Sección de Física
Universidad de La Laguna

Compendio de fórmulas matemáticas para física

Con aplicaciones

Silvana Radescu Cioranescu
Andrés Mujica Fernaud
Andrea Mujica Radescu

Compendio de fórmulas matemáticas para física

Con aplicaciones

Silvana Radescu Cioranescu
Andrés Mujica Fernaud
Andrea Mujica Radescu

Depósito Legal: TF 648-2020

Contenido

Acerca de este compendio

Para abordar con éxito cualquier asignatura de la carrera de Física hace falta un buen dominio de las correspondientes herramientas matemáticas.

La consulta de este compendio está recomendada al estudiantado de primer curso de carreras de ciencias experimentales. Está especialmente dirigido a los estudiantes del Grado en Física de la Universidad de La Laguna y en particular es de gran utilidad en la asignatura Fundamentos de Física del primer cuatrimestre del Grado en Física, que forma parte del modulo de enseñanza de formación básica del alumnado.

Este compendio contiene un breve repaso de los conceptos matemáticos básicos vistos en el Bachillerato. Asimismo se puede encontrar la simbología utilizada, algunos conceptos trigonométricos, las formulas básicas para la derivación y integración de línea (cuyo manejo es necesario desde la primera semana de clases) y algunas aplicaciones a diferentes situaciones o problemas de física de primer curso.

Alfabeto griego

El alfabeto latino está lejos de tener suficientes letras para nombrar todas las cantidades científicas. Por ello en los textos científicos encontrarán notaciones que utilizan el alfabeto griego. **Es necesario conocer el nombre y las notaciones de estas letras.**

alfa	Α	α	iota	Ι	ι	rho	Ρ	ρ
beta	Β	β	kappa	Κ	κ	sigma	Σ	ς / σ
gamma	Γ	γ	lambda	Λ	λ	tau	Τ	τ
delta	Δ	δ	mi	Μ	μ	ípsilon	ϒ	υ
épsilon	Ε	ε	ni	Ν	ν	fi	Φ	φ / ϕ
dseta	Ζ	ζ	xi	Ξ	ξ	ji	Χ	χ
eta	Η	η	ómicron	Ο	ο	psi	Ψ	ψ
theta	Θ	θ	pi	Π	π	omega	Ω	ω

Prefijos del sistema internacional

Prefijo	Símbolo	Potencia	Prefijo	Símbolo	Potencia
peta	P	10^{15}	deci	d	10^{-1}
tera	T	10^{12}	centi	c	10^{-2}
giga	G	10^{9}	mili	m	10^{-3}
mega	M	10^{6}	micro	μ	10^{-6}
kilo	k	10^{3}	nano	n	10^{-9}
hecto	h	10^{2}	pico	p	10^{-12}
deca	da	10^{1}	femto	f	10^{-15}

Unidades del sistema internacional

Magnitud	Nombre	Símbolo
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	Amperio	A

Magnitud	Nombre	Símbolo	Expresada en unidades básicas
Fuerza	Newton	N	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
Trabajo	Julio	J	$m^{2} \cdot kg \cdot s^{-2}$
Potencia	Vatio, watt	W	$m^{2} \cdot kg \cdot s^{-3}$
Velocidad	Metro por segundo		$m \cdot s^{-1}$
Velocidad angular	Radián por segundo		$rad \cdot s^{-1}$
Aceleración	Metro por segundo cuadrado		$m \cdot s^{-2}$
Carga eléctrica	Culombio	C	$A \cdot s$
Potencial eléctrico	Voltio	V	$m^{2} \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Resistencia eléctrica	Ohmio	Ω	$m^{2} \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$ ó $V \cdot A^{-1}$
Conductancia eléctrica	Siemens	S	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^{3} \cdot A^{2}$
Capacitancia eléctrica	Faradio	F	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^{4} \cdot A^{2}$

Identidades, fracciones y potencias

- **Fracciones:**
  - Suma: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$
  - Multiplicación: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
  - División: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$
- **Potencias:**
  - $a^0 = 1$
  - $a^n \times a^m = a^{n+m}$
  - $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
  - $(a^n)^m = a^{n\times m}$
  - $(ab)^n = a^n \times b^n$
  - $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
  - $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
- **Identidades notables:**
  - $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
  - $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
  - $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
- **Errores comunes:**
  - $(a+b)^m \neq a^m + b^m$

