

Diego Sebastián Guouman Ferreyra

*Bi-ortogonalidad y fórmulas de
cuadratura positivas para integrandos
periódicos*

Bi-orthogonality and positive quadrature
formulas for periodic integrands

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Junio de 2021

DIRIGIDO POR
Ruymán Cruz Barroso

Ruymán Cruz Barroso

*Departamento de Análisis
Matemático*

Universidad de La Laguna

38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Agradecer en primer lugar a mi tutor, Ruymán Cruz Barroso, por su constante dedicación y esfuerzo para guiarme a lo largo de todo este trabajo. Además, destacar sus capacidades para captar mi interés sobre el Análisis Numérico durante las dos asignaturas que me ha impartido a lo largo de todo el Grado.

Por otra parte, quiero agradecer a mi familia, principalmente a mis padres, Carlos A. Guouman Cabrera y M. Cecilia Ferreyra Daleve; y a mis seis hermanos, por haber estado siempre en las buenas y en las malas, apoyándome y dándome ánimos en todo momento. También agradecer a mis dos abuelas, por darme los mejores consejos y, a pesar de la distancia, siempre haber recibido el cariño y la motivación que me han hecho llegar hasta aquí.

Por último, a mis amigos, por todos los momentos vividos y por hacer de la etapa universitaria una de las mejores experiencias.

Diego Sebastián Guouman Ferreyra
La Laguna, 9 de junio de 2021

Resumen · Abstract

Resumen

El objetivo principal de esta Memoria es la construcción y caracterización de fórmulas de cuadratura positivas para integrandos periódicos con respecto a una función peso. Para ello, tomaremos como referencia base el artículo [2], que fue inspirado a su vez por el célebre artículo [6] escrito por G. Szegő en 1963, y en donde los sistemas bi-ortogonales de polinomios trigonométricos son introducidos por primera vez en la literatura. Este concepto será esencial para el cálculo aproximado de integrales pesadas con integrandos periódicos.

Palabras clave: *Polinomios Trigonométricos – Polinomios de Szegő – Interpolación – Fórmulas de cuadratura – Bi-ortogonalidad.*

Abstract

The main purpose of this Memory is the construction and characterization of positive quadrature formulas for periodic integrands with respect to a weight function. For this aim, we will take as basic reference the paper [2], which was actually inspired by the famous paper [6] written by G. Szegő in 1963, and where the bi-orthogonal systems of trigonometric polynomials were introduced for the first time in the literature. This concept will be essential for the approximate calculation of weighted integrals with periodic integrands.

Keywords: *Trigonometric polynomials – Szegő polynomials – Interpolation – Quadrature formulas – Bi-orthogonality.*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Polinomios trigonométricos	1
2. Interpolación por polinomios trigonométricos	9
3. Sistemas bi-ortogonales de polinomios trigonométricos	23
3.1. Sistemas bi-ortogonales de polinomios trigonométricos	23
3.2. Polinomios de Szegő	29
3.3. Construcción de sistemas bi-ortogonales de polinomios trigonométricos a partir de polinomios de Szegő	35
4. Fórmulas de cuadratura para integrandos periódicos	37
A. Anexo: Problemas abiertos	45
A.1. Fórmulas de cuadratura positivas para integrandos periódicos con un número arbitrario de nodos	45
A.2. Fórmulas de cuadratura positivas para integrandos periódicos con dominios de exactitud intermedios	46
Bibliografía	47
Poster	49

Introducción

En esta Memoria se tratarán temas de gran interés en Matemática Aplicada, muchos de los cuales se utilizan en la actualidad en diversas aplicaciones, como pueden ser la computación de la Transformada de Fourier o el procesamiento de señales digitales. En primer lugar se introducen los polinomios trigonométricos y se estudia la relación entre estos y los polinomios de Laurent Hermitianos y los polinomios algebraicos autorrecíprocos. Esta relación, que se consigue haciendo uso de las fórmulas de Euler y Moivre, y vincula polinomios trigonométricos con polinomios algebraicos definidos en la circunferencia unidad, permite demostrar propiedades para polinomios trigonométricos partiendo de propiedades bien conocidas para polinomios algebraicos, como por ejemplo la localización de ceros o el célebre Teorema de Riesz-Féjer.

El Capítulo 2 es una introducción al amplio mundo de la interpolación por polinomios trigonométricos, el cual encuentra en la construcción de fórmulas de cuadratura una de sus aplicaciones más inmediatas. En primer lugar, se demuestra la existencia y la unicidad del polinomio trigonométrico interpolador, dando la representación explícita de la función trigonométrica interpolante en forma de Lagrange que será ilustrada con un ejemplo numérico realizado con ayuda de *Matlab*. En dicho ejemplo se hace una comparación entre dos funciones interpolantes: el polinomio algebraico interpolador calculado mediante la fórmula de Lagrange y el polinomio trigonométrico interpolador computado mediante la fórmula de Lagrange trigonométrica. En segundo lugar, se enuncia un teorema que trata sobre la generalización al caso trigonométrico del problema de interpolación de Hermite, teniendo en cuenta que en este caso será necesario realizar una modificación técnica debido en las condiciones del problema, por ser la dimensión del espacio de polinomios trigonométricos siempre impar y el número de condiciones del problema de interpolación de Hermite siempre par. Asimismo, se proporciona una expresión explícita del correspondiente polinomio interpolador trigonométrico de Hermite. Finalmente, se tratarán ciertos problemas de interpolación en espacios de polinomios trigonométricos usando un número par de nodos.

A continuación, en el Capítulo 3 se introducen los sistemas bi-ortogonales de polinomios trigonométricos, que han sido objeto de estudio en numerosos textos, y que fueron introducidos en 1963 por el matemático húngaro G. Szegő a sus 69 años. Estos sistemas son fundamentales en la construcción y caracterización de fórmulas de cuadratura para integrandos periódicos con respecto a una función peso. Tras introducir este concepto en la primera sección, se abordarán algunas cuestiones esenciales: existencia, unicidad, localización y entrelazamiento de ceros, considerando la función núcleo reproductora y una identidad de tipo Christoffel-Darboux. La segunda sección de este capítulo será dedicada a establecer una breve introducción a la Teoría de Polinomios Ortogonales en la Circunferencia Unidad (o Polinomios de Szegő), que fueron introducidos por primera vez en [6, Capítulo 11] en la primera mitad del siglo XX y han sido utilizados en campos tan variados como la teoría de operadores, la aproximación compleja o el procesamiento de señales digitales. Una vez definidos estos polinomios y estudiadas algunas de sus propiedades, se demuestra la ley de recurrencia de Szegő, la cual nos permite computar recursivamente estos polinomios de manera conjunta con sus respectivos polinomios recíprocos. Se demostrará a continuación una de las principales diferencias entre el desarrollo de la Teoría de Polinomios Ortogonales en la Circunferencia Unidad con respecto a la de los Polinomios Ortogonales en el Eje Real: la localización de los ceros. El motivo de considerar en la segunda sección una introducción a la Teoría de Polinomios de Szegő es porque estos permitirán obtener sistemas bi-ortogonales de polinomios trigonométricos. Esto último será abordado en la tercera sección.

El cuarto y último capítulo de este trabajo está destinado a la construcción y caracterización de fórmulas de cuadratura para integrandos periódicos, principal objetivo de esta Memoria. En este tipo de fórmulas se buscará, como parece razonable plantearse, exactitud en espacios de polinomios trigonométricos. La caracterización obtenida, a partir de sistemas bi-ortogonales de polinomios trigonométricos, es consecuencia inmediata de los resultados presentados en los capítulos anteriores.

Esta Memoria finaliza con un Anexo en el que se plantean dos problemas abiertos relacionados con el contenido de este trabajo, y que podrían ser abordados en un futuro. Este Trabajo de Fin de Grado desarrolla esencialmente los contenidos necesarios para comenzar a afrontar tales cuestiones.

Polinomios trigonométricos

En este primer capítulo estudiaremos algunas definiciones y notación necesaria para poder avanzar a lo largo de toda la Memoria. En primero lugar, \mathbb{P} denotará al espacio de polinomios algebraicos (en general con coeficientes complejos) y dado n un entero no negativo, \mathbb{P}_n denotará el subespacio vectorial de polinomios algebraicos de grado a lo sumo n .

La siguiente definición será el principal objeto de estudio de este primer capítulo y será crucial para comprender futuros conceptos que irán apareciendo a lo largo de esta Memoria:

Definición 1.1 *Un polinomio trigonométrico (en principio, con coeficientes complejos) de grado (exacto) n es una función de la forma*

$$T_n(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \quad a_k, b_k \in \mathbb{C}, \quad |a_n| + |b_n| > 0.$$

Cuando $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ para todo $k = 1, \dots, n$ se dirá que el polinomio trigonométrico es real.

Salvo que se diga lo contrario, los polinomios trigonométricos que se considerarán en esta Memoria serán reales. El espacio de polinomios trigonométricos será denotado por \mathcal{T} y \mathcal{T}_n hará referencia al subespacio vectorial de polinomios trigonométricos de grado a lo sumo n , siendo n de nuevo un entero no negativo:

$$\mathcal{T}_n = \text{span} \{1, \cos \theta, \sin \theta, \dots, \cos n\theta, \sin n\theta\}.$$

Obsérvese que $\dim(\mathcal{T}_n) = 2n + 1$.

Supongamos que $T_n \in \mathcal{T}_n$ es un polinomio trigonométrico complejo. Usando la transformación $z = e^{i\theta}$ se sigue de las fórmulas de Euler y de Moivre que $T_n(\theta) = L_n(e^{i\theta})$ donde L_n se puede expresar de la forma

$$L_n(z) = \sum_{k=-n}^n c_k z^k. \tag{1.1}$$

En efecto, haciendo

$$z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad \text{y} \quad \bar{z} = e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$$

se sigue que $\cos \theta = \frac{z+\bar{z}}{2}$ y $\sin \theta = \frac{z-\bar{z}}{2i}$. De igual manera, de

$$z^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad \text{y} \quad \bar{z}^n = e^{-in\theta} = \cos n\theta - i \sin n\theta$$

obtenemos que $\cos n\theta = \frac{z^n+\bar{z}^n}{2}$ y $\sin n\theta = \frac{z^n-\bar{z}^n}{2i}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} T_n(\theta) &= a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \frac{z^k+\bar{z}^k}{2} + b_k \frac{z^k-\bar{z}^k}{2i} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \left[\left(\frac{a_k-ib_k}{2} \right) e^{ik\theta} + \left(\frac{a_k+ib_k}{2} \right) e^{-ik\theta} \right], \end{aligned}$$

deduciendo así la relación

$$c_0 = a_0, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Vemos por tanto que el polinomio trigonométrico T_n es real, sí y sólo sí, $c_{-k} = \bar{c}_k$, para todo $k \geq 0$.

De manera natural hemos relacionado polinomios trigonométricos con polinomios de Laurent. Estos últimos jugarán un papel fundamental también a lo largo de esta Memoria. Así, denotaremos por Λ al espacio vectorial complejo de todos los polinomios de Laurent, es decir, $\Lambda = \mathbb{C}[z, z^{-1}]$, y dados $p, q \in \mathbb{Z}$ con $p \leq q$, $\Lambda_{p,q} = \text{span} \{z^k : p \leq k \leq q\}$ denotará el subespacio vectorial complejo de polinomios de Laurent de la forma

$$L_n(z) = \sum_{j=p}^q \alpha_j z^j, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}.$$

Observamos que $\dim(\Lambda_{p,q}) = q - p + 1$ y que L_n dado en (1.1) pertenece a $\Lambda_{-n,n}$.

Por otro lado, se dice que una sucesión doblemente infinita $\{\mu_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ de números complejos es “Hermitiana” si $\mu_{-k} = \bar{\mu}_k$. Así, un polinomio de Laurent $L \in \Lambda_{-n,n}$ se dice que es Hermitiano si la sucesión de sus coeficientes es Hermitiana. De esta manera, para los polinomios de Laurent L_n dados en (1.1) que provienen de un polinomio trigonométrico real $T_n \in \mathcal{T}_n$ mediante la transformación $z = e^{i\theta}$, se tiene que $c_k = \bar{c}_k$ para $k = 1, \dots, n$ y $c_0 \in \mathbb{R}$, por lo que queda probado el siguiente

Teorema 1.2 *Sea $T_n \in \mathcal{T}_n$ un polinomio trigonométrico complejo de grado n , y sea $L_n \in \Lambda_{-n,n}$ verificando $L_n(e^{i\theta}) = T_n(\theta)$. Entonces, T_n es real, sí y sólo sí, L_n es Hermitiano.*

Observación 1.3 *Si definimos*

$$\Lambda_n^H = \{L \in \Lambda_{-n,n} : L \text{ es Hermitiano}\},$$

entonces Λ_n^H es un espacio vectorial real de dimensión $2n+1$ y el subespacio \mathcal{T}_n de polinomios trigonométricos reales de grado n se puede expresar en la forma

$$\mathcal{T}_n = \{T(\theta) : T(\theta) = L(e^{i\theta}) \quad \text{con} \quad L \in \Lambda_n^H\}.$$

A continuación estudiaremos la relación existente entre polinomios trigonométricos y ciertos polinomios algebraicos. Para ello, pensemos primero que la transformación $z = e^{i\theta}$ conecta biyectivamente el intervalo $(-\pi, \pi]$ con la circunferencia unidad $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Como es bien sabido, cuando trabajamos con polinomios algebraicos con coeficientes reales, los ceros se encuentran situados en la recta real o son complejos conjugados. Un número complejo es real si es un punto fijo de la involución $z \rightarrow z_* = \bar{z}$, por lo que podemos caracterizar a la recta real según $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : z = z_*\}$. Observamos que esta involución sub-estrella transforma a un número complejo en su imagen a través de un “espejo” situado en la recta real.

Como hemos visto que vamos a trabajar con polinomios algebraicos evaluados en la circunferencia unidad (obsérvese que $L_n \in \Lambda_{-n,n}$, sí y sólo sí, $L_n(z) = \frac{P_{2n}(z)}{z^n}$ con $P_{2n} \in \mathbb{P}_{2n}$), necesitamos una simetría similar a la expuesta anteriormente en \mathbb{R} , ahora para \mathbb{T} . Es decir, necesitamos definir una involución $z \rightarrow z_*$ que cumpla $z \in \mathbb{T}$, sí y sólo sí, $z = z_*$, la cual puede obtenerse claramente considerando $z_* = 1/\bar{z}$ si $z \neq 0$. Esta simetría requiere que si reemplazamos los ceros no nulos α_k por sus imágenes a través del “espejo” situado en \mathbb{T} , es decir, α_{k*} , entonces debemos recuperar el mismo polinomio. Más concretamente, asumiendo que $\alpha_k \neq 0$ para todo $k = 1, \dots, n$, entonces

$$\begin{aligned} P(z) &= \nu \prod_{k=1}^n (z - \alpha_k) = \nu \prod_{k=1}^n \left(z - \frac{1}{\alpha_k}\right) \\ &= \nu c z^n \prod_{k=1}^n \overline{\left(\frac{1}{z} - \alpha_k\right)} = \frac{\nu}{\bar{\nu}} c z^n \overline{P(z_*)} = \tau P^*(z), \end{aligned}$$

con $c = \prod_{k=1}^n \frac{-1}{\alpha_k} \in \mathbb{T}$, $\tau = \frac{\nu}{\bar{\nu}} c \in \mathbb{T}$ y donde hemos introducido la notación $P^*(z) = z^n \overline{P(z_*)} = z^n \overline{P(1/\bar{z})}$.

De este modo, supongamos que P_n es un polinomio de grado exacto n con coeficientes complejos:

$$P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j, \quad a_j \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} P^*(z) &= z^n \overline{\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n}\right)} = z^n \left(\overline{a_0} + \frac{\overline{a_1}}{z} + \dots + \frac{\overline{a_n}}{z^n}\right) \\ &= \overline{a_n} + \overline{a_{n-1}}z + \dots + \overline{a_0}z^n = \sum_{j=0}^n \overline{a_{n-j}}z^j, \end{aligned}$$

polinomio que tendrá grado a lo sumo n .

Definición 1.4 Al polinomio $P^*(z) = z^n \overline{P(1/\bar{z})} \in \mathbb{P}_n$ se le denomina *polinomio recíproco de $P \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$* .

Nótese que el polinomio P^* se obtiene a partir del polinomio P cambiando sus coeficientes de orden y conjugándolos. Además, $P(0) \neq 0$, sí y sólo sí, $P^* \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$, y si $\alpha \neq 0$, $P(\alpha) = 0$, sí y sólo sí, $P^*(1/\bar{\alpha}) = 0$.

De lo expuesto anteriormente se sigue que nuestro interés será trabajar con los polinomios algebraicos evaluados en la circunferencia unidad que se introducen en la siguiente

Definición 1.5 Un polinomio P de grado exacto n se dice "*k* - invariante", con $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si

$$P^*(z) = kP(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Del mismo modo, un polinomio se dirá que es invariante si es *k* - invariante, para algún $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Obsérvese que si $P \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$ es un polinomio *k* - invariante, entonces $P(0) \neq 0$ (si $P(0) = 0$, entonces P^* tendría grado menor estricto que n , y por tanto no podría coincidir con P , salvo factor multiplicativo). De la Definición 1.5 se concluye inmediatamente que si P es un polinomio invariante, entonces $z = 0$ no es un cero de P .

Aunque los polinomios invariantes se suelen introducir en la literatura para $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (véase, por ejemplo [4]), realmente sólo tienen sentido cuando $k \in \mathbb{T}$, tal y como se demuestra en el siguiente

Lema 1.6 Si P es un polinomio *k* - invariante, entonces $k \in \mathbb{T}$.

Demostración.- Si $P(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k$, $c_n \neq 0$ es *k* - invariante, entonces $c_0 = P(0) \neq 0$, $\overline{c_n} = kc_0$ y $\overline{c_0} = kc_n$. Consecuentemente, $k = \frac{\overline{c_n}}{c_0} = \frac{\overline{c_0}}{c_n}$, lo que implica que $|c_n| = |c_0|$, y por tanto, $k \in \mathbb{T}$.

□

Un caso particular de polinomios invariantes vienen dados en la siguiente

Definición 1.7 Se dice que un polinomio P es *autorrecíproco* si es $\{1\}$ -invariante, es decir, si $P(z) = P^*(z)$.

