Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Ignacio Jiménez San Andrés

Números reales: de Eudoxo a Dedekind

Real numbers: from Eudoxus to Dedekind

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Septiembre de 2020

Dirigido por
Antonio Martinón Cejas

Antonio Martinón Cejas
Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Resumen · Abstract

Resumen

A lo largo de este documento se trabajarán tres apartados claves en el desarrollo del concepto actual de número real. Comenzaremos por ver como se concebían los números en la época de los griegos, luego se expondrá la teoría de la proporción desarrollada por Eudoxo y recogida por Euclides en "Elementos", y para concluir se hablará del trabajo realizado por Dedekind en cuanto a la teoría de los números reales.

Abstract

Throughout this document three key sections will be worked on in the development of the current concept of real number. We will begin by seeing how numbers were conceived in the time of the Greeks, then the theory of proportion developed by Eudoxus and collected by Euclid in "Elements" will be exposed, and to conclude we will talk about the work done by Dedekind on the theory of real numbers.

Contenido

Introducción

En la actualidad el concepto de número, y más en concreto, el concepto de número real está bastante claro y se entiende tanto como está definido como de que manera se debe operar con números reales. Pero esto no siempre fue así. En la antigua Grecia ni siquiera se contemplaba la existencia de lo que hoy llamamos número racional (para ellos eran simples razones de números enteros), ya no hablar entonces del concepto de número irracional.

Este es el objetivo final de este trabajo: presentar las grandes teorías que nos han llevado a tener el concepto de número real que hoy en día manejamos de manera cotidiana y sin problema alguno.

El trabajo se ha ordenador por orden cronológico, donde trataremos primero la visión de los griegos, pasando por la primera teoría de la proporción que permitía el uso de magnitudes inconmensurables y concluyendo con una de las teorías más actuales, las cortaduras de Dedekind.

1

Los números reales en Grecia

Nuestro viaje a través de los distintas maneras de concebir los números reales debe comenzar en Grecia, donde tras siglos de matemáticas aparece por primera vez la posibilidad de que un número no se pueda expresar cómo fracción de enteros irreducibles.

1.1. Conmensurabilidad de segmentos

Para poder entrar en materia, lo primero que tenemos que entender es que para los pitagóricos, todo se podía expresar en términos de números enteros, esto incluye las razones de segmentos. En la antigüedad, un segmento a de una recta se medía apoyando a lo largo del mismo tantas medidas unidad e, una tras otra, como fuese necesario, de manera que:

$$a = \underbrace{e + \cdots + e}_{m \quad veces} = m \cdot e$$

Dado esto, diremos que dos segmentos a_0 y a_1 son *conmensurables* si ambos segmentos pueden medirse, tal y como hemos explicado con anterioridad, usando la misma medida unidad e, de manera que $a_0 = m \cdot e$ y $a_1 = n \cdot e$,donde m y n son números naturales. En este caso, tendríamos que la razón $a_0 : a_1$ de ambos segmentos sería igual a las razón $m : n$ de dos números naturales.

El siguiente paso a seguir sería encontrar esa unidad de medida en común. Ya en tiempos anteriores a la aparición y la filosofía griega, existía un proceso para determinar esta unidad de medida común, un proceso de “restas consecutivas”. Este método se conoce hoy en día como *Algoritmo de Euclides.* Al segmento mayor a_0 se le sustrae el segmento menor a_1 tantas veces como sea posible, hasta que la cantidad sobrante sea menor que a_1, de manera que si a_2 es este residuo, entonces:

$$a_0 = n_1 a_1 + a_2 \quad con \quad a_2 < a_1$$

Si continuásemos el proceso:

$$a_1 = n_2 a_2 + a_3 \quad con \quad a_3 < a_2$$
$$a_2 = n_3 a_3 + a_4 \quad con \quad a_4 < a_3$$
$$\vdots$$

En caso de que los segmentos a_0 y a_1 tuviesen una medida en común, el proceso llegaría a un final tras un número finito de iteraciones. Esto quiere decir que existe un número natural k de manera $a_{k-1} = n_k a_k$, donde el segmento a_k es la unidad de medida en común entre a_0 y a_1 que estábamos buscando.

En un primer momento, la intuición parecía decir que este proceso siempre llegaría a su fin, logrando en todos los casos una unidad de medida común a cualquier par de segmentos. Sin embargo, a día de hoy sabemos que todo lo que muestra este procedimiento es que cada razón de segmentos puede ser desarrollada como una "fracción continua"

$$\begin{aligned} a_0 : a_1 &= n_1 + a_2 : a_1 \\ &= n_1 + \tfrac{1}{a_1:a_2} = n_1 + \tfrac{1}{n_2 + a_3:a_2} \\ &= n_1 + \tfrac{1}{n_2 + \frac{1}{a_2:a_3}} = \cdots = n_1 + \tfrac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \cdots}} \end{aligned}$$

la cual es finita solamente cuando los segmentos a_0 y a_1 sean conmensurables.

Es aquí donde se tuercen las cosas para los pitagóricos, ya que pudo ser uno de sus miembros es el que, estudiando la propia insignia de esta escuela (el *pentagrama*), encuentra dos segmentos pertenecientes al mismo que no son conmensurables.

1.2. Descubrimiento de los irracionales

Aunque hay dudas de quien fue el primero en encontrar la existencia de la noción de número irracional (aunque fuese sin demostrar que un número x lo sea), intentaremos hablar de todos los matemáticos que pudieron ser los que lograron tal hallazgo. Hay que entender que un descubrimiento de esta magnitud en la época de los pitagóricos, pudo generar un gran revuelo.

Para los pitagóricos, todo se regía por un orden, un orden impuesto por los números enteros. Es decir, todo se podía expresar en términos de números enteros, de manera que tanto el concepto de número natural como una cercana idea al concepto de número racional (para ellos era una simple extensión del dominio de los números enteros) estaban aceptados de manera general. No ocurría lo mismo con la concepción de número o proporción irracional, por no decir directamente que no se concebía ni la posibilidad de que tal número pudiera existir.

La aparición entonces de esta posibilidad pudo causar un gran revuelo en aquella época, incluso llevando a que se repudiase a uno de sus posibles descubridores.

1.3. Hipaso de Metaponto

Nació cerca del año 500 aC en la ciudad griega de Metaponto. Alumno de la propia escuela pitagórica, fue el responsable de demostrar que existían pares de magnitudes no conmensurables. No sólo lo demostró si no que rompió el silencio impuesto por los pitagóricos y reveló la existencia de lo descubierto al mundo, lo que le llevo a ser repudiado por su propia escuela, llegando a erigir una tumba con el nombre de Hipaso, mostrando que para ellos él ya estaba muerto.

1.3.1. Aparición de dos segmentos inconmensurables

Es muy probable que fuese Hipaso quien, mientras trabajaba con el pentagrama (insignia y símbolo de la escuela pitagórica), encontró que dos de sus segmentos interiores eran inconmensurables. Para ver esto, usaremos el diagrama expuesto a continuación:

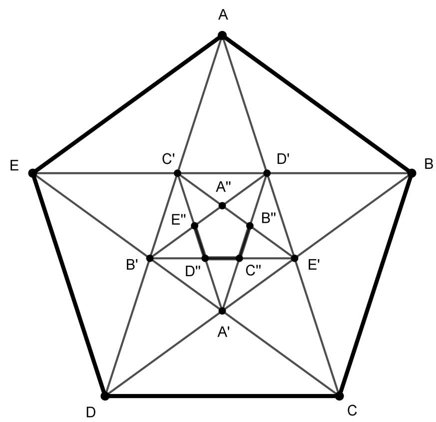


Figura 1.1. Pentágono $ABCDE$ usado para la demostración

Comenzando con el pentágono regular $ABCDE$, dibujamos sus 5 diagonales. Estas diagonales se intersecan formando un nuevo pentágono regular de menor tamaño en el interior, el cual llamaremos $A'B'C'D'E'$. Por simetrías, cada uno de los lados de un pentágono regular es paralelo a una de las diagonales. Teniendo esto en cuenta, podemos afirmar que los triángulos AED y $BE'C$ tienen sus correspondientes lados paralelos, por lo tanto, ambos triángulos son semejantes, de manera que se cumple que $AD : AE = BC : BE'$. Además, tenemos que $BE' = BD - BC$, ya que $BC = AE = DE'$, debido a que EA es paralelo a DB, y DE es paralelo a AC. Por tanto, sea cual sea el pentágono regular que tengamos, tendríamos la siguiente igualdad de razones de segmentos que relaciona las diagonales con los lados:

$$diagonal : lado = lado : (diagonal - lado)$$

Denotemos ahora a la diagonal por a_0, al lado por a_1 y a la diferencia de ambos por $a_2 = a_0 - a_1$. Entonces, por la igualdad anteriormente expuesta, tendríamos que $a_0 = a_1 = a_1 : a_2$ con $a_2 < a_1$. Generando la diferencia $a_3 = a_1 - a_2$, llegaríamos a la misma ecuación entre las razones $a_1 : a_2 = a_2 : a_3$ con $a_3 < a_2$. Es claro que este proceso podemos continuarlo de manera indefinida:

$$a_2 = a_0 - a_1, \quad a_3 = a_1 - a_2, \quad a_4 = a_2 - a_3 \cdots$$
$$a_0 : a_1 = a_1 : a_2 = a_2 : a_3 = a_3 : a_4 = \cdots$$

Usando el Algoritmo de Euclides para a_0 y a_1

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \cdot a_1 + a_2, \\ a_1 &= 1 \cdot a_2 + a_3, \\ a_2 &= 1 \cdot a_3 + a_4, \\ &\cdots \end{aligned}$$

podemos observar que nunca terminaría, ya que la diagonal a_0 y el lado a_1 del pentágono son inconmensurables.

Podemos reescribir la razón $a_0 : a_1$ como la fracción continua:

$$a_0 : a_1 = 1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}}$$

Y teniendo en cuenta que $a_0 : a_1 = a_1 : (a_0 - a_1)$,tenemos que:

$$a_0 : a_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Esta razón o proporción tan peculiar se conoce hoy en día como la *proporción áurea*, la cual está relacionada con la *sucesión de Fibonacci*.

Hay que tener en cuenta que, aunque Hipaso demostrase la existencia de segmentos inconmensurables, no demuestra la irracionalidad de $\sqrt{5}$. Esta demostración está adjudicada a Teodoro de Cirene. Aún así, es un gran paso, ya que supone la ruptura de la creencia de que todo podía estar expresado en términos de números naturales, contradiciendo por completo la mayor premisa de la escuela pitagórica, y pudiendo causar el rechazo de toda esta corriente hacia probablemente un gran descubrimiento (se dice que incluso los pitagóricos llegaron a cavar y preparar una tumba con el nombre de Hipaso, haciendo ver al pueblo que para ellos, él estaba muerto).

1.4. Eudoxo de Cnido

El primero de todos los matemáticos en generar una teoría estricta sobre razones o cocientes de magnitudes fue Eudoxo de Cnido. Nació en Cnido sobre el año 408 aC y fallece en el 355 aC (fechas aproximadas y que difieren dependiendo del texto de referencia). Discípulo de Platón y considerado la figura más brillante de su época, se le atribuyen tres aportaciones de máxima importancia: el método de la exhaución (el "cálculo" de los griegos), la primera teoría astronómica conocida y la teoría de las proporciones o cocientes (recogida en el Libro V de los Elementos de Euclides).

Es esta última aportación sobre la que nos vamos a centrar en el siguiente capítulo, ya que resulta de máxima importancia no sólo por ser la primera teoría que acepta la existencia de razones de magnitudes que no se pueden expresar como cociente de dos números naturales (lo que hoy en día conocemos como número irracional), si no por ser la base de métodos más modernos para definir el conjunto de los números reales (como puede ser el método por *cortaduras* de Dedekind).

2

Teoría de la proporción de Eudoxo

En este capítulo se expone la teoría de la proporción que nació en la Matemática Griega. Se suele adjudicar su autoría a Eudoxo de Cnido y la conocemos por la versión que Euclides incluyo en el Libro V de su célebre obra *Elementos.*

Recordemos ahora brevemente que *Elementos* es una colección de 13 libros escritos por Euclides donde recoge el conocimiento griego en el campo de las Matemáticas hasta aproximadamente 300 aC. Los libros del I al IV tratan sobre geometría plana, del V al X se centra en razones y proporciones y los libros XI, XII y XIII abarcan el campo de la geometría de los cuerpos sólidos.

A lo largo de este capítulo trataremos y estudiaremos las distintas definiciones y proposiciones que se encuentran en el Libro V. Todos los enunciados de las definiciones y proposiciones han sido tomadas del libro *Los Elementos de Euclides, Biblia de la geometría griega*, escrito por Pedro Miguel González Urbaneja, mientras que las demostraciones de las proposiciones están basadas en las dadas por el propio Euclides tal como se recogen en la versión de Sir Thomas L. Heath *Euclid, The thirteen books of The Elements, Vol.2 (Books III-IX).*

2.1. Definiciones

Antes de comenzar, hay que entender que las definiciones dadas a continuación no son definiciones tal y como las entendemos en la actualidad, sino que tienden a fijar y sugerir ideas. Este hecho sumado a posibles fallas en las traducciones debido a la inexistencia de palabras que traduzcan de manera correcta algunos términos en griego puede llevar a enunciados un poco confusos o complicados. Es por ello que se ha intentado explicar aquellas partes donde el lector podría encontrar dificultad a la hora de comprender lo que se expone.

