UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

«Trasformaciones integrales de tipo Laplace y Hankel»

Autor: Domingo Israel Cruz Báez
Director: Dr. D. José Rodríguez Expósito

Departamento de Análisis Matemático

Universidad de La Laguna
Facultad de Matemáticas

JOSÉ RODRÍGUEZ EXPÓSITO, Catedrático de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna

CERTIFICA:

Que la presente memoria, titulada "Transformaciones integrales de tipo Laplace y Hankel", ha sido realizada bajo mi dirección por el licenciado en Ciencias Matemáticas D. Domingo Israel Cruz Báez y constituye su Tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que así conste a los efectos oportunos, firmo la presente en La Laguna, a doce de abril de dos mil.

La sugerencia, el impulso y el aliento de la presente investigación se debe al Prof. Dr. D. José Rodríguez Expósito, Catedrático de Análisis Matemático y Director de esta Memoria, a quien quiero agradecer sus atinadas observaciones y su permanente seguimiento para perfeccionar este trabajo.

Mi agradecimiento a los miembros del Departamento de Análisis Matemático y a los compañeros del Departamento de Economía Aplicada, por el ánimo y la máxima colaboración que en todo momento me han prestado.

Y por último, gracias a mi esposa, padres y hermano por su constante apoyo y comprensión. A ellos les dedico esta Memoria.

Contenido

Prólogo

Esta Memoria consiste fundamentalmente en el desarrollo de ciertas transformaciones integrales en determinados espacios de funciones. Para ello hemos dividido la misma en dos partes bien diferenciadas. Una primera parte la dedicamos al estudio de algunas transformaciones integrales que generalizan a la transformación integral de Laplace, mientras que en la segunda parte, se analizan ciertos espacios de funciones donde la transformación integral que comparece en los mismos es una transformación integral tipo Hankel.

Para la primera parte, se recuerda como una gran cantidad de autores han estudiado generalizaciones de la transformación de Laplace, destacando por ejemplo, a C. S. Meijer [82] que definió y estudió en 1940 la transformación

$$\left(\mathcal{K}_\nu f\right)(x) = \int_0^\infty (xy)^\nu K_\nu(xy) f(y) dy, \;\; \nu \geq -1/2,$$

conocida como K- transformación o transformación de Meijer, donde la función K_ν que comparece en el núcleo, denota la función de Bessel modificada de tercera especie y de orden ν. Es conocido que cuando $\nu = \pm 1/2$,

$$\left(\mathcal{K}_\nu f\right)(x) = \int_0^\infty e^{-xy} f(y) dy = \left(\mathcal{L} f\right)(x),$$

donde $\mathcal{L}$ denota la transformación de Laplace.

Posteriormente, E. Krätzel ([67],[63]) introduce las siguientes transformaciones integrales

$$\left(K_\nu^{(\rho)} f\right)(x) = \int_0^\infty Z_\rho^\nu(xy) f(y) dy, \, x > 0$$

y

$$\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}(f)(x) = \int_0^\infty \lambda_\alpha^{(\rho)}(xy) f(y) dy, \;\; x > 0$$

donde $Z_\rho^\nu(x)$, $\lambda_\alpha^{(\rho)}(x)$ denotan las funciones

$$Z_\rho^\nu(x) = \int_0^\infty t^{\nu-1} e^{-t^\rho - \frac{x}{t}} dt,$$

y

$$\lambda_\alpha^{(\rho)}(x) = \frac{(2\pi)^{(\rho-1)/2} \rho^{1/2}}{\Gamma(\alpha + 1 - (1/\rho))} \left(\frac{x}{\rho}\right)^{\rho\alpha} \int_1^\infty (t^\rho - 1)^{\alpha - (1/\rho)} e^{-xt} dt, \;\; x > 0$$

con $\rho > 0, \nu \in \mathbf{C}$ y $\alpha > -1 + 1/\rho$.

Nótese que como casos particulares, tenemos

$$\left(K_\nu^{(1)} f\right)(x) = (\mathcal{K}_\nu f)(x)$$

$$\left(\mathcal{L}_\alpha^{(1)} f\right)(x) = (\mathcal{L} f)(x)$$

$$\left(\mathcal{L}_\alpha^{(2)} f\right)(x) = 2^{-\alpha+1} \int_0^\infty (xy)^\alpha K_\alpha(xy) f(y) dy = 2^{-\alpha+1} (\mathcal{K}_\alpha f)(x).$$

Además, en 1958 N. Obrechkoff [91] había definido la transformación

$$\mathcal{O}\{f(t); z\} = \beta\, z^{-\beta(\gamma_m+1)+1} \int_0^\infty G_{0,m}^{m,0}\left((zt)^\beta | (\gamma_k + 1 - 1/\beta)_1^m\right) f(t) dt,$$

donde $G_{0,m}^{m,0}$ es un caso particular de la función G de Meijer ([61, Def. A.3, p. 313]). Los resultados de este autor permanecieron desconocidos durante largo tiempo, y lo paradójico es que esta transformación generaliza a las transformaciones de Meijer y a $\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}$ [61, pag. 196-197], es decir, para $\beta = m = 2$, $\gamma_{1,2} = \pm\nu/2$

$$\mathcal{O}\{f(t); z\} = 2^{-\nu+2} z^{-1/2+\nu} \mathcal{K}_\nu \{f(t); z\},$$

y si $\beta = m$, $\gamma_k = k/m$ $(k = 1, \ldots, m-1)$; $\gamma_m = \nu - 1/m$

$$\mathcal{O}\{f(t); z\} = m \cdot \mathcal{L}_\nu^{(m)} \left\{t^{m(\gamma_m+1)-1} f(t); m \cdot z\right\}.$$

Comenzamos comentando el contenido de la primera parte de la Memoria, analizando sus características, así como los antecedentes que nos motivaron a su realización. Para ello se ha dividido en tres capítulos, en los cuales se estudian las transformaciones de Krätzel $K_\nu^{(\rho)}$, $\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}$ y la de Obrechkoff. Nuestro objetivo es completar varias cuestiones no tratadas con estas transformaciones.

En concreto, el capítulo I está dedicado al estudio de las transformaciones de Krätzel en sentido clásico, y se desarrolla de la siguiente forma:

Después de una breve introducción, en el apartado I.2 se recuerdan algunas propiedades de estas transformaciones, que serán de utilidad en el desarrollo de la presente Memoria. La sección siguiente, se dedica a la obtención de fórmulas de inversión reales para la $K_\nu^{(\rho)}$ transformación, ya que hasta este momento, las fórmulas de inversión conocidas para la misma eran complejas (como puede verse en [67]). Para la obtención de las citadas fórmulas se siguen los trabajos de D. V. Widder [120]; I. I. Hirschman y D. V. Widder [51]; C. Nasim ([88],[89] y [90]) y J. Barrios y J. J. Betancor [7]. Para ello, se usan operadores diferenciales de orden infinito utilizando un procedimiento desarrollado por C. Nasim [88] para lograr un teorema de inversión para una variante de la K-transformación.

En la sección I.4 se establecen teoremas abelianos para la transformación $K_\nu^{(\rho)}$, con ellos se consiguen condiciones bajo las cuales el comportamiento de la transformada $\left(K_\nu^{(\rho)} f\right)(x)$ para valores grandes (respectivamente valores pequeños) de x queda determinado por el comportamiento de la función original $f(y)$ para valores de y pequeños (respectivamente grandes). Seguidamente, se logran teoremas tauberianos para la transformada, de forma que el comportamiento de una función f en el origen y en el infinito está determinado por el comportamiento de la transformación $\left(K_\nu^{(\rho)} f\right)(x)$. Para la obtención de los citados teoremas tauberianos nos basamos en el método dado por J. R. Ridenhour y R. P. Soni [94] en sus trabajos sobre la transformación integral de Hankel.

En una serie de artículos, E.A. Emara y H. P. Heining ([37],[38]) estudian varias transformaciones integrales en espacios L^p con pesos. En el apartado I.6 se extienden y mejoran los resultados obtenidos por estos autores para la K-transformación. En la última sección de este capítulo, se demuestra que la función que comparece en el núcleo de la transformación $\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}$ verifica nuevas ecuaciones diferenciales de orden fraccionario a las establecidas por J. Barrios y J. J. Betancor en [8].

Los capítulos segundo y tercero se dedican al estudio de las transformaciones de Krätzel y de Obrechkoff en sentido distribucional.

Es conocido que, el estudio de transformaciones integrales en espacios de distribuciones, ha sido una activa área de trabajo de muchos matemáticos sobre todo después de la publicación de la monografía de A. H. Zemanian [127] en 1968. Cabe destacar en este campo, además de los trabajos de este último autor reseñados en la bibliografía, los ya clásicos de L. Schwartz [107] en relación con la transformada de Fourier, L. S. Dube y J. N. Pandey [34], E. L. Koh y A. H. Zemanian [62], J. M. Méndez ([79], [80]) y J. J. Betancor [9] sobre la transformación de Hankel y sus variantes.

En general, los espacios de funciones y distribuciones que deben introducirse son diferentes para cada transformación integral y dependen esencialmente de la función núcleo de la transformada.

Dada una transformación clásica genérica definida por el par

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= (T\phi)(x) = \int_I K(x,y)\phi(x)dx \qquad (0.0.1) \\ \phi(x) &= \left(T^{-1}\Phi\right)(x) = \int_J H(x,y)\Phi(x)dx, \end{aligned}$$

donde I y J representan subconjuntos de $\mathbf{R}$ (o $\mathbf{C}$), es bien conocido que existen dos vías principales de extensión a funciones generalizadas.

En la primera deben construirse dos espacios A y B Fréchet de funciones sobre I y J respectivamente, de manera que la transformación T

sea continua de A en B. La transformación generalizada T^*f de una distribución $f \in B^{'}$ (dual de B), se define mediante el operador adjunto de T, es decir,

$$< T^*f, \phi >=< f, T\phi >, \tag{0.0.2}$$

para $f \in B^{'}$ y $\phi \in A$.

Este es el procedimiento seguido por, entre otros, L. Schwartz [107] en su extensión de la transformación de Fourier a distribuciones de crecimiento lento, y por A. H. Zemanian [127] para definir la transformación de Hankel en ciertos espacios de funciones generalizadas.

La segunda vía de extensión, consiste en introducir un espacio de funciones E, definido sobre I, que contenga al núcleo $K(x, y)$ para cada $y \in \Omega$ (siendo Ω un subconjunto de $\mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$), definiendo la transformada $\Phi(x)$ de la función generalizada $f \in E^{'}$ mediante la aplicación directa de esta última al núcleo, esto es,

$$\Phi(x) =< f(y), K(x, y) >, \tag{0.0.3}$$

siendo $f \in E^{'}$, $y \in \Omega$.

Este procedimiento, conocido como método del núcleo, es adoptado por A. H. Zemanian para efectuar las extensiones de las transformadas de Laplace y Mellin [127] y de Meijer [124]; por E. L. Koh y A. H. Zemanian [62] en relación con la transformación compleja de Hankel, y por L. S. Dube y J. N. Pandey [34] para la transformación de Hankel-Schwartz.

Esta segunda vía presenta notables ventajas respecto a la primera, ya que, por una parte resulta ser la más natural, por cuanto si f es una función clásica que genera un elemento regular en $E^{'}$, entonces (0.0.3) coincide con (0.0.1); y por otro lado, la definición (0.0.3) simplifica los cálculos en la obtención de las transformadas de algunas distribuciones. Sin embargo, la definición por medio del operador adjunto (0.0.2) permite analizar una clase más amplia de funciones generalizadas a las que es aplicable la transformación considerada.

Hechas estas aclaraciones, el Capítulo II se dedica a analizar el comportamiento de la transformación de Krätzel $K_\nu^{(\rho)}$ sobre las distribuciones de soporte compacto por el método del núcleo, logrando teoremas de analiticidad, acotación e inversión.

En el Capítulo III se estudia la $\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}$ transformación por medio del operador adjunto y la transformación de Obrechkoff por los dos métodos, para ello se consideran los espacios $F_{p,\mu}$ $(\mu \in \mathbf{C},\ 1 \leq p < \infty)$ y sus espacios duales $F'_{p,\mu}$, siendo $F_{p,\mu}$ los espacios constituidos por todas las funciones complejas $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^+)$ tales que

$$t^k \frac{d^k}{dt^k}(t^{-\mu}\varphi(t)) \in L^p(\mathbf{R}^+), \forall k \in \mathbf{N},$$

si $1 \leq p < \infty$, y

$$t^k \frac{d^k}{dt^k}(t^{-\mu}\varphi(t)) \to 0 \text{ cuando } x \to 0 \quad y \quad x \to \infty, \forall k \in \mathbf{N},$$

en el caso que $p = \infty$. Estos espacios fueron introducidos por A. C. McBride ([77],[78]) definiendo sobre ellos operadores de derivación e integración fraccionaria de Riemmann-Lioville y Weyl ([61],[103]). La transformación de Obrechkoff es estudiada en el apartado III.3.1 por el método del operador adjunto, para luego analizarla por el método del núcleo. Con este último método son generalizados varios resultados de la transformación de Laplace y la K transformación, obteniéndose resultados inéditos para la transformación de Krätzel $\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}$.

La segunda parte de esta Memoria, está dedicada al estudio de varios espacios de funciones en el marco de la siguiente transformación integral de Hankel,

$$h_\mu(f)(y) = \int_0^\infty (xy)^{-\mu} J_\mu(xy) f(x) x^{2\mu+1} dx, \quad y \in (0, \infty), \qquad (0.0.4)$$

donde la función J_μ representa a la función de Bessel de primera especie y de orden μ, siendo $\mu \geq -1/2$ [118]. La transformación h_μ es a veces conocida como transformación de Hankel-Schwartz o de Fourier-Bessel. Sin que ello signifique confusión, la denominaremos transformación de Hankel. Podemos destacar sobre el estudio de esta transformación, entre otros autores a, A. L. Schwartz que obtuvo una fórmula de inversión para h_μ ([105]) y analizó la regularidad de la transformada $h_\mu f$ a partir de las propiedades de f ([106]), a A. H. Zemanian ([127]) que estudió esta transformación en sentido distribucional. También no podemos dejar de citar los trabajos realizados por J. M. Méndez [80], A. M. Sánchez [104], M. Linares [72], así como los llevados a cabo por J. J. Betancor [9], I. Marrero [75], y L. Rodríguez-Mesa [101].

F. M. Cholewinski [20], D. T. Haimo [45] e I. I. Hirschman, Jr. [50] abordan inicialmente el estudio de la convolución para la transformación de Hankel. Estos autores definen la convolución de Hankel # de f y g por

$$(f\#g)(x) = \int_0^\infty f(y)\,(\tau_x g)(y) d\gamma(y),\ x \in I,$$

siendo $d\gamma(x) = \dfrac{x^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} dx$ y donde el operador de traslación de Hankel τ_x, $x \in (0,\infty)$, viene definido por

$$(\tau_x g)(y) = \int_0^\infty D_\mu(x,y,z)g(z)d\gamma(z).$$

La función núcleo $D_\mu(x,y,z)$, $x,y,z \in (0,\infty)$, viene dada por

$$D_\mu(x,y,z) = \frac{2^{3\mu-1}\Gamma(\mu+1)^2}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2+\mu)}(xyz)^{-2\mu}A(x,y,z)^{2\mu-1}, x,y,z \in (0,\infty)$$

donde $A(x,y,z)$ es el área del triángulo cuyas aristas miden x,y,z, si este triángulo existe, y $A(x,y,z)=0$ en otro caso.

G. Altenburg [2] introdujo el espacio de funciones $\mathcal{H}$, que consiste en aquellas funciones de clase infinito $f = f(x)$, $x \in I = (0,\infty)$, tales que las cantidades

$$\gamma_{m,k}(f) = \sup_{x\in(0,\infty)} \left| x^m (x^{-1}D)^k f(x) \right| \ (m,k \in \mathbf{N})$$

son finitas. Cuando dotamos a $\mathcal{H}$ de la topología generada por la familia de seminormas $\{\gamma_{m,k}\}_{(m,k)\in \mathbf{N}x\mathbf{N}}$, $\mathcal{H}$ es un espacio de Fréchet. Además, la transformación h_μ es un automorfismo de $\mathcal{H}$. Como es usual denotaremos al espacio dual de $\mathcal{H}$ por $\mathcal{H}'$.

En [3] G. Altenburg estudia los potenciales de Bessel con la transformación h_μ, los cuales denominaremos potenciales de Hankel H_μ^s de orden s y cuya definición para $u \in \mathcal{H}'$ viene dada por

$$\left(H_\mu^s u\right)(x) = h_\mu\left((1+\xi^2)^{-s/2} h_\mu(u)(\xi)\right)(x).$$

Además, en [3] se definió el espacio de los potenciales de Hankel para $s \in \mathbf{R}, 1 \leq p < \infty$ como sigue

$$W_\mu^{s,p} = W_\mu^{s,p}(I) = \left\{ f \in \mathcal{H}' : H_\mu^{-s} f \in L_\mu^p(I) \right\},$$

y la norma que se le asocia viene dada por

$$\|f\|_{s,p,\mu} = \|f\|_{W_\mu^{s,p}} = \left\| H_\mu^{-s} f \right\|_{p,\mu},$$

donde por L_μ^p, $1 \leq p < \infty$, denotaremos el espacio constituido por las funciones f medibles Lebesgue sobre $(0, \infty)$ tales que

$$\|f\|_{p,\mu} = \int_0^\infty |f(x)|^p \, x^{2\mu+1} dx < \infty,$$

y por L^∞ el espacio de todas las funciones esencialmente acotadas respecto a la medida de Lebesgue sobre $I = (0, \infty)$, es decir,

$$\|f\|_{\infty,\mu} = \|f\|_\infty = \sup \mathrm{esen} \, |f| < \infty.$$

Recientemente R. S. Pathak y P. K. Pandey en [92] continuan el trabajo realizado por G. Altenburg sobre los potenciales de Hankel, pero en ningún momento establecen un teorema tipo A. P. Calderón [16, Theorem 1.2.3], además G. Altenburg en [3] estudia por primera vez, según la literatura que obra en nuestro poder, los espacios de Besov con la transformación de Hankel. Posteriormente, J. J. Betancor y L. Rodríguez-Mesa ([12], [13]) introducen y estudian otros espacios tipo Lispchitz y Besov. Todo ello nos ha llevado a abordar varias cuestiones en el Capítulo IV. En concreto, definimos un espacio tipo Sobolev para demostrar un teorema de tipo A. P. Calderón, con el cual caracterizamos el espacio de los potenciales de Hankel por medio del espacio tipo Sobolev. Además recordamos los espacios tipo Lispchitz estudiados por J. J. Betancor y L. Rodríguez-Mesa en [12] y como continuación del trabajo iniciado por estos autores, se caracterizan dichos espacios por medio de integrales de Poisson, siguiendo la línea dada por E. M. Stein [111]. Inspirados en el trabajo de G. Altenburg [3] se recuerdan los espacios de tipo Besov y se definen nuevos espacios tipo Triebel-Lizorkin y Nikol'skii, para demostrar varios teoremas de embebimiento y caracterizar los espacios de los potenciales de Hankel por medio de un espacio tipo Triebel-Lizorkin, resultado que en el marco de la transformación de Fourier puede encontrarse en [1].

También en este capítulo, definimos los potenciales no lineales de Hankel para extender los resultados de G. Altenburg [3] y R. S. Pathak y P. K. Pandey [92], además de realizar un breve estudio de la teoría del potencial no lineal en el marco de la transformación de Hankel.

Por último, finalizamos este capítulo dando varias aplicaciones, principalmente a la hora de resolver ecuaciones diferenciales que involucran al operador diferencial de Bessel $\Delta_\mu \equiv x^{-2\mu-1}Dx^{2\mu+1}D$.

Capítulo I

Transformaciones de Krätzel clásicas

I.1 Introducción

Las transformaciones integrales

$$\left(K_\nu^{(\rho)} f\right)(x) = \int_0^\infty Z_\rho^\nu(xy) f(y) dy, \ x > 0 \tag{1.1.1}$$

y

$$\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}(f)(x) = \int_0^\infty \lambda_\alpha^{(\rho)}(xy) f(y) dy, \ x > 0 \tag{1.1.2}$$

fueron introducidas por E. Krätzel en [67],[63], donde $Z_\rho^\nu(x)$, $\lambda_\alpha^{(\rho)}(x)$ denotan las funciones

$$Z_\rho^\nu(x) = \int_0^\infty t^{\nu-1} e^{-t^\rho - \frac{x}{t}} dt$$

y

$$\lambda_\alpha^{(\rho)}(x) = \frac{(2\pi)^{(\rho-1)/2} \rho^{1/2}}{\Gamma(\alpha + 1 - (1/\rho))} \left(\frac{x}{\rho}\right)^{\rho\alpha} \int_1^\infty (t^\rho - 1)^{\alpha-(1/\rho)} e^{-xt} dt, \; x > 0 \tag{1.1.3}$$

con $\rho > 0, \nu \in \mathbf{C}$ y $\alpha > -1 + 1/\rho$.

Como casos particulares, tenemos que la $K_\nu^{(\rho)}$ transformación se reduce a la transformación de Meijer cuando $\rho = 1$ y a la transformación de Laplace cuando $\rho = 1, \nu = \pm\frac{1}{2}$. En 1987, J. Rodríguez, J. Trujillo y M. Rivero [100] generalizan los resultados de Krätzel demostrando que Z_ρ^ν es una solución de una ecuación diferencial que involucra a una derivada fraccionaria de tipo Weyl ([61],[103]). Además establecen un cálculo operacional y dan aplicaciones para resolver ciertas ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales. Por otro lado, la transformación $\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}$ fue ampliamente estudiada por J. J. Betancor y J. Barrios en ([7],[8]).

En este capítulo estudiamos propiedades inéditas de la transformación (1.1.1) y (1.1.2) completando algunos aspectos los trabajos anteriores.

Para ello, inicialmente recordamos las principales propiedades de los núcleos Z_ρ^ν, $\lambda_\alpha^{(\rho)}$ y establecemos una importante igualdad de Parseval para la $K_\nu^{(\rho)}$ transformación, que nos será de gran utilidad. En la tercera sección recordamos una fórmula de inversión compleja dada en [67] por E. Krätzel y logramos dos nuevas fórmulas de inversión reales. El cuarto apartado se dedica a estudiar teoremas de tipo abeliano, mientras que en la sección quinta estudiamos teoremas tauberianos para la $K_\nu^{(\rho)}$ transformación. En el sexto apartado obtenemos determinadas desigualdades con peso para la transformación (1.1.1). Por último, establecemos que el núcleo que comparece en (1.1.3) verifica varias ecuaciones diferenciales de orden fraccionario.

I.2 Las funciones $Z_\rho^\nu(z)$ y $\lambda_\alpha^{(\rho)}(x)$. Propiedades

A continuación veremos algunas propiedades de las funciones $Z_\rho^\nu(x)$ y $\lambda_\alpha^{(\rho)}(x)$ que nos serán útiles en el estudio abordado en los próximos párrafos. Las citadas propiedades fueron establecidas en [63], [67] y [59], a los cuales remitimos para los detalles de la demostración de cada una de ellas.

Si aplicamos el teorema de Fubini, podemos obtener sin dificultad la transformación de Mellin de la función $Z_\rho^\nu(x)$, es decir,

$$\mathcal{M}\left\{Z_\rho^\nu(x)\right\}(s) = \frac{1}{\rho}\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{s+\nu}{\rho}\right) \tag{1.2.1}$$

si $\operatorname{Re} s + \min(0, \operatorname{Re}\nu) > 0$, donde

$$\mathcal{M}\{f\}(s) = \int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx.$$

Será de suma utilidad el comportamiento de la función $Z_\rho^\nu(x)$ frente a ciertos operadores diferenciales

$$\frac{d}{dx}Z_\rho^{\nu+1}(x) = -Z_\rho^\nu(x) \tag{1.2.2}$$

y

$$x^{\nu-\rho+1}Dx^{\rho-\nu}D_k^\rho\, Z_\rho^\nu(x) = -\rho Z_\rho^\nu(x) \tag{1.2.3}$$

donde D_k^ρ es la derivada fraccionaria de Weyl ([61],[103]), es decir,

$$(D_k^\rho f)(z) = (-D)^n K^{n-\rho} f(z),$$

siendo $n = 1 + [\rho]$ ($[.]$ denota la función parte entera) y

$$K^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^\infty (t-x)^{-\alpha-1} f(t)dt,$$

para $x > 0$.

Además en [63] podemos ver la siguiente propiedad

$$D\lambda_\alpha^{(\rho)}(z) = -\left(\frac{z}{\rho}\right)^{\rho-1} \lambda_{\alpha-1}^{(\rho)}(z). \tag{1.2.4}$$

Recordemos que el comportamiento asintótico de $\lambda_\alpha^{(\rho)}(x)$ viene dado por:

Para $x \to 0$

$$\lambda_\alpha^{(\rho)}(x) = \begin{cases} c_1 + o(1) & \operatorname{Re}\alpha > 0 \\ c_2 \log(x/\rho) + o(1) & \operatorname{Re}\alpha = 0 \\ c_3\,(x/\rho)^{\rho\alpha} + o(1) & \operatorname{Re}\alpha < 0 \end{cases} \tag{1.2.5}$$

donde c_1, c_2, c_3 son constantes,

y para $x \to \infty$

$$\lambda_\alpha^{(\rho)}(x) = O(e^{-z}). \tag{1.2.6}$$

Por otra parte, resulta de particular interés las representaciones asintóticas de $Z_\rho^\nu(x)$ cerca del origen y del infinito

$$Z_\rho^\nu(x) \sim \begin{cases} \frac{1}{\rho}\Gamma\left(\frac{\nu}{\rho}\right) & \text{si } \operatorname{Re}\nu > 0 \\ \frac{1}{\rho}\Gamma\left(\frac{\nu}{\rho}\right) + \Gamma(-\nu)\,x^\nu & \text{si } \operatorname{Re}\nu = 0, \operatorname{Im}\nu \neq 0 \\ -\log x & \text{si } \nu = 0 \\ \Gamma(-\nu)\,x^\nu & \text{si } \operatorname{Re}\nu < 0 \end{cases} \tag{1.2.7}$$

cuando $x \to 0^+$

y

$$Z_\rho^\nu(x) \sim \gamma_1 x^{(2\nu-\rho)/(2\rho+2)} e^{-\gamma_2 x^{\rho/(\rho+1)}}, \tag{1.2.8}$$

cuando $x \to \infty$, donde

$$\gamma_1 = \left(\frac{2\pi}{\rho+1} \right)^{1/2} \rho^{-(2\nu+1)/(2\rho+2)}, \gamma_2 = (1 + 1/\rho)\, \rho^{1/(\rho+1)}.$$

A continuación establecemos una igualdad de Parseval para la $K_\nu^{(\rho)}$ transformación.

Lema I.2.1 *Si* $f, g \in L^1((0,\infty))$, *entonces*

$$\int_0^\infty f(x) \left(K_\nu^{(\rho)} g \right)(x) dx = \int_0^\infty \left(K_\nu^{(\rho)} f \right)(x) g(x) dx \tag{1.2.9}$$

siempre que $\operatorname{Re} \nu > 0$ *y* $\rho > 0$.

Demostración: Para demostrar (1.2.9) es suficiente observar que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x) \left(K_\nu^{(\rho)} g \right)(x) dx &= \int_0^\infty f(x) \int_0^\infty Z_\rho^\nu(xy) g(y) dy dx = \\ &= \int_0^\infty g(y) \int_0^\infty Z_\rho^\nu(xy) f(x) dx dy = \\ &= \int_0^\infty g(y) \left(K_\nu^{(\rho)} f \right)(y) dy. \end{aligned}$$

Nótese que el intercambio en el orden de integración está justificado porque la función $Z_\rho^\nu(x)$ está acotada en $(0,\infty)$ por las condiciones impuestas. ∎

Se pueden establecer condiciones más generales en las que la igualdad de Parseval se verifica (véase, por ejemplo para transformada de Hankel [94]).

I.3 Fórmulas de inversión

En este epígrafe, logramos varias fórmulas de inversión para la transformación integral $K_\nu^{(\rho)}$.

Primeramente, se expone una fórmula de inversión compleja para la $K_\nu^{(\rho)}$ transformación y luego se establecen varias fórmulas de inversión reales inéditas para la $K_\nu^{(\rho)}$.

C. Nasim en ([88],[90]) demuestra algunas fórmulas de inversión para la transformación de Meijer y otros operadores integrales que contienen funciones de Whittaker. En el método que utiliza, emplea operadores diferenciales de orden infinito. Aquí usamos un procedimiento similar para obtener algunas fórmulas de inversión para la $K_\nu^{(\rho)}$- transformada integral, y como caso especial, conseguimos una fórmula de inversión para la transformación de Meijer. Utilizando este método, se logran dos fórmulas de inversión reales inéditas para la transformación de Krätzel, de las cuales, como casos particulares se obtienen fórmulas para la transformación de Laplace y Meijer (K- transformación).

I.3.1 Fórmula de inversión compleja

E. Krätzel [67] estableció la primera fórmula de inversión para la transformación $K_\nu^{(\rho)}$. Para ello, utiliza la función de E. M. Wright [121]

$$\Phi(\rho, \beta; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!\Gamma(\rho n + \beta)}$$

donde $0 < \rho < \infty$, $\beta \in \mathbf{R}$. En el caso de que $\rho = 1$, la función de E. M. Wright se reduce a una modificación de la conocida función de Bessel J_ν, de primera especie y de orden ν, a saber,

$$\Phi\left(1, \nu+1; -\frac{z^2}{4}\right) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} J_\nu(z)$$

Las propiedades que a continuación recogemos en los siguientes lemas se pueden encontrar en [67] y nos serán útiles para demostrar posteriormente un teorema de inversión.

Lema I.3.1 *Para* $\operatorname{Re}\gamma > -1$, $\operatorname{Re}\nu > -1 - \operatorname{Re}\gamma$, *se tiene*

$$K_\nu^{(\rho)}\left\{\Phi\left(\frac{1}{\rho}, \frac{\nu+1}{\rho}; z\right)\right\}(y) = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{s-1}$$

Lema I.3.2 *Sean* α_1, α_2 *constantes positivas y* $\beta = (\rho+1)^{-\rho/(\rho+1)}$, *entonces*

$$\Phi\left(\frac{1}{\rho}, \frac{\nu+1}{\rho}; z\right) = \alpha_1 \cdot z^{\frac{\rho-2\nu-2}{2(\rho+1)}} \exp\left(\beta \cdot z^{\rho/(\rho+1)}\right)\left\{1 + O(z^{-\rho/(\rho+1)})\right\} +$$

$$+\alpha_2 \cdot \left(e^{2\pi i}z\right)^{\frac{\rho-2\nu-2}{2(\rho+1)}} \exp\left(\beta \cdot \left(e^{2\pi i}z\right)^{\rho/(\rho+1)}\right)\left\{1+O(z^{-\rho/(\rho+1)})\right\}$$

para $-2\pi < \arg z < 0$, *y*

$$\Phi\left(\frac{1}{\rho}, \frac{\nu+1}{\rho}; z\right) = \alpha_1 \cdot \left(e^{-2\pi i}z\right)^{\frac{\rho-2\nu-2}{2(\rho+1)}} \exp\left(\beta \cdot \left(e^{-2\pi i}z\right)^{\rho/(\rho+1)}\right) \cdot$$

$$\cdot \left\{1+O(z^{-\rho/(\rho+1)})\right\} + \alpha_2 \cdot z^{\frac{\rho-2\nu-2}{2(\rho+1)}} \exp\left(\beta \cdot z^{\rho/(\rho+1)}\right)\left\{1+O(z^{-\rho/(\rho+1)})\right\}$$

para $0 < \arg z < 2\pi$.

Véase [67], para el siguiente:

Teorema I.3.1 *Sea $F(s)$ una función compleja y holomorfa sobre el dominio*

$$G = \left\{s : \operatorname{Re} s^{\frac{\rho}{\rho+1}} \geq c, |\arg s| \leq \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\rho}\right), \rho \geq 1\right\}$$

donde c es una constante adecuada. Asumimos que se satisface lo siguiente:

(i) El camino de integración es Σ y viene dado por $\operatorname{Re} s^{\frac{\rho}{\rho+1}} = c$ con $|\arg s| \to \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{\rho}\right)$ para $|s| \to \infty$.

(ii) En Σ, $F(s)$ converge uniformemente a 0 en $\arg s$ para $|s| \to \infty$ y existe

$$\int_\Sigma \frac{F(\sigma)}{\sigma} d\sigma.$$

(iii) La integral $\displaystyle\int_\Sigma \left|\sigma^{\frac{\rho-2\nu-2}{2(\rho+1)}-\nu} F(\sigma)\right| |d\sigma| < \infty$.

Bajo estas condiciones se sigue que

$$f(t) = \frac{\rho}{2\pi i}\int_{\Sigma} \sigma^{-\nu} F(\sigma)\Phi\left(\frac{1}{\rho}, \frac{\nu+1}{\rho}; \sigma t\right) d\sigma,$$

donde $F(s) = K_\nu^{(\rho)}\left\{f\right\}(s)$.

Por lo tanto, la transformación integral $K_\nu^{(\rho)}$ y su fórmula de inversión compleja vienen dadas por:

$$\left.\begin{array}{c} F(x) = K_\nu^{(\rho)}\left\{f\right\}(x) = \int_0^\infty Z_\rho^\nu(xy)f(y)dy \\[2ex] f(t) = \frac{\rho}{2\pi i}\int_{\Sigma} \sigma^{-\nu} F(\sigma)\Phi\left(\frac{1}{\rho}, \frac{\nu+1}{\rho}; \sigma t\right) d\sigma \end{array}\right\}$$

I.3.2 Fórmulas de inversión reales

Muchos autores han establecido fórmulas de inversión para una gran variedad de transformaciones integrales empleando operadores de derivación infinita. Entre ellos podemos destacar a, D. V. Widder [120], I. I. Hirschman y D. V. Widder [51], C. Nasim ([88],[89] y [90]) y J.J. Betancor y J. Barrios ([7],[8]). Siguiendo un procedimiento análogo al desarrollado por los autores anteriores, probamos varias fórmulas de inversión reales, obteniendo como casos especiales teoremas para las transformaciones de Laplace y Meijer.

En principio, se considera oportuno hacer algunas consideraciones sobre el cálculo operacional del operador $\delta = -x\dfrac{d}{dx}$ (véase [88]) que nos serán imprescindibles en lo que sigue.

Es fácil ver que si $n \in \mathbf{N}$

$$\delta^n \left[x^{-s}\right] = s^n \cdot x^{-s}, \; s \in \mathbf{C},$$

y por lo tanto, si $p(x)$ es un polinomio, se tiene

$$p(\delta) \left[x^{-s}\right] = p(s) \cdot x^{-s}, \; s \in \mathbf{C}.$$

Por otro lado, si $f(s) = \lim\limits_{k\to\infty} p_k(s)$, $s \in \mathbf{C}$, donde p_k es una sucesión de polinomios, podemos definir

$$f(\delta) \left[x^{-s}\right] = \lim_{k\to\infty} p_k(\delta) \left[x^{-s}\right], \; s \in \mathbf{C},$$

y entonces

$$f(\delta) \left[x^{-s}\right] = f(s) \cdot x^{-s}, \; s \in \mathbf{C}.$$

Proposición I.3.1 *Si* $f \in L^2((0,\infty))$, $\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}$ *satisfaciendo*

$$\int_0^1 x^{\mathrm{Re}\,\nu} \left|f(x)\right| dx < \infty, \tag{1.3.1}$$

para $\mathrm{Re}\,\nu \leq 0$,

entonces

$$R(\delta) \left[K_\nu^{(\rho)} f\right] = \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right), \; \textit{c.p.t.} \;\; (x > 0)$$

siendo $R(\delta) = \rho \dfrac{1}{\Gamma(\delta)\Gamma(\frac{\delta+\nu}{\rho})}$ *y* $\delta = -x\dfrac{d}{dx}$.

Demostración: De acuerdo con [90, Pag. 140, (2.5)] tenemos

$$R(\delta)\left[x^{-s}\right] = \frac{1}{\mathcal{M}(Z_\rho^\nu)(s)} \cdot x^{-s}. \tag{1.3.2}$$

Ahora bien, como por hipótesis $f \in L^2((0,\infty))$ y dado que $\mathrm{Re}\,\nu > -\frac{1}{2}$, tenemos que el núcleo $Z_\rho^\nu \in L^2((0,\infty))$, entonces la $K_\nu^{(\rho)}$- transformada existe y es absolutamente integrable ya que se cumple (1.3.1).

Además las transformadas de Mellin de las funciones f y Z_ρ^ν pertenecen a $L^2(\frac{1}{2}-i\infty, \frac{1}{2}+i\infty)$. Por lo tanto, utilizando [35, (13), p.308] y el teorema de Parseval para funciones de $L^2((0,\infty))$ [115] tenemos

$$\begin{aligned}\left(K_\nu^{(\rho)} f\right)(x) &= \int_0^\infty Z_\rho^\nu(yx) f(x) dx = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \mathcal{M}(Z_\rho^\nu)(s)\mathcal{M}f(1-s)x^{-s}ds,\end{aligned}$$

aplicando el operador $R(\delta)$ se logra

$$\begin{aligned}R(\delta)\left[K_\nu^{(\rho)} f\right] &= R(\delta)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \mathcal{M}(Z_\rho^\nu)(s)\mathcal{M}f(1-s)x^{-s}ds\right] = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \mathcal{M}(Z_\rho^\nu)(s)\mathcal{M}f(1-s)R(\delta)\left[x^{-s}\right]ds.\end{aligned}$$

Usando la propiedad (1.3.2), y simplificando se obtiene

$$\begin{aligned}R(\delta)\left[K_\nu^{(\rho)} f\right] &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \mathcal{M}f(1-s)x^{-s}ds = \\ &= \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{c.p.t. } (x>0),\end{aligned}$$

ya que existe la transformada de Mellin de $1/x\, f(1/x)$. ■

Corolario I.3.1 *Sean* $f \in L^2((0,\infty))$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$ *y*

$$\int_0^1 x^{\operatorname{Re}\nu} |f(x)|\, dx < \infty$$

para $\operatorname{Re}\nu \leq 0$. *Si*

$$K_\nu^{(\rho)} f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n-\alpha}, (x > r),$$

para algunas constantes r *y* α, *entonces*

$$f(x) = \rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+\alpha+1}}{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(\frac{n+\alpha+\nu}{\rho})}, \tag{1.3.3}$$

$(x > R)$, *para cierta constante* R.

Demostración: Sea

$$R(\delta) = \rho \frac{1}{\Gamma(\delta)\Gamma(\frac{\delta+\nu}{\rho})}.$$

Por la Proposición I.3.1 tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) &= R(\delta)\left[K_\nu^{(\rho)} f\right] = \\
&= R(\delta)\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n-\alpha}\right] = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n R(\delta)\left[x^{-n-\alpha}\right] = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n R(n+\alpha) x^{-n-\alpha} = \\
&= \rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{-n-\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(\frac{n+\alpha+\nu}{\rho})}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto se sigue (1.3.3). ∎

Teorema I.3.2 *Dada $f \in L^2((0,\infty))$ tal que*

$$F(s) = \mathcal{M}\{f\}(s) \in L^1\left(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty\right)$$

y

$$\int_0^1 x\,|f(x)|\,dx < \infty.$$

Si denotamos $G(y) = \left(K_\nu^{(\rho)} f\right)(y)$, y definimos

$$H(z) = \rho \int_0^\infty \Phi\left(\frac{1}{\rho}, \frac{\nu+1}{\rho}; zy\right) G(y)dy,$$

donde

$$\Phi(\rho, \beta; z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!\Gamma(\rho n + \beta)}.$$

Entonces

$$\frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\delta\right) H(z) = f(z)$$

para casi todo $z > 0$, siempre que $\operatorname{Re}\nu > -1$.

Demostración: Nótese que $G(y) = \left(K_\nu^{(\rho)} f\right)(y)$ es absolutamente convergente debido a las hipótesis y a los comportamientos asintóticos (1.2.7) y (1.2.8).

Podemos reescribir $H(z)$ como sigue

$$\begin{aligned}
H(z) &= \rho \int_0^\infty \Phi\left(\frac{1}{\rho}, \frac{\nu+1}{\rho}; zy\right) G(y)dy = \\
&= \rho \int_0^\infty \Phi\left(\frac{1}{\rho}, \frac{\nu+1}{\rho}; zy\right) \left(\int_0^\infty Z_\rho^\nu(xy) f(x)dx\right) dy = \\
&= \rho \int_0^\infty f(x) \int_0^\infty Z_\rho^\nu(xy) \Phi\left(\frac{1}{\rho}, \frac{\nu+1}{\rho}; zy\right) dydx.
\end{aligned}$$

El intercambio en el orden de integración está justificado por la convergencia absoluta de la correspondiente integral doble.

Ahora, haciendo el cambio $zy = \xi$ y utilizando el desarrollo en serie de la función de E. M. Wright se tiene

$$H(z) = \rho \int_0^\infty z^{-1} f(x) \int_0^\infty Z_\rho^\nu(\frac{x}{z}\xi) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-\xi)^n}{n!\Gamma\left(\frac{n+\nu+1}{\rho}\right)} d\xi dx,$$

como es absolutamente convergente,

$$H(z) = \rho \int_0^\infty z^{-1} f(x) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!\Gamma\left(\frac{n+\nu+1}{\rho}\right)} \int_0^\infty Z_\rho^\nu(\frac{x}{z}\xi)\xi^n d\xi dx,$$

en virtud de [67, pag. 150] y de que $\operatorname{Re}\nu > -1$ resulta

$$H(z) = \int_0^\infty x^{-1} f(x) \sum_{n=0}^\infty \left(-\frac{z}{x}\right)^n dx = \int_0^\infty x^{-1} f(x) k(z/x) dx,$$

donde $k(u) = \dfrac{1}{1+u^2} \in L^2((0,\infty))$.

Por lo tanto, según la conocida ecuación de Parseval para la transformada de Mellin (véase ([115, p. 60])) obtenemos

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} F(s) K(s)\, z^{-s} ds.$$

siendo $K(s) = \mathcal{M}\{k\}(s) = \frac{\pi}{2}\mathrm{cosec}(\frac{\pi}{2}\mathrm{s})$ [36, p. 309, (11)].

Consideremos el operador $K(\delta) = \frac{\pi}{2}\mathrm{cosec}(\frac{\pi}{2}\delta)$, donde $\delta = -x\frac{d}{dx}$.

La representación de sen z, como producto infinito nos permite definir el operador inverso por

$$(K(\delta))^{-1}\left[z^{-s}\right]=\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\delta\right)\left[z^{-s}\right]=\lim_{l\to\infty}\delta\prod_{k=1}^{l}\left(1-\frac{\delta^2}{4k^2}\right)\left[z^{-s}\right],$$

con $s\in\mathbf{C}$. Luego tenemos que

$$(K(\delta))^{-1}H(z)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{l\to\infty}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}F(s)\left[\prod_{k=l+1}^{\infty}\left(1-\frac{\delta^2}{4k^2}\right)\right]^{-1}z^{-s}ds.$$

Ahora bien, ya que $F(s)\in L^1((\frac{1}{2}-i\infty,\frac{1}{2}+i\infty))$, podemos aplicar el teorema de la convergencia dominada y utilizando la fórmula de inversión para la transformación integral de Mellin [115, p. 46] se logra

$$(K(\delta))^{-1}H(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}F(s)\,z^{-s}ds=f(z)$$

para casi todo $z>0$. ∎

I.4 Teoremas de tipo Abeliano para la $K_\nu^{(\rho)}$

Por teoremas abelianos se entienden los resultados en los que se prueba que el comportamiento de la transformada de una función f cerca de un punto dado, queda determinado por el comportamiento de la propia función f.

La denominación de teoremas abelianos viene de que son una generalización de un conocido teorema de Abel. En éste se afirma que si $f(x)$ viene definida por la serie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad (|x| < 1),$$

entonces $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, siempre que la serie converja. También puede encontrarse un resultado similar en forma integral, a saber, si $F(y)$ viene definida para cada $y > 0$ por la integral convergente siguiente

$$F(y) = \int_0^{\infty} e^{-xy} f(x)dx$$

entonces $\lim\limits_{y\to 0+} F(y) = \int_0^{\infty} f(x)dx$, siempre y cuando la integral converja.

Muchos autores han investigado resultados de este tipo para una amplia clase de transformaciones integrales. Destacamos, entre otros, los recogidos por G. Doetsch [33] y R. A. Handelsman y J. S. Lew [46], para la transformación de Laplace; por J.L. Griffith [43] y [44], el cual estudia la transformación de Hankel; por A.H. Zemanian [125] y K. Soni y R. P. Soni [109] y [110] que consideran la K-transformación y la transformación de Hankel; por R. D. Carmichael y R. S. Pathak [17], [18] y [19], que analizan diversas generalizaciones de la transformación de Laplace; por J. A. Barrios y J. J. Betancor ([7],[8]), que logran importantes resultados para la transformación integral $\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}$.

