

Zulema Oval Trujillo

# *Coloración de Grafos*

Graph Coloring

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Matemáticas  
La Laguna, Junio de 2021

DIRIGIDO POR

*Ignacio García Marco*

*José Fabrizio Pineda Ramos*

*Ignacio García Marco*

*Departamento de Matemáticas,  
Estadística e Investigación  
Operativa*

*Universidad de La Laguna*

*38200 La Laguna, Tenerife*

*José Fabrizio Pineda Ramos*

*Departamento de Matemáticas,  
Estadística e Investigación  
Operativa*

*Universidad de La Laguna*

*38200 La Laguna, Tenerife*

---

## Agradecimientos

Quiero agradecer especialmente a mi tutor Nacho, por su paciencia y confianza en mí y, sobretodo, por ayudarme en todo momento, sin él esto no habría sido posible.

También me gustaría agradecer a mi familia por ser un apoyo fundamental y no permitir que me rindiera hasta conseguirlo.

Zulema Oval Trujillo  
La Laguna, 9 de junio de 2021



---

## Resumen · Abstract

### *Resumen*

---

*El objetivo principal de este trabajo es el estudio del problema de la coloración de grafos haciendo uso de herramientas combinatorias y algebraicas. Comenzamos por la obtención de cotas superiores e inferiores del número cromático de un grafo y aportando algoritmos de coloración (no necesariamente óptima) de grafos. Tras esto, estudiamos la coloración de grafos planares y demostramos varias versiones débiles del Teorema de los cuatro colores, el cual establece que un grafo planar es 4-coloreable. Por último caracterizamos la propiedad de que un grafo sea  $k$ -coloreable en términos de la pertenencia de un cierto polinomio a un ideal. De este resultado deducimos un algoritmo que determina el número cromático de un grafo. Incluimos una implementación en SINGULAR del algoritmo propuesto.*

### *Abstract*

---

*The main objective of this work is the study of the graph coloring problem using combinatorial and algebraic tools. We begin by obtaining the upper and lower bounds on the chromatic number of a graph and providing coloring algorithms (not necessarily optimal) of graphs. After this, we study the coloring of planar graphs and prove some weaker versions of the Four Color Theorem, which states that a planar graph is 4-colorable. Finally, we characterize  $k$ -colorability of graphs in terms of the membership of a certain polynomial to an ideal. From this result we deduce an algorithm that determines the chromatic number of a graph. We include an implementation in SINGULAR of the proposed algorithm.*



---

# Contenido

<b>Agradecimientos</b> .....	III
<b>Resumen/Abstract</b> .....	V
<b>Introducción</b> .....	IX
<b>1. Coloración de grafos</b> .....	1
1.1. Introducción a la coloración de grafos .....	1
1.2. El algoritmo Coloración voraz .....	3
<b>2. Coloración de grafos planares</b> .....	11
2.1. Fórmula de Euler .....	12
2.2. Cotas superiores para el número cromático de grafos planares .....	16
<b>3. Coloración algebraica de grafos</b> .....	23
3.1. Teorema Combinatorio de los ceros .....	23
3.2. El Teorema Combinatorio de los ceros y la coloración de grafos .....	26
3.3. Una condición suficiente para que un grafo sea $k$ -coloreable .....	28
3.4. Un algoritmo para determinar el número cromático de un grafo ..	34
3.4.1. Consideraciones algorítmicas .....	34
3.4.2. Implementación de códigos en SINGULAR .....	37
<b>Bibliografía</b> .....	41
<b>Poster</b> .....	43



---

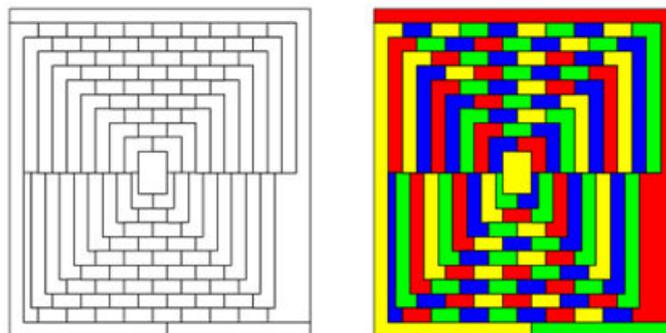
## Introducción

La Teoría de Grafos tuvo su nacimiento en el siglo XVIII gracias al célebre matemático Leonhard Euler, quién resolvió el famoso problema de los puentes de Königsberg. Este problema consistía en encontrar un camino que recorriera los siete puentes del río Pregel, de manera que cada uno de ellos se recorrieran una única vez.

Dentro del amplio campo de la Teoría de Grafos, en este trabajo nos introduciremos en el problema de coloración. En concreto, nos centraremos en la coloración de los vértices de un grafo. Se entiende por coloración de un grafo a la asignación de "colores" a los vértices del grafo de manera que dos vértices adyacentes no compartan el mismo color. Este problema ha sido ampliamente estudiado, entre otros motivos, porque modeliza muchas situaciones de la vida real. Un ejemplo de ello es la distribución de charlas en una universidad de manera que dos charlas que puedan ser de interés para un mismo alumno no se realicen en el mismo horario. Podemos asignarle un grafo a este problema de manera que los vértices corresponden a cada charla, mientras que cada arista representa un conflicto, donde entendemos que hay un conflicto si hay dos charlas que son de interés para un mismo alumno. Cada coloración del grafo corresponde con una forma de establecer franjas horarias para las charlas de forma que ningún alumno tenga que elegir entre dos charlas que le interesen. Dentro de la coloración de grafos destaca el Teorema de los cuatro colores que afirma que todo grafo planar es 4-coloreable. Este teorema se plantea como conjetura en 1852 de la mano de Francis Guthrie, estudiante de Augustus De Morgan, quien no fue capaz de obtener una demostración. En 1879, Alfred Bray Kempe anunció que tenía una demostración de que cuatro colores eran suficientes para colorear un mapa plano. La solución de Kempe se dio por buena durante once años hasta que, en 1890, Percy John Heawood encontró un fallo en el argumento de Kempe. Sin embargo, Heawood no pudo ni arreglar la prueba ni encontrar un contraejemplo a la conjetura. En su avance en el estudio de la coloración de mapas, Heawood pudo demostrar el Teorema de los cinco colores, es decir,

que es posible colorear cualquier mapa usando cinco colores. La demostración del teorema de los cuatro colores no aparecería hasta 1976, gracias a Kenneth Appel y Wolfgang Haken. Su demostración fue la primera gran demostración de la historia de la matemáticas que hace uso de un ordenador, lo cual creó controversias en el ambiente matemático.

En 1975, antes de que Kenneth Appel y Wolfgang Haken publicaran la demostración del teorema de los cuatro colores, el divulgador científico Martin Gardner publicó un artículo en el que afirmaba que el *mapa de Mc.Gregor*, compuesto por 110 regiones, no era coloreable con menos de cinco colores, de manera que dos vértices adyacentes no compartieran el mismo color, es decir, propuso un contraejemplo al teorema de los cuatro colores. Si nos fijamos en la fecha exacta de la publicación del artículo, el día 1 de abril de 1975, esta coincide con el día de los inocentes en los países anglosajones. Es decir, Gardner ya era consciente de que su afirmación era errónea, pero quería gastar una broma, sin embargo, muchos lectores no se percataron de esta broma y, contrariados con esta afirmación, enviaron diferentes coloraciones del mapa, mostrándole así que su afirmación era errónea.



**Figura 0.1.** Mapa de Mc.Gregor y una propuesta de 4-coloración

En esta memoria, además de presentar una demostración del Teorema de los cinco colores y de otros resultados de similar naturaleza, también estudiaremos la coloración de grafos mediante herramientas algebraicas. Para ello haremos uso de una variante de un caso particular del Teorema de los ceros de Hilbert, que se suele denominar Teorema Combinatorio de los ceros por sus múltiples aplicaciones en Combinatoria. El Teorema de los ceros de Hilbert es un resultado clásico en Álgebra Conmutativa y Geometría Algebraica, el cual afirma que dado  $F[x_1, \dots, x_n]$  un anillo en  $n$  variables sobre un cuerpo algebraicamente cerrado  $F$  y  $f, g_1, \dots, g_m \in F[x_1, \dots, x_m]$ , si  $f$  se anula en los ceros de  $g_1, \dots, g_m$ , entonces existe un entero positivo  $k$  tal que  $f^k$  pertenece al ideal generado por  $g_1, \dots, g_m$ . Este resultado es de naturaleza existencial pues,

en principio, no brinda ningún tipo de información sobre el valor de  $k$  y los polinomios  $h_1, \dots, h_m \in F[x_1, \dots, x_n]$  tales que  $f = \sum h_i g_i$ . El teorema fue demostrado inicialmente por David Hilbert. En este trabajo introduciremos el Teorema Combinatorio de los ceros, que afirma que bajo ciertas condiciones, el valor de  $k$  en el anterior resultado es  $k = 1$ , y, además, aporta información sobre los polinomios  $h_1, \dots, h_m$  involucrados al expresar  $f = \sum h_i g_i$ .

Este trabajo lo hemos estructurado en tres capítulos.

El Capítulo 1 se encuentra dividido en dos secciones. En la primera de ellas se hace una pequeña introducción a la coloración de grafos. Introducimos el concepto de número cromático de un grafo que es el menor número de colores necesarios para colorear un grafo. Además se hará un estudio de dicho valor y su relación con otros parámetros asociados a un grafo. En particular, demostraremos que el número cromático de un grafo es siempre mayor o igual que el número de clique y siempre es menor o igual que el índice de degeneración más uno y, en consecuencia, también será menor o igual que el grado máximo del grafo más uno. En esta sección también incluimos una demostración del Teorema de Brooks que caracteriza todos los casos en los que se tiene la igualdad entre el número cromático y el grado máximo del grafo más uno. La demostración que aquí presentamos se debe al reciente ganador de la medalla Abel, László Lovász. También se aporta un algoritmo denominado *Coloración voraz*, el cual nos indica como colorear un grafo haciendo uso de a lo sumo un color más que el valor del índice de degeneración del grafo. Veremos como este algoritmo no siempre nos da una coloración óptima del grafo.

El Capítulo 2 se centra en la coloración de grafos planares. En él se introducirá el concepto de grafo planar y daremos resultados básicos relacionados con este tipo de grafos. Entre los resultados que se introducen destaca la fórmula de Euler, que afirma que todo grafo planar conexo con  $C$  caras,  $A$  aristas y  $V$  vértices verifica que  $V + C = A + 2$ . Usando este resultado establecemos cotas superiores para el número de aristas de un grafo planar. Estas cotas nos permiten decir, en particular, que los grafos planares tienen índice de degeneración menor o igual que cinco. Explotando estas cotas superiores damos resultados sobre la coloración de ciertos grafos planares y, en particular, demostramos el ya mencionado Teorema de los cinco colores.

Por último, el Capítulo 3 se encuentra dividido en cuatro secciones. La primera de ellas tiene por objetivo el desarrollo del Teorema Combinatorio de los ceros, que será la herramienta fundamental para el desarrollo de este capítulo. A continuación, se introduce la coloración algebraica de grafos planares. Para ello asociamos a cada grafo un polinomio, denominado polinomio gráfico. Además, se

caracteriza la existencia de una  $k$ -coloración de un grafo por la pertenencia del polinomio gráfico a un ideal. Este es el resultado más importante del Capítulo 3 (Teorema 3.8). En la siguiente sección establecemos una condición suficiente para que un grafo sea  $k$ -coloreable. Para ello conseguimos interpretar de forma combinatoria los coeficientes que aparecen en el polinomio gráfico. En la última sección se aportará un algoritmo que nos permite obtener el número cromático de un grafo. Se comentarán las ventajas e inconvenientes desde el punto de vista computacional del algoritmo propuesto. Finalmente explicaremos la implementación realizada en SINGULAR de dos funciones, una de ellas nos indicará si el grafo es  $k$ -coloreable, mientras que la otra nos devolverá el número cromático del grafo.

## Coloración de grafos

En este capítulo nos introduciremos en la coloración de grafos, uno de los problemas que más interés suscita en la Teoría de Grafos. Una coloración de un grafo es una asignación de *colores* a cada uno de los vértices de forma que no haya dos vértices adyacentes con el mismo *color* asignado. Uno de los principales problemas en coloración de grafos es determinar el menor número de colores necesarios para colorear un grafo, lo que conocemos como el número cromático del grafo. El objetivo de este capítulo es establecer varias cotas superiores e inferiores para este valor. La mayoría de los conceptos básicos desarrollados en este capítulo se encuentran recogidos en [1].

### 1.1. Introducción a la coloración de grafos

En esta sección plantearemos una serie de conceptos que nos introducirán en la coloración de grafos.

Denotamos por  $G = (V, E)$  a un grafo no dirigido donde  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  es su conjunto de  $n$  vértices y  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  es su conjunto de  $m$  aristas.

Nos planteamos las siguientes preguntas relativas a  $G$ . Dado  $k \in \mathbb{Z}^+$ ,

¿Es posible colorear los vértices del grafo con a lo sumo  $k$  colores distintos de forma que siempre que haya dos vértices adyacentes, estos tengan asociados un color diferente? ¿Cuál es el menor valor  $k$  tal que existe una asignación verificando las condiciones anteriores?

En esta sección buscaremos dar respuesta a este tipo de preguntas.

Si establecemos una biyección entre los  $k$  colores y los enteros positivos  $\{1 \dots k\}$ , surge la siguiente definición de  $k$ -coloración.

**Definición 1.1.** *Dado un grafo  $G = (V, E)$  y  $k \in \mathbb{Z}^+$ , una  $k$ -coloración es una aplicación  $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  verificando que  $f(u) \neq f(v)$  para todo  $\{u, v\} \in E$ . Decimos que  $G$  es  $k$ -coloreable si existe una  $k$ -coloración. El número cromático de  $G$  es el menor número entero  $k$  tal que el grafo  $G$  es  $k$ -coloreable y lo denotamos como  $\chi(G)$ .*

Una vez introducidos estos conceptos las preguntas anteriormente formuladas se pueden reescribir como: Dado un grafo  $G$  y  $k \in \mathbb{Z}^+$ , ¿Se puede  $k$ -colorear el grafo  $G$ ? ¿Cuál es el valor de  $\chi(G)$ ?

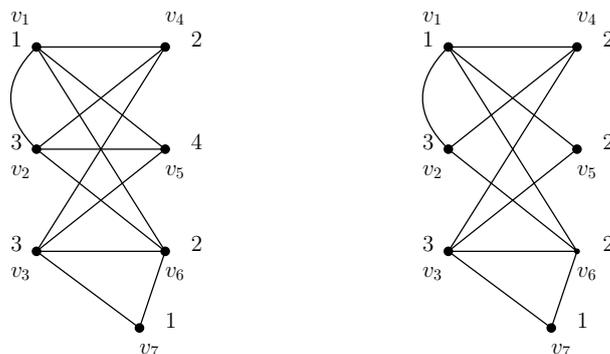


Figura 1.1. 4-coloración y 3-coloración de un mismo grafo

Consideremos el grafo  $G$  de la Figura 1.1, en la parte izquierda se presenta una 4-coloración de  $G$ . Con esto podemos establecer que  $\chi(G) \leq 4$ . No obstante, la 3-coloración de  $G$  en la parte derecha de la Figura 1.1 demuestra que  $\chi(G) \leq 3$ .

A partir del concepto de conjunto independiente surge una reformulación del hecho de que un grafo sea  $k$ -coloreable.

**Definición 1.2.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo y  $V' \subset V$  un subconjunto de vértices, decimos que  $V'$  es independiente si y solo si para todo  $u, w \in V'$  se tiene que  $\{u, w\} \notin E$ .

Equivalentemente,  $V'$  es independiente si y solo si para todo  $e \in E$  se tiene que  $e$  no está contenido en  $V'$ .

Analizando la Figura 1.1 podemos tomar  $V'_1 = \{v_1, v_7\}$ ,  $V'_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$  y  $V'_3 = \{v_2, v_3\}$ , de modo que  $V'_i$  es independiente para todo  $i = 1, 2, 3$ . Es fácil de comprobar pues los vértices pertenecientes al conjunto  $V'_i$  tienen asociado el color  $i$  y, por la definición de 3-coloración, no existen  $u, v \in V'_i$  tal que  $\{u, v\} \in E$ . En el siguiente resultado explotamos esta misma idea para demostrar la relación entre la existencia de una coloración y la existencia de una partición del conjunto de vértices en independientes.

**Proposición 1.3.** Un grafo  $G$  es  $k$ -coloreable si y solo si existe una partición de  $V$  en a lo sumo  $k$  conjuntos independientes.