Como consecuencia de estas definiciones se tiene el siguiente

Lema 1.8 Sea P un polinomio invariante. Entonces

1. α es un cero de P , sí y sólo sí, $1/\bar{\alpha}$ es un cero de P .
2. Si P es un polinomio de grado impar (par), entonces tiene un número impar (par) de ceros en \mathbb{T} (contando multiplicidades).
3. Si P es un polinomio k -invariante, entonces existe una constante $\lambda = \lambda(k) \in \mathbb{C}$ tal que $Q(z) = \lambda P(z)$ es autorrecíproco.

Demostración.- El punto 1 se sigue directamente de la definición de polinomio invariante y 2 es una consecuencia inmediata de 1. Solo resta probar 3. Para ello, sea $P(z) = \sum_{j=0}^n c_j z^j = c_n \prod_{k=1}^n (z - z_k)$, entonces $|P(0)| = |c_0| = |c_n| \prod_{k=1}^n |z_k|$ y teniendo en cuenta que $\prod_{k=1}^n |z_k| = 1$, se sigue que $|c_0| = |c_n|$. Consecuentemente, $c_n = k\bar{c}_0$ con $|k| = 1$. Sea $k = e^{i\omega}$, $\omega \in \mathbb{R}$ y definimos $Q(z) = \lambda P(z)$, $\lambda \neq 0$. Entonces, $Q^*(z) = z^n \overline{Q(z)} = z^n \overline{\lambda P(z)} = \bar{\lambda} P^*(z) = \bar{\lambda} k P(z) = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} k \lambda P(z) = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} k Q(z)$, esto es, $Q(z)$ es $\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} k$ -invariante. Haciendo ahora $\lambda = Re^{i\gamma}$, se tiene que $\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} k = e^{(\omega-2\gamma)}$. Por tanto, tomando $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma = \frac{\omega}{2} + m\pi$, con $m \in \mathbb{Z}$, se tiene que $\frac{\bar{\lambda}}{\lambda} k = e^{i(\omega-\omega-2m\pi)} = e^{i(-2m\pi)} = 1$ y $Q(z)$ es $\{1\}$ -invariante. □

El interés de considerar polinomios autorrecíprocos evaluados en la circunferencia unidad se sigue de la representación $T_n \in \mathcal{T}_n \setminus \mathcal{T}_{n-1}$, sí y sólo sí, $T_n(\theta) = L_n(z) = \frac{P_{2n}(z)}{z^n}$ con $L_n \in \Lambda_{-n,n}$, $z = e^{i\theta}$ y $P_{2n} \in \mathbb{P}_{2n} \setminus \mathbb{P}_{2n-1}$ expuesta anteriormente. Si T_n es real, sabemos que $L_n \in \Lambda_n^H$, por lo que

$$\begin{aligned} L_n(z) &= \sum_{k=-n}^n c_k z^k = \frac{\bar{c}_n}{z^n} + \frac{\bar{c}_{n-1}}{z^{n-1}} + \cdots + \frac{\bar{c}_1}{z} + c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n \\ &= \frac{\bar{c}_n + \bar{c}_{n-1}z + \cdots + c_0 z^n + c_1 z^{n+1} + \cdots + c_n z^{2n}}{z^n} = \frac{P_{2n}(z)}{z^n}. \end{aligned}$$

Hemos probado por tanto la siguiente

Proposición 1.9 $T_n \in \mathcal{T}_n \setminus \mathcal{T}_{n-1}$ es real, sí y sólo sí, $T_n(\theta) = L_n(z) = \frac{P_{2n}(z)}{z^n}$ con $P_{2n} \in \mathbb{P}_{2n} \setminus \mathbb{P}_{2n-1}$ un polinomio (con coeficientes en general complejos) autorrecíproco.

El interés de vincular polinomios trigonométricos con ciertos polinomios definidos en la circunferencia unidad nos va a permitir demostrar propiedades para polinomios trigonométricos a partir de propiedades conocidas para polinomios algebraicos. Este será precisamente uno de los objetivos fundamentales de esta Memoria.

Comenzamos así primero abordando el estudio de los ceros de polinomios trigonométricos. Sean α y β constantes arbitrarias, entonces

$$\sin\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta - \beta}{2}\right) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right) - \cos\left(\theta - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) \right]$$

representa un polinomio trigonométrico de grado uno. De ahí, se prueba fácilmente por inducción que la función

$$T(\theta) = C \prod_{j=1}^n \sin\left(\frac{\theta - \theta_{2j-1}}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta - \theta_{2j}}{2}\right), \quad C \neq 0, \quad (1.2)$$

donde $\{\theta_j\}_{j=1}^{2n}$ son constantes, representa un polinomio trigonométrico de grado n . Veamos el recíproco, es decir, que todo polinomio trigonométrico $T \in \mathcal{T}_n$ puede ser factorizado como (1.2). En efecto, sea $T_n \in \mathcal{T}_n$, entonces $T_n(\theta) = L_n(e^{i\theta}) = \frac{P_{2n}(z)}{z^n}$, con $L_n \in \Lambda_n^H$ y $P_{2n}(z) \in \mathbb{P}_{2n} \setminus \mathbb{P}_{2n-1}$ un polinomio autorrecíproco de grado $2n$. Además, podemos escribir $P_{2n}(z) = c_n \prod_{k=1}^{2n} (z - z_k)$, $c_n \neq 0$, donde $\{z_k\}_{k=1}^{2n}$ son las raíces de P_{2n} (contando multiplicidades) y $z_j \neq 0$. Si $z_j \notin \mathbb{T}$, entonces $1/\bar{z}_j$ es también una raíz de P_{2n} . Sea $2m$ el número de ceros de P_{2n} en \mathbb{T} ($0 \leq m \leq n$). Entonces,

$$P_{2n}(z) = c_n \prod_{j=1}^{2m} (z - z_j) \prod_{k=1}^{n-m} (z - \tilde{z}_k) \left(z - \frac{1}{\tilde{z}_k}\right), \quad c_n \neq 0 \quad (1.3)$$

donde $z_j = e^{i\theta_j}$, $\theta_j \in \mathbb{R}$ para $1 \leq j \leq 2m$ son los ceros de P_{2n} en \mathbb{T} y $\{\tilde{z}_k, \frac{1}{\tilde{z}_k}\}_{k=1}^{n-m}$ son los ceros de P_{2n} que no están en \mathbb{T} , por lo que $\tilde{z}_k = e^{iw_k}$, con $w_k \in \mathbb{C}$ y $\frac{1}{\tilde{z}_k} = e^{i\bar{w}_k}$. Además, vemos que se verifica que

$$e^{i\theta} - e^{i\omega} = 2i \sin\left(\frac{\theta - \omega}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta + \omega}{2}\right)}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} e^{i\theta} - e^{i\omega} &= \cos \theta + i \sin \theta - (\cos \omega + i \sin \omega) = \cos \theta - \cos \omega + i(\sin \theta - \sin \omega) \\ &= -2 \sin\left(\frac{\theta + \omega}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta - \omega}{2}\right) + 2i \cos\left(\frac{\theta + \omega}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta - \omega}{2}\right) \\ &= 2i \sin\left(\frac{\theta - \omega}{2}\right) \left[i \sin\left(\frac{\theta + \omega}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta + \omega}{2}\right)\right] = 2i \sin\left(\frac{\theta - \omega}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta + \omega}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Así, teniendo en cuenta lo anterior:

$$\begin{aligned} P_{2n}(e^{i\theta}) &= c_n \prod_{j=1}^{2m} (e^{i\theta} - e^{i\theta_j}) \prod_{k=1}^{n-m} (e^{i\theta} - e^{iw_k}) (e^{i\theta} - e^{i\bar{w}_k}) \\ &= c_n 4^n (-1)^n \prod_{j=1}^{2m} \sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta + \theta_j}{2}\right)} \prod_{k=1}^{n-m} \sin\left(\frac{\theta - \omega_k}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta - \bar{\omega}_k}{2}\right) e^{i\left(\theta + \frac{\omega_k + \bar{\omega}_k}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Entonces, se sigue que,

$$P_{2n}(e^{i\theta}) = \lambda_n e^{in\theta} \prod_{j=1}^{2m} \sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right) \prod_{k=1}^{n-m} \sin\left(\frac{\theta - \omega_k}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta - \bar{\omega}_k}{2}\right), \quad \lambda_n \neq 0.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} T_n(\theta) &= L_n(e^{i\theta}) = \frac{P_{2n}(e^{i\theta})}{e^{in\theta}} \\ &= \lambda_n \prod_{j=1}^{2m} \sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right) \prod_{k=1}^{n-m} \sin\left(\frac{\theta - \omega_k}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta - \bar{\omega}_k}{2}\right), \end{aligned}$$

donde $\lambda_n \neq 0$, $\theta_j \in \mathbb{R}$ y $\omega_k \in \mathbb{C}$ tal que $\Re(\omega_k) = \psi_k + 2t\pi$, $\psi_k \in (-\pi, \pi]$, $t \in \mathbb{Z}$ para $k = 1, \dots, n - m$. Por lo tanto, queda demostrado el siguiente

Teorema 1.10 *Un polinomio trigonométrico real $T_n \in \mathcal{T}_n \setminus \mathcal{T}_{n-1}$ tiene exactamente $2n$ ceros, contándolos como es usual con sus multiplicidades y restringiéndolos a la banda $-\pi < \Re(\theta) \leq \pi$. Además, los ceros no reales aparecen en pares conjugados.*

Observación 1.11 *Obviamente, la representación (1.2) no es única.*

Una aplicación más del vínculo entre polinomios trigonométricos y polinomios autorrecíprocos viene dado por el siguiente resultado que puede obtenerse de (1.2) y (1.3),

Teorema 1.12 (Riesz-Féjer) *Una función trigonométrica real $T_n \in \mathcal{T}$ es no negativa para todo $\theta \in \mathbb{R}$, sí y sólo sí, puede ser escrita de la forma*

$$T_n(\theta) = |g(z)|^2, \quad z = e^{i\theta},$$

donde g es un polinomio algebraico del mismo grado que T_n .

Demostración.- Asumemos que T_n es un polinomio trigonométrico real de grado n , por lo que $T_n(\theta) = \frac{P_{2n}(e^{i\theta})}{e^{in\theta}}$, con P_{2n} un polinomio de grado $2n$ autorrecíproco. Si $T_n(\theta) \geq 0$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$, entonces los posibles ceros reales de T_n deben tener multiplicidad par. Además, si $\theta = \alpha$ es un cero real de T_n entonces $z = e^{i\alpha}$ es un cero de $P_{2n}(z)$ en \mathbb{T} . Por lo tanto, de (1.3), P_{2n} puede ser escrito como:

$$P_{2n}(z) = \lambda_n p_m^2(z) q_{n-m}(z) q_{n-m}^*(z), \quad \lambda_n \neq 0,$$

donde $p_m \in \mathbb{P}_m$ con $0 \leq m \leq n$ y $q_{n-m} \in \mathbb{P}_{n-m}$. Dado que $T_n(\theta) \geq 0$, para cualquier valor de $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T_n(\theta) &= |T_n(\theta)| = \left| \frac{P_{2n}(e^{i\theta})}{e^{in\theta}} \right| = |\lambda_n| |p_m^2(e^{i\theta})| |q_{n-m}(e^{i\theta})| |\overline{q_{n-m}^*(e^{i\theta})}| \\ &= |\lambda_n| |p_m(e^{i\theta})|^2 |q_{n-m}(e^{i\theta})|^2 = |g(e^{i\theta})|^2, \end{aligned}$$

donde $g(z) = \sqrt{|\lambda_n|} p_m(z) q_{n-m}(z) \in \mathbb{P}_n$.

Recíprocamente, si g es un polinomio algebraico de grado n , entonces haciendo $z = e^{i\theta}$ se sigue que:

$$|g(z)|^2 = g(z)\overline{g(z)} = \frac{g(z)g^*(z)}{z^n} = \frac{P_{2n}(z)}{z^n},$$

donde $P_{2n}(z) = g(z)g^*(z)$ es claramente un polinomio autorrecíproco de grado $2n$, por lo que $|g(z)|^2 = L_n(z) \in \Lambda_n^H$, y de (1.2), $|g(z)|^2$ representa un polinomio trigonométrico de grado n , que es claramente no negativo para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

□

Interpolación por polinomios trigonométricos

Como es bien sabido, la interpolación encuentra en la construcción de fórmulas de cuadratura una de sus aplicaciones más inmediatas. Dado que estamos interesados en fórmulas de cuadratura de tipo interpolatorio que sean exactas en espacios de polinomios trigonométricos (de utilidad, por ejemplo, cuando se desean aproximar integrales con respecto a una función peso y un integrando periódico), estableceremos en esta sección resultados de interpolación a partir de la relación ya conocida entre los polinomios trigonométricos y los polinomios de Laurent Hermitianos o polinomios algebraicos autorrecíprocos abordados en el Capítulo 1. Comenzaremos por el siguiente

Teorema 2.1 *Dados $2n + 1$ nodos distintos $\{\theta_j\}_{j=1}^{2n+1} \subset (-\pi, \pi]$, existe un único $T_n \in \mathcal{T}_n$ tal que*

$$T_n(\theta_j) = y_j, \quad j = 1, \dots, 2n + 1, \quad (2.1)$$

siendo $\{y_j\}_{j=1}^{2n+1}$ un conjunto de números reales.

Demostración.- Sea $T_n(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$. Veamos primero que las constantes $\{a_k, b_k\}_{k=0}^n$ quedan únicamente determinadas de las condiciones (2.1).

En efecto, se tiene que $T_n(\theta) = L_n(e^{i\theta})$ con $L_n \in \Lambda_n^H$, por lo que (2.1) es equivalente a que

$$L_n(z_j) = y_j, \quad z_j = e^{i\theta_j}, \quad j = 1, \dots, 2n + 1. \quad (2.2)$$

Como $L_n \in \Lambda_n^H$, entonces $L_n(z) = \frac{P_{2n}(z)}{z^n}$, $P_{2n} \in \mathbb{P}_{2n}$, de (2.2) se sigue que

$$P_{2n}(z_j) = z_j^n y_j, \quad j = 1, \dots, 2n + 1. \quad (2.3)$$

Dado que $z_j \neq z_k$, P_{2n} queda únicamente determinado por (2.3) y por tanto T_n cumple las condiciones de interpolación (existe) y además es único. Faltaría por ver que T_n tiene coeficientes reales. Esto lo comprobaremos viendo que P_{2n} es un polinomio autorrecíproco. Para ello, veamos que P_{2n}^* también satisface las condiciones de interpolación (2.3):

$$P^*(z_j) = z_j^{2n} \overline{P(1/\overline{z_j})} = z_j^{2n} \overline{P(z_j)} = z_j^{2n} \overline{z_j^n y_j} = z_j^n y_j, \quad y_j \in \mathbb{R}.$$

Así, en virtud de la unicidad del polinomio P_{2n} , se sigue que $P_{2n}^*(z) = P_{2n}(z)$, dando por finalizada la demostración. \square

Corolario 2.2 *El conjunto de las funciones $\{1, \cos \theta, \sin \theta, \dots, \cos n\theta, \sin n\theta\}$ es linealmente independiente.*

Demostración.- Sea

$$a_0 + a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta + \dots + a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta = 0,$$

con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ y sean $\{x_i\}_{i=1}^{2n+1}$, $x_i \neq x_j$, $x_i \in (-\pi, \pi]$ arbitrarios. Consideramos el problema de interpolación: buscar $T \in \mathcal{T}_n$ tal que

$$T(x_i) = 0, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.$$

Por el Teorema 2.1 sabemos que existe una única solución que evidentemente es la solución trivial $T \equiv 0$. Se concluye por tanto que $a_0 = a_1 = \dots = a_n = b_1 = \dots = b_n = 0$. \square

El Teorema 2.1 prueba la existencia y unicidad de un polinomio trigonométrico real que interpola a una función real en un número impar de nodos. En cuanto a la computación del mismo, una vía podría ser computando P_{2n} , a partir de las condiciones de interpolación (2.3), bien mediante la fórmula de Newton, o bien mediante la fórmula de Lagrange. A continuación presentamos una vía alternativa que se corresponde con la versión trigonométrica de la fórmula de Lagrange.

Escribamos $T_n \in \mathcal{T}_n$ de tal manera que satisfaga (2.1) en la forma

$$T_n(\theta) = \sum_{j=1}^{2n+1} l_j(\theta) y_j,$$

donde $l_j(\theta) = l_{j,n}(\theta) \in \mathcal{T}_n$ tal que

$$l_j(\theta_k) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1, & \text{si } j = k, \\ 0, & \text{si } j \neq k \end{cases}$$

(símbolo delta de Kronecker).

Los polinomios trigonométricos l_j son la versión trigonométrica de los polinomios fundamentales de Lagrange.

Dado $l_j(\theta_k) = 0$, para $k = 1, \dots, 2n+1$, $k \neq j$, se ve claro que

$$l_j(\theta) = \lambda_j \prod_{k=1, k \neq j}^{2n+1} \sin\left(\frac{\theta - \theta_k}{2}\right) \in \mathcal{T}_n, \quad \lambda_j \neq 0,$$

con λ_j una constante tal que $l_j(\theta_j) = 1$. Más precisamente, tomando

$$W_n(\theta) = \prod_{k=1}^{2n+1} \sin\left(\frac{\theta - \theta_k}{2}\right)$$

(función trigonométrica nodal), se sigue que

$$l_j(\theta) = \lambda_j \frac{W_n(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right)}, \quad j = 1, \dots, 2n + 1.$$

Por lo tanto, haciendo uso de infinitésimos equivalentes:

$$1 = l_j(\theta_j) = \lambda_j \lim_{\theta \rightarrow \theta_j} \frac{W_n(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right)} = \lambda_j \lim_{\theta \rightarrow \theta_j} \frac{W_n(\theta)}{\frac{\theta - \theta_j}{2}} = 2\lambda_j W'_n(\theta_j).$$

Así, haciendo $\lambda_j = \frac{1}{2W'_n(\theta_j)}$ se tiene que $l_j(\theta_j) = 1$ y podemos escribir

$$l_j(\theta) = \frac{W_n(\theta)}{2W'_n(\theta_j) \sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right)} \in \mathcal{T}_n, \quad j = 1, \dots, 2n + 1.$$

Ejemplo 2.3 Consideremos un conjunto de 5 nodos distintos $\{\theta_j\}_{j=1}^5$ ($n=2$), tal que $\theta_1 = \frac{-5\pi}{6}$, $\theta_2 = \frac{-\pi}{2}$, $\theta_3 = \frac{-\pi}{6}$, $\theta_4 = \frac{\pi}{4}$ y $\theta_5 = \frac{2\pi}{3}$. Planteamos buscar un polinomio $T_2 \in \mathcal{T}_n(\mathbb{R})$ tal que $T_2(\theta_i) = y_i$, para todo $i = 1, \dots, 5$, donde $y_1 = -4$, $y_2 = \frac{1}{2}$, $y_3 = 2$, $y_4 = 3$ e $y_5 = 20$. Procederemos de dos maneras diferentes. En primer lugar, vía fórmula de Lagrange trigonométrica, donde utilizaremos las fórmulas introducidas en esta sección y teniendo en cuenta que si

$$W_n(\theta) = \prod_{k=1}^{2n+1} \sin\left(\frac{\theta - \theta_k}{2}\right), \quad \text{entonces} \quad W'_n(\theta_j) = \frac{1}{2} \prod_{i=1, i \neq j}^{2n+1} \sin\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2}\right).$$

En segundo lugar, trabajaremos con la relación ya vista en el Capítulo 1, esto es, $T_2(\theta) = L_2(e^{i\theta}) = \frac{P_4(z)}{z^2}$, siendo $P_4 \in \mathbb{P}_4$ un polinomio autorrecíproco. Por lo tanto, el problema dado sería equivalente a resolver $L_2(z_j) = y_j$, sí y sólo sí, $P_4(z_j) = z_j^2 y_j = \tilde{y}_j$, donde $z_j = e^{i\theta_j}$. Para ello, se puede utilizar el método de Lagrange “algebraico” o la fórmula de Newton basada en diferencias divididas, obteniendo así el polinomio $P_4 \in \mathbb{P}_4$, y por tanto, nuestra solución T_2 deshaciendo el cambio de variable.