En los epígrafes que exponemos a continuación establecemos teoremas abelianos que suponen una generalización de los resultados obtenidos para la transformación de Meijer por A. H. Zemanian [125] y para la transformación de Laplace por G. Doestsch [33].

En el primer párrafo son presentados resultados que relacionan el valor inicial ($y \to 0$) o final ($y \to \infty$) de la transformada $K_\nu^{(\rho)}$ de una función f con el valor final ($x \to \infty$) o inicial ($x \to 0$) de la propia función f, respectivamente.

Para nuestros propósitos, es necesario introducir la función $G(\nu, \rho, \eta)$ que viene dada por

$$G(\nu, \rho, \eta) = \frac{1}{\rho}\Gamma(\eta+1)\Gamma\left(\frac{\eta+1+\nu}{\rho}\right),$$

$\operatorname{Re}\eta + \min(1, 1+\operatorname{Re}\nu) > 0, \nu \in \mathbf{C}$.

A continuación, vemos algunos teoremas de valor inicial y final para la transformación $K_\nu^{(\rho)}$.

Teorema I.4.1 *Sean $\eta, \nu \in \mathbf{C}$ con $\operatorname{Re}\eta + \min(1, 1+\operatorname{Re}\nu) > 0$. Consideremos $f(x)$ una función localmente integrable sobre $(0, \infty)$ tal que existe un número positivo c para el cual*

$$\int_K^\infty e^{-cx^{\rho/(\rho+1)}} |f(x)| \, dx < \infty,$$

donde $K > 0$.

Si

$$\lim_{x \to 0^+} x^{-\eta} f(x) = \alpha \tag{1.4.1}$$

con $\alpha \in \mathbf{C}$, *entonces*

$$\lim_{y \to \infty} y^{\eta+1} \left(K_\nu^{(\rho)} f \right)(y) = \alpha G(\nu, \rho, \eta).$$

Demostración: Haciendo uso de (1.2.1) tenemos que

$$G(\nu, \rho, \eta) = \int_0^\infty u^\eta Z_\rho^\nu(u) du.$$

Entonces, podemos escribir

$$\begin{aligned} y^{\eta+1} \left(K_\nu^{(\rho)} f \right)(y) - \alpha G(\nu, \rho, \eta) &= y \int_0^\infty f(x) x^{-\eta} (xy)^\eta Z_\rho^\nu(xy) dx - \\ &- \alpha y^{\eta+1} \int_0^\infty x^\eta Z_\rho^\nu(xy) dx = \\ &= y \int_0^\infty (f(x) x^{-\eta} - \alpha)(xy)^\eta Z_\rho^\nu(xy) dx. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $K > 0$

$$\begin{aligned} &\left| y^{\eta+1} \left(K_\nu^{(\rho)} f \right)(y) - \alpha G(\nu, \rho, \eta) \right| \leq \\ &\leq \left| y \int_0^K (f(x) x^{-\eta} - \alpha)(xy)^\eta Z_\rho^\nu(xy) dx \right| + \\ &+ \left| y \int_K^\infty (f(x) x^{-\eta} - \alpha)(xy)^\eta Z_\rho^\nu(xy) dx \right|. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\left| y\int_0^K (f(x)x^{-\eta}-\alpha)(xy)^\eta Z_\rho^\nu(xy)dx\right| \leq M \sup_{0<x<K} \left|f(x)x^{-\eta}-\alpha\right|, \tag{1.4.2}$$

siendo

$$M=\mathcal{M}\left\{Z_\rho^\nu\right\}(\eta+1)=\int_0^\infty u^\eta Z_\rho^\nu(u)du<\infty,$$

ya que $\operatorname{Re}\eta+\min(1,1+\operatorname{Re}\nu)>0$.

En virtud del comportamiento asintótico (1.2.8) tenemos

$$\begin{aligned}\left| y\int_K^\infty (f(x)x^{-\eta}-\alpha)(xy)^\eta Z_\rho^\nu(xy)dx\right| &\leq \\ \leq M_1 y^{\eta+1+\frac{(2\nu-\rho)}{2\rho+2}} e^{-\gamma_2(Ky)^{\rho/(\rho+1)}+(Kc)^{\rho/(\rho+1)}}&. \\ \cdot\int_K^\infty \left|f(x)-\alpha x^\eta\right| x^{\frac{(2\nu-\rho)}{2\rho+2}} e^{-cx^{\rho/(\rho+1)}} dx&,\end{aligned}$$

para cierta constante M_1. Luego tomado c tal que $c<\gamma_2\, y^{(\rho+1)/\rho}$,

$$y\int_K^\infty (f(x)x^{-\eta}-\alpha)(xy)^\eta Z_\rho^\nu(xy)dx\to 0,\ \text{as } y\to\infty. \tag{1.4.3}$$

Combinando ahora (1.4.1), (1.4.2) y (1.4.3) podemos deducir

$$\lim_{y\to\infty} y^{\eta+1}(K_\nu^{(\rho)}f)(y)=\alpha G(\nu,\rho,\eta).$$

■

Observando las ideas desarrolladas por J. L. Griffith [44] en su estudio de la transformación de Hankel, podemos obtener la siguiente generalización del Teorema I.4.1.

Teorema I.4.2 *Sean* $\eta, \nu \in \mathbf{C}$ *siendo* $\operatorname{Re}\eta + \min(2, 2+\operatorname{Re}\nu) > 0$ *y* $f(x)$ *una función* n*-veces diferenciable* $(0 < x < \infty)$, *con* $n \geq 1$, *satisfaciendo*

(i) *Si* $\operatorname{Re}\nu > -1$, $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{d}{dx}\right)^{k-1}(f(x)) = 0$;
si $\operatorname{Re}\nu < -n$, $\lim_{x\to 0^+} x^{\nu+k}\left(\frac{d}{dx}\right)^{k-1}(f(x)) = 0$;
si $\exists k_1, 1 \leq k_1 \leq n : \operatorname{Re}\nu + k_1 = 0$, $\lim_{x\to 0^+} x^{\nu+k_1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{k-1}(f(x)) = 0$,
para cada $k = 1, \ldots, n$,

(ii) $\lim_{x\to\infty} e^{-\gamma_2 x^{\rho/\rho+1}}\left(\frac{d}{dx}\right)^{k-1}(f(x)) = 0$, *para* $k = 1, \ldots, n$, *siendo* γ_2 *la que aparece en (1.2.8),*

(iii) *existe una constante* $c > 0$ *para la cual* $\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}(f(x))\, e^{-cx^{\rho/(\rho+1)}}$ *es localmente integrable sobre* $(0, \infty)$ *y absolutamente integrable sobre* (K, ∞), *para cada* $K > 0$,

(iv) $\lim_{x\to 0^+} x^{-\eta}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n}(f(x)) = \alpha$, $(\alpha \in \mathbf{C})$,

entonces

$$\lim_{y\to\infty} y^{n+\eta+1}\left(K_\nu^{(\rho)} f\right)(y) = \alpha G(\nu, \rho, \eta + n). \tag{1.4.4}$$

Demostración: En virtud de (1.2.2) tenemos:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{k} Z_\rho^{\nu+k}(xy) = (-1)^k y^k Z_\rho^{\nu}(xy). \tag{1.4.5}$$

Consideremos ahora

$$F(y, a, b) = \int_a^b Z_\rho^{\nu}(xy) f(x) dx,$$

donde $0 < a < b < \infty$.

De acuerdo con (1.4.5) e integrando por partes conseguimos,

$$\begin{aligned} F(y,a,b) &= -\int_a^b y^{-1}\frac{d}{dx}\left(Z_\rho^{\nu+1}(xy)\right)f(x)dx = \\ &= -y^{-1}f(x)\cdot Z_\rho^{\nu+1}(xy)\Big]_{x=a}^{x=b} + y^{-1}\int_a^b Z_\rho^{\nu+1}(xy)\frac{d}{dx}f(x)dx. \end{aligned}$$

y reiterando el proceso n-veces:

$$\begin{aligned} F(y,a,b) &= -\sum_{k=1}^{n} y^{-k}\left(\frac{d}{dx}\right)^{k-1}(f(x))\cdot Z_\rho^{\nu+k}(xy)\Bigg]_{x=a}^{x=b} + \\ &\quad + y^{-n}\int_a^b Z_\rho^{\nu+n}(xy)\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)dx. \end{aligned}$$

Recordando el comportamiento asintótico de Z_ρ^ν ((1.2.8), (1.2.7)) y teniendo en cuenta i) y ii) conseguimos

$$\int_0^\infty Z_\rho^\nu(xy)f(x)dx = y^{-n}\int_0^\infty Z_\rho^{\nu+n}(xy)\left(\frac{d}{dx}\right)^n(f(x))dx,$$

para y lo suficientemente grande.

Luego, en virtud de iii) y iv) podemos aplicar el Teorema I.4.1 y lograr (1.4.4) siempre que $\operatorname{Re}\eta + \min(2, \operatorname{Re}\nu + 2) > 0$. ∎

El siguiente resultado tiene un carácter más general que los presentados en los Teoremas I.4.1 y I.4.2.

Teorema I.4.3 *Sean f y ψ, $0 \leq x < \infty$, dos funciones que satisfacen:*

(i) f *y* ψ *son continuas sobre* $0 \leq x \leq K$, *para algún* $K > 0$, *y* $\psi(x) > 0$ *para cada* $x \in [0, K]$,

(ii) f *y* ψ *pertencen a* $L^1((0,\infty))$, *y*

(iii) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{\psi(x)} = A$, *para cierta constante* A.

Entonces

$$\lim_{y\to\infty} \frac{F(y)}{\Phi(y)} = A,$$

siendo $F(y) = \left(K_\nu^{(\rho)} f\right)(y)$ *y* $\Phi(y) = \left(K_\nu^{(\rho)} \psi\right)(y)$.

Demostración: Puesto que la función $\dfrac{f(x)}{\psi(x)}$ es continua y $\psi(x) > 0$ sobre $[0,\tau]$ para cada $0 < \tau < K$, podemos aplicar el primer teorema del valor medio integral, obteniendo

$$\int_0^\tau Z_\rho^\nu(xy) f(x)dx = \int_0^\tau Z_\rho^\nu(xy)\frac{f(x)}{\psi(x)}\psi(x)dx = \frac{f(z)}{\psi(z)}\int_0^\tau Z_\rho^\nu(xy)\psi(x)dx, \tag{1.4.6}$$

para cada $y > 0$ y cierta $z \in (0,\tau)$, z dependiendo de y.

Definimos ahora

$$F_1(y) = \int_0^\tau Z_\rho^\nu(xy) f(x)dx$$

y

$$\Phi_1(y) = \int_0^\tau Z_\rho^\nu(xy)\psi(x)dx.$$

Entonces (1.4.6) toma la forma

$$\frac{F_1(y)}{\Phi_1(y)} = \frac{f(z)}{\psi(z)}. \tag{1.4.7}$$

Por *iii*) deducimos de (1.4.7) que

$$\left|\frac{F_1(y)}{\Phi_1(y)} - A\right| < \varepsilon, \text{ para todo } y > 0, \varepsilon > 0. \tag{1.4.8}$$

Por otro lado, definiendo

$$F_2(y) = \int_\tau^\infty Z_\rho^\nu(xy) f(x) dx,$$

$$\Phi_2(y) = \int_\tau^\infty Z_\rho^\nu(yx) \psi(x) dx,$$

tenemos

$$|F_2(y)| \leq Z_\rho^\nu(\tau y) \cdot \int_\tau^\infty |f(x)|\, dx$$

y

$$|\Phi_2(y)| \leq Z_\rho^\nu(\tau y) \cdot \int_\tau^\infty |\psi(x)|\, dx$$

ya que $Z_\rho^\nu(x)$ es una función decreciente (de acuerdo con (1.2.2)) y no negativa (véase su representación matricial) sobre $0 < z < \infty$ para todo $\nu \in \mathbf{C}$.

Además, aplicando el teorema del valor medio y que $Z_\rho^\nu(x)$ es una función decreciente, obtenemos

$$\Phi_1(y) \geq \int_{\tau/4}^{\tau/2} Z_\rho^\nu(xy) \psi(x) dx \geq \frac{\tau}{4} m Z_\rho^\nu\left(\frac{\tau}{2} y\right),$$

donde m denota una cota inferior para ψ sobre $[\frac{\tau}{4}, \frac{\tau}{2}]$. Por lo tanto

$$Z_\rho^\nu\left(\frac{\tau}{2}y\right) \leq 2\Phi_1(y)/m\tau.$$

Ahora, en virtud de (1.2.8) se consigue

$$|\Phi_2(y)| \leq M\, e^{-\gamma_2(\tau y/2)^{\rho/(\rho+1)}}\, |\Phi_1(y)|$$

y

$$|F_2(y)| \leq M_1 e^{-\gamma_2(\tau y/2)^{\rho/(\rho+1)}}\, |F_1(y)|$$

para M y M_1 constantes positivas e y suficientemente grande.

Por lo tanto

$$\lim_{y\to\infty}\frac{\Phi_2(y)}{\Phi_1(y)} = \lim_{y\to\infty}\frac{F_2(y)}{F_1(y)} = 0, \tag{1.4.9}$$

y de acuerdo con (1.4.8) y (1.4.9) podemos concluir que

$$\lim_{y\to\infty}\frac{K_\nu^{(\rho)} f(y)}{K_\nu^{(\rho)}\psi(y)} = A. \blacksquare$$

A continuación establecemos otros dos teoremas para la transformación $K_\nu^{(\rho)}$.

Teorema I.4.4 *Sean* $\eta, \nu \in \mathbf{C}$ *tal que* $\mathrm{Re}\,\eta + \min(1, 1 + \mathrm{Re}\,\nu) > 0$. *Consideremos una función* $f(x)$, $0 < x < \infty$, *localmente integrable sobre* $(0, \infty)$ *satisfaciendo* *(i)* *Para cada* $K > 0$, $f(x) \in L^1((0,K))$, *cuando* $\operatorname{Re}\nu > 0$; $f(x)\log x \in L^1((0,K))$, *para* $\nu = 0$; $f(x)(1+x^\nu) \in L^1((0,K))$, *si* $\operatorname{Re}\nu = 0$, $\operatorname{Im}\nu \neq 0$; *y* $f(x)x^\nu \in L^1((0,K))$, *para* $\operatorname{Re}\nu < 0$.

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-\eta} f(x) = \alpha$, *para cierta* $\alpha \in \mathbf{C}$.

Entonces

$$\lim_{y\to 0^+} y^{\eta+1}\left(K_\nu^{(\rho)} f\right)(y) = \alpha G(\nu,\rho,\eta).$$

Demostración: La prueba es similar a la empleada en el Teorema I.4.1.

Para cada $y > 0$ y $K > 0$, conseguimos

$$\begin{aligned} y^{\eta+1}\left(K_\nu^{(\rho)} f\right)(y) - \alpha G(\nu,\rho,\eta) &= y\int_0^K (f(x)x^{-\eta} - \alpha)(xy)^\eta Z_\rho^\nu(xy)dx + \\ &\quad + y\int_K^\infty (f(x)x^{-\eta} - \alpha)(xy)^\eta Z_\rho^\nu(xy)dx, \end{aligned}$$

con $K > 0$.

Por otro lado

$$\left| y\int_K^\infty (f(x)x^{-\eta} - \alpha)(xy)^\eta Z_\rho^\nu(xy)dx \right| \le$$

$$\le \sup_{K<x<\infty} \left| f(x)x^{-\eta} - \alpha \right| \cdot \int_0^\infty u^\eta Z_\rho^\nu(u)du. \qquad (1.4.10)$$

Además, según (1.2.7),

$$\left| y\int_0^K (f(x)x^{-\eta} - \alpha)(xy)^\eta Z_\rho^\nu(xy)dx \right| \le$$

$$\leq \begin{cases} y^{\eta+1}M\int_0^K |f(x)-\alpha x^\eta|\,dx & \text{si } \operatorname{Re}\nu>0 \\ y^{\eta+1}M\int_0^K |f(x)-\alpha x^\eta|\,(1+x^\nu)dx & \text{si } \operatorname{Re}\nu=0, \operatorname{Im}\nu\neq 0 \\ y^{\eta+1}M\int_0^K |f(x)-\alpha x^\eta|\log x dx & \text{si } \nu=0 \\ y^{\eta+1}M\int_0^K |f(x)-\alpha x^\eta|\,x^\nu dx & \text{si } \operatorname{Re}\nu<0 \end{cases} \tag{1.4.11}$$

para cierta $M>0$.

Por lo tanto usando (1.4.10) y (1.4.11) obtenemos el resultado deseado. ■

Observación I.4.1 *Nótese que los Teoremas I.4.1 y I.4.4 generalizan a los dados por A. H. Zemanian [125] para la transformación de Meijer.*

Teorema I.4.5 *Sean* $\eta,\nu\in\mathbf{C}$ *tal que* $\operatorname{Re}\eta+\min(2,2+\operatorname{Re}\nu)>0$. *Consideremos una función* $f(x)$, $0<x<\infty$, *n-veces diferenciable, con* $n\geq 1$, *tal que* $\left(\frac{d}{dx}\right)^n(f(x))$ *es localmente integrable sobre* $(0,\infty)$ *y satisface*

(i) Para cada $K>0$, $\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)\in L^1((0,K))$, *para* $\operatorname{Re}\nu>0$; $\log x\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)\in L^1((0,K))$, *para* $\nu=0$; $(1+x^\nu)\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)\in L^1((0,K))$, *para* $\operatorname{Re}\nu=0$, $\operatorname{Im}\nu\neq 0$; *y* $x^\nu\left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)\in L^1((0,K))$, *para* $\operatorname{Re}\nu<0$,

(ii) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{d}{dx}\right)^{k-1}(f(x))=0$, *para cada* $k=1,\ldots,n$,

(iii) $\lim_{x\to\infty} e^{-\gamma_2 x^{\rho/\rho+1}} \left(\frac{d}{dx}\right)^{k-1} (f(x)) = 0$, *para* $k = 1, \ldots, n$, *y*

(iv) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-\eta} \left(\dfrac{d}{dx}\right)^{n} (f(x)) = \alpha$, *con* $\alpha \in \mathbf{C}$.

Entonces

$$\lim_{y\to 0^+} y^{n+\eta+1} \left(K_\nu^{(\rho)} f\right)(y) = \alpha G(\nu, \rho, \eta + n).$$

Demostración: Para su demostración se siguen los pasos del Teorema I.4.2. ■

I.5 Teoremas de tipo tauberiano

Se conocen como teoremas de tipo tauberiano para una transformación integral, aquéllos que permiten obtener el comportamiento de una función $f(x)$ a partir del de su correspondiente transformada de f. Numerosos autores han establecido resultados de este tipo para diversas transformaciones integrales (véanse, por ejemplo, [33], [94] y [6]). Esta sección, la dedicamos a obtener los teoremas tauberianos para la transformación de Krätzel $K_\nu^{(\rho)}$. El método utilizado hace uso de la igualdad de Parseval (1.2.9) y de un procedimiento similar al empleado por J. R. Ridenhour y R. P. Soni [94] en su estudio sobre la transformación de Hankel. Nuestros resultados generalizan a los logrados por J. Karamata [56] y G. Doestch [32] para la transformación de Laplace.

La siguiente proposición es análoga a una establecida por J. Karamata [57, p. 28] para la transformación de Laplace, donde $L(x)$ denotará una función de variación lenta en el sentido de J. Karamata [56] y $\mathcal{L}$ denota la transformación de Laplace.

Proposición I.5.1 *Sean $\gamma, \nu \in \mathbf{R}$, $\gamma < 0$ y $\nu > 0$. Supongamos que $f(x)$ es una función no negativa para $x > 0$ y $f(x)$ pertenece a $L^1((0,\infty))$. Además definimos*

$$\alpha(u; f) = \int_0^u t^{-2\nu-1}\mathcal{L}\left\{x^\nu f(x); t^{-2\rho^2}\right\} dt$$

y

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-su} g(e^{-su}) d\alpha(u; f),$$

donde g es una función de variación acotada en $[0,1]$.

Si $F(y) = K_\nu^{(\rho)} f(y) \simeq y^\gamma L(1/y)$, cuando $y \to 0^+$, entonces

$$X(s) \simeq \frac{\Gamma(1/2-\gamma)}{\Gamma(-2\gamma)} 2^{-2\gamma-1}\pi^{-1/2} s^{2\gamma} L(4s^{-2}) \int_0^\infty e^{-u} g(e^{-u}) u^{-2\gamma-1} du,$$

cuando $s \to 0^+$.

Demostración: Definimos

$$H(s) = \int_0^\infty y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{4}s^2 y^{-1}} F(y) dy.$$

De acuerdo con la igualdad de Parseval (1.2.9), conseguimos

$$H(s) = \int_0^\infty K_\nu^{(\rho)} \left\{ y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{4}s^2 y^{-1}} \right\}(x) f(x) dx =$$

$$= 2\pi^{1/2}s^{-1}\rho^{-1}\int_0^\infty x^\nu \mathcal{L}\left\{\tau^{\nu/\rho-1}e^{-s\tau^{-1/(2\rho)}}; x^\rho\right\} f(x)dx, \qquad (1.5.1)$$

dado que

$$K_\nu^{(\rho)}\left\{y^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{4}s^2y^{-1}}; x\right\} = 2\pi^{1/2}s^{-1}\rho^{-1}x^\nu \mathcal{L}\left\{\tau^{\nu/\rho-1}e^{-s\tau^{-1/(2\rho)}}; x^\rho\right\}.$$

Esta última igualdad puede ser demostrada usando [36, p. 245] ó [67, p. 150].

Además, haciendo el cambio de variable ($y^{-1} = u$) obtenemos

$$\begin{aligned} H(s) &= \int_0^\infty y^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{1}{4}s^2y^{-1}}F(y)dy = \\ &= \mathcal{L}\left\{u^{-1/2}F(u^{-1}); 1/4s^2\right\}. \end{aligned}$$

Por otro lado, ya que $F(y) = K_\nu^{(\rho)}f(y) \simeq y^\gamma L(1/y)$, cuando $y \to 0^+$, entonces

$$u^{-1/2}F(u^{-1}) \simeq u^{-1/2-\gamma}L(u),$$

cuando $u \to \infty$.

Por lo tanto, utilizando un teorema abeliano para la transformación de Laplace (véase [32, p. 460]) conseguimos

$$H(s) \simeq \Gamma(1/2-\gamma)(2^{-1}s)^{2\gamma-1}L(4s^{-2}), \qquad (1.5.2)$$

cuando $s \to 0^+$.

Además de la igualdad de Parseval para la transformación de Laplace inferimos de (1.5.1)

$$\begin{aligned} H(s) &= 2\pi^{1/2}s^{-1}\rho^{-1}\int_0^\infty \mathcal{L}\left\{\tau^{\nu/\rho-1}e^{-s\tau^{-1/(2\rho)}};x^\rho\right\}x^\nu f(x)dx = \\ &= 2\pi^{1/2}s^{-1}\rho^{-1}\int_0^\infty y^{\nu/\rho-1}e^{-sy^{-1/(2\rho)}}\mathcal{L}\left\{x^\nu f(x);y^\rho\right\}dy, \end{aligned}$$

y haciendo el cambio de variable $y^{-1/(2\rho)}=u$, tenemos

$$H(s) = 2^2\pi^{1/2}s^{-1}\int_0^\infty e^{-su}d\alpha(u;f) \tag{1.5.3}$$

donde

$$\alpha(u;f) = \int_0^u t^{-2\nu-1}\mathcal{L}\left\{x^\nu f(x);t^{-2\rho^2}\right\}dt.$$

Combinando (1.5.2) y (1.5.3) deducimos

$$\int_0^\infty e^{-su}d\alpha(u;f) \simeq 2^{-2\gamma-1}\pi^{-1/2}\Gamma(1/2-\gamma)s^{2\gamma}L(4s^{-2}),$$

cuando $s\to 0^+$.

Por lo tanto recurriendo a [94, Theorem A] concluimos que, cuando $s\to 0^+$,

$$X(s) \simeq \frac{\Gamma(1/2-\gamma)}{\Gamma(-2\gamma)}2^{-2\gamma-1}\pi^{-1/2}s^{2\gamma}L(4s^{-2})\int_0^\infty e^{-u}g(e^{-u})u^{-2\gamma-1}du$$

siempre que $f(x)\geq 0$, para cada $x>0$, $\operatorname{Re}\gamma<0$, y siendo g una función de variación acotada en $[0,1]$. ■

A continuación, damos varios resultados, que nos van a permitir conociendo el comportamiento de la transformada en un punto, obtener comportamientos asintóticos para las funciones $\alpha(u; f)$ y $f(x)$.

Proposición I.5.2 *Sean $\gamma, \nu \in \mathbf{R}$, $\gamma < 0$ y $\nu > 0$. Supongamos que $f(x) \geq 0$, $x > 0$ y $f(x) \in L^1((0, \infty))$. Si*

$$F(y) = K_\nu^{(\rho)} f(y) \simeq y^\gamma L(1/y),$$

para $y \to 0^+$, entonces

$$\alpha(u; f) \simeq \pi^{-1/2} 2^{-2\gamma-1} \frac{\Gamma(1/2 - \gamma)}{\Gamma(-2\gamma)} u^{-2\gamma} L(4^{-1}u^2),$$

cuando $u \to \infty$, donde

$$\alpha(u; f) = \int_0^u t^{-2\nu-1} \mathcal{L}\left\{x^\nu f(x); t^{-2\rho^2}\right\} dt.$$

Demostración: Consideremos inicialmente la función $g(u)$ definida por

$$g(u) = \begin{cases} u^{-1} & , e^{-1} \leq u \leq 1 \\ 0 & , 0 \leq u \leq e^{-1} \end{cases}$$

Entonces, siguiendo la notación de la Proposición I.5.1, la función $X(s)$ se reduce a

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-su} g(e^{-su}) d\alpha(u; f) = \alpha(1/s; f).$$

Además, se tiene

$$\int_0^\infty e^{-u} g(e^{-u}) u^{-2\gamma-1} du = \int_0^1 u^{-2\gamma-1} du = -\frac{1}{2\gamma}.$$

Por lo tanto, de la Proposición I.5.1, se sigue que

$$\alpha(u;f) = X(1/s) \simeq \pi^{-1/2} 2^{-2\gamma-1} \frac{\Gamma(1/2-\gamma)}{\Gamma(1-2\gamma)} u^{-2\gamma} L(4^{-1}u^2),$$

cuando $u \to \infty$.

Teorema I.5.1 *Sean $\gamma, \nu \in \mathbf{R}$, $\gamma < 0$ y $\nu > 0$.*
Supongamos que $f(x) \geq 0$, $x > 0$, $f(x) \in L^1((0,\infty))$ y se cumplen las condiciones siguientes:

(i) $t^{-2\nu-1} \mathcal{L}\left\{x^\nu f(x); t^{-2\rho^2}\right\}$ es monótona creciente para t suficientemente grande,

(ii) $x^\nu f(x)$ es monótona creciente para t suficientemente grande.

Entonces $F(y) = K_\nu^{(\rho)} f(y) \simeq y^\gamma L(1/y)$, cuando $y \to 0^+$, implica

$$f(x) \simeq 2^{-2\gamma-1} \pi^{-1/2} \frac{\Gamma(1/2-\gamma)}{\Gamma(1-2\gamma)\Gamma((\nu-\gamma)/\rho^2)} x^{-\nu+(\nu-\gamma)/\rho^2} L(4x^{1/\rho^2}),$$

cuando $x \to \infty$.

Demostración: Asumamos que f satisface (i). Por ello

$$p(t) = t^{-2\nu-1} \mathcal{L}\left\{x^\nu f(x); t^{-2\rho^2}\right\}$$

es una función monótona creciente para t suficientemente grande.

Asimismo, por la Proposición I.5.2, tenemos

$$\int_0^u p(t)dt \simeq \pi^{-1/2} 2^{-2\gamma-1} \frac{\Gamma(1/2-\gamma)}{\Gamma(1-2\gamma)} u^{-2\gamma} L(4^{-1}u^2), \tag{1.5.4}$$

cuando $u \to \infty$.

Consideremos ahora $0 < \tau < 1$. Entonces

$$\int_0^{u-\tau u} p(t)dt \simeq \pi^{-1/2} 2^{-2\gamma-1} \frac{\Gamma(1/2-\gamma)}{\Gamma(1-2\gamma)} (u-\tau u)^{-2\gamma} L(4^{-1}(u-\tau u)^2), \tag{1.5.5}$$

cuando $u \to \infty$. Recordando de Karamata que L es de variación lenta si

$$\lim_{r\to\infty} \frac{L(cr)}{L(r)} = 1, \ \forall c > 0.$$

Podemos deducir de (1.5.4) y (1.5.5) que

$$\frac{\int_{u-\tau u}^{u} p(t)dt}{u^{-2\gamma} L(4^{-1}u^2)} \to \pi^{-1/2} 2^{-2\gamma-1} \frac{\Gamma(1/2-\gamma)}{\Gamma(1-2\gamma)} (1-(1-\tau)^{-2\gamma}),$$

cuando $u \to \infty$.

En tal caso, ya que $p(t)$ es creciente conseguimos

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{p(u)}{u^{-2\gamma-1} L(4^{-1}u^2)} \leq \frac{\pi^{-1/2}}{\tau} 2^{-2\gamma-1} \frac{\Gamma(1/2-\gamma)}{\Gamma(1-2\gamma)} (1-(1-\tau)^{-2\gamma}). \tag{1.5.6}$$

De una manera similar obtenemos

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{p(u)}{u^{-2\gamma-1} L(4^{-1}u^2)} \geq \frac{\pi^{-1/2}}{\tau} 2^{-2\gamma-1} \frac{\Gamma(1/2-\gamma)}{\Gamma(1-2\gamma)} ((1+\tau)^{-2\gamma}-1). \tag{1.5.7}$$

Luego, de (1.5.6) y (1.5.7) se infiere

$$p(u) \simeq -2\gamma 2^{-2\gamma-1} \pi^{-1/2} \frac{\Gamma(1/2-\gamma)}{\Gamma(1-2\gamma)} u^{-2\gamma-1} L(4^{-1}u^2),$$

cuando $u \to \infty$, o en otras palabras,

$$\mathcal{L}\{x^{\nu} f(x); u\} \simeq -2\gamma 2^{-2\gamma-1}\pi^{-1/2}\frac{\Gamma(1/2-\gamma)}{\Gamma(1-2\gamma)}u^{(\gamma-\nu)/\rho^2}L(4^{-1}u^{-1/\rho^2}), \tag{1.5.8}$$

cuando $u \to 0^+$.

Por tanto, procediendo como en la Proposición I.5.2 podemos deducir de (1.5.8) que

$$f(x) \simeq 2^{-2\gamma-1}\pi^{-1/2}\frac{\Gamma(1/2-\gamma)}{\Gamma(1-2\gamma)\Gamma((\nu-\gamma)/\rho^2)}x^{-\nu+(\nu-\gamma)/\rho^2}L(4x^{1/\rho^2}),$$

cuando $x \to \infty$.

En el caso de que f satisfaga la condición (ii) en vez de (i), la demostración es análoga. ■

Finalmente, resultados similares a los obtenidos en esta sección, para los comportamientos de $f(x)$ y $\alpha(x; f)$ cuando $x \to 0$ en función del comportamiento de $K_{\nu}^{(\rho)} f(y)$ cuando $y \to \infty$, pueden establecerse en virtud del correspondiente teorema dual de J. Karamata [57, p. 28].

I.6 La transformación $K_\nu^{(\rho)}$ sobre espacios L^p con pesos

Son numerosos los autores que han orientado su investigación hacia el estudio de operadores integrales sobre espacios L^p con peso, por ejemplo, P. Heywood y P. G. Rooney [49], S. A. Emara y H. P. Heinig ([37],[38]), J. J. Betancor y C. Jerez [10]. En esta sección nos dedicamos al estudio de la transformación $K_\nu^{(\rho)}$ sobre espacios L^p con pesos cuando tales pesos satisfacen ciertas propiedades de acotación. Los resultados obtenidos extienden y mejoran otros de S. A. Emara y H. P. Heinig ([37],[38]) para la K-transformación.

Nuestro estudio está asimismo basado en los trabajos de B. Muckenhoupt ([86], [87]) sobre la transformación integral de Fourier en espacios L^p con pesos.

Recordemos que la $K_\nu^{(\rho)}$- transformación viene dada por

$$\left(K_\nu^{(\rho)} f\right)(x) = \int_0^\infty Z_\rho^\nu(xt) f(t) dt,$$

donde las siguientes representaciones integrales del núcleo $Z_\rho^\nu(xt)$, nos serán de suma importancia, a saber,

$$Z_\rho^\nu(x) = \rho^{-1} x^\nu \int_0^\infty \tau^{\nu/\rho - 1} e^{-\tau^{-1/\rho} - x^\rho \tau} d\tau, \qquad (1.6.1)$$

y

$$Z_\rho^\nu(x) = \int_0^\infty \tau^{-\nu-1} e^{-x\tau-\tau^{-\rho}} d\tau. \tag{1.6.2}$$

A continuación establecemos algunas definiciones básicas.

En general, si X e Y son espacios de Banach y T es un operador lineal de $X_1 \subset X$ en Y, diremos que $T \in [X, Y]$, si T puede ser extendido como un operador continuo de X en Y.

Denotaremos L_w^p al conjunto de todas las funciones f medibles Lebesgue en $(0,\infty)$ tales que $wf \in L^p(0,\infty)$. El espacio L_w^p está dotado por la topología generada por la norma $\|.\|_{p,w}$ donde $\|f\|_{p,w} = \|wf\|_p$, $f \in L_w^p$. Además L_w^p es un espacio de Banach. Por p', q' se entenderá el conjugado de p y q, es decir, $1/p + 1/p' = 1$, $1/q + 1/q' = 1$.

Para una función g medible sobre $(0,\infty)$ se define la reordenación equimedible decreciente g^* de g por:

$$g^*(x) = \inf\{s : m\{t : |g(t)| > s\} < x\},$$

para $x > 0$, siendo m la medida de Lebesgue.

Dadas dos funciones medibles no negativas U y V definidas sobre $(0,\infty)$; U^* y $(1/V)^*$ las reordenaciones equimedibles de U y $1/V$; decimos que $(U,V) \in F^*_{p,q}$, para $1 < p, q < \infty$, si satisfacen:

$$\sup_{s>0} \left\{ \int_0^{1/s} U^*(t)^q dt \right\}^{1/q} \left\{ \int_0^s \left[(1/V)^* (t) \right]^{p'} dt \right\}^{1/p'} < \infty, \qquad (1.6.3)$$

cuando $1 < p \leq q < \infty$ y en el caso de $1 < q < p < \infty$,

$$\left\{ \int_0^\infty \left[\left(\int_0^{1/x} U^*(t)^q dt \right)^{1/q} \left(\int_0^x (1/V)^*(t)^{p'} dt \right)^{1/q'} \right]^r \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (1/V)^*(x)^{p'} dx \right\}^{1/r} < \infty, \qquad (1.6.4)$$

$$\left\{ \int_0^\infty \left[\left(\int_{1/x}^\infty \left[t^{-1/2} U^*(t) \right]^q dt \right)^{1/q} \left(\int_x^\infty \left[t^{-1/2} (1/V)^*(t) \right]^{p'} dt \right)^{1/q'} \right]^r \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left[x^{-1/2} (1/V)^*(x) \right]^{p'} dx \right\}^{1/r} < \infty \qquad (1.6.5)$$

cuando $1/r = 1/q - 1/p$. Si (1.6.3), (1.6.4) y (1.6.5) se verifican para U y $1/V$, entonces se dice que $(U,V) \in F_{p,q}$.

Puede comprobarse que (1.6.4) implica (1.6.3) para $1 < q < p < \infty$. Además, si $p = q$, (1.6.4) se reduce a (1.6.3), y en tal caso (1.6.4) implica (1.6.5) siempre que $p \neq 2$.

El siguiente resultado recogido por S. A. Emara y H. P. Heinig [38, Theorem 1 y Theorem 2] nos permitirá posteriormente analizar la transformación $K_\nu^{(\rho)}$ sobre los espacios L^p_w.

Proposición I.6.1 *Si* $T \in \left[L^1, L^\infty\right] \cap \left[L^2, L^2\right]$ *y* $(U, V) \in F^*_{p,q}$, *con* $1 < p, q < \infty$ *entonces* $T \in [L^p_V, L^q_U]$.

Después de esta ligera introducción demostramos una desigualdad normada ponderada para la $K_\nu^{(\rho)}$- transformada integral.

Teorema I.6.1 *Sean* $\rho > 0$ *y* $1 < p, q < \infty$. *Definamos* $U_\nu(x) = U(x)$ *y* $V_\nu(x) = V(x)$, *si* $\nu > 0$ *y* $U_\nu(x) = x^\nu U(x)$ *y* $V_\nu(x) = x^{-\nu} V(x)$ *para* $\nu < 0$, *siendo* U, V *funciones no negativas medibles definidas sobre* $(0, \infty)$. *Entonces* $K_\nu^{(\rho)} \in [L^p_V, L^q_U]$ *siempre que* $(U_\nu\,, V_\nu) \in F^*_{p,q}$.

Demostración: Para esta prueba consideraremos que f es una función simple, dado que las funciones simples son densas en L^p_V y con un argumento estándar de paso al límite, el resultado se prueba para $f \in L^p_V(0, \infty)$.

Primero, consideramos el caso $\nu < 0$.

De acuerdo con la representación integral (1.6.1) tenemos

$$\begin{aligned}
\left(K_\nu^{(\rho)} f\right)(x) &= \rho^{-1} \int_0^\infty (xt)^\nu f(t) \int_0^\infty \tau^{\nu/\rho - 1} e^{-\tau^{-1/\rho} - (xt)^\rho \tau} d\tau dt = \\
&= x^\nu \rho^{-1} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \tau^{\nu/\rho - 1} e^{-\tau^{-1/\rho} - (xt)^\rho \tau} d\tau \right) t^\nu f(t) dt = \\
&= x^\nu \left(\Lambda'_{\nu,\rho} g \right)(x),
\end{aligned}$$

donde $g(t) = t^\nu f(t)$ y

$$\left(\Lambda'_{\nu,\rho} g \right)(x) = \rho^{-1} \int_0^\infty g(t) \int_0^\infty \tau^{\nu/\rho - 1} e^{-\tau^{-1/\rho} - (xt)^\rho \tau} d\tau dt.$$

Nos proponemos probar que $\Lambda'_{\nu,\rho} \in \left[L^1, L^\infty\right] \cap \left[L^2, L^2\right]$.

Por la desigualdad de Hölder y del hecho de que f es nula fuera de $(0,a)$ para algún $a > 0$, se sigue que

$$\begin{aligned}
\left|\left(\Lambda'_{\nu,\rho} g\right)(x)\right| &\leq \rho^{-1} \cdot 2^{-\nu-1} \cdot \int_0^\infty t^\nu V_\nu(t) \left|f(t)\right| \cdot \\
&\quad \cdot \left(V_\nu(t)\right)^{-1} \int_0^\infty \tau^{\nu/\rho-1} e^{-\tau^{-1/\rho}-(xt)^\rho \tau} d\tau dt \leq \\
&\leq \left\|f\right\|_{p,V} \left(\int_0^a (1/V_\nu)^*(t)^{p'} \left|\int_0^\infty \tau^{\nu/\rho-1} e^{-\tau^{-1/\rho}} d\tau\right|^{p'} dt\right)^{1/p'},
\end{aligned}$$

como $\nu < 0$, se tiene que existe $C > 0$ tal que

$$\left|\int_0^\infty \tau^{\nu/\rho-1} e^{-\tau^{-1/\rho}} d\tau\right| < C,$$

y por tanto

$$\left|\left(\Lambda'_{\nu,\rho} g\right)(x)\right| \leq \left\|f\right\|_{p,V} \left(\int_0^a (1/V_\nu)^*(t)^{p'} dt\right)^{1/p'} < \infty,$$

ya que $(U_\nu, V_\nu) \in F^*_{p,q}$. Entonces, siempre que $\nu < 0$, se logra

$$\begin{aligned}
\left|\left(\Lambda'_{\nu,\rho} g\right)(x)\right| &\leq \int_0^\infty \left|g(t)\right| \cdot \left|\int_0^\infty \tau^{\nu/\rho-1} e^{-\tau^{-1/\rho}} e^{-(xt)^\rho \tau} d\tau\right| dt \leq \\
&\leq C_{\nu,\rho} \left\|g\right\|_1.
\end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$\left\|\Lambda'_{\nu,\rho} g\right\|_\infty \leq C \left\|g\right\|_1.$$

Veamos ahora que $\left\|\Lambda'_{\nu,\rho} g\right\|_2 \leq C \|g\|_2$.

Por la desigualdad de Minkowski y el teorema de Fubini obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\|\Lambda'_{\nu,\rho} g\right\|_2 &= \left\{\int_0^\infty \left|\Lambda'_{\nu,\rho} g(x)\right|^2 dx\right\}^{1/2} = \\
&= \left(\int_0^\infty \left|\int_0^\infty \tau^{\nu/\rho-1} e^{-\tau^{-1/\rho}} e^{-(xt)^\rho \tau} \int_0^\infty g(t) dt\, d\tau\right|^2 dx\right)^{1/2} \leq \\
&\leq C \int_0^\infty \tau^{\nu/\rho-1} e^{-\tau^{-1/\rho}} \left(\int_0^\infty \left|\int_0^\infty e^{-(xt)^\rho \tau} g(t) dt\right|^2 dx\right)^{1/2} d\tau.
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio $t^\rho = z$ queda

$$\left\|\Lambda'_{\nu,\rho} g\right\|_2 = C \int_0^\infty \tau^{\nu/\rho-1} e^{-\tau^{-1/\rho}} \left\|\mathcal{L}\left\{\rho^{-1} z^{1/\rho-1} g(z^{1/\rho}); x^\rho \tau\right\}\right\|_2 d\tau.$$

Además, si utilizamos que la transformación de Laplace es una aplicación lineal y continua de L^2 en L^2 y deshacemos el cambio, se sigue que existen $C_1, C_2 > 0$:

$$\left\|\Lambda'_{\nu,\rho} g\right\|_2 \leq C_1 \int_0^\infty \tau^{\nu/\rho-1} e^{-\tau^{-1/\rho}} \cdot \|g\|_2 \, d\tau \leq C_2 \|g\|_2 \,.$$

Luego se tiene $\left\|\Lambda'_{\nu,\rho} g\right\|_2 \leq C_{\nu,\rho} \cdot \|g\|_2$, dado que

$$\int_0^\infty \tau^{\nu/\rho-1} e^{-\tau^{-1/\rho}} < \infty,$$

para $\nu < 0$.

Por lo tanto $\Lambda'_{\nu,\rho} \in [L^1, L^\infty] \cap [L^2, L^2]$. Ahora bien, si $(U_\nu, V_\nu) \in F^*_{p,q}$, por la Proposición I.6.1 conseguimos

$$\left\{ \int_0^\infty \left| U(x) \left(K_\nu^{(\rho)} f \right)(x) \right|^q dx \right\}^{1/q} = \left\{ \int_0^\infty \left| U_\nu(x) \left(\Lambda'_{\nu,\rho} g \right)(x) \right|^q dx \right\}^{1/q} \leq$$
$$\leq C_{\nu,\rho} \left\{ \int_0^\infty |V_\nu(x) g(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} = C \, \|f\|_{p,V} \; .$$

De forma que hemos probado el teorema para el caso de que $\nu < 0$.

Si $\nu > 0$, usaremos la representación integral (1.6.2) de forma que

$$\left(K_\nu^{(\rho)} f \right)(x) = \int_0^\infty f(t) \int_0^\infty \tau^{-\nu-1} e^{-xt\tau - \tau^{-\rho}} d\tau dt.$$

Seguidamente, vemos que $K_\nu^{(\rho)} \in [L^1, L^\infty] \cap [L^2, L^2]$.

Procediendo como en el caso anterior podemos obtener que

$$\left\| K_\nu^{(\rho)} f \right\|_\infty \leq C \, \|f\|_1 \, ,$$

dado que $(U_\nu, V_\nu) \in F^*_{p,q}$.

Por la desigualdad de Minkowski y el teorema de Fubini, logramos

$$\left\| K_\nu^{(\rho)} f \right\|_2 \leq C \int_0^\infty \tau^{-\nu-1} e^{-\tau^{-\rho}} \left(\int_0^\infty \left| \int_0^\infty e^{-\frac{(xt)^2 \tau}{4}} f(t) dt \right|^2 dx \right)^{1/2} d\tau,$$

y ya que en este caso la transformación de Laplace es una aplicación lineal y continua de L^2 en L^2 tenemos

$$\left\| K_\nu^{(\rho)} f \right\|_2 \leq C \int_0^\infty \tau^{-\nu-1} e^{-\tau^{-\rho}} \, \|f\|_2 \, d\tau \leq C \, \|f\|_2 \, ,$$

siempre que $\nu > 0$.

