

Andrea San Blas Hernández

*Dinámica de Poblaciones en
Condiciones Ambientales Periódicas*
Population Dynamics in Periodic Environments

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Junio de 2021

DIRIGIDO POR
José Claudio Sabina de Lis

José Claudio Sabina de Lis
Departamento de Análisis
Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a todos esos compañeros que me han seguido en el proceso. Gracias por su apoyo y su ayuda incondicional.

Agradecer, en segundo lugar, a mi madre por sembrar la semilla de las matemáticas en mí, por aportarme esa fuerza para no rendirme y seguir luchando.

Para finalizar, una mención especial a mi tutor, José Claudio Sabina de Lis, por su paciencia, su involucración, por saber transmitirme tranquilidad en época de tormenta y hacer del TFG una gran experiencia.

Andrea San Blas Hernández
La Laguna, 5 de julio de 2021

Resumen · Abstract

Resumen

Esta memoria se ocupa de la interacción entre dos especies, recurriendo para ello a los tres modelos clásicos de la dinámica de poblaciones. El énfasis se pone en los sistemas competitivo y depredador–presa. Lo que distingue nuestro estudio de las presentaciones estándar es la dependencia periódica de los coeficientes en las ecuaciones. Su análisis requiere de herramientas avanzadas del análisis no lineal.

Palabras clave: *Dinámica de poblaciones. Sistemas competitivos. Ecuaciones periódicas.*

Abstract

This work addresses the interaction between two species by employing the three classical models in population dynamics. Emphasis is focussed in the cases of competitive and prey–predator systems. In strong difference regarding the standard presentations, the key point of our study is the periodic in time dependence of the coefficients in the equations. Their analysis require of advanced tools of nonlinear analysis.

Keywords: *Population Dynamics. Competitive systems. Periodic equations.*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Ecuaciones escalares	1
1.1. Ecuaciones periódicas, soluciones periódicas	1
1.2. Ecuaciones lineales	3
1.3. Estabilidad de soluciones	4
1.4. Existencia de soluciones periódicas	7
1.5. Ecuación logística	7
2. Sistemas competitivos	13
2.1. Coeficientes constantes	14
2.2. El sistema periódico. Propiedades de monotonía	16
2.3. Puntos fijos. Existencia de soluciones periódicas	20
2.4. Estabilidad de las soluciones periódicas triviales	22
2.5. Dominios de atracción	23
2.6. Dominio de repulsión de $(0, 0)$	24
2.7. Dominios de atracción de los equilibrios $(0, 1)$ y $(1, 0)$	27
2.8. Soluciones periódicas no triviales	28
2.9. Un ejemplo	30
3. Sistemas depredador–presa	33
3.1. Coeficientes constantes	33
3.2. Coexistencia periódica	34
A. Apéndice	43
A.1. Dependencia continua en datos iniciales	43
A.2. Monotonía del flujo	43

A.3. Dinámica discreta	44
A.4. Estabilidad de las soluciones periódicas	45
A.5. Bifurcación	46
Bibliografía	49
Poster	51

Introducción

La dinámica de poblaciones es una disciplina que se encuentra en la intersección de tres campos científicos: demografía (ciencias sociales), epidemiología (medicina) y ecología (biología).

Pronosticar la configuración futura del número de individuos de una cierta especie es su principal cometido. No es extraño que los primeros estudios se ocuparan de la especie humana. Se remontan directamente a L. Euler (1748) quien a tal fin formuló un modelo discreto. A este estudio siguieron dos contribuciones de enorme tradición en el campo, fueron debidas a R. Malthus (1798) y P. Verhulst (1838). Versan ambas sobre demografía y de hecho, la primera de éstas ejerció una considerable influencia en las ideas de Darwin sobre el origen de las especies.

A comienzos del siglo XX, W. O. Kermack y A. Mc Kendrick (1926) formularon el ahora famoso modelo SIR en epidemiología. Junto con los trabajos de A. Lotka (1920) y V. Volterra (1925) constituyen los ejemplos pioneros del estudio matemático de la interacción entre dos o más especies.