Solución 1: Fórmula de Lagrange trigonométrica.

Para esta primera solución, hemos de tener en cuenta que

$$T_2(\theta) = \sum_{j=1}^5 l_j(\theta)y_j, \quad \text{donde} \quad l_j(\theta) = \frac{W_2(\theta)}{2W'_n(\theta_j) \sin\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right)}.$$

Así, obtenemos los siguientes polinomios fundamentales de Lagrange trigonométricos l_j :

$$l_1(\theta) \simeq \frac{W_2(\theta)}{0.3035667523 \sin\left(\frac{\theta+\frac{5\pi}{6}}{2}\right)} = \frac{1}{0.3035667523} \prod_{k=2}^5 \sin\left(\frac{\theta-\theta_k}{2}\right)$$

$$l_2(\theta) \simeq \frac{W_2(\theta)}{-0.223099774 \sin\left(\frac{\theta+\frac{\pi}{2}}{2}\right)} = -\frac{1}{0.223099774} \prod_{k=1, k \neq 2}^5 \sin\left(\frac{\theta-\theta_k}{2}\right)$$

$$l_3(\theta) \simeq \frac{W_2(\theta)}{0.25461943 \sin\left(\frac{\theta+\frac{\pi}{6}}{2}\right)} = \frac{1}{0.25461943} \prod_{k=1, k \neq 3}^5 \sin\left(\frac{\theta-\theta_k}{2}\right)$$

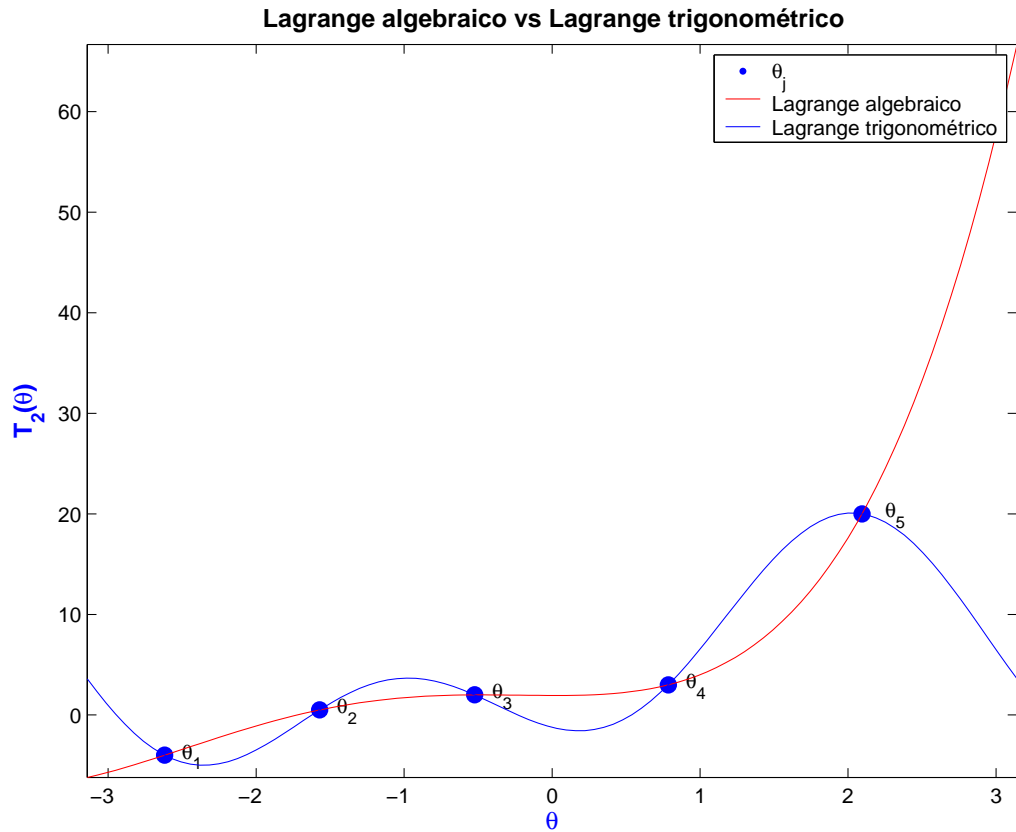
$$l_4(\theta) \simeq \frac{W_2(\theta)}{-0.33945184 \sin\left(\frac{\theta-\frac{\pi}{4}}{2}\right)} = -\frac{1}{0.33945184} \prod_{k=1, k \neq 4}^5 \sin\left(\frac{\theta-\theta_k}{2}\right)$$

$$l_5(\theta) \simeq \frac{W_2(\theta)}{0.401624026 \sin\left(\frac{\theta-\frac{2\pi}{3}}{2}\right)} = \frac{1}{0.401624026} \prod_{k=1}^4 \sin\left(\frac{\theta-\theta_k}{2}\right),$$

donde $W_2(\theta) = \prod_{k=1}^5 \sin\left(\frac{\theta-\theta_k}{2}\right)$. Por lo tanto, se tiene que el polinomio trigonométrico buscado es

$$T_2(\theta) = \sum_{i=0}^5 y_i l_i(\theta) = -4l_1(\theta) + \frac{1}{2}l_2(\theta) + 2l_3(\theta) + 3l_4(\theta) + 20l_5(\theta).$$

Presentamos a continuación una gráfica realizada mediante el software matemático Matlab donde se observa una comparación entre el polinomio interpolador calculado mediante la fórmula de Lagrange algebraica y el polinomio trigonométrico real T_2 calculado mediante la fórmula de Lagrange trigonométrica.



En esta gráfica podemos observar diversas características de cada una de las funciones interpolantes. En primer lugar, vemos que el polinomio algebraico interpolador, que hemos calculado mediante la fórmula de Lagrange algebraica (trazo en color rojo) tiende a oscilar mucho más que el polinomio trigonométrico (trazo en color azul), que hemos computado mediante la fórmula de Lagrange trigonométrica. Precisamente esta es la razón por la que la interpolación polinómica deja de ser recomendable si el número de datos es elevado (a medida que el grado aumenta las funciones polinómicas son cada vez más oscilantes), siendo necesaria la búsqueda de otras funciones interpolantes, como puede ser el uso de funciones spline, polinomios trigonométricos (para datos periódicos) o funciones racionales (reproducción de funciones con singularidades próximas al intervalo donde se encuentran los datos). Por otra parte, el polinomio trigonométrico además de ser una función periódica, no presenta grandes oscilaciones y puede extenderse periódicamente a toda la recta real con clase infinito ($C^\infty(\mathbb{R})$).

Solución 2: Fórmula de Newton.

El objetivo es encontrar un polinomio $P_4 \in \mathbb{P}_4$ tal que $P_4(z_j) = z_j^2 y_j = \tilde{y}_j$, donde $z_j = e^{i\theta_j}$, para todo $j = 1, \dots, 5$. El primer paso será hallar las cantidades \tilde{y}_j :

$$\tilde{y}_1 = P_4(z_1) = P_4(e^{-\frac{5\pi}{6}i}) = e^{-\frac{5\pi}{3}i}(-4) = -4 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = -2(1 + \sqrt{3}i),$$

$$\tilde{y}_2 = P_4(z_2) = P_4(e^{-\frac{\pi}{2}i}) = e^{-\pi i} \frac{1}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$\tilde{y}_3 = P_4(z_3) = P_4(e^{-\frac{\pi}{6}i}) = e^{-\frac{\pi}{3}i} 2 = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 - \sqrt{3}i,$$

$$\tilde{y}_4 = P_4(z_4) = P_4(e^{\frac{\pi}{4}i}) = e^{\frac{\pi}{2}i} 3 = 3i,$$

$$\tilde{y}_5 = P_4(z_5) = P_4(e^{\frac{2\pi}{3}i}) = e^{\frac{4\pi}{3}i} 20 = 20 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 10(-1 - \sqrt{3}i).$$

A continuación, se construye la tabla de diferencias divididas:

$$\begin{array}{l} z_1 \tilde{y}_1 \\ > f[\tilde{y}_1 \quad \tilde{y}_2] \\ z_2 \tilde{y}_2 \\ > f[\tilde{y}_1 \quad \tilde{y}_2 \quad \tilde{y}_3] \\ > f[\tilde{y}_2 \quad \tilde{y}_3] \\ > f[\tilde{y}_1 \quad \tilde{y}_2 \quad \tilde{y}_3 \quad \tilde{y}_4] \\ z_3 \tilde{y}_3 \\ > f[\tilde{y}_2 \quad \tilde{y}_3 \quad \tilde{y}_4] \\ > f[\tilde{y}_1 \quad \tilde{y}_2 \quad \tilde{y}_3 \quad \tilde{y}_4 \quad \tilde{y}_5]. \\ > f[\tilde{y}_3 \quad \tilde{y}_4] \\ > f[\tilde{y}_2 \quad \tilde{y}_3 \quad \tilde{y}_4 \quad \tilde{y}_5] \\ z_4 \tilde{y}_4 \\ > f[\tilde{y}_3 \quad \tilde{y}_4 \quad \tilde{y}_5] \\ > f[\tilde{y}_4 \quad \tilde{y}_5] \\ z_5 \tilde{y}_5 \end{array}$$

Una vez más, haciendo uso de Matlab, se han obtenido los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
f[\tilde{y}_1 \quad \tilde{y}_2] &= -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{15}{4}i, & f[\tilde{y}_2 \quad \tilde{y}_3] &= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{9}{4}i, \\
f[\tilde{y}_3 \quad \tilde{y}_4] &\simeq 3.9605775098 + 0.3070072039i, \\
f[\tilde{y}_4 \quad \tilde{y}_5] &\simeq 5.9646437213 + 17.6193203216i, \\
f[\tilde{y}_1 \quad \tilde{y}_2 \quad \tilde{y}_3] &= \frac{1}{2} - 2\sqrt{3}i, \\
f[\tilde{y}_2 \quad \tilde{y}_3 \quad \tilde{y}_4] &\simeq 2.0090861946 - 1.2342088725i, \\
f[\tilde{y}_3 \quad \tilde{y}_4 \quad \tilde{y}_5] &\simeq 5.6032072551 - 7.0702855437i, \\
f[\tilde{y}_1 \quad \tilde{y}_2 \quad \tilde{y}_3 \quad \tilde{y}_4] &\simeq 1.2883778843 + 0.4288788114i, \\
f[\tilde{y}_2 \quad \tilde{y}_3 \quad \tilde{y}_4 \quad \tilde{y}_5] &\simeq -3.3995592534 - 1.0151745147i, \\
f[\tilde{y}_1 \quad \tilde{y}_2 \quad \tilde{y}_3 \quad \tilde{y}_4 \quad \tilde{y}_5] &\simeq -1.8442588058 + 2.9376405098i.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}
P_4(z) &= \tilde{y}_1 + f[\tilde{y}_1 \quad \tilde{y}_2](z - z_1) + f[\tilde{y}_1 \quad \tilde{y}_2 \quad \tilde{y}_3](z - z_1)(z - z_2) \\
&\quad + f[\tilde{y}_1 \quad \tilde{y}_2 \quad \tilde{y}_3 \quad \tilde{y}_4](z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \\
&\quad + f[\tilde{y}_1 \quad \tilde{y}_2 \quad \tilde{y}_3 \quad \tilde{y}_4 \quad \tilde{y}_5](z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4).
\end{aligned}$$

Ahora, se desarrolla el polinomio P_4 para expresarlo en la forma $P_4(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e$ y así facilitar la obtención del polinomio trigonométrico deseado:

$$\begin{aligned}
P_4(z) &\simeq z^4(-1.8443 + 2.9376i) + z^3(-1.2056 - 4.0328i) + z^2 4.8770 \\
&\quad + z(-1.2056 + 4.0328i) - 1.8443 - 2.9376i \\
&= z^4 c_2 + z^3 c_1 + z^2 c_0 + z \bar{c}_1 + \bar{c}_2.
\end{aligned}$$

Vemos efectivamente que el polinomio obtenido es autorrecíproco. Además, sabemos que

$$L_2(z) = \frac{P_4(z)}{z^2} = \frac{\bar{c}_2}{z^2} + \frac{\bar{c}_1}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 = T_2(\theta), \quad \text{con } z = e^{i\theta}.$$

Para calcular los coeficientes del polinomio trigonométrico real T_2 , hemos de hallar a_0, a_1, b_1, a_2 y b_2 teniendo en cuenta las relaciones

$$c_0 = a_0, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad k = 1, 2.$$

Así, se llega a que $a_0 \simeq 4.8770$, $a_1 \simeq -2.4112$, $b_1 \simeq 8.0640$, $a_2 \simeq -3.6886$ y $b_2 \simeq -5.8752$. Finalmente, se obtiene

$$T_2(\theta) \simeq 4.8770 - 2.41412 \cos(\theta) + 8.0640 \sin(\theta) - 3.6886 \cos(2\theta) - 5.8752 \sin(2\theta).$$

Cuando tratemos la construcción de ciertas fórmulas de cuadratura que integren exactamente funciones trigonométricas del mayor grado posible, el siguiente resultado será requerido. Se trata de la generalización al caso trigonométrico del problema de interpolación de Hermite. Sin embargo, aquí va a ser necesario realizar una modificación técnica, debido al hecho de que $\dim(\mathcal{T}_n) = 2n + 1$ (siempre impar). El número de condiciones de interpolación deberá ser por tanto también impar, algo que solventaremos eliminando una condición de interpolación a la primera derivada en un solo nodo prefijado de antemano.

Teorema 2.4 Sea $\{\theta_j\}_{j=1}^{n+1}$ un conjunto de $(n + 1)$ nodos distintos en $(-\pi, \pi]$ y $k \in \{1, \dots, n + 1\}$ una cantidad fija. Entonces existe un único polinomio trigonométrico $H_n \in \mathcal{T}_n$ verificando las siguientes condiciones:

$$\left. \begin{aligned} H_n(\theta_j) &= H_n^{(k)}(\theta_j) = y_j, & j &= 1, \dots, n + 1 \\ H'_n(\theta_j) &= H_n^{(k)'}(\theta_j) = y'_j, & j &= 1, \dots, n + 1, j \neq k \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

donde $\{y_j\}_{j=1}^{n+1} \cup \{y'_j\}_{j=1, j \neq k}^{n+1}$ es un conjunto de $(2n + 1)$ números reales.