Entonces $K_\nu^{(\rho)} \in [L^1, L^\infty] \cap [L^2, L^2]$. Nuevamente si $(U_\nu, V_\nu) \in F_{p,q}^*$, por la Proposición I.6.1 se consigue

$$\left\{ \int_0^\infty \left| U(x) \left(K_\nu^{(\rho)} f \right)(x) \right|^q dx \right\}^{1/q} \leq$$

$$\leq C \left\{ \int_0^\infty |V(x) f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} = C \, \|f\|_{p,V} \, .$$

Con esto concluye la demostración del Teorema I.6.1. ■

Observación I.6.1 *Nótese que hemos mejorado el Teorema 1 de [38] puesto que en este caso se tiene para mayor número de parámetros* ν $(\nu \in \mathbf{R})$ *y para una transformación más general.*

Por otra parte, el Teorema I.6.1 puede ser establecido también para $0 < q < p, \; p > 1$, si hacemos uso de la siguiente proposición que puede encontrarse en [37, p. 37]

Proposición I.6.2 *Dada* $T \in [L^1, L^\infty] \cap [L^2, L^2]$ *. Si* (U, V) *verifican (1.6.4)-(1.6.5) con* $0 < q < p, \; p > 1$ *entonces* $T \in [L_V^p, L_U^q]$*.*

Otra versión del Teorema I.6.1 puede formularse utilizando los trabajos de B. Muckenhoupt ([86],[87]) en los que, en sus estudios de desigualdades en norma ponderadas para la transformación de Fourier introdujo un tipo de funciones que denotó por $G_{p,q}$ y que está constituido por los pares de funciones no negativas (U,V) sobre $(0,\infty)$ verificando que si $q \leq p^{'}$

$$\left\{ \int_{x^{p'/q} U^*(x)^{p'} \geq Brx} U^*(x)^q dx \right\}^{1/q} \left\{ \int_{V(x)<r} V(x)^{-p^{'}} dx \right\}^{1/p^{'}} \leq A, \tag{1.6.6}$$

y si $q > p^{'}$

$$\left\{ \int_{U(x)<r} U(x)^q dx \right\}^{1/q} \left\{ \int_{x^{q/p'} [(1/V)^*(x)]^{\frac{q}{p-1}} > Brx} \left[(1/V)^* (x) \right]^{p^{'}} dx \right\}^{1/p^{'}} \leq A, \tag{1.6.7}$$

para todo $r > 0$ y ciertas constantes positivas A, B. En virtud de [86, Theorem 1] es conocido que las condiciones (1.6.6)-(1.6.7) son equivalentes a (1.6.3) para $1 < p \leq q < \infty$. Por consiguiente, del Teorema I.6.1 se sigue que si $1 < p \leq q < \infty$ y $(U_\nu, V_\nu) \in G_{p,q}$, donde U_ν y V_ν vienen definidas como en los teoremas anteriormente citados, entonces $K_\nu^{(\rho)} \in [L_V^p, L_U^q]$.

Para finalizar esta sección damos un teorema de tipo inverso al Teorema I.6.1.

Teorema I.6.2 *Sean* $1 < p \leq q < \infty$, $\rho > 0$ *y* U,V *funciones no negativas medibles definidas sobre* $(0,\infty)$.

(i) *Dados* $\nu < 0$, $U_\nu(x) = x^\nu U(x)$, $V_\nu(x) = x^{-\nu}V(x)$. *Si* $K_\nu^{(\rho)} \in [L_V^p, L_U^q]$ *y*

$$\int_0^s x^{\nu p'}(V(x))^{-p'}dx < \infty \tag{1.6.8}$$

para todo $s > 0$, *se tiene que* $(U_\nu, V_\nu) \in F_{p,q}$.

(ii) *Si* $\nu > 0$ *y* $K_\nu^{(\rho)} \in [L_V^p, L_U^q]$ *y*

$$\int_0^s x^{\frac{(\rho-1)}{\rho}\nu p'}(V(x))^{-p'}dx < \infty \tag{1.6.9}$$

para todo $s > 0$, *entonces* $(U, V) \in F_{p,q}$.

Demostración: Consideremos el caso $\nu < 0$.

En virtud de la representación integral (1.6.1) es fácil ver que

$$Z_\rho^\nu(xt) \geq C_{\nu,\rho} \cdot (xt)^\nu \tag{1.6.10}$$

para cierta constante positiva $C_{\nu,\rho}$.

Definimos $f_s(x) = x^{\nu/(p-1)}V(x)^{-p'}\chi_{(0,s)}(x)$, para todo $s > 0$, donde $\chi_{(0,s)}$ denota la función característica sobre el intervalo $(0, s)$. Después de unos simples cálculos, podemos escribir que

$$f_s(x) = x^{-\nu}(V_\nu(x))^{-p'}\chi_{(0,s)}(x), x > 0. \tag{1.6.11}$$

Veamos que $f_s \in L_V^p$. De acuerdo con (1.6.11) tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (V(x))^p(f_s(x))^p dx &= \int_0^s (x^{-\nu}V(x))^{-p'}dx = \\ &= \int_0^s (V_\nu(x))^{-p'}dx,\end{aligned}$$

esto es,

$$\|f_s\|_{p,V} \leq \left(\int_0^s (V_\nu(t))^{-p'} dt \right)^{1/p}. \tag{1.6.12}$$

Entonces $f_s \in L^p_V$, $\forall s$, siempre que (1.6.8) se satisfaga.

Por otro lado, como $K_\nu^{(\rho)} \in [L^p_V, L^q_U]$ existe una constante $C^*_{\nu,\rho} > 0$ tal que

$$\left\| K_\nu^{(\rho)} f \right\|_{q,U} \leq C^*_{\nu,\rho} \|f\|_{p,V},$$

para $f \in L^p_V$. En particular para $f = f_s$, logramos que

$$\left\| K_\nu^{(\rho)} f_s \right\|_{q,U} \leq C^*_{\nu,\rho} \|f_s\|_{p,V}, \tag{1.6.13}$$

para todo $s > 0$.

Por definición tenemos

$$\left\| K_\nu^{(\rho)} f_s \right\|_{q,U} = \int_0^\infty \left| U(x) \int_0^\infty Z_\rho^\nu(xt) f_s(t) dt \right|^q dx,$$

y utilizando (1.6.10) obtenemos

$$\left\| K_\nu^{(\rho)} f_s \right\|_{q,U} \geq (C_{\nu,\rho})^q \int_0^{1/s} (U_\nu(x))^q dx \left(\int_0^s (V_\nu(t))^{-p'} dt \right)^q \tag{1.6.14}$$

Luego, combinando (1.6.12), (1.6.13) y (1.6.14) se consigue

$$C_{\nu,\rho} \left(\int_0^{1/s} (U_\nu(x))^q dx \right)^{1/q} \cdot \int_0^s (V_\nu(t))^{-p'} dt \leq C^*_{\nu,\rho} \left(\int_0^s (V_\nu(t))^{-p'} dt \right)^{1/p},$$

de donde se deduce que $(U_\nu, V_\nu) \in F_{p,q}$.

El resultado para $\nu > 0$ se sigue de forma similar. ∎

I.7 La transformación integral de Krätzel $\mathcal{L}_{\alpha}^{(\rho)}$

Recordemos que la transformación (1.1.2) fue objeto de un amplio estudio en ([63], [65] y [66]) y posteriormente por J. J. Betancor y J. Barrios en ([7],[8]). En concreto, J. J. Betancor y J. Barrios establecieron que la función que comparece en el núcleo de (1.1.2) es solución de una ecuación diferencial de orden fraccionario. En esta sección se demuestra que es solución de cuatro ecuaciones diferenciales de orden fraccionario.

Proposición I.7.1 *Si $\rho \geq 1$ y $\alpha > -1 + 1/\rho$ entonces $f = \lambda_{\alpha}^{(\rho)}(z)$ es solución de las siguientes ecuaciones de orden fraccionario*

$$z^{\rho\alpha-1} D_k^{\rho-1} z^{1-\rho\alpha} D f = -f, \tag{1.7.1}$$

$$z^{1-\rho} D z^{\rho(\alpha+1)-1} D_k^{\rho-1} z^{-\rho\alpha} f = -f, \tag{1.7.2}$$

$$z^{\rho\alpha-1} \Big((\rho\alpha - 1) D_k^{\rho-1} z^{-1} D_k^{\rho-1} z^{1-\rho\alpha} D - D_k^{2\rho-1} z^{1-\rho\alpha} D \Big) f = f, \tag{1.7.3}$$

$$(\rho\alpha+\rho-1-z) z^{\rho\alpha-1} \Big((\rho\alpha + \rho - 1) D_k^{\rho-1} z^{-1} D_k^{\rho-1} z^{-\rho\alpha} - D_k^{2\rho-1} z^{-\rho\alpha} \Big) f = f, \tag{1.7.4}$$

siendo D_k^{ρ} la derivada fraccionaria de Weyl ([61],[103]).

Demostración: Probaremos (1.7.1) y (1.7.2). Las igualdades (1.7.3) y (1.7.4) se demuestran de forma similar.

Por un simple cálculo obtenemos

$$D\lambda_\alpha^{(\rho)}(z) = C_{\alpha,\rho} \cdot z^{\rho\alpha-1} \int_1^\infty (\rho\alpha - zt) e^{-zt} (t^\rho - 1)^{\alpha-(1/\rho)} dt$$

$$z^{1-\rho\alpha} D\lambda_\alpha^{(\rho)}(z) = C_{\alpha,\rho} \cdot \int_1^\infty \frac{d}{dt} \left((1-\rho\alpha) \frac{e^{-zt}}{z} + t e^{-zt} \right) (t^\rho - 1)^{\alpha-(1/\rho)} dt$$

donde $C_{\alpha,\rho} = \frac{(2\pi)^{(\rho-1)/2} \rho^{1/2-\rho\alpha}}{\Gamma(\alpha+1-(1/\rho))}$. Si integramos por partes resulta

$$z^{1-\rho\alpha} D\lambda_\alpha^{(\rho)}(z) =$$

$$= -C_{\alpha,\rho} \cdot \int_1^\infty \left((1-\rho\alpha) \frac{e^{-zt}}{z} + t e^{-zt} \right) \cdot \rho t^{\rho-1} \left(\alpha - \frac{1}{\rho} \right) (t^\rho - 1)^{\alpha - \frac{1}{\rho} - 1} dt =$$

$$= C_{\alpha,\rho} \cdot \int_1^\infty (\rho\alpha - 1) \frac{e^{-zt}}{z} \rho t^{\rho-1} (\alpha - (1/\rho)) (t^\rho - 1)^{\alpha-(1/\rho)-1} dt -$$

$$- C_{\alpha,\rho} \cdot \int_1^\infty t e^{-zt} \rho t^{\rho-1} (\alpha - (1/\rho)) (t^\rho - 1)^{\alpha-(1/\rho)-1} dt,$$

de nuevo, integrando por partes,

$$z^{1-\rho\alpha} D\lambda_\alpha^{(\rho)}(z) = C_{\alpha,\rho} \cdot (\rho\alpha - 1) \int_1^\infty e^{-zt} (t^\rho - 1)^{\alpha-(1/\rho)} dt -$$

$$- C_{\alpha,\rho} \cdot \int_1^\infty t e^{-zt} \rho t^{\rho-1} (\alpha - (1/\rho)) (t^\rho - 1)^{\alpha-(1/\rho)-1} dt.$$

Aplicando $D_k^{\rho-1}$ y usando que $D_k^{\rho-1} \left(e^{-zt} \right) = t^{\rho-1} e^{-zt}$ tenemos

$$D_k^{\rho-1} z^{1-\rho\alpha} D\lambda_\alpha^{(\rho)}(z) = C_{\alpha,\rho} \cdot (\rho\alpha - 1) \int_1^\infty t^{\rho-1} e^{-zt} (t^\rho - 1)^{\alpha-(1/\rho)} dt -$$

$$- C_{\alpha,\rho} \cdot \int_1^\infty t^\rho e^{-zt} \rho t^{\rho-1} (\alpha - (1/\rho)) (t^\rho - 1)^{\alpha-(1/\rho)-1} dt.$$

Por tanto, integrando por partes el segundo sumando

$$D_k^{\rho-1} z^{1-\rho\alpha} D\lambda_\alpha^{(\rho)}(z) = C_{\alpha,\rho}\cdot(\rho\alpha-1)\int_1^\infty t^{\rho-1}e^{-zt}(t^\rho-1)^{\alpha-\frac{1}{\rho}}dt-$$

$$-C_{\alpha,\rho}\cdot\int_1^\infty \left(\rho t^{\rho-1}e^{-zt}-zt^\rho e^{-zt}\right)(t^\rho-1)^{\alpha-(1/\rho)}dt=$$

$$\begin{aligned}
&= C_{\alpha,\rho}\cdot\int_1^\infty \left((\rho\alpha+\rho-1)t^{\rho-1}-zt^\rho\right)e^{-zt}(t^\rho-1)^{\alpha-(1/\rho)}dt= \\
&= -C_{\alpha,\rho}\cdot z\left(\int_1^\infty t^\rho e^{-zt}(t^\rho-1)^{\alpha-\frac{1}{\rho}}dt-\int_1^\infty e^{-zt}(t^\rho-1)^{\alpha+1-\frac{1}{\rho}}dt\right)= \\
&= -C_{\alpha,\rho}\cdot z\int_1^\infty e^{-zt}(t^\rho-1)^{\alpha-(1/\rho)}dt,
\end{aligned}$$

y la demostración de (1.7.1) ha concluido.

Probemos, ahora (1.7.2).

De acuerdo con (1.7.1) tenemos que

$$z^{\rho\alpha-1}D_k^{\rho-1}\left(z^{1-\rho\alpha}D\lambda_\alpha^{(\rho)}(z)\right)=-\lambda_\alpha^{(\rho)}(z).$$

Entonces por (1.2.4) se sigue que

$$z^{\rho\alpha-1}D_k^{\rho-1}\left(z^{1-\rho\alpha}\left(\frac{z}{\rho}\right)^{\rho-1}\lambda_{\alpha-1}^{(\rho)}(z)\right)=\lambda_\alpha^{(\rho)}(z),$$

lo que nos lleva a

$$\rho^{1-\rho}z^{\rho\alpha-1}D_k^{\rho-1}\left(z^{-\rho(\alpha-1)}\lambda_{\alpha-1}^{(\rho)}(z)\right)=\lambda_\alpha^{(\rho)}(z).$$

Tomando $\alpha+1$ en vez de α, conseguimos

$$\rho^{1-\rho}z^{\rho\alpha+\rho-1}D_k^{\rho-1}\left(z^{-\rho\alpha}\lambda_\alpha^{(\rho)}(z)\right)=\lambda_{\alpha+1}^{(\rho)}(z),$$

es decir,

$$D_k^{\rho-1}\left(z^{-\rho\alpha}\lambda_\alpha^{(\rho)}(z)\right)=\rho^{\rho-1}z^{1-\rho\alpha-\rho}\lambda_{\alpha+1}^{(\rho)}(z)=\rho^{\rho-1}z^{1-\rho(\alpha+1)}\lambda_{\alpha+1}^{(\rho)}(z),$$

luego

$$D\left(z^{\rho(\alpha+1)-1}D_k^{\rho-1}\left(z^{-\rho\alpha}\lambda_\alpha^{(\rho)}(z)\right)\right)=\rho^{\rho-1}D\lambda_{\alpha+1}^{(\rho)}(z).$$

Además, en virtud de (1.2.4) sabemos que

$$D\lambda_{\alpha+1}^{(\rho)}(z)=-\left(\frac{z}{\rho}\right)^{\rho-1}\lambda_\alpha^{(\rho)}(z),$$

de donde se sigue que

$$D\left(z^{\rho(\alpha+1)-1}D_k^{\rho-1}\left(z^{-\rho\alpha}\lambda_\alpha^{(\rho)}(z)\right)\right)=-z^{\rho-1}\lambda_\alpha^{(\rho)}(z),$$

lo que nos permite obtener

$$z^{1-\rho}Dz^{\rho(\alpha+1)-1}D_k^{\rho-1}z^{-\rho\alpha}\lambda_\alpha^{(\rho)}(z)=-\lambda_\alpha^{(\rho)}(z).$$

■

Capítulo II

La transformación $K_\nu^{(\rho)}$ en sentido distribucional

II.1 Introducción y preliminares

A. H. Zemanian realizó un amplio estudio de la transformación de Laplace y Meijer, en espacios de distribuciones ([124],[127]). Más tarde, E. Krätzel, introdujo la $K_\nu^{(\rho)}$- transformación, que generaliza a la de Meijer, y en una serie de artículos, la investigó en sentido clásico ([67],[68]). En 1985, G. L. N. Rao y L. Debnath estudiaron la $K_\nu^{(\rho)}$ transformación sobre ciertos espacios de distribuciones por el método del núcleo [93]. Asimismo, J. Rodríguez [95] estudia la misma transformación por el método del núcleo sobre otro espacio de distribuciones. Recientemente, en [59] es tratada la citada transformación por medio del método del operador adjunto sobre espacios de funciones generalizadas. En este capítulo se estudia la $K_\nu^{(\rho)}$ transformación en espacios de distribuciones de soporte compacto por el método del núcleo y se establecen teoremas de analiticidad, acotación y inversión para la transformación de Krätzel generalizada $K_\nu^{(\rho)}$.

A efectos de una mejor lectura recordamos algunas definiciones y propiedades que nos serán de utilidad en el trabajo abordado en los próximos párrafos.

Por $\mathcal{E}(I)$ denotaremos el conocido espacio de funciones infinitamente diferenciables $\phi(t)$, $t \in I = (0,\infty)$, tales que para todo compacto K tenemos

$$\gamma_k(\phi) = \sup_{t\in K} \left| \frac{d^k}{dt^k}\phi(t) \right| < \infty,$$

para $k \in \mathbf{N}$. Por $\mathcal{E}'(I)$ denotamos el espacio dual de $\mathcal{E}(I)$. Además por $\mathcal{D}(I)$, $\mathcal{D}'(I)$ denotamos a los conocidos espacios de funciones y distribuciones, cuyas definiciones y principales propiedades pueden encontrarse en [107], [123] y [127].

En [59] podemos ver que

$$\frac{d^k}{dx^k} Z_\rho^\nu(x) = (-1)^k Z_\rho^{\nu-k}(x) \tag{2.1.1}$$

De acuerdo con (2.1.1) y el comportamiento asintótico de $Z_\rho^\nu(x)$, se deduce que para cierta constante positiva α_1 y $k \in \mathbf{N}$, se verifica:

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} (Z_\rho^\nu(x)) \right| \leq \alpha_1 \cdot x^{(2\nu-\rho)/(2\rho+2)} e^{-x^{\rho/(\rho+1)}}, \tag{2.1.2}$$

para todo $x \in K$, K compacto y $\nu \in \mathbf{C}$.

Además en virtud de [67] conocemos que si $\rho \in \mathbf{N}$,

$$A_{\rho,\nu} Z_\rho^\nu(x) = (-1)^\rho \, Z_\rho^\nu(x) \tag{2.1.3}$$

donde

$$A_{\rho,\nu} = -\rho^{-1} x^{\nu-\rho+1} \frac{d}{dx} \, x^{\rho-\nu} \frac{d^\rho}{dx^\rho}$$

Por otra parte, denotamos por $B_{\rho,\nu,k}$, a

$$B_{\rho,\nu,k} = C_1 \cdot y^{-\rho k-1} B_{\rho,\nu}^k$$

siendo

$$B_{\rho,\nu} = x^{-\nu+\rho+1} \frac{d}{dx} \, x^{\rho+\nu} \frac{d^\rho}{dx^\rho}$$

y

$$C_1 = \frac{(\rho k)^{\rho k-(2\nu-\rho)/(2\rho+2)-1/(\rho+1)+1} \rho}{\Gamma\left(\rho k - \frac{(2\nu-\rho)}{2\rho+2} - \frac{1}{\rho+1} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\rho k - \frac{(2\nu-\rho)}{2\rho+2} - \frac{1}{\rho+1} + 1 + \nu}{\rho}\right)}. \tag{2.1.4}$$

Por último, recordemos que por (1.2.1) la transformada de Mellin de Z_ρ^ν viene dada por,

$$\mathcal{M}\left\{Z_\rho^\nu(x)\right\}(s)=\int_0^\infty x^{s-1}Z_\rho^\nu(x)dx=\frac{1}{\rho}\Gamma(s)\Gamma\left(\frac{s+\nu}{\rho}\right), \qquad (2.1.5)$$

siempre que $\operatorname{Re} s+\min(0,\operatorname{Re}\nu)>0$.

II.2 La transformación generalizada $K_\nu^{(\rho)}$ sobre $\mathcal{E}'(I)$

Para definir esta transformación por el método del núcleo, vemos inicialmente que $Z_\rho^\nu\in\mathcal{E}(I)$.

Lema II.2.1 *Dadas $\nu\in\mathbf{C}$ y $\rho\in\mathbf{R}$ se tiene que $Z_\rho^\nu(x)\in\mathcal{E}(I)$, $x>0$.*

Demostración: La función Z_ρ^ν es infinitamente diferenciable en virtud de (2.1.1) y la acotación con la seminorma γ_k se sigue de (2.1.2). ∎

Una vez establecido este lema estamos en condiciones de definir la $K_\nu^{(\rho)}$ generalizada por:

Definición II.2.1 *Sea $\nu\in\mathbf{C}$ y $\rho\in\mathbf{R}$. Para cada $f\in\mathcal{E}'(I)$ definimos la transformación $K_\nu^{(\rho)}$ generalizada por la relación*

$$F(x)=\left(K_\nu^{(\rho)}f\right)(x)=< f(t),Z_\rho^\nu(xt)> \qquad (2.2.1)$$

Además si f una función absolutamente localmente integrable, entonces la transformada generalizada de f se reduce a la clásica $K_\nu^{(\rho)}$-transformación.

Proposición II.2.1 *Sean $\nu \in \mathbf{C}$ y $\rho \in \mathbf{N}$. Los operadores $A_{\rho,\nu}$ y $B_{\rho,\nu}$ definen aplicaciones lineales y continuas de $\mathcal{E}(I)$ en sí mismo.*

Demostración: Lo probaremos para $A_{\rho,\nu}$, ya que para $B_{\rho,\nu}$ se sigue un procedimiento similar. Dado $\rho \in \mathbf{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned} A_{\rho,\nu}\phi(t) &= -\rho^{-1}t^{\nu-\rho+1}\frac{d}{dt}\,t^{\rho-\nu}\frac{d^\rho}{dt^\rho}\phi(t) = \\ &= -\rho^{-1}t^{\nu-\rho+1}\left((\rho-\nu)\cdot t^{\rho-\nu-1}\frac{d^\rho}{dt^\rho} + t^{\rho-\nu}\frac{d^{\rho+1}}{dt^{\rho+1}}\right)\phi(t) = \\ &= -\rho^{-1}(\rho-\nu)\cdot\frac{d^\rho}{dt^\rho}\phi(t) - \rho^{-1}t\frac{d^{\rho+1}}{dt^{\rho+1}}\phi(t), \end{aligned}$$

y aplicando la seminorma γ_k, $k \in \mathbf{N}$,

$$\gamma_k(A_{\rho,\nu}\phi) = \sup_{t\in K}\left|\frac{d^k}{dt^k}\left(A_{\rho,\nu}\phi(t)\right)\right| \le C_{\rho,\nu,K}\cdot\sum_{j=1}^{\rho+1}\gamma_{k+j}(\phi),$$

para cada $\phi \in \mathcal{E}(I)$. ■

Definimos el operador generalizado $A^*_{\rho,\nu}$ sobre $\mathcal{E}'(I)$ como el operador adjunto de $A_{\rho,\nu}$, este es,

$$< A^*_{\rho,\nu}f,\phi > = < f, A_{\rho,\nu}\phi >, \tag{2.2.2}$$

para $f \in \mathcal{E}'(I)$ y $\phi \in \mathcal{E}(I)$. Esta definición nos permite establecer:

Proposición II.2.2 *$A^*_{\rho,\nu}$ es una aplicación lineal y continua de $\mathcal{E}'(I)$ en sí mismo. Nótese que lo mismo ocurre para el operador $B_{\rho,\nu}$.*

Demostración: Se sigue de (2.2.2) y de la Proposición II.2.1. ∎

Una vez visto estas proposiciones, establecemos algunas propiedades para la transformación $K_\nu^{(\rho)}$ generalizada, a saber, analiticidad, acotación y reglas de cálculo operacional.

Proposición II.2.3 *Sea $f \in \mathcal{E}'(I)$. Si $F(x)$ denota la transformada generalizada $K_\nu^{(\rho)}$ de f, entonces $F(x)$ es infinitamente diferenciable en $(0,\infty)$ y*

$$\frac{d^r}{dx^r}F(x) =< f(t), \frac{\partial^r}{\partial x^r} Z_\rho^\nu(xt) >, \qquad x > 0,\, r \in \mathbf{N}.$$

Demostración: Consideremos h un incremento arbitrario en $x > 0$. Asumimos sin pérdida de generalidad que $0 < |h| < (x/2)^{\rho/(\rho+1)}$.

Operando obtenemos que

$$\frac{F(x+h) - F(h)}{h} =< f(t), \frac{1}{h}\Big(Z_\rho^\nu(t(x+h)) - Z_\rho^\nu(tx)\Big) > . \qquad (2.2.3)$$

Entonces debemos ver que

$$\varphi_h(x,t) = \frac{1}{h}\Big(Z_\rho^\nu(t(x+h)) - Z_\rho^\nu(tx)\Big) - \frac{\partial}{\partial x} Z_\rho^\nu(xt) \to 0$$

cuando $h \to 0$, en el sentido de convergencia en $\mathcal{E}(I)$, y el resultado para $k = 1$ se obtendrá inmediatamente de (2.2.3) y la continuidad de $f(t)$.

Para cada $r \in \mathbf{N}$ podemos escribir

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^r}{\partial t^r}\varphi_h(x,t) &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\int_x^u \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^r}{\partial t^r}Z_\rho^\nu(ty)\right)dydu = \\
&= \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\int_x^u \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(y^r\frac{d^r}{d(ty)^r}Z_\rho^\nu(ty)\right)dydu = \\
&= \frac{1}{h}\int_x^{x+h}\int_x^u \Bigg(r(r-1)y^{r-2}\frac{d^r}{d(ty)^r}Z_\rho^\nu(ty) + \\
&\quad +2r\,y^{r-1}t\,\frac{d^{r+1}}{d(ty)^{r+1}}Z_\rho^\nu(ty) + y^r t^2\frac{d^{r+2}}{d(ty)^{r+2}}Z_\rho^\nu(ty)\Bigg)\,dydu.
\end{aligned}$$

En virtud de (2.1.2), dada $t \in K$, K compacto, $y > x/2$, se deduce que existe una constante positiva C tal que

$$\left|\frac{d^{r+j}}{d(ty)^{r+j}}(Z_\rho^\nu(ty))\right| \le C(yt)^{(2\nu-\rho)/(2\rho+2)}\cdot e^{-(tx/2)^{\rho/\rho+1}},$$

para $r, j \in \mathbf{N}$, consiguiéndose,

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial t^r}\varphi_h(x,t)\right| \le C\cdot t^{(2\nu-\rho)/(2\rho+2)}\cdot e^{-(tx/2)^{\rho/\rho+1}}.$$

$$\begin{aligned}
\cdot\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\int_x^u \left(r(r-1)y^{r-2} + rty^{r-1} + t^2y^r\right)y^{(2\nu-\rho)/(2\rho+2)}dydu \le \\
\le C\cdot e^{-(tx)^{\rho/\rho+1}/2},
\end{aligned}$$

para toda $t \in K$ y $0 < |h| < (x/2)^{\rho/(\rho+1)}$.

Luego, dado $\epsilon > 0$, existe $t_0 \in K = [a,b]$ tal que

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial t^r}\varphi_h(x,t)\right| < \epsilon,$$

para $t > t_0$ y $0 < |h| < (x/2)^{\rho/(\rho+1)}$.

Además, para cada $t \in [a, t_0]$ tenemos

$$\left|\frac{\partial^r}{\partial t^r}\varphi_h(x,t)\right| \leq C \cdot \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\int_x^u \left(y^{r-2} + y^{r-1}t + y^r t^2\right) dydu\right|$$

y por tanto

$$\frac{\partial^r}{\partial t^r}\varphi_h(x,t) \to 0,$$

cuando $h \to 0$ uniformemente en $t \in [a, t_0]$.

Por todo ello se concluye que $\gamma_r(\varphi_h(x,t)) \to 0$ cuando $h \to 0$.

La demostración finaliza procediendo por inducción. ∎

Proposición II.2.4 *Dados $f \in \mathcal{E}'(I)$ y $F(x) = \left(K_\nu^{(\rho)} f\right)(x)$ para $x > 0$, se tiene*

$$|F(x)| \leq C \cdot x^{r+(2\nu-\rho)/(2\rho+2)} \cdot e^{-\alpha\, x^{\rho/(\rho+1)}},\ x > 0,$$

siendo C, α constantes positivas y $r \in \mathbf{N}$.

Demostración: Sabemos por [127, Theorem 1.8-1, p.18] que existe $r \in \mathbf{N}$ y $C > 0$ tal que

$$|F(x)| \leq C \cdot \max_{0 \leq k \leq r} \gamma_k(Z_\rho^\nu(xt)),$$

para todo $x > 0$.

Asimismo, por el comportamiento asintótico dado en (2.1.2) logramos que para cada K compacto,

$$|F(x)| \leq C \max_{0\leq k\leq r} \sup_{t\in K} \left| x^k \frac{d^k}{d(xt)^k}(Z_\rho^\nu(xt)) \right| \leq$$

$$\leq C \max_{0\leq k\leq r} \sup_{t\in K} \left| x^k (xt)^{(2\nu-\rho)/(2\rho+2)} e^{-(xt)^{\rho/(\rho+1)}} \right| \leq$$

$$\leq C \cdot x^{r+(2\nu-\rho)/(2\rho+2)} \cdot \max_{0\leq k\leq r} \sup_{t\in K} \left| t^{(2\nu-\rho)/(2\rho+2)} e^{-(xt)^{\rho/(\rho+1)}} \right| \leq$$

$$\leq C \cdot x^{r+(2\nu-\rho)/(2\rho+2)} e^{-\alpha x^{\rho/(\rho+1)}}.$$

■

La siguiente proposición, permite obtener una fórmula de cálculo operacional para la transformada generalizada $K_\nu^{(\rho)}$, la cual involucra al operador $A_{\rho,\nu}^*$, $\rho \in \mathbf{N}$ y que será útil para resolver ciertas ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales.

Proposición II.2.5 *Sea P un polinomio, si $f \in \mathcal{E}'(I)$ se cumple que*

$$\left(K_\nu^{(\rho)} P(A_{\rho,\nu}^*) f\right)(x) = P((-x)^\rho) \left(K_\nu^{(\rho)} f\right)(x),$$

para $x > 0$.

Demostración: De acuerdo con la Proposición II.2.1 y (2.1.3) podemos escribir

$$
\begin{aligned}
\left(K_\nu^{(\rho)} P(A^*_{\rho,\nu}) f\right)(x) &= < P(A^*_{\rho,\nu}) f(t), Z_\rho^\nu(xt) >= \\
&= < f(t), P(A_{\rho,\nu}) Z_\rho^\nu(xt) >= \\
&= < f(t), P((-x)^\rho) Z_\rho^\nu(xt) >= \\
&= P((-x)^\rho) \left(K_\nu^{(\rho)} f\right)(x),
\end{aligned}
$$

para $x > 0$. ■

A continuación, establecemos un primer teorema de inversión para la $K_\nu^{(\rho)}$- transformada generalizada usando un procedimiento similar al empleado por S. P. Malgonde y R. K. Saxena en [74]. Para ello, previamente necesitamos obtener tres lemas:

Lema II.2.2 *Dada $f \in \mathcal{E}'(I)$ se tiene que*

$$\int_0^\infty x^{-s} < f(t), Z_\rho^\nu(xt) > dx =< f(t), \int_0^\infty x^{-s} Z_\rho^\nu(xt) dx > . \quad (2.2.4)$$

Demostración: Sea $N \in \mathbf{N}$. En primer lugar veremos que

$$\int_0^N x^{-s} < f(t), Z_\rho^\nu(xt) > dx =< f(t), \int_0^N x^{-s} Z_\rho^\nu(xt) dx > . \quad (2.2.5)$$

Si $\{x_{r,l}\}_{r=0}^{l}$ es una partición del intervalo $[0,N]$ siendo $d_l = x_{r,l} - x_{r-1,l}$ para $r = 1,2,\ldots,l$; entonces podemos escribir

$$\int_0^N x^{-s} < f(t), Z_\rho^\nu(xt) > dx = \lim_{l\to\infty} d_l \cdot \sum_{r=0}^{l} x_{r,l}^{-s} < f(t), Z_\rho^\nu(x_{r,l}t) >$$

y

$$d_l \cdot \sum_{r=0}^{l} x_{r,l}^{-s} < f(t), Z_\rho^\nu(x_{r,l}t) >=< f(t), d_l \cdot \sum_{r=0}^{l} x_{r,l}^{-s} Z_\rho^\nu(x_{r,l}t) > .$$

En consecuencia, establecemos (2.2.5) si demostramos

$$\lim_{l\to\infty} d_l \cdot \sum_{r=0}^{l} x_{r,l}^{-s} \cdot Z_\rho^\nu(x_{r,l}t) = \int_0^N x^{-s} Z_\rho^\nu(xt)dx \tag{2.2.6}$$

donde el límite se entiende en el sentido de la convergencia en $\mathcal{E}(I)$.

Ya que la función

$$g(t,x) = \begin{cases} x^{-s+k} \frac{d^k}{d(xt)^k}\Big(Z_\rho^\nu(xt)\Big) & \text{si } t \in [a,b] \text{ y } x \in (0,N] \\ 0 & \text{si } t \in [a,b] \text{ y } x = 0 \end{cases}$$

con $0 < a < b < \infty$, es uniformemente continua sobre $(t,x) \in [a,b] \times [0,N]$, tenemos que si $\epsilon > 0$ y $m \in \mathbf{N}$ existe $l_0 \in \mathbf{N}$ tal que

$$\sup_{t\in K} \left| \frac{d^k}{dt^k} \left\{ d_l \sum_{r=0}^{l} x_{r,l}^{-s} Z_\rho^\nu(x_{r,l}t) - \int_0^N x^{-s} Z_\rho^\nu(xt)dx \right\} \right| < \epsilon$$

para $l > l_0$. Es decir, obtenemos (2.2.6).

Asimismo utilizando (2.1.2), para $m, k \in \mathbf{N}$,

$$\left| \frac{d^k}{dt^k} \int_N^\infty x^{-s} Z_\rho^\nu(xt)dx \right| \leq$$

$$\leq C \cdot t^{(2\nu-\rho)/(2\rho+2)} \int_N^\infty x^{-\operatorname{Re} s+(2\nu-\rho)/(2\rho+2)} e^{-(xt)^{\rho/(\rho+1)}} dx \to 0, \quad (2.2.7)$$

uniformemente en $t \in K$, cuando $N \to \infty$, siendo C una constante positiva.

Además de la Proposición II.2.4 obtenemos que

$$\left| \int_N^\infty x^{-s} < f(t), Z_\rho^\nu(xt) > dx \right| \leq C \int_N^\infty x^{-s+r+(2\nu-\rho)/(2\rho+2)} e^{-\alpha x^{\rho/(\rho+1)}} dx,$$

siendo α una constante positiva que depende de ρ.

Luego

$$\lim_{N\to\infty} \int_N^\infty x^{-s} < f(t), Z_\rho^\nu(xt) > dx = 0. \quad (2.2.8)$$

Ahora, si combinamos (2.2.5), (2.2.7) y (2.2.8) logramos (2.2.4). ■

Lema II.2.3 *Sea $\phi \in \mathcal{D}(I)$ y denotemos*

$$\psi(s) = \int_0^\infty y^{-s} \phi(y) dy.$$

Entonces

$$\int_{-R}^R < f(u), u^{\sigma+iw-1} > \psi(\sigma+iw) dw =< f(u), \int_{-R}^R u^{\sigma+iw-1} \psi(\sigma+iw) dw >, \quad (2.2.9)$$

con $\sigma > 0$ y $R > 0$.

Demostración: Nótese que si $\sigma > 0$ se tiene que $u^{\sigma+iw-1} \in \mathcal{E}(I)$. Puesto que por su definición $\psi(s)$ es una función entera en $\mathbf{C}$, se infiere que para cada $k \in \mathbf{N}$ y $M_1 > 0$,

$$\left|\frac{d^k}{du^k}\left(\int_{-R}^{R} u^{\sigma+iw-1}\psi(\sigma+iw)dw\right)\right| \leq M_1 \cdot u^{\sigma-1-k} \cdot \int_{-R}^{R} |\psi(\sigma+iw)|\, dw,$$

y si $u \in K$, K compacto

$$\left|\frac{d^k}{du^k}\left(\int_{-R}^{R} u^{\sigma+iw-1}\psi(\sigma+iw)dw\right)\right| \leq M_2 \cdot \int_{-R}^{R} |\psi(\sigma+iw)|\, dw,$$

donde M_2 es una constante que depende de K.

Por lo tanto, si $\sigma > 0$,

$$\int_{-R}^{R} u^{\sigma+iw-1}\psi(\sigma+iw)dw \in \mathcal{E}(I).$$

Seleccionamos a continuación una partición $\{y_{r,l}\}_{r=0}^{l}$ del intervalo $[\sigma - iR, \sigma + iR]$ de forma que $y_{r,l} - y_{r-1,l} = 2R/l$ para $r = 1, 2, \ldots, l$; y escribimos

$$\int_{-R}^{R} < f(u), u^{\sigma+iw-1} > \psi(\sigma+iw)dw = \lim_{l\to\infty} \frac{2R}{l}\sum_{r=0}^{l} < f(u), u^{y_{r,l}-1} > \psi(y_{r,l})$$

$$= \lim_{l\to\infty} < f(u), \frac{2R}{l}\sum_{r=0}^{l} u^{y_{r,l}-1}\psi(y_{r,l}) > \qquad (2.2.10)$$

Luego procediendo como en [127, pp. 65-66] obtenemos

$$\frac{2R}{l}\sum_{r=0}^{l} u^{y_{r,l}}\psi(y_{r,l}) \to \int_{-R}^{R} u^{\sigma+iw-1}\psi(\sigma+iw)dw \qquad (2.2.11)$$

cuando $l \to \infty$, en el sentido de la convergencia en $\mathcal{E}(I)$.

Por tanto, combinando (2.2.10) y (2.2.11) logramos (2.2.9). ∎

Lema II.2.4 *Dada $\phi \in \mathcal{D}(I)$ se sigue que*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \phi(y)(u/y)^\sigma \frac{\operatorname{sen}(R\log(u/y))}{u\log(u/y)}dy \to \phi(u)$$

cuando $R \to \infty$, en el sentido de convergencia en $\mathcal{E}(I)$, siendo $\sigma > 0$.

Demostración: Sea $\sigma > 0$. Haciendo el cambio $\log(u/y) = t$ y derivando bajo el signo integral, ya que ϕ pertenece a las funciones de clase infinito con soporte compacto llegamos a

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \phi(y)(u/y)^\sigma \frac{\operatorname{sen}(R\log(u/y))}{u\log(u/y)}dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \left\{ e^{(\sigma-1)t}\frac{\partial^k}{\partial u^k}\left(\phi(u\cdot e^{-t})\right) - \frac{d^k}{du^k}\left(\phi(u)\right)\right\}\frac{\operatorname{sen}(Rt)}{t}dt. \quad (2.2.12)$$

Luego debemos probar que

$$\theta_R(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \left\{ e^{(\sigma-1)t}\frac{\partial^k}{\partial u^k}\left(\phi(u\cdot e^{-t})\right) - \frac{d^k}{du^k}\left(\phi(u)\right)\right\}\frac{\operatorname{sen}(Rt)}{t}dt \to 0,$$

converge uniformemente para $u \in K$, K compacto, cuando $R \to \infty$.

Para ello, dado $\delta > 0$ dividimos la integral como sigue

$$\theta_R(u) = I_1(u) + I_2(u) + I_3(u)$$

donde

$$I_1(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-\delta} \left\{ e^{(\sigma-1)t}\frac{\partial^k}{\partial u^k}\left(\phi(u\cdot e^{-t})\right) - \frac{d^k}{du^k}\left(\phi(u)\right)\right\}\frac{\operatorname{sen}(Rt)}{t}dt.$$

$I_2(u)$ e $I_3(u)$ son la misma integral con los intervalos de integración en $(-\delta,\delta)$ y (δ,∞) respectivamente. Para finalizar, siguiendo los pasos dados en [127, pp. 66-67] probamos que $I_1(u)$, $I_2(u)$ e $I_3(u)$ convergen a 0 cuando $R\to\infty$, para $u\in K$, K compacto y concluimos la demostración.

■

Dados estos lemas, estamos en condiciones de enunciar y demostrar el primer teorema de inversión.

Teorema II.2.1 *Sean $f\in\mathcal{E}'(I)$, $\phi\in\mathcal{D}(I)$, $\nu\in\mathbf{C}$ y $\sigma>0$, se verifica que*

$$\lim_{R\to\infty} < \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR}\frac{1}{K(s)}y^{-s}\int_0^\infty x^{-s}F(x)dxds,\phi(y) >=< f(t),\phi(t) >$$

donde $F(x)=\left(K_\nu^{(\rho)}f\right)(x)$, para $x>0$, y

$$K(s)=\frac{1}{\rho}\Gamma(1-s)\Gamma\left(\frac{1-s+\nu}{\rho}\right),$$

Demostración: Consideremos $f\in\mathcal{E}'(I)$ y denotemos

$$F(x)=< f(t),Z_\rho^\nu(xt) >,$$

para $x>0$. Sea $y>0$, $R>0$, la función

$$\varphi_R(y)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR}\frac{1}{K(s)}\cdot y^{-s}\int_0^\infty x^{-s}F(x)dxds$$

define una distribución regular en $\mathcal{D}'(I)$ mediante la igualdad

$$< \varphi_R(y), \phi(y) >= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \phi(y)\int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR}\frac{1}{K(s)}\cdot y^{-s}\int_0^\infty x^{-s}F(x)dxdsdy$$

para $\phi \in \mathcal{D}(I)$.

En virtud del teorema de Fubini podemos intercambiar el orden de integración obteniendo

$$< \varphi_R(y), \phi(y) >=$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR}\frac{1}{K(s)}\cdot\left\{\int_0^\infty x^{-s} < f(t), Z_\rho^\nu(xt) > dx\right\}\int_0^\infty y^{-s}\phi(y)dyds,$$

por el Lema II.2.2 y (1.2.1), conseguimos

$$\begin{aligned} < \ & \varphi_R(y), \phi(y) >= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR}\frac{1}{K(s)}\cdot < f(t), t^{s-1}\int_0^\infty u^{-s}Z_\rho^\nu(u)du > \cdot \\ \cdot \ & \int_0^\infty y^{-s}\phi(y)dyds = \\ = \ & \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} < f(t), t^{s-1} > \int_0^\infty y^{-s}\phi(y)dyds. \end{aligned}$$

De acuerdo con el Lema II.2.3 tenemos

$$< \varphi_R(y), \phi(y) >=< f(t), \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR} t^{s-1}\int_0^\infty y^{-s}\phi(y)dyds.$$

Por último, intercambiando el orden de integración y usando el Lema II.2.4 logramos, cuando $R \to \infty$, que

$$< \varphi_R(y), \phi(y) >=$$

$$=< f(t), \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (u/y)^\sigma \phi(y)\frac{\operatorname{sen}(R\log(u/y))}{u\log(u/y)}dy > \to < f(t), \phi(t) > .$$

■

Demostrado este teorema, podemos deducir a partir del mismo el siguiente resultado de unicidad:

Teorema II.2.2 *Sean $f, g \in \mathcal{E}'(I)$ y $\nu \in \mathbf{C}$. Si $\left(K_\nu^{(\rho)} f\right)(x) = \left(K_\nu^{(\rho)} g\right)(x)$, para $x > 0$, entonces $f = g$, en el sentido de una igualdad en $\mathcal{D}'(I)$.*

Demostración:

Es suficiente probar que para cada $\phi \in \mathcal{D}(I)$, $< f(t) - g(t), \phi(t) >= 0$.

