EJERCICIOS RESUELTOS DE MATEMÁTICAS I

GRADOS EN ECONOMÍA Y EN ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

Domingo Israel Cruz Báez

Departamento de Economía Aplicada
y Métodos Cuantitativos

Universidad
de La Laguna

Actualizado a 31/08/2022

Índice

PRÓLOGO

La presente colección de problemas resueltos es una recopilación del material de prácticas correspondiente a Matemáticas I, asignatura de Formación Básica y de primer curso en los Grados en Economía y en Administración y Dirección de Empresas. La mayor parte de los ejercicios propuestos se pueden encontrar en el libro de mis compañeros: Barrios, J. A., Carrillo, M., Gil, M. C., González, C., y Pestano, C. (2022), *Análisis de funciones en Economía y Empresa*, Ed. Díaz de Santos, Madrid.

Esta publicación pretende ser una ayuda al alumnado de primer curso de los grados mencionados y espero que sepan aprovechar todos los ejercicios resueltos de este documento.

TEMA 1: FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Supóngase que el costo en euros de fabricar hasta q unidades de determinado artículo está dado por la función $C(q) = q^3\text{-}30q^2 + 500q + 200$.

a) Calcular el costo de producir hasta 10 unidades del artículo.

b) Calcular el costo de producir la décima unidad.

2.a) Hallar la función compuesta $f(x-1)$ si $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} + 5$

b) El número de viviendas (en millones) construidas por año, N, depende de la tasa de interés r de acuerdo con la expresión $N(r) = \frac{1}{2(1+100r^2)}$. La tasa de interés está en el 12% y se predice que disminuirá en los siguientes 2 años al 8% de acuerdo con la expresión

$$r(t) = 0.12\text{-}\frac{0.08t}{t+24},$$

siendo t el tiempo en meses a partir de este momento. Expresar N como función de t y calcular su valor para $t = 6$.

3. La demanda x de cierto bien está dada por $x = 2000 - 15p$, siendo p el precio por unidad. El ingreso mensual obtenido por las ventas viene dado por $I = 2000p - 15p^2$. ¿Cómo depende I de x?

4. Un estudio ambiental en cierta comunidad suburbana revela que el nivel medio diario de monóxido de carbono en el aire será $C(p) = 0.5p + 1$ partes por millón cuando la población sea p miles. Se estima que dentro de t años la población de la comunidad será $p(t) = 10 + 0.1t^2$ miles.

a) Expresar el nivel de monóxido de carbono en el aire como una función del tiempo.

b) ¿Cuándo llegará a 6.8 partes por millón el monóxido de carbono?

5. Un club acepta ofrecer un banquete a los 100 primeros huéspedes que se inscriban a un precio de 15€ cada uno y a los huéspedes adicionales a 20€ cada uno. Exprese el coste del banquete en función de los huéspedes.

6. Sabiendo que el equilibrio de mercado tiene lugar cuando la cantidad ofertada coincide con la demandada ($Q_S = Q_D$), determine el precio y cantidad de equilibrio en los siguientes mercados:

a) $Q_S = \text{-}20 + 3p \quad Q_D = 220\text{-}5p.$

b) $Q_s + 32 - 7p = 0 \;\; Q_D - 128 + 9p = 0.$

7. Calcular los límites de las siguientes funciones:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3x^4-x^3}{5x^4-x^2}\right)$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^2+2x+1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2}{e^x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ **e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-2}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ **h)** $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x - 1)$ **i)** $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x<0 \\ x^3+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ **k)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+5}\right)^{3x+2}$

8. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones clasificando sus puntos de discontinuidad:

a) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$ **b)** $y = f(x) = \mathrm{E}[x]$ **c)** $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x \ge 0 \\ x^2 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ -2x-1 & \text{si } x < -1 \end{cases}$

d) $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$

9. Calcular las derivadas de primer y segundo orden de las siguientes funciones:

a) $y = 5$ **b)** $y = k\ (k \in \mathbb{R})$ **c)** $y = k \cdot x\ (k \in \mathbb{R})$ **d)** $y = 5x^2 + 3x + 2$ **e)** $y = (3x+1)^4$

f) $y = e^x$ **g)** $y = e^{-x}$ **h)** $y = e^{x^2}$ **i)** $y = e^{1/x}$ **j)** $y = \ln(x^2+1)^5$ **k)** $y = (x-2)e^x$

l) $y = (x^2+2)\ln x$ **m)** $y = \frac{x}{x^2+1}$ **n)** $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$ **o)** $y = \frac{e^x}{1+e^x}$ **p)** $y = \frac{\ln x}{x+2}$

10. Calcular la derivada de primer orden de las siguientes funciones en los puntos *x*=0 y *x*=1. Interpretar todos los resultados.

a) $y = 2x + 1$ **b)** $y = x^2$ **c)** $y = x^3 - 2x^2 + x$

11. Probar que la función $y = 3x^3 - 6x^2 + 4x$ es creciente para todo valor de $x \in \mathbb{R} - \{2/3\}$.

12. Calcular los valores de a y b para que la función $y(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } x \le 0 \\ \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea continua y derivable.

13. La función de demanda de cierto producto lanzado al mercado, a lo largo del tiempo, puede aproximarse bastante bien por:

$$D(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ at^2 + bt + c & \text{si } 0 < t < 3 \\ 9e^{-\frac{(t-3)^2}{2}} & \text{si } t \ge 3 \end{cases}$$

donde t viene expresado en meses y D en millones de items.

a) Calcular a, b y c para que D sea continua en $[0, +\infty)$.

b) Estudiar la derivabilidad de la función resultante.

14. Dibujar la curva dada por: $(x-2)^2 + y^2 = 9$. ¿Representa dicha ecuación una función? ¿Por qué?

15. Representar gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = f(x) = 5x - 3$ **b)** $y = f(x) = x^2 - x$ **c)** $y = \ln\ x$ **d)** $y = f(x) = \frac{3x}{2-x}$ **e)** $y = f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

f) $y = f(x) = |x^2 - 2|$ **g)** $y = f(x) = e^x(x-2)$ **h)** $y = f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ **i)** $y = f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2}$

16. Representar gráficamente la función $e^{-x^2/2}$. ¿Qué propiedades importantes se observan?

17. Sea la función $f(x) = x - \frac{a}{x}$. Determinar a para que:

a) $f(x)$ posea un mínimo en $x = 2$.

b) $f(x)$ posea un máximo en $x = -1$.

18. ¿Son las siguientes funciones f y g funciones inversas entre sí? En tal caso, representarlas en el mismo plano coordenado. ¿Qué propiedad se observa?

$$\mathrm{f(x)} = -\mathrm{x}^2 + 3,\ \mathrm{x} \ge 0,\ \mathrm{g(x)} = \sqrt{3\text{-}\mathrm{x}},\ \mathrm{x} \le 3$$

19. ¿La función $(x) = x^7 + 5x^5 + 2x - 2$ tiene inversa global? En caso afirmativo ¿se puede obtener su expresión $x = g(y)$? ¿Se puede conocer el valor de $g'(-2)$?

20. Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) La función $\mathrm{y(x)} = \mathrm{x}^3 + 4\mathrm{x} + 3$ tiene función inversa x(y) para todo x real. Además, esta función inversa es derivable y verifica que: $\mathrm{x}'(3) = \frac{1}{4}$.

b) La función $\mathrm{y(x)} = \mathrm{e}^{2\mathrm{x}} + \mathrm{x}\text{-}2$ tiene función inversa x(y) para todo x real, verificando que $\mathrm{x(\text{-}1)} = 0$. Además, esta función inversa es derivable y verifica que: $\mathrm{x}'(\text{-}1) = \frac{1}{3}$.

21. Calcular el desarrollo de Taylor hasta el orden 4 de la función $y = \sqrt{x}$ en $x = 100$. Emplear este desarrollo para calcular aproximadamente $\sqrt{101}$. Comparar el resultado obtenido con el conseguido con una calculadora.

22. Expresar el desarrollo de Taylor de las siguientes funciones

a) $\operatorname{sen} x$ (en un entorno de $x = 0$). ¿Cuánto vale aprox. $\operatorname{sen}(0.5)$?

b) $\ln(x)$ (en un entorno de $x = 1$). ¿Cuánto vale aprox. $\ln(1.2)$?

c) e^{2x} (en un entorno de $x = 0$). ¿Cuánto vale aprox. $e^{0.2}$?

23. Sea p el precio de un bien y $Q(p)$ la cantidad demandada del mismo a este precio:

a) Si $Q(2) = 25$, y, $Q(2.1) = 22.67$. Calcular aproximadamente cuánto cambia la demanda por unidad de cambio en el precio $\left(\frac{\Delta Q}{\Delta p}\right)$ a partir de $p = 2$.

b) Si la función de demanda es $Q(p) = \frac{100}{p^2}$, calcular la función de demanda marginal y su valor en $p = 2$. Comparar el resultado con el obtenido en el apartado anterior.

24. Un fabricante puede producir radios a un costo de 10€ la unidad y estima que si se venden a x euros cada uno, los consumidores comprarán aproximadamente $80 - x$ radios cada mes. Expresar el beneficio mensual del fabricante como una función del precio x, dibujar la gráfica de esta función y determinar el precio al cual el beneficio del fabricante será mayor. Explicar las intersecciones con los ejes en términos económicos.

25. Sea D la función de demanda de una población en función del nivel de renta r

$$\mathrm{D(r)} = \left(1 - \frac{20}{\mathrm{r}}\right)\ln^2\left(10 - \frac{200}{\mathrm{r}}\right)$$

¿Cuál es el dominio de la función? ¿Cómo se comporta la demanda en este caso para valores de renta cada vez mayores (ilimitadamente grandes)? Esbozar gráficamente la función a partir de $\mathrm{r} = 25$.

26. Una empresa va a lanzar un nuevo producto al mercado. Un estudio indica que la demanda diaria vendrá dada por la expresión

$$\mathrm{q} = \mathrm{D(p)} = \frac{1000000}{\mathrm{p}^2}$$

El coste unitario de fabricación es de 20 € y hay un coste fijo de 2000 €. Se pide:

a) Obtener la función de beneficios diarios de la empresa en términos del precio de venta (entendiendo que la cantidad diaria *q* que fabricará la empresa coincide con la demanda esperada)

b) Calcula el precio mínimo p_0 para el cuál se puede comenzar a vender el producto con beneficios positivos, y el precio máximo p_1 a partir del cual el beneficio vuelve a ser negativo.

c) Calcula qué precio le conviene fijar a la empresa para obtener el máximo beneficio.

27. El suministro de un artículo de consumo *y* está relacionado con el precio x por la ecuación

$y = a + b\sqrt{x - c}$ en la cual $a > 0, b > 0$ y $c > 0$ son constantes determinadas. Demostrar que la curva de suministro es creciente para todos los valores de $x > c$. Trazar la curva para $x \geq c$.

28. En cierta industria el costo total de producir *x* unidades de un producto está expresado por la función $C(x) = \sqrt{ax + b}$ en la cual $a, b > 0$ son constantes determinadas. Demostrar que la curva del costo promedio, definida por $CMe(x) = \frac{C(x)}{x}$ es decreciente cuando aumenta x. Trazar la curva para $x > 0$.

29. Sea $\mathrm{C(x)} = \mathrm{x}^3 - 2\mathrm{x}^2 + \mathrm{x}$ la función de costes de una empresa, donde x indica la cantidad producida, definida para $\mathrm{x} > 1$, $\mathrm{C} \geq 0$.

a) Representa gráficamente la función de costes y la función de producción, $\mathrm{x(C)}$.

b) ¿Se puede obtener una expresión exacta para $\mathrm{x(C)}$?

c) Calcular $\mathrm{x}'(\mathrm{C})$ y $\mathrm{x}''(\mathrm{C})$.

d) Calcular una expresión aproximada para $\mathrm{x(C)}$ cerca de $\mathrm{C} = 12$.

30. Un economista que estudia varios modelos para representar la relación entre el precio p y la demanda x para diversos artículos de consumo obtiene lo siguiente:

Algodón en EE.UU.: $p \cdot x^{\frac{1}{2}} = 0.11$; Mantequilla en Estocolmo: $x \cdot p^{1/4} = 38$

Hallar los ingresos marginales respectivos.

31. Si el costo de producción de x unidades de un producto viene expresado por $C(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 5$, se pide:

a) ¿Cuál es la función de coste medio?

b) ¿Cuál es la función de coste marginal?

c) ¿Siempre que aumenta la producción aumenta el coste?

d) ¿Dónde se cortan las gráficas de a y b?

32. Si la función de ingreso total en la producción de x unidades de un producto se expresa como:

$$\mathrm{I(x)} = 3 + 5\sqrt{\mathrm{x\text{-}1}}, \quad 2 \le \mathrm{x} \le 26$$

a) ¿Cuál es la función precio-demanda?

b) ¿Cuál es la función de ingreso marginal?

c) ¿Para qué producción se hacen máximos los ingresos? ¿Qué precio se tiene en esta situación?

33. La relación precio-demanda de un artículo viene dada por $x^2 + p^2 = 100$, en la que hay una demanda de $100x$ cuando el precio es p (nótese que x no es la demanda sino el 1% de la demanda). Se pide obtener:

a) La función de ingreso total.

b) La función de ingreso marginal.

34. Dadas las siguientes funciones de demanda de un bien, obtener las elasticidades para un precio p=5 e interpretar el resultado:

a) $q = 110 - 2p - 3p^2$ **b)** $q = \frac{10}{p^3}$

35. La función de demanda para un bien particular está dada por la expresión $y = f(x) = \sqrt{(20 - x)/2}$ para $0 \le x \le 20$ donde y es el precio por unidad y x el número de unidades demandadas. Considérese el punto $x = 12, y = 2$. Si el precio disminuye en un 1%, determinar el incremento correspondiente a la cantidad demandada y una aproximación a la elasticidad de la demanda en el punto $x = 12,\ y = 2$. Comparar esa aproximación con la elasticidad exacta de la demanda en el punto indicado.

36. La demanda de margarina está relacionada con el precio de la mantequilla por la expresión $q = 5 + 2\sqrt{p}$ donde q es la cantidad demandada de margarina (en cientos de kilos) y p el precio de la mantequilla (en u.m. por kilo). Calcular, sin utilizar la derivada, la elasticidad de la demanda de margarina cuando el precio de la mantequilla varía de 0.81 u.m. a 1.00 u.m. el kilo.

37. La función precio-demanda para un bien particular está dada por la expresión $q(p) = \frac{2000}{p^3}$ que relaciona la cantidad q demandada del bien con su precio unitario p. Se pide:

a) ¿Un aumento (disminución) del precio hace disminuir (aumentar) siempre la cantidad demandada? Justificar la respuesta matemáticamente.

b) ¿Cuál es la función de ingreso total $I(p)$? Utilizarla para calcular $I(10)$. Interpretar el resultado.

c) ¿Cuál es la función de ingreso medio $IMe(p)$? Interpretar el resultado.

d) ¿Cuál es la función de ingreso marginal $IMg(p)$? Utilizarla para calcular la tasa de cambio de la función de ingreso cuando $p = 10$. Interpretar el resultado.

e) Representar gráficamente las funciones de los apartados b, c y d.

f) ¿Cuánto vale la elasticidad puntual en $p = 10$, $\varepsilon_{q|p}(p = 10)$? Interpretar económicamente el resultado.

Volver al índice

38. Una empresa que va a lanzar un nuevo producto al mercado estima que la función de demanda vendrá dada por la expresión

$$q(p) = 30p^{-\frac{1}{3}}-6,$$

donde p es el precio unitario del bien y q el número de unidades demandadas.

- **a)** Estudiar dominio (matemático y económico), asíntotas (horizontales/verticales), crecimiento/decrecimiento y concavidad/convexidad de la función. Representarla gráficamente en su dominio económico.
- **b)** Calcular la elasticidad de la demanda para un precio $p = 27$ e interpretar su significado.
- **c)** Expresar los ingresos de la empresa como función del número de unidades demandadas ($I(q)$) y calcular la función de ingreso marginal $IMg(q)$.
- **d)** Estudiar cuál es el máximo ingreso de la empresa y en qué nivel de demanda se obtiene.
- **e)** ¿Se puede afirmar que el ingreso marginal disminuye al disminuir la demanda del producto?

39. Si la función $I(p) = \ln(-20 + 21p - p^2)$ determina el ingreso diario en miles de € de una empresa en función del precio p unitario en € del bien producido. Se pide:

- **a)** ¿Cuál es el dominio de la función de ingresos? Calcular $I(8)$ e interpretar el resultado.
- **b)** ¿Cuál es la función de ingreso medio $IMe(p)$? Calcular e interpretar $IMe(8)$.
- **c)** ¿Cuál es la función de ingreso marginal $IMg(p)$? Calcular $IMg(8)$ e interpretar el resultado. ¿Existe algún valor para el precio que hace máximo el ingreso? En caso afirmativo, ¿cuál?, ¿sería un máximo global?
- **d)** ¿Cuánto vale la elasticidad puntual $\varepsilon_{I|p(p=8)}$? Interpretar económicamente el resultado.
- **e)** ¿Un aumento (disminución) del precio hace disminuir (aumentar) siempre el ingreso? ¿Es cierto que al aumentar siempre el precio el ingreso marginal disminuye?
- **f)** Si hoy ($t = 0$) se tiene un precio de 8 €, y cuando transcurren t días el precio viene dado por la función $p(t) = 8 + 2t + t^2$, utilizar el análisis marginal para estimar cuanto se incrementaría el ingreso mañana.

EJERCICIOS RESUELTOS TEMA 1

1. Supóngase que el costo en euros de fabricar hasta q unidades de determinado artículo está dado por la función $C(q) = q^3 - 30q^2 + 500q + 200$.
a) Calcular el costo de producir hasta 10 unidades del artículo.
b) Calcular el costo de producir la décima unidad.

a)

$$C(10) = 10^3 - 30 \cdot 10^2 + 500 \cdot 10 + 200 = 3200 \text{ u.m.}$$

b)

$$C(10) - C(9) = 3200 - 2999 = 201$$

2. a) Hallar la función compuesta $f(x-1)$ si $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} + 5$

$$f(x-1) = 3(x-1)^2 + \frac{1}{x-1} + 5$$

2. b). El número de viviendas (en millones) construidas por año, N, depende de la tasa de interés r de acuerdo con la expresión $N(r) = \frac{1}{2(1+100r^2)}$. La tasa de interés está en el 12% y se predice que disminuirá en los siguientes 2 años al 8% de acuerdo con la expresión

$$r(t) = 0.12 - \frac{0.08t}{t+24} \text{ ,}$$

siendo t el tiempo en meses a partir de este momento. Expresar N como función de t y calcular su valor para $t = 6$.

$$N(r) = \frac{1}{2(1+100r^2)}$$

$$r(t) = 0.12 - \frac{0.08t}{t+24}$$

¿Cuántas viviendas se construyen el sexto mes?

$r(6) = 0.12 - \frac{0.08 \cdot 6}{6+24} = 0.104$ (¿tasa de interés?)

$N(0.104) = \frac{1}{2(1+100\cdot(0.104)^2)} \approx 0.2401998 \rightarrow$ *¿Cuántas viviendas son realmente?*

Expresar N como función de t: *¿Qué tipo de función debemos utilizar?*

$$N\big(r(t)\big) = N(t) = \frac{1}{2\left(1 + 100\left(0.12 - \frac{0.08\,t}{t+24}\right)^2\right)}$$

¿Cuántas viviendas se construyen el sexto mes?

$$N(6) = \frac{1}{2\left(1 + 100\left(0.12 - \frac{0.08 \cdot 6}{t+24}\right)^2\right)} \approx 0.2401998$$

Con los resultados anteriores, ¿podrías responder cuántas viviendas se construyen en el décimo mes? y ¿en 2 años?
Si suponemos que el comportamiento de la tasa de interés se mantiene a largo plazo, ¿cuál será el valor aproximado del número de viviendas a largo plazo?

$$\lim_{x\to\infty} N(t) = \cdots = 1/(2.32) \approx 0.431034$$

3. La demanda x de cierto bien está dada por $x = 2000 - 15p$, siendo p el precio por unidad. El ingreso mensual obtenido por las ventas viene dado por $I = 2000p - 15p^2$. ¿Cómo depende I de x?

Ya vimos que en general el ingreso viene dado por:

$$I = I(p, x) = p \cdot x$$

Igualando las dos fórmulas que tenemos del ingreso: $I = 2000p - 15p^2 = p \cdot x$

Despejando nos queda la función demanda-precio: $x = 2000 - 15p$

¿Cómo conseguimos que el ingreso dependa únicamente de la demanda? $I(x) = ?$

---

4. Un estudio ambiental en cierta comunidad suburbana revela que el nivel medio diario de monóxido de carbono en el aire será $C(p) = 0.5p + 1$ partes por millón cuando la población sea p miles. Se estima que dentro de t años la población de la comunidad será $p(t) = 10 + 0.1t^2$ miles.

a) Expresar el nivel de monóxido de carbono en el aire como una función del tiempo.

b) ¿Cuándo llegará a 6.8 partes por millón el monóxido de carbono?

---

a)

$$C(t) = C(p(t)) = C(10 + 0.1t^2) = 0.5(10 + 0.1t^2) + 1 = 6 + 0.05t^2$$

b)

$$6.8 = 6 + 0.05t^2 \Longrightarrow 6.8 - 6 = 0.05t^2 \Longrightarrow \frac{0.8}{0.05} = t^2$$

$$\Longrightarrow t^2 = 16 \Longrightarrow t = \pm 4 \Longrightarrow t = +4$$

---

5. Un club acepta ofrecer un banquete a los 100 primeros huéspedes que se inscriban a un precio de 15€ cada uno y a los huéspedes adicionales a 20€ cada uno. Exprese el coste del banquete en función de los huéspedes.

Este problema es un ejemplo de una aplicación práctica del concepto de función a trozos. ¿Eres capaz de completar los interrogantes?

$$C(x) = \begin{cases} ? & \text{si } x \leq 100 \\ ?? & \text{si } x > 100 \end{cases}$$

---

6. Sabiendo que el equilibrio de mercado tiene lugar cuando la cantidad ofertada coincide con la demandada ($Q_S = Q_D$), determine el precio y cantidad de equilibrio en los siguientes mercados:

a) $Q_S = -20 + 3p \quad Q_D = 220 - 5p$.

Igualamos la demanda con la oferta:

$$-20 + 3p = 220 - 5p$$

Resolvemos la ecuación y obtenemos el punto de equilibrio:

$$8p = 240 \Longrightarrow p^* = \frac{240}{8} = 30$$

Sustituimos en la función de oferta y obtenemos la cantidad de equilibrio:

$$Q^* = Q_S(30) = -20 + 3(30) = 70$$

Lógicamente si sustituimos el precio de equilibrio en la función de demanda nos da la misma cantidad de equilibrio:

$$Q^* = Q_D(30) = 220 - 5(30) = 70$$

Para resolver el ejercicio 8 debemos recordar:

Regla de L'Hopital para funciones derivables. Indeterminaciones: $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Notas: ¡No confundir con derivada del cociente!. Se puede volver a aplicar siempre que el límite que resulte sea otra vez $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ **ó** $\frac{\infty}{\infty}$**.**

7. Calcular los límites de las siguientes funciones:

a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x^4-x^3}{5x^4-x^2}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x^4-x^3}{5x^4-x^2}\right)\overset{\text{Sustituyendo}}{=}\frac{0}{0}$$

Nota: Aunque lo vamos a resolver aplicando la Regla de L'Hopital, ¿sabrías resolver el límite sin L'Hopital, es decir, sacando factor común?

Por L'Hopital sabemos que:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x^4-x^3}{5x^4-x^2}\right)\overset{\text{Regla de L'Hopital}}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{12x^3-3x^2}{20x^3-2x}\right)\overset{\text{Sustituyendo}}{=}\frac{0}{0}$$

Como sigue dando indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ *volvemos a aplicar L'Hopital*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{12x^3-3x^2}{20x^3-2x}\right)\overset{\text{Regla de L'Hopital}}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{36x^2-6x}{60x^2-2}\right)\overset{\text{Sustituyendo}}{=}\frac{0}{-2}=0.$$

b) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^2+2x+1}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^2+2x+1}\overset{\text{Sustituyendo}}{=}\frac{\infty}{\infty}$$

Como nos queda una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ *y son funciones polinómicas, podemos resolverlo dividiendo por la máxima potencia, "ley de grados" o Regla de L'Hopital:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^2+2x+1}\overset{\text{Regla de L'Hopital}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4}{2x+2}\overset{\text{Sustituyendo}}{=}\frac{\infty}{\infty}$$

Nos da otra vez indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ *por lo que podemos aplicar la Regla de L'Hopital nuevamente*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^4}{2x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{20x^3}{2}=\infty$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^2}{e^x+1}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2}{e^x+1}\overset{\text{Sustituyendo}}{=}\frac{\infty}{\infty}$$

Vamos a aplicar la Regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+x^2}{e^x+1}\overset{\text{Regla de L'Hopital}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x}{e^x}\overset{\text{Sustituyendo}}{=}\frac{\infty}{\infty}$$

Nos da otra vez indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ *por lo que podemos aplicar la Regla de L'Hopital nuevamente*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x}{e^x}\overset{\text{Regla de L'Hopital}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+2}{e^x}\overset{\text{Sustituyendo}}{=}\frac{\infty}{\infty}$$

Nos vuelve a dar indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ *por lo que podemos aplicar la Regla de L'Hopital otra vez*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2+2}{e^x}\overset{\text{Regla de L'Hopital}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{24x}{e^x}\overset{\text{Sustituyendo}}{=}\frac{\infty}{\infty}$$

Nos da otra vez indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ *por lo que podemos aplicar la Regla de L'Hopital nuevamente*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{24x}{e^x}\overset{\text{Regla de L'Hopital}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{24}{e^x}\overset{\text{Sustituyendo}}{=}\frac{24}{\infty}=0$$

d) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{0}{0}$$

Vamos a aplicar la Regla de L'Hopital (¿da lo mismo que si multiplicas y divides por $\sqrt{x}+1$ *?)*

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\overset{\text{Regla de L'Hopital}}{=}\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right)\overset{\text{Hacemos el cociente y luego sustituimos}}{=}\lim_{x\to1}\left(2\sqrt{x}\right)=2$$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-2}$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-2}\overset{\text{Sustituyendo}}{=}\infty-\infty$$

La indeterminación es $\infty-\infty$ ***luego no podemos aplicar L'Hopital****. En este caso, es mejor multiplicar y dividir por el "conjugado":*

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-2}\right)\cdot\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-2}\right)}{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1-(3x-2)}{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\left(\sqrt{3x+1}+\sqrt{3x-2}\right)}=\frac{3}{\infty}=0$$

f) $\lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x}$ (¿existe el límite?)

$$\lim_{x\to 0} e^{-1/x} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-1/x} = e^{-\infty} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} e^{-1/x} = e^{\infty} = \infty \end{cases}$$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} x \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \overset{\text{Sustituyendo}}{=} \infty\cdot 0$$

Sabemos que las indeterminaciones del tipo $\infty\cdot 0$ *se pueden convertir en* $\frac{0}{0}$ *ó* $\frac{\infty}{\infty}$ *y luego aplicamos la Regla de L'Hopital:*

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x} \overset{\text{Sustituyendo}}{=} \frac{0}{0}$$

Aplicando la Regla de L'Hopital nos queda:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}} \overset{\text{Simplificando}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

Nota: ¿Sabrías llegar al mismo resultado, usando: $b\cdot\ln a = \ln a^b$ *y que* $e = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ *?*

h) $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x - 1)$

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot(\ln x - 1) \overset{\text{Sustituyendo}}{=} 0\cdot\infty$$

Sabemos que las indeterminaciones del tipo $0\cdot\infty$ *se pueden convertir en* $\frac{0}{0}$ *ó* $\frac{\infty}{\infty}$ *y luego aplicamos la Regla de L'Hopital*

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot(\ln x - 1) = \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x - 1)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{Sustituyendo}}{=} \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando la Regla de L'Hopital nos queda:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x - 1)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} \overset{\text{Simplificando}}{=} \lim_{x\to 0^+}(-x) \overset{\text{Sustituyendo}}{=} 0$$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ \nexists & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = -1$$

j) $\lim_{x\to 0} f(x);\ f(x)=\begin{cases} |x| & x\le 0 \\ x^3+1 & x>0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 0}|x|=0 & \text{si } x<0 \\ \lim_{x\to 0} x^3+1=1 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

¡No existe el límite! Únicamente hay límite por la derecha y la izquierda, pero distintos.

k) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+5}\right)^{3x+2}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+5}\right)^{3x+2}=1^{\infty}$$

Indeterminación del número e

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+5}\right)^{\frac{(x+5)(3x+2)}{(x+5)}}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x+5}\right)^{x+5}\right)^{\frac{(3x+2)}{(x+5)}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x+5}\right)^{x+5}\right)^{\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+2)}{(x+5)}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{(3x+2)}{(x+5)}}=e^3$$

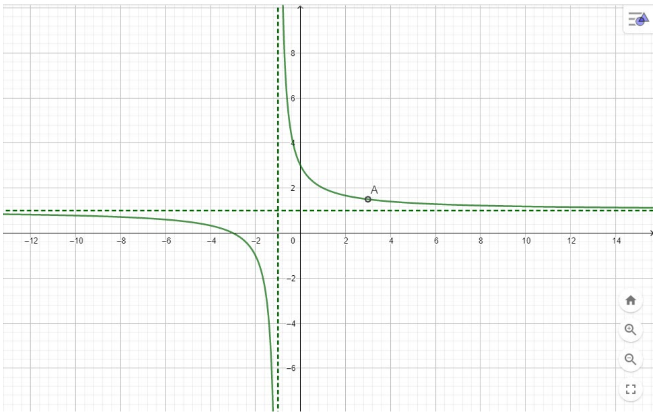
---

8. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones clasificando sus puntos de discontinuidad:

a) $f(x)=\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$

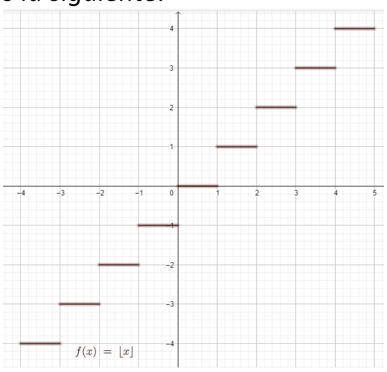
$$x^2-2x-3=0\to x=-1, x=3\to \text{Dom } f(x)=\mathbb{R}-\{x=3, x=-1\}$$

Entonces $f(x)$ es continua en todos los puntos de su dominio $\mathbb{R}-\{x=3, x=-1\}$. *¿Podrías obtener que en $x=3$ hay una discontinuidad evitable y en $x=-1$ la función tiene una asíntota?*



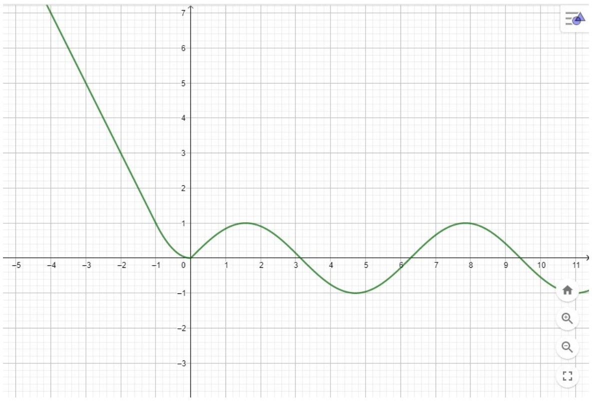
b) $y=f(x)=\mathrm{E}[x]$

La gráfica de la función parte entera es la siguiente:



Es una función continua en todos los reales excepto los números enteros: $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ y las discontinuidades son de salto finito.

c) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x\geq 0 \\ x^2 & \text{si} -1\leq x<0 \\ -2x-1 & \text{si } x<-1 \end{cases}$



La función trigonométrica sen x es continua en $\mathbb{R}$

Polinomio de grado dos, x^2 es continuo en $\mathbb{R}$

Polinomio de grado uno, $-2x-1$ es continuo en $\mathbb{R}$

Faltaría estudiar $x=0$ y $x=-1$.

¿Es continua en $x=0$?

i) Existe $f(0)=\operatorname{sen} 0=0$

ii) $\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x=\operatorname{sen} 0=0 \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x^2=0^2=0 \end{cases} \Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} f(x)=0$

iii) $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$

Por tanto, la función a trozos es continua en $x=0$.

¿Es continua en $x=-1$?

i) Existe $f(-1)=(-1)^2=1$

ii) $\lim_{x\to -1} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+} x^2=(-1)^2=1 \\ \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-} -2x-1=1 \end{cases} \Rightarrow \exists \lim_{x\to -1} f(x)=1$

iii) $\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)=1$

Por tanto, la función a trozos es continua en $x=-1$.

Conclusión: $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$

d) $f(x)=\ln(x^2-3x+2)$

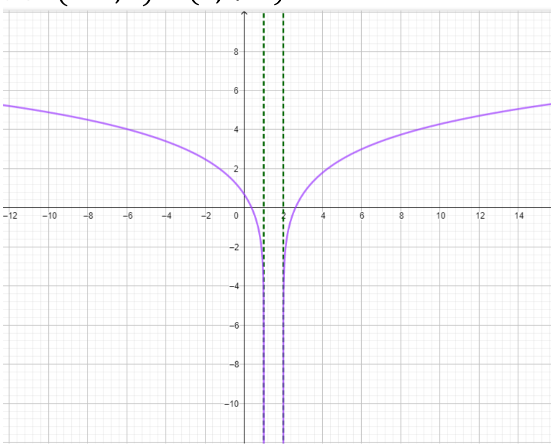
Sabemos que el logaritmo no puede tomar valores negativos o cero. Estudiamos primero donde se hace cero x^2-3x+2 y luego veremos su signo:

$$x^2-3x+2=0\rightarrow x=1, x=2$$

$$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$$

¿Sabrías estudiar el signo de x^2-3x+2? y concluir que en el intervalo $[1,2]$ la función toma valores menores o iguales que cero y que en los intervalos $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ toma valores positivos.

Por tanto, la función $\ln(x^2-3x+2)$ no existe en el intervalo $[1,2]$ y su dominio es $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$. Podemos concluir que la función es continua en $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$.



9. Calcular las derivadas de primer y segundo orden de las siguientes funciones:

a) $y = f(x) = 5 \Longrightarrow y' = f'(x) = 0$

b) $y = f(x) = k\ (k \in \mathbb{R}) \Longrightarrow y' = f'(x) = 0$

c) $y = f(x) = k \cdot x \Longrightarrow y' = f'(x) = k$

d) $y = f(x) = 5x^2 + 3x + 2 \Longrightarrow y' = f'(x) = 10x + 3$

e) $y = f(x) = (3x+1)^4 \Longrightarrow y' = f'(x) = 12 \cdot (3x+1)^3$

f) $y = f(x) = e^x \Longrightarrow y' = f'(x) = e^x$

g) $y = f(x) = e^{-x} \Longrightarrow y' = f'(x) = -e^{-x}$

h) $y = f(x) = e^{x^2} \Longrightarrow y' = f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$

i) $y = f(x) = e^{1/x} \Longrightarrow y' = f'(x) = e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

j) $y = f(x) = \ln((x^2+1)^5) \Longrightarrow y' = f'(x) = \frac{10x}{x^2+1}$

k) $y = f(x) = (x-2)e^x \Longrightarrow y' = f'(x) = e^x(x-1)$

l) $y = f(x) = (x^2+2)\ln x \Longrightarrow y' = f'(x) = 2x\ln x + (x^2+2) \cdot \frac{1}{x}$

m) $y = f(x) = \frac{x}{x^2+1} \Longrightarrow y' = f'(x) = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

n) $y = f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \Longrightarrow y' = f'(x) = \frac{x^3+3x^2}{(x+1)^3}$

o) $y = f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \Longrightarrow y' = f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

p) $y = f(x) = \frac{\ln x}{x+2} \Longrightarrow y' = f'(x) = \frac{x+2-x \cdot lnx}{x(x+2)^2}$

---

11. Probar que la función $y = 3x^3 - 6x^2 + 4x$ es creciente para todo valor de $x \in \mathbb{R} - \{2/3\}$.

Si derivamos tenemos $y' = 9x^2 - 12x + 4$

Veamos el signo de la derivada, para ello calculamos las raíces

$$9x^2 - 12x + 4 = 0 \to x = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Obtenemos como raíz doble $x = \frac{2}{3}$

Luego si $x \neq \frac{2}{3}$*, tenemos que* $y' = 9x^2 - 12x + 4 = 9\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 > 0$ *y por tanto es creciente la función (también lo podíamos obtener utilizando intervalos de crecimiento).*

12. Calcular los valores de a y b para que la función $y(x) = \begin{cases} ax+b & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea continua y derivable.