*Demostración.*

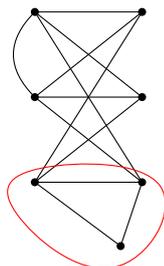
" $\Rightarrow$ ") Sea  $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  una  $k$ -coloración de  $G$ . Tomamos  $k$  subconjuntos de  $V$  dados por  $V_i = \{v \in V : f(v) = i\}$  con  $i \in \{1, \dots, k\}$ . El conjunto  $P = \{V_i / V_i \neq \emptyset\}$  es una partición de  $V$  con a lo sumo  $k$  conjuntos independientes, para completar la prueba basta con ver que los elementos de  $P$  son todos

independientes. En efecto, si tomamos  $u, v \in V_i$  tenemos que  $f(u) = f(v) = i$  y, como  $f$  es una coloración, entonces  $\{u, v\} \notin E$ , por tanto,  $V_i$  es independiente. " $\Leftarrow$ ") Sea  $P = \{V_1, \dots, V_r\}$  una partición de  $V$  con  $r$  conjuntos independientes y  $r \leq k$ . Definimos  $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$  como  $f(u) = i$  si y solo si  $u \in V_i$ . Tenemos que  $f$  es aplicación porque  $P$  es una partición de  $V$  y, por tanto, todo  $u \in V$  pertenece a un único  $V_i$  con  $i \in \{1, \dots, r\}$ . Veamos ahora que  $f$  es una  $k$ -coloración. Sean  $u, v \in V$  tal que  $f(u) = f(v) = i$  con  $i \in \{1, \dots, r\}$ , entonces  $u, v \in V_i$  y como  $V_i$  es independiente, entonces  $\{u, v\} \notin E$ . Luego  $f$  es una  $k$ -coloración.

**Definición 1.4.** Un grafo  $G = (V, E)$  es bipartito si existe una partición de su conjunto de vértices en a lo sumo dos subconjuntos independientes.

Particularizando la Proposición 1.3 para  $k = 2$  tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 1.5.** Un grafo  $G$  es 2-coloreable si y solo si  $G$  es bipartito.



**Figura 1.2.** El grafo  $G$  del ejemplo no es bipartito, y por tanto no es 2-coloreable

Analizando la Figura 1.2, vemos que  $G$  no es bipartito por tanto no es 2-coloreable. Podemos concluir así que  $\chi(G) = 3$ . En general no es fácil estimar el valor exacto del número cromático de un grafo, pero en este capítulo veremos resultados que permiten acotar su valor.

## 1.2. El algoritmo Coloración voraz

En esta sección presentamos el algoritmo *coloración voraz* (en inglés *greedy coloring*), algoritmo que nos dirá una forma de colorear un grafo. Como veremos a continuación, este algoritmo va a usar a lo sumo  $s + 1$  colores siendo  $s$  el índice de degeneración del grafo (ver la Definición 1.8). Cabe destacar que no siempre se cumple que el número de colores utilizados por este algoritmo es  $s + 1 = \chi(G)$ , por tanto, el algoritmo *coloración voraz* no da siempre la coloración óptima (usando el mínimo número posible de colores). Antes de explicar el algoritmo procedemos a introducir algunos conceptos básicos.

**Definición 1.6.** El grado de un vértice  $v$  en  $G$  es el número de aristas incidentes al vértice y se denota por  $\deg_G(v)$ . Denotamos por  $\delta(G)$  y  $\Delta(G)$  al menor y mayor grado, respectivamente, de los vértices de  $G$ .

**Definición 1.7.** Sean  $G = (V, E)$  y  $G' = (V', E')$  dos grafos, decimos que  $G'$  es subgrafo de  $G$  si  $V' \subseteq V$  y  $E' \subseteq E$ . Además, decimos que  $G'$  es un subgrafo inducido de  $G$  si  $E' = \{e \in E / e \in V'\}$ .

Denotaremos por  $G - \{v\}$  al subgrafo inducido de  $G$  con conjunto de vértices  $V - \{v\}$ .

**Definición 1.8.** Sea  $t \in \mathbb{Z}^+$ , el grafo  $G$  es  $t$ -degenerado si todo subgrafo inducido  $H$  de  $G$  satisface que  $\delta(H) \leq t$ .

El índice de degeneración de  $G$ , denotado por  $idg(G)$ , es:

$$s = \text{mín}\{t \in \mathbb{N}/G \text{ es } t\text{-degenerado}\}$$

**Lema 1.9.** Sea  $G$  grafo entonces,  $\delta(G) \leq idg(G) \leq \Delta(G)$  y

$$idg(G) = \text{máx}\{\delta(H) / H \text{ subgrafo inducido de } G\}$$

*Demostración.*

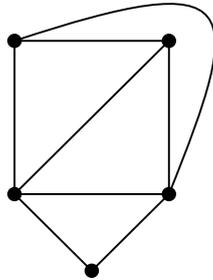
La desigualdad  $\delta(G) \leq idg(G) \leq \Delta(G)$  se ve directamente.

Sea  $s = idg(G)$ , veamos que  $s \geq \text{máx}\{\delta(H)/H \text{ subgrafo inducido de } G\}$ . Sea  $H$  subgrafo inducido de  $G$ , como  $G$  es  $s$ -degenerado entonces  $\delta(H) \leq s$ . Por la definición de índice de degeneración tenemos que  $s = \text{mín}\{t \in \mathbb{N}/G \text{ es } t\text{-degenerado}\}$ . Entonces  $\delta(H) \leq s$ . Luego,  $s \geq \text{máx}\{\delta(H)/H \text{ subgrafo inducido de } G\}$ .

Veamos ahora que  $s \leq \text{máx}\{\delta(H)/H \text{ subgrafo inducido de } G\}$ . Como  $s = \text{mín}\{t \in \mathbb{N}/G \text{ es } t\text{-degenerado}\}$ , entonces existe un subgrafo inducido  $H$  de  $G$  con  $\delta(H) = s$ . Luego  $s \leq \text{máx}\{\delta(H)/H \text{ subgrafo inducido de } G\}$ .

Concluimos así que  $s = \text{máx}\{\delta(H)/H \text{ subgrafo inducido de } G\}$ .

En el grafo de la Figura 1.3, podemos ver que  $\delta(G) = 2 < idg(G) = 3 < \Delta(G) = 4$ .



**Figura 1.3.** Grafo 3-degenerado con grado mínimo igual a 2 y grado máximo igual a 4

A priori, puede parecer que para calcular el índice de degeneración de un grafo habría que estudiar todos sus subgrafos inducidos, que en total son  $2^n - 1$  subgrafos. No obstante, vamos a presentar un algoritmo que lo resuelve de manera más eficiente.

Sea  $G$  un grafo que consta de  $n$  vértices. El algoritmo *Índice de degeneración* recibe como entrada un grafo  $G$  y devuelve el índice de degeneración del mismo. Además, este algoritmo nos da una ordenación de los vértices de  $G$  que nos será útil en el algoritmo *Coloración voraz*.

**Algoritmo Índice de degeneración**

Input:  $G = (V, E)$  grafo  
Output:  $s = idg(G)$

$G_n = G$   
**for**  $i = n$  downto 1 **do**  
     $d_i = \delta(G_i)$   
    Sea  $v_i \in V(G_i)$  con  $\deg_{G_i}(v_i) = \delta(G_i)$   
     $G_{i-1} = G_i - \{v_i\}$   
**end for**  
 $s = \text{máx}\{d_1, \dots, d_n\}$   
**return**  $s$

Figura 1.4. Algoritmo que devuelve el índice de degeneración del grafo  $G$  introducido.

**Proposición 1.10.** *El algoritmo Índice de degeneración de la Figura 1.4 recibe como parámetro de entrada un grafo  $G$  y devuelve su correspondiente índice de degeneración.*

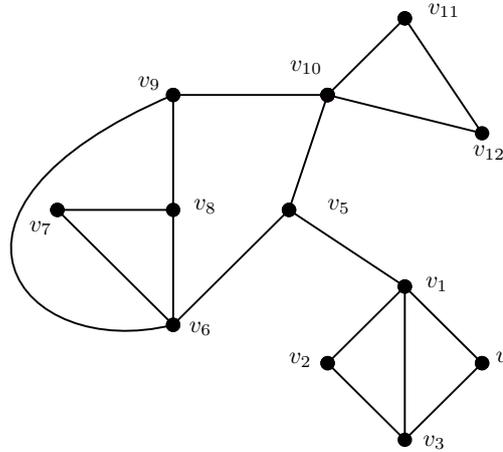
*Demostración.*

El algoritmo recibe como parámetro de entrada un grafo  $G$ . Veamos que efectivamente devuelve el índice de degeneración del grafo  $G$ .

Por el Lema 1.9, el índice de degeneración de  $G$  es  $s = \text{máx}\{\delta(H)/H \text{ subgrafo inducido de } G\}$ . El algoritmo nos devuelve  $r = \text{máx}\{\delta(G_1), \dots, \delta(G_n)\}$  donde  $G_i$  con  $i = 1, \dots, n$  es un subgrafo inducido de  $G$ . Como  $\{\delta(G_1), \dots, \delta(G_n)\} \subseteq \{\delta(H)/H \text{ subgrafo inducido de } G\}$ , se tiene que  $r \leq s$ .

Por otro lado,  $s = \text{máx}\{\delta(H)/H \text{ subgrafo inducido de } G\}$ , entonces, existe  $K$ , subgrafo inducido de  $G$  con  $V(K) = \{u_1, \dots, u_n\}$ , tal que  $s = \delta(K)$ . Sean  $v_1, \dots, v_n \in V$ , tomamos  $i \in \{1, \dots, n\}$  como el mayor valor tal que  $v_i \in K$ . Observamos que  $V(K) \subset V(G_i)$ . Por tanto,  $s = \delta(K) \leq \delta(G_i) \leq r$ . Concluimos entonces que el algoritmo nos devuelve el índice de degeneración.

Se muestra un ejemplo de aplicación del Algoritmo 1.4 en la Figura 1.5. En ella vemos un grafo y los menores grados correspondientes a los subgrafos



$d_{12} = \delta(G) = \deg_G(v_{12}) = 2$	$\longrightarrow$	$G_{11} = G - \{v_{12}\}$
$d_{11} = \delta(G_{11}) = \deg_{G_{11}}(v_{11}) = 1$	$\longrightarrow$	$G_{10} = G_{11} - \{v_{11}\}$
$d_{10} = \delta(G_{10}) = \deg_{G_{10}}(v_{10}) = 2$	$\longrightarrow$	$G_9 = G_{10} - \{v_{10}\}$
$d_9 = \delta(G_9) = \deg_{G_9}(v_9) = 2$	$\longrightarrow$	$G_8 = G_9 - \{v_9\}$
$d_8 = \delta(G_8) = \deg_{G_8}(v_8) = 2$	$\longrightarrow$	$G_7 = G_8 - \{v_8\}$
$d_7 = \delta(G_7) = \deg_{G_7}(v_7) = 1$	$\longrightarrow$	$G_6 = G_7 - \{v_7\}$
$d_6 = \delta(G_6) = \deg_{G_6}(v_6) = 1$	$\longrightarrow$	$G_5 = G_6 - \{v_6\}$
$d_5 = \delta(G_5) = \deg_{G_5}(v_5) = 1$	$\longrightarrow$	$G_4 = G_5 - \{v_5\}$
$d_4 = \delta(G_4) = \deg_{G_4}(v_4) = 2$	$\longrightarrow$	$G_3 = G_4 - \{v_4\}$
$d_3 = \delta(G_3) = \deg_{G_3}(v_3) = 2$	$\longrightarrow$	$G_2 = G_3 - \{v_3\}$
$d_2 = \delta(G_2) = \deg_{G_2}(v_2) = 1$	$\longrightarrow$	$G_1 = G_2 - \{v_2\}$
$d_1 = \delta(G_1) = \deg_{G_1}(v_1) = 0$		

**Figura 1.5.** Ejemplo de ejecución del algoritmo Índice de degeneración

inducidos obtenidos al aplicar el algoritmo *Índice de degeneración*. De esta manera es fácil ver que el índice de degeneración del grafo es 2, pues, como indica el algoritmo,  $\max \{d_i\} = 2$ , para todo  $i \in \{1, \dots, 12\}$

**Teorema 1.11.** *El algoritmo coloración voraz recibe como entrada un grafo  $G$  y describe una  $s + 1$  coloración de  $G$ , siendo  $s = \text{idg}(G)$ . En particular,  $\chi(G) \leq \text{idg}(G) + 1$ .*

*Demostración.*

Observamos que el algoritmo *Coloración voraz* comienza siguiendo los pasos del Algoritmo 1.4 y, por la Proposición 1.3, tenemos que  $s$  es el índice de degeneración de  $G$ . Se observa también que en esta primera parte del algoritmo se ordenan los vértices de  $G$  como  $v_1, \dots, v_n$ . A continuación coloreamos el grafo, para ello definimos la aplicación  $f : V \longrightarrow \{1, \dots, s + 1\}$  y coloreamos en orden  $v_1, v_2, \dots, v_n$  siguiendo la siguiente fórmula.

$$f(v_j) = \min(\{1, \dots, s + 1\} - f(\{v_k : k < j \wedge \{v_k, v_j\} \in E\}))$$

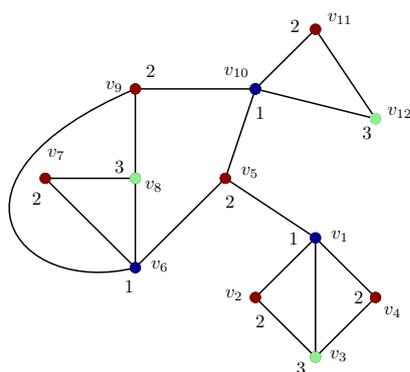
Veamos que  $f$  es una coloración. En efecto, para definir  $f(v_j)$  solo se tienen en cuenta los valores de  $f(v_1), \dots, f(v_{j-1})$ . Como  $v_1, \dots, v_j \in V(G_j)$  y  $\deg_{G_j}(v_j) = d_j \leq s$ , entonces  $v_j$  tiene, a lo sumo,  $s$  vecinos entre  $v_1, \dots, v_{j-1}$  y, por tanto,  $\{1, \dots, s + 1\} - f(\{v_k : k < j \wedge \{v_k, v_j\} \in E\}) \neq \emptyset$ . Asimismo, de la propia construcción de  $f$  se deduce que dos vértices adyacentes no pueden tener el mismo color. Por tanto,  $f$  es un coloración con  $s + 1$  colores. Concluimos así que  $\chi(G) \leq s + 1$ .

```

Algoritmo Coloración voraz
    Input:  $G = (V, E)$  grafo
    Output:  $f : V \rightarrow \{1, \dots, s + 1\}$ , una  $s + 1$ -coloración de  $G$ 

     $G_n = G$ 
    for  $i = n$  downto 1 do
         $d_i = \delta(G_i)$ 
        Sea  $v_i \in V(G_i)$  con  $\deg_{G_i}(v_i) = \delta(G_i)$ 
         $G_{i-1} = G_i - \{v_i\}$ 
    end for
     $s = \max\{d_1, \dots, d_n\}$ 
    for  $j = 1$  to  $n$  do
         $f(v_j) = \min(\{1, \dots, s + 1\} - f(\{v_k : k < j \wedge \{v_k, v_j\} \in E\}))$ 
    end for
    return  $f$ 
    
```

Figura 1.6. Algoritmo que devuelve la coloración del grafo  $G$ .



$$\begin{aligned}
 f(v_1) &= 1 \\
 f(v_2) &= \min(\{1, 2, 3\} - \{f(v_1)\}) = 2 \\
 f(v_3) &= \min(\{1, 2, 3\} - \{f(v_1), f(v_2)\}) = 3 \\
 f(v_4) &= \min(\{1, 2, 3\} - \{f(v_1), f(v_3)\}) = 1 \\
 f(v_5) &= \min(\{1, 2, 3\} - \{f(v_1)\}) = 2 \\
 f(v_6) &= \min(\{1, 2, 3\} - \{f(v_5)\}) = 1 \\
 f(v_7) &= \min(\{1, 2, 3\} - \{f(v_6)\}) = 2 \\
 f(v_8) &= \min(\{1, 2, 3\} - \{f(v_6), f(v_7)\}) = 3 \\
 f(v_9) &= \min(\{1, 2, 3\} - \{f(v_6), f(v_8)\}) = 2 \\
 f(v_{10}) &= \min(\{1, 2, 3\} - \{f(v_5), f(v_9)\}) = 1 \\
 f(v_{11}) &= \min(\{1, 2, 3\} - \{f(v_{10})\}) = 2 \\
 f(v_{12}) &= \min(\{1, 2, 3\} - \{f(v_{10}), f(v_{11})\}) = 3
 \end{aligned}$$

Figura 1.7. 3-coloración obtenida al aplicar el algoritmo *Coloración voraz*

Como podemos ver en la Figura 1.7, los vértices han sido enumerados siguiendo el Algoritmo 1.4, mientras que para la coloración del grafo hemos em-

pleado el Algoritmo 1.6, obteniendo así una 3-coloración del grafo.