Definición V.1. *Una magnitud es parte (submúltiplo o parte alícuota) de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor (exactamente).*

Definición V.2. *Y la mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor.*

En estas dos primera definiciones se nos presenta el concepto de dos magnitudes que guardan ente si una relación de multiplicidad. Si tenemos A y B dos magnitudes tales que $A = nB$, para cierto número natural n, diremos que B es submúltiplo o parte alícuota de A (según la Definición V.1) y que A es múltiplo de B (según la Definición V.2)

Definición V.3. *Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas.*

En sí, esta definición no es propiamente una definición, si no más bien una llamada a la intuición de lo que es el concepto de razón. Lo primero que hay que comprender es el concepto de magnitudes homogéneas. Dos magnitudes son homogéneas cuando sean de la misma clase o tipo, es decir, dos longitudes, dos áreas, dos pesos...

Esto es de especial relevancia, ya que antes de Eudoxo el término razón se usaba únicamente para el cociente de magnitudes conmensurables. Sin embargo, en esta definición, Eudoxo extiende la idea de razón a cualquier par de magnitudes homogéneas, logrando que la teoría desarrollada en el Libro V pueda ser aplicable a pares de magnitudes tanto conmensurables como inconmensurables, sin necesidad de hacer dos teorías independientes.

Definición V.4. *Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, puedan exceder una a la otra.*

La definición anterior es más conocida como *Axioma de Arquímedes*, aunque el propio Arquímedes atribuye este axioma a Eudoxo. El axioma enuncia que si tenemos dos magnitudes cualesquiera A y B que guarden razón (es decir, por la Definición V.3, que sean homogéneas), siempre existirán números naturales m y n de manera que $mA > B$ y $nB > A$. Dicho de otra manera: por muy pequeña que sea la magnitud A y por muy grande que sea la magnitud B, podremos encontrar un múltiplo de A que sea mayor que B.

Esta propiedad excluye el 0 como magnitud y además impide que haya magnitudes "infinitamente pequeñas" e "infinitamente grandes".

Definición V.5. *Se dice que una primera magnitud guarda con una segunda magnitud la misma razón que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera exceden a la par, sean* *iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.*

La Definición V.5 se puede reescribir de la siguiente manera: la razón A/B será igual a la razón C/D si para cualesquiera números naturales m y n, si $mA > nB$, tendremos que $mC > nD$; si $mA = nB$, tendremos que $mC = nD$; y si $mA < nB$, tendremos $mC < nD$.

Observemos que las magnitudes A y B deben ser homogéneas entre sí, al igual que las magnitudes C y D, pero no necesariamente deben ser las cuatro magnitudes homogéneas entre sí (A y B pueden ser dos superficies mientras que C y D pueden ser dos pesos).

Esta Definición V.5 se considera fundamental pues viene a establecer la igualdad de razones, de manera que lo si entendemos como número la razón de magnitudes, un número puede obtenerse de muy diferentes maneras, salvando la idea de proporcionalidad entre magnitudes conmensurables y extendiéndola a cualquier par de ellas, tal como se recoge en la Definición siguiente.

Definición V.6. *Se llaman proporcionales las magnitudes que guardan la misma razón.*

A partir de este punto, cuando queramos aclarar que cuatro magnitudes guardan la misma razón ($A/B = C/D$), diremos que las magnitudes son proporcionales.

Definición V.7. *Entre los equimúltiplos, cuando el múltiplo de la primera excede al múltiplo de la segunda pero el múltiplo de la tercera no excede al múltiplo de la cuarta, entonces se dice que la primera guarda con la segunda una razón mayor que la tercera con la cuarta.*

En esta definición estamos estableciendo un orden entre razones de magnitudes. Reescribiendo, tendríamos lo siguiente:

Diremos que la razón A/B es mayor que la razón C/D si existen al menos un par de números naturales m y n de forma que $mA > nB$ y $mC < nD$.

La idea detrás de esto es simple: $A/B > C/D$ si existe un fracción n/m de manera que $A/B > n/m > C/D$, de done obtenemos las distintas desigualdades: $mA > nB$ y $nD > mC$.

Definición V.8. *Una proporción entre tres términos es la menor posible.*

En esta definición se está hablando de la proporción continua en el sentido de que una proporción requiere de cuatro términos, pero uno de ellos puede ser usado dos veces. Es decir, tendríamos que $A/B = B/C$.

Definición V.9. *Cuando tres magnitudes son proporcionales (están en proporción continua), se dice que la primera guarda con la tercera una razón duplicada (es el cuadrado) de la que guarda con la segunda.*

Definición V.10. *Cuando cuatro magnitudes son proporcionales (están en proporción continua), se dice que la primera guarda con la cuarta una razón triplicada (es el cubo) de la que guarda con la segunda, y así siempre, sucesivamente, sea cual sea la proporción.*

Las definiciones 9 y 10 vienen a explicar la utilidad de la proporción continua en distintos aspectos. Podríamos reescribir la 9 como

$$A/B = B/C \Rightarrow (A/B) \cdot (A/B) = (A/B) \cdot (B/C) = A/C$$

y la 10 siguiendo la misma lógica como

$$A/B = B/C = C/D \Rightarrow (A/B) \cdot (A/B) \cdot (A/B) = A/D$$

Definición V.11. *Se llaman magnitudes correspondientes las antecedentes en relación con las antecedentes y las consecuentes con las consecuentes.*

Definición V.12. *Una razón por alternancia consiste en tomar el antecedente en relación con el antecedente y el consecuente en relación con el consecuente.*

Definición V.13. *Una razón por inversión consiste en tomar el consecuente como antecedente en relación con el antecedente como consecuente.*

Definición V.14. *La composición de una razón consiste en tomar el antecedente junto con el consecuente como una sola magnitud en relación con el propio consecuente.*

Definición V.15. *La separación de una razón consiste en tomar el exceso por el que el antecedente excede al consecuente en relación con su propio consecuente.*

Definición V.16. *La conversión de una razón consiste en tomar el antecedente en relación con el exceso por el que el antecedente excede al consecuente.*

Definición V.17. *Una razón por igualdad se da cuando, habiendo diferentes magnitudes y otras iguales a las primeras en número que, tomadas de dos a dos, guardan la misma razón, sucede que como la primera es a la última —entre las primeras magnitudes—, así —entre las segundas magnitudes— la primera es a la* *última; o dicho de otro modo, consiste en tomar los extremos sin considerar los medios.*

Las Definiciones de la 12 a la 17 definen una serie de transformaciones de distintas proporciones o de tipos distintos de razones. Todas ellas se podrían reescribir en lenguaje moderno de la siguiente manera:

Definición V.12: $A/B = C/D \Rightarrow A/C = B/D$
Definición V.13: $A/B = C/D \Rightarrow B/A = D/C$
Definición V.14: $A/B \dashrightarrow (A+B)/B$
Definición V.15: $A/B \dashrightarrow (A-B)/B$
Definición V.16: $A/B \dashrightarrow A/(A-B)$
Definición V.17: $A_1/B_1 = A_2/B_2 = \cdots = A_n/B_n \Rightarrow A_1/B_1 = A_n/B_n$

Las Definiciones 12 y 13 se centran en describir igualdades de razones cuando se realizan ciertas modificaciones en ellas, mientras que las Definiciones 14, 15 y 16 define 3 razones nuevas a partir de una razón ya conocida. La Definición 17 se refiere a la propiedad transitiva de la igualdad de razones.

Definición V.18. *Una proporción perturbada se da cuando habiendo tres magnitudes y otras iguales a ellas en número, sucede que como que el antecedente es al consecuente —entre las primeras magnitudes—, así —entre las segundas magnitudes— el antecedente es al consecuente como el consecuente es a alguna otra magnitud —entre las primeras magnitudes—, así —entre las segundas magnitudes— alguna otra magnitud es el antecedente.*

Aunque la escritura de esta última definición pueda ser un tanto complicada, podríamos reescribirlo de la siguiente manera, dejando más claro lo que se quiere enunciar: Si A, B, C son homogéneas y M, N, P también lo son, entonces tenemos proporcion perturbada cuando

$$A/B = N/P \text{ y } B/C = M/N$$

2.2. Proposiciones

Una vez enunciadas y comprendidas las 18 definiciones anteriores, podemos dar comienzo al estudio de las 25 proposiciones incluidas dentro del Libro V. En cada proposición se ha intentado explicar lo que se quiere lograr o adjuntar un ejemplo que clarifique el enunciado y evidencie la veracidad del mismo.

Las proposiciones de la V.1 a la V.6 son sencillas proposiciones de la aritmética, enunciadas en un lenguaje que en la actualidad podría llegar a ser confuso. Por ello, tanto en estas primeras como en el resto de proposiciones se realizará un pequeño comentario de las mismas al final.

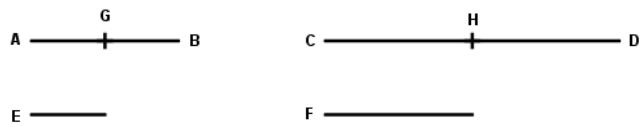
Proposición V.1. *Si hay un número cualquiera de magnitudes respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras iguales en número, cuantas veces una sea múltiplo de otra, tantas veces lo serán todas de todas.*

Escrito de otra manera tendríamos:

$$ma_1, ma_2, \cdots, ma_n \quad son \quad equimultiplos \quad de \quad a_1, a_2, \cdots, a_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ma_1 + ma_2 + \cdots + ma_n = m(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

Para demostrar esto, tomamos dos magnitudes cualquiera AB, CD que sean respectivamente equimúltiplos de las magnitudes E, F iguales en cantidad. Queremos probar que, cualquier multiplo que sea AB de E, ese mismo múltiplo serán AB, CD con respecto a E, F.



Dado que AB es el mismo múltiplo con respecto a E que la magnitud CD lo es con respecto a F, habrán tantas magnitudes en AB iguales a E como los habrá en CD iguales a F.

Dividimos la magnitud AB en las magnitudes AG, GB iguales a E, y la magnitud CD en CH, HD iguales a F; entonces la cantidad de magnitudes AG, GB será igual a la cantidad de magnitudes CH, HD.

Como tenemos que AG es igual a E y CH igual a F, entonces AG es igual a E, y AG, CH igual a E, F. Por la misma razón, GB es igual a E, y GB, HD igual a E, F. Por tanto, tantas magnitudes hay en AB que sean iguales E, habrán las mismas tantas magnitudes en AB, CD iguales a E, F, y por tanto, cualquier múltiplo que sea AB con respecto a E, el mismo múltiplo será AB, CD con respecto a E, F.

□

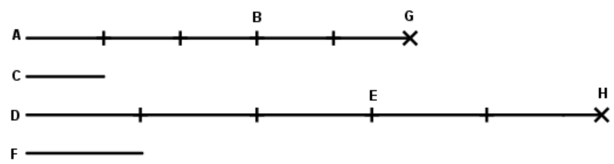
Esta primera proposición simplemente demuestra la que en la actualidad conocemos como propiedad distributiva, pero sacando como factor común el número de veces que se repiten las magnitudes. Como ejemplo, m centímetros y m metros miden lo mismo que m veces un metro y un centímetro.

Proposición V.2. *Si una primera magnitud es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera lo es de una cuarta, y una quinta es también el mismo múltiplo de la segunda que una sexta de la cuarta, la suma de la primera y la quinta será el mismo múltiplo de la segunda que la suma de la tercera y la sexta de la cuarta.*

Reescribiéndolo, tendríamos que:

$$a = nb, c = nd; e = mb, f = md \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a + e = nb + mb = (n + m)b, \quad c + f = nd + md = (n + m)d$$

Tomamos una primera magnitud, AB, que sea el mismo múltiplo de una segundo, C, que una tercera, DE, es de una cuarta, F, y siendo una quinta, BG, siendo también el mismo múltiplo de la segunda, C, que una sexta, EH, es de la cuarta, F.



Queremos demostrar que la suma de la primera y quinta, AG, será el mismo múltiplo de la segunda, C, que la suma de la tercera y la sexta, DH, es de la cuarta, F.

Teniendo en cuenta que como AB es el mismo múltiplo con respecto a C que DE con respecto a F, tenemos que tantas magnitudes como haya en AB iguales a C, habrán las mismas en DE iguales a F.

Por la misma razón, habrán tantas magnitudes iguales a C en BG como magnitudes iguales a F hay en EH.

Por tanto, tantas magnitudes como haya en el total de AG iguales a C, habrán la misma cantidad de magnitudes iguales a F en el total de DH. Entonces, cualquiera que sea el múltiplo AG con respecto a C, ese mismo múltiplo será DH con respecto a F. Concluimos entonces que, la suma de la primera y la quinta, AG, el el mismo múltiplo de la segunda, C, que la suma de la tercera y la sexta, DH, lo es de una cuarta, F.

□

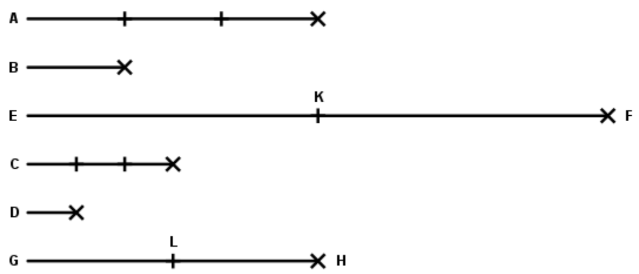
En este caso estamos probando la otra parte de la propiedad distributiva, es decir, que si el factor común son las magnitudes, podemos seguir aplicándola. Un ejemplo sencillo sería, m metros y n metros miden lo mismo que $m+n$ metros.