En efecto, se establece inmediatamente ya que,

$$< f(t) - g(t), \phi(t) >=< \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iR}^{\sigma+iR}\frac{1}{K(s)}y^{-s}\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty x^{-s}\left\{\left(K_\nu^{(\rho)} f\right)(x) - \left(K_\nu^{(\rho)} g\right)(x)\right\}dxds, \phi(y) >= 0$$

donde $\sigma > 0$ y $K(s)$ viene dada como en el Teorema II.2.1. ■

D. V. Widder [119] estableció una fórmula de inversión real en sentido clásico, para la transformación de Laplace por medio de un operador que se denomina comúnmente operador de Post-Widder. Posteriormente R.P. Boas [15] generalizó la fórmula de Widder probando un teorema de inversión para la K- transformación. Recientemente J. J. Betancor y

J. Barrios demostraron otra fórmula de inversión real para la transformación $\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}$ [8]. El teorema que logramos a continuación es otra fórmula de inversión, en la cual aparece una generalización de un operador tipo Post-Widder. Nótese que como casos particulares se obtienen fórmulas de inversión para la transformación de Laplace y de Meijer [15],[119].

Teorema II.2.3 *Sean $f \in \mathcal{E}'(I)$ y $\mathrm{Re}\,\nu \geq \rho/2 - 1$. Si $F(x)$ denota la transformada $K_\nu^{(\rho)}$ generalizada, logramos que*

$$\lim_{k\to\infty} < B^*_{\rho,\nu,k} F(\rho k/y), \phi(y) >=< f(t), \phi(t) >$$

para cada $\phi \in \mathcal{D}(I)$, donde $B^*_{\rho,\nu,k}$ es el operador adjunto de $B_{\rho,\nu,k}$.

Demostración: Sea $f \in \mathcal{E}'(I)$ y $F(x) =< f(t), Z_\rho^\nu(xt) >$, para $x > 0$.

En virtud de la Proposición II.2.3 y usando (2.1.3) por medio del cambio de variable $y^{-1} = x$, tenemos

$$\begin{aligned} B^*_{\rho,\nu,k} F(\rho k/y) &= C_1 \cdot y^{-\rho k-1} < f(t), B^k_{\rho,\nu} Z_\rho^\nu(\rho k t/y) >= \\ &= C_1 \cdot y^{-\rho k-1} < f(t), \rho^k (\rho k t)^{\rho k} Z_\rho^\nu(\rho k t/y) > \end{aligned}$$

siendo C_1 la constante dada en (2.1.4).

Puesto que $B^*_{\rho,\nu,k} F(\rho k/y)$ define una distribución regular en $\mathcal{D}'(I)$ que viene dada por

$$< B^*_{\rho,\nu,k} F(\rho k/y), \phi(y) >= \int_0^\infty B^*_{\rho,\nu,k} F(\rho k/y)\phi(y)dy,$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}(I)$ debemos ver que

$$\begin{aligned} < \quad & B^*_{\rho,\nu,k}F(\rho k/y), \phi(y) >= \\ = \quad & < f(t), C_1 \cdot t^{\rho k} \int_0^\infty y^{-\rho k-1} Z_\rho^\nu(\rho kt/y)\phi(y)dy >, \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

para cada $\phi \in \mathcal{D}(I)$.

Para ello, consideramos $0 < a < b < \infty$ tal que $\phi(x) = 0$, $x \notin [a, b]$, $\phi \in \mathcal{D}(I)$.

Denotaremos por $\{y_{m,l}\}_{m=0}^l$ a una partición de $[a, b]$ siendo $d_l = y_{m,l} - y_{m,l-1}$, $m = 1, 2, \ldots, l$, entonces

$$\int_0^\infty B^*_{\rho,\nu,k}F(\rho k/y)\phi(y)dy = \lim_{l\to\infty} d_l \sum_{m=0}^l B^*_{\rho,\nu,k}F(\rho k/y_{m,l})\phi(x_{m,l}) =$$

$$= \lim_{l\to\infty} < f(t), t^{\rho k} C_1\, \rho^k (\rho k)^{\rho k} d_l \sum_{m=0}^l y_{m,l}^{-\rho k-1} Z_\rho^\nu(\rho kt/y_{m,l})\phi(x_{m,l}) > .$$

Por tanto para demostar (2.2.13) debemos obtener que

$$\lim_{l\to\infty} d_l \sum_{m=0}^l y_{m,l}^{-\rho k-1} Z_\rho^\nu(\rho kt/y_{m,l})\phi(y_{m,l}) = \int_a^b y^{-\rho k-1} Z_\rho^\nu(\rho kt/y)\phi(y)dy,$$

en el sentido de convergencia en $\mathcal{E}(I)$.

Luego, si consideramos un compacto $K \subset (0, \infty)$ y $r \in \mathbf{N}$, se sigue

$$\frac{d^r}{dt^r}\left(d_l \sum_{m=0}^l y_{m,l}^{-\rho k-1} Z_\rho^\nu(\rho kt/y_{m,l})\phi(y_{m,l}) - \int_a^b y^{-\rho k-1} Z_\rho^\nu(\rho kt/y)\phi(y)dy \right) =$$

$$\begin{aligned} &= d_l \sum_{m=0}^{l} y_{m,l}^{-\rho k-1} \frac{d^r}{dt^r}\left(Z_\rho^\nu(\rho k t/y_{m,l})\right)\phi(y_{m,l}) - \\ &- \int_a^b y^{-\rho k-1}\frac{d^r}{dt^r}\left(Z_\rho^\nu(\rho k t/y)\right)\phi(y)dy. \end{aligned}$$

Es decir, ya que la función $y^{-\rho k-1}\dfrac{d^r}{dt^r}\left(Z_\rho^\nu(\rho k t/y)\right)\phi(y)$ es uniformemente continua para $(y,t)\in[a,b]\times K$, logramos

$$\lim_{l\to\infty} d_l \sum_{m=0}^{l} y_{m,l}^{-\rho k-1} Z_\rho^\nu(\rho k t/y_{m,l})\phi(y_{m,l}) = \int_a^b y^{-\rho k-1} Z_\rho^\nu(\rho k t/y)\phi(y)dy,$$

uniformemente en $y\in K$. Con esto probamos (2.2.13).

Ahora, si hacemos el cambio de variable $y = u^{-1}$ conseguimos de (2.2.13)

$$\int_0^\infty B_{\rho,\nu,k}^* F(\rho k/y)\phi(y)dy = < g(t), C_1 \cdot t^{-\rho k-1}\int_0^\infty u^{\rho k} Z_\rho^\nu(\rho k u/t)\psi(u)du >$$

siendo $g(t) = \frac{1}{t}f(1/t)$ y $\psi(u) = \frac{1}{u}\phi(1/u)$.

Para completar la demostración debemos ver que

$$\lim_{k\to\infty} C_1 \cdot t^{-\rho k-1}\int_0^\infty u^{\rho k} Z_\rho^\nu(\rho k u/t)\psi(u)du = \psi(t) \tag{2.2.14}$$

en el sentido de convergencia en $\mathcal{E}(I)$.

Para ello, por la transformada de Mellin del núcleo (2.1.5)

$$\int_0^\infty u^{\rho k - \frac{(2\nu-\rho)}{2\rho+2} - \frac{1}{\rho+1}} Z_\rho^\nu(\rho k u/t)du = (t/\rho k)^{(\rho+1)k - \frac{(2\nu-\rho)}{2\rho+2} - \frac{1}{\rho+1} + 1}.$$

$$\cdot\rho^{-1}\Gamma\left(\rho k - \frac{(2\nu-\rho)}{2\rho+2} - \frac{1}{\rho+1} + 1\right)\Gamma\left(\frac{\rho k - \frac{(2\nu-\rho)}{2\rho+2} - \frac{1}{\rho+1} + 1 + \nu}{\rho}\right),$$

y si derivamos bajo el signo integral,

$$\begin{aligned} &\frac{d^r}{dt^r}\left(C_1 \cdot t^{-\rho k-1}\int_0^\infty u^{\rho k} Z_\rho^\nu(\rho k u/t)\psi(u)du - \psi(t)\right) = \\ = \quad & C_1\, t^{-\rho k-1}\int_0^\infty u^{\rho k - \frac{(2\nu-\rho)}{2\rho+2} - \frac{1}{\rho+1}} Z_\rho^\nu(\rho k u/t)\cdot \\ &\cdot\left(u^{\frac{2\nu-\rho}{2\rho+2}+\frac{1}{\rho+1}}\left(\frac{u}{t}\frac{d}{du}\right)^r \psi(u) - t^{\frac{2\nu-\rho}{2\rho+2}+\frac{1}{\rho+1}}\frac{d^r}{dt^r}\psi(t)\right)du, \end{aligned}$$

para $r \in \mathbf{N}$.

Asimismo, de acuerdo con (2.1.2) se verifica que para toda $t \in K$, $K \subset (0,\infty), K$ compacto, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left|\frac{d^r}{dt^r}\left(C \cdot t^{-\rho k-1}\int_0^\infty Z_\rho^\nu(\rho k u/t)u^{\rho k}\psi(u)du - \psi(t)\right)\right| \leq$$

$$\leq C_1\int_0^\infty u^{\rho k}e^{-\alpha_2(\rho k u/t)}\left|H(u,t)\right| du,$$

siendo

$$C_1 = C\frac{(\rho k)^{(\rho+1)k+\frac{2\nu-\rho}{2\rho+2}+1}}{((\rho+1)k)!},$$

y

$$H(u,t) = \left|u^{\frac{2\nu-\rho}{2\rho+2}+\frac{1}{\rho+1}}\left(\frac{u}{t}\frac{d}{dz}\right)^r\psi(u) - t^{\frac{2\nu-\rho}{2\rho+2}+\frac{1}{\rho+1}}\frac{d^r}{dt^r}\psi(t)\right|.$$

Ahora dividimos la última integral de la siguiente forma:

$$C_1 \cdot \int_0^\infty u^{\rho k}e^{-\alpha_2(\rho k u/t)}\left|H(u,t)\right| du =$$

$$
\begin{aligned}
&= C_1 \cdot \left[\int_0^{((\rho+1)k)^{\frac{1}{\rho}}(1-\eta)^{(\rho+1)/\rho} t(\rho k)^{-1}} u^{\rho k} e^{-\alpha_2(\rho k u/t)} H(u,t)\, du + \right.\\
&\quad + \int_{((\rho+1)k)^{\frac{1}{\rho}}(1-\eta)^{(\rho+1)/\rho} t(\rho k)^{-1}}^{((\rho+1)k)^{\frac{1}{\rho}}(1+\eta)^{(\rho+1)/\rho} t(\rho k)^{-1}} u^{\rho k} e^{-\alpha_2(\rho k u/t)} H(u,t)\, du + \\
&\quad \left. + \int_{((\rho+1)k)^{\frac{1}{\rho}}(1+\eta)^{(\rho+1)/\rho} t(\rho k)^{-1}}^{\infty} u^{\rho k} e^{-\alpha_2(\rho k u/t)} H(u,t)\, du \right] = \\
&= I_1(t,k) + I_2(t,k) + I_3(t,k),
\end{aligned}
$$

con $\eta > 0$.

Para cada $t \in K$, obtenemos

$$
|I_1(t,k)| \leq C \frac{(\rho k)^{\rho k - k + 1 - 1/(\rho+1)}}{((\rho+1)k)!} t^{-\rho k - \rho/(\rho+1)} \frac{\rho}{\rho+1} \cdot
$$

$$
\cdot \left(\int_0^{((\rho+1)k)^{\frac{1}{\rho}}(1-\eta)^{(\rho+1)/\rho} t(\rho k)^{-1}} u^{\rho k + (2\nu-\rho)/(2\rho+2)} e^{-(\rho k u/t)^{\rho/(\rho+1)}} \cdot \right.
$$

$$
\cdot \left| \left(\frac{u}{t} \frac{d}{du} \right)^r \psi(u) \right| du + \int_0^{((\rho+1)k)^{\frac{1}{\rho}}(1-\eta)^{(\rho+1)/\rho} t(\rho k)^{-1}} u^{\rho k - 1/(\rho+1)} e^{-(\rho k u/t)^{\rho/(\rho+1)}} \cdot
$$

$$
\left. \cdot t^{(2\nu-\rho)/(2\rho+2) + 1/(\rho+1)} \left| \frac{d^r}{dt^r} \psi(t) \right| du \right),
$$

si hacemos el cambio de variable $(\rho k u/t)^{\rho/(\rho+1)} = (\rho+1)kx$ y tenemos en cuenta que $\operatorname{Re}\nu \geq \rho/2 - 1$ logramos

$$
|I_1(t,k)| \leq C \frac{((\rho+1)k)^{(\rho+1)k+1}}{((\rho+1)k)!} \int_0^{1-\eta} x^{(\rho+1)k} e^{-(\rho+1)kx} dx
$$

siendo C una constante positiva.

Entonces recurriendo a [119, p. 288, Theorem 5b] conseguimos que

$$I_1(t,k) \to 0, \tag{2.2.15}$$

cuando $k \to \infty$ uniformemente en $t \in K$.

Repitiendo el proceso seguido con $I_1(t,k)$ se puede concluir para $I_3(t,k)$ que

$$I_3(t,k) \to 0, \tag{2.2.16}$$

cuando $k \to \infty$ uniformemente en $t \in K$.

Para acotar $I_2(t,k)$, usamos el teorema del valor medio y podemos escribir

$$\left| u^{(2\nu-\rho)/(2\rho+2)+1/(\rho+1)} \left(\frac{u}{t}\frac{d}{du}\right)^r \psi(u) - t^{(2\nu-\rho)/(2\rho+2)+1/(\rho+1)} \frac{d^r}{dt^r}\psi(t)\right| \leq$$

$$\leq C_2 \, |t-u|$$

para $u, t \in (0,\infty)$ y C_2 una constante positiva.

Utilizando [119, p. 287, Theorem 5b] se sigue:

$$|I_2(t,k)| \leq C_3 \frac{((\rho+1)k)^{(\rho+1)k+1}}{((\rho+1)k)!} \int_{1-\eta}^{1+\eta} x^{(\rho+1)k} e^{-(\rho+1)kx} dx \leq C \cdot \eta, \tag{2.2.17}$$

para cada $k \in \mathbf{N}$ y constantes C_3 y C_4 positivas.

Combinando (2.2.15), (2.2.16) y (2.2.17) logramos (2.2.14).

Es decir,

$$\lim_{k\to\infty} < C^*_{\rho,\nu,k}F(\rho k/y), \phi(y) > = < g(t), \psi(t) > = < f(t), \phi(t) >,$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}(I)$. ■

Capítulo III

Transformaciones en espacios distribuciones $F'_{p,\mu}$

III.1 Preliminares

Recientemente en [59],[60] se analizó la transformación de $K_\nu^{(\rho)}$ por el método del operador adjunto en algunos espacios de distribuciones. Nuestro objetivo en este capítulo es también, estudiar otras transformaciones en ciertos espacios de distribuciones $F_{p,\mu}$ y $F'_{p,\mu}$ ([77]-[78]). Comenzamos trabajando con la transformación $\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}$ por medio del operador adjunto, para posteriormente estudiar con la transformación de

Obrechkoff que como se sabe generaliza a las de Laplace, Meijer y Krätzel $\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}$ [61]. No podemos dejar de destacar que en sentido clásico V. Kiryakova ha estudiado ampliamente la transformación de Obrechkoff.

Para proceder a este estudio, damos algunas definiciones preliminares, que se pueden encontrar en ([77],[78]).

Por $L^p(\mathbf{R}^+)$ denotaremos al espacio de las funciones medibles Lebesgue $f(x)$ tales que

$$\|f\|_p = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} < \infty.$$

Por otra parte, se dice que una función compleja $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^+)$ está en $F_{p,\mu}$ cuando $1 \leq p < \infty$ y $\mu \in \mathbf{C}$ si

$$t^k \frac{d^k}{dt^k}(t^{-\mu}\varphi(t)) \in L^p(\mathbf{R}^+), \forall k \in \mathbf{N},$$

y en el caso de que $p = \infty$, el espacio $F_{\infty,\mu}$ con $\mu \in \mathbf{C}$ está constituido por aquellas funciones complejas $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^+)$ que verifican

$$t^k \frac{d^k}{dt^k}(t^{-\mu}\varphi(t)) \to 0 \,\text{cuando}\; x \to 0 \quad \text{y} \quad x \to \infty, \forall k \in \mathbf{N}.$$

Para $1 \leq p \leq \infty$ y $\mu \in \mathbf{C}$, $F_{p,\mu}$ está dotado de la topología generada por la familia de seminormas

$$\gamma_k^{p,\mu}(\varphi) = \left\| t^k \frac{d^k}{dt^k}(t^{-\mu}\varphi(t)) \right\|_p \quad (\varphi \in F_{p,\mu};\, k \in \mathbf{N}),$$

donde $\|\cdot\|_p$ denota la norma en el espacio $L^p(\mathbf{R}^+)$. De este modo $F_{p,\mu}$ es un espacio de Fréchet. En [78] podemos ver que el espacio $F_{p,\mu}$ está íntimamente relacionado con el espacio de Banach $L_{p,\mu}$, que es el formado por las funciones medibles Lebesgue $f(x)$ tales que

$$\|f\|_{p,\mu} = \|x^{-\mu} f\|_p < \infty.$$

Veamos a continuación algunos resultados que nos serán útiles en lo que sigue (para profundizar en ellos puede verse [77]-[78]):

Lema III.1.1 *El espacio $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^+)$ de funciones $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^+)$ con soporte compacto es denso en $F_{p,\mu}$ para cualquier $1 \leq p \leq \infty$ y cualquier $\mu \in \mathbf{C}$.*

(Véase [77, p. 18, Corollary 2.7])

Lema III.1.2 *Sean $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$, $1 \leq p \leq \infty$ y $m \in \mathbf{N}$.*

(i) El operador x^λ definido para $\varphi \in F_{p,\mu}$ por

$$(x^\lambda \varphi)(x) = x^\lambda \varphi(x) \tag{3.1.1}$$

es un isomorfismo de $F_{p,\mu}$ en $F_{p,\mu+\lambda}$ cuyo inverso viene dado por $x^{-\lambda}$.

(ii) El operador D^m definido para $\varphi \in F_{p,\mu}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ por

$$(D^m \varphi)(x) = \frac{d^m \varphi(x)}{dx^m} \tag{3.1.2}$$

es una aplicación lineal y continua de $F_{p,\mu}$ en $F_{p,\mu-m}$. Además D^m es un isomorfismo de $F_{p,\mu}$ en $F_{p,\mu-m}$, si y sólo si,

$$\operatorname{Re}\mu \neq \frac{1}{p} + k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots m-1). \tag{3.1.3}$$

(Véase [77, pp. 21-22, Theorems 2.11 y 2.13])

Lema III.1.3 *Sean $\mu \in \mathbf{C}$, $1 \leq p \leq \infty$ y $K(x)$ una función definida para casi todo punto de $\mathbf{R}^+$ que verifica*

$$\int_0^\infty x^{\operatorname{Re}\mu - \frac{1}{p}} |K(x)|\, dx < \infty. \tag{3.1.4}$$

Entonces el operador integral $\mathcal{K}$ definido para funciones φ por

$$(\mathcal{K}\varphi)(x) = \int_0^\infty K(xt)\varphi(t)dt \quad (x > 0) \tag{3.1.5}$$

es una aplicación lineal y continua de $L_{p,\mu}$ en $L_{p,\frac{2}{p}-\mu-1}$ y de $F_{p,\mu}$ en $F_{p,\frac{2}{p}-\mu-1}$.

(Véase [77, pp. 158-159, Theorem 8.1 y Corollary 8.2])

Definición III.1.1 *En lo que sigue denotaremos por f a los elementos de $F'_{p,\mu}$ y por $< f, \varphi >$ al valor de f con respecto a una función prueba*

$\varphi \in F_{p,\mu}$. *Para cualquier* $f \in F'_{p,\mu}$ *y* $\lambda \in \mathbf{C}$, $m \in \mathbf{N}$ *se entenderá por* x^λ *y* D^m *a los operadores definidos por*

$$< x^\lambda f, \varphi > = < f, x^\lambda \varphi > \quad (\varphi \in F_{p,\mu-\lambda}) \tag{3.1.6}$$

$$< D^m f, \varphi > = < f, (-1)^m D^m \varphi > \quad (\varphi \in F_{p,\mu+m}) \tag{3.1.7}$$

Lema III.1.4 *Sean* $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$, $1 \leq p \leq \infty$ *y* $m \in \mathbf{N}$.

(i) El operador x^λ *es un isomorfismo de* $F'_{p,\mu}$ *en* $F'_{p,\mu-\lambda}$ *cuyo inverso es* $x^{-\lambda}$.

(ii) El operador D^m *es una aplicación lineal y continua de* $F'_{p,\mu}$ *en* $F'_{p,\mu+m}$. *Además,* D^m *es un isomorfismo de* $F'_{p,\mu}$ *en* $F'_{p,\mu+m}$, *si y sólo si,*

$$\operatorname{Re}\mu \neq \frac{1}{p} - k \quad (k = 1, 2, \ldots m). \tag{3.1.8}$$

(Véase [77, p. 32, Theorem 2.22])

Lema III.1.5 *La transformación de Mellin* $\mathcal{M}$ *para* $\varphi \in F_{p,\mu}$ *viene dada por*

$$(\mathcal{M}\varphi)(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\varphi(t)dt, \qquad \operatorname{Re} s = 1/p - \operatorname{Re}\mu. \tag{3.1.9}$$

Si $1 \leq p \leq 2$ *y* $\mu \in \mathbf{C}$, *entonces tenemos que* $\mathcal{M}$ *es una aplicación lineal y continua de* $F_{p,\mu}$ *en* $L^q(\mathbf{R}^+)$ *siendo* $1/p + 1/q = 1$.

(Véase [78, p. 531, Theorem 5.1])

III.2 La transformación $\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}$

En esta sección estudiamos la transformación $\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}$ por medio del método del operador adjunto completando en parte el estudio distribucional realizado en [6]. Para ello, inicialmente definimos esta transformación en los espacios $L_{p,\mu}$ y $F_{p,\mu}$.

Proposición III.2.1 *Sean* $1 \leq p \leq \infty$, μ, $\alpha \in \mathbf{C}$, $\rho > 0$, $1/p+1/p' = 1$ *y*

$$\operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{p'} - \min\{0, \rho \operatorname{Re}\alpha\}. \qquad (3.2.1)$$

Entonces $\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}$ *es una aplicación lineal y continua de* $L_{p,\mu}$ *en* $L_{p,2/p-\mu-1}$ *y de* $F_{p,\mu}$ *en* $F_{p,2/p-\mu-1}$.

Demostración: En virtud de (1.2.5) y (1.2.6) la integral

$$\int_0^\infty x^{\operatorname{Re}\mu-\frac{1}{p}} \left|\lambda_\alpha^{(\rho)}(x)\right| dx < \infty$$

converge siempre que (3.2.1) se satisfaga. Entonces la Proposición III.2.1 se sigue del Lema III.1.3. ■

La transformación de Mellin de una función φ sabemos que viene definida por

$$(\mathcal{M}\varphi)(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\varphi(x)dx. \qquad (3.2.2)$$

y la transformación de la función que comparece en el núcleo viene dada por:

Lema III.2.1 *Sean* $\rho > 0$, $\alpha, s \in \mathbf{C}$ *y*

$$\operatorname{Re} s + \min\{0, \rho \operatorname{Re} \alpha\} > 0, \tag{3.2.3}$$

se tiene

$$\mathcal{M}\left\{\lambda_\alpha^{(\rho)}(x)\right\} = (2\pi)^{\frac{\rho-1}{2}} \rho^{-1/2-\rho\alpha} \frac{\Gamma(s+\rho\alpha)\,\Gamma\left(\frac{s}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{\rho}+\alpha+1-\frac{1}{\rho}\right)}. \tag{3.2.4}$$

Demostración: De acuerdo con la definición de la transformación integral de Mellin (3.2.2) y la representación integral de $\lambda_\alpha^{(\rho)}$ (1.1.3) logramos después de aplicar el Teorema de Fubini

$$\mathcal{M}\left\{\lambda_\alpha^{(\rho)}(x)\right\} = \int_0^\infty x^{s-1} \lambda_\alpha^{(\rho)}(x) dx =$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{\rho-1}{2}} \rho^{1/2-\rho\alpha}}{\Gamma\left(\alpha+1-\frac{1}{\rho}\right)} \int_0^\infty x^{s+\rho\alpha-1} \int_1^\infty (t^\rho - 1)^{\alpha-(1/\rho)} e^{-xt} dt dx =$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{\rho-1}{2}} \rho^{1/2-\rho\alpha}}{\Gamma\left(\alpha+1-\frac{1}{\rho}\right)} \int_1^\infty (t^\rho - 1)^{\alpha-(1/\rho)} \int_0^\infty x^{s+\rho\alpha-1} e^{-xt} dx dt.$$

Por otra parte, la conocida fórmula de la función Gamma

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \tau^{z-1} e^{-\tau} d\tau \ (\operatorname{Re} z > 0)$$

nos lleva al resultado

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\left\{\lambda_\alpha^{(\rho)}(x)\right\} &= \frac{(2\pi)^{\frac{\rho-1}{2}}\rho^{1/2-\rho\alpha}\Gamma(s+\rho\alpha)}{\Gamma\left(\alpha+1-\frac{1}{\rho}\right)}\int_1^\infty (t^\rho-1)^{\alpha-(1/\rho)}t^{-s-\rho\alpha}dt = \\ &= (2\pi)^{\frac{\rho-1}{2}}\rho^{-1/2-\rho\alpha}\frac{\Gamma(s+\rho\alpha)\Gamma\left(\frac{s}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{\rho}+\alpha+1-\frac{1}{\rho}\right)}, \end{aligned}$$

siempre que se verifique (3.2.3). ■

Obtenemos ahora la transformación de Mellin $\mathcal{M}$ de la transformación $\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}$ para funciones $\varphi \in F_{p,\mu}$.

Proposición III.2.2 *Sean* $1 \leq p \leq 2$, $\mu, \alpha \in \mathbf{C}$, $\rho > 0$ *y*

$$\operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{p'} - \min\{0, \rho\operatorname{Re}\alpha\}, \quad \operatorname{Re}s = \frac{1}{p'} + \operatorname{Re}\mu, \tag{3.2.5}$$

si $\varphi \in \mathcal{F}_{p,\mu}$ *obtenemos que*

$$\mathcal{M}\left\{\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}\varphi\right\}(s) = (2\pi)^{\frac{\rho-1}{2}}\rho^{-1/2-\rho\alpha}\frac{\Gamma(s+\rho\alpha)\Gamma\left(\frac{s}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{\rho}+\alpha+1-\frac{1}{\rho}\right)}\mathcal{M}\varphi(1-s). \tag{3.2.6}$$

Demostración: En virtud del Lema III.1.5 y la Proposición III.2.1, los dos miembros de la igualdad (3.2.6) son aplicaciones lineales y continuas de $F_{p,\mu}$ en $L^q(\mathbf{R}^+)$, siendo $1/p + 1/q = 1$. Tomemos $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^+)$, de acuerdo con el Teorema de Fubini, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\left\{\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}\varphi\right\}(s) &= \int_0^\infty y^{s-1}\int_0^\infty \lambda_\alpha^{(\rho)}(xy)\varphi(x)dxdy = \\ &= \int_0^\infty \varphi(x)\int_0^\infty y^{s-1}\lambda_\alpha^{(\rho)}(xy)dxdy. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio $xy = t$, y teniendo en cuenta (3.2.4) conseguimos

$$\begin{aligned}\mathcal{M}\left\{\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}\varphi\right\}(s) &= \int_0^\infty x^{-s}\varphi(x)dx\int_0^\infty t^{s-1}\lambda_\alpha^{(\rho)}(t)dt = \\ &= (2\pi)^{\frac{\rho-1}{2}}\rho^{-1/2-\rho\alpha}\frac{\Gamma(s+\rho\alpha)\,\Gamma\left(\frac{s}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{\rho}+\alpha+1-\frac{1}{\rho}\right)}\mathcal{M}\varphi(1-s),\end{aligned}$$

siempre que (3.2.5) se cumpla, y por tanto (3.2.6) se demuestra para $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^+)$. Asimismo como por el Lema III.1.1, $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^+)$ es denso en $F_{p,\mu}$, logramos (3.2.6) para $\varphi \in F_{p,\mu}$. ■

Teorema III.2.1 *Si* $1 \leq p \leq \infty$, $\mu, \alpha \in \mathbf{C}$, $\rho > 0$ *y*

$$\operatorname{Re}\mu > -\frac{1}{p'} - \min\{0, \rho\operatorname{Re}\alpha\}, \tag{3.2.7}$$

se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}f\right)(x)\varphi(x)dx = \int_0^\infty f(x)\left(\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}\varphi\right)(x)dx, \tag{3.2.8}$$

se verifica para $\varphi \in F_{p,\mu}$, $f \in F_{p',\mu-1+2/p'}$ *y* $\varphi \in L_{p,\mu}$, $f \in L_{p',\mu-1+2/p'}$.

Demostración: En virtud de la Proposition III.2.1, $\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}f$ y $\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}\varphi$ existen para $f \in F_{p',\mu-1+2/p'}$ y $\varphi \in F_{p,\mu}$, respectivamente, siempre que (3.2.7) se cumpla. Inicialmente demostramos que (3.2.8) es cierto para funciones de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^+)$.

Si $f, \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^+)$ obtenemos

$$\int_0^\infty \left(\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}f\right)(x)\varphi(x)dx = \int_0^\infty \varphi(x)dx\int_0^\infty \lambda_\alpha^{(\rho)}(yx)f(y)dy =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty f(y)\,dy \int_0^\infty \lambda_\alpha^{(\rho)}(yx)\varphi(x)dx = \\
&= \int_0^\infty f(y)\left(\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}\varphi\right)(y)dy,
\end{aligned}
$$

ya que Teorema de Fubini nos permite el intercambio en el orden de integración.

Por tanto, para demostrar (3.2.8) para $\varphi \in F_{p,\mu}$, $f \in F_{p',\mu-1+2/p'}$ y $\varphi \in L_{p,\mu}$, $f \in L_{p',\mu-1+2/p'}$, es suficiente con ver que ambos miembros de la igualdad (3.2.8) son funcionales bilineales y acotados sobre $L_{p,\mu} \times L_{p',\mu-1+2/p'}$. Para ello, aplicando la desigualdad de Hölder y la definición de la norma de $L_{p,\mu}$ logramos

$$
\int_0^\infty \left|\left(\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)} f\right)(x)\varphi(x)\right| dx = \int_0^\infty \left|x^{-\mu}\varphi(x)\right| \left|x^{\mu}\left(\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)} f\right)(x)\right| dx \leq
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\int_0^\infty \left|x^{-\mu}\varphi(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_0^\infty \left|x^{\mu}\left(\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)} f\right)(x)\right|^{p'} dx\right)^{1/p'} = \\
&= \|\varphi\|_{p,\mu} \left\|\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)} f\right\|_{p',-\mu}.
\end{aligned}
$$

Además, utilizando la Proposición III.2.1 con p' en vez de p y $\mu - 1 + 2/p'$ en vez de μ conseguimos

$$
\left\|\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)} f\right\|_{p',-\mu} \leq k\,\|f\|_{p',\mu-1+2/p'} \quad (k > 0),
$$

siempre que (3.2.7) se verifique, y entonces

$$\left|\int_0^\infty \left(\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)} f\right)(x)\varphi(x)dx\right| \leq \|\varphi\|_{p,\mu} \left\|\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)} f\right\|_{p',-\mu} \leq k\,\|\varphi\|_{p,\mu}\,\|f\|_{p',\mu-1+2/p'}\,.$$

Con esto queda probado que el lado izquierdo de la igualdad (3.2.8) es un funcional bilineal y acotado sobre $L_{p,\mu} \times L_{p',\mu-1+2/p'}$. Para el lado derecho se procede de forma similar, con lo que se completa la demostración del Teorema III.2.1. ∎

El Teorema III.2.1 nos permite definir la transformación $\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)} f$ generalizada sobre $F'_{p,\mu}$ cuando $1 \leq p \leq \infty$, $\mu, \alpha \in \mathbf{C}$ y $\rho > 0$, como sigue:

Definición III.2.1 *Para cada $f \in F'_{p,\mu}$ la transformación generalizada $\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)} f$ viene dada a través de*

$$< \mathcal{L}_\alpha^{(\rho)} f, \varphi > = < f, \mathcal{L}_\alpha^{(\rho)} \varphi > \tag{3.2.9}$$

con $\varphi \in F_{p,2/p-\mu-1}$.

Proposición III.2.3 *Sean* $1 \leq p \leq \infty$, $\operatorname{Re}\mu < 1/p + \min\{0, \rho \operatorname{Re}\alpha\}$, $\mu \in \mathbf{C}$, $\alpha \in \mathbf{C}$ *. Entonces el operador $\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}$ es una aplicación lineal y continua de $F'_{p,\mu}$ en $F'_{p,2/p-\mu-1}$.*

Demostración: Se sigue por la Proposición III.2.1 y por (3.2.9). ∎

Seguidamente, investigamos composiciones de la transformación $\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}$ generalizada con operadores diferenciales sobre los espacios $F_{p,\mu}$ y $F'_{p,\mu}$.

Proposición III.2.4 *Si* $1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/p' = 1$, μ, $\alpha \in \mathbf{C}$, $\rho > 0$, $m \in \mathbf{N}$ *y*

$$\operatorname{Re}\mu > -1/p' - \min\{0, \rho \operatorname{Re}\alpha\} + \rho m, \tag{3.2.10}$$

se verifica que

$$\left(\left(\frac{x}{\rho}\right)^{1-\rho} D\right)^m \mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}\left\{y^{-\rho m}\varphi(y)\right\}(x) = (-1)^m \mathcal{L}_{\alpha-m}^{(\rho)}\left\{\varphi(y)\right\}(x), \tag{3.2.11}$$

para $\varphi \in F_{p,\mu}$.

Demostración: Según la Proposición III.2.1 y Lema III.1.2, los dos miembros de la igualdad (3.2.11) son aplicaciones lineales y continuas de $F_{p,\mu}$ en $F_{p,2/p-\mu-1}$ siempre que (3.2.10) se cumpla. Ahora, si aplicamos la regla de Leibniz tenemos

$$\left(\left(\frac{x}{\rho}\right)^{1-\rho} D\right)^m \mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}\left\{y^{-\rho m}\varphi(y)\right\}(x) =$$

$$= \left(\left(\frac{x}{\rho}\right)^{1-\rho} D\right)^m \int_0^\infty \lambda_\alpha^{(\rho)}(xy) y^{-\rho m}\varphi(y)dy =$$

$$= \int_0^\infty \left(\left(\frac{x}{\rho}\right)^{1-\rho} D\right)^m \left\{\lambda_\alpha^{(\rho)}(xy)\right\} y^{-\rho m}\varphi(y)dy,$$

haciendo el cambio de variable $xt = z$, y teniendo en cuenta (1.2.4) logramos

$$\left(\left(\frac{x}{\rho}\right)^{1-\rho} D\right)^m \mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}\left\{y^{-\rho m}\varphi(y)\right\}(x) =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \left(\left(\frac{z}{\rho}\right)^{1-\rho} D\right)^m \left\{\lambda_\alpha^{(\rho)}(z)\right\} \varphi(z/x)\frac{dz}{x} = \\
&= \int_0^\infty (-1)^m \left\{\lambda_{\alpha-m}^{(\rho)}(xy)\right\} \varphi(y)dy = \\
&= (-1)^m \mathcal{L}_{\alpha-m}^{(\rho)} \{\varphi(y)\}(x),
\end{aligned}
$$

y por tanto hemos demostrado la Proposición III.2.4. ■

Proposición III.2.5 *Sean* $1 \leq p \leq \infty$*,* $\mu, \alpha \in \mathbf{C}$*,* $\rho > 0$ *y* $m \in \mathbf{N}$*. Para cada* $f \in F'_{p,\mu}$ *se obtiene*

$$
x^{-\rho m}\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)} \left(D\left(\frac{x}{\rho}\right)^{1-\rho}\right)^m f(x) = \mathcal{L}_{\alpha-m}^{(\rho)} f(x) \tag{3.2.12}
$$

siempre que

$$
\operatorname{Re}\mu < 1/p + \min\{0, \rho \operatorname{Re}\alpha\} - \rho m. \tag{3.2.13}
$$

Demostración: De acuerdo con la condición (3.2.13), el Lema III.1.4 y la Proposición III.2.1, los dos miembros de la igualdad son aplicaciones lineales y continuas de $F'_{p,\mu}$ en $F'_{p,2/p-\mu-1}$.

Utilizando (3.2.9) y la Definición III.1.1 conseguimos

$$
\begin{aligned}
&< x^{-\rho m}\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)} \left(D\left(\frac{x}{\rho}\right)^{1-\rho}\right)^m f(x), \varphi(x) >= \\
&=< f, (-1)^m \left(\left(\frac{x}{\rho}\right)^{1-\rho} D\right)^m \mathcal{L}_\alpha^{(\rho)} x^{-\rho m}\varphi(x) >,
\end{aligned}
$$

y según (3.2.11) y la Definición III.1.1 logramos

$$< x^{-\rho m}\mathcal{L}_{\alpha}^{(\rho)}\left(D\left(\frac{x}{\rho}\right)^{1-\rho}\right)^{m} f(x), \varphi(x) >=$$

$$=< f, \mathcal{L}_{\alpha-m}^{(\rho)}\varphi(x) >=< \mathcal{L}_{\alpha-m}^{(\rho)} f, \varphi(x) > .$$

De manera que concluimos la demostración. ■

III.3 La transformación Obrechkoff

III.3.1 Introducción

Esta transformación parece ser una de las más generales y efectivas generalizaciones de la transformación de Laplace, con respecto a los operadores diferenciales de tipo Bessel ($\beta = m-(\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_m) > 0$, $m \in \mathbf{N}$, $\gamma_k = (\alpha_k + \alpha_{k+1} + \ldots + \alpha_m - m + k)/\beta, k = 1, \ldots, m$)

$$B = x^{\alpha_0}\frac{d}{dx}x^{\alpha_1}\frac{d}{dx}\ldots x^{\alpha_{m-1}}\frac{d}{dx}x^{\alpha_m} = x^{-\beta}\prod_{j=1}^{m}\left(x\frac{d}{dx} + \beta\gamma_k\right). \quad (3.3.1)$$

Como casos más simples de (3.3.1), están incluidos el operador diferencial de Bessel de segundo orden y la derivada de orden m-ésimo $D^m = (d/dx)^m$. Muchos autores han introducido y estudiado transformadas de tipo Laplace que resultan ser casos particulares de (3.3.1). Lo curioso fue que la transformación más general de este tipo había sido introducida en 1958 por N. Obrechkoff [91], pero sus resultados permanecieron desconocidos durante un lardo periodo de tiempo. I. Dimovski [30] estableció que esta transformación puede ser usada con éxito para construir un cálculo operacional para los operadores (3.3.1) (y sus operadores inversos por la derecha, conocidos como operadores integrales "hyper-Bessel", L). En [30], [31] algunas propiedades básicas de la transformación de Obrechkoff se establecen para espacios de funciones localmente integrables con un adecuado comportamiento asintótico. Un estudio más profundo es establecido por V. Kiryakova en [61], utilizando la funciones G de Meijer y el cálculo fraccionario generalizado. Sin embargo esta transformación no ha sido estudiada en sentido distribucional por lo que la definimos y estudiamos sobre algunos espacios de funciones generalizadas.

A efectos de una mejor lectura establecemos algunas propiedades de la transformación de Obrechkoff.

La transformación de Obrechkoff viene dada por

$$\mathcal{O}f(z) = \beta \int_0^\infty x^{\beta(\gamma_m+1)-1} K((zx)^\beta) f(x) dx, \tag{3.3.2}$$

donde

$$K(z) = \int_0^\infty \underset{(m-1)}{\cdots} \int_0^\infty \exp\left(-u_1 - \cdots - u_{m-1} - z/(u_1 \cdots u_{m-1})\right)$$

$$\cdot \prod_{k=1}^{m-1} u_k^{\gamma_m-\gamma_k-1} du_1 \dots du_{m-1},$$

siendo $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots \leq \gamma_m$.

Otra definición equivalente que utilizaremos a lo largo del capítulo es

$$\mathcal{O}\{f(t); z\} = \beta\, z^{-\beta(\gamma_m+1)+1} \int_0^\infty G_{0,m}^{m,0}\left((zt)^\beta|(\gamma_k+1-1/\beta)_1^m\right) f(t)dt, \tag{3.3.3}$$

donde $G_{0,m}^{m,0}$ es un caso particular de la función G de Meijer ([61, Def. A.3, p. 313]).

Asimismo, podemos ver en [61, Corollary B.5, p.328] que la ecuación diferencial que satisface la función $G_{0,m}^{m,0}$ es

$$\prod_{j=1}^{m}\left(u\frac{d}{du} - b_j - \eta + 1\right)\cdots\left(u\frac{d}{du} - b_j - 1\right)\left(u\frac{d}{du} - b_j\right) G_{0,m}^{m,0}\left(u^\beta|(b_j)_1^m\right) =$$

$$= (-1)^m \beta^m u^{\eta\beta} G_{0,m}^{m,0}\left(u^\beta|(b_j)_1^m\right), \tag{3.3.4}$$

donde $b_j = \gamma_j + 1 - 1/\beta$, $j = 1, \dots, m$; y $\eta \geq 0$.

Por otro lado denotando por

$$\lambda(z, x) = x^{\beta(\gamma_m+1)-1} K((zx)^\beta),$$

de [61, p. 177], tenemos

$$\mathcal{M}(\lambda(z, x); s) = z^{-\beta(\gamma_m+1+(s-1)/\beta)} \prod_{k=1}^{m} \Gamma(\gamma_k + 1 + (s-1)/\beta), \tag{3.3.5}$$

siendo $\mathcal{M}$ es la transformación de Mellin.

El comportamiento asintótico de la función que comparece en el núcleo de la transformada ((3.3.2)-(3.3.3)) es el siguiente ([61, p.176]):

$$K(x) \sim \frac{(\sqrt{2\pi})^{m-1}}{\sqrt{m}} \cdot x^{\sum_{i=1}^{m} \gamma_i/m - \gamma_m - (m-1)/2m} \cdot e^{-m \cdot x^{1/m}} \qquad (3.3.6)$$

para $x \to \infty$, y

$$\lim_{x \to 0^+} K(x) = \prod_{k=1}^{m-1} \Gamma(\gamma_m - \gamma_k) < \infty.$$

Es bien conocido que la transformación de Obrechkoff se reduce a la transformación de Meijer [61, pag. 195] para $\beta = m = 2$, $\gamma_{1,2} = \pm\nu/2$, es decir,

$$\mathcal{O}\left\{f(t); z\right\} = 2^{-\nu+2} z^{-1/2+\nu} K_\nu \left\{f(t); z\right\},$$

donde K_ν denota la transformación de Meijer, también conocida como K transformada ([82],[127]).

Además si $\beta = m$, $\gamma_k = k/m$ $(k = 1, \ldots, m-1)$ y $\gamma_m = \alpha - 1/m$ [61, pag. 197] tenemos que

$$\mathcal{O}\left\{f(t); z\right\} = m \cdot \mathcal{L}_\alpha^{(m)} \left\{t^{m(\gamma_m+1)-1} f(t); m \cdot z\right\},$$

donde

$$\mathcal{L}_\alpha^{(m)} \left\{f(t); z\right\} = \int_0^\infty \lambda_\alpha^{(m)}(zt) f(t) dt$$

y $\lambda_\alpha^{(m)}(x)$ es el núcleo introducido por Krätzel ([63],[65],[66]).

III.3.2 Método del operador adjunto

Nuestro objetivo en esta sección es definir y estudiar la transformación de Obrechkoff por el método del operador adjunto en espacios de distribuciones $F_{p,\mu}$ y $F'_{p,\mu}$ ([77]-[78]).

Inicialmente, vemos una serie de resultados para definir la $\mathcal{O}$-transformación sobre estos espacios.

