Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Gerardo Vargas Flores

Teoría de la dimensión. Anillos noetherianos

Dimension theory. Noetherian rings

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Marzo de 2021

Dirigido por
Ana Belén de Felipe Paramio
Evelia Rosa García Barroso

Ana Belén de Felipe Paramio
Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Evelia Rosa García Barroso
Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Quiero agradecerle a mi familia el haber sacado adelante a un desastre como yo, y especialmente a mi hermana Alicia, por haberme soportado en el proceso. También querría agradecerle a mis amigos los buenos momentos que he pasado en mi etapa universitaria, en especial a los miembros de la Delegación de Alumnos de Matemáticas. Ha merecido la pena estudiar esta carrera solo por haberles conocido. Por último, (mas no por ello menos importante), quiero agradecerle su paciencia y su compromiso a todos y a cada uno de los profesores que me han impartido alguna clase a lo largo de mi vida, sin ustedes, no estaría donde estoy.

Gerardo Vargas Flores
La Laguna, 12 de marzo de 2021

Resumen · Abstract

Resumen

La dimensión de Krull es una herramienta algebraica que pemite clasificar anillos conmutativos y unitarios. Los teoremas que se establecen a través de su estudio posibilitan conocer las propiedades de los ideales contenidos en dichos anillos, especialmente los ideales primos, así como proporcionar condiciones necesarias y/o suficientes para asentar determinadas cualidades de los anillos. Dichos teoremas son especialmente sustanciosos cuando trabajamos sobre anillos noetherianos, por ello, tendrán un papel protagonista a lo largo del texto.

Nuestro objetivo en este trabajo será el de definir de forma rigurosa qué es la dimensión de Krull de un anillo, así como todos los términos relacionados con la misma. Una vez hecho esto, emplearemos los conocimientos adquiridos para probar el Teorema de los ideales principales de Krull y una generalización del mismo, caracterizaremos la dimensión de determinados anillos y probaremos el Teorema de Kaplansky. Además, daremos varias aplicaciones de dichos teoremas, la mayoría en anillos de polinomios. Finalmente, expondremos una demostración de interés para el tema en cuestión, que será la descripción de un anillo noetheriano con dimensión de Krull infinita.

Abstract

Kull dimension is an algebraic tool that allows us to characterize and classify commutative rings with unit. The theorems established through its study make it possible to know the properties of the ideals contained in these rings, especially the prime ideals, and providing necessary or sufficient conditions to establish properties of the rings. These theorems are especially useful when we work on Noetherian rings. Most of the results will be related to them.

Our goal will be to define rigorously what is the Krull dimension of a ring. After this, we will use the acquired knowledge to prove Krull's principal ideals theorem, and a generalization of it, we will characterize the dimension of some rings and prove Kaplansky's theorem. Also, we will present further applications of these theorems, most of them in polynomial rings. Finally, we will show a proof of interest for the topic in question, the description of a Noetherian ring with infinite Krull dimension.

Contenido

Introducción

La noción más intuitiva de dimensión que se tiene es cuando, al hablar del espacio, se afirma que este tiene dimensión tres. Cuando se precisa que el espacio puede definirse como $\mathbb{R}^3$, se induce que los conjuntos $\mathbb{R}^n$ tienen dimensión n. Esto es evidente, pues un conjunto que requiere de tres valores para definir a cada uno de sus elementos tendrá una dimensión mayor que otro que solo requiere de uno ($\mathbb{R}$). Por tanto, en el ámbito de los espacios $\mathbb{R}^n$, se puede concluir que la dimensión de los mismos viene dada por el número de coordenadas de sus elementos. Más adelante, se afirma que $\mathbb{R}^n$ puede englobarse dentro de la categoría de espacio vectorial. Sin embargo, aquí no resulta tan trivial como antes el diferenciar el "tamaño" de los conjuntos presentes ¿Qué conjunto es más "grande", las matrices de orden 3×3 con coeficientes en los números complejos, o los polinomios con coeficientes en los números reales en una indeterminada? Para responder a esta pregunta, es necesario establecer una definición inequívoca de lo que es la dimensión de un espacio vectorial. Para ello, se introduce el concepto de base (un conjunto de vectores linealmente independientes y generador), y se afirma que la dimensión de un espacio vectorial coincide con la cardinalidad de cualquiera de sus bases. Ahora le toca el turno a una estructura más compleja, los anillos. ¿Qué es y cómo podemos calcular la dimensión de un anillo? Este va a ser el objetivo de este trabajo.

El tema en cuestión empezó a desarrollarse en la primera mitad del siglo XX, siendo su principal impulsor el matemático alemán Wolfgang Krull. De hecho, es por él que surge la nomenclatura de "dimensión de Krull". Su trabajo no solo se centró en el Álgebra, sino que también abarcó el campo de la Topología y de la Geometría, siendo precisamente de este último campo de donde surge la intuición de la dimensión de un anillo. Para ello, introdujo el concepto de altura de un ideal primo $\mathfrak{p}$, que es el tamaño de la cadena ascendente de ideales primos más larga que se puede hacer hasta llegar a $\mathfrak{p}$. Esta definición será la piedra angular de la dimensión de Krull, pues quedará definida como el supremo de las alturas de todos los ideales primos del anillo.

Las utilidades devenidas de las propiedades de la dimensión de Krull permiten relacionar diferentes tipos de anillos. Por ejemplo, un anillo de Artin también es noetheriano, pero el recíproco no es cierto en general. Con la dimensión de Krull, damos una condición para la doble implicación, y es que un anillo noetheriano de dimensión cero es también un anillo de Artin. De igual manera, un dominio de ideales principales es siempre un dominio de factorización única, sin embargo, el recíproco solo es cierto cuando el dominio de factorización única es de dimensión uno.

Una herramienta que se compagina a la perfección con la dimensión de Krull es la localización. Localizar un anillo consiste en construir, a partir de este, un anillo local, es decir, un anillo que solo tenga un ideal maximal. Decimos que se compaginan muy bien porque la dimensión de Krull es invariante frente a localizaciones, lo que permite simplificar bastante algunas demostraciones, como la del Teorema de los ideales principales de Krull y su generalización a cualquier ideal finitamente generado. Por otro lado, hay varias propiedades (como la Propiedad universal de las localizaciones), que emplearemos constantemente a lo largo del texto para llegar a resultados más generales. Además, recurriremos precisamente a una localización para describir un anillo noetheriano de dimensión infinita. Este ejemplo se lo debemos al matemático japonés Masayoshi Nagata, que en [9], dio varios contraejemplos a propiedades que, hasta la publicación de su libro, no se habían concretado con un caso particular. No solo resulta interesante el ejemplo en sí, sino el procedimiento empleado para demostrar que dicho anillo cumple con las condiciones requeridas.

Por último, recalcamos que para ciertas demostraciones es necesario emplear teoría de módulos, por lo que se ha hecho una breve introducción al respecto que termina con la demostración del Lema de Nakayama, que emplearemos para demostrar el Teorema de ideales principales de Krull y el generalizado de este.

1

Definiciones previas

En este capítulo introduciremos la localización de un anillo y la teoría de módulos, que nos hará falta en la práctica totalidad de las demostraciones de este trabajo. En lo referido a la localización de anillos, nuestra principal motivación es la de fijar la notación que emplearemos, pues este tema ya está presente en la guía docente de la asignatura Álgebra Conmutativa del Grado en Matemáticas. Sin embargo, expondremos algunos resultados que trascienden los contenidos dados en dicha asignatura (Proposición 1.1.11, Lema 1.1.12, Proposición 1.1.14, Proposición 1.1.16 y el Corolario 1.1.17). Además, recalcamos que, a lo largo de este texto, emplearemos el término "anillo" para referirnos a un anillo conmutativo y unitario.

1.1. Localización de un anillo

En este apartado expondremos una herramienta que utilizaremos frecuentemente a lo largo del texto, la *localización* ([1], pág. 41). Dado un anillo arbitrario A, siempre es posible construir un anillo *local*, es decir, un anillo con un único ideal maximal, a partir de él.

Definición 1.1.1 *Sean A un anillo y $S \subset A$, decimos que S es una* ***parte multiplicativamente cerrada*** *de A cuando cumple las dos condiciones siguientes:*

- $1 \in S$.
- *Dados dos elementos $a,\, b \in S$, entonces $ab \in S$.*

Lema 1.1.2 *Sean A un anillo y $\mathfrak{p} \subset A$ un ideal primo. Entonces el conjunto $S = A \setminus \mathfrak{p}$ es una parte multiplicativamente cerrada.*

Demostración. En primer lugar, observamos que $1 \notin \mathfrak{p}$, puesto que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo, por lo que $1 \in S$. Por otro lado, dados $a,\, b \in S$, supongamos, por reducción al absurdo, que $ab \notin S$. Eso implicaría que $ab \in \mathfrak{p}$, pero como $\mathfrak{p}$ es primo, tendríamos que $a \in \mathfrak{p}$ o que $b \in \mathfrak{p}$, es decir, que $a \notin S$ o que $b \notin S$, lo que es absurdo, por tanto, $ab \in S$. $\square$

Definición 1.1.3 *Sean A un anillo y $S \subset A$ una parte multiplicativamente cerrada. Entonces, definimos el* ***anillo de fracciones de** A **sobre** S*, y lo denotamos como $S^{-1}A$, al conjunto:*

$$S^{-1}A := \{a/s : a \in A,\ s \in S\}.$$

En dicho conjunto, decimos que dos elementos a/s, b/t son iguales si, y solo si, existe un elemento $u \in S$ tal que $u(at-bs) = 0$. El conjunto $S^{-1}A$ tiene estructura de anillo con las operaciones:

$$\begin{array}{rclcrcl} + : S^{-1}A \times S^{-1}A & \longrightarrow & S^{-1}A & \qquad & \cdot : S^{-1}A \times S^{-1}A & \longrightarrow & S^{-1}A \\ (\frac{a}{s}, \frac{b}{t}) & \longmapsto & \frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at+bs}{st} & & (\frac{a}{s}, \frac{b}{t}) & \longmapsto & \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{ab}{st} \end{array}$$

Una característica de los anillos de fracciones es que todos los elementos de la forma s/t, donde $s, t \in S$, son unidades en $S^{-1}A$. Empleamos la notación $A_{\mathfrak{p}}$ para denotar al anillo $S^{-1}A$, con $S = A \setminus \mathfrak{p}$, siendo $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A. Además, en este caso, decimos que hemos **localizado el anillo A en $\mathfrak{p}$**.

El término "localización" se debe a que, cuando tomamos una parte multiplicativamente cerrada de la forma $S = A \setminus \mathfrak{p}$, el anillo de fracciones resultante $S^{-1}A$ es local, es decir, solo contiene un ideal maximal.

Proposición 1.1.4 *Sean A un anillo y $S \subset A$ una parte multiplicativamente cerrada de la forma $S = A \setminus \mathfrak{p}$. Entonces el anillo de fracciones $A_{\mathfrak{p}}$ es local.*

Demostración. Para demostrar que $A_{\mathfrak{p}}$ es local, en primer lugar, tomamos el ideal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} := \{a/s : a \in \mathfrak{p},\ s \in S\} \subset A_{\mathfrak{p}}$. Supongamos que tenemos (a/s), $(b/t) \in S^{-1}A$ tales que $(a/s)(b/t) \in \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Esto implica que $ab/st \in \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, por tanto, existen $c \in \mathfrak{p}$ y $d \in S$ tales que $ab/st = c/d$, lo que a su vez, implica que existe $u \in S$ que cumple que $u(abd - stc) = 0$. De aquí deducimos que $uabd = ustc$. Como $c \in \mathfrak{p}$ llegamos a que $ustc \in \mathfrak{p}$, y por tanto, $uabd \in \mathfrak{p}$. Como $ud \notin \mathfrak{p}$, entonces $ab \in \mathfrak{p}$. Pero como $\mathfrak{p}$ es un ideal primo, esto implica que $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$, es decir, $a/s \in \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ o $b/t \in \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Por tanto, $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ es un ideal primo de $A_{\mathfrak{p}}$.

Para demostrar que $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ es el único ideal maximal, nos basta con demostrar que el resto de elementos del anillo son unidades. En efecto, sea $a/s \notin \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, esto implica que $a \notin \mathfrak{p}$, que es lo mismo que decir que $a \in S$. Luego, basta con tomar $(a/s)(s/a) = 1/1$. En consecuencia, $A_{\mathfrak{p}} \setminus \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ es un conjunto que solo contiene unidades, en consecuencia, $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ es un ideal maximal, y es el único con esta propiedad en $A_{\mathfrak{p}}$, por lo que $A_{\mathfrak{p}}$ es local. $\square$

Definición 1.1.5 *Sean A un anillo y $S \subset A$ una parte multiplicativamente cerrada. Definimos el* ***homomorfismo natural*** *como el homomorfismo $\phi : A \longrightarrow S^{-1}A$ tal que $\phi(a) = \frac{a}{1}$ para todo $a \in A$.*

Proposición 1.1.6 ***(Propiedad universal de las localizaciones)***.*([1], Proposición 3.1., pág. 42) Sean $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos y $S \subset A$ una parte multiplicativamente cerrada. Si todos los elementos de $f(S)$ son unidades en B, entonces existe un único homorfismo $h : S^{-1}A \longrightarrow B$ tal que $f = h \circ \phi$, donde ϕ denota el homomorfismo natural entre A y $S^{-1}A$.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"'] & S^{-1}A \arrow[dl, dashed, "\exists! h"] \\ B & \end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Demostración. Esta prueba consistirá en definir explícitamente el homomorfismo h. En primer lugar, tenemos que todos los elementos de S son unidades en su imagen $f(S)$. Esto es que para todo $s \in S$, se cumple que existe un elemento $b \in B$ tal que $f(s)b = 1$. En este sentido, denotamos a dicho elemento $b = f(s)^{-1}$. Por otro lado, el homomorfismo natural ϕ envía los elementos de $a \in A$ a $a/1$.

Ahora bien, dado un elemento $a/s \in S^{-1}A$, podemos expresarlo de la forma $(a/1)(1/s)$. Por lo que podemos definir el homomorfismo como $h : S^{-1}A \longrightarrow B$ donde $h(a/s) = f(a)f(s)^{-1}$. Veamos que, en efecto, esto es un homomorfismo. En primer lugar, comprobemos que está bien definido. Por un lado $f(a) \in B$, y como vimos antes, todo elemento de $f(S)$ tiene un inverso en B, por lo que $f(s)^{-1} \in B$. Como B es un anillo, el producto de cualesquiera dos elementos de B permanece en B, por lo que, en particular $f(a)f(s)^{-1} \in B$. Por otro lado, supongamos que dados a/s, $b/t \in S^{-1}A$ se cumple que $a/s = b/t$, es decir, que existe $u \in S$ tal que $u(at - bs) = 0$. En particular, tomando la imagen de ambos lados, nos queda que $f(u)(f(a)f(t) - f(b)f(s)) = f(0)$. Sin embargo, los elementos $f(u)$, $f(s)$ y $f(t)$ son unidades y $f(0) = 0$, por lo que despejando nos queda que $f(a)f(s)^{-1} = f(b)f(t)^{-1}$, es decir, $h(a/s) = h(b/t)$. Sabemos que la aplicación h está bien definida, comprobemos ahora que es un homomorfismo. Se tiene $h(a/s + b/t) = h((at + bs)/st) = f(at + bs)f(st)^{-1}$. Como f es un homomorfismo, nos queda $(f(a)f(t) + f(b)f(s))f(s)^{-1}f(t)^{-1} = f(a)f(s)^{-1} + f(b)f(t)^{-1} = h(a/s) + h(b/t)$. Además $h((a/s)(b/t)) = h(ab/st) = f(ab)f(st)^{-1}$. Nuevamente, como f es homomorfismo, esto es igual a $f(a)f(s)^{-1}f(b)f(t)^{-1} = h(a/s)h(b/t)$. Por tanto, h es un homomorfismo.

Para probar que es el único, supongamos que existe otro homomorfismo g tal que $f = g \circ \phi$. Se sigue que para todo $a \in A$ se cumple que $f(a) = g(\phi(a)) = g(a/1) = g((a/s)(s/1)) = g(a/s)g(s/1) = g(a/s)g(\phi(s)) = g(a/s)f(s)$. Por tanto, como $f(a) = g(a/s)f(s)$ se tiene que $g(a/s) = f(a)f(s)^{-1} = h(a/s)$, por lo que el homomorfismo h es único. $\square$

En este ámbito, si tenemos un homomorfismo, o como tenemos el homomorfismo natural $\phi : A \longrightarrow S^{-1}A$, podemos hablar de la contracción y extensión de ideales del anillo A y de su localización $S^{-1}A$.

Definición 1.1.7 *([2], pág. 40) Sean A un anillo, $S \subset A$ una parte multiplicativamente cerrada y $\phi : A \longrightarrow S^{-1}A$ el homomorfismo natural. Dado I un ideal de A, definimos la **extensión** del ideal I, y la denotamos como I^e, al ideal más pequeño de $S^{-1}A$ que contiene a $\phi(I)$. De igual manera, sea $\mathfrak{I}$ un ideal de $S^{-1}A$, definimos la **contracción** de $\mathfrak{I}$, y la denotamos como $\mathfrak{I}^c$, al conjunto $\phi^{-1}(\mathfrak{I})$.*

Dado un ideal $I \subset A$, si tomamos una parte multiplicativamente cerrada de la forma $S = A \setminus \mathfrak{p}$, con $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A, denotaremos $I_{\mathfrak{p}}$ al conjunto $I^e = S^{-1}I = \{a/s : a \in I,\ s \in S\}$, es decir, el ideal que generan las imágenes de los elementos de I por el homomorfismo natural $\phi : A \longrightarrow S^{-1}A$, es decir, $I^e = \langle \phi(I) \rangle$. La contracción y la extensión de los ideales de A y de $S^{-1}A$ cumplen una serie de propiedades que enunciaremos tras demostrar un lema previo:

Lema 1.1.8 *Sean A un anillo, $\mathfrak{p} \subset A$ ideal primo y $S \subset A$ una parte multiplicativamente cerrada que es disjunta con $\mathfrak{p}$. Entonces, para todo $a/s \in S^{-1}A$, se cumple que: $a/s \in S^{-1}\mathfrak{p}$ si, y solo si, $a \in \mathfrak{p}$.*

Demostración. Supongamos que $a/s \in S^{-1}\mathfrak{p}$. Esto significa que existen $b \in \mathfrak{p}$ y $t \in S$ tal que $a/s = b/t$. Esto implica que existe $u \in S$ que cumple que $u(at - bs) = 0$. De aquí llegamos a $uat = ubs$. Como $b \in \mathfrak{p}$ se tiene que $ubs \in \mathfrak{p}$, y por tanto, $uat \in \mathfrak{p}$. Sin embargo, $u, t \notin \mathfrak{p}$, por lo que se concluye que $a \in \mathfrak{p}$.

Por otro lado, si $a \in \mathfrak{p}$, por definición, para todo $s \in S$, llegamos a que $a/s \in S^{-1}\mathfrak{p}$. $\square$

Propiedad 1.1.9 *([2], pág. 40) Sean A un anillo, $S \subset A$ una parte multiplicativamente cerrada, e $I \subset A$ y $\mathfrak{I} \subset S^{-1}A$ ideales. Entonces:*

1. *$I \subset I^{ec}$.*
2. *$\mathfrak{I}^{ce} = \mathfrak{I}$.*
3. *Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A tal que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Entonces, $\mathfrak{p}^e$ es un ideal primo de $S^{-1}A$ y $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$.*

Demostración. Sea $a \in I$, entonces $a/s \in I^e$, con $s \in S$. En particular, para $s = 1$, se tiene que $a/1 \in I^e$, por lo que $a \in I^{ec}$. Por lo tanto, $I \subset I^{ec}$, como queríamos ver.

Sea $a/s \in \mathfrak{J}$, como $\mathfrak{J}$ es un ideal, se tiene que $(a/s)(s/1) = a/1 \in \mathfrak{J}$, lo que implica que $a \in \mathfrak{J}^c$. Esto significa que $a/1 \in \mathfrak{J}^{ce}$, que al ser $\mathfrak{J}^{ce}$ un ideal, cumple que $(a/1)(1/s) \in \mathfrak{J}^{ce}$, y por tanto, $a/s \in \mathfrak{J}^{ce}$, llegando a que $\mathfrak{J}^{ce} \supset \mathfrak{J}$. La otra inclusión se obtiene de forma análoga, esto es, dado $a/s \in \mathfrak{J}^{ce}$, tenemos que $a/1 \in \mathfrak{J}^{ce}$ lo que implica que $a \in \mathfrak{J}^c$, y por tanto, $a/s \in \mathfrak{J}$, llegando a la segunda inclusión. En consecuencia, $\mathfrak{J}^{ce} = \mathfrak{J}$.