Proposición V.3. *Si una primera magnitud es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera lo es de una cuarta, y se toman los equimúltiplos de la primera y la tercera, también por igualdad cada una de las dos magnitudes tomadas serán equimúltiplos, respectivamente, una de la segunda y la otra de la cuarta.*

Escrito en notación actual tendríamos:

$$a = nb, \quad c = nd \Rightarrow ma = pb, \quad mc = pd$$

Tomamos una primera magnitud A que sea el mismo múltiplo de una segunda B que una tercera C lo es de una cuarta D, y sean EF, GH equimúltiplos tomados de A, C respectivamente.



Queremos probar que EF es el mismo múltiplo de B que GH lo es de D.

Teniendo en cuenta que EF es el mismo múltiplo de A que GH lo es de C, tenemos que habrán tantas magnitudes iguales a A en EF como magnitudes iguales a C hay en GH.

Dividimos EF en las magnitudes EK, KF iguales a A, y dividimos GH en las magnitudes GL, LH iguales a C; entonces la cantidad de magnitudes EK, KF será igual a la cantidad de magnitudes GL, LH.

Y, como A es el mismo múltiplo de B que C de D, mientras que EK es igual a A, y GL igual a C, entonces EK es el mismo múltiplo de B que GL es de D. Siguiendo la misma lógica, KF es el mismo múltiplo de B que LH es de D.

Por tanto, una primera magnitud EK es el mismo multiplo de una segunda B que una tercera GL es de una cuarta D, y una quinta KF es el mismo múltiplo de la segunda B que una sexta LH es de la cuarta D. Luego, aplicando la Proposición V.2, demostrada con anterioridad, tenemos que la suma de la primera y la quinta, EF, es el mismo múltiplo de la segunda B que la suma de la tercera y la sexta GH es de la cuarta D.

$\square$

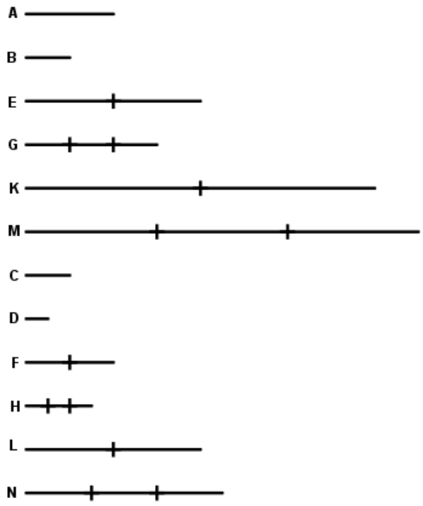
Lo que estamos probando aquí sería que si tenemos cuatro magnitudes, donde la primera es el mismo múltiplo de la segunda que la tercera lo es de la cuarta, si multiplicamos en ambos lados de la igualdad por el mismo número, seguimos obteniendo una relación de equimultiplicidad. Un ejemplo sencillo para entender esto sería, si tenemos 5 metros (5 veces un metro) y 5 centímetros (5 veces un centímetro), donde 5 representa esa equimultiplicidad, también serán equimúltiplos 15 metros (3 veces 5 metros, o 3·5 veces un metro) y 15 centímetros (3 veces 5 centímetros, o 3·5 veces un centímetro).

Proposición V.4. *Si una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera guardarán la misma razón con cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta respectivamente, tomados en el orden correspondiente.*

Dicho de otro modo:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{na}{mb} = \frac{nc}{md}$$

Tomamos una primera magnitud A que guarde con una segunda B la misma razón que una tercera C de una cuarta D, y sean E, F equimúltiplos de A, C respectivamente, y G, H equimúltiplos cualesquiera de BD, respectivamente.



Queremos probar que E y G guardan la misma razón que F y H.

Tomamos ahora los equimúltiplos K, L de E, F respectivamente, y otros equimúltiplos, cualquiera, M, N de G, H respectivamente.

Como E es el mismo múltiplo de A que F es de C, y como K, L son equimúltiplos de E, F, aplicando la Proposición V.3, tenemos que K es el mismo múltiplo de A que L es de C. Por el mismo motivo, M es el mismo múltiplo de B que N es de D.

Y, como A es a B lo mismo que C es a D, y como se han tomado los equimúltiplos K, L de A, C y M, N de B, D; por tanto, si K es mayor que M, L también será mayor que N, si son iguales los primeros, iguales serán los segundos, y si es menor, menor (Definición V.5).

Y como K, L sin equimúltiplos de E, F y M, N equimúltiplos de G, H, tenemos que E es a G lo que F es a H.

$\square$

Esta proposición es parecida a la anterior, pero aquí hablamos ya de razones. Se demuestra que si tenemos 2 magnitudes que guardan la misma razón entre si que otras dos magnitudes, podemos multiplicar los numeradores por el mismo número y los denominadores por otro número que la igualdad de razones se mantendrá. Por ejemplo, sabemos que $3/2$ es igual a $9/6$ (razón de 1.5), si multiplicamos ambos numeradores por 3 y ambos denominadores por 5, tendríamos las razones $9/10$ y $27/30$ (donde ambas razones equivalen a 0.9).

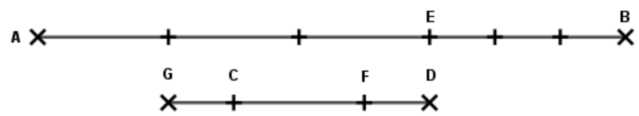
Proposición V.5. *Si una magnitud es el mismo múltiplo de otra que una quitada de la primera lo es de otra quitada la segunda, la magnitud restante de* *la primera tiene con la magnitud restante de la segunda la misma razón que las magnitudes totales.*

Se entiende de mejor manera si escribimos:

$$a = nb, \quad c = nd, \quad c < a, \quad d < b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}$$

Tomamos la magnitud AB de manera que sea el mismo múltiplo de CD que la parte sustraída AE es con respecto a la parte sustraída CF.

Queremos probar que la parte restante EB es también el mismo múltiplo de la parte restante FG que el total AB es del total CD.



Cualquiera que sea el múltiplo AE de CF, tomamos CG de manera que EB sea el mismo múltiplo de CG.

Luego, como AE es el mismo múltiplo de CF que EB es de GC, tenemos que AE es el mismo múltiplo de CF que AB es de GF (Proposición V.1).

Pero, por definición, AE es el mismo múltiplo de CF que AB es de CD. Por tanto AB es el mismo múltiplo que cualquiera de las dos magnitudes GF, CD, teniendo entonces que GF es igual a CD.

Sustraemos CF de ambos, entonces el fragmento restante GC es igual al restante FD.

Y, como AE es el mismo múltiplo de CF que EB es de GC, y GC es igual a DF, tendríamos que AE es el mismo múltiplo de CF que EB es FD. Pero, por hipótesis, AE es el mismo múltiplo de CF que AB es de CD, y por tanto EB es el mismo múltiplo de FD que AB de CD, es decir, la parte restante EB será el mismo múltiplo de la parte restante FD que el total AB del total CD.

$\square$

Esta proposición se entiende mejor directamente con un ejemplo antes que con una explicación detallada. Si tenemos 5 metros (en nuestra notación del comienzo a sería la magnitud 5 metros y b la magnitud un metro) y luego quitamos a esos 5 metros, 0.5 metros (en nuestra notación, c sería 0.5 metros y d 0.1 metros), la razón entre 5 metros y un metros (es decir, 5), es la misma que la razón entre 4.5 metros y 0.9 metros (que sería fácil de comprobar que también resulta en 5).

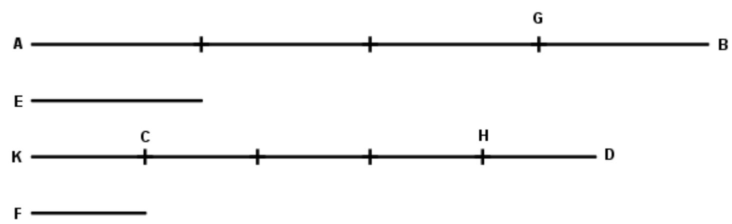
Proposición V.6. *Si dos magnitudes son equimúltiplos de dos magnitudes y ciertas magnitues quitadas de ellas son equimúltiplos de estas dos segundas, las restantes también son o iguales a las mismas o equimúltiplos de ellas.*

Reescribimos con notación y tendríamos lo siguiente:

$$a = nb, \quad c = nd, \quad m < n \Rightarrow \frac{a - mb}{c - md} = \frac{b}{d}$$

Sean dos magnitudes AB, CD equimúltiplos de otras dos magnitudes E, F, y sean AG, CH dos magnitudes sustraídas de AB, CD y que además sean a su vez equimúltiplos de E, F respectivamente.

Queremos demostrar que las magnitudes restantes, GB, HD, son o iguales E, F o equimúltiplos de cada una respectivamente.



Primero tomamos GB igual a E, luego queremos ver que HD es igual a F.

Tomamos CK de manera que sea igual a F.

Como AG es el mismo múltiplo de E que CH es de F, mientras que GB es igual a E y KC igual a F, aplicando la Proposición V.2, tenemos que AB es el mismo múltiplo de E que KH es de F.

Pero, por hipótesis, AB es el mismo múltiplo de E que CD de F, y por tanto KH es el mismo múltiplo de F que CD de F. Luego ambas magnitudes KH, CD son el mismo múltiplo de F, y por consiguiente KH es igual CD.

Sustraemos CH de KH y de CD, y tenemos que los restantes KC y HD son iguales. Pero como F es igual a KC, tenemos que HD es igual a F también.

Concluimos entonces que, si GB es igual a E, HD es igual a F.

De manera similar se demuestra que, incluso si GB es un múltiplo de E, HD es también el mismo múltiplo pero de F.

□

De nuevo un ejemplo es la manera más rápida y sencilla de entender que se quiere enunciar. Si tenemos 5 metros (a serían 5 metros, b un metro y n es 5) y 0.5 metros (c sería 0.5 metros y d 0.1 metros), y quitamos a los 5 metros, por ejemplo, 3 metros (es decir, que nuestra m sería 3) y a los 0.5 metros le quitamos 0.3 metros, la razón entre 2 metros (5-3 metros) y 0.2 metros (dicha razón sería igual a 10) es la misma que hay entre 1 metro y 0.1 metros (que en efecto, es 10).

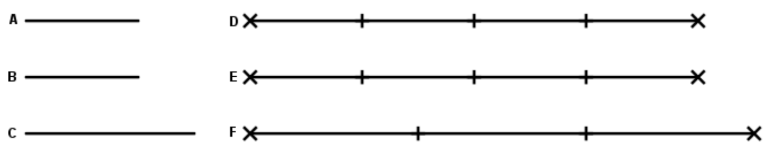
Proposición V.7. *Las magnitudes iguales guardan la misma razón con una misma magnitud y la misma magnitud guarda la misma razón con las magnitudes iguales.*

Simplemente esta proposición dice lo siguiente:

$$a = b \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{c}, \quad \frac{c}{a} = \frac{c}{b}$$

Sean A, B dos magnitudes iguales y C otra magnitud cualquiera.

Queremos probar que ambas magnitudes A, B guardan la misma razón con C, y que C guarda la misma razón con ambas magnitudes A, B.



Tomamos los equimúltiplos D, E de A, B, y de C tomamos un múltiplo cualquiera, F.

Como D es el mismo múltiplo de A que E de B, a la vez que A es igual a B, tenemos que D es igual E. De F no podemos afirmar nada.

Si D es mayor que F, E también será mayor, si son iguales, será igual, y si son menores, menor. Y D, E son equimúltiplos de A, B, mientras que F es un múltiplo cualquiera de C. Por tanto, como A es a C lo será B a C (Definición V.5).

Ahora probaremos que C también guarda la misma razón con ambas magnitudes A, B.

Por la misma construcción, probamos de manera similar que D es igual a E y que F es otra magnitud cualquiera.

Luego, si F es mayor que D, será también mayor que E, si es igual, será igual, y si es menor, menor. Y F es un múltiplo de C, mientras que D, E son otros equimúltiplos de A, B, por tanto, C es a A como C es a B (Definición V.5).

□

No hay mucho que decir de esta propiedad más allá de que si tenemos dos números iguales, si son el numerador de dos razones con el mismo denominador, dichas razones son iguales; y si son ambos números los denominadores de dos razones cuyo numerador es el mismo, entonces las razones también son iguales.

Proposición V.8. *De magnitudes desiguales, la mayor guarda con una misma magnitud una razón mayor que la menor, y la misma magnitud guarda con la menor una razón mayor que con la mayor.*

Expresado con notación matemática tendríamos que:

$$a > b \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}, \quad \frac{c}{b} > \frac{c}{a}$$

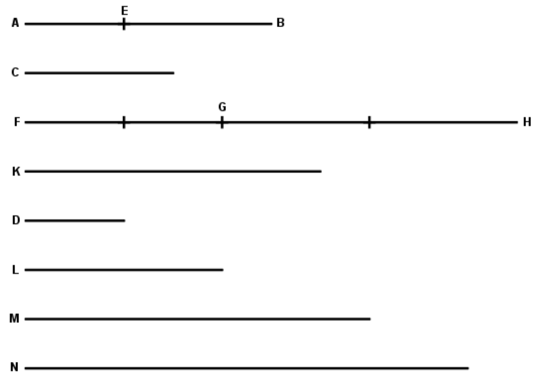
Tomamos las magnitudes AB, C de manera que AB sea mayor que C, y sea D una magnitud cualquiera.