    ➡ p. ej con a = 2, b = 3, m = 2

    $(2+3)^2 = 5^2 = 25$

    $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

    $25 \neq 13$
  - $(a-b)^m \neq a^m - b^m$

Derivadas y primitivas

- **Derivadas comunes:** $f'(x) = \dfrac{d(f(x))}{dx}$ (Notación de Leibniz)

Función *f*		Derivada *f'*
x^n	$n \in \mathbb{R}$	$n\,x^{n-1}$
$e^{\alpha x}$	$\alpha \in \mathbb{C}$	$\alpha e^{\alpha x}$
$\ln\lvert x\rvert$		$\dfrac{1}{x}$
$\cos x$		$-\sin x$
$\sin x$		$\cos x$
$\tan x$		$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

- **Primitivas comunes:** $F(x) = \int f(x)dx$

Función *f*		Primitiva *F* ($k \in \mathbb{R}$)
a	$a \in \mathbb{R}$	$a\,x + k$
x^n	$n \neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$e^{\alpha x}$	$\alpha \in \mathbb{C}^*$	$\dfrac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + k$
$\ln x$		$x(\ln x - 1)$
$\dfrac{1}{x+a}$	$a \in \mathbb{R}$	$\ln\lvert x + a\rvert + k$
$\cos x$		$\sin x + k$
$\sin x$		$-\cos x + k$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$		$\tan x + k$

- **Reglas de derivación:** *f y g son dos funciones cualquiera, a = const*

  - $(af)' = af'$
  - $(f+g)' = f' + g'$
  - $(fg)' = f'g + fg'$
  - $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

- **Regla de la cadena:**

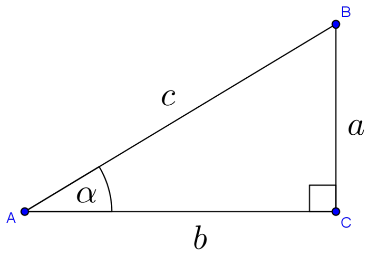
Algebraico: $(f(g))' = f'(g) \times g'$

Notación de Leibniz: $\dfrac{dg}{dx} = \dfrac{dg}{df}\dfrac{df}{dx}$

- **Notación de Newton:**

$\dot{g}(t) = \dfrac{dg(t)}{dt}$, $\ddot{g}(t) = \dfrac{d^2g(t)}{dt^2}$

Trigonometría



$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

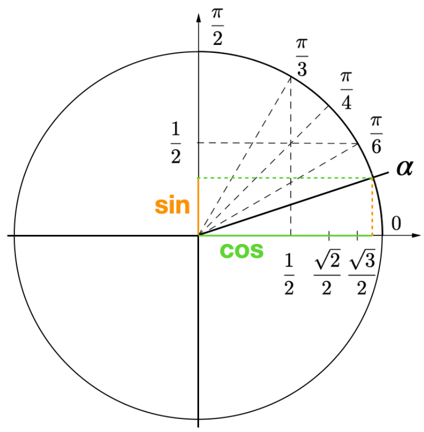
$$\tan\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Regla mnemotécnica

SOH CAH TOA

Seno: **O**puesto / **H**ipotenusa
Coseno: **A**djacente / **H**ipotenusa
Tangente: **O**puesto / **A**djacente

Círculo trigonométrico



Ángulo en radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tangente	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	indefinido

- ## Formulas trigonométricas

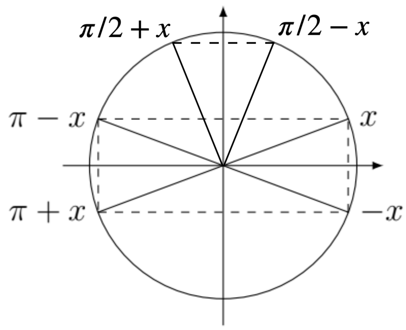
- $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$
- $\tan a = \dfrac{\sin a}{\cos a}$
- $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

Formula de suma:

