D}$.

b) En primer lugar téngase en cuenta que $(f \otimes g)(t) = D(f * g)(t)$, siendo $D = \dfrac{d}{dt}$ y $*$ la convolución de Mikusinski, y por otro lado se tienen las siguientes igualdades

$$D[t(f * g)(t)] = (f * g)(t) + tD(f * g)(t)$$

es decir

$$tD(f * g)(t) = D[t(f * g)(t)] - (f * g)(t)$$

y como

$$(f * g)(t) = DI(f * g)(t) = D[(If) * g](t)$$

junto con

$$(f * g)(t) = DI(f * g)(t) = D[f * (Ig)](t)$$

Con esto se garantiza la veracidad del siguiente desarrollo

$$\mathcal{D}(f \otimes g)(t) = (I - t)(f \otimes g)(t) = (I - t)D(f * g)(t) =$$

$$= ID(f*g)(t) - tD(f*g)(t) = (f*g)(t) + (f*g)(t) - D[t(f*g)(t)] =$$

$$2(f * g)(t) - Dt\int_0^t f(t-\psi)g(\psi)d\psi = 2(f * g)(t) +$$

$$+D[\int_0^t -(t-\psi)f(t-\psi)g(\psi)d\psi + \int_0^t f(t-\psi)(-\psi)g(\psi)d\psi] =$$

$$= 2(f * g)(t) + D[(-tf) * g](t) + D[f * (-tg)](t) =$$

$$= D[(If)*g](t) + D[f*(Ig)](t) + D[(-tf)*g](t) + D[f*(-tg)](t) =$$

$$= D[([I-t]f) * g](t) + D[f * ([I-t]g)](t) =$$

$$= [(I-t)f \otimes g](t) + [f \otimes (I-t)g](t) = [(\mathcal{D}f) \otimes g](t) + [f \otimes (\mathcal{D}g)](t)$$

Haciendo uso del mismo proceso mostrado en [36], para la derivada algebraica $Df(t) = -tf(t)$, puede extenderse la definición de $\mathcal{D}$ al cuerpo $\mathfrak{m}$ como sigue

$$\begin{cases} \mathcal{D}\dfrac{f}{g} = \dfrac{(\mathcal{D}f) \otimes g - f \otimes (\mathcal{D}g)}{g \otimes g} & f, g \in M \\ \\ \mathcal{D}\dfrac{a}{b} = \dfrac{(\mathcal{D}a)b - a(\mathcal{D}b)}{b^2} & a, b \in \mathfrak{m} \end{cases}$$

A continuación se estudia como actua $\mathcal{D}$ sobre el elemento $p = \dfrac{1}{t} \in \mathfrak{m}$ y sus potencias enteras.

Proposición III.3.2 *Dado el operador* $p = \dfrac{1}{t}$ *, se verifica que* $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{D}p^n = np^{n-1}$$

Demostración.

Para su demostración, se consideran las siguientes propiedades, fáciles de comprobar:

- $\mathcal{D}1 = (I-t)1 = 0$
- $\mathcal{D}t = (I-t)t = \dfrac{-t^2}{2}$

- $t \otimes t = \dfrac{t^2}{2}$

Las anteriores igualdades puden ser usadas para demostrar que $\mathcal{D}p = 1$

$$\mathcal{D}p = \frac{\mathcal{D}1 \otimes t - 1 \otimes \mathcal{D}t}{t \otimes t} = 1$$

de lo que se deduce que

$$\mathcal{D}p^2 = \mathcal{D}(p.p) = \mathcal{D}p.p + p.\mathcal{D}p = 2p$$

y haciendo uso del método de inducción

$$\mathcal{D}p^n = \mathcal{D}[p^{n-1}p] = [\mathcal{D}p^{n-1}]p + p^{n-1}[\mathcal{D}p] = (n-1)p^{n-1} + p^{n-1} = np^{n-1}$$

se concluye la demostración.

De hecho la nueva derivada algebraica tiene el mismo comportamiento que la de Mikusinski, tal y como se refleja en la siguiente proposición

Proposición III.3.3 *Sean p^{-1}, inverso algebraico de p, y a operadores de $\mathfrak{m}$, sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces se tiene que:*

a) $\mathcal{D}\alpha = 0$

b) $\mathcal{D}(\alpha a) = \alpha \mathcal{D}a$

c) $\mathcal{D}(p^{-1})^n = -n(p^{-1})^{n+1}$

d) $\mathcal{D}(1-\alpha p^{-1})^n = n\alpha(p^{-1})^2(1-\alpha p^{-1})^{n-1}$

e) $\mathcal{D}(p-\alpha)^n = n(p-\alpha)^{n-1}$

Demostración.

a) $\mathcal{D}\alpha = (I-t)\alpha = 0$

b) $\mathcal{D}(\alpha a) = (\mathcal{D}\alpha)a + \alpha\mathcal{D}a = \alpha\mathcal{D}a$

c) $\mathcal{D}p^{-1} = \mathcal{D}t = \dfrac{-t^2}{2} = -(p^{-1})^2$ y a partir de aquí se demuestra por inducción.

$$\mathcal{D}(p^{-1})^n = \mathcal{D}[(p^{-1})^{n-1}p^{-1}] =$$

$$= -(n-1)(p^{-1})^n p^{-1} - (p^{-1})^{n-1}(p^{-1})^2 = -n(p^{-1})^{n+1}$$

d)

$$\mathcal{D}(1-\alpha p^{-1})^n = \mathcal{D}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-\alpha p^{-1})^{n-k} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-\alpha)^{n-k}(n-k)(p^{-1})^{n-k+1} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k}(-\alpha)(p^{-1})^2(-\alpha p^{-1})^{n-k-1} =$$

$$= n\alpha(p^{-1})^2(1-\alpha p^{-1})^{n-1}$$

e) Dado que

$$(p-\alpha)^n = p^n(1-\alpha p^{-1})^n = \frac{(1-\alpha p^{-1})^n}{(p^{-1})^n}$$

haciendo uso de los apartados anteriores y de la definición de $\mathcal{D}$ sobre $\mathfrak{m}$, se obtiene el resultado buscado.

Estas propiedades, relacionadas con la acción de la derivada algebraica sobre potencias naturales de ciertos operadores, pueden extenderse al caso de potencias complejas. Para ello, y siguiendo el mismo esquema que Mikusinski [36], se definirán $(p^{-1})^\gamma$ y $\dfrac{p}{(p-\alpha)^\lambda}$ como generalización de las igualdades

$$(p^{-1})^n = \frac{t^n}{n!} \quad y \quad \frac{p}{(p-\alpha)^n} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}$$

Definición III.3.1 *dados $\gamma, \lambda \in \mathbb{C}$ con $Re(\gamma), Re(\lambda) > 0$. se definen*

i) $(p^{-1})^\gamma = \dfrac{t^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)}$

ii) $\dfrac{p}{(p-\alpha)^\lambda} = \dfrac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}e^{\alpha t}$

Esta definición resulta coherente, si se tiene en cuenta que la propiedad fundamental de las potencias se verifica

$$(p^{-1})^\gamma(p^{-1})^\mu = \frac{t^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)} \otimes \frac{t^\mu}{\Gamma(\mu+1)} = \frac{t^{\gamma+\mu}}{\Gamma(\gamma+\mu+1)} = (p^{-1})^{\gamma+\mu}$$

$$\frac{p}{(p-\alpha)^{\lambda}}\frac{p}{(p-\alpha)^{\delta}} = \frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}e^{\alpha t} \otimes \frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}e^{\alpha t} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\delta)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1}e^{\alpha(t-\tau)}\tau^{\delta-1}e^{\alpha\tau}d\tau =$$

$$= \frac{B(\lambda,\delta)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\delta)}\frac{d}{dt}[t^{\lambda+\delta-1}e^{\alpha t}] = \frac{t^{\lambda+\delta-2}}{\Gamma(\lambda+\delta)}e^{\alpha t}(\lambda+\delta-1+\alpha t) =$$

$$= \frac{p}{(p-\alpha)^{\lambda+\delta-1}} + \alpha\frac{p}{(p-\alpha)^{\lambda+\delta}} = \frac{p}{(p-\alpha)^{\lambda+\delta-1}}[1+\frac{\alpha}{p-\alpha}] =$$

$$= \frac{p}{(p-\alpha)^{\lambda+\delta-1}}\frac{p}{p-\alpha} = \frac{p^2}{(p-\alpha)^{\lambda+\delta}}$$

Por otro lado, el apartado **ii)** de la definición se reduce al **i)**, para $\alpha = 0$

$$\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} = \frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}e^{0t} = \frac{p}{(p-0)^{\lambda}} = \frac{p}{p^{\lambda}} = (p^{-1})^{\lambda}$$

Además $(p^{-1})^{\gamma}$ puede ser identificado con el operador integral fraccionaria de Riemann-Liouville I^{γ}, ya que

$$(p^{-1})^{\gamma}f(t) = \frac{t^{\gamma}}{\Gamma(\gamma+1)} \otimes f(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\gamma}}{\Gamma(\gamma+1)}f(\tau)d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1}f(\tau)d\tau = I^{\gamma}f(t)$$

Todo esto conduce a poder generalizar las últimas proposiciones

Proposición III.3.4 *Dados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, se verifica que:*

a) $\mathcal{D}(p^{-1})^{\gamma} = -\gamma(p^{-1})^{\gamma+1}$

b) $\mathcal{D}p^{\gamma} = \gamma p^{\gamma-1}$

c) $\mathcal{D}(1-\alpha p^{-1})^{\gamma} = \gamma\alpha(p^{-1})^{2}(1-\alpha p^{-1})^{\gamma-1}$

d) $\mathcal{D}(p-\alpha)^{\gamma} = \gamma(p-\alpha)^{\gamma-1}$

e) $\mathcal{D}exp[\gamma(p-\alpha)^{-\beta}] = -\beta\gamma(p-\alpha)^{-\beta-1}exp[\gamma(p-\alpha)^{-\beta}]$

siendo, $exp[\gamma(p-\alpha)^{-\beta}] = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\gamma(p-\alpha)^{-\beta}]^{k}}{k!}$

Demostración.

Para simplificar la escritura, se denota $l = \dfrac{1}{p} = p^{-1}$.

Se comienza con la demostración de **a)**

$$\mathcal{D}l^{\gamma} = \mathcal{D}\tfrac{l^{\gamma+n}}{l^{n}} =$$

$$= \frac{[\mathcal{D}\frac{t^{\gamma+n}}{\Gamma(\gamma+n+1)}] \otimes \frac{t^{n}}{\Gamma(n+1)} - \frac{t^{\gamma+n}}{\Gamma(\gamma+n+1)} \otimes [\mathcal{D}\frac{t^{n}}{\Gamma(n+1)}]}{\frac{t^{n}}{\Gamma(n+1)} \otimes \frac{t^{n}}{\Gamma(n+1)}} \qquad \text{(III.3.1)}$$

y como

$$\mathcal{D}\frac{t^{\gamma+n}}{\Gamma(\gamma+n+1)} = \frac{-(\gamma+n)t^{\gamma+n+1}}{\Gamma(\gamma+n+2)} \qquad \text{(III.3.2)}$$

$$\mathcal{D}[\frac{t^{\gamma+n}}{\Gamma(\gamma+n+1)}] \otimes \frac{t^{n}}{\Gamma(n+1)} = \frac{-(\gamma+n)t^{\gamma+2n+1}}{\Gamma(\gamma+2n+2)} \qquad \text{(III.3.3)}$$

$$\mathcal{D}\frac{t^n}{\Gamma(n+1)} = \frac{-nt^{n+1}}{\Gamma(n+2)} \tag{III.3.4}$$

$$\frac{t^{\gamma+n}}{\Gamma(\gamma+n+1)} \otimes [\mathcal{D}\frac{t^n}{\Gamma(n+1)}] = \frac{-nt^{\gamma+2n+1}}{\Gamma(\gamma+2n+2)} \tag{III.3.5}$$

$$\frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \otimes \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} = \frac{t^{2n}}{\Gamma(2n+1)} \tag{III.3.6}$$

se obtiene, al sustituir en (III.3.1)

$$\mathcal{D}l^\gamma = -\gamma\frac{\frac{t^{\gamma+2n+1}}{\Gamma(\gamma+2n+2)}}{\frac{t^{2n}}{\Gamma(2n+1)}} = -\gamma\frac{l^{\gamma+2n+1}}{l^{2n}} = -\gamma l^{\gamma+1} \tag{III.3.7}$$

La demostración de **b)** se sigue del hecho de que $p = l^{-1}$ y (III.3.7)

$$\mathcal{D}p^\gamma = \mathcal{D}l^{-\gamma} = \gamma l^{-\gamma+1} = \gamma p^{\gamma-1}$$

Para demostrar **c)**, se ha de tener en cuenta que el operador $(1-\alpha l)^\gamma$ es un operador regular y por tanto admite una expansión en serie, tal y como se refleja en el teorema III.2.2, así como la igualdad (III.3.7).

$$\mathcal{D}(1-\alpha l)^\gamma = \mathcal{D}1 + \mathcal{D}\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\gamma}{k}(-1)^k\alpha^k l^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\gamma}{k}(-1)^k\alpha^k(-k)\frac{t^{k+1}}{(k+1)!} = \alpha l^2\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\gamma}{k}k(-1)^{k-1}\alpha^{k-1}l^{k-1} =$$

$$= \gamma\alpha l^2\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\gamma-1}{k-1}(-1)^{k-1}\alpha^{k-1}l^{k-1} = \gamma(1-\alpha l)^{\gamma-1}\alpha l^2$$

donde se ha usado de la igualdad $\gamma\binom{\gamma-1}{k-1}=k\binom{\gamma}{k}$.

Teniendo en cuenta que $(p-\alpha)^\gamma=\dfrac{(1-\alpha l)^\gamma}{l^\gamma}$, se demuestra **d)**.

$$\mathcal{D}(p-\alpha)^\gamma=\mathcal{D}\frac{(1-\alpha l)^\gamma}{l^\gamma}=\frac{\gamma(1-\alpha l)^{\gamma-1}l^{\gamma+1}}{l^{2\gamma}}=$$

$$=\frac{\gamma(1-\alpha l)^{\gamma-1}}{l^{\gamma-1}}=\gamma(p-\alpha)^{\gamma-1}$$

Para demostrar **e)**, se desarrolla la exponencial y se aplica la derivada algebraica

$$\mathcal{D}exp[\gamma(p-\alpha)^{-\beta}]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\gamma(p-\alpha)^{-\beta}]^n}{n!}=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma^n(-\beta n)\frac{(p-\alpha)^{-\beta n-1}}{n!}=$$

$$-\beta\gamma(p-\alpha)^{-\beta-1}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma^{n-1}\frac{(p-\alpha)^{-\beta(n-1)}}{(n-1)!}=$$

$$=-k\gamma(p-\alpha)^{-\beta-1}exp[\gamma(p-\alpha)^{-\beta}]$$

.

En el apartado **a)** de la proposición III.3.3 se demostró que la derivada algebraica de las constantes es cero. En la siguiente proposición se pone de manifiesto que el recíproco también es cierto, lo que constituye uno de los resultados fundamentales en la teoría de la derivada algebraica sobre operadores.

Proposición III.3.5 *Dado $a \in \mathfrak{m}$, si:*

$$\mathcal{D}a = 0 \implies a \text{ es una constante}$$

Demostración.

Sea $a = \dfrac{F(t)}{G(t)}$ con $G(t) \in (M - \{0\})$

$$\mathcal{D}a = \frac{\mathcal{D}F(t) \otimes G(t) - F(t) \otimes \mathcal{D}G(t)}{G(t) \otimes G(t)} = 0$$

lo que implica que

$$\mathcal{D}F(t) \otimes G(t) - F(t) \otimes \mathcal{D}G(t) = [(I-t)F(t)] \otimes G(t) - F(t) \otimes [(I-t)G(t)] = 0$$

y dado que

$$[IF(t)] \otimes G(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t [IF(t-\psi)]G(\psi)d\psi =$$

$$= \frac{d}{dt}\int_0^t [\int_0^{t-\psi} F(u)du]G(\psi)d\psi = \frac{d}{dt}\int_0^t [\int_\psi^t F(t-\tau)d\tau]G(\psi)d\psi =$$

$$= \frac{d}{dt}\int_0^t F(t-\tau)[\int_0^\tau G(\psi)d\psi]d\tau = F(t) \otimes [IG(t)]$$

queda

$$[(-t)F(t)] \otimes G(t) - F(t) \otimes [(-t)G(t)] = 0$$

es decir

$$\frac{d}{dt}[(-t)F(t)] * G(t) - F(t) * [(-t)G(t)] = 0$$

o lo que es igual

$$[(-t)F(t)] * G(t) - F(t) * [(-t)G(t)] = constante \quad \forall t \geq 0$$

y como para $t = 0$ la expresión vale cero, se concluye que

$$[(-t)F(t)] * G(t) - F(t) * [(-t)G(t)] = 0 \tag{III.3.8}$$

Ahora bien, puesto que (III.3.8) representa el numerador de la derivada algebraica de Mikusinski al actuar sobre el operador $a = \dfrac{F(t)}{G(t)}$, resulta que (III.3.8) significa que la derivada algebraica de Mikusinski del operador a también es cero, y por tanto, tal y como fue indicado en el capítulo primero, dicho operador es un número.

La siguiente proposición pone de manifiesto la relación entre la derivada algebraica y el operador derivada respecto a la variable compleja z, lo que puede ser utilizado en la resolución de ciertos problemas.

Proposición III.3.6 *Dado $a \in \mathfrak{n}$ y sea $a \doteq \bar{a}$, con $\bar{a} \in \mathfrak{n}'$, entonces:*

$$\mathcal{D}a \doteq \frac{d}{dz}\bar{a}$$

Demostración.

Sea $a = \dfrac{F(t)}{G(t)} \in \mathfrak{n}$

$$\mathcal{D}a = \frac{\frac{d}{dt}[(I-t)F(t) \otimes G(t)] - \frac{d}{dt}[F(t) \otimes (I-t)G(t)]}{\frac{d}{dt}[G(t) \otimes G(t)]}$$

por lo tanto

$$\bar{\mathcal{D}a} = \frac{z[(\frac{1}{z}F^*(z) + (F*(z))')G^*(z)] - z[F^*(z)(\frac{1}{z}G^*(z) + (G^*(z))')]}{zG^*(z)G^*(z)} =$$

$$\frac{F^*(z)G^*(z) + z(F^*(z))'G^*(z) - F^*(z)G^*(z) - zF^*(z)(G^*(z))'}{zG^*(z)G^*(z)} =$$

$$= (\frac{F^*(z)}{G^*(z)})' = \frac{d}{dz}\bar{a}$$

III.4 La derivada $\mathcal{D}$ en la resolución de ecuaciones integro-diferenciales.

En esta sección, se comienza estudiando la ecuación integro-diferencial

$$(t-I)\frac{d^2x}{dt^2} + (1+I-t)\frac{dx}{dt} - ax = 1 \qquad (x \in M) \tag{III.4.1}$$

Haciendo uso del cálculo operacional para el operador $D = \dfrac{d}{dt}$ generado por Ditkin y Prudnikov [14], y teniendo en cuenta la definición de $\mathcal{D}$, la ecuación (III.4.1) se transforma en

$$\mathcal{D}[-p^2x(t)+p^2x(0)+px'(0)]+[px(t)-px(0)]+\mathcal{D}[px(t)-px(0)]-ax(t) = 1$$

expresión que puede ser escrita como

$$\mathcal{D}x(t) + \frac{1-a-p}{p-p^2}x(t) = \frac{(1-p)x(0) - x'(0) + 1}{p-p^2}$$

la cual, si se asume que $x(0) = 0$ y $x'(0) = 1$ se reduce a

$$\frac{\mathcal{D}x(t)}{x(t)} = \frac{1-a-p}{p^2-p} = \frac{a-1}{p} + \frac{-a}{p-1} \tag{III.4.2}$$

Usando la misma técnica que W. Kierat y K. Skornik [25], es fácil deducir que la ecuación (III.4.2) admite como solución

$$x_a(t) = p^{a-1}(p-1)^{-a} = p^{-1}(1-p^{-1})^{-a} \tag{III.4.3}$$

para lo cual se recuerda que

$$\frac{\mathcal{D}(v_1.v_2)}{v_1.v_2} = \frac{\mathcal{D}v_1}{v_1} + \frac{\mathcal{D}v_2}{v_2} \tag{III.4.4}$$

por lo que se han de tomar

$$v_1 = p^{a-1} \quad y \quad v_2 = (p-1)^{-a}$$

La siguiente proposición pone de manifiesto que la solución obtenida es en realidad una función de M con lo que se ha hallado una solución de la ecuación (III.4.1). Asimismo, la expresión operacional de x_a permite establecer, de forma sencilla, una propiedad de convolución para la mencionada función.

Proposición III.4.1 *Sea* $x_a = p^{-1}(1-p^{-1})^{-a}$*, entonces:*

a) $x_a(t) = t\ {}_1F_1(a,2;t)$

b) $\dfrac{d}{dt}[t\ {}_1F_1(a,2;t) \otimes t\ {}_1F_1(b,2;t)] = t\ {}_1F_1(a+b,2;t)$

Demostración.

a) Sea,

$$p^{-1}(1-p^{-1})^{-a} = x_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} (-1)^k (p^{-1})^{k+1}$$

([14],pag.94 y pag.98-100).

Dado que $(p^{-1})^n = \dfrac{t^n}{n!}$ y usando las igualdades, dadas por Srivastava y Manocha en [59],

$$\binom{-a}{k} = (-1)^k \frac{(a)_k}{k!}$$

$$\Gamma(k+\delta) = (\delta)_k \Gamma(\delta)$$

siendo $(\delta)_0 = 1$; se puede establecer la igualdad

$$x_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(2)_k} \frac{t^{k+1}}{\Gamma(k+1)} = t\ {}_1F_1(a,2;t)$$

b)

$$\frac{d}{dt}[x_a(t) \otimes x_b(t)] = \frac{d}{dt}[p^{-1}(1-p^{-1})^{-a} p^{-1}(1-p^{-1})^{-b} =$$

$$= \frac{d}{dt}(p^{-1})^2(1-p^{-1})^{-(a+b)} = p^{-1}(1-p^{-1})^{a+b} = x_{a+b}(t)$$

donde $x_{a+b}(t) = t\ {}_1F_1(a+b,2;t)$

A continuación se pretende obtener resultados análogos para la función

$$x_{a,\alpha}(t) = e^{\alpha t} x_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(2)_k} \frac{t^{k+1}}{\Gamma(k+1)} e^{\alpha t}$$

la cual pertenece a M, ya que $x_a(t),\ e^{\alpha t} \in M$. Para ello se seguirá una vez más la técnica usada en [25] y se usará la igualdad (III.2.2)

$$\frac{p}{(p-\alpha)^n} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha t}$$

para obtener la siguiente expresión operacional de $x_{a,\alpha}(t)$.

$$\begin{aligned} x_{a,\alpha}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} (-1)^k \frac{p}{(p-\alpha)^{k+2}} = \\ &= \tfrac{p}{(p-\alpha)^2}(1 - \tfrac{1}{p-\alpha})^{-a} = \\ &= p^{-1}(1-\alpha p^{-1})^{a-2}(1-\alpha p^{-1} - p^{-1})^{-a} \end{aligned} \tag{III.4.5}$$

Expresión que permite enunciar la siguiente proposición

Proposición III.4.2 *Sean,* $T = (\dfrac{d}{dt} - \alpha)$ *e* I *el operador integración , entonces*

$$TIT[x_{a,\alpha} \otimes x_{b,\alpha}](t) = x_{a+b,\alpha}(t)$$

Demostración.

Haciendo uso de la igualdad (III.4.5), se puede escribir

$$(x_{a,\alpha} \otimes x_{b,\alpha}(t) = (p^{-1})^2(1-\alpha p^{-1})^{a+b-4}(1-\alpha p^{-1} - p^{-1})^{-(a+b)}$$

y teniendo en cuenta que

$$TIT[p^{-1}(1-\alpha p^{-1})^{-2}] = (\frac{d}{dt}-\alpha)I[(1-\alpha p^{-1})^{-2}-\alpha p^{-1}(1-\alpha p^{-1})^{-2}] =$$

$$= (\frac{d}{dt}-\alpha)[p^{-1}(1-\alpha p^{-1})^{-2}-\alpha(p^{-1})^2(1-\alpha p^{-1})^{-2}] =$$

$$= [(1-\alpha p^{-1})^{-2}-\alpha p^{-1}(1-\alpha p^{-1})^{-2}] -$$

$$-[\alpha p^{-1}(1-\alpha p^{-1})^{-2}-(\alpha)^2(p^{-1})^2(1-\alpha p^{-1})^{-2}] =$$

$$= (1-\alpha p^{-1})^{-2}(1-\alpha p^{-1})-\alpha p^{-1}(1-\alpha p^{-1})^{-2}(1-\alpha p^{-1}) =$$

$$(1-\alpha p^{-1})^{-1}-\alpha p^{-1}(1-\alpha p^{-1})^{-1} = 1$$

es fácil comprobar que

$$TIT[x_{a,\alpha}\otimes x_{b,\alpha}](t) = p^{-1}(1-\alpha p^{-1})^{a+b-2}(1-\alpha p^{-1}-p^{-1})^{-(a+b)} = x_{a+b,\alpha}(t)$$

Se ha de resaltar que para, por ejemplo, $\alpha = -1$

$$x_{a,-1}(t) = t\ {}_1F_1(2-a,2,-t)$$

y que la proposición III.4.2, indicaría la veracidad de la siguiente propiedad

$$(\frac{d}{dt}-\alpha)\int_0^t(\frac{d}{du}-\alpha)\frac{d}{du}[\int_0^u(u-\psi)\ {}_1F_1(2-a,2,-(u-\psi))\psi$$

$${}_1F_1(2-b,2,-\psi)d\psi]du = t\ {}_1F_1(2-(a+b),2,-t)$$

lo que pone de manifiesto, una vez más, la bondad del método operacional para demostrar ciertas propiedades de convolución.