Vemos que en cada intervalo es continua (ya que $x = 0$ está en el primer tramo)

Faltaría ver si es continua en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = b \\ \lim\limits_{x\to 0^-} ax + b = b \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \textit{Por lo que } b = 1, \textit{ para que la función sea continua en } x = 0.$$

Luego la función queda de la forma: $y(x) = \begin{cases} ax+1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Además, en cada intervalo es derivable: $y'(x) = \begin{cases} a & si\ x < 0 \\ ?? & si\ x = 0 \\ \frac{x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} & si\ x > 0 \end{cases}$

Para el caso $x = 0$ podríamos utilizar la definición de la derivada o suponer que la derivada primera es continua. Utilizaremos la segunda opción:

$$y'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} y'(x) = a$$

$$y'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} y'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos la regla de L'Hopital

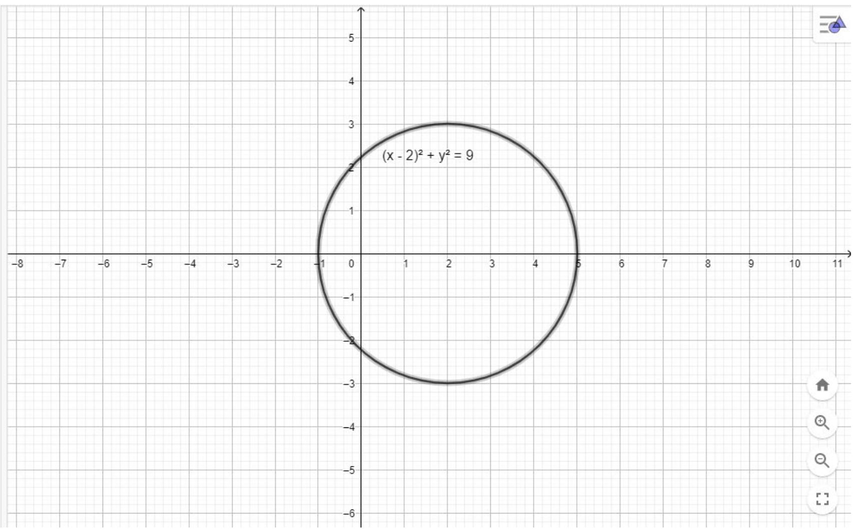
$$y'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x - x \cdot \operatorname{sen} x - \cos x}{2x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen} x}{2} = 0$$

Por tanto, y es derivable en $x = 0$ si y sólo si $a = 0$.

Luego $a = 0, b = 1$ para que la función sea continua y derivable:

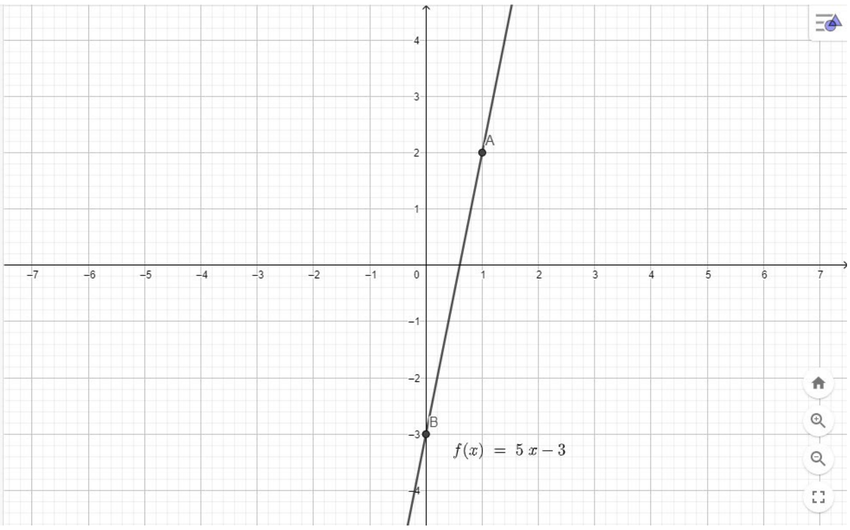
$$y(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

14. Dibujar la curva dada por: $(x-2)^2 + y^2 = 9$. ¿Representa dicha ecuación una función? ¿Por qué?

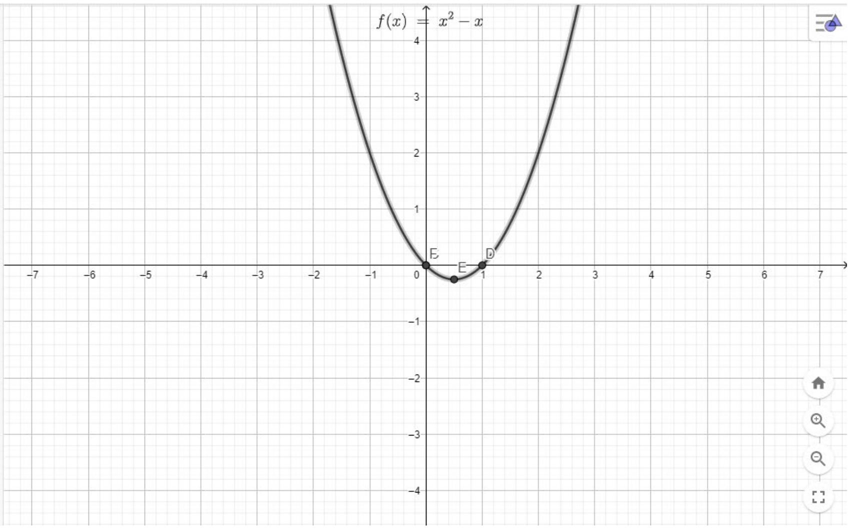


15. Representar gráficamente las siguientes funciones:

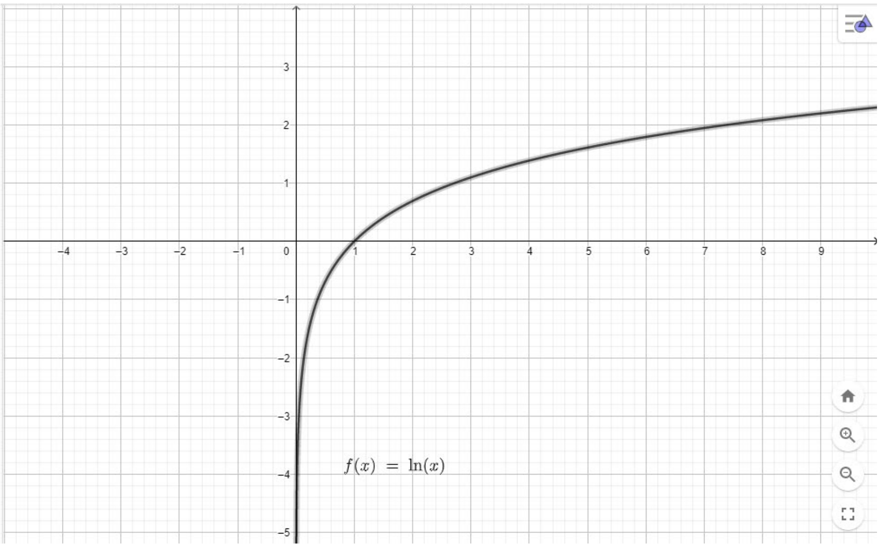
a) $y = f(x) = 5x - 3$



b) $y = f(x) = x^2 - x$



c) $y = f(x) = \ln\ x$



$Dominio = (0, +\infty)$

$\ln 1 = 0$

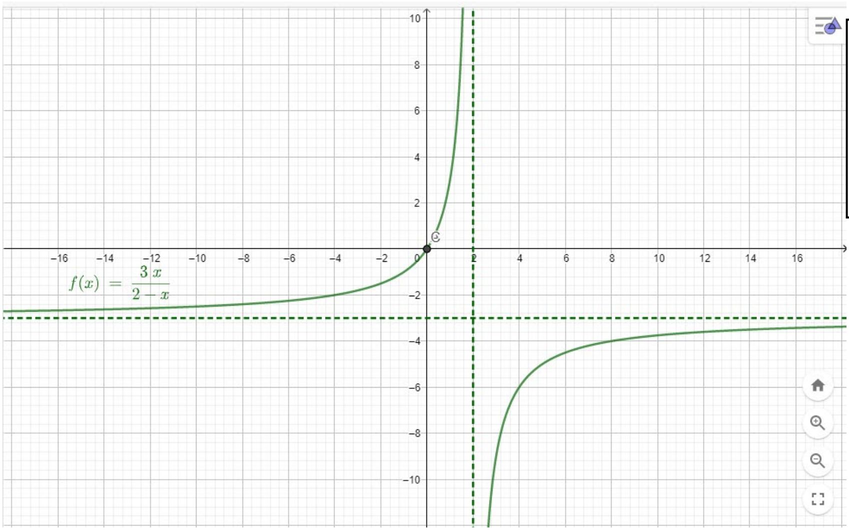
$\ln e = 1$

$e^{\ln x} = x$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

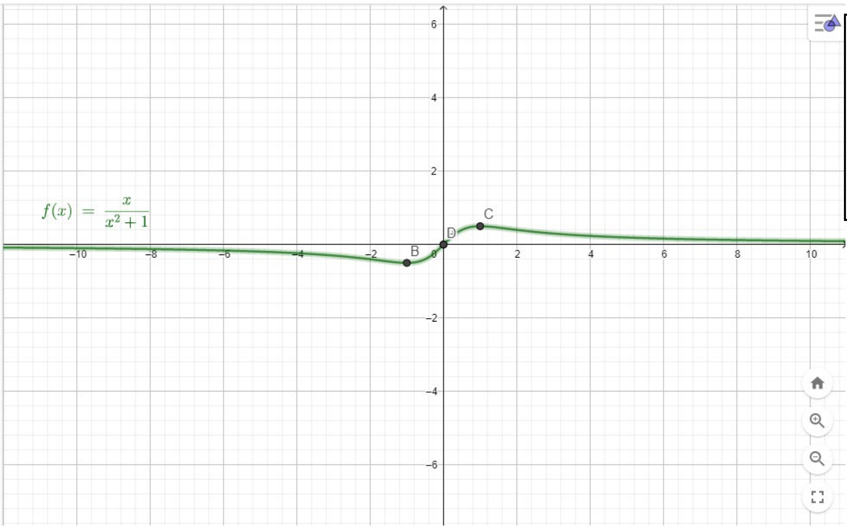
d) $y = f(x) = \frac{3x}{2-x}$



$$y' = f'(x) = \frac{6}{(2-x)^2}$$

$$y'' = f''(x) = \frac{12}{(2-x)^3}$$

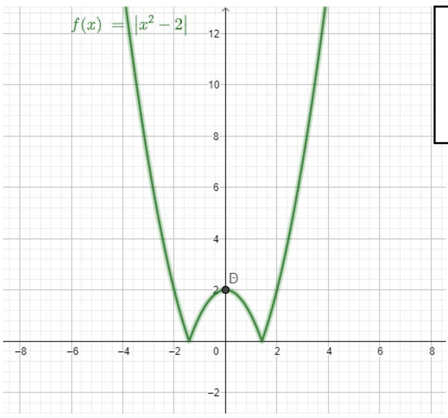
e) $y = f(x) = \frac{x}{x^2+1}$



$$y' = f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

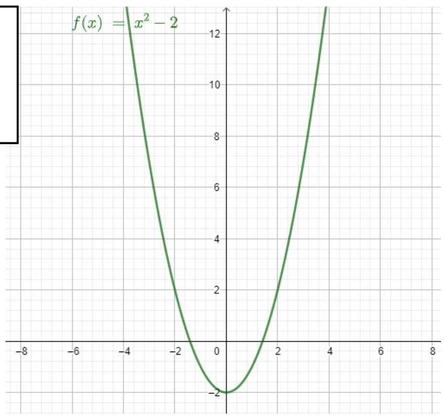
$$y'' = f''(x) = \frac{-6x+2x^3}{(x^2+1)^3}$$

f) $y = f(x) = |x^2 - 2|$



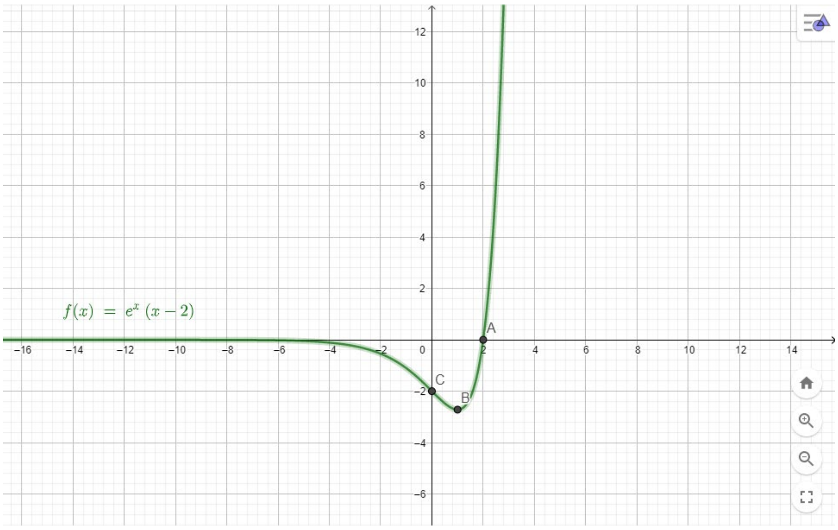
Compara con la gráfica de
$y = f(x) = x^2 - 2$

¿Qué diferencias observas?



Volver al índice

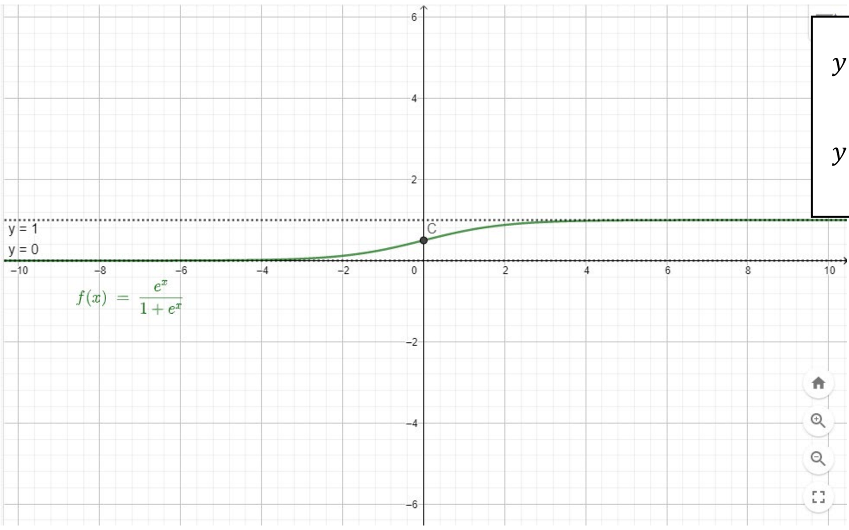
g) $y = f(x) = e^x(x-2)$



$y' = f'(x) = e^x(x-1)$

$y'' = f''(x) = x\,e^x$

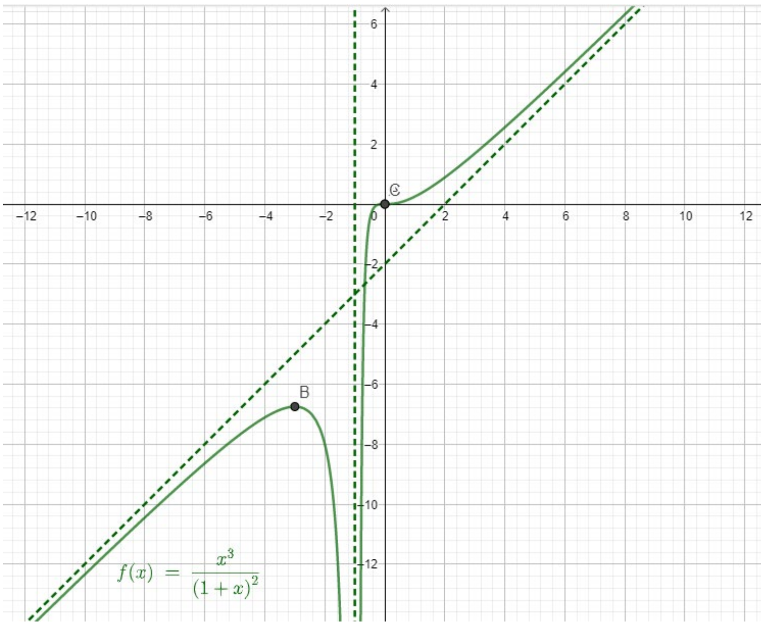
h) $y = f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$



$$y' = f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$y'' = f''(x) = \frac{e^x - e^x e^x}{(1+e^x)^2}$$

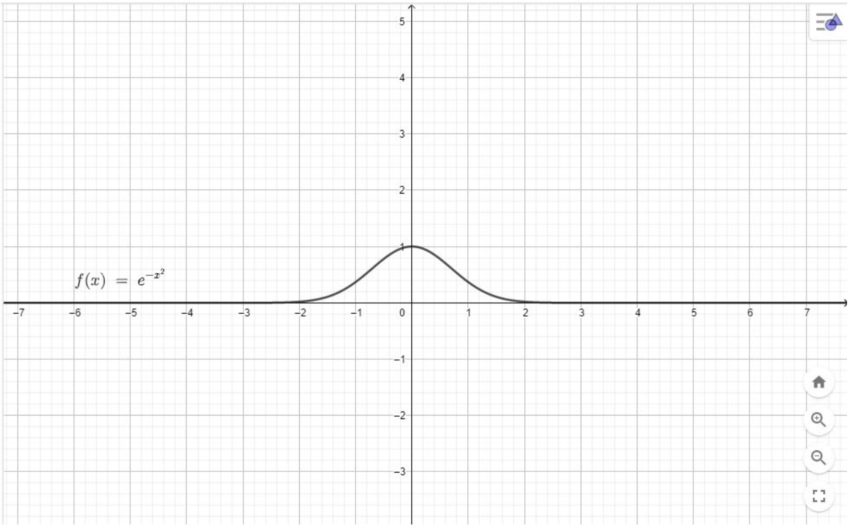
i) $y = f(x) = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$



$$y' = f'(x) = \frac{3x^2 + x^3}{(1+x)^3}$$

$$y'' = f''(x) = \frac{6x}{(1+x)^4}$$

16. Representar gráficamente la función $e^{-x^2/2}$. ¿Qué propiedades importantes se observan?

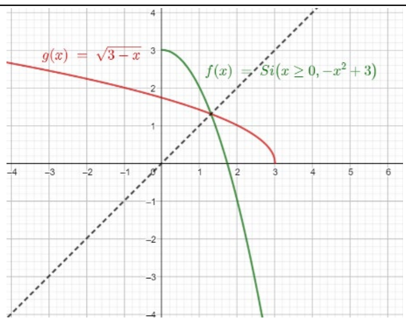


18. ¿Son las siguientes funciones f y g funciones inversas entre sí? En tal caso, representarlas en el mismo plano coordenado. ¿Qué propiedad se observa? $f(x) = -x^2 + 3,\ x \geq 0,\ g(x) = \sqrt{3 - x},\ x \leq 3$

$f\big(g(x)\big) = -\left(\sqrt{3 - x}\right)^2 + 3 = x$

$g\big(f(x)\big) = \sqrt{3 - (-x^2 + 3)} = \sqrt{x^2} = x$

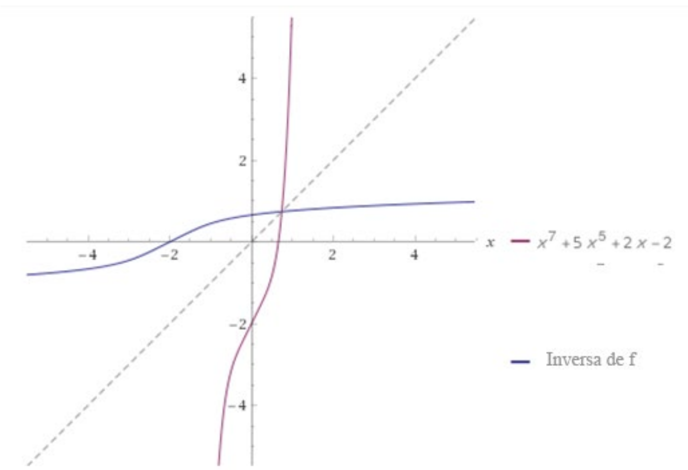
Por lo tanto, son funciones inversas entre sí.



19. ¿La función $f(x) = x^7 + 5x^5 + 2x - 2$ tiene inversa global? En caso afirmativo ¿se puede obtener su expresión $x = g(y)$? ¿Se puede conocer el valor de $g'(-2)$?

$f'(x) = 7x^6 + 25x^4 + 2 > 0 \rightarrow$ Estrictamente creciente$\Rightarrow$ Existe la inversa global.

Sin embargo, no podemos obtener su expresión analítica, aunque si podemos lograr su representación gráfica:



Si $y = -2$ tendremos que $x = 0$ ya que:

$$-2 = f(x) = x^7 + 5x^5 + 2x - 2 \rightarrow x^7 + 5x^5 + 2x = 0 \rightarrow x \cdot (x^6 + 5x^4 + 2) = 0 \rightarrow x = 0$$

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x(y))} \rightarrow g'(-2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

Volver al índice

20. Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) La función $y(x) = x^3 + 4x + 3$ tiene función inversa $x(y)$ para todo x real. Además, esta función inversa es derivable y verifica que: $x'(3) = \frac{1}{4}$.

b) La función $y(x) = e^{2x} + x - 2$ tiene función inversa $x(y)$ para todo x real, verificando que $x(-1) = 0$. Además, esta función inversa es derivable y verifica que: $x'(-1) = \frac{1}{3}$.

a) $y(x) = x^3 + 4x + 3 \to y'(x) = 3x^2 + 4 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ →monótona creciente→ admite inversa global.

Si $y = 3$ tendremos que $x = 0$ ya que: $3 = x^3 + 4x + 3 \to x(x^2 + 4) = 0 \to x = 0$

$$x'(3) = \frac{1}{y'(0)} = \frac{1}{4}$$

b) $y(x) = e^{2x} + x - 2 \to y'(x) = 2e^{2x} + 1 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ →monótona creciente→ admite inversa global.

Si $y = -1$ tendremos que $x = 0$ ya que: $e^0 + 0 - 2 = -1$, por tanto $x(-1) = 0$.

$$x'(-1) = \frac{1}{y'(0)} = \frac{1}{3}$$

Luego son verdaderas las dos afirmaciones.

21. Calcular el desarrollo de Taylor hasta el orden 4 de la función $y = \sqrt{x}$ en $x = 100$. Emplear este desarrollo para calcular aproximadamente $\sqrt{101}$. Comparar el resultado obtenido con el conseguido con una calculadora.

$$y = f(x) = \sqrt{x} \to f(100) = 10$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \to f'(100) = \frac{1}{20}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} \to f''(100) = -\frac{1}{4000}$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}} \to f'''(100) = \frac{3}{8 \cdot 10^5}$$

$$f^{IV)}(x) = \frac{3}{8}\left(-\frac{5}{2}\right)x^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16x^3\sqrt{x}} \to f^{IV)}(100) = -\frac{15}{16\,10^7}$$

<u>Desarrollo de Taylor de orden 4 en un entorno del punto $x = 100$</u>

$$f(x) = \sqrt{x} \approx 10 + \frac{1}{20}(x - 100) - \frac{1}{8000}(x - 100)^2 + \frac{1}{16 \cdot 10^5}(x - 100)^3 - \frac{15}{4! \cdot 16 \cdot 10^7}(x - 100)^4$$

Utilizando el desarrollo de Taylor obtenido tenemos que:

$$\sqrt{101} \approx 10.04987562109$$

Valor exacto (con 11 decimales) utilizando calculadora es:

$$\sqrt{101} = 10.04987562112$$

22. Expresar el desarrollo de Taylor de las siguientes funciones

a) $\operatorname{sen} x$ (en un entorno de $x = 0$). ¿Cuánto vale aprox. $\operatorname{sen}(0.5)$?

b) $\ln(x)$ (en un entorno de $x = 1$). ¿Cuánto vale aprox. $\ln(1.2)$?

c) e^{2x} (en un entorno de $x = 0$). ¿Cuánto vale aprox. $e^{0.2}$?

a) $f(x) = \operatorname{sen} x \to f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$

$f'(x) = \cos x \to f'(0) = \cos 0 = 1$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x \to f''(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0$

$f'''(x) = -\cos x \to f'''(0) = -\cos 0 = -1$

$f^{4)}(x) = \operatorname{sen} x \to f^{4)}(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$

$f^{5)}(x) = \cos x \to f^{5)}(0) = \cos 0 = 1$

Desarrollo de Taylor de orden 5 en un entorno del punto $x = a$

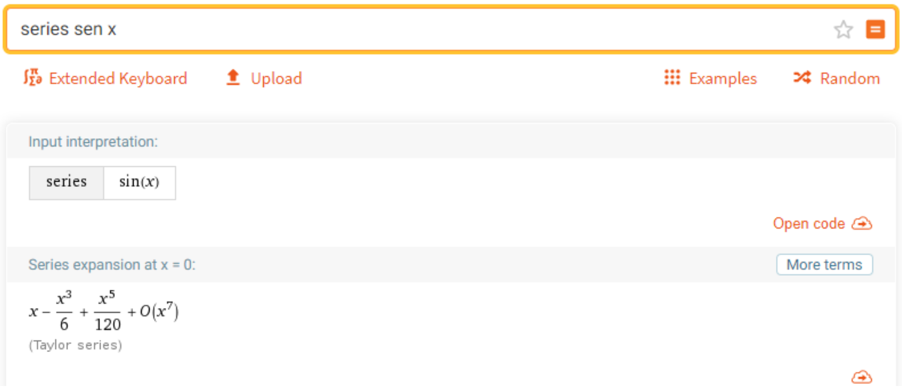
$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \frac{1}{4!}f^{4)}(a)(x-a)^4 + \frac{1}{5!}f^{5)}(a)(x-a)^5$$

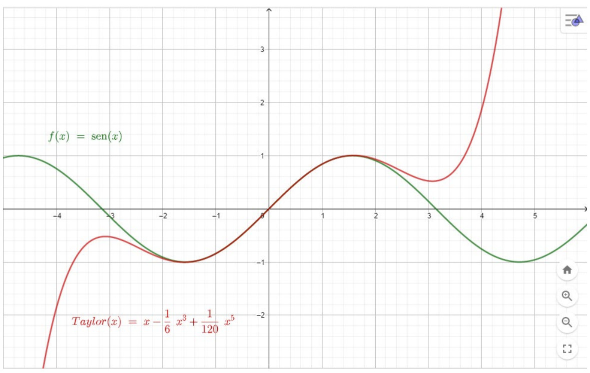
En nuestro caso, $a = 0$:

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{1}{2!}f''(0)(x-0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)(x-0)^3 + \frac{1}{4!}f^{4)}(0)(x-0)^4 + + \frac{1}{5!}f^{5)}(0)(x-0)^5$$

$$f(x) \approx x - \frac{1}{3\cdot 2\cdot 1}x^3 + \frac{1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}x^5$$

$$\boldsymbol{f(x) \approx x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5}$$





¿Cuánto vale aproximadamente $\operatorname{sen}(0.5)$?

Valor **aproximado** utilizando el polinomio de Taylor de orden 5:

$$\boldsymbol{\operatorname{sen}(0.5) \approx 0.5 - \frac{1}{6}(0.5)^3 + \frac{1}{120}(0.5)^3 \approx 0.48020}$$

Valor exacto (con cinco decimales) utilizando calculadora: $\operatorname{sen}(0.5) = 0.47942$

Error cometido=$|0.47942 - 0.48020| = 0.00078$

Volver al índice

b) $\ln(x)$ (en un entorno de $x = 1$). ¿Cuánto vale aprox. $\ln(1.2)$?

$f(x) = \ln x \to f(1) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = 1/x \to f'(1) = 1$

$f''(x) = -1/x^2 \to f''(1) = -1$

$f'''(x) = 2/x^3 \to f'''(1) = 2$

$f^{4)}(x) = -6/x^4 \to f^{4)}(1) = -6$

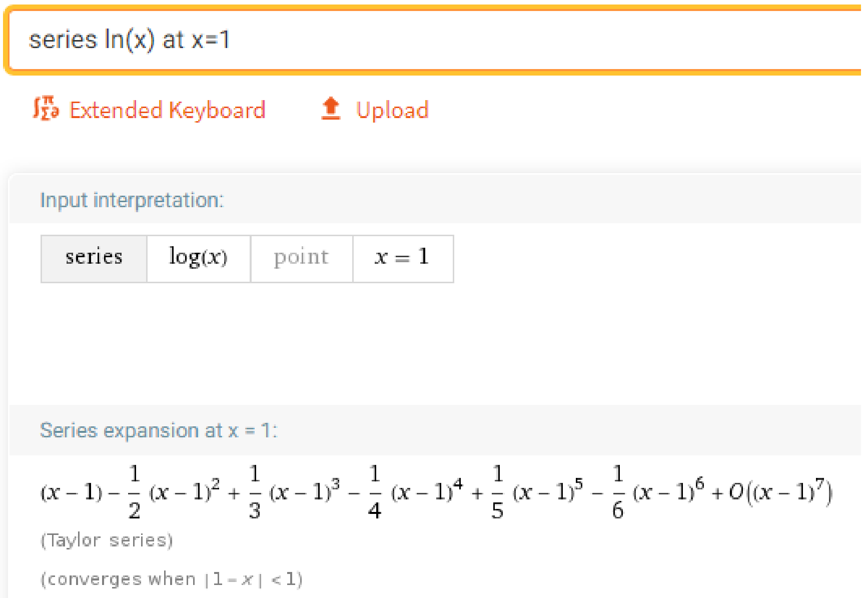
Desarrollo de Taylor de orden 4 en un entorno del punto $x = a$

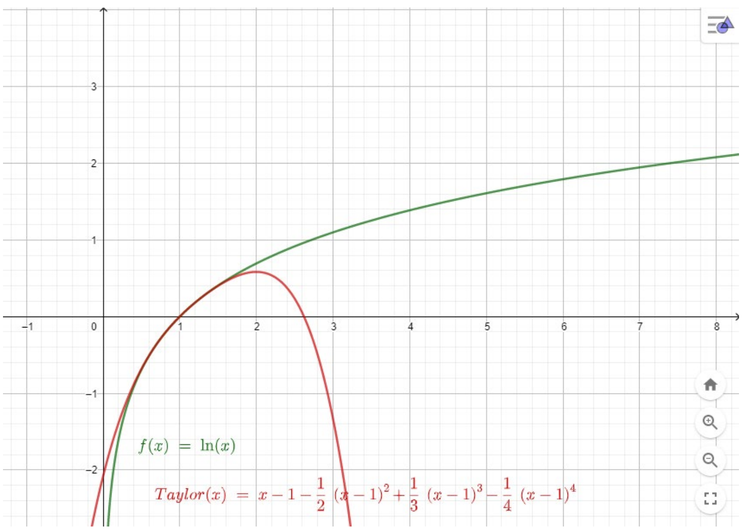
$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3 + \frac{1}{4!}f^{4)}(a)(x-a)^4$$

En nuestro caso, $a = 1$:

$$f(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}f''(1)(x-1)^2 + \frac{1}{3!}f'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}f^{4)}(1)(x-1)^4$$

$$f(x) \approx (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$$





¿Cuánto vale aproximadamente $\ln(1.2)$?

$$\ln(1.2) \approx 0.2 - \frac{1}{2}(0.2)^2 + \frac{1}{3}(0.2)^3 - \frac{1}{4}(0.2)^4 \approx 0.182267$$

Valor exacto (con cinco decimales) utilizando calculadora: $\ln(1.2) = 0.18232$

Error cometido=$|0.18232 - 0.182267| = 0.000053$.

Volver al índice

24. Un fabricante puede producir radios a un costo de 10€ la unidad y estima que si se venden a x euros cada uno, los consumidores comprarán aproximadamente $80-x$ radios cada mes. Expresar el beneficio mensual del fabricante como una función del precio x, dibujar la gráfica de esta función y determinar el precio al cual el beneficio del fabricante será mayor. Explicar las intersecciones con los ejes en términos económicos.

Primero suponemos que todo lo que se produce se vende.

Dos formas:

1) $\text{Beneficio} = \text{Ingreso} - \text{Coste}$

2) $\text{Beneficio} = (\text{nº de radios vendidas}) \cdot (\text{beneficio por radio})$

De las dos formas obtendremos, como es de esperar, la misma función de beneficio:

$$\text{Coste de producir una radio} = 10$$

$$\text{Valor de venta de cada radio} = x$$

$$\text{Beneficio por cada radio} = x - 10$$

$$\text{Cantidad de radios vendidas} = 80 - x$$

$$\text{Ingreso} = (\text{Cantidad de radios vendidas}) \cdot (\text{valor de venta de cada radio}) = (80-x)\cdot x$$

$$\text{Coste} = (\text{Cantidad de radios producidas}) \cdot (\text{coste de producir una radio}) = (80-x)\cdot 10$$

1) $$B(x) = I(x) - C(x) = (80-x)\cdot x - (80-x)\cdot 10 = -x^2 + 90x - 800$$

2) $$\text{Beneficio} = (\text{nº de radios vendidas}) \cdot (\text{beneficio por radio}) =$$

$$= (80-x)\cdot(x-10) = -x^2 + 90x - 800$$

¿Beneficio máximo?

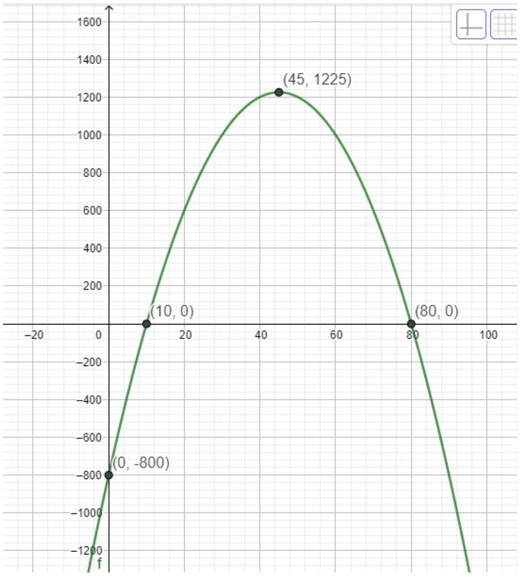
Puntos críticos:

Si $B(x) = -x^2 + 90x - 800$ entonces:

$B'(x) = -2x + 90 = 0 \Longrightarrow x = 45$ punto crítico.

$B''(x) = -2 \Longrightarrow B''(45) = -2 \Longrightarrow x = 45$ hay un máximo relativo (como la función es una parábola negativa es un máximo absoluto o global)

Si $x = 45$ entonces el beneficio máximo será $B(45) = -(45)^2 + 90\cdot 45 - 800 = 1225$.



Puntos de corte con los ejes:

Eje X: Si $x = 0 \Longrightarrow B(0) = -800$, *¿qué significado económico tiene este resultado?*

Eje Y: Si $y = 0 \Longrightarrow -x^2 + 90x - 800 = 0$. Resolvemos la ecuación de segundo grado y obtenemos las raíces $x_1 = 10$, $x_2 = 80$, *¿qué significados económicos tienen estos resultados?*

25. Sea D la función de demanda de una población en función del nivel de renta r

$$D(r) = \left(1 - \frac{20}{r}\right)\ln^2\left(10 - \frac{200}{r}\right)$$

¿Cuál es el dominio de la función? ¿Cómo se comporta la demanda en este caso para valores de renta cada vez mayores (ilimitadamente grandes)? Esbozar gráficamente la función a partir de $r = 25$.