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

Ángulo doble y mitad:

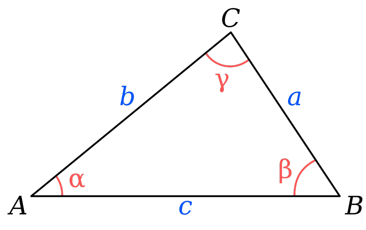
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$
- $\sin \dfrac{a}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1-\cos a}{2}}$
- $\cos \dfrac{a}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{1+\cos a}{2}}$



Angulos asociados:

- $\cos(x) = \cos(-x) = \sin(\dfrac{\pi}{2} - x) = \sin(\dfrac{\pi}{2} + x)$
- $\sin(x) = \sin(\pi - x) = \cos(\dfrac{\pi}{2} - x)$
- $-\cos(x) = \cos(\pi - x) = \cos(\pi + x)$
- $-\sin(x) = \sin(-x) = \sin(\pi + x) = \cos(\dfrac{\pi}{2} + x)$

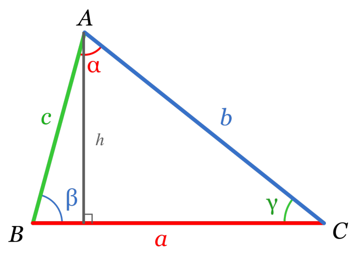
Teorema del coseno:



- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

Teorema del seno:

- $\dfrac{a}{\sin \alpha} = \dfrac{b}{\sin \beta} = \dfrac{c}{\sin \gamma}$



Vectores

u, v, A, B *son vectores cualquiera, a = const, b = const*

$$\vec{A} = A_x\hat{\boldsymbol{i}} + A_y\hat{\boldsymbol{j}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}} \iff \vec{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} \quad \|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Vector unitario: $\hat{A} = \dfrac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} \iff \vec{A} = \hat{\boldsymbol{A}}\|\vec{A}\|$

- **Propiedades básicas:**
  - $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
  - $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
  - $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$

- **Producto escalar:** $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\| \cos((\vec{u}, \vec{v}))$

  Definición matricial:

  - $\vec{A} = A_x\hat{\boldsymbol{i}} + A_y\hat{\boldsymbol{j}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}}$
  - $\vec{B} = B_x\hat{\boldsymbol{i}} + B_y\hat{\boldsymbol{j}} + B_z\hat{\boldsymbol{k}}$

  $$\vec{A} \cdot \vec{B} = \begin{bmatrix} A_x & A_y & A_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

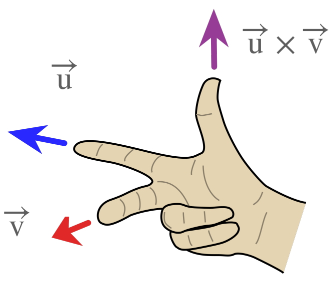
  Propiedades:

  - $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
  - $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
  - $a(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (a\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (a\vec{v})$
  - $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
  - $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$

- **Producto vectorial:** $\vec{u} \times \vec{v} = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\| \sin((\vec{u}, \vec{v}))\vec{n}$

  Definición matricial:

  - $\vec{A} = A_x\hat{\boldsymbol{i}} + A_y\hat{\boldsymbol{j}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}}$
  - $\vec{B} = B_x\hat{\boldsymbol{i}} + B_y\hat{\boldsymbol{j}} + B_z\hat{\boldsymbol{k}}$



Regla de la mano derecha

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{i}} & \hat{\boldsymbol{j}} & \hat{\boldsymbol{k}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \hat{\boldsymbol{i}} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \hat{\boldsymbol{j}} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \hat{\boldsymbol{k}} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\boldsymbol{i}} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\boldsymbol{j}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\boldsymbol{k}}$$

  Propiedades:

  - $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
  - $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
  - $a(\vec{u} \times \vec{v}) = (a\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (a\vec{v})$
  - $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|\ |\sin((\vec{u}, \vec{v}))|$
  - $\vec{u} \times \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \parallel \vec{v}$ **con** $\vec{u} \neq \vec{0}$ **y** $\vec{v} \neq \vec{0}$
  - $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{u}$ **y** $(\vec{u} \times \vec{v}) \perp \vec{v}$