Queremos demostrar que la razón de AB con D es mayor que la razón de C con D, y que la razón entre D y C es mayor que la razón entre D y AB.

Como AB es mayor que C, tomaremos BE de manera que sea igual que C, entonces la menor de las magnitudes AE, EB, si se multiplica, en algún momento será mayor que D (Definición V.4).

Para esta demostración, tendremos que estudiar dos casos: cuando AE es menor que EB y cuando AE es mayor que EB

Caso 1. En este primer caso, trabajaremos con AE menor que EB. Sea FG un múltiplo de AE de manera que sea mayor que D. Ahora, cualquiera que sea el múltiplo FG de AE, tomamos GH de manera que sea el mismo múltiplo de EB y K de C. Tomamos también L de manera que sea el doble de D, M el triple de D, y sucesivos múltiplos incrementados en uno, hasta que tomamos un múltiplo de D que sea el primero que es mayor que K. En esta demostración tomaremos N que es el cuádruple de D y el primer múltiplo mayor que K.



Tenemos que, como K es menor que N y N es el primero en ser mayor, K no es menor que M. Y, como FG es el mismo múltiplo de AE que GH es de EB, FD es el mismo múltiplo de AE que FH es de AB (Proposición V.1).

Pero FG es el mismo múltiplo de AE que K de C, luego FH es el mismo múltiplo de AB que K de$C$, y por tanto FH, K son equimúltiplos de AB, C respectivamente.

De nuevo, como GH es el mismo múltiplos de EB que K es de C, y EB es igual a C, entonces GH es igual a K. Pero K no es menor que M, luego GH tampoco será menor que M. Y FG es mayor que D, por tanto el total FH es mayor que D, M juntos. Pero D, M juntos son iguales a N, ya que M es el triple de D, y M, D juntos serían el cuádruple de D, mientras que N es también el cuádruple de D, entonces M, D juntos son iguales a N. Pero F es mayor que M, D, por tanto FH es mayor que N, mientras que K no es mayor que N. Y FH, K son equimúltiplos de AB, C, mientras N es otro múltiplo cualquiera de D, por tanto AB guarda con D una razón mayor que C con D (Definición V.7).

Ahora queremos ver que también D guarda con C una razón mayor que D con AB.

Siguiendo la misma construcción anterior, podemos probar que N es mayor que K, mientras que N no es mayor que FH. Y N es múltiplo de D, mientas que FH, K son unos equimúltiplos cualesquiera de AB, C, por tanto D guarda con C una razón mayor que D con AB (Definición V.7).

$\square$

Caso 2. La demostración sería homóloga a la del Caso 1.

$\square$

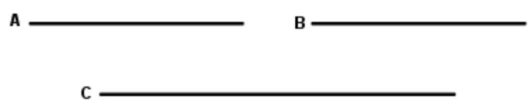
Aunque la demostración sea más larga y compleja que la anterior, la proposición dice algo bastante intuitivo: si tengo un número mayor que otro, y los coloco como numeradores de dos razones cuyo denominador es el mismo, la razón que tenga en el numerador el número más grande, será la razón mayor. Por otro lado, si colocamos ambos números como denominadores de dos razones que tienen el mismo numerador, la razón cuyo denominador fuera el mayor de los números iniciales, es la razón menor. Por ejemplo, si tengo $3 > 2$, tendríamos que $3/4 > 2/4$ y que $4/3 < 4/2$.

Proposición V.9. *Las magnitudes que guardan con una misma magnitud la misma razón son iguales entre sí; y aquellas con las que una misma magnitud guarda la misma razón, son iguales.*

Esta sería el recíproco de la Proposición V.7:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c} \Rightarrow a = b$$
$$\frac{c}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow a = b$$

Sean A, B dos magnitudes que guarden la misma razón con C.



Queremos ver que A es igual a B.

Si no A, B no fuesen iguales, no guardarían la misma razón con C, pero tienen esa misma razón, luego A es igual a B (Proposición V.8).

Ahora, tomamos C de manera que guarde la misma razón con las magnitudes A, B. Queremos demostrar que A es igual a B.

Si no fuese así, C no guardaría la misma razón con cada una de las magnitudes A, B, pero es la misma razón, por tanto A es igual a B (Proposición V.8).

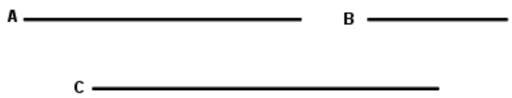
□

Siendo esta el recíproco de la Proposición V.7, podemos enunciarla usando el argumento en sentido inverso de la explicación de la misma: si tengo dos razones iguales, las cuales tienen el mismo denominador, los numeradores son iguales; y si esas razones tienen el mismo numerador, entonces nuestros denominadores son iguales.

Proposición V.10. *De las magnitudes que guardan razón con una misma magnitud, la que guarda una razón mayor, es mayor. Y aquella con la que la misma magnitud guarda una razón mayor, es menor.*

Aquí se enuncia el recíproco de la Proposición V.8:

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{c} \Rightarrow a > b$$
$$\frac{c}{a} > \frac{c}{b} \Rightarrow a < b$$



Tomamos A de manera que guarde con C una razón mayor que B con C.

Queremos ver que A es mayor que B.

Si no lo fuese, A debería ser igual o menor que B.

Sabemos que A no es igual a B, ya que si fuese así, las magnitudes A, B guardarían la misma razón con C, cosa que no ocurre (Proposición V.7).

Tampoco será A menor que B, ya que si así fuese, A tendría una razón menor con C que B con C, pero no es así (Proposición V.8).

Como hemos visto que no puede ser ni igual ni menor, concluimos que A es mayor que B.

Ahora, C guarda con B una razón mayor que C con A.

Queremos demostrar que B es menor que A.

Si B no fuese menor que A, tendría que ser igual o mayor.

Es claro que B no es igual A, ya que en ese caso C hubiera guardado la misma razón con cada una de las magnitudes A, B, pero no es el caso (Proposición V.7).

Tampoco se da el caso de que B sea mayor que A, ya que si así fuera, C hubiera tenido con B una razón menor que C con A (Proposición V.8).

Como hemos visto que B no es ni igual ni mayor que A, tenemos que B es menor que A.

$\square$

De nuevo estamos ante la recíproca de una proposición anterior, en este caso de la 8, por lo que podemos aplicar el mismo razonamiento pero en sentido contrario. Si tenemos dos razones, una mayor que otra, y ambas tienen el mismo denominador, aquella razón que sea mayor, tendrá el mayor de los dos numeradores; y si ambas tienen el mismo numerador, aquella razón que sea mayor, tendrá el menor de los dos denominadores. Como ejemplos, como $3/5 > 2/5$, tenemos que $3 > 2$, y como $5/2 > 5/3$, tendremos que $2 < 3$.

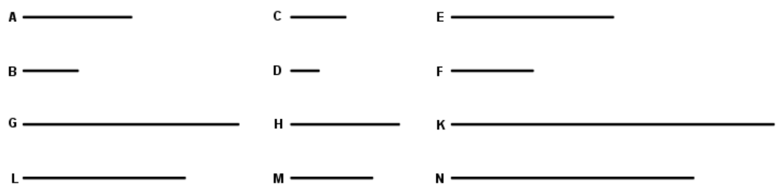
Proposición V.11. *Las razones que son iguales a una misma razón son iguales también entre sí.*

Sencillamente:

$$\frac{a}{b} = \frac{n}{m}, \quad \frac{c}{d} = \frac{n}{m} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Sea la razón de A con B, tomamos C de manera que guarde la misma razón con D y, sea la razón de C con D, tomamos E de manera que guarde esa misma razón con F.

Queremos demostrar que A guarda con B la misma razón que E con F.



Tomamos los equimúltiplos G, H, K de las magnitudes A, C, E respectivamente, y tomamos otros equimúltiplos cualesquiera L, M, N de B, D, F respectivamente.

Como A es a B, C es a D, y siendo equimúltiplos G, H de A, C y otros equimúltiplos cualesquiera L, M de B, D, si G es mayor que L, H también será mayor que M, si es igual, igual, y si menor, menor.

De nuevo, como C es a D, E es a F, y siendo equimúltiplos H, K de C, E y otros equimúltiplos cualesquiera M, N de D, F, si H es mayor que M, K también será mayor que N, si es igual, igual, y si menor, menor.

Pero hemos visto que, si H es mayor que M, G también es mayor que L, si igual, igual, si menor menor; entonces, podemos añadir que, si G es mayor L, K también será mayor que N, si es igual, igual, y si menor, menor.

Y G, K son equimúltiplos de A, E, mientras que L, N son otros equimúltiplos cualesquiera de B, F.

Por tanto, concluimos que A guarda con B la misma razón que E con F.

□

Esta proposición es bastante trivial. Simplemente, si una razón es igual a una segunda y una tercera es igual a la segunda, la primera y la tercera también son iguales (Si 1/2 es igual a 2/4 y 9/18 es igual a 2/4, entonces 1/2 es igual a 9/18).

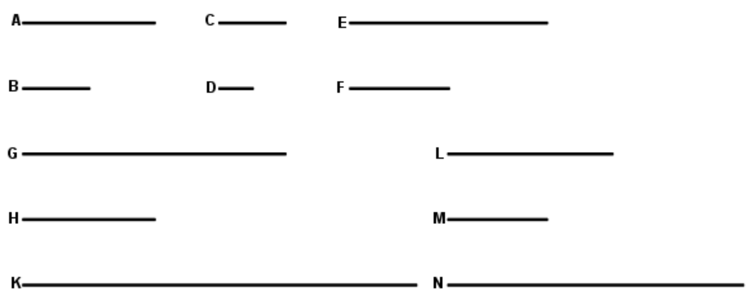
Proposición V.12. *Si un número cualquiera de magnitudes fueran proporcionales, como sea una de las antecedentes a una de las consecuentes, así lo serán todas las antecedentes a las consecuentes.*

Se ve más claro si enunciamos de la siguiente manera:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow \frac{a_i}{b_i} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

Tomamos un número cualquiera de magnitudes, en este caso A, B, C, D, E, F de manera que sean proporcionales, es decir, A guarda la misma razón con B que C con D y E con F.

Queremos demostrar, que A guarda con B la misma razón que A, C, E con B, D, F (es decir, la suma con la suma).



Tomamos los equimúltiplos G, H, K de A, C, E respectivamente, y otros equimúltiplos cualesquiera L, M, N de B, D, F.

Entonces, como A es a B, C es a D y E es a F, y como hemos tomado los equimúltiplos G, H, K de A, C, E y los otros equimúltiplos cualesquiera L, M, N

de B, D, F, tenemos que, si G es mayor que L, H es también mayor que M, y K mayor que N, si es igual, igual, y si es menor, menor. Luego, podemos añadir que, si G es mayor que L, entonces G, H, K es mayor que L, M, N, si igual, igual, si menor, menor.

Ahora, G y G, H, K son equimúltiplos de A y de A, C, E, esto se debe al enunciado de la Proposición 1 (a recordar, *Si hay un número cualquiera de magnitudes respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras iguales en número, cuantas veces una sea múltiplo de otra, tantas veces lo serán todas de todas*). Por la misma razón, L y L, M, N son también equimúltiplos de B y de B, D, F.

Concluimos entonces que A guarda la misma razón con B que A, C, E con B, D, F.

□

Lo que se quiere dar a entender aquí es: si tengo una colección de razones iguales (véase 1/2, 2/4 y 4/8), cualquiera de las razones de dicha colección será igual a la razón entre la suma de todos los numeradores y la suma de todos los denominadores (en nuestro ejemplo, 7/14 es igual a cualquiera de las tres razones anteriores).

Proposición V.13. *Si una primera magnitud guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y la tercera guarda con la cuarta una razón mayor que una quinta con una sexta, la primera guardará también con la segunda una razón mayor que la quinta con la sexta.*

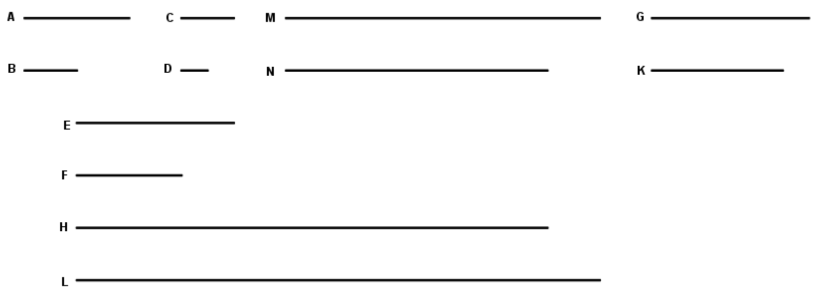
Reescribimos y tenemos lo siguiente:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{c}{d} > \frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} > \frac{e}{f}$$

Tomamos una primera magnitud A de manera que guarde con una segunda B la misma razón que una tercera C guarda con una cuarta D, y además tomamos una quinta y una sexta magnitud E, F de manera que C con D guarda una razón mayor que E con F

Queremos probar que la primera A guarda también con la segunda B una razón mayor que la quinta E con la sexta F

Como podemos tomar unos equimúltiplos de C, E y de D, F, no necesariamente los mismos, de manera que el múltiplo C sea mayor que D, mientras que el múltiplo de E no sea mayor que el múltiplo de F (Definición V.7), tomamos dichos múltiplos. Sean G, H los equimúltiplos de C, E y K, L otros equimúltiplos



cualesquiera de D, F, de manera que G sea mayor que K pero H no sea mayor que L, y cualquiera que sea G múltiplo de C, tomamos M de manera que sea el mismo múltiplo pero de A, y cualquiera que sea K múltiplo de D, tomamos N de manera que sea el mismo múltiplo de B.