Proposición III.3.1 *Dadas* $1 \leq p \leq \infty$, $\mu \in \mathbf{C}$, *la* $\mathcal{O}$*-transformación es una aplicación lineal y continua de* $L_{p,\mu}$ *en* $L_{p,2/p-\mu-\beta(\gamma_m+1)}$ *y de* $F_{p,\mu}$ *en* $F_{p,2/p-\mu-\beta(\gamma_m+1)}$*, siempre que*

$$\operatorname{Re}\mu > 1/p - 1. \tag{3.3.7}$$

Demostración: Inicialmente definimos la siguiente transformación integral

$$\mathcal{G}g(z) = \beta \int_0^\infty K((zx)^\beta) g(x)dx,$$

y nótese que si $g(z) = x^{\beta(\gamma_m+1)-1} f(x)$, entonces

$$\mathcal{G}g(z) = \mathcal{G}\left\{x^{\beta(\gamma_m+1)-1} f(x)\right\}(z) =$$

$$= \beta \int_0^\infty x^{\beta(\gamma_m+1)-1} K((zx)^\beta) f(x)dx = \mathcal{O}f(z).$$

Si $f \in L_{p,\mu-\beta(\gamma_m+1)+1}$, tenemos que $x^{\beta(\gamma_m+1)-1} f(x) \in L_{p,\mu}$ (por definición de $L_{p,\mu}$), es decir, $g(x) = x^{\beta(\gamma_m+1)-1} f(x) \in L_{p,\mu}$. Por lo tanto del Lema

III.1.3 obtenemos que $\mathcal{G}g(z) \in L_{p,2/p-\mu-1}$ siempre que

$$\int_0^\infty x^{\operatorname{Re}\mu-\frac{1}{p}} |J(x)|\, dx < \infty, \tag{3.3.8}$$

siendo $J(x) = K(x^\beta)$. Y además (3.3.8) se cumple en virtud de (3.3.7). El mismo resultado se sigue para los espacios de McBride. Luego con un simple cambio de variable, la $\mathcal{O}$-transformación es una aplicación lineal y continua de $L_{p,\mu}$ en $L_{p,2/p-\mu-\beta(\gamma_m+1)}$ y de $F_{p,\mu}$ en $F_{p,2/p-\mu-\beta(\gamma_m+1)}$. ■

Seguidamente veamos como viene dada la transformada de Mellin de la transformación Obrechkoff en los espacios $F_{p,\mu}$.

Proposición III.3.2 *Sean* $1 \leq p \leq 2$, $\mu \in \mathbf{C}$ *y*

$$\operatorname{Re}\mu > \frac{1}{p} - 1, \quad \operatorname{Re}(1 - s + \beta(\gamma_m + 1) - 1) = \frac{1}{p} - \operatorname{Re}\mu. \tag{3.3.9}$$

Entonces para $\varphi \in F_{p,\mu}$ *tenemos*

$$\mathcal{M}\left\{\mathcal{O}\varphi\right\}(s) =$$

$$= \prod_{k=1}^{m} \Gamma(\gamma_k + 1 + (s - \beta(\gamma_m + 1))/\beta)\mathcal{M}\varphi(1 - s + \beta(\gamma_m + 1) - 1), \tag{3.3.10}$$

Demostración: En virtud del Lema III.1.5 y la Proposición III.3.1, los dos miembros de la igualdad (3.3.10) son aplicaciones lineales y continuas de $F_{p,\mu}$ en $L^q(\mathbf{R}^+)$, siendo $1/p + 1/q = 1$. Consideremos una función $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^+)$. Aplicando el Teorema de Fubini y (3.3.5), logramos

$$\mathcal{M}\left\{\mathcal{O}\varphi\right\}(s + \beta(\gamma_m + 1) - 1) =$$

$$= \int_0^\infty z^{s+\beta(\gamma_m+1)-2} \int_0^\infty x^{\beta(\gamma_m+1)-1} K((zx)^\beta)\varphi(x)dxdz =$$
$$= \int_0^\infty x^{\beta(\gamma_m+1)-1}\varphi(x) \int_0^\infty z^{s-1} z^{\beta(\gamma_m+1)-1} K((zx)^\beta)dzdx =$$

$$= \int_0^\infty x^{\beta(\gamma_m+1)-1}\varphi(x) \cdot x^{-\beta(\gamma_m+1+(s-1)/\beta)} \prod_{k=1}^m \Gamma(\gamma_k + 1 + (s-1)/\beta)dx =$$
$$= \prod_{k=1}^m \Gamma(\gamma_k + 1 + (s-1)/\beta) \int_0^\infty x^{-s}\varphi(x)dx.$$

Entonces, reemplazando s por $s-\beta(\gamma_m+1)+1$, (3.3.10) se demuestra la proposición para $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^+)$. Como sabemos por el Lema III.1.1 que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^+)$ es denso en $F_{p,\mu}$, la relación (3.3.10) se sigue para $\varphi \in F_{p,\mu}$.

■

El siguiente teorema nos permite definir la transformación de Obrechkoff sobre $F'_{p,\mu}$.

Teorema III.3.1 *Dadas* $1 \le p \le \infty$, $\mu \in \mathbf{C}$ *y*

$$\operatorname{Re}\mu > \frac{1}{p} - 1, \tag{3.3.11}$$

se verifica que

$$\int_0^\infty (\mathcal{O}f)(x) x^{\beta(\gamma_m+1)-1}\varphi(x)dx = \int_0^\infty x^{\beta(\gamma_m+1)-1} f(x)\, (\mathcal{O}\varphi)(x)dx \tag{3.3.12}$$

para $\varphi \in F_{p,\mu-\beta(\gamma_m+1)+1}$, $f \in F_{p',\mu-\beta(\gamma_m+1)+2/p'}$ *y* $\varphi \in L_{p,\mu-\beta(\gamma_m+1)+1}$, $f \in L_{p',\mu-\beta(\gamma_m+1)+2/p'}$.

Demostración: En virtud de la Proposición III.3.1 y si (3.3.11) se satisface, entonces $\mathcal{O}f$ y $\mathcal{O}\varphi$ existen para $f \in F_{p',\mu-\beta(\gamma_m+1)+2/p'}$ y $\varphi \in F_{p,\mu-\beta(\gamma_m+1)+1}$, respectivamente. Inicialmente demostramos que la igualdad (3.3.12) es cierta para funciones de $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^+)$.

Si $f, \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^+)$ obtenemos

$$\int_0^\infty (\mathcal{O}f)(x) x^{\beta(\gamma_m+1)-1}\varphi(x)dx =$$

$$= \int_0^\infty x^{\beta(\gamma_m+1)-1}\varphi(x)dx \int_0^\infty y^{\beta(\gamma_m+1)-1} K((xy)^\beta) f(y)dy =$$

$$= \int_0^\infty y^{\beta(\gamma_m+1)-1} f(y)\, dy \int_0^\infty x^{\beta(\gamma_m+1)-1} K((xy)^\beta)\varphi(x)dx =$$

$$= \int_0^\infty y^{\beta(\gamma_m+1)-1} f(y) (\mathcal{O}\varphi)(y)dy,$$

ya que el Teorema de Fubini nos permite el cambio en el orden de integración. Entonces, para demostrar (3.3.12) siendo $\varphi \in F_{p,\mu-\beta(\gamma_m+1)+1}$, $f \in F_{p',\mu-\beta(\gamma_m+1)+2/p'}$ y $\varphi \in L_{p,\mu-\beta(\gamma_m+1)+1}$, $f \in L_{p',\mu-\beta(\gamma_m+1)+2/p'}$, es suficiente ver que ambos lados de (3.3.12) son funcionales bilineales y acotados sobre $L_{p,\mu-\beta(\gamma_m+1)+1} \times L_{p',\mu-\beta(\gamma_m+1)+2/p'}$. Aplicando la desigualdad de Hölder y la definición de la norma de $L_{p,\mu-\beta(\gamma_m+1)+1}$ logramos

$$\int_0^\infty \left|(\mathcal{O}f)(x) x^{\beta(\gamma_m+1)-1}\varphi(x)\right| dx =$$

$$= \int_0^\infty \left|x^{-\mu+\beta(\gamma_m+1)-1}\varphi(x)\right| |x^\mu (\mathcal{O}f)(x)|\, dx \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\int_0^\infty \left|x^{-\mu+\beta(\gamma_m+1)-1}\varphi(x)\right|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_0^\infty \left|x^{\mu}\left(\mathcal{O}f\right)(x)\right|^{p'} dx\right)^{1/p'} = \\ &= \|\varphi\|_{p,\mu-\beta(\gamma_m+1)+1} \|\mathcal{O}f\|_{p',-\mu}. \end{aligned}$$

Además, por la Proposición III.3.1 con p reemplazado por $p^{'}$ y μ por $\mu-\beta(\gamma_m+1)+2/p^{'}$ existe una constante $c>0$ tal que

$$\|\mathcal{O}f\|_{p',-\mu} \leq c\,\|f\|_{p',\mu-\beta(\gamma_m+1)+2/p'},$$

lo que nos permite llegar a

$$\left|\int_0^\infty \left(\mathcal{O}f\right)(x) x^{\beta(\gamma_m+1)-1}\varphi(x)dx\right| \leq c\,\|\varphi\|_{p,\mu}\,\|f\|_{p',\mu-\beta(\gamma_m+1)+2/p'}.$$

Con lo que concluimos que el lado izquierdo de (3.3.12) es un funcional bilineal acotado sobre $L_{p,\mu-\beta(\gamma_m+1)+1} \times L_{p',\mu-\beta(\gamma_m+1)+2/p'}$. El resultado para el lado derecho de (3.3.12) se prueba de una manera similar. Con esto completamos la demostración del Teorema III.3.1. ∎

Como consecuencia de este teorema definimos la $\mathcal{O}f$ transformación generalizada sobre $F_{p,\mu}^{'}$ cuando $1\leq p\leq\infty$, $\mu\in\mathbf{C}$, como:

Para cada $f\in F_{p,\mu}^{'}$ la $\mathcal{O}f$-transformación generalizada viene dada por

$$< x^{\beta(\gamma_m+1)-1}\mathcal{O}f(x), \varphi(x) > = < f(y), y^{\beta(\gamma_m+1)-1}\mathcal{O}\varphi(y) > \qquad (3.3.13)$$

con $\varphi\in F_{p,2/p-\mu-1}$.

Entonces, en virtud de la Proposición III.3.1 y la definición (3.3.13) logramos el siguiente resultado.

Proposición III.3.3 *Sean* $1 \leq p \leq \infty$, $\operatorname{Re}\mu < 1/p - 1 + \beta(\gamma_m + 1) - 1$, $\mu \in \mathbf{C}$. *Entonces el operador* $\mathcal{O}$ *es una aplicación lineal y continua de* $F'_{p,\mu}$ *en* $F'_{p,2/p-\mu+\beta(\gamma_m+1)-2}$.

Seguidamente investigamos la composición de la transformación de Obrechkoff con algunos operadores diferenciales sobre los espacios de McBride $F_{p,\mu}$ y $F'_{p,\mu}$.

Proposición III.3.4 *Sean* $1 \leq p \leq \infty$, $\mu \in \mathbf{C}$. *Para todo* $\varphi \in F_{p,\mu}$ *se sigue que*

$$z^{\beta(\gamma_m+1)-1} B_{z,(b_j),\eta} \mathcal{O}\left\{\varphi(x)\right\}(z) =$$

$$= (-1)^m \beta^m z^{\beta(\gamma_m+1+\eta)-1} \mathcal{O}\left\{x^{\eta\beta}\varphi(x)\right\}(z), \tag{3.3.14}$$

donde

$$B_{z,(b_j),\eta} \equiv \prod_{j=1}^{m} \left(z\frac{d}{dz} - b_j - \eta + 1\right) \cdots \left(z\frac{d}{dz} - b_j - 1\right)\left(z\frac{d}{dz} - b_j\right),$$

siendo $b_j = \gamma_j + 1 - 1/\beta$, $j = 1, \ldots, m$, *y*

$$\operatorname{Re}\mu > 1/p - 1. \tag{3.3.15}$$

Demostración: De acuerdo con la Proposición III.3.1 y el Lema III.1.2 ambos lados de la igualdad de (3.3.14) son aplicaciones lineales y continuas de $F_{p,\mu}$ en $F_{p,2/p-\mu-1}$ siempre que se verifique (3.3.15). Sea $\varphi \in F_{p,\mu}$ entonces

$$z^{\beta(\gamma_m+1)-1} B_{z,(b_j),\eta} \mathcal{O}\left\{\varphi(x)\right\}(z) =$$

$$= \beta \int_0^\infty B_{z,(b_j),\eta} G_{0,m}^{m,0}\left((zx)^\beta | (\gamma_j + 1 - 1/\beta)_1^m\right) \varphi(x) dx,$$

haciendo el cambio de variable $zx = u$, obtenemos

$$z^{\beta(\gamma_m+1)-1} B_{z,(b_j),\eta} \mathcal{O}\left\{\varphi(x)\right\}(z) =$$

$$= \beta \int_0^\infty B_{u,(b_j),\eta} G_{0,m}^{m,0}\left(u^\beta | (\gamma_j + 1 - 1/\beta)_1^m\right) \varphi(u/z) \frac{du}{z}$$

y por (3.3.4) tenemos

$$z^{\beta(\gamma_m+1)-1} B_{z,(b_j),\eta} \mathcal{O}\left\{\varphi(x)\right\}(z) =$$

$$= \beta \int_0^\infty (-1)^m \beta^m u^{\eta\beta} G_{0,m}^{m,0}\left(u^\beta | (\gamma_j + 1 - 1/\beta)_1^m\right) \varphi(u/z) \frac{du}{z} =$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^m \beta^m z^{\eta\beta} \beta \int_0^\infty x^{\eta\beta} G_{0,m}^{m,0}\left((zx)^\beta \,| (\gamma_j + 1 - 1/\beta)_1^m\right) \varphi(x) dx = \\ &= (-1)^m \beta^m z^{\beta(\gamma_m+1+\eta)-1} \mathcal{O}\left\{x^{\eta\beta} \varphi(x)\right\}(z). \end{aligned}$$

■

Proposición III.3.5 *Supongamos que* $1 \leq p \leq \infty$ *y* $\mu \in \mathbf{C}$, *entonces para cada* $\varphi \in F_{p,\mu}$ *conseguimos*

$$\mathcal{O}\left\{C_{z,(b_j),\eta}\varphi(x)\right\}(z) = (-1)^m \beta^m z^{\eta\beta} \mathcal{O}\left\{x^{\eta\beta}\varphi(x)\right\}(z) \tag{3.3.16}$$

siempre que

$$\operatorname{Re}\mu > 1/p - 1, \tag{3.3.17}$$

siendo

$$C_{z,(b_j),\eta} \equiv \prod_{j=1}^{m} \left(-\frac{d}{dz}z - b_j\right)\left(-\frac{d}{dz}z - b_j - 1\right)\cdots\left(-\frac{d}{dz}z - b_j - \eta + 1\right)$$

y $b_j = \gamma_j + 1 - 1/\beta$, $j = 1, \ldots, m$.

Demostración: Si se satisface la condición dada en (3.3.17), entonces por el Lema III.1.2 y la Proposición III.3.1, los dos lados de la igualdad (3.3.16) son aplicaciones lineales y continuas de $F_{p,\mu}$ en $F_{p,2/p-\mu-\beta(\gamma_m+1)}$. Sea $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^+)$, integrando por partes y aplicando (3.3.4) logramos

$$\mathcal{O}\left\{C_{z,(b_j),\eta}\varphi(x)\right\}(z) = \beta z^{-\beta(\gamma_m+1)+1} \int_0^\infty G_{0,m}^{m,0}\left((zx)^\beta | (\gamma_j + 1 - 1/\beta)_1^m\right) \cdot$$

$$\cdot C_{z,(b_j),\eta}\varphi(x)dx =$$

$$= \beta z^{-\beta(\gamma_m+1)+1} \int_0^\infty B_{z,(b_j),\eta} G_{0,m}^{m,0}\left((zx)^\beta | (\gamma_j + 1 - 1/\beta)_1^m\right)\varphi(x)dx =$$

$$= (-1)^m \beta^m z^{\eta\beta} \beta z^{-\beta(\gamma_m+1)+1} \int_0^\infty G_{0,m}^{m,0}\left((zx)^\beta | (\gamma_j + 1 - 1/\beta)_1^m\right) x^{\eta\beta}\varphi(x)dx =$$

$$= (-1)^m \beta^m z^{\eta\beta} \mathcal{O}\left\{x^{\eta\beta}\varphi(x)\right\}(z),$$

y como conocemos por el Lema III.1.1, que $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^+)$ es denso en $F_{p,\mu}$, el resultado se obtiene para $\varphi \in F_{p,\mu}$. ■

Proposición III.3.6 *Sean* $1 \leq p \leq \infty$ *y* $\mu \in \mathbf{C}$. *Para toda* $f \in F'_{p,\mu}$ *satisfaciendo*

$$\operatorname{Re}\mu < 1/p + \beta(\gamma_m + 1) - 2 \tag{3.3.18}$$

tenemos que

$$z^{\beta(\gamma_m+1)-1}\mathcal{O}\left\{x^{-\beta(\gamma_m+1)+1}C_{x,(b_j),\eta}\, x^{\beta(\gamma_m+1)-1}f(x)\right\}(z) =$$

$$= (-1)^m\beta^m z^{\beta(\gamma_m+1+\eta)-1}\mathcal{O}\left\{x^{\eta\beta}f(x)\right\}(z). \tag{3.3.19}$$

Demostración: Según el Lema III.1.4, (3.3.18) y la Proposición III.3.3, los dos lados de la igualdad dada en (3.3.19) son aplicaciones lineales y continuas de $F'_{p,\mu}$ en $F'_{p,2/p-\mu-1}$.

De acuerdo con (3.3.13) y la Definición III.1.1 se tiene que

$$\begin{aligned}
< \quad & z^{\beta(\gamma_m+1)-1}\mathcal{O}\left\{x^{-\beta(\gamma_m+1)+1}C_{x,(b_j),\eta}\, x^{\beta(\gamma_m+1)-1}f(x)\right\}(z), \varphi(z) >= \\
= \quad & < z^{-\beta(\gamma_m+1)+1}C_{z,(b_j),\eta}\, z^{\beta(\gamma_m+1)-1}f(z), z^{\beta(\gamma_m+1)-1}\mathcal{O}\varphi(z) >= \\
= \quad & < C_{z,(b_j),\eta}\, z^{\beta(\gamma_m+1)-1}f(z), \mathcal{O}\varphi(z) >= \\
= \quad & < f(z),\ z^{\beta(\gamma_m+1)-1}B_{z,(b_j),\eta}\mathcal{O}\varphi(z) >,
\end{aligned}$$

entonces por la Definición III.1.1 y teniendo en cuenta (3.3.14) se consigue

$$\begin{aligned} < \; & z^{\beta(\gamma_m+1)-1}\mathcal{O}\left\{x^{-\beta(\gamma_m+1)+1}C_{z,(b_j),\eta}\, x^{\beta(\gamma_m+1)-1}f(x)\right\}(z), \varphi(z) >= \\ = \; & < f(z), (-1)^m\beta^m\, z^{\beta(\gamma_m+1+\eta)-1}\mathcal{O}\left\{x^{\eta\beta}\varphi(x)\right\}(z) >= \\ = \; & < (-1)^m\beta^m z^{\eta\beta}f(z),\; z^{\beta(\gamma_m+1)-1}\mathcal{O}\left\{x^{\eta\beta}\varphi(x)\right\}(z) >= \\ = \; & < (-1)^m\beta^m z^{\beta(\gamma_m+1)-1}\mathcal{O}\left\{x^{\eta\beta}f(x)\right\}(z),\; z^{\eta\beta}\varphi(z) >= \\ = \; & < (-1)^m\beta^m z^{\beta(\gamma_m+1+\eta)-1}\mathcal{O}\left\{x^{\eta\beta}f(x)\right\}(z),\; \varphi(z) > . \end{aligned}$$

Con lo que concluye la demostración. ■

Proposición III.3.7 *Consideremos* $1 \leq p \leq \infty$ *y* $\mu \in \mathbf{C}$. *Si* $f \in F'_{p,\mu}$ *tal que*

$$\operatorname{Re}\mu < 1/p + \beta(\gamma_m+1) - 2, \tag{3.3.20}$$

entonces

$$B_{z,(b_j),\eta}\; z^{\beta(\gamma_m+1)-1}\mathcal{O}f(z) = (-1)^m\beta^m\, z^{\beta(\gamma_m+1+\eta)-1}\mathcal{O}\left\{x^{\eta\beta}f(x)\right\}(z). \tag{3.3.21}$$

Demostración: De acuerdo con (3.3.20), el Lema III.1.4 y la Proposición III.3.3, los dos miembros de la igualdad (3.3.21) son aplicaciones lineales y continuas de $F'_{p,\mu}$ en $F'_{p,2/p-\mu-1}$.

Para demostrar (3.3.21) debemos ver que

$$< B_{z,(b_j),\eta}\ z^{\beta(\gamma_m+1)-1}\mathcal{O}f(z), \varphi(z) >=$$

$$=< (-1)^m\beta^m\ z^{\beta(\gamma_m+1+\eta)-1}\mathcal{O}\left\{x^{\eta\beta}f(x)\right\}(z), \varphi(z) >,$$

para toda $\varphi \in F_{p,2/p-\mu-1}$.

Para ello por (3.3.13) y (3.3.16) tenemos

$$\begin{aligned}
< \ & B_{z,(b_j),\eta}\ z^{\beta(\gamma_m+1)-1}\mathcal{O}f(z), \varphi(z) >= \\
= \ & < z^{\beta(\gamma_m+1)-1}\mathcal{O}f(z), C_{z,(b_j),\eta}\varphi(z) >= \\
= \ & < f(z), z^{\beta(\gamma_m+1)-1}\mathcal{O}\left\{C_{z,(b_j),\eta}\varphi(x)\right\}(z) >= \\
= \ & < f(z), (-1)^m\beta^m z^{\beta(\gamma_m+1+\eta)-1}\mathcal{O}\left\{x^{\eta\beta}\varphi(x)\right\}(z) >= \\
= \ & < (-1)^m\beta^m\ z^{\beta(\gamma_m+1+\eta)-1}\mathcal{O}\left\{x^{\eta\beta}f(x)\right\}(z), \varphi(z) > .
\end{aligned}$$

De este modo queda probado (3.3.21). ■

III.3.3 Método del núcleo

En esta sección definimos la transformación de Obrechkoff por medio del método del núcleo sobre los espacios de funciones generalizadas $F_{p,\mu}$ y $F'_{p,\mu}$ [77]. Estudiamos y establecemos teoremas de analicitidad, acotación e inversión, que nos permiten generalizar los resultados de A. Baier y H. J. Glaeske [5] para la transformación de Laplace y los de

J. J. Betancor y L. Rodríguez-Mesa [11] para la K- transformación, a destacar la nueva fórmula inversión obtenida para la transformación de Obrechkoff lográndose como caso particular un teorema inédito para la $\mathcal{L}_{\alpha}^{(\rho)}$ transformación.

En lo que sigue μ denotará un número complejo arbitrario, β un número real positivo, $1 \leq p \leq \infty$ (mientras no se diga lo contrario), y q vendrá dado por $1/p + 1/q = 1$.

Inicialmente, recordamos algunas definiciones dadas en [78], que son útiles para obtener la fórmula de inversión.

Definición III.3.1 *Sean los conjuntos $A_{p,\mu,\beta}$ y $A'_{p,\mu,\beta}$ de números complejos definidos por*

$$A_{p,\mu,\beta} = \{\gamma : \operatorname{Re}(\beta\gamma + \mu) + \beta \neq 1/p - \beta l \;\; (l = 0, 1, 2, \ldots)\} \qquad (3.3.22)$$

$$A'_{p,\mu,\beta} = \{\gamma : \operatorname{Re}(\beta\gamma - \mu) \neq -1/p - \beta l \;\; (l = 0, 1, 2, \ldots)\} \qquad (3.3.23)$$

(Véase [78, Definition 2.5, p.522])

Definición III.3.2 *Sean* $\operatorname{Re}(\beta\gamma+\mu)+\beta > 1/p$, $\varphi \in F_{p,\mu}$. *Para* $\operatorname{Re}\delta > 0$, *los operadores de Erdélyi-Kober $I_{\beta}^{\gamma,\delta}\varphi$ vienen dados por*

$$I_{\beta}^{\gamma,\delta}\varphi(t) = (\Gamma(\delta))^{-1}\, t^{-\beta\gamma-\beta\delta} \int_0^t (t^{\beta} - u^{\beta})^{\delta-1} u^{\beta\gamma} \varphi(u) d(u^{\beta}). \qquad (3.3.24)$$

Esta definición fue extendida para $\mathrm{Re}\,\delta \leq 0$ *por medio de la fórmula*

$$I_\beta^{\gamma,\delta}\varphi = (\gamma+\delta+1)I_\beta^{\gamma,\delta+1}\varphi + \beta^{-1}I_\beta^{\gamma,\delta+1}\theta\varphi \tag{3.3.25}$$

donde $\theta_x = x\frac{d}{dx}$.

(Véase [78, Definition 2.6 (i), p.522])

Proposición III.3.8 *Si* $\gamma \in A_{p,\mu,\beta}$, *entonces* $I_\beta^{\gamma,\delta}$ *es una aplicación lineal y continua de* $F_{p,\mu}$ *en sí mismo. Si además* $\gamma+\delta \in A_{p,\mu,\beta}$, *entonces* $I_\beta^{\gamma,\delta}$ *es un isomorfismo de* $F_{p,\mu}$ *en sí mismo y*

$$\left(I_\beta^{\gamma,\delta}\right)^{-1} = I_\beta^{\gamma+\delta,-\delta}. \tag{3.3.26}$$

(Véase [78, Theorem 2.7, p.523])

Además por [78, p. 524, Definition 2.10 (ii)] tenemos

Definición III.3.3 *Sean* $f \in F'_{p,\mu}$, $1/p + 1/q = 1$ *y* $\gamma \in A'_{q,-\mu,\beta}$, *definimos* $K_\beta^{\gamma,\lambda} f \in F'_{p,\mu}$ *por*

$$< K_\beta^{\gamma,\lambda} f, \varphi > = < f, I_\beta^{\gamma-1+1/\beta,\lambda}\varphi >,$$

para toda $\varphi \in F_{p,\mu}$

A continuación establecemos un resultado que nos va a permitir definir la $\mathcal{O}$-transformación sobre los espacios $F'_{p,\mu}$ usando el método del núcleo.

Lema III.3.1 *Sea* $\beta > 1/p$. *Para cada* $z \in \mathbf{C}$ *verificando* $\operatorname{Re} z > 0$ *el núcleo* $\lambda(z,t) = z^{-\beta(\gamma_m+1)+1} G^{m,0}_{0,m}\left((zt)^\beta \,|(\gamma_k + 1 - 1/\beta)_1^m\right) \in F_{p,\mu}$ *siempre que*

$$\operatorname{Re}\mu < \beta \min_{1\le k\le m} (\gamma_k + 1) - 1 + 1/p.$$

Demostración: Podemos ver sin dificultad que

$$t^k \frac{d^k}{dt^k} \equiv \sum_{i=0}^{[k/2]} a_{i,k} \cdot t^{\beta(k-i)} \left(t^{1-\beta} \frac{d}{dt}\right)^{k-i}, \qquad (3.3.27)$$

donde $a_{0,k} = 1$ y $a_{i,k}$ son números reales positivos ($i = 1, \ldots, [k/2]$).

$$t^k \frac{d^k}{dt^k} \left(t^{-\mu}\lambda(z,t)\right) = z^{-\beta(\gamma_m+1)+1} t^k \frac{d^k}{dt^k} \left[t^{-\mu} G^{m,0}_{0,m}\left((zt)^\beta \,|(\gamma_k + 1 - 1/\beta)_1^m\right)\right]$$

$$= z^{\mu-\beta(\gamma_m+1)-1} t^k \frac{d^k}{dt^k} \left[(zt)^{-\mu} G^{m,0}_{0,m}\left((zt)^\beta \,|(\gamma_k + 1 - 1/\beta)_1^m\right)\right].$$

Por [61, (A.14), p. 315] sabemos que

$$(zt)^{-\mu} G^{m,0}_{0,m}\left((zt)^\beta \,|(\gamma_k + 1 - 1/\beta)_1^m\right) = G^{m,0}_{0,m}\left((zt)^\beta \,|(\gamma_k + 1 - 1/\beta - \mu/\beta)_1^m\right)$$

obteniendo

$$t^k \frac{d^k}{dt^k} \left(t^{-\mu}\lambda(z,t)\right) = z^{\mu-\beta(\gamma_m+1)+1} t^k \frac{d^k}{dt^k} \left[G^{m,0}_{0,m}\left((zt)^\beta \,|(\gamma_k + 1 - 1/\beta - \mu/\beta)_1^m\right)\right].$$

Además de acuerdo con (3.3.27) se tiene que

$$\begin{aligned} t^k \frac{d^k}{dt^k} \left(t^{-\mu}\lambda(z,t)\right) &= z^{\mu-\beta(\gamma_m+1)+1} \sum_{i=0}^{[k/2]} a_{i,k} \cdot t^{\beta(k-i)} \cdot \\ &\quad \cdot \left(t^{1-\beta} \frac{d}{dt}\right)^{k-i} \left[G^{m,0}_{0,m}\left((zt)^\beta \,|(\gamma_k + 1 - 1/\beta - \mu/\beta)_1^m\right)\right], \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $(zt)^\beta = u$ y utilizando [61, (A.18), p.316] logramos

$$t^k \frac{d^k}{dt^k}\left(t^{-\mu}\lambda(z,t)\right) =$$

$$= z^{\mu-\beta(\gamma_m+1)+1} \sum_{i=0}^{[k/2]} a_{i,k} \cdot G^{m,1}_{1,m+1}\left((zt)^\beta \middle| \begin{array}{l} 0 \\ (\gamma_k + 1 - 1/\beta - \mu/\beta)_1^m \quad ; k-i \end{array}\right). \tag{3.3.28}$$

Ahora por el comportamiento asintótico [76, pp. 9-10] de las funciones G de Meijer, tenemos que para $r \in \mathbf{N}$ y $\beta > 1/p$

$$\max_{0\le k\le r} \left\| t^k \frac{d^k}{dt^k}\left(t^{-\mu}\lambda(z,t)\right)\right\|_p < \infty,$$

como queríamos demostrar. ■

Seguidamente se define la transformación de Obrechkoff por el método del núcleo para posteriormente establecer algunos resultados relacionados con dicha transformada.

Definición III.3.4 *Sean* $\beta > 1/p$ *y* $\operatorname{Re}\mu < \beta \min_{1\le k\le m}(\gamma_k+1) - 1 + 1/p$. *Para cada* $f \in F'_{p,\mu}$ *la transformación generalizada de Obrechkoff* $\mathcal{O}f$ *viene dada por*

$$\mathcal{O}f(z) =< f(t), \lambda(z,t) >, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Proposición III.3.9 *Sean* $\beta > 1/p$ *y* $\operatorname{Re}\mu < \beta \min_{1\le k\le m}(\gamma_k+1) - 1 + 1/p$. *Si* $f \in F'_{p,\mu}$, *entonces* $(\mathcal{O}f)(z)$ *es una función holomorfa para* $\operatorname{Re} z > 0$.

Además,

$$\frac{d^m}{dz^m}(\mathcal{O}f)(z) =< f(t), \frac{\partial^m}{\partial z^m}\left[\lambda(z,t)\right] >, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

para cada $m \in \mathbf{N}$.

Demostración: Debemos ver que

$$\lim_{h\to 0}\frac{(\mathcal{O}f)(z+h)-(\mathcal{O}f)(z)}{h} =< f(t), \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda(z,t)\right] >, \operatorname{Re} z > 0. \quad (3.3.29)$$

Como $f \in F'_{p,\mu}$, para demostrar (3.3.29) es suficiente ver que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\lambda(z+h,t)-\lambda(z,t)}{h} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda(z,t)\right], \quad (3.3.30)$$

en el sentido de convergencia en $F_{p,\mu}$.

Consideremos $z, h \in \mathbf{C}$ tales que $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re}(z+h) > 0$. Definimos

$$\varphi_h(z,t) = \frac{\lambda(z+h,t)-\lambda(z,t)}{h} - \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda(z,t)\right], \;\; t \in (0,\infty),$$

entonces usando la fórmula integral de Cauchy obtenemos

$$\varphi_h(z,t) = \frac{h}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\lambda(\eta,t)}{(\eta-z)^2(\eta-z-h)}d\eta, \;\; t \in (0,\infty), \quad (3.3.31)$$

donde el camino de integración γ puede ser parametrizado por $\eta(\theta) = z + re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y r, h son elegidos tales que $0 < |h| < r$ y $\operatorname{Re} z > r$.

Sea $k \in \mathbf{N}$. Por (3.3.28) y (3.3.31) tenemos

$$t^k \frac{d^k}{dt^k}\left(t^{-\mu}\varphi_h(z,t)\right) = \frac{h}{2\pi i}\int_\gamma \frac{t^k \frac{d^k}{dt^k}\left(t^{-\mu}\lambda(\eta,t)\right)}{(\eta-z)^2(\eta-z-h)} d\eta =$$

$$= \frac{h}{2\pi i} \cdot z^{\mu-\beta(\gamma_m+1)+1} \sum_{i=0}^{[k/2]} a^*_{i,k} \cdot$$

$$\cdot \int_\gamma \frac{G^{m,1}_{1,m+1}\left((zt)^\beta \left| \begin{array}{l} 0 \\ (\gamma_k+1-1/\beta-\mu/\beta)_1^m \quad ; k-i \end{array}\right.\right)}{(\eta-z)^2(\eta-z-h)} d\eta.$$

Si se denota por

$$G(z,t) = G^{m,1}_{1,m+1}\left((zt)^\beta \left| \begin{array}{l} 0 \\ (\gamma_k+1-1/\beta-\mu/\beta)_1^m \quad ; k-i \end{array}\right.\right),$$

resulta

$$\left\| t^k \frac{d^k}{dt^k}\left(t^{-\mu}\varphi_h(z,t)\right)\right\|_p \leq$$

$$\leq \quad c\,|h|\, z^{\mu-\beta(\gamma_m+1)+1} \sum_{i=0}^{[k/2]} a^*_{i,k} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\|G(z,t)\|_p}{r(r-|h|)}\, d\theta.$$

Procediendo de una manera similar al Lema III.3.1, tenemos que para cada $r \in \mathbf{N}$, $\beta > 1/p$ y $\operatorname{Re}\mu < \beta \min_{1\leq k\leq m}(\gamma_k+1) - 1 + 1/p$, se tiene

$$\max_{0\leq k\leq r}\left\| t^k \frac{d^k}{dt^k}\left(t^{-\mu}\varphi_h(z,t)\right)\right\|_p \to 0,$$

cuando $|h| \to 0$.

Con esto queda probado (3.3.30). La demostración se finaliza por inducción. ∎

La siguiente proposición nos da una regla de cálculo operacional, que será útil para las aplicaciones de esta transformada integral en la solución de ciertas ecuaciones diferenciales.

Proposición III.3.10 *Sean* $\beta > 1/p$ *y* $\operatorname{Re}\mu < \beta \min_{1\leq k\leq m}(\gamma_k+1)-1+\dfrac{1}{p}$. *Para cada* $f \in F'_{p,\mu}$ *y* $m \in \mathbf{N}$ *tenemos que*

$$B_{z,(b_i)_1^m,\eta}(\mathcal{O}f)(z) =< f(t), (-1)^m \beta^m z^{\beta(\gamma_m+1+\eta)-1} t^{\eta\beta}\lambda(z,t) >, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

siendo

$$B_{z,(b_i)_1^m,\eta} \equiv z^{\beta(\gamma_m+1)-1}\prod_{i=1}^m \left(\frac{d}{dz}z - b_i\right)\left(\frac{d}{dz}z - b_i - 1\right)\cdots\left(\frac{d}{dz}z - b_i - \eta - 1\right).$$

Demostración:

Denotemos por $G^*(z,t) \equiv G_{0,m}^{m,0}\left((zt)^\beta \,|(\gamma_i + 1 - 1/\beta - \mu/\beta)_1^m\right)$. Según la Proposición III.3.9 obtenemos

$$\begin{aligned} & B_{z,(b_i)_1^m,\eta}(\mathcal{O}f)(z) = \\ = \ & < f(t), \prod_{i=1}^m \left(z\frac{d}{dz} - b_i\right)\left(z\frac{d}{dz} - b_i - 1\right)\cdots\left(z\frac{d}{dz} - b_i - \eta - 1\right) G^*(z,t) > . \end{aligned}$$

Entonces en virtud de [61, Corollary B.5] se tiene que

$$B_{z,(b_i)_1^m,\eta}(\mathcal{O}f)(z) =< f(t), (-1)^m \beta^m (zt)^{\eta\beta} G^*(z,t) >=$$

$$=< f(t), (-1)^m \beta^m (zt)^{\eta\beta} z^{\beta(\gamma_m+1)-1} \lambda(z,t) >=$$

$$=< f(t), (-1)^m \beta^m z^{\beta(\gamma_m+1+\eta)-1} t^{\eta\beta} \lambda(z,t) > .$$

■

En esta parte final del Capítulo probamos una nueva fórmula de inversión, la cual nos servirá para demostrar un resultado de unicidad y una propiedad de acotación.

Para ello, inicialmente damos un nuevo operador que en sentido clásico ha sido ampliamente estudiado por Virginia Kiryakova [61].

Definición III.3.5 *Sea $\varphi \in F_{p,\mu}$. Para $\operatorname{Re}\mu > 1/p - \beta(\gamma_k+1)$, $\gamma_k \in A_{p,\mu,\beta}$, $k = 1, \ldots, m$, $\delta_k \in \mathbf{R}$, la integral fraccionaria generalizada (operador múltiple de Erdélyi-Kober) viene dada por*

$$I_{\beta,m}^{(\gamma_k),(\delta_k)} \varphi(t) \equiv I_\beta^{\gamma_m,\delta_m} \left\{ I_\beta^{\gamma_{m-1},\delta_{m-1}} \cdots \left(I_\beta^{\gamma_1,\delta_1} \varphi(t) \right) \right\},$$

donde $I_\beta^{\gamma,\delta}$ es el operador de Erdélyi-Kober dado en la Definición III.3.2. Si $\delta_k > 0$, se tiene la siguiente representación integral:

$$I_{\beta,m}^{(\gamma_k),(\delta_k)} \varphi(t) =$$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{k=1}^m \frac{(1-\sigma_k)^{\delta_k-1} \sigma_k^{\gamma_k}}{\Gamma(\delta_k)} \varphi(t(\sigma_1 \cdots \sigma_m)^{1/\beta}) d\sigma_1 \ldots d\sigma_m = \tag{3.3.32}$$

$$= \int_0^1 G_{m,m}^{m,0}\left(\sigma \left| \begin{array}{l} (\gamma_k+\delta_k)_1^m \\ (\gamma_k)_1^m \end{array}\right.\right)\varphi(t\sigma^{1/\beta})d\sigma = \tag{3.3.33}$$

$$= t^{-\beta}\int_0^t G_{m,m}^{m,0}\left(\left(\frac{u}{t}\right)^\beta \left| \begin{array}{l} (\gamma_k+\delta_k)_1^m \\ (\gamma_k)_1^m \end{array}\right.\right)\varphi(u)d(u^\beta). \tag{3.3.34}$$

Por las condiciones que se establecen, las tres representaciones integrales anteriores ((3.3.32)-(3.3.34)) son equivalentes, para un demostración clásica ver [61, Theorem 1.2.10, p.30-32]. Además $I_{\beta,m}^{(\gamma_k),(\delta_k)}$ son operadores lineales y continuos de $F_{p,\mu}$ en sí mismo.

Por otra parte, si $\gamma_k+\delta_k \in A_{p,\mu,\beta}$, $k=1,\ldots,m$, definimos el operador lineal inverso por la izquierda de la integral fraccionaria generalizada $I_{\beta,m}^{(\gamma_k),(\delta_k)}$ como una derivada fraccionaria generalizada (siguiendo un procedimiento similar al dado en [61], para el caso clásico), como:

$$\begin{aligned}
&\left(I_{\beta,m}^{(\gamma_k),(\delta_k)}\right)^{-1}\varphi(x) = \\
&= \left(I_\beta^{\gamma_m,\delta_m}\right)^{-1}\left\{\left(I_\beta^{\gamma_{m-1},\delta_{m-1}}\right)^{-1}\cdots\left[\left(I_\beta^{\gamma_1,\delta_1}\right)^{-1}\varphi(x)\right]\right\} = \\
&= I_\beta^{\gamma_m+\delta_m,-\delta_m}\left\{I_\beta^{\gamma_{m-1}+\delta_{m-1},-\delta_{m-1}}\cdots\left[I_\beta^{\gamma_1+\delta_1,-\delta_1}\varphi(x)\right]\right\} = \\
&= I_{\beta,m}^{(\gamma_k+\delta_k),(-\delta_k)}\varphi(x),
\end{aligned}$$

donde $I_\beta^{\gamma_k+\delta_k,-\delta_k}$ viene dada como en la Definición III.3.2 ([78, Definition 2.6 (i), p.52]).

También juega un papel importante otra integral fraccionaria que generaliza a la de Weyl ([61],[103]) y que establecemos a continuación:

Definición III.3.6 *Sea* $f \in F'_{p,\mu}$. *Para* $\mathrm{Re}\,\mu > 1/p - \beta\gamma_k - 1$, $\gamma_k \in A'_{q,-\mu,\beta}$, $k = 1,\ldots,m$, *la integral de tipo Weyl generalizada viene dada por*

$$K_{\beta,m}^{(\gamma_k),(\delta_k)} f(t) \equiv K_\beta^{\gamma_1,\delta_1} \left\{ K_\beta^{\gamma_2,\delta_2} \cdots \left(K_\beta^{\gamma_m,\delta_m} f(t) \right) \right\},$$

es decir, para cada $\varphi \in F_{p,\mu}$, *se tiene*

$$< K_{\beta,m}^{(\gamma_k),(\delta_k)} f, \varphi >=< f, I_\beta^{(\gamma_k - 1 + 1/\beta),(\delta_k)} \varphi > .$$

Bajo las condiciones anteriores, $K_{\beta,m}^{(\gamma_k),(\delta_k)}$ es una aplicación lineal continua e inyectiva de $F'_{p,\mu}$ en sí mismo.

Además, si $\gamma_k + \delta_k \in A'_{q,-\mu,\beta}$ $(k = 1,\ldots,m)$, para $\varphi \in F_{p,\mu}$, el operador lineal inverso por la izquierda de la integral fraccionaria generalizada $K_{\beta,m}^{(\gamma_k),(\delta_k)}$ se define como

$$\begin{aligned} < & \left(K_{\beta,m}^{(\gamma_k),(\delta_k)} \right)^{-1} f, \varphi >=< K_{\beta,m}^{(\gamma_k+\delta_k),(-\delta_k)} f, \varphi >= \\ = & < f, \left(I_\beta^{(\gamma_k - 1 + 1/\beta),(\delta_k)} \right)^{-1} \varphi >=< f, I_{\beta,m}^{(\gamma_k+\delta_k),(-\delta_k)} \varphi >, \end{aligned}$$

donde $I_\beta^{(\gamma_k+\delta_k),(-\delta_k)}$ viene dado como la Definición III.3.5.

Definición III.3.7 *Sean* $\lambda_k = \gamma_m - \gamma_k + k/m > 0$, $\mathrm{Re}\,\mu > 1/p - m(\gamma_k + 1) + 1$ *y* $\gamma_k \in A_{p,\mu-1,m}$, $k = 1, \ldots, m-1$. *Para* $\varphi \in F_{p,\mu}$ *definimos el siguiente operador:*

$$
\begin{aligned}
&T\varphi(t) = \\
= \quad & t^{m-1} \int_0^{1/t} G^{m-1,0}_{m-1,m-1} \left(u^m t^m \left| \begin{array}{l} (\gamma_k + \lambda_k)_1^{m-1} \\ (\gamma_k)_1^{m-1} \end{array} \right. \right) u^{-m(1+\gamma_m)} \varphi(1/u) d(u^m) = \\
= \quad & t^{-1} \cdot I^{(\gamma_k),(\lambda_k)}_{m,m-1} \left\{ \phi(.) \right\} (1/t),
\end{aligned}
$$

donde $\phi(u) = u^{-m(1+\gamma_m)} \varphi(1/u)$.

Podemos ver que T es una aplicación lineal y continua de $F_{p,\mu}$ en $F_{p,\mu+m(1+\gamma_m)+1}$, ya que si $\varphi(u) \in F_{p,\mu}$, entonces $\varphi(1/u) \in F_{p,\mu}$.

En sentido clásico fue establecido un operador de tipo "Sonine-Dimovski" (ver [61]). A continuación por medio de T definimos un operador tipo "Sonine-Dimovski" sobre $F'_{p,\mu}$, dado por:

Definición III.3.8 *Para* $f \in F'_{p,\mu}$ *se define el operador tipo "Sonine-Dimovski"* T^* *como*

$$
< T^* f(t), \varphi(t) > = < f(t), T\varphi(t) >,
$$

donde $\varphi \in F_{p,\mu - m(1+\gamma_m)-1}$. *Es decir,*

$$
T^* f(t) = t^{m(1+\gamma_m)} K^{(\gamma_k + 1 - 1/m),(\lambda_k)}_{m,m-1} \left[g(.) \right] (1/t),
$$

siendo $g(u) = u \cdot f(1/u)$.