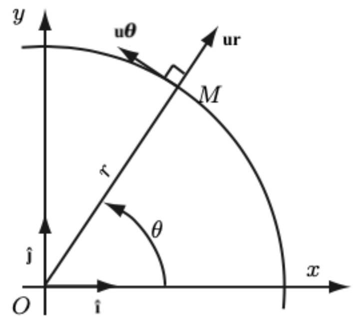
Sistemas de coordenadas

- **Coordenadas cartesianas:**

Cinemática:

- $\vec{r} = x\hat{\boldsymbol{i}} + y\hat{\boldsymbol{j}} + z\hat{\boldsymbol{k}}$
- $\vec{v} = \dot{x}\hat{\boldsymbol{i}} + \dot{y}\hat{\boldsymbol{j}} + \dot{z}\hat{\boldsymbol{k}}$
- $\vec{a} = \ddot{x}\hat{\boldsymbol{i}} + \ddot{y}\hat{\boldsymbol{j}} + \ddot{z}\hat{\boldsymbol{k}}$

- **Coordenadas polares:**

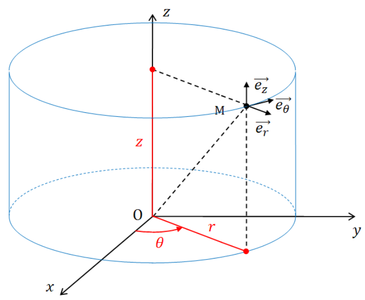


- $x = r\cos\theta$ $\qquad \hat{\boldsymbol{u}}_r = \cos\theta\hat{\boldsymbol{i}} + \sin\theta\hat{\boldsymbol{j}}$
- $y = r\sin\theta$ $\qquad \hat{\boldsymbol{u}}_\theta = -\sin\theta\hat{\boldsymbol{i}} + \cos\theta\hat{\boldsymbol{j}}$
- $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\theta = y/x$

Cinemática:

- $\vec{r} = r\hat{\boldsymbol{u}}_r$
- $\vec{v} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{u}}_r + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{u}}_\theta$
- $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\boldsymbol{u}}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{u}}_\theta$

- **Coordenadas cilíndricas:**

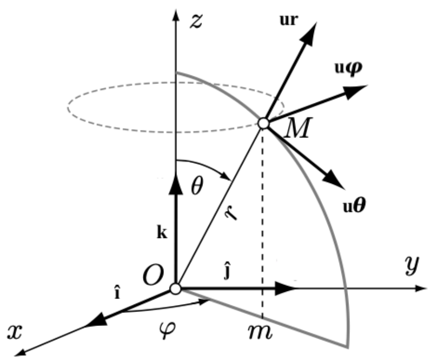


- $x = r\cos\theta$
- $y = r\sin\theta$
- $z = z$
- $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\theta = y/x$

Cinemática:

- $\vec{r} = r\hat{\boldsymbol{u}}_r + z\hat{\boldsymbol{k}}$
- $\vec{v} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{u}}_r + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{u}}_\theta + \dot{z}\hat{\boldsymbol{k}}$
- $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\boldsymbol{u}}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{u}}_\theta + \ddot{z}\hat{\boldsymbol{k}}$

- **Coordenadas esféricas:**



- $x = r\sin\theta\cos\phi$
- $y = r\sin\theta\sin\phi$
- $z = r\cos\theta$
- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\tan\phi = y/x$, $\tan\theta = \sqrt{x^2 + y^2}/z$

Cinemática:

- $\vec{r} = r\hat{\boldsymbol{u}}_r$
- $\vec{v} = \dot{r}\hat{\boldsymbol{u}}_r + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{u}}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{u}}_\phi$
- $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{\boldsymbol{u}}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\boldsymbol{u}}_\theta +$
  $+ (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\hat{\boldsymbol{u}}_\phi$

Algunos tipos de movimiento

- **Movimiento rectilíneo:**

  La trayectoria que describe el móvil es una recta.

  - **Movimiento rectilíneo uniforme (MRU):**

    La velocidad es constante.