Supongamos que $(a/s)(b/t) \in \mathfrak{p}^e$, donde $s, t \in S$ y $a, b \in A$. Como $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, sabemos que $\mathfrak{p}^e \neq S^{-1}A$, puesto que si existiera $a \in \mathfrak{p}$ tal que $a \in S$, nos llevaría a que $\phi(a) = a/1$ es una unidad, y por tanto, se cumpliría que $\mathfrak{p}^e = S^{-1}A$. Por otro lado, sabemos que $(ab/st)(st/1) = ab/1 \in \mathfrak{p}^e$. Por el Lema 1.1.8, esto implica que $ab \in \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p}$ es primo, se tiene que $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$. Entonces, $a/s \in \mathfrak{p}^e$ o $b/t \in \mathfrak{p}^e$, por lo que $\mathfrak{p}^e$ es un ideal primo. Por otro lado, sabemos por el apartado 1. que $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}^{ec}$. Veamos la otra inclusión. Sea $a \in \mathfrak{p}^{ec}$, esto implica que $a/1 \in \mathfrak{p}^e$, luego existen $b \in \mathfrak{p}$ y $s \in S$ tal que $a/1 = b/s$, es decir, existe $u \in S$ tal que $u(as - b) = 0$. De aquí deducimos que $uas = ub$. Como $b \in \mathfrak{p}$, entonces $ub \in \mathfrak{p}$ y $uas \in \mathfrak{p}$, pero por hipótesis $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, por lo que $u, s \notin \mathfrak{p}$, concluyendo que $a \in \mathfrak{p}$, y en consecuencia $\mathfrak{p}^{ce} \subset \mathfrak{p}$, alcanzando la otra inclusión. Por tanto, $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$. □

Ahora, enunciaremos una serie de resultados que emplearemos más adelante.

Definición 1.1.10 *([10], pág. 29) Sean A un anillo y J, I ideales de A. Llamamos **ideal cociente de I sobre J**, y lo denotamos como $(I : J)$, al ideal:*

$$(I : J) := \{a \in A : aJ \subset I\}.$$

Proposición 1.1.11 *([5]) Sean A un anillo e I, J dos ideales de A tales que $I_{\mathfrak{M}} = J_{\mathfrak{M}}$ para todo ideal maximal $\mathfrak{M} \subset A$, entonces, $I = J$.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo que $I \not\subset J$. Sea $a \in I \setminus J$, tomamos $(J : (a)) := \{x \in A : x(a) \subset J\}$ el ideal cociente de J sobre (a). Por otra parte, sabemos que $I_{\mathfrak{M}} = J_{\mathfrak{M}}$ para todo ideal maximal $\mathfrak{M} \subset A$. Como $a/1 \in I_{\mathfrak{M}}$ se tiene que $a/1 \in J_{\mathfrak{M}}$, lo que significa que $a/1 = b/s$ para ciertos $b \in J$ y $s \in S = A \setminus \mathfrak{M}$. En consecuencia, existe $u \in S$ tal que $u(as - b) = 0$, es decir, $uas = ub$. Tenemos que $ub \in J$, por lo que $usa \in J$. Por definición, llegamos a que $us \in (J : (a))$ (ya que para todo $x \in A$, se tiene que $usax \in J$, por lo que $us(a) \subset J$), pero $us \in S$, es decir, $us \notin \mathfrak{M}$. Aplicando el mismo razonamiento con todos los ideales maximales $\mathfrak{M}$ de A, llegamos a que $(J : (a)) \not\subset \mathfrak{M}$. Como $(J : (a))$ no está contenido en ningún ideal maximal de A, concluimos que debe ser el anillo total, es decir $(J : (a)) = A$. En particular, $1 \in (J : (a))$, lo que implica que $1a = a \in J$, esto es $a \in J$, que contradice la hipótesis. Luego $I \subset J$. La inclusión $I \supset J$ se consigue aplicando un razonamiento similar al anterior, por lo que, en conclusión, $I = J$, como queríamos demostrar. □

Lema 1.1.12 *([6], Proposición 10.9.10) Sean A un anillo y S, T dos partes multiplicativamente cerradas de A. Si $\phi : A \longrightarrow S^{-1}A$ es el homomorfismo natural y $\phi(T) = U$, se cumple que:*

$$(ST)^{-1}A \cong U^{-1}(S^{-1}A),$$

donde $ST = \{st : s \in S, t \in T\}$.

Demostración. En primer lugar, nos centramos en $\phi_1 : A \longrightarrow (ST)^{-1}A$. Como $S, T \subset ST$, se tiene que $\phi_1(S)$ y $\phi_1(T)$ pertenecen a las unidades de $(ST)^{-1}A$. Por la Propiedad universal, se inducen dos homomorfismos $\gamma_1 : S^{-1}A \longrightarrow (ST)^{-1}A$ y $\gamma_2 : T^{-1}A \longrightarrow (ST)^{-1}A$. En virtud del Diagrama 1.2, se tiene que $\gamma_1 \circ \phi = \phi_1$, por lo que $\gamma_1(U) = \phi_1(T)$. Esto implica que los elementos de $\gamma_1(U)$ son unidades de $(ST)^{-1}A$. Por la Propiedad universal, podemos afirmar que existe un homomorfismo $\kappa : U^{-1}(S^{-1}A) \longrightarrow (ST)^{-1}A$, siendo $U^{-1}(S^{-1}A)$ la localización de $\phi(T) = U$ en $S^{-1}A$. Dado un elemento $(a/s)/(t/1) \in U^{-1}(S^{-1}A)$, el homomorfismo κ le hace corresponder $(a/s) \cdot (t/1)^{-1} \in (ST)^{-1}A$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\phi_2"'] \arrow[dr, "\phi_1"] & S^{-1}A \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, dashed, "\exists!\gamma_1"] & U^{-1}(S^{-1}A) \arrow[dl, dashed, bend left, "\exists!\kappa"] \\
T^{-1}A \arrow[r, dashed, "\exists!\gamma_2"] & (ST)^{-1}A \arrow[ur, dashed, "\exists!\lambda"] &
\end{tikzcd} \tag{1.2}$$

Por otro lado, tomamos $\gamma \circ \phi : A \longrightarrow U^{-1}(S^{-1}A)$ que al elemento $a \in A$ lo manda a $(a/1)/(1/1)$. Sea $st \in ST$, se cumple que $\gamma \circ \phi(st) = (st/1)/(1/1)$, que es una unidad, con inverso $(1/s)/(t/1) \in U^{-1}(S^{-1}A)$. Por tanto, por la Propiedad universal, existe un único homomorfismo $\lambda : (ST)^{-1}A \to U^{-1}(S^{-1}A)$, donde los elementos a/st son enviados a $\lambda(a/st) = (a/s)/(t/1)$. Es inmediato comprobar que κ y λ son homomorfismos inversos el uno del otro, siendo ambos, por tanto, isomorfismos. $\square$

Ahora probaremos que los ideales primos de $S^{-1}A$ están en correspondencia biunívoca con los ideales primos de A disjuntos con S.

Teorema 1.1.13 ***(Teorema de correspondencia)***. *([10], pág. 94) Existe una correspondencia biunívoca entre los ideales primos de $S^{-1}A$ y los ideales primos de A disjuntos con S.*

Demostración. En virtud de la Propiedad 1.1.9, sabemos que la extensión de cualquier ideal primo de A disjunto con S es un ideal primo de $S^{-1}A$. Esto es, para todo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$, $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, se tiene que $\mathfrak{p}^e \in \text{Spec}(S^{-1}A)$. Por otro lado, dado un ideal primo $\mathfrak{J} \subset S^{-1}A$, tenemos que ver que $\mathfrak{J}^c$ es un ideal primo de A. Esto es cierto pues $\mathfrak{J}^c = \phi^{-1}(\mathfrak{J})$, y la antiimagen de un ideal primo es primo, por tanto, debe existir $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$ tal que $\mathfrak{J}^c = \mathfrak{p}$. Sin embargo, esto implica que $\mathfrak{J}^{ce} = \mathfrak{p}^e$, que por la Propiedad 1.1.9 nos lleva a que $\mathfrak{p}^e = \mathfrak{J}$. En consecuencia, los ideales primos de $S^{-1}A$ son la extensión de los ideales primos de A disjuntos con S. Por tanto, existe una correspondencia biyectiva entre los ideales de $\text{Spec}(A)$ disjuntos con S y $\text{Spec}(S^{-1}A)$, como queríamos ver. $\square$

Proposición 1.1.14 *([10], pág. 99) Sean A un anillo, $S \subsetneq A$ una parte multiplicativamente cerrada de A y $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A tal que $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Entonces,*

$$\kappa : A_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\cong} (S^{-1}A)_{S^{-1}\mathfrak{p}},$$

definida por $\kappa(a/s) = \frac{a/1}{s/1}$, donde $a \in A$ y $s \in A \setminus \mathfrak{p}$, es un isomorfismo de anillos.

Demostración. En primer lugar, veamos que κ está bien definida. Por un lado, tiene que cumplirse que $\kappa(a/s) \in (S^{-1}A)_{S^{-1}\mathfrak{p}}$, esto es, $a/1 \in S^{-1}A$ y $s/1 \notin S^{-1}\mathfrak{p}$. En efecto, $a/1 \in S^{-1}A$, además, si $s/1 \in S^{-1}\mathfrak{p}$ entonces tendría que existir $b/t \in S^{-1}\mathfrak{p}$, con $b \in \mathfrak{p}$ y $t \in S$ tal que $s/1 = b/t$, es decir, existe $u \in S$ tal que $u(st - b) = 0$, despejando nos queda $ust = ub$. Como $ub \in \mathfrak{p}$, se tiene que $ust \in \mathfrak{p}$, pero u, s, $t \notin \mathfrak{p}$, lo cual es absurdo por ser $\mathfrak{p}$ ideal primo, en consecuencia, $s/1 \notin S^{-1}\mathfrak{p}$. Por otra parte, supongamos que $(a/s) = (b/t)$, es decir, existe $u \in S$ tal que $u(at - bs) = 0$. Esto significa que $\phi(u(at - bs)) = \phi(0)$ por lo que $u(at - bs)/1 = 0/1$, y separando los términos, llegamos a que $(u/1)((at/1) - (bs/1)) = 0/1$, lo que es equivalente a $\frac{a/1}{s/1} = \frac{b/1}{t/1}$, es decir, $\kappa(a/s) = \kappa(b/t)$. Por tanto, la correspondencia κ está bien definida.

Comprobemos si κ es un homomorfismo. Tenemos $\kappa(a/s + b/t) = \kappa(\frac{at+bs}{st}) = \frac{at+bs/1}{st/1} = \frac{at/1}{st/1} + \frac{bs/1}{st/1} = \frac{a/1}{s/1} + \frac{b/1}{t/1} = \kappa(a/s) + \kappa(b/t)$. Además $\kappa((a/s)(b/t)) = \kappa(ab/st) = \frac{ab/1}{st/1} = \frac{a/1}{s/1}\frac{b/1}{t/1} = \kappa(a/s)\kappa(b/t)$. Por último, $\kappa(1/1) = \frac{1/1}{1/1}$, por lo que κ es un homomorfismo.

Nos queda comprobar si el homomorfismo es biyectivo. Por un lado, $Ker\kappa = \{a/s \in A_{\mathfrak{p}} : \kappa(a/s) = \frac{0/1}{1/1}\}$, pero $\frac{a/1}{s/1} = \frac{0/1}{1/1}$ si, y solo si, existe $b/t \in S^{-1}A \setminus S^{-1}\mathfrak{p}$ tal que $(b/t)(a/1 - 0/1) = 0/1$, es decir, $ba/t = 0/1$. A su vez, esto se da si, y solo si, existe $u \in S$ tal que $uba = 0$, en donde u, $b \neq 0$, pues pertenecen a S, que es disjunto con $\mathfrak{p}$. Si asumimos que $a/s \neq 0/1$, se cumple que para todo $v \in S$ se tiene que $v(a - 0) \neq 0$, es decir, $va \neq 0$ para todo $v \in S$. En particular, tomamos $v = ub \in S$, lo que implica que $uba \neq 0$ si, y solo si $a \neq 0$, por tanto,

$Ker\kappa = \{0/1\}$, concluyendo que κ es inyectiva.

Por otro lado, dado $\frac{a/s}{b/t} \in (S^{-1}A)_{S^{-1}\mathfrak{p}}$, queremos demostrar que existe $c/u \in A_\mathfrak{p}$ tal que

$$\kappa(c/u) = \frac{a/s}{b/t} \tag{1.3}$$

esto es, existe $d/v \in S^{-1}A \setminus S^{-1}\mathfrak{p}$ satisfaciendo $(d/v)((cb/t) - (au/s)) = 0/1$, es decir $(d/v)((cbs - aut)/st) = 0/1$, por tanto $(dcbs - daut)/stv = 0/1$. Esto es cierto cuando existe $w \in S$ tal que $w(dcbs - daut) = 0$, llegando a que $wdcbs = wdaut$. Por tanto, si tomamos $c = at$ y $u = bs$, llegamos a la igualdad (1.3), probando así que todo elemento de $(S^{-1}A)_{S^{-1}\mathfrak{p}}$ puede expresarse como la imagen de un elemento de $A_\mathfrak{p}$ (siendo dicho elemento $(at/bs) \in S^{-1}A$), en consecuencia, κ es sobreyectiva, y por tanto, biyectiva. Así pues, κ es un homomorfismo biyectivo, esto es, un isomorfismo, como queríamos ver. □

Propiedad 1.1.15 *Sean A un anillo, I ideal de A y S una parte multiplicativamente cerrada de A. Si $S^{-1}A$ es un anillo noetheriano, entonces $S^{-1}I$ puede expresarse como un ideal generado por elementos de la forma $a/1$, con $a \in I$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{I} = S^{-1}I$ el ideal de $S^{-1}A$, generado por $\{\frac{a_1}{s_1}, \ldots, \frac{a_m}{s_m}\}$. Podemos expresar $\frac{a_i}{s_i}$ como $\frac{a_i}{1}\frac{1}{s_i}$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, lo que implica que $\frac{a_i}{s_i} \in (\frac{a_1}{1}, \ldots, \frac{a_m}{1})$ por lo que $(\frac{a_1}{1}, \ldots, \frac{a_m}{1}) \supset (\frac{a_1}{s_1}, \ldots, \frac{a_m}{s_m})$. Además, $\frac{a_i}{s_i}\frac{s_i}{1} = \frac{a_i}{1}$ luego $\frac{a_i}{1} \in (\frac{a_1}{s_1}, \ldots, \frac{a_m}{s_m})$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ lo que implica que $(\frac{a_1}{1}, \ldots, \frac{a_m}{1}) \subset (\frac{a_1}{s_1}, \ldots, \frac{a_m}{s_m})$, llegando a la igualdad $\mathfrak{I} = (\frac{a_1}{1}, \ldots, \frac{a_m}{1})$. □

Proposición 1.1.16 *([4], pág. 2) Sea A un anillo tal que para todo ideal maximal $\mathfrak{M} \subset A$ el anillo $A_\mathfrak{M}$ es noetheriano y que para todo $x \in A \setminus \{0\}$, x solo está contenido en un número finito de ideales maximales de A. Entonces A es noetheriano.*

Demostración. Sea $I \subseteq A$ ideal, con $I \neq \{0\}$, tenemos que concluir que I está finitamente generado. En primer lugar, sea $f \in I \setminus \{0\}$. Sabemos que f pertenece a una cantidad finita de ideales maximales de A. Dichos ideales los denotamos $\mathfrak{M}_{i_1}, \mathfrak{M}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{M}_{i_k}$. Por tanto, $f \in \bigcap_{j=1}^{k} \mathfrak{M}_{i_j}$. En consecuencia, podemos afirmar que I está contenido en un número finito de ideales maximales y dichos ideales solo pueden ser del conjunto $\mathfrak{F} := \{\mathfrak{M}_{i_1}, \mathfrak{M}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{M}_{i_k}\}$. Denotemos $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$ a los ideales del conjunto $\mathfrak{F}$ en los que está contenido I, y llamemos $\mathfrak{M}_{n+1}, \mathfrak{M}_{n+2}, \ldots, \mathfrak{M}_{n+l}$ a aquellos ideales de dicho conjunto que no contienen a I, donde $n + l = k$. Para cada uno de estos últimos ideales, podemos tomar $h_{n+1}, \ldots, h_{n+l}$ tales que $h_{n+j} \in I$ pero $h_{n+j} \notin \mathfrak{M}_{n+j}$.

Por hipótesis, para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $I_{\mathfrak{M}_i}$ está finitamente generado, por tanto, en virtud de la Propiedad 1.1.15, existen $g_1^{(i)}, \dots, g_{m_i}^{(i)} \in I$ tales que $S_i^{-1}I = (g_1^{(i)}/1, g_2^{(i)}/1, \dots, g_{m_i}^{(i)}/1)$, donde $S_i := A \setminus \mathfrak{M}_i$, para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Definimos $J = (f, g_1^{(1)}, \dots, g_{m_1}^{(1)}, g_1^{(2)}, \dots, g_{m_2}^{(2)}, \dots, g_1^{(n)}, \dots, g_{m_n}^{(n)}, h_{n+1}, \dots, h_{n+l})$. Como todos los generadores de J pertenecen a I, afirmamos que $J \subset I$. Comprobemos que, en realidad $I = J$. Para ello, por la Proposición 1.1.11, nos basta demostrar que $S^{-1}I = S^{-1}J$, con $S = A \setminus \mathfrak{M}$, para todo ideal maximal $\mathfrak{M} \subset A$.

En primer lugar, hacemos la comprobación para los ideales $\mathfrak{M}_i$, con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Tenemos que $S_i^{-1}I = S_i^{-1}(g_1^{(i)}, g_2^{(i)}, \dots, g_{m_i}^{(i)}) \subset S_i^{-1}J$. Además, como $J \subset I$, se llega a que $S_i^{-1}J \subseteq S_i^{-1}I$, por lo que $S_i^{-1}J = S_i^{-1}I$.

Al tomar $i \in \{n+1, \dots, n+l\}$, si $J \subset \mathfrak{M}_i$, esto implicaría que, en particular, $h_i \in \mathfrak{M}_i$, lo cual es falso, por lo que $J \not\subset \mathfrak{M}_i$, lo que supone que $J \cap S_i \neq \emptyset$. Como además $I \cap S_i \neq \emptyset$, se cumple que $S_i^{-1}I = S_i^{-1}J = S_i^{-1}A$ para $i \in \{n+1, n+2, \dots, n+l\}$. De igual manera, si tomamos $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{M}_{i_l}$ para todo $l \in \{1, 2, \dots, k\}$, con $S = A \setminus \mathfrak{M}$, resulta que $J \cap S \neq \emptyset$ y que $I \cap S \neq \emptyset$ ya que $f \in I \cap J$ y $f \notin \mathfrak{M}$. Luego, $S_i^{-1}I = S_i^{-1}J = S_i^{-1}A$.

En consecuencia, como se cumple que para todo ideal maximal $\mathfrak{M} \subset A$, los ideales I y J tienen la misma extensión en la localización de A en $\mathfrak{M}$, concluimos, por la Proposición 1.1.11, que $I = J$. Como J está finitamente generado, se sigue que I está finitamente generado, luego A es noetheriano. □

Proposición 1.1.17 *([2], pág. 47. [8]) Sea K cuerpo. Entonces, el anillo $K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]_{(x_1, \dots, x_n)}$ es isomorfo a $K(y_1, \dots, y_m)[x_1, \dots, x_n]_{(x_1, \dots, x_n)}$.*

Demostración. Vamos a aplicar el Lema 1.1.12. Denotamos $A = K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$, $S = K[y_1, \dots, y_m] \setminus \{0\}$ y $T = A \setminus (x_1, \dots, x_n)$. Un elemento de $S^{-1}A$ tiene la forma:

$$\frac{a}{s} = \frac{\sum_{i_1, \dots, i_{n+m} \in \mathbb{N}} a_{i_1, \dots, i_{n+m}} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} y_1^{i_{n+1}} \dots y_m^{i_{n+m}}}{\sum_{j_1, \dots, j_m \in \mathbb{N}} b_{j_1, \dots, j_m} y_1^{j_1} \dots y_m^{j_m}} =$$

$$= \frac{\sum_{i_1, \dots, i_n} \left(\sum_{i_{n+1}, \dots, i_{n+m}} a_{i_1, \dots, i_{n+m}} y_1^{i_{n+1}} \dots y_m^{i_{n+m}} \right) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}}{\sum_{j_1, \dots, j_m \in \mathbb{N}} b_{j_1, \dots, j_m} y_1^{j_1} \dots y_m^{j_m}}.$$

Denotamos $\lambda_{i_1 \dots, i_n} = \dfrac{\sum_{i_1, \dots, i_{n+m} \in \mathbb{N}} a_{i_1, \dots, i_{n+m}} y_1^{i_{n+1}} \dots y_m^{i_{n+m}}}{\sum_{j_1, \dots, j_m \in \mathbb{N}} b_{j_1, \dots, j_m} y_1^{j_1} \dots y_m^{j_m}} \in K(y_1, \dots, y_m)$.