III.4.1 Otros ejemplos de utilización de la derivada algebraica

Se pretende ilustrar con otros dos ejemplos el uso de la derivada algebraica en la resolución de ecuaciones integro-diferenciales, así como la ayuda que representan las expresiones operacionales de las soluciones a la hora de demostrar ciertas propiedades. Con tal fin se introduce en primer lugar la proposición

Proposición III.4.3 *La ecuación operacional*

$$\frac{\mathcal{D}x}{x} = \frac{\gamma}{(p-\alpha)^j}$$

admite como solución

a) $c(p-\alpha)^{\gamma} \quad (c \in \mathbb{C})$ *para* $j = 1$

b) $c\ exp[\frac{\gamma}{-j+1}(p-\alpha)^{j+1}] \quad (c \in \mathbb{C})$ *para* $j = 2,\ 3,\ 4,\ ...$

Demostración. Es consecuencia inmediata de la aplicación de los apartados **d)** y **e)**, respectivamente, de la proposición III.3.4.

Ejemplo 3.1

Sea la ecuación

$$\begin{cases} (I-t)y'' - y' + y = -1 \\ \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Haciendo uso de las reglas operacionales (III.2.1), la ecuación puede escribirse como

$$\mathcal{D}[p^2y - p^2y(0) - py'(0)] - [py(t) - py(0)] + y = -1$$

aplicando las propiedades de la derivada algebraica y las condiciones iniciales del problema, se obtiene

$$p^2\mathcal{D}y(t) + (p+1)y(t) = 0$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{\mathcal{D}y}{y} = -\frac{p+1}{p^2} = \frac{-1}{p} + \frac{-1}{p^2}$$

ecuación que admite como solución al operador

$$y = p^{-1}exp(p^{-1}) = p^{-1}[1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{2!p^2} + ... + \frac{1}{n!p^n} + ...] =$$

$$= p^{-1}[1 + p^{-1} + \frac{(p^{-1})^2}{2!} + ... + \frac{(p^{-1})^n}{n!} + ...]$$

cuya expresión como función de M, viene dada por

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p^{-1})^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!\Gamma(n+2)} = tE_1(t)$$

donde $E_1(t)$ representa la función modificada de Bessel-Clifford de primera especie y de orden 1 , [22].

Ejemplo 3.2

Sea la ecuación

$$\begin{cases} (I-t)y'' - y' - y = -1 \\ \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Nuevamente por (III.2.1), se puede expresar la ecuación como

$$\mathcal{D}[p^2 y - p^2 y(0) - py'(0)] - [py(t) - py(0)] - y = -1$$

lo que lleva a

$$p^2 \mathcal{D}y(t) + (p-1)y(t) = 0$$

es decir

$$\frac{\mathcal{D}y}{y} = -\frac{p-1}{p^2} = \frac{-1}{p} + \frac{1}{p^2}$$

cuya solución operacional viene dada por

$$y = p^{-1}exp(-p^{-1}) = p^{-1}[1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{2!p^2} + ... + \frac{(-1)^n}{n!p^n} + ...] =$$

$$= p^{-1}[1 - p^{-1} + \frac{(p^{-1})^2}{2!} + ... + \frac{(-1)^n (p^{-1})^n}{n!} + ...]$$

que admite, como función, la expresión

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(p^{-1})^{n+1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n!\Gamma(n+2)} = tC_1(t)$$

siendo $C_1(t)$ la función de Bessel-Clifford de primera especie y de orden 1, [22].

III.4.2 Ecuaciones integro-diferenciales más generales.

En este apartado se utilizarán los resultados anteriores para obtener soluciones de las ecuaciones

$$\begin{cases} a_n H x^{(n)}(t) + (a_{n-1}H + b_{n-1})x^{(n-1)}(t) + ... + (a_0 H + b_0)x(t) = 0 \\ \\ (x(t) \in M) \ \ ; \ \ (H = t - I) \end{cases}$$

Siguiendo el mismo proceso, mostrado en el capítulo segundo, que W.Kierat [24], dada la ecuación

$$\frac{\mathcal{D}x}{x} = \frac{Q(p)}{P(p)} \qquad (x \in M) \tag{III.4.6}$$

donde Q y P son polinomios con coeficientes complejos, y tales que $grad\ (Q) < grad\ (P)$. La ecuación (III.4.6) puede expresarse como.

$$\frac{\mathcal{D}x}{x} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\gamma_{ij}}{(p - \alpha_i)^j} \qquad (\alpha_i\ ,\ \gamma_{ij} \in \mathbb{C}) \tag{III.4.7}$$

donde α_i , $i = 1, 2, ..., r$, son las raíces de $P(p)$ y $k_1 + k_2 + ... + k_r = grad\ (P)$.

No es complicado generalizar la igualdad (III.4.4)

Proposición III.4.4 *Sean $v_1,\ v_2,\ ...,\ v_n$ operadores de $\mathfrak{m}$, con $v_i \neq 0 \quad i = 1,\ 2,\ ...,\ n$, entonces*

$$\frac{\mathcal{D}(v_1.v_2...v_n)}{v_1.v_2...v_n} = \frac{\mathcal{D}v_1}{v_1} + \frac{\mathcal{D}v_2}{v_2} + ... + \frac{\mathcal{D}v_n}{v_n}$$

Demostración.

$$\frac{\mathcal{D}(v_1.v_2...v_n)}{v_1.v_2...v_n} = \frac{\sum_{i=1}^n v_1.v_2...[\mathcal{D}v_i]...v_n}{v_1.v_2...v_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathcal{D}v_i}{v_i}$$

Este último resultado permite resolver, una a una, las ecuaciones

$$\frac{\mathcal{D}x}{x} = \frac{\gamma_{ij}}{(p-\alpha_i)^j} \tag{III.4.8}$$

y obtener $v = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{k_i} v_{ij}$ como una solución de la ecuación (III.4.6), siendo v_{ij} una solución de (III.4.8)

En base a la proposición III.4.3, se puede asegurar que

$$v = C\prod_{i=1}^{r}(p-\alpha)^{\gamma_{i1}}\prod_{j=2}^{k_i} exp[\frac{\gamma_{ij}}{-j+1}(p-\alpha_i)^{-j+1}] \tag{III.4.9}$$

es una solución of (III.4.6).

Como quiera que la ecuación

$$\begin{cases} a_n H x^{(n)}(t) + (a_{n-1}H + b_{n-1})x^{(n-1)}(t) + ...+ \\ +(a_0 H + b_0)x(t) = 0 \\ (x(t) \in M) \;\; ; \;\; (H = t - I) \end{cases} \tag{III.4.10}$$

se puede transformar en $\dfrac{\mathcal{D}x}{x} = \dfrac{Q(p)}{P(p)}$, haciendo uso de las reglas operacionales (III.2.1) y las propiedades de la derivada algebraica $\mathcal{D}$, se concluye que si el operador v indicado en (III.4.9) representa una función de M, entonces es una solución de de la ecuación (III.4.10).

A modo de ejemplo se resuelve la ecuación

$$\begin{cases} (t-I)y''(t) + [-2\alpha(t-I)+1]y'(t) + [\alpha^2(t-I)+\beta]y(t) = 1 \\ \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

que puede ser escrita

$$-\mathcal{D}[p^2 y(t) - p] + 2\alpha\mathcal{D}py(t) + py(t) - \alpha^2\mathcal{D}y(t) + \beta y(t) = 1$$

y aplicando las propiedades de $\mathcal{D}$ se reduce a

$$(-p^2 + 2\alpha p - \alpha^2)\mathcal{D}y + (2\alpha + \beta - p)y = 0$$

o de forma equivalente

$$\frac{\mathcal{D}y}{y} = \frac{2\alpha+\beta-p}{(p-\alpha)^2} = \frac{-1}{p-\alpha} + \frac{\alpha+\beta}{(p-\alpha)^2}$$

admitiendo como solución el operador

$$y = (p-\alpha)^{-1} exp[-(\alpha+\beta)(p-\alpha)^{-1}] =$$

$$= \frac{1}{p-\alpha}[1 + \frac{-(\alpha+\beta)}{1!(p-\alpha)} + \frac{(\alpha+\beta)^2}{2!(p-\alpha)^2} + ... + \frac{(-1)^n(\alpha+\beta)^n}{n!(p-\alpha)^n} + ...] =$$

$$= [\frac{1}{p-\alpha} + \frac{-(\alpha+\beta)}{1!(p-\alpha)^2} + \frac{(\alpha+\beta)^2}{2!(p-\alpha)^3} + ... + \frac{(-1)^n(\alpha+\beta)^n}{n!(p-\alpha)^{n+1}} + ...] =$$

$$= p^{-1}[\frac{p}{p-\alpha} + \frac{-(\alpha+\beta)p}{1!(p-\alpha)^2} + \frac{(\alpha+\beta)^2 p}{2!(p-\alpha)^3} + ... + \frac{(-1)^n(\alpha+\beta)^n p}{n!(p-\alpha)^{n+1}} + ...]$$

cuya representación como función es

$$y(t) = \int_0^t e^{\alpha\tau}[1 + \frac{-(\alpha+\beta)}{(1!)^2}\tau + ... + \frac{(-1)^n(\alpha+\beta)^n}{(n!)^2}\tau^n + ...]d\tau$$

Capítulo IV

Derivadas algebraicas para el operador D^δ

IV.1 Introducción

En el presente capítulo se presentan tres derivadas algebraicas asociadas al operador de Riemann-Liouville D^δ, considerando tres convoluciones distintas para dicho operador.

La primera de dichas derivadas, recogida en [5], referida a la convolución de Mikusinski. La segunda, en [6] y referida a la convolución utilizada en [2] y cuya expresión viene dada por

$$(f \star g)(t) = \frac{D^\delta}{\Gamma(\delta)} \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

y la última, en [7], para la convolución

$$(f *_\lambda g)(t) = I^{\lambda-1}(f * g)(t) \quad (\lambda \geq 1)$$

estudiada en [33], donde $*$ representa la convolución de Mikusinski y $I^{\lambda-1}$ el operador integración fraccionaria de Riemann-Liouville.

En todos los casos se estudian las propiedades generales de las derivadas algebraicas y se presentan ejemplos de utilización de las mismas en la resolución de ecuaciones integro-diferenciales.

IV.2 Un cálculo operacional para el operador D^δ. La derivada $\mathcal{D}_1$

En este apartado, se genera un cálculo operacional para D^δ trabajando con la convolución de Mikusinski, lo que permitirá hacer uso de los resultados obtenidos por dicho autor.

Sea $\delta > 1$, un número real fijo. Siguiendo a Alamo y Rodríguez [2], se considera el conjunto de las funciones complejas evaluadas en los reales positivos que a continuación se describe:

$$C_\delta = \{f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1} \text{ unif. convergente en compactos de}[0,\infty)\}$$

En [2] se probó que $(C_\delta, +, \cdot_{\mathbb{C}})$ es un espacio vectorial.

A diferencia de lo estudiado en [2] por J. Alamo y J. Rodríguez para generar un cálculo operacional, en esta sección se considera en C_δ la convolución de Mikusinski

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\psi)g(\psi)d\psi$$

De la propia definición de $*$ se infiere la siguiente proposición.

Proposición IV.2.1 *Sean* $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1}$ *y* $g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^{k\delta-1}$, *entonces:*

a) $t^{k\delta-1} * t^{m\delta-1} = B(k\delta, m\delta)t^{(k+m)\delta-1}$.

b) $(f * g)(t) = \sum_{k=2}^{\infty} \{\sum_{j=1}^{k-1} a_j b_{k-j} B[j\delta,(k-j)\delta]\} t^{k\delta-1}$.

Donde $B(u,v) = \int_0^1 (1-t)^{u-1}t^{v-1}dt$ *representa la función beta.*

Esta proposición pone de manifiesto que $*$ es una operación cerrada en C_δ, por lo que se puede afirmar que $(C_\delta, +, *)$ es un subanillo de $(C, +, *)$. Donde C representa el conjunto de las funciones complejas continuas con variable real positiva. Mikusinski [36] y Yosida [63], entre otros, demostraron que la convolución $*$ no tiene divisores de cero y que no hay elemento unidad en C, lo que lleva a establecer la siguiente proposición.

Proposición IV.2.2 $(C_\delta, +, *)$ *es un anillo conmutativo, no unitario y sin divisores de cero.*

Nota IV.2.1: Se puede demostrar de forma directa que $(C_\delta, +, *)$ es un anillo.

Por lo tanto, C_δ puede ser extendido a su correspondiente cuerpo de fracciones

$$M_\delta = C_\delta \times (C_\delta - \{0\}) / \sim$$

donde la relación de equivalencia $\sim$ se define, como es usual, por

$$(f_1, g_1) \sim (f_2, g_2) \Leftrightarrow f_1 * g_2 = g_1 * f_2$$

De hecho M_δ es un subcuerpo del cuerpo de operadores de Mikusinski. Los elementos de M_δ se denominarán operadores, y de ahora en adelante se denotará por $\dfrac{f}{g}$ a la clase de equivalencia del par (f, g).

Las operaciones suma, multiplicación y producto por un escalar se definen, de forma estandar, sobre M_δ como:

- $\dfrac{f_1}{g_1} + \dfrac{f_2}{g_2} = \dfrac{f_1 * g_2 + g_1 * f_2}{g_1 * g_2}$
- $\dfrac{f_1}{g_1} \cdot \dfrac{f_2}{g_2} = \dfrac{f_1 * f_2}{g_1 * g_2}$
- $\alpha \dfrac{f}{g} = \dfrac{\alpha f}{g}$

Así pues, M_δ tiene estructura de álgebra.

Alamo y Rodríguez [2] demostraron que el operador D^δ es un endomorfismo sobre el espacio vectorial C_δ y probaron que para toda función $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1}$ en C_δ

$$D^\delta I^\delta f(t) = f(t)$$

$$I^\delta D^\delta f(t) = f(t) - a_1 t^{\delta-1} = f(t) - [t^{1-\delta} f(t)]_{t=0} t^{\delta-1} \tag{IV.2.1}$$

$$(I^\delta)^m (D^\delta)^m f(t) = f(t) - \sum_{j=1}^{m} a_j t^{j\delta-1} \tag{IV.2.2}$$

Estas igualdades serán de utilidad para el desarrollo de este apartado.

A continuación se da una proposición que permite identificar el operador I^δ, inverso por la derecha de D^δ, y sus potencias enteras positivas con ciertas funciones de C_δ.

Proposición IV.2.3 *Dados $f(t) \in C_\delta$ y $k \in \mathbb{N}$, se tiene que*

a) $\dfrac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} * f(t) = I^\delta f(t)$

b) $\dfrac{t^{k\delta-1}}{\Gamma(k\delta)} * f(t) = (I^\delta)^k f(t) = I^{k\delta} f(t)$

Demostración.

Para demostrar **a)** sólo hay que aplicar la definición de la convolución $*$:

$$\frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} * f(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} f(\tau)d\tau = I^\delta f(t)$$

y para **b)** aplicar el método de inducción: la igualdad es cierta para $k=1$, supóngase que es cierta para $k=n$ y compruébese su veracidad para $k=n+1$

$$I^{(n+1)\delta} f(t) = I^{n\delta} I^\delta f(t) = \frac{t^{n\delta-1}}{\Gamma(n\delta)} * [\frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} * f(t)] =$$

$$= [\frac{t^{n\delta-1}}{\Gamma(n\delta)} * \frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)}] * f(t) = \frac{t^{(n+1)\delta-1}}{\Gamma((n+1)\delta)} * f(t)$$

Siguiendo la notación de Mikusinski [36] se denota por

$$l_\delta = \frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} \equiv I^\delta$$

de modo que cuando se escriba $l_\delta f(t)$ se entenderá $I^\delta f(t)$.

Ha de resaltarse que puede considerarse $C_\delta \subset M_\delta$ ya que C_δ es isomorfo a un subanillo de M_δ mediante la aplicación

$$\begin{array}{c} C_\delta \longrightarrow M_\delta^1 \subset M_\delta \\ f \rightsquigarrow \frac{l_\delta f}{l_\delta} \end{array}$$

De forma análoga, el cuerpo de los números complejos puede embeberse en M_δ asociando a cada $\alpha \in \mathbb{C}$ con, el llamado operador numérico, $[\alpha] = \dfrac{\alpha t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}}$.

Se sigue inmediatamente las siguientes propiedades básicas de estos operadores.

Proposición IV.2.4 *Las operaciones suma y producto del cuerpo M_{δ} son cerradas dentro del conjunto de operadores numéricos. Es decir:*

a) $[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta]$

b) $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha\beta]$

Demostración.

Tal y como queda reflejado, la demostración es un ejercicio de cálculo:

a)

$$[\alpha] + [\beta] = \frac{\alpha t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}} + \frac{\beta t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}} = \frac{\alpha t^{\delta-1} * t^{\delta-1} + \beta t^{\delta-1} * t^{\delta-1}}{t^{\delta-1} * t^{\delta-1}} =$$

$$= \frac{[\alpha t^{\delta-1} + \beta t^{\delta-1}] * t^{\delta-1}}{t^{\delta-1} * t^{\delta-1}} = \frac{(\alpha + \beta) t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}} = [\alpha + \beta]$$

b)

$$[\alpha] \cdot [\beta] = \frac{\alpha t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}} \cdot \frac{\beta t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}} = \frac{\alpha t^{\delta-1} * \beta t^{\delta-1}}{t^{\delta-1} * t^{\delta-1}} =$$

$$= \frac{(\alpha\beta) t^{\delta-1} * t^{\delta-1}}{t^{\delta-1} * t^{\delta-1}} = \frac{(\alpha\beta) t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}} = [\alpha \cdot \beta]$$

De ahora en adelante, y siempre que no se produzca confusión, se denotará a los operadores numéricos $[\alpha]$ simplemente por α.

A continuación se establecen unas reglas operacionales, que serán de gran utilidad cuando se aplique el cálculo operacional generado, a la resolución de ciertas ecuaciones integro-diferenciales.

Proposición IV.2.5 *Sea $v_\delta \in M_\delta$ el inverso algebraico de l_δ. Para toda función $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1}$, se verifica:*

a)

$$v_\delta f(t) = D^\delta f(t) + \Gamma(\delta) a_1 \tag{IV.2.3}$$

b)

$$v_\delta^m f(t) = (D^\delta)^m f(t) + \sum_{j=1}^{m} a_j \Gamma(j\delta) v_\delta^{m-j} \tag{IV.2.4}$$

Demostración.

Para obtener (IV.2.3), ha de aplicarse a ambos de lados de (IV.2.1) el operador v_δ y tener en cuenta que $a_1 t^{\delta-1}$ se identifica con $\frac{l_\delta a_1 t^{\delta-1}}{l_\delta} \in M_\delta$, así que:

$$v_\delta a_1 t^{\delta-1} = \frac{a_1 t^{\delta-1}}{l_\delta} = [\Gamma(\delta) a_1] = \Gamma(\delta) a_1$$

Para demostrar (IV.2.4) el proceso es simila

$$(D^\delta)^m f(t) = v_\delta^m f(t) - \sum_{j=1}^{m} a_j v_\delta^m t^{j\delta-1} = \sum_{j=1}^{m} a_j v_\delta^m \Gamma(j\delta) l_\delta^j$$

que, reordenando y teniendo en cuenta que v_{δ} y l_{δ} son inversos algebraicos, lleva a:

$$v_{\delta}^{m} f(t) = (D^{\delta})^{m} f(t) + \sum_{j=1}^{m} a_j \Gamma(j\delta) v_{\delta}^{m-j}$$

IV.2.1 La derivada algebraica $\mathcal{D}_1$

El objetivo de esta sección es el de introducir un operador definido sobre C_{δ}, que se denotará por $\mathcal{D}_1$, el cual se demuestra, que es una derivada algebraica para el anillo $(C_{\delta}, +, *)$. Asimismo se estudian algunas propiedades de esta derivada, análogas a las ya vistas en capítulos anteriores, que serán de utilidad en la resolución de ecuaciones integro-diferenciales.

Definición IV.2.1 *Sea $f \in C_{\delta}$. Se define el operador $\mathcal{D}_1$ como sigue:*

$$\mathcal{D}_1 f(t) = -\frac{I^{\delta-1}}{\delta} t f(t)$$

El comportamiento del operador $\mathcal{D}_1$ sobre los elementos del anillo C_{δ}, viene dado en la

Proposición IV.2.6 *Dada* $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1} \in C_\delta$, *entonces* $\mathcal{D}_1 f(t) \in C_\delta$. *Además,* $\mathcal{D}_1 f(t)$ *viene expresado en cualquiera de las dos formas equivalentes siguientes:*

a) $-\dfrac{I^{\delta-1}}{\delta} t f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^{(k+1)\delta-1} \qquad (b_k = -a_k \dfrac{k\Gamma(k\delta)}{\Gamma[(k+1)\delta]})$

b) $-\dfrac{I^{\delta-1}}{\delta} t f(t) = (-t^{\delta-1}) * [\sum_{k=1}^{\infty} d_k t^{k\delta-1}] \qquad (d_k = \dfrac{k a_k}{\Gamma(\delta)})$

Demostración.

Es evidente que la veracidad de **a)** y **b)** implica que $\mathcal{D}_1 f(t) \in C_\delta$, por lo que pasamos a demostrarlas.

$$-\frac{I^{\delta-1}}{\delta} t f(t) = -\frac{I^{\delta-1}}{\delta} \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} -a_k \frac{\Gamma(k\delta+1)}{\delta\Gamma[(k+1)\delta]} t^{(k+1)\delta-1} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^{(k+1)\delta-1}$$

Para demostrar **b)**, expresión que en algunos casos será más manejable, sólo ha de tenerse en cuenta que aplicando la proposición IV.2.1, se tiene que

$$t^{\delta-1} * t^{k\delta-1} = \frac{\Gamma(\delta)\Gamma(k\delta)}{\Gamma[(k+1)\delta]} t^{(k+1)\delta-1}$$

El hecho de que $\mathcal{D}_1$ es una derivada algebraica sobre el anillo $(C_\delta, +, *)$, queda reflejado en la siguiente proposición.

Proposición IV.2.7 *Para cualquier par de funciones f y g en C_δ, se tiene:*

a) $\mathcal{D}_1[f(t)+g(t)] = \mathcal{D}_1 f(t) + \mathcal{D}_1 g(t)$

b) $\mathcal{D}_1(f*g)(t) = ([\mathcal{D}_1 f]*g)(t) + (f*[\mathcal{D}_1 g])(t)$

Demostración.

La demostración de **a)** se sigue inmediatamente del hecho de que el operador $\dfrac{-I^{\delta-1}}{\delta}t$ es lineal respecto a la suma. Para **b)**, sean $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1}$ y $g(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k t^{k\delta-1}$, entonces, por la proposición IV.2.1, se tiene que:

$$\mathcal{D}_1(f*g)(t) = \mathcal{D}_1 \sum_{k=2}^{\infty}\{\sum_{j=1}^{k-1} a_j b_{k-j} B[j\delta,(k-j)\delta]\} t^{k\delta-1}$$

si se denota $c_k = \sum\limits_{j=1}^{k-1} a_j b_{k-j} B[j\delta,(k-j)\delta]$, haciendo uso de la proposición IV.2.6 puede obtenerse:

$$\mathcal{D}_1(f*g)(t) = (-t^{\delta-1}) * \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\Gamma(\delta)} c_k t^{k\delta-1} \tag{IV.2.5}$$

De manera similar

$$\begin{aligned}([\mathcal{D}_1 f]*g)(t) &= (-t^{\delta-1}) * \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k a_k}{\Gamma(\delta)} t^{k\delta-1} * \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^{k\delta-1} = \\ &= (-t^{\delta-1}) * [\sum_{k=2}^{\infty}\{\sum_{j=1}^{k-2} \frac{j}{\Gamma(\delta)} a_j b_{k-j} B[j\delta,(k-j)\delta]\} t^{k\delta-1}]\end{aligned} \tag{IV.2.6}$$

y

$$
\begin{aligned}
(f*[\mathcal{D}_1 g])(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1} * (-t^{\delta-1}) * \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kb_k}{\Gamma(\delta)} t^{k\delta-1} = \\
&= (-t^{\delta-1}) * [\sum_{k=2}^{\infty} \{\sum_{j=1}^{k-2} \frac{(k-j)}{\Gamma(\delta)} a_j b_{k-j} B[j\delta,(k-j)\delta] t^{k\delta-1}]
\end{aligned}
\tag{IV.2.7}
$$

siendo por último un ejercicio de cálculo comprobar que (IV.2.5) es la suma de (IV.2.6) y (IV.2.7).

Ahora ya se está en condiciones de extender la definición de $\mathcal{D}_1$ al cuerpo M_δ de la forma usual:

$$\mathcal{D}_1 \frac{f}{g} = \frac{[\mathcal{D}_1 f] * g - f * [\mathcal{D}_1 g]}{g * g} \quad (f \in C_\delta\ ,\ g \in C_\delta - \{0\})$$

$$\mathcal{D}_1 \frac{p}{q} = \frac{[\mathcal{D}_1 p] \cdot q - p \cdot [\mathcal{D}_1 q]}{q^2} \quad (p \in M_\delta\ ,\ q \in M_\delta - \{0\})$$

Apoyándose en esta definición de $\mathcal{D}_1$ sobre M_δ, se puede establecer la siguiente proposición, la cual muestra el comportamiento de la derivada algebraica sobre algunos elementos concretos del cuerpo de fracciones, que será de gran utilidad en la resolución de ciertas ecuaciones integro-diferenciales.