Ahora, como A es a B lo mismo que C es a D, y hemos tomado los equimúltiplos M, G de A, C, y los equimúltiplos (no necesariamente los mismos a los anteriores) N, K de B, D, entonces, si M es mayor que N, G también será mayor que K, si es igual, igual, y si es menor, menor (Definición V.5). Pero G es mayor que K, y por tanto M es también mayor que N. Pero H no es mayor que L, y M, H son equimúltiplos de A, E y N, L son otros equimúltiplos de B, F.

Luego A guarda con B una razón mayor que E con F (Definición V.7).

$\square$

De nuevo tenemos una proposición bastante intuitiva. Básicamente nos dice que si dos razones son iguales y la segunda de estas razones es mayor que una tercera razón, entonces la primera también debe ser mayor que la tercera. Un ejemplo sería: si 1/2 es igual a 4/8 y 4/8 es mayor que 3/8, entonces podemos afirmar directamente que 1/2 es mayor que 3/8.

Proposición V.14. *Si una primera magnitud guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta y la primera es mayor que la tercera, la segunda también será mayor que la cuarta, y si es igual, será igual, y si es menor, será menor.*

Escrito de otra manera, tendríamos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad a >=< c \quad (respectivamente) \Rightarrow b >=< d \quad (respectivamente)$$

Sea una primera magnitud A que guarda con una segunda magnitud B la misma razón que una tercera C con una cuarta, y además A será mayor que C

Queremos probar que B también es mayor que D.

Como A es mayor que C, B es otra magnitud cualquiera, A guarda con B una razón mayor que C con B (Proposición V.8). Pero como A es a B, C es a D, luego C guarda también con D una razón mayor que C con B (Proposición V.13). Pero si la misma magnitud guarda con una magnitud una razón mayor que con otra, la magnitud con la que guarda una razón mayor es la menor, luego D es menor que B (Proposición V.10).

De manera similar podríamos probar que si A es igual a C, entonces B es igual a D, y que si A es menor que C, B será también menor que D.

□

En esta proposición se enuncia y demuestra lo siguiente: si tengo dos razones iguales, si el numerador de la primera es mayor que el de la segunda, el denominador de la primera también debe ser mayor que el de la segunda; si son iguales los numeradores, iguales serán los denominadores y si la primera tiene un numerador más pequeño que el de la segunda, el denominador de la primera también debe ser menor que el de la segunda (véase los casos 3/6 y 2/4, 1/3 y 1/3, y 3/4 y 6/8).

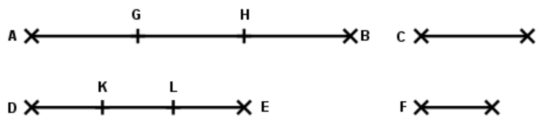
Proposición V.15. *Las partes guardan la misma razón entre sí que sus múltiplos, tomados en el orden correspondiente.*

Sencillamente hemos enunciado:

$$\frac{a}{b} = \frac{na}{nb}$$

Tomamos AB de manera que sea el mismo múltiplo de C que DE de F. Queremos demostrar que C guarda con F la misma razón que AB con DE

Como AB es el mismo múltiplo de C que DE es de F, habrán tantas magnitudes en AB iguales a C como magnitudes iguales a F hay en DE. Dividimos AB



en las magnitudes AG, GH, HB iguales a C, y DE en las magnitudes DK, KL, LE iguales a F, entonces la cantidad de magnitudes AG, GH, HB serán iguales a la cantidad de magnitudes DK, KL, LE. Y, como AG, GH, HB son iguales las unas a las otras, y DK, KL, LE son también iguales las unas con las otras, por tanto, AG es a DK como GH es a KL y como HB es a LE (Definición V.7).

Por tanto, un antecedente será a uno de los consecuentes, como todos los antecedentes serán a todos los consecuentes (Proposición V.12), y por tanto, AG es a DK lo que AB es a DE. Pero AG es igual a C y DK a F. Concluimos entonces que C es a F lo que AB es a DE.

$\square$

Simplemente estamos haciendo algo parecido a lo que ocurría en las primeras proposiciones. En este caso, queremos decir que una razón es igual a ella misma con el numerador y denominador multiplicados por el mismo número (un ejemplo sencillo sería la razón $1/2$ y $2/4$, donde hemos multiplicado numerador y denominador por 2).

Proposición V.16. *Si cuatro magnitudes son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales.*

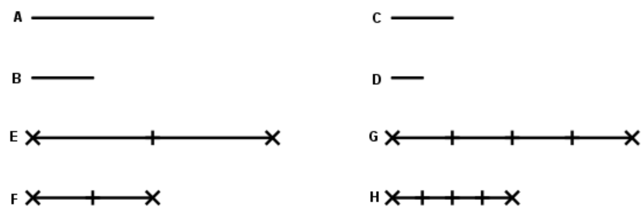
Lo que quiere decir la proposición es lo siguiente:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Sean A, B, C, D cuatro magnitudes proporcionales, es decir, como A es a B, C es a D.

Queremos probar que también serán proporcionales por alternancia, es decir, que A es a C lo que B es a D.

Tomamos los equimúltiplos E, F de A, B y otros equimúltiplos (no necesariamente el mismo múltiplo que los anteriores) G, H de C, D.



Entonces, como E es el mismo múltiplo de A que F es de B, y como las partes guardan la misma razón que sus múltiplos (Proposición V.15), tenemos que, como A es a B, E es a F.

Pero como A es a B lo mismo que C a D, tenemos también que C es a D lo mismo que E es a F (Proposición V.11).

De nuevo, como G, H son equimúltiplos de C, D, entonces, C es a D como G es a H (Proposición V.15). Pero, como C es a D lo mismo que E es a F, tenemos que E es a F lo que G es a H (Proposición V.11).

Pero, si cuatro magnitudes son proporcionales, y la primera es mayor que la tercera, la segunda será también mayor que la cuarta, si es igual, igual y si es menor, menor (Proposición V.14).

Por tanto, si E es mayor que G, F será mayor que H, si igual, igual, si menor, menor.

Como E, F son equimúltiplos de A, B, y G, H son otros equimúltiplos de C, D, tenemos que A es a C lo mismo que B es a D (Definición V.5).

□

Esto viene a demostrar lo visto en la Definición V.12. Lo que se enuncia es que si dos razones son iguales, la razón entre el numerador de la primera y el numerador de la segunda y la razón entre el denominador de la primera y el denominador de la segunda también son iguales. Como ejemplo podemos tomar las razones 1/2 y 3/6, que son iguales, y aplicando la alternancia tendríamos las razones 1/3 y 2/6 que a su vez también son iguales.

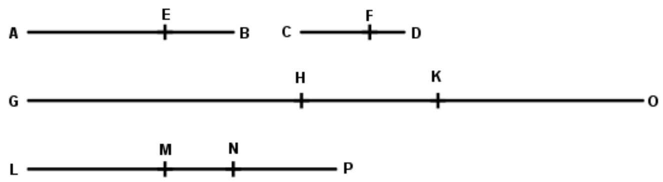
Proposición V.17. *Si unas magnitudes son proporcionales por composición, también serán proporcionales por separación.*

Lo expuesto se puede escribir también de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

Sean las magnitudes AB, BE, CD, DF que son proporcionales por composición, es decir, AB es a BE lo mismo que CD es a DF.

Queremos demostrar que también lo son por separación, es decir, que AE es a EB lo mimso que CF es a FD



De las magnitudes AE, EB, CF, FD tomamos los equimúltiplos GH, HK, LM, MN, y de las magnitudes EB, FD otros equimúltiplos KO, NP.

Entonces, como GH es el mismo múltiplo de AE que HK es de EB, tenemos que GH es el mismo múltiplo de AE que GK de AB (Proposición V.1).

Pero GH es el mismo múltiplo de AE que LM es de CF, por tanto GK es el mismo múltiplo de AB que LM de CF.

De nuevo, como LM es el mismo múltiplo de CF que MN es de FD, podemos afirmar que LM es el mismo múltiplo de CF que LN es de CD (Proposición V.1).

Pero LM es el mismo múltiplo de CF que GK es de AB, luego GK es el mismo múltiplo de AB que LN es de CD.

Por tanto, GK, LN son equimúltiplos de AB, CD.

De nuevo, como HK es el mismo múltiplo de EB que MN es de FD, y KO es también el mismo múltiplo de EB que NP de FD, luego la suma HO es también el mismo múltiplo de EB que MP es de FD (Proposición V.2).

Y, como AB es a BE lo mismo que CD es a DF, y teniendo los equimúltiplos GK, LN de las magnitudes AB, CD, y HO, MP de EB, FD, tenemos que si GK es mayor que HO, LN es también mayor que MP, si es igual, igual, y si es menor, menor.

Sea GK mayor que HO, entonces, si sustraemos HK de ambos, GH será también mayor que KO. Pero vimos que, si GK era mayor que HO, LN era también mayor que MP, por tanto LN es también mayor que MP, y si sustraemos de ambos MN, LM será también mayor que NP, de manera que si GH es mayor que KO, LM es también mayor que NP.

De manera similar se prueba que si GH es igual a KO, LM es también igual a NP, y si es menor, menor.

Y GH, LM son equimúltiplos de AE, CF, mientras que KO, NP son otros equimúltiplos cualesquiera de EB, FD, por tanto concluimos que AE es a EB lo mismo que CF es a FD.

□

En este caso probamos otra igualdad de razones derivada de una de las modificaciones expuestas en las definiciones. En primer lugar como partimos que son por composición, tendremos siempre que los numeradores iniciales son mayores que sus respectivos denominadores, por lo que no hay problemas en el enunciado del problema. Lo que queremos ver en este caso es que si las razones son iguales, entonces, si a ambos numeradores les restamos su denominador, las nuevas razones también son iguales. En un ejemplo es probable que se vea más claro que esto es cierto: si tenemos 5/2 y 10/4 que son dos razones iguales, tendremos que 3/2 y 6/4 también son iguales.

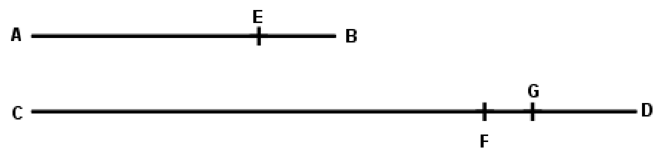
Proposición V.18. *Si unas magnitudes son proporcionales por separación, también serán proporcionales por composición.*

Podemos reescribir el enunciado de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

Sean las magnitudes AE, EB, CF, FD proporcionales por separación, es decir, que AE es a EB lo que CF es a FD.

Queremos demostrar que también serán proporcionales por composición, es deicr, que AB es a BE lo mismo que CD es a FD.



Si CD no fuese a DF como AB es a BE, entonces, como AB es a BE será CD a una magnitud, ya sea menor que DF o mayor.

Primero, tomaremos cumple lo anterior con una magnitud menor, DG.

Entonces, como AB es a BE, CD es a DG son magnitudes proporcionales por composición, también deben serlo por separación (Proposición V.17). Luego, como AE es EB también lo será CG a GD.

Pero también, por hipótesis, como AE es a EB, CF es a FD. Por tanto, como CG es a GD, CF es a FD (Proposición V.11).

Pero la primera CG es mayor que la tercera CF, luego la segunda GD es también mayor que la cuarta FD (Proposición V.14).

Pero también es menor, lo cual es imposible. Por tanto, CD no guardará la misma razón a una magnitud menor que FD que AB guarda con BE.

De manera similar probaríamos que tampoco ocurriría con una magnitud mayor, luego, se cumplirá cuando CD guarde la razón con FD.

□

Esta sería la recíproca de la proposición anterior, así que vamos directamente a un ejemplo para verlo en la práctica: si tengo las razones iguales 2/5 y 4/10, las nuevas razones 7/5 y 14/10 también son iguales.

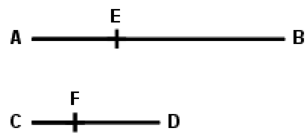
Proposición V.19. *Si un todo tiene con otro todo la misma razón que la parte quitada de uno a la parte quitada de otro, las partes restantes también estarán entre sí como los todos.*

En notación matemática tendríamos que:

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\,(c < a,\, d < b) \Rightarrow \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$$

Sea AB que guarda la misma razón con CD que la parte AE sustraída guarda con la parte CF sustraída.

Queremos probar que la parte restante EB guarda también la misma razón con la parte restante FD que el total AB con el total CD



Como tenemos que AB es a CD lo mismo que AE a CF, por alternancia, BA es AE lo mismo que DC es CF (Proposición V.16).

Y, como estas magnitudes son proporcionales por composición, también lo serán por separación (Proposición V.17), es decir, que BE es a EA lo que DF es a CF, y por alternancia, como BE es a DF, EA será a FC (Proposición V.16).

Pero, por hipótesis, como AE es a CF, el total AB es al total CD.

Por tanto también la parte restante EB será a la parte restnate FD lo que el total AB es al total CD (Proposición V.11).