Como ya mencionamos en el Lema 1.9,  $idg(G) \leq \Delta(G)$ , por tanto aplicando el Teorema 1.11 se tiene directamente el siguiente resultado.

**Corolario 1.12.** *Todo grafo  $G$  es  $\Delta(G) + 1$ -coloreable.*

Si nos fijamos en la Figura 1.7, el corolario anterior nos dice que el grafo  $G$  va a ser 4-coloreable. Anteriormente habíamos visto que el grafo  $G$  de nuestra figura es 3-coloreable y por lo tanto, también será 4-coloreable.

A continuación vamos a presentar una cota inferior para el número cromático de un grafo  $G$ , para ello definimos el número de clique.

**Definición 1.13.** *Sea  $G = (V, E)$  un grafo, un clique es un conjunto de vértices,  $C = \{c_1, \dots, c_k\} \subseteq V$  tal que todo par de vértices distintos son adyacentes, es decir,  $\{c_i, c_j\} \in E$ , para todo  $i \neq j$ . El tamaño de un clique viene dado por el número de vértices que contiene.*

*El número de clique, denotado por  $\omega(G)$ , corresponde con el tamaño del mayor clique que contiene el grafo  $G$ .*

Una vez definido el número de clique podemos introducir el siguiente resultado.

**Proposición 1.14.** *Dado un grafo  $G$ , entonces el número cromático es mayor o igual al número de clique del grafo. Es decir,  $\chi(G) \geq \omega(G)$ .*

*Demostración.*

Sea  $\omega(G) = k$  el número de clique del grafo  $G$ , entonces, existen  $k$  vértices tal que  $\{c_i, c_j\} \in E$ , para todo  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  con  $i \neq j$ . Luego, se necesitan, como mínimo  $k$  colores para colorear los vértices de  $C$  sin que haya dos vértices adyacentes del mismo color. Concluimos así que  $\omega(G) \leq \chi(G)$ .

Con este resultado concluimos que el número cromático de un grafo  $G$  se encuentra acotado superior e inferiormente por  $\omega(G) \leq \chi(G) \leq idg(G) + 1 \leq \Delta(G) + 1$ . A continuación veremos el Teorema de Brooks que afirma que, excepto en dos casos excepcionales, se tiene que  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ . Antes de enunciar y demostrar el teorema, incluimos algunas demostraciones.

**Teorema 1.15 (Teorema de Brooks).** *Sea  $G$  un grafo conexo tal que  $G \neq K_n$  y  $G$  no es un ciclo impar. Entonces, el número cromático de  $G$  es menor o igual al grado máximo del grafo, es decir,  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .*

La demostración original del teorema anterior se debe a Brooks y se encuentra en [11], sin embargo, Lovász, en [8] (1975), propuso una demostración simplificada del mismo. En esta memoria incluimos la demostración de Zajac [9], que es una variante de la de Lovász.

**Definición 1.16.** Dado un grafo  $G = (V, E)$ :

Un camino es una sucesión de vértices  $P = (v_1, \dots, v_\ell)$  de forma que cada dos vértices consecutivos son adyacentes, es decir,  $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$  para todo  $i \in \{1, \dots, \ell\}$ , además, se dice que  $P$  es un camino de longitud  $\ell$ . Si  $v_0 = v_\ell$  se dice que  $P$  es un camino cerrado y si, además,  $v_i \neq v_j$  para todo  $1 \leq i < j \leq \ell$  se dice que  $P$  es un ciclo.

El grafo  $G$  se dice que es conexo si para cada par de vértices  $u, v \in V$  diferentes de  $G$  existe un camino que comienza en  $u$  y termina en  $v$ .

Una vez introducido los conceptos anteriores, procedemos a demostrar el Teorema de Brooks.

*Demostración (Teorema de Brooks).*

Sea  $k = \Delta(G)$ , veamos que  $G$  es  $k$ -coloreable. Procedemos por inducción sobre  $n$ , número de vértices de  $G$ . Si  $n \leq k+1$ , entonces  $n = k+1$  y como  $G \neq K_n$ , hay dos vértices que no están conectados en  $G$ , luego  $G$  es  $k$ -coloreable. Supongamos  $n > k+1$ . Si existe un vértice  $v \in V(G)$ , con  $\deg(v) < k$ , entonces, consideramos el grafo  $G - \{v\}$ . Por hipótesis de inducción, existe una  $k$ -coloración de  $G - \{v\}$ . Además, podemos extender esta  $k$ -coloración a todo  $G$  asignándole a  $v$  un color que no le hemos asignado a ninguno de sus vecinos. Así pues, supongamos que todos los vértices de  $G$  tienen grado exactamente  $k$ . Si  $k = 2$ , entonces  $\Delta(G) = 2$  y como  $G$  es un grafo conexo, entonces se trata de un ciclo. Además, por hipótesis tenemos que  $G$  no es un ciclo impar, luego es un ciclo par y por lo tanto es 2-coloreable. Sea  $v$  un vértice de  $G$ , como  $G \neq K_{k+1}$ , entonces existen dos vértices  $u, w$ , no adyacentes y ambos vecinos de  $v$ . A partir de ahora denotamos  $v_1 = u, v_2 = v, v_3 = w$ . Tomamos  $P = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_r)$  un camino que no pasa dos veces por el mismo vértice y de la mayor longitud posible. Se observa que el vértice  $v_r$  debe tener todos sus vecinos en  $P$  por la maximalidad de  $P$ . A partir de ahora, dado un camino  $U = (u_1, \dots, u_s)$  en  $G$  que no pasa dos veces por el mismo vértice, denotamos por  $\text{CaminoColoreado}(u_1, \dots, u_{s-1}; u_s)$  al procedimiento de ir asignando colores por orden a  $u_1, u_2, \dots, u_{s-1}$  de forma que el color asignado a  $u_i$  sea diferente al de los vecinos ya coloreados. Dado que todos los vértices de  $G$  tienen grado  $k$  y disponemos de  $k$  colores, este procedimiento siempre se puede llevar a cabo porque el vértice  $u_i$  tiene al menos a su vértice vecino  $u_{i+1}$  sin colorear para todo  $i \in \{1, \dots, s-1\}$ . Distinguimos dos casos.

*Caso 1.* Si  $r = n$ , entonces  $P$  contiene todos los vértices de  $G$ . Primero le asignamos a los vértices  $v_1, v_3$  el mismo color. Sea  $v_j$  el vecino de  $v_r$  con menor índice, a continuación, aplicamos  $\text{CaminoColoreado}(v_4, \dots, v_{j-1}; v_j)$  y  $\text{CaminoColoreado}(v_n, v_{n-1}, \dots, v_j; v_2)$ . Finalmente coloreamos el vértice  $v_2$ . Esto es posible ya que previamente le habíamos asociado el mismo color a sus vértices vecinos  $v_1$  y  $v_3$ . Concluimos así que  $G$  es  $k$ -coloreable.

*Caso 2.* Si  $r < n$ . Todos los vecinos de  $v_r$  se encuentran en  $P = (v_1, v_2, \dots, v_r)$ . Sea  $v_j$  el vecino de  $v_r$  con menor índice, de modo que  $C = (v_r, v_j, v_{j+1}, \dots, v_r)$  es un ciclo en  $G$ . Consideramos el subgrafo  $G' = G - C$ . Coloreamos  $G'$  usando  $k$  colores por hipótesis de inducción. Si  $G'$  y  $C$  no comparten aristas, entonces aplicamos inducción nuevamente sobre el subgrafo inducido por  $C$ . Si por el contrario existe un vértice en  $C$  con un vecino en  $G'$  entonces tomamos  $v_l$ , vértice en  $C$  con el mayor índice y sea  $u$  uno de sus vecinos en  $G'$ . Tenemos que  $l < r$  pues  $v_r$  tiene todos sus vecinos en  $C$ . Como el vértice  $v_{l+1}$  no tiene ningún vecino en  $G'$ , le asignamos el mismo color que al vértice  $u$ . A continuación aplicamos el CaminoColoreado( $v_{l+2}, \dots, v_r, v_j, \dots, v_{l-1}; v_l$ ). Finalmente, como los vértices  $u, v_{l+1}$  tienen asignado el mismo color y son vecinos del vértice  $v_l$ , existe al menos un color restante no empleado, el cual se lo asignaremos al vértice  $v_l$ . Concluimos así que  $G$  es  $k$ -coloreable.

## Coloración de grafos planares

En este capítulo hablaremos de la coloración de mapas, o equivalentemente, de grafos planares. Para ello comencemos explicando en qué consiste la coloración de un mapa. Supongamos que tenemos un mapa que se encuentra formado por distintos territorios y que estos son todos conexos (con la topología usual de  $\mathbb{R}^2$ ). Para su coloración vamos a asignar un color a cada territorio de manera que los territorios que sean fronterizos no tengan asociados un mismo color, entendiendo que dos países son fronterizos si sus fronteras comparten un segmento curvo (si solo comparten puntos aislados no los consideraremos fronterizos).

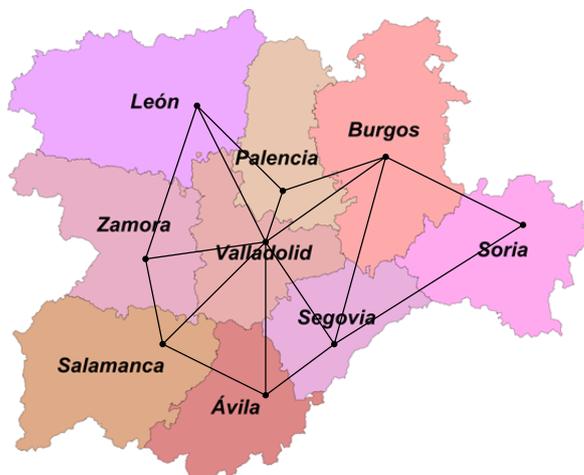
Por otro lado, dado un mapa, le podemos asociar su grafo de adyacencias de la siguiente forma: cada uno de los países que forman el mapa serán los vértices del grafo y cada par de países fronterizos se encontrarán unidos mediante una arista (ver Figura 2.1). De la propia construcción se desprende que estos grafos se pueden representar en el plano de modo que ninguna de sus aristas se crucen. Recíprocamente, dado un grafo dibujado en el plano de forma que sus aristas no se crucen, este se puede ver como el grafo de adyacencia de un mapa. Los grafos así obtenidos se denominan grafos planares.

**Definición 2.1.** *Un grafo planar es aquel grafo que se puede dibujar en un plano de modo que sus aristas no se cruzan*

Además, el problema de colorear un mapa es equivalente al de colorear el correspondiente grafo planar. Como ya mencionamos en la introducción, a raíz de dicho problema surge uno de los teoremas más importantes en la teoría de grafos.

**Teorema 2.2 (Teorema de los cuatro colores).** *Todo grafo planar es 4-coloreable.*

La demostración de este teorema es muy compleja y no se abarcará en este trabajo. Sin embargo, el objetivo principal de este capítulo es demostrar una versión más débil, el Teorema de los cinco colores. Para llegar a su demostración primero probaremos, haciendo uso de la fórmula de Euler para grafos



**Figura 2.1.** Grafo planar asociado a las provincias de Castilla y León

planares, que todo grafo planar es 5-degenerado (Proposición 2.10). Como consecuencia, el algoritmo *Coloración voraz* del capítulo anterior proporciona un método para obtener una 6-coloración de cualquier grafo planar. Veremos cómo adaptar este algoritmo para conseguir una 5-coloración de cualquier grafo planar, demostrando así el Teorema de los cinco colores. Aplicando ideas similares también podremos demostrar que todo grafo planar 4-degenerado es también 4-coloreable. Estos dos resultados son versiones débiles del ya citado Teorema de los 4 colores.

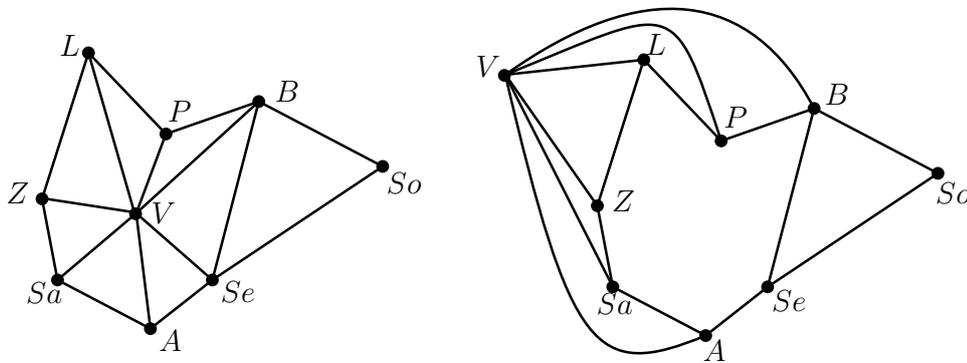
En este capítulo demostraremos también que todo grafo planar con  $\omega(G) = 2$  (es decir, sin triángulos) es 3-degenerado. Por tanto, el algoritmo *Coloración voraz* proporciona una 4-coloración de estos grafos. También podremos demostrar que todo grafo planar sin triángulos, cuadrado ni pentágonos es 2-degenerado y, por tanto, 3-coloreable. Esto proporciona dos versiones débiles del Teorema de Grötzsch:

**Teorema 2.3.** (*Teorema de Grötzsch*) *Todo grafo planar sin triángulos es 3-coloreable.*

## 2.1. Fórmula de Euler

El primer resultado que introduciremos y demostraremos es la fórmula de Euler para grafos planares conexos. Esta fórmula relaciona el número de vértices, aristas y caras de un grafo planar. Si bien el concepto de vértice y arista de un grafo no requiere más explicación, el concepto de cara es más sutil. Dado un grafo dibujado en el plano, entendemos por cara como aquella región cuya frontera está formada por aristas de manera que en su interior no haya

ninguna arista ni vértice. Como consecuencia del Teorema de la curva de Jordan, todo grafo planar conexo tiene un única cara exterior no acotada. Como se puede observar, el concepto de cara no es inherente al grafo planar que estemos considerando, sino que depende de la forma embeberlo en el plano que hayamos escogido, que no es única. No obstante, como consecuencia de la fórmula de Euler, el número de caras del grafo es independiente de la representación escogida. Dada esta definición, tenemos que el grafo de la Figura 2.1 consta exactamente de 9 caras, pues distinguimos ocho regiones acotadas por aristas que no contienen ninguna arista ni vértice. La novena cara se trata de la cara exterior.



**Figura 2.2.** Dos representaciones del grafo planar de la Figura 2.1. Se observa que constan del mismo número de caras

**Teorema 2.4 (Fórmula de Euler).** *Sea  $G$  un grafo planar conexo, se verifica que:*

$$V + C = A + 2, \tag{2.1}$$

donde,  $V$  es el número de vértices,  $A$  el número de aristas y  $C$  el número de caras del grafo  $G$ .

Para la demostración de la Fórmula de Euler emplearemos los siguientes resultados.

**Lema 2.5.** *Sea  $G$  un grafo, si  $\deg(v) \geq 2$  para todo  $v \in V$ , entonces  $G$  tiene un ciclo.*

*Demostración.*

Sea  $v_0 \in V(G)$  tal que  $\deg(v_0) \geq 2$ , entonces existe  $v_1 \in V(G)$  tal que  $\{v_0, v_1\} \in E(G)$ . Si  $\deg(v_1) \geq 2$ , entonces existe  $v_2 \in V(G)$  de modo que  $v_2 \neq v_0$  y  $\{v_1, v_2\} \in E(G)$ . Repetimos el proceso hasta que encontremos un vértice  $v_j$  que se encuentre en el camino  $P = (v_0, v_1, v_2, \dots, v_{j-1})$ . Sea  $v_j = v_i$  con  $i < j$ , entonces existe el ciclo  $P' = (v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1})$ .