Demostración.- Sea $H_n(\theta) = L_n(e^{i\theta}) \in \Lambda_{-n,n}$. Entonces, teniendo en cuenta las condiciones (2.4), $H_n(\theta_j) = L_n(e^{i\theta_j}) = L(z_j) = y_j$, con $z_j = e^{i\theta_j} \in \mathbb{T}$, para todo $j = 1, \dots, n + 1$ y $z_j \neq z_i$ si $j \neq i$. Por otro lado, $H'_n(\theta) = L'_n(e^{i\theta})ie^{i\theta}$, lo que implica que $L'_n(z_j) = -i\bar{z}_j H'_n(\theta_j) = -i\bar{z}_j y'_j$ para $j = 1, \dots, n + 1$ y $j \neq k$. Como $L_n \in \Lambda_{-n,n}$, entonces $L_n(z) = \frac{P_{2n}(z)}{z^n}$, con $P_{2n} \in \mathbb{P}_{2n}$ tal que $P_{2n}(z_j) = z_j^n L_n(z_j) = z_j^n H_n(\theta_j) = z_j^n y_j$, $y_j \in \mathbb{R}$ y $z_j \in \mathbb{T}$. Además, $P'_{2n}(z) = nz^{n-1}L_n(z) + z^n L'_n(z)$, luego

$$P'_{2n}(z_j) = nz_j^{n-1}L_n(z_j) + z_j^n L'_n(z_j) = z_j^{n-1} (ny_j - iy'_j), \quad j = 1, \dots, n+1, \quad j \neq k.$$

Así, nuestro problema de tipo Hermite se reduce a encontrar $P_{2n} \in \mathbb{P}_{2n}$ tal que

$$\left. \begin{aligned} P_{2n}(z_j) &= z_j^n y_j, & j &= 1, \dots, n + 1 \\ P'_{2n}(z_j) &= z_j^{n-1} (ny_j - iy'_j), & j &= 1, \dots, n + 1, j \neq k \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Ahora, dado que $z_j \neq z_l$ para $j \neq l$, es bien sabido que el problema de interpolación (2.5) tiene una solución única $P_{2n}(z)$ y $H_n(\theta) = L_n(e^{i\theta}) = \frac{P_{2n}(e^{i\theta})}{e^{in\theta}}$ será la única solución de (2.4). Para concluir la demostración faltaría ver que $H_n(\theta)$ tiene coeficientes reales. Para ello, al igual que se hizo en el Teorema 2.1, comprobaremos que P_{2n}^* es también una solución de (2.5) y así, debido a la unicidad,

se tendrá que $P_{2n}(z) = P_{2n}^*(z)$ y al ser P_{2n} autorrecíproco concluiríamos que H_n es real. En efecto,

$$\begin{aligned} P_{2n}^*(z_j) &= z_j^{2n} \overline{P_{2n}(1/\bar{z}_j)} = z_j^{2n} \overline{P_{2n}(z_j)} \\ &= z_j^{2n} \overline{z_j^n y_j} = z_j^n y_j = P_{2n}(z_j), \quad j = 1, \dots, n+1. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. No obstante, observamos que

$$(P_{2n}^*)'(z) = 2nz^{2n-1} \overline{P_{2n}(1/\bar{z})} + z^{2n} (\overline{P_{2n}})'(1/\bar{z}) \left(-\frac{1}{\bar{z}^2}\right),$$

por lo que

$$(P_{2n}^*)'(z_j) = z_j^{2n-2} \left[2nz_j \overline{P_{2n}(z_j)} - \overline{P_{2n}'(z_j)} \right].$$

Aquí, se utilizó que $(\overline{P})'(z) = \overline{P'(z)}$. Además, para $j = 1, \dots, n+1$, $j \neq k$:

$$\begin{aligned} (P_{2n}^*)'(z_j) &= z_j^{2n-2} \left[2nz_j \overline{z_j^n y_j} - z_j^{-(n-1)} (ny_j + iy_j') \right] \\ &= z_j^{n-1} (2ny_j - ny_j - iy_j') = z_j^{n-1} (ny_j - iy_j') = P_{2n}'(z_j). \end{aligned}$$

□

En cuanto a una representación explícita del polinomio trigonométrico interpolador H_n que satisfaga (2.4) (solución del Teorema 2.4), en virtud de la unicidad se puede escribir para cualquier $k \in \{1, \dots, n+1\}$ prefijado,

$$H_n(\theta) = H_n^{(k)}(\theta) = t_k^{(k)}(\theta)y_k + \sum_{j=1, j \neq k}^{n+1} [t_j^{(k)}(\theta)y_j + s_j^{(k)}(\theta)y_j']$$

donde $t_j^{(k)}(\theta)$ y $s_j^{(k)}(\theta)$ son polinomios trigonométricos en \mathcal{T}_n , tales que

$$t_j^{(k)}(\theta_r) = \delta_{j,r}, \quad 1 \leq j, \quad r \leq n+1$$

$$(t_j^{(k)})'(\theta_r) = 0, \quad 1 \leq j, \quad r \leq n+1, \quad r \neq k$$

$$s_j^{(k)}(\theta_r) = 0, \quad 1 \leq r \leq n+1, \quad j \neq k$$

$$(s_j^{(k)})'(\theta_r) = \delta_{j,r}, \quad 1 \leq j, \quad r \leq n+1, \quad r \neq k, \quad j \neq k.$$

Definamos la función trigonométrica nodal $W_n(\theta) = \prod_{j=1}^{n+1} \sin\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right)$. Si se procede de igual manera que en el caso anterior, después de algunos cálculos algo

tediosos pero elementales (que no incluiremos en esta Memoria) se deducen las siguientes expresiones para polinomios trigonométricos con $1 \leq j \leq n+1$, $j \neq k$:

$$s_j^{(k)}(\theta) = \frac{W_n^2(\theta) \sin\left(\frac{\theta_j - \theta_k}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta - \theta_k}{2}\right) [W_n'(\theta_j)]^2} \in \mathcal{T}_n,$$

$$t_j^{(k)}(\theta) = \frac{W_n^2(\theta)}{2 \sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\theta - \theta_k}{2}\right) [W_n'(\theta_j)]^2} \times \\ \times \left[\sin\left(\frac{\theta_j - \theta_k}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta_j - \theta_k}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right) \right] \in \mathcal{T}_n$$

y

$$t_k^{(k)}(\theta) = \left[\frac{W_n(\theta)}{2W_n'(\theta_k) \sin\left(\frac{\theta - \theta_k}{2}\right)} \right]^2 \in \mathcal{T}_n.$$

Para finalizar esta sección nos ocuparemos de ciertos problemas de interpolación usando un número par $2n$ de nodos en subespacios $\tilde{\mathcal{T}}_n$ de \mathcal{T}_n , cuya dimensión es $2n$. Por ejemplo, $\tilde{\mathcal{T}}_n = \mathcal{T}_n \setminus \text{span}\{\cos n\theta\}$ ó $\tilde{\mathcal{T}}_n = \mathcal{T}_n \setminus \text{span}\{\sin n\theta\}$. Al respecto cabe recordar que un sistema de funciones continuas $\{f_0, \dots, f_m\}$ en un intervalo $[a, b]$ representa un sistema de Haar en $[a, b]$, sí y sólo sí, para cualquier k , $1 \leq k \leq m$, $\{f_0, \dots, f_k\}$ es un sistema de Chebyshev en $[a, b]$. Un sistema de Chebyshev es aquel subespacio para el cual podemos obtener solución única al problema de interpolación. Por ejemplo, se tiene que $\mathbb{P}_n = \text{span}\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ es un sistema de Chebyshev, puesto que dado $\{x_j\}_{j=0}^n$, un conjunto de $n+1$ nodos, $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ y $\{y_j\}_{j=0}^n$ cantidades reales cualesquiera, entonces, existe un único $P \in \mathbb{P}_n$ tal que $P(x_i) = y_i$. Es evidente por tanto que \mathbb{P}_n es también un sistema de Haar en $[a, b]$. Por otra parte, ya hemos demostrado que \mathcal{T}_n es también un sistema de Chebyshev, por el Teorema 2.1 (precisamente haciendo uso de la conexión existente entre polinomios trigonométricos y polinomios algebraicos autorrecíprocos). Sin embargo, este último no es un sistema de Haar en $[-\pi, \pi]$, puesto que sin ir más lejos, $\{1, \cos \theta\}$ no es un sistema de Chebyshev. En efecto, sea $\tilde{\mathcal{T}}_1 = \{1, \cos \theta\}$, donde $\dim(\tilde{\mathcal{T}}_1) = 2$ y consideremos los puntos del plano $P_1 = (x_0, y_0)$ y $P_2 = (x_1, y_1)$ con $x_0 \neq x_1$ y $x_i \in (-\pi, \pi]$. El objetivo es encontrar $T_1(\theta) = a + b \cos \theta$, con $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $T_1(x_0) = y_0$ y $T_1(x_1) = y_1$. Por lo tanto, se tiene que verificar el siguiente sistema para cualquier valor de x_0, x_1, y_0 e y_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos x_0 \\ 1 & \cos x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Como el determinante de la matriz de coeficientes es $\cos x_1 - \cos x_0$, no podemos asegurar, en general, que este sea no nulo. Por ejemplo, tomando $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, e $y_0 \neq y_1$, obtendremos un sistema incompatible.

Una vez visto esto, se concluye que $\{1, \cos \theta, \sin \theta, \dots, \cos n\theta, \sin n\theta\}$ no puede ser un sistema de Haar en $(-\pi, \pi]$. Por lo tanto, no podemos asumir inicialmente que dados $2n$ nodos distintos $\{\theta_j\}_{j=1}^{2n}$ en $(-\pi, \pi]$ exista $T_n \in$

$\mathcal{T}_n \setminus \text{span}\{\cos n\theta\}$ o en $\mathcal{T}_n \setminus \text{span}\{\sin n\theta\}$ tal que $T_n(\theta) = y_j$, para todo $j = 1, \dots, 2n$. Sin embargo, se puede demostrar el siguiente

Teorema 2.5 Sean $\{\theta_j\}_{j=1}^{2n} \subset (-\pi, \pi]$ un conjunto de $2n$ nodos distintos y $\{y_j\}_{j=1}^{2n}$ números reales arbitrarios. Consideremos el problema de interpolación que consiste en hallar $\tilde{T}_n \in \tilde{\mathcal{T}}_n$ tal que

$$\tilde{T}_n(\theta_j) = y_j, \quad j = 1, \dots, 2n. \quad (2.6)$$

Se sigue que,

1. Si $\sum_{j=1}^{2n} \theta_j \neq k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, entonces (2.6) tiene una única solución tanto en $\tilde{\mathcal{T}}_n = \mathcal{T}_n \setminus \text{span}\{\cos n\theta\}$ como en $\tilde{\mathcal{T}}_n = \mathcal{T}_n \setminus \text{span}\{\sin n\theta\}$.
2. Si $\sum_{j=1}^{2n} \theta_j = k\pi$ para algún número entero impar k , entonces (2.6) tiene una única solución en $\tilde{\mathcal{T}}_n = \mathcal{T}_n \setminus \text{span}\{\cos n\theta\}$.
3. Si $\sum_{j=1}^{2n} \theta_j = k\pi$ para algún número entero par k , entonces (2.6) tiene una única solución en $\tilde{\mathcal{T}}_n = \mathcal{T}_n \setminus \text{span}\{\sin n\theta\}$.

Demostración.- En primer lugar, se buscará $\tilde{T}_n(\theta) \in \mathcal{T}_n \setminus \text{span}\{\sin n\theta\}$ verificando (2.6). Así, podemos escribir:

$$\tilde{T}_n(\theta) = a_0 + \sum_{j=1}^{n-1} (a_j \cos j\theta + b_j \sin j\theta) + a_n \cos n\theta = L_n(e^{i\theta}) \in \Lambda_{-n,n},$$

con $L_n(z) = \sum_{j=-n}^n c_j z^j$, donde

$$c_j = \frac{a_j - ib_j}{2}, \quad c_{-j} = \bar{c}_j, \quad 1 \leq j \leq n-1, \quad c_0 = a_0.$$

Además, $c_n = \frac{a_n}{2} \in \mathbb{R}$, luego $c_{-j} = \bar{c}_j$ para todo $0 \leq j \leq n$. Haciendo como es usual $z_j = e^{i\theta_j}$ para cualquier $j = 1, \dots, 2n$, ($z_j \neq z_k$ si $j \neq k$), las condiciones (2.6) se convierten en

$$\tilde{T}_n(\theta_j) = L_n(e^{i\theta_j}) = L_n(z_j) = y_j, \quad j = 1, \dots, 2n,$$

dando lugar al siguiente sistema lineal:

$$\sum_{k=-(n-1)}^{n-1} c_k z_j^k + c_n (z_j^n + z_j^{-n}) = y_j, \quad j = 1, \dots, 2n. \quad (2.7)$$

Ahora, el sistema (2.7) tiene una única solución, sí y sólo sí, $\Delta_n \neq 0$, donde

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} z_1^{-(n-1)} & z_1^{-(n-2)} & \cdots & 1 & \cdots & z_1^{n-1} & (z_1^n + z_1^{-n}) \\ z_2^{-(n-1)} & z_2^{-(n-2)} & \cdots & 1 & \cdots & z_2^{n-1} & (z_2^n + z_2^{-n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z_{2n}^{-(n-1)} & z_{2n}^{-(n-2)} & \cdots & 1 & \cdots & z_{2n}^{n-1} & (z_{2n}^n + z_{2n}^{-n}) \end{vmatrix}.$$

Introduciendo en determinante de Vandermonde asociado a z_1, \dots, z_{2n} , es decir,

$$V_{2n} = V_{2n}(z_1, \dots, z_{2n}) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{2n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{2n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_{2n} & \cdots & z_{2n}^{2n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

puede fácilmente comprobarse que

$$\Delta_n = (z_1 \cdots z_{2n})^{n-1} (1 - z_1 \cdots z_{2n}) V_{2n}. \quad (2.8)$$

Por otro lado, si consideramos nuestro problema de interpolación en $\tilde{T}_n(\theta) \in \mathcal{T}_n \setminus \text{span}\{\cos n\theta\}$, el determinante $\tilde{\Delta}_n$ asociado del correspondiente sistema verifica que

$$\tilde{\Delta}_n = (z_1 \cdots z_{2n})^{n-1} (1 + z_1 \cdots z_{2n}) V_{2n}. \quad (2.9)$$

Si $z_j = e^{i\theta_j}$, entonces $z_1 \cdots z_{2n} = e^{i\lambda_n}$, con $\lambda_n = \sum_{j=1}^{2n} \theta_j$. En el caso de que $\lambda_n \neq k\pi$ para cualquier entero k , entonces claramente $z_1 \cdots z_{2n} \neq \pm 1$ y dado que $V_{2n} \neq 0$, de (2.8) y (2.9) se deduce que ambos determinantes Δ_n y $\tilde{\Delta}_n$ no se anulan, lo que implica que el problema de interpolación (2.6) tiene una única solución tanto en $\mathcal{T}_n \setminus \text{span}\{\sin n\theta\}$ como en $\mathcal{T}_n \setminus \text{span}\{\cos n\theta\}$. Ahora, supongamos que $\lambda_n = k\pi$ para algún entero k . Así,

1. Si $\lambda_n = k\pi$ con k par, entonces $e^{i\lambda_n} = 1$ y $\tilde{\Delta}_n \neq 0$, $\Delta_n \neq 0$.
2. Si $\lambda_n = k\pi$ con k impar, entonces $e^{i\lambda_n} = -1$ y $\tilde{\Delta}_n = 0$, $\Delta_n \neq 0$.

Por ejemplo, si $\Delta_n \neq 0$, habremos encontrado un único $L_n \in \Lambda_{-n,n}$, $L_n(z) = \sum_{j=-n}^n c_j z^j$ tal que $c_{-n} = c_n$ y verificando que $L_n(z_j) = y_j$ para $j = 1, \dots, 2n$. Por tanto, $\tilde{T}_n(\theta) = L_n(e^{i\theta}) \in \mathcal{T}_n \setminus \text{span}\{\sin n\theta\}$ y $\tilde{T}_n(\theta_j) = y_j$ para $j = 1, \dots, 2n$. Para comprobar que $\tilde{T}_n(\theta)$ es un polinomio trigonométrico real se procede de igual manera que en el (2.1). □

A continuación, veremos una representación de tipo Lagrange del polinomio trigonométrico \tilde{T}_n verificando las condiciones del Teorema 2.5. Sea

$$\eta_n = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n} \theta_j = \frac{1}{2} \lambda_n$$

y supongamos que $\eta_n \neq k\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, por lo que $\Delta_n \neq 0$. Así, $\tilde{T}_n \in \mathcal{T}_n \setminus \text{span}\{\sin n\theta\}$ y en virtud de la unicidad, se tiene que $\tilde{T}_n(\theta) = \sum_{j=1}^{2n} \tilde{t}_j(\theta) y_j$, donde $\tilde{t}_j(\theta_k) = \delta_{j,k}$ para $1 \leq j, k \leq 2n$. Fijamos $j \in \{1, \dots, 2n\}$ y definimos $\alpha_j = \sum_{k=1, k \neq j}^{2n} \theta_k$. Ahora, podemos escribir $\tilde{s}_j(\theta) = \frac{\tilde{l}_j(e^{i\theta})}{e^{in\theta}}$ donde $\tilde{l}_j(z) \in \mathbb{P}_{2n}$ tal que $\tilde{l}_j(z_k) = z_j^n \delta_{j,k}$ tomando, como es usual, $z_k = e^{i\theta_k}$ para todo $k = 1, \dots, 2n$. Dado que $\tilde{t}_j \in \mathcal{T}_n \setminus \text{span}\{\sin n\theta\}$, el coeficiente principal de $\tilde{l}_j(z)$ debe coincidir con $l_j(0)$, obteniendo así que $l_j(z) = c_j(z - w_j) \prod_{k=1, k \neq j}^{2n} (z - z_k) = c_j z^{2n} + \dots + \tilde{l}_j(0)$. Ya que $\tilde{l}_j(0) = c_j w_j \prod_{k=1, k \neq j}^{2n} z_k$, entonces

$$w_j = \frac{1}{\prod_{k=1, k \neq j}^{2n} z_k} = \prod_{k=1}^{2n} \bar{z}_k = e^{-\sum_{k=1, k \neq j}^{2n} \theta_k} = e^{-i\alpha_j}.$$

Por lo tanto, se sigue que

$$\tilde{s}_j(\theta) = \tilde{c}_j \sin\left(\frac{\theta + \alpha_j}{2}\right) \prod_{k=1, k \neq j}^{2n} \sin\left(\frac{\theta - \theta_k}{2}\right),$$

donde \tilde{c}_j viene determinado tal que $\tilde{s}_j(\theta_j) = 1$. Haciendo

$$W_n(\theta) = \prod_{j=1}^{2n} \sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right) \in \mathcal{T}_n,$$

se tiene que

$$\tilde{s}_j(\theta) = \tilde{c}_j \sin\left(\frac{\theta + \alpha_j}{2}\right) \frac{W_n(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right)}.$$

Ahora,

$$1 = \lim_{\theta \rightarrow \theta_j} \tilde{c}_j \sin\left(\frac{\theta + \alpha_j}{2}\right) \frac{W_n(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right)} = 2\tilde{c}_j \sin\left(\frac{\theta_j + \alpha_j}{2}\right) W_n'(\theta_j).$$

Obsérvese que $\frac{1}{2}(\theta_j + \alpha_j) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n} \theta_j = \eta_n \neq k\pi$ para todo k entero, por lo que $\sin\left(\frac{\theta_j + \alpha_j}{2}\right) = \sin \eta_n \neq 0$ y por lo tanto

$$\tilde{s}_j(\theta) = \frac{1}{2W_n'(\theta_j) \sin \eta_n} \sin\left(\frac{\theta + \alpha_j}{2}\right) \frac{W_n(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right)}, \quad j = 1, \dots, 2n. \quad (2.10)$$

Cuando hablamos del polinomio interpolador $\tilde{T}_n \in \mathcal{T}_n \setminus \text{span}\{\cos n\theta\}$ es fácil comprobar que el polinomio trigonométrico fundamental de Lagrange $\tilde{s}_j(\theta)$ viene dado por

$$\tilde{s}_j(\theta) = \frac{1}{2W_n'(\theta_j) \cos \eta_n} \cos\left(\frac{\theta + \alpha_j}{2}\right) \frac{W_n(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right)}, \quad j = 1, \dots, 2n. \quad (2.11)$$

Sistemas bi-ortogonales de polinomios trigonométricos

Comenzaremos este capítulo definiendo los sistemas bi-ortogonales de polinomios trigonométricos que serán de utilidad para caracterizar fórmulas de cuadratura para integrandos 2π -periódicos con máximo grado de precisión trigonométrico alcanzable, lo cual se tratará en mayor profundidad en el capítulo siguiente. Además, se verá en la tercera sección cómo construir dichos sistemas a partir de los polinomios de Szegő, que serán introducidos en la segunda sección de este capítulo.