Finalmente, a mediados de la década de los setenta, la teoría ecuaciones diferenciales, muy particularmente la teoría cualitativa, experimentó un sensible cambio de orientación, al tornar la mirada de la mecánica a lo que hoy denominamos Biología Matemática. Desde su fundación en 1974, el *Journal of Mathematical Biology* (Springer) comenzó a publicar abundante material sobre la dinámica de especies en competición.

Esta memoria se ocupa de los tres modelos clásicos que describen el comportamiento de dos especies animales. A saber: los sistemas competitivos, cooperativos y depredador–presa. En su formato estándar, estas ecuaciones se presentan en los cursos de Modelización empleando coeficientes constantes. Sin embargo, su estudio es considerablemente más complejo cuando los coeficientes pasan a ser funciones periódicas del tiempo t (el habitat cambia con las estaciones). Su tratamiento requiere del concurso de herramientas avanzadas del análisis no lineal (monotonía, bifurcación, grado topológico, etc). Llama la atención que tras

más de cuarenta años de estudio, el campo sigue brindando abundantes temas de investigación.

El objetivo principal de esta memoria consiste en establecer la existencia de una solución periódica de componentes positivas (estado de ‘coexistencia’) para estos sistemas. El Capítulo 1 estudia la ecuación logística de coeficientes periódicos. Dicha ecuación juega un papel auxiliar en el resto del trabajo. En el Capítulo 2 nos ocupamos de los sistemas competitivos. Se estudian con detalle la existencia y número de sus soluciones positivas. Por razones de espacio hemos omitido la inclusión del caso cooperativo. Sin embargo las herramientas empleadas permiten aplicar algunos de los resultados obtenidos a esta clase de ecuaciones. Finalmente, un estudio parcial de las soluciones periódicas para los sistemas depredador–presa se introduce en el Capítulo 3.

Esta memoria se ha elaborado en base al estudio detallado de [9]. Pudimos subsanar una laguna observada en este artículo gracias al interesante trabajo [11]. Agradecemos al Prof. Rafael Ortega Ríos (Universidad de Granada) la amabilidad con que ha atendido nuestras consultas. Otras referencias importantes han sido (en orden de relevancia): [10], [7], [3], [6] y [8].

Finalmente, se hace constar que no se han perseguido en este trabajo objetivos de investigación originales.

Ecuaciones escalares

Discutimos en este capítulo algunos aspectos básicos de las ecuaciones periódicas en el caso escalar. Un problema de capital importancia es el de la existencia de soluciones periódicas.

1.1. Ecuaciones periódicas, soluciones periódicas

Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función $f = f(t, x)$ que es continua junto con su derivada f_x . La ecuación

$$x' = f(t, x) \tag{1.1}$$

se llama “no autónoma” porque la variable t aparece explícitamente en el segundo miembro. Admitimos en este capítulo que f posee la regularidad mencionada. La ecuación se dice T -periódica si el segundo miembro es T -periódico en t es decir si para $x \in \mathbb{R}$ fijado: $f(t+T, x) = f(t, x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En las condiciones señaladas se sabe que el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

admite una única solución $x(t)$ para datos iniciales (t_0, x_0) arbitrarios. La variable $t \in (\alpha, \beta)$ y los extremos son funciones de (t_0, x_0) . Para señalar la dependencia de la solución escribimos $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$. Se sabe que φ es una función de clase \mathcal{C}^1 en todos sus argumentos ([12]). Por similitud con el caso autónomo llamamos a φ el *flujo* de la ecuación. Mantendremos esta notación en el caso de ecuaciones vectoriales, es decir sistemas de ecuaciones (véanse el Capítulo 2 y la Sección A.1 del Apéndice).