    Ecuaciones de movimiento:

    $v = \text{const} \iff a = 0$

    $v = v_0 \Longrightarrow x = x_0 + v_0 t \quad (\text{con } t_0 = 0)$

  - **Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA):**

    La aceleración es constante.

    Ecuaciones de movimiento:

    $$a = \text{const} \Longrightarrow v = at + v_0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \quad (\text{con } t_0 = 0)$$

- **Movimiento bajo aceleración constante:** $\vec{a} = const.$

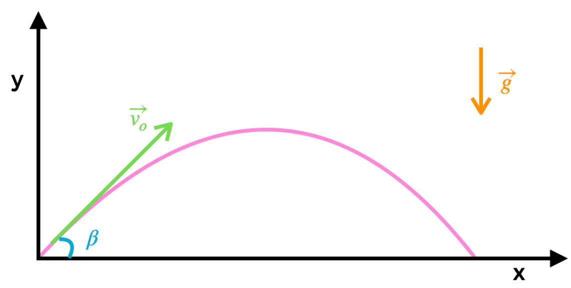
  La trayectoria que describe el móvil es una parábola.

  Ecuaciones de movimiento:

  $$\vec{a} = \text{const} \Longrightarrow \vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_0 \Longrightarrow \vec{r} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0 \quad (\text{con } t_0 = 0)$$

  - **Características del movimiento bajo aceleración constante:**

    Sistema de referencia:



$\vec{r}_0 = 0; \vec{v}_0 \in \pi(x, y)$

$\vec{a} = -g\hat{j}, \quad g > 0$

Altura máxima:

$$v_y = 0 \Longrightarrow y_{max} = \frac{1}{2g}v_0^2 sen^2\beta$$

Alcance máximo:

$$y = 0 \Longrightarrow x_{max} = \frac{1}{g}v_0^2 sen2\beta$$

- **Movimiento uniformemente acelerado (MUA):**

  La aceleración tangencial es constante.

  Ecuaciones de movimiento:

  $$a_t = \frac{dv}{dt} = \text{const} \Longrightarrow v = a_t t + v_0 \Longrightarrow s = \frac{1}{2} a_t t^2 + v_0 t + s_0 \quad (\text{con } t_0 = 0)$$

- **Movimiento circular:**

La trayectoria que describe el móvil es una circunferencia.

. **Velocidad angular**: $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ $\quad$ θ ángulo en radianes

· **Velocidad tangencial**: $v_t = \omega R$ con R el radio de la circunferencia

. **Aceleración angular**: $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$

· **Aceleración tangencial**: $a_t = \alpha R$ con R el radio de la circunferencia

- **Movimiento circular uniforme (MCU) y sus parámetros:**

  La velocidad angular (ω) es constante.

  Ecuaciones de movimiento:

  $$\omega = \text{const} \Longrightarrow \theta = \theta_0 + \omega t \quad (\text{con } t_0 = 0)$$

· **Período (s)**: el tiempo que tarda un móvil en dar una vuelta completa $T = \frac{2\pi}{\omega}$

· **Frecuencia (Hz)**: el número de vueltas que da un móvil por unidad de tiempo $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

- **Movimiento circular uniformemente acelerado (MCUA):**

  La aceleración angular (α) es constante.

  Ecuaciones de movimiento:

  $$\alpha = \text{const} \Longrightarrow \omega = \omega_0 + \alpha t \Longrightarrow \theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \theta_0 \quad (\text{con } t_0 = 0)$$

Operadores diferenciales

- **En coordenadas cartesianas:**

Función escalar: $V = f(x, y, z)$

Función vectorial: $\overrightarrow{\mathrm{A}} = A_x\hat{\boldsymbol{i}} + A_y\hat{\boldsymbol{j}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}}$

Operador nabla: $\overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{k}}$

- **Gradiente:** $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V) = \overrightarrow{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\boldsymbol{j}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\boldsymbol{k}}$

- **Divergencia:** $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{A}}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

- **Rotacional:** $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{A}}) = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathrm{A}} = (\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\hat{\boldsymbol{i}} + (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\hat{\boldsymbol{j}} + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\hat{\boldsymbol{k}}$