Proposición IV.2.8 *Sea* $1 = \frac{t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}}$ *el elemento unidad de* M_δ, $0 = \frac{0}{t^{\delta-1}}$, $v_\delta = \frac{1}{l_\delta}$ *el inverso algebraico de* l_δ *en* M_δ *y* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces:*

a) $\mathcal{D}_1 1 = 0$

b) $\mathcal{D}_1 \alpha = 0$ *(siendo α cualquier operador numérico)*

c) $\mathcal{D}_1(\alpha p) = \alpha \mathcal{D}_1 p$ *(para todo $p \in M_\delta$)*

d) $\mathcal{D}_1 l_\delta^n = -n l_\delta^{n+1}$

e) $\mathcal{D}_1 v_\delta^n = n v_\delta^{n-1}$

f) $\mathcal{D}_1(1-\alpha l_\delta)^n = n\alpha l_\delta^2 (1-\alpha l_\delta)^{n-1}$

g) $\mathcal{D}_1(v_\delta - \alpha)^n = n(v_\delta - \alpha)^{n-1}$

h) $\mathcal{D}_1 exp[\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n}] = (-n)\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n-1} exp[\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n}]$

$$\textit{donde } exp[\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n}] = 1 + \frac{\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n}}{1!} + \frac{\gamma^2(v_\delta - \alpha)^{-2n}}{2!} + ...$$

Demostración. **a)** y **b)** se obtienen mediante un simple cálculo:

$$\mathcal{D}_1 1 = \mathcal{D}_1 \frac{t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}} = \frac{[\mathcal{D}_1 t^{\delta-1}] * t^{\delta-1} - t^{\delta-1} * [\mathcal{D}_1 t^{\delta-1}]}{t^{\delta-1} * t^{\delta-1}} = 0$$

$$\mathcal{D}_1 \alpha = \mathcal{D}_1 \frac{\alpha t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}} = \frac{\alpha[(\mathcal{D}_1 t^{\delta-1}) * t^{\delta-1}] - \alpha[t^{\delta-1} * (\mathcal{D}_1 t^{\delta-1})]}{t^{\delta-1} * t^{\delta-1}} = 0$$

c) es una consecuencia directa de **b)** y del comportamiento de la derivada algebraica sobre el producto de operadores. Para demostrar **d)** se emplea el método de inducción, ya que en este caso:

$$\mathcal{D}_1 l_\delta = \mathcal{D}_1 \frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} = -\frac{t^{2\delta-1}}{\Gamma(2\delta)} = -l_\delta^2,$$

si **d)** se verifica para $n = k$, entonces

$$\mathcal{D}_1 l_\delta^{k+1} = \mathcal{D}_1(l_\delta \cdot l_\delta^k) = [\mathcal{D}_1 l_\delta] \cdot l_\delta^k + l_\delta \cdot [\mathcal{D}_1 l_\delta^k] = -(k+1) l_\delta^{k+2}$$

En **e)** se considera el hecho de que $v_\delta = \dfrac{1}{l_\delta}$, por lo que no es complicado concluir que $\mathcal{D}_1 v_\delta = 1$ usando **a)** y **d)**, para luego usar nuevamente el método de inducción.

Para obtener **f)** y **g)**, téngase en cuenta que:

$$\mathcal{D}_1(1-\alpha l_\delta)^n = \mathcal{D}_1[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\alpha l_\delta)^{n-k}] =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-\alpha)^{n-k} (n-k) l_\delta^{n-k+1} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1} n \binom{n-1}{k} (-\alpha) l_\delta^2 (-\alpha l_\delta)^{n-k-1} = n\alpha l_\delta^2 (1-\alpha l_\delta)^{n-1}$$

como quiera que, $(v_\delta - \alpha)^n = (\dfrac{1}{l_\delta} - \alpha)^n = \dfrac{(1-\alpha l_\delta)^n}{l_\delta^n}$, usando **f)**, **d)** y la definición de $\mathcal{D}_1$ sobre M_δ la demostración queda concluida.

Por último, la demostración de **h)**, es un ejercicio de cálculo:

$$\mathcal{D}_1 exp[\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n}] = \mathcal{D}_1[1 + \frac{\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n}}{1!} + \frac{\gamma^2(v_\delta - \alpha)^{-2n}}{2!} + ...] =$$

$$= \frac{(-n)\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n-1}}{1!} + \frac{(-2n)\gamma^2(v_\delta - \alpha)^{-2n-1}}{2!} + ... =$$

$$= (-n)\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n-1}[1 + \frac{\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n}}{1!} + \frac{\gamma^2(v_\delta - \alpha)^{-2n}}{2!} + ...] =$$

$$= (-n)\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n-1} exp[\gamma(v_\delta - \alpha)^{-n}]$$

Nota IV.2.2: la última proposición se verifica también para $n \in \mathbb{Z}$, salvo la propiedad **h)**, dado que para cualquier $p \in M_\delta$: $\quad p^{-n} = \dfrac{1}{p^n}$

La segunda igualdad de la proposición IV.2.8 pone de manifiesto que la derivada algebraica de cualquier operador numérico es cero, es más, el resultado recíproco también es cierto.

Proposición IV.2.9 *Dado $p \in M_\delta$, si $\mathcal{D}_1 p = 0$ entonces p es un operador numérico.*

Demostración. Sea $p = \dfrac{f}{g}$ y $\mathcal{D}_1 p = 0$. Dado que

$$\mathcal{D}_1 p = \frac{([\mathcal{D}_1 f] * g)(t) - (f * [\mathcal{D}_1 g])(t)}{(g * g)(t)}$$

se sigue:

$$([\mathcal{D}_1 f] * g)(t) - (f * [\mathcal{D}_1 g])(t) = 0 \tag{IV.2.8}$$

si se denota por $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1}$ y $g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^{k\delta-1}$, se sabe por la demostración de la proposición IV.2.7 que:

$$([\mathcal{D}_1 f] * g)(t) = (-t^{\delta-1}) * [\sum_{k=2}^{\infty} \{\sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{\Gamma(\delta)} a_j b_{k-j} B(j\delta, (k-j)\delta)\} t^{k\delta-1}]$$

y

$$(f * [\mathcal{D}_1 g])(t) = (-t^{\delta-1}) * [\sum_{k=2}^{\infty} \{\sum_{j=1}^{k-1} \frac{(k-j)}{\Gamma(\delta)} a_j b_{k-j} B(j\delta, (k-j)\delta)\} t^{k\delta-1}]$$

así que, (IV.2.8) implica que

$$\sum_{j=1}^{k-1}(2j-k)a_jb_{k-j}B[j\delta,(k-j)\delta]=0 \quad (\forall k\geq 2) \tag{IV.2.9}$$

Supóngase ahora que $b_1\neq 0$. si se toma en (IV.2.9) $k=3$ y $k=4$ se obtiene respectivamente

$$a_1b_2=a_2b_1 \quad y \quad a_1b_3=a_3b_1$$

a continuación se comprueba que $a_mb_n=a_nb_m$ siempre que $a_1b_n=a_nb_1$ y $a_1b_m=a_mb_1$:

$$b_1a_mb_n=a_1b_mb_n=b_1a_nb_m$$

y como $b_1\neq 0$, se finaliza la comprobación.

Finalmente, y a fin de demostrar que $a_1b_k=a_kb_1$ para todo $k\geq 2$ se deben tener en cuenta las siguientes igualdades:

Para (k=2r),

$$\sum_{j=1}^{k-1}(2j-k)a_jb_{k-j}B[j\delta,(k-j)\delta]=$$

$$=\sum_{j=1}^{r-1}(2j-2r)(a_jb_{2r-j}-a_{2r-j}b_j)B[j\delta,(2r-j)\delta]$$

Para (k=2r+1),

$$\sum_{j=1}^{k-1}(2j-k)a_jb_{k-j}B[j\delta,(k-j)\delta]=$$

$$= \sum_{j=1}^{r} [2j - (2r+1)](a_j b_{2r+1-j} - a_{2r+1-j} b_j) B[j\delta, (2r+1-j)\delta]$$

Por lo tanto si $b_1 \neq 0$, se puede establecer que $a_k = \dfrac{a_1}{b_1} b_k$ para todo $k \geq 1$, en otras palabras

$$\frac{f}{g} = \frac{\alpha g}{g} = \frac{\alpha t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}} = [\alpha] \quad (\alpha = \frac{a_1}{b_1})$$

Para concluir la demostración, se hace notar que como quiera que si $b_1 = 0$ y $a_1 \neq 0$ permite probar que $b_k = 0$ para todo k, ya que

$$a_1 b_2 = a_2 b_1 \quad y \quad a_1 b_3 = a_3 b_1$$

lo que implicaría que $b_2 = 0$ y $b_3 = 0$, a partir de lo cual y tomando en (IV.2.9) $k = 5$ se obtendría

$$a_1 b_4 = a_4 b_1$$

lo que llevaría a concluir que $b_4 = 0$. Reiterando el proceso se concluiría que $b_k = 0$ para todo k, en contra del hecho de que $g(t) \in C_\delta - \{0\}$. Entonces $b_1 = 0$ implica $a_1 = 0$ por lo que en tal caso se comenzaría la demostración con $b_2 \neq 0$ y así sucesivamente.

IV.2.2 El uso de $\mathcal{D}_1$ en la resolución de ecuaciones integro-diferenciales

Como aplicación de los resultados obtenidos anteriormente, se pasará a resolver la ecuación integro-diferencial:

$$\begin{cases} -\mathcal{D}_1(D^\delta)^2 x(t) + (1+\mathcal{D}_1)D^\delta x(t) - ax(t) = 0 \\ [t^{1-\delta}x(t)]_{t=0} = 0 \ \ (x(t) \in C_\delta) \ \ (a \in \mathbb{C}) \end{cases} \tag{IV.2.10}$$

Haciendo uso de (IV.2.3), (IV.2.4) y la proposición IV.2.8; la ecuación (IV.2.10) se transforma en:

$$\frac{\mathcal{D}_1 x(t)}{x(t)} = \frac{a-1}{v_\delta} - \frac{a}{v_\delta - 1} = \frac{l_\delta[l_\delta(1-a)-1]}{1-l_\delta} \tag{IV.2.11}$$

Varias cuestiones pueden deducirse inmediatamente.

Proposición IV.2.10 *Sea* $l_\delta = \dfrac{t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)} \in M_\delta$, *entonces:*

a) $x_a = l_\delta(1-l_\delta)^{-a} \in M_\delta$ *es una solución de (IV.2.11)*

b) $x_a(t) = \dfrac{t^{\delta-1}}{\Gamma(a)} {}_1\Psi_1 \left[\begin{array}{cc} (a,1); & \\ & t^\delta \\ (\delta,\delta); & \end{array} \right] \in C_\delta$ *es una solución de (IV.2.10)*

c) $$D^\delta \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\delta-1}}{\Gamma(a)}\, {}_1\Psi_1\left[\begin{array}{cc} (a,1); & \\ & (t-\tau)^\delta \\ (\delta,\delta); & \end{array}\right] \frac{\tau^{\delta-1}}{\Gamma(b)}\, {}_1\Psi_1\left[\begin{array}{cc} (b,1); & \\ & \tau^\delta \\ (\delta,\delta); & \end{array}\right] d\tau$$
$$= \frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(a+b)}\, {}_1\Psi_1\left[\begin{array}{cc} (a+b,1); & \\ & t^\delta \\ (\delta,\delta); & \end{array}\right]$$

donde

$${}_1\Psi_1\left[\begin{array}{cc} (a,b); & \\ & t \\ (c,d); & \end{array}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(kb+a)}{\Gamma(kd+c)} \frac{t^k}{k!}$$

representa la función hipergeométrica generalizada de Wright, (cf.[59]).

Demostración.

a) Se puede representar al operador $(1-l_\delta)^{-a}$ como una serie (cf.[36, pag.171]),

$$\mathcal{D}_1(1-l_\delta)^{-a} = \mathcal{D}_1[1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{-a}{k}(-1)^k \frac{t^{k\delta-1}}{\Gamma(k\delta)}] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(-a)\binom{-a-1}{k-1}(-1)^{k-1}\frac{t^{(k+1)\delta-1}}{\Gamma[(k+1)\delta]} = (-a)l_\delta^2(1-l_\delta)^{-a-1}$$

lo que lleva a

$$\frac{\mathcal{D}_1[l_\delta(1-l_\delta)^{-a}]}{l_\delta(1-l_\delta)^{-a}} = \frac{-l_\delta^2(1-l_\delta)^{-a}+l_\delta(-a)l_\delta^2(1-l_\delta)^{-a-1}}{l_\delta(1-l_\delta)^{-a}} =$$

$$= \frac{l_\delta[l_\delta(1-a)-1]}{1-l_\delta}$$

b) La solución $x_a = l_\delta(1-l_\delta)^{-a}$ admite una representación como función de C_δ:

$$x_a = l_\delta(1-l_\delta)^{-a} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} (-1)^k l_\delta^{k+1} =$$

$$= t^{\delta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{\Gamma(k+1)} \frac{t^{k\delta}}{\Gamma[(k+1)\delta]} = \frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k\delta+\delta)} \frac{t^{k\delta}}{\Gamma(k+1)}$$

por lo tanto, (cf.[59, pag.50]),

$$x_a(t) = \frac{t^{\delta-1}}{\Gamma(a)} {}_1\Psi_1 \left[\begin{array}{cc} (a,1); & \\ & t^\delta \\ (\delta,\delta); & \end{array} \right]$$

c) Es consecuencia de los apartados anteriores, ya que:

$$(x_a * x_b)(t) = l_\delta(1-l_\delta)^{-a} l_\delta(1-l_\delta)^{-b} = l_\delta^2(1-l_\delta)^{-(a+b)}$$

entonces,

$$D^\delta(x_a * x_b)(t) = l_\delta(1-l_\delta)^{-(a+b)} = x_{a+b}(t)$$

Nota IV.2.3: Se ha de resaltar que en caso de que $-a \in \mathbb{N}$ las series que comparecen en la demostración anterior se truncan, con lo que $x_a(t)$ se reduce a un polinomio de grado fraccionario.

Sea ahora la ecuación:

$$\mathcal{D}_1(D^{\delta})^2x(t) + (n-1)D^{\delta}x(t) + x(t) = 0 \tag{IV.2.12}$$

con las condiciones:

$$(n \in \mathbb{N} - \{0\}); (x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1}, a_1 = 0)$$

para la que se utiliza, en primer lugar, las reglas operacionales (IV.2.3) y (IV.2.4)

$$\mathcal{D}_1[v_\delta^2 x(t) - a_2\Gamma(2\delta)] + (n-1)v_\delta x(t) + x(t) = 0$$

teniendo en cuenta ahora la acción de la derivada algebraica sobre las potencias de v_δ y los operadores numéricos, se tiene

$$2v_\delta + v_\delta^2\mathcal{D}_1 x(t) + (n-1)v_\delta x(t) + x(t) = 0$$

y agrupando

$$v_\delta^2\mathcal{D}_1 x(t) + [(n+1)v_\delta + 1]x(t) = 0$$

lo que conduce a la ecuación operacional

$$\frac{\mathcal{D}_1 x(t)}{x(t)} = \frac{-(n+1)}{v_\delta} + \frac{-1}{v_\delta^2}$$

que admite como solución al operador

$$x_n = v_\delta^{-(n+1)} exp[v_\delta^{-1}]$$

el cual se identifica con una función de C_δ

$$x_n(t) = l_\delta^{n+1}[1 + v_\delta^{-1} + \frac{v_\delta^{-2}}{2!} + ...] = l_\delta^{n+1} + l_\delta^{n+2} + \frac{l_\delta^{n+3}}{2!} + ... =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{l_\delta^{n+1+k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{(n+1+k)\delta-1}}{k!\Gamma[(n+1+k)\delta]} =$$

$$= t^{(n+1)\delta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t^\delta)^k}{k!\Gamma[(n+1+k)\delta]} = t^{(n+1)\delta-1}{}_1\Psi_1 \left[\begin{array}{cc} (1,0); & \\ & t^\delta \\ ((n+1)\delta, \delta); & \end{array} \right]$$

la cual representa una solución de la ecuación (IV.2.12).

Por último resaltar que de la expresión operacional

$$x_n(t) = v_\delta^{-(n+1)} exp[v_\delta^{-1}] = l_\delta^{n+1} exp[v_\delta^{-1}]$$

se deducen las siguientes igualdades, para $k \in \mathbb{N}$:

$$(D^\delta)^k x_n(t) = x_{n-k}(t) \quad (n-k > 0)$$

$$(I^\delta)^k x_n(t) = x_{n+k}(t)$$

Para finalizar se ha de remarcar que el operador $\mathcal{D}_1$, es una derivada algebraica incluso para el anillo $(C, +, *)$ utilizado por Mikusinski en [36]. Para demostrarlo han de tenerse en cuenta las siguientes proposiciones

Proposición IV.2.11 *Dados $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y $f, g \in C$, se verifica que:*

$$I^\alpha(f * g)(t) = [(I^\alpha f) * g](t) = [f * (I^\alpha g)](t)$$

Demostración.

La demostración se reduce a comprobar la veracidad de la primera igualdad, dado que la segunda es consecuencia de la primera y del hecho de que la convolución $*$ es conmutativa.

$$I^\alpha(f*g)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}[\int_0^\tau f(\tau-u)g(u)du]d\tau =$$

$$= \int_0^\tau [\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_u^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(t-\tau)d\tau]g(u)du =$$

$$= \int_0^\tau [\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t-u} (t-u-\psi)^{\alpha-1} f(\psi)d\psi]g(u)du = [(I^\alpha f)*g](t)$$

Proposición IV.2.12 *Sean $f, g \in C$, entonces:*

a) $\mathcal{D}_1(f+g)(t) = \mathcal{D}_1 f(t) + \mathcal{D}_1 g(t)$

b) $\mathcal{D}_1(f*g)(t) = [(\mathcal{D}_1 f)*g](t) + [f*(\mathcal{D}_1 g)](t)$

Demostración.

La demostración de **a)** es inmediata dado el carácter lineal de $\mathcal{D}_1$ respecto a la suma de funciones.

Para demostrar **b)**, se ha de considerar que $-tf(t)$ representa la derivada algebraica de Mikusinski de la función f, junto con la proposición IV.2.11, de lo que se infiere

$$\mathcal{D}_1(f*g)(t) = -\frac{I^{\delta-1}}{\delta}t(f*g)(t) = \frac{I^{\delta-1}}{\delta}\{[(-tf)*g](t) + [f*(-tg)](t)\} =$$

$$= [(\mathcal{D}_1 f) * g](t) + [f * (\mathcal{D}_1 g)](t)$$

Sin embargo este último hecho no devalua todo lo realizado anteriormente, ya que a la hora de buscar aplicaciones a ecuaciones donde comparezca el operador D^δ siempre se recurrirá a su transformación operacional en función del operador v_δ y sus potencias enteras positivas, así como a sus respectivos inversos algebraicos l_δ y l_δ^k, estando estos últimos representados por funciones de C_δ. Además, se puede comprobar que, aun siendo $\mathcal{D}_1$ una derivada algebraica para $(C, +, *)$ no tiene un buen comportamiento para los operadores l y s del cuerpo de fracciones de Mikusinski, en el sentido de que $\mathcal{D}_1 l^n \neq -nl^{n+1}$ y $\mathcal{D}_1 s^n \neq ns^{n-1}$, lo que pone de manifiesto que las derivadas algebraicas no sólo dependen de las convoluciones utilizadas para desarrollar los cálculos operacionales, sino también de los operadores para los que se han diseñados estos últimos.

IV.3 La convolución $\star$ asociada al operador D^δ: la derivada $\mathcal{D}_2$

Alamo y Rodríguez [2], generaron un cálculo operacional para el operador D^δ definiendo la convolución

$$(f \star g)(t) = \frac{D^\delta}{\Gamma(\delta)} \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \quad (\delta \geq 1)$$

sobre el espacio de funciones C_δ. La cual, para $\delta = 1$, coincide con la convolución de Ditkin y Prudnikov.

Los mencionados autores demostraron que $(C_\delta, +, \star)$ es un anillo conmutativo y unitario sin divisores de cero, siendo $t^{\delta-1}$ el elemento unidad.

De la definición de la convolución $\star$ dedujeron que

$$t^{k\delta-1} \star t^{m\delta-1} = \frac{\Gamma(k\delta)\Gamma(m\delta)}{\Gamma(\delta)\Gamma[(k+m-1)\delta]} t^{(k+m-1)\delta-1} \tag{IV.3.1}$$

lo cual permite, mediante un simple ejercicio de cálculo, establecer la siguiente proposición

Proposición IV.3.1 *Dadas* $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1}$ *y* $g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^{k\delta-1}$ *funciones arbitrarias de* C_δ

$$(f \star g)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \{\sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j+1} \frac{\Gamma(j\delta)\Gamma[(k-j+1)\delta]}{\Gamma(\delta)\Gamma(k\delta)}\} t^{k\delta-1}$$

Alamo y Rodríguez extendieron C_δ a su cuerpo de fracciones $M'_\delta = C_\delta \times (C_\delta - \{0\})/\sim$. Las operaciones suma, multiplicación y producto por un escalar fueron definidas en la manera usual y se estableció el isomorfismo entre C_δ y un subanillo de M'_δ como

$$f(t) \longrightarrow \frac{f(t)}{t^{\delta-1}}$$

de forma análoga puede considerarse a $\mathbb{C}$ contenido en M'_δ mediante el isomorfismo

$$\alpha \longrightarrow \frac{\alpha t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}}$$

El operador integral fraccionaria de Riemann-Liouville I^δ, fue identificado con la función

$$f(t) = \frac{\Gamma(\delta)t^{2\delta-1}}{\Gamma(2\delta)}$$

ya que

$$\frac{\Gamma(\delta)t^{2\delta-1}}{\Gamma(2\delta)} \star f(t) = I^\delta f(t)$$

y sus potencias enteras positivas $(I^\delta)^k$ con

$$\frac{\Gamma(\delta)t^{(k+1)\delta-1}}{\Gamma[(k+1)\delta]}$$

siendo sus respectivos inversos algebraicos

$$V = \frac{\Gamma(2\delta)t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)t^{2\delta-1}} \quad y \quad V^k = \frac{\Gamma[(k+1)\delta]t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta)t^{(k+1)\delta-1}}$$

Se establecieron las siguientes reglas operacionales para toda función $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1}$ de C_δ

$$\begin{aligned} Vf(t) &= D^\delta f(t) + a_1 V \\ V^m f(t) &= (D^\delta)^m f(t) + \sum_{j=1}^{m} a_j \frac{\Gamma(j\delta)}{\Gamma(\delta)} V^{m-j+1} \end{aligned} \tag{IV.3.2}$$

de las cuales dedujeron las identificaciones que se enumeran a continuación *i)* $\dfrac{V}{V+a} = \Gamma(\delta)E_\delta(-a,t)$

ii) $\dfrac{V}{V-a} = \Gamma(\delta)E_\delta(a,t)$

iii) $\dfrac{V^2}{V^2-a^2} = \dfrac{\Gamma(\delta)}{2}[E_\delta(-a,t)+E_\delta(a,t)]$

iv) $\dfrac{V}{V^2-a^2} = -\dfrac{\Gamma(\delta)}{2a}[E_\delta(-a,t)-E_\delta(a,t)]$

v) $\dfrac{t^{\delta-1}}{V+a} = \dfrac{t^{\delta-1}}{a} - \dfrac{\Gamma(\delta)}{a}E_\delta(-a,t)$

vi) $\dfrac{t^{\delta-1}}{V-a} = \dfrac{\Gamma(\delta)}{a}E_\delta(a,t) - \dfrac{t^{\delta-1}}{a}$

siendo $E_\delta(a,t)$ la función estudiada por Al-Bassam [1]

$$E_\delta(a,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a^{k-1}\frac{t^{k\delta-1}}{\Gamma(k\delta)}$$

Con el objetivo de poder resolver ciertas ecuaciones diferenciales e integro-diferenciales, es necesario establecer el siguiente teorema

Teorema IV.3.1 *Supongamos que la serie de potencias*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k \quad (z\ ,\ \alpha_k \in \mathbb{C})$$

es convergente en un punto $z_0 \neq 0$*, es decir,*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z_0^k = A \in \mathbb{C}$$

entonces la serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k V^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k H^k \quad (H^k = \frac{\Gamma(\delta) t^{(k+1)\delta-1}}{\Gamma[(k+1)\delta]})$$

es uniformemente convergente en compactos de $[0,\infty)$*, es decir, representa un elemento de* C_δ*.*

Demostración. Ha de hecerse notar que $V^0 = H^0 = 1 \in M'_\delta$ y que $1 = \dfrac{t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}}$ se identifica con $t^{\delta-1} \in C_\delta$.

Dado que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k V^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{\Gamma(\delta) t^{(k+1)\delta-1}}{\Gamma[(k+1)\delta]} = t^{\delta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma[(k+1)\delta]} (t^\delta)^k$$

se pasa a demostrar que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma[(k+1)\delta]} (t^\delta)^k$$

es uniformemente convergente en todo intervalo cerrado $[0,t_0]$ con $t_0 > 0$.

Se sabe que $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z_0^k$ con $z_0 \neq 0$ es convergente, por lo que se tiene

$$Sup_{k\geq 0} |\alpha_k z_0^k| = M_0 < \infty$$

y por tanto

$$|\alpha_k| \leq \frac{M_0}{|z_0|^k} \quad (0 < M_0 < \infty \ , \ k = 0,1,2,...)$$

Se sabe [33], dado que $(k+1)\delta > 2 \quad (k \geq 1)$,

$$\frac{1}{\Gamma[(k+1)\delta]} \leq \frac{\beta^k k^\gamma}{k^k} \quad (\beta \ y \ \gamma \ constantes)$$

Tomando entonces $t = t_0$ fijo, con $(0 < t_0 < \infty)$, se obtiene

$$|\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma[(k+1)\delta]}(t_0^\delta)^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_0 \Gamma(\delta)(t_0^\delta)^k \beta^k k^\gamma}{|z_0|^k k^k} < \infty$$

lo cual, haciendo uso del criterio de Abel, demuestra que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma[(k+1)\delta]}(t_0^\delta)^k$$

es uniformemente convergente en todo intervalo cerrado $[0, t_0]$.

Ejemplo.

$$\frac{V}{V-a} = (1-aH)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1}{k} (-1)^k a^k H^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k}{\Gamma(k+1)} a^k \frac{\Gamma(\delta) t^{(k+1)\delta - 1}}{\Gamma[(k+1)\delta]} = \sum_{m=1}^{\infty} a^{m-1} \frac{\Gamma(\delta) t^{m\delta - 1}}{\Gamma(m\delta)} = \Gamma(\delta) E_\delta(a, t)$$

lo que concuerda con el resultado obtenido por Alamo y Rodríguez, [2].

IV.3.1 La derivada algebraica $\mathcal{D}_2$

De forma similar a lo hecho con la derivada algebraica $\mathcal{D}_1$ y la convolución $*$, se introducirá una nueva derivada algebraica para el anillo

$(C_\delta, +, \star)$, estudiando propiedades de ésta y mostrando alguna aplicación.

Definición IV.3.1 *Sea $f \in C_\delta$. Se define el operador $\mathcal{D}_2$ como:*

$$\mathcal{D}_2 f(t) = [I^\delta - \frac{I^{\delta-1}}{\delta} t] f(t)$$

El operad

Proposición IV.3.2 *Para toda función $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1} \in C_\delta$, se verifica que $\mathcal{D}_2 f(t) \in C_\delta$. Además, $\mathcal{D}_2 f(t)$ admite las dos representaciones equivalentes:*

a) $[I^\delta - \frac{I^{\delta-1}}{\delta} t] f(t) = \sum_{k=2}^{\infty} b_k t^{(k+1)\delta-1} \qquad (b_k = a_k \frac{(1-k)\Gamma(k\delta)}{\Gamma[(k+1)\delta]})$

b) $[I^\delta - \frac{I^{\delta-1}}{\delta} t] f(t) = (t^{2\delta-1}) * [\sum_{k=2}^{\infty} d_k t^{k\delta-1}] \qquad (d_k = \frac{\Gamma(\delta)(1-k)a_k}{\Gamma(2\delta)})$

Demostración.