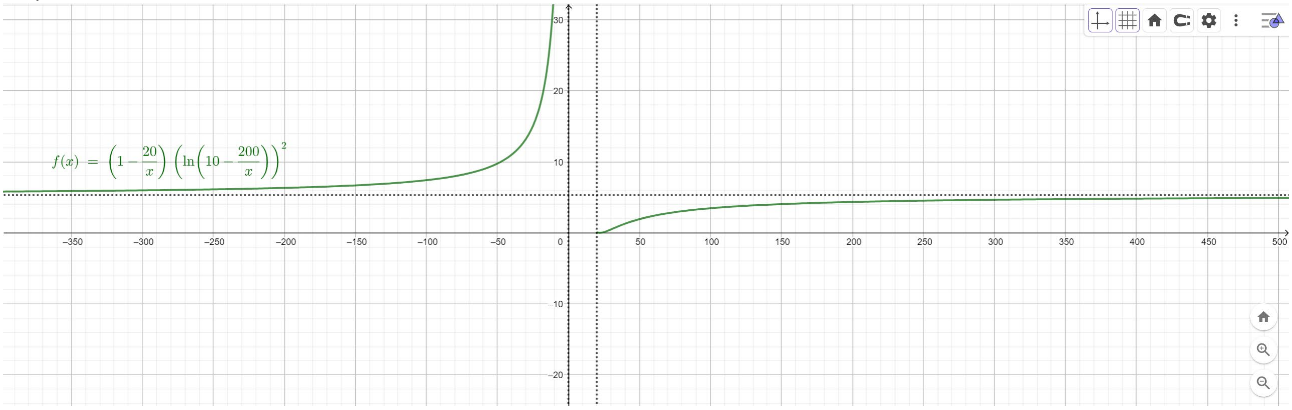
Dominio matemático: $r \neq 0,\ 10 - \frac{200}{r} > 0 \to \text{Dominio matemático} = \{r \in (-\infty, 0) \cup (20, +\infty)\}$

Dominio económico: será únicamente si $r > 20$.

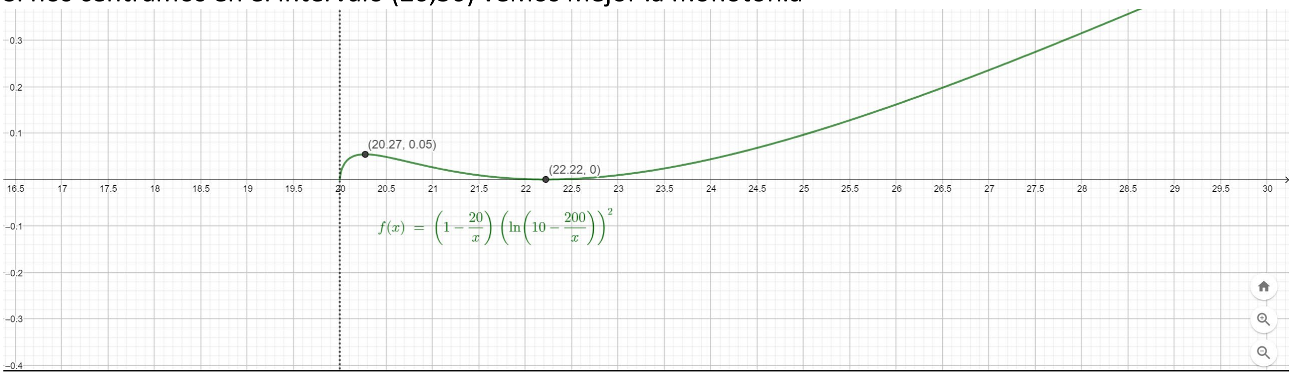
$$\lim_{r\to\pm\infty}\left(1 - \frac{20}{r}\right)\ln^2\left(10 - \frac{200}{r}\right) = 1 \cdot \ln^2 10 \approx 5.30$$

Es decir, en $D \approx 5.30$ hay una asíntota horizontal cuando $r \to +\infty$

Representación en el dominio matemático:



Si nos centramos en el intervalo (20,30) vemos mejor la monotonía



26. Una empresa va a lanzar un nuevo producto al mercado. Un estudio indica que la demanda diaria vendrá dada por la expresión $q = D(p) = \frac{10^6}{p^2}$

El coste unitario de fabricación es de 20 € y hay un coste fijo de 2000 €. Se pide:

a) Obtener la función de beneficios diarios de la empresa en términos del precio de venta (entendiendo que la cantidad diaria q que fabricará la empresa coincide con la demanda esperada)

b) Calcula el precio mínimo p_0 para el cuál se puede comenzar a vender el producto con beneficios positivos, y el precio máximo p_1 a partir del cual el beneficio vuelve a ser negativo.

c) Calcula qué precio le conviene fijar a la empresa para obtener el máximo beneficio.

a) $Beneficios = Ingresos - Costes = p \cdot q - (20q + 2000) = \cdots = \frac{10^6}{p} - \frac{20 \cdot 10^6}{p^2} - 2000$

b) $\frac{10^6}{p} - \frac{20 \cdot 10^6}{p^2} - 2000 > 0 \to 10^6 p - 20 \cdot 10^6 - 2000p^2 > 0 \to 1000p - 20000 - 2p^2 > 0 \to$
$p^2 - 500p + 10000 < 0 \to$si calculamos las raíces obtenemos: $p_1 \approx 20.87,\ p_2 \approx 479.13$

Entonces el intervalo de precios para obtener beneficios positivos es: $p \in (20.87, 479.13)$

c) $B'(p) = \frac{-10^6}{p^2} + \frac{40 \cdot 10^6}{p^3} = 0 \to \cdots \to p = 40$

$B''(40) < 0 \to p = 40$ máximo relativo o local.

29. Sea $C(x) = x^3 - 2x^2 + x$ la función de costes de una empresa, donde x indica la cantidad producida, definida para $x > 1$, $C \geq 0$.

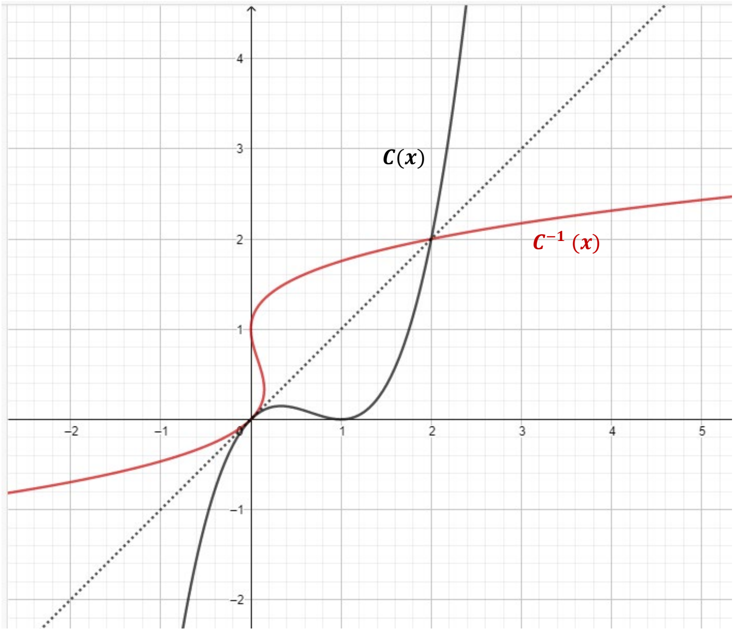
a) Representa gráficamente la función de costes y la función de producción, $x(C)$.

b) ¿Se puede obtener una expresión exacta para $x(C)$?

c) Calcular $x'(C)$ y $x''(C)$.

d) Calcular una expresión aproximada para $x(C)$ cerca de $C = 12$.

a) Vamos a representarlas con el GeoGebra en todo su dominio:



b)

Tanto analíticamente como gráficamente vemos porque no se puede obtener una expresión exacta para $x(C)$. Sin embargo, ¿sabrías demostrar que $x(12) = 3$?

c)

$C(x) = x^3 - 2x^2 + x$

Derivando implícitamente $C = (x(C))^3 - 2\left(x(C)\right)^2 + x(C)$ obtenemos:

$$x'(C) = \frac{1}{3(x(C))^2 - 4x(C) + 1}$$

siempre que $3x^2 - 4x + 1 \neq 0$.

Si volvemos a derivar nos quedará:

$$x''(C) = \frac{-(6x(C)x'(C) - 4x'(C))}{(3(x(C))^2 - 4x(C) + 1)^2}$$

siempre que $3x^2 - 4x + 1 \neq 0$.

d) Utilizando los resultados anteriores podemos obtener: $x(12) = 3,\ x'(12) = \frac{1}{16},\ x''(12) = -\frac{14}{16^3}$

Si y pertenece a un entorno de $C = 12$, el desarrollo de Taylor de orden 2 nos dará:

$$x(y) \approx x(12) + \frac{x'(12)}{1!}(y - 12) + \frac{x''(12)}{2!}(y - 12)^2$$

$$x(y) \approx x(12) + \frac{1}{16}(y - 12) - \frac{7}{16^3}(y - 12)^2$$

donde y pertenece a un entorno de $C = 12$.

32. Si la función de ingreso total en la producción de x unidades de un producto se expresa como

$$I(x) = 3 + 5\sqrt{x-1} \quad 2 \le x \le 26$$

a) ¿Cuál es la función precio-demanda?

b) ¿Cuál es la función de ingreso marginal?

c) ¿Para qué producción se hacen máximos los ingresos? ¿Qué precio se tiene en esta situación?

$I(x) = 3 + 5\sqrt{x-1} \quad 2 \le x \le 26$

$x =$ número de unidades producidas de un producto

$p =$ precio unitario del producto

Sabemos que: $Ingreso\ total = p \cdot x$

a) Como el ingreso total es: $I(x,p) = p \cdot x$, igualamos las funciones:

$$3 + 5\sqrt{x-1} = p \cdot x$$

Entonces despejando el precio obtenemos la función **precio-demanda**:

$$p = p(x) = \frac{3 + 5\sqrt{x-1}}{x} \quad (2 \le x \le 26)$$

b) $I(x) = 3 + 5\sqrt{x-1} \quad 2 \le x \le 26$

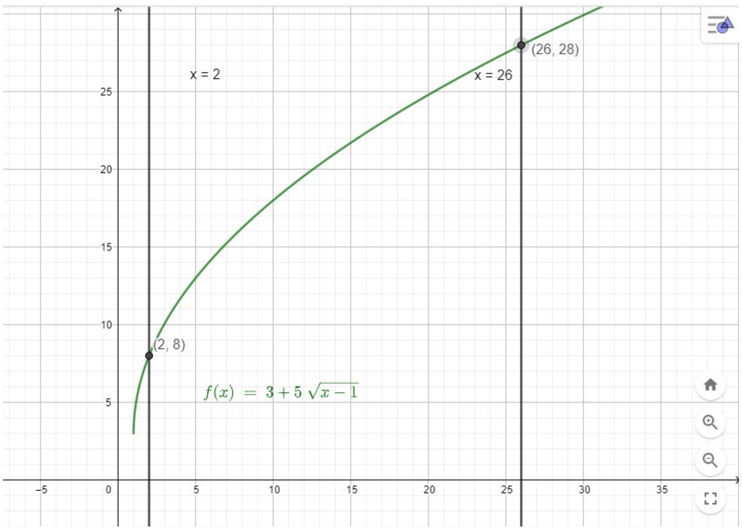
El ingreso marginal será: $I'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x-1}}$

c) $I'(x) = 0 \to \frac{5}{2\sqrt{x-1}} \neq 0 \Rightarrow$¡no hay puntos críticos!

El **Teorema de Weierstrass** nos garantiza que una **función continua** en un **intervalo cerrado** tiene **máximos** y **mínimos absolutos** (**globales**) y se tienen que **elegir** entre los **puntos críticos** y los **extremos del intervalo.**

$$\left.\begin{array}{l} x = \text{punto crítico} \to \text{en este caso no hay} \\ x = 2 \to I(2) = 3 + 5\sqrt{2-1} = 8 \\ x = 26 \to I(26) = 3 + 5\sqrt{26-1} = 28 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = 26 \text{ es la producción que hace el ingreso máximo } (I_{max} = 28).$$

Mira la gráfica de la función ingreso, ¿entiendes la aplicación del Teorema de Weierstrass en este caso?



37. La función precio-demanda para un bien particular está dada por la expresión $q(p) = \frac{2000}{p^3}$ que relaciona la cantidad q demandada del bien con su precio unitario p. Se pide:

a) ¿Un aumento (disminución) del precio hace disminuir (aumentar) siempre la cantidad demandada? Justificar la respuesta matemáticamente.

b) ¿Cuál es la función de ingreso total $I(p)$? Utilizarla para calcular $I(10)$. Interpretar el resultado.

c) ¿Cuál es la función de ingreso medio $IMe(p)$? Interpretar el resultado.

d) ¿Cuál es la función de ingreso marginal $IMg(p)$? Utilizarla para calcular la tasa de cambio de la función de ingreso cuando $p = 10$. Interpretar el resultado.

e) Representar gráficamente las funciones de los apartados b, c y d.

f) ¿Cuánto vale la elasticidad puntual en $p = 10$, $\varepsilon_{q|p}(p = 10)$? Interpretar económicamente el resultado.

---

a)

$$q'(p) = -\frac{6000}{p^4} < 0 \quad (\forall p > 0)$$

Significado del signo de la demanda marginal: $p \uparrow \Longrightarrow q \downarrow$ *(bien ordinario)*

b)

$$I(p) = p \cdot q = \frac{2000}{p^2} \Longrightarrow I(10) = \frac{2000}{10^2} = 20$$

Cuando el precio del bien es 10 u.m., el ingreso total que obtenemos es de 20 u.m.

c)

$$IMe(p) = \frac{I(p)}{p} = \frac{p \cdot q}{p} = q = \frac{2000}{p^3}$$

El ingreso medio con respecto al precio coincide con la cantidad demandada.

d)

$$IMg(p) = I'(p) = -\frac{4000}{p^3}$$

Recordemos que:

$$I'(p) = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta I(p)}{\Delta p} \Longrightarrow I'(p) \approx \frac{\Delta I(p)}{\Delta p} \text{ siempre que } \Delta p \to 0.$$

Es decir, la tasa de variación media (T.V.M.) del ingreso la podemos aproximar por la derivada

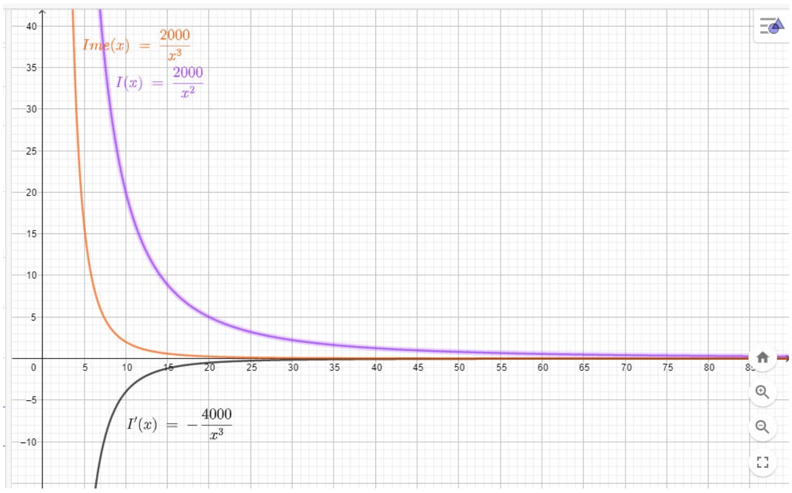
$$(T.V.M.)(p) \equiv \frac{\Delta I(p)}{\Delta p} \approx I'(p)$$

En nuestro caso la tasa de variación media para $p = 10$ se puede estimar por medio de:

$$(T.V.M.)_{|p=10} = \frac{\Delta I(10)}{\Delta p} \approx I'(10) = -\frac{4000}{10^3} = -4$$

Si pensamos en un incremento de precio unitario ($\Delta p = 1$), tendríamos que si el precio $p = 10$ u.m. aumenta en una unidad, entonces el ingreso disminuye aproximadamente en 4 unidades monetarias.

e)



f) *La **función de demanda** es* $q = \frac{2000}{p^3}$. *Si nos piden la elasticidad de la demanda respecto al precio:*
$\mathcal{E}_{q|p} = q'(p) \cdot \frac{p}{q(p)} = -\frac{6000}{p^4} \cdot \frac{p}{\frac{2000}{p^3}} = -3$. *Además si* $p = 10$ *nos resulta también* $\mathcal{E}_{q|p|(p=10)} = -3$.
Por tanto, si el precio $p = 10$ *u.m. aumenta en un 1% entonces la demanda* q *disminuye aproximadamente en un 3%.*

---

39. Una empresa que va a lanzar un nuevo producto al mercado estima que la función de demanda vendrá dada por la expresión

$$q(p) = 30p^{-1/3} - 6 = \frac{30}{p^{1/3}} - 6 = \frac{30}{\sqrt[3]{p}} - 6,$$
$$\left(y = f(x) = 30x^{-1/3} - 6\right)$$

donde p es el precio unitario del bien y q el número de unidades demandadas.

a) Estudiar dominio (matemático y económico), asíntotas (horizontales/verticales), crecimiento/decrecimiento y concavidad/convexidad de la función. Representarla gráficamente en su dominio económico.

Dominio matemático:

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Dominio económico:

$$\text{Dom } q(p) = (0, 125]$$

Asíntotas verticales (matemáticamente):

A.V. en $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{30}{x^{1/3}} - 6\right) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{30}{x^{1/3}} - 6\right) = -\infty$$

Asíntotas verticales (económicamente):

A.V. en $p = 0$ cuando $p \to 0^+$

$$\lim_{p\to 0^+} q(p) = \lim_{p\to 0^+} \left(\frac{30}{p^{1/3}} - 6\right) = +\infty$$

Asíntotas horizontales (matemáticamente):

A.H. en $y = -6$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{30}{x^{1/3}} - 6\right) = -6$$

¿Hay asíntota horizontal desde el punto de vista económico?

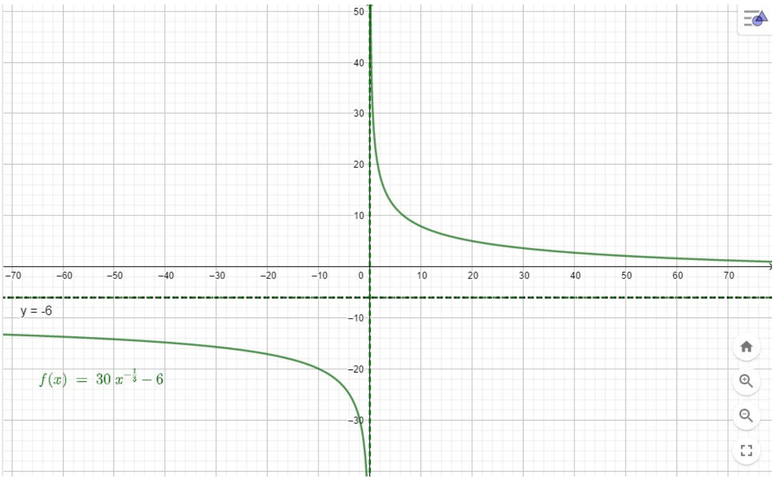
Crecimiento y decrecimiento:

$$q'(p) = -10p^{-4/3} = -\frac{10}{\sqrt[3]{p^4}} < 0 \to q \text{ decreciente en todo su dominio}$$

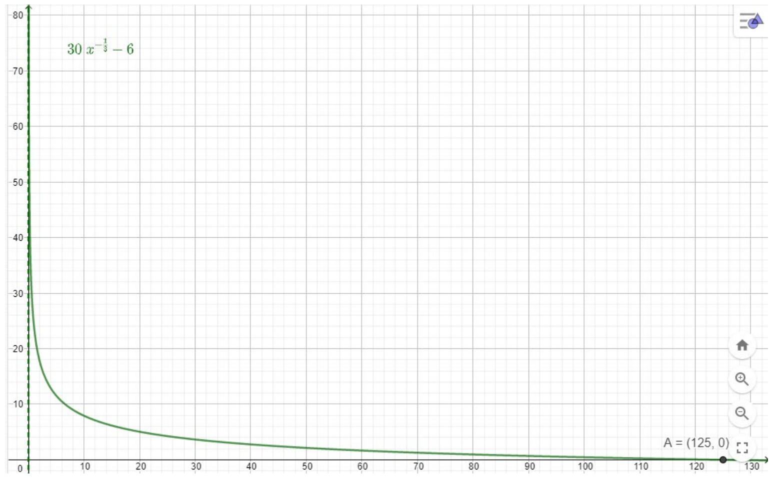
Concavidad y convexidad:

$$q''(p) = \frac{40}{3}p^{-7/3} = \frac{40}{3\sqrt[3]{p^7}}, \text{será positiva siempre que } p \text{ sea positivo}$$

Gráfica dominio matemático:



Gráfica dominio económico:



b) Calcular la elasticidad de la demanda para un precio $p = 27$ e interpretar su significado.

$$\varepsilon_{q|p} = q'(p) \cdot \frac{p}{q(p)}$$

$q(p) = 30p^{-1/3} - 6$
$q'(p) = -10p^{-4/3}$

$$\varepsilon_{q|p|(p=27)} = q'(27) \cdot \frac{27}{q(27)} \approx -0.83$$

A partir de $p = 27$ *, si* $p \uparrow 1\% \Longrightarrow q \downarrow aprox.\ 0.83\%.$

c) Expresar los ingresos de la empresa como función del número de unidades demandadas ($I(q)$) y calcular la función de ingreso marginal $IMg(q)$.

$$I(q) = p \cdot q$$

$$q = 30p^{-\frac{1}{3}} - 6 \rightarrow \ p = p(q) = ? \ \ (\text{¡ función inversa!})$$

Despejando p de la función de demanda nos queda: $p = p(q) = \dfrac{30^3}{(q+6)^3}$

$$I(q) = \frac{30^3}{(q+6)^3} \cdot q = \frac{27000 \cdot q}{(q+6)^3}$$

$$IMg(q) = I'(q) = \cdots = \frac{-54000 \cdot (q-3)}{(q+6)^4}$$

d) Estudiar cuál es el máximo ingreso de la empresa y en qué nivel de **demanda** se obtiene.

$$I(q) = \frac{27000 \cdot q}{(q+6)^3}$$

$$I'(q) = \frac{-54000 \cdot (q-3)}{(q+6)^4} = 0 \rightarrow q = 3$$

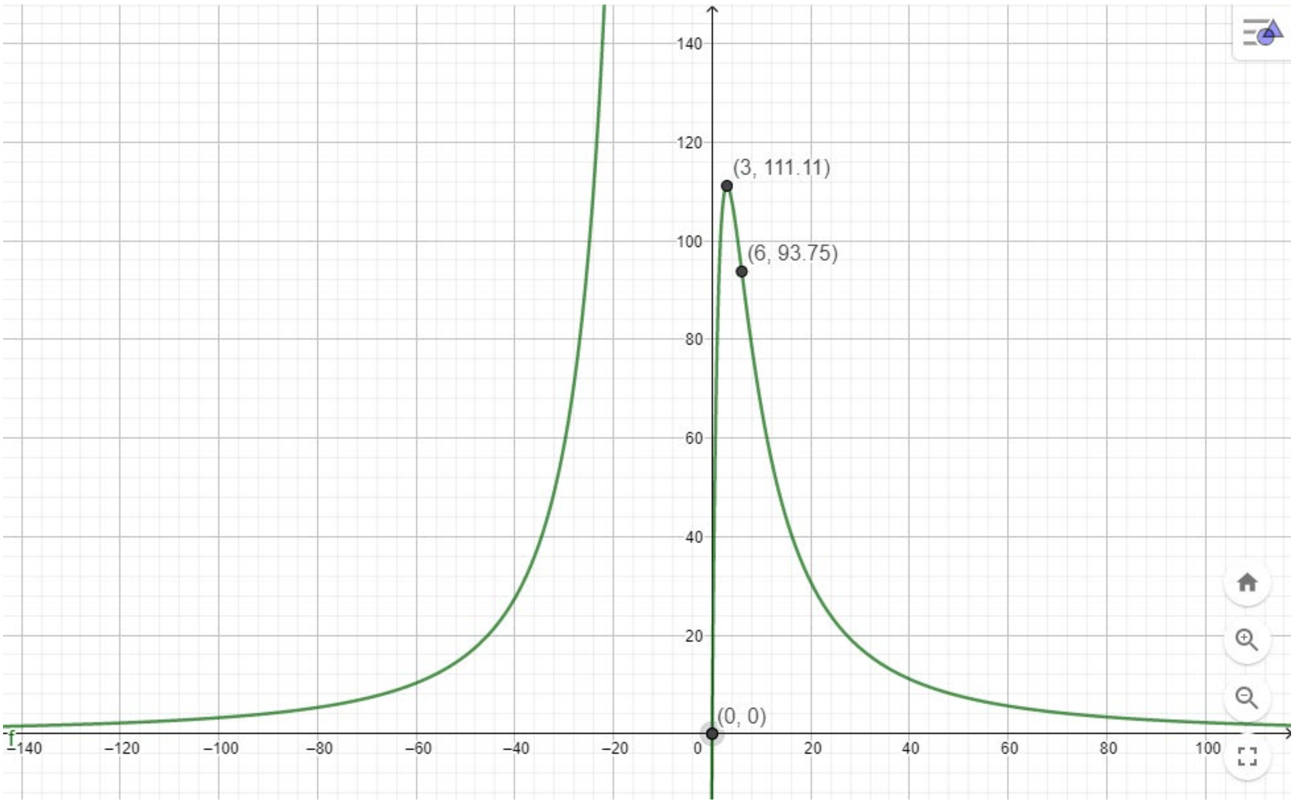
$I'(q)$ no existe en $q = -6$, pero al ser un punto sin sentido económico no lo tenemos en cuenta para el estudio del signo:

$$\text{Signo } I'(q) \begin{cases} > 0 \text{ si } \ 0 \leq q < 3 \\ < 0 \text{ si } q > 3 \end{cases} \Longrightarrow q = 3 \text{ máximo local}$$

Como $I(q)$ es continuo en el intervalo económico $[0, \infty)$, para la obtención de máximo global podemos utilizar una modificación del Teorema de Weierstrass:

- En el extremo inferior del intervalo la función toma el valor $I(0) = 0$
- En el extremo superior al ser el infinito tomamos límite: $\lim_{q \to \infty} I(q) = 0$
- En el punto crítico $I(3) = 27000 \cdot \frac{3}{9^3} = \frac{1000}{9} \approx 111.\widehat{11}$

Por tanto, si la demanda es $q = 3$ el máximo global será $I_{max} \approx 111.\widehat{11}$



e) ¿Se puede afirmar que el ingreso marginal (IMg) disminuye al disminuir la demanda (q) del producto?

$$(IMg)' = \left(I'(q)\right)' = I''(q) = \frac{162000\,(q-6)}{(q+6)^5}$$

$$\text{Singo}(IMg)'(q) = \text{Signo } I''(q) \begin{cases} < 0 \text{ si } \ 0 \leq q < 6 \\ > 0 \text{ si } q > 6 \end{cases}$$

Luego la afirmación del apartado e) es cierta, únicamente en el caso $q > 6$ ya que:

$$(IMg)'(q) > 0 \rightarrow q \uparrow \Longrightarrow IMg \uparrow \quad \text{(mismo sentido)}$$

Luego:

$$(IMg)'(q) > 0 \rightarrow q \downarrow \Longrightarrow IMg \downarrow \quad \text{(mismo sentido)}$$

39. Si la función $I(p)=\ln(-20+21p-p^2)$ determina el ingreso diario en miles de € de una empresa en función del precio p unitario en € del bien producido. Se pide:

a) ¿Cuál es el dominio de la función de ingresos? Calcular $I(8)$ e interpretar el resultado.
b) ¿Cuál es la función de ingreso medio $IMe(p)$? Calcular e interpretar $IMe(8)$.
c) ¿Cuál es la función de ingreso marginal $IMg(p)$? Calcular $IMg(8)$ e interpretar el resultado. ¿Existe algún valor para el precio que hace máximo el ingreso? En caso afirmativo, ¿cuál?, ¿sería un máximo global?
d) ¿Cuánto vale la elasticidad puntual $\varepsilon_{I|p(p=8)}$? Interpretar económicamente el resultado.
e) ¿Un aumento (disminución) del precio hace disminuir (aumentar) siempre el ingreso? ¿Es cierto que al aumentar siempre el precio el ingreso marginal disminuye?
f) Si hoy ($t=0$) se tiene un precio de 8 €, y cuando transcurren t días el precio viene dado por la función $p(t)=8+2t+t^2$, utilizar el análisis marginal para estimar cuanto se incrementaría el ingreso mañana.

---

a) Dominio:

$$-20+21p-p^2=0\rightarrow p_1=1, p_2=20$$

$$\text{Signo}(-20+21p-p^2)\begin{cases}<0 \text{ si } p<1\\ >0 \text{ si } 1<p<20\\ <0 \text{ si } p>20\end{cases}$$

$$\text{Dom } I(p)=(1,20)$$

$I(8)=\ln(84)\approx 4.43082$ miles de €. Para un precio de 8€ se tienen 4430.82€ de ingresos.

b) $IMe(p)=\frac{I(p)}{p}=\frac{\ln(-20+21p-p^2)}{p}=\frac{p\cdot Q}{p}=Q$

$IMe(8)=\frac{\ln(84)}{8}\approx\frac{4.43082}{8}\approx 0.5538$. A un precio de 8€, en media se demandan 553.8 unidades del bien.

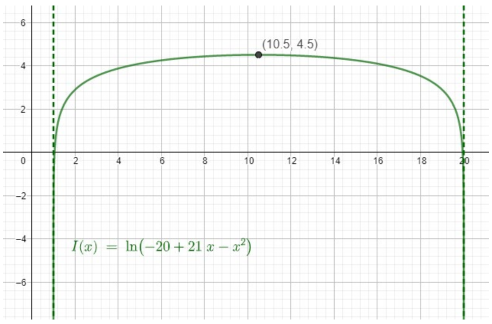
c) $IMg(p)=\frac{21-2p}{-20+21p-p^2}\rightarrow IMg(8)=\frac{5}{84}\approx 0.0595238$

A partir de $p=8\uparrow 1€\Longrightarrow$ Los ingresos $I\uparrow$ aproximadamente en 0.05952 miles de euros, es decir, 59.52€ aprox.

$$IMg(p)=\frac{21-2p}{-20+21p-p^2}=0\rightarrow p=10.5\text{ €}$$

$$\text{Signo } IMg(p)\begin{cases}>0 \text{ si } p<10.5\\ <0 \text{ si } p>10.5\end{cases}\rightarrow p=10.5 \text{ máximo local o relativo.}$$

Y además, será global porque la función es cóncava.



d)

$$\varepsilon_{I|p}=I'(p)\cdot\frac{p}{I(p)}\rightarrow\varepsilon_{I|p(p=8)}=I'(8)\cdot\frac{8}{I(8)}\approx 0.0595238\cdot\frac{8}{4.43082}\approx 0.107472$$

Si a partir de $p=8€$, este precio sube un 1%, el ingreso sube aproximadamente en un 0.107472%.

e) *¿Un aumento (disminución) del precio hace disminuir (aumentar) siempre el ingreso?*

En el apartado c) ya vimos que:

$$\text{Signo } IMg(p)\begin{cases}>0 \text{ si } p<10.5\\ <0 \text{ si } p>10.5\end{cases}$$

$$\text{Luego si}\begin{cases}\text{si } p<10.5\rightarrow p\uparrow\Longrightarrow I\uparrow\\ \text{si } p>10.5\rightarrow p\uparrow\Longrightarrow I\downarrow\end{cases}$$

¿Es cierto que al aumentar siempre el precio el ingreso marginal disminuye?

Calculamos$\left(IMg(p)\right)' = I''(p) = \frac{-2p^2+42p-401}{(-20+21p-p^2)^2} < 0 \Longrightarrow IMg(p)$ es siempre decreciente.

f) Por la regla de la cadena $I'(t) = I'(p) \cdot p'(t)$

Sabemos que para $t = 0 \to p(0) = 8$ y que $p(t) = 8 + 2t + t^2$.

Luego $p'(t) = 2 + 2t \to p'(0) = 2$

Entonces:

$$I'(0) = I'(8) \cdot p'(0) \approx 0.0595238 \cdot 2 \approx 0.119$$

Luego el ingreso total mañana $(t = 1)$ se incrementará aproximadamente 119€.

TEMA 2: LA INTEGRAL DE RIEMANN

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) La primitiva de una función integrable es única.

b) Si $f'(x) = g'(x)$ entonces $f(x) = g(x)$.

c) $\int_a^b f(x)dx$ es una función de x.

d) Si $f(x)$ es continua en $a \leq x \leq b$ entonces $\int_a^b f(x)dx$ representa el área acotada por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a,\ x = b$.

2. Resolver las siguientes integrales:

a) $\int (2x^4 - 3x^2 + 5x - 2)dx$ **b)** $\int \frac{5x^2-3x+1}{x^3}dx$ **c)** $\int \sqrt[5]{(5x+6)}\,dx$ **d)** $\int_{-1}^{2} \frac{x}{x^2+1}dx$

e) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen} x}\,\cos x\,dx$ **f)** $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{tg} x}$ **g)** $\int_1^2 \ln x\,dx$ **h)** $\int_0^1 x^2 e^x dx$

i) $\int_{\pi/2}^{\pi} x \cdot \cos x\,dx$ **j)** $\int_0^3 \frac{2^x}{1+2^x}dx$ (cambio de variable: $t = 1 + 2^x$)

3. Calcular el área limitada por la curva $y = f(x) = x^3 - x^2 - 2x$, el eje X, en el intervalo $[-1,2]$.

4. Calcular el área de la región limitada por las siguientes curvas:

a) $y = 4 - x^2,\ y = x^2 - 1$ **b)** $y = x^2,\ y = \sqrt{x}$ **c)** $x - 2y + 1 = 0,\ y^2 = x + 1$

d) $x = y^2 + 4y,\ \ x = 0$ **e)** $y = 2 - x^2,\ y = -x$ **f)** $y = x^3 - 2x - 2,\ y = x^2 - 2$

g) $y = 1 - |x|,\ y = 0,\ x = -1,\ x = 1$

5. a) Un negocio que no obtiene beneficios actualmente ha de aumentar sus beneficios gradualmente en los próximos cuatro años hasta alcanzar un ritmo de 16 millones de dólares por año. Al final del primer semestre el ritmo ha de ser de un cuarto de millón anual y al final del segundo año de 4 millones anuales. En general, al cabo de *t* años ($0 < t < 4$), su ritmo de beneficios ha de ser t^2 millones anuales. Estimar el beneficio total durante los cuatro años si el plan cumple sus objetivos.

5. b) Si conocemos que el ingreso marginal de cierta empresa es: $I'(Q) = 100 - 4Q$, siendo Q la producción. ¿Cuál es la variación del ingreso total de una empresa cuando la producción aumenta de 5 a 10 unidades?

6. Sabiendo que la función de coste marginal de una empresa viene dada por $C'(Q) = CMg(Q) = 12e^{0.5Q}$ y además que los costes totales cuando $Q = 0$ son 36, determinar la función de coste total.

7. Si la tasa de ventas de un producto evoluciona según la función $F'(t) = 10 - 7e^{-t},\ t \geq 0$, donde t es el tiempo en días desde el comienzo de cierto año (por F denotamos las ventas totales), hallar las ventas totales en los cinco primeros días.

8. Si el consumo marginal es una función del ingreso y, como la dada por $C'(y) = 0.6 + 0.1y^{-1/3}$, y si el consumo autónomo (C) es 45 cuando el ingreso es cero, hallar la función de consumo $C(y)$.

9. La función de ahorro marginal viene dada por $S'(y) = 0.5 - 0.2y^{1/2}$ donde y representa el ingreso. Hay un no-ahorro (desahorro) de 3.5 u.m. cuando $y = 25$. Determinar la función de ahorro $S(y)$.

10. Dada la función de coste marginal $C'(Q) = 3Q^2 - 18Q + 30$, ¿cuál es la disminución en el coste total $C(Q)$ cuándo la producción total fabricada se reduce de 12 a 3 unidades?