- **Laplaciano:** $\Delta V = \overrightarrow{\nabla}^2 V = \overrightarrow{\nabla} \cdot (\overrightarrow{\nabla} V) = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

- **En coordenadas polares / cilíndricas:**

$V = f(r, \theta, z)$

$\overrightarrow{\mathrm{A}} = A_r\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}} + A_\theta\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}} + A_z\hat{\boldsymbol{k}}$

Operador nabla: $\overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\boldsymbol{k}}$

- **Gradiente:** $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V) = \overrightarrow{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\boldsymbol{k}}$

- **Divergencia:** $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{A}}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{\mathrm{A}} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial z}$

- **Rotacional:**

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{A}}) = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{\mathrm{A}} = (\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z})\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}} + (\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r})\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}} + (\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta})\hat{\boldsymbol{k}}$$

- **Laplaciano:** $\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial V}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$

Movimiento bajo fuerzas centrales y conservativas

- **Fuerza central:**

  Una fuerza es central si su dirección pasa siempre por un punto fijo denominado centro de fuerzas. Para el movimiento bajo fuerzas centrales el momento angular tomado desde el centro de fuerzas es constante ($\vec{L}_0 = const$). El movimiento se desarrolla en un plano perpendicular a $\vec{L}_0$.

  Si $\vec{F}(\vec{r}) = F(\vec{r})\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}} \Longrightarrow \vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = const.;$

  Con 0-centro de fuerzas, m masa de la partícula, momento lineal: $\vec{p} = m\vec{v}$.

- **Fuerza central y conservativa:**

  - En general, si una fuerza es conservativa: $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p$

  - Sistema de referencia: movimiento en plano (xy), origen en centro de fuerzas 0.

    $$\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) = \vec{\nabla} E_p = \frac{\partial E_p}{\partial r}\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}} \qquad \vec{F} = F_r\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}} + F_\theta\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}}$$

    $$F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r}; \qquad F_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}$$

  - Una fuerza central es conservativa si y solo si depende únicamente de r (distancia al centro de fuerzas):

    $$F_\theta = 0 = -\frac{1}{r}\frac{\partial E_p}{\partial \theta}$$

    $$F_r = -\frac{\partial E_p}{\partial r} = -\frac{dE_p}{dr} \Longrightarrow \vec{F} = F(r)\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}},\ E_p = E_p(r) = -\int F(r)dr$$

    $$\vec{F}\ central\ y\ conservativa \Longrightarrow F = F(r) \Longrightarrow E_p = E_p(r)$$

- **Discusión de la curvas de la energía potencial en movimiento bajo fuerzas centrales y conservativas:**

- Movimiento bajo fuerzas centrales y conservativas:

$$\vec{\mathrm{F}} = F\hat{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{r}} \Longrightarrow F = -\frac{dE_p}{dr} \Longrightarrow E_p = E_p(r) = -\int F(r)dr$$

- Se conservan las siguientes magnitudes (movimiento contenido en el plano XY):

$$L_0 = mr^2\dot{\theta} = const \Longrightarrow \dot{\theta} = \frac{L_0}{mr^2}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + E_p(r) = const$$

- Usando la relación entre $\dot{\theta}$ y L_0:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L_0^2}{mr^2} + E_p(r) = const$$

$E_{p.c} = \dfrac{1}{2}\dfrac{L_0^2}{mr^2}$ es la energía potencial de barrera centrifuga

$E_{p.ef} = \dfrac{1}{2}\dfrac{L_0^2}{mr^2} + E_p(r)$ energía potencial efectiva

- Si se fija la energía a un valor constante (E=const), el movimiento solo esta permitido en aquélla región del espacio para la cual la energía cinética radial es:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - E_{p.ef} = E - (\frac{1}{2}\frac{L_0^2}{mr^2} + E_p(r)) \geq 0 \Longrightarrow E_{p.ef} \leq E$$