Como $\sum_{i_1,\ldots,i_n\in\mathbb{N}} \lambda_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} \in K(y_1,\ldots,y_m)[x_1,\ldots,x_n]$, tiene sentido definir el isomorfismo:

$$h : S^{-1}A \longrightarrow K(y_1,\ldots,y_m)[x_1,\ldots,x_n], \text{ tal que } h(a/s) = a/s.$$

Por otro lado, como $S \subset T$, se cumple que $ST = T$. En efecto, dado $t \in T$ está claro que $1 \cdot t = t \in ST$. Igualmente, dado $st \in ST$, como $S \subset T$, se tiene que $st \in T$. Por último, calculamos la imagen de $ST = T$ vía el homomorfismo natural $\phi_1 : A \longrightarrow (ST)^{-1}A = T^{-1}A$, donde $\phi(T) = \{\frac{f}{1} : f \in T\} = U$, siendo ϕ el homomorfismo natural de A en $S^{-1}A$. En consecuencia, la correspondencia

$$\begin{aligned} \gamma : U^{-1}(S^{-1}A) &\longrightarrow K(y_1,\ldots,y_m)[x_1,\ldots,x_n]_{(x_1,\ldots,x_n)} \\ \tfrac{a/s}{f/1} &\longmapsto \gamma(\tfrac{a/s}{f/1}) = \tfrac{a}{fs} \end{aligned}$$

está bien definida, ya que dados $\frac{a/s}{f/1}, \frac{a'/s'}{f'/1} \in U^{-1}(S^{-1}A)$ iguales, existe $\frac{u}{1} \in U$ tal que $\frac{u}{1}(\frac{af'}{s} - \frac{a'f}{s'}) = 0$, es decir, $\frac{u(af's'-a'fs)}{ss'} = 0$. Queremos demostrar que $\gamma(\frac{a/s}{f/1}) = \gamma(\frac{a'/s'}{f'/1})$, es decir, $\frac{a}{fs} = \frac{a'}{f's'}$ pero esto se cumple pues existe $u \in K(y_1,\ldots,y_m)[x_1,\ldots,x_n] \setminus (x_1,\ldots,x_n)$ tal que $u(af's' - a'fs) = 0$. Por otro lado, por construcción, todo elemento de $U^{-1}(S^{-1}A)$ tiene una imagen en el conjunto de llegada de γ.

Demostramos que γ es homomorfismo: $\gamma(\frac{a/s}{f/1} + \frac{a'/s'}{f'/1}) = \gamma(\frac{(af's'+a'fs)/ss'}{ff'/1}) = \frac{af's'+a'fs}{ss'ff'} = \frac{a}{sf} + \frac{a'}{f's'} = \gamma(\frac{a/s}{f/1}) + \gamma(\frac{a'/s'}{f'/1})$, y $\gamma(\frac{a/s}{f/1} \cdot \frac{a'/s'}{f'/1}) = \gamma(\frac{aa'/ss'}{ff'/1}) = \frac{aa'}{ss'ff'} = \frac{a}{sf} \cdot \frac{a'}{s'f'} = \gamma(\frac{a/s}{f/1}) \cdot \gamma(\frac{a'/s'}{f'/1})$. Además, $\gamma(\frac{1/1}{1/1}) = 1/1$. La inyectividad de γ se deduce de $\gamma(\frac{a/s}{f/1}) = \frac{a}{fs} = \frac{0}{1}$ si, y solo si, existe $u \in K(y_1,\ldots,y_m)[x_1,\ldots,x_n] \setminus (x_1,\ldots,x_n)$ tal que $u(a) = 0$. Como $u \neq 0$ y A es un dominio de integridad, llegamos a que $a = 0$, por lo que $Ker\gamma = \{\frac{0/1}{1/1}\}$. Por otro lado, por construcción, el homomorfismo γ es sobreyectivo.

En consecuencia, se tiene que γ es un isomorfismo, y aplicando el Lema 1.1.12 se concluye que $K[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m]_{(x_1,\ldots,x_n)} \cong K(y_1,\ldots,y_m)[x_1,\ldots,x_n]_{(x_1,\ldots,x_n)}$.
□

1.2. Módulos

Esta sección se fundamenta en la necesidad de aplicar resultados cuya demostración es más inmedita para módulos en general que para ideales de un anillo. Primero, empecemos con la definición de módulo, así como algunas de sus propiedades ([1], pág. 19-24).

Definición 1.2.1 *Sea A un anillo. Un A-**módulo** es un par $(M, \cdot)$, donde M es un grupo abeliano y $\cdot$ es una aplicación de la forma:*

$$\cdot : A \times M \longrightarrow M,$$

donde a todo par $(a, m) \in A \times M$ le corresponde el elemento $am \in M$, y la aplicación $\cdot$ debe satisfacer, para todo a, $b \in A$ y para todo x, $y \in M$, las siguientes propiedades:

1. $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$
2. $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$
3. $(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$
4. $1 \cdot x = x$

De ahora en adelante escribiremos am para denotar la imagen $(a, m) \in A \times M$ por la aplicación $\cdot$ de la Definición 1.2.1. Hay que recalcar que la operación $\cdot$ no es en general una operación interna de M. Un módulo generaliza otras estructuras algebraicas, como muestran los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.2.2 *Sean A un anillo e I un ideal de A. Entonces I tiene estructura de A-módulo con la operación interna $\cdot$ de A. De hecho, para cualquier anillo A, se tiene que A tiene estructura de A-módulo.*

Ejemplo 1.2.3 *Todo grupo abeliano M es un $\mathbb{Z}$-módulo, con la aplicación $\cdot$ definida como $nx = \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ veces}}$.*

Ejemplo 1.2.4 *Sean $A = k$ un cuerpo y M un grupo abeliano. Si M es un A-módulo, entonces tiene estructura de k-espacio vectorial.*

Así como sucede con los anillos y los subanillos, es posible hablar de submódulos. Dichos conjuntos heredan las propiedades del módulo en el que están contenidos. Más concretamente:

Definición 1.2.5 *Sean M un A-módulo y $N \subset M$. Decimos que N **es un A-submódulo de** M cuando N es un subgrupo de M cerrado respecto a la multiplicación por elementos de A. Esto es, $an \in N$ para todo $a \in A$, $n \in N$.*

En este sentido, si tomamos un subconjunto $S \subset M$, siendo M un A-módulo, S no tiene porqué tener estructura de submódulo. Sin embargo, es posible hablar del **A-submódulo generado por** S, que es el submódulo más pequeño que contiene a S, que denotamos $(S) = \sum_{s \in S} As$. En el caso de que $(S) = M$, decimos que M es un A-módulo **generado por** S, o que S es un **sistema de generadores de** M. Utilizaremos ambas terminologías indistintamente. En el caso de que

$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ y de que M sea un A-módulo generado por S, decimos que M está **finitamente generado como A-módulo**. Esto significa que para todo $x \in M$, podemos escribir x como una combinación de elementos de S y de A, esto es, $x = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n$, con $a_i \in A$, $s_i \in S$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Aparte de los subconjuntos de M, podemos definir conjuntos que se basen en estructuras ya conocidas de los anillos. Un ejemplo de ello es el producto de un ideal $I \subset A$ y un A-módulo M.

Definición 1.2.6 *Sean A un anillo, $I \subset A$ un ideal y M un A-módulo. Definimos el **producto de un ideal y un A-módulo**, y lo denotamos IM, al submódulo generado por $\{ax : a \in I, x \in M\}$. Es decir, los elementos de IM son sumas finitas de elementos de la forma ax, con $a \in I$, $x \in M$. En el caso de que M esté finitamente generado por $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es posible expresar a este submódulo de la forma $IM = \{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i : a_1, a_2, \ldots, a_n \in I\}$.*

Si bien en general no tiene sentido hablar del producto de dos submódulos, pues no está definido un producto interno en ellos, sí que se puede definir la suma.

Definición 1.2.7 *([11], pág. 15) Sean A un anillo, M un A-módulo y $N, K \subset M$ A-submódulos. Definimos la **suma** de submódulos, y la denotamos $N + K$, al conjunto $N + K := \{n + k : n \in N, k \in K\}$.*

Al igual que con anillos, podemos hablar de homomorfismos entre módulos.

Definición 1.2.8 *Sean M y N A-módulos, con A un anillo. Una aplicación $f : M \longrightarrow N$ es un homomorfismo de A-módulos si, para todo $a \in A$, $x \in M$ e $y \in N$, se cumplen las siguientes propiedades:*

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
2. $f(ax) = af(x)$.

De la misma forma que con los ideales, tiene sentido hablar del cociente entre dos módulos.

Definición 1.2.9 *Sean A un anillo, M un A-módulo y M' un A-submódulo de M. Entonces, llamamos **A-módulo del cociente de M por M'**, y lo denotamos por M/M' al conjunto $M/M' = \{x + M' : x \in M\}$, donde $x + M'$ denota la clase de x en M'. El conjunto M/M' hereda la estructura de A-módulo con la operación $a \cdot (x + M') = a \cdot x + M'$.*

La suma, el producto y el cociente de módulos cumple la siguientente propiedad.

Propiedad 1.2.10 *([11], Propiedad 2.1.6) Sean A un anillo, M un A-módulo, $N \subset M$ un A-submódulo e $I \subset A$ un ideal. Entonces:*

$$I(M/N) = (N + IM)/N$$

Demostración. Tomamos $x \in (N + IM)/N$. Podemos expresar este elemento de la forma $x = \big(n + \sum_{i=1}^{k}(a_i m_i)\big) + N$, donde $n \in N$, $a_i \in I$ y $m_i \in M$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Luego, $x = (n + N) + \big(\sum_{i=1}^{k}(a_i m_i)\big) + N$. Como $n + N = 0 + N$, nos queda $x = \big(\sum_{i=1}^{k}(a_i m_i)\big) + N = \sum_{i=1}^{k}\big((a_i m_i) + N\big) = \sum_{i=1}^{k}\big(a_i(m_i + N)\big) \in I(M/N)$. Esto implica que $I(M/N) \supset (N + IM)/N$. Por otro lado, dado $x \in I(M/N)$, lo escribimos $x = \sum_{i=1}^{k}\big(a_i(m_i + N)\big)$, donde $a_i \in I$ y $m_i \in M$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. En consecuancia, $x = \sum_{i=1}^{k}\big((a_i m_i) + N\big) = \big(\sum_{i=1}^{k}(a_i m_i)\big) + N = (0+N) + \big(\sum_{i=1}^{k}(a_i m_i)\big) + N = \big(0 + \sum_{i=1}^{k}(a_i m_i)\big) + N \in (N+IM)/N$. Esto completa ambas inclusiones, por lo que concluimos que $I(M/N) = (N + IM)/N$. □

Por último tenemos que probar un lema previo para poder demostrar el Lema de Nakayama. Para ello, recordamos que el radical de Jacobson de un anillo A se define como la intersección de todos los ideales maximales de A.

Lema 1.2.11 *Sea A un anillo, y $\mathfrak{R}$ su radical de Jacobson. Entonces, se cumple que $x \in \mathfrak{R}$ si, y solo si, $1 - xy$ es una unidad de A para todo $y \in A$.*

Demostración. Por un lado, sea $x \in \mathfrak{R}$ y supongamos que $1 - xy$ no es una unidad para cierto $y \in A$. Esto implica que $1 - xy$ debe pertenecer a algún ideal maximal $\mathfrak{M} \subset A$. Pero $x \in \mathfrak{R} \subset \mathfrak{M}$, por lo tanto, $xy \in \mathfrak{M}$ lo que implica que $1 - xy + xy = 1 \in \mathfrak{M}$, llegando a un absurdo. En consecuencia, $1 - xy$ es una unidad de A para todo $y \in A$.

Supongamos ahora que $1 - xy$ es una unidad para todo $y \in A$. Procedemos, nuevamente, por redución al absurdo. Asumamos que existe un ideal maximal $\mathfrak{M}$ tal que $x \notin \mathfrak{M}$. Esto implica que se da la igualdad $\mathfrak{M} + (x) = A$, y por tanto, $a + xy = 1$ para ciertos $a \in \mathfrak{M}$ e $y \in A$. Despejando, se llega a que $a = 1 - xy$, concluyendo que $1 - xy \in \mathfrak{M}$, lo cual es absurdo, pues $1 - xy$ es una unidad. Así pues, $x \in \mathfrak{R}$. □

Con todos estos conceptos, ya es posible demostrar uno de los resultados más útiles de la tería de módulos, el Lema de Nakayama.

Lema 1.2.12 ***(Lema de Nakayama)*** *([10], pág 43). Sean A un anillo, I un ideal contenido en el radical de Jacobson de A y M un A-módulo finitamente generado tal que $IM = M$. Entonces $M = 0$.*

Demostración. Supongamos que $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es el conjunto más pequeño de elementos de M capaces de generar a M, es decir, que es un conjunto mínimo de generadores de M. Como por hipótesis tenemos que $IM = M$, se tiene que $x_n \in IM$. Por tanto, podemos expresar x_n como una combinación de la forma $x_n = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$, donde $a_i \in I$. Despejando, nos queda que

$(1-a_n)x_n = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1}$. Sin embargo, como $(1-a_n)$ es una unidad por el Lema 1.2.11, podemos multiplicar a ambos lados por su inverso, quedándonos $x_n = (1-a_n)^{-1}a_1x_1 + (1-a_n)^{-1}a_2x_2 + \cdots + (1-a_n)^{-1}a_{n-1}x_{n-1}$. Por tanto, hemos conseguido expresar x_n como una combinación de $n-1$ elementos de M, contradiciendo el hecho de que $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ era un conjunto mínimo de generadores de M. Por tanto, concluimos que M está generado por el conjunto vacío, y en consecuencia, $M = 0$. $\square$

2

Dimensión de Krull de un anillo

En este capítulo estudiaremos la noción de dimensión de Krull de un anillo. Para ello, es necesario definir qué es una cadena de ideales primos y qué se entiende como altura de un ideal primo. Una vez hecho esto, es posible definir qué es la dimensión de Krull ([3], pág 12-14), así como probar algunas propiedades de la misma que utilizaremos en el último capítulo.

2.1. Dimensión de Krull

Definición 2.1.1 *Sea A un anillo, llamamos **cadena de ideales primos** a cualquier sucesión $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ de ideales primos de A distintos entre sí. Además, llamamos **longitud** de la cadena a la cantidad de inclusiones de la misma, o dicho de otra manera, a la cantidad de ideales que aparecen en la cadena menos uno. Decimos, además, que una cadena $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_n$ está **saturada** cuando no es posible introducir nuevos ideales primos en la misma, es decir, que para todo ideal primo $\mathfrak{p} \subsetneq A$ se cumple que, si $\mathfrak{q}_i \subseteq \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}_{i+1}$, entonces $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}$ o $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_{i+1}$ para todo $i \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$.*

Definición 2.1.2 *Sean A un anillo y $\mathfrak{p} \subsetneq A$ un ideal primo de A, definimos la **altura** de $\mathfrak{p}$, y la denotamos como $ht(\mathfrak{p})$, como el supremo de los $n \in \mathbb{N}$ tales que existe una cadena saturada $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ de longitud n. Si el supremo no existe, decimos que la altura es infinita.*

Recordamos que el conjunto de todos los ideales primos del anillo A lo denotamos como $\operatorname{Spec}(A)$. La noción de altura puede extenderse a ideales que no sean primos.

Definición 2.1.3 *Sea A un anillo y sea $I \subsetneq A$ un ideal, definimos la altura de I como el ínfimo de las alturas de todos los ideales primos de A que contienen a I, esto es, $ht(I) = \text{ínf}\,\{ht(\mathfrak{p})/I \subset \mathfrak{p} \subset A,\ con\ \mathfrak{p} \in Spec(A)\}$.*

Definición 2.1.4 *Llamamos* ***dimensión de Krull del anillo A****, y la denotamos como* $\dim(A)$*, al supremo de las alturas de los ideales primos de* A*, esto es,* $\dim(A) := \sup\{ht(\mathfrak{p})/\mathfrak{p} \in Spec(A)\}$*. Si el supremo no existe, o existe algún ideal primo* $\mathfrak{q} \subset A$ *de altura infinita, decimos que la dimensión de* A *es infinita.*

En consecuencia, la dimensión de un anillo toma valores enteros positivos, cero o infinito. El hecho de que en un anillo no haya ideales primos de altura infinita no significa que el anillo tenga dimensión finita, y veremos un ejemplo de esto en la Sección 3.3. Por otro lado, conviene recalcar que una cadena de ideales primos cuya longitud es el supremo de las alturas de todos los ideales primos de un anillo A, y por lo tanto es la que delimita su dimensión, debe ser necesariamente saturada. De lo contrario, se podría encontrar una cadena de mayor longitud.

Propiedad 2.1.5 *Sean* A *un anillo y* $\mathfrak{p} \subset A$ *un ideal primo. Entonces se cumple la desigualdad:*

$$ht(\mathfrak{p}) + \dim(A/\mathfrak{p}) \leq \dim A.$$

Demostración. En primer lugar, si $ht(\mathfrak{p}) = \infty$, esto implica, por definición, que $\dim A = \infty$. Por otro lado, si $\dim(A/\mathfrak{p}) = \infty$, se deduce que no existe el supremo de las alturas de los ideales primos de $A/\mathfrak{p}$. Por el Teorema de correspondencia de los anillos cocientes, esto implica que no existe el supremo de las alturas de los ideales primos de A que contienen a $\mathfrak{p}$, lo que significa que $\dim A = \infty$. Supongamos que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = n$ y $\dim(A/\mathfrak{p}) = k$. En primer lugar, como $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = n$, existe una cadena saturada de ideales primos tal que:

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}.$$

Por otro lado, dado que $\dim(A/\mathfrak{p}) = k$, existe una cadena saturada de longitud k:

$$\mathfrak{Q}_0 \subsetneq \mathfrak{Q}_1 \subsetneq \mathfrak{Q}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{Q}_k, \tag{2.1}$$

donde $\mathfrak{Q}_0$ es el ideal primo $(0) \subset A/\mathfrak{p}$. Sabemos que los ideales primos de $A/\mathfrak{p}$ están en correspondencia biunívoca con los ideales primos de A que contienen a $\mathfrak{p}$. En consecuencia, podemos hacer corresponder la cadena (2.1) con la cadena de ideales primos de A:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_k,$$

en donde al ideal $\mathfrak{q}_i \subset A$ le hacemos corresponder el ideal $\mathfrak{q}_i/\mathfrak{p} = \mathfrak{Q}_i \subset A/\mathfrak{p}$. Así pues, hemos construido la cadena saturada:

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_{n-1} \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_k,$$

que es una cadena de longitud $n + k$. Por definición, la dimensión de A es igual al supremo de las longitudes de todas las cadenas de ideales primos, en consecuencia $n + k \leq \dim A$, llegando a que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \dim(A/\mathfrak{p}) \leq \dim A$. $\square$

Lema 2.1.6 *Sean A un anillo local y $\mathfrak{M} \subset A$ su único ideal maximal, entonces* $\dim A = ht(\mathfrak{M})$.

Demostración. En primer lugar, si $\mathrm{ht}(\mathfrak{M}) = \infty$, está claro que $\dim A = \infty$.

Por otro lado, supongamos que $\mathrm{ht}(\mathfrak{M}) = n$, esto es, existe una cadena de ideales primos saturada $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{M}$. De aquí concluimos que $\dim A \geq n$. Si existiera otro ideal primo $\mathfrak{q} \subset A$ tal que $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) > n$, por el Lema de Zorn ([1], pág. 4), este tendría que estar contenido en, al menos, un ideal maximal. Sin embargo, como solo tenemos a $\mathfrak{M}$, se tiene que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{M}$. Esto implicaría que $\mathrm{ht}(\mathfrak{M}) > \mathrm{ht}(\mathfrak{q}) > n$, lo que es absurdo. Por tanto, para cualquier ideal primo $\mathfrak{q}$ de A, se tiene que $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{M}) = n$. Esto implica que $\dim A = n$, como queríamos demostrar. □

En la siguiente proposición haremos uso del Teorema de correspondencia (Teorema 1.1.13) visto en el primer capítulo.

Proposición 2.1.7 *Sean A un anillo y $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A. Entonces:*

$$ht(\mathfrak{p}) = \dim(A_{\mathfrak{p}}).$$

Demostración. En primer lugar, supongamos que $\dim(A_{\mathfrak{p}}) = n < \infty$. Por la Proposición 1.1.4, tenemos que $A_{\mathfrak{p}}$ es un anillo local. Además, sabemos por el Lema 2.1.6, que su dimensión coincide con la altura de su ideal maximal, esto significa que existe una cadena saturada de ideales primos:

$$\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{q}_n = S^{-1}\mathfrak{p}, \tag{2.2}$$

de longitud n, siendo $S = A \setminus \mathfrak{p}$. Por el Teorema de correspondencia (Teorema 1.1.13), $\mathfrak{q}_i = S^{-1}\mathfrak{p}_i$, con $\mathfrak{p}_i \in Spec(A)$ tal que $\mathfrak{p}_i \cap S = \emptyset$. Luego, nos basta con contraer la cadena (2.2) para llegar a

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}, \tag{2.3}$$

donde $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_{i+1}$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, ya que de lo contrario, se llegaría a que $S^{-1}\mathfrak{p}_i = S^{-1}\mathfrak{p}_{i+1}$, siendo esto una contradicción. Por otro lado, si tomamos $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ tal que $\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}_{i+1}$ para cierto $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, se tendría que $S^{-1}\mathfrak{p}_i \subsetneq S^{-1}\mathfrak{q} \subsetneq S^{-1}\mathfrak{p}_{i+1}$. Sin embargo, esto implicaría que la cadena (2.2) no estaría saturada, lo cual es absurdo. Por último, si existiera otra cadena distinta a (2.3) de longitud $k > n$ podríamos extenderla a $S^{-1}A = A_{\mathfrak{p}}$, dando lugar a una cadena de longitud $k > \dim(A_{\mathfrak{p}})$, siendo esto una contradicción. En consecuencia, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = n$, como queríamos ver.