Por la definición de T^* *se puede comprobar que es una aplicación lineal y continua de* $F'_{p,\mu}$ *en* $F'_{p,\mu-m(1+\gamma_m)-1}$. *Además, si* $\gamma_m + k/m \in A_{p,\mu-1,m}$ *(para* $k = 1, \ldots, m-1$*) el operador* T^* *admite inverso.*

Para establecer el teorema de inversión necesitamos recordar el siguiente resultado dado en [5, Theorem 4.1, p.318] para la transformación de Laplace y demostrar un importante lema que garantice cierta relación entre la transformación de Laplace y la $\mathcal{O}$-transformación.

Teorema III.3.2 *Dadas* $f \in F'_{p,\mu}$, $\mathrm{Re}\,\mu < 1/p$, $\mathrm{Re}\, z > 0$ *y* $c, r \in (0, \infty)$, *se sigue que*

$$f(t) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{(2\pi i)} \int_{c-ir}^{c+ir} \mathcal{L}\{f(t); z\} e^{tz} dz,$$

entendiendo que la convergencia es en $\mathcal{D}'(I)$, *siendo*

$$\mathcal{L}\{f(t); z\} =< f(t), e^{-zt} >,$$

la transformada de Laplace de f.

Veamos a continuación el lema mencionado.

Lema III.3.2 *Sean* $\beta = m > 1/p$, $\lambda_k = \gamma_m - \gamma_k + k/m > 0$ *y* $f \in F'_{p,\mu}$. *Si las siguientes condiciones* *(i)* $\gamma_k \in A_{p,\mu-1,m}$ *cuando* $k = 1, \ldots, m-1$;

(ii) $1/p - m(\gamma_k + 1) + 1 < \operatorname{Re}\mu < m \min\limits_{1\le k\le m} (\gamma_k + 1) - 1 + 1/p$, *para* $k = 1, \ldots, m$;

se satisfacen, entonces

$$\mathcal{L}\{T^* f(t); z\} = c_1 \cdot \mathcal{O}\{f(t); (z/m)\} \quad (\operatorname{Re} z > 0),$$

donde

$$c_1 = \frac{(2\pi)^{(1-m)/2}}{m^{1/2-m}}.$$

Demostración: Calculemos $T\left\{e^{-zu^{-1}}\right\}(1/t)$, es decir,

$$T\left\{e^{-zu^{-1}}\right\}(1/t) = t \cdot I_{m,m-1}^{(\gamma_k),(\lambda_k)}\left\{u^{-m(1+\gamma_m)}e^{-zu^{-1}}\right\}(t) =$$

$$= t^{1-m}\int_0^t G_{m-1,m-1}^{m-1,0}\left(\frac{u^m}{t^m}\,\middle|\,\begin{array}{l}(\gamma_k+\lambda_k)_1^{m-1}\\ (\gamma_k)_1^{m-1}\end{array}\right) u^{-m(1+\gamma_m)}e^{-zu^{-1}}d(u^m).$$

Haciendo el cambio $u = x^{-1}$ resulta

$$\begin{aligned} &T\left\{e^{-zu^{-1}}\right\}(1/t) = \\ = \;& t^{1-m}\int_{t^{-1}}^{\infty} G_{m-1,m-1}^{m-1,0}\left(\frac{t^{-m}}{x^m}\,\middle|\,\begin{array}{l}(\gamma_k+\lambda_k)_1^{m-1}\\ (\gamma_k)_1^{m-1}\end{array}\right) x^{m(1+\gamma_m)}e^{-zx}dx = \\ = \;& t^{1-m}\int_{t^{-1}}^{\infty} G_{m-1,m-1}^{0,m-1}\left(\frac{x^m}{t^{-m}}\,\middle|\,\begin{array}{l}(1-\gamma_k)_1^{m-1}\\ (1-\gamma_k-\lambda_k)_1^{m-1}\end{array}\right) x^{m(1+\gamma_m)}e^{-zx}dx, \end{aligned}$$

denotando la última integral por J y realizando la siguiente sustitución, para $x < t^{-1}$,

$$e^{-zx} \equiv G_{0,1}^{1,0}(zx\,|0), G_{m-1,m-1}^{0,m-1}\left(\frac{x^m}{t^{-m}}\,\middle|\,\begin{array}{l}(1-\gamma_k)_1^{m-1}\\ (1-\gamma_k-\lambda_k)_1^{m-1}\end{array}\right) \equiv 0,$$

tenemos que

$$J = t^{1-m}\int_{t^{-1}}^{\infty} x^{m(1+\gamma_m)} G_{0,1}^{1,0}\left(zx\,|0\right) \cdot G_{m-1,m-1}^{0,m-1}\left(\frac{x^m}{t^{-m}}\left|\begin{array}{l}(1-\gamma_k)_1^{m-1}\\(1-\gamma_k-\lambda_k)_1^{m-1}\end{array}\right.\right) dx.$$

Procediendo como en [61, pp. 183-184], logramos

$$J = \frac{(2\pi)^{(1-m)/2}}{m^{1/2-m}} \cdot z^{-m(\gamma_m+1)+1} \cdot G_{0,m}^{m,0}\left((z/m)^m\, t^{-m} | (\gamma_k + 1 - 1/m)_1^m\right).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} T\left\{e^{-zu^{-1}}\right\}(t) &= \frac{(2\pi)^{(1-m)/2}}{m^{1/2-m}} \cdot z^{-m(\gamma_m+1)+1} \cdot \\ &\cdot G_{0,m}^{m,0}\left((z/m)^m\, t^{-m} | (\gamma_k + 1 - 1/m)_1^m\right) \qquad (3.3.35) \end{aligned}$$

Por otra parte, por definición, sabemos que

$$\mathcal{L}\{T^* f(t); z\} = < T^* f(t), e^{-zt} > =$$

$$= < f(t), t^{-1} \cdot I_{m,m-1}^{(\gamma_k),(\lambda_k)}\left\{u^{-m(1+\gamma_m)} e^{-zu^{-1}}\right\}(1/t) > =$$

$$= < f(1/t), t \cdot I_{m,m-1}^{(\gamma_k),(\lambda_k)}\left\{u^{-m(1+\gamma_m)} e^{-zu^{-1}}\right\}(t) >,$$

y de acuerdo con (3.3.35) se sigue que

$$\mathcal{L}\{T^* f(t); z\} =$$

$$= < f(1/t), c_1 \cdot z^{-m(\gamma_m+1)+1} \cdot G_{0,m}^{m,0}\left((z/m)^m\, t^{-m} | (\gamma_k + 1 - 1/m)_1^m\right) > =$$

$$
\begin{aligned}
&= \; < f(t), c_1 \cdot z^{-m(\gamma_m+1)+1} \cdot G_{0,m}^{m,0}\left(\left(\frac{z}{m}\right)^m t^m \middle| (\gamma_k+1-1/m)_1^m\right) >= \\
&= \; c_1 < f(t), \lambda(z/m,t) >= c_1 \cdot \mathcal{O}\{f(t);(z/m)\}.
\end{aligned}
$$

■

Una vez establecidos los resultados anteriores, podemos enunciar y demostrar el siguiente:

Teorema III.3.3 *(Inversión) Sea* $\beta = m > 1/p$, $\lambda_k = \gamma_m - \gamma_k + k/m > 0$, $c, r \in (0,\infty)$ *y* $f \in F_{p,\mu}^{'}$. *Si las siguientes condiciones*

(i) $\gamma_k \in A_{p,\mu-1,m}$, $\gamma_m + k/m \in A_{p,\mu-1,m}$ *para* $k = 1,\ldots,m-1$;

(ii) $1/p - m(\gamma_k+1) + 1 < \operatorname{Re}\mu < m \min_{1\le k\le m}(\gamma_k+1) - 1 + 1/p$, *cuando* $k = 1,\ldots,m$;

se verifican, entonces

$$
f(t) = t^{-1} \cdot \lim_{r\to\infty} \frac{1}{(2\pi i)} K_{m,m-1}^{(\gamma_m+(k-1)/m+1),(-\lambda_k)}\left\{\int_{c-ir}^{c+ir} \phi(.,z)dz\right\}(1/t),
$$

en el sentido de convergencia en $\mathcal{D}^{'}(I)$, *siendo*

$$
\phi(u,z) = \mathcal{O}\{f(u);(z/m)\}u^{m(1+\gamma_m)}e^{z/u}.
$$

Demostración: Haciendo uso del Teorema III.3.2 y del Lema III.3.2, obtenemos

$$
T^* f(t) = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{(2\pi i)} \int_{c-ir}^{c+ir} \mathcal{O}\{f(t);(z/m)\}e^{tz}dz, \qquad (3.3.36)
$$

donde

$$T^* = t^{m(1+\gamma_m)} K_{m,m-1}^{(\gamma_k+1-1/m),(\lambda_k)} \left[uf(1/u) \right] (1/t).$$

Luego de (3.3.36) tenemos

$$t^{m(1+\gamma_m)} K_{m,m-1}^{(\gamma_k+1-1/m),(\lambda_k)} \left[uf(1/u) \right] (1/t) =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{(2\pi i)} \int_{c-ir}^{c+ir} \mathcal{O}\{f(t); (z/m)\} e^{tz} dz,$$

es decir,

$$K_{m,m-1}^{(\gamma_k+1-1/m),(\lambda_k)} \left[uf(1/u) \right] (1/t) =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{(2\pi i)} t^{-m(1+\gamma_m)} \int_{c-ir}^{c+ir} \mathcal{O}\{f(t); (z/m)\} e^{tz} dz,$$

o también,

$$K_{m,m-1}^{(\gamma_k+1-1/m),(\lambda_k)} \left[uf(1/u) \right] (t) =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \frac{1}{(2\pi i)} t^{m(1+\gamma_m)} \int_{c-ir}^{c+ir} \mathcal{O}\{f(t); (z/m)\} e^{z/t} dz,$$

dado que $\gamma_m + k/m \in A_{p,\mu-1,m}$, sabemos que el operador T^* admite inverso, y por tanto,

$$tf(1/t) = K_{m,m-1}^{(\gamma_m+(k-1)/m+1),(-\lambda_k)} \left\{ \lim_{r\to\infty} \frac{1}{(2\pi i)} \int_{c-ir}^{c+ir} \phi(.,z) dz \right\} (t),$$

donde $\phi(u,z) = \mathcal{O}\{f(u); (z/m)\} u^{m(1+\gamma_m)} e^{z/u}$, luego

$$f(t) = t^{-1} \cdot \lim_{r\to\infty} \frac{1}{(2\pi i)} K_{m,m-1}^{(\gamma_m+(k-1)/m+1),(-\lambda_k)} \left\{ \int_{c-ir}^{c+ir} \phi(.,z) dz \right\} (1/t).$$

■

Observación III.3.1 *Nótese que como caso particular cuando* $\beta = m$, $\gamma_k = k/m$ $(k = 1, \ldots, m-1)$ *y* $\gamma_m = \nu - 1/m$, *obtenemos una nueva fórmula de inversión para la transformación de Krätzel* $\mathcal{L}_\alpha^{(\rho)}$ *([63],[65],[66])*

A continuación establecemos el siguiente resultado de unicidad.

Proposición III.3.11 *Sean* $\beta = m > 1/p$, $\lambda_k = \gamma_m - \gamma_k + k/m > 0$ *y* $f \in F'_{p,\mu}$. *Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones:*

(i) $\gamma_k \in A_{p,\mu-1,m}$, $\gamma_m + k/m \in A_{p,\mu-1,m}$ *cuando* $k = 1, \ldots, m-1$;

(ii) $1/p - m(\gamma_k + 1) + 1 < \operatorname{Re}\mu < m \min_{1 \le k \le m} (\gamma_k + 1) - 1 + 1/p$, *para* $k = 1, \ldots, m$.

Entonces si $\mathcal{O}\{f(t); z\} = \mathcal{O}\{g(t); z\} \Rightarrow f = g$.

Demostración: La proposición se sigue si probamos que dada $f \in F'_{p,\mu}$ y $\mathcal{O}\{f(t); z\} = 0 \Rightarrow f = 0$.

En virtud del Teorema III.3.3, tenemos que si $f \in F'_{p,\mu}$ y $\mathcal{O}\{f(t); z\} = 0$, entonces $< f, \varphi >= 0$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. Luego dado que $\mathcal{D}(I)$ es denso en $F_{p,\mu}$ [77, Chapter 2] se concluye que $f = 0$. ■

Para concluir demostramos una propiedad de acotación:

Proposición III.3.12 *Sean $\beta > 1/p$ y $\operatorname{Re}\mu < \beta \min_{1\le k\le m} (\gamma_k + 1) - 1 + \frac{1}{p}$. Si $f \in F'_{p,\mu}$ entonces existe una constante positiva c tal que*

$$|\mathcal{O}\{f(t);z\}| \le c \cdot z^{\max\{\mu-\beta(\gamma_m+1)+1-\beta,\beta(\gamma_1-\gamma_m)\}} \quad (\operatorname{Re} z > 0).$$

Demostración: Sea $f \in F'_{p,\mu}$. Sabemos por [127, Theorem 1.8-1, p.18] que existe $c > 0$ y $r \in \mathbf{N}$ tal que

$$|\mathcal{O}\{f(t);z\}| \le$$

$$\le c \cdot \max_{0\le k\le r} \left\| t^k \frac{d^k}{dt^k} \left(t^{-\mu} z^{-\beta(\gamma_m+1)+1} G^{m,0}_{0,m}\left((zt)^\beta \,|(\gamma_k + 1 - 1/\beta)_1^m \right)\right) \right\|_p .$$

Entonces procediendo como en el Lema III.3.1 resulta

$$|\mathcal{O}\{f(t);z\}| \le$$

$$\begin{aligned} \le \quad & c \cdot z^{\mu-\beta(\gamma_m+1)+1} \sum_{i=0}^{[k/2]} a_{i,k} \cdot \max_{0\le k\le r} \|G(z,t)\|_p \le \\ \le \quad & c \cdot z^{\max\{\mu-\beta(\gamma_m+1)+1-\beta,\beta(\gamma_1-\gamma_m)\}}, \end{aligned}$$

donde $G(z,t) = G^{m,1}_{1,m+1}\left((zt)^\beta \,\middle|\, \begin{array}{l} 0 \\ (\gamma_k + 1 - 1/\beta - \mu/\beta)_1^m \quad ; k - i \end{array} \right)$.

■

Capítulo IV

Potenciales de Hankel y espacios de funciones

IV.1 Introducción y preliminares

En la literatura matemática podemos encontrar la siguiente variante de la transformación integral de Hankel

$$h_\mu(f)(y) = \int_0^\infty (xy)^{-\mu} J_\mu(xy) f(x) x^{2\mu+1} dx, \quad y \in (0, \infty), \qquad (4.1.1)$$

donde la función J_μ representa a la función de Bessel de primera especie y de orden μ, siendo $\mu \geq -1/2$ [118]. La transformación h_μ es a veces designada como transformación integral de Hankel-Schwartz o de

Fourier-Bessel (véase [70], [79], [80], [105], [106], [112] y [113]). Como hemos citado en el prólogo, a lo largo de este capítulo la denominamos simplemente transformación integral de Hankel.
A efectos de permitir una mejor lectura, recordamos ahora la definición de algunos espacios de funciones importantes en las investigaciones realizadas sobre la transformación h_μ, ya que nos serán de gran utilidad en el estudio abordado en este capítulo.

F. M. Cholewinski [20], D. T. Haimo [45] e I. I. Hirschman, Jr. [50] estudian inicialmente la convolución para la transformación de Hankel. Dichos autores definen la convolución de Hankel # de f y g por

$$(f\#g)(x) = \int_0^\infty f(y)(\tau_x g)(y) d\gamma(y),\ x \in I,$$

siendo $d\gamma(x) = \dfrac{x^{2\mu+1}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} dx$ y donde el operador de traslación de Hankel τ_x, $x \in (0,\infty)$, viene definido por

$$(\tau_x g)(y) = \int_0^\infty D_\mu(x,y,z) g(z) d\gamma(z).$$

La función núcleo $D_\mu(x,y,z)$, $x,y,z \in (0,\infty)$, viene dada por

$$D_\mu(x,y,z) = \frac{2^{3\mu-1}\Gamma(\mu+1)^2}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2+\mu)} (xyz)^{-2\mu} A(x,y,z)^{2\mu-1}, x,y,z \in (0,\infty)$$

donde $A(x,y,z)$ es el área del triángulo cuyas aristas miden x,y,z, si este triángulo existe, y $A(x,y,z) = 0$ en otro caso.

Nótese que esta convolución sigue propiedades similares a la convolución usual asociada a la transformación de Fourier [50, Theorem 2.d], como por ejemplo, se puede observar con la fórmula de intercambio

$$h_\mu (f \# g) = h_\mu f \cdot h_\mu g \tag{4.1.2}$$

válida cuando $f, g \in L^1_\mu$ y también para otros espacios de la clase L^p_μ ([101]), donde por L^p_μ, $1 \leq p < \infty$, denotaremos el espacio constituido por las funciones f medibles Lebesgue sobre $(0, \infty)$ tales que

$$\|f\|_{p,\mu} = \int_0^\infty |f(x)|^p \, x^{2\mu+1} dx < \infty,$$

y por L^∞ el espacio de todas las funciones esencialmente acotadas respecto a la medida de Lebesgue sobre $I = (0, \infty)$, es decir,

$$\|f\|_{\infty,\mu} = \|f\|_\infty = \sup \mathrm{esen} \, |f| < \infty.$$

Además escribiremos L^p y $\|.\|_p$ en vez de L^p_μ y $\|.\|_{p,\mu}$, respectivamente, cuando $\mu = -1/2$. Recordemos que C.S. Herz ([47, Teorema 3, p. 996]) demostró que h_μ puede ser extendida como un operador acotado de L^p_μ en L^q_μ, siempre que $1 \leq p \leq 2$, donde q es el exponente conjugado de p, esto es, $q = p/(p-1)$, cuando $1 < p < \infty$, y $q = \infty$ cuando $p = 1$.

También nos será útil la fórmula de Parseval, que como se sabe es

$$\|f\|_{2,\mu} = \|h_\mu f\|_{2,\mu} \, . \tag{4.1.3}$$

La transformación h_μ de Hankel ha sido definida sobre espacios de funciones generalizadas por diferentes autores como puede verse en [2], [9], [70], [81] y [104]. Entre ellos, G. Altenburg [2] introdujo el espacio de funciones $\mathcal{H}$, que consiste en

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \{f(x) : f(x) \in \mathcal{C}^\infty((0,\infty)) \text{ y} \\ \gamma_{m,k}(f) &= \sup_{x\in(0,\infty)} \left|x^m (x^{-1}D)^k f(x)\right| < \infty \ (m,k \in \mathbf{N}) \ \}\end{aligned}$$

Cuando dotamos a $\mathcal{H}$ de la topología generada por la familia de seminormas $\{\gamma_{m,k}\}_{(m,k)\in\mathbf{N}x\mathbf{N}}$, $\mathcal{H}$ es un espacio de Fréchet y la transformación h_μ un automorfismo de $\mathcal{H}$. Como es usual denotaremos al espacio dual de $\mathcal{H}$ por $\mathcal{H}'$. Nótese que si $f \in L^p_\mu$, para algún $p \in [1,\infty)$, entonces f define un elemento de $\mathcal{H}'$ mediante

$$< f, \phi >= \int_0^\infty f(x)\phi(x)x^{2\mu+1}dx,\ \phi \in \mathcal{H}.$$

Entenderemos por $\Delta_\mu \equiv \Delta_{\mu,x}$ al operador diferencial de Bessel $x^{-2\mu-1}Dx^{2\mu+1}D$. Es conocido que si $u \in \mathcal{H}'$ se tiene que

$$h_\mu\left(\Delta_\mu u\right)(x) = -x^2 u(x). \tag{4.1.4}$$

Varios teoremas de multiplicadores han sido estudiados con la transformación integral de Hankel h_μ. En esta memoria usaremos el dado por J. Gosselin y K. Stempak en [42, Corollary 1.2, p. 656], que fue extendido por J.J. Betancor y L. Rodríguez-Mesa en [14] y para el cual, recientemente R. Kapelko [58] ha dado otra demostración.

Teorema IV.1.1 *Sea $k = [\mu] + 1$, donde $[.]$ denota como es usual a la función parte entera. Asumamos que $m \in \mathcal{C}^k(I)$ es una función definida sobre I tal que existe $C > 0$ para la cual*

$$\left\{ \int_{R/2}^{R} \left| (x^{-1}D)^{\alpha} m(x) \right|^2 d\gamma(x) \right\}^{1/2} \leq C R^{\mu+1-\alpha}, \tag{4.1.5}$$

donde C es una constante independiente de $R > 0$ y $\alpha = 0, 1, \ldots, k$, entonces se tiene

$$\|h_\mu(m\, h_\mu f)\|_{p,\mu} \leq A \, \|f\|_{p,\mu} \,, 1 < p < \infty.$$

A continuación comentaremos brevemente el contenido de este capítulo.

Después de esta introducción, la sección segunda la dedicamos al estudio de espacios de funciones y en particular, se define un nuevo espacio tipo Sobolev, el cual es caracterizado por medio de módulos de continuidad generalizados. Este espacio de Sobolev, permite caracterizar un espacio de potenciales [3] que denominamos potenciales de Hankel, mediante un teorema análogo al dado por A. P. Calderón para los potenciales de Bessel [16]. En esta misma sección, caracterizamos los potenciales de Hankel por medio de módulos de continuidad modificados, siguiendo las ideas de E. Stein [111]. Finalizamos esta sección obteniendo varias equivalencias entre los espacios tipo Lispchitz estudiados por J. J. Betancor y L. Rodríguez-Mesa [12] por medio de integrales de Poisson [112]. En la siguiente sección estudiamos espacios tipo Besov ([13] y [3]) e introducimos nuevos espacios tipo Triebel-Lizorkin y de Nikol'skii, para en el apartado IV.3, caracterizar el espacio de los potenciales de Hankel por medio de los espacios tipo Triebel-Lizorkin. En la sección cuarta extendemos los potenciales de Hankel ([92], [3]) al caso no lineal y se introducen las capacidades asociadas a estos potenciales para estudiar el problema de encontrar una función extremal para estas capacidades [1]. Finalizamos este capítulo dando ejemplos de algunas aplicaciones.

IV.2 Espacios tipo Lipschitz, Sobolev y potenciales de Hankel

IV.2.1 Espacios de tipo Sobolev y potenciales de Hankel

En 1984, G. Altenburg [3] introduce por primera vez los potenciales de Hankel. Posteriormente, R. S. Pathak y P. K. Pandey [92] estudian una variante de estos potenciales. En esta sección continuamos los trabajos anteriormente citados basados en las ideas de E. M. Stein [111] y M. H. Taibleson [114]. Para ello se comienza dando la:

Definición IV.2.1 *Para $f \in L^p_\mu$ $(1 \leq p \leq \infty)$, se define*

$$w_{p,\mu}(f)(t) = \|\tau_t f - f\|_{p,\mu}, \ t \in (0,\infty), \tag{4.2.1}$$

donde $w_{p,\mu}(f)(t)$ se denominará módulo de continuidad modificado. Además de ([71], [73]) se tiene el siguiente teorema de valor medio generalizado

$$\tau_t f(x) - f(x) = Ct^2 \Delta_\mu f(x+\theta t), \ 0 < \theta < 1. \tag{4.2.2}$$

Damos a continuación una nueva definición de un espacio tipo Sobolev $L^{m,p}_\mu$ que será el análogo al espacio de Sobolev con la transformación de Fourier, para obtener nuevas caracterizaciones de estos espacios tipo Sobolev y los espacios de los potenciales de Hankel involucrando los módulos de continuidad modificados $w_{p,\mu}$ (Proposición IV.2.5 y Proposición IV.2.7).

Definición IV.2.2 *Para $m \in \mathbf{N}$ y $1 \leq p < \infty$ definimos $L^{m,p}_\mu$ como*

$$L^{m,p}_\mu = \left\{ T \in \mathcal{H}' : T \in L^1_{loc,\mu} \ y \ \Delta^j_\mu T \in L^p_\mu, 0 \leq j \leq m \right\}$$

y lo dotamos con la norma

$$\|T\|_{L^{m,p}_\mu} = \sum_{j=0}^{m} \left\| \Delta^j_\mu T \right\|_{p,\mu}.$$

Proposición IV.2.1 *Si* $1 \leq p < \infty$, *entonces* $L_\mu^{m,p}$ *es completo.*

Demostración: Sea $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy en $L_\mu^{m,p}$. Luego $\left\{\Delta_\mu^j f_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en L_μ^p, $j = 0, \ldots, m$.

Representamos por g_j el límite en L_μ^p de $\left\{\Delta_\mu^j f_k\right\}_{k=1}^{\infty}$.

Para cada $\phi \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$\int_0^\infty \left(\Delta_\mu^j f_k\right) \phi \, d\gamma \to \int_0^\infty g_j \cdot \phi \, d\gamma = < g_j, \phi > \tag{4.2.3}$$

cuando $k \to \infty$,

y además

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left(\Delta_\mu^j f_k\right) \phi \, d\gamma &= < \Delta_\mu^j f_k, \phi >= \\ &= < f_k, \Delta_\mu^j \phi > . \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Entonces en virtud de (4.2.3) se sigue que

$$< f_k, \Delta_\mu^j \phi > \to < g_0, \Delta_\mu^j \phi > = < \Delta_\mu^j g_0, \phi > . \tag{4.2.5}$$

Luego combinando (4.2.4) y (4.2.5) logramos

$$\int_0^\infty \left(\Delta_\mu^j f_k\right) \phi \, d\gamma = < \Delta_\mu^j g_0, \phi > . \tag{4.2.6}$$

Por tanto, de (4.2.3), (4.2.6) y la unicidad del límite obtenemos que

$$< \Delta_\mu^j g_0, \phi > = < g_j, \phi >,$$

para toda $\phi \in \mathcal{H}$

Entonces, $\Delta_\mu^j f_k \to \Delta_\mu^j g_0$ en L_μ^p cuando $k \to \infty$, para $j = 1, \ldots, m$. Es decir, $f_k \to g_0$ en $L_\mu^{m,p}$ cuando $k \to \infty$. ■

A continuación exponemos la definición de los potenciales de Hankel y establecemos algunos resultados que nos serán útiles en las siguientes secciones.

Definición IV.2.3 *Los potenciales de Hankel H_μ^s de una función $u \in \mathcal{H}'$ de orden $s, s \in \mathbf{R}$ vienen dados por*

$$\begin{aligned}\left(H_\mu^s u\right)(x) &= h_\mu\left((1+\xi^2)^{-s/2}(h_\mu u)(\xi)\right)(x) = \\ &= (G_s \# u)(x),\end{aligned}$$

donde $\#$ es la convolución de Hankel y

$$G_s(y) = 2^{s/2-1}\Gamma(s/2) \cdot y^{s/2-\mu-1} K_{\mu-s/2+1}(y)$$

(Para todo s, por continuación analítica, ver [4, p. 417]) siendo $K_{\mu-s/2+1}$ la función de Bessel modificada de tercera especie y de orden $\mu - s/2 + 1$ (ver [118]). Asimismo, para toda $u \in \mathcal{H}'$ se tiene que

$$H_\mu^s H_\mu^{-s} u = u. \tag{4.2.7}$$

Recordemos ahora la definición de función semicontinua inferior ([41],[122]).

Definición IV.2.4 *Una función $f : X \to (-\infty, \infty]$ se dice que es semicontinua inferior si $\{x : f(x) > a\}$ es abierto para todo $a \in \mathbf{R}$.*

Además es conocido que toda función que viene definida como límite puntual de una sucesión creciente de funciones semicontinuas inferiores es semicontinua inferior [122, Corolario 1, p. 294].

Lema IV.2.1 *Sean $1 \leq p < \infty$, $\mu \geq -1/2$ y $u \in L^p_\mu$. Entonces $H^s_\mu u$ es semicontinua inferior.*

Demostración: Dada

$$\left(H^s_\mu u\right)(x) = (G_s \# u)(x) = \int_0^\infty \tau_x G_s(y) u(y) d\gamma(y),$$

para $\epsilon > 0$, definimos la función

$$K^{(\epsilon)}_s(x,y) = \int_\epsilon^\infty G_s(z) D_\mu(x,y,z) d\gamma(z).$$

Entonces

$$\left(H^s_\mu u\right)(x) = \lim_{\epsilon \to 0} U_{s,\epsilon}(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_0^\infty K^{(\epsilon)}_s(x,y) u(y) d\gamma(y).$$

Luego, si vemos que $H^s_\mu u$ viene dada como límite puntual de una sucesión creciente de funciones continuas tenemos por la Definición IV.2.4 que $H^s_\mu u$ es semicontinua inferior.

Por tanto, demostremos que $U_{s,\epsilon}$ es una función continua. Luego

$$|U_{s,\epsilon}(x_1) - U_{s,\epsilon}(x_2)| =$$

$$= \int_0^\infty \int_\epsilon^\infty |G_s(z)| \cdot |D_\mu(x_1, y, z) - D_\mu(x_2, y, z)| \cdot |u(y)| \cdot d\gamma(z) \cdot d\gamma(y) =$$
$$= \int_\epsilon^\infty \int_0^\infty |G_s(z)| \cdot |D_\mu(x_1, y, z) - D_\mu(x_2, y, z)| \cdot |u(y)| \cdot d\gamma(y) \cdot d\gamma(z),$$

procediendo como en [50, pp. 311-312] tenemos

$$|U_{s,\epsilon}(x_1) - U_{s,\epsilon}(x_2)| \leq I_1 \cdot I_2$$

donde

$$I_1 = \left[\int_\epsilon^\infty \int_0^\infty |u(y)|^p \cdot |D_\mu(x_1, y, z) - D_\mu(x_2, y, z)| \cdot d\gamma(y) \cdot d\gamma(z)\right]^{1/p}$$

$$I_2 = \left[\int_\epsilon^\infty \int_0^\infty |G_s(z)|^q \cdot |D_\mu(x_1, y, z) - D_\mu(x_2, y, z)| \cdot d\gamma(y) \cdot d\gamma(z)\right]^{1/q}.$$

siendo $1/p + 1/q = 1$.

Por último de

$$\int_0^\infty |D_\mu(x_1, y, z) - D_\mu(x_2, y, z)|\, d\gamma(z) \leq 2,$$

$$\lim_{x_1 \to x_2} \int_0^\infty |D_\mu(x_1, y, z) - D_\mu(x_2, y, z)|\, d\gamma(z) = 0, \;\; 0 < y < \infty,$$

y $G_s \in L^s_\mu(\epsilon, \infty)$ obtenemos el resultado. ■

Definimos a continuación el espacio de los potenciales de Hankel.

Definición IV.2.5 *Para $s \in \mathbf{R}$ y $1 \leq p < \infty$, el espacio de los potenciales de Hankel viene dado por*

$$W^{s,p}_\mu = W^{s,p}_\mu(I) = \left\{\phi \in \mathcal{H}' : H^{-s}_\mu \phi \in L^p_\mu(I)\right\}.$$

La norma en $W_{\mu}^{s,p}(I)$ *viene definida por*

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{s,p,\mu} &= \|\phi\|_{W_{\mu}^{s,p}} = \left\| H_{\mu}^{-s}\phi \right\|_{p,\mu} = \\ &= c_{\mu}\left(\int_0^{\infty} \left| H_{\mu}^{-s}\phi \right|^p d\gamma \right)^{1/p}. \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

siendo $c_{\mu} = 2^{\mu}\Gamma(\mu+1)$*.*

Los siguientes resultados fueron establecidos por G. Altenburg en [3, pp. 55-56].

Lema IV.2.2 *El potencial de Hankel* H_{μ}^{s} *es una automorfismo de* $\mathcal{H}$*.*

Proposición IV.2.2 $\mathcal{H}$ *es denso en* $W_{\mu}^{s,p}(I)$*,* $1 < p < \infty$*,* $\forall s \in \mathbf{R}$*.*

Proposición IV.2.3 $W_{\mu}^{s,p}(I)$ *es un espacio de Banach con respecto a la norma* $\|\cdot\|_{s,p,\mu}$*.*

Demostración: Consideremos $\{\phi_j\}$ una sucesión de Cauchy en $W_{\mu}^{s,p}(I)$. Entonces por definición del espacio de los potenciales de Hankel tenemos que $\left\{H_{\mu}^{-s}\phi_j\right\}$ es una sucesión de Cauchy en L_{μ}^{p}. Como L_{μ}^{p} es completo, sabemos que existe una función ϕ en L_{μ}^{p} tal que

$$H_{\mu}^{-s}\phi_j \to \phi,$$

en L_{μ}^{p} cuando $j \to \infty$.

Si definimos $u = H_\mu^s \phi$ y utilizamos (4.2.7) se tiene que $\phi = H_\mu^{-s} u$. Por lo tanto $H_\mu^{-s} u$ pertenece a L_μ^p, es decir $u \in W_\mu^{s,p}$ y además $\phi_j \to u$ en $W_\mu^{s,p}$ cuando $j \to \infty$. ■

Proposición IV.2.4 *El dual de $W_\mu^{s,p}$ es isométricamente isomorfo a $W_\mu^{-s,q}$ para todo $s \in \mathbf{R}$, $1 < p < \infty$ donde $pq = p + q$.*

Demostración:

Sea $f \in W_\mu^{-s,q}$ entonces $f \in \mathcal{H}'$ y $H_\mu^s f \in L_\mu^q$. Luego para toda $\phi \in \mathcal{H}$ tenemos

$$|< f, \phi >| = \left|< H_\mu^{-s}\left(H_\mu^s f\right), \phi >\right| = \left|< H_\mu^s f, H_\mu^{-s}\phi >\right|,$$

como $H_\mu^s f \in L_\mu^q$ genera una distribución regular se sigue que

$$|< f, \phi >| = \left|\int_0^\infty H_\mu^s f(x) H_\mu^{-s}\phi(x) x^{2\mu+1} dx\right|,$$

aplicando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$|< f, \phi >| \leq \left\|H_\mu^s f\right\|_{q,\mu} \cdot \left\|H_\mu^{-s}\phi\right\|_{p,\mu} = \|f\|_{-s,q,\mu} \cdot \|\phi\|_{s,p,\mu},$$

para toda $\phi \in \mathcal{H}$ y como sabemos por la Proposición IV.2.2 que $\mathcal{H} \subset W_\mu^{s,p}$, para $1 < p < \infty$, $\forall s \in \mathbf{R}$ resulta

$$\|f\|_{\left(W_\mu^{s,p}\right)'} \leq \|f\|_{-s,q,\mu}.$$

La otra implicación se sigue de forma similar, véase [3, p. 57]. ■

Una vez dados estos resultados, se establece una primera caracterización de los potenciales de Hankel inspirada en el libro de E. M. Stein [111].

Proposición IV.2.5 *Sea* $0 < s < 2$. *Se tiene que* $f \in W^{s,2}_\mu(I) \cap L^2_\mu$ *si y sólo si* $f \in L^2_\mu(I)$ *y*

$$\int_0^\infty \frac{(w_{2,\mu}(f)(t))^2}{t^{2s}} \frac{dt}{t} < \infty. \tag{4.2.9}$$

Demostración:

Sea $f \in W^{s,2}_\mu(I) \cap L^2_\mu$ entonces $f \in L^2_\mu$ y $f = H^s_\mu g$, $g \in L^2_\mu$.

Por lo tanto

$$h_\mu f(x) = h_\mu \left(H^s_\mu g \right)(x) = (1 + x^2)^{-s/2} h_\mu g(x),$$

es decir

$$h_\mu g(x) = (1 + x^2)^{s/2} h_\mu f(x).$$

Aplicando ahora el Teorema de Plancharel para la transformación de Hankel obtenemos

$$\int_0^\infty |h_\mu g(x)|^2 \, d\gamma(x) = \int_0^\infty (1 + x^2)^s \, |h_\mu f(x)|^2 \, d\gamma(x) < \infty. \tag{4.2.10}$$

Veamos si se verifica (4.2.9). Para ello usamos de nuevo el Teorema de Plancharel consiguiendo

$$\begin{aligned}
(w_{2,\mu}(t))^2 &= \|\tau_t f - f\|_{2,\mu}^2 = \|h_\mu(\tau_t f) - h_\mu f\|_{2,\mu}^2 = \\
&= \left\|\left(c_\mu(\cdot\, t)^{-\mu} J_\mu(\cdot\, t) - 1\right) h_\mu f(\cdot)\right\|_{2,\mu}^2 = \\
&= \int_0^\infty \left|c_\mu(xt)^{-\mu} J_\mu(xt) - 1\right|^2 |h_\mu f(x)|^2 \, d\gamma(x),
\end{aligned}$$

siendo $c_\mu = 2^\mu \Gamma(\mu+1)$.

De donde con un simple cálculo, resulta

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{(w_{2,\mu}(t))^2}{t^{2s}} \frac{dt}{t} &= \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\left|c_\mu(xt)^{-\mu} J_\mu(xt) - 1\right|^2}{t^{2s}} |h_\mu f(x)|^2 \, d\gamma(x) \frac{dt}{t} = \\
&= \int_0^\infty |h_\mu f(x)|^2 \left(\int_0^\infty \frac{\left|c_\mu(xt)^{-\mu} J_\mu(xt) - 1\right|^2}{t^{2s}} \frac{dt}{t}\right) d\gamma(x).
\end{aligned}$$

y si denotamos por

$$G(x) = \int_0^\infty \frac{\left|c_\mu(xt)^{-\mu} J_\mu(xt) - 1\right|^2}{t^{2s}} \frac{dt}{t},$$

con el cambio de variable $xt = z$ logramos

$$\int_0^\infty \frac{\left|c_\mu(xt)^{-\mu} J_\mu(xt) - 1\right|^2}{t^{2s}} \frac{dt}{t} = x^{2s} \int_0^\infty \frac{\left|c_\mu z^{-\mu} J_\mu(z) - 1\right|^2}{z^{2s}} \frac{dz}{z}. \quad (4.2.11)$$

Veamos que la integral que comparece en el lado derecho de la igualdad (4.2.11) está acotada.

Para ello descomponemos esta integral en tres, $\int_0^\infty = \int_0^\epsilon + \int_\epsilon^K + \int_K^\infty$.

Los puntos problemáticos de esta integral serán en el origen y en el infinito. Para la integral en el infinito utilizamos que $|c_\mu t^{-\mu} J_\mu(t) - 1| \leq C$, $t \in (0, \infty)$, logrando acotar la citada integral para todo $s > 0$. La integral en el origen se estima utilizando el teorema del valor medio y recordando que $D(t^{-\mu} J_\mu(t)) = -t^{-\mu} J_{\mu+1}(t)$ [127, p. 129], de forma que obtenemos $|c_\mu t^{-\mu} J_\mu(t) - 1| \leq C \cdot t^2$, para toda $t \in (0, \infty)$. Entonces, resulta que esta última integral está acotada siempre que $s < 2$.

Luego, teniendo en cuenta (4.2.10) y (4.2.11) conseguimos

$$\int_0^\infty \frac{(w_{2,\mu}(t))^2}{t^{2s}} \frac{dt}{t} \leq C \int_0^\infty x^{2s} \left|h_\mu f(x)\right|^2 d\gamma(x) < \infty,$$

para cierta $C > 0$.

La otra implicación se sigue de una manera similar. ■

Nuestro próximo objetivo es demostrar un teorema de A. P. Calderón [16, Theorem 1.2.3] en el marco de la transformación de Hankel. Para ello, daremos primero la siguiente proposición.

Proposición IV.2.6 *Sean* $0 \leq \alpha \leq s/2$, $\alpha \in \mathbf{N}$, $1 < p < \infty$. *Entonces* $(\Delta_\mu)^\alpha H_\mu^s$ *es una aplicación lineal y continua de* L_μ^p *en* L_μ^p.

Demostración: Podemos establecerla sin mas que comprobar que

$$m(x) = (-1)^\alpha x^{2\alpha}(1 + x^2)^{-s/2}$$

verifica la condición (4.1.5) dada en el Teorema IV.1.1, ya que

$$h_\mu\left((\Delta_\mu)^\alpha H_\mu^s f\right)(x) = m(x)\cdot h_\mu f(x).$$

■

Esta proposición permite enunciar y demostrar un teorema tipo A. P. Calderón, que exponemos a continuación:

Teorema IV.2.1 *Dados $m \in \mathbf{N}$ y $1 < p < \infty$, se tiene que $f \in L_\mu^{m,p}(I)$ si y sólo si $f \in W_\mu^{2m,p}(I)$.*

Demostración: Supongamos que $f \in W_\mu^{2m,p}(I)$.

Entonces $f = H_\mu^{2m} g$, $g \in L_\mu^p$.

Asimismo, si $\alpha \le m$, por la Proposición IV.2.6,

$$(\Delta_\mu)^\alpha f = (\Delta_\mu)^\alpha H_\mu^{2m} g \in L_\mu^p$$

y

$$\|(\Delta_\mu)^\alpha f\|_{p,\mu} = \left\|(\Delta_\mu)^\alpha H_\mu^{2m} g\right\|_{p,\mu} \le$$
$$\le C\|g\|_{p,\mu} = C\left\|H_\mu^{-2m} f\right\|_{p,\mu} = C\|f\|_{2m,p,\mu},$$

siendo C una constante positiva.

Luego

$$\sum_{0\le\alpha\le m}\|(\Delta_\mu)^\alpha f\|_{p,\mu} \le C\|f\|_{2m,p,\mu},$$

y por lo tanto $f \in L^{m,p}_{\mu}(I)$.

Para la otra implicación, consideramos $f \in L^{m,p}_{\mu}(I)$, es decir, se verifica que $(\Delta_{\mu})^{\alpha} f \in L^{p}_{\mu}$ para todo $\alpha \in \mathbf{N}$, $0 \leq \alpha \leq m$.

Veamos que $f \in W^{2m,p}_{\mu}(I)$.

Por definición sabemos que

$$H^{-2m}_{\mu} f = (I - \Delta_{\mu})^{m} f. \tag{4.2.12}$$

Tomando normas en (4.2.12) resulta

$$\|f\|_{2m,p,\mu} = \left\|H^{-2m}_{\mu} f\right\|_{p,\mu} = \|(I - \Delta_{\mu})^{m} f\|_{p,\mu} \leq C \sum_{0 \leq \alpha \leq m} \|(\Delta_{\mu})^{\alpha} f\|_{p,\mu},$$

para cierta $C > 0$. ■

Este teorema nos va a permitir, caracterizar el espacio tipo Sobolev $L^{1,p}_{\mu}(I)$ por medio de $w_{p,\mu}$ en la:

Proposición IV.2.7 *Sea* $1 < p < \infty$. *Entonces* $f \in L^{1,p}_{\mu}(I)$ *si y sólo si* $f \in L^{p}_{\mu}$ *y* $w_{p,\mu}(f)(t) = O(t^2)$ *cuando* $t \to 0$.

Demostración: De acuerdo con el la Proposición IV.2.2 y el Teorema IV.2.1, $\mathcal{H}$ es denso en $L^{1,p}_{\mu}$. Luego consideremos $f \in \mathcal{H}$ y $\Delta^{j}_{\mu} f \in L^{p}_{\mu}$ para $0 \leq j \leq 1$. Por tanto, existe $C_1 > 0$ tal que $\|\Delta_{\mu} f\|_{p,\mu} \leq C_1$.

Entonces utilizando (4.2.2) tenemos para C_2 constante

$$w_{p,\mu}(f)(t) = \|\tau_t f - f\|_{p,\mu} = C_2 \cdot t^2 \|\Delta_{\mu} f(\cdot + \theta t)\|_{p,\mu}.$$

Luego si $t \to 0$ conseguimos

$$|w_{p,\mu}(f)(t)| \leq C_2 \cdot t^2,$$

es decir $w_{p,\mu}(f)(t) = O(t^2)$ cuando $t \to 0$.

Se concluye esta implicación por densidad.

Para la otra implicación procedemos de manera similar.

Consideremos $f \in \mathcal{H}$ y que $w_{p,\mu}(f)(t) = O(t^2)$ cuando $t \to 0$. Entonces, para C_1 constante, se tiene que

$$C_1 \cdot t^2 \geq \|\tau_t f - f\|_{p,\mu} = w_{p,\mu}(f)(t)$$

cuando $t \to 0$. Luego utilizando otra vez (4.2.2) resulta, que para $t \to 0$,

$$C_1 \cdot t^2 \geq \|\tau_t f - f\|_{p,\mu} = \left\| C \cdot t^2 \Delta_\mu f(\cdot + \theta t) \right\|_{p,\mu},$$

para cierta constante $C > 0$.

Luego $\|\Delta_\mu f(\cdot + \theta t)\|_{p,\mu} \leq C_2$ para $t \to 0$. Es decir, $\|\Delta_\mu f\|_{p,\mu} \leq C_2$. Con lo que tenemos que $f \in L_\mu^{1,p}$ y el resultado se sigue por densidad. ■

IV.2.2 Espacios tipo Lipschitz

Recientemente en la tesis doctoral de L. Rodríguez-Mesa [101] fueron introducidos nuevos espacios tipo Lipschitz. Para $0 < s < 1$, el espacio que denominamos Lipschitz-Hankel ΛH_s consiste en todas las funciones $f \in L^\infty$ definidas sobre $(0,\infty)$ verificando que

$$\sup_{0<t<\infty} t^{-s} \|\tau_t f - f\|_\infty < \infty.$$

En la citada tesis, varias caracterizaciones de estos espacios son obtenidas empleado medias de Bochner-Riesz, además de conseguir un resultado de aproximación que involucra a integrales de Hankel parciales.