**Lema 2.6.** *Sea  $G$  un grafo conexo y  $e \in E$  una arista contenida en un ciclo de  $G$ , entonces  $G - \{e\}$  es conexo, donde  $G - \{e\}$  denota el grafo con conjunto de vértices  $V(G)$  y conjunto de aristas  $E - \{e\}$ .*

*Demostración.*

Supongamos que tenemos dos vértices  $v_1, v_2 \in V(G)$ . Por hipótesis tenemos que  $G$  es un grafo conexo, luego, existe un camino  $P = (v_1 = u_0, \dots, v_2 = u_r)$  que une  $v_1$  con  $v_2$ . Si el camino no recorre la arista  $e$ , entonces está contenido en  $G - e$ . Supongamos ahora que el camino pasa por  $e$ , entonces  $e = (u_i, u_{i+1})$  para cierto  $i \in \{1, \dots, r-1\}$ , en este caso buscaremos otro camino que conecte  $v_1$  con  $v_2$ . Sabemos por hipótesis que la arista  $e$  se encuentra en un ciclo  $C = (u_i, u_{i+1}, w_1, \dots, w_s)$  de  $G$ , luego, tomamos el camino  $P' = (v_1, \dots, u_i, w_s, w_{s-1}, \dots, u_{i+1}, \dots, v_2)$ . El camino  $P'$  se encuentra en  $G - \{e\}$  y une  $v_1$  con  $v_2$ . Concluimos así que  $G - \{e\}$  es conexo.

A continuación demostramos la Fórmula de Euler.

*Demostración.*

Procedemos por inducción sobre el número de aristas. Sea  $G$  un grafo conexo, si  $G$  no tiene aristas, entonces tiene una única cara y un único vértice, verificándose así que  $V + C = A + 2 = 2$ .

Supongamos que la Fórmula de Euler es cierta para grafos planares con  $A - 1$  aristas. Veamos que es cierta para  $A$  aristas con  $A > 0$ . Para ello vamos a distinguir dos casos:

El grafo  $G$  tiene al menos un vértice  $v \in V$  tal que  $\deg(v) = 1$ .

Tomamos el grafo inducido  $G' = G - \{v\}$  y sean  $V', A'$  y  $C'$  su número de aristas, vértices y caras, respectivamente. Como  $G$  es un grafo planar entonces  $G'$  también lo es, veamos que  $G'$  es conexo. Supongamos que tenemos un camino que une dos vértices arbitrarios,  $v_1, v_2 \in V(G)$ , el cual pasa por  $v$  y viene dado por  $P = (v_1, \dots, v', v, v', \dots, v_2)$ . Basta con considerar el camino en  $G'$  siguiente  $P' = (v_1, \dots, v', \dots, v_2)$  para concluir que  $G'$  es conexo. Como  $G'$  consta de  $A - 1$  aristas (hemos eliminado un vértice de grado 1), aplicando la hipótesis de inducción,  $G'$  verifica que  $V' + C' = A' + 2$ , donde  $V' = V - 1$ ,  $C' = C$ ,  $A' = A - 1$ . Luego,  $V - 1 - C = A - 1 + 2$ , por lo tanto,  $G$  cumple la Fórmula de Euler.

Todos los vértices del grafo  $G$  tienen grado igual o mayor a 2.

Por el Lema 2.5 afirmamos que  $G$  va a contener al menos un ciclo. Además, como  $G$  es conexo, si tomamos  $e \in E(G)$  una arista de un ciclo de  $G$ , entonces el grafo inducido  $G - \{e\}$  es conexo. Sea  $G' = G - \{e\}$  y denotamos por  $V', A'$  y  $C'$  su número de vértices, aristas y caras, respectivamente. Por otro lado, como  $G$  es planar,  $G - \{e\}$  también lo va a ser. Aplicando la hipótesis de inducción al grafo inducido  $G - \{e\}$ , tenemos que  $V' + C' = A' + 2$ , claramente tenemos que  $V' = V$  y

$A' = A - 1$ . Veamos que  $C' = C - 1$ . Se observa que cuando eliminamos una arista desaparecen automáticamente las dos caras que se encuentran delimitadas por ella, sin embargo, aparece una nueva cara formada por las aristas que encierran a  $e$ , de donde  $C' = C - 2 + 1 = C - 1$ . Si sustituimos  $V'$ ,  $C'$  y  $A'$  en la ecuación, tenemos que  $V - C - 2 + 1 = A - 1 + 2$ , es decir,  $V - C = A + 2$ . Concluimos así que el grafo  $G$  verifica la Fórmula de Euler.

Podemos encontrar otras versiones de la demostración de la Fórmula de Euler en [3].

**Definición 2.7.** *El cuello (girth en inglés) de un grafo, denotado como  $g(G)$ , es la longitud del ciclo más corto del grafo.*

Como las caras de un grafo planar son caminos cerrados, entonces  $g(C)$  es una cota inferior para el número de vértices y aristas en la frontera de una cara. Combinando este concepto con la Fórmula de Euler podemos obtener una cota superior para el número de aristas de un grafo planar:

**Proposición 2.8.** *Sea  $G$  un grafo planar y sea  $g = g(G)$ , entonces  $A \leq \frac{g}{g-2}(V - 2)$ . En particular, todo el grafo planar verifica que  $A \leq 3V - 6$ .*

*Demostración.*

Sean  $F_1, \dots, F_C$  las caras de  $G$  y sea  $c_i$  el número de aristas que hay en la cara  $i$ -ésima  $\forall i \in \{1, \dots, C\}$ . Como cada arista puede separar, a lo sumo, dos caras, se tiene que  $\sum_{i=1}^C c_i \leq 2A$ . Además, una cara tiene como mínimo  $g$  aristas, luego  $gC \leq \sum_{i=1}^C c_i \leq 2A$ . Aplicando la desigualdad anterior tenemos que  $C \leq \frac{2}{g}A$  y por la fórmula de Euler  $V + C = A + 2$ . Juntando ambos resultados llegamos a que:

$A + 2 \leq V + \frac{2}{g}A$ , que es equivalente a  $A \leq \frac{g}{g-2}V - \frac{2g}{g-2}$ . En particular, como en cualquier grafo  $g \geq 3$ , se concluye que  $A \leq \frac{g}{g-2}(V - 2) \leq 3(V - 2)$ .

La fórmula anterior nos da una condición necesaria para que un grafo sea planar. En particular, se puede utilizar para demostrar que ciertos grafos no son planares. Por ejemplo, sea  $K_5$ , el grafo completo con 5 vértices de la Figura 2.3.

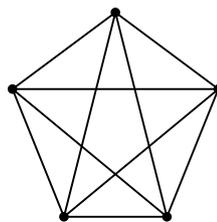


Figura 2.3.  $K_5$

Estudiando la figura anterior vemos que tiene 10 aristas y 5 vértices. Como  $10 \leq 15 - 6$ , por la Proposición 2.8 concluimos que  $K_5$  no es un grafo planar. También este mismo resultado se puede utilizar para demostrar que el grafo bipartito completo  $K_{3,3}$  de la Figura 2.4 no es planar. En efecto, el cuello de este grafo es 4 (no hay ciclos de longitud 3 pues es bipartito) y  $A = 9$  y  $V = 8$ , siendo  $A = 9 > 8 = \frac{4}{2}4 = \frac{g}{g-2}(V - 2)$ .

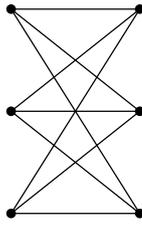


Figura 2.4.  $K_{3,3}$

No obstante, la condición de este resultado no es suficiente para caracterizar los grafos planares. Obsérvese por ejemplo el grafo de la Figura 2.5 en la que hemos subdividido todas las aristas de  $K_5$  excepto tres. Se observa que este grafo no puede ser planar (porque  $K_5$  no lo es), tiene cuello igual a 3 y tiene 12 vértices y 17 aristas, por tanto satisface que  $A = 17 \leq 30 = 3(V - 2)$ .

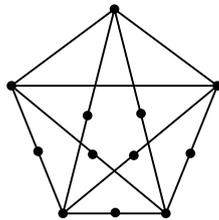


Figura 2.5. Subdivisión de las aristas del grafo  $K_5$

## 2.2. Cotas superiores para el número cromático de grafos planares

En esta sección aplicamos la cota superior del número de aristas de un grafo planar obtenida en la Proposición 2.8 para acotar el número cromático de los grafos planares. Como paso intermedio vamos a acotar antes su índice de degeneración, en el que haremos uso del siguiente resultado, cuya demostración es inmediata.

**Lema 2.9 (Teorema del apretón de manos).** *Sea  $G$  un grafo planar entonces*

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2A$$

Llamamos triángulos, cuadrados y pentágonos de un grafo a los ciclos de longitud 3, 4 y 5 respectivamente. Está claro que un grafo no tiene triángulos si y solo si  $g(G) \geq 4$  o, equivalentemente, si  $\omega(G) \leq 2$ .

**Proposición 2.10.** *Todo grafo planar es 5-degenerado. Si además no contiene triángulos, entonces es 3-degenerado y si no tiene triángulos, cuadrados y pentágonos, entonces es 2-degenerado.*

*Demostración.*

Veamos que para  $G$  grafo planar se tiene que el índice de degeneración es menor o igual que 5. Para demostrar esto, bastará con ver que todo grafo planar tiene un vértice de grado menor o igual a 5 y observar que todo subgrafo inducido de un grafo planar también lo es.

Aplicando el Lema 2.9, la Proposición 2.8 y sabiendo que  $g(G) \geq 3$ , tenemos que  $\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2A < 6(V - 2)$ . Como consecuencia, existe un vértice  $v \in V(G)$  que cumple que  $\deg v \leq 5$ . Luego  $G$  es 5-degenerado.

De igual manera si un grafo no tiene ciclos de cierta longitud, entonces ningún subgrafo inducido tendrá un ciclo de esa misma longitud. Además, si  $G$  no contiene triángulos entonces  $g(G) \geq 4$ , y por el Lema 2.9 y la Proposición 2.8,  $\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2A < 4(V - 2)$ . Como consecuencia, existe un vértice  $v \in V(G)$  que cumple que  $\deg v \leq 3$ . Luego  $G$  es 3-degenerado. Además, si no tiene triángulos, cuadrados y pentágonos entonces  $g(G) \geq 6$  y, procediendo como antes, se deduce que  $G$  es 2-degenerado.

En el capítulo anterior (Teorema 1.11) hemos visto que si un grafo  $G$  es  $t$ -degenerado entonces ese mismo grafo es  $t + 1$ -coloreable y además el algoritmo *Coloración voraz* nos da una  $t + 1$ -coloración. Como consecuencia de este último resultado podemos enunciar el siguiente teorema.

**Corolario 2.11.** *Todo grafo planar es 6-coloreable. Además, todo grafo planar que no contiene triángulos es 4-coloreable y todo grafo planar que no contiene triángulos, cuadrados y pentágonos es 3-coloreable.*

Ahora vamos a explotar el hecho de que el grafo es planar para mejorar el resultado anterior con una pequeña modificación del algoritmo *Coloración voraz*. En particular, daremos un método para 4-colorear todo grafo planar 4-degenerado y, utilizando las mismas ideas, daremos un método para 5-colorear todo grafo planar.

**Teorema 2.12.** *Sea  $G$  un grafo planar 4-degenerado, entonces  $G$  es 4-coloreable.*

*Demostración.*

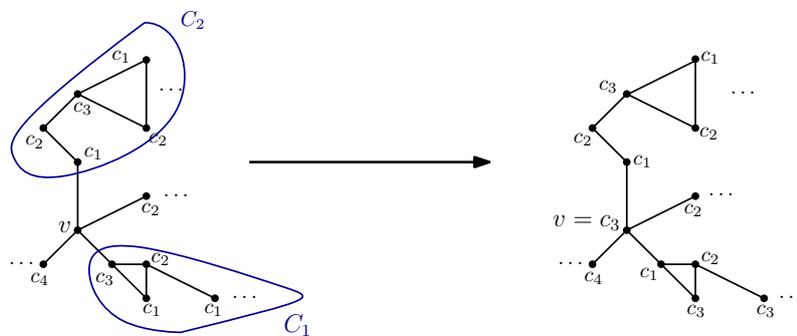
Procedemos por inducción sobre  $n$ , número de vértices de  $G$ . Si  $n \leq 4$ , entonces  $G$  es 4-coloreable. Supongamos que todo grafo planar con a lo sumo  $n$  vértices es 4-coloreable y veamos que se cumple para grafos con  $n + 1$  vértices.

Como  $G$  es planar y es 4-degenerado y, en particular,  $\delta(G) \leq 4$ . Tomamos  $v \in V(G)$  tal que  $\deg(v) \leq 4$  y consideramos  $G' = G - \{v\}$ . Evidentemente  $G'$  es planar y 4-degenerado, por hipótesis de inducción, es 4-coloreable. Consideramos una 4-coloración de  $G'$  y veamos cómo 4-colorear  $G$ , distinguimos dos casos.

Caso 1: El vértice  $v$  no se encuentra conectado a cuatro vértices que tengan asignados colores diferentes en la coloración de  $G'$ , entonces existirá al menos un color que no se haya empleado y se lo asociamos al vértice  $v$ . Luego, hemos extendido la 4-coloración de  $G'$  a  $G$  y, por tanto,  $G$  es 4-coloreable.

Caso 2: El vértice  $v$  se encuentra conectado a cuatro vértices que tienen asociado distinto color. Llamamos a cada vértice  $v_1, v_2, v_3, v_4$  en el sentido de las agujas del reloj, de modo que tengan asociado el color  $c_1, c_2, c_3, c_4$  respectivamente. A continuación denotamos por  $H_{i,j}$  al subgrafo inducido de  $G'$  que consta de los vértices que tienen asociado los colores  $c_i$  ó  $c_j$ .

Tomamos el subgrafo inducido  $H_{1,3}$ . Si  $v_1$  y  $v_3$  están en distinta componente conexa de  $H_{1,3}$ , entonces tomamos las componentes conexas e intercambiamos los colores  $c_1$  y  $c_3$ , obteniendo así una nueva coloración de  $G'$ . Además en esta nueva coloración, los vértices  $v_1$  y  $v_3$  tienen el color  $c_1$  asignado y la podemos extender a todo  $G$  coloreando el vértice  $v$  del color  $c_3$  (Ver Figura 2.6). Por tanto, habremos empleado únicamente cuatro colores para la coloración de  $G$ . Concluimos así que  $G$  es 4-coloreable.



**Figura 2.6.** Intercambiamos  $c_1$  por  $c_3$  y viceversa en la componente conexa  $C_1$

Por otro lado, si existe un camino  $P = (v_1, u_1, \dots, u_r, v_3)$  que une  $v_1$  con  $v_3$  en  $H_{1,3}$ , entonces consideramos el camino cerrado  $C = (v, v_1, u_1, \dots, u_r, v_2, v)$ . Este camino divide el plano en dos regiones, una interior acotada y una exterior no acotada. Ahora analizamos los vértices  $v_2$  y  $v_4$ , como  $G$  es un grafo planar, uno de los dos vértices se va a encontrar situado en la cara interior de  $C$  y otro en la exterior. Luego, los vértices  $v_2$  y  $v_4$  se encuentran en diferente componente conexa del subgrafo inducido  $H_{2,4}$ . Procediendo como antes e intercambiando los colores  $c_2$  y  $c_4$  en una de las dos componentes conexas, encontramos una coloración de  $G'$  en la que  $v_2$  y  $v_4$  están coloreados con el color  $c_2$  y, por tanto,

podemos extender esta coloración a  $G$  asignándole el color  $c_4$  a  $v$  (Ver Figura 2.7). De este modo habremos empleado únicamente cuatro colores en la coloración de  $G$ .

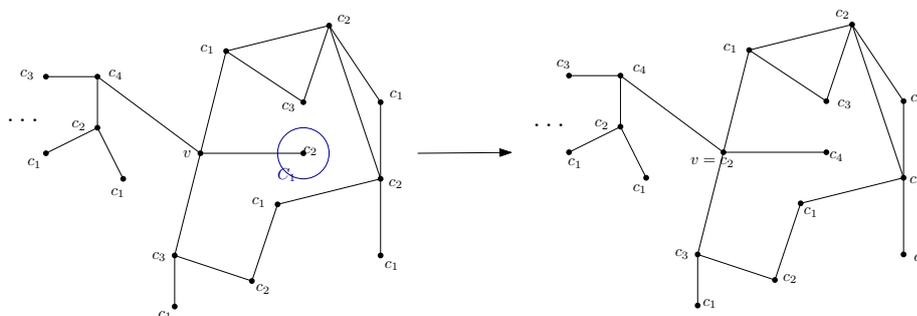


Figura 2.7. Intercambiamos  $c_2$  por  $c_4$  y viceversa en la componente conexa  $C_1$

En todos los casos hemos concluido que  $G$  es un grafo planar 4-coloreable.