Por otro lado, si $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \infty$, esto significa que no existe el supremo de las longitudes de las cadenas de ideales primos que finalicen en el ideal $\mathfrak{p}$. Por el Teorema 1.1.13, los ideales primos de $A_{\mathfrak{p}}$ están en correspondencia biunívoca con los ideales primos de A contenidos en $\mathfrak{p}$. De esto deducimos que no existe el supremo de las longitudes de las cadenas de ideales primos de $A_{\mathfrak{p}}$. En particular, se llega a que $ht(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) = \infty$, y en consecuencia, que $\dim(A_{\mathfrak{p}}) = \infty$. □

Corolario 2.1.8 *Sean A un anillo y $\mathfrak{p} \subset A$ un ideal primo. Entonces, $ht(\mathfrak{p}) = ht(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})$.*

Demostración. Por la Proposición 2.1.7, tenemos que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \dim(A_{\mathfrak{p}})$. Por otro lado, como $A_{\mathfrak{p}}$ es un anillo local sabemos, por el Lema 2.1.6 que la dimensión de $A_{\mathfrak{p}}$ coincide con la altura de su único ideal maximal, que es $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. En consecuencia, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})$.

□

Estos resultados ejemplifican lo siguiente: cuando tratamos de probar una propiedad relacionada con la dimensión, en determinadas circunstancias, podemos trasladar el problema al cálculo de una altura en el propio anillo o en su localización en un ideal primo. Ahora probaremos una serie de lemas con vistas a demostrar el conocido como *Teorema de Kaplansky*.

Lema 2.1.9 *Sean A un dominio de factorización única, $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A con $ht(\mathfrak{p}) = 1$, entonces $\mathfrak{p}$ es un ideal principal.*

Demostración. Sabemos que $\mathfrak{p} \neq (0)$, pues $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$, por lo que existe al menos un elemento no nulo $x \in \mathfrak{p}$. Como estamos en un dominio de factorización única, x puede expresarse de forma única como producto de irreducibles, esto es $x = a_1a_2 \ldots a_n$, por tanto, alguno de estos elementos debe pertenecer a $\mathfrak{p}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a_n \in \mathfrak{p}$. Nuevamente, por ser A un dominio de factorización única, tenemos que todos los elementos irreducibles de A son primos, por tanto, (a_n) es un ideal primo. Por otra parte, está claro que $(a_n) \subseteq \mathfrak{p}$, por lo que tenemos la cadena $(0) \subset (a_n) \subset \mathfrak{p}$. Sin embargo, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$, y como $(a_n) \neq (0)$ se tiene que $(a_n) = \mathfrak{p}$. Por tanto, $\mathfrak{p}$ es un ideal principal. □

Lema 2.1.10 *Sea A un dominio de integridad en el que todo ideal primo es principal. Entonces A es un dominio de ideales principales.*

Demostración. En primer lugar, supongamos que el conjunto

$$\mathfrak{F} = \{J \subset A : J \text{ ideal no principal}\}$$

es distinto de vacío. Podemos establecer en $\mathfrak{F}$ la relación de orden parcial "$\leq$", en donde $J_1 \leq J_2$ si $J_1 \subseteq J_2$. Tomamos una cadena de ideales de $\mathfrak{F}$ de la forma

$J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset \dots$, no necesariamente infinita. Llamemos $J = \bigcup J_i$. Si $J = (x)$, entonces $x \in J_{i_0}$ para cierto $i_0 \in \mathbb{N}$, lo que implicaría que $J = (x) \subset J_{i_0} \subset J$, luego $J = J_{i_0}$, que es una contradicción, pues J_{i_0} no es principal. En consecuencia, $J \in \mathfrak{F}$. Esto prueba que todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathfrak{F}$ tiene una cota superior. Por tanto, podemos aplicar el Lema de Zorn, esto es, existe al menos un ideal $I \in \mathfrak{F}$ maximal con respecto a la propiedad de no ser principal.

Si I fuera un ideal primo, llegaríamos a una contradicción, pues por hipótesis, eso implicaría que I es principal. Por tanto, I no es un ideal primo. Esto significa que existen $a, b \in A \setminus I$ tales que $ab \in I$. Entonces, el ideal $J = I + (a)$ contiene estrictamente al ideal I, y por lo tanto, es principal. Escribimos $J = (c) \supsetneq I$. Por otro lado, consideramos el ideal $(I : a) = \{x \in A : ax \in I\} \supsetneq I$, siendo esta inclusión estricta porque $b \notin I$ y $ab \in I$, lo que implica que $b \in (I : a)$. Nuevamente, como I es maximal en el conjunto de los ideales que no son principales, concluimos que $(I : a)$ es principal, y por tanto, podemos escribir $(I : a) = (d)$, para cierto $d \in A$. Ahora bien, como $d \in (I : a)$, esto implica, por definición, que $da \in I$. Por tanto, el ideal $dJ := \{dy : y \in J\}$ está contenido en I. Luego, como $c \in J$, se tiene que $(cd) \subseteq I$.

Por otra parte, sea $z \in I$, como $I \subset J = I + (a) = (c)$, se cumple que $z = uc$, para cierto $u \in A$. Esto implica que $u(c) := \{ux : x \in (c)\} \subset I$. Como $a \in J = (c)$, se deduce que $ua \in I$, y por tanto, $u \in (I : a) = (d)$. Entonces, podemos escribir $u = vd$, para cierto $v \in A$, lo que lleva a que $z = uc = vdc$, es decir, $I \subset (cd)$. Como además $I \supset (cd)$, tenemos que $I = (cd)$. En consecuencia, se llega a que I es principal, lo que contradice el hecho de que I es maximal en el conjunto de los ideales que no son principales. Así pues, el conjunto $\mathfrak{F}$ no puede tener elementos maximales, es decir, $\mathfrak{F} = \emptyset$. En conclusión, todos los ideales de A son principales, y por tanto, A es un dominio de ideales principales. □

Teorema 2.1.11 ***(Teorema de Kaplansky)***. *([7], pág. 229) Sea A un anillo, entonces son equivalentes:*

1. *A es un dominio de ideales principales.*
2. *A es un dominio de factorización única de dimensión 1.*

Demostración. Supongamos que A es un dominio de ideales principales. Esto implica, por [10, pág. 49], que A es dominio de factorización única. Nos falta demostrar que A tiene dimensión 1. Sin embargo, al ser dominio de ideales principales, todos los ideales primos no nulos de A son maximales, en consecuencia, A tiene dimensión 1, como queríamos ver.

Supongamos que A es un dominio de factorización única de dimensión 1. En primer lugar, como $\dim A = 1$, se tiene que para todo ideal primo $\mathfrak{p} \subset A$ se cumple que

$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$. Si $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 0$, estamos ante el ideal impropio $\{0\}$. Si $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$, por el Lema 2.1.9, tenemos que $\mathfrak{p}$ es un ideal principal. Como todos los ideales primos son principales, por el Lema 2.1.10, concluimos que A es un dominio de ideales principales. $\square$

3

Anillos noetherianos

En este capítulo final, mostraremos que las propiedades que hemos visto de la dimensión de Krull permiten estudiar en profundidad todo tipo de anillos, y en especial, a los anillos noetherianos. En primer lugar, probaremos que un anillo es artiniano si, y solo si, es un anillo noetheriano de dimensión cero. En segundo lugar, introduciremos el concepto de potencia *simbólica de un ideal*, lo que nos permitirá demostrar el Teorema de los ideales principales de Krull y su generalización a ideales finitamente generados. Por último, veremos que, aunque un anillo sea noetheriano no significa que su dimensión de Krull sea finita, y para ello, daremos un ejemplo ideado por el matemático japonés Masayoshi Nagata.

3.1. Anillos de Artin. Propiedades

Definición 3.1.1 *Decimos que un anillo A es de* ***Artin*** *o* ***artiniano*** *si cumple la condición de cadena descendente, esto es, si $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$ es una cadena infinita de ideales de A, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \dots$, es decir, la cadena se estabiliza.*

Ejemplo 3.1.2 *Todo cuerpo es un anillo de Artin. Esto es trivialmente cierto, pues A no tiene ideales propios. En este sentido, $\mathbb{R}$ es un anillo artiniano, dado que la única cadena de ideales que podemos hacer es la trivial, esto es: $\mathbb{R} \supseteq (0)$. Y por tanto, estabiliza.*

Ejemplo 3.1.3 *Todo anillo finito es un anillo de Artin. En efecto, sea A un anillo finito, este contendrá un cantidad finita de ideales propios distintos, por tanto, es imposible que exista una cadena infinita de ideales. Así pues, cualquier cadena de ideales que tomemos estabilizará. Esto significa que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es un anillo artiniano para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo 3.1.4 *Un anillo noetheriano no tiene porqué ser un anillo de Artin. El anillo $\mathbb{Z}$ es noetheriano, sin embargo, no es artiniano, pues podemos tomar la cadena decreciente de ideales: $(2) \supset (4) \supset (8) \supset \cdots \supset (2^n) \supset \dots$.*

Propiedad 3.1.5 *Sean A un anillo artiniano y $\mathfrak{p} \subseteq A$ un ideal primo de A. Entonces el anillo $A/\mathfrak{p}$ es un dominio de integridad artiniano.*

Demostración. En primer lugar, $A/\mathfrak{p}$ es un dominio de integridad ([1], pág. 3). Probamos a continuación que $A/\mathfrak{p}$ es artiniano. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que $A \setminus \mathfrak{p}$ no cumple la condición de cadena descendente. Entonces existe una cadena de ideales $\mathfrak{I}_1 \supseteq \mathfrak{I}_2 \supseteq \mathfrak{I}_3 \supseteq \dots$ en $A/\mathfrak{p}$, con $\mathfrak{I}_i \neq \mathfrak{I}_j$ si $i \neq j$. Por el Teorema de correspondencia de los anillos cocientes, tendremos una cadena de ideales $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ en A, siendo todos los ideales distintos entre sí. Esto es absurdo, pues A es artiniano, en consecuencia, la cadena $\mathfrak{I}_1 \supseteq \mathfrak{I}_2 \supseteq \mathfrak{I}_3 \supseteq \dots$ tiene que estabilizarse, y por tanto, $A/\mathfrak{p}$ es un dominio de integridad artiniano. □

Propiedad 3.1.6 *Sea A un anillo artiniano. Entonces A tiene una cantidad finita de ideales maximales.*

Demostración. Probamos por reducción al absurdo. Supongamos que A tiene una cantidad infinita de ideales maximales. Tomamos un subconjunto $\{\mathfrak{M}_\mathfrak{i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ del conjunto de ideales maximales de A y formamos la cadena:

$$\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \supset \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}_3 \supset \dots$$

Como A es artiniano, esta cadena decreciente de ideales debe estabilizarse, en consecuencia, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}_3 \cap \dots \cap \mathfrak{M}_\mathfrak{n} = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}_3 \cap \dots \cap \mathfrak{M}_{\mathfrak{n}+1}.$$

Esto implica que $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}_3 \cap \dots \cap \mathfrak{M}_\mathfrak{n} \subset \mathfrak{M}_{\mathfrak{n}+1}$. Por [7], pág 90, existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $\mathfrak{M}_\mathfrak{i} \subset \mathfrak{M}_{\mathfrak{n}+1}$. Sin embargo, al tratarse de ideales maximales, se deduce la igualdad. Por tanto, la cantidad de ideales maximales de A es finita. □

Propiedad 3.1.7 *Sea A un anillo artiniano. Entonces todo ideal primo de A también es maximal.*

Demostración. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A. Entonces, por la Propiedad 3.1.5, $B = A/\mathfrak{p}$ es un dominio de integridad artiniano. Sea $x \in B \setminus \{0\}$. Podemos formar la cadena de ideales $(x) \supseteq (x^2) \supseteq (x^3) \supseteq \dots$. Como B es artiniano, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $(x^n) = (x^{n+1})$, en particular, $(x^n) \subseteq (x^{n+1})$, por tanto $x^n = x^{n+1}y$, para cierto $y \in B$. Como B es un dominio de integridad, todos sus elementos distintos de cero son cancelables, en consecuencia $1 = xy$. Por lo tanto, x es unidad para todo $x \in B \setminus \{0\}$, luego B es cuerpo, lo que implica que $\mathfrak{p}$ es maximal. □

Corolario 3.1.8 *Sea A un anillo de Artin. Entonces su radical de Jacobson coincide con su nilradical.*

Demostración. En efecto, por la Propiedad 3.1.7, como los ideales maximales coinciden con los primos, la intersección de todos los ideales maximales también coincide con la intersección de todos los ideales primos. Por tanto, el radical de Jacobson es igual que el nilradical. □

Corolario 3.1.9 *Sea A un dominio de integridad. Entonces A es artiniano si, y solo si, A es un cuerpo.*

Demostración. Ya hemos visto en el Ejemplo 3.1.2 que todo cuerpo es un anillo artiniano. Supongamos ahora que A es un dominio de integridad artiniano. Se tiene que el ideal (0) es un ideal primo. Por tanto, por la Propiedad 3.1.7, llegamos a que (0) es un ideal maximal, lo que implica que A es un cuerpo. □

Corolario 3.1.10 *Sea A un anillo de Artin. Entonces $dim(A) = 0$.*

Demostración. En virtud de la Propiedad 3.1.7, sabemos que todos los ideales primos de A son maximales, por lo que es imposible encontrar dos ideales primos tal que uno esté contenido en el otro. En consecuencia, $\dim A = 0$, como queríamos ver. □

Ahora expondremos una propiedad de los anillos noetherianos.

Propiedad 3.1.11 *Sean A un anillo noetheriano e $I \subset A$ un ideal. Entonces I contiene alguna potencia de su radical, es decir $r(I)^n \subset I$ para cierto $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Como A es noetheriano, $r(I)$ está finitamente generado. Supongamos que $a_i \in A$, con $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, es un conjunto de generadores, no necesariamente único, de $r(I)$. Entonces, $a_i^{n_i} \in I$ para ciertos $n_i \in \mathbb{N}$. Tomamos $m = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) + 1$. Se tiene que $r(I)^m$ está generado por los productos $a_1^{r_1} \ldots a_k^{r_k}$, con $\sum_{i=1}^{k} r_i = m$. Por tanto, se cumple que $m = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) + 1 = \sum_{i=1}^{k} r_i$. Luego, se tiene que cumplir que $r_i \geq n_i$ para al menos un $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, ya que de lo contrario, $\sum_{i=1}^{k} r_i < m$. En consecuencia, como los elementos que generan a $r(I)^m$ pertenecen a I, se concluye que $r(I)^m \subset I$. □

Corolario 3.1.12 *Sea A un anillo noetheriano. Entonces su nilradical es nilpotente.*

Demostración. En efecto, por la Propiedad 3.1.11, tenemos que $r(0)^n \subset \{0\}$ para cierto $n \in \mathbb{N}$. Luego, esto significa que $r(0)^n = \{0\}$. $\square$

Por último, exponemos la relación que existe entre los anillos noetherianos y los anillos de Artin.

Proposición 3.1.13 *Sea A un anillo. Entonces A es artiniano si, y solo si, A es noetheriano y de dimensión 0.*

Demostración. Supongamos que A es un anillo artiniano. Por el Corolario 3.1.10, sabemos que A tiene dimensión 0. Por otra parte, por la Propiedad 3.1.6, tomamos $\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_n$ los únicos ideales maximales de A. En virtud de la Proposición 8.4 de [1] y el Corolario 3.1.8, tenemos que, para cierto $k \in \mathbb{N}$, se da:

$$\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i{}^k \subset (\cap_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i)^k = r(0)^k = (0).$$

Por tanto, por el Corolario 6.11 de [1], como el ideal $\{0\}$ se puede expresar como un producto finito de ideales maximales, concluimos que A es noetheriano.
Supongamos ahora que A es noetheriano. Por el Teorema 7.13 de [1], sabemos que todo ideal de A admite una descomposición primaria, en particular, el ideal $\{0\}$. Supongamos que $\{0\} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n$, donde $r(\mathfrak{q}_i)$ es un ideal maximal, pues $dim(A) = 0$, y lo denotaremos $\mathfrak{M}_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por la Propiedad 3.1.11, $\mathfrak{M}_i{}^{m_i} \subset \mathfrak{q}_i$ para cierto $m_i \in \mathbb{N}$. Se tiene que $\mathfrak{M}_1{}^{m_1} \ldots \mathfrak{M}_n{}^{m_n} \subset \mathfrak{M}_1{}^{m_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{M}_n{}^{m_n} = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_n = (0)$. En consecuencia, como existe un producto de ideales maximales (no necesariamente distintos), igual a cero, tenemos nuevamente por el Corolario 6.11 de [1] que A es artiniano. $\square$

3.2. Teoremas de Krull

Estos teoremas nos permitirán llegar a ciertas conclusiones cuando tratemos con anillos noetherianos. Para enunciarlos, es necesario dar antes algunas definiciones. Supondremos que el lector está familiarizado con la descomposición primaria ([1], pág. 55).

Definición 3.2.1 *Sean A un anillo e $I \subset A$ un ideal. Decimos que I es un **ideal descomponible** si I puede expresarse como una intersección finita de ideales primarios de A.*

Definición 3.2.2 *Sean A un anillo e $I \subset A$ un ideal descomponible. Sea $I = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_n$, con $r(Q_i) = \mathfrak{p}_i$ ideal primo para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, una descomposición primaria minimal de I. Entonces denominamos **ideales primos asociados de I** a los elementos del conjunto $ass(I) = \{\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$.*

En el conjunto $ass(I)$ se puede establecer una relación de orden parcial dada por la inclusión. En este sentido, diremos que un ideal primo $\mathfrak{p} \in ass(I)$ es **aislado** si para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ se cumple que, si $\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}$, entonces $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}$, es decir, no hay ningún ideal primo asociado de I contenido estrictamente en $\mathfrak{p}$. En caso contrario, diremos que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo **incrustado**.

Definición 3.2.3 *Sean A un anillo y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. Llamamos **ideal primo minimal de $a_1, a_2, \ldots, a_n$** a todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A que cumple que a_1, $a_2, \ldots, a_n \in \mathfrak{p}$ y que, de existir otro ideal primo $\mathfrak{q}$ tal que $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, entonces $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$.*

Esta definición puede extenderse a un ideal.

Definición 3.2.4 *Sea $I \subset A$ un ideal. Llamamos **ideal primo minimal de I** a todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de A que cumple que $I \subset \mathfrak{p}$ y que de existir otro ideal primo $\mathfrak{q}$ tal que $I \subset \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$, entonces $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$.*

Recalcamos que un ideal primo minimal de un elemento $a \in A$ no tiene porqué ser único. Por ejemplo, en $\mathbb{Z}$, el elemento 6 tiene como ideales primos minimales a los ideales (2) y (3). Por otra parte, llamaremos **ideal primo minimal de un anillo *A*** a todo ideal primo minimal de (0).

Existe una relación entre los ideales primos minimales de un ideal $I \subset A$ y los ideales aislados del conjunto $ass(I)$, y es que son exactamente los mismos ideales.

Proposición 3.2.5 *Sean A un anillo e $I \subset A$ un ideal descomponible. Entonces el conjunto de los ideales aislados de $ass(I)$ y el conjunto de los ideales primos minimales de I son iguales.*

Demostración. Tomemos $I = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_n$ una descomposición primaria minimal de I, con $r(Q_i) = \mathfrak{p}_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$, y $\mathfrak{p}$ un ideal primo minimal de I. Tenemos que

$$\mathfrak{p} = r(\mathfrak{p}) \supset r(I) = r(Q_1) \cap r(Q_2) \cap \cdots \cap r(Q_n) \supset I.$$

De aquí, deducimos que $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n$. Por tanto, como $\mathfrak{p}$ contiene una intersección de ideales primos, se concluye que $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_i$, para cierto $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ([1], pág. 9). Pero como $\mathfrak{p}$ es un ideal primo minimal de I, e $I \subset \mathfrak{p}_i$, se llega a que $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}$, por lo que $\mathfrak{p}$ es un ideal aislado de $ass(I)$.

Por otro lado, dado $\mathfrak{p}_i$ un ideal aislado de $ass(I)$, supongamos que existe un ideal primo $\mathfrak{p} \subset A$ tal que $I \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_i$. Esto implica que $r(I) = r(Q_1) \cap r(Q_2) \cap \cdots \cap r(Q_n) \subset r(\mathfrak{p}) \subset r(\mathfrak{p}_i)$, y por tanto, $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_n \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_i$. De aquí deducimos que existe $\mathfrak{p}_j$ con $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $\mathfrak{p}_j \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_i$. Sin embargo, $\mathfrak{p}_i$ es un ideal aislado de $ass(I)$, por lo que de existir otro ideal de $ass(I)$ contenido en él, tienen que ser iguales. Así pues, $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}_i$, llegando a que $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$. En consecuencia, $\mathfrak{p}_i$ es un ideal primo minimal de I. $\square$

Propiedad 3.2.6 *Sean A un anillo noetheriano y $\mathfrak{p} \subset A$ un ideal primo minimal de A. Entonces $\mathfrak{p} \setminus \{0\}$ está formado íntegramente por divisores de cero.*

Demostración. En primer lugar, como A es noetheriano, sabemos que $A_\mathfrak{p}$ también lo es. Los ideales primos de $A_\mathfrak{p}$ están en correspondencia biunívoca con los ideales primos de A cuya intersección con $S = A \setminus \mathfrak{p}$ es igual a vacío. Sin embargo, dado $\mathfrak{q} \subset A$ un ideal primo, si $\mathfrak{q} \cap S = \emptyset$ se sigue que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$. Pero $\mathfrak{p}$ es un primo minimal de A, por lo que $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. Por tanto, $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ es el único ideal primo de $A_\mathfrak{p}$. Esto implica que $A_\mathfrak{p}$ es un anillo noetheriano en el que todos sus ideales primos son maximales, es decir, $\dim(A_\mathfrak{p}) = 0$. Por lo que, en virtud de la Proposición 3.1.13, concluimos que $A_\mathfrak{p}$ es un anillo de Artin.