Se sabe que si una función $f \in L^\infty$ entonces $\tau_t f \in L^\infty$, $t \in (0,\infty)$ [113, p. 16]. En esta sección se extiende la definición de los espacios Lipschitz-Hankel ΛH_s, obteniendo una nueva caracterización de los mismos, con lo cual se completa en parte el estudio realizado en [101]. Para ello recordando la definición de integral de Poisson con la transformación de Hankel dada en [112], podemos enunciar algunas propiedades del núcleo de Poisson.

Lema IV.2.3 *Consideremos la integral de Poisson,* $u(x,t) = P_t \# u(x)$ *siendo*

$$P_t(x) = c_1 \cdot \frac{t}{(t^2+x^2)^{(2\mu+3)/2}}$$

el núcleo de Poisson y $c_1 = \frac{2}{\pi^{1/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{2\mu+3}{2}\right)}{\Gamma(\mu+1)}$*, entonces para ciertas constantes* $C_1, C_2 > 0$ *se tiene:*

(i) $\int_0^\infty \Delta_{\mu,t} P_t(y) d\gamma(y) = 0$, $t > 0$,

(ii) $|\Delta_{\mu,t}P_t(y)| \leq \dfrac{C_1}{t(t^2+y^2)^{(2\mu+3)/2}}$

(iii) $\int_0^\infty y^s\, |\Delta_{\mu,t}P_t(y)|\, d\gamma(y) \leq C_2 \cdot t^{-2+s}, 0 < s < 1.$

Demostración:

Haciendo uso de que $(h_\mu P_t)(y) = e^{-ty}$ [112, p. 23] puede demostrarse sin dificultad que

$$\int_0^\infty P_t(y) d\gamma(y) = 1.$$

Luego para $t > 0$ obtenemos

$$\int_0^\infty \Delta_{\mu,t}P_t(y) d\gamma(y) = 0.$$

Además con un simple cálculo conseguimos

$$\frac{\partial P_t(x)}{\partial t} = C\frac{(x^2-(2\mu+2)t^2)}{(t^2+x^2)^{(2\mu+5)/2}},$$

de donde logramos (ii).

Utilizando (ii) se obtiene para cierta $C > 0$ y $0 < s < 1$,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty y^s\, |\Delta_{\mu,t}P_t(y)|\, d\gamma(y) &\leq C\int_0^\infty \frac{y^{s+2\mu+1}}{t(t^2+y^2)^{(2\mu+3)/2}} dy \leq \\ &\leq C \cdot t^{-2+s}. \blacksquare\end{aligned}$$

Seguidamente se caracterizan los espacios de Lispschitz-Hankel ΛH_s por medio de integrales de Poisson.

Teorema IV.2.2 *Consideremos $f \in L^\infty$, $0 < s < 1$. Entonces $f \in \Lambda H_s$ si y sólo si*

$$\|\Delta_{\mu,t} u(\cdot,t)\|_\infty \leq C \cdot t^{-2+s}. \tag{4.2.13}$$

Nótese que si C_1 es la constante C más pequeña para la cual se cumple (4.2.13), $\|f\|_\infty + C_1$ y $\|f\|_{\Lambda H_s}$ son normas equivalentes.

Demostración: Sea $f \in \Lambda H_s$. Sabemos que por el Lema IV.2.3 (i)

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu,t} u(x,t) &= \left((\Delta_{\mu,t} P_t)\# f\right)(x) = \\ &= \int_0^\infty \Delta_{\mu,t} P_t(y) \tau_y f(x) d\gamma(y) = \\ &= \int_0^\infty \Delta_{\mu,t} P_t(y) \left(\tau_y f(x) - f(x)\right) d\gamma(y). \end{aligned}$$

Luego

$$\|\Delta_{\mu,t} u(\cdot,t)\|_\infty \leq \int_0^\infty |\Delta_{\mu,t} P_t(y)| \cdot \|\tau_y f - f\|_\infty d\gamma(y).$$

Entonces como $f \in \Lambda H_s$, existe $C_1 > 0$:

$$\|\Delta_{\mu,t} u(\cdot,t)\|_\infty \leq \int_0^\infty C_1 \cdot y^s \left|\Delta_{\mu,t} P_t(y)\right| d\gamma(y).$$

Y por el Lema IV.2.3 (iii)

$$\|\Delta_{\mu,t} u(\cdot,t)\|_\infty \leq C \cdot t^{-2+s}.$$

Para demostrar la implicación inversa escribimos

$$\tau_t f(x) - f(x) = \tau_t f(x) - \tau_t u(x,t) + \tau_t u(x,t) - u(x,t) + u(x,t) - f(x),$$

y aplicando normas resulta

$$\begin{aligned} & \|\tau_t f - f\|_\infty \leq \\ \leq \; & \|\tau_t f(.) - \tau_t u(.,t)\|_\infty + \|\tau_t u(.,t) - u(.,t)\|_\infty + \|u(.,t) - f(.)\|_\infty = \\ = \; & I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Por (4.2.2) y (4.2.13) conseguimos

$$I_2 = \|\tau_t u(.,t) - u(.,t)\|_\infty \leq C \cdot t^2 \|\Delta_{\mu,t} u\|_\infty \leq C \cdot t^s.$$

Estimemos I_1. Primero usamos que τ_t es lineal, obteniendo

$$\tau_t f(x) - \tau_t u(x,t) = \tau_t \left(f(x) - u(x,t)\right).$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo, teniendo en cuenta que $u(x,0) = f(x)$, queda

$$\tau_t f(x) - \tau_t u(x,t) = \tau_t \left(-\int_0^t \frac{\partial}{\partial t^*} u(x,t^*) dt^* \right).$$

Entonces usando que τ_t, $t \in (0,\infty)$ es un operador contractivo sobre L^∞ ([113, p. 16]) logramos

$$I_1 = \|\tau_t f(.) - \tau_t u(.,t)\|_\infty \leq C \cdot t \left\| \frac{\partial}{\partial t} u \right\|_\infty \tag{4.2.14}$$

y acotando la derivada parcial por el operador diferencial de Bessel tenemos

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} u \right\|_\infty \leq C \cdot t \cdot \|\Delta_{\mu,t} u\|_\infty . \tag{4.2.15}$$

Luego, combinando (4.2.13), (4.2.15) y (4.2.14) se consigue

$$I_1 \leq C \cdot t^s.$$

De manera análoga se sigue el resultado para I_3. Por consiguiente la demostración del teorema concluye. ■

Observación IV.2.1 *Nótese que esta proposición nos permite extender la definición de ΛH_s para todo $s > 0$. Sin más que considerar*

$$\Lambda H_s = \left\{ f \in L^\infty : \|\Delta_{\mu,t} u(\cdot, t)\|_\infty \leq A y^{-k+s} \right\} \tag{4.2.16}$$

siendo $k = [s] + 1$, donde $[.]$ denota como es usual, a la función parte entera. Si A_k es la constante A más pequeña que verifica la desigualdad (4.2.16), entonces definimos la norma de ΛH_s por $\|f\|_{\Lambda H_s} = \|f\|_\infty + A_k$.

IV.3 Espacios de tipo Besov y Triebel-Lizorkin

IV.3.1 Primeros resultados. Notación y terminología

En esta sección se estudian dos tipos de espacios de Besov. Los primeros han sido introducidos por J.J. Betancor y L. Rodríguez-Mesa en [13], mientras que el segundo espacio tipo Besov viene definido por medio de la convolución de Hankel y fue tratado por G. Altenburg en [3].

Definimos a continuación los espacios de Besov dados en [13], que son denominados espacios de Besov-Hankel.

Definición IV.3.1 *Sea $s > 0$. Diremos que una función medible f definida sobre $(0,\infty)$ pertenece a $BH^{p,r}_{s,\mu}$ si $f \in L^p_\mu$ y*

$$\int_0^\infty \left(\frac{w_{p,\mu}(f)(t)}{t^s}\right)^r \frac{dt}{t} < \infty$$

cuando $1 \leq p, r < \infty$; y

$$\sup_{0<t<\infty} t^{-s} w_{p,\mu}(f)(t) < \infty$$

para $r = \infty$.

Es inmediato ver que $BH^{\infty,\infty}_{s,\mu} \equiv \Lambda H_s$ para $0 < s < 1$. Además por la Proposición IV.2.5 tenemos que $BH^{2,2}_{s,\mu} \equiv W^{s,2}_\mu \cap L^2_\mu$ para $0 < s < 2$.

Las siguientes desigualdades de Hardy [111, Appendix A, p. 272] nos serán útiles para dar una una nueva caracterización de los espacios de Besov-Hankel $BH^{p,r}_{s,\mu}$.

Proposición IV.3.1 *Para $f \geq 0, p^* \geq 1$ y $q > 0$ tenemos*

$$\left(\int_0^\infty t^{-q-1} \left(\int_0^t f(y)dy\right)^{p^*} dt\right)^{1/p^*} \leq \frac{p^*}{q} \left(\int_0^\infty y^{-q-1} \left(y \cdot f(y)\right)^{p^*} dy\right)^{1/p^*};$$

$$\left(\int_0^\infty t^{q-1} \left(\int_t^\infty f(y)dy\right)^{p^*} dt\right)^{1/p^*} \leq \frac{p^*}{q} \left(\int_0^\infty y^{q-1} \left(y \cdot f(y)\right)^{p^*} dy\right)^{1/p^*}.$$

Exponemos, a continuación, mediante el siguiente teorema, la citada caracterización.

Teorema IV.3.1 *Sean* $f \in L^p_\mu$, $1 \leq p, r \leq \infty$ *y* $0 < s < 2$. *Entonces* $f \in BH^{p,r}_{s,\mu}$ *si y sólo si*

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{2-s}\left\|\Delta_{\mu,t}u\right\|_{p,\mu}\right)^r \frac{dt}{t}\right)^{1/r} < \infty.$$

Además, la norma de $BH^{p,r}_{s,\mu}$ *es equivalente con la norma*

$$\|f\|_{p,\mu} + \left(\int_0^\infty \left(t^{2-s}\left\|\Delta_{\mu,t}u\right\|_{p,\mu}\right)^r \frac{dt}{t}\right)^{1/r}.$$

Demostración: Procedemos de manera similar al Teorema IV.2.2.

Por el Lema IV.2.3 (ii) obtenemos inmediatamente

$$\begin{aligned} |\Delta_{\mu,t}P_t(y)| &\leq C_1 \cdot t^{-2\mu-4}, \quad (4.3.1)\\ |\Delta_{\mu,t}P_t(y)| &\leq C_1 \cdot y^{-2\mu-4}, \quad (4.3.2) \end{aligned}$$

para cierta constante $C_1 > 0$.

Entonces en virtud del Lema IV.2.3 (i) se sigue

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu,t}u(x,t) &= \left((\Delta_{\mu,t}P_t)\#f\right)(x) = \\ &= \int_0^\infty \Delta_{\mu,t}P_t(y)\tau_y f(x)d\gamma(y) = \\ &= \int_0^\infty \Delta_{\mu,t}P_t(y)\left(\tau_y f(x) - f(x)\right)d\gamma(y). \end{aligned}$$

Luego

$$\|\Delta_{\mu,t}u\|_{p,\mu} \leq \int_0^\infty |\Delta_{\mu,t}P_t(y)| \cdot \|\tau_y f - f\|_{p,\mu}\, d\gamma(y).$$

Ahora utilizando (4.3.1) y (4.3.2) logramos

$$\|\Delta_{\mu,t}u\|_{p,\mu} \leq$$

$$\leq C_1 t^{-2\mu-4} \int_0^t \|\tau_y f - f\|_{p,\mu}\, y^{2\mu+1} dy + C_1 \int_t^\infty \|\tau_y f - f\|_{p,\mu} \cdot y^{-3} d\gamma(y).$$

Por tanto, usando la desigualdades de Hardy de la Proposición IV.3.1 y la de Minkowski conseguimos, para $0 < s < 2$,

$$\left(\int_0^\infty \left(t^{2-s}\|\Delta_{\mu,t}u\|_{p,\mu}\right)^r \frac{dt}{t}\right)^{1/r} \leq C \cdot \left(\int_0^\infty \left(\frac{w_{p,\mu}(f)(y)}{y^s}\right)^r \frac{dy}{y}\right)^{1/r}.$$

Para demostrar la implicación inversa escribimos

$$\tau_t f(x) - f(x) = \tau_t f(x) - \tau_t u(x,t) + \tau_t u(x,t) - u(x,t) + u(x,t) - f(x).$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \|\tau_t f - f\|_{p,\mu} \leq \\ \leq\ & \|\tau_t f(.) - \tau_t u(.,t)\|_{p,\mu} + \|\tau_t u(.,t) - u(.,t)\|_{p,\mu} + \|u(.,t) - f(.)\|_{p,\mu} = \\ =\ & I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

De (4.2.2) resulta que

$$I_2 = \|\tau_t u(.,t) - u(.,t)\|_{p,\mu} \leq C \cdot t^2 \|\Delta_{\mu,t}u\|_{p,\mu}.$$

Estimemos I_1. Como τ_t es lineal tenemos

$$\tau_t f(x) - u(x,t) = \tau_t \left(f(x) - u(x,t) \right).$$

Aplicando el teorema fundamental del cálculo, teniendo en cuenta que $u(x,0) = f(x)$, se obtiene

$$\tau_t f(x) - \tau_t u(x,t) = \tau_t \left(- \int_0^t \frac{\partial}{\partial t^*} u(x,t^*) dt^* \right),$$

y usando que τ_t, $t \in (0,\infty)$, es un operador acotado (contractivo, [101, p. 42]) de L^p_μ en sí mismo, se llega a que

$$I_1 = \left\| \tau_t f(.) - \tau_t u(.,t) \right\|_{p,\mu} \leq C \cdot t \left\| \frac{\partial}{\partial t} u \right\|_{p,\mu} \leq C \cdot t \cdot \left\| \Delta_{\mu,t} u \right\|_{p,\mu}. \quad (4.3.3)$$

De manera similar se sigue el resultado para I_3. Por lo tanto

$$w_{p,\mu}(f)(t) = \left\| \tau_t f - f \right\|_{p,\mu} \leq C \cdot t^2 \left\| \Delta_{\mu,t} u \right\|_{p,\mu}, \quad (4.3.4)$$

y el resultado se alcanza por medio de (4.3.4).

Ahora se procede a estudiar varios espacios de tipo Besov. Primero se establecen algunas definiciones esenciales.

Definición IV.3.2 *Sea $s \in \mathbf{R}$, para $1 \leq p < \infty$ definimos l^s_p como sigue*

$$l^s_p = \left\{ \xi : \xi = \{\xi_j\}_{j=0}^{\infty},\ \xi_j \ \textit{complejo}\ , \|\xi\|_{l^s_p} = (\sum_{j=0}^{\infty} (2^{jsp} |\xi_j|^p))^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}. \quad (4.3.5)$$

y para $p = \infty$ *tenemos*

$$l^s_\infty = \left\{ \xi : \xi = \{\xi_j\}_{j=0}^\infty,\ \xi_j \ \textit{complejo}\ , \|\xi\|_{l^s_\infty} = \sup_j 2^{js} |\xi_j| < \infty \right\}. \tag{4.3.6}$$

En el caso de $s = 0$ *denotamos* l^0_p *por* l_p.

Además, l^s_p *es un espacio de Banach (véase, por ejemplo, [1]).*

Ahora procedemos a definir dos nuevos espacios que denominamos espacios de Nikol'skii-Hankel y tipo Besov.

Definición IV.3.3 *Para* $s \in \mathbf{R}$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $\mu \geq -1/2$, *definimos*

$$\begin{aligned} b^s_{p,q,\mu} \quad &= \quad \Bigg\{ f : f \in \mathcal{H}',\ f \underset{\mathcal{H}'}{=} \sum_{i=0}^\infty a_i(x), \\ &\qquad \|\{a_i\}\|_{l^s_q(L^p_\mu)} = \left(\sum_{i=0}^\infty (2^{si} \|a_i(x)\|_{L^p_\mu})^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \Bigg\} \end{aligned}$$

y para $q = \infty$, *tenemos*

$$b^s_{p,\infty,\mu} = \left\{ f : f \in \mathcal{H}',\ f \underset{\mathcal{H}'}{=} \sum_{j=0}^\infty a_i(x), \|\{a_i\}\|_{l^s_\infty(L^p_\mu)} = \sup_i 2^{si} \|a_i(x)\|_{L^p_\mu} < \infty \right\}$$

donde $\operatorname{sop} h_\mu a_i \subset \left\{ \xi : \sqrt{2^{i-1} - 1} \leq \xi \leq \sqrt{2^{i+1} - 1} \right\}$ *para* $i = 1, 2, \ldots$ *y* $\operatorname{sop} h_\mu a_0 \subset \{\xi : \xi \leq 1\}$.

Por $f \underset{\mathcal{H}'}{=} \sum_{i=0}^\infty a_i(x)$ *se entenderá que* $\sum_{i=0}^\infty a_i(x)$ *converge en* $\mathcal{H}'$ *a* f. *La norma de* $b^s_{p,q,\mu}$ *viene dada por*

$$\|f\|_{b^s_{p,q,\mu}} = \inf_{f = \sum a_i} \|\{a_i\}\|_{l^s_q(L^p_\mu)}.$$

Definición IV.3.4 *Por Φ denotaremos la colección de todos los sistemas $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ con las siguientes propiedades:*

(i) $\varphi_j(x) \in \mathcal{H}$, $h_\mu \varphi_j(x) \geq 0$ *para* $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$

(ii) $\operatorname{sop} h_\mu \varphi_j \subset \left\{x : \sqrt{2^{j-1} - 1} \leq x \leq \sqrt{2^{j+1} - 1}\right\}$ *para* $j = 1, 2, 3, \ldots,$

y

$\operatorname{sop} h_\mu \varphi_0 \subset \{x : x \leq 1\}$.

(iii) Existe un número positivo c_1 tal que

$$\left|\left(x^{-1}D\right)^k h_\mu \varphi_j(x)\right| \leq c_1 x^{-k} \tag{4.3.7}$$

para $j = 1, 2, \ldots;\ 0 \leq k \leq [\mu] + 2$ *y* $x \in I$.

(iv) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} h_\mu \varphi_j(x) = 1$ *para cada* $x \in I$.

Esta definición es equivalente a la dada por G. Altenburg en [3] y por tanto el conjunto $\Phi(I)$ no es vacio.

En [3] podemos ver la definición de unos espacios tipo Besov $B^s_{p,q,\mu}$ por medio de la convolución de Hankel.

Definición IV.3.5 *Dados $1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty, \mu \geq -1/2$ y $s \in \mathbf{R}$. Entonces para cualquier sistema de funciones $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi$, el espacio de tipo Besov viene definido por*

$$B^s_{p,q,\mu} = \left\{f \in \mathcal{H}' : \|f\|_{B^s_{p,q,\mu}} = \|\{\varphi_j \# f\}\|_{l^s_q(L^p_\mu)} < \infty\right\}, \tag{4.3.8}$$

siendo

$$\|\cdot\|_{l_q^s(L_\mu^p)} = \left\| \|\cdot\|_{L_\mu^p} \right\|_{l_q^s} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} (2^{sj} \|\cdot\|_{L_\mu^p})^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

La siguiente inclusión puede encontrarse en [3] y la utilizaremos posteriormente.

Proposición IV.3.2 *Sean* $s \in \mathbf{R}$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty, \mu \geq -1/2$, $\epsilon > 0$. *Entonces*

$$\mathcal{H} \subset B_{p,\infty,\mu}^{s+\epsilon} \subset B_{p,1,\mu}^{s} \subset B_{p,q,\mu}^{s} \subset B_{p,\infty,\mu}^{s} \subset B_{p,1,\mu}^{s-\epsilon} \subset \mathcal{H}'.$$

Con el próximo teorema caracterizamos los espacios tipo Besov por medio de los de Nikol'skii-Hankel.

Teorema IV.3.2 *Dada* $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi$, $s \in \mathbf{R}$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ *y* $\mu \geq -1/2$. *Entonces* $B_{p,q,\mu}^{s} \equiv b_{p,q,\mu}^{s}$.

Demostración: Inicialmente, probamos que $B_{p,q,\mu}^{s} \subset b_{p,q,\mu}^{s}$.

Sea $f \in B_{p,q,\mu}^{s}$. Dada $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi$ sabemos que

$$(\sum_{j=0}^{\infty} h_\mu \varphi_j)(\xi) = 1.$$

Luego

$$f = h_\mu h_\mu f = h_\mu (\sum_{j=0}^{\infty} h_\mu \varphi_j \cdot h_\mu f) \underset{\mathcal{H}'}{=} \sum_{j=0}^{\infty} h_\mu (h_\mu \varphi_j \cdot h_\mu f) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j \# f.$$

Por lo tanto, tomando $a_j = \varphi_j \# f$, logramos

$$\|f\|_{b^s_{p,q,\mu}} \leq \|\{a_j\}\|_{l^s_q(L^p_\mu)} = \|\{\varphi_j \# f\}\|_{l^s_q(L^p_\mu)} = \|f\|_{B^s_{p,q,\mu}}$$

y tenemos que $B^s_{p,q,\mu} \subset b^s_{p,q,\mu}$.

Veremos ahora que $b^s_{p,q,\mu} \subset B^s_{p,q,\mu}$.

Sea $f \in b^s_{p,q,\mu}$ y $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x)$ en el sentido de la convergencia de la serie en $\mathcal{H}'$.

Consideremos $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi$, entonces

$$(\varphi_j \# f)(x) \underset{\mathcal{H}'}{=} \sum_{i=0}^{\infty} (\varphi_j \# a_i)(x) = \sum_{i=j-1}^{j+1} (\varphi_j \# a_i)(x),$$

ya que $\varphi_j \# a_i = h_\mu(h_\mu \varphi_j \cdot h_\mu a_i) = 0$, para $i > j+1$ e $i < j-1$. Además, si definimos $\varphi_j = a_j = 0$ para $j < 0$, tenemos

$$\|f\|_{B^s_{p,q,\mu}} = \|\{\varphi_j \# f\}\|_{l^s_q(L^p_\mu)} \leq \sum_{r=-1}^{1} \|\{\varphi_j \# a_{j+r}\}\|_{l^s_q(L^p_\mu)} . \qquad (4.3.9)$$

Por otra parte, aplicando el Teorema IV.1.1, conseguimos

$$\|\varphi_j \# a_{j+r}\|_{L^p_\mu} \leq c_1 \|a_{j+r}\|_{L^p_\mu} , \qquad (4.3.10)$$

siendo c_1 una constante positiva.

Ahora, tomando la norma de l_q^s en (4.3.10) se sigue que

$$\|\{\varphi_j \# a_{j+r}\}\|_{l_q^s(L_\mu^p)} \leq c_1 \|\{a_{j+r}\}\|_{l_q^s(L_\mu^p)}. \tag{4.3.11}$$

Entonces de (4.3.9) obtenemos

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p,q,\mu}^s} &= \|\{\varphi_j \# f\}\|_{l_q^s(L_\mu^p)} \leq c_1 \sum_{r=-1}^{1} \|\{a_{j+r}\}\|_{l_q^s(L_\mu^p)} \leq \\ &\leq c_2 \|\{a_j\}\|_{l_q^s(L_\mu^p)}. \end{aligned} \tag{4.3.12}$$

Tomando el ínfimo en el lado derecho de (4.3.12) resulta

$$\|f\|_{B_{p,q,\mu}^s} \leq c_2 \|f\|_{b_{p,q,\mu}^s}.$$

Con esto concluye la demostración del Teorema IV.3.2. ∎

Nótese que por el teorema anterior podemos concluir que los espacios $B_{p,q,\mu}^s$ son independientes de las funciones $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi$.

Se introducen ahora unos espacios tipo Triebel-Lizorkin que denominamos espacios de Triebel-Lizorkin-Hankel.

Definición IV.3.6 *Sean* $1 < p < \infty, 1 \leq q \leq \infty, \mu \geq -1/2$ *y* $s \in \mathbf{R}$*. Entonces, para cualquier sistema de funciones* $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi$*, los espacios de Triebel-Lizorkin-Hankel vienen dados por*

$$F_{p,q,\mu}^s = \left\{ f \in \mathcal{H}' : \|f\|_{F_{p,q,\mu}^s} = \|\{\varphi_j \# f\}\|_{L_\mu^p(l_q^s)} < \infty \right\} \tag{4.3.13}$$

donde

$$\|\cdot\|_{L^p_\mu(l^s_q)} = \Big\| \|\cdot\|_{l^s_q} \Big\|_{L^p_\mu} = \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} (2^{sj}(\cdot))^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p_\mu}.$$

El siguiente teorema de embebimiento entre el espacio tipo Besov y el espacio Triebel-Lizorkin-Hankel, es clásico en el marco de la transformación de Fourier.

Teorema IV.3.3 *Dados* $1 < p, q < \infty$, $\mu \geq -1/2$ *y* $s \in \mathbf{R}$, *entonces*

$$B^s_{p,\min\{p,q\},\mu} \subset F^s_{p,q,\mu} \subset B^s_{p,\max\{p,q\},\mu} \tag{4.3.14}$$

donde $\subset$ *significa inclusión continua.*

Demostración: Debemos demostrar que

$$B^s_{p,p,\mu} \subset F^s_{p,q,\mu} \subset B^s_{p,q,\mu} \tag{4.3.15}$$

para $p \leq q$, y

$$B^s_{p,q,\mu} \subset F^s_{p,q,\mu} \subset B^s_{p,p,\mu} \tag{4.3.16}$$

para $q \leq p$. Usaremos la monotonía de los espacios l^s_q y la igualdad trivial $B^s_{p,p,\mu} \equiv F^s_{p,p,\mu}$.

Primero, probamos (4.3.15). Sea $f \in F^s_{p,q,\mu}$ y $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi$,

$$\|f\|_{B^s_{p,q,\mu}} = \|\{\varphi_j \# f\}\|_{l^s_q(L^p_\mu)} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{sj} \, \|\{\varphi_j \# f\}\|_{L^p_\mu} \right)^q \right)^{1/q} =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} \left(\int_0^{\infty} |\varphi_j \# f|^p \, d\gamma(x) \right)^{q/p} \right)^{1/q} =$$

$$= \left\| \left\{ \int_0^{\infty} 2^{sjp} \, |\varphi_j \# f(x)|^p \, d\gamma(x) \right\} \right\|_{l^s_{q/p}}^{1/p} .$$

Luego, utilizando la desigualdad de Minkowski resulta

$$\|f\|_{B^s_{p,q,\mu}} \leq \left(\int_0^{\infty} \left\| \left\{ 2^{sjp} \, |\varphi_j \# f(x)|^p \right\} \right\|_{l^s_{q/p}} d\gamma(x) \right)^{1/p} =$$

$$\begin{aligned} &= \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{sj} \, |\varphi_j \# f| \right)^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p_\mu} = \\ &= \|\{\varphi_j \# f\}\|_{L^p_\mu(l^s_q)} = \|f\|_{F^s_{p,q,\mu}} \leq \|\{\varphi_j \# f\}\|_{L^p_\mu(l^s_p)} = \\ &= \|\{\varphi_j \# f\}\|_{l^s_p(L^p_\mu)} = \|f\|_{B^s_{p,p,\mu}} . \end{aligned}$$

Ahora, demostramos (4.3.16). Para $f \in B^s_{p,q,\mu}$ se tiene que

$$\|f\|_{B^s_{p,p,\mu}} = \|\{\varphi_j \# f\}\|_{l^s_p(L^p_\mu)} = \|\{\varphi_j \# f\}\|_{L^p_\mu(l^s_p)} \leq \|\{\varphi_j \# f\}\|_{L^p_\mu(l^s_q)} =$$

$$\begin{aligned} &= \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{sj} \, |\varphi_j \# f| \right)^q \right\|_{L^{p/q}_\mu}^{1/q} \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{sjq} \, \| |\varphi_j \# f(x)|^q \|_{L^{p/q}_\mu} \right)^{1/p} = \\ &= \|\{\varphi_j \# f\}\|_{l^s_q(L^p_\mu)} = \|f\|_{B^s_{p,q,\mu}} . \ \blacksquare \end{aligned}$$

IV.3.2 Una propiedad de elevación

En este párrafo damos una propiedad que denominamos de "elevación" la cual nos será útil para las aplicaciones que exponemos en la última sección.

Recordando la definición IV.2.3, el potencial de Hankel H_μ^s de una función $u \in \mathcal{H}'$ de orden s, $s \in \mathbf{R}$, $(\mu \geq -1/2)$ viene dado por

$$\left(H_\mu^s u\right)(x) = h_\mu\left((1+\xi^2)^{-s/2} h_\mu(u)\right)(x),$$

y el espacio de los potenciales por

$$W_\mu^{s,p} = W_\mu^{s,p}(I) = \left\{\phi \in \mathcal{H}' : H_\mu^{-s}\phi \in L_\mu^p(I)\right\},$$

para $s \in \mathbf{R}$ y $1 \leq p < \infty$, dotado con la norma

$$\|\phi\|_{s,p,\mu} = \|\phi\|_{W_\mu^{s,p}} = \left\|H_\mu^{-s}\phi\right\|_{p,\mu}.$$

Asimismo, se demostró que $\mathcal{H}$ es denso en $W_\mu^{s,p}(I)$. Todo ello nos permite establecer lo siguiente:

Teorema IV.3.4 *Sea $\sigma, s \in \mathbf{R}$, $\mu \geq -1/2$, $1 < p < \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$. Entonces H_μ^σ es un operador lineal y acotado de $W_\mu^{s,p}$ en $W_\mu^{s+\sigma,p}$ y de $B_{p,q,\mu}^s$ en $B_{p,q,\mu}^{s+\sigma}$.*

Demostración: La prueba para el caso de los potenciales de Hankel es inmediata por definición.

Para los espacios tipo Besov, consideremos $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi$ y definimos $\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$ como sigue

$$\psi_j = \varphi_j \# h_\mu((1+x^2)^{\sigma/2} 2^{j\sigma}).$$

Entonces puede verse sin dificultad que $\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty} \in \Phi$ y por tanto

$$\begin{aligned} H_\mu^\sigma f \# \psi_j &= h_\mu(h_\mu \psi_j \cdot h_\mu H_\mu^\sigma f) = h_\mu(h_\mu \psi_j \cdot (1+\xi^2)^{-\sigma/2} h_\mu f) = \\ &= h_\mu(2^{j\sigma} h_\mu \varphi_j \cdot h_\mu f) = 2^{j\sigma} f \# \varphi_j. \end{aligned}$$

Ahora, la demostración se sigue tomando las normas correspondientes. ■

Para finalizar esta sección, establecemos la siguiente proposición que llamamos de "densidad".

Proposición IV.3.3 *(Densidad) Sea* $s \in \mathbf{R}$, $1 < p < \infty$, $\mu \geq -1/2$ *entonces:*

(a) $\mathcal{H}$ *es denso en* $b_{p,q,\mu}^s$ *si* $1 \leq q < \infty$.

(b) $\mathcal{H}$ *es denso en* $F_{p,q,\mu}^s$ *si* $1 < q < \infty$.

(c) *Las funciones* $f \in L_\mu^p$ *con* $\operatorname{sop} h_\mu f$ *compacto son densas en* $W_\mu^{s,p}$ *y en* $F_{p,2,\mu}^s$.

Demostración: En virtud de [3, Satz 1, p. 57] sabemos que $\mathcal{H}$ es denso en $B^s_{p,q,\mu}$ si $1 \leq q < \infty$. Entonces los apartados (a) y (b) se siguen por la Proposición IV.3.2 y el Teorema IV.3.3. Para demostrar el apartado (c) se procede de manera similar a [3, p. 59]. ■

IV.3.3 Una caracterización del espacio de los potenciales de Hankel

Inspirados en la idea dada por D. R. Adams y L. I. Hedberg en [1] caracterizamos el espacio de los potenciales de Hankel en términos de los nuevos espacios Triebel-Lizorkin-Hankel. Para demostrar el comentado resultado, necesitamos los siguientes resultados preliminares.

Primero, recordemos que las funciones de Rademacher $\{r_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$, [128, Chapter V], vienen definidas como

$$\begin{array}{ll} r_0(t) = 1 & \text{para } 0 < t \leq 1/2, \\ r_0(t) = -1 & \text{para } 1/2 < t \leq 1, \\ r_0(t+1) = r_0(t) & \text{para } t \in \mathbf{R}, \\ r_j(t) = r_0(2^j t) & \text{para } j \in \mathbf{N} \end{array}$$

Es conocido que las funciones de Rademacher forman un sistema ortonormal en $L^2(0,1)$ y para cualquier constante a_j se tiene

$$\int_0^1 |\sum_{j=0}^{m} a_j r_j(t)|^2 dt = \sum_{j=0}^{m} |a_j|^2 .$$

Además satisfacen la siguiente desigualdad que se puede encontrar en [111, p. 104] y [128, Chapter V, Theorem 8.4, p.213].

Teorema IV.3.5 *Dado $0 < p < \infty$ y sea $R_m(t) = \sum_{j=0}^m a_j r_j(t)$. Entonces existen constantes C_1 y C_2, que dependen solamente de p, tal que*

$$C_1 \left\| R_m \right\|_{L^p(0,1)} \leq \left\| R_m \right\|_{L^2(0,1)} \leq C_2 \left\| R_m \right\|_{L^p(0,1)} . \tag{4.3.17}$$

Si $p = 1$, entonces $C_2 = \sqrt{3}$. Además, se puede comprobar que

$$\left\| R_m \right\|_{L^2(0,1)} = \left(\sum_{j=0}^m a_j^2 \right)^{1/2} .$$

Demostramos a continuación dos resultados que nos serán imprescindibles para establecer el teorema de caracterización.

Lema IV.3.1 *Consideremos $s \in \mathbf{R}$, $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty \in \Phi$ y sean $\{r_j\}_{j=0}^\infty$ las funciones de Rademacher (véase [111, p. 104] o [128, Chapter V, Theorem 8.4, p.213]).*

Entonces, para cada p con $1 < p < \infty$ y para toda $t \in (0,1)$, existen constantes A_i, $i = 1, 2$, tal que

$$\left\| h_\mu (m_i \, h_\mu f) \right\|_{p,\mu} \leq A_i \left\| f \right\|_{p,\mu} ,$$

siendo

$$m_1(x) = \sum_{j=0}^\infty 2^{js} r_j(t) (1 + x^2)^{-s/2} h_\mu \varphi_j(x),$$

y

$$m_2(x) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} (h_\mu \varphi_j)^2(x) \right)^{-1}.$$

Demostración: Sin dificultad podemos ver que m_i satisface

$$\left| (x^{-1}D)^k m_i(x) \right| \leq A_i \, x^{-k},$$

para $k = 0, 1, \ldots, [\mu] + 2$; $i = 1, 2$. Entonces aplicando el Teorema IV.1.1 obtenemos el resultado deseado. ■

Ahora, estamos en condiciones de demostrar la caracterización comentada.

Teorema IV.3.6 *Si* $s \in \mathbf{R}$, $\mu \geq -1/2$ *y* $1 < p < \infty$ *tenemos que*

$$F^s_{p,2,\mu}(I) = W^{s,p}_\mu(I).$$

Demostración: Nuestro objetivo es demostrar que existen c_1, c_2 constantes positivas tales que

$$c_1 \, \|f\|_{s,p,\mu} \leq \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{2js} \, |\varphi_j \# f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\mu} \leq c_2 \, \|f\|_{s,p,\mu} . \qquad (4.3.18)$$

Ya que por la Proposición IV.3.3 (b) y (c) sabemos que $\mathcal{H}$ es denso en $F^s_{p,2,\mu}$ y que las funciones $f \in L^p_\mu$ con $\operatorname{sop} h_\mu f$ compacto son densas en $W^{s,p}_\mu$ y en $F^s_{p,2,\mu}$, para $1 < p < \infty$, es suficiente probar (4.3.18) para funciones de este tipo. Nótese que en este caso la serie en (4.3.18) pasa a ser una suma finita (véase [1]).

Inicialmente, demostraremos la desigualdad del lado derecho.

Sea $f \in W_\mu^{s,p}$ entonces $f = G_s \# g$, es decir,

$$h_\mu f(\xi) = (1+\xi^2)^{-s/2} h_\mu g(\xi).$$

Aplicando el Lemma IV.3.1 para m_1, tenemos que para todo $t \in (0,1)$

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=0}^{\infty} r_j(t) 2^{js} \varphi_j \# f\right\|_{p,\mu} &= \left\| h_\mu \left(\sum_{j=0}^{\infty} r_j(t) 2^{js} h_\mu \varphi_j h_\mu f\right)\right\|_{p,\mu} = \\ &= \left\| h_\mu \left(\sum_{j=0}^{\infty} r_j(t) 2^{js} h_\mu \varphi_j (1+\xi^2)^{-s/2} h_\mu g(\xi)\right)\right\|_{p,\mu} \leq \\ &\leq A_1 \|g\|_{p,\mu} = A_1 \|f\|_{s,p,\mu},\end{aligned}$$

lo que nos lleva a

$$\int_0^1 \left\|\sum_{j=0}^{\infty} r_j(t) 2^{js} \varphi_j \# f\right\|_{p,\mu} dt \leq A_1 \|f\|_{s,p,\mu}. \tag{4.3.19}$$

Usando el lado derecho de la desigualdad de (4.3.17) con $p=1$, $a_j = 2^{js}\varphi_j \# f$ y la desigualdad de Minkowski se consigue

$$\begin{aligned}\left\|\left(\sum_{j=0}^{\infty} \left|2^{js}\varphi_j \# f\right|^2\right)^{1/2}\right\|_{p,\mu} &\leq \sqrt{3}\left\|\int_0^1 \left|\sum_{j=0}^{\infty} r_j(t) 2^{js} \varphi_j \# f\right| dt\right\|_{p,\mu} \leq \\ &\leq \sqrt{3}\int_0^1 \left\|\sum_{j=0}^{\infty} r_j(t) 2^{js} \varphi_j \# f\right\|_{p,\mu} dt.\end{aligned}$$

Ahora, por (4.3.19) obtenemos

$$\left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left| 2^{js} \varphi_j \# f \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\mu} \leq c \, \|f\|_{s,p,\mu} \, ,$$

siendo c una constante positiva.

Por lo tanto, logramos que $f \in F^s_{p,2,\mu}$.

Veamos ahora la desigualdad inversa. Para ello usaremos la dualidad del espacio de los potenciales de Hankel (Proposición IV.2.4). Dada $f \in F^s_{p,2,\mu}$ y

$$k = h_\mu (\sum_{j=0}^{\infty} (h_\mu \varphi_j)^2 \cdot h_\mu g). \tag{4.3.20}$$

Aplicando el Lema IV.3.1 con $m_2(x) = (\sum_{j=0}^{\infty} (h_\mu \varphi_j)^2)^{-1}$ resulta

$$\begin{aligned} \|g\|_{p,\mu} &= \left\| h_\mu \left((\sum_{j=0}^{\infty} (h_\mu \varphi_j)^2)^{-1} h_\mu h_\mu (\sum_{j=0}^{\infty} (h_\mu \varphi_j)^2 \cdot h_\mu g) \right) \right\|_{p,\mu} \leq \\ &\leq A_2 \left\| h_\mu (\sum_{j=0}^{\infty} (h_\mu \varphi_j)^2 \cdot h_\mu g) \right\| = A_2 \, \|k\|_{p,\mu} \, . \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

Consideremos $u \in L^q_\mu(I)$ una función tal que $\|u\|_{q,\mu} = 1$, con $\operatorname{sop} h_\mu u$ compacto $(1/p + 1/q = 1)$ y

$$\int_0^\infty u(x) k(x) d\gamma(x) \geq \frac{1}{2} \, \|k\|_{p,\mu} \, . \tag{4.3.22}$$

Si definimos w por

$$h_\mu w(\xi) = (1 + \xi^2)^{s/2} h_\mu u(\xi),$$

es decir, $u = G_s \# w$; y si $f = G_s \# g$, se tiene que

$$h_\mu f \cdot h_\mu w = h_\mu g \cdot h_\mu u.$$

Entonces, en virtud de (4.3.20)-(4.3.22) obtenemos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{s,p,\mu} &= \|g\|_{p,\mu} \leq A_2 \|k\|_{p,\mu} \leq 2A_2 \int_0^\infty u(x)k(x)d\gamma(x) = \\
&= 2A_2 \int_0^\infty h_\mu u(\xi) h_\mu k(\xi) d\gamma(\xi) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2A_2 \int_0^\infty h_\mu u(\xi) \sum_{j=0}^{\infty} (h_\mu \varphi_j)^2 h_\mu g(\xi) d\gamma(\xi) = \\
&= 2A_2 \int_0^\infty \sum_{j=0}^{\infty} (h_\mu \varphi_j)^2 h_\mu f(\xi) h_\mu w(\xi) d\gamma(\xi) = \\
&= 2A_2 \int_0^\infty \sum_{j=0}^{\infty} (2^{js} h_\mu f(\xi)(h_\mu \varphi_j)(\xi))(2^{-js}(h_\mu w)(\xi)(h_\mu \varphi_j)(\xi)) d\gamma(\xi),
\end{aligned}$$

Luego, por la fórmula de Parseval y las desigualdades de Cauchy y Hölder conseguimos, para cierta $c > 0$,

$$\|f\|_{s,p,\mu} = c \int_0^\infty \sum_{j=0}^{\infty} (2^{js}(\varphi_j \# f)(x))(2^{-js}(\varphi_j \# w)(x)) d\gamma(x) \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq c \int_0^\infty \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{js}(\varphi_j \# f)(x) \right)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(2^{-js}(\varphi_j \# w)(x) \right)^2 \right)^{1/2} d\gamma(x) \leq \\
&\leq c \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{2js} |\varphi_j \# f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p,\mu} \cdot \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-2js} |\varphi_j \# w|^2 \right)^{1/2} \right\|_{q,\mu}, \qquad (4.3.23)
\end{aligned}$$

utilizando el lado derecho de la desigualdad de (4.3.18) logramos

$$\left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-2js} \left| \varphi_j \# w \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{q,\mu} \leq c_2 \left\| w \right\|_{-s,q,\mu} = c_2 \left\| u \right\|_{q,\mu} = c_2, \quad (4.3.24)$$

y sustituyendo en (4.3.23) demostramos el teorema. ■

Como consecuencia de este Teorema IV.3.6 obtenemos otra caracterización del espacio tipo Sobolev $L_{\mu}^{s,p}$.

Corolario IV.3.1 *Si $s \in \mathbf{N}$ y $1 < p < \infty$ entonces $F_{p,2,\mu}^{2s}(I) = L_{\mu}^{s,p}(I)$ donde*

$$L_{\mu}^{s,p}(I) = \left\{ T \in \mathcal{H}^{'} : T \in L_{loc,\mu}^{1} \ y \ \Delta_{\mu}^{j} T \in L_{\mu}^{p}, 0 \leq j \leq s \right\}.$$

Demostración: Se sigue del Teorema IV.3.6 y de la igualdad tipo A. P. Calderón dada en el Teorema IV.2.1, es decir, $L_{\mu}^{s,p} \equiv W_{\mu}^{2s,p}$ para $1 < p < \infty$. ■

Por último, logramos un teorema de embebimiento que en el marco de la transformación de Fourier se puede encontrar en [114, Theorem 15] y [111, p. 155, Theorem 5].

Teorema IV.3.7 *Para $s \in \mathbf{R}$, $\mu \geq -1/2$ y $1 < p < \infty$, tenemos*

$$B_{p,2,\mu}^{s} \subset W_{\mu}^{s,p} \subset B_{p,p,\mu}^{s}, \quad si \ 2 \leq p < \infty; \quad (4.3.25)$$

$$B_{p,p,\mu}^{s} \subset W_{\mu}^{s,p} \subset B_{p,2,\mu}^{s}, \quad para \ 1 < p \leq 2 \ . \quad (4.3.26)$$

Demostración: Por el Teorema IV.3.3 sabemos que si $2 \leq p < \infty$ se tiene

$$B^s_{p,2,\mu} \subset F^s_{p,2,\mu} \subset B^s_{p,p,\mu},$$

y ya que por el Teorema IV.3.6, $F^s_{p,2,\mu} \equiv W^{s,p}_\mu$; obtenemos inmediatamente (4.3.25). Si $1 < p \leq 2$ entonces por el Teorema IV.3.3 resulta

$$B^s_{p,p,\mu} \subset F^s_{p,2,\mu} \subset B^s_{p,2,\mu},$$

y otra vez utilizando el Teorema IV.3.6 logramos (4.3.26).