11. Los costes marginales de una empresa vienen dados por la función

$$C'(q) = \begin{cases} 10 - \dfrac{q}{20} & \text{si } 0 \le q \le 100 \\ 3 + \dfrac{q}{50} & \text{si } q \ge 100 \end{cases}$$

Además, la empresa tiene un coste fijo de 300 u.m.

a) Calcular $\int_0^{150} C'(q)dq$. Interpretar económicamente y geométricamente el resultado.

b) Calcular el coste de producir 150 unidades de producto.

12. El beneficio marginal de una empresa durante un período de 10 años ($t \in [0,10]$) ha sido

$$B'(t) = \frac{10000}{(2t+1)^3}$$

Calcular el beneficio marginal medio en el período [4,9].

13. Sabiendo que la tasa de ventas de una empresa es una función del tiempo de la forma $f(t) = 10e^{0.03t}$, donde $f(t)$ se mide en millones de u.m. y t en meses, calcular el beneficio que se espera obtener durante los primeros 6 meses, sabiendo que el beneficio es la diferencia entre el 10% de las ventas menos los costes, y que los costes ascienden a 300.000 u. m. en total a lo largo de este período.

14. Si la tasa de ventas de un producto es $F'(t) = 5(1 - e^{-t})$, calcular la tasa media de ventas en el intervalo [3,5].

15. Durante varias semanas el departamento de carreteras ha registrado la velocidad del tráfico que fluye por cierta salida del centro de la ciudad. Los datos indican que entre la 1 y las 6 de la tarde de un día de trabajo la velocidad del tráfico en la salida es aproximadamente $S(t) = t^3 - 10t^2 + 30t + 10$ km/hora donde t es el número de horas después del mediodía. Calcular la velocidad media del tráfico entre la 1 y las 6 de la tarde.

16. Suponer que el precio de la gasolina aumenta de acuerdo con la ecuación $p(t) = 1 + 0.1t + 0.02t^2$ donde p es el precio en euros por litro y t representa el tiempo en años ($t = 0$ representa el año 2013). Si se conduce un automóvil 15.000 km. al año y recorre M km. por litro, el coste de combustible en el año t es de:

$$C = \frac{15000}{M}\int_t^{t+1} p(u)du$$

Calcular el coste de combustible anual en los años **a)** 2015 **b)** 2020.

17. Sabiendo que la cantidad demandada y el precio de equilibrio en un mercado de libre competencia vienen determinados, según el caso, por las funciones de demanda y oferta respectivamente dadas por:

a) $p = 113 - q_d^2\,,\ p = (q_s+1)^2$

b) $p = 1000 - 0.4q_d^2\,, p = 42q_s$

c) $p = \frac{10}{0.5q_d+1}\,, p = q_s^2 + 1$

d) $p = \frac{10}{q_d+1} - 1,\ p = q_s^2 + 3$

Determinar, en cada caso, gráfica y analíticamente el excedente del consumidor y del productor, interpretando económicamente los resultados.

18. a) Supongamos que un producto se vende a un precio de equilibrio de $p_e = 2$€ siendo su función de demanda $q(p) = \frac{400}{p^2}$. Representar las funciones $q(p) y\ p(q)$ señalando gráficamente en cada caso el excedente del consumidor. Calcular el excedente en uno de los casos.

18. b) Las funciones de oferta y demanda de un bien son, respectivamente,

$$\mathrm{S(p)} = 31 + 2\sqrt{\mathrm{p}}, \qquad \mathrm{D(p)} = \frac{1000}{\mathrm{p}+9}\text{-}1$$

i) Comprobar que $\mathrm{p_e} = 16$ es precio de equilibrio y calcular el precio a partir del cual el producto deja de tener demanda.

ii) Si el precio de venta es el precio de equilibrio, calcular el excedente del consumidor.

19. Resolver las siguientes integrales:

a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ **b)** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ **c)** $\int_0^\infty x dx$ **d)** $\int_{-\infty}^0 \cos x\, dx$

e) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ $(p > 1)$ **f)** $\int_0^\infty e^{-px} dx,\ (p \in \mathbb{R})$ **g)** $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ **h)** $\int_0^1 \ln x dx$

i) $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ $(p > 1)$ **j)** $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$

20. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) El área de la superficie encerrada por una función no negativa y el eje *x*, desde *x*=0 hasta infinito, es siempre infinito.
b) $\int_0^\infty x e^{1-x} dx = 1$.
c) $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$ es una integral impropia.

21. Sea la función $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{7} e^{-\frac{t}{7}} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$. Demostrar que se verifica:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$ (se dice entonces que $f(t)$ es una función de densidad de probabilidad)
b) Hallar $\int_0^5 f(t)dt$ (coincide con la probabilidad de que la variable aleatoria X esté entre 0 y 5)
c) Hallar $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)dt$ (coincide con el valor esperado de X)

22. Si el flujo de dinero pudiera existir permanentemente, el valor actual del flujo sería VA=$\int_0^\infty I(t) e^{-rt} dt$donde *I*(*t*) es el ritmo de flujo en el momento *t* y *r* constante (0<*r*<1) es la tasa nominal. Calcular el valor actual del flujo en el caso de que $I(t) = t^2$, *r*=0,3. Si la tasa nominal *r* fuese mayor ¿el valor actual crecería o decrecería? Justificar la respuesta.

23. Sabiendo que el coste de capitalización de un activo C durante n años viene dado por

$$C = C_0 + \int_0^n C(t) e^{-rt} dt$$

Donde C_0 es la inversión original, t el tiempo en años, r el interés anual, y suponiendo $C(t) = 250(1 + 0.8t)$, $r = 0.2$, $C_0 = 6500€$, calcular el coste de capitalización de un activo:

a) Durante $n = 5$ años.
b) Para siempre.

24. Sea $D(p) = \frac{2}{p(1+\ln p)^{3/2}}$ la función de demanda de un bien en función del precio *p* expresado en cientos de euros. Sabiendo que para un precio de equilibrio p_0 el excedente del consumidor viene dado por $EC = \int_{p_0}^{+\infty} D(p)dp$, calcular el valor de dicho excedente si el precio del bien es 100€.

25. La oferta y la demanda de un artículo viene dadas por las funciones

$$S(p) = \begin{cases} 5p^2\text{-}125 & \text{si } p \geq 5 \\ 0 & \text{si } p < 5 \end{cases} \qquad D(p) = \frac{37500}{p^2}$$

a) Comprobar que el precio de equilibrio es $p^* = 10$ €.
b) Calcular el excedente del consumidor y del productor dados por:

$$EP = \int_0^{p^*} S(p)dp\,, \qquad EC = \int_{p^*}^{+\infty} D(p)dp$$

EJERCICIOS RESUELTOS TEMA 2

2. Resolver las siguientes integrales:

a) $\int (2x^4 - 3x^2 + 5x - 2)dx$ **b)** $\int \frac{5x^2-3x+1}{x^3}dx$ **c)** $\int \sqrt[5]{(5x+6)}\,dx$ **d)** $\int_{-1}^{2} \frac{x}{x^2+1}dx$

e) $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen} x}\,\cos x\,dx$ **f)** $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{tg} x}$ **g)** $\int_1^2 \ln x\,dx$ **h)** $\int_0^1 x^2e^x dx$

i) $\int_{\pi/2}^{\pi} x\cdot\cos x\,dx$

---

a) Es una integral inmediata

$$\int (2x^4 - 3x^2 + 5x - 2)dx = \cdots = \frac{2x^5}{5} - x^3 + \frac{5x^2}{2} - 2x + C$$

b) Es una integral reducible a varias inmediatas,

$$\int \frac{5x^2-3x+1}{x^3}dx = \cdots = 5\ln x + \frac{3}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$$

c) Utilizando el cambio de variable: $5x + 6 = t$

$$\int \sqrt[5]{(5x+6)}\,dx = \cdots = \frac{1}{6}(5x+6)\cdot\sqrt[5]{5x+6}$$

d) Se puede resolver de forma inmediata o con el cambio de variable: $x^2 + 1 = t$

$$\int_{-1}^{2} \frac{x}{x^2+1}dx = \cdots = \frac{1}{2}\ln(5) - \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right) \approx 0.45815$$

En el caso de calcular primero la integral indefinida debemos obtener:

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

e) Con el cambio de variable: $\operatorname{sen} x = t$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen} x}\,\cos x\,dx = \cdots = 2/3$$

f) Si hacemos el cambio de variable: $\operatorname{sen} x = t$, teniendo en cuenta que: $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x} = \cdots = \ln(\operatorname{sen} x) + C$ $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{tg} x} = \cdots = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 0.34657$

g) Deberemos utilizar integración por partes, considerando $u = \ln x$, $dv = dx$

$$\int_1^2 \ln x\,dx = \cdots = 2\ln 2 - 1 \approx 0.38629$$

h) En esta integral tendremos que hacer integración por partes dos veces, considerando: $u =$polinomio

$$\int x^2e^x dx = \cdots = (x^2 - 2x + 2)e^x + C \qquad \int_0^1 x^2e^x dx = \cdots = e - 2 \approx 0.718282$$

i) Debemos hacer integración por partes considerando: $u = x$

$$\int x\cdot\cos x\,dx = x\cdot\operatorname{sen} x + \cos x + C$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} x\cdot\cos x\,dx \approx -2.5708$$

---

3. Calcular el área limitada por la curva $y = f(x) = x^3 - x^2 - 2x$, el eje X, en el intervalo $[-1,2]$.

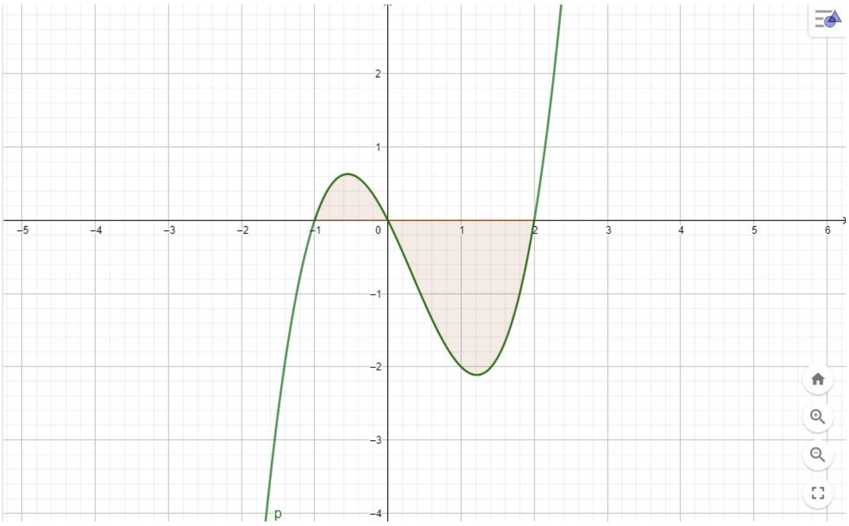
$$\text{Área} = \int_{-1}^{2} |f(x)| dx$$

Comprobemos dónde la función polinómica puede cambiar de signo:

$$f(x) = 0 \to \cdots \to x = -1, x = 0, x = 2.$$

En este caso al tener tres puntos de corte debemos dividir en dos integrales para el cálculo del área:

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)dx\right| + \left|\int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)dx\right| = \cdots = \frac{37}{12} \approx 3.08\widehat{3}\, u^2$$



---

4. Calcular el área de la región limitada por las siguientes curvas:

a) $y = 4 - x^2,\ y = x^2 - 1$ **b)** $y = x^2,\ y = \sqrt{x}$ **c)** $x - 2y + 1 = 0,\ y^2 = x + 1$

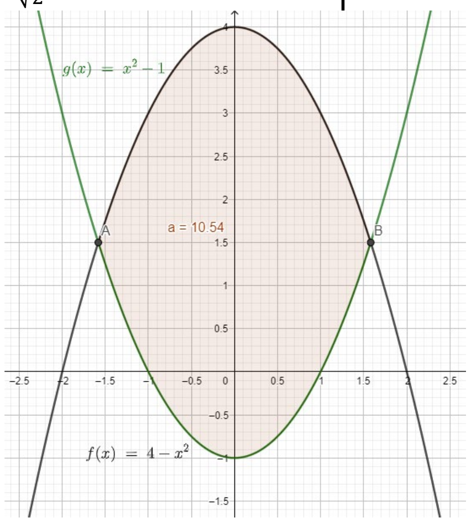
d) $x = y^2 + 4y,\ \ x = 0$ **e)** $y = 2 - x^2,\ y = -x$ **f)** $y = x^3 - 2x - 2,\ y = x^2 - 2$

g) $y = 1 - |x|,\ y = 0,\ x = -1,\ x = 1$

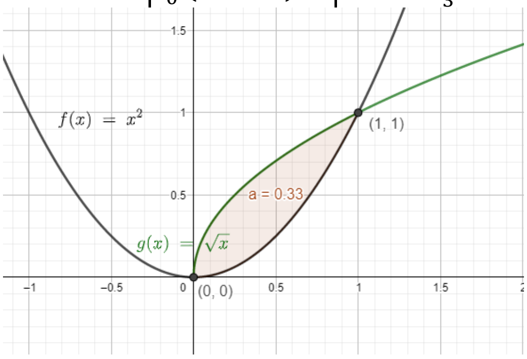
---

a) $y = 4 - x^2,\ y = x^2 - 1$

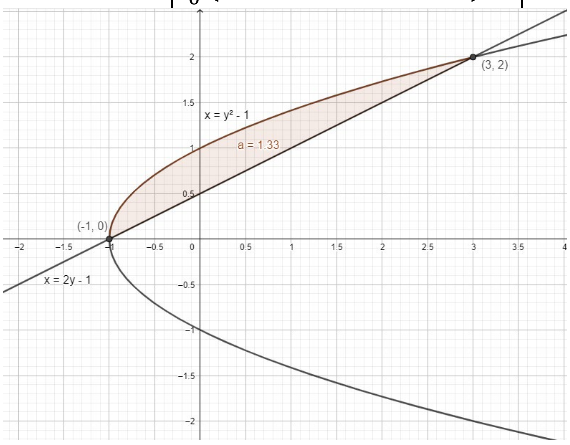
$$\text{Área} = \left|\int_{-\sqrt{\frac{5}{2}}}^{+\sqrt{\frac{5}{2}}} \left(4 - x^2 - (x^2 - 1)\right)dx\right| = \cdots \approx 10.5409\, u^2$$



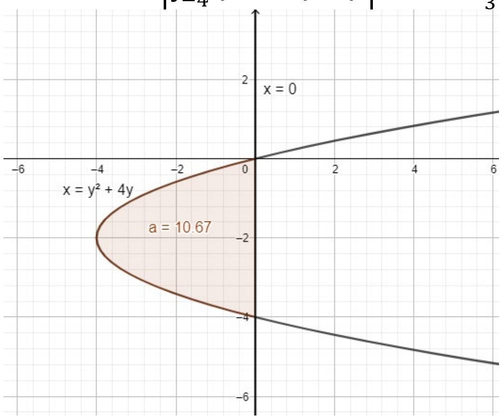
b) $y = x^2,\ y = \sqrt{x}$ Área $= \left|\int_0^1 (\sqrt{x} - x)dx\right| = \cdots = \frac{1}{3} \approx 0.33\ u^2$



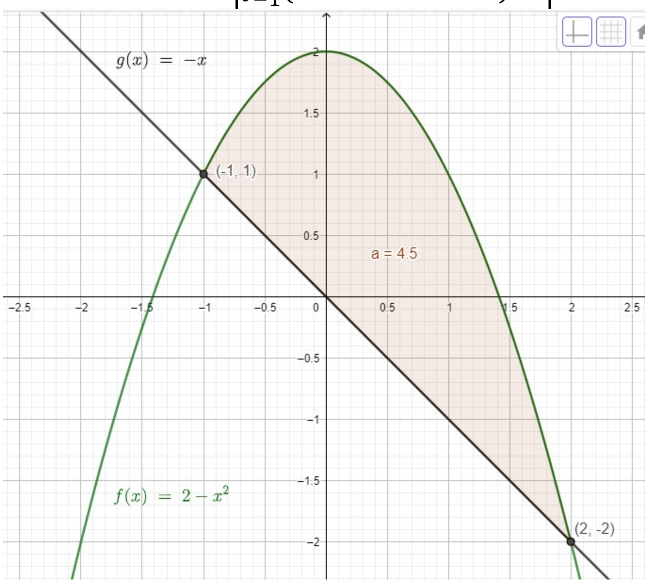
c) $x - 2y + 1 = 0,\ y^2 = x + 1$ Área $= \left|\int_0^2 \left((2y-1) - (y^2 - 1)\right)dy\right| = \cdots = \frac{4}{3} \approx 1.33\ u^2$



d) $x - 2y + 1 = 0,\ y^2 = x + 1$ Área $= \left|\int_{-4}^0 (y^2 + 4y)dy\right| = \cdots = \frac{32}{3} \approx 10.6667\ u^2$



e) $y = 2 - x^2,\ y = -x$ Área $= \left|\int_{-1}^2 \left((2 - x^2) - (-x)\right)dx\right| = \cdots = \frac{9}{2} \approx 4.5\ u^2$



f) Para calcular el área limitada por $y = f(x) = x^3 - 2x - 2,\ y = g(x) = x^2 - 2$, hallamos primero los puntos de corte de las dos curvas (nótese además que las dos funciones son continuas):

$$f(x) = g(x) \to \cdots \to x = 0, x = -1, x = 2.$$

Si calculamos la integral definida nos da el resultado:

$$\int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))dx = \cdots = -2.25$$

¡¡El área limitada por las curvas es negativa!!

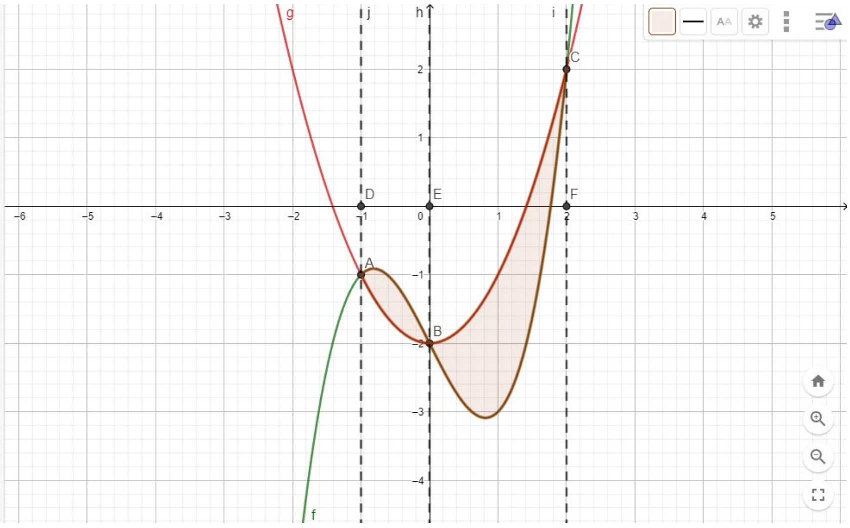
¿Qué hemos hecho mal?

$$\text{Área} = \int_{-1}^{2} |f(x) - g(x)|dx$$

En este caso al tener tres puntos de corte debemos dividir en dos integrales para el cálculo del área:

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - 2x - 2 - (x^2 - 2)dx\right| + \left|\int_{0}^{2} (x^3 - 2x - 2 - (x^2 - 2)dx\right| =$$

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)dx\right| + \left|\int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)dx\right| = \cdots = \frac{37}{12} \approx 3.08\widehat{3}\, u^2$$

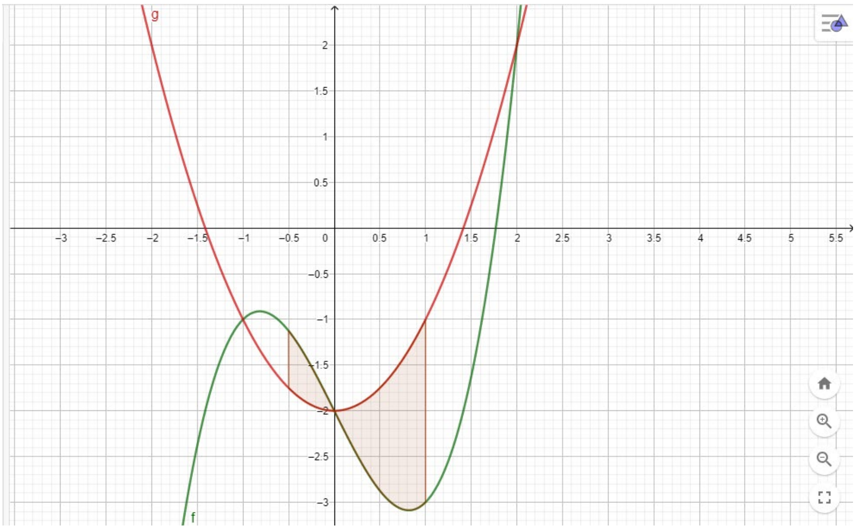


¿Qué pasaría si nos añaden además un intervalo de integración?

Por ejemplo:

Hallar el área limitada por las curvas $f(x) = x^3 - 2x - 2$, $g(x) = x^2 - 2$ en el intervalo $[-0.5, 1]$.

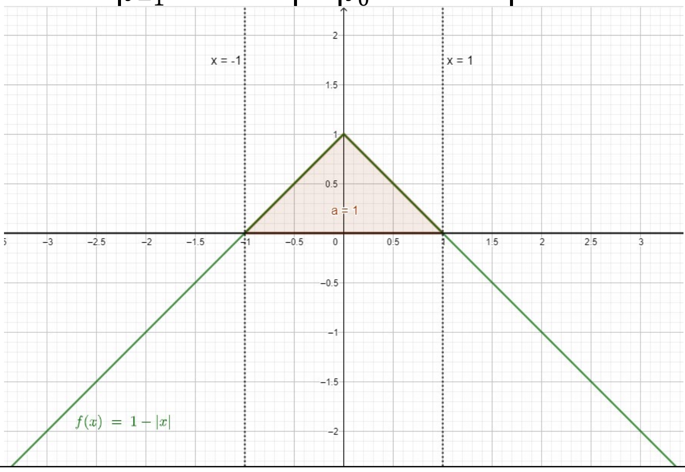
$$\text{Área} = \left|\int_{-0.5}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^3 - x^2 - 2x)dx\right| \approx\ 1.27604\, u^2$$



Volver al índice

g) $y = 1 - |x|,\ y = 0,\ x = -1,\ x = 1$

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{0} (1+x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (1-x)dx\right| = \cdots = 1\,u^2$$



---

5 b). Si conocemos que el ingreso marginal de cierta empresa es: $I'(Q) = 100 - 4Q$, siendo Q la producción. ¿Cuál es la variación del ingreso total de una empresa cuando la producción aumenta de 5 a 10 unidades?

$$I(10) - I(5) = \int_5^{10} I'(Q)\,dQ = \int_5^{10} (100 - 4Q)\,dQ = \left(100Q - 2Q^2\right)\Big]_5^{10} = \cdots = 350$$

---

6. Determinar la función coste total, sabiendo que la función de coste marginal de una empresa viene dada por:

$$C'(Q) = CMg(Q) = 12e^{0.5Q}$$

y además que los costes totales cuando $Q = 0$ son 36.

$$C(Q) = \int C'(Q)dQ = \int 12e^{0.5Q}\,dQ = \cdots = 24e^{0.5Q} + K$$

Si $Q = 0 \to C(0) = 24 + K = 36 \to K = 12$

$$C(Q) = 24e^{0.5Q} + 12$$

---

7. Si la tasa de ventas de un producto evoluciona según la función $F'(t) = 10 - 7e^{-t},\ t \geq 0$, donde t es el tiempo en días desde el comienzo de cierto año (por F denotamos las ventas totales), hallar las ventas totales en los cinco primeros días.

$$F(5) - F(0) = \int_0^5 F'(t)dt = \int_0^5 (10 - 7e^{-t})dt = \cdots = 50 + 7e^{-5} - 7 \approx 43.0471$$

---

8. Si el consumo marginal es una función del ingreso y, como la dada por:

$$C'(y) = 0.6 + 0.1y^{-1/3},$$

y además si el consumo autónomo (C) es 45 cuando el ingreso es cero, hallar la función de consumo $C(y)$.

$$C(y) = \int C'(y)dy = \int \left(0.6 + 0.1y^{-1/3}\right)dy = 0.6y + 0.15y^{2/3} + K$$

Como sabemos que $C(0) = 45 \to K = 45$

Por tanto:

$$C(y) = 0.6y + 0.15y^{2/3} + 45$$

14. Si la tasa de ventas de un producto es $F'(t) = 5(1 - e^{-t})$, calcular la tasa media de ventas en el intervalo [3,5].

$$\text{T.V.M.} = \frac{F(5) - F(3)}{5 - 3} = \frac{1}{5 - 3}\int_3^5 F'(t)dt = \cdots \approx 4.89237$$

15. Durante varias semanas el departamento de carreteras ha registrado la velocidad del tráfico que fluye por cierta salida del centro de la ciudad. Los datos indican que entre la 1 y las 6 de la tarde de un día de trabajo la velocidad del tráfico en la salida es aproximadamente:

$S(t) = t^3 - 10t^2 + 30t + 10$ km/hora donde t es el número de horas después del mediodía. Calcular la velocidad media del tráfico entre la 1 y las 6 de la tarde.

$$\text{Valor medio integral de } S \text{ en } [1,6] = \frac{1}{6 - 1}\int_1^6 S(t)dt = \cdots \approx 36.4167 \text{ km/hora}$$

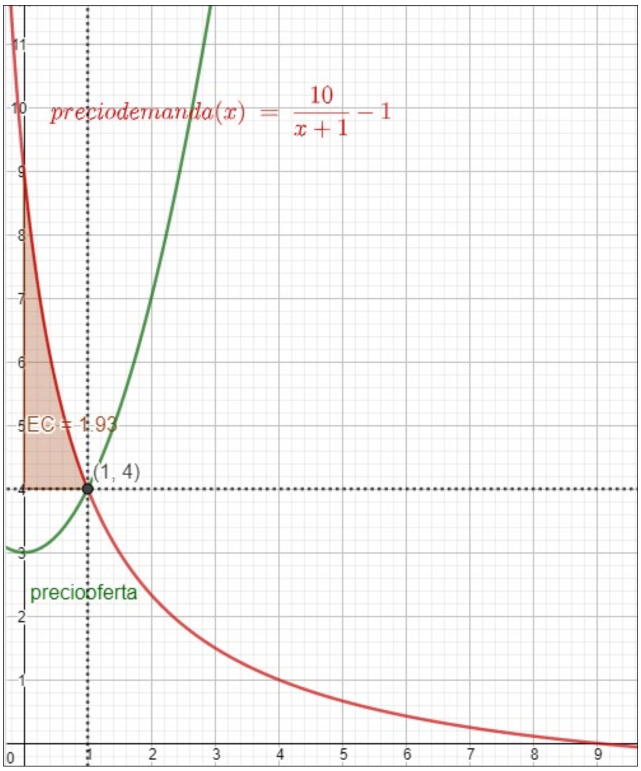
17 d) Sabiendo que la cantidad demanda y el precio de equilibrio de un mercado de libre competencia vienen determinados por las curvas de oferta $p = q_s^2 + 3$ y de demanda $p = \frac{10}{q_d+1} - 1$. Hallar, analíticamente y gráficamente, el excedente del consumidor y del productor.

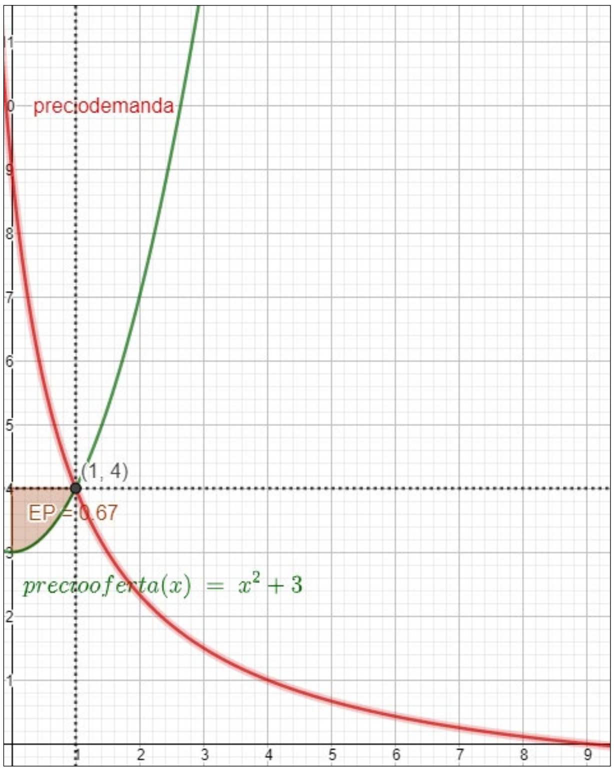
Primero calculamos la cantidad de equilibrio (y el precio de equilibrio)

$$q^2 + 3 = \frac{10}{q + 1} - 1 \to \cdots \to q^* = 1 \to p^* = 4$$

$$\text{EC} = \int_0^1 p(q_d)dq - p^* \cdot q^* = \int_0^1 \left(\frac{10}{q_d + 1} - 1\right) dq - 4 = \cdots = 10\ln 2 - 5 \approx 1.93$$

$$\text{EP} = p^* \cdot q^* - \int_0^1 p(q_s)dq = 4 - \int_0^1 (q_s^2 + 3)dq = \cdots = 2/3 \approx 0.67$$





Volver al índice

18. b) Las funciones de oferta y demanda de un bien son, respectivamente,

$$S(p) = 31 + 2\sqrt{p}, \qquad D(p) = \frac{1000}{p+9} - 1$$

i) Comprobar que $p_e = 16$ es precio de equilibrio y calcular el precio a partir del cual el producto deja de tener demanda.

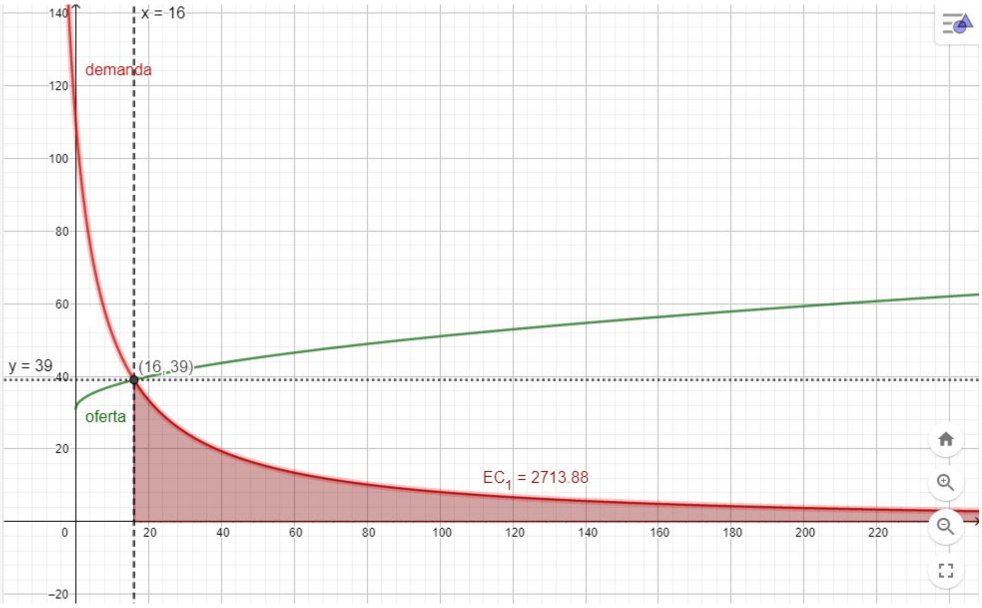
ii) Si el precio de venta es el precio de equilibrio, calcular el excedente del consumidor.

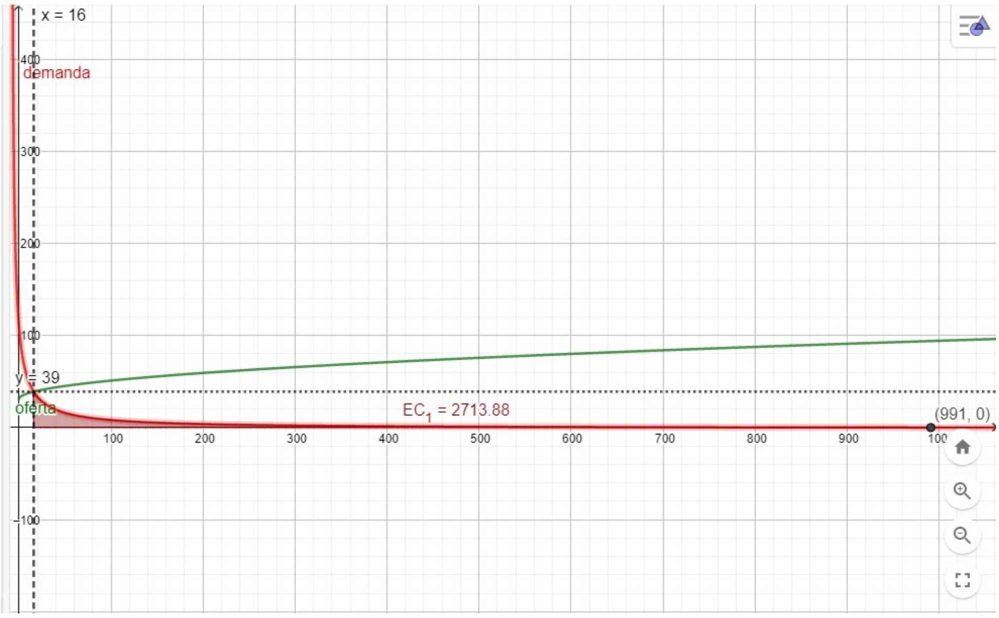
---

a)
Si $p = 16 \rightarrow S(16) = 39 = D(16)$

$D(p) = 0 \rightarrow \cdots \rightarrow p = 991$
b)

$$\text{EC} = \int_{16}^{991} D(p)dp = \int_{16}^{991} \left(\frac{1000}{p+9} - 1\right) dp = \cdots = 1000\ln(40) - 975 \approx 2713.88$$





19. Resolver las siguientes integrales:

a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ **b)** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ **c)** $\int_0^{\infty} x dx$ **d)** $\int_{-\infty}^{0} \cos x\, dx$

e) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ $(p > 1)$ **f)** $\int_0^{\infty} e^{-px} dx,\ (p \in \mathbb{R})$ **g)** $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ **h)** $\int_0^1 \ln x dx$

i) $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ $(p > 1)$

---

a) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-2} dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1$

b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^1 x^{-1/2} dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[2x^{1/2}\right]_\epsilon^1 = \cdots = 2$

c) $\int_0^{\infty} x dx = \int_0^1 x dx + \int_1^{\infty} x dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^1 x dx + \lim_{b\to\infty} \int_1^b x dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[\frac{x^2}{2}\right]_\epsilon^1 + \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^b = \cdots = \infty$

d) $\int_{-\infty}^{0} \cos x\, dx = \lim_{b\to -\infty} \int_b^0 \cos x\, dx = \lim_{b\to -\infty} [\operatorname{sen} x]_b^0 = -\lim_{b\to -\infty} \operatorname{sen} b$

¿Existe $\lim_{b\to -\infty} \operatorname{sen} b$?

e) Si $p > 1$ tenemos:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-p} dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{x^{p-1}}\right]_1^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{1-p} \cdot \frac{1}{b^{p-1}} - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$$

f) $\int_0^{\infty} e^{-px} dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-px} dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-px}}{-p}\right]_0^b = \cdots = \frac{1}{p}$

g) $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon\to\infty} \int_\epsilon^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} [\ln x]_\epsilon^1 = \cdots = \infty$

h) $\int_0^1 \ln x dx = \cdots = -1$ (¿sabrías resolverla utilizando integración por partes?)

i) Si $p > 1$ tenemos:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_\epsilon^1 x^{-p} dx = \lim_{\epsilon\to 0^+} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_\epsilon^1 = \cdots = \infty$$

21. Sea la función $f(t)=\begin{cases}\frac{1}{7}e^{-\frac{t}{7}} & \text{si } t\geq 0\\ 0 & \text{si } t<0\end{cases}$. Demostrar que se verifica:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt=1$ (se dice entonces que $f(t)$ es una función de densidad de probabilidad)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{\infty} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int_{0}^{\infty}\frac{1}{7}e^{-\frac{t}{7}}dt=\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{1}{7}e^{-\frac{t}{7}}dt=$$

Ejercicio: Resuelve la integral indefinida

$$\int\frac{1}{7}e^{-\frac{t}{7}}dt$$

para luego aplicar la regla de Barrow.