Por el Corolario 3.1.8, sabemos que el radical de Jacobson de $A_\mathfrak{p}$ coincide con su nilradical, en consecuencia, tenemos que $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ es el nilradical de $A_\mathfrak{p}$. Esto significa que, para todo $a/s \in \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ no nulo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(a/s)^n = 0/1$. De aquí, llegamos a que existe $u \in S$ tal que $u(a^n) = 0$, o lo que es lo mismo, que $a(ua^{n-1}) = 0$, con $u \neq 0$. Es decir, se tiene que a es un divisor de cero. Por tanto, todos los elementos no nulos de $\mathfrak{p}$ son divisores de cero, como queríamos ver. $\square$

A continuación, vamos a probar una propiedad necesaria para demostrar una proposición de los anillos noetherianos locales.

Propiedad 3.2.7 *Sean A un anillo, $I \subset A$ un ideal y $\mathfrak{M} \subset A$ un ideal maximal tal que $r(I) = \mathfrak{M}$. Entonces I es un ideal $\mathfrak{M}$-primario.*

Demostración. Veamos que I es un ideal primario. Sean $a, b \in A$ tales que $ab \in I$. Si $b \in r(I) = \mathfrak{M}$, ya estaría demostrado. Supongamos que $b \notin \mathfrak{M}$. Esto implica que el ideal $\mathfrak{M}$ está contenido estrictamente en el ideal $\mathfrak{M} + (b)$. Por maximalidad de $\mathfrak{M}$, el ideal $\mathfrak{M} + (b)$ es igual a A. De aquí deducimos que existen $x \in \mathfrak{M}$ e $y \in A$ tales que

$$1 = x + by \tag{3.1}$$

Como $x \in \mathfrak{M} = r(I)$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n \in I$. Por tanto, elevando a n en la expresión 3.1 nos queda:

$$1 = 1^n = (x + by)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} by + \cdots + \binom{n}{n-1} x(by)^{n-1} + (by)^n = x^n + zb,$$

para cierto $z \in A$. En consecuencia, multiplicando por a en ambos miembros de la igualdad, nos queda que $a = ax^n + abz$. Como $x^n \in I$ y $ab \in I$ por hipótesis, llegamos a que $a \in I$, por lo que I es primario. Además, como $r(I) = \mathfrak{M}$, concluimos que I es $\mathfrak{M}$-primario. □

Proposición 3.2.8 *Sea A un anillo local noetheriano con $\mathfrak{M} \subset A$ su único ideal maximal. Entonces, para todo ideal I de A, son equivalentes:*

1. *I es $\mathfrak{M}$-primario.*
2. *$r(I) = \mathfrak{M}$.*
3. *$\mathfrak{M}$ es primo minimal de I.*

Demostración. Primero, veamos que I es $\mathfrak{M}$-primario si, y solo si, $r(I) = \mathfrak{M}$. En efecto, si $r(I) = \mathfrak{M}$, por la Propiedad 3.2.7, llegamos a que I es $\mathfrak{M}$-primario. La otra implicación es trivial, ya que si I es $\mathfrak{M}$-primario, por definición, $r(I) = \mathfrak{M}$.

Ahora veamos que $r(I) = \mathfrak{M}$ si, y solo si, $\mathfrak{M}$ es primo minimal de I. Supongamos que $r(I) = \mathfrak{M}$. Sea $\mathfrak{p} \subset A$ un ideal primo tal que $I \subset \mathfrak{p}$. Entonces, $\mathfrak{M} = r(I) \subseteq r(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{M}$ es maximal, se tiene que $\mathfrak{p} = \mathfrak{M}$, por lo que se deduce que $\mathfrak{M}$ es primo minimal de I. Supongamos que $\mathfrak{M}$ es primo minimal de I. Al ser A local, se tiene que todos los ideales primos de A están contenidos en $\mathfrak{M}$. Como $\mathfrak{M}$ es primo minimal de I, no puede haber ningún ideal primo distinto de $\mathfrak{M}$ que contenga a I. Por tanto, como el radical de I es igual a la intersección de todos los ideales primos que contienen a I, se llega a que $r(I) = \mathfrak{M}$.□

Definición 3.2.9 *Sean A un anillo y $\mathfrak{p} \subset A$ un ideal primo. Sea $n \in \mathbb{N}$, llamamos **enésima potencia simbólica** de $\mathfrak{p}$, y la denotamos como $\mathfrak{p}^{(n)}$, al conjunto*

$$\mathfrak{p}^{(n)} = \{a \in A : as \in \mathfrak{p}^n \text{ para cierto } s \in A \setminus \mathfrak{p}\}.$$

En general, se da la relación de inclusión $\mathfrak{p}^{(n)} \supset \mathfrak{p}^n$, pues dado un elemento $a \in \mathfrak{p}^n$, podemos escribirlo de la forma $a = a \cdot 1$, con $1 \in A \setminus \mathfrak{p}$.

Veamos a continuación que $\mathfrak{p}^{(n)}$ es un ideal de A.

Lema 3.2.10 *Sean A un anillo y $\mathfrak{p} \subset A$ un ideal primo. Entonces el conjunto $\mathfrak{p}^{(n)}$ es un ideal de A.*

Demostración. En primer lugar, $0 \cdot 1 \in \mathfrak{p}^n$, por lo que $0 \in \mathfrak{p}^{(n)}$. Por otro lado, dados a, $b \in \mathfrak{p}^{(n)}$, existen s, $t \in A \setminus \mathfrak{p}$ tales que as, $bt \in \mathfrak{p}^n$. Sabemos que $A \setminus \mathfrak{p}$ es una parte multiplicativamente cerrada, por lo que $st \in A \setminus \mathfrak{p}$. Por tanto,

$(a+b)st = (as)t + (bt)s \in \mathfrak{p}^n$, por ser $\mathfrak{p}^n$ ideal, llegando a que $a+b \in \mathfrak{p}^{(n)}$. Por último, dados $a \in \mathfrak{p}^{(n)}$ y $x \in A$, existe $s \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $as \in \mathfrak{p}^n$, por tanto, como $\mathfrak{p}^n$ es un ideal, $(ax)s \in \mathfrak{p}^n$, lo que implica que $ax \in \mathfrak{p}^{(n)}$. En conclusión, $\mathfrak{p}^{(n)}$ es un ideal de A. □

Por convención, se define $\mathfrak{p}^{(0)} = A$. Observar que las potencias simbólicas permiten formar una cadena descendente de ideales de la siguiente manera: $\mathfrak{p}^{(0)} = A \supset \mathfrak{p}^{(1)} \supset \mathfrak{p}^{(2)} \supset \mathfrak{p}^{(3)} \supset \dots$.

Ahora, demostraremos tres propiedades de las potencias simbólicas que usaremos más adelante.

Proposición 3.2.11 *Sean A un anillo y $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple lo siguiente:*

1. $\mathfrak{p}^n \subset \mathfrak{p}^{(n)} \subset \mathfrak{p}$.
2. $\mathfrak{p}^{(n)}$ *es* $\mathfrak{p} -$ *primario.*
3. $\mathfrak{p}^{(n)}A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^n A_\mathfrak{p}$

Demostración. Como vimos antes, $\mathfrak{p}^n \subset \mathfrak{p}^{(n)}$. Para la otra inclusión, tomamos $a \in \mathfrak{p}^{(n)}$, esto es, existe $s \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $as \in \mathfrak{p}^n$. Sin embargo, $\mathfrak{p}^n \subset \mathfrak{p}$, por lo que $as \in \mathfrak{p}$. Como $s \notin \mathfrak{p}$, al ser $\mathfrak{p}$ un ideal primo, se tiene que $a \in \mathfrak{p}$, y por tanto, $\mathfrak{p}^{(n)} \subset \mathfrak{p}$, como queríamos probar.

Para demostrar el segundo apartado, en primer lugar, aplicando radicales en las inclusiones del primer apartado, tenemos que $r(\mathfrak{p}^n) \subset r(\mathfrak{p}^{(n)}) \subset r(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$. Por otro lado, dado $a \in \mathfrak{p}$, queremos probar que $a \in r(\mathfrak{p}^{(n)})$, es decir, que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $a^m \in \mathfrak{p}^{(n)}$. Basta tomar $m = n$, pues $1 \in A \setminus \mathfrak{p}$ y $a^n = a^n \cdot 1 \in \mathfrak{p}^n$. Concluimos que $r(\mathfrak{p}^{(n)}) = \mathfrak{p}$. Nos falta demostrar que $\mathfrak{p}^{(n)}$ es primario. Sea $ab \in \mathfrak{p}^{(n)}$. Entonces existe $c \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $(ab)c \in \mathfrak{p}^n$. Supongamos que $b \notin r(\mathfrak{p}^{(n)}) = \mathfrak{p}$. Esto implica que $bc \notin \mathfrak{p}$. Reordenando, nos queda que $a(bc) \in \mathfrak{p}^n$, lo que implica por definición que $a \in \mathfrak{p}^{(n)}$. Así pues, $\mathfrak{p}^{(n)}$ es $\mathfrak{p}$-primario.

Demostraremos a continuación el tercer apartado. Como $\mathfrak{p}^n \subset \mathfrak{p}^{(n)}$, se sigue que $\mathfrak{p}^n A_\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}^{(n)} A_\mathfrak{p}$. Para la otra inclusión, tomamos $a/s \in \mathfrak{p}^{(n)} A_\mathfrak{p}$. Dado que $a \in \mathfrak{p}^{(n)}$, existe $c \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $ac \in \mathfrak{p}^n$. Por tanto, $ac/sc \in \mathfrak{p}^n A_\mathfrak{p}$, pero esto es a/s, por lo que $\mathfrak{p}^{(n)} A_\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}^n A_\mathfrak{p}$. Dado que tenemos ambos contenidos, concluimos que $\mathfrak{p}^{(n)} A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^n A_\mathfrak{p}$. □

Puntualizamos que una forma de interpretar las potencias simbólicas es la del ideal $\mathfrak{p}$-primario más pequeño que contiene a $\mathfrak{p}^n$. Es decir, de existir un ideal $\mathfrak{q} \subset A$ tal que $\mathfrak{q}$ es $\mathfrak{p}$-primario y $\mathfrak{p}^n \subset \mathfrak{q}$, se tiene que $\mathfrak{p}^{(n)} \subset \mathfrak{q}$. Definimos los ideales $\mathfrak{p}^{(n)}$ puesto que $\mathfrak{p}^n$ no tiene porqué ser un ideal primario.

Propiedad 3.2.12 *Sean A un anillo, $\mathfrak{p} \subset A$ un ideal primo y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, el ideal $\mathfrak{p}$-primario más pequeño que contiene a $\mathfrak{p}^n$ es $\mathfrak{p}^{(n)}$.*

Demostración. Supongamos que existe un ideal $\mathfrak{p}$-primario $\mathfrak{q}$ tal que $\mathfrak{p}^n \subset \mathfrak{q}$. Sea $a \in \mathfrak{p}^{(n)}$, se tiene que $as \in \mathfrak{p}^n$ para cierto $s \in A \setminus \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p}^n \subset \mathfrak{q}$, se sigue que $as \in \mathfrak{q}$. Al ser $\mathfrak{q}$ primario, tenemos que $s \in r(\mathfrak{q})$ o $a \in \mathfrak{q}$. Dado que $s \notin r(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$, puesto que $s \in A \setminus \mathfrak{p}$, llegamos a que $a \in \mathfrak{q}$, lo que implica que $\mathfrak{p}^{(n)} \subset \mathfrak{q}$, como queríamos ver. □

Propiedad 3.2.13 *Sea A un anillo y $\mathfrak{p}$ un ideal primo minimal de A. Entonces $ht(\mathfrak{p}) = 0$.*

Demostración. Por definición de ideal primo minimal de A, tenemos que no existen ideales primos de A que estén contenidos estrictamente en $\mathfrak{p}$, por lo que la única cadena de ideales primos de A que termina en $\mathfrak{p}$ es $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}$. De aquí, concluimos que $ht(\mathfrak{p}) = 0$. □

Una vez hecha esta aclaración, procedemos a demostrar uno de los teoremas más destacados del texto.

Teorema 3.2.14 ***(Teorema de los ideales principales de Krull)****. ([7], pág. 234) Sean A un anillo noetheriano, $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A y $a \in A$, tal que a no es una unidad. Entonces, si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo minimal de a, se cumple que $ht(\mathfrak{p}) \leq 1$.*

Demostración. En primer lugar, si para todo ideal primo $\mathfrak{q} \subset A$ tal que $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ se tiene que $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, entonces, por la Propiedad 3.2.13, llegamos a que $ht(\mathfrak{p}) = 0$. Por otro lado, supongamos que para todo ideal primo $\mathfrak{q} \subset A$, se cumple que $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ y que $ht(\mathfrak{q}) = 0$. Entonces, las únicas cadenas de ideales primos acotadas superiormente por $\mathfrak{p}$ que podemos formar son de la forma $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$. En consecuencia, $ht(\mathfrak{p}) = 1$. Por último, supongamos que partimos de un ideal primo arbitrario $\mathfrak{q}_1 \subset A$ que cumple que $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{p}$. Si demostramos que para todo ideal primo $\mathfrak{q}_0 \subset A$ tal que $\mathfrak{q}_0 \subseteq \mathfrak{q}_1$ se cumple que $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{q}_1$, llegaríamos, por la Propiedad 3.2.13, a que $ht(\mathfrak{q}_1) = 0$, implicando que $ht(\mathfrak{p}) = 1$.

Sea $\mathfrak{q}_0 \subset A$ un ideal primo tal que $\mathfrak{q}_0 \subseteq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{p}$. Tomando cocientes módulo $\mathfrak{q}_0$, hallamos la imagen de los ideales primos $\mathfrak{q}_0$, $\mathfrak{q}_1$ y $\mathfrak{p}$ vía el epimorfismo canónico $\pi : A \longrightarrow A/\mathfrak{q}_0$ y nos queda la cadena:

$$\mathfrak{q}_0/\mathfrak{q}_0 \subseteq \mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{p}/\mathfrak{q}_0, \text{ es decir, } (0) \subseteq \mathfrak{q}' \subsetneq \mathfrak{p}', \tag{3.2}$$

donde $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_0$ y $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}/\mathfrak{q}_0$. Si se cumple que $(0) = \mathfrak{q}'$ esto implicaría que $\mathfrak{q}_0 \supseteq \mathfrak{q}_1$, y por tanto que $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{q}_1$. Por otro lado, $\mathfrak{p}'$ es un ideal primo minimal de $\pi(a) = a + \mathfrak{q}_0 = a'$, ya que de existir otro ideal primo $\mathfrak{J} \subset A/\mathfrak{q}_0$ tal que $a' \in \mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{p}'$, por el Teorema de correspondencia de los anillos cocientes, se tendría que $a \in J \subset \mathfrak{p}$, donde $J = \pi^{-1}(\mathfrak{J})$ es un ideal primo de A. Por tanto, por minimalidad de $\mathfrak{p}$, se tiene que $J = \mathfrak{p}$, y en consecuencia, que $\mathfrak{J} = \mathfrak{p}'$. Luego $\mathfrak{p}'$ es un ideal primo minimal de a'. Recalcamos que el anillo $A/\mathfrak{q}_0$ es un dominio de integridad noetheriano.

Definimos $B = A/\mathfrak{q}_0$ y $S = B \setminus \mathfrak{p}'$. Localizando, formamos el anillo local $S^{-1}B = B_{\mathfrak{p}'}$. Por el Teorema 1.1.13, los ideales primos de $B_{\mathfrak{p}'}$ están en correspondencia biunívoca con los ideales primos de B contenidos en $\mathfrak{p}'$. Esto implica que las extensiones de los ideales primos de la cadena (3.2) vía el homomorfismo natural $\phi : B \longrightarrow B_{\mathfrak{p}'}$ forman una cadena en $B_{\mathfrak{p}'}$ de la forma:

$$S^{-1}(0) \subseteq S^{-1}\mathfrak{q}' \subsetneq S^{-1}\mathfrak{p}'. \tag{3.3}$$

El anillo $B_{\mathfrak{p}'}$ es un dominio de integridad local noetheriano, y su único ideal maximal es $S^{-1}\mathfrak{p}'$. Esto se deduce del hecho de que B es un dominio de integridad noetheriano, y por tanto, cualquier localización de B será un dominio de integridad noetheriano. Por otro lado, si hallamos la imagen de a' vía el homomorfismo natural, nos queda $\phi(a') = a'/1$. El ideal $S^{-1}\mathfrak{p}'$ es un ideal primo minimal de $a'/1$. En efecto, de existir un ideal primo $\mathfrak{Q} \subset B_{\mathfrak{p}'}$ contenido en $S^{-1}\mathfrak{p}'$ tal que $a'/1 \in \mathfrak{Q}$, por el Teorema 1.1.13, llegamos a que existe un ideal $\mathfrak{q} = \phi^{-1}(\mathfrak{Q})$ tal que $a' \in \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}'$. Por minimalidad de $\mathfrak{p}'$, deducimos que $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}'$, y por tanto, que $\mathfrak{Q} = S^{-1}\mathfrak{p}'$. Si probamos que $S^{-1}(0) = S^{-1}\mathfrak{q}'$, como $\mathfrak{q}' \cap S = \emptyset$, llegaríamos a que $(0) = \mathfrak{q}'$, y por tanto, a que $\mathfrak{q}_0 \supseteq \mathfrak{q}_1$, que como vimos antes, implica que $\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{q}_1$, demostrando lo que queremos.

Para probar que $S^{-1}(0) = S^{-1}\mathfrak{q}'$, simplificaremos la notación, reemplazando $B_{\mathfrak{p}'}$ por A, $S^{-1}\mathfrak{p}'$ por $\mathfrak{p}$, $S^{-1}\mathfrak{q}'$ por $\mathfrak{q}$, $a'/1$ por a y $S^{-1}(0)$ por (0). Tomamos el anillo $A/(a)$. Los ideales primos de $A/(a)$ están en correspondencia biunívoca con los ideales primos de A que contienen a (a). En particular, $\mathfrak{p} \supset (a)$, pero como $\mathfrak{p}$ es el ideal maximal de A y es ideal primo minimal de a, tenemos que la imagen de $\mathfrak{p}$ vía el homomorfismo canónico $\pi : A \longrightarrow A/(a)$ es ideal maximal y primo minimal de $A/(a)$. Como $\mathfrak{p}$ es el único ideal maximal de A, llegamos a que todos los ideales primos de $A/(a)$ son maximales, por tanto, $A/(a)$ tiene dimensión 0, lo que unido a que $A/(a)$ es noetheriano, nos lleva, por la Proposición 3.1.13 a que $A/(a)$ es artiniano. Por tanto, todas las cadenas descendentes de ideales de $A/(a)$ estabilizan. En particular, tomamos:

$$\overline{\mathfrak{q}+(a)} \supset \overline{\mathfrak{q}^{(2)}+(a)} \supset \overline{\mathfrak{q}^{(3)}+(a)} \supset \dots, \tag{3.4}$$

donde $\overline{\mathfrak{q}^{(n)}+(a)}$ denota la imagen por el homomorfismo canónico del ideal $\mathfrak{q}^{(n)}+(a)$. Dicha cadena estabiliza, lo que implica que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{\mathfrak{q}^{(n)}+(a)} = \overline{\mathfrak{q}^{(n+1)}+(a)}$. Esto significa que $\mathfrak{q}^{(n)}+(a) = \mathfrak{q}^{(n+1)}+(a)$, y en particular, que $\mathfrak{q}^{(n)} \subset \mathfrak{q}^{(n+1)}+(a)$. Por otra parte, veamos que se cumple la siguiente igualdad: $\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)}+\mathfrak{p}\mathfrak{q}^{(n)}$. La inclusión ($\supseteq$) es trivial, pues $\mathfrak{q}^{(n+1)} \subset \mathfrak{q}^{(n)}$ y $\mathfrak{p}\mathfrak{q}^{(n)} \subset \mathfrak{q}^{(n)}$, por lo tanto, la suma $\mathfrak{q}^{(n+1)}+\mathfrak{p}\mathfrak{q}^{(n)}$ también estará contenida en $\mathfrak{q}^{(n)}$. Veamos ahora la otra inclusión ($\subseteq$). Sea $x \in \mathfrak{q}^{(n)}$, como $\mathfrak{q}^{(n)}+(a) = \mathfrak{q}^{(n+1)}+(a)$, tenemos que $x = c+ab$, para ciertos $c \in \mathfrak{q}^{(n+1)}$ y $b \in A$. Despejando, nos queda que $ab = x-c \in \mathfrak{q}^{(n)}$. Por la Proposición 3.2.11, sabemos que $\mathfrak{q}^{(n)}$ es $\mathfrak{q}$-primario, y dado que $ab \in \mathfrak{q}^{(n)}$, se tiene que $a \in r(\mathfrak{q}^{(n)}) = \mathfrak{q}$ o $b \in \mathfrak{q}^{(n)}$. Como $\mathfrak{p}$ es un ideal primo minimal de a, y $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, llegamos a que $a \notin \mathfrak{q}$, y por tanto, $a \notin r(\mathfrak{q}^{(n)})$, y en consecuencia, se tiene que $b \in \mathfrak{q}^{(n)}$. Esto implica que $x = c+ab$, con $c \in \mathfrak{q}^{(n+1)}$, $a \in \mathfrak{p}$ y $b \in \mathfrak{q}^{(n)}$. Concluimos que $\mathfrak{q}^{(n)} \subseteq \mathfrak{q}^{(n+1)}+\mathfrak{p}\mathfrak{q}^{(n)}$, por lo que se da la igualdad

$$\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)}+\mathfrak{p}\mathfrak{q}^{(n)}. \tag{3.5}$$

Una vez llegado a este punto, podemos aplicar cocientes módulo $\mathfrak{q}^{(n+1)}$ en la igualdad (3.5), es decir, hallar la imagen vía el epimorfismo canónico de cada uno de los términos en $A/\mathfrak{q}^{(n+1)}$. Esto nos da $\mathfrak{q}^{(n)}/\mathfrak{q}^{(n+1)} = (\mathfrak{q}^{(n+1)}+\mathfrak{p}\mathfrak{q}^{(n)})/\mathfrak{q}^{(n+1)}$. En virtud de la Propiedad 1.2.10, nos queda que $\mathfrak{q}^{(n)}/\mathfrak{q}^{(n+1)} = \mathfrak{p}(\mathfrak{q}^{(n)}/\mathfrak{q}^{(n+1)})$. Dado que $\mathfrak{p}$ es el único ideal maximal de A, este está contenido en el radical de Jacobson de A. Además, $\mathfrak{q}^{(n)}/\mathfrak{q}^{(n+1)}$ es un A-módulo finitamente generado, pues estamos en un anillo noetheriano. En consecuencia, por el Lema de Nakayama, llegamos a que $\mathfrak{q}^{(n)}/\mathfrak{q}^{(n+1)} = (0)$. Por tanto, $\mathfrak{q}^{(n)} \subset \mathfrak{q}^{(n+1)}$, lo que unido a que $\mathfrak{q}^{(n)} \supset \mathfrak{q}^{(n+1)}$, por definición de las potencias simbólicas, nos permite afirmar que $\mathfrak{q}^{(n)} = \mathfrak{q}^{(n+1)}$. Ahora, localizando en $\mathfrak{q}$, resulta que $\mathfrak{q}^{(n)}A_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}^{(n+1)}A_{\mathfrak{q}}$. Por la Proposición 3.2.11, $\mathfrak{q}^nA_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}^{n+1}A_{\mathfrak{q}}$, es decir, $\mathfrak{q}^nA_{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}\mathfrak{q}^nA_{\mathfrak{q}}$. En este caso, $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$ es el único ideal maximal de $A_{\mathfrak{q}}$, ya que $A_{\mathfrak{q}}$ es un anillo local, por lo que $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$ es el radical de Jacobson de $A_{\mathfrak{q}}$. Por otro lado, $\mathfrak{q}^nA_{\mathfrak{q}}$ es un $A_{\mathfrak{q}}$-módulo finitamente generado, pues es un ideal de un anillo noetheriano. Nuevamente, se cumplen las hipótesis del Lema de Nakayama, por lo que concluimos que $\mathfrak{q}^nA_{\mathfrak{q}} = (0)$. De aquí, como A es un dominio de integridad, tenemos que $\mathfrak{q} = (0)$, como queríamos probar. En consecuencia, volviendo a la notación inicial, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$.