Es obvio que de la veracidad de **a)** y **b)** se deduce que $\mathcal{D}_2 f(t) \in C_\delta$.

$$[I^\delta - \frac{I^{\delta-1}}{\delta} t] f(t) = I^\delta \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1} - \frac{I^{\delta-1}}{\delta} \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (1-k) a_k \frac{\Gamma(k\delta)}{\Gamma[(k+1)\delta]} t^{(k+1)\delta-1} = \sum_{k=2}^{\infty} b_k t^{(k+1)\delta-1}$$

la demostraóde **b)** se infiere del hecho de que la aplicación de (IV.3.1), lleva a:

$$t^{2\delta-1} \star t^{k\delta-1} = \frac{\Gamma(2\delta)\Gamma(k\delta)}{\Gamma(\delta)\Gamma[(k+1)\delta]} t^{(k+1)\delta-1}$$

La confirmación de que $\mathcal{D}_2$ es una derivada algebraica sobre el anillo $(C_\delta, +, \star)$ la establece la proposición.

Proposición IV.3.3 *Para cualquier par de funciones f y g en C_δ, se tiene:*

a) $\mathcal{D}_2[f(t) + g(t)] = \mathcal{D}_2 f(t) + \mathcal{D}_2 g(t)$

b) $\mathcal{D}_2(f \star g)(t) = ([\mathcal{D}_2 f] \star g)(t) + (f \star [\mathcal{D}_2 g])(t)$

Demostración.

La demostración de **a)** se sigue, como siempre, del hecho de que el operador $[I^\delta - \dfrac{I^{\delta-1}}{\delta} t]$ es lineal respecto a la suma.

Para demostrar **b)**, se toman $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1}$ y $g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^{k\delta-1}$, y aplicando la proposición IV.3.1, se tiene que:

$$\mathcal{D}_2(f \star g)(t) = \mathcal{D}_2 \sum_{k=1}^{\infty} \{\sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j+1} \frac{\Gamma(j\delta)\Gamma[(k-j+1)\delta]}{\Gamma(\delta)\Gamma(k\delta)}\} t^{k\delta-1}$$

denotando por $c_k = \sum_{j=1}^{k} a_j b_{k-j+1} \dfrac{\Gamma(j\delta)\Gamma[(k-j+1)\delta]}{\Gamma(\delta)\Gamma(k\delta)}$, y haciendo uso de la proposición IV.3.2 se obtiene:

$$\mathcal{D}_2(f \star g)(t) = \frac{\Gamma(\delta)t^{2\delta-1}}{\Gamma(2\delta)} \star \sum_{k=2}^{\infty}(1-k)c_k t^{k\delta-1} \tag{IV.3.3}$$

De forma análoga

$$([\mathcal{D}_2 f] \star g)(t) = \frac{\Gamma(\delta)t^{2\delta-1}}{\Gamma(2\delta)} \star \sum_{k=2}^{\infty}(1-k)a_k t^{k\delta-1} \star \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^{k\delta-1} =$$

$$= \frac{\Gamma(\delta)t^{2\delta-1}}{\Gamma(2\delta)} \star [\sum_{k=2}^{\infty}\{\sum_{j=1}^{k}(1-j)a_j b_{k-j+1}\frac{\Gamma(j\delta)\Gamma[(k-j+1)\delta]}{\Gamma(\delta)\Gamma(k\delta)}\}t^{k\delta-1}] \tag{IV.3.4}$$

y

$$(f \star [\mathcal{D}_2 g])(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1} \star \frac{\Gamma(\delta)t^{2\delta-1}}{\Gamma(2\delta)} \star \sum_{k=2}^{\infty}(1-k)b_k t^{k\delta-1} =$$

$$= \frac{\Gamma(\delta)t^{2\delta-1}}{\Gamma(2\delta)} \star [\sum_{k=2}^{\infty}\{\sum_{j=1}^{k}(j-k)a_j b_{k-j+1}\frac{\Gamma(j\delta)\Gamma[(k-j+1)\delta]}{\Gamma(\delta)\Gamma(k\delta)}\}t^{k\delta-1}] \tag{IV.3.5}$$

ya sólo resta comprobar que (IV.3.3) es la suma de (IV.3.4) y (IV.3.5).

Como es usual, se extiende la definición de $\mathcal{D}_2$ al cuerpo M'_{δ}:

$$\mathcal{D}_2 \frac{f}{g} = \frac{[\mathcal{D}_2 f] \star g - f \star [\mathcal{D}_2 g]}{g \star g} \quad (f \in C_{\delta}\ ,\ g \in C_{\delta} - \{0\})$$

$$\mathcal{D}_2 \frac{p}{q} = \frac{[\mathcal{D}_2 p] \cdot q - p \cdot [\mathcal{D}_2 q]}{q^2} \quad (p \in M'_{\delta}\ ,\ q \in M'_{\delta} - \{0\})$$

Una vez extendida al cuerpo de fracciones, la siguiente proposición pone de manifiesto el buen comportamiento de $\mathcal{D}_2$ en M_δ.

Proposición IV.3.4 *Dados los elementos* $1 = \dfrac{t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}}$, $0 = \dfrac{0}{t^{\delta-1}}$, $H = \dfrac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(2\delta)} t^{2\delta-1}$, $V = \dfrac{\Gamma(2\delta) t^{\delta-1}}{\Gamma(\delta) t^{2\delta-1}} = H^{-1}$ *de* M'_δ *y* $n \in \mathbb{N}$. *entonces:*

a) $\mathcal{D}_2 1 = 0$

b) $\mathcal{D}_2 \alpha = 0$ *(siendo* $\alpha = \dfrac{\alpha t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}}$ *)*

c) $\mathcal{D}_2(\alpha p) = \alpha \mathcal{D}_2 p$ *(para todo* $p \in M'_\delta$*)*

d) $\mathcal{D}_2 H^n = -nH^{n+1}$

e) $\mathcal{D}_2 V^n = nV^{n-1}$

f) $\mathcal{D}_2(1-\alpha H)^n = n\alpha H^2(1-\alpha H)^{n-1}$

g) $\mathcal{D}_2(V-\alpha)^n = n(V-\alpha)^{n-1}$

Demostración. Para demostrar **a)** y **b)** se efectua un simple cálculo:

$$\mathcal{D}_2 1 = \mathcal{D}_2 \frac{t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}} = \frac{[\mathcal{D}_2 t^{\delta-1}] \star t^{\delta-1} - t^{\delta-1} \star [\mathcal{D}_2 t^{\delta-1}]}{t^{\delta-1} \star t^{\delta-1}} = 0$$

$$\mathcal{D}_2 \alpha = \mathcal{D}_2 \frac{\alpha t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}} = \frac{\alpha[(\mathcal{D}_2 t^{\delta-1}) \star t^{\delta-1}] - \alpha[t^{\delta-1} \star (\mathcal{D}_2 t^{\delta-1})]}{t^{\delta-1} \star t^{\delta-1}} = 0$$

c) se deduce directamente de **b)** y de la acción de la derivada algebraica sobre el producto de operadores. Para **d)** se emplea el método de inducción:

$$\mathcal{D}_2 H = (I^\delta - \frac{I^{\delta-1}}{\delta} t)\frac{\Gamma(\delta)t^{2\delta-1}}{\Gamma(2\delta)} = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(2\delta)}[\frac{\Gamma(2\delta)}{\Gamma(3\delta)}t^{3\delta-1} - \frac{\Gamma(2\delta+1)}{\Gamma(3\delta)\delta}t^{3\delta-1}] =$$

$$= -\frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(3\delta)}t^{3\delta-1} = -H^2$$

y

$$\mathcal{D}_2 H^{k+1} = \mathcal{D}_2(H \cdot H^k) = [\mathcal{D}_2 H] \cdot H^k + H \cdot [\mathcal{D}_2 H^k] = -(k+1)H^{k+2}$$

En **e)** hay que considerar que $V = \dfrac{1}{H}$, lo que llevaría, usando **a)** y **d)**, a establecer que $\mathcal{D}_2 V = 1$, para luego aplicar, nuevamente, el método de inducción.

Para **f)** y **g)**, se tiene en cuenta que:

$$\mathcal{D}_2(1-\alpha H)^n = \mathcal{D}_2[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-\alpha H)^{n-k}] =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(-\alpha)^{n-k}(n-k)H^{n-k+1} =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k}(-\alpha)H^2(-\alpha H)^{n-k-1} = n\alpha H^2(1-\alpha H)^{n-1}$$

y dado que, $(V-\alpha)^n = (\dfrac{1}{H}-\alpha)^n = \dfrac{(1-\alpha H)^n}{H^n}$, aplicando **f)**, **d)** y la definición de $\mathcal{D}_2$ sobre M'_δ, se concluye la demostración.

Nota IV.3.1: al igual que ocurría para la proposición IV.2.8, la última proposición se verifica también para $n \in \mathbb{Z}$, dado que para cualquier $p \in M'_\delta : \quad p^{-n} = \dfrac{1}{p^n}$

Para la derivada algebraica $\mathcal{D}_2$, también se verifica el recíproco de la segunda igualdad de la proposición IV.3.4.

Proposición IV.3.5 *Dado $p \in M'_{\delta}$, si $\mathcal{D}_2 p = 0$ entonces $p = \dfrac{\alpha t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}}$ con $\alpha \in \mathbb{C}$.*

Demostración. Se sigue un procedimiento similar al de la proposición IV.2.9.

Sea $p = \dfrac{f}{g}$ y $\mathcal{D}_2 p = 0$. Dado que

$$\mathcal{D}_2 p = \frac{([\mathcal{D}_2 f] \star g)(t) - (f \star [\mathcal{D}_2 g])(t)}{(g \star g)(t)}$$

se sigue:

$$([\mathcal{D}_2 f] \star g)(t) - (f \star [\mathcal{D}_2 g])(t) = 0 \qquad \text{(IV.3.6)}$$

si se denota $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\delta-1}$ y $g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k t^{k\delta-1}$, se sabe por la proposición IV.3.3 que:

$$([\mathcal{D}_2 f] \star g)(t) = \frac{\Gamma(\delta) t^{2\delta-1}}{\Gamma(2\delta)} \star$$

$$\star [\sum_{k=2}^{\infty} \{\sum_{j=1}^{k} (1-j) a_j b_{k-j+1} \frac{\Gamma(j\delta)\Gamma[(k-j+1)\delta]}{\Gamma(\delta)\Gamma(k\delta)}\} t^{k\delta-1}]$$

y

$$(f \star [\mathcal{D}_2 g])(t) = \frac{\Gamma(\delta) t^{2\delta-1}}{\Gamma(2\delta)} \star$$

$$\star[\sum_{k=2}^{\infty}\{\sum_{j=1}^{k}(j-k)a_j b_{k-j+1}\frac{\Gamma(j\delta)\Gamma[(k-j+1)\delta]}{\Gamma(\delta)\Gamma(k\delta)}\}t^{k\delta-1}]$$

así que, (IV.3.6) establece que

$$\sum_{j=1}^{k}(1+k-2j)a_j b_{k-j+1}\frac{\Gamma(j\delta)\Gamma[(k-j+1)\delta]}{\Gamma(\delta)\Gamma(k\delta)}=0 \quad (\forall k\geq 2) \quad \text{(IV.3.7)}$$

Supóngase ahora que $b_1\neq 0$. si se toma en (IV.3.7) $k=2$ y $k=3$ se obtiene respectivamente

$$a_1b_2=a_2b_1 \quad y \quad a_1b_3=a_3b_1$$

y al igual que en la proposición IV.2.9, se verifica que $a_mb_n=a_nb_m$ siempre que $a_1b_n=a_nb_1$ y $a_1b_m=a_mb_1$.

Finalmente, para demostrar que $a_1b_k=a_kb_1$ para todo $k\geq 2$ se utilizan las siguientes igualdades:

$(k=2r)$

$$\sum_{j=1}^{2r}(1+2r-2j)a_j b_{2r-j+1}\frac{\Gamma(j\delta)\Gamma[(2r-j+1)\delta]}{\Gamma(\delta)\Gamma(2r\delta)}=$$

$$=\sum_{j=1}^{r}(1+2r-2j)(a_j b_{2r-j+1}-a_{2r-j+1}b_j)\frac{\Gamma(j\delta)\Gamma[(2r-j+1)\delta]}{\Gamma(\delta)\Gamma(2r\delta)}$$

$(k=2r+1)$

$$\sum_{j=1}^{2r+1}(2+2r-2j)a_j b_{2r+2-j}\frac{\Gamma(j\delta)\Gamma[(2+2r-j)\delta]}{\Gamma(\delta)\Gamma((2r+1)\delta)}=$$

$$= \sum_{j=1}^{r} (2+2r-2j)(a_j b_{2+2r-j} - a_{2+2r-j} b_j) \frac{\Gamma(j\delta)\Gamma[(2+2r-j)\delta]}{\Gamma(\delta)\Gamma((2r+1)\delta)}$$

Por lo tanto si $b_1 \neq 0$, se puede establecer que $a_k = \dfrac{a_1}{b_1} b_k$ para todo $k \geq 1$, es decir

$$\frac{f}{g} = \frac{\alpha g}{g} = \frac{\alpha t^{\delta-1}}{t^{\delta-1}} \quad (\alpha = \frac{a_1}{b_1})$$

Para concluir la demostración, se tiene en cuenta, al igual que en la proposición IV.2.9, que si $b_1 = 0$ y $a_1 \neq 0$ permite probar que $b_k = 0$ para todo k en contra del hecho de que $g(t) \in C_\delta - \{0\}$, entonces $b_1 = 0$ implica $a_1 = 0$ por lo que en tal caso se comenzaría la demostración con $b_2 \neq 0$ y así sucesivamente.

IV.3.2 El uso de $\mathcal{D}_2$ en la resolución de ecuaciones integro-diferenciales

Como ejemplo de aplicación de los resultados obtenidos en el apartado anterior, y al igual que se hizo en la sección IV.2.2, se pasará a resolver la ecuación integro-diferencial:

$$\begin{cases} -\mathcal{D}_2 (D^{\delta})^2 x(t) + (1+\mathcal{D}_2) D^{\delta} x(t) - a x(t) = 1 \quad (x(t) \in C_\delta) \;\; (a \in \mathbb{C}) \\ [t^{1-\delta} x(t)]_{t=0} = 0 \;\; , \;\; [t^{1-\delta} D^{\delta} x(t)]_{t=0} = \frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(2\delta)} \end{cases} \tag{IV.3.8}$$

Usando (IV.3.2) y la proposición IV.3.4; la ecuación (IV.3.8) se reduce a la ecuación operacional:

$$\frac{\mathcal{D}_2 x(t)}{x(t)} = \frac{a-1}{V} - \frac{a}{V-1} = \frac{H[H(1-a)-1]}{1-H} \tag{IV.3.9}$$

De lo que se deduce.

Proposición IV.3.6

a) $x_a = H(1-H)^{-a} \in M'_\delta$ *es una solución de (IV.3.9)*

b) $x_a(t) = \dfrac{\Gamma(\delta)t^{2\delta-1}}{\Gamma(a)} {}_1\Psi_1 \left[\begin{array}{cc} (a,1); & \\ & t^\delta \\ (2\delta,\delta); & \end{array} \right]$ *es una solución de (IV.3.8)*

c) $D^\delta(x_a \star x_b)(t) = x_{a+b}(t)$

donde

$${}_1\Psi_1 \left[\begin{array}{cc} (a,b); & \\ & t \\ (c,d); & \end{array} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(kb+a)}{\Gamma(kd+c)} \frac{t^k}{k!}$$

representa la función hipergeométrica generalizada de Wright, (cf.[59]).

Demostración.

a) El operador $(1-H)^{-a}$ puede ser representado, en base al teorema IV.3.1, como una serie ,

$$\mathcal{D}_2(1-H)^{-a} = \mathcal{D}_2[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-a}{k} (-1)^k \frac{\Gamma(\delta)t^{(k+1)\delta-1}}{\Gamma[(k+1)\delta]}] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-a)\binom{-a-1}{k-1}(-1)^{k-1}\frac{\Gamma(\delta)t^{(k+2)\delta-1}}{\Gamma[(k+2)\delta]} = (-a)H^2(1-H)^{-a-1}$$

de lo que se infiere que

$$\frac{\mathcal{D}_2[H(1-H)^{-a}]}{H(1-H)^{-a}} = \frac{-H^2(1-H)^{-a} + H(-a)H^2(1-H)^{-a-1}}{H(1-H)^{-a}} =$$

$$= \frac{H[H(1-a)-1]}{1-H}$$

b) El operador $x_a = H(1-H)^{-a}$ admite la siguiente representación como función de C_δ:

$$x_a = H(1-H)^{-a} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-a}{k}(-1)^k H^{k+1} =$$

$$= \Gamma(\delta)t^{2\delta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{\Gamma(k+1)}\frac{t^{k\delta}}{\Gamma[(k+2)\delta]} = \frac{\Gamma(\delta)t^{2\delta-1}}{\Gamma(a)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(k\delta+2\delta)}\frac{t^{k\delta}}{\Gamma(k+1)}$$

por lo que se puede afirmar, (cf.[59, pag.50]), que

$$x_a(t) = \frac{\Gamma(\delta)t^{2\delta-1}}{\Gamma(a)}\,{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{cc} (a,1); & \\ & t^\delta \\ (2\delta,\delta); & \end{array}\right]$$

c) Es una simple consecuencia del apartado **a)**, ya que:

$$(x_a \star x_b)(t) = H(1-H)^{-a}H(1-H)^{-b} = H^2(1-H)^{-(a+b)}$$

por lo tanto,

$$D^\delta(x_a \star x_b)(t) = H(1-H)^{-(a+b)} = x_{a+b}(t)$$

Nota IV.3.2: Es importante resaltar que en caso de que $-a \in \mathbb{N}$ las series que comparecen, para la función $x_a(t)$, en la demostración anterior se truncan, con lo que $x_a(t)$ se reduce a un polinomio de grado fraccionario.

IV.4 La convolución $*_\lambda$ y la derivada $\mathcal{D}_\lambda$

En [33], Y.F. Luchko y H.M. Srivastava generaron un cálculo operacional para el operador D^δ apoyándose en la convolución

$$(f *_\lambda g)(t) = I^{\lambda-1} \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = I^{\lambda-1}(f * g)(t) \quad (\lambda \geq 1) \quad \text{(IV.4.1)}$$

donde $I^{\lambda-1}$ representa el operador integración fraccionaria de Riemann-Liouville y $*$ la convolución de Mikusinski.

Para ello consideran los espacios de funciones

$$C_\alpha = \{f : f(t) = t^p f_1(t),\ p > \alpha,\ f_1 \in C([0,\infty))\} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

no siendo complicado comprobar que $C_\mu \subset C_\nu$, siempre que $\nu < \mu$.

En particular, los autores trabajan sobre el espacio C_{-1} y demuestran que para cualquier número real $\mu > 0$, el operador I^μ es una aplicación lineal de C_{-1} en si mismo, ya que

$$I^\mu : C_{-1} \longrightarrow C_{\mu-1} \subset C_{-1}$$

verificándose que para toda función $f \in C_{-1}$

$$I^\alpha I^\beta f(t) = I^{\alpha+\beta} f(t)$$

Luchko y Srivastava, introducen la derivada fraccionaria de Riemann-Liouville como

$$D^\mu f(t) = \tfrac{d^n}{dt^n} I^{n-\mu} f(t) \ \ con \ \ \mu > 0$$

$$\begin{cases} [\mu]+1 & \mu \in (\mathbb{R}-\mathbb{N}) \\ \\ \mu & \mu \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad \text{(IV.4.2)}$$

que coincide con la dada en [2] y comprobando que I^μ es el inverso por la derecha de D^μ, es decir, si $f \in C_{-1}$ y $g(t) = I^\mu f(t)$, entonces

$$f(t) = D^\mu g(t) = D^\mu I^\mu f(t)$$

También introducen los espacios

$$\Omega_\mu^m(C_{-1}) = \{f \in C_{-1} : (D^\mu)^k f(t) \in C_{-1} \quad k = 1, 2, 3, ..., m\}$$

siguiéndose que $\Omega_\mu^m(C_{-1})$ contiene en particular, a las funciones $f \in C_{-1}$ que admiten una representación de la forma

$$f(t) = (I^\mu)^m g(t) \equiv I^{m\mu} g(t) \quad (g \in C_{-1})$$

Además establecen que si $f(t) = I^{m\mu} g(t)$ con $m \in \mathbb{N}$ y $g \in C_{-1}$, entonces

$$(D^\mu)^m f(t) = D^{m\mu} f(t)$$

y

$$I^\mu D^\mu f(t) = f(t)$$

de lo que se deduce que I^μ es inverso por la izquierda de D^μ para las funciones de $\Omega^1_\mu(C_{-1})$ que puedan representarse por

$$f(t) = I^\mu g(t) \quad (g \in C_{-1})$$

En general para cualquier función arbitraria $f \in \Omega^1_\mu(C_{-1})$, se verifica que

$$Ff(t) = (E - I^\mu D^\mu)f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{\mu-k}}{\Gamma(\mu-k+1)} \{\lim_{t\to 0} D^{\mu-k} f(t)\}$$

donde n viene dado por (IV.4.2) y E representa el operador identidad sobre $\Omega^1_\mu(C_{-1})$. El operador $F = E - I^\mu D^\mu$, recibe el nombre de proyector de I^μ.

El operador integral fraccionaria de Riemann-Liouville I^μ admite la representación convolucional

$$I^\mu f(t) = (h *_\lambda f)(t) \ \ ; \ \ [h(t) = \frac{t^{\mu-\lambda}}{\Gamma(\mu-\lambda+1)} \ ; \ 1 \le \lambda < \mu+1]$$

es más

$$(I^\mu)^k f(t) = (h^k *_\lambda f)(t) \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$h^k(t) = h(t) = \tfrac{t^{k\mu-\lambda}}{\Gamma(k\mu-\lambda+} \ ; \ 1 \le \lambda < k\mu+1$$

Llegados a este punto, y dado que, $(C_{-1}, +, *_\lambda)$ es un anillo conmutativo no unitario y sin divisores de cero, lo extienden a su cuerpo de fracciones

$$M_{-1} = C_{-1} \times (C_{-1} - \{0\})/\sim$$

definiendo las operaciones en M_{-1} de forma usual.

En analogía con Mikusinski, consideran que $C_{-1} \subset M_{-1}$ identificando $f \in C_{-1}$ con $\dfrac{(h *_\lambda f)(t)}{h(t)} \in M_{-1}$. Así mismo, se interpreta que $\mathbb{C} \subset M_{-1}$ al identificar $\alpha \in \mathbb{C}$ con $\dfrac{\alpha h(t)}{h(t)} \in M_{-1}$.

Se denota por $S = \dfrac{1}{h} = \dfrac{h}{h *_\lambda h} = \dfrac{h}{h^2}$ al inverso algebraico del operador I^μ, donde $1 = \dfrac{h}{h}$ representa el elemento unidad en M_{-1}.

La relación existente entre el operador D^μ y el inverso algebraico de I^μ queda reflejada en la siguiente igualdad

$$(D^\mu)^m f(t) = S^m f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} S^{m-k} F (D^\mu)^k f(t) \quad (f \in \Omega_\mu^m(C-1))$$

donde $F = E - I^\mu D^\mu$.

Por último establecen el siguiente teorema, que constituye una potente herramienta para determinar que expresiones, en M_{-1}, dependientes de S representan una función de C_{-1}.

Teorema IV.4.1 *Supongamos que la serie de potencias*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k \quad (z, \alpha_k \in \mathbb{C})$$

es convergente en el punto $z_0 \neq 0$, *es decir*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z_0^k = A \in \mathbb{C}.$$

Entonces, la serie de potencias

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k S^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k h^k(t)$$

define un elemento del anillo C_{-1}.

Usando este teorema obtienen relaciones operacionales que identifican elementos de M_{-1} con funciones del anillo C_{-1}

$$\frac{1}{S-\alpha} = \frac{h}{1-\alpha h} = h(1+\alpha h+\alpha^2 h^2+...) = t^{\mu-\lambda} E_{\mu,\mu-\lambda+1}(\alpha t^\mu)$$

siendo

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$$

la función generalizada de Mittag-Leffer $(\alpha, \beta > 0\ ;\ |z| < \infty)$. Es más,

$$\frac{1}{(S-\alpha)^m} = t^{m\mu-\lambda} E^m_{\mu,m\mu-\lambda+1}(\alpha t^\mu)$$

con

$$E^\rho_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k z^k}{k!\Gamma(\alpha k+\beta)} \quad ; \quad [E^1_{\alpha,\beta}(z) = E_{\alpha,\beta}(z)]$$

también

$$\frac{1}{S^2+\alpha^2} = \frac{t^{\mu-\lambda}}{\alpha} sen_{\lambda,\mu}(\alpha t^\mu)$$

donde

$$sen_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{\Gamma(2\mu k + 2\mu - \lambda + 1)} = zE_{2\mu,2\mu-\lambda+1}(-z^2)$$

y

$$\frac{S}{S^2 + \alpha^2} = \frac{t^{\mu-\lambda}}{\alpha} cos_{\lambda,\mu}(\alpha t^\mu)$$

con

$$cos_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(2\mu k + \mu - \lambda + 1)} = E_{2\mu,\mu-\lambda+1}(-z^2)$$

IV.4.1 Una derivada algebraica para el anillo $(C_{-1}, +, *_\lambda)$

Se pretende definir un operador $\mathcal{D}_\lambda$ de C_{-1} en C_{-1}, que verifique las condiciones de una derivada algebraica, para luego extenderla a M_{-1} y estudiar su comportamiento sobre ciertos elementos de dicho cuerpo.

Definición IV.4.1 *Dada $f \in C_{-1}$, se define el operador $\mathcal{D}_\lambda$ como:*

$$\mathcal{D}_\lambda f(t) = (\frac{1-\lambda}{\mu} I^\mu - \frac{1}{\mu} I^{\mu-1} t) f(t)$$

La siguiente proposición establece que el operador $\mathcal{D}_\lambda$ es cerrado en C_{-1}.

Proposición IV.4.1 *Sea $f \in C_{-1}$, entonces $\mathcal{D}_\lambda f \in C_{-1}$*

Demostración.