3.1. Sistemas bi-ortogonales de polinomios trigonométricos

Sea ω una función peso en $(-\pi, \pi]$, es decir, $\omega \geq 0$ en $(-\pi, \pi]$ y $0 < \int_{-\pi}^{\pi} \omega(\theta) d\theta < \infty$. El propósito de esta sección será considerar bases ortogonales para el espacio \mathcal{T} de polinomios trigonométricos reales con respecto al producto interior en \mathcal{T} inducido por ω , esto es,

$$\langle f, g \rangle_{\omega} = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \overline{g(\theta)} \omega(\theta) d\theta, \quad \forall f, g \in \mathcal{T}. \quad (3.1)$$

Se podría considerar una medida arbitraria $d\mu$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$, sin embargo para nuestros propósitos nos restringiremos al caso en el que $d\mu$ es absolutamente continua y por tanto $d\mu(\theta) = \omega(\theta) d\theta$. Además, como trataremos únicamente con funciones reales evaluadas, la conjugación compleja en (3.1) será omitida.

Consideremos la base $\mathcal{B} = \{1, \cos \theta, \sin \theta, \dots, \cos n\theta, \sin n\theta\}$ de \mathcal{T}_n en primer lugar, que es linealmente independiente (Corolario 2.2) y es claramente ortogonal para la medida de Lebesgue $\omega \equiv 1$ en $[-\pi, \pi]$, puesto que para todo $f, g \in \mathcal{B}$, con $f \neq g$ se tiene que $\langle f, g \rangle = 0$, debido a que para todo $n, m \in \mathbb{N}$ se verifican las relaciones

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta) \sin(m\theta) d\theta = 0,$

2. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\theta) \sin(m\theta) d\theta = \pi \delta_{n,m}$ (recordemos que $\delta_{n,m}$ denota el símbolo delta de Kronecker).

Nuestro objetivo será extender dicha propiedad a una función peso ω arbitraria. Esto se puede conseguir ortogonalizando el sistema ordenado de funciones

$$\mathcal{B} = \{1, \cos \theta, \sin \theta, \dots, \cos n\theta, \sin n\theta\}$$

mediante proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt. Así, generamos el conjunto $\{f_0, f_1, g_1, \dots, f_n, g_n\}$ de polinomios trigonométricos, que generan el mismo espacio que \mathcal{T}_n tal que f_0 es una constante no nula (considérese sin pérdida de generalidad $f_0 > 0$),

$$f_1 \in \text{span}\{1, \cos \theta\}, g_1 \in \text{span}\{1, \cos \theta, \sin \theta\}, f_2 \in \text{span}\{1, \cos \theta, \sin \theta, \cos 2\theta\},$$

$$g_2 \in \text{span}\{1, \cos \theta, \sin \theta, \cos 2\theta, \sin 2\theta\}, \dots, f_n \in \mathcal{T}_n \setminus \text{span}\{\sin n\theta\}, g_n \in \mathcal{T}_n,$$

y además, para $j, k = 0, 1, \dots, n$,

$$\langle f_j, f_k \rangle_{\omega} = \kappa_j \delta_{j,k}, \quad \kappa_j > 0,$$

$$\langle g_j, g_k \rangle_{\omega} = \kappa'_j \delta_{j,k}, \quad \kappa'_j > 0, \quad (3.2)$$

$$\langle f_j, g_k \rangle_{\omega} = 0.$$

Si repetimos el proceso para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f_0 \cup \{f_k, g_k\}_{k=1}^{\infty}$ representa una base ortogonal para \mathcal{T} con respecto a ω . Escribiendo

$$f_0 = a_{0,0} \neq 0,$$

$$f_j = a_{j,0} + \sum_{k=1}^j (a_{j,k} \cos k\theta + b_{j,k} \sin k\theta),$$

$$g_j = c_{j,0} + \sum_{k=1}^j (c_{j,k} \cos k\theta + d_{j,k} \sin k\theta),$$

entonces, debido a la independencia lineal (que nos asegura el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt) se sigue claramente que

$$\begin{vmatrix} a_{j,j} & b_{j,j} \\ c_{j,j} & d_{j,j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{j,j} & 0 \\ c_{j,j} & d_{j,j} \end{vmatrix} \neq 0, \quad j \geq 1.$$

Por otro lado, también se tiene el siguiente

Teorema 3.1 Sea $f_0 \cup \{f_k, g_k\}_{k=1}^{\infty}$ un sistema de funciones trigonométricas tal que $f_0 \equiv c \neq 0$ y para $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} f_n(\theta) &= a_{n,0} + \sum_{k=1}^n (a_{n,k} \cos k\theta + b_{n,k} \sin k\theta), \\ g_n(\theta) &= c_{n,0} + \sum_{k=1}^n (c_{n,k} \cos k\theta + d_{n,k} \sin k\theta). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Además supongamos que

$$\begin{vmatrix} a_{n,n} & b_{n,n} \\ c_{n,n} & d_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall n \geq 1. \tag{3.4}$$

Entonces, $f_0 \cup \{f_k, g_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una base de \mathcal{T} .

Demostración.- Supongamos que para algún $n \in \mathbb{N}$ dado se cumple que

$$\begin{vmatrix} a_{n,n} & b_{n,n} \\ c_{n,n} & d_{n,n} \end{vmatrix} = 0,$$

y escribamos

$$\begin{aligned} f_n(\theta) &= T_{n-1} + a_{n,n} \cos n\theta + b_{n,n} \sin n\theta, \\ g_n(\theta) &= S_{n-1} + c_{n,n} \cos n\theta + d_{n,n} \sin n\theta, \end{aligned}$$

con $T_{n-1}, S_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$. Veamos en este caso que $\{f_0, f_1, g_1, f_2, g_2, \dots, f_n, g_n\}$ no representa una base de \mathcal{T}_n . En efecto, dado que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} f_n(\theta) &= T_{n-1} + a_{n,n} \cos n\theta + b_{n,n} \sin n\theta, \\ g_n(\theta) &= S_{n-1} + k(a_{n,n} \cos n\theta + b_{n,n} \sin n\theta), \end{aligned}$$

se sigue que $f_n k - g_n \in \mathcal{T}_{n-1}$, es decir, $f_n k - g_n \in \text{span}\{f_0, f_1, g_1, \dots, f_{n-1}, g_{n-1}\}$, si y sólo si, $g_n \in \text{span}\{f_0, f_1, \dots, g_{n-1}, f_n\}$, y por tanto, $\text{span}\{f_0, f_1, \dots, f_n, g_n\}$ no sería un sistema linealmente independiente.

□

Estas consideraciones permiten establecer los siguientes conceptos que serán esenciales para el resto de la Memoria.

Definición 3.2 Dos polinomios trigonométricos de grado n de la forma

$$f(\theta) = a \cos n\theta + b \sin n\theta + \dots, \quad y \quad g(\theta) = c \cos n\theta + d \sin n\theta + \dots$$

se dice que son linealmente independientes si

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Definición 3.3 Sea ω una función peso en $[-\pi, \pi]$ y $f_0 \cup \{f_k, g_k\}_{k=1}^{\infty}$ un sistema de polinomios trigonométricos reales con f_0 una constante no negativa. Se dirá que el sistema es bi-ortogonal con respecto a ω si se verifican las siguientes condiciones:

1. Para todo $n \geq 1$, $f_n, g_n \in \mathcal{T}_n \setminus \mathcal{T}_{n-1}$ son linealmente independientes, es decir, se cumple la Definición 3.2.
2. El sistema es ortogonal con respecto al producto interior inducido por ω , esto es, se satisface (3.2).

Además, el sistema será bi-ortonormal si $|f_0| = 1$ y $\|f_k\|_{\omega} = \|g_k\|_{\omega} = 1$, para todo $k \geq 1$.

Nota 3.4 Téngase en cuenta que la construcción obtenida anteriormente del sistema bi-ortogonal de funciones trigonométricas con respecto a ω como aplicación del proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a la base ordenada $\{1, \cos \theta, \sin \theta, \cos 2\theta, \sin 2\theta, \dots\}$ garantiza automáticamente que el sistema obtenido es linealmente independiente.

La Definición 3.3 admite la posibilidad de considerar un sistema bi-ortogonal con respecto a ω siempre que sus elementos, expresados en la forma (3.3), cumplan la condición (3.4). Es decir, un proceso similar al de ortogonalización de Gram-Schmidt, pero aumentando en cada paso las dimensiones de dos en dos, en vez de en uno en uno, garantizando siempre que en cada paso, las dos nuevas funciones que se suman al sistema son linealmente independientes y cumplen las condiciones de ortogonalidad.

Abordemos a continuación la unicidad de sistemas bi-ortogonales con respecto a la función peso ω . Para ello, consideremos $f_0 \cup \{f_k, g_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\tilde{f}_0 \cup \{\tilde{f}_k, \tilde{g}_k\}_{k=1}^{\infty}$ dos sistemas bi-ortogonales respecto a una función peso ω dada. Debido a que $\tilde{f}_n \in \mathcal{T}_n$ y $f_0 \cup \{f_k, g_k\}_{k=1}^n$ es una base de \mathcal{T}_n , se tiene que existen escalares únicos $\alpha_0, \alpha_j, \beta_j, j = 1, \dots, n$, tales que

$$\tilde{f}_n(\theta) = \alpha_0 f_0 + \sum_{j=1}^n (\alpha_j f_j(\theta) + \beta_j g_j(\theta)).$$

Por otro lado, por las condiciones de bi-ortogonalidad se tiene que $\langle \tilde{f}_n, T \rangle_{\omega} = 0$, para todo $T \in \mathcal{T}_{n-1}$, llegando a que $\tilde{f}_n(\theta) = \alpha_n f_n(\theta) + \beta_n g_n(\theta)$. De manera similar, $\tilde{g}_n(\theta) = \gamma_n f_n(\theta) + \delta_n g_n(\theta)$ para ciertos escalares únicos $\gamma_n, \delta_n \in \mathbb{R}$. Ambas relaciones pueden expresarse en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_n \\ \tilde{g}_n \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix}, \quad M_n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix},$$

con

$$\alpha_n = \frac{\langle \tilde{f}_n, f_n \rangle_\omega}{\|f_n\|_\omega^2}, \quad \beta_n = \frac{\langle \tilde{f}_n, g_n \rangle_\omega}{\|g_n\|_\omega^2}, \quad \gamma_n = \frac{\langle \tilde{g}_n, f_n \rangle_\omega}{\|\tilde{f}_n\|_\omega^2}, \quad \delta_n = \frac{\langle \tilde{g}_n, g_n \rangle_\omega}{\|\tilde{g}_n\|_\omega^2}.$$

Cambiando los papeles de ambos sistemas, se sigue que

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_n \\ \tilde{g}_n \end{pmatrix} = \tilde{M}_n \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{M}_n = M_n^{-1}.$$

Además, cuando se trata de sistemas bi-ortonormales, es decir, $\|f_n\|_\omega = \|g_n\|_\omega = \|\tilde{f}_n\|_\omega = \|\tilde{g}_n\|_\omega = 1$, entonces se verifica, por las expresiones que tienen los coeficientes de Fourier, que $\tilde{M}_n = M_n^{-1} = M_n^T$, esto es, M_n es una matriz ortogonal. Hemos probado así el siguiente

Lema 3.5 *Si $f_0 \cup \{f_k, g_k\}_{k=1}^\infty$ y $\tilde{f}_0 \cup \{\tilde{f}_k, \tilde{g}_k\}_{k=1}^\infty$ son dos sistemas bi-ortonormales con respecto a ω , entonces para todo $n \geq 1$ existe una matriz ortogonal M_n de dimensión 2×2 tal que*

$$\begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix} = M_n \begin{pmatrix} \tilde{f}_n \\ \tilde{g}_n \end{pmatrix}.$$

En lo que resta de sección, nos centraremos en analizar propiedades de los ceros de sistemas bi-ortogonales. Como ya hemos comentado anteriormente, $f_0 \equiv c \neq 0$, $f_n(\theta) = \cos n\theta$, $g_n(\theta) = \sin n\theta$, $n = 1, 2, \dots$ representa un sistema bi-ortogonal con respecto a la medida de Lebesgue $\omega \equiv 1$. Ahora, si $f_n(\theta) = 0$, esto implica que $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $k \in \mathbb{Z}$, mientras que $g_n(\theta) = 0$ implica $\theta = \frac{k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$. Así, tomando $-n \leq k \leq n-1$ y $-(n-1) \leq k \leq n$, respectivamente, se observa que f_n y g_n tienen exactamente $2n$ ceros distintos en $(-\pi, \pi]$. Esta propiedad puede ser generalizada para cualquier función peso ω .

Teorema 3.6 *Sea $f_0 \cup \{f_k, g_k\}_{k=1}^\infty$ un sistema bi-ortogonal para ω y a, b dos números reales no ambos nulos. Entonces el polinomio trigonométrico $T_n(\theta) = af_n(\theta) + bg_n(\theta)$ tiene $2n$ ceros reales y distintos en cualquier intervalo de longitud 2π .*

Demostración.- Para fijar ideas nos restringimos al intervalo $(-\pi, \pi]$. Por el Teorema 1.10 sabemos que T_n tiene $2n$ ceros reales o complejos en la banda $-\pi < \Re(\theta) \leq \pi$. Además, los ceros no reales aparecen en pares conjugados. Sea p el número de ceros de T_n en $(-\pi, \pi]$ con multiplicidad impar ($0 \leq p \leq 2n$). Como p debe ser par, consideramos $p = 2k$, $0 \leq k \leq n$. Asumamos que $k < n$ y definamos

$$U_k(\theta) = \prod_{j=1}^k \sin\left(\frac{\theta - \theta_{2j}}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta - \theta_{2j-1}}{2}\right),$$

donde $\{\theta_j\}_{j=1}^{2k}$ son los ceros de T_n en $(-\pi, \pi]$ con multiplicidad impar (obviamente, si $k = 0$ tomamos $U_k \equiv 1$). Entonces, se puede escribir $T_n(\theta) =$

$af_n(\theta) + bg_n(\theta) = U_k(\theta)V_{n-k}(\theta)$, con $V_{n-k}(\theta) \in \mathcal{T}_{n-k}$ y con signo constante en $(-\pi, \pi]$. Dado que $k < n$, en virtud de la ortogonalidad se sigue por un lado que

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi} T_n(\theta)U_k(\theta)\omega(\theta)d\theta \\ &= a \int_{-\pi}^{\pi} f_n(\theta)U_k(\theta)\omega(\theta)d\theta + b \int_{-\pi}^{\pi} g_n(\theta)U_k(\theta)\omega(\theta)d\theta \\ &= 0, \end{aligned}$$

mientras que por otro lado,

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} U_k^2(\theta)V_{n-k}(\theta)\omega(\theta) \neq 0$$

porque ω es positiva en $(-\pi, \pi]$ y por tanto, el integrando tiene signo constante. De esta contradicción se sigue que debe darse obligatoriamente $k = n$.

□

Introduzcamos a continuación el núcleo reproductor en T_n ,

$$\mathcal{K}_n(\alpha, \theta) = f_0(\alpha)f_0(\theta) + \sum_{k=1}^n [f_k(\alpha)f_k(\theta) + g_k(\alpha)g_k(\theta)]$$

que satisface la siguiente propiedad reproductora

$$T(\alpha) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{K}_n(\alpha, \theta)T(\theta)\omega(\theta)d\theta, \quad \forall T \in \mathcal{T}_n.$$

Por otro lado, Szegő demostró en [6] la siguiente identidad de Christoffel-Darboux para el núcleo reproductor $\mathcal{K}_n(\alpha, \theta)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{n-1}(\alpha, \theta) &= \frac{1}{2} \frac{k_{2n-1}}{k_{2n}} \cot\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) (f_n(\alpha)g_n(\theta) - f_n(\theta)g_n(\alpha)) - \\ &\quad - (r_n f_n(\alpha)f_n(\theta) + s_n g_n(\alpha)g_n(\theta)), \end{aligned} \tag{3.5}$$

para ciertos coeficientes $k_n > 0$, $s_n > 0$ y $r_n \in \mathbb{R}$. De esta identidad es fácil comprobar la correspondiente fórmula confluyente:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{n-1}(\alpha, \alpha) &= \lim_{\theta \rightarrow \alpha} \mathcal{K}_{n-1}(\alpha, \theta) \\ &= \frac{k_{2n-1}}{k_{2n}} (f_n(\alpha)g'_n(\alpha) - f'_n(\alpha)g_n(\alpha)) - (r_n f_n^2(\alpha) + s_n g_n^2(\alpha)). \end{aligned}$$

Haciendo $M_n(\alpha) = (r_n f_n^2(\alpha) + s_n g_n^2(\alpha))$ se obtiene, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$f_n(\alpha)g'_n(\alpha) - f'_n(\alpha)g_n(\alpha) = \frac{k_{2n-1}}{k_{2n}}(M_n(\alpha) + \mathcal{K}_{n-1}(\alpha, \alpha)) > 0, \quad (3.6)$$

puesto que claramente $M_n > 0$ y por definición $\mathcal{K}_{n-1}(\alpha, \alpha) > 0$. Con todo esto estamos en condiciones de probar el siguiente

Teorema 3.7 (Entrelazamiento de ceros) *Bajo las mismas condiciones que en el Teorema 3.6, los ceros de $af_n + bg_n$ y de $-bf_n + ag_n$ se entrelazan.*

Demostración.- Como estamos considerando propiedades de ceros, podemos asumir sin pérdida de generalidad que el sistema $f_0 \cup \{f_k, g_k\}_{k=1}^{\infty}$ es bi-ortonormal. La demostración se sigue fácilmente de la fórmula confluyente (3.6) para las funciones f_n y g_n . Finalmente, consideramos

$$C_n(\theta) = af_n(\theta) + bg_n(\theta), \quad D_n(\theta) = -bf_n(\theta) + ag_n(\theta), \quad |a| + |b| > 0.$$

Entonces,

$$C_n(\alpha)D'_n(\alpha) - C'_n(\alpha)D_n(\alpha) = (a^2 + b^2)(f_n(\theta)g'_n(\theta) - f'_n(\alpha)g_n(\alpha)) > 0$$

concluyendo el entrelazamiento de ceros de las funciones $af_n + bg_n$ y $cf_n + dg_n$. □

Una consecuencia inmediata de los Teoremas 3.6 y 3.7 es el siguiente

Corolario 3.8 *Sea $f_0 \cup \{f_k, g_k\}_{k=1}^{\infty}$ un sistema ortogonal para ω . Entonces,*

1. *Tanto f_n como g_n tienen $2n$ ceros en cualquier intervalo de longitud 2π .*
2. *En cualquier intervalo de longitud 2π , los ceros de f_n y g_n se entrelazan.*

Nota 3.9 *Los Teoremas 3.6 y 3.7 representan generalizaciones al caso trigonométrico de resultados clásicos de la Teoría de Polinomios Ortogonales con respecto a una función peso definida en el Eje Real. De hecho, las demostraciones de estos dos resultados, en su versión trigonométrica, se basan esencialmente en los mismos argumentos que los empleados clásicamente en el Eje Real con polinomios algebraicos.*

3.2. Polinomios de Szegő

Esta sección será dedicada a establecer una breve introducción a la Teoría de Polinomios Ortogonales en la Circunferencia Unidad (o Polinomios de Szegő), que fueron introducidos por primera vez en 1939 en [7]. Recordemos que toda función peso en $[-\pi, \pi]$ induce otra función peso en la circunferencia unidad \mathbb{T} , de tal manera que el producto interior se puede expresar ahora en la forma

$$\langle f, g \rangle_\omega = \int_{\mathbb{T}} f(z) \overline{g(z)} d\tilde{\omega}(z) = \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} \omega(\theta) d\theta. \quad (3.7)$$

Szegő estudió en [7, Capítulo 11] los polinomios ortogonales en la circunferencia unidad con respecto al producto interior (3.7) inducido por una función peso ω en $[-\pi, \pi]$ ó $\tilde{\omega}$ en \mathbb{T} .