Por tanto, se ha demostrado que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$ independientemente de los ideales primos que estén contenidos en $\mathfrak{p}$, finalizando la prueba. □

Si bien el Teorema 3.2.14 por sí solo conlleva bastantes corolarios en lo referido a anillos noetherianos, el principal uso que le daremos será para demostrar una versión más general del mismo, en donde, en vez de referirnos a un ideal primo minimal $\mathfrak{p}$ de un elemento $a \in A$, tomaremos un ideal primo minimal de una cantidad finita de elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y concluiremos que dicho ideal tendrá altura, a lo sumo, n.

Teorema 3.2.15 ***(Teorema de la altura de Krull).*** *([7], pág. 235) Sean A un anillo noetheriano, $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A y $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo minimal de $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq A$, entonces se cumple que $ht(\mathfrak{p}) \leq n$.*

Demostración. Vamos a demostrar el Teorema por inducción en el número de generadores del ideal $I := (a_1, \ldots, a_n)$. Por el Teorema 3.2.14, sabemos que si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo minimal de $a \in A$, entonces se cumple que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$, por lo que queda probado para $n = 1$. Ahora, supongamos que la propiedad es cierta para $n-1$ generadores, y veamos si lo es para n generadores. Al igual que en la prueba del Teorema 3.2.14, podemos hallar la localización de A en $S = A \setminus \mathfrak{p}$ y, cambiando la notación, realizar la prueba suponiendo que A es un anillo local y que $\mathfrak{p}$ es su único ideal maximal.

Tomamos el ideal $I = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$ un ideal primo propio de A. Suponemos además que dicha cadena está saturada, es decir, no hay otros ideales primos entre $\mathfrak{q}$ y $\mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p}$ es primo minimal de I, esto implica que $I \not\subset \mathfrak{q}$, pues en caso contrario $I \subset \mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$, contradiciendo el hecho de que $\mathfrak{p}$ es primo minimal de I. Por tanto, existe un generador de I que no pertenece a $\mathfrak{q}$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $a_1 \notin \mathfrak{q}$. Por tanto, podemos formar la cadena de ideales: $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q} + (a_1) \subset \mathfrak{p}$. En consecuencia, $\mathfrak{p}$ es primo minimal de $\mathfrak{q} + (a_1)$, ya que, por hipótesis, no hay ideales primos entre $\mathfrak{q}$ y $\mathfrak{p}$, y $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal, lo que implica que $r(\mathfrak{q} + (a_1)) = \mathfrak{p}$ (ver Proposición 3.2.8). Esto significa que, como $I \subset \mathfrak{p} = r(\mathfrak{q} + (a_1))$, para todo $i \geq 2$, se da que $a_i^{m_i} = a_1 b_i + y_i$, para ciertos $m_i \in \mathbb{N}$ y con $b_i \in A$ e $y_i \in \mathfrak{q}$, puesto que ciertas potencias de los generadores de I pertenecen a $\mathfrak{q} + (a_1)$.

Veamos que si un ideal primo P de A contiene a $a_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$, entonces $a_1, a_2, \ldots, a_n \in P$. En efecto, $a_1 \in P$. Por otra parte, si $y_i \in P$, entonces $y_i + a_1 b_i \in P$, lo que implica que $a_i^{m_i} \in P$ para todo $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$. Como P es un ideal primo, si $a_i^{m_i} \in P$, entonces $a_i \in P$ o $a_i^{m_i - 1} \in P$. Si $a_i \in P$ llegamos a lo que queremos, y si $a_i^{m_i-1} \in P$, entonces $a_i \in P$ o $a_i^{m_i-2} \in P$. Realizando este proceso llegamos en un número finito de pasos a que $a_i \in P$ para todo $i \in \{2, 3, \ldots, n\}$, como queríamos ver.

Tomamos el ideal $(a_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$, que está contenido en $\mathfrak{p}$, y hallamos su imagen vía el epimorfismo canónico $\gamma : A \longrightarrow A/(y_2, y_3, \ldots, y_n)$. Observamos que $\gamma((a_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)) = (a_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)/(y_2, y_3, \ldots, y_n) = (\overline{a}_1)$, donde $\gamma(a_1) = \overline{a}_1$. Además, se cumple que $(\overline{a}_1) \subset \overline{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}/(y_2, y_3, \ldots, y_n)$. Afirmamos que el ideal $\overline{\mathfrak{p}}$ es primo, puesto que es la imagen del ideal maximal de A. Veamos a continuación que $\overline{\mathfrak{p}}$ es primo minimal de $(\overline{a}_1)$. Supongamos que existe un ideal $\mathfrak{J}$ primo minimal de $(\overline{a}_1)$ tal que $(\overline{a}_1) \subset \mathfrak{J} \subset \overline{\mathfrak{p}}$. En virtud del Teorema de correspondencia de los anillos cocientes, existe un ideal $J \in \mathrm{Spec}(A)$ tal que $(a_1, y_2, y_3, \ldots, y_n) \subset J \subset \mathfrak{p}$. Esto implica que $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \subset J$, lo que unido a que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo minimal de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, lleva a que $J = \mathfrak{p}$. Así pues, $\mathfrak{J} = \overline{\mathfrak{p}}$, por lo que $\overline{\mathfrak{p}}$ es ideal primo minimal de $(\overline{a}_1)$.

En consecuencia, aplicando el Teorema de los ideales principales de Krull, nos queda que $\mathrm{ht}(\overline{\mathfrak{p}}) \leq 1$. Luego, como el ideal $\overline{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}/(y_2, y_3, \ldots, y_n)$ está estrictamente contenido en $\overline{\mathfrak{p}}$, llegamos a que $\mathrm{ht}(\overline{\mathfrak{q}}) = 0$. Por tanto, $\mathfrak{q}$ es primo minimal de $(y_2, y_3, \ldots, y_n)$, que es un ideal generado por $n-1$ elementos. Por hipótesis de inducción, $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) \leq n-1$, lo que implica que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq n$, como queríamos ver. □

Corolario 3.2.16 *Sean A un anillo noetheriano e $I \subset A$ un ideal. Entonces, $ht(I) < \infty$.*

Demostración. Como A es noetheriano, existen n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ tales que $I = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Si I es primo, entonces I es un ideal primo minimal de sí mismo, por lo tanto, en virtud del Teorema 3.2.15, $\mathrm{ht}(I) \leq n < \infty$. Si I no es primo, sabemos que existe un ideal maximal $\mathfrak{M} \subset A$, y por tanto primo, que contiene a I. Supongamos que $\mathrm{ht}(\mathfrak{M}) = m$, ya que, por lo visto al principio de la demostración, los ideales primos tienen altura finita. Por lo tanto, llegamos a que $\mathrm{ht}(I) < \mathrm{ht}(\mathfrak{M}) = m < \infty$. Luego, todos los ideales de A tienen altura finita. □

Corolario 3.2.17 *Sea A un anillo local noetheriano, entonces A tiene dimensión finita.*

Demostración. Como A es un anillo local, por el Lema 2.1.6, tenemos que $\dim(A) = ht(\mathfrak{M})$, donde $\mathfrak{M}$ es el único ideal maximal de A. Por el Corolario 3.2.16, tenemos que $ht(\mathfrak{M}) < \infty$, y por tanto, la dimensión de A es finita. □

Existe un teorema recíproco al Teorema 3.2.15. Acabamos de ver que, en un anillo noetheriano A, si $\mathfrak{p} \subset A$ es un ideal primo minimal de un ideal generado por n elementos, entonces, la altura de $\mathfrak{p}$ es, a lo sumo, n. También demostraremos que, dado un ideal primo $\mathfrak{p}$ de un anillo noetheriano A, si la altura de $\mathfrak{p}$ es n, entonces existen n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ tales que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo minimal de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Corolario 3.2.18 *([7], pág. 235) Sea A un anillo noetheriano. Cualquier ideal primo $\mathfrak{p} \subset A$ de altura n es primo minimal de cierto ideal I generado por n elementos.*

Demostración. En primer lugar, por el Corolario 3.2.16, sabemos que todos los ideales de A tienen altura finita. Tenemos que demostrar que, dado un ideal primo $\mathfrak{p} \subset A$ de altura n, existen n elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ tales que $\mathrm{ht}((a_1, a_2, \ldots, a_n)) = n$ y $\mathfrak{p}$ es un ideal primo minimal de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Vamos a probarlo por inducción en la altura de $\mathfrak{p}$. En primer lugar, supongamos que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$. Esto implica que podemos formar la cadena saturada $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_0$. El ideal $\mathfrak{p}_1$ no es un ideal primo minimal de A, por tanto, no puede estar contenido en ningún ideal primo minimal de A. Esto significa que $\mathfrak{p}_1$ no está contenido en la unión de todos los ideales primos minimales de A. Por tanto, existe $a \in \mathfrak{p}_1$ tal que a no pertenece a ningún ideal primo minimal de A. Si $\mathfrak{p}_1$ no fuera un ideal primo minimal de a, esto implicaría que existe otro ideal $\mathfrak{q} \subset A$, primo minimal de a y estrictamente contenido en $\mathfrak{p}_1$, es decir, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{q}$. Pero $\mathfrak{q}$ no puede ser un ideal primo minimal de A, pues contiene a a, por tanto, existe un ideal primo minimal $\mathfrak{q}'$, estrictamente contenido en $\mathfrak{q}$, lo que formaría la cadena $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{q} \supset \mathfrak{q}'$, que llevaría a que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_1) \geq 2$, alcanzando una contradicción. Por tanto $\mathfrak{p}_1$ es primo minimal de (a). Así pues, $\mathfrak{p}$ es un ideal primo minimal de un ideal generado por un elemento.

Supongamos que para cualquier ideal primo $\mathfrak{q}$ tal que $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) = n-1$, se cumple que existen $n-1$ elementos $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in A$ tales que $\mathrm{ht}((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})) = n-1$ y $\mathfrak{q}$ es un ideal primo minimal de $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$. Tomamos $\mathfrak{p} \subset A$ un ideal primo tal que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = n$. Esto implica que existen $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_{n-1} \subset A$ ideales primos que forman la siguiente cadena saturada:

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_n \supset \mathfrak{p}_{n-1} \supset \cdots \supset \mathfrak{p}_1 \supset \mathfrak{p}_0,$$

cumpliendo que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_k) = k$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por hipótesis inductiva, existen $n-1$ elementos $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in A$ tales que $\mathrm{ht}((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})) = n-1$ y $\mathfrak{p}_{n-1}$ es un ideal primo minimal de $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$. Esto implica que el ideal $\mathfrak{p}_n$ no puede ser un ideal primo minimal de $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, pues contiene a $\mathfrak{p}_{n-1}$, por tanto, no puede estar contenido en ningún ideal primo minimal de $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$, y en consecuencia, tampoco está contenido en la unión de todos los ideales primos minimales de $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$. Esto implica que existe $a_n \in \mathfrak{p}_n$ tal que a_n no pertenece a ningún ideal primo minimal de $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$. Tomamos el ideal $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$. Demostremos por reducción al absurdo que $\mathfrak{p}_n$ es un ideal primo minimal de $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$. Supongamos que existe un ideal $\mathfrak{p}' \subset A$ tal que $\mathfrak{p}'$ es un ideal primo minimal de $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$ y $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}_n$. Esto nos permite formar la cadena:

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) \subset \mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}_n.$$

Por un lado, por el Teorema de la altura de Krull, tenemos que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}') \leq n$. Por otro lado, $\mathfrak{p}' \supset (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$. Pero $\mathfrak{p}'$ no es primo minimal de $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$, pues a_n no pertenece a ningún ideal primo minimal de $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ y $a_n \in \mathfrak{p}'$. En consecuencia, existe $\mathfrak{q}' \subset A$ ideal primo minimal de $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ contenido estrictamente en $\mathfrak{p}'$. Esto da lugar a la cadena:

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \subset \mathfrak{q}' \subsetneq \mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}_n.$$

Por hipótesis, $\mathrm{ht}((a_1, a_2, \dots, a_{n-1})) = n - 1$, por tanto, $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}') \geq n - 1$. Por el Teorema de la altura de Krull, $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}') \leq n - 1$. Con esto llegamos a que $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}') = n - 1$. Como $\mathfrak{q}' \subsetneq \mathfrak{p}'$, esto implica que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}') \geq n$, luego $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}') = n$. Por último, como $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}_n$, se tiene que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_n) \geq n + 1$, lo que es absurdo, pues por hipótesis, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_n) = n$. En consecuencia, $\mathfrak{p}_n$ es un ideal primo minimal de $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n)$, que es un ideal generado por n elementos, como queríamos ver. $\square$

Corolario 3.2.19 *([2], pág. 17) Sean A un anillo noetheriano, $a \in A \setminus \{0\}$ un elemento que no es ni una unidad ni un divisor de cero, y $\mathfrak{p}$ un ideal primo de A tal que $a \in \mathfrak{p}$. Entonces se cumple que:*

$$ht(\mathfrak{p}/(a)) = ht(\mathfrak{p}) - 1.$$

Demostración. En primer lugar, por el Corolario 3.2.16, sabemos que todos los ideales de A tienen altura finita. Dicho lo cual, sabemos que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/(a)) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$. Esto es debido a que las cadenas de ideales de $A/(a)$ están en correspondencia biunívoca con las cadenas de ideales de A tales que todos sus ideales contienen a (a), así pues, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/(a))$ es, a lo sumo, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$, y por tanto $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/(a)) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$.

Ahora, vamos a demostrar que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/(a)) < \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$. Supongamos por reducción al absurdo que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/(a)) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = n$. Como $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/(a)) = n$, podemos tomar la cadena de ideales primos saturada:

$$\mathfrak{P}_0 \subsetneq \mathfrak{P}_1 \subsetneq \mathfrak{P}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{P}_n = \mathfrak{p}/(a), \tag{3.6}$$

donde $\mathfrak{P}_i \subset A/(a)$ y $\mathrm{ht}(\mathfrak{P}_i) = i$. Por tanto, podemos establecer una correspondencia con estos ideales y los ideales primos de A que contienen a (a). Supongamos que hacemos corresponder $\mathfrak{P}_i$ con $\mathfrak{p}_i \subset A$, tal que $(a) \subset \mathfrak{p}_i$. En consecuencia, podemos hacer corresponder la cadena (3.6) con la cadena de ideales primos de A:

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}.$$

Como $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = n$, podemos afirmar que esta cadena está saturada y que $\mathfrak{p}_0$ es un ideal primo minimal de A. Sin embargo, como a no es un divisor de cero, tenemos por la Propiedad 3.2.6 que a no puede pertenecer a ningún ideal primo minimal de A. No obstante, $a \in \mathfrak{p}_0$, por lo que llegamos a un absurdo.

Supongamos ahora que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/(a)) = n$, lo cual implica que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) > n$. Por tanto, sabemos que existe la cadena:

$$\mathfrak{P}_0 \subsetneq \mathfrak{P}_1 \subsetneq \mathfrak{P}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{P}_n = \mathfrak{p}/(a).$$

Nuevamente, existe una correspondencia que preserva la inclusión entre esta cadena de ideales y la cadena de ideales:

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}. \tag{3.7}$$

Además, como $\mathfrak{P}_0$ es un ideal primo minimal de $A/(a)$, se llega a que $\mathfrak{p}_0$ es primo minimal de (a). Veamos que la cadena (3.7) está saturada. Si existiera $\mathfrak{q}$ ideal primo de A tal que $\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}_{i+1}$, eso implicaría que se podría formar la cadena:

$$\mathfrak{P}_0 \subsetneq \mathfrak{P}_1 \subsetneq \mathfrak{P}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{P}_i \subsetneq \mathfrak{q}/(a) \subsetneq \mathfrak{P}_{i+1} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{P}_n = \mathfrak{p}/(a),$$

que es una cadena de longitud $n+1$, lo que contradice que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/(a)) = n$. Por otro lado, como $\mathfrak{p}_0$ es primo minimal de (a), por el Teorema de la altura de Krull, se tiene que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_0) \leq 1$. Si $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_0) = 0$, esto implicaría que $\mathfrak{p}_0$ sería un ideal primo minimal de A tal que $a \in \mathfrak{p}_0$, lo cual es absurdo por la Propiedad 3.2.6, ya que a no es un divisor de cero. En consecuencia, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_0) = 1$, por lo que existe $\mathfrak{q} \subset A$ ideal primo, tal que $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) = 0$ y $\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}_0$. Esto permite formar la cadena:

$$\mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}.$$

En consecuencia, podemos afirmar que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \geq n+1$. Ahora bien, como $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/(a)) = n$, tenemos por el Corolario 3.2.18, que $\mathfrak{p}/(a)$ es primo minimal de n elementos de $A/(a)$, llamémoslos $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$, cumpliendo que $a_i \notin (a)$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Así pues $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n) \subset \mathfrak{p}/(a)$, por tanto, por la correspondencia, podemos afirmar que $(a_1, \ldots, a_n, a) \subset \mathfrak{p}$ tiene a $\mathfrak{p}$ como ideal primo minimal. En virtud del Teorema de la altura de Krull, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \leq n+1$. Sin embargo, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \geq n+1$, por lo que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = n+1$, que es precisamente $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}/(a))+1$, como queríamos ver. □

Por último, demostraremos una proposición que relaciona la dimensión de un anillo A con la del anillo de polinomios en n variables con coeficientes en A. Primero vamos a dar una definición y a demostrar unas propiedades.

Definición 3.2.20 *Sea A un anillo, llamamos* ***homomorfismo canónico*** *de A en $A[x]$ al homomorfismo $\phi : A \longrightarrow A[x]$ donde $\phi(a) = a$, siendo $a \in A[x]$ el polinomio constante $f(x) = a$.*

Utilizamos la misma notación para los elementos de A como para los polinomios constantes de $A[x]$. Esto es debido a que A puede considerarse un subanillo de $A[x]$ y el homomorfismo canónico la inclusión de A en $A[x]$.