Un caso particular importante es el de las ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.3}$$

En condiciones generales se supone que $a, b \in C(\alpha, \beta)$ y el intervalo (α, β) está fijado de antemano. Obviamente $(\alpha, \beta) = \mathbb{R}$ si a, b son periódicas. La solución de (1.3) se expresa en términos de la Fórmula de Variación de las Constantes de Lagrange:

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} + e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a(\tau_1) d\tau_1} b(s) ds. \quad (1.4)$$

De hecho la solución del caso homogéneo es $x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}$. Para resolver el caso no homogéneo se sustituye x_0 por una función de t que después se determina fácilmente por integración.

Exploraremos en este capítulo las propiedades de (1.3) cuando los coeficientes a y b son funciones T -periódicas. La siguiente propiedad es consecuencia de la unicidad de soluciones.

Proposición 1.1. *Sean $x(t), y(t)$ soluciones de (1.1) definidas en (α, β) y tales que $x(t_0) < y(t_0)$ para algún $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Entonces $x(t) < y(t)$ para todo $t \in (\alpha, \beta)$.*

Trabajamos con ecuaciones T -periódicas en las condiciones de regularidad establecidas al comienzo de la sección. Una primera propiedad es la que sigue.

Proposición 1.2. *El flujo φ de una ecuación T -periódica $x' = f(t, x)$ satisface las siguientes propiedades:*

$$\varphi(t + T, t_0 + T, x_0) = \varphi(t, t_0, x_0), \quad (1.5)$$

$$\varphi(t + T, t_0, x_0) = \varphi(t, t_0, \varphi(t_0 + T, t_0, x_0)). \quad (1.6)$$

La demostración es consecuencia del Lema 1.3 que sigue. Viene a decir que el conjunto de soluciones de una ecuación periódica es invariante frente a traslaciones que son múltiplos de T . A continuación del Lema 1.3 presentamos otro resultado auxiliar.

Lema 1.3. *Si $x(t)$ resuelve la ecuación (1.1) entonces $y(t) = x(t + nT)$ también la resuelve para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Lema 1.4. *Sea $y(t)$ una solución de la ecuación T -periódica (1.1). Si $y(t_0) < y(t_0 + T)$ (respectivamente, $>, =$) entonces $y(t) < y(t + T)$ (r. $>, =$) para todo t .*

Demostración. Definiendo $z(t) = y(t + T)$ basta emplear la Proposición 1.1. \square

Teorema 1.5. *Una solución $x(t)$ de la ecuación periódica (1.1) es T -periódica sí y sólo sí existe t_0 tal que $x(t_0 + T) = x(t_0)$. La propiedad también es cierta en el caso de ecuaciones N -dimensionales.*

Tratamos ahora con propiedades básicas de las funciones periódicas. Para uso futuro introducimos el espacio $C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ de las funciones $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ continuas y T -periódicas. Para $N = 1$ usaremos la notación más sencilla $C_T(\mathbb{R})$.

Definición 1.6. El promedio \bar{a} de una función periódica $a \in C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ se define como:

$$\bar{a} = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt \in \mathbb{R}^N.$$

Proposición 1.7. Si $a \in C_T(\mathbb{R})$ entonces $A(t) = \int_0^t a$ es periódica si y sólo si $\bar{a} = 0$. Más aún, en el caso de funciones escalares $N = 1$:

$$\bar{a} > 0 \text{ (respectivamente } < 0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} A = \infty \text{ (} -\infty).$$

Demostración. Nos ocupamos sólo de la segunda afirmación para el caso $N = 1$:

$$A(t + nT) = n\bar{a} + \int_{nT}^t a.$$

De aquí se deduce la segunda afirmación. □

1.2. Ecuaciones lineales

El problema de la existencia de soluciones periódicas de ecuaciones lineales se resuelve a continuación.

Teorema 1.8. Sean $a, b \in C_T(\mathbb{R})$. La ecuación:

$$x' = a(t)x + b(t), \tag{1.7}$$

cumple las siguientes propiedades.