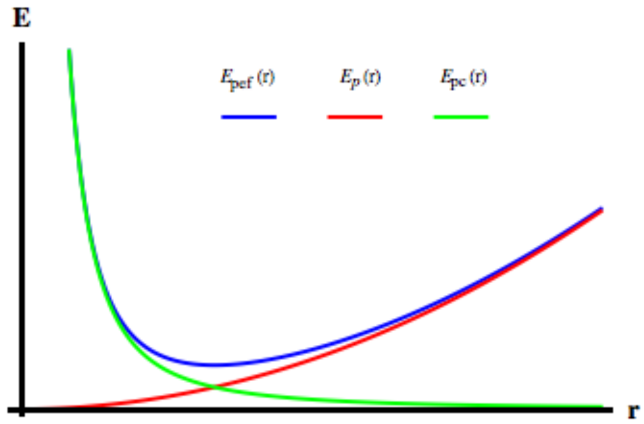
- Si representamos $E_{p.ef}$ (r) frente a r y señalando E = const, el movimiento solo es posible en aquella región para la cual $E_{p.ef}$ (r) quede por debajo de E. En los puntos en que $E_{p.ef}(r) = E$ la (puntos apsidales) la velocidad radial $\dot{r}$ es nula (puntos de máximo acercamiento o alejamiento al centro de fuerzas).

- **Algunos ejemplos de curvas de energía potencial para la discusión (cualitativa) del movimiento de una partícula sometida a una fuerza central y conservativa de magnitud F(r):**

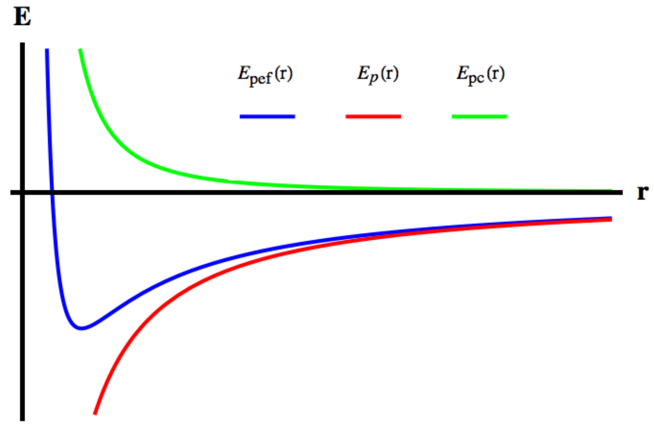
$$E_{p.c}(r) = \frac{1}{2}\frac{L_0^2}{mr^2} \quad ; \quad E_{p.ef} = \frac{1}{2}\frac{L_0^2}{mr^2} + E_p(r)$$

$$F(r) = -\frac{dE_p}{dr} \Longrightarrow E_p(r) = -\int F(r)dr + const$$

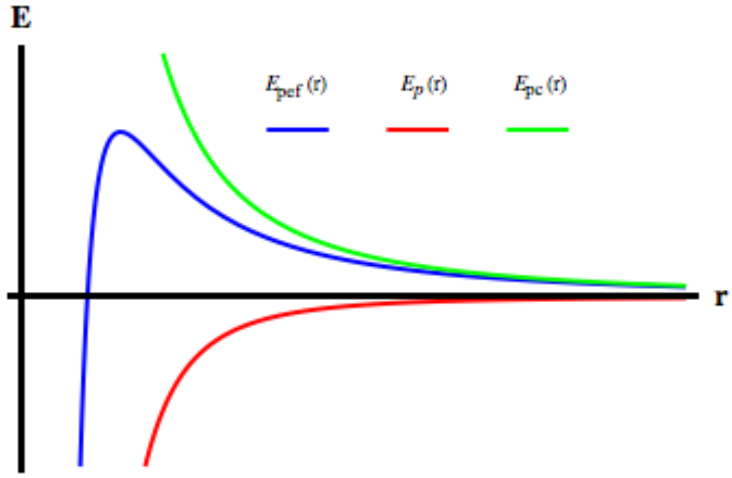
- $F(r) = -kr, k > 0 \Longrightarrow E_p(r) = \frac{1}{2}kr^2$