En la Figura 2.8 se pueden observar dos coloraciones de un mismo grafo planar  $G$ . La primera coloración se ha realizado empleando el algoritmo *Coloración voraz*. Como vemos, al aplicar este método nos encontramos que uno de los vértices debe recibir el color 5. Sin embargo, en la segunda coloración se ha empleado el procedimiento descrito en la demostración del Teorema de los cinco colores, es decir, hemos intercambiado los colores en una de las componentes conexas del subgrafo inducido  $H_{2,4}$ . De este modo obtenemos una 4-coloración del grafo.

A continuación vamos a aplicar ideas similares a las de la demostración del Teorema 2.12 para demostrar el Teorema de los cinco colores.

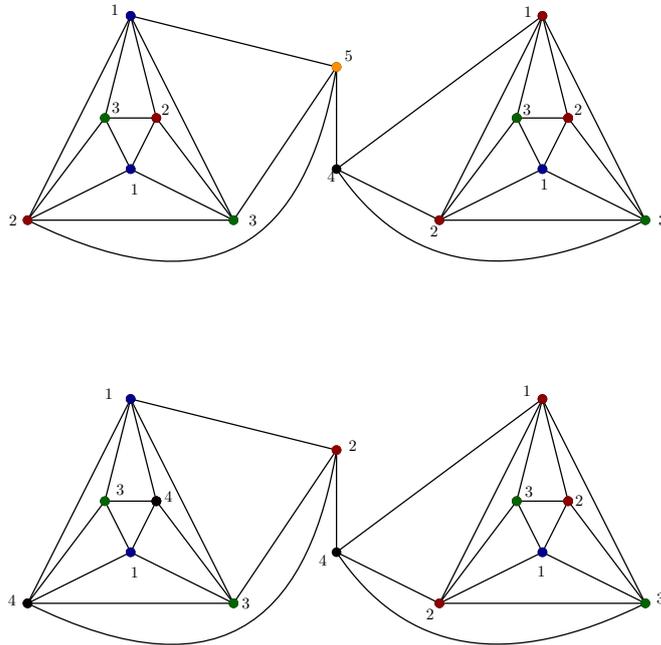
*Demostración del Teorema de los cinco colores.* Al igual que en el Teorema 2.12, procedemos por inducción.

Supongamos que el Teorema es cierto para todo grafo planar  $G$  con  $n$  vértices y veamos que se cumple para grafos con  $n + 1$  vértices.

Como  $G$  es planar, entonces es 5-degenerado y, en particular,  $\delta(G) \leq 5$ . Localizamos el vértice  $v \in V(G)$  tal que  $\deg(v) = 5$  y consideramos el grafo inducido  $G' = G - \{v\}$ . Evidentemente  $G'$  es planar y, por la hipótesis de inducción, es 5-coloreable. A continuación distinguimos dos casos.

Caso 1: El vértice  $v$  no se encuentra conectado a cinco vértices que tengan asignados colores diferentes, entonces existirá al menos un color que no se haya empleado, el cual se lo vamos a asociar al vértice  $v_i$ . Luego,  $G$  es 5-coloreable.

Caso 2: El vértice  $v$  se encuentra conectado a cinco vértices que tienen asociados distinto color. Llamamos a cada vértice  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  en el sentido de las agujas del reloj, de modo que tengan asociado los colores  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  respectivamente. Siguiendo la idea de la demostración del Teorema 2.12, estudiamos



**Figura 2.8.** 5-coloración y 4-coloración de un mismo grafo planar. La 4-coloración se ha obtenido siguiendo la demostración del Teorema 2.12

en primer lugar el subgrafo inducido  $H_{1,3}$ . Si existen dos componentes conexas, tomamos una de ellas e intercambiamos los colores  $c_1$  y  $c_3$ , de este modo nos quedará un color libre,  $c_1$  o  $c_3$ , el cual lo asociamos al vértice  $v$ , obteniendo así la 5-coloración del grafo  $G$ . Si por el contrario el subgrafo inducido  $H_{1,3}$  consta de una única componente conexa entonces procedemos a estudiar el subgrafo inducido  $H_{2,4}$ . Como  $G$  es un grafo planar, automáticamente sabemos que el subgrafo inducido  $H_{2,4}$  va a contener dos componentes conexas. Intercambiando los colores  $c_2$  y  $c_4$  en una de las dos componentes conexas, podemos asociarle el color que queda libre a  $v$ . Por lo tanto, habremos conseguido una 5-coloración.

Queda demostrado así que un grafo planar  $G$  es 5-coloreable.

Como hemos mencionado al principio de la sección, en este trabajo no se realizará la demostración del Teorema de los cuatro colores, sin embargo, podemos encontrar su demostración recogida en los artículos [6] y [7]. También nos encontramos con el Teorema de Grötzsch, el cual nos dice que dado un grafo planar  $G$  que no contiene triángulos, entonces  $G$  es 3-coloreable. Su demostración se encuentra recogida en el artículo [5]. A continuación se enuncia y demuestra una versión más débil del Teorema de Grötzsch.

**Teorema 2.13.** *Sea  $G$  un grafo planar que no contiene triángulos, entonces  $G$  es 4-coloreable.*

*Demostración.*

Partiendo de que  $G$  es un grafo planar que no contiene triángulos. Por la Proposición 2.10 tenemos que  $G$  es 3-degenerado, luego, aplicando el Teorema 1.11 concluimos que  $G$  es 4-coloreable.

Con las herramientas introducidas en esta memoria, en el Corolario 2.11 vemos que todo grafo planar sin triángulo, cuadrados ni pentágonos es 3-coloreable, demostrando así otra versión débil del Teorema de Grötzsch.



## Coloración algebraica de grafos

En este capítulo estudiaremos el problema de la coloración de grafos con herramientas algebraicas. En pocas palabras, la idea principal de este capítulo es asociarle a todo grafo  $G$  un polinomio  $f_G$ , denominado polinomio gráfico, en un anillo de polinomios en tantas variables como vértices tiene el grafo y caracterizar si  $G$  es  $k$ -coloreable en términos de la pertenencia de  $f_G$  a un cierto ideal. El problema de pertenencia a un ideal del anillo de polinomios es un problema que suele requerir del uso de las bases de Gröbner. No obstante, en este contexto particular, y gracias al denominado Teorema Combinatorio de los ceros, podemos decidir la pertenencia del polinomio al ideal sin hacer uso de esta herramienta.

La estructura de este capítulo es la siguiente. En la primera sección introducimos y demostramos una versión del Teorema Combinatorio de los ceros. En la segunda aplicamos este resultado para demostrar el resultado central de este capítulo que caracteriza si un grafo es  $k$ -coloreable en términos de la pertenencia del polinomio gráfico a un cierto ideal. En la tercera sección proporcionaremos condiciones suficientes para que un grafo sea  $k$ -coloreable. Para llegar a este resultado previamente describiremos en términos puramente combinatorios los coeficientes que aparecen en el polinomio gráfico. En la cuarta sección nos centraremos en las consecuencias algorítmicas del teorema principal e introduciremos un algoritmo que determina si un grafo es  $k$ -coloreable. Por último, incluimos la implementación en SINGULAR [13] de un algoritmo basado en las ideas de este capítulo, que calcula el número cromático de un grafo.

El contenido teórico de este capítulo se encuentra recogido en [10]

### 3.1. Teorema Combinatorio de los ceros

El Teorema de los ceros de Hilbert es un teorema fundamental en Álgebra Conmutativa que afirma que dado  $F[x_1, \dots, x_n]$  un anillo en  $n$  variables sobre un

cuerpo algebraicamente cerrado  $F$  y  $f, g_1, \dots, g_m \in F[x_1, \dots, x_m]$ , si  $f$  se anula en los ceros de  $g_1, \dots, g_m$ , entonces existe un entero positivo  $k$  tal que  $f^k$  pertenece al ideal generado por  $g_1, \dots, g_m$ , es decir,  $f^k = \sum_{i=1}^m h_i g_i$ . La demostración de este teorema no se abarcará en este trabajo, pero si se demostrará una mejora de un caso particular del mismo, el denominado Teorema Combinatorio de los ceros. Este resultado fue popularizado por Alon y el adjetivo "combinatorio" proviene de las múltiples y sorprendentes aplicaciones de este resultado en combinatoria. En este capítulo nos centraremos en una de estas aplicaciones, pero antes procedemos a enunciarlo y a dar una demostración elemental del mismo.

**Teorema 3.1 (Teorema Combinatorio de los ceros).** *Sean  $F$  un cuerpo arbitrario,  $f = f(x_1, \dots, x_n)$  un polinomio en  $F[x_1, \dots, x_n]$ ,  $S_1, \dots, S_n$  subconjuntos finitos y no vacíos de  $F$  y  $g_i(x_i) = \prod_{s \in S_i} (x_i - s)$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Si  $f$  se anula en todos los puntos de  $S_1 \times \dots \times S_n$  entonces existen  $h_1, \dots, h_n \in F[x_1, \dots, x_n]$  tales que  $f = \sum_{i=1}^n h_i g_i$  y, o bien  $h_i = 0$ , o  $\deg(h_i) \leq \deg(f) - \deg(g_i)$*

Para su demostración usaremos el siguiente resultado.

**Lema 3.2.** *Sea  $F$  un cuerpo y  $P = P(x_1, \dots, x_n) \in F[x_1, \dots, x_n]$ . Para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , supongamos que el grado de  $P$  como polinomio en  $x_i$  es a lo sumo  $t_i$  y sea  $S_i \subset F$  un conjunto con al menos  $t_i + 1$  elementos distintos de  $F$ . Si  $P(s_1, \dots, s_n) = 0$  para todo  $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ , entonces  $P \equiv 0$  ( $P$  es el polinomio idénticamente nulo).*

*Demostración.*

Procedemos por inducción sobre el número de variables  $n$ . Sea  $n = 1$  y  $P(x) \in F[x]$  un polinomio de grado  $t$ . Si  $P(x)$  se anula en al menos  $t+1$  puntos, entonces  $P \equiv 0$ . Tomando como hipótesis de inducción que el resultado es cierto para los polinomios de  $n - 1$  variables, veamos que se verifica para los polinomios de  $n$  variables. Sea  $P = P(x_1, \dots, x_n)$ , reescribimos el polinomio como  $P = \sum_{i=0}^{t_n} P_i(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^i$ . Sea  $(s_1, \dots, s_{n-1}) \in S_1 \times \dots \times S_{n-1}$ , nuestro siguiente objetivo será demostrar que  $P_i(s_1, \dots, s_{n-1}) = 0$ . Para ello consideramos  $\bar{P} = \sum_{i=0}^{t_n} P_i(s_1, \dots, s_{n-1})x_n^i$ , que es un polinomio en la variable  $(x_n)$  de grado menor o igual a  $t_n$ . Además  $\bar{P}$  tiene  $t_n$  raíces y, por tanto,  $\bar{P} \equiv 0$ . Esto equivale a que  $P_i(s_1, \dots, s_{n-1}) = 0$  para todo  $i \in \{0, \dots, t_n\}$ . Aplicando la hipótesis de inducción tenemos que  $P_i \equiv 0$ . Concluimos así que  $P \equiv 0$ .

A continuación procedemos con la demostración del Teorema 3.1.

*Demostración.*

Tomamos  $|S_i| = t_i + 1$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Suponemos  $f(s_1, \dots, s_n) = 0$  para todo  $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ . Expresamos  $g_i(x_i) = \prod_{s \in S_i} (x_i - s)$  como  $g_i(x_i) = x_i^{t_i+1} - \sum_{j=0}^{t_i} g_{ij} x_i^j$ . Si tomamos  $s \in S_i$  entonces  $g_i(s) = 0$ , de

este modo tenemos que  $s^{t_i+1} = \sum_{j=0}^{t_i} g_{ij}s^j$  para  $s \in S_i$ . Por otro lado tenemos que  $f(x_1, \dots, x_n) \in F[x_1, \dots, x_n]$ , aplicando la división euclídea definimos  $x_j^k = q_{j,k}g_j + r_{j,k}$  donde  $r_{j,k}$  es un polinomio en la variable  $x_j$  de grado menor o igual a  $t_i$  para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$  y todo  $k \in \mathbb{N}$ . Luego, usando las expresiones anteriores se tiene la igualdad  $f = \sum_{i=1}^n h_i g_i + \bar{f}$ , donde  $h_i$  es o bien el polinomio 0 o bien un polinomio de grado menor o igual a  $\deg(f) - \deg(g_i)$  y  $(\bar{f})$  es un polinomio cuyo grado en la variable  $i$ -ésima es menor o igual a  $t_i$ . Como  $f(s_1, \dots, s_n) = 0$  para todo  $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$  entonces tenemos que  $\bar{f}(s_1, \dots, s_n) = 0$  para  $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ . Aplicando el Lema 3.2 tenemos que  $\bar{f} \equiv 0$ . Concluimos así que  $f = \sum_{i=1}^n h_i g_i$ .

Como consecuencia del Teorema 3.1 surge el siguiente resultado (también llamado segundo Teorema Combinatorio de los ceros).

**Teorema 3.3.** *Sea  $F$  un cuerpo arbitrario y  $f = f(x_1, \dots, x_n) \in F[x_1, \dots, x_n]$ . Supongamos que  $\deg(f) = \sum_{i=1}^n t_i$  donde  $t_i \in \mathbb{Z}^+$  y supongamos que el coeficiente de  $\prod_{i=1}^n x_i^{t_i}$  en  $f$  es no nulo. Entonces, si  $S_1, \dots, S_n$  son subconjuntos de  $F$  con  $|S_i| > t_i$ , existe algún  $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$  tal que  $f(s_1, \dots, s_n) \neq 0$ .*

*Demostración.*

Por hipótesis tenemos que  $|S_i| > t_i$ , luego, podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $|S_i| = t_i + 1$ . Para la demostración vamos a proceder por reducción al absurdo. Definimos  $g_i(x_i) = \prod_{s \in S_i} (x_i - s)$ . Tenemos que  $f(s_1, \dots, s_n) = 0$  para todo  $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$ . Por el Teorema 3.1, existe  $h_i \in F[x_1, \dots, x_n]$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  satisfaciendo que  $\deg(h_i) \leq \deg(f) - \deg(g_i)$  tal que  $f = \sum_{i=1}^n h_i g_i$ , luego  $\deg(h_i g_i) \leq \deg(f)$ . Expresamos  $g_i(x_i)$  como  $g_i(x_i) = x_i^{t_i+1} - \sum_{j=0}^{t_i} g_{ij} x_i^j$ . Por otro lado,  $\deg(f) = \sum_{i=1}^n t_i$ , entonces, tenemos que  $f = \prod_{i=1}^n x_i^{t_i} + p = \sum_{i=1}^n (h_i x_i^{t_i+1}) - q$ , donde  $0 < \deg(q) \leq \deg(q) < t_i + 1$ . Si igualamos los coeficientes de mismo grado, tenemos que  $\prod_{i=1}^n x_i^{t_i} = 0$ , lo cual es absurdo ya que por las hipótesis del teorema tenemos que  $\prod_{i=1}^n x_i^{t_i}$  tiene coeficiente no nulo.

Como consecuencia de este teorema tenemos el siguiente, que proporciona una base del  $F$ -espacio vectorial cociente  $F[x_1, \dots, x_n]/I$ , donde  $I = (g_1, \dots, g_n)$  y  $g_i$  es un polinomio donde solo aparece la variable  $x_i$ . Este resultado será relevante en el diseño del algoritmo que decide si un grafo dado es  $k$ -coloreable.