- i) Existe una solución T -periódica para cada $b \in C_T(\mathbb{R})$ si y sólo si la única solución T -periódica de la ecuación homogénea $x' = a(t)x$ es $x(t) = 0$.
- ii) La ecuación $x' = a(t)x$ admite soluciones T -periódicas no triviales si y sólo si $\bar{a} = 0$. En ese caso todas las soluciones de la ecuación homogénea son T -periódicas. Además, dada $b \in C_T(\mathbb{R})$ la ecuación (1.7) admite una solución T -periódica si y sólo si:

$$\int_0^T e^{-A(s)} b(s) ds = 0, \tag{1.8}$$

donde $A(t) = \int_0^t a$. En ese caso la ecuación admite infinitas soluciones periódicas.

Demostración. Comenzamos por el punto *ii*). Para $\bar{a} = 0$, $A(t)$ es una función T -periódica, luego $x = A(t)x_0$ que es la solución general de la ecuación homogénea, es T -periódica.

Supongamos que $x(t)$ es una solución T -periódica de (1.7). Entonces:

$$(e^{-A(t)}x)' = e^{-A(t)}b(t) \quad \Rightarrow \quad \overline{e^{-A}b} = 0.$$

Se tiene pues la necesidad de (1.8). Ahora, esta condición implica que $\int_0^t e^{-A(s)}b(s)$ es T -periódica. Por tanto:

$$x = e^{A(t)}\left(x_0 + \int_0^t e^{-A(s)}b(s) ds\right),$$

es T -periódica, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$. Hemos probado también la suficiencia en la propiedad *ii*). Para probar la necesidad notamos que si $x = x_0e^{A(t)}$ es T -periódica con $x_0 \neq 0$ entonces $(1 - e^{-A(T)})x_0 = 0$ lo que implica que $A(T) = T\bar{a} = 0$.

Para probar *i*) notamos que la necesidad de $\bar{a} \neq 0$ para la existencia de soluciones T -periódicas cuando $b \in C_T$ es arbitrario se sigue de que si $\bar{a} = 0$ existen funciones $b \in C_T$ tales que (1.1) carece de soluciones periódicas.

Por otro lado que $x' = ax$ carezca de soluciones T -periódicas no triviales significa que $(1 - e^{A(T)}) \neq 0$ luego la ecuación:

$$(1 - e^{-A(T)})x_0 = \int_0^T e^{-A(s)}b(s) ds,$$

se puede resolver en x_0 con independencia del segundo miembro. Por tanto:

$$x(t) = x_0e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_0^t e^{-A(s)}b(s) ds$$

es T -periódica. □

1.3. Estabilidad de soluciones

Presentamos las nociones de estabilidad. Se aplican a soluciones, con un horizonte de existencia infinito, y a ecuaciones N -dimensionales de la forma:

$$x' = f(t, x).$$

Definición 1.9. Supongamos que la solución $p(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$ de (1.2) está definida en $[\alpha, \infty)$.

a) Se dice que $p(t)$ es estable si $\forall t_0 \geq 0$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que si $|x_1 - x_0| < \delta$ entonces $|\varphi(t, t_0, x_1) - p(t)| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$.

b) Se dice que $p(t)$ es asintóticamente estable si es estable y además existe $\eta > 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t, t_0, x_1) - p(t)| = 0,$$

cuando $|x_1 - x_0| < \eta$.

c) Se dice que $p(t)$ es inestable si no es estable.

Observación 1.10.

- i) Tiene interés explicitar la noción de inestabilidad a base de negar a). Así $p(t)$ es inestable si existen $t_0, \varepsilon_0, x_{1,n} \rightarrow x_0$ y $t_0 < t_n \rightarrow \infty$ tales que $|y_n(t_n) - p(t_n)| \geq \varepsilon_0$ para todo n .
- ii) El δ de la definición a) no sólo depende de ε sino además de t_0 . Puede probarse que si $p(t)$ y la ecuación son T -periódicas entonces se puede elegir un δ que no depende de t_0 . Nuestro interés en esta memoria se centra en las soluciones periódicas.