Si estuviéramos considerando el producto interior inducido por una función peso ω en $[a, b]$ y tratáramos con funciones reales, se cumpliría $\langle xf, g \rangle_\omega = \langle f, xg \rangle_\omega$. Sin embargo, cuando la función peso está definida en la circunferencia unidad, se hace necesario tomar la conjugación en el producto interior (3.7), verificándose ahora que $\langle zf, g \rangle_\omega = \langle f, \bar{z}g \rangle_\omega = \langle f, \frac{g}{z} \rangle_\omega$, con $z \in \mathbb{T}$ y $\langle f, g \rangle_\omega = \overline{\langle g, f \rangle_\omega}$. Esta observación marcará la diferencia en el desarrollo de la Teoría de Polinomios Ortogonales en la Circunferencia Unidad con respecto a la de los Polinomios Ortogonales en el Eje Real.

Aplicando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a los monomios $1, z, z^2, \dots$, se obtiene una base $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty$ de \mathbb{P} , donde ρ_n son polinomios mónicos para todo $n \geq 0$ tales que:

1. $\rho_n = z^n + \dots \in \mathbb{P}_n \setminus \mathbb{P}_{n-1}$ para todo $n \geq 0$,
2. ρ_n es ortogonal a \mathbb{P}_{n-1} con respecto al producto interior (3.7).

A esta familia de polinómios mónicos ortogonales en \mathbb{T} con respecto al producto interior (3.7) se le conoce como la familia de polinomios mónicos de Szegő.

Estos polinomios poseen propiedades que difieren de las que verifican los polinomios ortogonales en el Eje Real. Por ejemplo, veremos próximamente que sus ceros se encuentran en el disco unidad abierto, es decir, en el interior de \mathbb{T} , pudiendo ser además múltiples. También se tiene que ρ_n cumple por construcción que $\langle \rho_n, z^s \rangle_\omega = 0$, para todo $s = 0, \dots, n-1$. A partir de las condiciones de ortogonalidad de los polinomios de Szegő podemos deducir las siguientes relaciones que verifican sus polinomios recíprocos (Definición 1.4):

$$\langle \rho_n^*(z), z^t \rangle_\omega = \langle z^n \overline{\rho_n(z)}, z^t \rangle_\omega = \langle z^{n-t}, \rho_n(z) \rangle_\omega = \overline{\langle \rho_n(z), z^{n-t} \rangle_\omega} = 0,$$

para todo $t = 1, \dots, n$. Por consiguiente, $\rho_n^*(z) \perp_\omega \{z, z^2, \dots, z^n\}$. Con el fin de enunciar un resultado que establece expresiones determinantaes para los polinomios de Szegő y de sus recíprocos, se introducen los dos conceptos enunciados a continuación que resultan esenciales en la Teoría de Polinomios de Szegő.

Definición 3.10 *Para todo $k \in \mathbb{Z}$, se define el k -ésimo momento trigonométrico como el número complejo*

$$\mu_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-k\theta} \tilde{\omega}(\theta) d\theta = \int_{\mathbb{T}} z^{-k} \omega(z) dz = \langle 1, z^k \rangle_\omega.$$

Obsérvese que $\mu_k = \overline{\mu_{-k}}$, es decir, la sucesión de momentos trigonométricos es Hermitiana.

Definición 3.11 Para todo $n \geq -1$, se define el n -ésimo determinante de Toeplitz como

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \mu_{-2} & \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix}, \quad n \geq 0, \quad \Delta_{-1} \equiv 0.$$

Las matrices de Toeplitz, cuyos determinantes valen Δ_n , son un caso particular de matriz de Gram, y por tanto son definidas positivas, probando así que $\Delta_n > 0$, para todo $n \geq 0$. Estamos en condiciones de demostrar el siguiente

Teorema 3.12 Sean $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ la familia de polinomios mónicos de Szegő para la función peso ω y μ_k el k -ésimo momento trigonométrico correspondiente con $k \in \mathbb{Z}$. Entonces,

$$\rho_0(z) \equiv 1, \quad \rho_n(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix}, \quad n \geq 1 \quad (3.8)$$

y

$$\rho_0^*(z) \equiv 1, \quad \rho_n^*(z) = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_n \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_1 \\ z^n & z^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix}, \quad n \geq 1. \quad (3.9)$$

Demostración.- En primer lugar, se desarrolla por la última fila el determinante que aparece en la expresión (3.8) para ver claramente que es un polinomio mónico de grado n , y teniendo en cuenta que el determinante de una matriz es igual al determinante de su traspuesta, se llega a que

$$\frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_{-1} \\ 1 & z & \cdots & z^n \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_0 \end{vmatrix} z^n + \cdots = z^n + \cdots$$

En segundo lugar, veremos que estos polinomios mónicos son la familia de polinomios ortogonales con respecto a la función peso ω . Para ello, se tendrá en cuenta la linealidad del producto interior considerado en (3.7), obteniendo así

$$\langle \rho_n(x), z^k \rangle_\omega = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_{-1} \\ \langle 1, z^k \rangle_\omega & \langle z, z^k \rangle_\omega & \cdots & \langle z^n, z^k \rangle_\omega \end{vmatrix}.$$

Si $0 \leq k \leq n-1$, entonces $\langle \rho_n(x), z^k \rangle_\omega = 0$ dado que la última fila de la matriz coincide con la fila $(k+1)$ -ésima y si $k = n$, entonces $\langle \rho_n(x), z^n \rangle_\omega = \|\rho_n(z)\|_\omega^2 = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} > 0$. Por lo tanto, la expresión (3.8) coincide con el n -ésimo polinomio mónico de Szegő. De la definición del polinomio recíproco se sigue ahora que

$$\rho_n^*(z) = z^n \overline{\rho_n(1/\bar{z})} = z^n \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_{n-2} & \cdots & \mu_{-1} \\ 1 & \frac{1}{z} & \cdots & \frac{1}{z^n} \end{vmatrix}.$$

Aquí, hemos de tener en cuenta que el conjugado de un determinante es equivalente a realizar el conjugado a cada uno de los elementos de la matriz. Además, como $\{\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es Hermitiana, es fácil comprobar que $\Delta_{n-1} = \overline{\Delta_{n-1}} > 0$. Entonces,

$$\rho_n^*(z) = z^n \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \overline{\mu_0} & \overline{\mu_{-1}} & \cdots & \overline{\mu_{-n}} \\ \overline{\mu_1} & \overline{\mu_0} & \cdots & \overline{\mu_{-n+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\mu_{n-1}} & \overline{\mu_{n-2}} & \cdots & \overline{\mu_{-1}} \\ 1 & \frac{1}{z} & \cdots & \frac{1}{z^n} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta_{n-1}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \cdots & \mu_1 \\ z^n & z^{n-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

llegando así a la expresión dada en (3.9). □

De esta demostración se deduce además que $\langle \rho_n(z), z^n \rangle_\omega = \langle \rho_n^*, 1 \rangle_\omega = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} > 0$, para $n \geq 0$ y así, $\|\rho_n(z)\|_\omega = \|\rho_n^*(z)\|_\omega = \sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}$. Asimismo, se puede observar que el término independiente del polinomio recíproco ρ_n^* es uno, puesto que ρ_n es mónico: $\rho_n^*(0) = 1$, para todo $n \geq 0$.

Pasamos a continuación a demostrar la ley de recurrencia, una propiedad fundamental de la Teoría de Polinomio de Szegő. Recordemos la propiedad ya mencionada al principio de este capítulo: $\langle zf, g \rangle_\omega = \langle f, \bar{z}g \rangle_\omega = \langle f, \frac{g}{z} \rangle_\omega$, $z \in \mathbb{T}$.

Teorema 3.13 (Ley de recurrencia de Szegő) *La familia $\{\rho_n\}_{n=0}^\infty$ de polinomios mónicos de Szegő respecto a la medida ω en \mathbb{T} satisface la siguiente ley de recurrencia*

$$\rho_{n+1}(z) = z\rho_n(z) + \delta_{n+1}\rho_n^*(z) \quad (3.10)$$

con δ_{n+1} dado por

$$\delta_{n+1} = -\frac{\langle z\rho_n, 1 \rangle_\omega}{\langle \rho_n^*, 1 \rangle_\omega}. \quad (3.11)$$

Demostración.- Ya hemos visto que

$$\rho_n \perp \text{span}\{1, z, \dots, z^{n-1}\} \quad \text{y} \quad \rho_n^* \perp \text{span}\{z, \dots, z^n\}.$$

Si consideramos el polinomio mónico $z\rho_n(z) \in \mathbb{P}_{n+1} \setminus \mathbb{P}_n$, entonces

$$\langle z\rho_n(z), z^l \rangle = \langle \rho_n(z), z^{l-1} \rangle = 0 \quad \text{para todo} \quad l-1 \in \{0, \dots, n-1\},$$

es decir, $z\rho_n \perp \text{span}\{z, z^2, \dots, z^n\}$, al igual que ocurre con ρ_n^* . Así, nos encontramos con dos posibilidades:

1. Si $z\rho_n$ es también ortogonal a la constante 1, esto es, $z\rho_n \perp \text{span}\{1, z, \dots, z^{n-1}\}$, entonces debe darse $\rho_{n+1}(z) = z\rho_n(z)$.
2. Si $z\rho_n$ no es ortogonal a la constante 1, es decir, $\langle z\rho_n, 1 \rangle_\omega \neq 0$, definamos $R_{n+1}(z) = z\rho_n(z) + \delta_{n+1}\rho_n^*(z) \in \mathbb{P}_{n+1} \setminus \mathbb{P}_n$, siendo δ_{n+1} una constante arbitraria. Como se cumple $R_{n+1}(z) \perp \text{span}\{z, z^2, \dots, z^n\}$ podemos buscar δ_{n+1} de manera adecuada para que R_{n+1} sea ortogonal también a la constante 1:

$$\langle R_{n+1}, 1 \rangle_\omega = \langle z\rho_n, 1 \rangle_\omega + \delta_{n+1}\langle \rho_n^*, 1 \rangle_\omega = 0.$$

Despejando se tiene (3.11).

Como consecuencia del Teorema 3.12 sabemos que la expresión del denominador es distinta de 0 y por lo tanto δ_{n+1} está bien definido. De esta manera, tenemos que $\rho_{n+1}(z) = z\rho_n(z) + \delta_{n+1}\rho_n^*(z)$.

Obsérvese que la expresión anterior es válida para ambos casos, puesto que en el primer caso se tiene $\langle z\rho_n(z), 1 \rangle_\omega = 0$, que se corresponde con $\delta_{n+1} = 0$.

□

Nota 3.14 La expresión de δ_{n+1} es computable. Considerando $\rho_0 \equiv \rho_0^* \equiv 1$, se tiene que

$$\delta_1 = -\frac{\langle z\rho_0, 1 \rangle_\omega}{\langle \rho_0^*, 1 \rangle_\omega} = -\frac{\mu_1}{\mu_0},$$

lo que permite computar ρ_1 de (3.10). En general, a partir de ρ_n , podemos calcular ρ_n^* y así computar δ_{n+1} a partir de los momentos trigonométricos, de manera que podamos obtener ρ_{n+1} de (3.10): si $\rho_n(z) = \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k$ y $\rho_n^*(k) = \sum_{k=0}^n \overline{\alpha_{n-k}} z^k$, con $z \in \mathbb{T}$, entonces

$$\begin{aligned}\delta_{n+1} &= \frac{-\langle z\rho_n(z), 1 \rangle_\omega}{\langle \rho_n^*(z), 1 \rangle_\omega} = \frac{-\langle z \sum_{k=0}^n \alpha_k z^k, 1 \rangle_\omega}{\langle \sum_{k=0}^n \overline{\alpha_{n-k}} z^k, 1 \rangle_\omega} \\ &= \frac{-\sum_{k=0}^n \alpha_k \langle z^{k+1}, 1 \rangle_\omega}{\sum_{k=0}^n \overline{\alpha_{n-k}} \langle z^k, 1 \rangle_\omega} = \frac{-\sum_{k=0}^n \alpha_k \mu_{-(k+1)}}{\sum_{k=0}^n \overline{\alpha_{n-k}} \mu_{-k}}.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Por otro lado, tomando la operación super estrella en (3.10), se obtiene

$$\rho_{n+1}^*(z) = \overline{\delta_{n+1}} \rho_n(z) + \rho_n^*(z).$$

Así, para computar ambas ecuaciones de manera conjunta se emplea la siguiente expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} \rho_{n+1}(z) \\ \rho_{n+1}^*(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & \delta_{n+1} \\ \overline{\delta_{n+1}} z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_n(z) \\ \rho_n^*(z) \end{pmatrix}.\tag{3.13}$$

Definición 3.15 A $\delta_n = \rho_n(0)$, con $n \geq 0$ se le denomina parámetro de Schur, de Szegő, de reflexión o de Verblunsky (en función del contexto en el que aparezca, existen al menos cuatro terminologías en la literatura).

Con todo esto, enunciamos un último resultado fundamental de la Teoría de Polinomios Ortogonales en la Circunferencia Unidad que trata sobre la localización de ceros de los polinomios de Szegő y que marca la principal diferencia en la Teoría de Polinomios Ortogonales en la Circunferencia Unidad con respecto al Eje Real.

Teorema 3.16 Los ceros de los Polinomios de Szegő de encuentran en $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$. Es decir, $\delta_n \in \mathbb{D}$, para todo $n \geq 1$.

Demostración.- Sea z_0 un cero de ρ_n , es decir, $\rho_n(z_0) = 0$. Entonces,

$$\rho_n(z) = (z - z_0)q_{n-1}(z), \quad q_{n-1} \in \mathbb{P}_{n-1} \setminus \mathbb{P}_{n-2}.$$

Por lo tanto, despejando se tiene $\rho_n(z) + z_0 q_{n-1}(z) = z q_{n-1}(z)$. Aplicando norma a ambos lados y del Teorema de Pitágoras se obtiene desarrollando:

$$\|\rho_n\|^2 + |z_0|^2 \|q_{n-1}\|^2 = \|z q_{n-1}\|^2.$$

Así, se concluye $\|\rho_n\|^2 = (1 - |z_0|^2) \|q_{n-1}\|^2$. Como ambas normas son positivas, esto implica que $1 - |z_0|^2 > 0$, luego $|z_0| < 1$.

□

Ejemplo 3.17 Es fácil demostrar que si $\omega(\theta) \equiv 1$ (medida de Lebesgue), entonces $\rho_n(z) = z^n$, para todo $n \geq 0$, mientras que si $\omega(\theta) = \frac{1}{T(\theta)}$, con $\theta \in [-\pi, \pi]$ y $T(\theta) = |h(z)|^2$, $z = e^{i\theta}$ y $h \in \mathbb{P}_m$ sin ceros en \mathbb{T} (modificación racional de la medida de Lebesgue), entonces $\rho_n(z) = z^{n-m} h(z)$, para todo $n \geq m$.

3.3. Construcción de sistemas bi-ortogonales de polinomios trigonométricos a partir de polinomios de Szegő

El interés de haber considerado en la Sección 3.2 una breve introducción a la Teoría de Polinomios de Szegő se justifica en esta sección, donde probaremos que un sistema bi-ortogonal de polinomios trigonométricos con respecto a una función peso en $[-\pi, \pi]$ puede ser construido a partir de la correspondiente familia de polinomios ortogonales en la circunferencia unidad (polinomios de Szegő) con respecto a la función peso inducida en \mathbb{T} , $\tilde{\omega}$.