Luchko y Srivastava [33], establecieron que I^μ es un operador que transforma elementos de C_{-1} en elementos de $C_{\mu-1} \subset C_{-1}$.

Por otra parte, si $f(t) = t^p f_1(t) \in C_{-1}$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
I^{\mu-1} t f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\mu-1)} \int_0^t (t-\tau)^{\mu-2} \tau f(\tau) d\tau = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu-1)} \int_0^t (t-\tau)^{\mu-2} \tau^{p+1} f_1(\tau) d\tau = \\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu-1)} \int_0^1 (1-u)^{\mu-2} t^{\mu-2} (tu)^{p+1} f(tu) t du = \\
&= \frac{t^{\mu+p}}{\Gamma(\mu-1)} \int_0^1 (1-u)^{\mu-2} u^{p+1} f(tu) du = \\
&= t^{\mu+p} f_2(t) \quad (\mu + p > \mu - 1) \ \ (f_2 \in C\{[0,\infty)\})
\end{aligned}
$$

luego, $I^{\mu-1} t f \in C_{\mu-1} \subset C_{-1}$ y por tanto se puede afirmar que $\mathcal{D}_\lambda f \in C_{-1}$.

Para la comprobación de que $\mathcal{D}_\lambda$ es una derivada algebraica se necesitan una serie de resultados previos, los cuales son recogidos en las siguientes proposiciones y cuyas demostraciones pueden verse en [61]

Proposición IV.4.2 *Sea el operador* $\delta_t f(t) = tDf(t)$, *si* $f \in C^1([0,\infty))$ *se verifica*

a) $\delta_t t^\alpha f(t) = t^\alpha (\delta_t + \alpha) f(t)$

b) $\delta_t I^\alpha f(t) = I^\alpha(\delta_t + \alpha) f(t)$

Proposición IV.4.3 *Dada $f \in C^1([0,\infty))$ con $f(0) = 0$ y dado $\alpha > 0$, entonces*

$$t^{-1}\delta_t I^\alpha f(t) = I^\alpha t^{-1}\delta_t f(t)$$

Proposición IV.4.4 *Si f y g son localmente integrables en $[0,\infty)$ y $*$ denota la convolución de Mikusinski, se tiene que*

a) $Dt(f*g)(t) = (1+\delta_t)(f*g)(t)$

b) $I^\alpha Dt(f*g)(t) = I^{\alpha-1}t(f*g)(t)$

Demostración

a) $Dt(f*g)(t) = (f*g)(t) + tD(f*g)(t) = (1+\delta_t)(f*g)(t)$

b) $I^\alpha Dt(f*g)(t) = I^{\alpha-1}IDt(f*g)(t) = I^{\alpha-1}t(f*g)(t) -$

$-I^{\alpha-1}[t(f*g)(t)]_{t=0} = I^{\alpha-1}t(f*g)(t)$

Con el uso de estas tres últimas proposiciones, se aborda la demostración de que $\mathcal{D}_\lambda$ es una derivada algebraica en el anillo $(C_{-1}, +, *_\lambda)$.

Proposición IV.4.5 *Para cualquier par de funciones $f, g \in C_{-1}$, se verifica:*

a) $\mathcal{D}_\lambda(f+g)(t) = \mathcal{D}_\lambda f(t) + \mathcal{D}_\lambda g(t)$

b) $\mathcal{D}_\lambda(f *_\lambda g)(t) = [(\mathcal{D}_\lambda f) *_\lambda g](t) + [f *_\lambda (\mathcal{D}_\lambda g)](t)$

Demostración.

Al igual que en casos anteriores, la demostración de **a)** es trivial dado el carácter lineal de $\mathcal{D}_\lambda$ respecto a la suma de funciones. Para **b)** se requiere un proceso de cálculo, en el que se hace uso de las proposiciones IV.4.2, IV.4.3 y IV.4.4; y que se detalla a continuación.

$$\mathcal{D}_\lambda(f *_\lambda g)(t) = [\frac{1-\lambda}{\mu} I^\mu - \frac{1}{\mu} I^{\mu-1} t][I^{\lambda-1}(f*g)(t)] = A(f*g)(t) - B(f*g)(t)$$

siendo $A = \dfrac{1-\lambda}{\mu} I^{\mu+\lambda-1}$, $B = \frac{1}{\mu} I^{\mu-1} t I^{\lambda-1}$ y $*$ la convolución de Mikusinski.

Se desarrolla, a continuación, el sumando $B(f*g)(t)$

$$\frac{1}{\mu} t^{-1} t D I^\mu t I^{\lambda-1}(f*g)(t) = \frac{1}{\mu} t^{-1} \delta_t I^\mu t I^{\lambda-1}(f*g)(t) = (*)$$

por la proposición IV.4.3

$$(*) = \frac{1}{\mu} I^\mu t^{-1} \delta_t t I^{\lambda-1}(f*g)(t) = (**)$$

y por la proposición IV.4.2

$$(**) = \frac{1}{\mu} I^\mu (\delta_t + 1) I^{\lambda-1}(f*g)(t) = \frac{1}{\mu} I^\mu I^{\lambda-1}(\delta_t + 1 + \lambda - 1)(f*g)(t) =$$

$$= -\frac{1-\lambda}{\mu} I^{\mu+\lambda-1}(f*g)(t) + \frac{1}{\mu} I^{\mu+\lambda-1}(\delta_t+1)(f*g)(t) =$$

$$= -A(f*g)(t) + \frac{1}{\mu} I^{\mu+\lambda-1} Dt(f*g)(t) = -A(f*g)(t) + \frac{1}{\mu} I^{\mu+\lambda-2} t(f*g)(t)$$

Dado que $-tf(t)$ representa la derivada algebraica de Mikusinski de la función f, se obtiene

$$B(f*g)(t) = -A(f*g)(t) - \frac{1}{\mu} I^{\mu+\lambda-2}[((-tf)*g)(t) + (f*(-tg))(t)] =$$

$$= -A(f*g)(t) - I^{\lambda-1}[(-\frac{1}{\mu} I^{\mu-1} tf)*g](t) - I^{\lambda-1}[f*(-\frac{1}{\mu} I^{\mu-1} tg)](t)$$

por último, si se tiene en cuenta que

$$A(f*g)(t) = \frac{1-\lambda}{\mu} I^{\mu+\lambda-1}(f*g)(t) = I^{\lambda-1}[(\frac{1-\lambda}{\mu} I^{\mu} f)*g](t) =$$

$$= I^{\lambda-1}[f*(\frac{1-\lambda}{\mu} I^{\mu} g)](t)$$

se obtine

$$\mathcal{D}_\lambda(f *_\lambda g)(t) = I^{\lambda-1}[(\frac{1-\lambda}{\mu} I^{\mu} f)*g](t) + I^{\lambda-1}[f*(\frac{1-\lambda}{\mu} I^{\mu} g)](t)$$

$$+I^{\lambda-1}[(-\frac{1}{\mu} I^{\mu-1} tf)*g](t) + I^{\lambda-1}[f*(-\frac{1}{\mu} I^{\mu-1} tg)](t) =$$

$$= [(\mathcal{D}_\lambda f) *_\lambda g](t) + [f *_\lambda (\mathcal{D}_\lambda g)](t)$$

A partir de aquí, y como es usual, se extiende la definición de $\mathcal{D}_\lambda$ al cuerpo M_{-1}

$$\mathcal{D}_\lambda \frac{f}{g} = \frac{(\mathcal{D}_\lambda f) *_\lambda g - f *_\lambda (\mathcal{D}_\lambda g)}{g *_\lambda g} \quad (f \in C_{-1}\ ,\ g \in C_{-1} - \{0\})$$

$$\mathcal{D}_\lambda \frac{a}{b} = \frac{(\mathcal{D}_\lambda a)\cdot b - a\cdot(\mathcal{D}_\lambda b)}{b^2} \qquad (a \in M_{-1}\ ,\ b \in M_{-1} - \{0\})$$

y se estudia el comportamiento de $\mathcal{D}_\lambda$ sobre ciertos elementos del cuerpo, tal y como se refleja en la siguiente proposición.

Proposición IV.4.6 *Sean* $1 = \dfrac{h}{h}$ *y* $0 = \dfrac{0h}{h}$ *la unidad y el cero de* M_{-1} *respectivamente. Dados* $h = \dfrac{h^2}{h}$, $S = \dfrac{1}{h} = \dfrac{h}{h^2}$, *q un elemento arbitrario de* M_{-1} *y* $\alpha = \dfrac{\alpha h}{h}$ *con* $\alpha \in \mathbb{C}$, *entonces:*

a) $\mathcal{D}_\lambda 1 = 0$

b) $\mathcal{D}_\lambda \alpha = 0$

c) $\mathcal{D}_\lambda(\alpha q) = \alpha \mathcal{D}_\lambda q$

d) $\mathcal{D}_\lambda h^n = -nh^{n+1}$

e) $\mathcal{D}_\lambda S^n = nS^{n-1}$

f) $\mathcal{D}_\lambda(1-\alpha h)^n = n\alpha h^2(1-\alpha h)^{n-1}$

g) $\mathcal{D}_\lambda(S-\alpha)^n = n(S-\alpha)^{n-1}$

Demostración

En realidad **a)** es un caso particular de **b)**, por lo que se demuestra directamente **b)**

$$\mathcal{D}_\lambda \alpha = \mathcal{D}_\lambda \frac{\alpha h}{h} = \frac{\alpha[(\mathcal{D}_\lambda h) *_\lambda h] - \alpha[h *_\lambda (\mathcal{D}_\lambda h)]}{h *_\lambda h} = 0$$

c) es consecuencia de **b)**. Para la comprobación de **d)** se utiliza, como en otros casos, el método de inducción

$$\mathcal{D}_\lambda h = \mathcal{D}_\lambda \frac{t^{\mu-\lambda}}{\Gamma(\mu-\lambda+1)} = \frac{1}{\mu\Gamma(\mu-\lambda+1)}[(1-\lambda)I^\mu t^{\mu-\lambda} - I^{\mu-1}t^{\mu-\lambda+1}] =$$

$$= \frac{1}{\mu\Gamma(\mu-\lambda+1)}[(1-\lambda)\frac{\Gamma(\mu-\lambda+1)}{\Gamma(2\mu-\lambda+1)} - \frac{\Gamma(\mu-\lambda+2)}{\Gamma(2\mu-\lambda+1)}]t^{2\mu-\lambda} =$$

$$= -\frac{t^{2\mu-\lambda}}{\Gamma(2\mu-\lambda+1)} = -h^2$$

y para n

$$\mathcal{D}_\lambda h^n = \mathcal{D}_\lambda[h \cdot h^{n-1}] = -nh^{n+1}$$

e) se deduce de **d)** y **a)**, dado que

$$\mathcal{D}_\lambda S^n = \mathcal{D}_\lambda \frac{1}{h^n}$$

La demostración de **f)** es análoga a la correspondiente de la proposición IV.2.8

$$\mathcal{D}_\lambda(1-\alpha)^n = \mathcal{D}_\lambda \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k \alpha^k h^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k(-k)\alpha^k h^{k+1} =$$

$$= n\alpha h^2(1-\alpha h)^{n-1}$$

y a partir de ésta y las anteriores se deduce **g)**.

Como ejemplo de aplicación de los resultados obtenidos se plantea, a continuación, la resolución de la ecuación

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{D}_\lambda(D^\mu)^2x(t)-(1+\mathcal{D}_\lambda)D^\mu x(t)-ax(t)=0 \\ \\ \qquad \lim_{t\to 0}[D^{\mu-k}(D^\mu)^i x](t)=0 \\ \\ \qquad i=0,1\;\;;\;\;k=1,2,...,n \end{array}\right.$$

donde n viene dado por (IV.4.2), $a\in\mathbb{C}$ y $x(t)\in\Omega_\mu^2(C_{-1})$.

Aplicando el cálculo operacional generado para $*_\lambda$ la ecuación se transforma en

$$\mathcal{D}_\lambda[S^2x(t)]-(1+\mathcal{D}_\lambda)[Sx(t)]-ax(t)=0$$

que aplicando las propiedades de la derivada algebraica se reduce a

$$\frac{\mathcal{D}_\lambda x(t)}{x(t)}=\frac{a-1}{S}+\frac{-a}{S-1}$$

la cual admite como solución al elemento de M_{-1}

$$x_a=S^{a-1}(S-1)^{-a}=h(1-h)^{-a}$$

identificándose, éste, con la función

$$x_a(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-a}{k}(-1)^k h^{k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-a}{k}(-1)^k\frac{t^{(k+1)\mu-\lambda}}{\Gamma(1+(k+1)\mu-\lambda)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{\Gamma(k+1)}\frac{t^{(k+1)\mu-\lambda}}{\Gamma(1+(k+1)\mu-\lambda)}=t^{\mu-\lambda}E^a_{\mu,1+\mu-\lambda}(t^\mu)$$

Además, si se tiene en cuenta la representación de $x_a(t)$ como elemento de M_{-1}, es fácil comprobar que

$$D^\mu(x_a *_\lambda x_b)(t)=x_{a+b}(t)$$

Capítulo V

El teorema de semejanza de Meller y la derivada algebraica

V.1 Introducción

Numerosos autores, y en particular I. Dimovski en [13], han utilizado en sus estudios para poder definir una convolución asociada a un operador lineal L, que está íntimamente relacionado con otro operador lineal $\hat{L}$, del que se tiene una convolución, $\hat{*}$, el conocido teorema de semejanza de Meller.

Teorema V.1.1 *Si $T : X \to \hat{X}$ es un isomorfismo del espacio vectorial X en el espacio vectorial $\hat{X}$, y $\hat{L} : \hat{X} \to \hat{X}$ es un operador lineal definido* *sobre $\hat{X}$ con una convolución asociada $\hat{*} : \hat{X} \times \hat{X} \to \hat{X}$, entonces la operación $x * y = T^{-1}(Tx \hat{*} Ty)$ es una convolución para el operador $L = T^{-1}\hat{L}T$ definido sobre X.*

A lo largo de este capítulo, se utilizará este teorema para obtener una derivada algebraica $\mathcal{D}$ asociada a la operación convolución $*$, siempre que exista la correspondiente derivada algebraica $\hat{\mathcal{D}}$ asociada con la operación convolución $\hat{*}$. Asimismo el mencionado teorema permitirá generar un cálculo operacional para operadores que están íntimamente relacionados con operadores conocidos.

También se resolverán, como ejemplos de aplicaciones, ciertas ecuaciones diferenciales e integro-diferenciales.

V.2 La derivada algebraica y el teorema de semejanza de Meller

En [8], se establece la utilización del teorema de semejanza de Meller como una herramienta, en la búsqueda de nuevas derivadas algebraicas a partir de otras ya conocidas. Para ello, sean $\hat{X}$ un espacio vectorial y $\hat{*}$ una convolución tal que $(\hat{X}, +, \hat{*})$ es un anillo conmutativo sin divisores de cero. Se asume que en el anillo hay definida una derivada algebraica $\hat{\mathcal{D}}$, es decir, para cualquier par de funciones f y g pertenecientes a $\hat{X}$

se verifica que:

$$\hat{\mathcal{D}}[f+g] = \hat{\mathcal{D}}f + \hat{\mathcal{D}}g \tag{V.2.1}$$

$$\hat{\mathcal{D}}[f\hat{*}g] = [\hat{\mathcal{D}}f]\hat{*}g + f\hat{*}[\hat{\mathcal{D}}g] \tag{V.2.2}$$

Siguiendo el mismo razonamiento que Mikusinski [36], el anillo $\hat{X}$ puede ser extendido a su cuerpo de fracciones $\hat{M}$, el cual tendría además estructura de álgebra, en la manera usual, factorizando $\hat{X} \times (\hat{X} - \{0\})$ respecto a la relación de equivalencia

$$(f,g) \sim (h,t) \Leftrightarrow f\hat{*}t = g\hat{*}h. \tag{V.2.3}$$

Dado que los elementos del cuerpo $\hat{M}$ pueden ser considerados como cocientes de convolución $\dfrac{f}{g}$, se pueden definir, de forma estándar, las operaciones en $\hat{M}$, como

i) $\dfrac{f}{g} + \dfrac{h}{p} = \dfrac{f\hat{*}p + g\hat{*}h}{g\hat{*}p}$

ii) $\dfrac{f}{g} \cdot \dfrac{h}{p} = \dfrac{f\hat{*}h}{g\hat{*}p}$

iii) $\alpha\dfrac{f}{g} = \dfrac{\alpha f}{g} \quad (\alpha\ escalar)$

La derivada algebraica $\hat{\mathcal{D}}$ se extiende al cuerpo de fracciones $\hat{\mathcal{M}}$, como sigue

$$\hat{\mathcal{D}}[\frac{f}{g}] = \frac{[\hat{\mathcal{D}}f]\hat{*}g - f\hat{*}[\hat{\mathcal{D}}g]}{g\hat{*}g}$$

lo que implica que, para cualquier $a, \ b \ \in \hat{\mathcal{M}}$ y cualquier escalar λ, se tenga que

iv) $\hat{\mathcal{D}}(a \pm b) = \hat{\mathcal{D}}a \pm \hat{\mathcal{D}}b$

v) $\hat{\mathcal{D}}(a \cdot b) = (\hat{\mathcal{D}}a) \cdot b + a \cdot (\hat{\mathcal{D}}b)$

vi) $\hat{\mathcal{D}}(\frac{a}{b}) = \frac{(\hat{\mathcal{D}}a) \cdot b - a \cdot (\hat{\mathcal{D}}b)}{b^2} \quad (b \neq 0)$

vii) $\hat{\mathcal{D}}(\lambda \cdot a) = \lambda \hat{\mathcal{D}}a$

Dado un isomorfismo algebraico $T : X \to \hat{X}$ y un operador lineal $\hat{L}$ sobre $\hat{X}$, se puede establecer el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "L"] \arrow[d, "T"'] & X \\
\hat{X} \arrow[r, "\hat{L}"'] & \hat{X} \arrow[u, "T^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

siendo $L = T^{-1}\hat{L}T$. En base al teorema V.1.1 es muy natural definir, $x*y = T^{-1}[Tx\hat{*}Ty]$ como una convolución sobre X, asociada al operador L. Esta convolución dota a X de la estructura de anillo conmutativo sin divisores de cero y hace posible el que se genere un cálculo operacional para el operador L. Además T es un ismorfismo entre álgebras ya que

$$T[x * y] = Tx\hat{*}Ty. \tag{V.2.4}$$

Con esto, la definición de una derivada algebraica sobre el anillo X asociada con la convolución $*$, viene expresada por la proposición.

Proposición V.2.1 *El operador $\mathcal{D} = T^{-1}\hat{\mathcal{D}}T$ es una derivada algebraica en el anillo $(X, +, *)$. Obsérvese que hay una relación dada por $T\mathcal{D} = \hat{\mathcal{D}}T$, o bien $\mathcal{D}T^{-1} = T^{-1}\hat{\mathcal{D}}$.*

Demostración.

Se debe comprobar que $\mathcal{D}$ verifica (V.2.1) y (V.2.2) para cualquier par de elementos $x, y \in X$

- $\mathcal{D}(x + y) = T^{-1}\hat{\mathcal{D}}T(x + y) = T^{-1}\hat{\mathcal{D}}Tx + T^{-1}\hat{\mathcal{D}}Ty = \mathcal{D}x + \mathcal{D}y$
- $\mathcal{D}(x * y) = \mathcal{D}T^{-1}(Tx\hat{*}Ty) = T^{-1}\hat{\mathcal{D}}(Tx\hat{*}Ty) = T^{-1}[(\hat{\mathcal{D}}Tx)\hat{*}Ty] + T^{-1}[Tx\hat{*}(\hat{\mathcal{D}}Ty)] =$
  $= T^{-1}[(T\mathcal{D}x)\hat{*}Ty] + T^{-1}[Tx\hat{*}(T\mathcal{D}y)] = (\mathcal{D}x) * y + x * (\mathcal{D}y)$

A continuación se mostrará que es posible extender el isomorfismo $T : X \to \hat{X}$ como un ismorfismo entre los respectivos cuerpos de fracciones

$$\mathcal{M} = X \times (X - \{0\})/\sim$$

y

$$\hat{\mathcal{M}} = \hat{X} \times (\hat{X} - \{0\})/\sim$$

donde $\sim$ representa la relación de equivalencia usual (V.2.3), adaptada a las respectivas convoluciones.

Definición V.2.1 *Dado* $\frac{f}{g} \in \mathcal{M}$, *se define* $T(\frac{f}{g}) \in \hat{\mathcal{M}}$ *como*

$$T(\frac{f}{g}) = \frac{Tf}{Tg} = \frac{\hat{f}}{\hat{g}}$$

Para comprobar que T es, efectivamente, un isomorfismo entre los cuerpos $\mathcal{M}$ y $\hat{\mathcal{M}}$, se han de dar los siguientes pasos:

La definición no depende del representante elegido para cada clase de equivalencia

$$\frac{f}{g} = \frac{h}{p} \;\Rightarrow\; f * p = g * h \;\Rightarrow\; T(f * p) = T(g * h)$$

entonces, por (V.2.4) se tiene que

$$Tf \hat{*} Tp = Tg \hat{*} Th \;\Rightarrow\; \frac{Tf}{Tg} = \frac{Th}{Tp}$$

T es lineal respecto a la suma

$$T(\frac{f}{g}+\frac{h}{p})=T(\frac{f*p+g*h}{g*p})=\frac{Tf\hat{*}Tp+Tg\hat{*}Th}{Tg\hat{*}Tp}=\frac{Tf}{Tg}+\frac{Th}{Tp}$$

T es lineal respecto al producto

$$T(\frac{f}{g}\cdot\frac{h}{p})=T(\frac{f*h}{g*p})=\frac{Tf\hat{*}Th}{Tg\hat{*}Tp}=\frac{Tf}{Tg}\cdot\frac{Th}{Tp}$$

T es una aplicación sobreyectiva

$$\forall\ \frac{\hat{f}}{\hat{g}}\in\hat{\mathcal{M}}\implies\exists\ \frac{f}{g}=\frac{T^{-1}(\hat{f})}{T^{-1}(\hat{g})}\in\mathcal{M}\ :\ T(\frac{f}{g})=\frac{\hat{f}}{\hat{g}}$$

T es una aplicación inyectiva

$$T(\frac{f}{g})=T(\frac{h}{p})\ \Rightarrow\ Tf\hat{*}Tp=Tg\hat{*}Th$$

y usando una vez más (V.2.4), se tiene que

$$T(f*p)=T(g*h)\ \Rightarrow\ f*p=g*h\ \Rightarrow\ \frac{f}{g}=\frac{h}{p}$$

Sea $\hat{W}$, el operador inverso por la derecha de $\hat{L}$, y supóngase que existe $\hat{l}\in\hat{X}$ verificando que $\hat{W}\hat{f}=\hat{l}\hat{*}\hat{f}$, para cualquier $\hat{f}\in\hat{X}$. Bajo estas condiciones, se sigue que el anillo $\hat{X}$ puede considerarse incluido en el cuerpo $\hat{\mathcal{M}}$, ya que es isomorfo a un subanillo de éste, mediante la aplicación:

$$f \to \frac{\hat{l}\hat{*}f}{\hat{l}}$$

En cierto sentido puede pensarse en $\hat{W}$ como un elemento de $\hat{\mathcal{M}}$, y existirá $\hat{s} \in \hat{\mathcal{M}}$ inverso algebraico de $\hat{l}$.

Haciendo uso de la última suposición puede establecerse la siguiente proposición

Proposición V.2.2 *Sea W el operador inverso por la derecha de L, $f \in X$ y $l = T^{-1}(\hat{l}) \in \mathcal{M}$, entonces:*

$$Wf = l * f$$

Demostración.

$$Wf = T^{-1}\hat{W}Tf = T^{-1}(\hat{l}\hat{*}Tf) = T^{-1}(Tl\hat{*}Tf) = l * f,$$

Por lo tanto puede asumirse que $W = l = T^{-1}(\hat{l}) \in \mathcal{M}$, siendo, además, claro que el isomorfismo $T : \mathcal{M} \to \hat{\mathcal{M}}$ aplica $s = \dfrac{1}{l}$ en $\hat{s} = \dfrac{1}{\hat{l}}$.

Es importante conocer si el isomorfismo T transfiere las propiedades que pueda tener la derivada algebraica $\hat{\mathcal{D}}$ a $\mathcal{D}$. Para ello se recuerda que es usual extender la definición de la derivada algebraica desde el anillo al cuerpo de fracciones de la manera siguiente:

- $\mathcal{D}\dfrac{f}{g} = \dfrac{[\mathcal{D}f] * g - f * [\mathcal{D}g]}{g * g}, \quad (f, g) \in X \times (X - \{0\})$
- $\mathcal{D}\dfrac{a}{b} = \dfrac{[\mathcal{D}a] \cdot b - a \cdot [\mathcal{D}b]}{b^2}, \quad a, b \in \mathcal{M}$

En la siguiente proposición se presentan aquellas propiedades de $\hat{\mathcal{D}}$ que son transmitidas a $\mathcal{D}$.

Proposición V.2.3 *Las siguientes afirmaciones son ciertas, donde* $n \in \mathbb{N}$*:*

a) Si $\hat{\mathcal{D}}\hat{s} = 1$ entonces $\mathcal{D}s = 1$

b) Si $\hat{\mathcal{D}}1 = 0$ entonces $\mathcal{D}1 = 0$

c) Si $\hat{\mathcal{D}}\hat{\alpha} = 0$ entonces $\mathcal{D}\alpha = 0$ $(\alpha = T^{-1}\hat{\alpha})$

d) Si $\hat{\mathcal{D}}\hat{s}^n = n\hat{s}^{n-1}$ entonces $\mathcal{D}s^n = ns^{n-1}$

e) Si $\hat{\mathcal{D}}\hat{l}^n = -n\hat{l}^{n+1}$ entonces $\mathcal{D}l^n = -nl^{n+1}$

f) Si $\hat{\mathcal{D}}(1 - \hat{\alpha}\hat{l})^n = n\hat{\alpha}\hat{l}^2(1 - \hat{\alpha}\hat{l})^{n-1}$ entonces $\mathcal{D}(1 - \alpha l)^n = n\alpha l^2(1 - \alpha l)^{n-1}$

g) Si $\hat{\mathcal{D}}(\hat{s} - \hat{\alpha})^n = n(\hat{s} - \hat{\alpha})^{n-1}$ entonces $\mathcal{D}(s - \alpha)^n = n(s - \alpha)^{n-1}$

Demostración.

a) $\mathcal{D}s = T^{-1}\hat{\mathcal{D}}Ts = T^{-1}\hat{\mathcal{D}}\hat{s} = T^{-1}1 = 1$

b) $\mathcal{D}1 = T^{-1}\hat{\mathcal{D}}T1 = T^{-1}\hat{\mathcal{D}}1 = T^{-1}0 = 0$

c) $\mathcal{D}\alpha = T^{-1}\hat{\mathcal{D}}T\alpha = T^{-1}\hat{\mathcal{D}}\hat{\alpha} = T^{-1}0 = 0$

Para la demostración de las cuatro últimas afirmaciones ha de tenerse en cuenta que $T(p^n) = [T(p)]^n$ y que $T^{-1}(\hat{p}^n) = [T^{-1}(\hat{p})]^n$, para cualesquiera elementos $p \in \mathcal{M}$ y $\hat{p} \in \hat{\mathcal{M}}$

Nota V.2.1: La tercera afirmación de la proposición anterior pone de manifiesto que el isomorfismo T transforma las constantes de $\mathcal{M}$ en las constantes de $\hat{\mathcal{M}}$.