□

Aunque el enunciado de la misma parece un tanto complejo, explicado con más detalle y lenguaje más moderno se puede entender con facilidad. Esta proposición quiere enunciar que, si tengo dos razones iguales, donde una de las dos tiene numerador y denominador más pequeños que la otra (con eso se refiere a parte quitada), la razón de la que tenía numerador y denominador mayores es igual a la razón entre el numerador mayor menos el menor y el denominador mayor menos el menor. Un ejemplo clarificaría esta notación tan enrevesada: tenemos las razones iguales 3/6 y 1/2, entonces la razón 3/6 es igual a la razón 2/4.

Las proposiciones de la 20 a la 23 trabajan con ternas de magnitudes y sus relaciones. Cuando escribimos (a, b, c) nos referimos a una terna de tres magnitudes homogéneas. Aunque sus enunciados son un tanto confusos, se intentará dar una explicación y un ejemplo de los mismos de manera que sea más fácil de comprender que se quiere lograr.

Proposición V.20. *Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y si, por igualdad, la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la sexta; y si es igual, igual, y si es menor, menor.*

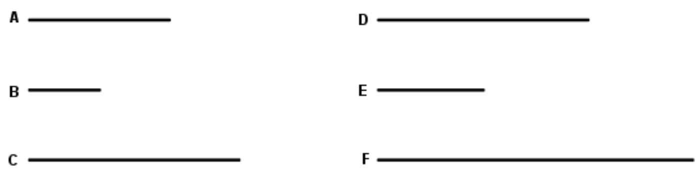
Podemos reescribirlo como:

$$(a, b, c), (m, n, p),\ \frac{a}{b} = \frac{m}{n},\ \frac{b}{c} = \frac{n}{p},\ a >=< c \quad (respectivamente) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m >=< p \quad (respectivamente)$$

Tomamos tres magnitudes A, B, C, y otras D, E, F iguales en cantidad, que tomadas de dos en dos guaran la misma razón, es decir, A es a B lo que D es a E y B es a C lo que E es a F, y sea A mayor que C.

Queremos demostrar que D también será mayor que F, si A es igual a C, igual; y si menor, menor.



Como A es mayor que C, y B es otra magnitud cualquiera, la mayor tiene con una misma magnitud una razón mayor que la menor con la misma (Proposición V.8), luego A guarda con B una razón mayor que C con B.

Pero, como A es a B, D es a E, y C es a B, invirtiendo, lo mismo que F a E, por tanto D guarda con E una razón mayor que F con E (Proposición V.13).

Tenemos que las magnitudes que guardan una razón con una misma, la que tiene una razón mayor, es la mayor (Proposición V.10), por tanto D es mayor que F.

De manera similar, probaríamos que si A es igual a C, D sería igual a F, y si fuese menor, menor.

$\square$

Aquí tenemos dos grupos de tres magnitudes o números: si del primer grupo, la razón entre el primero y el segundo es igual a la razón entre el primero y el segundo del segundo grupo, y además la razón entre el segundo y el tercero del primer grupo es igual a la razón entre el segundo y el tercero del segundo grupo, si el primer elemento del primer grupo es mayor que el tercero, el primer elemento del segundo grupo también será mayor que su tercero, si son iguales, iguales y sin es menor, menor. Un ejemplo nos vendrá en este caso de perlas: si el primer grupo es $(6, 3, 2)$ y el segundo $(12, 6, 4)$, se ve claramente que las razones $6/3$ y $12/6$, y $3/2$ y $6/4$ son iguales, y además $6 > 2$ y por tanto tendremos también que $12 > 4$ (y de manera idéntica en caso de que fuera la igualdad o la otra desigualdad).

Proposición V.21. *Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón y su proporción es perturbada, y si, por igualdad, la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la sexta; y si es igual, igual; y si es menor, menor.*

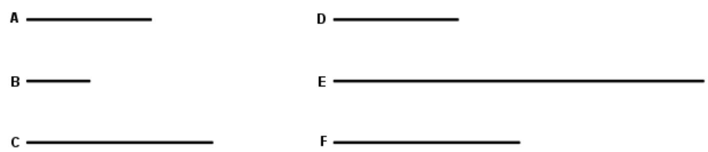
Reescribiríamos el enunciado como:

$$(a, b, c), (m, n, p),\ \frac{a}{b} = \frac{n}{p},\ \frac{b}{c} = \frac{m}{n},\ a >=< c \quad (respectivamente) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m >=< p \quad (respectivamente)$$

Sean tres magnitudes A, B, C, y otras D, E, F iguales en cantidad, que tomadas de dos en dos guardan la misma razón, y perturbamos su proporción, de manera que A es a B lo mismo que E es a F y B es a C lo mismo que D a E, y sea A mayor que C.

Queremos demostrar que D también será mayor que F, si A es igual a C, igual, y si es menor, menor.



Como A es mayor que C y B es una magnitud cualquiera, A guarda con B una razón mayor que C con B (Proposición V.8).

Como A es a B, E es a F, y como C es a B, por inversión, E es a D. Luego E guarda con F, una razón mayor que E con D (Proposición V.13).

Pero aquella magnitud la cual una misma magnitud guarda una razón mayor que la misma con otra, es la menor (Proposición V.10), luego F es menor que D, o lo que es lo mismo D es mayor que F.

De manera similar probaríamos que si A es igual a C, D también será igual a F, y si es menor, menor.

$\square$

En este caso trabajamos lo mismo que en la proposición anterior pero con lo que Eudoxo llama proporción perturbada (es decir que la igualdad de las razones son la razón del primero y segundo del primer grupo con el segundo y tercero del segundo, y la razón del segundo y tercero del primero con el primero y el segundo del segundo). Para evitar reenunciar esta proposición daremos un ejemplo directamente. Si el primer grupo es $(6, 3, 2)$ y el segundo es $(3, 2, 1)$. Vemos claramente que la razón $6/3$ es la misma que $2/1$, y que la razón $3/2$ es la misma que $3/2$; y como el primer elemento del primer grupo es mayor que el tercero $(6 > 2)$, el primer elemento del segundo grupo debe ser mayor que el tercero del mismo $(3 > 1)$.

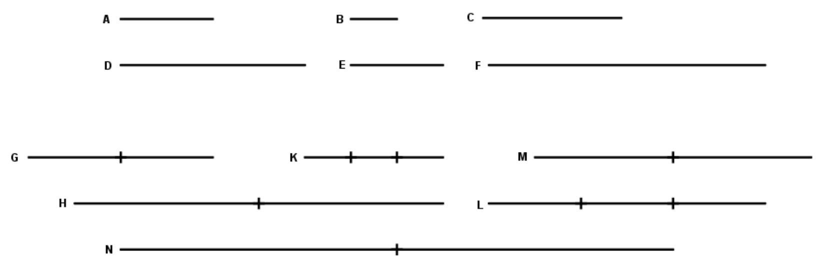
Proposición V.22. *Si hay un número cualquiera de magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guarden la misma razón, por igualdad guardarán también la misma razón menor.*

Tomando un conjunto de tres magnitudes, queremos ver que:

$$(a, b, c), (m, n, p), \frac{a}{b} = \frac{m}{n}, \frac{b}{c} = \frac{n}{p} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{m}{p}$$

Tomamos un número cualquiera de magnitudes A, B, C y otras D, E, F iguales en número, que tomadas de dos en dos guarden la misma razón, de manera que, como A es a B, D es a E, y como B es a C, E es a F.

Vamos a demostrar que guardan un razón de igualdad (Definición V.17), es decir, que A es a C lo mismo que D es F.



Se demostraría usando las Proposiciones V.4 y V.20 y la Definición V.5.

□

Esta proposición es un poco más sencilla que las dos anteriores. Aunque parezca un tanto complicada se reduce al uso de propiedades de la multiplicación de racionales que conocemos hoy en día. De nuevo, tenemos los dos grupos $(6, 3, 2)$ y $(12, 6, 4)$ donde las razones entre los primeros y segundos de cada grupo son iguales $(6/3 = 12/6)$ y las razones entre los segundos y terceros también lo son $(3/2 = 6/4)$, entonces la proposición nos afirma que las razones entre los primeros y los terceros también son iguales (en nuestro ejemplo $6/2 = 12/4$). Simplemente se está realizando el siguiente cálculo:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$$

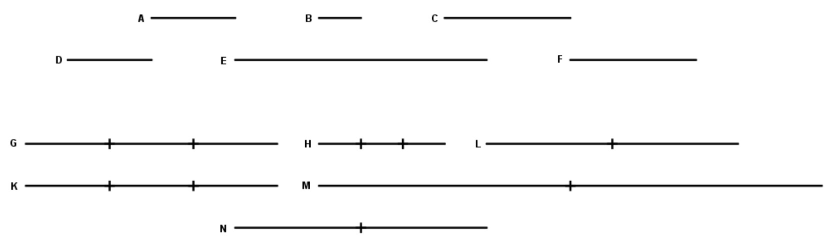
Proposición V.23. *Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y su proporción es perturbada, por igualdad guardarán también la misma razón.*

Enunciado de otra manera, tendríamos:

$$(a, b, c), (m, n, p), \frac{a}{b} = \frac{n}{p}, \frac{b}{c} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{m}{p}$$

Tomamos tres magnitudes A, B, C, y otras iguales en número, que, tomadas de dos en dos, guardan la misma proporción (llamemos a dichas magnitudes D, E, F), y perturbamos la proporción, es decir, A es a B lo que E es a F, y B es a C lo que D es a E.

Queremos demostrar que A es a C lo mismo que D a F.



Se demuestra haciendo uso de las Proposiciones V.11, V.15, v.16 y V.21.

□

De nuevo, esta proposición es parecida a la anterior con la única modificación de que se hace uso de la proporción perturbada. Veremos mejor lo que ocurre con un ejemplo. Tomando los grupos $(6, 3, 2)$ y $(3, 2, 1)$, donde tenemos que las razones $6/3$ y $2/1$ son iguales y las razones $3/2$ y $3/2$ son iguales, la proposición nos asegura que la razón $6/2$ deberá ser igual a la razón $3/1$. Simplemente se está volviendo a hacer uso del cálculo que se detalló anteriormente, aplicando las respectivas igualdades ($6/2 = 6/3 \cdot 3/2 = 2/1 \cdot 3/2 = 3/1$).

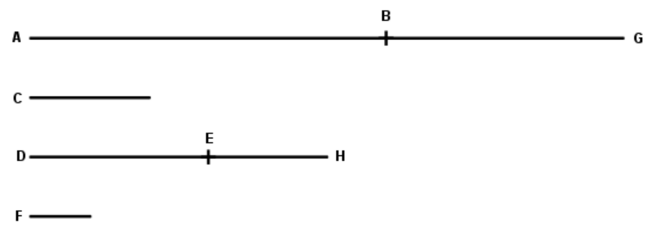
Proposición V.24. *Si una primera magnitud guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y una quinta guarda con la segunda la misma razón que la sexta con la cuarta, la primera y la quinta, tomadas juntas,* *guardarán también la misma razón con la segunda que la tercera y la sexta con la cuarta.*

Se podría reescribir lo enunciado como:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \frac{e}{b} = \frac{f}{d} \Rightarrow \frac{a+e}{b} = \frac{c+f}{d}$$

Sea una magnitud AB que guarda con una segunda C la misma razón que una tercera DE con una cuarta F, y sea también una quinta BG que guarda con la segunda C la misma razón que una sexta EH con la cuarta F.

Queremos probar que la primera y la quinta juntas, AG, guardarán con la segunda C la misma razón que la tercera y la sexta, DH, con la cuarta F.



Primero, como BG es a C, EH es a F, luego invirtiendo, como C es a BG, F es a EH.

Luego, como AB es a C, DE es a F y como C es a BG lo mismo que F es a EH, por igualdad, como AB es a BG, DE es a EH (Proposición V.22).

Y, como las magnitudes que son proporcionales por separación, lo son también por composición (Proposición V.18), AG es a GB lo mimso que DH es a HE.

Pero también, BG es a C lo mismo que EH es a F, luego, por igualdad, AG es a C lo mismo que DH es a F (Proposición V.22).

□

Un ejemplo deja más claro lo que ocurre en esta proposición: si tenemos las razones iguales $3/2$ y $6/4$ y otras dos razones iguales $4/2$ y $8/4$ (es indispensable que los denominadores sean los mismos que los del primer par de razones), entonces las razones $7/2$ y $14/4$ también son iguales. Hoy en día esta proposición es simplemente una igualdad en la suma de racionales con mismo denominador.

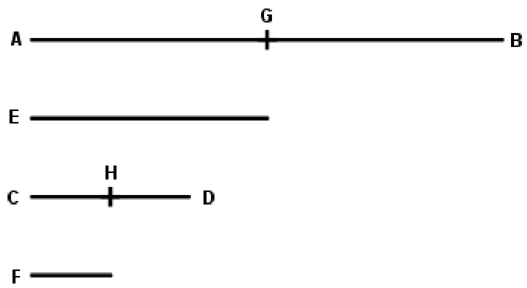
Proposición V.25. *Si cuatro magnitudes son proporcionales, la mayor y la menor juntas son mayores que las dos que quedan.*

Podemos reescribir el enunciado de la siguiente manera:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, max\{a, b, c, d\} = a, min\{a, b, c, d\} = d \Rightarrow a + d \geq b + c$$

Tomamos 4 magnitudes AB, CD, E, F que sean proporcionales, de manera que AB es a CD lo mismo que E es a F, y sea AB la mayor y F la menor.

Queremos ver que AB, F es mayor que CD, E



Tomamos AG de manera que sea igual E, y CH igual a F.