Ejemplo 1.11. Se comprueba que $p(t) = \sin t$ es una solución asintóticamente estable y periódica de la ecuación $x' = -x + \cos t + \sin t$, mientras que es una solución inestable de $x' = x + \cos t - \sin t$. La diferencia estriba en el signo de x en las ecuaciones.

Para ecuaciones lineales de la forma (1.7) se comprueba que una solución en particular $y(t)$ es asintóticamente estable (respectivamente, estable, inestable) sí y sólo sí la solución trivial $z(t) = 0$ de la ecuación homogénea $x' = a(t)x$ es asintóticamente estable (respectivamente, estable, inestable). Por tanto si una solución $y(t)$ de (1.7) es asintóticamente estable entonces todas sus soluciones lo son. Por ello en el caso lineal se habla de “ecuación asintóticamente estable”.

Proposición 1.12. *Sea $x' = a(t)x + b(t)$ una ecuación lineal con coeficientes periódicos. La ecuación es asintóticamente estable (respectivamente, estable, inestable) sí y sólo sí $\bar{a} < 0$ ($r., = 0, > 0$).*

Demostración. Basta usar la Proposición 1.7 y estudiar la solución general de la ecuación homogénea. \square

Observación 1.13. Cuando $\bar{a} < 0$ toda solución de la ecuación homogénea $x' = a(t)x$ satisface $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. En este caso $x = 0$ es algo más que asintóticamente estable; es una solución *globalmente atractiva*.

Aunque no hemos abordado el importante problema de la existencia de soluciones periódicas introducimos a continuación un resultado de estabilidad para estas ecuaciones.

Teorema 1.14. *Sean, $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y T -periódica respecto de x para la que $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ también es continua e $y(t)$ una solución T -periódica de la ecuación $x' = f(t, x)$.*

- i) Si $\int_0^T f_x(t, y(t)) dt < 0$ entonces $y(t)$ es asintóticamente estable.
 ii) Si $\int_0^T f_x(t, y(t)) dt > 0$ entonces $y(t)$ es inestable.

La demostración del Teorema 1.14 se apoya en la Proposición 1.18 que enunciaremos en unos momentos. Primero introducimos una definición.

Definición 1.15. La aplicación de Poincaré $\pi : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ asociada a la ecuación T -periódica (1.1) se define como:

$$\pi(x_0) = \varphi(T, 0, x_0),$$

es decir, arrancar en x_0 y pararse en tiempo $t = T$.

Observación 1.16.

- a) El dominio D es en general más reducido que \mathbb{R} . Se puede reemplazar 0 por un valor t_0 en la definición.
 b) Se sigue del Lema 1.4 que $x(t) = \varphi(t, 0, x_0)$ es una solución T -periódica sí y sólo sí $\pi(x_0) = x_0$. El decir, los puntos fijos de π se corresponden con las soluciones periódicas de la ecuación.
 c) De la propiedad de unicidad de soluciones para el problema (1.2) deducimos que π es una función estrictamente creciente.

Toda función $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ define lo que denomina un sistema dinámico discreto. Equivalentemente la ecuación en diferencias:

$$x_n = f(x_{n-1}). \quad (1.9)$$

La solución de (1.9) con dato inicial x_0 consiste en la sucesión de iteradas:

$$x_0, f(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots,$$

que abreviamos $\{f^n(x_0)\}$. Si \bar{x} es un punto fijo de f la tal solución es constante pues $f^n(\bar{x}) = \bar{x}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Las nociones de estabilidad presentadas en la Definición 1.9 se extienden sin cambio a la ecuación en diferencias (1.9) (Apéndice, Sección A.3). Presentamos ahora el resultado auxiliar anunciado. Su demostración es sencilla (véase [5]) y se omite por brevedad.

Teorema 1.17. Sean $f \in C^1(\mathbb{R})$ y \bar{x} uno de sus puntos fijos. Si $|f'(\bar{x})| < 1$ entonces \bar{x} es un punto fijo asintóticamente estable; si $|f'(\bar{x})| > 1$ entonces \bar{x} es un punto fijo inestable.