V.2.1 Dos derivadas algebraicas asociadas al operador D_β

En esta sección se darán dos derivadas algebraicas asociadas al operador D_β, las cuales serán usadas en la resolución de ciertas ecuaciones que involucran al mencionado operador.

Sean $D_\beta = \frac{1}{\beta}t^{1-\beta}D$ $(\beta > 0)$, donde $D = \dfrac{d}{dt}$, y el operador $T^\alpha f(t) = f(t^\alpha)$ $(\alpha > 0)$, conocido como operador potencia del argumento y que verifica, como se vió en la última sección del capítulo primero, las propiedades (I.5.4).

En [2] se demostró que

$$D_\beta = T^\beta D T^{\frac{1}{\beta}} \tag{V.2.5}$$

Si se considera el espacio $X = C^\infty([0,\infty))$, D_β y D son, ambos, operadores lineales sobre él. Las convoluciones, para D, de Mikusinski y la de Ditkin y Prudnikov, dotan a X de la estructura de anillo conmutativo sin divisores de cero, no unitario en el primer caso y unitario en el segundo.

Se comienza el estudio con la convolución de Mikusinski

$$(f * g)(t) = \int_0^\infty f(t-\psi)g(\psi)d\psi$$

para la cual el operador $\mathcal{D}f(t) = -tf(t)$ constituye una derivada algebraica (cf. [36]).

Haciendo uso del teorema V.1.1 y de (V.2.5), se puede definir la convolución asociada a D_β como:

$$(f *_1 g)(t) = T^\beta[T^{\frac{1}{\beta}} f * T^{\frac{1}{\beta}} g](t) = \int_0^{t^\beta} f[(t^\beta - \psi)^{\frac{1}{\beta}}] g(\psi^{\frac{1}{\beta}}) d\psi =$$

$$= \beta \int_0^t f[(t^\beta - \tau^\beta)^{\frac{1}{\beta}}] \tau^{\beta-1} g(\tau) d\tau \tag{V.2.6}$$

Es bien conocido que la función constante $\{1\}$ se identifica con el operador integral I, inverso por la derecha de $D = \dfrac{d}{dt}$, así que se puede considerar $T^{\beta}\{1\} = \{1\}$ como el operador inverso por la derecha de D_{β}, es decir, el operador

$$I_{\beta} = \beta \int_0^t \psi^{\beta-1} f(\psi) d\psi$$

en el sentido de que

$$I_{\beta} f(t) = \{1\} *_1 f(t)$$

lo que puede ser comprobado de forma directa usando la definición de la convolución $*_1$.

Dado que $\mathcal{D}$ verifica las propiedades

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{D}s^n = ns^{n-1} \\ &\mathcal{D}l^n = -nl^{n+1} \\ &\mathcal{D}1 = 0 \\ &\mathcal{D}(1-\alpha l)^n = n\alpha l^2(1-\alpha l)^{n-1} \\ &\mathcal{D}(s-\alpha)^n = n(s-\alpha)^{n-1} \end{aligned}\right\} \tag{V.2.7}$$

se concluye en virtud de las proposiciones V.2.1 y V.2.3 que

$$\mathcal{D}_{\beta} f(t) = T^{\beta} \mathcal{D} T^{\frac{1}{\beta}} f(t) = -t^{\beta} f(t)$$

es una derivada algebraica para el anillo $(X, +, *_1)$ satisfaciendo las propiedades $(V.2.7)$, donde $l_\beta = \{1\}$ y $s_\beta = \dfrac{1}{l_\beta}$.

Nota V.2.2: En analogía con Mikusinski [36], ya que $\mathcal{D}[a] = 0$ para $[a] = \dfrac{\{a\}}{l}$, se sigue que $\mathcal{D}_\beta \dfrac{\{a\}}{l_\beta} = 0$ y por ello se denominará a $[a]_\beta = \dfrac{\{a\}}{l_\beta}$ operadores constantes o numéricos, los cuales contituyen un subcuerpo, del cuerpo de fracciones, isomorfo al cuerpo numérico $\mathbb{C}$.

En el primer capítulo se mencionó que la derivada algebraica de Mikusinski, $\mathcal{D}$, no sólo se hacía cero sobre los operadores numéricos $[\alpha]$, sino que el recíproco también era cierto, es decir, que si la derivada algebraica de un elemento del cuerpo de fracciones era cero, entonces dicho elemento era necesariamente un operador numérico. La siguiente proposición pone de manifiesto que dicha propiedad es transmitida por el isomorfismo T^β a la derivada algebraica $\mathcal{D}_\beta$.

Proposición V.2.4 *Si* $\mathcal{D}_\beta p = 0$*, entonces* $p = [\alpha]_\beta = \dfrac{\{\alpha\}}{l_\beta}$

Demostración.

$$\mathcal{D}_\beta p = 0 \implies T^\beta \mathcal{D} T^{\frac{1}{\beta}} p = 0$$

lo que lleva a asegurar que debe ocurrir que

$$\mathcal{D} T^{\frac{1}{\beta}} p = 0$$

por lo que

$$T^{\frac{1}{\beta}}p = [\alpha] = \frac{\{\alpha\}}{l}$$

de lo que se concluye que

$$p = T^{\beta}[\alpha] = \frac{\{\alpha\}}{l_\beta} = [\alpha]_\beta.$$

Mikusinski, [36], identificó las potencias enteras positivas de los operadores l y $\dfrac{1}{s-\alpha}$ con funciones de X

$$l^k = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\frac{1}{(s-\alpha)^k} = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\alpha t}$$

para luego generalizar estas identificaciones a potencias no enteras como

$$l^\gamma = \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}$$

$$\frac{1}{(s-\alpha)^\gamma} = \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}e^{\alpha t}$$

haciendo uso del isomorfismo T^β, se puede hacer lo propio con las potencias de los operdores l_β y $\dfrac{1}{s_\beta-\alpha}$

$$l_\beta^\gamma = \frac{t^{\beta(\gamma-1)}}{\Gamma(\gamma)}$$

$$\frac{1}{(s_\beta-\alpha)^\gamma} = \frac{t^{\beta(\gamma-1)}}{\Gamma(\gamma)}e^{\alpha t^\beta}$$

Estas identificaciones, junto con los resultados obtenidos por K. Yosida [62], permiten asegurar que $\mathcal{D}_\beta$ verifica las propiedades (V.2.7) incluso para potencias no enteras.

Estos resultados, ayudan a resolver algunas ecuaciones en las que comparece el operador D_β, como por ejemplo

$$\begin{cases} t^\beta D_\beta^2 x(t) + (1-t^\beta) D_\beta x(t) - a x(t) = 0 \\ \\ x(0) = 0 \quad (\beta > 0) \end{cases} \tag{V.2.8}$$

Dado que

$$I_\beta D_\beta x(t) = x(t) - x(0)$$

multiplicando ambos lados de la igualdad por s_β, se obtiene

$$s_\beta x(t) = D_\beta x(t) + x(0) \tag{V.2.9}$$

donde $x(0) = \dfrac{\{x(0)\}}{l_\beta} = s_\beta \{x(0)\}$

Si se multiplica en (V.2.9) por s_β y se utiliza, nuevamente, (V.2.9) para la función $D_\beta x(t)$, se establece

$$D_\beta^2 x(t) = s_\beta^2 x(t) - s_\beta x(0) - [D_\beta x(t)]_{t=0} \tag{V.2.10}$$

Aplicando (V.2.9) y (V.2.10), la ecuación (V.2.8) se reduce a

$$\frac{\mathcal{D}_\beta x(t)}{x(t)} = \frac{a-1}{s_\beta} - \frac{a}{s_\beta - 1}$$

Finalmente, siguiendo las técnicas usadas por Kierat y Skornik [25], se obtiene la solución

$$x_{a,\beta}(t) = s_\beta^{a-1}(s_\beta - 1)^{-a} = l_\beta(1 - l_\beta)^{-a}$$

Para saber si esta solución operacional representa una función conocida, se recuerda el concepto sucesión operacionalmente convergente dado por Mikusinski.

Definición V.2.2 *Una sucesión de operadores* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *se dice convergente si existe un operador* q *tal que la sucesión* $\{\frac{a_n}{q}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *represente una sucesión de funciones casi uniformemente convergente, es decir, uniformemente convergente en compactos* $[0, A]$*, para cualquier* $A > 0$.

A continuación se probará que la sucesión $\{T^\beta(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente siempre que lo sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposición V.2.5 *Sea* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión convergente, en el sentido Mikusinski, al operador* a*, entonces* $\{T^\beta(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* $T^\beta(a)$.

Demostración. $a_n \to a$ si y sólo si existe un operador q tal que $\frac{a_n}{q} = f_n$ y $f_n \to f$ casi uniformemente, entonces $a_n \to q * f = a$.

Se demostrará que $T^{\beta}(a_n) \to T^{\beta}(q * f) = T^{\beta}(a)$.

$T^{\beta}(\dfrac{a_n}{q}) = \dfrac{T^{\beta}(a_n)}{T^{\beta}(q)} = T^{\beta}(f_n(t)) = f_n(t^{\beta}) = g_n(t)$.

así que será suficiente comprobar que $\{g_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión casi uniformemente convergente.

Sea $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier $t \in [0, A^{\beta}]$ y para todo $n \geq n_1$

$$| f_n(t) - f(t) | < \epsilon$$

entonces para cualquier $t \in [0, A]$ se tiene que $t = \tau^{\frac{1}{\beta}}$ con τ en $[0, A^{\beta}]$, finalmente para todo $n \geq n_1$:

$$| f_n(\tau) - f(\tau) | = | f_n(t^{\beta}) - f(t^{\beta}) | < \epsilon.$$

Por lo tanto, $\{T^{\beta}(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y

$$T^{\beta}(a_n) \to T^{\beta}(q) *_1 T^{\beta}(f) = T^{\beta}(q * f) = T^{\beta}(a).$$

La última proposición puede ser extendida a la convergencia de series de operadores, ya que una serie es convergente si lo es la correspondiente sucesión de sumas parciales asociadas.

Dado que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} (-1)^k l^{k+1}$$

converge a $l(1-l)^{-a}$ (cf.[25]), se concluye que la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-a}{k}(-1)^k l_\beta^{k+1}$$

converge a $l_\beta(1-l_\beta)^{-a} = T^\beta[l(1-l)^{-a}]$. Es más, teniendo en cuenta que

$$l_\beta^k = T^\beta(l^k) = T^\beta[\frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}] = \frac{t^{\beta(k-1)}}{\Gamma(k)}$$

y

$$\binom{\lambda}{n} = \frac{(-1)^n(-\lambda)_n}{\Gamma(n+1)}$$

donde

$$(\lambda)_n = \begin{cases} \lambda(\lambda+1)...(\lambda+n-1) = \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)} & si \;\; n \in \mathbb{N} \\ \\ 1 \quad si \;\; n = 0 \end{cases}$$

se puede escribir

$$x_{a,\beta}(t) = l_\beta(1-l_\beta)^{-a} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-a}{k}(-1)^k l_\beta^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{(1)_n}\frac{t^{\beta k}}{\Gamma(k+1)} = {}_1F_1(a,1,t^\beta)$$

lo que implica

$$D_\beta[x_{a,\beta} *_1 x_{b,\beta}](t) = D_\beta l_\beta^2(1-l_\beta)^{-(a+b)} =$$

$$= l_\beta(1-l_\beta)^{-(a+b)} = x_{a+b,\beta}(t)$$

es decir:

$$D_\beta[{}_1F_1(a,1;t^\beta) *_1 {}_1F_1(b,1;t^\beta)] = {}_1F_1(a+b,1;t^\beta)$$

siendo ${}_1F_1(a,b,t)$ la función hipergeométrica confluente.

Obsérvese que otra forma de obtener el mismo resultado, sería hacer uso del hecho de que T^β es un isomorfismo de cuerpos y $l(1-l)^{-a} = {}_1F_1(a,1;t)$.

Por lo que

$$l_\beta(1-l_\beta)^{-a} = T^\beta[l(1-l)^{-a}] = {}_1F_1(a,1;t^\beta).$$

Pero en tal caso no se podría deducir nada acerca de la convergencia de la serie $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-a}{k}(-1)^k {l_\beta}^{k+1}$.

A continuación, se realiza lo hecho anteriormente pero tomando como punto de partida la convolución de Ditkin y Prudnikov

$$(f \otimes g)(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t f(t-\psi)g(\psi)d\psi.$$

En [4], tal y como se comentó en el capítulo tercero, usando la convolución $\otimes$ asociada al operador derivada $D = \dfrac{d}{dt}$, y el anillo

$$M = \{f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C} : \ f \textit{ absolutamente continua}\}$$

se dió una derivada algebraica para $\otimes$, como $\mathcal{D}f(t) = (I - t)f(t)$, con $If(t) = \int_0^t f(u)du$.

Si se considera el espacio

$$M' = \{f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C} : \ f \textit{ absolutamente continua y derivable}\}$$

es claro que M' es un subanillo de M, y que para cualquier $f \in M'$ se verifica

$$T^{\frac{1}{\beta}} D_\beta f(t) = DT^{\frac{1}{\beta}} f(t)$$

además, dado que D y D_β son ambos operadores lineales sobre M', se puede definir la convolución

$$(f \otimes_\beta g)(t) = T^\beta [T^{\frac{1}{\beta}} f \otimes T^{\frac{1}{\beta}} g](t) = D_\beta \int_0^{t^\beta} f[(t^\beta - \psi)^{\frac{1}{\beta}}] g(\psi^{\frac{1}{\beta}}) d\psi =$$

$$= \beta D_\beta \int_0^t f[(t^\beta - \tau^\beta)^{\frac{1}{\beta}}] \tau^{\beta - 1} g(\tau) d\tau \tag{V.2.11}$$

En [14], se desarrolló un cálculo operacional para el operador D usando la convolución $\otimes$, donde el operador I, inverso por la derecha de D, fue identificado con la función $f(t) = t$.

Por lo tanto, para la definición de la convolución $\otimes_\beta$, se puede considerar $I_\beta = t^\beta$ y consecuentemente $\mathcal{D}_\beta f(t) = T^\beta \mathcal{D} T^{\frac{1}{\beta}} f(t) = (I_\beta - t^\beta) f(t)$ representa una derivada algebraica para la convolución $\otimes$.

Se sabe que $\mathcal{D}$ verifica las propiedades $(V.2.7)$ con $l = t$ y $s = \dfrac{1}{l}$ (cf.[4]), de lo que se deduce que $\mathcal{D}_\beta$ también verifica las mismas propiedades con $s_\beta = \dfrac{1}{t^\beta}$ y $l_\beta = t^\beta$. Además, utilizando las identificaciones

$$l^\gamma = \frac{t^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)}$$

$$\frac{s}{(s-\alpha)^\gamma} = \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}e^{\alpha t}$$

en [4] se demostró que las propiedades (V.2.7) eran válidas para potencias no enteras, por lo que esto también será cierto para $\mathcal{D}_\beta$ donde

$$l_\beta^\gamma = \frac{t^{\beta\gamma}}{\Gamma(\gamma+1)}$$

$$\frac{s_\beta}{(s_\beta-\alpha)^\gamma} = \frac{t^{\beta(\gamma-1)}}{\Gamma(\gamma)}e^{\alpha t^\beta}$$

Ditkin y Prudnikov introdujeron en [14] una variante del concepto de convergencia para sucesiones de operadores, ya mencionada en el capítulo tres, y que ahora se recuerda.

Definición V.2.3 *Una sucesión de operadores* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *se dice que converge al operador* $a = \dfrac{f}{g}$*, si existen representaciones* (f_n, g_n) *tales que* $a_n = \dfrac{f_n}{g_n}$ *y las sucesiones* f_n *y* g_n *son respectivamente convergentes a los límites* f *y* g *en cualquier intervalo finito* $0 \leq t \leq T$.

Se establece a continuación una proposición, similar a la proposición V.2.5 y cuya demostración es análoga, adecuada a la nueva definición, la cual da pleno sentido a la representación en forma de serie que se presentará más tarde.

Proposición V.2.6 *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, una sucesión de operadores convergente al operador a, en el sentido de Ditkin y Prudnikov, entonces $\{T^\beta(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $T^\beta(a)$.*

En [4], tal y como se comentó en el capítulo tres, se mostró que dada la ecuación

$$\left\{\begin{array}{l} (t-I)\frac{d^2x}{dt^2}+(1+I-t)\frac{dx}{dt}-ax=1 \\ \\ x(0)=0 \quad x'(0)=1 \end{array}\right. \tag{V.2.12}$$

entonces

$$x_a(t)=l(1-l)^{-a}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-a}{k}(-1)^k l^{k+1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-a}{k}(-1)^k\frac{t^{k+1}}{\Gamma(k+2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k}{(2)_k}\frac{t^{k+1}}{\Gamma(k+2)}=t_1F_1(a,2,t)$$

es una solución de (V.2.12) verificando que

$$\frac{d}{dt}[x_a \otimes x_b](t) = x_{a+b}(t)$$

Por lo tanto puede deducirse la representación

$$x_{a,\beta}(t) = l_\beta(1-l_\beta)^{-a} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} (-1)^k {l_\beta}^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} (-1)^k \frac{t^{\beta(k+1)}}{\Gamma(k+2)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(2)_k} \frac{t^{\beta(k+1)}}{\Gamma(k+2)} = t^\beta {}_1F_1(a, 2, t^\beta)$$

de una solución de la ecuación

$$(t^\beta - I_\beta){D_\beta}^2 x(t) + (1 + I_\beta - t^\beta)x(t) - ax(t) = 1$$

concluyéndose, además, de la expresión operacional de dicha solución, que

$$D_\beta[t^\beta {}_1F_1(a, 2, t^\beta) \otimes_\beta t^\beta {}_1F_1(b, 2, t^\beta)] = t^\beta {}_1F_1(a + b, 2, t^\beta)$$

V.2.2 Derivadas algebraicas asociadas a los operadores $\Delta_{(1)}$ y $A_{(1)}$.

En este apartado se obtendrán resultados análogos, a los obtenidos anteriormente,para el operador D_β, pero para los operadores

$$\Delta_{(1)} = t^{-\beta\gamma} D_\beta t^{\beta\gamma}$$

y

$$A_{(1)} = t^{-\beta(\gamma+1)} D_\beta t^{\beta(\gamma+1)}$$

Obviamente, se resumirá el proceso dado que es similar al usado en el apartado anterior.

Alamo y Rodríguez [3] generaron un cálculo operacional para los operadores

$$\Delta_{(\delta)} = t^{-\beta\gamma} D_\beta^\delta t^{\beta\gamma}$$

y

$$A_{(\delta)} = t^{-\beta(\gamma+\delta)} D_\beta^\delta t^{\beta(\gamma+\delta)}$$

haciendo uso de las identidades

$$t^{\beta\gamma} \Delta_{(\delta)} = D_\beta^\delta t^{\beta\gamma}$$

y

$$t^{\beta(\gamma+\delta)} A_{(\delta)} = D_\beta^\delta t^{\beta(\gamma+\delta)}$$

respectivamente.

Se considera, en este caso, $\delta = 1$ lo que expresa a los operadores $A_{(1)}$ y $\Delta_{(1)}$ relacionados con el operador D_β, estudiado anteriormente, a través del teorema de semejanza de Meller. En primer lugar se define, para el operador $\Delta_{(1)}$, la convolución

$$\begin{aligned}
(f \odot g)(t) &= t^{-\beta\gamma}[t^{\beta\gamma} f(t) *_1 t^{\beta\gamma} g(t)] = \\
&= t^{-\beta\gamma} \int_0^{t^\beta} (t^\beta - \psi)^\gamma f[(t^\beta - \psi)^{\frac{1}{\beta}}] \psi^\gamma g(\psi^{\frac{1}{\beta}}) d\psi = \\
&= \beta t^{-\beta\gamma} \int_0^t (t^\beta - \tau^\beta)^\gamma f[(t^\beta - \tau^\beta)^{\frac{1}{\beta}}] \tau^{\beta(\gamma+1)-1} g(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

siendo $*_1$ la convolución dada en (V.2.6) para el operador D_β.

Respecto a $A_{(1)}$ se considera

$$\begin{aligned}
(f \oplus g)(t) &= t^{-\beta(\gamma+1)}[t^{\beta(\gamma+1)} f(t) *_1 t^{\beta(\gamma+1)} g(t)] = \\
&= t^{-\beta(\gamma+1)} \int_0^{t^\beta} (t^\beta - \psi)^{\gamma+1} f[(t^\beta - \psi)^{\frac{1}{\beta}}] \psi^{\gamma+1} g(\psi^{\frac{1}{\beta}}) d\psi \\
&= \beta t^{-\beta(\gamma+1)} \int_0^t (t^\beta - \tau^\beta)^{\gamma+1} f[(t^\beta - \tau^\beta)^{\frac{1}{\beta}}] \tau^{\beta(\gamma+2)-1} g(\tau) d\tau
\end{aligned}$$

En base a la proposición V.2.1, es claro que

$$\mathcal{D}_{\Delta_{(1)}} = t^{-\beta\gamma} \mathcal{D}_\beta t^{\beta\gamma} = -t^\beta$$

y

$$\mathcal{D}_{A_{(1)}} = t^{-\beta(\gamma+1)} \mathcal{D}_\beta t^{\beta(\gamma+1)} = -t^\beta$$

representan las correspondientes derivadas algebraicas, y que ambas verifican las propiedades reflejadas en $(V.2.7)$, siendo $l = t^{-\beta\gamma}$ en el caso de $\mathcal{D}_{\Delta_{(1)}}$ y $l = t^{-\beta(\gamma+1)}$ en el caso de $\mathcal{D}_{A_{(1)}}$.

Finalmente se puede asegurar que

$$\Delta_{(1)}[t^{-\beta\gamma}{}_1F_1(a,1;t^\beta) \odot t^{-\beta\gamma}{}_1F_1(b,1;t^\beta)] = t^{-\beta\gamma}{}_1F_1(a+b,1;t^\beta)$$

$$A_{(1)}[t^{-\beta(\gamma+1)}{}_1F_1(a,1;t^\beta) \oplus t^{-\beta(\gamma+1)}{}_1F_1(b,1;t^\beta)] = t^{-\beta(\gamma+1)}{}_1F_1(a+b,1;t^\beta)$$

Por último se ha de resaltar que se pueden obtener nuevas derivadas algebraicas asociadas a los operadores Δ_1 y A_1, partiendo de la convolución $\otimes_\beta$ definida para el operador D_β.

V.3 Tres derivadas algebraicas asociadas al operador D_β^δ.