Deberás llegar a este resultado:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt=\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}\frac{1}{7}e^{-\frac{t}{7}}dt=\lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-\frac{t}{7}}\right)\Big]_{0}^{b}=\lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-\frac{b}{7}}-\left(-e^{-\frac{0}{7}}\right)\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-\frac{b}{7}}+1\right)=1$$

b) Hallar $\int_{0}^{5} f(t)dt$ (coincide con la probabilidad de que la variable aleatoria X esté entre 0 y 5)

$$P(0\leq X\leq 5)=\int_{0}^{5} f(t)dt=\int_{0}^{5}\frac{1}{7}e^{-\frac{t}{7}}dt=-e^{-\frac{t}{7}}\Big]_{0}^{5}=-e^{-\frac{5}{7}}+1\approx 0.51$$

c) Hallar $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$ (coincide con el valor esperado de X)

$$E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt=\int_{0}^{+\infty} t\cdot\left(\frac{1}{7}e^{-\frac{t}{7}}\right)dt=\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} t\cdot\left(\frac{1}{7}e^{-\frac{t}{7}}\right)dt$$

Ejercicio: Resuelve utilizando integración por partes esta integral

$$\int t\cdot\left(\frac{1}{7}e^{-\frac{t}{7}}\right)dt$$

Deberás llegar a este resultado:

$$E[X]=\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} t\cdot\left(\frac{1}{7}e^{-\frac{t}{7}}\right)dt=\lim_{b\to+\infty}-\left(t\,e^{-\frac{t}{7}}+7e^{-\frac{t}{7}}\right)\Big]_{0}^{b}=\cdots=7$$

---

23. Sabiendo que el coste de capitalización de un activo C durante n años viene dado por

$$C=C_0+\int_{0}^{n} C(t)e^{-rt}dt$$

Donde C_0 es la inversión original, t el tiempo en años, r el interés anual, y suponiendo $C(t)=250(1+0.8t)$, $r=0.2$, $C_0=6500$€, calcular el coste de capitalización de un activo:

a) Durante $n=5$ años.

$$C=6500+\int_{0}^{5} 250(1+0.8t)e^{-0.2\,t}dt$$

Ejercicio: Resuelve la integral indefinida

$$\int 250(1+0.8t)e^{-0.2\,t}dt$$

Deberás llegar al resultado:

$$C=6500+\int_{0}^{5} 250(1+0.8t)e^{-0.2\,t}dt=$$

$$=6500+\left(250(-4\,t\,e^{-0.2t}-25\,e^{-0.2t})\right)\Big]_{0}^{5}=\cdots\approx 8611.36$$

b) Para siempre.

$$C = 6500 + \int_0^{+\infty} 250(1+0.8t)e^{-0.2\,t}dt = 6500 + \lim_{b\to+\infty}\int_0^b 250(1+0.8t)e^{-0.2\,t}dt$$
$$= 6500 + \lim_{b\to\infty}\left(250\left(-4\,t\,e^{-0.2t} - 25\,e^{-0.2t}\right)\right]_0^b =$$
$$= 6500 + \lim_{b\to\infty}\left(250\left(-4\,b\,e^{-0.2b} - 25\,e^{-0.2b}\right)\right) - \left(250\left(-4\cdot 0\cdot e^{-0.2\cdot 0} - 25\,e^{-0.2\cdot 0}\right)\right) =$$
$$= 6500 + 250\cdot 25 = 12750$$

24. Sea $D(p) = \frac{2}{p(1+\ln p)^{3/2}}$ la función de demanda de un bien en función del precio p expresado en cientos de euros. Sabiendo que para un precio de equilibrio p_0 el excedente del consumidor viene dado por $EC = \int_{p_0}^{+\infty} D(p)dp$, calcular el valor de dicho excedente si el precio del bien es 100€.

$$EC = \int_{p^*}^{+\infty} D(p)dp = \int_{100}^{+\infty}\frac{2}{p(1+\ln p)^{3/2}}dp = \lim_{b\to+\infty}\int_{100}^{b}\frac{2}{p(1+\ln p)^{3/2}}dp = \cdots \approx\ 1.6895$$

25. La oferta y la demanda de un artículo viene dadas por las funciones

$$S(p) = \begin{cases} 5p^2 - 125 & \text{si } p \geq 5 \\ 0 & \text{si } p < 5 \end{cases} \qquad D(p) = \frac{37500}{p^2}$$

a) Comprobar que el precio de equilibrio es $p^* = 10$ €.
b) Calcular el excedente del consumidor y del productor dados por:

$$EP = \int_0^{p^*} S(p)dp\,, \qquad EC = \int_{p^*}^{+\infty} D(p)dp$$

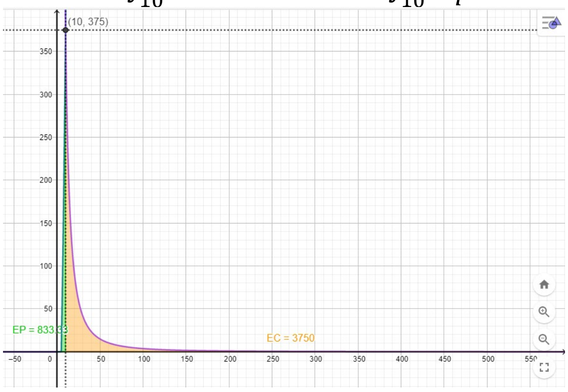
a) Bastaría con sustituir en la oferta y la demanda, $p = 10$, y ver que coinciden. En caso de que nos dieran el precio de equilibrio podríamos igualar la oferta con la demanda para el caso $p \geq 5$, y obtener:

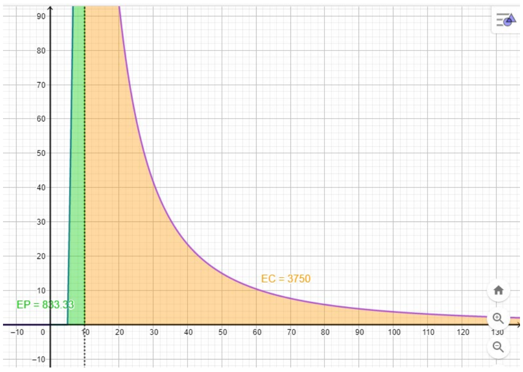
$$S(p) = D(p) \to \cdots \to 5p^4 - 125p^2 - 37500 = 0$$

Si resolvemos esa ecuación, nos dará también que la única solución válida en nuestro problema es $p = 10$.

b)

$$EP = \int_0^{p^*} S(p)dp = \int_0^5 S(p)dp + \int_5^{10} S(p)dp = \int_5^{10}(5p^2 - 125)dp = \cdots \approx 833.33$$
$$EC = \int_{10}^{+\infty} D(p)dp = \lim_{b\to+\infty}\int_{10}^{b}\frac{37500}{p^2}dp = \cdots = 3750$$





Volver al índice

TEMA 3: FUNCIONES REALES DE VARIAS VARIABLES REALES

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Sea la función de utilidad dependiendo del consumo x e y de dos bienes, definida por $U(x,y)=(x+3)^2y$

a) Hallar la expresión de la curva de indiferencia que se obtiene para una utilidad $U=100$. Interpretarla y representarla gráficamente.

b) Comprobar que si se consume $x=2, y=4$ unidades, entonces estamos sobre la curva de indiferencia anterior.

c) Obtener otra combinación de cantidades a consumir que proporcione la misma utilidad.

2. Un consumidor dispone de un presupuesto de 100 € para gastarlo en dos bienes A y B. El primero cuesta 5 €/u y el segundo 12 €/u.

a) Escribir la función $G(x,y)$ que calcula el gasto del consumidor si compra x unidades de A e y unidades de B.

b) Escribe la ecuación presupuestaria que corresponde a los 100 € de que dispone el consumidor. Interpretarla y representarla gráficamente.

c) Obtener la expresión de la función $y(x)$ que se obtiene para un presupuesto de 100 €

d) Calcular $y(8)$, interpretar su significado.

3. La función de producción de una empresa viene dada por $\mathrm{Q(K,L)}=10\mathrm{K}^{0.5}\mathrm{L}^2$.

a) Obtener la expresión de las isocuantas (curva de isoproducción) correspondientes a los niveles de producción $\mathrm{Q}=10$ y, $\mathrm{Q}=100$. Interpretar su significado.

b) Representarlas gráficamente.

4. Estudiar la existencia de límite en el origen de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=\frac{x+2}{y^2-2xy+4}$ **b)** $f(x,y)=x^2+y^2$ **c)** $f(x,y)=3y^2-x^2$ **d)** $f(x,y)=e^{-2(x^2+y^2)}$

e) $f(x,y)=x\cdot\mathrm{sen}(1/y)$ **f)** $f(x,y)=\frac{1}{xy}$ **g)** $f(x,y)=|x-y|$

5. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=(x^2-y)\mathrm{sen}(xy)$ **b)** $f(x,y)=|x-y|$ **c)** $f(x,y)=\sqrt{xy}$

d) $f(x,y)=\mathrm{sen}(2^{xy})$

6. Calcular derivadas parciales de primer y segundo orden de las siguientes funciones:

a) $z=3x^2+4y^3+10$ **b)** $z=(x^2+4xy+y^2)^{13}$ **c)** $z=x^{-3}y+4y^3x^2-2x$ **d)** $z=\frac{x+y}{x-y}$

e) $z=\ln(x^2+2xy-y^3)$ **f)** $z=x^2e^{2y}$ **g)** $z=xe^{-y^2}$ **h)** $z=\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

7. Calcular derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

a) $z=x\cdot y+y\cdot\ln(xy)$ **b)** $z=e^{-(x^2+y^2)}$ **c)** $z=xe^{x/y}$ **d)** $z=\ln(x^2+y^2)$

e) $z=e^{-x}\mathrm{sen}y$ **f)** $u=e^{ax+by^2+cz^3}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$ **g)** $u=\frac{x+y+z}{w}$ **h)** $e^z=(u+1)^{1/3}(v+2)^{1/4}(w+3)^{1/5}$

8. Dada la función $z(x,y)=xy(x^2-y^2)$. Calcular $z'_y(x,0)$, $z'_x(0,y)$, $z''_{xy}(0,0)$, $z''_{yx}(0,0)$.

9. Estudiar la derivabilidad de $z(x,y)=x^3y^3$. ¿Puedes concluir algo para la diferenciabilidad?

10. Hallar la diferencial primera y segunda de las siguientes funciones:

a) $z=x^3-3xy+y^3$ **b)** $z=\mathrm{sen}(3x)\cdot\cos(4y)$ **c)** $z=e^{ax}\cdot\cos(b\cdot y)$, para $a,b\in\mathbb{R}$ **d)** $z=xe^{yx}$.

¿Cuánto valen cada una de ellas en el punto (0,0)? ¿Se obtiene un valor numérico?

11. Sin utilizar la calculadora calcular aproximadamente $\sqrt[6]{65}\ln(1.1)$. Comparar el resultado obtenido con el conseguido con una calculadora.

12. Comprobar que para valores pequeños de x e y se puede escribir la igualdad aproximada siguiente:

$$e^x \ln(1+y) \approx y + xy - \frac{y^2}{2}$$

Utilizar dicha expresión para calcular aproximadamente $e^{0.2}\ln(1.1)$.

13. Sea N el número de peticionarios de plaza en una universidad, p los costes por alimentación y vivienda, y t el coste de la matrícula. Supongamos que N es una función de p y t tal que $\frac{\partial N}{\partial p} < 0, \frac{\partial N}{\partial t} < 0$.¿Cómo interpreta el hecho de que ambas parciales sean negativas?

14. Dada una empresa que produce pañuelos según la siguiente función de producción:

$$Q(M_1, M_2, L) = M_1^2 + 2M_2^2 + 3L^2 - \frac{M_1 M_2 L}{100}$$

donde M_1 es el tiempo de utilización de la máquina 1, M_2 el de la máquina 2 y L la cantidad de mano de obra, calcular las derivadas parciales e interpretarlas en términos de las funciones de productividad marginal de la producción respecto de las horas empleadas en cada máquina y respecto de L.

15. Se estima que la producción semanal en cierta planta (unidades) está dada por la función $Q(x,y) = 1200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2$, donde x es el número de trabajadores cualificados e y es el número de trabajadores no cualificados empleados en la planta. En la actualidad, la fuerza laboral está conformada por 30 trabajadores cualificados y 60 no cualificados. Aplicar el análisis marginal para calcular aproximadamente el cambio resultante en la producción semanal al adicionar un trabajador cualificado, si no cambia el número de trabajadores no cualificados.

16. Se lanza un nuevo producto al mercado. El volumen de ventas x se incrementa como una función del tiempo t (en meses) y de la cantidad A (en u.m.) gastada en publicidad según la ecuación:

$$x = x(t, A) = 200\left(5 - e^{-0.002A}\right)(1 - e^{-t})$$

Calcular $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial x}{\partial A}$. Evaluar estas derivadas cuando $t = 1$ y $A = 400$ e interpretar su resultado.

17. La función de costes de una empresa es $C(x,p) = 600\sqrt{p}\ln x$, donde x es la producción y p el precio medio de sus inputs. Se pide:

a) Calcular el dominio matemático y económico de C. ¿Coinciden?

Si la producción actual es de 100 u. y el precio de 4 u.m.:

b) Calcular el efecto que tiene sobre el coste total un incremento unitario del precio de los inputs.

c) Calcular el efecto que tiene sobre el coste marginal (respecto a la producción) un incremento unitario del precio de los inputs.

Y si el precio pasara a ser $p = 4.1$ u.m. ($(x_0, p_0) = (100,4) \hookrightarrow (x,p) = (100, 4.1)$):

d) ¿Cuánto aumentaría aproximadamente el coste total?

e) ¿Y el coste marginal (respecto a la producción)?

18. La función de utilidad de un consumidor respecto de dos bienes A y B es

$$U(x,y) = \ln(1+xy)$$

siendo x e y las cantidades que consume de ambos bienes respectivamente. Supongamos que el consumo actual es $(x,y) = (10,10)$. Se pide:

a) Obtener la utilidad marginal respecto del bien A. Interpretar su signo.

b) Justificar matemáticamente esta afirmación: "Por cada unidad que aumenta el consumo de A, la utilidad marginal de A disminuye, es decir, la satisfacción adicional del consumidor al aumentar el consumo de A es cada vez menor".

c) Justificar matemáticamente esta afirmación: “Por cada unidad que aumenta el consumo de B, la utilidad marginal de A aumenta”.

19. La función $B(x,y)$ determina el beneficio de una empresa a partir de las cantidades producidas *x* e *y* de dos artículos. ¿Qué interpretación tiene este resultado, $\frac{\partial^2 B}{\partial y^2}(3000{,}1000) = -0.3$?

20. La demanda de un artículo viene dada por $D(p,r,t) = \frac{\sqrt{r}+0.1t}{p^2}$ donde p es el precio, r la renta de los consumidores y t el tiempo en años. Razonar si D'_p aumenta o disminuye con el tiempo.

21. La función $B(p,q,t) = 100e^{0.1t}(10p - 2q)$ representa los beneficios de una empresa en función del precio p de venta de su producto, el precio q de su principal materia prima y el tiempo t en años. En la actualidad $(t = 0)$ se tiene $p = 1, q = 2$. Aproximar (sin sustituir en la función) el incremento que experimentará el beneficio cuando pasen tres meses $(\Delta t = 1/4)$

22. Dada la función de producción $z = 8L^{0.7}K^{0.3}$, donde $L > 0$ es el factor trabajo y $K > 0$ es el factor capital, calcular las productividades marginales respecto a cada uno de los factores productivos y determinar si los factores son normales, competitivos o independientes entre sí.

23. Dada la función de producción $z = f(x,y) = Kx^a y^b$, con $x, y > 0$ y k, a, b constantes positivas, determinar:

a) La productividad marginal de cada factor.

b) El carácter “creciente” o “decreciente” de la respectiva productividad marginal de cada factor cuando cambia el propio factor, siendo el otro constante.

c) Si la productividad marginal de cada factor depende o no de las cantidades aplicadas del otro.

24. Sabiendo que la función de demanda de un bien *X* es $x = \sqrt{p_x}\ln p_y$ siendo $p_x = 4$ y $p_y = e$ respectivamente el precio de los bienes *X* e *Y*, estudiar la variación de la cantidad demandada cuando los precios respectivos aumentan en 0,01 y 0,002. Observar la utilidad de la diferencial como medida aproximada de la variación de una función.

25. Una empresa puede producir P unidades de su producto al utilizar L unidades de mano de obra y K unidades de capital con $\mathrm{P} = 100\mathrm{L}^{3/4}\,\mathrm{K}^{1/4}$.

a) Calcular la producción total cuando $\mathrm{L} = 81$ y $\mathrm{K} = 16$.

b) Aproximar el efecto de reducir L a 80 e incrementar K a 17, sin necesidad de calcular el verdadero valor de la función en este nuevo punto.

26. El beneficio diario de una empresa viene dado por la función $B(t,x) = 500e^{0.2t}\ln(10 + x)$ siendo t el tiempo en años y x la producción diaria. Considerando que el nivel de producción en la actualidad $(t = 0)$ es de 90 unidades de producto, usar el análisis marginal para estimar, sin sustituir en la función, el incremento de beneficio esperado para dentro de un mes si la empresa reduce su producción diaria a 88 unidades.

27. En cierta fábrica, la producción diaria viene dada por la función $f(x,y) = 60x^{1/2}y^{1/3}$ unidades, donde x representa la inversión de capital, medida en unidades de 1000 euros e y la fuerza de trabajo, medida en minutos-trabajador cada día. Si la dotación de capital actual es de 900000 euros y se emplean 1000 minutos-trabajador cada día, se pide calcular el cambio generado en la producción si la inversión de capital aumenta en 1000 euros y la mano de obra en 2 minutos-trabajador.

28. Una empresa produce dos tipos de bienes (A y B). Denotamos por x el número de unidades producidas del bien A e y el número de unidades producidas del bien B. La citada empresa consigue estimar las funciones de coste marginal dadas respectivamente por las siguientes expresiones:

$$CMg_x = C'_x = 0.08x + 0.01y + 4, \quad CMg_y = C'_y = 0.01x + 0.02y + 2$$

En la actualidad la empresa dispone en stock de 100 unidades del bien A y 200 unidades del bien B. Para ajustarse al mercado actual, la empresa decide aumentar en 2 unidades el stock del bien A y reducir 1 unidad el del bien B. ¿Cómo podrías calcular aproximadamente el incremento en el coste de la empresa?

29. Suponiendo que la cantidad demandada q por un consumidor de determinado bien es función del precio de dicho bien p_1, del precio de un bien sustitutivo p_2 y de la renta disponible R dada por la expresión:

$$q = 500\text{-}3p_1^2 + 2p_2 + 0.02R$$

Calcular las elasticidades de q respecto a p_1, p_2 y R cuando $p_1 = 12$, $p_2 = 8$ y $R = 750$. Interpretar los resultados.

30. Las investigaciones realizadas por una empresa han permitido determinar la función de demanda de su producto:

$$d(p, A, r) = 100 - 2p + 10\ln A + 8\ln r$$

donde p es el precio unitario de venta, A las unidades monetarias anuales dedicadas a publicidad y r la renta media de los consumidores. Hallar la expresión de las elasticidades parciales respecto a cada una de las variables de que depende la función.

31. Dadas las funciones de demanda: $x = \frac{4}{p^2q}$, $y = \frac{16}{pq^2}$ de dos bienes cuyos precios son p y q respectivamente, calcular las funciones de demanda marginal, las elasticidades parciales y estudiar el tipo de relación existente entre los bienes.

32. La empresa Apple ha calculado que, por la venta a un pequeño distribuidor de sus dos nuevos modelos de iPhone, el iPhone X y el iPhone 8, en función de la demanda de cada uno de ellos, sus ingresos totales, en cientos de euros, vendrán dados por la función $I(x, y) = (11 - 0.1x)x + (7.5 - 0.05y)y$, siendo x e y las unidades demandadas de cada modelo respectivamente, mientras que los costes totales serían $C(x, y) = 10 + 5(x + y)$ en cientos de euros. Se pide:

a) Obtener la función beneficios en función de las unidades demandadas para cada modelo. ¿Cuál es su dominio matemático y económico? Justificar la respuesta.

b) ¿Cuál es la expresión que recoge las diferentes combinaciones de producción que proporcionan unos beneficios de 30000 €? ¿Qué concepto matemático has utilizado?

c) Si la demanda actual es de 10 unidades para el iPhone X y 5 unidades para el iPhone 8, decidir mediante el análisis marginal qué le interesa más a la empresa, aumentar en una unidad la demanda del iPhone X o aumentar en una unidad la del iPhone 8.

d) Calcular la elasticidad de la función beneficios con respecto a la demanda de iPhone X para los niveles de demanda del apartado anterior. Interpretar el resultado.

e) Supongamos que la empresa tiene dos opciones:

- Vender obligatoriamente 10 unidades del iPhone X, con libertad para vender del otro modelo cualquier cantidad.
- Vender obligatoriamente 5 unidades del iPhone 8, con libertad para vender del otro modelo cualquier cantidad.

¿Qué opción le resulta más ventajosa en términos de conseguir el máximo beneficio posible?

33. Una empresa oferta un bien A según la función

$$q(p) = -1 + \alpha \cdot p, \text{ con } \alpha>0$$

donde p es el precio unitario de A. Un estudio de mercado permite conocer explícitamente la función de demanda del bien:

$$d(p) = 3 - \beta \cdot p, \text{ con } \beta>0$$

a) Calcular en función de α y β el precio p^* de equilibrio de mercado.

b) Calcular $\frac{\partial p*}{\partial \alpha}, \frac{\partial p*}{\partial \beta}$ e interpretar gráficamente los resultados.

34. Supongamos que la cantidad que se demanda en el mercado de un cierto bien (digamos, bien 1) cuyo precio es p_1 se puede representar mediante el modelo $D_1(p_1, p_2) = \frac{10}{p_2} e^{3\text{-}2p_1}$ siendo p_2 el precio de otro bien ordinario (digamos bien 2). Se pide:

a) Justificar usando la derivada que para un p_2 fijo, un aumento de p_1 hace disminuir la cantidad demandada D_1. Y también, que para un p_1 fijo, un aumento de p_2 hace disminuir la cantidad demandada D_1.

b) Calcular las elasticidades parciales demanda-precio en el punto (1.5, 10) e interpretar los resultados. Justificar si ambos bienes son complementarios, sustitutivos o independientes entre sí.

c) Calcular la curva de nivel que exprese la relación entre los precios para $D_1 = 10$ y realizar su esbozo gráfico justificado analíticamente.

d) Aproximar la función de demanda mediante una función polinómica de grado 2 cerca del punto (1.5, 10) e interpretar el resultado.

EJERCICIOS RESUELTOS TEMA 3

3. La función de producción de una empresa viene dada por $Q(K,L) = 10K^{0.5}L^2$.

a) Obtener la expresión de las isocuantas (curva de isoproducción) correspondientes a los niveles de producción $Q = 10$ y, $Q = 100$. Interpretar su significado.

b) Representarlas gráficamente.

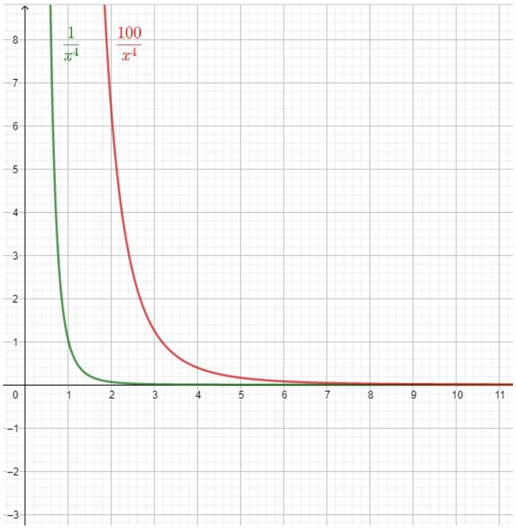
a) $10K^{0.5}L^2 = 10 \rightarrow K^{1/2}L^2 = 1 \rightarrow K \cdot L^4 = 1 \rightarrow K = \dfrac{1}{L^4}$

¿Sabrías decir su significado?

$10K^{0.5}L^2 = 100 \rightarrow K^{1/2}L^2 = 10 \rightarrow K \cdot L^4 = 100 \rightarrow K = \dfrac{100}{L^4}$

¿Sabrías decir su significado?

b)



6. Calcular derivadas parciales de primer y segundo orden de las siguientes funciones:

Recuerda las diferentes notaciones: Derivada parcial de primer orden respecto a x se puede denotar de las siguientes formas (notaciones matemática y económica):

$$\boldsymbol{z_x = z'_x = \frac{\partial z}{\partial x}}$$

a) $\boldsymbol{z = 3x^2 + 4y^3 + 10}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 12y^2$$

$$z''_{xx} = \frac{\partial (z'_x)}{\partial x} = 6$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial (z'_x)}{\partial y} = 0 = z''_{yx}$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial (z'_y)}{\partial y} = 24y$$

b) $\boldsymbol{z = \left(x^2 + 4x \cdot y + y^2\right)^{13}}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 13(x^2 + 4x \cdot y + y^2)^{12} \cdot (2x + 4y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 13(x^2 + 4x \cdot y + y^2)^{12} \cdot (4x + 2y)$$

$$z''_{xx} = 13 \cdot 12(x^2 + 4x \cdot y + y^2)^{11} \cdot (2x + 4y)^2 + 13(x^2 + 4x \cdot y + y^2)^{12} \cdot 2$$

$$z''_{xy} = 13 \cdot 12(x^2 + 4x \cdot y + y^2)^{11} \cdot (4x + 2y) \cdot (2x + 4y) + 13(x^2 + 4x \cdot y + y^2)^{12} \cdot 4$$

$$z''_{yy} = 13 \cdot 12(x^2 + 4x \cdot y + y^2)^{11} \cdot (4x + 2y)^2 + 13(x^2 + 4x \cdot y + y^2)^{12} \cdot 2$$

c) $\boldsymbol{z = x^{-3}y + 4y^3x^2 - 2x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -3x^{-4}y + 8y^3x - 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^{-3} + 12y^2x^2$$

$$z''_{xx} = \frac{\partial(z'_x)}{\partial x} = 12x^{-5}y + 8y^3$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial(z'_x)}{\partial y} = -3x^{-4} + 24y^2x = z''_{yx}$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial(z'_y)}{\partial y} = 24y \cdot x^2$$

d) $\boldsymbol{z = \dfrac{x+y}{x-y}}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cdots = -\frac{2y}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cdots = \frac{2x}{(x-y)^2}$$

$$z''_{xx} = \frac{\partial(z'_x)}{\partial x} = \cdots = \frac{4y}{(x-y)^3}$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial(z'_x)}{\partial y} = \cdots = \frac{-2x - 2y}{(x-y)^3} = z''_{yx}$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial(z'_y)}{\partial y} = \frac{4x}{(x-y)^3}$$

e) $\boldsymbol{z = \ln\left(x^2 + 2x \cdot y - y^3\right)}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x + 2y}{x^2 + 2x \cdot y - y^3}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2x - 3y^2}{x^2 + 2x \cdot y - y^3}$$

$$z''_{xx} = \frac{\partial(z'_x)}{\partial x} = \frac{2(x^2 + 2x \cdot y - y^3) - (2x + 2y) \cdot (2x + 2y)}{(x^2 + 2x \cdot y - y^3)^2} = \frac{-2\,x^2 - 4xy - 2y^3 - 4y^2}{(x^2 + 2x \cdot y - y^3)^2}$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial(z'_x)}{\partial y} = \frac{2(x^2 + 2x \cdot y - y^3) - (2x + 2y) \cdot (2x - 3y^2)}{(x^2 + 2x \cdot y - y^3)^2} = \frac{-2x^2 + 4y^3 + 6xy^2}{(x^2 + 2x \cdot y - y^3)^2} = z''_{yx}$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial(z'_y)}{\partial y} = \frac{-6y \cdot (x^2 + 2x \cdot y - y^3) - (2x - 3y^2) \cdot (2x - 3y^2)}{(x^2 + 2x \cdot y - y^3)^2} = \frac{-6yx^2 + 3y^4 - 4x^2}{(x^2 + 2x \cdot y - y^3)^2}$$

f) $\boldsymbol{z = x^2 e^{2y}}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cdot e^{2y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot 2e^{2y}$$

$$z''_{xx} = \frac{\partial(z'_x)}{\partial x} = 2 \cdot e^{2y}$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial(z'_x)}{\partial y} = 4x \cdot e^{2y} = z''_{yx}$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial(z'_y)}{\partial y} = x^2 \cdot 4e^{2y}$$

g) $\boldsymbol{z = x \ \cdot e^{-y^2}}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \ \cdot e^{-y^2} \cdot (-2y) = -2x \cdot y \cdot e^{-y^2}$$

$$z''_{xx} = \frac{\partial(z'_x)}{\partial x} = 0$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial(z'_x)}{\partial y} = -2y \cdot e^{-y^2} = z''_{yx}$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial(z'_y)}{\partial y} = -2x \cdot e^{-y^2} - 2x \cdot y \cdot e^{-y^2} \cdot (-2y) = -2x \cdot e^{-y^2}(1 - 2y^2)$$

h) $\boldsymbol{z = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \ln(x^2 + y^2)^{1/2} = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + y^2)}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cdots = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cdots = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$z''_{xx} = \frac{\partial(z'_x)}{\partial x} = \cdots = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial(z'_x)}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = z''_{yx}$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial(z'_y)}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

---

7. Calcular derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones:

$\boldsymbol{a}$**)** $\boldsymbol{z = x \cdot y + y \cdot \ln(x \cdot y)}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cdots = y + \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cdots = x + \ln(x \cdot y) + 1$$

$\boldsymbol{b)}\ \boldsymbol{z = e^{-(x^2+y^2)}}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2x)$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2y)$$

$\boldsymbol{c)}\ \boldsymbol{z = x \cdot e^{x/y}}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x/y} + x \cdot e^{x/y} \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot e^{x/y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

$\boldsymbol{d)}\ \boldsymbol{z = \ln(x^2 + y^2)}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$\boldsymbol{e)}\ \boldsymbol{z = e^{-x}\mathrm{sen}(y)}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -e^{-x}\mathrm{sen}(y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-x}\cos(y)$$

$\boldsymbol{f)}\ \boldsymbol{F(x, y, z) = e^{ax+by^2+cz^3}}$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = a \cdot e^{ax+by^2+cz^3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2b \cdot y \cdot e^{ax+by^2+cz^3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 3c \cdot z^2 \cdot e^{ax+by^2+cz^3}$$

$\boldsymbol{g)}\ \boldsymbol{U(x, y, z, w) = \frac{x + y + z}{w}}$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{w}$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{w}$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{w}$$
$$\frac{\partial U}{\partial w} = -\frac{(x + y + z)}{w^2}$$

$\boldsymbol{h)}\ \boldsymbol{e^z = (u + 1)^{1/3} \cdot\ (v + 2)^{1/4} \cdot (w + 3)^{1/5}}$

$$z = \frac{1}{3} \cdot \ln(u + 1) + \frac{1}{4} \cdot \ln(v + 2) + \frac{1}{5} \cdot \ln(w + 3)$$
$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{3(u + 1)}$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{4(v + 2)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{1}{5(w + 3)}$$

10. Hallar la diferencial primera y segunda de las siguientes funciones:

a) $z = x^3 - 3xy + y^3$

b) $z = sen(3x)\cos(4y)$

c) $z = e^{ax}\cos(by)$, para $a, b \in \mathbb{R}$

d) $z = x \cdot e^{y \cdot x}$

¿Cuánto valen cada una de ellas en el punto (0,0)? ¿Se obtiene un valor numérico?

$$dz = z'_x dx + z'_y dy$$

$$d^2z = z''_{xx}(dx)^2 + 2 \cdot z''_{xy}(dx)(dy) + z''_{yy}(dy)^2$$

a) $z = x^3 - 3xy + y^3$

$z'_x = 3x^2 - 3y \to z'_x(0{,}0) = 0$

$z'_y = -3x + 3y^2 \to z'_y(0{,}0) = 0$

$z''_{xx} = 6x \to z''_{xx}(0{,}0) = 0$

$z''_{xy} = -3 \to z''_{xy}(0{,}0) = -3$

$z''_{yy} = 6y \to z''_{yy}(0{,}0) = 0$

$$dz(0{,}0) = z'_x(0{,}0)dx + z'_y(0{,}0)dy = 0 \cdot dx + 0 \cdot dy = 0$$

$$d^2z(0{,}0) = z''_{xx}(0{,}0) \cdot (dx)^2 + 2 \cdot z''_{xy}(0{,}0) \cdot (dx)(dy) + z''_{yy}(0{,}0) \cdot (dy)^2$$

$$d^2z(0{,}0) = 0 \cdot (dx)^2 + 2 \cdot (-3) \cdot (dx)(dy) + 0 \cdot (dy)^2 = -6 \cdot dx \cdot dy$$

b) $z = sen(3x)\cos(4y)$

$z'_x = (3\cos(3x)) \cdot \cos(4y) \to z'_x(0{,}0) = 3$

$z'_y = sen(3x) \cdot (-4\,\mathrm{sen}(4y)) = -4 \cdot sen(3x) \cdot \mathrm{sen}(4y) \to z'_y(0{,}0) = 0$

$z''_{xx} = (-9\,\mathrm{sen}(3x)) \cdot \cos(4y) \to z''_{xx}(0{,}0) = 0$

$z''_{xy} = (3\cos(3x)) \cdot (-4\,\mathrm{sen}(4y)) = -12\cos(3x) \cdot \mathrm{sen}(4y) \to z''_{xy}(0{,}0) = 0$

$z''_{yy} = -4 \cdot sen(3x) \cdot (4\cos(4y)) = -16 \cdot sen(3x) \cdot \cos(4y) \to z''_{yy}(0{,}0) = 0$

$$dz(0{,}0) = z'_x(0{,}0)dx + z'_y(0{,}0)dy = 3 \cdot dx + 0 \cdot dy = 3dx$$

$$d^2z(0{,}0) = z''_{xx}(0{,}0) \cdot (dx)^2 + 2 \cdot z''_{xy}(0{,}0) \cdot (dx)(dy) + z''_{yy}(0{,}0) \cdot (dy)^2$$

$$d^2z(0{,}0) = 0 \cdot (dx)^2 + 2 \cdot 0 \cdot (dx)(dy) + 0 \cdot (dy)^2 = 0$$

c) $z = e^{ax}\cos(by)$, para $a, b \in \mathbb{R}$

$z'_x = a \cdot e^{ax}\cos(by) \to z'_x(0{,}0) = a$

$z'_y = -b \cdot e^{ax}\,\mathrm{sen}(by) \to z'_y(0{,}0) = 0$

$z''_{xx} = a^2 \cdot e^{ax}\cos(by) \to z''_{xx}(0{,}0) = a^2$

$z''_{xy} = -a \cdot b \cdot e^{ax}\,\mathrm{sen}(by) \to z''_{xy}(0{,}0) = 0$

$z''_{yy} = -b^2 \cdot e^{ax}\cos(by) \to z''_{yy}(0{,}0) = -b^2$

$$dz(0{,}0) = z'_x(0{,}0)dx + z'_y(0{,}0)dy = a \cdot dx + 0 \cdot dy = a \cdot dx$$

$$d^2z(0{,}0) = z''_{xx}(0{,}0) \cdot (dx)^2 + 2 \cdot z''_{xy}(0{,}0) \cdot (dx)(dy) + z''_{yy}(0{,}0) \cdot (dy)^2$$

$$d^2z(0{,}0) = a^2(dx)^2 + 2 \cdot 0 \cdot (dx)(dy) + (-b^2)(dy)^2 = a^2(dx)^2 - b^2(dy)^2$$

d) $z = x \cdot e^{y \cdot x}$

$z'_x = e^{y \cdot x} + x \cdot y \cdot e^{y \cdot x} = (1 + x \cdot y) \cdot e^{y \cdot x} \to z'_x(0{,}0) = 1$

$z'_y = x^2 \cdot e^{y \cdot x} \rightarrow z'_y(0,0) = 0$

$z''_{xx} = y \cdot e^{y \cdot x} + (1 + x \cdot y) \cdot y \cdot e^{y \cdot x} = (2 + x \cdot y) \cdot y \cdot e^{y \cdot x} \rightarrow z''_{xx}(0,0) = 0$

$z''_{xy} = x \cdot e^{y \cdot x} + (1 + x \cdot y) \cdot x \cdot e^{y \cdot x} = (2 + x \cdot y) \cdot x \cdot e^{y \cdot x} \rightarrow z''_{xy}(0,0) = 0$

$z''_{yy} = x^3 \cdot e^{y \cdot x} \rightarrow z''_{yy}(0,0) = 0$

$$dz(0,0) = z'_x(0,0)dx + z'_y(0,0)dy = 1 \cdot dx + 0 \cdot dy = dx$$

$$d^2z(0,0) = z''_{xx}(0,0) \cdot (dx)^2 + 2 \cdot z''_{xy}(0,0) \cdot (dx)(dy) + z''_{yy}(0,0) \cdot (dy)^2$$

$$d^2z(0,0) = 0 \cdot (dx)^2 + 2 \cdot 0 \cdot (dx)(dy) + 0 \cdot (dy)^2 = 0$$

A la vista de los resultados, ¿se obtiene siempre un valor numérico?