**Proposición 3.4.** *Sean  $F$  un cuerpo,  $F[x_1, \dots, x_n]$  el anillo de polinomios sobre  $F$  y sean  $g_i \in F[x_i]$  con  $\deg(g_i) = d_i$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Si tomamos  $I = (g_1, \dots, g_n)$ , entonces  $F[x_1, \dots, x_n]/I$  es un  $F$ -espacio vectorial con base  $B = \{x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n} + I \mid 0 \leq j_i \leq d_i\}$ .*

*Demostración.*

Veamos primero que  $G$  es un sistema generador. Tenemos que  $F[x_1, \dots, x_n]$  es

un  $F$ -espacio vectorial y su base es  $\{x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n} \mid \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{N}\}$ . Entonces, el conjunto cociente  $F[x_1, \dots, x_n]/I$ , donde  $I = (g_1, \dots, g_n)$ , tiene como sistema generador  $G = \{x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n} + I \mid \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{N}\}$ . Veamos que todos los elementos de  $G$  se pueden expresar como combinación lineal de los elementos de  $B$ . Sea  $x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n} + I \in G$ , tomamos  $q_i, r_i \in F[x_i]$  tales que  $x_i^{\gamma_i} = q_i g_i + r_i$  y  $\deg(r_i) < \deg(g_i) = |S_i|$ . Entonces,  $x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n} + I = (q_1 g_1 + r_1) \cdots (q_n g_n + r_n) = r_1 \cdots r_n + I$ . Al desarrollar  $r_1 \cdots r_n$ , obtenemos polinomios de la forma  $x_1^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_n}$ , con  $\mu_i \leq |S_i|$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Luego,  $r_1 \cdots r_n + I$  es combinación lineal de  $B$ . Por lo tanto  $B$  es sistema generador. Veamos ahora que  $B$  es libre. Sean  $\sum_{0 \leq i_j \leq |S_j|, j \in \{1, \dots, n\}} \alpha_{i_1, \dots, i_n} (x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} + I) = 0 + I$ . Tomando  $f = \sum_{0 \leq i_j \leq |S_j|, j \in \{1, \dots, n\}} \alpha_{i_1, \dots, i_n} (x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}) \in F[x_1, \dots, x_n]$ , el objetivo es demostrar que  $f = 0$ . Para ello procedemos por reducción al absurdo suponiendo que  $f \neq 0$ . Si  $f \neq 0$  entonces  $\deg(f) = t_1 + \dots + t_n$  con  $t_i < |S_i|$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Por el Teorema 3.3, tenemos que existe  $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$  tal que  $f(s_1, \dots, s_n) \neq 0$ . Pero teníamos que  $f \in I$ , por lo tanto llegamos a un absurdo y tenemos que  $f = 0$ . Consecuentemente  $\alpha_{i_1, \dots, i_n} = 0$ . Queda demostrado así que  $B$  es libre.

Hemos visto que  $B$  es sistema generador y libre, luego,  $B$  es base.

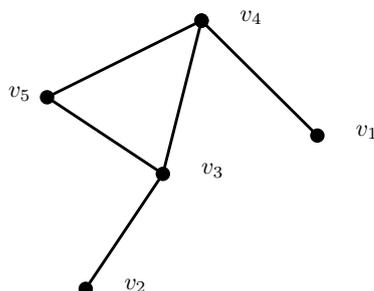
## 3.2. El Teorema Combinatorio de los ceros y la coloración de grafos

El teorema combinatorio de los ceros se suele usar para demostrar resultados de la siguiente naturaleza: una estructura combinatoria satisface una determinada propiedad si y solo si un polinomio apropiado asociado con ella se encuentra en un ideal definido adecuadamente. Mostraremos un ejemplo de esto en esta sección, donde aplicaremos el Teorema Combinatorio de los ceros en el contexto de la coloración de grafos, para ello comenzamos asociándole un polinomio a todo grafo.

**Definición 3.5.** *El polinomio gráfico  $f_G = f_G(x_1, \dots, x_n)$  de un grafo  $G = (V, E)$  con conjunto de vértices  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ , se define como  $f_G(x_1, \dots, x_n) = \prod_{\substack{\{v_i, v_j\} \in E(G) \\ i < j}} (x_i - x_j)$ .*

Como se puede deducir de su definición, el polinomio gráfico es un polinomio de grado  $m$  y homogéneo (todos los monomios que aparecen en  $f_G$  son del mismo grado e igual al número de aristas del grafo). Supongamos el grafo de la Figura 3.1, su polinomio gráfico correspondiente es  $f_G(x_1, \dots, x_5) = (x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_3 - x_5)(x_4 - x_5)$ .

El siguiente lema establece una relación entre la existencia de una  $k$ -coloración de  $G$  y la existencia de un punto que no anula a  $f_G$  y en el que todas sus entradas pertenecen al conjunto  $\{1, \dots, k\}$ .

Figura 3.1. Grafo  $G$ 

**Lema 3.6.** Sea  $G$  un grafo y  $g : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  una aplicación. Entonces  $g$  es una  $k$ -coloración si y solo si  $f_G(g(v_1), \dots, g(v_n)) \neq 0$

*Demostración.*

"  $\Rightarrow$  ") Por la definición de polinomio gráfico tenemos que  $f_G(g(v_1), \dots, g(v_n)) = \prod_{\{v_i, v_j\} \in E(G)} (g(v_i) - g(v_j))$ . Por hipótesis tenemos que  $g$  es una  $k$ -coloración, luego si  $\{v_i, v_j\} \in E(G)$  entonces  $g(v_i) \neq g(v_j)$ . Por lo tanto  $g(v_i) - g(v_j) \neq 0$  para cualquier  $\{v_i, v_j\} \in E(G)$ . Concluimos así que  $f_G(g(v_1), \dots, g(v_n)) \neq 0$ .

"  $\Leftarrow$  ") Partimos de que  $f_G(g(v_1), \dots, g(v_n)) \neq 0$ , es decir,  $\prod_{\{v_i, v_j\} \in E(G)} (g(v_i) - g(v_j)) \neq 0$ . Por lo tanto, tenemos que  $g(v_i) - g(v_j) \neq 0$  para cualquier  $\{v_i, v_j\} \in E(G)$ . Luego  $g$  es una  $k$ -coloración.

Considerando el grafo de la Figura 3.1 y tomando

$$g : V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$$

tal que  $g(v_1) = 1, g(v_2) = 1, g(v_3) = 3, g(v_4) = 2, g(v_5) = 1$ , tenemos que  $f_G(g(v_1), \dots, g(v_5)) = (1 - 2)(1 - 3)(3 - 2)(3 - 1)(2 - 1) = 4 \neq 0$ , luego, por el Lema 3.6,  $g$  es una 3 coloración del grafo  $G$ .

La demostración del siguiente resultado es inmediata del Lema 3.6.

**Proposición 3.7.** Dado un grafo  $G$ , entonces  $G$  no es  $k$ -coloreable si y solo si  $f_G$  se anula en todos los puntos de  $\{1, \dots, k\} \times \dots \times \{1, \dots, k\}$ .

*Demostración.*

"  $\Rightarrow$  ") Partimos de que el grafo  $G$  no es  $k$ -coloreable, esto significa que para toda aplicación  $g : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$  existe  $\{v_i, v_j\} \in E(G)$  de modo que  $g(v_i) = g(v_j)$  con  $i \neq j$ . De este modo, por el Lema 3.6 concluimos que  $f_G(g(v_1), \dots, g(v_n)) = 0$ , para toda aplicación  $g$ . Se verifica así que  $f_G$  se anula en  $\{1, \dots, k\} \times \dots \times \{1, \dots, k\}$ .

"  $\Leftarrow$  ") Tenemos que  $f_G$  se anula en  $\{1, \dots, k\} \times \dots \times \{1, \dots, k\}$ . En particular, para toda aplicación  $g : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ , tenemos que  $f_G(g(v_1), \dots, g(v_n)) =$

$\prod_{\{v_i, v_j\} \in E(G)} (g(v_i) - g(v_j)) = 0$ . Por lo que, existe  $\{v_i, v_j\} \in E(G)$  tal que  $g(v_i) = g(v_j)$  con  $i \neq j$  y  $g$  no es una  $k$ -coloración. Concluimos así que el grafo  $G$  no es  $k$ -coloreable.

A partir de ahora cambiaremos el conjunto de la coloración, que usualmente es  $\{1, \dots, k\}$ , por el conjunto de las raíces  $k$ -ésimas de la unidad, que denotaremos  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$ . Evidentemente, el resultado anterior sigue siendo cierto si cambiamos el conjunto  $\{1, \dots, k\}$  por  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$  o por cualquier otro conjunto  $S$  con  $k$  elementos. El motivo de este cambio es que a partir de ahora haremos uso del polinomio  $\prod_{i=1}^k (x_j - \epsilon_i) = x^k - 1$ , que tiene muchos menos términos que  $\prod_{i=1}^k (x_j - i)$  y, por tanto, permite una escritura más compacta de los resultados siguientes. No obstante, los resultados que vienen a continuación siguen siendo ciertos si sustituimos las apariciones del polinomio  $x^k - 1$  por cualquier otro polinomio de grado  $k$  con  $k$  raíces distintas, como  $\prod_{i=1}^k (x - i)$ .

**Teorema 3.8.** *Sea  $G$  un grafo compuesto por  $n$  vértices, entonces  $G$  no es  $k$ -coloreable si y solo si el polinomio gráfico  $f_G$  se encuentra en el ideal generado por los polinomios  $x_i^k - 1$  con  $1 \leq i \leq n$ .*

*Demostración.*

”  $\Rightarrow$ ” Definimos  $g_i = \prod_{i=1}^k (x_i - \epsilon_i) = x_i^k - 1$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Por otro lado, tenemos que  $G$  no es  $k$ -coloreable entonces, por la Proposición 3.7, el polinomio gráfico  $f_G$  se anula en  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\} \times \dots \times \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$ . De esta forma, aplicando el Teorema 3.1 tenemos que existen  $h_1, \dots, h_n \in F[x_1, \dots, x_n]$  tal que  $f_G = \sum_{i=1}^n h_i g_i$  con  $h_i = 0$  o  $\deg(h_i) \leq \deg(f) - \deg(g_i)$ . Concluimos así que  $f_G$  pertenece al ideal generado por  $g_1, \dots, g_n$ .

”  $\Leftarrow$ ” Expresamos  $f_G$  como  $f_G = \sum_{i=1}^n h_i g_i$ , donde  $g_i = \prod_{s \in S_i} (x_s^k - 1)$ , con  $S_i = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . De este modo,  $f_G$  se anula en  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\} \times \dots \times \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k\}$ . Por la Proposición 3.7, el grafo  $G$  no es  $k$ -coloreable.

Retomando el ejemplo de la Figura 3.1, teníamos que su polinomio gráfico asociado es  $f_G(x_1, \dots, x_5) = (x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_3 - x_5)(x_4 - x_5)$ . Además, ya habíamos dicho que el grafo  $G$  de nuestra figura es 3-coloreable, luego, por el Teorema 3.8 podemos concluir que el polinomio gráfico  $f_G \notin (x_1^3 - 1, \dots, x_5^3 - 1)$ .

### 3.3. Una condición suficiente para que un grafo sea $k$ -coloreable

En esta sección usaremos el Teorema 3.8 para dar una condición suficiente en el Teorema 3.12 para que un grafo sea  $k$ -coloreable. Dicha condición la vamos a

expresar en términos de una orientación del grafo. Antes de llegar a ese resultado, nos disponemos a describir de forma combinatoria los coeficientes del polinomio gráfico.

**Definición 3.9.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo, una orientación de  $G$  es un grafo dirigido  $D = (V, A)$  de modo que para cada arista  $e = \{u, v\} \in E$  le asociamos  $(u, v) \in A$  ó  $(v, u) \in A$ , pero no ambas.

Para un mismo grafo es posible establecer diferentes orientaciones. En general existen  $2^m$  orientaciones diferentes, siendo  $m$  el número de aristas en el grafo.

**Definición 3.10.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo con  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $D = (V, A)$  un orientación del mismo y sea  $l = \#\{(v_i, v_j) \in A / i > j\}$  el número de aristas que van de un vértice de menor índice hasta uno de mayor. Si  $l$  es par, entonces se dice que la orientación es par, en caso contrario será una orientación impar. Sea  $v_i \in V$  el grado saliente es el número de aristas que tienen como origen el vértice  $v_i$  y lo denotamos por  $\deg^+(v_i)$ , mientras que el grado entrante es el número de aristas que tienen como vértice destino  $v_i$  y lo denotamos por  $\deg^-(v_i)$ .

Sea  $G = (V, E)$  un grafo, denotamos por  $OP(d_1, \dots, d_n)$  al conjunto de las orientaciones pares de  $G$  que que cumplen que  $d_i = \deg^+(v_i)$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , de forma análoga, denotamos por  $OI(d_1, \dots, d_n)$  al conjunto de las orientaciones impares con  $d_i = \deg^+(v_i)$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Consideremos el grafo de la Figura 3.2, su polinomio gráfico asociado viene dado por  $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)(x_5 - x_6)(x_1 - x_6)(x_1 - x_3)(x_3 - x_5)(x_1 - x_5)(x_2 - x_4)(x_4 - x_6)(x_2 - x_6)$ . La orientación establecida es impar pues,  $l = \#\{(v_i, v_j) \in A / i > j\} = \#\{(6, 1), (5, 1), (6, 2)\} = 3$ .

En el siguiente resultado se describe de forma combinatoria el polinomio gráfico en términos de todas sus orientaciones, este será el resultado clave para obtener los posteriores.

**Proposición 3.11.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo, su polinomio gráfico asociado se puede expresar como

$$f_G(x_1, \dots, x_n) = \sum_{d_1, \dots, d_n \in \mathbb{N}} (|OP(d_1, \dots, d_n)| - |OI(d_1, \dots, d_n)|) x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}$$

*Demostración.*

Cada orientación  $D = (V, A)$  de  $G$  se corresponde con uno de los  $2^m$  términos obtenidos al calcular el polinomio gráfico  $f_G = \prod_{\{v_i, v_j\} \in E} (x_i - x_j)$ . Además, una orientación con  $\deg^+(x_i) = d_i$  aporta al término  $x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}$  un  $+1$  si la orientación es par y  $-1$  si la orientación es impar.

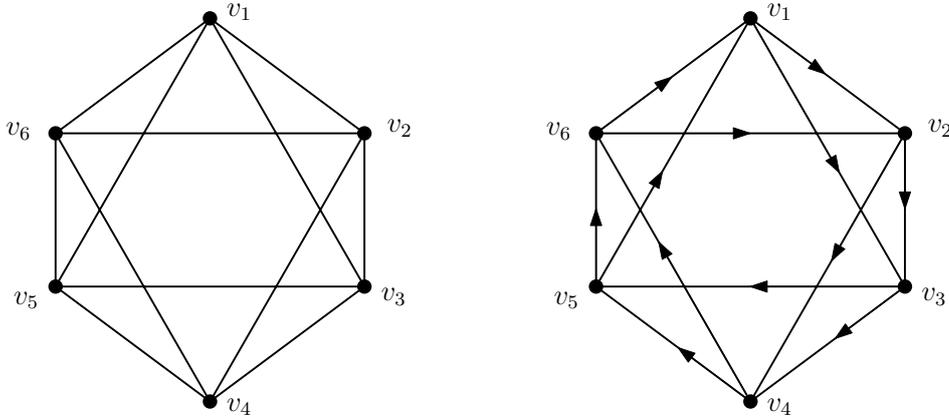


Figura 3.2. Orientación de un grafo

**Teorema 3.12.** *Sea  $G = (V, E)$  un grafo orientado. Si  $G$  tiene una orientación  $D$  tal que  $\deg_D^+(v_i) \leq k+1$  y  $|OP(d_1, \dots, d_n)| - |OI(d_1, \dots, d_n)|$  distinto de cero, entonces  $G$  es  $k$ -coloreable.*

*Demostración.*

Tenemos que  $f_G(x_1, \dots, x_n) \in F[x_1, \dots, x_n]$ . Además, sea  $m$  el número de aristas de  $G$ , entonces  $\deg(f_G) = \sum_{i=1}^n d_i = m \in \mathbb{Z}^+$ . Por otro lado, por las hipótesis del teorema tenemos que  $|OP(d_1, \dots, d_n)| - |OI(d_1, \dots, d_n)| \neq 0$ , entonces, el coeficiente  $\prod_{i=1}^n x_i^{d_i}$  del polinomio gráfico  $f_G$  tiene coeficiente no nulo (Ver la Proposición 3.11). Tomando  $S_i = \{1, \dots, k\}$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  tenemos que nos encontramos en las hipótesis del Teorema 3.3 y, por lo tanto, existen  $(s_1, \dots, s_n) \in S_1 \times \dots \times S_n$  tal que  $f_G(s_1, \dots, s_n) \neq 0$ . Concluimos así que el grafo  $G$  es  $k$ -coloreable.

El Teorema 3.12 ya aporta una condición suficiente para que un grafo sea  $k$ -coloreable. No obstante, a priori se podría pensar que para aplicarlo hay que estudiar todas las orientaciones posibles del grafo, lo cual es muy tedioso. Nuestro siguiente objetivo es el de describir esos coeficientes en términos de una única orientación y determinados subgrafos dirigidos de la misma.

**Definición 3.13.** *Sea  $D = (V, A)$  un orientación de un grafo  $G = (V, E)$ . Un subgrafo euleriano de  $D$  es  $E = (V, A')$  con  $A' \subset A$  de forma que  $\deg_E^+(v) = \deg_E^-(v)$  para todo  $v \in V$ .*

*Si  $E$  tiene un número de aristas par entonces es un subgrafo euleriano par, mientras que si son impares será impar. Al conjunto de subgrafos pares e impares de  $D$  se les denota  $EP(D)$  y  $EI(D)$ , respectivamente.*

Un ejemplo de subgrafo euleriano de la orientación  $D = (V, A)$  es el de la Figura 3.3. Se observa que el grado de entrada y de salida en el subgrafo euleriano es 2 para  $v_1$  y  $v_4$  y es 1 en los restantes vértices.