En el capítulo cuarto, se estudiaron tres derivadas algebraicas asociadas al operador derivada fraccionaria de Riemann-liouville D^δ respecto a tres convoluciones distintas. El objeto de esta sección es utilizar las mencionadas derivadas algebraicas junto con el teorema V.1.1 y la proposición V.2.1, para la obtención de las correspondientes derivadas asociadas al operador

$$D_\beta^\delta = D_\beta^n I_\beta^{n-\delta} \quad (n-1 < \delta \leq n)$$

siendo n el menor entero mayor o igual que δ, y donde

$$D_\beta f(t) = \frac{d}{dt^\beta} f(t) = \beta^{-1} t^{1-\beta} D f(t)$$

e I_β^δ representa al operador de integración fraccionaria generalizado de Riemann-Liouville estudiado en [34], y que viene dado por

$$I_\beta^\delta f(t) = \frac{\beta}{\Gamma(\delta)} \int_0^t (t^\beta - \tau^\beta)^{\delta-1} \tau^{\beta-1} f(\tau) d\tau \quad (\beta, \delta > 0)$$

En [2], como ya se ha mencionado anteriormente, se demostró que

$$T^\beta D^\delta f(t) = D_\beta^\delta T^\beta f(t) \tag{V.3.1}$$

Si se considera al operador D^δ como un operador lineal sobre el espacio $(C_\delta, +, *)$, siendo $*$ la convolución de Mikusinski, el operador $\mathcal{D}_1 f(t) = -\dfrac{I^{\delta-1}}{\delta} t f(t)$ representa una derivada algebraica, lo que lleva a asegurar, haciendo uso de (V.3.1), el teorema V.1.1 y la proposición V.2.1, que el operador

$$\mathcal{D}_1^\beta f(t) = T^\beta \mathcal{D}_1 T^{\frac{1}{\beta}} f(t) = -\frac{I_\beta^{\delta-1}}{\delta} t^\beta f(t)$$

constituye una derivada algebraica asociada al operador D^{δ}_{β} sobre el anillo $(C_{\beta\delta}, +, *_{\beta})$, donde la convolución $*_{\beta}$ viene dada por

$$(f *_{\beta} g)(t) = T^{\beta}[T^{\frac{1}{\beta}} f * T^{\frac{1}{\beta}} g](t) = \int_0^{t^{\beta}} f[(t^{\beta} - \psi)^{\frac{1}{\beta}}] g(\psi^{\frac{1}{\beta}}) d\psi =$$

$$= \beta \int_0^{t} f[(t^{\beta} - \tau^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}] \tau^{\beta-1} g(\tau) d\tau$$

y el espacio $C_{\beta\delta}$ estudiado en [2], viene dado por

$$C_{\beta\delta} = \{f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{\beta(k\delta-1)} \text{ unif. convergente en compactos de}[0, \infty)\}$$

Es evidente que dadas las propiedades estudiadas para la derivada algebraica $\mathcal{D}_1$ y la proposición V.2.3, $\mathcal{D}_1^{\beta}$ verifica las propiedades expresadas en (V.2.7) tomando

$$l = \frac{t^{\beta(\delta-1)}}{\Gamma(\delta)} \quad y \quad s = \frac{1}{l}$$

y que son:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathcal{D}s^n = ns^{n-1} \\
&\mathcal{D}l^n = -nl^{n+1} \\
&\mathcal{D}1 = 0 \\
&\mathcal{D}(1-\alpha l)^n = n\alpha l^2 (1-\alpha l)^{n-1} \\
&\mathcal{D}(s-\alpha)^n = n(s-\alpha)^{n-1}
\end{aligned}\right\}$$

Si se considera, ahora, a D^{δ} como un operador lineal sobre $(C_{\delta}, +, \star)$, siendo $\star$ la convolución

$$(f \star g)(t) = \frac{D^\delta}{\Gamma(\delta)} \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \qquad \text{(V.3.2)}$$

y como hemos visto en el capítulo cuarto que

$$\mathcal{D}_2 f(t) = [I^\delta - \frac{I^{\delta-1}}{\delta} t] f(t)$$

representa una derivada algebraica para la convolución $\star$, nuevamente se puede concluir que el operador

$$\mathcal{D}_2^\beta f(t) = T^\beta \mathcal{D}_2 T^{\frac{1}{\beta}} f(t) = [I_\beta^\delta - \frac{I_\beta^{\delta-1}}{\delta} t^\beta] f(t)$$

es una derivada algebraica para el anillo $(C_{\beta\delta}, +, \star_\beta)$, siendo $\star_\beta$ la convolución

$$(f \star_\beta g)(t) = T^\beta [T^{\frac{1}{\beta}} f \star T^{\frac{1}{\beta}} g](t) = \frac{D_\beta^\delta}{\Gamma(\delta)} \int_0^{t^\beta} f[(t^\beta - \psi)^{\frac{1}{\beta}}] g(\psi^{\frac{1}{\beta}}) d\psi =$$

$$= \beta \frac{D_\beta^\delta}{\Gamma(\delta)} \int_0^t f[(t^\beta - \tau^\beta)^{\frac{1}{\beta}}] \tau^{\beta-1} g(\tau) d\tau$$

verificándose nuevamente las propiedades (V.2.7) con

$$l = \frac{\Gamma(\delta) t^{\beta(2\delta-1)}}{\Gamma(2\delta)} \quad y \quad s = \frac{1}{l} = \frac{\Gamma(2\delta) t^{\beta(\delta-1)}}{\Gamma(\delta) t^{\beta(2\delta-1)}}$$

Si consideramos el anillo $(C_{-1}, +, *_\lambda)$, la correspondiente derivada algebraica viene dada como

$$\mathcal{D}_\lambda f(t) = (\frac{1-\lambda}{\delta} I^\delta - \frac{1}{\delta} I^{\delta-1} t) f(t)$$

Si se tiene en cuenta que T^β transforma funciones de C_{-1} en funciones de $C_{-\beta}$, ya que si $f \in C_{-1}$, entonces

$$T^\beta f(t) = T^\beta t^\alpha f_1(t) = t^{\alpha\beta} f_1(t^\beta)$$

y como $\alpha > -1$ y f_1 es una función continua se concluye, ya que $\beta > 0$, que $T^\beta f \in C_{-\beta}$, con lo que

$$\mathcal{D}_\lambda^\beta f(t) = (\frac{1-\lambda}{\delta} I_\beta^\delta - \frac{1}{\delta} I_\beta^{\delta-1} t^\beta) f(t)$$

constituye una derivada algebraica asociada a D_β^δ en el anillo $(C_{-\beta}, +, *_\lambda^\beta)$, donde la convolución $*_\lambda^\beta$ viene expresada como

$$(f *_\lambda^\beta g)(t) = T^\beta [T^{\frac{1}{\beta}} f *_\lambda^\beta T^{\frac{1}{\beta}} g](t) = I_\beta^{\lambda-1} \int_0^{t^\beta} f[(t^\beta - \tau)^{\frac{1}{\beta}}] g(\tau^{\frac{1}{\beta}}) d\tau$$

Nuevamente puede establecerse que $\mathcal{D}_\lambda^\beta$ verifica las propiedades (V.2.7), dado que $\mathcal{D}_\lambda$ lo hace, tal y como se mostró en el capítulo cuarto. En este caso debe tomarse

$$l = \frac{t^{\beta(\delta-\lambda)}}{\Gamma(\delta - \lambda + 1)} \quad y \quad s = \frac{1}{l}$$

V.4 Un cálculo operacional y su derivada para los operadores $B_{\nu,\rho}$ y $R_{\nu,\rho}$

En esta sección, se pretende estudiar, desde su inicio, el proceso a seguir al estudiar un operador, generando un cálculo operacional que se le adecue y buscando la derivada algebraica asociada al mismo.

Se van a considerar los operadores

$$B_{\nu,\rho} = t^{\rho\nu-1} D^{\rho-1} t^{1-\rho\nu} D$$

y

$$R_{\nu,\rho} = t^{\nu-\frac{1}{\rho}} D_{\frac{1}{\rho}}^{\rho-1} t^{\frac{1}{\rho}-\nu} D_{\frac{1}{\rho}}$$

donde ($\rho > 1$; $\nu > \frac{1}{\rho}$), los cuales se relacionan, a través del teorema de semejanza de Meller, con los operadores D^{ρ} y $D_{\frac{1}{\rho}}^{\rho}$ respectivamente.

Con el objetivo de facilitar la lectura de lo que será desarrollado a continuación, se recuerdan algunas definiciones y propiedades que ya se han mencionado en capítulos anteriores.

El operador de integración fraccionaria de Riemann-Liouville de orden $\alpha > 0$, para cualquier función localmente integrable, se define [56] como:

$$I^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi \qquad \text{(V.4.1)}$$

siendo algunas de sus propiedades más conocidas las presentadas en (I.5.1).

La derivada fraccionaria de orden $\alpha > 0$ de una función $f(t) \in C^n([0,\infty))$ se define con la ayuda de (V.4.1), como

$$D^\alpha f(t) = D^n I^{n-\alpha} f(t) \quad (n-1 < \alpha \leq n)$$

y satisface, entre otras, las propiedades (I.5.2).

El operador de integración fraccionario generalizado de Riemann-Liouville estudiado en [34] viene dado por:

$$I_\beta^\alpha f(t) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_0^t (t^\beta - \xi^\beta)^{\alpha-1} \xi^{\beta-1} f(\xi) d\xi & \alpha > 0 \ , \ \beta > 0 \\ f(t) & \alpha = 0 \end{cases} \tag{V.4.2}$$

donde f(t) es una función localmente integrable en $[0,\infty)$. Algunas de las propiedades de este operador fueron enumeradas en (I.5.3).

La derivada fraccionaria generalizada queda definida como

$$D_\beta^\alpha f(t) = D_\beta^n I_\beta^{n-\alpha} f(t) \quad (n-1 < \alpha \leq n \ , \ \beta > 0)$$

donde $D_\beta f(t) = \dfrac{1}{\beta} t^{1-\beta} D f(t)$.

Haciendo uso del operador $\delta_t = tD$ se pueden establecer las siguientes proposiciones, cuyas demostraciones pueden encontrarse en [55] y [61].

Proposición V.4.1 *El operador D_β^n puede ser expresado como*

$$D_\beta^n = \beta^{-n} t^{-\beta n} \prod_{i=0}^{n-1} (\delta_t - \beta i) \tag{V.4.3}$$

Proposición V.4.2 *Si $f \in C^1(\mathbb{R})$, entonces*

$$\delta_t t^\alpha f(t) = t^\alpha (\delta_t + \alpha) f(t) \tag{V.4.4}$$

Proposición V.4.3 *Si $f \in C^1([0,\infty))$ y $f(0) = 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ se tiene*

$$t^{-\beta} \delta_t I_\beta^\alpha f(t) = I_\beta^\alpha t^{-\beta} \delta_t f(t) \tag{V.4.5}$$

Proposición V.4.4 *Supóngase que $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $k \in \mathbb{R}$ y $f \in C^1([0,\infty))$. Entonces:*

$$I_\beta^\alpha (\delta_t + k) f(t) = (\delta_t + k - \beta\alpha) I_\beta^\alpha f(t) \tag{V.4.6}$$

Se hará uso, nuevamente, del operador potencia del argumento, dado por:

$$T^\beta f(t) = f(t^\beta) \quad (\beta \in \mathbb{R}^+) \ , \ (f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C})$$

cuyas principales propiedades fueron estudiadas en [2] y que aparecen en (I.5.4) y la proposición I.5.1.

V.4.1 Los operadores $B_{\nu,\rho}$ y $W_{\nu,\rho}$

En este apartado se estudiarán algunas propiedades de los operadores

$$B_{\nu,\rho} = t^{\rho\nu-1} D^{\rho-1} t^{1-\rho\nu} D \quad (\rho > 1\ ,\ \nu > \frac{1}{\rho})$$

y su inverso por la derecha

$$W_{\nu,\rho} f(t) = I t^{\rho\nu-1} I^{\rho-1} t^{1-\rho\nu} f(t) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\rho-1)} \int_0^t \xi^{\rho\nu-1} d\xi \int_0^{\xi} (\xi-\eta)^{\rho-2} \eta^{1-\rho-\nu} f(\eta) d\eta$$

las cuales quedan recogidas en [9].

Definición V.4.1 *Sea $\rho > 1$ y $\nu > \frac{1}{\rho}$. se define el conjunto $C_{\nu,\rho}$, como:*

$$\{f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\rho+\rho\nu-2} : \text{unif. convergente en compactos de}[0,\infty)\} \tag{V.4.7}$$

No es complicado comprobar que $(C_{\nu,\rho}, +, \cdot_{\mathbb{C}})$ es un espacio vectorial, siendo $B_{\nu,\rho}$ un operador lineal sobre él, tal y como se refleja en la siguiente

Proposición V.4.5 *$B_{\nu,\rho}$ es un automorfismo sobre el espacio vectorial $C_{\nu,\rho}$.*

Demostración.

$$B_{\nu,\rho}f(t) = t^{\rho\nu-1}D^{\rho-1}\sum_{k=1}^{\infty}(k\rho+\rho\nu-2)a_k t^{k\rho-2} =$$

$$= t^{\rho\nu-1}D^{n}I^{n-\rho+1}\sum_{k=1}^{\infty}(k\rho+\rho\nu-2)a_k t^{k\rho-2}$$

$$= t^{\rho\nu-1}D^{n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k\rho+\rho\nu-2)\Gamma(k\rho-1)}{\Gamma(k\rho+n-\rho)}a_k t^{k\rho+n-\rho-1} =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k\rho+\rho\nu-2)\Gamma(k\rho-1)}{\Gamma(k\rho-\rho)}a_k t^{\rho(k-1)+\rho\nu-2} =$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty}\frac{[\rho(r+1)+\rho\nu-2]\Gamma[(r+1)\rho-1]}{\Gamma(r\rho)}a_{r+1} t^{r\rho+\rho\nu-2} =$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} b_r t^{r\rho+\rho\nu-2} = g(t).$$

A partir de este resultado, es sencillo comprobar que g(t) pertenece a $C_{\nu,\rho}$.

La demostración de que

$$B_{\nu,\rho}[f(t)+g(t)] = B_{\nu,\rho}f(t) + B_{\nu,\rho}g(t)$$

y

$$B_{\nu,\rho}[\alpha f(t)] = \alpha B_{\nu,\rho}f(t)$$

es un simple cálculo.

Las siguientes proposiciones establecen las condiciones necesarias para generar un cálculo operacional para el operador $B_{\nu,\rho}$.

Proposición V.4.6 *Sean* $\rho = n \in \mathbb{N}$, $\nu > \frac{1}{n}$ *y* $A_{\nu,n} = D_n^{\frac{n\nu-1}{n}}$. *Si* $f \in C^n([0,\infty))$ *y*

$$\lim_{t\to 0^+} \prod_{i=1}^{n-2} (\delta_t - i - n\nu) f(t) = 0$$

entonces:

$$D_n^{\frac{n\nu-1}{n}} B_{\nu,n} f(t) = D^n D_n^{\frac{n\nu-1}{n}} f(t) \tag{V.4.8}$$

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$ el primer número natural verificando que $m - 1 < \dfrac{n\nu - 1}{n} \le m$

$$A_{\nu,n} B_{\nu,n} f(t) = D_n^{\frac{n\nu-1}{n}} t^{n\nu-1} D^{n-1} t^{1-n\nu} D f(t) =$$

$$= D_n^m I_n^{m-\frac{n\nu-1}{n}} t^{n\nu-n} \prod_{j=0}^{n-2} (\delta_t - j) t^{-n\nu} \delta_t f(t) =$$

$$= n^{-m} t^{-nm} \prod_{i=0}^{m-1} (\delta_t - ni) I_n^{m-\frac{n\nu-1}{n}} t^{-n} \delta_t \prod_{j=0}^{n-2} (\delta_t - j - n\nu) f(t) = (*)$$

teniendo en cuenta (V.4.5), (V.4.6) y la condición

$$\lim_{t\to 0^+} \prod_{i=0}^{n-2} (\delta_t - i - n\nu) f(t) = 0$$

se obtiene

$$(*) = t^{-n} n^{-m} t^{-nm} \prod_{i=0}^{m} (\delta_t - ni) I_n^{m-\frac{n\nu-1}{n}} \prod_{j=0}^{n-2} (\delta_t - j - n\nu) f(t) =$$

$$= t^{-n} n^{-m} t^{-nm} (\delta_t - nm) \prod_{i=0}^{m-1} (\delta_t - ni) \prod_{j=0}^{n-2} (\delta_t - j - 1 - nm) I_n^{m-\frac{n\nu-1}{n}} f(t) =$$

$$= t^{-n}\prod_{j=0}^{n-1}(\delta_t - j)n^{-m}t^{-nm}\prod_{i=0}^{m-1}(\delta_t - ni)I_n^{m-\frac{n\nu-1}{n}}f(t) = D^n D_n^{\frac{n\nu-1}{n}}f(t)$$

.

Proposición V.4.7 *Dados $\rho > 1$, $\nu > \frac{1}{\rho}$ y $A = D_\rho^{\frac{\rho\nu-1}{\rho}} = D_\rho^n I_\rho^{n-\frac{\rho\nu-1}{\rho}}$ $(n-1 < \frac{\rho\nu-1}{\rho} \leq n)$. Si $f \in C_{\nu,\rho}$, entonces:*

$$AB_{\nu,\rho}f(t) = D^\rho Af(t) \tag{V.4.9}$$

Demostración.

Se denota por $b_r = \dfrac{[(r+1)\rho + \rho\nu - 2]\Gamma[(r+1)\rho - 1]}{\Gamma(r\rho)}a_{r+1}$

entonces,

$$D_\rho^{\frac{\rho\nu-1}{\rho}}B_{\nu,\rho}f(t) = T^\rho D^{\frac{\rho\nu-1}{\rho}}T^{\frac{1}{\rho}}\sum_{r=1}^{\infty}b_r t^{r\rho+\rho\nu-2} = \sum_{r=1}^{\infty}b_r\frac{\Gamma(\frac{r\rho+\rho\nu-2}{\rho}+1)}{\Gamma(\frac{r\rho-1}{\rho}+1)}t^{r\rho-1}$$

por otro lado

$$D^\rho D_\rho^{\frac{\rho\nu-1}{\rho}}f(t) = D^\rho T^\rho D^{\frac{\rho\nu-1}{\rho}}T^{\frac{1}{\rho}}\sum_{k=1}^{\infty}a_k t^{k\rho+\rho\nu-2} = \sum_{r=1}^{\infty}b_r\frac{\Gamma(\frac{r\rho+\rho\nu-2}{\rho}+1)}{\Gamma(\frac{r\rho-1}{\rho}+1)}t^{r\rho-1}$$

La demostración de la siguiente proposición es un simple ejercicio de cálculo.

Proposición V.4.8 *Sean $A = D_\rho^{\frac{\rho\nu-1}{\rho}}$ y $A^{-1} = I_\rho^{\frac{\rho\nu-1}{\rho}}$ su operador inverso por la derecha. Si $f \in C_{\nu,\rho}$, entonces:*

$$A^{-1}Af(t) = f(t) \tag{V.4.10}$$

Proposición V.4.9 *Si $f \in C_{\nu,\rho}$, se tiene:*

a) $W_{\nu,\rho}f(t) \in C_{\nu,\rho}$

b) $W_{\nu,\rho}B_{\nu,\rho}f(t) = f(t) - a_1 t^{\rho+\rho\nu-2}$

c) $(W_{\nu,\rho})^n (B_{\nu,\rho})^n f(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k t^{k\rho+\rho\nu-2}$

Demostración. La demostración de **a)** es un simple cálculo.

Para demostrar **b)**, usando la proposición V.2.5

$$W_{\nu,\rho}B_{\nu,\rho}f(t) = W_{\nu,\rho}\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}\frac{[(k+1)\rho+\rho\nu-2]\Gamma[(k+1)\rho-1]}{\Gamma(k\rho)}t^{k\rho+\rho\nu-2} =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}t^{(k+1)\rho+\rho\nu-2} = f(t) - a_1 t^{\rho+\rho\nu-2}.$$

Para probar **c)** se procede por inducción sobre n.

Proposición V.4.10 *Si $f \in C_{\nu,\rho}$ entonces,*

a) $I^\rho Af(t) = AW_{\nu,\rho}f(t)$

b) $A^{-1}AW_{\nu,\rho}f(t) = W_{\nu,\rho}f(t)$

Demostración. Para probar **a)**, haciendo uso de (V.4.9)

$$Af(t) = AB_{\nu,\rho}W_{\nu,\rho}f(t) = D^\rho AW_{\nu,\rho}f(t)$$

por lo tanto, como $W_{\nu,\rho}f(t) \in C_{\nu,\rho}$, se tiene que

$$I^\rho Af(t) = I^\rho D^\rho AW_{\nu,\rho}f(t)$$

por último, si denotamos por $g(t) = AW_{\nu,\rho}f(t)$, es sencillo comprobar que se verifica que:

$$I^\rho D^\rho g(t) = g(t)$$

La demostración de **b)** es un simple ejercicio de cálculo.

V.4.2 La extensión de $C_{\nu,\rho}$ a su cuerpo de fracciones

Teniendo en cuenta que $B_{\nu,\rho}$ y D^ρ son operadores lineales sobre $C_{\nu,\rho}$ y C_ρ respectivamente, donde C_ρ es el conjunto que fue definido en [2], el cual se ha mencionado en el capítulo cuarto y en la sección anterior de este mismo capítulo, y que A es un isomorfismo verificándose que:

$$AB_{\nu,\rho} = D^\rho A \tag{V.4.11}$$

Dada la convolución $\star$ para el operador D^ρ sobre C_ρ, puede aplicarse el teorema de semejanza de Meller [35] al siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
C_{\nu,\rho} \arrow[r, "B_{\nu,\rho}"] \arrow[d, "A"'] & C_{\nu,\rho} \\
C_\rho \arrow[r, "D^\rho"'] & C_\rho \arrow[u, "A^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

y así establecer

Proposición V.4.11 *La operación* $\star_\nu^\rho : C_{\nu,\rho} \times C_{\nu,\rho} \longrightarrow C_{\nu,\rho}$ *definida por*

$$f(t)\star_\nu^\rho g(t) = \beta A^{-1}[(Af(t)) \star (Ag(t))], \qquad \text{(V.4.12)}$$

donde

$$\beta = \frac{\Gamma(\frac{\rho-1}{\rho}+1)}{\Gamma(\frac{\rho+\rho\nu-2}{\rho}+1)}$$

es una convolución para el operador $B_{\nu,\rho}$ *sobre* $C_{\nu,\rho}$*, siendo* $\star$ *la convolución (V.3.2).*

En base a este resultado y teniendo en cuenta las propiedades de la convolución $\star$, que fueron estudiadas en [2], no es complicado probar que la convolución $\star_\nu^\rho$ verifica las siguientes propiedades:

i) $f\star_\nu^\rho g \in C_{\nu,\rho}$

ii) $f\star_\nu^\rho g = g\star_\nu^\rho f$

iii) $(f\star_\nu^\rho g)\star_\nu^\rho h = f\star_\nu^\rho (g\star_\nu^\rho h)$

iv) $\lambda(f\star_\nu^\rho g) = (\lambda f)\star_\nu^\rho g \ \ (\lambda \in \mathbb{C})$

v) $f\star_\nu^\rho (g+h) = (f\star_\nu^\rho g) + (f\star_\nu^\rho h)$

vi) $t^{\rho+\rho\nu-2}\star_\nu^\rho f = f$

vii) $f\star_\nu^\rho\, g = 0 \Leftrightarrow f = 0$ ó $g = 0$.

Estas propiedades permiten concluir

Proposición V.4.12 $(C_{\nu,\rho}, +, \otimes)$ *es un anillo conmutativo y unitario sin divisores de cero, cuyo elemento unidad es* $t^{\rho+\rho\nu-2}$.

Por lo tanto, $C_{\nu,\rho}$ puede extenderse a su cuerpo de fracciones

$$\mathcal{M}_{\nu,\rho} = C_{\nu,\rho} \times (C_{\nu,\rho} - (0))/\sim$$

donde la relación de equivalencia $\sim$ se define en la forma usual. Los elementos de $\mathcal{M}_{\nu,\rho}$ serán llamados operadores y de ahora en adelante se denota por $\dfrac{f}{g}$ a la clase de equivalencia del par (f, g).

Se definen en $\mathcal{M}_{\nu,\rho}$, también de forma usual, las operaciones suma, multiplicación y producto por un escalar como:

$$\frac{f}{g} + \frac{h}{k} = \frac{f\star_\nu^\rho\, k + g\star_\nu^\rho\, h}{g\star_\nu^\rho\, k}$$

$$\frac{f}{g} . \frac{h}{k} = \frac{f\star_\nu^\rho\, h}{g\star_\nu^\rho\, k}$$

$$\lambda\frac{f}{g} = \frac{\lambda f}{g}$$

con estas operaciones $\mathcal{M}_{\nu,\rho}$ adquiere la estructura de álgebra.

Existe un subanillo de $\mathcal{M}_{\nu,\rho}$, $(\mathcal{M}', +, .)$ isomorfo a $(C_{\nu,\rho}, +, \star_\nu^\rho)$ a través de la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} C_{\nu,\rho} & \longrightarrow & \mathcal{M}' \subset \mathcal{M}_{\nu,\rho} \\ f(t) & \longrightarrow & \dfrac{f(t)}{t^{\rho+\rho\nu-2}} \end{array} \tag{V.4.13}$$

De forma análoga, existe un subcuerpo C' de $\mathcal{M}_{\nu,\rho}$ isomorfo a $\mathbb{C}$, mediante la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & C' \subset \mathcal{M}_{\nu,\rho} \\ \alpha & \longrightarrow & \dfrac{\alpha t^{\rho+\rho\nu-2}}{t^{\rho+\rho\nu-2}} \end{array} \tag{V.4.14}$$

Los elementos de C' se denominan operadores numéricos, y en particular el cero y la unidad del cuerpo son operadores de este tipo.

V.4.3 Un cálculo operacional para el operador $B_{\nu,\rho}$

Con el fin de obtener reglas operacionales que sirvan como herramienta en la resolución de ecuaciones diferenciales o ecuaciones en derivadas parciales en las que comparezca el operador $B_{\nu,\rho}$, es común tratar de identificar el operador inverso por la derecha de éste con alguna función, en el sentido de que la acción del operador $W_{\nu,\rho}$ sobre cualquier función $f \in C_{\nu,\rho}$ sea equivalente a convolucionar f con cierta función de $C_{\nu,\rho}$.

Proposición V.4.13 *Para cualquier* $f \in C_{\nu,\rho}$

$$\frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\frac{2\rho-1}{\rho}+1)}{\Gamma(2\rho)\Gamma(\frac{2\rho+\rho\nu-2}{\rho}+1)} t^{2\rho+\rho\nu-2} \star_{\nu}^{\rho} f(t) = W_{\nu,\rho} f(t) \tag{V.4.15}$$

Demostración. En el capítulo cuarto fue mencionado que en [2] se demostró que

$$\frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(2\rho)} t^{2\rho-1} * f(t) = I^{\rho} f(t) \quad (f(t) \in C_{\rho})$$

por lo que aplicando la proposición V.2.2 para $T^{-1} = A^{-1} = I_{\rho}^{\frac{\rho\nu-1}{\rho}}$, se obtiene el resultado buscado.

Dado que

$$\frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\frac{2\rho-1}{\rho}+1)}{\Gamma(2\rho)\Gamma(\frac{2\rho+\rho\nu-2}{\rho}+1)} t^{2\rho+\rho\nu-2} \in C_{\nu,\rho}$$

poseerá un inverso algebraico en $\mathcal{M}_{\nu,\rho}$, el cual se denota por V y viene dado

$$V = \frac{\Gamma(2\rho)\Gamma(\frac{2\rho+\rho\nu-2}{\rho}+1)}{\Gamma(\rho)\Gamma(\frac{2\rho-1}{\rho}+1)} \frac{t^{\rho+\rho\nu-2}}{t^{2\rho+\rho\nu-2}} \in \mathcal{M}_{\nu,\rho}$$

lo que nos permite establecer

Proposición V.4.14 *Si* $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{k\rho+\rho\nu-2} \in C_{\nu,\rho}$ *y* $m \in \mathbb{N}$. *Entonces,*

a) $Vf(t) = B_{\nu,\rho} f(t) + a_1 V$

b) $V^m f(t) = (B_{\nu,\rho})^m f(t) + \sum_{k=1}^{m} a_k t^{k\rho+\rho\nu-2} V^m$

Demostración. La demostración consiste en aplicar V y V^m a ambos lados de las igualdades segunda y tercera, respectivamente, de la proposición V.4.9.

No es complicado comprobar que las funciones

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \sum_{k=1}^{\infty}(-a)^{k-1}\frac{\Gamma(\frac{k\rho-1}{\rho}+1)}{\Gamma(k\rho)\Gamma(\frac{k\rho+\rho\nu-2}{\rho}+1)}t^{k\rho+\rho\nu-2} \\ y_2(t) &= (-1)^{k+1}y_1(t) \end{aligned} \tag{V.4.16}$$

satisfacen cierta ecuación diferencial de orden fraccionario relacionada con el operador $B_{\nu,\rho}$, tal y como se refleja en la siguiente proposición, lo que permite obtener reglas operacionales.