La demostración del Teorema 1.14 se sigue sin dificultad de la siguiente propiedad (véase la Proposición 2.15).

Proposición 1.18. Sea $y(t) = \varphi(t, 0, \bar{x})$ una solución T -periódica de (1.1) correspondiente al punto fijo \bar{x} de la aplicación de Poincaré π . Entonces $y(t)$ y \bar{x} comparten el mismo tipo de estabilidad relativos a las ecuaciones (1.1) y (1.9), respectivamente.

1.4. Existencia de soluciones periódicas

El que sigue es un elegante resultado del matemático uruguayo J. L. Massera (1915–2002) [8]. En el Teorema 2.16, uno de los más importantes de la memoria, se demuestra con todo detalle. En efecto, el razonamiento se aplica largamente al caso especial que enunciamos ahora.

Teorema 1.19. *Supongamos que la ecuación T -periódica (1.1) $x' = f(t, x)$ posee una solución $x(t)$ que está acotada en $[t_0, \infty)$. Entonces admite una solución T -periódica $p(t)$. Más aún:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - p(t)| = 0. \quad (1.10)$$

1.5. Ecuación logística

Conocer y, si se puede, controlar o manipular el número de efectivos de una especie es el objetivo de la dinámica de poblaciones. La incógnita es el número de individuos $u(t)$ de una cierta especie (en su habitat) en el instante t .

Tener información sobre $u(t)$ significa en la práctica disponer de un pronóstico sobre su comportamiento futuro. En algunos casos el observador se preocupa en preservar la especie. Por ejemplo las de interés industrial como la pesca en diversas zonas del océano. En otros se trata ni más ni menos que de llevarla directamente a la extinción. Es el caso de algunas clases de bacterias nocivas o de virus.

Dado un periodo característico de tiempo h , las cantidades

$$\nu(t, h) = \frac{N}{u(t)h}, \quad \mu(t, h) = \frac{M}{u(t)h},$$

donde N es el número de individuos nacidos en el intervalo $[t, t + h]$, M el número de fallecidos en el mismo periodo, se denominan las tasas de natalidad y mortalidad medias en el intervalo de tiempo $[t, t + h]$. Si no se tienen en cuenta otras causas de variación en el número de individuos (por ejemplo, la migración) resulta $u(t + h) - u(t) = N - M$. A partir de las tasas instantáneas de natalidad y mortalidad que se definen como:

$$\nu(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \nu(t, h), \quad \mu(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \mu(t, h),$$

deducimos:

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = \nu(t) - \mu(t) =: \lambda(t).$$

La magnitud $\lambda(t)$ es lo que se conoce como tasa de *crecimiento natural* de la población. En dinámica de poblaciones se proponen diversos ‘modelos’ de tasas

de crecimiento natural para describir el comportamiento de ciertas especies. Por definición, se dice que una población sigue la *ley de crecimiento* f cuando la tasa que la describe tiene la forma $\lambda = f(t, u)$. Sin embargo se podrían proponer otras leyes de crecimiento más complicadas (dependientes de la edad, de la posición espacial, de la ‘historia’ de la población, etc).

Empezamos por el caso más simple, el que se observa en muchas especies durante la fase inicial de su desarrollo [1]. Una población sigue la ley de crecimiento de Malthus cuando f es constante. Esto ocurre cuando las tasas de natalidad y mortalidad no varían con el tiempo:

$$\nu(t) = \nu > 0 \quad \text{constante}, \quad \mu(t) = \mu > 0 \quad \text{constante}.$$

Por tanto $\lambda(t) = \nu - \mu$ es constante. La ecuación diferencial que rige la población es:

$$u' = \lambda u.$$

Cuando $\lambda > 0$ la natalidad prevalece sobre la mortalidad y la especie se reproduce exponencialmente (sin control). El tiempo característico de crecimiento es $t_c = \frac{1}{\lambda}$. En este caso $u = 0$ es inestable. En cambio si $\lambda < 0$ sucede lo contrario, $u = 0$ es asintóticamente estable y la especie se extingue siguiendo un decaimiento exponencial.