Para aclarar ideas, sea $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ la familia de polinomios de Szegő mónicos tal que $\rho_n(z) = z^n + \dots + \delta_n$, para $n = 0, 1, \dots$. Sea $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ una familia de números complejos no negativos, consideremos el polinomio de Laurent $\frac{\omega_n \rho_{2n+1}(z)}{z^n} \in \Lambda_{-(n+1), n+1}$, y separemos esta función en la variable θ ($z = e^{i\theta}$) en su parte real y su parte imaginaria:

$$\omega_n e^{-in\theta} \rho_{2n+1}(e^{i\theta}) = f_{n+1}(\theta) + ig_{n+1}(\theta), \quad (3.14)$$

donde f_{n+1} y g_{n+1} son polinomios trigonométricos reales de grado $n+1$. Entonces se tiene el siguiente (véase [1, Teorema 4.1])

Teorema 3.18 *Sea $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de números complejos tal que para cualquier $n \geq 0$, $\omega_n \neq 0$ y $\omega_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} \rho_{2n+1}(e^{i\theta}) \omega(\theta) d(\theta)$ es un número real. Entonces, $f_0 \cup \{f_k, g_k\}_{k=1}^{\infty}$ dado en (3.14) con $f_0(\theta) = f_0 \neq 0$ representa un sistema de polinomios trigonométricos bi-ortogonal respecto de ω en \mathcal{T} .*

Nota 3.19 *El Teorema 3.18, probado en [1] a partir de los polinomios de Szegő de grado impar es una extensión de un resultado análogo partiendo de polinomios de Szegő de grado par propado por el propio Szegő en [6].*

Ejemplo 3.20 *Tomemos $\omega \equiv 1$ en $[-\pi, \pi]$ (Medida de Lebesgue). Sabemos, por el Ejemplo 3.17 que $\rho_n(z) = z^n$ para $n = 0, 1, \dots$, luego para cualquier $\omega_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:*

$$\omega_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} \rho_{2n+1}(e^{i\theta}) \omega(\theta) d\theta = \omega_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(2n+2)\theta} d\theta = 0.$$

Por lo tanto, podemos considerar cualquier número complejo no negativo ω_n . Sea $\omega_n = \alpha_n + i\beta_n$, $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ y $|\alpha_n| + |\beta_n| > 0$. Entonces, de (3.14) podemos escribir

$$\omega_n e^{-in\theta} \rho_{2n+1}(e^{i\theta}) = (\alpha_n + i\beta_n) e^{-in\theta} e^{i(2n+1)\theta} = f_{n+1}(\theta) + ig_{n+1}(\theta),$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\theta) &= \alpha_n \cos(n+1)\theta - \beta_n \sin(n+1)\theta, \\ g_{n+1}(\theta) &= \beta_n \cos(n+1)\theta + \alpha_n \sin(n+1)\theta. \end{aligned}$$

Más precisamente, haciendo $\omega_n = 1$, para $n = 0, 1, \dots$, se llega a que

$$\tilde{f}_{n+1}(\theta) = \cos(n+1)\theta, \quad \tilde{g}_{n+1}(\theta) = \sin(n+1)\theta.$$

Recuperamos de este modo las ya conocidas propiedades ortogonales de las funciones

$$\{1, \cos \theta, \sin \theta, \dots, \cos n\theta, \sin n\theta, \dots\}$$

con respecto a la función peso $\omega \equiv 1$.

Ejemplo 3.21 Consideramos la función peso $\omega(\theta) = \frac{1}{T(\theta)}$, con $\theta \in [-\pi, \pi]$ y T un polinomio trigonométrico real positivo de grado m (es decir, una modificación racional de la medida de Lebesgue). Por el Teorema 1.12, se puede escribir $T(\theta) = |h(z)|^2$, $z = e^{i\theta}$, donde $h \in \mathbb{P}_m$ es un polinomio algebraico sin ceros en \mathbb{T} . Es más, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que h es un polinomio mónico. Así, los polinomios mónicos de Szegő vienen dados por $\rho_n(z) = z^{n-m}h(z)$, para todo $n \geq m$ (Ejemplo 3.17), y al igual que en el Ejemplo 3.20 se tiene que $\omega_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} \rho_{2n+1}(e^{i\theta}) \omega(\theta) d\theta = 0$ y cualquier número complejo ω_n puede ser utilizado, siempre que $n \geq E[\frac{m-1}{2}] + 1$, donde $E[x]$ denota, como es usual, la parte entera de x . Por lo tanto, si hacemos $h(z) = z^m + a_{m-1}z^{m-1} + \dots + a_0$ y consideramos $\omega_n = 1$, entonces

$$\begin{aligned} \omega_n e^{-in\theta} \rho_{2n+1}(e^{i\theta}) &= e^{i(n+1-m)\theta} h(e^{i\theta}) = e^{i(n+1-m)\theta} (e^{im\theta} + \dots + a_0) \\ &= e^{i(n+1)\theta} + \dots + a_0 e^{i(n+1-m)\theta} = f_{n+1}(\theta) + i g_{n+1}(\theta). \end{aligned}$$

Luego, para $n \geq E[\frac{m-1}{2}] + 1$ un sistema bi-ortogonal viene dado por

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\theta) &= \cos(n+1)\theta + \dots + a_0 \cos(n+1-m)\theta, \\ g_{n+1}(\theta) &= \sin(n+1)\theta + \dots + a_0 \sin(n+1-m)\theta. \end{aligned}$$

Recíprocamente, para tener un sistema bi-ortogonal $f_0 \cup \{f_k, g_k\}_{k=1}^{\infty}$ completamente construido, tenemos que computar los polinomios de Szegő $\rho_{2k+1}(z)$, $0 \leq k \leq E[\frac{m-1}{2}]$ que puede hacerse de manera recursiva mediante la ley de recurrencia (3.12)-(3.13).

Fórmulas de cuadratura para integrandos periódicos

La Integración Numérica es el estudio de cómo el valor numérico de una integral definida puede ser encontrado mediante una serie de procedimientos o reglas. Aunque hablamos de un problema cuyos orígenes son tan antiguos como los propios de las Matemáticas, esta disciplina sigue teniendo plena vigencia de interés, dado que un gran número de procesos numéricos de la Matemática Aplicada tiene entre sus distintas etapas el cálculo de integrales. Uno de los métodos más usuales y de gran sencillez conceptual son las denominadas Fórmulas de Cuadratura, en las que una integral es aproximada por una combinación lineal de valores del integrando. Teniendo en cuenta que en numerosas ocasiones calcular el valor de una integral puede llegar a ser muy tedioso (incluso aunque exista explícitamente una primitiva), estos métodos que nos aproximan el valor de dicha integral pueden resultar de gran utilidad. En este caso trabajaremos con integrales cuyos integrandos son periódicos. El principal propósito de este capítulo es el cálculo aproximado de integrales de la forma:

$$I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\omega(\theta)d\theta,$$

siendo ω una función peso en $[-\pi, \pi]$ y $f \in L_1^\omega([-\pi, \pi])$ una función periódica de período 2π , donde $L_1^\omega[-\pi, \pi]$ es el espacio de funciones de módulo integrable en $[-\pi, \pi]$ respecto de la medida ω . $I_\omega(f)$ va a ser aproximada por una fórmula de cuadratura con n puntos:

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\theta_j), \quad \theta_j \neq \theta_k, \quad j \neq k, \quad \theta_j \in (-\pi, \pi], \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.1)$$

Los nodos $\{\theta_j\}_{j=1}^n$ y los pesos $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ deben determinarse de tal manera que I_n sea exacta en un cierto subespacio de \mathcal{T} con dimensión lo mayor posible, esto es, debe verificarse que $I_\omega(T) = I_n(T)$ para todo $T \in \mathcal{T}_{m(n)} \subset \mathcal{T}$, con $m(n)$ tan grande como sea posible. El motivo de buscar máximo grado de exactitud trigonométrico parece razonable, por ser el integrando una función periódica (y

por tanto, parece más lógico aproximarla por un polinomio trigonométrico, y no algebraico), y por ser el espacio de polinomios trigonométricos denso en el espacio de las funciones periódicas continuas definidas en $[-\pi, \pi]$. Debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones preliminares:

Teorema 4.1 *No puede existir una fórmula de cuadratura $I_n(f)$ de n puntos como (4.1) que sea exacta en \mathcal{T}_n , es decir, $0 \leq m(n) < n$.*

Demostración.- Sea $T(\theta) = \prod_{j=1}^n \sin^2\left(\frac{\theta-\theta_j}{2}\right) \in \mathcal{T}_n$. Como $T(\theta) \geq 0$ en $[-\pi, \pi]$, resulta que $I_\omega(T) > 0$, mientras que $I_n(T) = 0$.

Ahora, haciendo uso de los resultados de interpolación tratados en el Capítulo 2 se pueden probar fácilmente los siguientes teoremas:

Teorema 4.2 (Fórmula de tipo interpolatorio) *Dados n nodos distintos entre sí $\{\theta_j\}_{j=1}^n \subset [-\pi, \pi]$, entonces existe un cierto subespacio $\tilde{\mathcal{T}}_n$ de \mathcal{T}_n con dimensión n de manera que un conjunto de pesos $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ quedan únicamente determinados verificando*

$$I_n(T) = \sum_{j=1}^n \lambda_j T(\theta_j) = I_\omega(T), \quad \forall T \in \tilde{\mathcal{T}}_n.$$

Teorema 4.3 *Si existe una fórmula de cuadratura de n puntos $I_n = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\theta_j)$ que sea exacta en \mathcal{T}_{n-1} , entonces $\lambda_j > 0$, para todo $j = 1, \dots, n$.*

Demostración.- Tomemos $t_j(\theta) = \prod_{k=1, k \neq j}^n \sin^2\left(\frac{\theta-\theta_k}{2}\right) \in \mathcal{T}_{n-1}$, que salvo constante multiplicativa coincide con el cuadrado del j -ésimo polinomio trigonométrico fundamental de Lagrange. Entonces $t_j \geq 0$, y por lo tanto, $I_\omega(t_j) = I_n(t_j) = \lambda_j t_j(\theta_j) > 0$. Dado que $t_j(\theta_j) > 0$, se concluye la demostración. \square

Dado que estamos interesados en la construcción de fórmulas de cuadraturas que interpolen exactamente polinomios trigonométricos hasta el mayor grado posible, se investigará el siguiente problema: Dado $n \geq 0$, encontrar $\theta_1, \dots, \theta_n$, con $\theta_j \neq \theta_k$, si $j \neq k$ en $(-\pi, \pi]$ y números reales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\theta_j) = I_\omega(f), \quad \text{para todo } f \in \mathcal{T}_{n-1}. \quad (4.2)$$

Como $\dim(\mathcal{T}_{n-1}) = 2n - 1$, la relación (4.2) nos lleva a un sistema no lineal de $2n - 1$ ecuaciones con $2n$ incógnitas: $\theta_1, \dots, \theta_n; \lambda_1, \dots, \lambda_n$. En vez de resolver directamente el sistema que surge de (4.2), procederemos como en el caso polinómico, analizando propiedades de los elementos de \mathcal{T}_n cuyos ceros son los nodos de $I_n(f)$. Por este motivo, estamos obligados a asumir que el número de nodos de $I_n(f)$ debe ser par. Para ello, supongamos que este número es $2n$. Así, la fórmula de cuadratura nos queda en la forma

$$I_{2n}(f) = \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j f(\theta_j), \quad \{\theta_j\}_{j=1}^{2n} \subset (-\pi, \pi], \quad \theta_j \neq \theta_k \quad \text{si } j \neq k.$$

Consideremos el polinomio trigonométrico nodal $T_n(\theta) = \prod_{j=1}^{2n} \sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right) \in \mathcal{T}_n$. Entonces, se siguen los siguientes resultados:

Teorema 4.4 *Sea $I_{2n}(f) = \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j f(\theta_j)$ una fórmula de cuadratura tal que $I_{2n}(T) = I_\omega(T)$, para todo $T \in \mathcal{T}_{2n-1}$ y consideremos $f_0 \cup \{f_k, g_k\}_{k=1}^\infty$ un sistema bi-ortogonal respecto de ω . Sea $T_n(\theta) = \prod_{j=1}^{2n} \sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right) \in \mathcal{T}_n$. Entonces existen números reales a_n y b_n , no ambos ceros, tales que $T_n = a_n f_n + b_n g_n$.*

Demostración.- Sea $S \in \mathcal{T}_{n-1}$, entonces $T_n \cdot S \in \mathcal{T}_{2n-1}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \langle T_n, S \rangle_\omega &= I_\omega(T_n \cdot S) = \int_{-\pi}^{\pi} T_n(\theta) S(\theta) \omega(\theta) d\theta \\ &= I_n(T_n \cdot S) = \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j T_n(\theta_j) S(\theta_j) = 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Por otro lado, como $f_0 \cup \{f_k, g_k\}_{k=1}^n$ es una base de \mathcal{T}_n , se puede escribir

$$T_n(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k f_k(\theta) + b_k g_k(\theta)), \quad a_k = \frac{\langle T_n, f_k \rangle_\omega}{\|f_k\|_\omega^2}, \quad b_k = \frac{\langle T_n, g_k \rangle_\omega}{\|g_k\|_\omega^2}.$$

Por (4.3), $a_k = 0$, para $k = 0, 1, \dots, n-1$ y $b_k = 0$, para $k = 1, \dots, n-1$, concluyendo así la demostración. □

Nota 4.5 *Observamos que salvo factor multiplicativo el polinomio trigonométrico nodal depende de una constante. Esa es la razón por la cual nuestro problema conllevaba a un sistema no lineal de $2n - 1$ ecuaciones y $2n$ incógnitas. Es decir, el Teorema 4.4 proporciona una familia uni-paramétrica de fórmulas de cuadratura.*

Teorema 4.6 *Sea $f_0 \cup \{f_k, g_k\}_{k=1}^\infty$ un sistema bi-ortogonal respecto a la función peso ω . Sean a y b números reales no ambos nulos y sean $\{\theta_j\}_{j=1}^{2n}$ los $2n$ ceros de $T_n(\theta) = a f_n(\theta) + b g_n(\theta)$ en $(-\pi, \pi]$. Entonces, existen números positivos $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ tales que*

$$I_{2n}(f) = \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j f(\theta_j) = I_\omega(f), \quad \forall f \in \mathcal{T}_{2n-1}.$$

Demostración.- A lo largo de esta demostración, $\tilde{\mathcal{T}}_n$ denotará un subespacio de polinomios trigonométricos que coincide con $\mathcal{T}_n \setminus \text{span}\{\cos n\theta\}$ ó $\mathcal{T}_n \setminus \text{span}\{\sin n\theta\}$, por lo que $\dim(\tilde{\mathcal{T}}_n) = 2n$ (recordemos por el Teorema 2.5 que el problema de interpolación en esos $2n$ nodos tendrá siempre solución única al menos en uno de esos dos subespacios). Sean $\theta_1, \dots, \theta_{2n}$ los $2n$ ceros distintos de $T_n = af_n + bg_n$, ($|a| + |b| > 0$). Entonces, por el Teorema 4.2, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$, únicamente determinados, tales que

$$I_{2n}(f) = \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j f(\theta_j) = I_\omega(f), \quad \forall f \in \tilde{\mathcal{T}}_n.$$

Ahora veremos que $I_{2n}(f)$ es también exacta en \mathcal{T}_{2n-1} (obsérvese que $\tilde{\mathcal{T}}_n \subset \mathcal{T}_{2n-1}$). Para ello, consideremos $T \in \mathcal{T}_{2n-1}$ y sea $L_n \in \tilde{\mathcal{T}}_n$ tal que $T(\theta_j) = L_n(\theta_j)$, $j = 1, \dots, 2n$. Entonces, $T - L_n \in \mathcal{T}_{2n-1}$ y $(T - L_n)(\theta_j) = 0$, para todo $j = 1, \dots, 2n$. Así, se puede escribir $T(\theta) - L_n(\theta) = T_n(\theta)V(\theta)$, con $V \in \mathcal{T}_{n-1}$, es decir, $T = L_n + T_n \cdot V$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} I_\omega(T) &= \int_{-\pi}^{\pi} T(\theta)\omega(\theta)d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (L_n(\theta) + T_n(\theta)V(\theta))\omega(\theta)d\theta \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} L_n(\theta)\omega(\theta)d\theta = I_\omega(L_n), \end{aligned}$$

dado que $I_\omega(T_n V) = 0$ (por definición, T_n es ortogonal a cualquier función de \mathcal{T}_{n-1}). Por lo tanto,

$$I_\omega(T) = I_\omega(L_n) = \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j L_n(\theta_j) = \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j T(\theta_j) = I_n(T).$$

Finalmente, por el Teorema 4.3, se sigue que los pesos $\{\lambda_j\}_{j=1}^{2n}$ son positivos. Sin embargo, se puede dar también una expresión explícita para estos. Así, para $j = 1, \dots, 2n$, definimos

$$l_j(\theta) = \frac{T_n(\theta)}{2T'_n(\theta_j) \sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right)}$$

tal que (por construcción) $l_j(\theta_k) = \delta_{j,k}$ y $l_j^2 \in \mathcal{T}_{2n-1}$. Por lo tanto,

$$I_\omega(l_j^2(\theta)) = I_{2n}(l_j^2(\theta)) = \sum_{k=1}^{2n} \lambda_k l_j^2(\theta_k) = \lambda_j,$$

llegando a que

$$\lambda_j = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{T_n(\theta)}{2T'_n(\theta_j) \sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right)} \right]^2 \omega(\theta)d\theta, \quad j = 1, \dots, 2n.$$

□

Los Teoremas 4.4 y 4.6 pueden ser resumidos en el siguiente

Corolario 4.7 Sea $I_{2n}(f) = \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j f(\theta_j)$ tal que $\theta_j \neq \theta_k$, si $j \neq k$, y $\{\theta_j\}_{j=1}^{2n} \subset (-\pi, \pi]$. Entonces, $I_{2n}(f) = I_\omega(f)$, para todo $f \in \mathcal{T}_{2n-1}$, sí y sólo sí,

1. I_{2n} es exacta en un cierto subespacio $\tilde{\mathcal{T}}_n$ de \mathcal{T}_{2n-1} de dimensión $2n$.
2. Existen números reales a y b no ambos nulos tales que $\{\theta_j\}_{j=1}^{2n}$ son los ceros de $T_n = af_n + bg_n$, donde $f_0 \cup \{g_k, f_k\}_{k=1}^\infty$ es un sistema bi-ortogonal respecto a la función peso ω .

Además, cuando estas condiciones se satisfacen, los pesos $\{\lambda_j\}_{j=1}^{2n}$ son positivos.

Nota 4.8 La fórmula de cuadratura caracterizada en el Corolario 4.7 fue introducida por Szegő en [6] y se refería a esta como “fórmula de cuadratura con el máximo grado de precisión trigonométrico.”

A continuación, observaremos cómo obtener una representación explícita para los pesos $\{\lambda_j\}_{j=1}^{2n}$ del Corolario 4.7, en términos de un sistema bi-ortogonal. En efecto, se tiene el siguiente

Teorema 4.9 Sea $f_0 \cup \{f_k, g_k\}_{k=1}^\infty$ un sistema bi-ortogonal respecto a ω y sea $I_{2n}(f) = \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j f(\theta_j)$ una fórmula de cuadratura de $2n$ puntos y máximo grado de precisión trigonométrico alcanzable. Entonces, para $j = 1, \dots, n$,

$$\lambda_j = \frac{1}{f_0^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (f_k^2(\theta_j) + g_k^2(\theta_j)) + \left(\frac{1-|\delta_{2n}|}{2}\right) f_n^2(\theta_j) + \left(\frac{1+|\delta_{2n}|}{2}\right) g_n^2(\theta_j)}, \quad (4.4)$$

siendo $\delta_{2n} = \rho_{2n}(0)$, ρ_{2n} el polinomio mónico de Szegő de grado $2n$ y $\{\theta_j\}_{j=1}^{2n}$ los ceros de $T_n = af_n + bg_n$, $|a| + |b| > 0$.