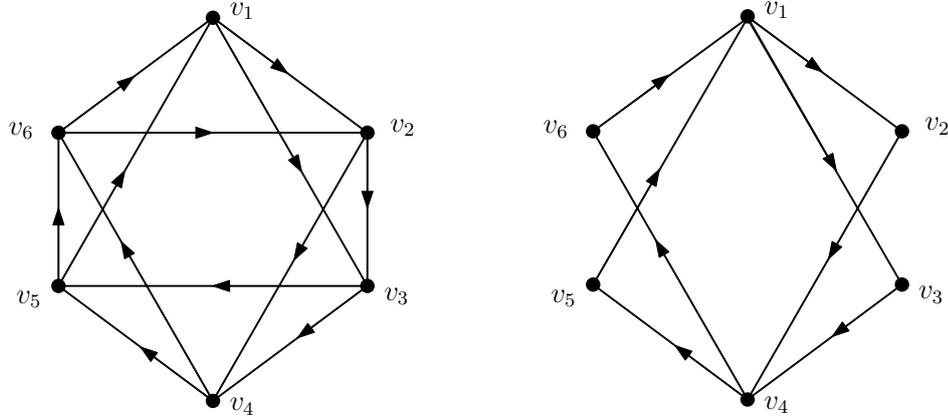


Figura 3.3. Subgrafo euleriano de  $D = (V, A)$ .

En el siguiente resultado vamos a describir el valor  $|OP(d_1, \dots, d_n)| - |OI(d_1, \dots, d_n)|$  a partir de una única orientación con  $\deg^+(v_i) = d_i$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  y sus subgrafos eulerianos.

**Proposición 3.14.** *Sea  $D = (V, A)$  un orientación del grafo  $G = (V, E)$  y sea  $d_i = \deg^+(v_i)$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , entonces*

$$|OP(d_1, \dots, d_n)| - |OI(d_1, \dots, d_n)| = (-1)^{p(D)} (|EP(D)| - |EI(D)|)$$

donde  $p(D)$  será 0 si  $D$  es par y 1 si  $D$  es impar.

*Demostración.*

Sea  $D' = (V, A')$  es una orientación de  $G$  con  $\deg_{D'}^+(v_i) = d_i$ , definimos  $\phi(D') := (V, A - A')$ . Vamos a ver que  $\phi$  es una aplicación biyectiva entre las orientaciones de  $G$  con grado saliente en  $v_i$  igual a  $d_i$  y los subgrafos eulerianos de  $D$ . Para ver que  $\phi$  es una aplicación tenemos que ver que  $\phi(D')$  es efectivamente un subgrafo euleriano. Fijado  $u \in V$ , separamos las aristas de  $E$  incidentes a  $u$  en cuatro conjuntos:  $C_1 = \{\{u, v\} \in E / (u, v) \in A \wedge (u, v) \in A'\}$ ,  $C_2 = \{\{u, v\} \in E / (u, v) \in A \wedge (u, v) \notin A'\}$ ,  $C_3 = \{\{u, v\} \in E / (u, v) \notin A \wedge (u, v) \in A'\}$ ,  $C_4 = \{\{u, v\} \in E / (u, v) \notin A \wedge (u, v) \notin A'\}$  y denotamos por  $c_i$  al número de aristas en  $C_i$ . Se observa que  $c_2 = \deg_{\phi(D')}^+(v)$  y que  $c_3 = \deg_{\phi(D')}^-(v)$ , para que  $\phi(D')$  sea un grafo euleriano tenemos que verificar que  $c_2 = c_3$ . Por hipótesis tenemos que  $\deg_{D'}^+(v) = \deg_D^+(v)$ , luego  $c_2 + c_4 = c_3 + c_4$ , por lo tanto  $c_2 = c_3$ . Veamos ahora que  $\phi$  es inyectiva. Sean  $D' = (V, A - A')$ ,  $D'' = (V, A - A'')$ , si  $\phi(D') = \phi(D'')$  entonces  $(V, A - A') = (V, A - A'')$ , luego  $A' = A''$  y por consiguiente  $D' = D''$ . Para ver que es sobreyectiva tomamos de nuevo  $c_i$  al número de aristas en  $C_i$  donde  $C_1 = \{\{u, v\} \in E / (u, v) \in A \wedge (u, v) \in A'\}$ ,  $C_2 = \{\{u, v\} \in E / (u, v) \in A \wedge (u, v) \notin A'\}$ ,  $C_3 = \{\{u, v\} \in E / (u, v) \notin A \wedge (u, v) \in A'\}$ ,  $C_4 = \{\{u, v\} \in E / (u, v) \notin A \wedge (u, v) \notin A'\}$ . Definiendo  $A^* = A - A'$  de modo que  $\phi(D') = (V, A^*)$  es un subgrafo de euler, entonces  $c_2 = c_3$ . Por otro lado,

como  $c_3, c_4$  son tales que  $(u, v) \notin A$ , entonces se debe verificar que  $c_3 + c_4 = d_i$ . De aquí obtenemos entonces que  $c_2 + c_4 = d_i$ , por lo que  $D'$  es una orientación de  $G$  con  $\deg_{D'}^+(v_i) = d_i$ .

Una vez demostrado que  $\phi(D') = (V, A - A')$  es una biyección, veamos que se cumple las siguientes equivalencias. Si  $D$  es par(impar) entonces  $D'$  es una orientación par si y solo si  $\phi(D')$  es un subgrafo par(impar). Efectivamente si denotamos  $\epsilon_i$  como el número de aristas de  $C_i$  donde  $C_1 = \{\{u, v\} \in E / (u, v) \in A \wedge (u, v) \in A'\}$ ,  $C_2 = \{\{u, v\} \in E / (u, v) \in A \wedge (u, v) \notin A'\}$ ,  $C_3 = \{\{u, v\} \in E / (u, v) \notin A \wedge (u, v) \in A'\}$ ,  $C_4 = \{\{u, v\} \in E / (u, v) \notin A \wedge (u, v) \notin A'\}$ , tenemos que  $\epsilon_3 + \epsilon_4 = 2b + p(D)$  y  $\epsilon_2 + \epsilon_4 = 2a + p(D')$ . Luego, el número de aristas en  $A^*$  es igual a  $\epsilon_2 + \epsilon_3 = 2a + 2b - 2\epsilon_4 + p(D) + p(D')$ .

Como consecuencia directa del Teorema 3.12 y la Proposición 3.14 surge el siguiente resultado.

**Teorema 3.15.** *Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Si  $G$  tiene una orientación  $D = (V, A)$  tal que  $\deg_D^+(v) \leq k + 1$  para todo  $v \in V$  y  $EP(D) - EI(D) \neq 0$ , entonces  $G$  es  $k$ -coloreable.*

Tomando el grafo dirigido correspondiente a la Figura 3.2, vamos a utilizar el Teorema 3.15 para demostrar que el grafo de la Figura 3.2 es 3-coloreable. Para ello primero consideramos la orientación propuesta en la Figura 3.2, que satisface que el grado saliente en cada uno de los vértices es exactamente 2. Ahora, para aplicar el Teorema 3.15 vamos a calcular todos los subgrafos eulerianos de dicha orientación y confirmar que  $EP(D) - EI(D) \neq 0$ . Para ello incluimos en la Figura 3.4 los subgrafos eulerianos de  $D$ .

Como vemos en la tabla de la Figura 3.4, solo se ha representado los subgrafos eulerianos correspondientes con a lo sumo 6 arcos. Esto es debido a que el propio grafo  $D$  es euleriano, pues  $\deg_G^+(v) = \deg_G^-(v) = 2$  para todo  $v \in V$ , luego, a partir de las aristas introducidas en la tabla, los subgrafos eulerianos restantes serán sus correspondientes complementarios (ver Figura 3.5).

Haciendo el cálculo de los subgrafos eulerianos pares (22) menos los impares (16), tenemos que  $EP(D) - EP(I) = 22 - 16 \neq 0$ , entonces, por el Teorema 3.15 tenemos que el grafo original de la Figura 3.2 es 3-coloreable.

Si bien es fácil encontrar una 3-coloración del grafo original  $G = (V, E)$ , como la expuesta en la Figura 3.6, se ha elegido precisamente este ejemplo porque es el más simple de una familia infinita de grafos de la que Erdős conjeturó (ver [2]) que todos sus miembros son 3-coloreables. Esta familia se denomina de *ciclo más triángulos*, que son grafos que constan de un ciclo exterior de  $3k$  vértices y  $k$  triángulos disjuntos por vértices. Curiosamente, esta conjetura fue demostrada por Fleischner y Stiebitz [4] haciendo uso del Teorema 3.15

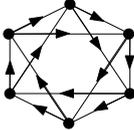
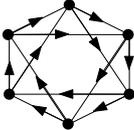
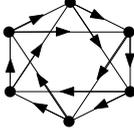
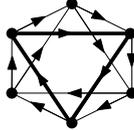
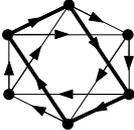
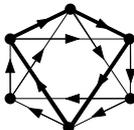
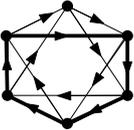
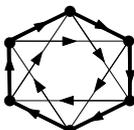
número de arcos	número de subgrafos de Euler	subgrafo euleriano
0	1	
1	0	
2	0	
3	2	 ×2
4	9	 ×3  ×6
5	6	 ×6
6	2	

Figura 3.4. Subgrafos eulerianos de la Figura 3.2 organizados por el número de arcos.

aquí expuesto, considerando una orientación del grafo (que generaliza la aquí expuesta en la Figura 3.2) y llevando a cabo una minuciosa cuenta del valor  $EP(D) - EI(D)$  para concluir que no puede ser 0, tal y como hemos hecho en un caso particular.

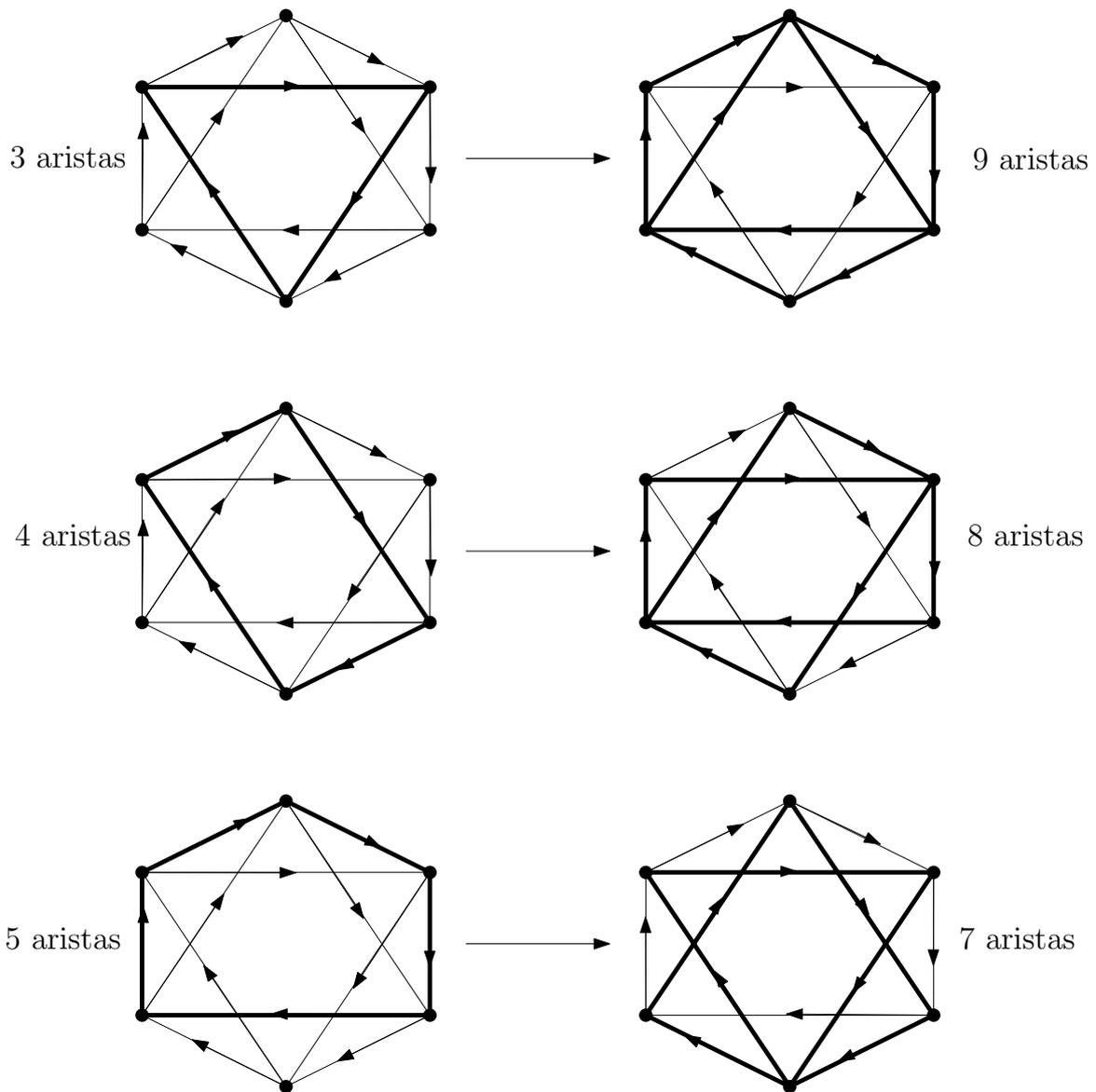


Figura 3.5. Subgrafo euleriano

### 3.4. Un algoritmo para determinar el número cromático de un grafo

#### 3.4.1. Consideraciones algorítmicas

Hemos visto en el Teorema 3.1 que el problema de decidir si un grafo es  $k$ -coloreable es equivalente al de decidir si su polinomio gráfico  $f_G$  está en el ideal  $I = (x_1^k - 1, \dots, x_n^k - 1)$ . En esta sección vamos a explotar esta idea para dar un algoritmo que recibe como entrada un grafo y determina si es  $k$ -coloreable o no.

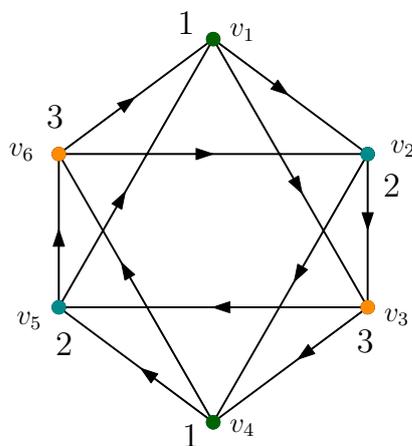


Figura 3.6. 3-coloración del grafo de la Figura 3.2

Posteriormente, aplicaremos este algoritmo para calcular el número cromático de un grafo.

Por lo general, saber si un polinomio se encuentra en un cierto ideal  $I$ , no es fácil de comprobar y para ello se suelen emplear las bases de Gröbner. Sin embargo, en la Proposición 3.4, vimos que  $B = \{x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n} + I \mid 0 \leq j_i < k\}$  es una base del anillo cociente  $F[x_1, \dots, x_n]/I$ . Además, en la demostración de ese resultado vimos cómo expresar cualquier polinomio en función de dicha base solo efectuando divisiones de polinomios en una variable. Además, en este caso, al estar  $I$  generado por polinomios de la forma  $x_i^k - 1$ , estas divisiones pueden hacerse muy fácilmente como muestra el siguiente resultado:

**Lema 3.16.** *Sea  $k \in \mathbb{Z}^+$  y consideremos el ideal  $I = (x_1^k - 1, \dots, x_n^k - 1) \subseteq F[x_1, \dots, x_n]$ . Sea  $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} \in F[x_1, \dots, x_n]$  un monomio y sea  $b_i \equiv a_i \pmod{k}$ , con  $b_i \in \mathbb{N}$  entonces  $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} + I = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n} + I$ .*

*Demostración.* Sea  $x_i^k - 1 \in I$ , entonces tenemos que  $x_i^k + I = 1 + I$  para todo  $i \in 1, \dots, n$ . Si  $a_i \equiv b_i$ , entonces  $a_i = b_i + \lambda k$  con  $\lambda \in \mathbb{Z}$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $\lambda \geq 0$ . Luego, tenemos que  $x_i^{a_i} + I = x_i^{b_i + \lambda k} + I = x_i^{b_i} (x_i^k)^{\lambda} + I = x_i^{b_i} + I$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Concluimos así que  $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n} + I = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n} + I$ .