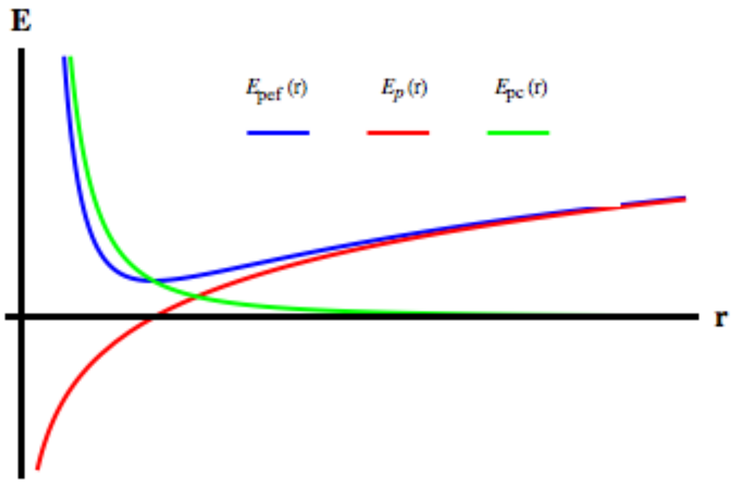
- $F(r) = -\frac{k}{r^2}, k > 0 \Longrightarrow E_p(r) = -\frac{k}{r}$



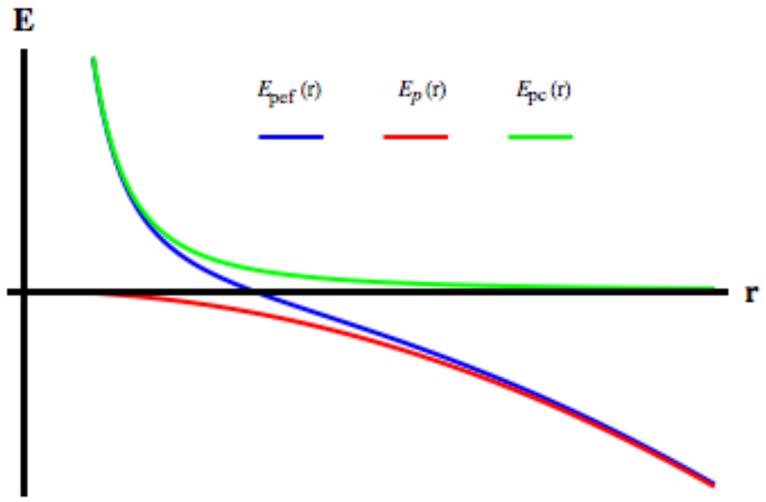
- $F(r) = -\frac{k}{r^4}, k > 0 \Longrightarrow E_p(r) = -\frac{k}{3r^3}$



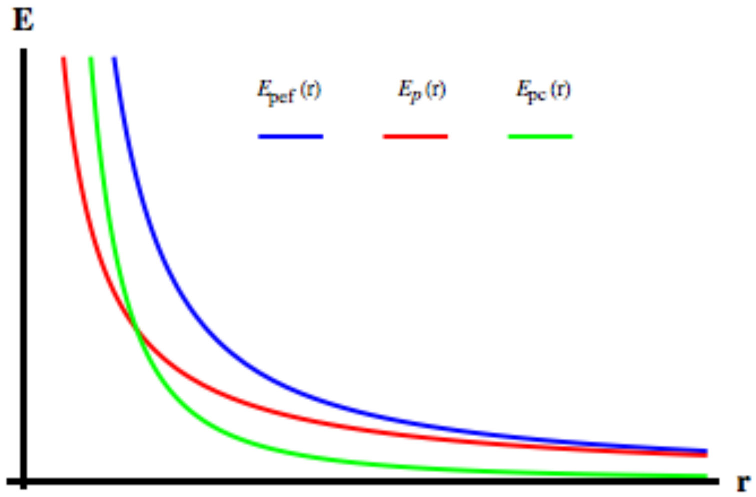
- $F(r) = -\frac{k}{r}, k > 0 \Longrightarrow E_p(r) = kLnr$



- $F(r) = kr, k > 0 \Longrightarrow E_p(r) = -\frac{1}{2}kr^2$



- $F(r) = \frac{k}{r^2}, k > 0 \Longrightarrow E_p(r) = \frac{k}{r}$



- $F(r) = \frac{k}{r}, k > 0 \Longrightarrow E_p(r) = -kLnr$