Proposición V.4.15 *Para $a > 0$, las ecuaciones diferenciales*

$$(B_{\nu,\rho}+a)y = 0 \tag{V.4.17}$$

$$(B_{\nu,\rho}-a)y = 0 \tag{V.4.18}$$

admiten a las funciones $y_1(t)$ e $y_2(t)$ como soluciones, repectivas.

Dado que tanto para $y_1(t)$ como para $y_2(t)$ es

$$a_1 = \frac{\Gamma(\frac{\rho-1}{\rho}+1)}{\Gamma(\rho)\Gamma(\frac{\rho+\rho\nu-2}{\rho}+1)}$$

usando las proposiciones V.4.9 y V.4.14 se puede ver que

$$(V+a)y_1 = cV$$

donde $c = a_1$. A partir de lo cual se establece la primera de las siguientes reglas operacionales. Para establecer la segunda se repite el proceso tomando de partida la función $y_2(t)$, y combinando estas dos se obtienen el resto de ellas:

i) $\dfrac{V}{V + at^{\rho+\rho\nu-2}} = c^{-1}y_1$

ii) $\dfrac{V}{V - at^{\rho+\rho\nu-2}} = c^{-1}y_2$

iii) $\dfrac{V^2}{V^2 - a^2t^{\rho+\rho\nu-2}} = (2c)^{-1}(y_1 + y_2)$

iv) $\dfrac{V}{V^2 - a^2t^{\rho+\rho\nu-2}} = (2ac)^{-1}(y_1 - y_2)$

v) $\dfrac{t^{\rho+\rho\nu-2}}{V + at^{\rho+\rho\nu-2}} = a^{-1}(t^{\rho+\rho\nu-2} - c^{-1}y_1)$

vi) $\dfrac{t^{\rho+\rho\nu-2}}{V - at^{\rho+\rho\nu-2}} = a^{-1}(c^{-1}y_2 - t^{\rho+\rho\nu-2})$

vii) $\dfrac{t^{\rho+\rho\nu-2}}{V^2 - a^2t^{\rho+\rho\nu-2}} = a^{-2}[(2c)^{-1}(y_1 + y_2) - t^{\rho+\rho\nu-2}]$

Como un ejemplo de aplicación, se considera una ecuación en derivadas parciales en la que comparece el operador $B_{\nu,\rho}$. Dicha ecuación viene dada por:

$$(B_{\nu,\rho})_t^2 u(x,t) - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \; (0 \le x \le l \;,\; 0 \le t < \infty) \tag{V.4.19}$$

con las condiciones

1. $\lim\limits_{t\to 0} t^{-\rho-\rho\nu+2} u(x,t) = 0$

2. $\lim\limits_{t\to 0} t^{-\rho+1} D^{\rho+\rho\nu-1} u(x,t) = 0$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = t^{\rho+\rho\nu-2}$

4. $\lim\limits_{x\to l} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$

Haciendo uso de la proposición V.4.14 y de las condiciones, se obtiene:

$$V^2 u(x,t) - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = t^{\rho+\rho\nu-2}$

b) $\lim\limits_{x\to l} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0$

con un simple cálculo se deduce que la función

$$u(x,t) = \frac{t^{\rho+\rho\nu-2}}{V\big(t^{\rho+\rho\nu-2} - e^{2Vl}\big)}[e^{V(2l-x)} + e^{Vx}]$$

es una solución de la ecuación (V.4.19), siendo

$$V = \frac{1}{W_{\nu,\rho}}.$$

V.4.4 Una derivada algebraica para el operador $B_{\nu,\rho}$

En el capítulo cuarto se definió la derivada algebraica

$$\mathcal{D}_2 f(t) = [I^\rho - \frac{I^{\rho-1}}{\rho} t] f(t)$$

en el anillo $(C_\rho, +, \star)$. Con la ayuda de esta definición y aplicando la proposición V.2.1 para $T = A$, siendo A el operador introducido en la proposición V.4.7, se puede establecer

Proposición V.4.16 *El operador*

$$\mathcal{D}_\nu^\rho f(t) = A^{-1}\mathcal{D}_2 A f(t) = I_\rho^{\rho\nu-\frac{1}{\rho}}(I^\rho - \frac{I^{\rho-1}}{\rho} t) D_\rho^{\rho\nu-\frac{1}{\rho}} f(t)$$

constituye una derivada algebraica en el anillo $(C_{\nu,\rho}, +, \star_\nu^\rho)$

Dadas las propiedades verificadas por la derivada $\mathcal{D}_2$, estudiadas en el capítulo anterior, la aplicación de la proposición V.2.3, permite concluir

Proposición V.4.17 *Dados* $n \in \mathbb{N}$, $l = \dfrac{\Gamma(\rho)\Gamma(\frac{2\rho-1}{\rho}+1)}{\Gamma(2\rho)\Gamma(\frac{2\rho+\rho\nu-2}{\rho}+1)} t^{2\rho+\rho\nu-2} \in C_{\nu,\rho}$ *y* $V \in \mathcal{M}_{\nu,\rho}$ *el inverso algebraico de* l. *Entonces:*

a) $\mathcal{D}_\nu^\rho V = 1$

b) $\mathcal{D}_\nu^\rho 1 = 0$

c) $\mathcal{D}_{\nu}^{\rho}\, \alpha = 0$ $(\alpha = \dfrac{\alpha\; t^{\rho+\rho\nu-2}}{t^{\rho+\rho\nu-2}})$

d) $\mathcal{D}_{\nu}^{\rho}\, V^n = nV^{n-1}$

e) $\mathcal{D}_{\nu}^{\rho}\, l^n = -nl^{n+1}$

f) $\mathcal{D}_{\nu}^{\rho}\, (1-\alpha l)^n = n\alpha l^2(1-\alpha l)^{n-1}$

g) $\mathcal{D}_{\nu}^{\rho}\, (V-\alpha)^n = n(V-\alpha)^{n-1}$

Además, ya que se sabe que si la derivada algebraica $\mathcal{D}_2$ es cero para un elemento de M_ρ, entonces dicho elemento es un operador numérico. Haciendo uso del hecho de que A constituye un isomorfismo entre los cuerpos M_ρ y $\mathcal{M}_{\nu,\rho}$, es fácil comprobar la veracidad de

Proposición V.4.18 *Sea p un elemento cualquiera de $\mathcal{M}_{\nu,\rho}$ entonces, si $\mathcal{D}_{\nu}^{\rho}\, p = 0$ se puede asegurar que p es un operador numérico, es decir:*

$$p = \frac{\alpha\; t^{\rho+\rho\nu-2}}{t^{\rho+\rho\nu-2}} \qquad (\alpha \in \mathbb{C})$$

V.4.5 El operador $R_{\nu,\rho}$

Sea $\rho > 1$ y $\nu > \frac{1}{\rho}$. Si se considera

1. El operador $R_{\nu,\rho} = t^{\nu-\frac{1}{\rho}} D_{\frac{1}{\rho}}^{\rho-1} t^{\frac{1}{\rho}-\nu} D_{\frac{1}{\rho}}$.

2. Su inverso por la derecha $\Omega_{\nu,\rho} = I_{\frac{1}{\rho}} t^{\nu-\frac{1}{\rho}} I_{\frac{1}{\rho}}^{\rho-1} t^{\frac{1}{\rho}-\nu}$.

3. El conjunto de funciones $C_{\nu,\rho,\frac{1}{\rho}}$, dado por:

$$\{f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^{\frac{k\rho+\rho\nu-2}{\rho}} / \text{unif. convergentes en compactos de } [0,\infty)\}$$

entonces, se tiene:

a) $C_{\nu,\rho,\frac{1}{\rho}}$ es un espacio vectorial, considerando la suma y el producto por un escalar usuales.

b) $B_{\nu,\rho}$ y $R_{\nu,\rho}$ son operadores lineales sobre $C_{\nu,\rho}$ y $C_{\nu,\rho,\frac{1}{\rho}}$ respectivamente.

c) La aplicación $T^{\rho} : C_{\nu,\rho,\frac{1}{\rho}} \longrightarrow C_{\nu,\rho}$ definida por $T^{\rho} f(t) = f(t^{\rho})$ es un isomorfismo, verificando que $T^{\rho} R_{\nu,\rho} = B_{\nu,\rho} T^{\rho}$.

Por lo tanto, dado que $\star_{\nu}^{\rho}$ es una convolución en $C_{\nu,\rho}$, puede aplicarse, nuevamente, el teorema de semejanza de Meller [35] al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
C_{\nu,\rho} \arrow[r, "B_{\nu,\rho}"] \arrow[d, "T^{\frac{1}{\rho}}"'] & C_{\nu,\rho} \\
C_{\nu,\rho,\frac{1}{\rho}} \arrow[r, "R_{\nu,\rho}"'] & C_{\nu,\rho,\frac{1}{\rho}} \arrow[u, "T^{\rho}"']
\end{tikzcd}$$

y se puede establecer

Proposición V.4.19 *La operación* $\times_\nu^\rho : C_{\nu,\rho,\frac{1}{\rho}} \times C_{\nu,\rho,\frac{1}{\rho}} \longrightarrow C_{\nu,\rho,\frac{1}{\rho}}$ *definida por*

$$f(t)\times_\nu^\rho g(t) = T^{\frac{1}{\rho}}[T^\rho(f(t))\star_\nu^\rho T^\rho(g(t))]$$

es una convolución para el operador $R_{\nu,\rho}$*.*

En base a este resultado, y teniendo en cuenta las propiedades de la convolución $\star_\nu^\rho$, se obtiene las siguientes propiedades para la convolución $\times_\nu^\rho$:

1. $f\times_\nu^\rho g \in C_{\nu,\rho,\frac{1}{\rho}}$
2. $f\times_\nu^\rho g = g\times_\nu^\rho f$
3. $(f\times_\nu^\rho g)\times_\nu^\rho h = f\times_\nu^\rho (g\times_\nu^\rho h)$
4. $\lambda(f\times_\nu^\rho g) = (\lambda f)\times_\nu^\rho g \ \ (\lambda \in \mathbb{C})$
5. $f\times_\nu^\rho (g+h) = (f\times_\nu^\rho g) + (f\times_\nu^\rho h)$
6. $t^{\frac{\rho+\rho\nu-2}{\rho}}\times_\nu^\rho f = f$
7. $f\times_\nu^\rho g = 0 \Leftrightarrow f = 0 \ or \ g = 0.$

de lo que se concluye

Proposición V.4.20 *$(C_{\nu,\rho,\frac{1}{\rho}},+,\times_{\nu}^{\rho})$ es un anillo conmutativo sin divisores de cero cuyo elemento unidad es $t^{\frac{\rho+\rho\nu-2}{\rho}}$.*

Como es usual, $C_{\nu,\rho,\frac{1}{\rho}}$ puede ser extendido a su cuerpo de fracciones

$$F = C_{\nu,\rho,\frac{1}{\rho}} \times (C_{\nu,\rho,\frac{1}{\rho}} - (0))/\sim$$

y se definen en F las operaciones suma, multiplicación y producto por un escalar, tal y como se ha hecho en secciones anteriores y existirá un subanillo de F, (F',+,.), isomorfo a $(C_{\nu,\rho,\frac{1}{\rho}},+,\times_{\nu}^{\rho})$.

A continuación se identifica el operador $\Omega_{\nu,\rho}$, con una función del anillo $C_{\nu,\rho,\frac{1}{\rho}}$

Proposición V.4.21 *Para cualquier $f \in C_{\nu,\rho,\frac{1}{\rho}}$:*

$$\frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\frac{2\rho-1}{\rho}+1)}{\Gamma(2\rho)\Gamma(\frac{2\rho+\rho\nu-2}{\rho}+1)} t^{\frac{2\rho+\rho\nu-2}{\rho}} \times_{\nu}^{\rho} f(t) = \Omega_{\nu,\rho} f(t)$$

Demostración. Usando la definición de $\times_{\nu}^{\rho}$, la proposición V.2.2 y (V.4.15), se obtiene el resultado buscado.

Si se denota, al inverso algebraico de $\Omega_{\nu,\rho}$, por

$$\mathcal{V} = \frac{\Gamma(2\rho)\Gamma(\frac{2\rho+\rho\nu-2}{\rho}+1)}{\Gamma(\rho)\Gamma(\frac{2\rho-1}{\rho}+1)} \frac{t^{\frac{\rho+\rho\nu-2}{\rho}}}{t^{\frac{2\rho+\rho\nu-2}{\rho}}}$$

se pueden establecer los siguientes resultados en F.

i) $R_{\nu,\rho}\Omega_{\nu,\rho}f = f$

ii) $\Omega_{\nu,\rho}R_{\nu,\rho}f(t) = f(t) - a_1 t^{\frac{\rho+\rho\nu-2}{\rho}}$

iii) $\mathcal{V}f(t) = R_{\nu,\rho}f(t) + a_1\mathcal{V}$

iv) $(\Omega_{\nu,\rho})^m(R_{\nu,\rho})^m f(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{m} a_k t^{\frac{k\rho+\rho\nu-2}{\rho}}$

v) $\mathcal{V}^m f(t) = (R_{\nu,\rho})^m f(t) + \sum_{k=1}^{m} a_k t^{\frac{k\rho+\rho\nu-2}{\rho}}\mathcal{V}^m$

Como quiera que las funciones $z_1(t) = T^{\frac{1}{\rho}}y_1(t)$ y $z_2(t) = T^{\frac{1}{\rho}}y_2(t)$, donde y_1 e y_2 son las funciones que se mostraron en (V.4.16), son soluciones de las ecuaciones

$$(R_{\nu,\rho} + a)z = 0 \quad y \quad (R_{\nu,\rho} - a)z = 0$$

respectivamente. Si se reemplaza z en la propiedad (iii) por z_1 y z_2 se obtienen, respectivamente, la primera y la segunda de las reglas operacionales que se enumeran a continuación:

1. $\dfrac{\mathcal{V}}{\mathcal{V} + at^{\frac{\rho+\rho\nu-2}{\rho}}} = c^{-1}z_1$

2. $\dfrac{\mathcal{V}}{\mathcal{V} - at^{\frac{\rho+\rho\nu-2}{\rho}}} = c^{-1}z_2$

3. $\dfrac{\mathcal{V}^2}{\mathcal{V}^2 - a^2t^{\frac{\rho+\rho\nu-2}{\rho}}} = (2c)^{-1}(z_1 + z_2)$

4. $\dfrac{\mathcal{V}}{\mathcal{V}^2 - a^2 t^{\frac{\rho+\rho\nu-2}{\rho}}} = (2ac)^{-1}(z_1 - z_2)$

5. $\dfrac{t^{\frac{\rho+\rho\nu-2}{\rho}}}{\mathcal{V} + a t^{\frac{\rho+\rho\nu-2}{\rho}}} = a^{-1}(t^{\frac{\rho+\rho\nu-2}{\rho}} - c^{-1} z_1)$

6. $\dfrac{t^{\frac{\rho+\rho\nu-2}{\rho}}}{\mathcal{V} - a t^{\frac{\rho+\rho\nu-2}{\rho}}} = a^{-1}(c^{-1} z_2 - t^{\frac{\rho+\rho\nu-2}{\rho}})$

7. $\dfrac{t^{\frac{\rho+\rho\nu-2}{\rho}}}{\mathcal{V}^2 - a^2 t^{\frac{\rho+\rho\nu-2}{\rho}}} = a^{-2}[(2c)^{-1}(z_1 + z_2) - t^{\frac{\rho+\rho\nu-2}{\rho}}]$

Por último, haciendo uso de la proposición V.2.1, se concluye que el operador

$$K_\nu^\rho = T^{\frac{1}{\rho}} \mathcal{D}_\nu^\rho T^\rho$$

es una derivada algebraica en el anillo $(C_{\nu,\rho,\frac{1}{\rho}}, +, \times_\nu^\rho)$, verificando las propiedades que fueron estudiadas para la derivada algebraica $\mathcal{D}_\nu^\rho$.

Bibliografia

[1] **M.A. Al-Bassam**,"On generalized power series and generalized operational calculus and its applications", *Nonlinear analysis*, World Sci. Publishing, Singapore, (1987), 51-88.

[2] **J.A. Alamo y J. Rodríguez**,"Cálculo operacional de Mikusinski para el operador de Riemann-Liouville y su generalizado", *Rev. Acad. Canar. Cienc.*, 1 (1993), 31-40.

[3] **J.A. Alamo and J. Rodríguez**,"Operational Calculus for modified Erdélyi-Kober Operators", *SERDICA-Bulgaricae mathematicae publictiones.*, 20(1994), 351-363.

[4] **V. Almeida and J. Rodríguez**,"An Algebraic Derivative and some of its Applications", *Fractional Calculus and Applied Analysis.*,1(3) (1998), 247-254.

[5] **V.M. Almeida, N. Castro and J. Rodríguez**,"An algebraic derivative associated to the operator D^{δ}", *Banach Center publications*, Vol. 53 (2000). En prensa.

[6] **V.M.Almeida and J. Rodríguez**, "An algebraic derivative for a generalization of the Ditkin and Prudnikov's convolution", preprint (2000).

[7] **V.M.Almeida and J. Rodríguez**, "The convolution of Luchko and Srivastava and the algebraic derivative", preprint (2000).

[8] **V.M. Almeida and J. Rodríguez**,"The Meller's theorem and the algebraic derivative", *Integral Transforms and Special Functions*, 8-9() (1999), 1-12. En prensa.

[9] **V.M. Almeida and J. Rodríguez**,"An operational calculus for the operators $B_{\nu,\rho}$ and $R_{\nu,\rho}$", *Pure and Applied Mathematika Sciences*, Vol.XLIV(1-2) (1996), 37-49.

[10] **V.M. Almeida and J. Rodríguez**,"Applications of the algebraic derivatives to solving some differential equations of fractional order", *Mathematica Balkanica*, 12(1-2) (1998), 243-250.

[11] **P. Antosik, W. Kierat and K. Skornik**,"Some algebraic

propierties of derivatives", *Transforms Methods and Special Functions*, Sofia (1994), 8-17.

[12] **J.J. Betancor**,"A Mikusinski calculus for the Bessel operator $B_{\alpha_1,\alpha_2} = x^{1-\alpha_1-\alpha_2}Dx^{\alpha_1}Dx^{\alpha_2}$ and a variant of the Meijer transform", *Jour. Inst. Math. and Comp. Sci.*, 2(2) (1989), 231-242.

[13] **I.H. Dimovski**,"Convolutional Calculus" , *Kluwer Academic Publishers.*, Dordrecht (1990).

[14] **Ditkin and Proudnikov**,"Integral Transforms and Operational Calculus", *Pergamon Press.*, (1965).

[15] **T. Fényes** ,"On a discrete nonlinear operational differential equation system based on the dirichlet product" *Studia Scient. Math. Hungarica*, 22(1987), 471-484.

[16] **T. Fényes** ,"On an operational differential equation system" *Studia Scient. Math. Hungarica*, 24(1989), 365-375.

[17] **T. Fényes** ,"On an algebraic differential equation of Bernouilli type" *Studia Scient. Math. Hungarica*, 28(1993), 115-129.

[18] **T. Fényes** ,"A note on the algebraic derivative and integral in a discrete operational calculus" *Studia Scient. Math. Hungarica*, 28(1993), 457-463.

[19] **T. Fényes and P. Kosik**,"The algebraic derivative and integral in the discrete operational calculus" *Studia Scient. Math. Hungarica*, 10(1975), 365-380.

[20] **E. Gesztelyi**,"Limit and infinite integral of a Mikusinski operator", *Studia Mathematica*, T. XXXIX (1971), 119-136.

[21] **M. Hayashi**,"The algebraic derivative and integral in the field of arithmetic functions" *Memories of the Osaka Institute of Technology, Series A*, 30 (1)(1985), 1-9.

[22] **N. Hayek**,"Estudio de la ecuación diferencial $xy''+(\nu+1)y'+y=0$ y de sus aplicaciones" *Collectanea Mathematica*, Vol. XVIII (facs. 1 y 2)(1966-1967), Barcelona, 57-174.

[23] **I. Kaplanski**,"An introduction to differential algebra" *Hermann*, (1957), Paris.

[24] **W. Kierat**,"A note on applications of the algebraic derivative to solving of some differential equations" *Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math.*, 110(1993), 63-68.

[25] **W. Kierat and K. Skornik**,"An application of Mikusinski's operational calculus to the theory of Laguerre functions and La-

guerre polynomials" , *Integral Transforms and Special Functions*, 1(4) (1993), 315-316.

[26] **W. Kierat and K. Skornik**,"A remark on solutions of the Laguerre differential equation" , *Dissertationes Mathematicae*, 340 (1995), 137-141.

[27] **W. Kierat and K. Skornik**,"A remark on the operational exponential function", *Bull. of the Polish Acad. Scie. Math.*, Vol. 35(5-6)(1987), 383-386.

[28] **V. Kiryakova**,"Convolutions of Erdélyi-Kober fractional operators" , *Complex Analysis and applications'87*, Sofia, (1989), 273-283.

[29] **V. Kiryakova**,"Generalized fractional calculus and applications" , *Pitman Research Notes in Mathematics series 301. Longman Scientific & Technical*, Harlow-UK (1994).

[30] **E.L. Koh**,"A Mikusinski calculus for the operator B_ν" , *Proc. Diff. Eq.*, Spinger-Verlag, Lect. Notes 564 (1976), 291-300.

[31] **E.L. Kolchin**,"Differential algebra and algebraics groups" , *Academic Press*, New York (1973).

[32] **E. Krätzel**,"Eine Verallgemeinerung der Laplace-und Meijer-Transformation" , *Wiss. Z. Univ. Jena Math. Naturw. Reihe, Heft.*, 5 (1965), 319-381.

[33] **Yu. F. Luchko and H. M. Srivastava**,"The exact solution of certain differential equations of fractional order by using operational calculus" , *Computers Math. Applic.*,29(8) (1995), 73-85.

[34] **A.C. McBride**, "Fractional calculus and integral transforms of generalized functions", *Pitman Adv. Publ. Program.*, London (1979).

[35] **N.A. Meller**,"On some applications of operatinal calculus to problems in analysis", *J. Vichisl. Mat. i. Mat. Fiz.*, 3(1) (1963) , 73-89.

[36] **J. Mikusinski**,"Operational Calculus", *Pergamon* (1959).

[37] **J. Mikusinski**,"Sur la dérivée algébrique", *Studia Mathematica*, No 40 (1953), 99-105.

[38] **J. Mikusinski**,"Remarks on the algebraic derivative in the operational calculus", *Studia Mathematica*, T. XIX(1960), 187-192.

[39] **J. Mikusinski**,"Un theoreme d'unicite pour quelques systemes d'equations differentielles considerees dans les espaces abstraits", *Studia Mathematica*, T. XXII(1951), 80-83.

[40] **J. Mikusinski**,"Sur les solutions lineairement independantes des equations differentielles a coefficients constants", *Studia Mathematica*, T. XVI(1957), 41-47.

[41] **J. Mikusinski**,"Extensions de l'espace lineaire avec derivation", *Studia Mathematica*, T. XIX(1957), 156-172.

[42] **K.S. Miller and B. Ross**, "An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations", *John Wiley*, (1993).

[43] **D. Nikolic-Despotovic and B. Stankovic**,"The series of Mikusinski operators of the special form", *Publications de l'institut mathematique, nouvelle serie*, T. 14 (28)(1972), 163-171.

[44] **S. Okamoto**,"A remark on Yosida's complement to Mikusinski's operational calculus", *Studia Mathematica*, T. LXXVII(1983), 99-101.

[45] **K.B. Oldham and J. Spanier**, "The fractional calculus", *Academic Press*, New York (1974).

[46] **A.P. Prudnikov**,"On the continuation of the ideas of Heaviside and Mikusinski in operational calculus", *Different aspects of differentiability, Dissertationes Mathematicae*, 340(1995), 237-287.

[47] **D. Przeworska-Rolewicz**,"Algebraic derivative and abstract differential equations", *An. Acad. brasil. Cienc.*, 42(3)(1970), 403-409.

[48] **D. Przeworska-Rolewicz**,"Algebraic derivative and initial value problems", *Bull. Acad. Pol. scienc.*, XX(8)(1972), 629-633.

[49] **D. Przeworska-Rolewicz**,"Algebraic derivative and definite integrals", *Bull. Acad. Pol. scienc.*, XX(8)(1972), 641-644.

[50] **D. Przeworska-Rolewicz**,"A mixed boundary value problem with an algebraic derivative", *Bull. Acad. Pol. scienc.*, XX(8)(1972), 645-648.

[51] **D. Przeworska-Rolewicz**,"Concerning left invertible operators", *Bull. Acad. Pol. scienc.*, XX(10)(1972), 837-839.

[52] **D. Przeworska-Rolewicz**,"Algebraic theory of right invertible operators", *Studia Mathematica*, XLVIII(1973), 129-144.

[53] **D. Przeworska-Rolewicz**,"Equations with transformed argument", *PWN-Polish Scientific Publishers* , (1973), Varsovia.

[54] **J. Rodríguez**,"Una nueva convolución para el cálculo operacional del operador $B_{-\nu}$", *Rev. Tec. Univ. Zulia.*, 16(2) (1993), 185-190.

[55] **J. Rodríguez**,"Operational calculus for the generalized Bessel operator", *Serdica, Bulgaricae Matematicae Publicationes* , 15(1989), 179-186.

[56] **B. Ross** , "Fractional calculus and its applications", *Springer-verlag. Lect. Notes 457*, Berlin(1975).

[57] **K. Skornik**,"On some functional relations with orthogonal polynomials", *Transform Methods and Special Functions*, Sofia (1994), 317-327.

[58] **S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev**,"Fractional Integrals and derivatives" , *Gordon and Breach Science Publishers*, London(1993).

[59] **H.M. Srivastava and H.L. Manocha** ,"A tratise on Generating functions" , *Ellis Horwood* (1984).

[60] **E.C. Titchmarsh** ,"The theory of function, 2 ed." , *Oxford University Press*, London (1939).

[61] **J.J. Trujillo and J.C. Moreno**, "Los operadores fraccionarios de Liouville y la ecuación de Bessel", *VII C.E.D.Y.A.*, Santander (1985).

[62] **K. Yosida**,"The algebraic derivative and Laplace's differential equation", *Proc. Japan Acad.*, 59, Ser.A(1983), 1-4.

[63] **K. Yosida**, "Operational calculus. A theory of hyperfunctions", *Springer-Verlag*, New York (1984).

[64] **K. Yosida**," A simple complement to Mikusinski's operational calculus", *Studia Mathematica*, T. LXXVII(1983), 95-98.