Propiedad 3.2.21 *Sean A un anillo, $I \subset A$ un ideal, $\mathfrak{p} \subset A$ un ideal primo y $\phi : A \longrightarrow A[x]$ el homomorfismo canónico de A en $A[x]$. Entonces se cumple que:*

1. *El ideal $IA[x] := \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n / n \in \mathbb{N}, a_i \in I,\ 0 \leq i \leq n\}$ es la extensión del ideal I en $A[x]$ vía el homomorfismo canónico de A en $A[x]$.*
2. *Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A, entonces $\mathfrak{p}A[x]$ es un ideal primo de $A[x]$.*
3. *Si $\mathfrak{p}$ es un ideal primo minimal de I, entonces $\mathfrak{p}A[x]$ es un ideal primo minimal de $IA[x]$.*
4. *Si $I = (a_0, \ldots, a_n)$, entonces $IA[x] = (a_0, \ldots, a_n)$.*

Demostración. Para el primer apartado, basta con identificar los elementos de A con los polinomios constantes de $A[x]$. Tenemos que ver que $IA[x] = I^e$. Para la primera inclusión, tomamos $f \in IA[x]$. Sabemos que $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$ donde $a_i \in I$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Tomamos $\phi(a_i) = a_i$, por lo que $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \phi(a_i)x^i \in I^e$. Para la otra inclusión, tomamos $f \in I^e$. Por tanto, $f(x) = \sum_{i=0}^{m} \phi(a_i)f_i(x)$ para ciertos $a_i \in I$ y $f_i(x) \in A[x]$, $0 \leq i \leq m$. Nuevamente, $\phi(a_i) = a_i$. Por otra parte, $a_if_i(x) = g_i(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{m_i}x^{m_i}$, donde $b_j \in I$ para todo $j \in \{0, 1, \ldots, m_i\}$. Luego $f(x) = \sum_{i=0}^{m} g_i(x) \in IA[x]$. En conclusión $IA[x] = I^e$.

Para demostrar el segundo apartado tomamos el epimorfismo de anillos

$$\gamma : A[x] \longrightarrow (A/\mathfrak{p})[x],$$

donde $\gamma(f(x)) = \gamma(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = \overline{a}_0 + \overline{a}_1x + \cdots + \overline{a}_nx^n = \overline{f}(x)$, siendo $\overline{a}_i$ la clase de a_i módulo $\mathfrak{p}$. Está claro que $Ker\gamma = \mathfrak{p}A[x]$. Por tanto, en virtud del Primer Teorema de isomorfía, tenemos que $A[x]/\mathfrak{p}A[x] \cong (A/\mathfrak{p})[x]$. Como $A/\mathfrak{p}$ es un dominio de integridad, también lo es $(A/\mathfrak{p})[x]$, por lo que $\mathfrak{p}A[x]$ es un ideal primo.

La tercera propiedad parte de que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo minimal de I. Sabemos que $\mathfrak{p}A[x]$ es un ideal primo de $A[x]$ que contiene a $IA[x]$. Veamos que $\mathfrak{p}A[x]$ es un ideal primo minimal de $IA[x]$. Supongamos que existe un ideal primo $Q \subset A[x]$ tal que $IA[x] \subset Q \subset \mathfrak{p}A[x]$. Podemos reescribir esta cadena de la forma $I^e \subset Q \subset \mathfrak{p}^e$. Contrayendo esta cadena en A, nos queda $I^{ec} \subset Q^c \subset \mathfrak{p}^{ec}$. Es inmediato probar que $I^{ec} = I$. En efecto, $(I^e)^c = \{a \in A/\phi(a) \in I^e\} = \{a \in A/\phi(a) \in IA[x]\} = \{a \in A/a \in I\} = I$. Por tanto, nos queda la cadena $I \subset Q^c \subset \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p}$ es un ideal primo minimal de I y Q^c es un ideal primo de A, llegamos a que $\mathfrak{p} = Q^c$. Así pues, extendiendo, $\mathfrak{p}A[x] = Q^{ce}$. Por la Proposición [1, pág. 12], $Q^{ce} \subseteq Q$, por lo que $\mathfrak{p}A[x] \subseteq Q$. En consecuencia, $\mathfrak{p}A[x] = Q$, llegando a que $\mathfrak{p}A[x]$ es un ideal primo minimal de $IA[x]$.

La última propiedad parte de un ideal finitamente generado $I = (a_0, \ldots, a_n)$. Sea $f \in IA[x]$, tenemos que $f(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$, donde $b_i \in I$ para todo $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Esto implica que $b_i = c_{0i}a_0 + c_{1i}a_1 + \cdots + c_{ni}a_n$. Sustituyendo, $f(x) = \sum_{i=0}^{m}(c_{0i}a_0 + c_{1i}a_1 + \cdots + c_{ni}a_n)x^i = \sum_{i=0}^{m}(c_{0i}a_0x^i + c_{1i}a_1x^i + \cdots + c_{ni}a_nx^i) = a_0\sum_{i=0}^{m} c_{0i}x^i + a_1\sum_{i=0}^{m} c_{1i}x^i + \cdots + a_n\sum_{i=0}^{m} c_{ni}x^i$. Llamamos $g_j(x) = \sum_{i=0}^{m} c_{ji}x^i$, quedándonos $f(x) = a_0g_0(x) + a_1g_1(x) + \cdots + a_ng_n(x) \in (a_0, \ldots, a_n) \subset A[x]$. □

Lema 3.2.22 *Sean A un anillo y $\mathfrak{p} \subset A$ un ideal primo. Entonces, el ideal $\mathfrak{p}A[x] + (x)$ es un ideal primo de $A[x]$ distinto de $\mathfrak{p}A[x]$.*

Demostración. En primer lugar, denotemos $I := \mathfrak{p}A[x]$ y $J := \mathfrak{p}A[x] + (x)$. Consideramos el epimorfismo de anillos $\gamma : A[x]/I \longrightarrow A[x]/J$, donde $\gamma(a + I) = a + J$. Como $I \subset J$, se cumple que $Ker\gamma = J/I$. En consecuencia, por el Primer Teorema de isomorfía, tenemos que $A[x]/J$ es isomorfo a $(A[x]/I)/(J/I)$. Por otra parte, habíamos comprobado, en la prueba de la Propiedad 3.2.21, que $A[x]/I = A[x]/\mathfrak{p}A[x] \cong (A/\mathfrak{p})[x]$. Llamamos κ al isomorfismo $\kappa : A[x]/I \longrightarrow (A/\mathfrak{p})[x]$. Se cumple que $\kappa(J/I) = \kappa((\mathfrak{p}A[x] + (x))/\mathfrak{p}A[x]) = (x) \subset (A/\mathfrak{p})[x]$. Así pues, $(A[x]/I)/(J/I) \cong (A/\mathfrak{p})[x]/(x) \cong A/\mathfrak{p}$, que es un dominio de integridad. Como $A/\mathfrak{p}$ es isomorfo a $A[x]/J$, concluimos que $J := \mathfrak{p}A[x] + (x)$ es un ideal primo de $A[x]$. □

Definición 3.2.23 *Sean A un anillo y $\mathfrak{Q} \subset A[x]$ un ideal primo. Definimos el ideal $\mathfrak{Q} \cap A := \{a \in A/\phi(a) \in \mathfrak{Q}\} \subset A$, donde ϕ denota el homomorfismo canónico $\phi : A \longrightarrow A[x]$. El ideal $\mathfrak{Q} \cap A$ es primo y está formado por términos independientes de los polinomios constantes de $\mathfrak{Q}$.*

Se cumple que $\mathfrak{Q} \cap A = \mathfrak{Q}^c$ por el homomorfismo ϕ. En efecto, si tomamos $a \in \mathfrak{Q} \cap A$. Por la Definición 3.2.23, esto implica que $\phi(a) \in \mathfrak{Q}$, luego $a \in \mathfrak{Q}^c$. Para la otra inclusión, dado $a \in \mathfrak{Q}^c$, se deduce que $\phi(a) \in \mathfrak{Q}$, y por tanto, $a \in \mathfrak{Q} \cap A$. Ahora, probaremos un lema que usaremos más adelante.

Lema 3.2.24 *Sean A un anillo y $\mathfrak{P}_1 \subsetneq \mathfrak{P}_2 \subsetneq \mathfrak{P}_3$ una cadena de tres ideales primos distintos de $A[x]$. Entonces, $\mathfrak{P}_1 \cap A \neq \mathfrak{P}_3 \cap A$.*

Demostración. Tomamos $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_1 \cap A$. Entonces, tenemos por la Definición 3.2.23 y por el primer apartado de la Propiedad 3.2.21, que $\mathfrak{p}A[x] \subseteq \mathfrak{P}_1$. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}_3 \cap A$. Tomando cocientes en $A[x]$ módulo $\mathfrak{p}A[x]$, formamos la cadena $\overline{\mathfrak{P}}_1 \subsetneq \overline{\mathfrak{P}}_2 \subsetneq \overline{\mathfrak{P}}_3$, donde $\overline{\mathfrak{P}}_i = \mathfrak{P}_i/\mathfrak{p}A[x]$ para $i \in \{1, 2, 3\}$. Estas inclusiones son estrictas, pues si tuvieramos que $\overline{\mathfrak{P}}_i = \overline{\mathfrak{P}}_{i+1}$, llegaríamos a que $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}_{i+1}$, lo que contradice nuestras hipótesis. Además, se cumple que $\overline{\mathfrak{P}}_1 \cap (A/\mathfrak{p}) = \overline{\mathfrak{P}}_3 \cap (A/\mathfrak{p}) = (0)$. Por último, tomamos la parte multiplicativamente cerrada $S = (A/\mathfrak{p}) \setminus (0)$, formando el anillo $(S^{-1}(A/\mathfrak{p}))[x]$. Esto da lugar a la cadena $\mathfrak{Q}_1 \subsetneq \mathfrak{Q}_2 \subsetneq \mathfrak{Q}_3$, donde $\mathfrak{Q}_i = S^{-1}\overline{\mathfrak{P}}_i$ para $i \in \{1, 2, 3\}$. Sin embargo, $S^{-1}(A/\mathfrak{p})$ es un cuerpo, por lo que $(S^{-1}(A/\mathfrak{p}))[x]$ es un dominio de ideales principales. Esto implica que su dimensión es menor o igual a uno, llegando a un absurdo, pues $\mathrm{ht}(\mathfrak{Q}_3) \geq 2$. En consecuencia, $\mathfrak{P}_1 \cap A \neq \mathfrak{P}_3 \cap A$, como queríamos ver. □

Lema 3.2.25 *([3], pág. 27) Sean $A[x]$ un anillo de polinomios, y $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$ dos ideales primos diferentes de $A[x]$ tales que $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{Q}'$ y $\mathfrak{Q} \cap A = \mathfrak{Q}' \cap A = \mathfrak{p}$. Entonces, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{p}A[x]$.*

Demostración. Podemos sustituir, sin pérdida de generalidad, el anillo A por el dominio de integridad $A/\mathfrak{p}$. La razón es que, por la Definición 3.2.23 y por el primer apartado de la Propiedad 3.2.21, tenemos que $\mathfrak{Q} \supseteq \mathfrak{p}A[x]$, y por tanto, si $\overline{\mathfrak{Q}} = (0) \subset (A/\mathfrak{p})[x] \cong A[x]/\mathfrak{p}A[x]$, donde $\overline{\mathfrak{Q}}$ denota al ideal $\mathfrak{Q}$ módulo $\mathfrak{p}A[x]$, tendríamos que $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{p}A[x]$, logrando la igualdad. Así pues, $\mathfrak{p} = \{0\}$. Escribimos $S = A \setminus \{0\}$, y observamos que $S^{-1}(A[x]) = K[x]$, donde K es un cuerpo. Por hipótesis, $\mathfrak{Q} \cap A = \mathfrak{Q}' \cap A = \{0\}$, por tanto, por el tercer apartado de la Propiedad 1.1.9, $S^{-1}\mathfrak{Q} \subset S^{-1}\mathfrak{Q}'$ son dos ideales primos diferentes en $S^{-1}(A[x])$. Como $S^{-1}(A[x])$ es un dominio de ideales principales, se tiene que $S^{-1}\mathfrak{Q} = (0)$, y por tanto, $\mathfrak{Q} = (0)$, que es precisamente $\mathfrak{p}A[x]$. □

Proposición 3.2.26 *Sea A un anillo tal que $\dim A = n$. Entonces,*

$$n + 1 \leq \dim A[x] \leq 2n + 1.$$

Demostración. Sea $\mathfrak{Q}_0 \subsetneq \mathfrak{Q}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{Q}_m$ una cadena de ideales primos distintos de $A[x]$. Entonces, por el Lema 3.2.24, tenemos que:

$$\mathfrak{Q}_0 \cap A \subsetneq \mathfrak{Q}_2 \cap A \subsetneq \mathfrak{Q}_4 \cap A \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{Q}_{2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \cap A. \tag{3.8}$$

Como $\dim A = n$, la cadena (3.8) tiene longitud $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor \leq n$. Esto implica que $m \leq 2n+1$. En consecuencia, $\dim A[x] \leq 2n+1$. Por otro lado, sea $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n$ una cadena de $n+1$ ideales primos de A. Entonces, tomamos la cadena

$$\mathfrak{p}_0 A[x] \subsetneq \mathfrak{p}_1 A[x] \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_n A[x] \subsetneq \mathfrak{p}_n A[x] + (x). \tag{3.9}$$

Sabemos que $\mathfrak{p}_n A[x] + (x)$ es un ideal primo por el Lema 3.2.22. La cadena (3.9) tiene longitud $n+1$, por tanto, $\dim A[x] \geq n+1$. □

Esto es todo lo que podemos decir de un anillo arbitrario. Una vez visto esto, tomemos un anillo noetheriano.

Proposición 3.2.27 *Sea A un anillo noetheriano tal que* $\dim A = n$. *Entonces,*

$$\dim A[x] = n+1.$$

Demostración. En primer lugar, podemos suponer que A es un anillo local y que $\mathfrak{p}$ es su único ideal maximal, pues la dimensión es invariante al localizar anillos en ideales primos. Por la Proposición 3.2.26, sabemos que $\dim(A[x]) \geq n+1$. Veamos ahora que $\dim A[x] \leq n+1$. Como $\dim A = n$, existe un ideal maximal $\mathfrak{p} \subset A$ tal que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = n$. Por otra parte, en virtud del Corolario 3.2.18, sabemos que existen $a_1, \ldots, a_n \in A$ tales que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo minimal de $I := (a_1, \ldots, a_n)$. Como vimos en el tercer apartado de la Propiedad 3.2.21, esto implica que $\mathfrak{p}A[x]$ es un ideal primo minimal de $IA[x] = (a_1, \ldots, a_n)$. Por el Teorema 3.2.15, tenemos que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}A[x]) \leq n$. Por otro lado, como vimos en la prueba de la Proposición 3.2.26 podemos formar una cadena como en (3.9), llegando a que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}A[x]) \geq n$, y por tanto, a que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}A[x]) = n$.

Para acabar la demostración, probamos por inducción en la altura de $\mathfrak{p}$ que para todo $\mathfrak{P} \subset A[x]$ tal que $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$ se cumple que $\mathrm{ht}(\mathfrak{P}) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{p})+1$. Si $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 0$, por la Proposición 3.2.26, tenemos que $\dim A[x] = 1$, por lo que $\mathrm{ht}(\mathfrak{P}) \leq 1$. Supongamos que la propiedad se cumple cuando $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) < n$, esto es que, para todo ideal $\mathfrak{P} \subset A[x]$ tal que $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$, se cumple que $\mathrm{ht}(\mathfrak{P}) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + 1$. Probemos para $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = n$. Supongamos que tenemos la cadena saturada $\mathfrak{Q} \subsetneq \mathfrak{P}$. Si $\mathfrak{Q} \cap A \subsetneq \mathfrak{p}$, se llegaría a que $\mathfrak{Q} \cap A =: \mathfrak{q}$, con $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) < n$. En consecuencia, al cumplirse la hipótesis inductiva, concluiríamos que $\mathrm{ht}(\mathfrak{Q}) \leq n$. Si $\mathfrak{Q} \cap A = \mathfrak{p}$, podríamos formar la cadena $\mathfrak{p}A[x] \subseteq \mathfrak{Q} \subsetneq \mathfrak{P}$. Por el Lema 3.2.24, llegamos a que $\mathfrak{p}A[x] = \mathfrak{Q}$. Como $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}A[x]) = n$, se deduce que $\mathrm{ht}(\mathfrak{Q}) = n$, y por tanto, que $\mathrm{ht}(\mathfrak{P}) \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + 1$, como queríamos demostrar. En consecuencia, como todos los ideales primos de $A[x]$ tienen altura menor o igual a $n+1$, concluimos que $\dim A[x] = n+1$. □

Corolario 3.2.28 *Sea A un anillo noetheriano tal que* $\dim A = n$*. Entonces* $\dim A[x_1, x_2, \ldots, x_m] = n + m$

Demostración. Probamos por inducción sobre m. Sabemos por la Proposición 3.2.27 que $\dim A[x] = n+1$. Supongamos que $\dim A[x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}] = m-1$. Por el Teorema 2.2.1 de [2], sabemos que $A[x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}]$ es un anillo noetheriano, por tanto, aplicando la hipótesis inductiva, llegamos a que

$$\dim A[x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}][x_m] = \dim A[x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}] + 1 = n+m-1+1 = n+m,$$

terminando así la demostración. $\square$

3.3. Ejemplo de Nagata

En este apartado daremos un ejemplo de un anillo noetheriano de dimensión infinita. Sea $A = K[x_1, x_2, \ldots]$ el anillo de polinomios con coeficientes en el cuerpo infinito K y con infinitas indeterminadas. Los elementos de $K[x_1, x_2, \ldots]$ tienen la forma:

$$\textstyle\sum_{i_0, i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N}_0} a_{i_0, i_1, \ldots, i_n} x_{i_0}^{\alpha_{i_0}} x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \ldots x_{i_n}^{\alpha_{i_n}},$$

con $a_{i_0, i_1, \ldots, i_n} \in K$, $x_{i_j} \in \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, $\alpha_{i_j} \in \mathbb{N}_0$ para todo $j = 0, 1, \ldots, n$, y donde la suma es finita. En otras palabras, todo elemento de $K[x_1, x_2, \ldots]$ pertenece a un subanillo $K[x_{h_1}, x_{h_2}, \ldots, x_{h_t}] \subsetneq K[x_1, x_2, \ldots]$. Primero, daremos una definición que usaremos más adelante.

Definición 3.3.1 *Sean $B = K[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ un anillo de polinomios con k indeterminadas y $f \in B$. Llamamos **soporte** de f, y lo denotamos Supp(f), al conjunto Supp(f) $= \{(n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}_0^k : f_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \neq 0\}$, siendo $f_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ el coeficiente del monomio $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdot \cdots \cdot x_k^{n_k}$ de f. Este conjunto determina aquellos monomios de f con coeficiente distinto de cero.*

Ejemplo 3.3.2 *Si tomamos el polinomio $f = x_1^3 x_2 + 2x_3 + 3x_2^2$ del anillo de polinomios $\mathbb{R}[x_1, x_2, x_3, x_4]$, entonces Supp($f$) $= \{(3,1,0,0), (0,0,1,0), (0,2,0,0)\}$.*

Tomamos la siguiente familia infinita de ideales primos de A:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{p}_1 = (x_1), \\
&\mathfrak{p}_2 = (x_2, x_3), \\
&\mathfrak{p}_3 = (x_4, x_5, x_6), \\
&\vdots \\
&\mathfrak{p}_n = \left(x_{\binom{n}{2}+1}, x_{\binom{n}{2}+2}, \ldots, x_{\binom{n+1}{2}}\right),
\end{aligned}$$

donde $n \in \mathbb{N}$.

El siguiente lema puede extenderse a cualquier ideal monomial, sin embargo, es suficiente probarlo para los ideales anteriormente descritos.

Lema 3.3.3 *Sean $f \in A$ e $i_0 \in \mathbb{N}$. Entonces, $f \in \mathfrak{p}_{i_0}$ si, y solo si, todos los términos de f pertenecen a $\mathfrak{p}_{i_0}$.*

Demostración. En primer lugar, partamos de que $f \in \mathfrak{p}_{i_0}$. Esto implica que f se puede expresar de la forma: $f = x_{\binom{i_0}{2}+1} f_1 + x_{\binom{i_0}{2}+2} f_2 + \cdots + x_{\binom{i_0+1}{2}} f_{i_0}$, con $f_j \in A$ para todo $j = 1, 2, \ldots, i_0$. En efecto, todos los términos de f pertenecen a $\mathfrak{p}_{i_0}$, ya que todos estarán multiplicados por al menos una de las indeterminadas que generan a $\mathfrak{p}_{i_0}$.

Por otro lado, supongamos que todos los términos de f pertenecen a $\mathfrak{p}_{i_0}$. Como la suma de elementos de $\mathfrak{p}_{i_0}$ nos da un elemento de $\mathfrak{p}_{i_0}$, pues es un ideal, concluimos que $f \in \mathfrak{p}_{i_0}$. $\square$

Definimos el conjunto $S = A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{p}_i = K[x_1, x_2, \ldots] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{p}_i$.

Lema 3.3.4 *El conjunto S es una parte multiplicativamente cerrada de A.*

Demostración. En primer lugar, para todo $i \in \mathbb{N}$ se cumple que 1 no pertenece a $\mathfrak{p}_i$, por tanto, $1 \in S$. Por otro lado, sean x, y elementos de S. Como x, y no pertenecen a $\mathfrak{p}_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces xy no pertenece a $\mathfrak{p}_i$ (por ser $\mathfrak{p}_i$ primo) para todo $i \in \mathbb{N}$. En consecuencia, xy pertenece a S. $\square$

Tomamos ahora el anillo de fracciones $S^{-1}A = \left\{\frac{a}{s} : a \in A, s \in S\right\}$. Veamos que $S^{-1}A$ es noetheriano y de dimensión infinita. Empezamos demostrando un lema previo.