IV.4 Potenciales no lineales de Hankel

Numerosos autores han estudiado generalizaciones del potencial de Newton y sus capacidades, podemos destacar, entre otros, a M. Riesz, N. S. Landkof, con los potenciales de Riesz ([69]), N. Aronszajn y K. T. Smith con los de Bessel ([4]) y a J. Rodríguez con los de Bessel-Clifford ([98],[99]). Actualmente D. R. Adams y L. I. Hedberg [1] han generalizado los trabajos anteriores obteniendo nuevos potenciales denominados no lineales.

Estos autores estudian la que ellos denominan como (s,p)-capacidad que viene dada por:

Definición IV.4.1 *Sea $K \subset \mathbf{R}^n$ un conjunto compacto, entonces*

$$C'_{s,p}(K) = \inf \{ \|f\|^p_{L^{s,p}} : f \in \mathcal{C}_0^\infty,\, f \geq 1 \text{ sobre } K \}$$

donde $L^{s,p}$ es el espacio de Sobolev clásico definido sobre $\mathbf{R}^n$ [108].

Para $s = 1$, $p = 2$, una función extremal en la Definición IV.4.1 es una solución débil de la ecuación en derivadas parciales lineal de segundo orden

$$-\Delta u + u = 0,$$

sobre el complementario de K (véase [40] y [53]), siendo Δ el operador Laplaciano usual en $\mathbf{R}^n$.

Sin embargo, para $p \neq 2$ las correspondientes ecuaciones son no lineales y por tanto mucho más difíciles de manejar. En concreto, para $s = 1$ se obtiene

$$-\operatorname{div}\left(\triangledown u \,|\triangledown u|^{p-2}\right) + u\,|u|^{p-2} = 0,$$

donde $\operatorname{div}\left(\triangledown u \,|\triangledown u|^{p-2}\right)$ usualmente se denota por $\Delta_p u$ y es conocido como operador p-Laplaciano (para $p = 2$ se reduce al operador Δ). Este germen de no linealidad en la teoría condujo a redefinir la (s, p)-capacidad para obtener una representación sencilla de la funciones extremales y dar una teoría del potencial más rica (véase [1]).

Seguidamente, establecemos la definición de una capacidad que jugará el mismo papel que la estudiada por D. R. Adams y L. I. Hedberg en en el marco de la transformación de Fourier.

Definición IV.4.2 *Sea $K \subset [0,\infty)$ un conjunto compacto y $s \in \mathbf{R}$. Se denomina (s,p,μ)-capacidad asociada al conjunto compacto K, a*

$$C_{s,p,\mu}(K) = \inf\left\{\|f\|_{s,p,\mu}^p : f \in \Omega_k\right\},$$

donde $\Omega_k = \{f \in \mathcal{H} : f(x) \geq 1 \text{ sobre } K\}$. Nótese que Ω_k es un subconjunto convexo de $\mathcal{H}$.

Esta definición, como es natural puede ser extendida a todos los conjuntos.

Definición IV.4.3 *Sea $s \in \mathbf{R}$. Dado $A \subset [0,\infty)$ abierto, se sigue que*

$$C_{s,p,\mu}(A) = \sup\left\{C_{s,p,\mu}(K) : K \subset A,\ K \text{ compacto}\right\}.$$

Dado $E \subset [0,\infty)$ un conjunto arbitrario, entonces

$$C_{s,p,\mu}(E) = \sup\left\{C_{s,p,\mu}(A) : A \supset E,\ A \text{ abierto}\right\}.$$

Cuando una propiedad sea cierta para todo x excepto para un conjunto de (s,p,μ)-capacidad cero se dirá que es cierta (s,p,μ)-casi por todo. Por $\mathcal{M}$ denotamos al espacio de todas las medidas de Radon complejas sobre I y por $\mathcal{M}(K)$, K compacto, al espacio de las medidas de

Radon complejas soportadas en K. Adoptaremos la práctica de denotar a los elementos positivos en un espacio con el subíndice suma. Por tanto $\mathcal{M}^+$, es el cono de todas las medidas de Radon y $\mathcal{M}^+(K)$ el cono de todas las medidas de Radon positivas soportadas por el compacto K.

Los siguientes lemas son clásicos en el marco de la transformación de Fourier [84] y su demostración no difiere en exceso.

Lema IV.4.1 *Dados A_1, A_2 tal que $A_1 \subset A_2$ entonces*

$$C_{s,p,\mu}(A_1) \leq C_{s,p,\mu}(A_2).$$

Lema IV.4.2 *Dados A_i, $i = 1, \ldots, n$, se tiene que*

$$C_{s,p,\mu}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} C_{s,p,\mu}(A_i).$$

Una vez dada esta breve introducción, se recuerda que nuestro objetivo en esta sección es obtener una caracterización de una función extremal para la Definición IV.4.2 y generalizar los potenciales de Hankel al caso no lineal.

Definición IV.4.4 *Para cualquier $\nu \in \mathcal{M}^+$ definimos los potenciales no lineales de Hankel de una medida ν por $V^{\nu}_{s,p,\mu} \equiv H^s_\mu \left(H^s_\mu \nu\right)^{q-1}$ donde $1/p + 1/q = 1$.*

Obsérvese que para $p = q = 2$, $V^{\nu}_{s,2,\mu} = H^s_\mu H^s_\mu \nu = H^{2s}_\mu \nu$, es el potencial lineal de orden $2s$, asociado a la medida ν.

Indicamos a continuación, algunos resultados que nos serán útiles para establecer el teorema de existencia de la función extremal.

Definición IV.4.5 *Un espacio de Banach es uniformemente convexo si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que si* $\|f\| < 1 + \delta$, $\|g\| < 1 + \delta$, *y* $\left\|\frac{1}{2}(f+g)\right\| \geq 1$, *entonces* $\|f - g\| < \varepsilon$.

Teorema IV.4.1 L^p_μ *es uniformemente convexo para* $1 < p < \infty$.

(Ver [48, p.232])

Corolario IV.4.1 *Sea* B *un espacio de Banach uniformemente convexo, y sea* $\{f_n\}_1^\infty$ *una sucesión en* B *tal que* $\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = 1$ *y*

$$\liminf_{n,m\to\infty} \left\|\frac{1}{2}(f_n + f_m)\right\| \geq 1.$$

Entonces $\{f_n\}_1^\infty$ *es uniformemente convergente en* B.

Corolario IV.4.2 *Si* Ω *es un subconjunto convexo de un espacio de Banach uniformemente convexo, entonces existe un único elemento en* $\overline{\Omega}$ *(es decir, en la clausura de* Ω *en* B*) con norma mínima; de hecho cualquier sucesión* $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *en* Ω *que minimiza la norma es de Cauchy.*

La siguiente consecuencia del teorema de Hahn-Banach es conocida como lema de Mazur. (Véase [102], Theorem 3.12)

Lema IV.4.3 *La clausura débil y la clausura fuerte de un conjunto convexo coinciden en un espacio de Banach.*

Siguiendo estos preliminares, estamos en condiciones de enunciar y poder demostrar el siguiente teorema:

Teorema IV.4.2 *Sean* $s \in \mathbf{R}$, $K \subset [0, \infty)$, K *compacto y* $1 < p < \infty$. *Entonces existe un único elemento* $f_k = H_\mu^s g_k$ *en la clausura de* Ω_k *en* $W_\mu^{s,p}$, *tal que* $\|g_k\|_{p,\mu}^p = C_{s,p,\mu}(K)$. *Además,*

(a) *Existe una* $\nu_k \in \mathcal{M}^+(K)$ *tal que* $f_k = H_\mu^s \left(H_\mu^s \nu_k\right)^{q-1}$, $1/p + 1/q = 1$, *y*

$$C_{s,p,\mu}(K) = \int \left(H_\mu^s \nu\right)^q d\gamma = \int f_k d\nu_k; \tag{4.4.1}$$

(b) $f_k(x) \leq 1$, *casi por todo sobre el* $\operatorname{sop} \nu_k$;

(c) $\nu_k(K) = C_{s,p,\mu}(K)$;

(d) $C_{s,p,\mu}(K) = \sup \left\{ \left(\frac{\nu(K)}{\left\| H_\mu^s \nu \right\|_{q,\mu}} \right)^p : \nu \geq 0, \operatorname{sop} \nu \subset K \right\}$

(e) $f_k(x) \geq 1$, (s, p, μ)- *casi todo punto de* K;

(f) $C_{s,p,\mu}(K) = \sup \left\{ \nu(K) : \begin{array}{l} \nu \geq 0, \operatorname{sop} \nu \subset K, \\ H_\mu^s \left(H_\mu^s \nu\right)^{q-1}(x) \leq 1 \textit{ para todo } x \in \operatorname{sop} \nu \end{array} \right\}$

Demostración:

Ya que sabemos que L^p_μ es uniformemente convexo para $1 < p < \infty$, tenemos que existe un único elemento extremal $f_k = H^s_\mu g_k$ en la clausura de Ω_k en $W^{s,p}_\mu$, tal que $\|f_k\|^p_{s,p,\mu} = \inf_{\varphi\in\Omega_k} \|\varphi\|^p_{s,p,\mu} = C_{s,p,\mu}(K)$. Además dado que por definición conocemos que $\|f_k\|_{s,p,\mu} = \|g_k\|_{p,\mu}$, $g_k \in L^p_\mu$ se sigue

$$\|g_k\|_{p,\mu} = C_{s,p,\mu}(K). \tag{4.4.2}$$

Inicialmente, demostramos el apartado (a).

Sea $\varphi = H^s_\mu\psi$ una función no negativa en $\mathcal{H}$. Como L^p_μ es uniformemente convexo y $f_k \in \overline{\Omega}_k$, entonces $f_k + t\varphi \in \overline{\Omega}_k$ para todo $t \geq 0$, por tanto

$$\int_0^\infty |g_k + t\psi|^p \, d\gamma \geq \int_0^\infty |g_k|^p \, d\gamma = C_{s,p,\mu}(K),\ t \geq 0. \tag{4.4.3}$$

En virtud de (4.4.3) la función

$$\phi(t) = \int_0^\infty |g_k + t\psi|^p \, d\gamma,$$

es monótona creciente en $t = 0$. Luego, si tomamos la derivada de $\phi(t)$ en $t = 0$, resulta que

$$\int_0^\infty |g_k|^{p-2} \, g_k\psi d\gamma \geq 0, \tag{4.4.4}$$

para todo $\psi \in \mathcal{H}$ tal que $H^s_\mu\psi \geq 0$.

Ahora, definimos $h = |g_k|^{p-2} g_k$. Por lo tanto

$$|h|^q = |g_k|^{(p-2)q} |g_k|^q = |g_k|^p ,$$

para $1/p + 1/q = 1$, lo que nos permite concluir que $\|h\|_{q,\mu}^q = \|g_k\|_{p,\mu}^p$. Además, ya que $g_k \in L_\mu^p$ podemos afirmar que $h \in L_\mu^q$.

Como $h \in L_\mu^q$, en virtud de la Proposición IV.2.4, existe una $T \in \mathcal{H}'$ tal que $T = H_\mu^{-s} h$, perteneciendo a $W_\mu^{-s,q}(I)$, y si se aplica el inverso del potencial de Hankel logramos

$$h = H_\mu^s T, \tag{4.4.5}$$

obteneniendo

$$0 \leq \int_0^\infty |g_k|^{p-2} g_k \psi d\gamma = \int_0^\infty h \, \psi \, d\gamma = \int_0^\infty \left(H_\mu^s T \right) \psi d\gamma.$$

Además, ya que H_μ^s es una aplicación lineal y continua de $\mathcal{H}$ en sí mismo, podemos afirmar que existe $\varphi \in \mathcal{H}$ tal que

$$0 \leq < H_\mu^s T, \psi > = < T, H_\mu^s \psi > = < T, \varphi >$$

siendo $< . , . >$ la acción de una función generalizada sobre una función prueba.

Es decir $< T, \varphi > \geq 0$ para toda función prueba positiva φ. Luego de [107, Ch. I, Théorème V] y [2, Bemerkung 10, p. 204] deducimos que T es una medida de Radon positiva, la cual denotamos por ν_k.

En virtud de (4.4.5) se consigue que $h = H_\mu^s \nu_k$. Además combinando que $h = |g_k|^{p-2} g_k$, $h = |h|$ y que $|h|^q = |g_k|^p$ logramos que

$$g_k = h^{q-1} = \left(H_\mu^s \nu_k\right)^{q-1}.$$

Ahora, demostramos que $\operatorname{sop} \nu_k \subset K$. Para esto repetimos el mismo razonamiento con $\varphi \in \mathcal{H}$ verificando que $\operatorname{sop} \varphi \subset K^c$, luego tenemos que $f_k + t\varphi \in \overline{\Omega}_k$ para todo $t \in \mathbf{R}$ y

$$< T, \varphi > = < \nu_k, \varphi > = 0$$

para cada φ, con lo que concluimos que $\operatorname{sop} \nu_k \subset K$.

Para finalizar el apartado (a) debemos ver que se verifica (4.4.1).

$$\int f_k d\nu_k = \int H_\mu^s g_k d\nu_k =$$
$$= \int (G_s \# g_k)(x) d\nu_k(x) = \int g_k(y) \int_0^\infty (\tau_x G_s)(y) g_k(y) d\gamma(y) d\nu_k.$$

Teniendo en cuenta que por definición $(\tau_x f)(y) = (\tau_y f)(x)$, $x, y \in I$, y el teorema de Fubini se tiene

$$\begin{aligned} \int f_k d\nu_k &= \int g_k(y) \left(\int_0^\infty (\tau_y G_s)(x) g_k(y) d\nu_k \right) d\gamma(y) = \\ &= \int g_k(y)(G_s \# \nu_k)(y) d\gamma(y) = \int g_k(y) \left(H_\mu^s \nu_k\right)(y) d\gamma(y), \end{aligned}$$

recordando que $g_k = \left(H_\mu^s \nu_k\right)^{q-1}$ y de acuerdo con (4.4.2)

$$\int f_k d\nu_k = \int \left(H_\mu^s \nu_k\right)^q d\gamma = \|g_k\|_{p,\mu}^p = C_{s,p,\mu}(K).$$

A continuación probaremos (b). Sabemos por el Lema IV.2.1 que $f_k = G_s \# g_k = H_\mu^s g_k$, es una función semicontinua inferior, entonces por definición $\{x : f_k(x) > 1\}$ es abierto. Por lo tanto para todas las funciones φ con $\operatorname{sop}\varphi \subset \{x : f_k(x) > 1\}$ tenemos que $f_k + t\varphi \in \overline{\Omega}_k$ para todo t con $|t|$ suficientemente pequeño. Procediendo, de nuevo, como en (a) obtenemos $< \nu_k, \varphi >= 0$ para cada φ tal que $\operatorname{sop}\nu_k \subset \{x : f_k(x) > 1\}$. Luego $f_k(x) \leq 1$ casi todo punto del $\operatorname{sop}\nu_k$.

Ahora consideremos $\nu \in \mathcal{M}^+(K)$ y sea $f = H_\mu^s g \in \Omega_k$. Entonces

$$\nu(K) \leq \int_K f d\nu = \int_K H_\mu^s g d\nu = \int_0^\infty \left(H_\mu^s \nu\right) g d\gamma,$$

y aplicando la desigualdad de Hölder

$$\nu(K) \leq \left\| H_\mu^s \nu \right\|_{q,\mu} \|g\|_{p,\mu} .$$

Además, por un paso al límite la desigualdad es cierta para todo $f \in \overline{\Omega}_k$. En parti-cular, tomando $f = f_k$ nos da

$$\nu(K) \leq \left\| H_\mu^s \nu \right\|_{q,\mu} C_{s,p,\mu}(K)^{1/p}$$

y por tanto

$$\sup \left\{ \left(\frac{\nu(K)}{\left\| H_\mu^s \nu \right\|_{q,\mu}} \right)^p : \nu \geq 0, \operatorname{sop}\nu \subset K \right\} \leq C_{s,p,\mu}(K).$$

Por otra parte, eligiendo $\nu = \nu_k$, por (b) resulta que

$$\nu_k(K) \geq \int f_k d\nu_k$$

y de (a) obtenemos

$$\int_K f_k d\nu_k = C_{s,p,\mu}(K) = \left\| H_\mu^s \nu_k \right\|_{q,\mu} \cdot \left(C_{s,p,\mu}(K)\right)^{1/p},$$

es decir, $\nu_k(K) = C_{s,p,\mu}(K)$, y

$$\nu_k(K) = C_{s,p,\mu}(K) = \left(\frac{\nu_k(K)}{\left\| H_\mu^s \nu_k \right\|_{q,\mu}} \right)^p,$$

con lo que conseguimos (c) y (d).

Para la demostración de (e) elegimos una sucesión $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ en Ω_k tal que

$$\|f_n\|_{s,p,\mu}^p \to \inf_{f \in \Omega_k} \|f\|_{s,p,\mu}^p = C_{s,p,\mu}(K).$$

Por la convexidad uniforme de L_μ^p, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $W_\mu^{s,p}(I)$. Además, por la definición de capacidad y el Lema IV.4.2, obtenemos una subsucesión $\{f_{n_i}\}_{i=1}^\infty$ tal que $\lim_{i\to\infty} f_{n_i}(x) = f_k(x)$ (s,p,μ)-casi por todo, de donde deducimos (e).

Por último, para demostrar (f) consideramos una medida positiva ν con el sop $\nu \subset K$ tal que $V_{s,p,\mu}^\nu(x) \leq 1$ sobre el soporte de ν.

Entonces

$$\int V_{s,p,\mu}^{\nu} d\nu \leq \nu(K). \tag{4.4.6}$$

Por definición y usando el apartado (a) tenemos

$$\int V_{s,p,\mu}^{\nu} d\nu = \int H_{\mu}^{s} \left(H_{\mu}^{s}\nu\right)^{q-1} d\nu = \int \left(H_{\mu}^{s}\nu\right)^{q} d\gamma, \tag{4.4.7}$$

luego combinando (4.4.6) y (4.4.7)

$$(\nu(K))^{1/q} \geq \left\|H_{\mu}^{s}\nu\right\|_{q,\mu}, \tag{4.4.8}$$

y por (d), se tiene

$$\nu(K) \leq \left\|H_{\mu}^{s}\nu\right\|_{q,\mu} (C_{s,p,\mu}(K))^{1/p}. \tag{4.4.9}$$

Luego en virtud de (4.4.8) y (4.4.9) logramos

$$\nu(K) \leq (\nu(K))^{1/q} (C_{s,p,\mu}(K))^{1/p},$$

es decir,

$$\nu(K) \leq C_{s,p,\mu}(K).$$

Además, utilizando (c) con ν_k obtenemos que se verifica

$$\nu_k(K) = C_{s,p,\mu}(K),$$

por tanto queda establecido (f). ■

IV.5 Aplicaciones

En esta sección establecemos algunas aplicaciones que se obtienen con los potenciales de Hankel.

La primera aplicación está motivada para resolver dos ecuaciones diferenciales en sentido generalizado.

Proposición IV.5.1 *Dada* $f \in W_\mu^{0,p}(I) = L_\mu^p(I)$ *entonces existe* $g \in \mathcal{H}'$, *tal que*

$$(I - \Delta_\mu)^m g = f. \tag{4.5.1}$$

donde I *es el operador identidad y* $\Delta_\mu \equiv x^{-2\mu-1} D x^{2\mu+1} D$, $m \in \mathbf{N}$, $m \neq 0$.

Si $f \in B_{p,q,\mu}^s$ *se tiene que existe una función* $g \in B_{p,q,\mu}^{s+2m} \subset \mathcal{H}'$, $m \in \mathbf{N}$, *tal que (4.5.1) se verifica.*

Demostración: Consideremos $f \in W_\mu^{0,p}(I) = L_\mu^p(I)$. Queremos obtener una distribución $g \in \mathcal{H}'$ tal que

$$(I - \Delta_\mu)^m g = f. \tag{4.5.2}$$

Aplicando la transformación de Hankel y usando la fórmula (4.1.4) logramos

$$(1 + \xi^2)^m h_\mu g = h_\mu f \text{ en } \mathcal{H}',$$

es decir $h_\mu((1+\xi^2)^m h_\mu g(\xi))(x) = f(x)$ en $\mathcal{H}'$, dado que $h_\mu^{-1} = h_\mu$.

Entonces de acuerdo con (4.2.8) resulta

$$\begin{aligned}\|g\|_{W_\mu^{2m,p}} &= c_\mu \left(\int_0^\infty \left|H_\mu^{-m} g\right|^p d\gamma\right)^{1/p} = \\ &= c_\mu \left(\int_0^\infty |f|^p \, d\gamma\right)^{1/p} = \|f\|_{W_\mu^{0,p}} .\end{aligned}$$

Luego hemos encontrado la solución $g \in W_\mu^{2m,p}$.

Consideremos $f \in B_{p,q,\mu}^s$. Procederemos de manera similar y aplicando de nuevo la transformación de Hankel y usando la fórmula (4.1.4) en (4.5.2) conseguimos $g = h_\mu(1+\xi^2)^{-m} h_\mu f = H_\mu^{2m} f$. Entonces por la Teorema IV.3.4 tenemos que la solución de (4.5.1) es $g \in B_{p,q,\mu}^{s+2m}$. ■

Seguidamente vemos un teorema de regularidad global:

Teorema IV.5.1 *Sea* $P(\Delta_{\mu,x}) = \sum_{j=0}^m a_j \Delta_{\mu,x}^j$, $m \neq 0$, *un operador diferencial con coeficientes constantes* a_j ($\Delta_{\mu,x} \equiv x^{-2\mu-1} D x^{2\mu+1} D$) *y*

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^m a_j \xi^j \neq 0, \ \forall \xi \in (0,\infty).$$

Si $u \in L_\mu^2(0,\infty)$, $P(-\Delta_{\mu,x})u = f$ *y* $f \in L_\mu^2(0,\infty)$, *entonces* $u \in W_\mu^{m,2}(I)$, $m > 0$.

Demostración: En primer lugar veremos que $|P(\xi)| \geq C\xi^m$ para $C > 0$ y $\forall \xi \in (0,\infty)$,

$$|P(\xi)| \; = \; \left|\sum_{j=0}^m a_j \xi^j\right| \geq |a_m|\,\xi^m - |a_{m-1}|\,\xi^{m-1} - \cdots - |a_0| \geq$$

$$\geq \quad |a_m|\,\xi^m - C'(\xi^{m-1} + \cdots + 1),$$

donde $C' = \max\left(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{m-1}|\right)$.

Pero si $\xi > R \geq 1$ y $k = 0, 1, \ldots, m-1$, se tiene $\xi^k \leq (1/R)\xi^m$ tal que

$$|P(\xi)| \geq \left(|a_m| - mC'/R\right)\xi^m.$$

Por lo tanto, podemos encontrar $C > 0$ eligiendo R lo suficientemente grande tal que para todo $\xi > R$,

$$|P(\xi)| \geq C\xi^m. \tag{4.5.3}$$

Consideremos $v \in \mathcal{H}$. Luego

$$\|v\|^2_{W^{m,2}_\mu(I)} = c_\mu \int_0^\infty \left|H_\mu^{-m} v\right|^2 d\gamma = c_\mu \int_0^\infty \left|h_\mu((1+\xi^2)^{m/2} h_\mu v(\xi))(x)\right|^2 d\gamma(x),$$

aplicando la fórmula de Parseval (4.1.3) obtenemos

$$\|v\|^2_{W^{m,2}_\mu(I)} = c_\mu \int_0^\infty \left|(1+\xi^2)^{m/2} h_\mu v(\xi)\right|^2 d\gamma(\xi) \leq$$

$$\leq c_\mu \int_0^R (1+\xi^2)^m \left|h_\mu v(\xi)\right|^2 d\gamma(\xi) + c_\mu \int_R^\infty (1+\xi^2)^m \left|h_\mu v(\xi)\right|^2 d\gamma(\xi),$$

donde $R \geq 1$.

Entonces, teniendo en cuenta que, para $\xi \leq R$, $(1+\xi^2)^m \leq (1+R^2)^m$, que si $\xi \geq R$, $(1+\xi^2)^m \leq 2^m \xi^{2m}$ y (4.5.3), resulta

$$\begin{aligned}\int_0^\infty (1+\xi^2)^m \left|h_\mu v(\xi)\right|^2 d\gamma(\xi) &\leq (1+R^2)^m \int_0^R \left|h_\mu v(\xi)\right|^2 d\gamma(\xi) + \\ &+ 2^m C^{-2} \int_R^\infty \left|P(\xi^2) h_\mu v(\xi)\right|^2 d\gamma(\xi).\end{aligned}$$

y ya que por la fórmula (4.1.4) se tiene

$$h_\mu(P(\Delta_{\mu,x})v)(\xi) = P(-\xi^2)(h_\mu v)(\xi),$$

podemos usar de nuevo la fórmula de Parseval (4.1.3) y lograr

$$\|v\|_{W_\mu^{m,2}(I)} \leq C \left\{ \|v\|_{L^2(I)}^2 + \|P(-\Delta_{\mu,x})v\|_{L^2(I)}^2 \right\}^{1/2}, \ m > 0,$$

donde $C > 0$.

Concluyendo la demostración, dado que por la Proposición IV.2.2 sabemos que $\mathcal{H}$ es denso en $W_\mu^{m,2}$. ■

Bibliografía

[1] D. R. Adams, L. I. Hedberg. *Function Spaces and Potential Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1996.

[2] G. Altenburg. Bessel-Transformationen in Räumen von Grundfunktionen über dem Intervall $\Omega = (0, \infty)$ und deren Dualräumen, *Math. Nachr.*, 108 (1982), 197-218.

[3] G. Altenburg. Eine Realisierung der Theorie der abstrakten Besov-Räume $B_q^s(A)$ ($s > 0$, $1 \leq q \leq \infty$) und der Lebesgue-Räume $H_{p,\mu}^s$ auf der Grundlage Besselscher Differentialoperatoren, *Z. Anal. Anwendungen* 3 (1984), no. 1, 43-63.

[4] N. Aronszajn, K. T. Smith. Theory of Bessel potentials. Part I., *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble **11** (1961), 385-475.

[5] A. Baier, H.-J. Glaeske. The Laplace Transformation on Certain

Spaces of Generalized Functions, *Math. Nachr.*, 159 (1992) 311-322.

[6] J .A. Barrios. *Sobre algunas generalizaciones de la transformación de Laplace.* Tesis Doctoral, Dpto. de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna, 1990.

[7] J .A. Barrios, J. J. Betancor. On a generalization of Laplace transform due to E. Krätzel, *Jour. Inst. Math. & Comp. Sci. (Math. Ser.)* 3 (4) (1990), 273-291.

[8] J .A. Barrios, J. J. Betancor. A Real Inversion Formula for the Kratzel's Generalized Laplace Transform. *Extracta Mathematicae* 6 (2) (1991), 55-57.

[9] J. J. Betancor. The Hankel-Schwartz transform for functions of compact support, *Rendiconti di Matematica*, (VII) 7 (3-4) (1987), 399-409.

[10] J. J. Betancor, C. Jerez. Weighted norm inequalities for the H-transformation. *Internat. J. Math. Math. Sci.* 20 (1997), no. 4, 647–656.

[11] J.J. Betancor, L. Rodríguez-Mesa. The K_μ- transformation on

McBride's spaces of generalized functions, *Math. Nachr.*, 185 (1997) 21-31.

[12] J. J. Betancor, L. Rodríguez-Mesa. Lipschitz-Hankel spaces, partial Hankel integrals and Bochner-Riesz means, *Arch. Math.* 71 (1998) 115-122.

[13] J. J. Betancor, L. Rodríguez-Mesa. On the Besov-Hankel spaces, *J. Math. Soc. Japan*, Vol. 50, No. 3 (1998) 781-788.

[14] J.J. Betancor, L. Rodríguez-Mesa. Weighted inequalities for Hankel convolutions operators. Aceptado en *Illinois Journal Math.*.

[15] R. P. Boas, Jr. Inversion of a generalized Laplace Integral, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, U.S.A. 28 (1942), 21-24.

[16] A. P. Calderón. Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions, in *Partial Differential Equations*, Proc. Sympos. Pure Math., **4** (1961), 33-49.

[17] R. D. Carmichael , R. S. Pathak. Abelian theorems for H- transforms of functions and generalized functions, *The Journal of the Elisha Mitchell Society*, 103 (1) (1987), 43-46.

[18] R. D. Carmichael , R. S. Pathak. Asymptotic behaviour of the H-transforms in the complex domain, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 102 (1987), 533-552.

[19] R. D. Carmichael, R. S. Pathak. Abelian theorems for the Whittaker transforms. *Internat. J. Math. & Math. Sci.*, 10 (3) (1987), 417-432.

[20] F. M. Cholewinski. A Hankel Convolution Complex Inversion Theory, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 58 (1965).

[21] D. I. Cruz-Báez, J. Rodríguez. The $\mathcal{L}_\nu^{(\rho)}$- transformation on McBride's spaces of generalized functions, *Comment. Math. Univ. Carolinae* 39,3 (1998) 445-452.

[22] D. I. Cruz , J. Rodríguez. A weighted norm inequality for a generalization of the K transform, *Jour. Inst. Math. & Comp. Sciences (Comp. Sc. Ser.)* Vol. 9, No. 1 (1998), 25-29.

[23] D. I. Cruz , J. Rodríguez. A generalization of the K transform on McBride's spaces, *Mathematica Balkanica* vol. 12, No 3-4 (1998), pp. 411-424.

[24] D. I. Cruz , J. Rodríguez. Abelian and Tauberian theorems for the

Krätzel transform, *Pure and Applied Mathematika Sciences* Vol. 49 (1999), No. 1-2; 45-60.

[25] I. Dimovski. A transform approach to operational calculus for the general Bessel-type differential operator, *C.R. Acad. Bulg. Sci.*, 27 (1974), n.2, 155-158.

[26] I. Dimovski, V. Kiryakova. On an integral transformation, due to N. Obrechkoff. *Lecture Notes in Math.* 798 (1980) (Proc. Conf. Anal. Functions, Kozubnik 1979), 141-147.

[27] G. Doetsch. *Handbuch der Laplace-Transformation*, Band I, Birkhauser Verlag Basel and Stuttgart, 1971.

[28] G. Doetsch. *Introduction to the theory and applications of the Laplace transformation*, Springer Verlag, Berlin, 1974.

[29] L. S. Dube y J. N. Pandey. On the Hankel transform of distributions. *Tohoku Math. J.*, 27 (1975), 337-354.

[30] A. Erdelyi (Ed.). *Higher transcendental functions*, Vol. I, McGraw Hill, New York, 1953.

[31] A. Erdélyi (Ed.). *Tables of Integrals Transforms*, Vol. II, McGraw-Hill, New York, 1954.

[32] S.A. Emara. Weighted estimates for the Hankel-, K- and Y-transformations, *Archivum Mathematicum* (BRNO), Tomus 30 (1994), 29-43.

[33] S.A. Emara , H. P. Heinig. Weighted norm inequalities for the Hankel and K-transformations, *Proc. of the Royal Soc. Edinburgh*, 103 A (1986), 325-333.

[34] M.T. Flores. *Sobre una generalización de la transformación integral de Hankel*, Memoria de Licenciatura, Dpto. de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna, 1990.

[35] G. B. Folland. Introduction to Partial Differential Equations. Princenton University Press, Princenton, New Jersey, 1976.

[36] G. B. Folland. Real analysis. Modern techniques and their applications. Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1984.

[37] J. Gosselin , K. Stempak. A weak-type estimate for Fourier-Bessel multipliers, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 106 (1989), 655-662.

[38] J. L. Griffith. A theorem concerning the asymptotic behaviour Hankel transform, *J. and Proc. of the Roy. Soc. of New South*

Wales, LXXXVIII (1955), 61-65.

[39] J. L. Griffith. On the asymptotic behaviour of Hankel transform, *J. and Proc. of the Roy. Soc. of New South Wales*, LXXXVIII (1955), 71-76.

[40] D. T. Haimo. Integral equations associated with Hankel convolutions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **116** (1965), 330-375.

[41] R. A. Handelsman , J. S. Lew. Asymptotic expansion of Laplace transforms near the origin, *Siam J. Math. Anal.*, 1 (1) (1970), 118-129.

[42] C. S. Herz. On the mean inversion of Fourier and Hankel transforms, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 40 (1954), 996-999.

[43] E. Hewitt , K. Stromberg. Real and abstract analysis. A modern treatment of the theory of functions of a real variable. Third printing. Graduate Texts in Mathematics, No. 25. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.

[44] P. Heywood y P. G. Rooney. A weighted norm inequality for the Hankel transformation. *Proc. Royal Soc. of Edinburgh*, 99A (1984), 45-50.

[45] I. I. Hirschman, Jr. Variation diminishing Hankel transforms, *J. Analyse Math.*, **8** (1960/61), 307-336.

[46] I. I. Hirschman , D. V. Widder. *The convolution transform.* Princenton University Press, Princenton, 1955.

[47] C. Jerez. *Transformaciones integrales de Watson en espacios de funciones y de distribuciones.* Tesis Doctoral, Dpto. de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna, 1996.

[48] F. John. Partial Differential Equations. Springer, Berlin Heidelberg, 1971.

[49] V. G. Joshi , R. K. Saxena. Abelian theorems for distributional H- transform, *Math. Ann.*, 256 (1981), 311-321.

[50] V.G. Joshi , R.K. Saxena, Complex inversion and uniqueness theorem for the generalized H-transform, *Indian J. Pure and Appl. Math.* 14 (1983), 322-329.

[51] J. Karamata. Sur une mode de croissance reguliere des fonctions, *Mathematika*, 4 (1930), 38-53.

[52] J. Karamata. Neuer Beweis und verallgemeinerung der tauberschen Satze, welche die Laplacesche und Stieltjessche Transforma-

tion betreffen, *J. Reine Angew. Math.*, 164 (1931), 17-39.

[53] R. Kapelko. A multiplier theorem for the Hankel transform. *Rev. Mat. Complut.* 11 (1998), no. 2, 281–288.

[54] A.A. Kilbas, B. Bonilla, M. Rivero, J. Rodríguez , J. Trujillo. Bessel type function and Bessel type integral transform on spaces $\mathcal{F}_{p,\mu}$ and $\mathcal{F}^{'}_{p,\mu}$. *Integral Transform. Spec. Funct.* 8 (1999), no. 1-2, 13–30.

[55] A.A. Kilbas, B. Bonilla, M. Rivero, J. Rodríguez , J. Trujillo. Compositions of Bessel Type Integral Transform with Fractional Calculus Operators on Spaces $\mathcal{F}_{p,\mu}$ and $\mathcal{F}^{'}_{p,\mu}$. *FCAA*, Vol. 1 No 2, (1998), 135-150.

[56] V. Kiryakova. *Generalized Fractional Calculus and Applications.* Pitman Research Notes in Mathematics Series 301. Longman Scientific & Technical, Harlow - UK (1994).

[57] E. L. Koh y A. H. Zemainan. The complex Hankel and I- tranformations of generalized functions. *Siam J. Appl. Math.* 16 (1968), 945-957.

[58] E. Krätzel. Eine verallgemeinerung der Laplace- und Meijer-

transformation, *Wiss. Z. Univ. Jena Math. Naturw. Reihe* 5 (1965), 369-381.

[59] E. Krätzel. Die faltung der L-transformation, *Wiss. Z. Univ. Jena Math. Naturw. Reihe* 5 (1965), 383-390.

[60] E. Krätzel. Differentiationssätze der L- Transformation und Differentialgleichungen nach dem Operator. *Math. Nachr.* 35 (1967), n. 1-2, 105-114.

[61] E. Krätzel. Übertragung der Post-Widderschen Umkehrformel del Laplace-Transformation auf die L-Transformation. *Math. Nachr.* 35, (1967), n.5-6, 295-304.

[62] E. Krätzel. Integral transformations of Bessel-type. Proceeding of International Conference on Generalized Functions and Operational Calculus, Varna, (1975), 148-155.

[63] E. Krätzel und H. Menzer. Verallgemeinerte Hankel-Funktionen, *Publ. Math. Debrecen* 18, fasc. 1-4, (1973), 139-147.

[64] N. S. Landkof. *Foundations of Modern Potential Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1972.

[65] W. L. Lee. On Schwartz's Hankel transformation of certain spaces of distributions, *Siam J. Math. Anal.*, 6 (29) (1975), 109-115.

[66] B. M. Levitan. Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. *Uspehi Matem. Nauk (N.S.)* 6, (1951). no. 2(42), 102–143.

[67] M. Linares. *La transformación generalizada de Bessel.* Tesis Doctoral, Dpto. de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna, 1989.

[68] L. N. Lyakhov. Describing the Space of the Riesz B-Potentials $U_\alpha^\gamma(L_p^\gamma)$ using B-Derivatives of Order $2[\alpha/2]$, *Doklady Math.*, Vol. 51, No 2 (1995), 190-193.

[69] S. P. Malgonde , S. K. Saxena. An inversion formula for the distributional H-transformation, *Math. Ann.* 258 (1982), 409-417.

[70] I. Marrero. *La convolución generalizada y espacios de Hilbert para la transformación integral de Hankel.* Tesis Doctoral, Dpto. de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna, 1997.

[71] A. M. Mathai , R. K. Saxena. The H function with aplications in statics and other disciplines, Halsted Press [John Wiley & Sons],

New York-London-Sidney, 1978.

[72] A.C. McBride. *Fractional Calculus and Integral Transforms of Generalized Functions*. Res. Notes Math., 31, Pitman Press, San Francisco, London, Melbourne (1979).

[73] A.C. McBride. Fractional powers of a class ordinary differential operators, *Proc. London Math. Soc.*, Ser. 3, 45 (1982), n.3, 519-546.

[74] J. M. R. Méndez. A mixed Parseval equation and the generalized Hankel transformation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 102 (1988), 619-624.

[75] J. M. R. Méndez. On the Bessel transforms of arbitrary order, *Math. Nachr.*, 136 (1988), 233-239.

[76] J. M. R. Méndez y A.M. Sánchez. On the Schwartz's Hankel transformation of distributions. *Analysis* 13 (1993), 27-43.

[77] C. S. Meijer. Uber eine enveiterung der Laplace-transformation, I, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam*, 43 (1940), 599-608.

[78] C. S. Meijer. Uber eine enveiterung der Laplace-transformation, II, *Proc. Akad. Wet. Amsterdam*, 43 (1940), 702-711.

[79] N. Meyers. A theory of capacities for potentials of functions in Lebesgue classes, *Math. Scand.* **26** (1970), 255-292.

[80] O. P. Misra. Distributional G- transformation, *Bull. Cal. Math. Soc.*, 73 (1981), 247-255.

[81] B. Muckenhoupt. A note on the two weight function condition for the Fourier transform norm inequality, *Proc. Amer. Math. Soc.* 88 (1983), 97-100.

[82] B. Muckenhoupt. Weighted norm inequalities for the Fourier transform, *Trans. Amer. Math. Soc.* 276 (1983), 729-742.

[83] C. Nasim. On K-transform, *Internat. J. Math & Math. Sci.*, 4 (3) (1981), 493-501.

[84] C. Nasim. An integral equation involving Fox's H-function, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 13 (10) (1982), 1149-1162.

[85] C. Nasim. Integral operators involving Whittaker functions, *Glasgow Math. J.* 24 (1983), 139-148.

[86] N. Obrechkoff. On certain integral representations of real functions on the real semi-axis, *Izv. Mat. Nauk (Bulg. Akad. Nauk,*

Otdel Mat.-Fiz. Nauk) 3 (1958), n.1, 3-28 (In Bulgarian); English Translation in: *East J. on Approximations* 3 (1997), n.1, 89-110.

[87] R. S. Pathak , P. K. Pandey. Sobolev Type Spaces Associated with Bessel Operators, *J. Math. Anal. Appl* **215** (1997), 95-111.

[88] G. L. N. Rao , L. Debnath. A generalized Meijer transformation, *Internat. J. Math. and Math. Sci.* 8 (1985), 359-365.

[89] J. R. Ridenhour , R. P. Soni. Parseval relation and tauberian theorems for the Hankel transforms, *Siam J. Math. Anal.*, 5 (5) (1974), 809-821.

[90] J. Rodríguez. The integral L-transform in a space of generalized functions. Proceedings of the Eleventh Spanish-Portuguese Conference on Mathematics, Vol. 1 (Badajoz, 1986), 381–390, *Publ. Dep. Mat. Univ. Extremadura*, 18, Univ. Extremadura, Badajoz, 1987.

[91] J. Rodríguez. A new variant of the K-integral transformation. *Pure and Applied Mathematika Sciences.* Vol. 31, n.1-2, (1990), 31-41.

[92] J. Rodríguez. A generalization of the K-integral transformation. *Jour. Inst. Math. & Comp. Sci. (Math. Ser.)* Vol. 3, n.3 (1990),

305-316.

[93] J. Rodríguez. El núcleo de los potenciales de Bessel-Clifford y espacios de Lipschitz. *Pub. Mat. UAB*, n^o 22, 1980.

[94] J. Rodríguez. Algunos módulos de continuidad relacionados con los potenciales de Bessel-Clifford. Act. IX. Jorn. Matem. Hispano-Lusas. Salamanca (1982), 337-382.

[95] J. Rodríguez, J.J. Trujillo , M. Rivero. Operational fractional calculus of Kratzel integral transformation. *Differential equations* (Xanthi, 1987), 613–620, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 118, Dekker, New York, 1989.

[96] L. Rodríguez-Mesa. *La transformación integral y la convolución de Hankel de funciones y distribuciones.* Tesis Doctoral, Dpto. de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna, 1997.

[97] W. Rudin.Functional Analysis, Second edition, McGraw-Hill, New York, 1991.

[98] S.A. Samko, A.A. Kilbas , O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Aplications.* Gordon and Breach S.P., New York 1993.

[99] A.M. Sánchez. *La transformación integral generalizada de Hankel-Schwartz*. Tesis Doctoral, Dpto. de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna, 1987.

[100] A. L. Schwartz. An inversion theorem for the Hankel transform. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 22 (1969), 713-719.

[101] A. L. Schwartz. The smoothness of Hankel transforms, *J. Math. Anal. Appl.*, 28 (3) (1969), 500-507.

[102] L. Schwartz. *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris, 1978.

[103] S. L. Sobolev. On a theorem in funtional analysis, Amer. Math. Soc. Translations (2) 34 (1963) 39-68.

[104] K. Soni y R. P. Soni. A note on probability measures and Hankel transform, *J. London Math. Soc.*, (2), 9 (1974), 65-67.

[105] K. Soni y R. P. Soni. A note on uniform asymptotic expansions of finite K_ν and related transforms with explicit remainder, *J. Math. Anal. Appl.*, 19 (1) (1981), 163-177.

[106] E. M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princenton, Princenton Univ. Press 1970.

[107] K. Stempak. *The Littlewood-Paley theory for the Fourier-Bessel transform*, University of Wroclaw, Preprint n^o 45, 1985.

[108] K. Stempak. La théorie de Littlewood-Paley pour la transformation de Fourier-Bessel. *C. R. Acad. Sc. Paris* 303 (serie I, n^o 1), 25-29 (1986).

[109] M. H. Taibleson. On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n-space I. *J. Math. Mech.*, 13 (1964), 407-479.

[110] E. C. Titchmarsh. *The theory of Fourier integrals*, Second Edition, Oxford University Press, 1948.

[111] H. Triebel. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publ. Comp. 1978, and Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1978.

[112] R. S. Varma. On a generalization of the Laplace integral. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, India, 20A (1951), 209-216.

[113] G. N. Watson. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1959.

[114] D. V. Widder. *The Laplace transform.* Princenton University Press, Princenton, 1941.

[115] D. V. Widder. Inversion of convolution transform by use of series. *J. d'Analyse Math.*, XXI (1968), 293-312.

[116] E. M. Wright. The asymptotic expansions of generalized function. *Proc. London Math. Soc.* 2, ser. 38, (1934), 257-270.

[117] M. Zamansky. *Introducción al Álgebra y Análisis moderno*, Montaner y Simon, S.A., Barcelona, 1970.

[118] A. H. Zemanian, *Distributional Theory and Transform Analysis*, McGraw Hill, New York, 1965.

[119] A. H. Zemanian. A distributional K transformation. *Siam J. Appl. Math.* Vol. 14, n.6, (1966), 1350-1365.

[120] A. H. Zemanian. Some Abelian theorems for the distributional Hankel and K-transformations, *Siam J. Appl. Math.*, 14 (6) (1966), 1255-1265.

[121] A. H. Zemanian, Inversion formulas for the ditributional Laplace transformation, *Siam J. Appl. Math.* 14 (1966), 159-166.

[122] A.H. Zemanian. *Generalized Integral Transformation*. Interscience Publisher, New York, (1968).

[123] A. Zygmund. “Trigonometric Series”, Second edition, Cambridge University Press, Cambdridge, 1959.