Demostración.- Sea $T_n(\theta) = \prod_{k=1}^{2n} \sin\left(\frac{\theta - \theta_k}{2}\right) = af_n(\theta) + bg_n(\theta) \in \mathcal{T}_n$, $|a| + |b| > 0$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a \neq 0$, por lo que $f_n(\theta_j) = \frac{-b}{a} g_n(\theta_j)$. Entonces, de la identidad de Christoffel-Darboux (3.5) se sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{n-1}(\theta, \theta_j) &= \frac{1}{2} \frac{k_{2n-1}}{k_{2n}} \cot\left(\frac{\theta_j - \theta}{2}\right) [f_n(\theta)g_n(\theta_j) - f_n(\theta_j)g_n(\theta)] - \\ &\quad - [r_n f_n(\theta)f_n(\theta_j) + s_n g_n(\theta)g_n(\theta_j)] \\ &= \frac{1}{2a} \frac{k_{2n-1}}{k_{2n}} g_n(\theta_j) \cot\left(\frac{\theta_j - \theta}{2}\right) T_n(\theta) - \\ &\quad - \left[\frac{1 - |\delta_{2n}|}{2} f_n(\theta)f_n(\theta_j) + \frac{1 + |\delta_{2n}|}{2} g_n(\theta)g_n(\theta_j) \right], \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{n-1}(\theta, \theta_j) + \left[\frac{1 - |\delta_{2n}|}{2} f_n(\theta) f_n(\theta_j) + \frac{1 + |\delta_{2n}|}{2} g_n(\theta) g_n(\theta_j) \right] \\ = \frac{1}{2a} \frac{k_{2n-1}}{k_{2n}} g_n(\theta_j) \cos\left(\frac{\theta_j - \theta}{2}\right) \frac{T_n(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta_j - \theta}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Haciendo tender θ a θ_j , se tiene

$$\begin{aligned} f_0^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (f_k^2(\theta_j) + g_k^2(\theta_j)) + \left(\frac{1 - |\delta_{2n}|}{2}\right) f_n^2(\theta_j) + \left(\frac{1 - |\delta_{2n}|}{2}\right) g_n^2(\theta_j) \\ = \frac{-1}{a} \frac{k_{2n-1}}{k_{2n}} g_n(\theta_j) T_n'(\theta_j). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ahora, debido a las condiciones de ortogonalidad, de (4.5) se sigue que

$$1 = \frac{-1}{2a} \frac{k_{2n-1}}{k_{2n}} g_n(\theta_j) \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right) \frac{T_n(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right)} \omega(\theta) d\theta. \quad (4.7)$$

Combinando las expresiones (4.6) y (4.7) se obtiene

$$\begin{aligned} 1/[f_0^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (f_k^2(\theta_j) + g_k^2(\theta_j)) + \left(\frac{1 - |\delta_{2n}|}{2}\right) f_n^2(\theta_j) + \left(\frac{1 - |\delta_{2n}|}{2}\right) g_n^2(\theta_j)] \\ = \frac{1}{2T_n'(\theta_j)} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right) \frac{T_n(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right)} \omega(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Por otro lado, del Corolario 4.7 sabemos que los pesos λ_j pueden ser expresados como

$$\lambda_j = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{s}_j(\theta) \omega(\theta) d\theta, \quad j = 1, \dots, 2n,$$

donde \tilde{s}_j es un polinomio trigonométrico de grado a lo sumo n obtenido mediante las expresiones ya vistas (2.10) o (2.11). Así, de (2.10) se sigue

$$\tilde{s}_j(\theta) = \frac{1}{2T_n'(\theta_j) \sin \eta_n} \sin\left(\frac{\theta + \alpha_j}{2}\right) \frac{T_n(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right)}, \quad j = 1, \dots, 2n,$$

con $\eta_n = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n}$ y $\alpha_j = \eta_n - \frac{\theta_j}{2}$, para $j = 1, \dots, 2n$. Por consiguiente, $\sin\left(\frac{\theta + \alpha_j}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2} + \eta_n\right) = \sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right) \cos \eta_n + \cos\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right) \sin \eta_n$ y se puede escribir

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \frac{1}{2T_n'(\theta_j) \sin \eta_n} \left[\cos \eta_n \int_{-\pi}^{\pi} T_n(\theta) \omega(\theta) d\theta \right. \\ &\quad \left. + \sin \eta_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right) \frac{T_n(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right)} \omega(\theta) d\theta \right] \\ &= \frac{1}{2T_n'(\theta_j)} \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right) \frac{T_n(\theta)}{\sin\left(\frac{\theta - \theta_j}{2}\right)} \omega(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Claramente, si partimos de la expresión (2.11), se llega a la misma representación (4.9). Por lo tanto, de (4.8) y (4.9) se concluye la demostración. \square

Ejemplo 4.10 Como una simple ilustración de la ecuación (4.4), consideremos $\omega \equiv 1$ (medida de Lebesgue). Como ya hemos visto, un sistema bi-ortogonal respecto de ω viene dado por $\{1\} \cup \{\cos n\theta, \sin n\theta\}_{n=1}^{\infty}$. Por lo tanto, se tiene el siguiente sistema bi-ortonormal:

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad f_n(\theta) = \frac{\cos n\theta}{\sqrt{\pi}}, \quad g_n(\theta) = \frac{\sin n\theta}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Tomando $a, b \in \mathbb{R}$, $|a| + |b| > 0$, los $2n$ nodos de la correspondiente fórmula de cuadratura son los ceros de $T_n(\theta) = af_n(\theta) + bg_n(\theta)$. Por lo tanto, cuando $a = 0$ y $b = 1$, es decir, $\sin n\theta = 0$, los ceros son $\theta_k = \frac{k\pi}{n}$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, esto es, los $2n$ ceros $\theta_j = \frac{(j-n)\pi}{n} = -\pi + \frac{2\pi j}{2n}$, $j = 1, \dots, 2n - 1$, están equiespaciados en el intervalo $[-\pi, \pi]$ con una distancia $h = \frac{\pi}{n}$. Además, tomando ahora $\rho_n(z) = z^n$, para todo $n = 0, 1, \dots$, entonces $\delta_{2n} = \rho_{2n}(0) = 0$ y la ecuación (4.4) nos queda, para todo $j = 1, \dots, 2n$:

$$\lambda_j = \frac{1}{\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\cos^2(k\theta_j)}{\pi} + \frac{\sin^2(k\theta_j)}{\pi} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\cos^2(n\theta_j)}{\pi} + \frac{\sin^2(n\theta_j)}{\pi} \right)} = \frac{\pi}{n}. \quad (4.10)$$

Asímismo, de (4.10) se observa que independientemente de las expresiones de los nodos $\{\theta_j\}_{j=1}^{2n}$, todos los pesos $\{\lambda_j\}_{j=1}^{2n}$ son iguales a $\frac{\pi}{n}$.

A

Anexo: Problemas abiertos

A.1. Fórmulas de cuadratura positivas para integrandos periódicos con un número arbitrario de nodos

La Teoría desarrollada en esta Memoria ha permitido conducir en el Capítulo 4 la construcción de fórmulas de cuadratura positivas con grado máximo de exactitud trigonométrico pero con una importante restricción: el número de nodos ha de ser par. Esta condición en el número de nodos proviene del hecho de que todo elemento de \mathcal{T}_n posee $2n$ ceros, contándolos como es usual, con sus multiplicidades y restringiéndolos a la banda $-\pi < \Re(\theta) \leq \pi$ (Teorema 1.10).

Con el fin de solventar esta restricción se propuso en [3] considerar el espacio de funciones trigonométricas

$$\mathcal{T}_n^{1/2} = \text{span} \left\{ \cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \theta \right], \sin \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \theta \right] \right\}_{k=0}^n, \quad \dim(\mathcal{T}_n^{1/2}) = 2n + 2.$$

Con este nuevo espacio de funciones trigonométricas se pudo solventar el problema anterior, y construir así fórmulas de cuadratura positivas con máximo grado de precisión trigonométrico y un número impar de nodos.

Sin embargo, no parece natural que en el tránsito de n a $n + 1$ sea necesario cambiar por completo el sistema de funciones, y que esto se consiga solamente cuando aumentamos de dos en dos la dimensión de nuestro espacio de funciones. Planteamos por tanto, buscar un espacio de funciones trigonométricas global, independiente de la paridad de n , de tal manera que el tránsito de n a $n + 1$ sea dinámico en el sentido de que consista solamente en añadir una nueva función al sistema, y en el que se pueda desarrollar la teoría necesaria para la construcción de fórmulas de cuadratura positivas, exactas en espacios de funciones trigonométricas y con un número arbitrario de nodos.

A.2. Fórmulas de cuadratura positivas para integrandos periódicos con dominios de exactitud intermedios

Las fórmulas de cuadratura positivas descritas en esta Memoria, no solo poseen un número par de nodos sino que son, además, las de máximo grado de precisión trigonométrico (es decir, el equivalente a las fórmulas de cuadratura Gaussianas en el Eje Real o fórmulas de cuadratura de Szegő en la circunferencia unidad).

Parece razonable caracterizar fórmulas de cuadratura positivas con dominios de exactitud intermedios (entre tipo interpolatorio y “Gaussianas”). Un primer resultado a este problema, inspirado precisamente en los resultados obtenidos en [3], fueron establecidos por F. Peherstorfer en [5]. Sin embargo, aún quedan muchas cuestiones abiertas en este sentido, como por ejemplo, el obtener condiciones que deben cumplir las funciones trigonométricas nodales para que tengan todos sus ceros simples en $[-\pi, \pi]$. Esto permitiría, en particular, considerar fórmulas de cuadratura positivas para integrandos periódicos con nodos prefijados de antemano (generalizando las clásicas fórmulas de Gauss-Radau y Gauss-Lobatto).

Bibliografía

- [1] R. Cruz-Barroso, L. Daruis, P. González-Vera and O. Njåstad. Sequences of orthogonal Laurent polynomials, bi-orthogonality and quadrature formulas on the unit circle. *J. Comp. Appl. Math.* 200 (2007) 424-440.
- [2] R. Cruz-Barroso, L. Daruis, P. González-Vera and O. Njåstad. Quadrature rules for periodic integrands. Bi-orthogonality and para-orthogonality. *Annales Mathematicae et Informaticae* 32 (2005) 5–44.
- [3] R. Cruz-Barroso, P. González-Vera and O. Njåstad. On bi-orthogonal systems of trigonometric functions and quadrature formulas for periodic integrands. *Numer. Algor.* 44 (2007) 309-333.
- [4] W.B. Jones, O. Njåstad, and W.J. Thron. Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature and continued fractions associated with the unit circle. *Bull. London Math. Soc.*, 21 (1989) 113-152.
- [5] F. Peherstorfer. Positive trigonometric quadrature formula and quadrature on the unit circle. *Math. Comp.* 80 (275) (2011) 1685-1701.
- [6] G. Szegő. On bi-orthogonal systems of trigonometric polynomials. *Magyar Tud. Alcad. Kutató Int. Közl* 8 (1963) 255–273.
- [7] G. Szegő. Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 23, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 1975.

Bi-orthogonality and positive quadrature formulas for periodic integrands



Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Diego Sebastián Guouman Ferreyra

Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas

Universidad de La Laguna

alu0101160351@ull.edu.es

Abstract

THE MAIN PURPOSE of this Memory is the construction and characterization of positive quadrature formulas for periodic integrands with respect to a weight function. For this aim, we will take as basic reference the paper [1], which was actually inspired by the famous paper [4] written by G. Szegő in 1963, and where the bi-orthogonal systems of trigonometric polynomials were introduced for the first time in the literature. This concept will be essential for the approximate calculation of weighted integrals with periodic integrands.

1. Trigonometric polynomials

FOR a nonnegative integer n , \mathcal{T}_n will denote the space of trigonometric polynomials of degree n :

$$T_n(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta), \quad a_k, b_k \in \mathbb{C}, \quad |a_n| + |b_n| > 0.$$

Set $A_n^H = \{L \in \Lambda_{-n,n} : L \text{ is Hermitian}\}$, a real vector space of dimension $2n+1$, where $\Lambda_{-n,n} = \text{span}\{z^k : |k| \leq n\}$. Thus,

$$\mathcal{T}_n = \{T(\theta) : T(\theta) = L(e^{i\theta}) \text{ with } L \in A_n^H\}.$$

Definition 1 Let P be an algebraic polynomial of degree n , $P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$, $a_j \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. The polynomial $P^*(z) = z^n P(1/\bar{z}) = \sum_{j=0}^n \bar{a}_{n-j} z^j$ is called the reciprocal polynomial of P .

Definition 2 A polynomial P of degree n is called “ k -invariant” if $P^*(z) = kP(z)$, $\exists k \in \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. If $k = 1$ then P is called “autorreciprocal”.

There exists a connection between trigonometric polynomials and autorreciprocal algebraic polynomials: $T_n(\theta) = L_n(z) = \frac{P_{2n}(z)}{z^n}$, with $L_n \in \Lambda_{-n,n}$, $z = e^{i\theta}$ and $P_{2n} \in \mathbb{P}_{2n} \setminus \mathbb{P}_{2n-1}$ an autorreciprocal polynomial of degree $2n$. This connection allows us to obtain properties for trigonometric polynomials from properties of algebraic autorreciprocal polynomials.

Theorem 1 A real trigonometric polynomial $T_n \in \mathcal{T}_n \setminus \mathcal{T}_{n-1}$ has exactly $2n$ real or complex zeros provided that we count them as usual with their multiplicity and we restrict ourselves to the strip $-\pi < \Re(\theta) \leq \pi$. Furthermore, the non-real zeros appear in conjugate pairs.

Theorem 2 (Riesz-Féjer) A real trigonometric polynomial $T_n \in \mathcal{T}_n$ is nonnegative for all $\theta \in \mathbb{R}$, if and only if, it can be written in the form

$$T_n(\theta) = |g(z)|^2, \quad z = e^{i\theta},$$

where g is an algebraic polynomial of the same degree as T_n .

2. Interpolation by Trigonometric Polynomials

POLYNOMIAL INTERPOLATION finds in the construction of quadrature formulas one of its most immediate applications. When considering quadrature rules based on trigonometric polynomials, similar results on interpolation will be needed. Here, it is important to highlight the following results

Theorem 3 (Lagrange) Given $2n+1$ distinct nodes $\{\theta_j\}_{j=1}^{2n+1} \subset (-\pi, \pi]$, there exists a unique $T_n \in \mathcal{T}_n$ such that

$$T_n(\theta_j) = y_j, \quad j = 1, \dots, 2n+1,$$

$\{y_j\}_{j=1}^{2n+1}$ being a given set of real numbers.

Theorem 4 (Hermite) Let $\{\theta_j\}_{j=1}^{n+1}$ be $(n+1)$ distinct nodes on $(-\pi, \pi]$ and $k \in \{1, \dots, n+1\}$ previously fixed. Then there exists a unique trigonometric polynomial $H_n \in \mathcal{T}_n$ satisfying

$$\left. \begin{aligned} H_n(\theta_j) &= H_n^{(k)}(\theta_j) = y_j, \quad j = 1, \dots, n+1 \\ H_n'(\theta_j) &= H_n^{(k)'}(\theta_j) = y_j', \quad j = 1, \dots, n+1, j \neq k \end{aligned} \right\}$$

where $\{y_j\}_{j=1}^{n+1} \cup \{y_j'\}_{j=1, j \neq k}^{n+1}$ is a set of $(2n+1)$ real numbers.

3. Bi-orthogonal systems of trigonometric polynomials

THE aim now is to generalize the fact that the system $\{1, \cos \theta, \sin \theta, \dots, \cos n\theta, \sin n\theta\}$ is clearly an orthogonal system for $\omega \equiv 1$ to an arbitrary weight function ω on $[-\pi, \pi]$. The result of orthogonalizing this system is called a bi-orthogonal system of trigonometric polynomials for ω . Properties of them are analyzed. It is interesting to point out that these systems can be built making use of orthogonal polynomials on the unit circle (Szegő polynomials).

Theorem 5 Let $\{\omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ be a sequence of complex numbers such that for any $n \geq 0$, $\omega_n \neq 0$ and $\omega_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta} \rho_{2n+1}(e^{i\theta}) \omega(\theta) d(\theta)$ is a real number, where ρ_{2n+1} is the $(n+1)$ -th Szegő polynomial for ω . Then, $f_0 \cup \{f_k, g_k\}_{k=1}^{\infty}$ given by $\omega_n e^{-in\theta} \rho_{2n+1}(e^{i\theta}) = f_{n+1}(\theta) + i g_{n+1}(\theta)$ with $f_0(\theta) = f_0 \neq 0$ is a bi-orthogonal system for ω in $[-\pi, \pi]$.

4. Quadrature rules for periodic integrands

QUADRATURE RULES for periodic integrands are of great interest in Applied Mathematics. The main purpose of this Memory is the approximate calculation of integrals of the form

$$I_\omega(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \omega(\theta) d\theta,$$

with ω a weight function on $[-\pi, \pi]$ and $f \in L_1^\omega[-\pi, \pi]$ a 2π -periodic function. $I_\omega(f)$ is going to be approximated by means of an n -point quadrature rule like:

$$I_n(f) = \sum_{j=1}^n \lambda_j f(\theta_j), \quad \theta_j \neq \theta_k, j \neq k, \theta_j \in (-\pi, \pi], j = 1, \dots, n.$$

Here, the nodes $\{\theta_j\}_{j=1}^n$ and weights $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ are determined so that $I_n(f)$ is exact in subspaces of \mathcal{T} with dimension as large as possible. A complete characterization of the rules of highest trigonometric degree of accuracy is proved, along with computational aspects.

References

- [1] R. Cruz-Barroso, L. Daruis, P. González-Vera and O. Njåstad. Quadrature rules for periodic integrands. Bi-orthogonality and para-orthogonality. *Annales Mathematicae et Informaticae* 32 (2005) 5–44.
- [2] R. Cruz-Barroso, P. González-Vera and O. Njåstad. On bi-orthogonal systems of trigonometric functions and quadrature formulas for periodic integrands. *Numer. Algor.* 44 (2007) 309–333.
- [3] F. Peherstorfer. Positive trigonometric quadrature formula and quadrature on the unit circle. *Math. Comp.* 80 (275) (2011) 1685–1701.
- [4] G. Szegő. On bi-orthogonal systems of trigonometric polynomials. *Magyar Tud. Alcad. Kutató Int. Közl* 8 (1963) 255–273.