Lema 3.3.5 *([4]) Sea $J \subseteq A$ un ideal con $J \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{p}_i$, entonces existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $J \subseteq \mathfrak{p}_{i_0}$.*

Demostración. Nuestra hipótesis es que $J \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{p}_i$ y probamos por reducción al absurdo. Suponemos que $J \not\subseteq \mathfrak{p}_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y vemos que eso implica que existe $h \in J$ tal que $h \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{p}_i$, llegando a una contradicción.

Tomamos $f \in J$. Supongamos que $K[x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_l}]$ es el menor subanillo de A que contiene a f. Asumimos sin pérdida de generalidad que x_{k_l} es la variable con el mayor subíndice. Dicha variable solo puede pertenecer a uno de los ideales $\mathfrak{p}_i$. Sea $s \in \mathbb{N}$ tal que $x_{k_l} \in \mathfrak{p}_s$. Entonces, para cualquier valor $r \in \mathbb{N}$ con $r > s$, se cumple que $f \notin \mathfrak{p}_r$. Por tanto, f puede pertenecer, a lo sumo, a s ideales.

Si $f \notin \mathfrak{p}_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces implicaría que $f \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{p}_i$, por lo que $J \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{p}_i$, llegando a un absurdo. Supongamos ahora que f pertenece a t ideales, con $1 \leq t \leq s$, y que dichos ideales son $\mathfrak{p}_{h_1}, \mathfrak{p}_{h_2}, \ldots, \mathfrak{p}_{h_t}$. Denotamos $\mathfrak{I}_t = \{h_1, h_2, \ldots, h_t\}$ y suponemos que $h_1 < h_2 < \cdots < h_t$.

Por hipótesis, $J \not\subseteq \mathfrak{p}_{h_t}$, por tanto, existe $g_t \in J \setminus \mathfrak{p}_{h_t}$. Recalcamos que es posible que el menor subanillo de A al que pertenezca g_t no sea $K[x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_l}]$, no obstante, esto no afecta los siguientes cálculos.

Tomamos $f + g_t \in J$. Aquí pueden ocurrir dos cosas, que $Supp(f) \subset Supp(f + g_t)$ o, por el contrario, que $Supp(f) \not\subset Supp(f + g_t)$. Asumiendo este segundo caso, veamos que siempre podemos encontrar $\lambda_t \in K \setminus \{0\}$ tal que $Supp(f) \subset Supp(f + \lambda_t g_t)$. Sean $\{a_{\bar{i}_1}, \ldots, a_{\bar{i}_m}\}, \{b_{\bar{i}_1}, \ldots, b_{\bar{i}_m}\}$ todos los coeficientes de f y g, respectivamente, tales que $\bar{i}_1, \ldots, \bar{i}_m \in Supp(f) \cap Supp(g_t)$, con $\bar{i}_n = (i_{n1}, i_{n2}, \ldots, i_{nl})$ para todo $n = 1, 2, \ldots, m$ y $|Supp(f) \cap Supp(g_t)| = m$. Para todo $j = 1, 2, \ldots, m$ existe $\lambda_j \in K \setminus \{0\}$ tal que:

$$a_{\bar{i}_j} x_{k_1}^{i_{j1}} x_{k_2}^{i_{j2}} \ldots x_{k_l}^{i_{jl}} + \lambda_j b_{\bar{i}_j} x_{k_1}^{i_{j1}} x_{k_2}^{i_{j2}} \ldots x_{k_l}^{i_{jl}} = 0.$$

En efecto, basta tomar $\lambda_j = -a_{\bar{i}_j}/b_{\bar{i}_j}$. Por tanto, sea $\lambda_t \in K \setminus \{0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$, se cumple que $Supp(f) \cap Supp(g_t) \subset Supp(f + \lambda_t g_t)$, y por tanto, que $Supp(f) \subset Supp(f + \lambda_t g_t)$. Si $Supp(f) \subset Supp(f + g_t)$ desde el principio, tomamos $\lambda_t = 1$. Por otro lado, $f + \lambda_t g_t \notin \mathfrak{p}_{h_t}$, pues lo contrario implicaría que existe $a \in \mathfrak{p}_{h_t}$ tal que $f + \lambda_t g_t = a$, llegando a que $\lambda_t g_t = a - f$ y por tanto, que $\lambda_t g_t \in \mathfrak{p}_{h_t}$, lo que es falso pues multiplicando por el inverso de λ_t, se llegaría a que $g_t \in \mathfrak{p}_{h_t}$, que es absurdo. Además, como $f \notin \mathfrak{p}_i$ para todo $i \notin \mathfrak{I}_t$ y $Supp(f) \subset Supp(f + \lambda_t g_t)$, se concluye que $f + \lambda_t g_t \notin \mathfrak{p}_i$ para todo $i \notin \mathfrak{I}_t \setminus \{h_t\}$.

Llamamos $f_1 = f + \lambda_t g_t$. Este elemento, por construcción, solo puede pertenecer a los ideales $\{\mathfrak{p}_{h_1}, \mathfrak{p}_{h_2}, \ldots, \mathfrak{p}_{h_{t-1}}\}$. Sea $\mathfrak{p}_{h_\alpha}$ el ideal con el mayor subíndice al que pertenece f_1. Como $J \not\subseteq \mathfrak{p}_{h_\alpha}$, existe $g_\alpha \in J \setminus \mathfrak{p}_{h_\alpha}$. En virtud de lo anterior, existe $\lambda_\alpha \in K \setminus \{0\}$ tal que $Supp(f_1) \subset Supp(f_1 + \lambda_\alpha g_\alpha)$, y por tanto, $f_1 + \lambda_\alpha g_\alpha \notin \mathfrak{p}_i$ para todo $i \notin \mathfrak{I}_t \setminus \{h_t, h_{t-1}, \ldots, h_{\alpha+1}, h_\alpha\}$.

Llamamos $f_2 = f_1 + \lambda_\alpha g_\alpha$. Realizando este mismo proceso una cantidad finita de veces, nos aseguramos el encontrar un elemento de J de la forma $h = f + \lambda_t g_t + \lambda_\alpha g_\alpha + \cdots + \lambda_\omega g_\omega$, tal que $h \notin \mathfrak{p}_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Esto implica que $h \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{p}_i$, como queríamos ver. $\square$

Este lema conlleva el siguiente corolario.

Corolario 3.3.6 *El conjunto de ideales maximales de $S^{-1}A$ es $\{S^{-1}\mathfrak{p}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{M}$ ideal maximal de $S^{-1}A$. Sabemos que $\mathfrak{M}^c$ es un ideal primo de A y que $\mathfrak{M}^c \cap S = \emptyset$. Por definición de S, $\mathfrak{M}^c \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{p}_i$. Entonces, por el Lema 3.3.5, $\mathfrak{M}^c \subseteq \mathfrak{p}_{i_0}$ para cierto $i_0 \in \mathbb{N}$. Luego, $\mathfrak{M}^{ce} \subseteq \mathfrak{p}_{i_0}^e = S^{-1}\mathfrak{p}_{i_0}$, por tanto, por la Propiedad 1.1.9, $\mathfrak{M} \subseteq S^{-1}\mathfrak{p}_{i_0}$. Como $\mathfrak{M}$ es maximal y $S^{-1}\mathfrak{p}_{i_0}$ es distinto del total, ya que $\mathfrak{p}_{i_0} \cap S = \emptyset$, se cumple la igualdad. Por tanto, los ideales maximales de $S^{-1}A$ son de la forma $S^{-1}\mathfrak{p}_i$, con $i \in \mathbb{N}$.

Veamos ahora si todos los ideales de la forma $S^{-1}\mathfrak{p}_i$ son maximales en $S^{-1}A$. Supongamos que no. Tomemos $S^{-1}\mathfrak{p}_j$ ideal de $S^{-1}A$ no maximal. Necesariamente, debe estar contenido estrictamente en un ideal maximal de $S^{-1}A$, que ya sabemos que tiene la forma $S^{-1}\mathfrak{p}_{i_0}$ para cierto $i_0 \in \mathbb{N}$. Si $S^{-1}\mathfrak{p}_j \subsetneq S^{-1}\mathfrak{p}_{i_0}$ por el Teorema 1.1.13, se llega a que $\mathfrak{p}_j \subsetneq \mathfrak{p}_{i_0}$, lo cual es falso por la propia definición de los ideales $\mathfrak{p}_j$, por tanto, $S^{-1}\mathfrak{p}_j$ debe ser un ideal maximal para todo $j \in \mathbb{N}$, completando el otro contenido. $\square$

Proposición 3.3.7 *La dimensión de $S^{-1}A$ es infinita.*

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos considerar la siguiente cadena de ideales primos de A de longitud n:

$$(0) \subset \left(x_{\binom{n}{2}+1}\right) \subset \left(x_{\binom{n}{2}+1}, x_{\binom{n}{2}+2}\right) \subset \cdots \subset \left(x_{\binom{n}{2}+1}, x_{\binom{n}{2}+2}, \ldots, x_{\binom{n+1}{2}}\right) = \mathfrak{p}_n$$

Por el Teorema 1.1.13, existe la siguiente cadena de ideales primos de $S^{-1}A$:

$$S^{-1}(0) \subset S^{-1}\left(x_{\binom{n}{2}+1}\right) \subset \cdots \subset S^{-1}\left(x_{\binom{n}{2}+1}, x_{\binom{n}{2}+2}, \ldots, x_{\binom{n+1}{2}}\right) = S^{-1}\mathfrak{p}_n.$$

Esta cadena tiene longitud n. Por tanto, podemos afirmar que $dim(S^{-1}A) \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, $\dim(S^{-1}A) = \infty$ $\square$

Por último, nos queda ver que el anillo que hemos definido anteriormente cumple con las condiciones de la Proposición 1.1.16.

Proposición 3.3.8 *El anillo $S^{-1}A$ es noetheriano.*

Demostración. En primer lugar, veamos que para todo $x \in S^{-1}A \setminus \{0\}$, se cumple que x solo pertenece a una cantidad finita de ideales maximales de $S^{-1}A$. Sea $x = \frac{f}{s} \in S^{-1}A \setminus \{0\}$. Si $x \in S^{-1}\mathfrak{p}_i$, entonces $f \in \mathfrak{p}_i$. Como vimos en la demostración del Lema 3.3.5, sabemos que f pertenece a cierto subanillo de la forma $K[x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_l}]$, por lo que f pertenece a una cantidad finita de los ideales $\mathfrak{p}_j$. En consecuencia, x pertenece a una cantidad finita de los ideales $S^{-1}\mathfrak{p}_i$. Por el Corolario 3.3.6, como estos son precisamente los ideales maximales de $S^{-1}A$, demostramos lo que queríamos ver.

Sea $i \in \mathbb{N}$. Veamos ahora que $(S^{-1}A)_{S^{-1}\mathfrak{p}_i}$ es noetheriano. Por el Corolario 1.1.17, $A_{\mathfrak{p}_i}$ es isomorfo a

$$K(x_1, \ldots, x_{\binom{i}{2}}, x_{\binom{i+1}{2}+1}, \ldots)[x_{\binom{i}{2}+1}, \ldots, x_{\binom{i+1}{2}}]_{(x_{\binom{i}{2}+1}, \ldots, x_{\binom{i+1}{2}})},$$

que es un anillo noetheriano por ser la localización en un ideal primo de un anillo de polinomios con una cantidad finita de incógnitas y con coeficientes en un cuerpo. Así pues, como $A_{\mathfrak{p}_i}$ es noetheriano, podemos afirmar que $(S^{-1}A)_{S^{-1}\mathfrak{p}_i}$ es noetheriano, ya que estos dos anillos son isomorfos (ver Proposición 1.1.14).

Como $S^{-1}A$ cumple con las condiciones de la Proposición 1.1.16, concluimos que $S^{-1}A$ es noetheriano. $\square$

Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado algunas aplicaciones de la dimensión de Krull a la hora de estudiar anillos, especialmente, anillos noetherianos. En primera instancia, hemos profundizado en una herramienta fundamental del Álgebra conmutativa, la localización de anillos. Hemos podido demostrar las proposiciones básicas que permiten enunciar y desarrollar el tema de este trabajo. Por otra parte, se ha hecho una pequeña introducción de teoría de módulos, resaltando el Lema de Nakayama, que resulta imprescindible para demostrar los teoremas más sofisticados del último capítulo. En efecto, el desarrollo de estas materias preliminares contribuye a que el alumno refuerce su conocimiento del Álgebra conmutativa.

El segundo capítulo entra de lleno en el tema de este trabajo. Se establece mediante la definición de cadena de ideales primos el concepto de altura de un ideal primo y, subsecuentemente, el de dimensión de Krull de un anillo. Además, se prueba el Teorema de Kaplansky, que más allá del resultado en sí mismo, muestra una técnica demostrativa muy útil en el campo del álgebra, que es la utilización del Lema de Zorn en el contexto de una reducción al absurdo.

Por último, se ha procedido a exponer algunas propiedades que da de sí el estudio de la dimensión de Krull, a saber, el Teorema de los ideales principales de Krull, el Teorema de altura de Krull y la prueba de que un anillo es artiniano si, y solo si, es noetheriano y de dimensión cero. Además, se ha empleado un compendio de herramientas ya aprendidas en el Grado de Matemáticas y otras nuevas tratadas en todo el trabajo para exponer el ejemplo de Nagata, donde se describe un anillo noetheriano de dimensión infinita.

Un estudio complementario que se podría realizar a partir de lo aquí expuesto sería la interpretación geométrica de algunas de las propiedades de este trabajo. Así como la profundización en teoría de módulos, puesto que en este trabajo solo hemos tratado un esbozo de la misma, presentando solo los resultados imprescindibles para probar las proposiciones que hemos expuesto.

Bibliografía

[1] ATIYAH, Michael Francis. MACDONALD, Ian Grant. *Introducción al álgebra conmutativa*. Reverté, 1989.

[2] BALCERZYK, Stanisław. JÓZEFIAK, Tadeusz. *Commutative Noetherian and Krull Rings*. Ellis Horwood, 1989.

[3] BALCERZYK, Stanisław. JÓZEFIAK, Tadeusz. *Commutative rings: dimension, multiplicity, and homological methods*. Ellis Horwood, 1989.

[4] BESHENOV, A. (18 de diciembre de 2013). *Noetherian ring of infinite dimension (after Nagata) [2ª parte]*. http://176.58.104.245. Revisado el 20 de noviembre de 2019. http://176.58.104.245/ALGANT/TONG/exos.pdf.

[5] DATTA, A. (10 de agosto del 2013). *If $I \subseteq J \subseteq A$ have same image in localization by all maximal ideals, then $I = J$*. Mathematics Stack Exchange. Revisado el 10 de enero de 2020. https://math.stackexchange.com/questions/464069/if-i-subseteq-j-subseteq-a-have-same-image-in-localization-by-all-maximal-idea.

[6] DE JONG, A. J. (27 de septiembre de 2008). *10.9 Localization*. The Stacks project. Revisado el 10 de febrero de 2020. https://stacks.math.columbia.edu/tag/00CM.

[7] EISENBUD, David. *Commutative Algebra with a view toward algebraic geometry* Vol. 150. Springer Science & Business Media, 2013.

[8] geómetracat. (1 de diciembre de 2019). *Ejercicio de "Commutative Noetherian and Krull rings"*. Rincón matemático. Revisado el 1 de diciembre de 2019. https://foro.rinconmatematico.com/index.php?topic=111572.0.

[9] NAGATA, Masayoshi. *Local rings*. Interscience Tracts in Pure and Appl. Math., 1962.

[10] SHARP, Rodney Y. *Steps in commutative algebra. No. 51.* 2ª edición. Cambridge university press, 2000.

[11] SINGH, Balwant. *Basic commutative algebra*. World Scientific Publishing Company, 2011.

Dimension theory. Noetherian rings

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Gerardo Vargas Flores
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0100896008@ull.edu.es

Abstract

KRULL DIMENSION IS AN ALGEBRAIC TOOL that allows us to characterize and classify commutative rings with unit. The theorems established through its study make it possible to know the properties of the ideals contained in these rings, especially the prime ideals, and providing necessary or sufficient conditions to establish properties of the rings. These theorems are especially useful when we work on Noetherian rings. Most of the results will be related to them.

Our goal will be to define rigorously what is the Krull dimension of a ring. After this, we will use the acquired knowledge to prove Krull's principal ideals theorem, and a generalization of it, we will characterize the dimension of some rings and prove Kaplansky's theorem. Also, we will present further applications of these theorems, most of them in polynomial rings. Finally, we will show a proof of interest for the topic in question, the description of a Noetherian ring with infinite Krull dimension.

1. Localization and modules

First of all, we include some material related to localization and modules. All of this information will be relevant later. The following results are especially relevant.

Universal property of localization. Let $f: A \longrightarrow B$ be a ring homomorphism and $S \subset A$ a multiplicative set. If all the elements of $f(S)$ are units in B, then there exists a unique ring homorphism $h: S^{-1}A \longrightarrow B$ such that $f = h \circ \phi$, where ϕ denotates the natural homomorphism from A to $S^{-1}A$.

Correspondence Theorem for localizations of rings. There exists a one-to-one correspondence between prime ideals in $S^{-1}A$ and prime ideals of A disjoint with S.

Proposition. Let A be a ring, $S \subsetneq A$ a multiplicative set A and $\mathfrak{p}$ a prime ideal of A such that $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$. Then,

$$\kappa : A_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\cong} (S^{-1}A)_{S^{-1}\mathfrak{p}},$$

defined as $\kappa(a/s) = \frac{a/1}{s/1}$, where $a \in A$ and $s \in A \setminus \mathfrak{p}$, is a ring isomorphism.

Proposition. Let A be a ring such that for all maximal ideal $\mathfrak{M} \subset A$ the ring $A_{\mathfrak{M}}$ is noetherian and for all $x \in A \setminus \{0\}$, x is contained in a finite number of maximal ideals of A. Then A is noetherian.

Nakayama's lemma. Let A be a ring, I an ideal contained in the Jacobson's radical of A and M a finitely generated A-module such that $IM = M$. Then $M = 0$.

2. Krull dimension

We can now define the Krull dimension of a ring.
Definition. Let A be a ring, we define the **Krull dimension of A** (written $\dim(A)$) as the supremum of the heights of the prime ideals of A.

$$\dim(A) := \sup \{\text{ht}(\mathfrak{p}) / \mathfrak{p} \subset A\}.$$

Proposition. Let A be a ring and $\mathfrak{p} \subset A$ a prime ideal. Then,

$$\text{ht}(\mathfrak{p}) = \dim(A_{\mathfrak{p}}) = \text{ht}(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})$$

Kaplansky's Theorem Let A be a ring. Then the following are equivalent:

1. A is a principal ideal domain.
2. A is a unique factorization domain of dimension one.

3. Noetherian rings

Now we proof two theorems that will allow us to discover further properties of noetherian rings.

Krull's Principal Ideal Theorem. Let A be a noetherian ring. If $a \in A$, and $\mathfrak{p}$ is minimal among primes of A containing a, then $\text{ht}(\mathfrak{p}) \leq 1$.

Krull's Height Theorem. Let A be a noetherian ring. If $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$, and $\mathfrak{p}$ is minimal among primes of A containing $a_1, a_2, \ldots, a_n$, then $\text{ht}(\mathfrak{p}) \leq n$.

Proposition. Let A be a noetherian ring such that $\text{dim}(A) = n$. Then,

$$\dim A[x] = n + 1.$$

Nagata's example. Finally, we give an example of a noetherian ring with infinite Krull dimension. The construction of this ring employs fundamental results of Commutative Algebra, which makes it of great interest to our work.

Let $A = K[x_1, x_2, \ldots]$ be a polynomial ring and $\mathfrak{p}_1 = (x_1), \mathfrak{p}_2 = (x_2, x_3), \mathfrak{p}_3 = (x_4, x_5, x_6), \ldots, \mathfrak{p}_n = \left(x_{\binom{n}{2}+1}, x_{\binom{n}{2}+2}, \ldots, x_{\binom{n+1}{2}}\right)$ an infinite family of ideals of A. We define $S = A \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{p}_i$ a multiplicative set. Then, the ring $S^{-1}A$ is noetherian and has infinite Krull dimension.

References

[1] ATIYAH, Michael Francis. MACDONALD, Ian Grant. *Introducción al álgebra conmutativa*. Reverté, 1989.

[2] BALCERZYK, Stanisław. JÓZEFIAK, Tadeusz. *Commutative Noetherian and Krull Rings*. Ellis Horwood, 1989.

[3] BALCERZYK, Stanisław. JÓZEFIAK, Tadeusz. *Commutative rings: dimension, multiplicity, and homological methods*. Ellis Horwood, 1989.

[4] EISENBUD, David. *Commutative Algebra with a view toward algebraic geometry* Vol. 150. Springer Science & Business Media, 2013.

[5] NAGATA, Masayoshi. *Local rings*. Interscience Tracts in Pure and Appl. Math., 1962.

[6] SHARP, Rodney Y. *Steps in commutative algebra. No. 51.* 2ª edición. Cambridge university press, 2000.

[7] SINGH, Balwant. *Basic commutative algebra*. World Scientific Publishing Company, 2011.

[8] BESHENOV, A. (18 de diciembre de 2013). *Noetherian ring of infinite dimension (after Nagata) [2ª parte]*. http://176.58.104.245. Revisado el 20 de noviembre de 2019. http://176.58.104.245/ALGANT/TONG/exos.pdf.