Adicionalmente al problema inicial, supongamos que conocemos los incrementos correspondientes, por ejemplo supongamos que: $dx \approx \Delta x = 0.1, \quad dy \approx \Delta y = 0.2$. ¿En este caso se obtiene la misma conclusión que la pregunta anterior?

Luego, ¿en qué casos sabemos con certeza que obtendremos valores numéricos utilizando la diferencial?

---

12. Comprobar que para valores pequeños de x e y se puede escribir la igualdad aproximada siguiente:

$$e^x \ln(1 + y) \approx y + xy - \frac{y^2}{2}$$

Utilizar dicha expresión para calcular aproximadamente $e^{0.2} \ln(1.1)$.

Para este cálculo necesitamos el Desarrollo de Taylor de orden 2 de la función $f(x,y) = e^x \ln(1 + y)$ en un entorno del $(x_0, y_0) = (0,0)$:

$$f(x,y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0)$$

$f(x,y) = e^x \ln(1 + y) \rightarrow f(0,0) = 0$

$f'_x(x,y) = e^x \ln(1 + y) \rightarrow f'_x(0,0) = 0$

$f'_y(x,y) = \dfrac{e^x}{1 + y} \rightarrow f'_y(0,0) = 1$

$df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy \rightarrow df(0,0) = 0 \cdot \Delta x + \Delta y = (y - 0) = y$

$f''_{xx}(x,y) = e^x \ln(1 + y) \rightarrow f''_{xx}(0,0) = 0$

$f''_{xy}(x,y) = \dfrac{e^x}{1 + y} \rightarrow f''_{xy}(0,0) = 1$

$f''_{yy}(x,y) = -\dfrac{e^x}{(1 + y)^2} \rightarrow f''_{yy}(0,0) = -1$

$d^2 f(x,y) = f''_{xx}(x,y)(dx)^2 + 2f''_{xy}(x,y)(dx)^2(dy)^2 + f''_{yy}(x,y)(dy)^2$

$d^2 f(0,0) = 0 \cdot \ (\Delta x)^2 + 2 \cdot 1 \cdot (\Delta x)^2(\Delta y)^2 + (-1) \cdot (\Delta y)^2$

$d^2 f(0,0) = 2(x - 0)(y - 0) - (y - 0)^2 = 2xy - y^2$

Luego en un entorno de $(x_0, y_0) = (0,0)$:

$$f(x,y) \approx f(0,0) + df(0,0) + \frac{1}{2!} d^2 f(0,0)$$

$$f(x,y) \approx 0 + y + \frac{1}{2}(2x \cdot y - y^2)$$

$$f(x,y) \approx y + 2x \cdot y - \frac{y^2}{2}$$

Si queremos calcular

$$e^{0.2} \ln(1.1) = e^{0.2} \ln(1 + 0.1) = f(0.2, 0.1) \approx 0.1 + 2 \cdot 0.2 \cdot 0.1 - \frac{(0.1)^2}{2} = 0.135$$

15. Se estima que la producción semanal en cierta planta (unidades) está dada por la función $Q(x, y) = 1200x + 500y + x^2y - x^3 - y^2$, donde x es el número de trabajadores cualificados e y es el número de trabajadores no cualificados empleados en la planta. En la actualidad, la fuerza laboral está conformada por 30 trabajadores cualificados y 60 no cualificados. Aplicar el análisis marginal para calcular aproximadamente el cambio resultante en la producción semanal al adicionar un trabajador cualificado, si no cambia el número de trabajadores no cualificados.

$Q'_x = 1200 + 2x\,y - 3x^2$

$Q'_y = 500 + x^2 - 2y$

$(x_0 = 30, \qquad y_0 = 60) \to (x_1 = 31, \qquad y_1 = 60)$

Análisis marginal:

$$\Delta Q = Q(31{,}60) - Q(30{,}60) \approx Q'_x(30{,}60)\Delta x$$

Entonces:

$Q'_x(30{,}60) = 2100 \to x_0 = 30 \uparrow 1$ unidad $\Rightarrow Q \uparrow$ aprox. 2100 unidades

Cambio exacto:

$$\Delta Q = Q(31{,}60) - Q(30{,}60) = 91469 - 89400 = 2069$$

Error cometido con el análisis marginal:

$$|\text{Valor exacto} - \text{Valor aprox.}| = |2069 - 2100| = 31$$

16. Se lanza un nuevo producto al mercado. El volumen de ventas x se incrementa como una función del tiempo t (en meses) y de la cantidad A (en u.m.) gastada en publicidad según la ecuación:

$$x = x(t, A) = 200(5 - e^{-0.002A})(1 - e^{-t})$$

Calcular $\frac{\partial x}{\partial t}, \ \frac{\partial x}{\partial A}$. Evaluar estas derivadas cuando $t = 1$ y $A = 400$ e interpretar su resultado.

$$\frac{\partial x}{\partial t} = 200(5 - e^{-0{,}002A})e^{-t} \to \left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{(t=1, A=400)} \approx 334.82$$

A partir de $(t = 1, A = 400)$, si $t \uparrow 1$ unidad (A constante) entonces el volumen de ventas x aumenta aproximadamente 334.82 u.m.

$$\frac{\partial x}{\partial A} = 0.4\, e^{-0.002\,A}\,(1\; - \;e^{-t}) \to \left.\frac{\partial x}{\partial A}\right|_{(t=1, A=400)} \approx 0.113612$$

A partir de $(t = 1, A = 400)$, si $A \uparrow 1$ unidad (t constante) entonces el volumen de ventas x aumenta aproximadamente 0.113612 u.m.

17. La función de costes de una empresa es $C(x,p) = 600\sqrt{p}\ln x$, donde x es la producción y p el precio medio de sus inputs. Se pide:

- **a)** Calcular el dominio matemático y económico de C. ¿Coinciden?

Si la producción actual es de 100 u. y el precio de 4 u.m.:

- **b)** Calcular el efecto que tiene sobre el coste total un incremento unitario del precio de los inputs.
- **c)** Calcular el efecto que tiene sobre el coste marginal (respecto a la producción) un incremento unitario del precio de los inputs.

Y si el precio pasara a ser $p = 4.1$ u.m.:

- **d)** ¿Cuánto aumentaría aproximadamente el coste total?
- **e)** ¿Y el coste marginal (respecto a la producción)?

---

a)

Dominio matemático $\{(x,p) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, p \geq 0\}$

Dominio económico $\{(x,p) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, p \geq 0\}$

b)

$(x_0 = 100,\ p_0 = 4) \rightarrow (x_1 = 100,\ p_1 = 5)$

Cambio aproximado del coste total (ante un incremento unitario del precio):

$$\frac{\partial C(x,p)}{\partial p} = \frac{300}{\sqrt{p}}\ln x \rightarrow \frac{\partial C}{\partial p}_{|(x=100,p=4)} \approx 690.7755$$

Cambio exacto (dos decimales):

$$C(100,5) - C(100,4) \approx 6178.48 - 5526.2 \approx 652.28$$

c)

$(x_0 = 100,\ p_0 = 4) \rightarrow (x_1 = 100,\ p_1 = 5)$

Coste marginal respecto a la producción:

$$\frac{\partial C(x,p)}{\partial x} = \frac{600\sqrt{p}}{x}$$

Cambio aproximado del coste marginal respecto de la producción (ante un incremento unitario del precio):

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial C(x,p)}{\partial x}\right)_{|(x=100,p=4)} = \left(\frac{300}{x \cdot \sqrt{p}}\right)_{|(x=100,p=4)} = 1.5$$

Cambio exacto (cuatro decimales):

$$\left(C'_{x\,|(x=100,p=5)} - C'_{x\,|(x=100,p=4)}\right) = 13.4164 - 12 = 1.4164$$

d)

$(x_0 = 100,\ p_0 = 4) \rightarrow (x_1 = 100,\ p_1 = 4.1)$

$$\frac{\partial C(x,p)}{\partial p} = \frac{300}{\sqrt{p}}\ln x$$

Cambio aproximado del coste total:

$\Delta C \approx C'_p(100,4) \cdot \Delta x = C'_p(100,4) \cdot 0.1 = 69.07755$

Cambio exacto (dos decimales):

$\Delta C = C(100,4.1) - C(100,4) = 5594.86 - 5526.2 = 68.66$

e)

$(x_0 = 100,\ p_0 = 4) \to (x_1 = 100,\ p_1 = 4.1)$

Cambio aproximado del coste marginal respecto de la producción:

$$\Delta C'_x \approx \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial C(x,p)}{\partial x}\right)_{|(x=100,p=4)} \cdot \Delta x \approx 0.15$$

Cambio exacto (tres decimales):

$$\Delta C'_x = \left(C'_{x|(x=100,p=4.1)} - C'_{x|(x=100,p=4)}\right) = 12.1491 - 12 = 0.1491$$

---

18. La función de utilidad de un consumidor respecto de dos bienes A y B es

$$U(x,y) = \ln(1+xy)$$

siendo x e y las cantidades que consume de ambos bienes respectivamente. Supongamos que el consumo actual es $(x,y) = (10,10)$. Se pide:

a) Obtener la utilidad marginal respecto del bien A. Interpretar su signo.

b) Justificar matemáticamente esta afirmación: "Por cada unidad que aumenta el consumo de A, la utilidad marginal de A disminuye, es decir, la satisfacción adicional del consumidor al aumentar el consumo de A es cada vez menor".

c) Justificar matemáticamente esta afirmación: "Por cada unidad que aumenta el consumo de B, la utilidad marginal de A aumenta".

---

a)

$$U'_x = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \frac{y}{1+xy} \to U'_x(10,10) = \frac{10}{101} \approx 0.099$$

Entonces si:

$(x_0 = 10,\ y_0 = 10) \to (x_1 = 11,\ y_1 = 10) \Rightarrow U \uparrow 0.099$ aproximadamente

b)

$$U''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(U'_x) = -\frac{y^2}{(1+x\,y)^2} < 0 \to \quad x\uparrow \ (y \text{ constante}) \Rightarrow U'_x \downarrow$$

Nota: Esta afirmación es válida para cualquier punto del dominio de la función.

c)

$$U''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(U'_x) = \cdots = \frac{1}{(1+x\,y)^2} > 0 \to y\uparrow \ (x \text{ constante}) \Rightarrow U'_x \uparrow$$

Nota: Esta afirmación es válida para cualquier punto del dominio de la función.

---

21. La función $B(p,q,t) = 100\,e^{0.1t}(10p - 2q)$ representa los beneficios de una empresa en función del precio p de venta de su producto, el precio q de su principal materia prima y el tiempo t en años. En la actualidad $(t = 0)$ se tiene $p = 1,\ q = 2$. Aproximar (sin sustituir en la función) el incremento que experimentará el beneficio cuando pasen tres meses $(\Delta t = 1/4)$

$$B(p,q,t) = 100\,e^{0.1t}(10p - 2q) \to B'_t = \frac{\partial B}{\partial t} = 10\,e^{0.1t}(10p - 2q)$$

Recordemos

$$B'_t = \frac{\partial B}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta B}{\Delta t}$$

Si $\Delta t \to 0$,

$$\frac{\partial B}{\partial t} \approx \frac{\Delta B}{\Delta t} \to \Delta B \approx \frac{\partial B}{\partial t} \cdot \Delta t = dB$$

Volver al índice

Luego si $\Delta t \to 0$:

$$\Delta B \approx B'_t \cdot \Delta t$$

Estamos en la situación de que en el momento actual es $(p, q, t_0) = (1,2,0)$ y pasamos a $(p, q, t_1) = \left(1, 2, \frac{1}{4}\right)$. Podemos calcular el beneficio marginal respecto del tiempo en el momento actual y nos dará:

$$B'_t(1,2,0) = 60.$$

Entonces

$$\Delta B(p, q, t_0) \approx B'_t(p, q, t_0) \cdot \Delta t$$
$$\Delta B(1,2,0) \approx B'_t(1,2,0) \cdot (1/4) = 15$$

El cambio del beneficio total cuando pasen tres meses será aproximadamente de 15 u.m.

Aunque el problema no lo pide, vamos a ver el cambio exacto de pasar del punto $(p, q, t_0) = (1,2,0)$ al punto $(p, q, t_1) = \left(1, 2, \frac{1}{4}\right)$

$$\Delta B(1,2,0) = B\left(1, 2, \frac{1}{4}\right) - B(1,2,0) = 615.189 - 600 = 15.189$$

El cambio exacto (con dos decimales) es 15.189 u.m.

El error que cometemos aproximando con la diferencial es: $|15.189 - 15| = 0.189$

---

25. Una empresa puede producir P unidades de su producto al utilizar L unidades de mano de obra y K unidades de capital con $P(L, K) = 100L^{3/4}K^{1/4}$.

a) Calcular la producción total cuando $L = 81$ y $K = 16$.

b) Aproximar el efecto de reducir L a 80 e incrementar K a 17, sin necesidad de calcular el verdadero valor de la función en este nuevo punto.

---

a) $P(L, K) = 100L^{3/4}K^{1/4}$

$$\boldsymbol{P(81, 16) = 100(81)^{\frac{3}{4}}(16)^{\frac{1}{4}} = 100\ 3^3\ 2 = 5400}$$

b) *Vamos a realizar primero el estudio con orden 1 y después con orden 2:*

b1) *Desarrollo de Taylor de orden 1 de la función $P(L, K)$ en un entorno del punto $(81,16)$ tenemos:*

$$\boldsymbol{P(L, K) \approx P(81, 16) + \frac{dP(81, 16)}{1!}},$$

siempre que (L, K) esté en un entorno del punto $(81,16)$.

Nota: *Recuerden que $n! = n(n-1) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ y que $dP(L, K) = P_L dL + P_K dK$*

En general, la coordenada inicial es (81,16) y pasamos a una coordenada próxima (L, K). ¿Cuáles son $\Delta L, \Delta K$?

$$\Delta L = L - 81 \qquad \Delta K = K - 16$$

Concretamente el problema nos plantea (81,16) y si pasamos a $(80,17)$.

Por tanto $\boldsymbol{\Delta L = -1}$, $\boldsymbol{\Delta K = 1}$.

Del apartado a) conocemos el valor de $P(81,16) = 5400$, únicamente nos falta conocer

$$dP(81,16) = P'_L(81,16)dL + P'_K(81,16)dK$$

Calculamos las derivadas parciales de primer orden y obtenemos:

$$P'_L(L, K) = 100\frac{3}{4}L^{\frac{3}{4}-1}K^{\frac{1}{4}} = 75L^{-\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}}$$
$$P'_K(L, K) = 100\frac{1}{4}L^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}-1} = 25L^{\frac{3}{4}}K^{-\frac{3}{4}}$$

Sustituimos en el punto (81,16) y obtenemos:

$\boldsymbol{P'_L(81, 16) = \cdots = 50}$, $\qquad \boldsymbol{P'_K(81, 16) = \cdots = 84.375}$

Sustituyendo en la fórmula de la diferencial primera (tanto las derivadas parciales como los incrementos):

$$dP(81,16) = P'_L(81,16)dL + P'_K(81,16)dK =$$
$$= 50\Delta L + 84.375\Delta K = 50 \cdot (-1) + 84.375 \cdot (1) = 34.375$$

Por lo que estamos en condiciones de aproximar el valor de la función en (80,17) *sustituyendo en la fórmula de Taylor de orden 1:*

$\boldsymbol{P(80,17) \approx P(81,16) + dP(81,16) \cong 5400 + 34.375 \cong 5434.375}$

Es decir, la producción será aproximadamente de 5434.375 *unidades.*

Vamos a realizar el estudio con el desarrollo de Taylor de orden 2:

b1) *Desarrollo de Taylor de orden 2 de la función* $P(L,K)$ *en un entorno del punto* $(81,16)$ *tenemos:*

$$\boldsymbol{P(L,K) \approx P(81,16) + \frac{dP(81,16)}{1!} + \frac{d^2P(81,16)}{2!}},$$

siempre que (L,K) *esté en un entorno del punto* $(81,16)$.

Nota: *Recuerden que* $d^2P(L,K) = P''_{LL}(dL)^2 + 2P''_{LK}dLdK + P''_{KK}(dK)^2$

Nótese que hasta orden 1 ya se realizó en el apartado anterior. Únicamente nos falta el cálculo de la diferencial segunda.

Las derivadas parciales de segundo orden se pueden calcular y obtener fácilmente:

$$P''_{LL} = \cdots = -\frac{75}{4}L^{-5/4}K^{1/4}$$
$$P''_{LK} = \cdots = \frac{75}{4}L^{-1/4}K^{-3/4}$$
$$P''_{KK} = \cdots = -\frac{75}{4}L^{3/4}K^{-7/4}$$

Sustituyendo en el punto inicial (81,16)

$$P''_{LL}(81,16) = \cdots = -0.154321$$
$$P''_{LK}(81,16) = \cdots = 0.78125$$
$$P''_{KK}(81,16) = \cdots = -3.95508$$

Luego

$$d^2P(81,16) = P''_{LL}(81,16)(dL)^2 + 2P''_{LK}(81,16)dL \cdot dK + P''_{KK}(81,16)(dK)^2$$
$$= -0.154321(\Delta L)^2 + 2(0.78125)\Delta L \cdot \Delta K + (-3.95508)(\Delta K)^2$$
$$= -0.154321(-1)^2 + 2(0.78125) \cdot (-1) \cdot (1) + (-3.95508)(1)^2 = -5.6719$$

Por lo que estamos en condiciones de aproximar el valor de la función en (80,17) *sustituyendo en la fórmula de Taylor de orden 2:*

$$\boldsymbol{P(80,17) \approx P(81,16) + \frac{dP(81,16)}{1!} + \frac{d^2P(81,16)}{2!}}$$
$$\boldsymbol{\cong 5400 + 34.375 + \frac{-5.6719}{2} \cong 5431.54}$$

Es decir, la producción será aproximadamente de 5434.375 unidades.

A continuación, ***aunque el problema no lo pide****, vamos a estudiar* ***los errores cometidos*** *al aproximar por Taylor de orden 1 y 2 (y lo haremos comparando con el valor exacto, no utilizando fórmulas del error)*

Valor exacto (dos decimales): $P(80,17) = 100(80)^{\frac{3}{4}}(17)^{\frac{1}{4}} = \cdots = 5431.62$

Valor aproximado con Taylor de orden 1: $P(80,17) \approx 5434.375$

Error cometido en valor absoluto con Taylor de orden 1: $|5431.62 - 5434.375| = 2.755$

Valor aproximado con Taylor de orden 2: $P(80,17) \approx 5431.54$

Error cometido en valor absoluto con Taylor de orden 2: $|5431.62 - 5431.54| = 0.08$

29. Suponiendo que la cantidad demandada q por un consumidor de determinado bien es función del precio de dicho bien p_1, del precio de un bien sustitutivo p_2 y de la renta disponible R dada por la expresión:

$$q = 500 - 3p_1^2 + 2p_2 + 0.02R$$

Calcular las elasticidades de q respecto a p_1, p_2 y R cuando $p_1 = 12$, $p_2 = 8$ y $R = 750$. Interpretar los resultados.

$$q = q(p_1, p_2, R) = 500 - 3p_1^2 + 2p_2 + 0.02R$$

Entonces:

$$\varepsilon_{q|p_1} = \frac{\partial q}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{q} = \frac{-6p_1^2}{500 - 3p_1^2 + 2p_2 + 0.02R}$$

$$\varepsilon_{q|p_1}{}_{|(p_1=12, p_2=8, R=750)} \approx -8.7272$$

Entonces si $(p_1 = 12 \uparrow 1\%, p_2 = 8 \text{ const.}, R = 750 \text{ const.}) \Rightarrow q \downarrow \text{aprox. un } 8.72\%$

$$\varepsilon_{q|p_2} = \frac{\partial q}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{q} = \frac{2p_2}{500 - 3p_1^2 + 2p_2 + 0.02R}$$

$$\varepsilon_{q|p_2}{}_{|(p_1=12, p_2=8, R=750)} \approx 0.1616$$

Entonces si $(p_1 = 12 \text{ const.}, p_2 = 8 \uparrow 1\%, R = 750 \text{ const.}) \Rightarrow q \uparrow \text{aprox. un } 0.16\%$

$$\varepsilon_{q|R} = \frac{\partial q}{\partial R} \cdot \frac{R}{q} = \frac{0.02R}{500 - 3p_1^2 + 2p_2 + 0.02R}$$

$$\varepsilon_{q|R}{}_{|(p_1=12, p_2=8, R=750)} \approx 0.1515$$

Entonces si $(p_1 = 12 \text{ const.}, p_2 = 8 \text{ const.}, R = 750 \uparrow 1\%,) \Rightarrow q \uparrow \text{aprox. un } 0.1515\%$

---

31. Dadas las funciones de demanda: $x = \frac{4}{p^2 q}$, $y = \frac{16}{pq^2}$ de dos bienes cuyos precios son p y q respectivamente, calcular las funciones de demanda marginal, las elasticidades parciales y estudiar el tipo de relación existente entre los bienes.

$$x = \frac{4}{p^2 q}, \quad y = \frac{16}{pq^2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -\frac{8}{p^3 q} < 0 \to p \uparrow \quad (q \text{ const.}) \Rightarrow x \downarrow \quad \text{¡¡el primero es un bien ordinario!!}$$

$$\frac{\partial y}{\partial q} = -\frac{32}{pq^3} < 0 \to q \uparrow \quad (p \text{ const.}) \Rightarrow y \downarrow \quad \text{¡¡el segundo es un bien ordinario!!}$$

Al ser los dos bienes ordinarios vamos a ver la relación existe entre ellos:

$$\frac{\partial x}{\partial q} = -\frac{4}{p^2 q^2} < 0 \to q \uparrow \quad (p \text{ const.}) \Rightarrow x \downarrow \quad \text{¡¡son bienes complementarios!!}$$

Calculemos ahora las elasticidades:

$$\varepsilon_{x|p} = \frac{\partial x}{\partial p} \cdot \frac{p}{x} = \cdots = -2$$

$$\varepsilon_{x|q} = \frac{\partial x}{\partial q} \cdot \frac{q}{x} = \cdots = -1$$

$$\varepsilon_{y|p} = \frac{\partial y}{\partial p} \cdot \frac{p}{y} = \cdots = -1$$

$$\varepsilon_{y|q} = \frac{\partial y}{\partial q} \cdot \frac{q}{y} = \cdots = -2$$

¿Sabrías dar su significado?

34. Supongamos que la cantidad que se demanda en el mercado de un cierto bien (digamos, bien 1) cuyo precio es p_1 se puede representar mediante el modelo $D_1(p_1, p_2) = \frac{10}{p_2} e^{3-2p_1}$ siendo p_2 el precio de otro bien ordinario (digamos bien 2). Se pide:

a) Justificar usando la derivada que para un p_2 fijo, un aumento de p_1 hace disminuir la cantidad demandada D_1. Y también, que para un p_1 fijo, un aumento de p_2 hace disminuir la cantidad demandada D_1.

b) Calcular las elasticidades parciales demanda-precio en el punto (1.5, 10) e interpretar los resultados. Justificar si ambos bienes son complementarios, sustitutivos o independientes entre sí.

c) Calcular la curva de nivel que exprese la relación entre los precios para $D_1 = 10$ y realizar su esbozo gráfico justificado analíticamente.

d) Aproximar la función de demanda mediante una función polinómica de grado 2 cerca del punto (1.5, 10) e interpretar el resultado.

---

a) Denotemos: $D = D_1$

$D'_{p_1} = -\frac{20}{p_2} e^{3-2p_1} < 0 \rightarrow$ ¡¡bien 1 ordinario!!

$D'_{p_2} = -\frac{10}{p_2^2} e^{3-2p_1} < 0 \rightarrow$ bienes complementarios

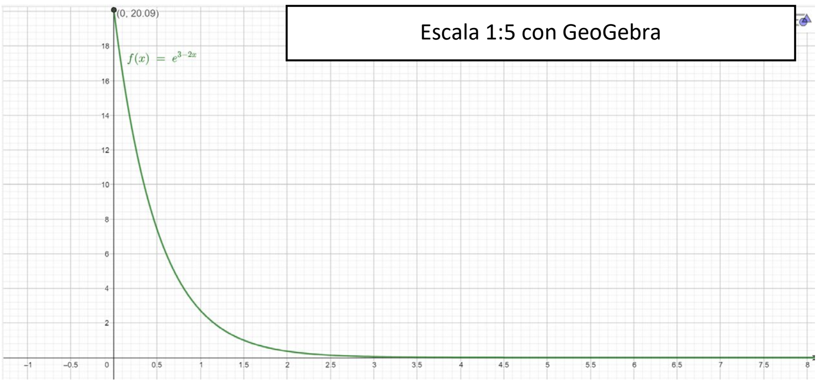
b) $\varepsilon_{D|p_1} = D'_{p_1} \cdot \frac{p_1}{D} = \cdots = -2p_1 \rightarrow$ sustituyendo en el punto solicitado nos da:

$\varepsilon_{D|p_1|(p_1=1.5, p_2=10)} = -3 \rightarrow$ a partir de $(p_1 = 1.5, p_2 = 10)$ si $p_1 \uparrow 1\%$ (p_2 constante) entonces $D \downarrow 3\%$ aprox.

$\varepsilon_{D|p_2} = D'_{p_2} \cdot \frac{p_2}{D} = \cdots = -1 \rightarrow$ sustituyendo en el punto solicitado nos da también:

$\varepsilon_{D|p_2|(p_1=1.5, p_2=10)} = -1 \rightarrow$ a partir de $(p_1 = 1.5, p_2 = 10)$ si $p_2 \uparrow 1\%$ (p_1 constante) entonces $D \downarrow 1\%$ aprox.

c) $\frac{10}{p_2} e^{3-2p_1} = 10 \rightarrow p_2 = e^{3-2p_1}$



d) Desarrollo de Taylor de orden 2 en un entorno del punto (1.5,10)

$$D(x, y) \approx D(1.5,10) + dD(1.5,10) + \frac{1}{2} d^2 D(1.5,10)$$

$D'_{p_1} = -\frac{20}{p_2} e^{3-2p_1} \qquad D'_{p_2} = -\frac{10}{p_2^2} e^{3-2p_1}$

$dD(1.5,10) = D'_{p_1}(1.5,10) dp_1 + D'_{p_2}(1.5,10) dp_2 = -2(x - 1.5) - 0.1(y - 10)$

$D''_{p_1 p_1} = \frac{40}{p_2} e^{3-2p_1} \qquad D''_{p_1 p_2} = \frac{20}{p_2^2} e^{3-2p_1} \qquad D''_{p_2 p_2} = \frac{20}{p_2^3} e^{3-2p_1}$

$d^2 D = D''_{p_1 p_1}(dx)^2 + 2\, D''_{p_1 p_2} dx\, dy + D''_{p_2 p_2}(dy)^2$, sustituyendo en (1.5,10)

$d^2 D(1.5,10) = 4(x - 1.5)^2 + 2 \cdot 0.2(x - 1.5)(y - 10) + 0.02(y - 10)^2$

Sustituyendo todo lo anterior tenemos que para cualquier (x, y) en un entorno de (1.5,10) la función de demanda se puede aproximar por:

$D(x, y) \approx 1 - 2(x - 1.5) - 0.1(y - 10) + 2(x - 1.5)^2 + 0.2(x - 1.5)(y - 10) + 0.01(y - 10)^2$

TEMA 4: FUNCIONES COMPUESTAS E IMPLÍCITAS

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dadas las siguientes funciones, calcular las derivadas de la función compuesta que se indica:

a) $y = 2x^4$, $x = 6 - t^3$, calcular: $\frac{dy}{dt}(t = 1)$.

b) $z = x^2y - y^2$, $x = \operatorname{sen}(t)$, $y = e^t$, calcular: $\frac{dz}{dt}(t = 0)$.

c) $z = e^{xy}$, $x = 3t + 2u$, $y = 4t - 2u$, calcular: $z'_t(t = 1, u = 0)$, y, $z'_u(t = 1, u = 0)$.

2. Dadas $w = f(u, v)$ donde $u = x^2 + 2yz$, $v = y^2 + 2zx$, calcular:

a) w'_x , w'_y , w'_z

b) Primera diferencial de u y de v en función de x, y, z.

c) Primera diferencial de w en función de x, y, z.

3. Sean las funciones $z = f(u, v)$, con $u = x^2 + y$, $v = y - x^2$. Calcular $dz(x, y)$ en $x = 1$ e $y = 1$, sabiendo que $z'_u(2,0) = 3$ y $z'_v(2,0) = -1$.

4. Sea $f(u, v)$ una función continua y derivable parcialmente en $\mathbb{R}^2$ y z una función de las variables x, y, t definida por la expresión $z = f(x + 2t, y + t)$. Si denotamos $u = x + 2t$, $v = y + t$, y sabiendo que $f(3,2) = 1$, $f'_u(3,2) = 5$, $f'_v(3,2) = -3$, calcular:

a) $dz(1,1,1)$

b) Calcular aproximadamente $z(1,1,0.8)$ utilizando el desarrollo de Taylor de primer grado. ¿Podrías conocer su valor exacto?

5. Dada la función y definida implícitamente por $xy - e^y + e^{x+1} = 0$.

a) Siguiendo el Teorema de existencia de la función implícita, ¿se puede asegurar que y es función implícita de x en el entorno del punto $(a, b) = (0, 1)$?

b) ¿Se puede despejar y en función de x?

c) Comprobar que aunque no se pueda despejar, se puede calcular $y'(x)$, $y''(x)$. ¿Qué condición se tiene que verificar para que estén bien definidas?

d) Calcular $y'(0)$, $y''(0)$.

e) Encontrar una expresión explícita aproximada para $y(x)$ en un entorno del origen a través de la fórmula de Taylor.

6. Dada la ecuación $x^2 + 3xy + y^2 + 2z^2 - xyz - 6 = 0$. ¿Podemos garantizar que z es función implícita de x e y en un entorno del punto $(1, 1, 1)$? ¿Puedes calcular $z'_x(1,1)$?

7. Dada la ecuación $F(x, y, z) = 3x^2yz - y\ln x - 3 = 0$, estudiar la existencia de la función implícita $z = f(x, y)$ en un entorno del punto $(1,1,1)$. Obtener, si es posible, el valor de $z'_x(1,1)$.

8. Hallar z'_x y z'_y para la función $z = z(x, y)$ dada implícitamente por la expresión:

$$y^3 + 2x^3 + z^3 - 3xyz - 2x + 3 = 0.$$

9. Sabiendo que z viene definida implícitamente por la ecuación $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - 2x + 2z = 0$, calcular las derivadas parciales de primer orden en el punto $(1,1)$.

10. Sabiendo que la ecuación $F(x, y, z) = e^z + z + xy + 2 = 0$ define a z como función implícita de x e y, verificando: $z(x = -1, y = 3) = 0$, calcular $z'_x(-1,3)$, $z'_y(-1,3)$

11. Sea la función dada por $z(x, y) = e^y f\left(\frac{x}{y}\right)$ siendo f una función derivable creciente y convexa. Estudiar el signo de z''_{xx} para x, y>0.

12. Sea $z = f(x, y)$ una función dada implícitamente por $F(x - z, y - z) = 0$ donde F es una función de dos variables diferenciable. Calcular las primeras derivadas parciales de z.

13. Una empresa estima que sus beneficios vienen dados por la función

$$B(t,p) = \frac{4+0.2t}{\sqrt{p^2-5}}$$

donde el numerador es una estimación de la demanda futura en función del tiempo t y el denominador una corrección en función del IPC (índice de precios al consumo). El tiempo actual es $t = 1$ y el IPC es $p = 3$ u.m. No hay ninguna previsión fiable de la evolución del IPC pero la empresa estima que en la actualidad $p'(t)$ para $t = 1$ es 0.2. Según estas estimaciones ¿los beneficios de la empresa van a aumentar o a disminuir a corto plazo?

14. La demanda de un artículo depende del tiempo t, de su precio p y de la renta r de los consumidores según la función $\mathrm{D}(\mathrm{t},\mathrm{p},\mathrm{r}) = 1000 \cdot \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{p}} \mathrm{e}^{\mathrm{t}/10}$. Actualmente el precio es $\mathrm{p} =$ 2€ y la renta $\mathrm{r} = 400$ €.

a) Calcular la derivada parcial de D con respecto de t en el punto $(0, 2, 400)$ e interpretar el resultado.

b) ¿Podemos usar únicamente la derivada anterior para determinar la demanda del año próximo si sabemos además que $\mathrm{p}'(\mathrm{t})_{|\mathrm{t}=0} = 0.2$ €/año y que $\mathrm{r}'(\mathrm{t})_{|\mathrm{t}=0} = 15$ €/año? En caso contrario, calcular la derivada que indica realmente la demanda esperada para el año próximo e interpretar el resultado.

15. La La función de costes de una empresa es $\mathrm{C}(\mathrm{x}) = 2000 + 5\mathrm{x}$, donde x es la cantidad producida de un artículo. Su función de beneficios es $\mathrm{B}(\mathrm{x},\mathrm{C},\mathrm{D})$ donde D representa la demanda. Para los valores actuales $(\mathrm{x}_0, \mathrm{C}_0, \mathrm{D}_0)$ se tiene que $\mathrm{B}'_{\mathrm{x}} = 8$, $\mathrm{B}'_{\mathrm{C}} = \text{-}3$, $\mathrm{B}'_{\mathrm{D}} = 10$.

a) Suponiendo que D no depende de x ¿es correcto afirmar que si la empresa produce una unidad más sus beneficios aumentarán en 8 u.m.?

b) Suponiendo que $\mathrm{D} = \mathrm{x}$ ¿es correcto afirmar que si la empresa produce una unidad más sus beneficios aumentarán en 8 u.m.?

c) Razonar si a la empresa le conviene o no aumentar su producción según el caso.

16. La función $B(p,q,t) = 1000e^{0.1t}(10p - 2q)$ representa los beneficios de una empresa en función del precio p de venta de su producto, el precio q de su principal materia prima y el tiempo t en años. En la actualidad $(t = 0)$ se tiene $p = 1$ y $q = 2$.

a) Calcular la derivada parcial de B con respecto de t en el momento actual e interpretarla.

b) La empresa ajusta el precio p en función del precio q de la materia prima y del tiempo t. Sabiendo que $p'_{q}{}_{|(q=2,t=0)} = 0.1$, $p'_{t}{}_{|(q=2,t=0)} = 0.2$, estudiar si estos datos modifican la previsión del apartado a).

17. Sea $\mathrm{Q}(\mathrm{L},\mathrm{K}) = 3\mathrm{K}^2\mathrm{L}^3$ la función de producción de una empresa donde K es el capital y L el trabajo. Actualmente la empresa utiliza las cantidades $(\mathrm{L},\mathrm{K}) = (4{,}5)$.

a) Escribir la expresión de la isocuanta que corresponde a la producción actual.

b) Obtener la función implícita $\mathrm{K}(\mathrm{L})$ definida por dicha ecuación.

c) Calcular la Relación de Sustitución Técnica dada por $\mathrm{RST} = \text{-}\mathrm{K}'(\mathrm{L})$. Realiza el cálculo a partir de la función $\mathrm{K}(\mathrm{L})$ y derivando implícitamente la ecuación de la isocuanta.

d) Calcular la RST actual e interpretarla.