Como AB es a CD, E es a F, y como E es igual a AG, y F igual a CH, por tanto AB es a CD lo mismo que AG es a CH.

Y como el total AB es al total CD, también lo es la parte AG sustraída con la parte CH sustraída, luego la parte restante GN también será a la parte restante HD lo mismo que el total AB al total CD (Proposición V.19).

Pero AB es mayor que CD, luego GB es mayor que HD. Y como AG es igual a E, y CH a F, por tanto, AG, F es igual a CH, E. Y como GB, HD son desiguales y GB es mayor, AG, F se añaden a GB y CH, E se añaden a HD, se tiene que AB, F es mayor que CD, E.

$\square$

Esta última proposición es bastante sencilla y sólo quedaría mostrar un ejemplo que corrobore que se cumple. Si tenemos las razones $4/3$ y $8/6$, tenemos que el mayor de los números es 8 y el menor 3, luego $8 + 3 > 6 + 4$, lo cual es cierto.

3

Teoría de los números reales de Dedekind

Al pasar de Eudoxo a Dedekind se produce un salto enorme en el tiempo, desde el siglo IV aC al siglo XIX, pero no lo es tanto si desde el punto de vista del concepto y el estudio de los números que en la actualidad conocemos como reales.

Después de Eudoxo se pierde la pista de los posibles descubrimientos o variaciones de la idea de número a lo largo de las matemáticas india, griega y occidental, hasta el final de la Edad Media. De ahí en adelante hay algunas aportaciones de distintos matemáticos (Bombelli, Stévin, Isaac Barrow...), pero no es hasta la aparición en el siglo XIX de Weierstrass, Dedekind, Méray y Cantor (los cuales usaron diversos procedimientos para construir los números reales a partir de los números racionales por "compleción"), cuando se obtiene la forma definitiva del concepto de número real que conocemos hoy en día.

En este capítulo nos centraremos en Dedekind y en su aportación a este tema, tal como la presentó en *Continuidad y números irracionales*, una obra de una gran claridad y una exposición sencilla.

3.1. Dedekind

Richard Julius Wilhelm Dedekind (1831-1916) nació en Alemania. Estudió tanto en su ciudad natal como en la Universidad de Gotinga, en la que ingresa en 1850. Su tesis fue supervisada por Gauss y más tarde estudiaría teoría de números con Dirichlet. Entre sus trabajos se encuentran publicaciones sobre los números naturales (sentando las bases para la teoría de conjuntos). La correspondencia entre Dedekind y Cantor muestra un diálogo fecundo entre ambos en torno a la teoría de conjuntos, que en aquellos momentos nacía.

La aportación de Dedekind al concepto de número real se recoge en un artículo publicado en 1872, aunque su contenido es de 1858, donde define los números reales de tal forma que muestra su estructura de cuerpo ordenado y completo, ofreciendo un desarrollo de la construcción de los números reales a partir de los racionales, siendo un modelo de organización y claridad.

En torno a 1870 se publicaron varias formas de construir los números reales a partir de los racionales. La teoría de Dedekind es la teoría de lo que el propio Dedekind denomina "cortaduras". Las construcciones de Méray y Cantor se basan en las sucesiones de Cauchy.

3.2. *Continuidad y números irracionales*

A continuación se expondrá la teoria desarrollada por Dedekind en su artículo *Continuidad y números irracionales*, separándola en distintos apartados, tal como se encuentra en su propia obra. Se ha trabajado con el texto incluido en el libro *Dios creó los números*, editado por Stephen Hawking.

3.2.1. Propiedades de los números racionales

En esta primera subsección, se expone cuales son las intenciones de cara a como se quiere construir el conjunto de los números reales. La idea principal es que sea un sistema en el cual las cuatro operaciones básicas (suma, resta, producto y división) se puedan realizar siempre entre dos elementos cualquiera de este sistema, es decir, que el resultado de dicha operación siga siendo un elemento del sistema de los números reales (obviamente se excluye el caso de la división por cero).

Aún así, Dedekind considera más importante el hecho de que dicho sistema constituya un dominio unidimensional bien ordenador e infinito en dos direcciones opuestas.

Por ello empieza a hacer uso de las siguientes notaciones. Si quisiéramos expresar que los símbolos a y b representan un mismo número racional, podemos escribir tanto $a = b$ como $b = a$. En el caso de que dos números racionales sean diferentes, se tendrá que la diferencia $a - b$ tiene un valor no nulo. En caso de que dicho valor sea positivo, diremos que *a es mayor que b*, o lo que es lo mismo, que *b es menor que a*; y lo denotaremos como $a > b$ o $b < a$. En caso contrario, tendremos que $b - a$ tiene un valor positivo y por tanto $b > a$ o $a < b$.

Además, Dedekind expone las siguientes leyes que se cumplen en todo momento:

1. Si $a > b$ y $b > c$, podemos concluir que $a > c$. En estos casos podremos decir que b se encuentra entre los números a y c.
2. Si a y c son números distintos, existirán siempre infinitos números b que están entre a y c.
3. Si tomamos un número a determinado, todos los números del sistema $\mathbb{R}$ se descomponen en dos clases, A_1 y A_2, en las cuales hay infinitos individuos en cada una de ellas; la primera clase A_1 abarca todos los números a_1 que son $< a$, mientras que la segunda clase A_2 abarca todos los números a_2 que son $> a$. El

propio número a se puede asignar de manera arbitraria a la primera o segunda clase, y dependiendo de ello será o el mayor de la primera clase o el menor de la segunda. Esta división de nuestro sistema en las dos clases A_1 y A_2 es tal que cada número de la primera clase es menor que cualquier número de la segunda clase

3.2.2. Comparación de los números racionales con los puntos de una línea recta

Estas propiedades que se enuncian en la subsección anterior nos recuerdan a las relaciones entre los puntos de una línea recta $\boldsymbol{L}$. Si distinguimos las dos direcciones opuestas de la recta como "izquierda" y "derecha", y si tomamos dos puntos distintos de la recta p, q, entonces o tenemos que p está a la derecha de q (o lo que viene siendo lo mismo, q está a la izquierda de p), o es el caso contrario, donde tenemos a q a la derecha de p (o lo que es lo mismo, p está a la izquierda de q). Si estos dos puntos son distintos es imposible que se dé cualquier otro caso. Para estas relaciones de lugar se tienen las siguientes leyes:

1. Si p está a la derecha de q, y q está a la derecha de r, tendremos que p está a la derecha de r. En estos casos podremos afirmar que q está entre los puntos p y r.
2. Si p y r son puntos distintos, existirán siempre infinitos puntos q que están entre p y r.
3. Si tomamos un punto determinado p, todos los puntos de la recta $\boldsymbol{L}$ se descomponen en dos clases, P_1 y P_2, en las cuales hay infinitos individuos en cada una de ellas; la primera clase P_1 abarca todos los puntos p_1 que están a la izquierda de p, mientras que la segunda clase P_2 abarca todos los puntos p_2 que están a la derecha de p. El propio punto p se puede asignar arbitrariamente a la primera o segunda clase. Esta división de la línea recta $\boldsymbol{L}$ en las dos clases P_1 y P_2 es tal que cada punto de la primera clase está a la izquierda de cualquier número de la segunda clase

Esta analogía entre los números racionales y los puntos de una recta termina por convertirse en una correlación si dentro de la recta elegimos un punto cero o y una unidad de medida para la medición de los segmentos. Así, a cada número racional a (que es un individuo de $\boldsymbol{R}$) le correspondería un y sólo un punto p, es decir un individuo de $\boldsymbol{L}$.

Es claro que estas 3 leyes enunciadas aquí les corresponde sin ningún problema las leyes que se muestran en la subsección anterior.

3.2.3. Continuidad de la línea recta

Aunque tengamos esta correlación, parece bastante claro que en nuestra recta $\boldsymbol{L}$ existen infinitos puntos que no corresponden a ningún número racional, hecho que es de bastante relevancia de cara a lo que queremos hacer más adelante. Véase, si al punto p le corresponde el número racional a, la longitud op es conmensurable con respecto a la unidad de longitud que hayamos designado para la construcción. Pero, como ya vimos en el primer capítulo, los griegos ya eran conscientes (e incluso demostraron algunos casos) de la existencia de longitudes que eran inconmensurables con una unidad de longitud dada (la diagonal del pentágono con respecto al lado del mismo, la diagonal del cuadrado con su lado...). Si dicha longitud es llevada desde el punto o sobre la recta, el punto final de la misma no corresponderá a ningún número racional. Incluso, se podría demostrar que existen infinitas longitudes no conmensurables, lo que nos permite afirmar que la recta $\boldsymbol{L}$ es más abundante en individuos-punto que el dominio $\boldsymbol{R}$ de números racionales en individuos-punto.

El deseo de Dedekind es poder seguir desde el punto de vista aritmético todos los fenómenos de la recta, y es por ello que los números racionales no serían suficientes. Es por ello que busca mejorar el instrumento $\boldsymbol{R}$ (que hasta este momento únicamente contaba con los números racionales), con la creación de números nuevos de manera que este sistema tenga la misma completud (o *continuidad*) que la línea recta.

La comparación que hemos realizado en esta subsección pone de manifiesto el hecho de que el dominio $\boldsymbol{R}$ posee una incompletud o discontinuidad, mientras que a la recta atribuímos los conceptos de completud y continuidad. Pero, ¿qué es este concepto de continuidad?. En la subsección anterior, en la tercera ley, se dice que todo punto p de la recta genera una descomposición de la misma en dos partes distintas, teniendo además que cada punto de una parte estaá a la izquierda de cualquier punto de la otra. Dedekind entonces enuncia la esencia de la continuidad usando el inverso de esta ley, es decir:

Si todos los puntos de la recta se descomponen en dos clases tales que todo punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un y sólo un punto que produce esta partición de todos los puntos en dos clases, este corte de la recta en dos partes.

3.2.4. Creación de los números irracionales

Si nos quedamos con laas últimas palabras expuestas en la subsección anterior, el camino que debemos seguir de cara a completar el dominio discontinuo $\boldsymbol{R}$ queda bastante claro. Ya en la primera subsección se señaló en la ley 3 que todo número racional a produce una descomposición del sistema $\boldsymbol{R}$ en las dos clases distintas A_1, A_2. De aquí en adelante denominaremos a tal partición una *cortadura* y se denotará por (A_1, A_2). Luego, diremos que todo número racional a produce una *cortadura*. Estas cortaduras tienen además la propiedad de que o bien entre los números de la primera clase existe uno mayor o ente los de la segunda clase existe uno menor. E inversamente, si una cortadura posee esta propiedad, está producida por ese número racional (el mayor de la primera clase o el menor de la segunda).

Pero, es fácilmente deducible que no todas las cortaduras están producidas pro números racionales. No sólo eso, si no que hay infinitas de este tipo. Dedekind pone como ejemplo un tipo de cortaduras en especial.

Tomando D un número entero positivo que no sea el cuadrado de un número entero, por lo que existe un número entero positivo λ de manera que se cumple

$$\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2$$

Si colocamos en la segunda clase A_2 todos aquellos números racionales positivos a_2 cuyo cuadrado es $> D$ y en la primera clase el resto de números racionales a_1 (es decir, los racionales negativos y todo racional positivo cuyo cuadrado sea $< D$), la partición generada es una cortadura (A_1, A_2), o lo que es lo mismo, todo número de la segunda clase es mayor que cualquier número de la primera. Pero es bastante obvio que esta cortadura no está generada por ningún número racional (basta con recordar la demostración de que $\sqrt{2}$ es irracional, o lo que es lo mismo, que no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea 2).

Es aquí, en este momento en el que vemos que no todas las cortaduras son generadas por números racionales en, que vemos la incompletud o discontinuidad del dominio de los números racionales.

Entonces, a partir de este momento, cada vez que nos encontremos con una cortadura (A_1, A_2) que no sea generada por un número racional, se *creará* un nuevo número *irracional* α, el cual consideraremos totalmente definido por dicha cortadura. Por tanto, de ahora en adelante, cada cortadura está producida por un y sólo un número determinado, ya sea racional o irracional, y diremos que dos números son *diferentes, distintos o desiguales* siempre y únicamente cuando las cortaduras que generen sean esencialmente diferentes (a continuación se explicará a que se refiere con "esencialmente").

Para poder tener un fundamento de ordenación para todos los números *reales* (todos los racionales e irracionales), deberemos observar en primer lugar las relaciones entre cualesquiera dos cortaduras (A_1, A_2) y (B_1, B_2), generadas por dos números α y β cualesquiera. Está claro que una cortadura queda ya completamente determinada cuando se conoce una de ambas clases (ya que la otra clase contiene el resto de números reales). Si ahora comparamos dos primeras clases A_1, B_1, podemos encontrarnos en uno de los siguientes 5 casos:

1. Que sean totalmente idénticas, es decir, que todo número a_1 contenido en A_1 está también contenido en B_1 y que todo número b_1 contenido en B_1 esté también contenido en A_1. En este caso, A_2 y B_2 serán necesariamente idénticas, por lo que ambas cortaduras son totalmente idénticas, lo que denotaremos simbólicamente mediante $\alpha = \beta$ o $\beta = \alpha$.