Esta idea nos permite prescindir del cálculo de bases de Gröbner y obtener un algoritmo que recibe como entrada un grafo y un valor  $k \in \mathbb{Z}^+$  y determina si es  $k$ -coloreable o no. Dicho algoritmo descrito en la Figura 3.7 hace las siguientes operaciones: primero calcula  $f_G = \prod_{\substack{\{v_i, v_j\} \in E(G) \\ i < j}} (x_i - x_j)$ , transformando siguiendo el Lema 3.16 cada monomio que aparece en la expresión de  $f_G$  en un monomio en la base  $B$  y, finalmente, comprueba si la combinación lineal de los elementos de  $B$  es 0 o no, si es 0 entonces el grafo no es  $k$ -coloreable y, en caso contrario, sí lo es. Aplicando este algoritmo iterativamente para  $k \in \{1, 2, \dots\}$

hasta obtener una respuesta afirmativa se obtiene el número cromático del grafo.

**Coloración algebraica**

Input:  $G = (V, E)$  grafo,  $k \in \mathbb{Z}^+$   
Output: *Verdadero* si  $G$  es  $k$ -coloreable, *Falso* si  $G$  no es  $k$ -coloreable

Sea  $f_G = \prod_{\substack{\{v_i, v_j\} \in E(G) \\ i < j}} (x_i - x_j)$

Si  $f_G = \sum_{(a_{i_1 \dots i_n}) \in \mathbb{N}^n} a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$

Definimos  $h = \sum_{(i_1 \dots i_n) \in \mathbb{N}^n} a_{i_1 \dots i_n} x_1^{r(i_1)} \dots x_n^{r(i_n)}$   
donde  $i = qk + r(i)$  con  $0 \leq r(i) < k$  y  $q \in \mathbb{Z}$

**if**  $h = 0$  **then**  
    **return** Falso  
**else**  
    **return** Verdadero  
**end if**

**Figura 3.7.** Algoritmo que devuelve Verdadero si el grafo  $G$  es  $k$ -coloreable y Falso si no lo es.

**Teorema 3.17.** *El algoritmo recibe como parámetros de entrada un grafo  $G$  y un entero positivo  $k$  y nos devuelve si el grafo es  $k$ -coloreable o no.*

*Demostración.*

Sea  $f_G = \prod_{\substack{\{v_i, v_j\} \in E(G) \\ i < j}} (x_i - x_j)$  el polinomio gráfico, que podemos expresar como  $f_G = \sum_{(a_{i_1 \dots i_n}) \in \mathbb{N}^n} a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ . Por otro lado tenemos que  $i_j = qk + r(i_j)$  para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$ , entonces  $i_j \equiv r(i_j) \pmod{k}$ . Definiendo  $h = \sum_{(i_1 \dots i_n) \in \mathbb{N}^n} a_{i_1 \dots i_n} x_1^{r(i_1)} \dots x_n^{r(i_n)}$ , tenemos que, por el Lema 3.16,  $h(x_1, \dots, x_n) + I = f_G(x_1, \dots, x_n) + I$ . Por lo tanto,  $h(x_1, \dots, x_n) \in I$  si y solo si  $f_G(x_1, \dots, x_n) \in I$ . Además, tenemos que  $h(x_1, \dots, x_n)$  está expresado como elementos de la base  $B = \{x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} \mid 0 \leq j_i < k\}$ . Luego,  $h(x_1, \dots, x_n) + I = 0 + I$  es equivalente a que  $h$  sea el polinomio nulo. Concluimos del Teorema 3.8, que  $G$  no es  $k$ -coloreable si y solo si  $h(x_1, \dots, x_n) = 0$ .

En lo que resta de sección vamos a hacer algunas consideraciones computacionales sobre el algoritmo aquí presentado. En el primer paso del algoritmo tenemos que calcular  $f_G$ , que es el producto de  $m = |E|$  polinomios de la forma  $(x_i - x_j)$ . El desarrollo de estos productos involucra un máximo de  $2^m$  monomios. En la siguiente parte debemos expresar cada uno de los monomios que aparecen en el desarrollo de  $f_G$  en función de la base  $B$  mencionada anteriormente, que consta de  $k^n$  elementos. Por tanto nos encontramos ante un algoritmo cuyo tiempo de ejecución es exponencial en el tamaño de la entrada. Esto no es de

extrañar pues el problema de decidir si un grafo es  $k$ -coloreable es  $\mathcal{NP}$ -completo para todo valor de  $k \geq 3$  ([12]).

Uno de los puntos negativos del algoritmo propuesto es su naturaleza no constructiva pues, cuando este algoritmo garantiza que el grafo es  $k$ -coloreable, no nos devuelve una  $k$ -coloración del mismo. Por otro lado, una ventaja es que permite trabajar con grafos reducidos del grafo inicial, es decir, si tomamos  $G_1 = (V, E_1)$  y  $G_2 = (V, E_2)$  de forma que  $E = E_1 \cup E_2$ , tenemos que  $f_G = f_{G_1} f_{G_2}$  y, por lo tanto,  $f_G + I = (f_{G_1} + I)(f_{G_2} + I)$ . En particular, si  $f_{G_1} + I = 0 + I$ , entonces se tiene que  $G_1$  no es  $k$ -coloreable y consecuentemente,  $G$  tampoco lo es. Esta alternativa es muy útil en la práctica ya que permite dividir el grafo y así su ejecución será más rápida.

### 3.4.2. Implementación de códigos en SINGULAR

El objetivo de esta sección es la presentación de dos funciones mediante las cuales podremos saber si un grafo  $G$  es  $k$ -coloreable y obtener su número cromático. Para su implementación se ha empleado el software SINGULAR, un sistema de cálculo simbólico ideado para trabajar con polinomios, ideales y módulos sobre una gran variedad de anillos. Para el manejo y comprensión de este sistema de programación nos hemos ayudado del manual online que se puede consultar en [13]. A continuación se presentan los códigos implementados.

El código de la Figura 3.8 recibe como parámetros de entrada la matriz de adyacencia (ver Definición 3.18) correspondiente al grafo  $G$  y un valor  $k \in \mathbb{Z}^+$  y nos devolverá un 1 si el grafo  $G$  es  $k$ -coloreable y 0 en caso contrario. Por otro lado, el código de la Figura 3.9 únicamente recibe como parámetro de entrada la matriz de adyacencia del grafo  $G$  y nos devuelve el número cromático de dicho grafo.

**Definición 3.18.** *La matriz de adyacencia de un grafo  $G$  es una matriz binaria cuadrada construida de manera que, si en la posición  $a_{ij}$ , con  $i \neq j$ , aparece un 1, significa que existe una arista que une los vértices  $v_i$  y  $v_j$ . Si por el contrario, en la posición  $a_{ij}$  hay un 0, entonces no existe arista que una dichos vértices.*

Por ejemplo, supongamos que tenemos el grafo de la Figura 1.1, su matriz de adyacencia correspondiente es:

$$\begin{array}{r}
 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0 \\
 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0 \\
 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1 \\
 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0
 \end{array} \tag{3.1}$$

**Función EsColoreable**

Input:  $A$  matriz de adyacencia,  $k \in \mathbb{N}$   
Output: 0 si  $G$  no es  $k$ -coloreable, 1 en caso contrario

```

proc EsColoreable(intmat A, int k){
  int i,j;
  int n=nrows(A);
  ring r=0,x(1..n),dp;
  poly p=1;
  for(i=1;i<=n;i++){
    for(j=i;j<=n;j++){
      if(A[i,j]==1){
        p=p*(x(i)-x(j));
      }
    }
  }
  ideal id=0;
  for(i=1;i<=n;i++){
    id=id,x(i)^k-1;
  }
  poly resto=reduce(p,std(id));
  if(resto==0){
    return(0);
  }
  return(1);
}

```

**Figura 3.8.** Algoritmo que determina si el grafo  $G$  es  $k$ -coloreable.

**Función NumeroCromatico**

Input:  $A$  matriz de adyacencia  
Output:  $k \in \mathbb{N}$  número cromático del grafo  $G$

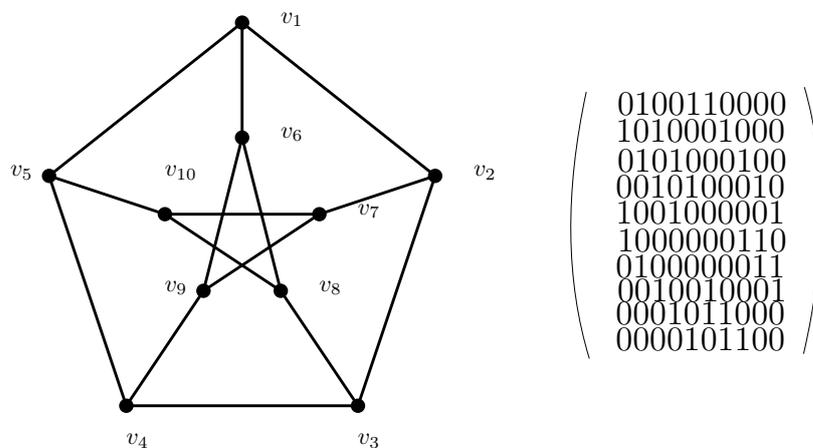
```

proc NumeroCromatico(intmat A){
  int k=2;
  while (EsColoreable(A,k)==0){
    k=k+1;
  }
  return (k);
}

```

**Figura 3.9.** Algoritmo que devuelve el número cromático del grafo  $G$ .

Supongamos ahora que tenemos el grafo de Petersen de la Figura 3.10 y queremos obtener su número cromático.



**Figura 3.10.** Grafo de Petersen y su matriz de adyacencia

Usando el código de la Figura 3.9, al introducir la matriz de adyacencia del grafo de Petersen de la Figura 3.10 nos devuelve 3, esto significa que el número cromático del grafo de Petersen es 3.

```
NumeroCromatico(A)
3
```

Para comprobar que el resultado es correcto, empleamos el código de la Figura 3.8 dándole como parámetro de entrada la matriz de adyacencia y las constantes  $k = 2$  y  $k = 3$ .

```
EsColoreable(A,3)
1
EsColoreable(A,2)
0
```

Al ejecutar la función con valor  $k = 3$  obtenemos como parámetro de salida 1, lo que significa que el grafo es 3-coloreable. Sin embargo, si introducimos como parámetro de entrada  $k = 2$ , nos devuelve 0. Se verifica así que efectivamente el grafo de Petersen tiene como número cromático 3.



---

## Bibliografía

- [1] D.B. West, *Introduction to Graph Theory*, Second edition 2002, University of Illinois-Urbana.
- [2] D.B. West, *Open problems*, SIAM Discrete Math. Newsletter 1 (3), 1991.
- [3] D. Eppstein, *Twenty Proofs of Euler's Formula:  $V-E+F=2$* , disponible en: <https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/all.html>
- [4] H. Fleischner, M. Stiebitz, *A solution to a colouring problem of P. Erdős*, Discrete Mathematics, Volume 101, Issues 1-3, 1992, 39-48.
- [5] H. Grötzsch, *Zur Theorie der diskreten Gebilde, VII: Ein Dreifarbensatz für dreikreisfreie Netze auf der Kugel*, Wiss. Z. Martin-Luther-U., Halle-Wittenberg, Math.-Nat. Reihe, 8, 1959: 109–120
- [6] K. Appel, W. Haken, *Every Planar Map is Four Colorable. I. Discharging*, Illinois Journal of Mathematics, 21 (3), 1977: 429–490.
- [7] K. Appel, W. Haken, J. Koch, *Every Planar Map is Four Colorable. II. Reducibility*, Illinois Journal of Mathematics, 21 (3), 1977: 491–567.
- [8] L. Lovász, *Three short proofs in graph theory*, J. Combin. Theory Ser. B 19(3), 1975, 269-271.
- [9] M. Zajac, *A short proof of Brooks' theorem*, arXiv, 2018: 1805.11176
- [10] N. Alon, *Combinatorial Nullstellensatz*, Combinatorics, Probability and Computing, 8, 1999, 7-29.
- [11] R.L. Brooks, *On colouring the nodes of a network*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 37, 1941, 194-197.
- [12] R.M. Karp, *Reducibility Among Combinatorial Problems* (PDF), In R.E. Miller; J.W. Thatcher; J.D. Bohlinger, Complexity of Computer, 1972.
- [13] W. Decker, G.M. Greuel, G. Pfister, H. Schönemann, SINGULAR 4-2-0. Sistema informático de álgebra para cálculos polinomiales que se encuentra disponible en <http://www.singular.uni-kl.de> (2019).



# Graph Coloring

## Abstract

THE MAIN OBJECTIVE of this work is the study of the graph coloring problem. We begin by obtaining some bounds on the chromatic number. After this, we study the coloring of planar graphs and prove some weaker versions of the Four Color Theorem. Finally, we characterize  $k$ -colorability of graphs in terms of the membership of a certain polynomial to an ideal.

## 1. Introduction

A graph coloring is an assignment of labels traditionally called "colors" to vertices of a graph such that no two adjacent vertices have the same color.

**Definition** The chromatic number of a graph is the smallest possible value of  $k$  such that exist a  $k$ -coloring. That is denoted by:

$$\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{Z}^+ / G \text{ is } k\text{-colorable}\}$$

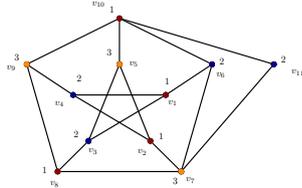
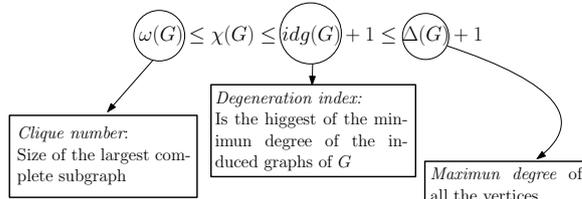


Figure 1: 3-coloring of the graph

## 2. Some bounds of the chromatic number

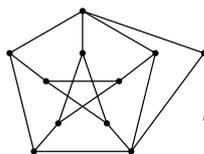
### Theorem 1



We implemented the algorithm *greedy coloring*, that gives us a coloring of the graph using  $\text{idg}(G) + 1$  color.

**Theorem 2 (Brook's theorem):** If  $G$  is connected, then:

$$\chi(G) = \Delta(G) + 1 \iff G \text{ is a complete graph or an odd cycle.}$$



We have:  $\omega(G) = 2; \text{idg}(G) = 3; \Delta(G) = 4$

$$\omega(G) = 3 \leq \chi(G) \leq \text{idg}(G) + 1 = 4 \leq \Delta(G) + 1 = 5$$

Figure 3: Bounds of the graph  $G$

## 3. Coloring planar graphs

A graph is planar if it can be drawn on the plane in such a way that no edges cross each other.

**Theorem 3 (Four Color Theorem):** Every planar graph is 4-colorable.

**Theorem 4 (Grötzsch Theorem):** Every planar graph with  $\omega(G) = 2$  is 3-colorable.

In this memory we prove the following weaker versions of the Four Color Theorem and the Grötzsch Theorem.

**Theorem 5:** Let  $G$  be a planar graph, then:

1.  $\chi(G) \leq 5$ .
2. If  $\text{idg}(G) = 4$ , then  $\chi(G) \leq 4$ .
3. If  $\omega(G) = 2$ , then  $\chi(G) \leq 4$ .
4. If  $G$  has not 3, 4 or 5-cycles, then  $\chi(G) \leq 3$ .

The proofs we provide are an improvement for planar graphs of the algorithm *greedy coloring*.

## 4. Algebraic graph coloring

**Definition:** The graphic polynomial is:

$$f_G(x_1, \dots, x_n) = \prod_{\substack{\{v_i, v_j\} \in E(G) \\ i < j}} (x_i - x_j)$$

**Theorem 6:** Let  $G$  be a graph,

$$G \text{ is } k\text{-colorable} \iff f_G \in I = (x_1^k - 1, \dots, x_n^k - 1)$$

Its proof uses the so called *Combinatorial Nullstellensatz* ([1]).

## 5. SINGULAR implementation

WE have exploited *Theorem 6* to implement a SINGULAR function that receives as input the *adjacency matrix* of a graph and determinates its chromatic number.

**Definition:** The adjacency matrix is a binary matrix where  $a_{ij} = 1 \iff \{v_i, v_j\} \in E$  and  $a_{ij} = 0$  in other case.

Using this function for the graph in the Figure 1 we get the following result:

```
NumeroCromatico(A)
3
```

## References

- [1] N. Alon, *Combinatorial Nullstellensatz*, *Combinatorics, Probability and Computing*, 8, 1999, 7-29.