18. Un consumidor adquiere dos bienes en cantidades x e y, de modo que su función de utilidad es

$\mathrm{U}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \sqrt{\mathrm{x}} + \sqrt{\mathrm{y}}$. Su nivel de consumo actual es $(\mathrm{x},\mathrm{y}) = (9{,}4)$.

a) Calcular la utilidad actual.

b) Escribir la ecuación de la curva de indiferencia actual e interpretarla.

c) Calcular la Relación Marginal de Sustitución RMS dada por $\mathrm{RMS} = \text{-}\mathrm{y}'(\mathrm{x})$. Realizar el cálculo derivando implícitamente la ecuación. Interpretar el valor de $\mathrm{RMS}(9)$.

19. Sabiendo que la ecuación $F(q,p_1,p_2,y)=10p_1q+5q-2p_2-4y-18=0$ define una función implícita de demanda de un bien $q=q(p_1,p_2,y)$ donde p_1 es el precio propio, p_2 el precio de un bien ordinario relacionado e y el ingreso, se pide hallar las elasticidades de la demanda respecto al propio precio y las cruzadas en el punto $(p_1,p_2,y)=(2,1,10)$. ¿Qué clase de bienes son los bienes 1 y 2? Realizar este ejercicio también explícitamente despejando q y comparar los resultados.

20. La función de producción z viene dada por la expresión $z^2+4x^2+5y^2-12xy=0$. Calcular las productividades marginales y estudiar si son normales o sustitutivos los factores de producción.

21. La ecuación $4x^3+3y^2=500$ representa la frontera de posibilidades de producción de dos bienes en cantidades x e y. Calcular la pendiente de esta frontera $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ y el coste de oportunidad de producir una unidad más de x a partir de $x=2$, es decir, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{|(x=2)}$.

22. Una empresa utiliza $\mathrm{K}=20$ máquinas y $\mathrm{L}=100$ trabajadores para producir un artículo. La producción diaria que puede conseguir en general con K máquinas y L trabajadores viene dada por la función $\mathrm{Q(K,L)}=\mathrm{K^2L}$. El dueño de la empresa se está planteando la posibilidad de abaratar el proceso de producción sustituyendo parte de la plantilla por una máquina adicional.

a) Calcular la producción diaria actual de la empresa.

b) Escribir la expresión de la isocuanta actual e interprétala.

c) Representarla gráficamente y localizar la situación actual de la empresa.

d) Calcular la función explícita $\mathrm{L(K)}$ definida por la curva de nivel e interpretarla.

e) Calcular $\mathrm{L}'(\mathrm{K})$ para $\mathrm{K}=20$. ¿de qué concepto económico se trata y qué mide?

f) Repetir el cálculo derivando implícitamente en la curva de nivel.

g) ¿Cuántos trabajadores serán despedidos si la negociación sindical no lo impide?

EJERCICIOS RESUELTOS TEMA 4

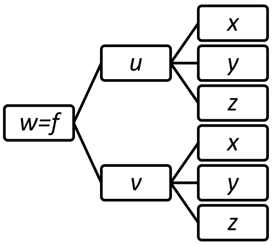
2. Dadas $w = f(u,v)$ donde $u = x^2 + 2yz$, $v = y^2 + 2zx$, calcular:

a) w'_x , w'_y , w'_z

b) Primera diferencial de u y de v en función de x, y, z.

c) Primera diferencial de w en función de x, y, z.

a)



$$w'_x = w'_u \cdot u'_x + w'_v \cdot v'_x = w'_u \cdot 2x + w'_v \cdot 2z = f'_u \cdot 2x + f'_v \cdot 2z$$
$$w'_y = w'_u \cdot u'_y + w'_v \cdot v'_y = w'_u \cdot 2z + w'_v \cdot 2y = f'_u \cdot 2z + f'_v \cdot 2y$$
$$w'_z = w'_u \cdot u'_z + w'_v \cdot v'_z = w'_u \cdot 2y + w'_v \cdot 2x = f'_u \cdot 2y + f'_v \cdot 2x$$

b)

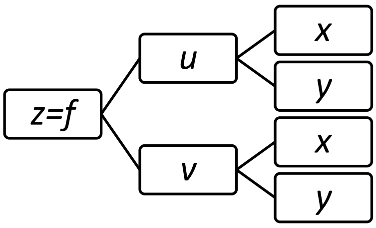
$$du = u'_x dx + u'_y dy + u'_z dz = 2x\,dx + 2z\,dy + 2y\,dz$$
$$dv = v'_x dx + v'_y dy + v'_z dz = 2z\,dx + 2y\,dy + 2x\,dz$$

c)

$$dw = w'_x dx + w'_y dy + w'_z dz$$

3. Sean las funciones $z = f(u,v)$, con $u = x^2 + y,\ v = y - x^2$. Calcular $dz(x,y)$ en $x = 1$ e $y = 1$, sabiendo que $z'_u(2{,}0) = 3$ y $z'_v(2{,}0) = -1$.

a)



$$\boldsymbol{dz(x,y) = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy}$$

Calculemos primero la derivada parcial respecto a x:

$$z'_x = z'_u u'_x + z'_v v'_x$$

$$z'_x(x,y) = z'_u(u,v) \cdot u'_x + z'_v(u,v) \cdot v'_x$$

$$\boxed{u'_x = 2x,\quad v'_x = -2x}$$

Sabemos que $u = x^2 + y,\ v = y - x^2$. Luego

$$z'_x(x,y) = z'_u(u,v) \cdot u'_x + z'_v(u,v) \cdot v'_x = z'_u(u,v) \cdot 2x + z'_v(u,v) \cdot (-2x)$$

Si $x = 1, y = 1 \to \cdots \to u = 1^2 + 1 = 2, v = 1 - 1^2 = 0 \to u = 2, v = 0$

Sustituyendo:

$$z'_x(1{,}1) = z'_u(2{,}0) \cdot u'_x(1{,}1) + z'_v(2{,}0) \cdot v'_x(1{,}1) = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) = 8$$

$$\boxed{\begin{array}{l} z'_u(2{,}0) = 3 \\ z'_v(2{,}0) = -1 \end{array}}$$

Calculemos ahora la derivada parcial respecto a y:

$$z'_y = z'_u u'_y + z'_v v'_y$$

$$z'_y(x,y) = z'_u(u,v) \cdot u'_y + z'_v(u,v) \cdot v'_y$$

Sabemos que $u = x^2 + y,\ v = y - x^2$. Luego

$$\boxed{u'_y = 1,\ \ v'_y = 1}$$

$$z'_y(x,y) = z'_u(u,v) \cdot u'_y + z'_v(u,v) \cdot v'_y = z'_u(u,v) \cdot 1 + z'_v(u,v) \cdot 1$$

Sustituyendo $x = 1, y = 1$:

$$z'_y(1,1) = z'_u(2,0) + z'_v(2,0) = 3 + (-1) = 2$$

Por tanto:

$$\boldsymbol{dz(1,1) = z'_x(1,1) \cdot dx + z'_y(1,1) \cdot dy = 8 \cdot dx + 2 \cdot dy}$$

---

5. Dada la función y definida implícitamente por $xy - e^y + e^{x+1} = 0$.

a) Siguiendo el Teorema de existencia de la función implícita, ¿se puede asegurar que y es función implícita de x en el entorno del punto $(a,b) = (0,1)$?

b) ¿Se puede despejar y en función de x?

c) Comprobar que aunque no se pueda despejar, se puede calcular $y'(x)$, $y''(x)$. ¿Qué condición se tiene que verificar para que estén bien definidas?

d) Calcular $y'(0)$, $y''(0)$.

e) Encontrar una expresión explícita aproximada para $y(x)$ en un entorno del origen a través de la fórmula de Taylor.

---

a) Dada la ecuación $F(x,y) = xy - e^y + e^{x+1} = 0$, ¿define a y como función implícita de x en el entorno del punto $(a,b) = (0,1)$?

Teorema de la función implícita:

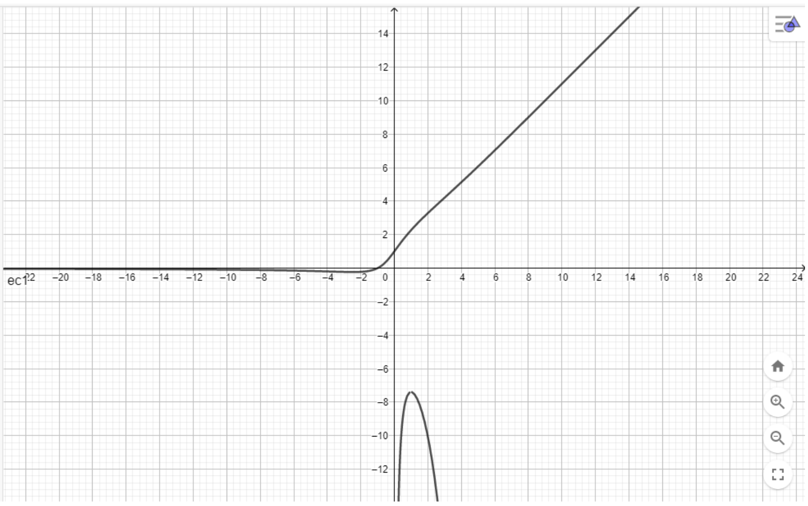
i) $F(0,1) = 0$

ii) $F'_x(x,y) = y + e^{x+1}$, $F'_y(x,y) = x - e^y$ existen y son continuas en cualquier punto (por lo tanto también lo son en un entorno del punto $(a,b) = (0,1)$)

iii) $F'_y(0,1) = -e \neq 0$

Entones $F(x,y) = 0$ define a y como función implícita de x en el entorno del punto $(a,b) = (0,1)$.

b)



c) Derivando respecto a x en la ecuación $xy - e^y + e^{x+1} = 0$ nos queda

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x \cdot y(x) - e^{y(x)} + e^{x+1}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(0)$$

$$1 \cdot y(x) + x \cdot y'(x) - e^{y(x)} \cdot y'(x) + e^{x+1} = 0$$

Sacando factor común $y'(x)$

$$y'(x) \cdot (x - e^y) = -y - e^{x+1}$$

$$y'(x) = \frac{-y - e^{x+1}}{x - e^y} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

siempre que $x - e^y \neq 0$.

Si queremos calcular la derivada segunda, podemos hacerlo volviendo a derivar en la ecuación donde aparece la derivada primera (o también en la fórmula obtenida):

$$y(x) + x \cdot y'(x) - e^{y(x)} \cdot y'(x) + e^{x+1} = 0$$

Comprueba que al derivar en esta ecuación, la derivada segunda te dará:

$$y''(x) = \frac{-e^{x+1} - 2 \cdot y' + e^y \cdot (y)^2}{x - e^y},$$

siempre que $x - e^y \neq 0$

d) $y'(0)$=??

Sabemos que $y(0) = 1$ y que $y'(x) = \frac{-y(x)-e^{x+1}}{x-e^{y(x)}} \rightarrow y'(0) = \cdots = \frac{e+1}{e}$

$y''(0)$ =??

Sabemos que $y(0) = 1$, $y'(0) = \cdots = \frac{e+1}{e}$, $y''(x) = \frac{-e^{x+1}-2 \cdot y'+e^y \cdot (y)^2}{x-e^y}$

Comprueba que sustituyendo y simplificando nos dará: $y''(0) = \frac{1}{e^2}$

e) Fórmula de Taylor de orden dos en un entorno de $a = 0$

$$y(x) \approx y(0) + y'(0)(x - 0) + \frac{y''(0)}{2!}(x - 0)^2$$

Luego para x en un entorno del 0:

$$y(x) \approx 1 + \left(\frac{e+1}{e}\right) \cdot x + \frac{1}{2\,e^2} \cdot x^2$$

---

6. Dada la ecuación $x^2 + 3xy + y^2 + 2z^2 - xyz - 6 = 0$. ¿Podemos garantizar que z es función implícita de x e y en un entorno del punto $(1, 1, 1)$? ¿Puedes calcular $z'_x(1,1)$?

Dada la ecuación $F(x, y, z) = x^2 + 3xy + y^2 + 2z^2 - xyz - 6 = 0$, ¿define a z como función implícita de (x, y) en el entorno del punto $(a, b, c) = (1, 1, 1)$?

Teorema de la función implícita:

i) $F(1,1,1) = 0$

ii) $F'_x(x, y, z) = 2x + 3y - yz$, $F'_y(x, y, z) = 3x + 2y - xz$, $F'_z(x, y, z) = 4z - xy$ existen y son continuas en cualquier punto (por lo tanto también lo son en un entorno del punto $(a, b, c) = (1, 1,1)$)

iii) $F'_z(1,1,1) = \cdots = 3 \neq 0$

Entones $F(x, y, z) = 0$ define a z como función implícita de (x, y) en el entorno del punto $(a, b, c) = (1, 1,1)$.

$$z'_x(x, y) = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{-(2x + 3y - yz)}{4z - xy},$$

siempre que $4z - xy \neq 0$.

Al estar en el entorno del punto $(1,1,1)$ sabemos que $z(1,1) = 1$, luego:

$$z'_x(1,1) = -\frac{4}{3}$$

Volver al índice

9. Sabiendo que z viene definida implícitamente por la ecuación

$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 - 2x + 2z = 0$, calcular las derivadas parciales de primer orden en el punto (1,1).

Tenemos dos opciones:

- **Derivando directamente** en la ecuación
- Aplicando la fórmula:

$$z'_x(x,y) = -\frac{F'_x}{F'_z} \qquad (\text{siempre que } F'_z \neq 0)$$

Hazlo de las dos formas y comprueba que te dan lo mismo:

$$z'_x = \frac{2-2x}{6z+2}, \text{siempre que } 6z+2 \neq 0 \ \left(z \neq -\frac{1}{3}\right)$$
$$z'_y = \frac{-2}{6z+2}, \text{siempre que } 6z+2 \neq 0 \ \left(z \neq -\frac{1}{3}\right)$$

Como no nos dan el entorno, tenemos que calcular que dado $(x,y) = (1,1)$, ¿cuánto vale $z(1,1)$?

Sustituyendo en $F(x,y,z) = 0$ y resolviendo la ecuación de segundo grado que resulta nos quedan dos posibilidades: $z(1,1) = 0$, $z(1,1) = -2/3$.

Primer caso $z(1,1) = 0$:

$$z'_x(1,1) = 0$$
$$z'_y(1,1) = -1$$

Segundo caso $z(1,1) = -2/3$:

$$z'_x(1,1) = 0$$
$$z'_y(1,1) = 1$$

14. La demanda de un artículo depende del tiempo t, de su precio p y de la renta r de los consumidores según la función $D(t,p,r) = 1000 \cdot \frac{r}{p} e^{t/10}$. Actualmente el precio es $p =$ 2€ y la renta $r = 400$ €.

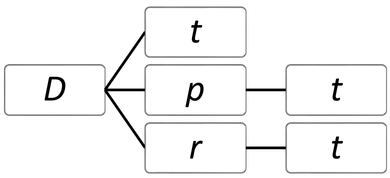
a) Calcular la derivada parcial de D con respecto de t en el punto $(0, 2, 400)$ e interpretar el resultado.
b) ¿Podemos usar únicamente la derivada anterior para determinar la demanda del año próximo si sabemos además que $p'(t)_{|t=0} = 0.2$ €/año y que $r'(t)_{|t=0} = 15$ €/año? En caso contrario, calcular la derivada que indica realmente la demanda esperada para el año próximo e interpretar el resultado.

a) $D'_t(t,p,r) = 100 \cdot \frac{r}{p} e^{\frac{t}{10}} \rightarrow D'_t(0,2,400) = 20000$

Si $t = 0 \uparrow 1$ unidad, $p = 2$ const., $r = 400$ const.$\Rightarrow D \uparrow 20000$ unidades aprox.

b) No podemos utilizar la derivada anterior porque los precios y la renta no se mantienen constantes.

Regla de la cadena de varias variables:



$$\frac{\boldsymbol{\partial D(t,p(t),r(t))}}{\boldsymbol{\partial t}} = \boldsymbol{D'_t + D'_p \cdot p'(t) + D'_r \cdot r'(t)}$$
$$D'_p(t,p,r) = -1000 \cdot \frac{r}{p^2} e^{\frac{t}{10}} \rightarrow D'_p(0,2,400) = -100000$$
$$D'_r(t,p,r) = 1000 \cdot \frac{1}{p} e^{\frac{t}{10}} \rightarrow D'_r(0,2,400) = 500$$
$$p'(t)_{|t=0} = 0.2 \qquad r'(t)_{|t=0} = 15$$
$$\frac{\partial D}{\partial t}_{|(0,p(0),r(0))} = 20000 - 100000 \cdot 0.2 + 500 \cdot 15 = 7500$$

Volver al índice

15. La función de costes de una empresa es $C(x) = 2000 + 5x$, donde x es la cantidad producida de un artículo. Su función de beneficios es $B(x, C, D)$ donde D representa la demanda. Para los valores actuales (x_0, C_0, D_0) se tiene que $B'_x = 8,\ B'_C = -3,\ B'_D = 10$.

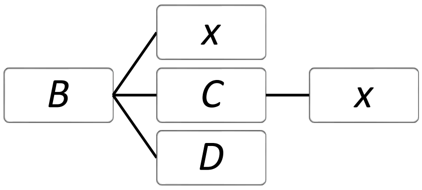
a) Suponiendo que D no depende de x ¿es correcto afirmar que si la empresa produce una unidad más sus beneficios aumentarán en 8 u.m.?

b) Suponiendo que $D = x$ ¿es correcto afirmar que si la empresa produce una unidad más sus beneficios aumentarán en 8 u.m.?

c) Razonar si a la empresa le conviene o no aumentar su producción según el caso.

---

a)



Regla de la cadena de varias variables:

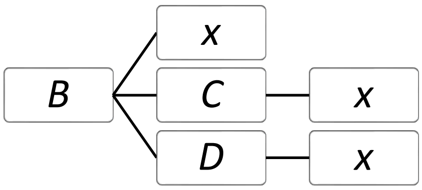
$$\frac{\partial B(x, C(x), D)}{\partial x} = B'_x + B'_C \cdot C'(x)$$

Sabemos que en el momento actual: $B'_x = 8,\ B'_C = -3,\ B'_D = 10$ y además si $C(x) = 2000 + 5x \to C'(x) = 5$:

$$\frac{\partial B(x_0, C(0), D_0)}{\partial x} = 8 + (-3) \cdot 5 = -7$$

¿Es correcto afirmar que si la empresa produce una unidad más sus beneficios aumentarán en 8 u.m.?
FALSO

b) Si $D = x$ el nuevo diagrama de árbol será:



Regla de la cadena de varias variables:

$$\frac{\partial B(x, C(x), D(x))}{\partial x} = B'_x + B'_C \cdot C'(x) + B'_D \cdot D'(x)$$

Del apartado a) sabemos que en el momento actual: $B'_x = 8,\ B'_C = -3,\ B'_D = 10$, $C'(x) = 5$ y además si $D(x) = x \to D'(x) = 1$:

$$\frac{\partial B(x_0, C(0), D(0))}{\partial x} = 8 + (-3) \cdot 5 + 10 \cdot 1 = 3$$

¿Es correcto afirmar que si la empresa produce una unidad más sus beneficios aumentarán en 8 u.m.?
FALSO también

17. Sea $Q(L,K) = 3K^2L^3$ la función de producción de una empresa donde K es el capital y L el trabajo. Actualmente la empresa utiliza las cantidades $(L,K) = (4{,}5)$.

a) Escribir la expresión de la isocuanta que corresponde a la producción actual.

b) Obtener la función implícita $K(L)$ definida por dicha ecuación.

c) Calcular la Relación de Sustitución Técnica dada por $RST = -K'(L)$. Realiza el cálculo a partir de la función $K(L)$ y derivando implícitamente la ecuación de la isocuanta.

d) Calcular la RST actual e interpretarla.

---

a)

$$3K^2L^3 = 4800 \to \cdots \to K = \frac{40}{\sqrt{L^3}}$$

¿Por qué sabemos que $L \neq 0$?

b) $3\big(K(L)\big)^2L^3 = 4800 \to \big(K(L)\big)^2L^3 = 1600$

c) Primera forma: Derivamos respecto a L en la ecuación: $\big(K(L)\big)^2 \cdot L^3 = 1600$ nos queda:

$$2K(L) \cdot K'(L) \cdot L^3 + \big(K(L)\big)^2 \cdot 3L^2 = 0 \to 2K \cdot K'(L) \cdot L^3 + K^2 \cdot 3L^2 = 0$$

Despejando y simplificando nos queda:

$$K'(L) = -\frac{3K}{2L} \qquad \text{(siempre que } L \neq 0)$$

Segunda forma: Derivamos en la función dada en forma explícita en el apartado a):

$$\frac{dK(L)}{dL} = \frac{d}{dL}\left(\frac{40}{\sqrt{L^3}}\right) = \cdots = -\frac{60}{L^{5/2}} \qquad \text{(siempre que } L \neq 0)$$

A la vista de los dos resultados, $K'(L)$ parece distinta, ¿sabrías comprobar que realmente nos da el mismo resultado?

d)

$$RST = -K'(L) = \frac{60}{L^{5/2}}$$

En el momento actual $(L,K) = (4{,}5) \to RST = \frac{60}{32} = 1.875.$

¿Sabrías interpretar ese resultado?

18. Un consumidor adquiere dos bienes en cantidades x e y, de modo que su función de utilidad es $U(x,y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$. Su nivel de consumo actual es $(x,y) = (9,4)$.

a) Calcular la utilidad actual.

b) Escribir la ecuación de la curva de indiferencia actual e interpretarla.

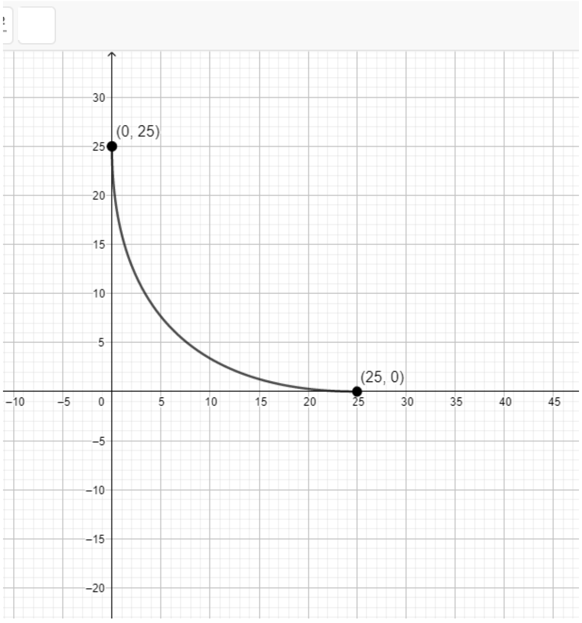
c) Calcular la Relación Marginal de Sustitución RMS dada por $RMS = -y'(x)$. Realizar el cálculo derivando implícitamente la ecuación. Interpretar el valor de $RMS(9)$.

---

a)

$$U(9,4) = \cdots = 5$$

b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5 \to \cdots \to y = \left(5 - \sqrt{x}\right)^2$, siempre que $0 \leq x \leq 25$



¿Sabrías dar una interpretación?

c)

Derivamos respecto a x en la ecuación: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$ nos queda:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' = 0 \to \cdots \to y' = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \qquad (x \neq 0)$$

Si sabemos que $(x,y) = (9,4)$ y $RMS(x) = -y'(x)$ tenemos:

$$RMS(9) = -y'(9) = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} \approx 0.66$$

¿Sabrías interpretar ese resultado?

19. Sabiendo que la ecuación $F(q,p_1,p_2,y) = 10p_1q + 5q - 2p_2 - 4y - 18 = 0$ define una función implícita de demanda de un bien $q = q(p_1,p_2,y)$ donde p_1 es el precio propio, p_2 el precio de un bien ordinario relacionado e y el ingreso, se pide hallar las elasticidades de la demanda respecto al propio precio y las cruzadas en el punto $(p_1,p_2,y) = (2,1,10)$. ¿Qué clase de bienes son los bienes 1 y 2? Realizar este ejercicio también explícitamente despejando q y comparar los resultados.

¿Cuál es la demanda si consideramos el punto $(p_1,p_2,y) = (2,1,10)$?

Comprueba que si sustituyes el punto en la ecuación $F(q,p_1,p_2,y) = 0$, y despejas te queda que la demanda es: $q(2,1,10) = \frac{12}{5}$.

Vamos calcular ahora la derivada parcial de primer orden con respecto al precio del bien $\left(\frac{\partial q}{\partial p_1}\right)$.

Derivemos implícitamente (con respecto a p_1) la ecuación
$10p_1q + 5q - 2p_2 - 4y - 18 = 0$ y obtenemos:

$$10 \cdot q + 10p_1 \cdot \frac{\partial q}{\partial p_1} + 5\frac{\partial q}{\partial p_1} = 0 \to \cdots \to \frac{\partial q}{\partial p_1} = \frac{-10q}{5 + 10p_1} \quad (\text{siempre que } 5 + 10p_1 \neq 0)$$

Sustituyendo en $(p_1,p_2,y) = (2,1,10)$ nos quedará:

$$\frac{\partial q}{\partial p_1}(2,1,10) = -\frac{24}{25} = -0.96$$

Por lo que la elasticidad respecto al propio precio nos da:

$$\varepsilon_{q|p_1} = \frac{\partial q}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{q} \to \ \varepsilon_{q|p_1|\{(p_1,p_2,y)=(2,1,10)\}} = \cdots = -\frac{4}{5} = -0.8.$$

Dado el signo obtenido observamos que el bien 1 es un bien ordinario.

Calculemos ahora la otra derivada parcial de primer orden $\left(\frac{\partial q}{\partial p_2}\right)$.

Derivemos implícitamente (con respecto a p_2) la ecuación
$10p_1q + 5q - 2p_2 - 4y - 18 = 0$ y obtenemos:

$$10 \cdot p_1 \frac{\partial q}{\partial p_2} + 5\frac{\partial q}{\partial p_2} - 2 = 0 \to \cdots \to \frac{\partial q}{\partial p_2} = \frac{2}{5 + 10p_1} \quad (\text{siempre que } 5 + 10p_1 \neq 0)$$

Sustituyendo en $(p_1,p_2,y) = (2,1,10)$ nos quedará:

$$\frac{\partial q}{\partial p_2}(2,1,10) = \frac{2}{25}$$

Por lo que la elasticidad cruzada nos da:

$$\varepsilon_{q|p_2} = \frac{\partial q}{\partial p_2} \cdot \frac{p_2}{q} \to \ \varepsilon_{q|p_2|\{(p_1,p_2,y)=(2,1,10)\}} = \cdots = \frac{1}{30} > 0$$

A la vista del resultado, y dado que los dos bienes son ordinarios, *¿sabrías decir qué clase de bienes son los bienes 1 y 2?*

22. Una empresa utiliza $K = 20$ máquinas y $L = 100$ trabajadores para producir un artículo. La producción diaria que puede conseguir en general con K máquinas y L trabajadores viene dada por la función $Q(K, L) = K^2L$. El dueño de la empresa se está planteando la posibilidad de abaratar el proceso de producción sustituyendo parte de la plantilla por una máquina adicional.

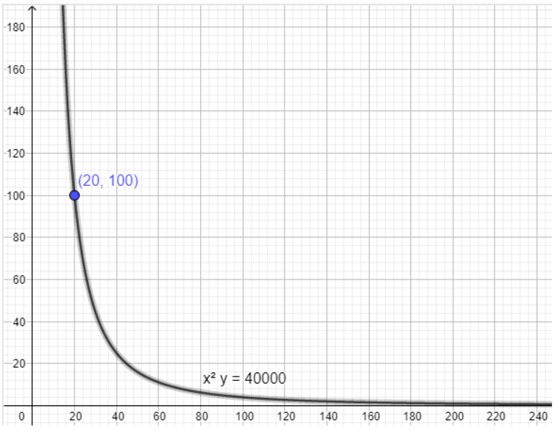
a) Calcular la producción diaria actual de la empresa.
b) Escribir la expresión de la isocuanta actual e interprétala.
c) Representarla gráficamente y localizar la situación actual de la empresa.
d) Calcular la función explícita $L(K)$ definida por la curva de nivel e interpretarla.
e) Calcular $L'(K)$ para $K = 20$. ¿de qué concepto económico se trata y qué mide?
f) Repetir el cálculo derivando implícitamente en la curva de nivel.
g) ¿Cuántos trabajadores serán despedidos si la negociación sindical no lo impide?

a) $Q(K, L) = K^2L \to Q(20,100) = \cdots = 40000$

b) $K^2L = 40000$

¿Sabrías interpretar esa isocuanta?

c)



d) $K^2L = 40000 \to L = \frac{40000}{K^2} \quad (K \neq 0)$

e)

$$L'(K) = -\frac{80000}{K^3} \to L'(20) = \cdots = -10$$

$$RMST = -L'(K)$$

f) Calculemos $L'(K)$ derivando implícitamente en: $K^2L = 40000$

$$2K \cdot L + K^2 \cdot L'(K) = 0 \to L'(K) = -\frac{2KL}{K^2} = -\frac{2L}{K} \quad \text{(siempre que } K \neq 0)$$

g) Por el apartado e) sabemos que $L'(20) = -10$. Luego:

$$RMST(20) = -L'(20) = 10$$

Por tanto, para mantener el mismo nivel de producción (40000 unidades), si aumentamos el número de máquinas (K) en una unidad (es decir pasamos a 21), el número de trabajadores disminuirá aproximadamente 10 unidades (pasará a 90 trabajadores).

Volver al índice

TEMA 5: FUNCIONES HOMOGÉNEAS

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Dadas las siguientes funciones, demostrar si son o no homogéneas y caso de serlo, ratificarlo por el teorema de Euler:

a) $z(x,y) = \frac{x}{y^2}$ **b)** $f(x,y) = \frac{x^2}{y} + x + \frac{y^2}{x+y}$

c) $z(x,y) = 3e^x + 3e^y$ **d)** $z(x,y) = x^a f\left(\frac{y}{x}\right)$

e) $z(x,y) = x^n f\left(\frac{y}{x}\right) + x^n g\left(\frac{x}{y}\right)$

2. Dada la función $z(x,y) = y^{-n/a}(x^n + xy^{n-1})^{1/a}$, se pide:

a) Estudiar su homogeneidad, calculando en su caso su grado.

b) Calcular z'_x. ¿Es homogénea?

c) Determinar el valor de la expresión $x \cdot z'_x + y \cdot z'_y$.

3. Sabiendo que f es una función homogénea de grado $1/3$ y que $f(2,4) = 6$, calcular:

a) $f(1/2,1)$

b) $f'_x(1,2) + 2f'_y(1,2)$

c) Si además $f'_x(1,2) = 1$, calcular $f''_{xx}(1,2) + 2f''_{xy}(1,2)$

4. Sabiendo que $h(u,v)$ es homogénea de grado 3 y que $h'_u(1,1) = 7$ y $h''_{uu}(1,1) = 6$, hallar $h''_{uv}(4,4)$.

5. Dada la función $z = yf(y/x) + xg(x/y)$, comprobar si es homogénea y obtener el valor de la expresión $x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy}$ sin calcular estas derivadas parciales.

6. Dada una función homogénea $f(x,y)$.
¿Es posible que $f'_x(x,y) = 4xy$, $f'_y(x,y) = 6x^4 + 3y^3 + 2xy$? Razonar la respuesta.

7. Sea $u(x,y) = ax^b y^c$ (a, b, c constantes), se pide:

a) Encontrar la relación que ha de existir entre dichas constantes para que $u(x,y)$ sea homogénea.

b) Idem para que $u(x,y)$ sea homogénea de grado 1.

c) Aplicar, si es posible, el teorema de Euler en ambos casos.

8. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es homogénea de grado 1, entonces $x^2 f''_{xx} = y^2 f''_{yy}$.

b) Sean $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si f es homogénea de grado m y g es homogénea de grado n, entonces el producto de las funciones, $f \cdot g$, es una función homogénea de grado $m + n$.

c) Si $f(x,y)$ y $g(x,y)$ son dos funciones homogéneas de grado 3 entonces $\frac{f(x,y)}{g(x,y)} + 9$ es homogénea de grado 0.

d) Si una función de producción $Q = f(K,L)$ es homogénea entonces $LQ'_L + KQ'_K = KQ$.

9.Dada la función de producción $P = TK \ln\left(\frac{K}{T}\right)$ siendo P, K, T respectivamente producción, capital y trabajo, comprobar que es homogénea de dos formas diferentes.

10. Sea $Q = Q(K,L)$ una función de producción dada implícitamente por la igualdad:

$$100 = f\left(\frac{Q-L}{K}\right),$$

siendo $K \neq 0$ y $f(u)$ una función cualquiera derivable y tal que $f'_u \neq 0$:

a) Calcular las productividades marginales Q'_K , y, Q'_L.

b) ¿Es Q una función homogénea sea cual sea $f(u)$? Si a partir de determinado nivel de K y L aumentamos ambos en un 30%, ¿qué ocurrirá con la producción?

c) Sabiendo que $Q(10,20) = 520$, calcular $Q'_K(10,20)$ y $Q'_L(10,20)$ e interpretar económicamente el resultado. Utilizar la diferencial para aproximar la producción que se tendrá cuando $K = 9$ y $L = 21$ ($Q(9,21)$).

11. Dada la función de producción CES (elasticidad de sustitución constante)

$$Q(x,y) = (ax^{-c} + by^{-c})^{-1/c} \text{, con } a, b, c \text{ constantes positivas}$$

¿Cuál será el efecto sobre el nivel de producción de una variación proporcional en los factores productivos *x* e *y*? ¿Qué propiedad se podría entonces atribuir a dicha función?

12. Dada la función de producción de Cobb-Douglas $\mathrm{Q}(\mathrm{K},\mathrm{L}) = \mathrm{A}\cdot\mathrm{K}^{\alpha}\mathrm{L}^{\beta}$ $(\mathrm{A}, \alpha, \beta > 0$, K=capital, L=trabajo):

a) Demostrar que es homogénea mediante el teorema de Euler

b) ¿Podemos afirmar que la función posee rendimientos a escala crecientes si la suma de las elasticidades respecto a los factores productivos es mayor que 1?

c) En general, en una función tipo Cobb-Douglas, ¿podemos deducir el tipo de rendimientos a escala basándonos en la suma de las elasticidades?

d) ¿Se podría generalizar el enunciado anterior a una función homogénea cualquiera? ¿Y a una función cualquiera no homogénea?

13. Sea la función de producción: $Q(K,L) = \alpha L + gK - \alpha L e^{-\alpha K/L}$, con $\alpha, g > 0$ ciertas constantes:

a) ¿Presenta rendimientos a escala? ¿De qué tipo? Justificar económicamente el resultado.

b) Expresar las funciones de productividad marginal en función de la relación capital/trabajo ($h = K/L$).

c) ¿Es cierto, según el teorema de Euler, que en tal situación la producción se distribuye totalmente entre los factores productivos de acuerdo con la contribución de cada factor a la producción (esto es, según Q'_K y Q'_L, respectivamente)? ¿Por qué?

14. Sabiendo que la función de oferta de un bien A es $Q = f(p_A, p_B)$ dada por la expresión:

$$Q = 6p_A^2 - 2p_B^2 - p_A p_B,$$

donde p_A es el precio propio y p_B el precio de un bien B relacionado, demostrar que la suma de la elasticidad respecto al propio precio y la cruzada es igual al grado de homogeneidad de la función sin calcular las elasticidades.

15. La función de demanda de un bien es $D(r,p,p_1,p_2) = \sqrt[5]{r}\ln\left(\frac{p_1p_2}{p^2}\right)$ siendo r la renta de los consumidores, p el precio de bien y p_1, p_2 los precios de dos bienes sustitutivos. ¿Cómo se comporta la demanda ante una misma variación proporcional t en todas sus variables? ¿Existe por tanto ilusión monetaria?

16. Sea $Q(K,L) = \frac{\sqrt{9K^2+L^2}}{3}$ una función de producción (K y L las unidades de capital y trabajo respectivamente).