   Si las dos clases A_1, B_1 no son idénticas, entonces hay en una de ellas (A_1) un número $a'_1 = b'_2$ que no está contenido en la otra B_1, y que por tanto está en B_2; con lo que todos los números b_1 que se encuentran en B_1 son menores que este número a_1 y por consiguiente todos los números b_1 están también en A_1, dándose el resto de casos

2. Si a'_1 es el único de A_1 que no está contenido en B_1, cualquier otro número a_1 de A_1 está contenido en B_1, por lo que es menor que a'_1, es decir, que a'_1 es el mayor de todos los números a_1, por lo que la cortadura (A_1, A_2) será producida por el número $\alpha = a'_1 = b'_2$. De la otra cortadura (B_1, B_2), siguiendo una lógica parecida, concluimos que la cortadura (B_1, B_2) estará producida por el número $\beta = b'_2 = a'_1 = \alpha$. En este caso las cortaduras son inesencialmente diferentes.
3. Si en A_1 hay al menos dos números diferentes $a'_1 = b'_2$ y $a''_1 = b''_2$ que no están en B_1, entonces hay infinitos (por los infinitos números entre a'_1 y a''_1, usando la ley 2 de la subsección 1) que están contenidos en A_1 pero no en B_1. En este caso diremos que los números α y β que corresponden a estas dos cortaduras esencialmente diferentes, son también *diferentes* entre sí, y diremos de manera precisa que α es *mayor* que β y que β es *menor* que α, lo que representaremos por $\alpha > \beta$, $\beta < \alpha$.
4. Si hay en B_1 únicamente un número $b'_1 = a'_2$ que no está en A_1, ambas cortaduras sólo serán inesencialmente diferentes y están producidas por el mismo número $\alpha = a'_2 = b'_1 = \beta$.
5. Si hay al menos dos números diferentes en B_1 que no están en A_1, entonces $\beta > \alpha$, $\alpha < \beta$.

Con esto habríamos cubierto todos los casos, luego se deduce que de dos números diferentes, uno es el mayor y el otro el menor, haciendo imposible un tercer caso.

3.2.5. Continuidad del dominio de los números reales

Llegados a este punto, ya hemos visto que el dominio $\mathbb{R}$ de los números reales constituye un dominio bien ordenado de una única dimensión. Con esto, queremos decir que se cumplen las siguientes leyes o propiedades:

1. Si $\alpha > \beta$ y $\beta > \gamma$, entonces también tenemos que $\alpha > \gamma$. Diremos que el número β está entre los números α y γ.
2. Si α, γ son dos números diferentes, hay siempre infinitos números distintos β que están entre α y γ.
3. Si α es un número determinado, todos los números del sistema $\mathbb{R}$ se descomponen en dos clases $\mathfrak{U}_1$ y $\mathfrak{U}_2$, cada una de las cuales contiene infinitos individuos. La primera clase $\mathfrak{U}_1$ abarca todos los números α_1 que son $< \alpha$, mientras que la segunda clase $\mathfrak{U}_2$ abarca todos los números α_2 que son $> \alpha$. De nuevo, el propio número α puede asignarse a cualquiera de las dos clases, siendo o el mayor de la primera o el menor de la segunda. En todo caso, la descomposición del sistema en ambas clases es tal que todo número de la primera clase $\mathfrak{U}_1$ es menor que todo número de la segunda clase $\mathfrak{U}_2$, y decimos que esta descomposición es producida por el número α.

   Estas tres primeras propiedades nos recuerdan una vez más a las enunciadas en las subsecciones 1 y 2, pero en este caso podemos enunciar una cuarta propiedad, la continuidad, que viene determinada por el siguiente teorema:

4. Si el sistema $\mathbb{R}$ de los números reales se descompone en dos clases $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2$ tales que todo número α_1 de la primera clase es menor que todo número α_2 de la segunda clase, existe un y sólo un número α mediante el cual se produce la división

3.2.6. Cálculos con números reales

Dedekind hace uso de los cálculos con racionales y de las cortaduras para definir los cálculos que se realizarán con los números reales. Si se quisiera realizar un cálculo cualquiera entre los números reales α, β cuyas cortaduras serían respectivamente (A_1, A_2) y (B_1, B_2), definiríamos la cortadura (C_1, C_2) que debe ser generada por el resultado de dicho cálculo, llamese γ. Dedekind se limita a exponer el caso más sencillo, la adición, la cual expondremos a continuación.

Sea c un número racional cualquiera, lo incluiremos en la clase C_1 si hay un número a_1 en A_1 y un número b_1 en B_1 de manera que la suma $a_1 + b_1 \leq c$; los demás racionales c los ubicaremos en la clase C_2. Es claro que esta partición de todos los números racionales en las dos clases C_1, C_2 constituye una cortadura, porque todo número c_1 contenido en C_1 es menor que cada número c_2 de C_2. Si ambos números α, β son racionales, todo número c_1 contenido en C_1 es $\leq \alpha + \beta$, porque $a_1 \leq \alpha, b_1 \leq \beta$, por lo que también $a_1 + b_1 \leq \alpha + \beta$; si además un número c_2 contenido en C_2 fuese $< \alpha + \beta$, es decir, si $\alpha + \beta = c_2 + p$, donde p designa un número racional positivo, tendríamos

$$c_2 = (\alpha - \frac{1}{2}p) + (\beta - \frac{1}{2}p)$$

lo que entraría en contradicción con la definición del número c_2, porque $\alpha - \frac{1}{2}p$ es un número de A_1 y $\beta - \frac{1}{2}p$ es un número de B_1; por tanto todo número c_2 contenido en C_2 es $\geq \alpha + \beta$. Con lo que en este caso la cortadura (C_1, C_2) estará producida por la suma $\alpha + \beta$. Por tanto no se infringe la definición válida en la aritmética de los racionales, si en todos los casos se entiende por *suma* $\alpha + \beta$ de dos números reales cualesquiera α, β aquel número γ mediante el cual se produce la cortadura (C_1, C_2). Si únicamente uno de los dos números, por ejemplo α, es racional, es fácil convencerse de que no tiene ninguna influencia en la suma $\gamma = \alpha + \beta$ que pongamos el número α en la clase A_1 o en la clase A_2.

Siguiendo un proceso parecido podríamos definir el resto de operaciones de lo que Dedekind llama aritmética elemental (véase la diferecia, el producto, el cociente, potencias, raíces...), logrando demostraciones de ciertos teoremas que hasta el momento de la publicación no habían sido probados (como es el caso del producto de raíces, como por ejemplo $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$).

3.2.7. Análisis infinitesimal

Para concluir su publicación, Dedekind se centa en aclarar las relaciones entre lo expuesto en todas las subsecciones anteriores y algunas teoremas fundamentales del análisis infinitesimal.

Por ejemplo, diremos que una magnitud variable x, que recorre sucesivamente determinados valores numéricos, se aproxima a un *valor límite* fijo α, cuando a lo largo de todo el proceso, x viene finalmente a ubicarse entre cualesquiera dos números entre los cuales se encuentra el propio α, o lo que viene siendo lo mismo, cuando la diferencia $x - \alpha$ tomada en valor absoluto se reduce por debajo de cualquier valor arbitrario que queramos distinto de cero.

Otro de los teoremas que para Dedekind resulta de mayor importancia y enuncia es el siguiente: “Si una magnitud x crece constantemente, pero no más allá de todo límite, entonces se aproxima a un valor límite.”

El anterior teorema no es importante por placer. El mismo teorema es equivalente al principio de continuidad que posee el dominio de los números reales, o lo que es lo mismo, que perdería toda su validez en el momento que consideremos que un único número real de nuestro dominio no esté presente. En concreto, si este teorema es cierto, también lo será el teorema 4 que se expuso en la subsección 3.1.5.

Otro teorema del análisis infinitesimal, que sigue siendo equivalente a lo expuesto anteriormente, y cuyo uso es más común, dice: “Si en el proceso de variación de una magnitud x se puede determinar, para cada magnitud positiva δ positiva dada, un valor correspondiente a partir del cual x varía menos que δ, entonces x se aproxima a un valor límite."

Con estos ejemplos, Dedekind da por suficiente la prueba de la relación entre el principio de continuidad y todos el análisis infinitesimal.

Con esto acabaría lo expuesto en la publicación de Dedekind. Aunque se hayan realizado algunas modificaciones desde la aparición de este trabajo hasta la actualidad, son mínimas y totalmente irrelevantes. El trabajo de Dedekind, igual que el de otros matemáticos de su época, deja de una vez zanjado el problema de la definición de los números reales.

3.3. Relación entre el trabajo de Dedekind y el de Eudoxo

Hay una opinión muy extendida entre los historiadores de las Matemáticas de que la definición de los números reales que utiliza Dedekind tiene una clara influencia de la teoría de Eudoxo de las razones de magnitudes, que fue recogida por Euclides en el Libro V de sus Elementos.

Por ejemplo, José Ferreirós, editor de algunas publiciones y correspondencia de Dedekind, y estudioso de su vida y obra, afirma que "la teoría de las proporciones de Eudoxo guarda una profunda relación con la teoría de los números irracionales de Dedekind, como indicará Rudolf Lipschitz y como se ha venido repitiendo desde entonces". Algunos consideran que ahí se produce un anacronismo, pues las cortaduras de Dedekind son particiones en el conjunto de los números racionales y, por tanto, determinadas por cocientes de números enteros, y las definiciones de Eudoxo de igualdad y desigualdad de razones utilizan pares de números enteros.

Dedekind insiste en que su teoría no hace alusión a la idea de magnitud y en ese sentido rechaza expresamente las ideas de Eudoxo. Sólo se refiere a conjuntos de números racionales, sólo se mueve en el ámbito puro de la Aritmética y no se refiere a nociones geométricas o de otro tipo.

Bibliografía

[1] J. Rey Pastor, José Babini: *Historia de la Matemática. vol.1. De la Antigüedad a la Baja Edad Media.* GEDISA, 1984.

[2] H.-D. Ebbinghaus *et al.*: *Numbers.* Springer, 1995.

[3] Nicolas Bourbaki: *Elementos de historia de las matemáticas.* Alianza Universidad, 1976.

[4] Pedro Miguel González Urbaneja: *Los Elementos de Euclides, Biblia de la geometría griega.* Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, 2017.

[5] T. L. Heath: *Euclid, The thirteen books of the Elements, Vol.2(Books III-IX).* Cambridge University Press, 1908. (Dover Publications, 1956).

[6] Richard Dedekind: *¿Qué son y para qué sirven los números?* Alianza Editorial, 1998.

[7] Stephen Hawking (editor): *Dios creó los números.* Crítica, 2006.

Real numbers: from Eudoxus to Dedekind

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

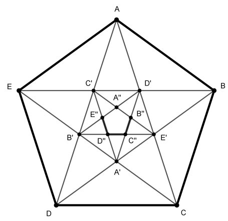
Ignacio Jiménez San Andrés
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100897173@ull.edu.es

Abstract

In this work, three key sections in the development of the current concept of real number will be exposed. We will begin by seeing how numbers were conceived in the time of the Greeks, then we will proceed with the theory of proportion developed by Eudoxus and collected by Euclid in " Elements ", and to conclude we will talk about the work carried out by Dedekind in terms of to the theory of real numbers.

1. Real numbers in Greece

In ancient Greece the concept of number was reserved only for whole numbers. What we know today by rational numbers, for the Greeks were simple ratios of numbers. And irrational numbers (or what they would call "incommeasurable magnitudes") did not fit into their reality, since the Pythagoreans defended that all reality could be expressed through integers or ratios of the same. That is why the discovery of incommeasurable magnitudes (attributed to different mathematicians) caused a great stir. It is not known exactly who was the first to demonstrate the existence of such magnitudes, but it is generally attributed to Hypasus of Metapontum, who, working with the pentagram (a symbol of the Pythagorean school itself), finds that its diagonal with its side were not commensurable.



2. Theory of the proportions

Eudoxus developed a theory of proportion, where working with homogeneous magnitudes (of the same type, lengths with lengths, areas with areas ...) and without distinguishing between commensurable and incommensurable magnitudes, he develops a series of definitions and theorems..

Among its most important definitions are the following, in which it defines what is known as *Archimedean Axiom*, the equality of magnitude ratios and the inequality of ratios:

Definition V.4. *Magnitudes are said to have a ratio to one another which are capable, when multiplied, of exceeding one another.*

Definition V.5. *Magnitudes are said to be in the same ratio, the first to the second and the third to the fourth, when, if any equimultiples whatever be taken of the first and third, and any equimultiples whatever of the second and fourth, the former equimultiples alike exceed, are alike equal to, or alike fall short of, the latter equimultiples respectively taken in corresponding order.*

Definition V.7. *When, of the equimultiples, the multiple of the first magnitude exceeds the multiple of the second, but the multiple of the third does not exceed the multiple of the fourth, then the first is said to have a greater ratio to the second than the third has to the fourth.*

3. Dedekind real number theory

It is in the 19th century, with the appearance of mathematicians such as Weierstrass, Cantor and Cauchy, when the set of real numbers is rigorously constructed. Relying on a concept coined by himself (*cuts*) and using a process of "completion", Dedekind manages to define real numbers through rational numbers.

The article in which he published this theory is a clear example of organization and clarity, even proving that his theory supported the results that the infinitesimal calculus gave to the mathematical community.

References

[1] H.-D. Ebbinghaus *et al.*: *Numbers.* Springer, 1995.

[2] T. L. Heath: *Euclid, The thirteen books of the Elements, Vol.2(Books III-IX).* Cambridge University Press, 1908. (Dover Publications, 1956).

[3] Richard Dedekind: *¿Qué son y para qué sirven los números?* Alianza Editorial, 1998.