- **a)** ¿Presenta Q rendimientos a escala? ¿De qué tipo? Por tanto, si a partir de una cierta combinación de capital y trabajo, reducimos ambos factores un 25%, ¿en qué sentido y proporción varía la producción? Justificar matemáticamente la respuesta.
- **b)** Obtener las funciones de productividad marginal. Si a partir de una cierta combinación de capital y trabajo, reducimos ambos factores un 25%, ¿Cómo se comportarían las funciones de productividad marginal de los factores? Justificar matemáticamente la respuesta.
- **c)** Sin calcular derivadas parciales, ¿podemos conocer el valor de la suma de las elasticidades de Q respecto de L, K? En caso afirmativo, calcular dicho valor. Justificar matemáticamente la respuesta.
- **d)** Considerar ahora que L, K están en función del tiempo t (en meses), siendo $K = 8, L = 10$ los valores correspondientes al mes actual ($t = 0$), con $L'(0) = -1.2$, $K'(0) = 2.5$. Utilizar el análisis marginal para estimar cuál sería la producción del próximo mes.

17. Sea $D = f(p,q)$ la función de demanda de un bien, donde *p* es el precio del bien y *q* el precio de un bien alternativo. Se sabe que *D* es una función homogénea de grado 1/2.

- **a)** Si a partir de unos precios *p* y *q* dados se reducen ambos un 30%, ¿en qué proporción varía la demanda?
- **b)** Sabiendo que $D'_p(10,12) = -20$ y $D''_{pp}(10,12) = -10$, ¿es posible obtener el valor de $D''_{pq}(15,18)$ con los datos disponibles?
- **c)** Considera ahora que la demanda viene dada implícitamente por la expresión $F\left(\frac{q+2p}{q^2}D^2\right) = 20$, siendo *F* una función derivable con derivada no nula en todo su dominio y además, $q \neq 0, q + 2p \neq 0$. Calcula las demandas marginales y utiliza el Teorema de Euler para confirmar el grado de homogeneidad.

18. La demanda D de cierto bien depende del precio de dicho bien p *(distinto de cero)*, y del precio de otros dos bienes relacionados, q y s, según la expresión $D(p,q,s) = s + q \cdot F\left(\sqrt{\frac{s}{3p}}\right)$, siendo F una función derivable con derivada no nula en todo su dominio. Sabiendo que F verifica $F(1) = 1$ y $F'(1) = 4$, se pide:

a) Estudiar si D es homogénea y de qué grado.

b) Calcular las demandas marginales. ¿Cómo van a variar las demandas marginales si los precios de los tres bienes disminuyen simultáneamente un 20%?

c) Calcular $D(1,1,3)$ y haciendo uso de análisis marginal, estimar $D(1.2,1.2,3.2)$.

d) Si suponemos ahora que q depende de s según la expresión $q(s) = e^{\frac{1.5-0.5s}{s}}$, estudiar cómo varía la demanda del bien cuando, a partir de unos precios $p = 1$, $s = 3$ se produce una disminución del precio s, manteniéndose p constante.

EJERCICIOS RESUELTOS TEMA 5

---

1. Dadas las siguientes funciones, demostrar si son o no homogéneas y caso de serlo, ratificarlo por el teorema de Euler:

a) $z(x,y)=\frac{x}{y^2}$ b) $f(x,y)=\frac{x^2}{y}+x+\frac{y^2}{x+y}$

c) $z(x,y)=3e^x+3e^y$ d) $z(x,y)=x^a f\left(\frac{y}{x}\right)$

e) $z(x,y)=x^n f\left(\frac{y}{x}\right)+x^n g\left(\frac{x}{y}\right)$

---

a) $z(x,y)=\frac{x}{y^2}$

Por definición: $z(t\cdot x,\ t\cdot y)=\cdots=t^{-1}\cdot z(x,y),\forall t>0,(t\cdot x,t\cdot y)\in \mathrm{Dom}\, z$, entonces la función z es homogénea de grado $M=-1$.

Por el Teorema de Euler:

$$z'_x=\frac{1}{y^2},\qquad z'_y=-\frac{2x}{y^3}$$

$$x\cdot z'_x+y\cdot z'_y=x\cdot\frac{1}{y^2}+y\cdot\left(-\frac{2x}{y^3}\right)=\cdots=-\frac{x}{y^2}=(-1)\cdot z\to M=-1,$$

Por lo tanto por el Teorema se confirma que es una función homogénea de grado $M=-1$.

b) $f(x,y)=\frac{x^2}{y}+x+\frac{y^2}{x+y}$

Por definición: $f(t\cdot x,\ t\cdot y)=\cdots=t\cdot f(x,y)=t^1\cdot f(x,y),\forall t>0$

Luego f es homogénea de grado $M=1$.

Por el Teorema de Euler:

$$f'_x=\frac{2x}{y}+1-\frac{y^2}{(x+y)^2},\qquad f'_y=\cdots=-\frac{x^2}{y^2}+\frac{2yx+y^2}{(x+y)^2}$$

$$x\cdot f'_x+y\cdot f'_y=\cdots=\frac{2x^2}{y}+x-\frac{y^2x}{(x+y)^2}-\frac{x^2}{y}+\frac{2y^2x+y^3}{(x+y)^2}=\frac{x^2}{y}+x+\frac{y^2x+y^3}{(x+y)^2}$$

Sacando factor común en el tercer sumando y simplificando nos queda:

$$x\cdot f'_x+y\cdot f'_y=\frac{x^2}{y}+x+\frac{y^2(x+y)}{(x+y)^2}=\frac{x^2}{y}+x+\frac{y^2}{x+y}=1\cdot f$$

Por lo tanto por el Teorema se confirma que es una función homogénea de grado $M=1$.

c) $z(x,y)=3e^x+3e^y$

$$z(t\cdot x,t\cdot y)=3e^{tx}+3e^{ty}\neq t^M\cdot(3e^x+3e^y)$$

Por lo tanto, la función no es homogénea.

d) $z(x,y) = x^a f\left(\frac{y}{x}\right)$

Por definición: $z(t\cdot x,\ t\cdot y) = \cdots = t^a \cdot z(x,y), \forall t > 0$

Luego z es homogénea de grado $M = a$.

Por el Teorema de Euler:

$$z'_x = a\cdot x^{a-1}\cdot f\left(\frac{y}{x}\right) + x^a \cdot f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right), \qquad z'_y = x^a\cdot f'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$x\cdot z'_x + y\cdot z'_y = \cdots = a\cdot x^a f\left(\frac{y}{x}\right) = a\cdot z$$

Por lo tanto, por el Teorema se confirma que z es una función homogénea de grado $M = a$.

e) $z(x,y) = x^n f\left(\frac{y}{x}\right) + x^n g\left(\frac{x}{y}\right)$

De forma parecida al apartado anterior, comprueba que es homogénea de grado n.

---

3. Sabiendo que f es una función homogénea de grado $1/3$ y que $f(2,4) = 6$, calcular:

a) $f\left(\frac{1}{2},1\right)$

b) $f'_x(1,2) + 2f'_y(1,2)$

c) Si además $f'_x(1,2) = 1$, calcular $f''_{xx}(1,2) + 2f''_{xy}(1,2)$

---

a) $f\left(\frac{1}{2},1\right) =??$

Si f es homogénea de grado $1/3$, se tiene por definición:

$$f(t\cdot x, t\cdot y) = t^{1/3}\cdot f(x,y), \forall t > 0, \qquad (t\cdot x, t\cdot y) \in \mathrm{Dom}\, f$$

Además como sabemos que $f(2,4) = 6$

$$f\left(\frac{1}{2},1\right) = f\left(\frac{1}{4}\cdot 2, \frac{1}{4}\cdot 4\right)$$

Aplicando que f es homogénea de grado $1/3$, nos queda:

$$f\left(\frac{1}{2},1\right) = f\left(\frac{1}{4}\cdot 2, \frac{1}{4}\cdot 4\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/3}\cdot f(2,4) = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/3}\cdot 6$$

b) $f'_x(1,2) + 2f'_y(1,2) =??$

Calculemos primero $f(1,2)$

$$f(1,2) = f\left(\frac{1}{2}\cdot 2, \frac{1}{2}\cdot 4\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}\cdot f(2,4) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}\cdot 6$$

Por el Teorema de Euler sabemos que si f es homogénea de grado $1/3$:

$$x\cdot f'_x(x,y) + y\cdot f'_y(x,y) = \frac{1}{3}\cdot f(x,y)$$

Luego sustituyendo en el punto $(x,y) = (1,2)$ nos resulta:

$$1\cdot f'_x(1,2) + 2\cdot f'_y(1,2) = \frac{1}{3}\cdot f(1,2)$$

Por tanto:

$$f_x'(1,2) + 2f_y'(1,2) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} \cdot 6 = \cdots = 2^{2/3}$$

c) $f_{xx}''(1,2) + 2f_{xy}''(1,2) = ??$, conociendo que $f_x'(1,2) = 1$.

Partiendo del Teorema de Euler del apartado anterior:

$$x \cdot f_x'(x,y) + y \cdot f_y'(x,y) = \frac{1}{3} \cdot f(x,y)$$

Lo derivamos respecto a x:

$$f_x'(x,y) + x \cdot f_{xx}''(x,y) + y \cdot f_{yx}''(x,y) = \frac{1}{3} \cdot f_x'(x,y)$$

Suponiendo que la función f cumple el Teorema de Schwarz, se tendría que $f_{xy}'' = f_{yx}''$, y además despejando f_x' nos queda:

$$x \cdot f_{xx}''(x,y) + y \cdot f_{xy}''(x,y) = -\frac{2}{3} \cdot f_x'(x,y)$$

Luego sustituyendo en el punto $(x,y) = (1,2)$ nos resulta:

$$f_{xx}''(1,2) + 2 \cdot f_{xy}''(1,2) = -\frac{2}{3} \cdot f_x'(1,2) = -\frac{2}{3}$$

---

6. Dada una función homogénea $f(x,y)$.

¿Es posible que $f_x'(x,y) = 4xy$, $f_y'(x,y) = 6x^4 + 3y^3 + 2xy$? Razonar la respuesta.

Sabemos que si una función es homogénea de grado M, entonces sus derivadas parciales de primer orden son homogéneas de grado $M - 1$.

Si comprobamos las derivadas parciales que nos dan, tenemos que:

$f_x'(x,y) = 4xy$, es homogénea de grado 2

$f_y'(x,y) = 6x^4 + 3y^3 + 2xy$, no es homogénea

Por tanto, no puede haber una función homogénea que tenga esas derivadas parciales de primer orden.

¿Sabrías demostrarlo de otra forma?

10. Sea $Q = Q(K, L)$ una función de producción dada implícitamente por la igualdad:

$$100 = f\left(\frac{Q-L}{K}\right),$$

siendo $K \neq 0$ y $f(u)$ una función cualquiera derivable y tal que $f'_u \neq 0$:

a) Calcular las productividades marginales Q'_K , y, Q'_L.

b) ¿Es Q una función homogénea sea cual sea $f(u)$? Si a partir de determinado nivel de K y L aumentamos ambos en un 30%, ¿qué ocurrirá con la producción?

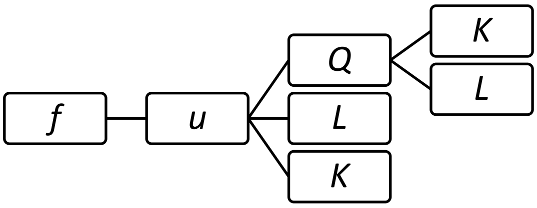
c) Sabiendo que $Q(10{,}20) = 520$, calcular $Q'_K(10{,}20)$ y $Q'_L(10{,}20)$ e interpretar económicamente el resultado. Utilizar la diferencial para aproximar la producción que se tendrá cuando $K = 9$ y $L = 21$ ($Q(9{,}21)$).

---

a) Al ser f una función de una variable directa podemos resolver el problema con derivación compuesta de una o varias variables.

Vamos a realizarlo con derivación de varias variables.

Si denotamos: $u = \frac{Q-L}{K}$, el diagrama de árbol queda de la forma (teniendo en cuenta que Q es una función dada en forma implícita que depende de K y L):



Además si $u = \frac{Q-L}{K}$, podemos calcular su derivadas parciales:

$$u'_K = -\frac{(Q-L)}{K^2}, \quad u'_Q = \frac{1}{K}, \quad u'_L = -\frac{1}{K}$$

Utilizando todo lo anterior, ahora podemos calcular Q'_K.

Para ello derivamos respecto a K la ecuación implícita: $100 = f\left(\frac{Q-L}{K}\right)$, y nos queda:

$$\frac{\partial}{\partial K}(100) = \frac{\partial}{\partial K}\left(f\left(\frac{Q-L}{K}\right)\right) \to 0 = \frac{\partial}{\partial K}\left(f\left(\frac{Q-L}{K}\right)\right),$$

y utilizando el diagrama de árbol para calcular la derivada parcial respecto a K de la función compuesta f, nos queda:

$$0 = f'_u \cdot u'_Q \cdot Q'_K + f'_u \cdot u'_K$$

Sustituyendo las derivadas parciales que conocemos:

$$0 = f'_u \cdot \frac{1}{K} \cdot Q'_K + f'_u \cdot \left(-\frac{(Q-L)}{K^2}\right) \to Q'_K = \frac{f'_u \cdot \frac{(Q-L)}{K^2}}{f'_u \cdot \frac{1}{K}}$$

Ya que sabemos que $f'_u \neq 0$ obtenemos:

$$Q'_K = \frac{Q-L}{K}$$

Calculemos ahora Q'_L.

Para ello derivamos respecto a L la ecuación implícita: $100 = f\left(\frac{Q-L}{K}\right)$, y nos queda:

$$\frac{\partial}{\partial L}(100) = \frac{\partial}{\partial L}\left(f\left(\frac{Q-L}{K}\right)\right) \to 0 = \frac{\partial}{\partial L}\left(f\left(\frac{Q-L}{K}\right)\right),$$

y utilizando el diagrama de árbol para calcular la derivada parcial respecto a L de la función compuesta f, nos queda:

$$0 = f'_u \cdot u'_Q \cdot Q'_L + f'_u \cdot u'_L$$

Sustituyendo las derivadas parciales que conocemos:

$$0 = f'_u \cdot \frac{1}{K} \cdot Q'_L + f'_u \cdot \left(-\frac{1}{K}\right) \to Q'_L = \frac{f'_u \cdot \frac{1}{K}}{f'_u \cdot \frac{1}{K}}$$

Ya que sabemos que $f'_u \neq 0$ obtenemos:

$$Q'_L = 1$$

b) Tener en cuenta que para comprobar que Q es una función homogénea, no podemos hacerlo utilizando la definición, ya que Q no está dada de forma explícita.

Por lo tanto, acudimos al Teorema de Euler:

$$K \cdot Q'_K + L \cdot Q'_L \stackrel{?}{=} M \cdot Q$$

Sustituyendo las derivadas parciales calculadas en a) nos queda:

$$K \cdot Q'_K + L \cdot Q'_L = K \cdot \left(\frac{Q-L}{K}\right) + L \cdot 1 = \cdots = Q = 1 \cdot Q$$

Entonces Q es homogénea de grado $M = 1$.

Si a partir de determinado nivel de K y L aumentamos ambos en un 30%, ¿qué ocurrirá con la producción?

c) Si conocemos que $Q(10,20) = 520$, $Q'_K = \frac{Q-L}{K}$, $Q'_L = 1$, tenemos que:

$$Q'_K(10,20) = \frac{Q(10,20) - 20}{10} = \cdots = 50$$

$$Q'_L(10,20) = 1$$

A continuación nos piden calcular $Q(9,21) =$?

Sabemos por la Fórmula de Taylor de orden 1 que si (K, L) pertenece a un entorno de $(K_0, L_0) = (10,20)$

$$Q(K, L) \approx Q(K_0, L_0) + dQ(K_0, L_0)$$

En nuestro caso:

$$Q(K, L)) \approx Q(10,20) + dQ(10,20)$$

(K, L) perteneciendo a un entorno de $(10,20)$.

Sabemos que: $dQ = Q'_K dK + Q'_L dL$, luego:

$$Q(K, L) \approx Q(10,20) + Q'_K(10,20)\Delta K + Q'_L(10,20)\Delta L$$

Por tanto:

$$Q(9,21) \approx 520 + 50 \cdot (-1) + 1 \cdot\ 1 \to Q(9,21) \approx 469.$$

12. Dada la función de producción de Cobb-Douglas $Q(K,L) = A \cdot K^{\alpha} L^{\beta}$ ($A, \alpha, \beta > 0$, K=capital, L=trabajo):

a) Demostrar que es homogénea mediante el teorema de Euler

b) ¿Podemos afirmar que la función posee rendimientos a escala crecientes si la suma de las elasticidades respecto a los factores productivos es mayor que 1?

c) En general, en una función tipo Cobb-Douglas, ¿podemos deducir el tipo de rendimientos a escala basándonos en la suma de las elasticidades?

d) ¿Se podría generalizar el enunciado anterior a una función homogénea cualquiera? ¿Y a una función cualquiera no homogénea?

---

a)

$$K \cdot Q'_K + L \cdot Q'_L \stackrel{?}{=} M \cdot Q$$

Calculamos las derivadas parciales de primer orden:

$Q'_K = A \cdot \alpha \cdot K^{\alpha-1} L^{\beta}$

$Q'_L = A \cdot K^{\alpha} \cdot \beta \cdot L^{\beta-1}$

Sustituimos en la parte izquierda del Teorema de Euler:

$$K \cdot Q'_K + L \cdot Q'_L = K \cdot \left(A \cdot \alpha \cdot K^{\alpha-1} L^{\beta}\right) + L \cdot \left(A \cdot K^{\alpha} \cdot \beta \cdot L^{\beta-1}\right) = \cdots = (\alpha + \beta) \cdot Q$$

Por tanto, Q es homogénea de grado $M = \alpha + \beta$.

b)-c)

*¿Si la suma de las elasticidades respecto a los factores productivos es mayor que 1 entonces cualquier **función homogénea** Q posee rendimientos a escala crecientes?*

Si Q es una función homogénea de grado M, sabemos que

$$\varepsilon_{Q|K} + \varepsilon_{Q|L} = M$$

Como información adicional sabemos que

$$\varepsilon_{Q|K} + \varepsilon_{Q|L} = M > 1$$

Luego Q es homogénea de grado $M > 1$ y por tanto posee rendimientos a escala crecientes.

Sin embargo, si tenemos una función $z = z(x, y)$ que no es homogénea no se puede concluir esa afirmación, ya que:

$$\varepsilon_{z|x} + \varepsilon_{z|y} > 1 \nRightarrow z \text{ homogénea de grado} > 1$$

¿Sabrías encontrar una función que verifique $\varepsilon_{z|x} + \varepsilon_{z|y} > 1$ y que no sea homogénea?

15. La función de demanda de un bien es $D(r,p,p_1,p_2)=\sqrt[5]{r}\ln\left(\frac{p_1p_2}{p^2}\right)$ siendo r la renta de los consumidores, p el precio de bien y p_1, p_2 los precios de dos bienes sustitutivos. ¿Cómo se comporta la demanda ante una misma variación proporcional t en todas sus variables? ¿Existe por tanto ilusión monetaria?

$$D(t\cdot r,t\cdot p,t\cdot p_1,t\cdot p_2)=\cdots=t^{1/5}\cdot D(r,p,p_1,p_2)$$

La demanda se ve modificada en $t^{1/5}$, luego existe ilusión monetaria.

18. La demanda D de cierto bien depende del precio de dicho bien p *(distinto de cero)*, y del precio de otros dos bienes relacionados, q y s, según la expresión $D(p,q,s)=s+q\cdot F\left(\sqrt{\frac{s}{3p}}\right)$, siendo F una función derivable con derivada no nula en todo su dominio. Sabiendo que F verifica $F(1)=1$ y $F'(1)=4$, se pide:

a) Estudiar si D es homogénea y de qué grado.

b) Calcular las demandas marginales. ¿Cómo van a variar las demandas marginales si los precios de los tres bienes disminuyen simultáneamente un 20%?

c) Calcular $D(1,1,3)$ y haciendo uso de análisis marginal, estimar $D(1.2,1.2,3.2)$.

d) Si suponemos ahora que q depende de s según la expresión $q(s)=e^{\frac{1.5-0.5s}{s}}$, estudiar cómo varía la demanda del bien cuando, a partir de unos precios $p=1$, $s=3$ se produce una disminución del precio s, manteniéndose p constante.

a) $D(t\cdot p,t\cdot q,t\cdot s)=t\cdot s+t\cdot q\cdot F\left(\sqrt{\frac{t\cdot s}{3\cdot t\cdot p}}\right)=t^1\cdot D(p,q,s)\to D$ homogénea de grado 1.

b) Si $u=\sqrt{\frac{s}{3p}}$ $\quad D'_p=\cdots=-\frac{s\cdot q}{18p^2\sqrt{\frac{s}{3p}}}\cdot F'_u\quad D'_q=\cdots=F\left(\sqrt{\frac{s}{3p}}\right)\quad D'_p=\cdots=1+\frac{q}{2\sqrt{3\cdot p\cdot s}}\cdot F'_u\quad (s\neq 0)$

Si $(p\downarrow 20\%, q\downarrow 20\%, s\downarrow 20\%)\Rightarrow$ ¡las demandas marginales no varían! (¿podrías deducirlo sin calcular las derivadas parciales?)

c) Por el enunciado sabemos que $F(1)=1$ y $F'(1)=4$.

$$D(1,1,3)=1+\ 1\cdot F\left(\sqrt{\frac{3}{3}}\right)=1+F(1)=2$$

Suponiendo (x,y,z) en un entorno de $(1,1,3)$:

$$dD(1,1,3)=D'_p(1,1,3)dp+D'_q(1,1,3)dq+D'_s(1,1,3)ds=-\frac{3}{18}F'(1)(x-1)+F(1)(y-1)+\left(1+\frac{1}{6}F'(1)\right)(z-3)$$

$$dD(1,1,3)=-\frac{2}{3}(x-1)+(y-1)+\frac{5}{3}(z-3)$$

Luego el desarrollo de Taylor de orden 1 nos da para (x,y,z) en un entorno de $(1,1,3)$:

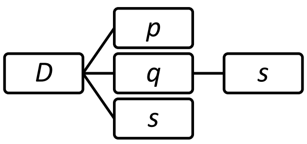
$D(x,y,z)\approx D(1,1,3)+dD(1,1,3)$

Sustituyendo en el punto $(1.2,1.2,3.2)\to D(1.2,1.2,3.2)\approx 2.4$

d) $q(s)=e^{\frac{1.5-0.5s}{s}}\to q'(s)=e^{\frac{1.5-0.5s}{s}}\cdot\left(-\frac{1.5}{s^2}\right)\to q'(3)=-\frac{1.5}{9}\approx -0.167$

A partir de $(p=1,s=3,q(3)=1)$ si se produce una disminución del precio s, manteniéndose p constante, ¿cómo varía la demanda D?

$$\frac{\partial D(p,q(s),s)}{\partial s}=D'_s+D'_q\cdot q'(s)\to\frac{\partial D(1,q(3),3)}{\partial s}=\frac{5}{3}+1\cdot\left(-\frac{1.5}{9}\right)=\frac{13.5}{9}=1.5$$



TEMA 6: INTEGRALES MÚLTIPLES

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Razonar si es verdadero o falso que una integral doble es el producto de dos integrales simples.

2. Calcular de dos formas diferentes las siguientes integrales dobles:

a) $\iint_D (x^2+xy)dxdy$ en el recinto D limitado por las rectas $x=0, x=3, y=1$ e $y=4$.
b) $\iint_D (x+y)^3dxdy$ en el recinto D limitado por el eje de abscisas y las rectas $x=1, x=y$.
c) $\iint_D x^3y^2dxdy$ en el recinto D limitado por los ejes de coordenadas y la recta $x+y=1$.
d) $\iint_D (x+e^y)dxdy$ en el recinto D limitado por las rectas $x=0, x=2, y=x, y=3x$.
e) $\iint_D y(x^3+1)dxdy$ en el recinto $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2\leq 1\}$.

3. Dibujar el dominio de integración en los siguientes casos y plantear la integral que resulta al cambiar el orden de integración:

a) $\int_0^2\int_x^{2x} f(x,y)dydx$ **b)** $\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{+\sqrt{1-u^2}} f(u,v)dvdu$ **c)** $\int_1^c\int_0^{\ln p} f(p,q)dqdp$ $(c>1)$

4. Dadas las integrales dobles $\int_1^2\int_{1/x}^{x}\left(\frac{x^2}{y^2}\right)dydx$ y $\int_1^4\int_0^{\ln x} xdydx$, se pide, para cada una de ellas:

a) Dibujar el recinto de integración.
b) Plantear la integral cambiando el orden de integración.
c) Resolverla en cualquier orden.

5. La función de utilidad de un consumidor viene dada por $U(x,y)=x^2y^3$, donde x e y representan las cantidades que se consumen de dos bienes determinados, teniendo en cuenta que la suma de ambas cantidades tiene que ser menor o igual a 1. Calcular en ese caso la utilidad media que puede recibir el consumidor.

6. Plantear de dos formas distintas la integral $\iint_D e^{-x^2}dxdy$ en el recinto D limitado por el eje de abscisas y las rectas *y*=*x*, *x*=1. Resolver una de ellas.

7. En Estadística, dadas dos variables aleatorias X, Y y una función no negativa f(x, y) (que se denomina "función de densidad conjunta"), la probabilidad de que el par ordenado (X, Y) esté en una región D, viene dada por la fórmula.

$$P\big((X,Y)\in D\big)=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(x,y)dydx$$

Supongamos que la variable aleatoria X representa el tiempo (en minutos) durante el cual una persona hace cola en cierta entidad bancaria e Y representa el tiempo (en minutos) durante el cual una persona está sentada en la sala de espera de cierta gestoría. Si hemos adquirido una vivienda y para ello necesitamos ir al banco a retirar cierta cantidad de dinero, que luego entregaremos en la gestoría para hacer una previsión de fondos, y si $f(x,y)=\frac{1}{200}e^{-\frac{x}{10}-\frac{y}{20}}$ es la función de densidad conjunta para X e Y, hallar la probabilidad de que el tiempo total de espera no sea superior a los 10 minutos.

8. Sabemos que la satisfacción que recibe un consumidor debido al consumo de dos bienes en cantidades *x*, *y* puede expresarse por la función de utilidad $U=xe^{2y}$. Por razones de salud y de disponibilidad de dichos bienes, no le es posible consumir más de 10 unidades del primer bien ni más de 2 unidades del segundo bien.

a) Dibujar el dominio D delimitado por las posibles cantidades a consumir
b) Calcular $\iint_D xe^{-2y}dxdy$
c) Calcular la utilidad media que puede recibir el consumidor en dichas condiciones.

EJERCICIOS RESUELTOS TEMA 6

2. Calcular de dos formas diferentes las siguientes integrales dobles:

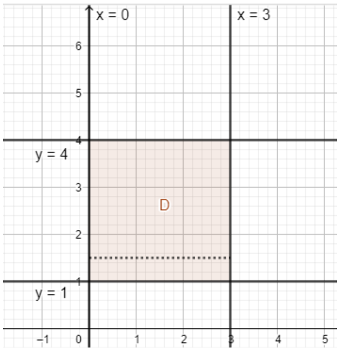
a) $\iint_D (x^2+xy)dxdy$
en el recinto D limitado por las rectas $x=0, x=3, y=1$ e $y=4$.

b) $\iint_D (x+y)^3 dxdy$
en el recinto D limitado por el eje de abscisas y las rectas $x=1, x=y$.

e) $\iint_D y(x^3+1)dxdy$
en el recinto $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2\leq 1\}$

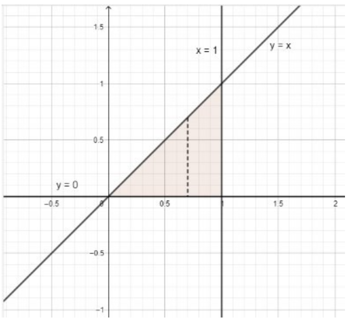
Las dos formas que podemos utilizar son integrar por franjas verticales u horizontales.

a) Veamos cómo sería con franjas horizontales, quedando como ejercicio realizar el cálculo con verticales.
El recinto D se corresponde con la siguiente imagen (donde la línea discontinua indica que estamos integrando por franjas horizontales):



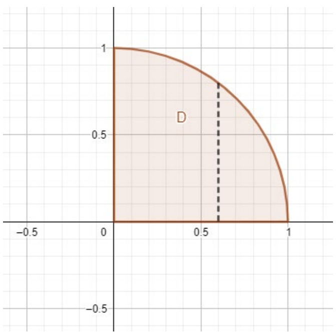
$$\iint_D (x^2+xy)dxdy = \int_1^4\left(\int_0^3 (x^2+xy)dx\right)dy =$$
$$= \int_1^4\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}y\Bigg]_{x=0}^{x=3}\right)dy = \cdots = \int_1^4\left(9+\frac{9}{2}y\right)dy$$
$$= \left(9y+\frac{9}{4}y^2\right)\Bigg]_1^4 = \cdots = \frac{243}{4} = 60.75$$

b) Este ejemplo lo vamos a realizar con franjas verticales, quedando como ejercicio el cálculo con franjas horizontales.



$$\iint_D (x+y)^3dxdy = \int_0^1\left(\int_0^x (x+y)^3dy\right)dx =$$
$$= \int_0^1\left(\frac{(x+y)^4}{4}\Bigg]_{y=0}^{y=x}\right)dx = \int_0^1\left(\frac{(2x)^4}{4}-\frac{x^4}{4}\right)dx$$
$$= \int_0^1 \frac{15x^4}{4}dx = \cdots = \frac{15}{20} = 3/4$$

e) Veamos cómo sería con franjas verticales quedando como ejercicio realizar el cálculo con horizontales.
El recinto $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2\leq 1\}$ se corresponde con la siguiente imagen (donde la línea discontinua indica que estamos integrando por franjas verticales):



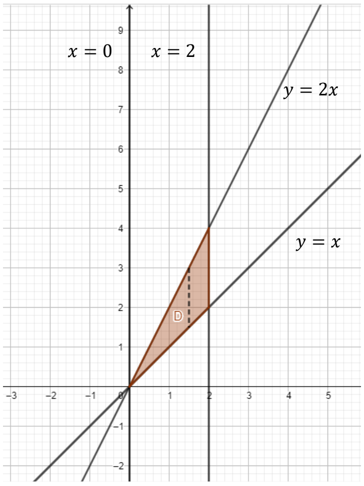
Integrando por franjas verticales tenemos que $x\in[0,1]$ y despejando de la ecuación, sabemos que $y=+\sqrt{1-x^2}$
Por tanto:

$$\iint_D y(x^3+1)dxdy = \int_0^1\left(\int_0^{+\sqrt{1-x^2}} y(x^3+1)dy\right)dx =$$
$$= \int_0^1 (x^3+1)\left(\int_0^{+\sqrt{1-x^2}} ydy\right)dx = \int_0^1 (x^3+1)\left(\frac{y^2}{2}\Bigg]_0^{+\sqrt{1-x^2}}\right)dx =$$
$$= \int_0^1 (x^3+1)\left(\frac{1-x^2}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^3+1-x^5-x^2)dx = = \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}+x-\frac{x^6}{6}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg]_0^1 = \cdots = \frac{3}{8}$$

3. Dibujar el dominio de integración en los siguientes casos y plantear la integral que resulta al cambiar el orden de integración:

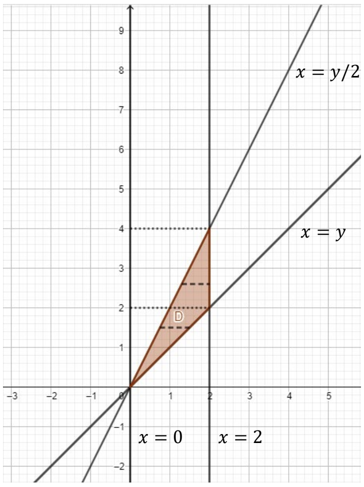
a) $\int_0^2 \int_x^{2x} f(x,y)dydx$

Teniendo en cuenta que tenemos $x \in [0,2]$ e $y = x$ hasta $y = 2x$, entonces estamos integrando con franjas verticales (línea discontinua) y la gráfica del dominio será:



Si integramos con franjas horizontales tenemos que dividir la integral en dos partes:

Cuando la $y \in [0,2]$, la x va desde $x = y/2$ hasta $x = y$, además cuando la $y \in [2,4]$ vemos que la x va desde $x = y/2$ hasta $x = 2$



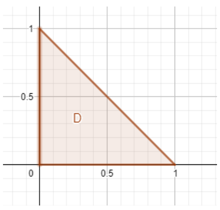
Es decir, cambiando el orden de integración, la integral doble queda como suma de dos integrales dobles:

$$\int_0^2 \int_x^{2x} f(x,y)dydx = \int_0^2 \int_{y/2}^{y} f(x,y)dxdy + \int_2^4 \int_{y/2}^{2} f(x,y)dxdy$$

---

5. La función de utilidad de un consumidor viene dada por $U(x,y) = x^2y^3$, donde x e y representan las cantidades que se consumen de dos bienes determinados, teniendo en cuenta que la suma de ambas cantidades tiene que ser menor o igual a 1. Calcular en ese caso la utilidad media que puede recibir el consumidor.

Gráfica del dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$



Para calcular la utilidad media utilizamos la fórmula:

$$\{\text{Valor medio integral de } U(x,y) \text{en } D\} = \frac{1}{\text{Área}(D)} \iint_D U(x,y)dydx$$

El área del dominio D es inmediata porque es el área de un triángulo de base 1 y altura también 1, por tanto $\text{Área}(D) = \frac{1}{2}$.

De tal forma que: $\{\text{Valor medio integral de } U(x,y) \text{en } D\} = 2 \iint_D U(x,y)dydx$

Integrando por franjas verticales nos queda:

$$\{\text{Valor medio integral de } U(x,y) \text{en } D\} = 2\int_0^1 \int_0^{1-x} x^2y^3dydx = 2\int_0^1 x^2 \left(\int_0^{1-x} y^3dy \right) dx$$

$$= 2\int_0^1 x^2 \left(\left[\frac{y^4}{4} \right]_0^{1-x} \right) dx = \frac{2}{4}\int_0^1 x^2(1-x)^4 \, dx =$$

(Esa última integral se corresponde con un caso particular de la integral Beta, cuyos valores son bien conocidos en Estadística, aunque se recomienda utilizar la Beta, la resolvemos independientemente de este hecho, desarrollando la potencia a la cuarta)

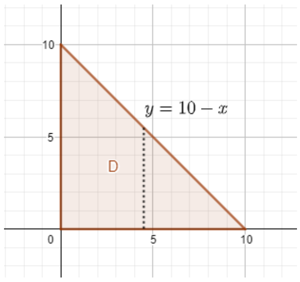
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2(1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4) \, dx = \cdots = \frac{1}{210} \approx 0.00476$$

7. En Estadística, dadas dos variables aleatorias X, Y y una función no negativa $f(x,y)$ (que se denomina "función de densidad conjunta"), la probabilidad de que el par ordenado (X,Y) esté en una región D, viene dada por la fórmula.

$$P\big((X,Y)\in D\big)=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(x,y)dydx$$

Supongamos que la variable aleatoria X representa el tiempo (en minutos) durante el cual una persona hace cola en cierta entidad bancaria e Y representa el tiempo (en minutos) durante el cual una persona está sentada en la sala de espera de cierta gestoría. Si hemos adquirido una vivienda y para ello necesitamos ir al banco a retirar cierta cantidad de dinero, que luego entregaremos en la gestoría para hacer una previsión de fondos, y si $f(x,y)=\frac{1}{200}e^{-\frac{x}{10}-\frac{y}{20}}$ es la función de densidad conjunta para X e Y, hallar la probabilidad de que el tiempo total de espera no sea superior a los 10 minutos.

Gráfica del dominio $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 10\}$ (con una franja vertical)



Si integramos por franjas verticales nos resulta (se deja como ejercicio la resolución por cambio de variable de las integrales correspondientes):

$$P(0\leq X+Y\leq 10)=\int_0^{10}\int_0^{10-x}\frac{1}{200}e^{-\frac{x}{10}-\frac{y}{20}}dydx\ =\cdots\approx 0.154818$$