Como ningún hábitat puede soportar la invasión exponencial de individuos una ley de crecimiento más sensata es:

$$f(u) = a - bu, \quad a, b > 0.$$

Se la conoce como la ley logística o de Verhulst ([1]). Viene a decir que la propia especie se convierte en su enemigo cuando el número de individuos es grande (el efecto ‘superpoblación’ o ‘crowding’). La correspondiente ecuación es:

$$u' = u(a - bu).$$

Se comprueba fácilmente que todas las soluciones con $u(0) = u_0 > 0$ satisfacen:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \frac{a}{b}.$$

La solución $u = \frac{a}{b}$ es asintóticamente estable y representa la “configuración de equilibrio” de la especie. El grupo $\frac{a}{b}$ se identifica con la capacidad de soporte (‘carrying capacity’) del medio. Cuanto menor es b mayor es el número de individuos que puede cobijar.

Nos interesamos ahora en la ecuación logística con coeficientes periódicos $a, b \in C_T(\mathbb{R})$:

$$u' = u(a(t) - b(t)u), \tag{1.11}$$

donde $b(t) \geq 0$ pero $b \neq 0$. Esto significa que la población tiene épocas de fertilidad o mortalidad dependiendo de la estación (signo de a) mientras la capacidad de recursos puede ser ilimitada en algunas estaciones ($b = 0$) o no ($b > 0$).

El siguiente resultado muestra que la ecuación logística periódica tiene una respuesta similar a la del caso de coeficientes constantes.

Teorema 1.20. *La ecuación logística presenta las siguientes propiedades.*

i) *Admite una solución periódica positiva sí y sólo sí*

$$\bar{a} = \frac{1}{T} \int_0^T a > 0. \quad (1.12)$$

ii) *En caso de existir, la solución periódica positiva es única.*

iii) *Si $\bar{a} > 0$ y p es la solución periódica, ésta es asintóticamente estable. Más aún es globalmente atractiva entre las soluciones positivas. Es decir, toda solución positiva x cumple:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - p(t)| = 0.$$

iv) *Si $\bar{a} > 0$ entonces la solución trivial $x = 0$ es inestable, pero si $\bar{a} < 0$ entonces $x = 0$ es asintóticamente estable y globalmente atractiva; toda solución positiva $x(t)$ cumple $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ (extinción de la especie).*

Demostración. El cambio $z = \frac{1}{x}$ transforma (1.11) en la ecuación lineal:

$$z' = -a(t)z + b(t).$$

Empleamos entonces el Teorema 1.8. Como $b \not\equiv 0$ entonces:

$$\int_0^T e^{A(s)} b(s) ds > 0, \quad A(t) = \int_0^t A.$$

Luego no existen soluciones periódicas a menos que $\bar{a} \neq 0$ (Teorema 1.8). Si $\bar{a} \neq 0$ la solución periódica tiene la forma:

$$z(t) = e^{-A(t)} z_0 + e^{-A(t)} \int_0^t e^{A(s)} b(s) ds. \quad (1.13)$$

Su dato inicial es:

$$z_0 = \frac{e^{-A(T)}}{1 - e^{-A(T)}} \int_0^T e^{A(s)} b(s) ds. \quad (1.14)$$

Luego está claro que la solución es positiva sí y sólo sí $\bar{a} > 0$ puesto que $A(T) = T\bar{a}$. Llamándola $p(t)$ su expresión es:

$$p(t) = \frac{1}{e^{-A(t)} z_0 + e^{-A(t)} \int_0^t e^{A(s)} b(s) ds}, \quad (1.15)$$

donde z_0 cumple (1.14). Así:

$$p(t) = \frac{1 - e^{-A(T)}}{e^{-A(t)} \left\{ e^{-A(T)} \int_0^T e^{A(s)} b(s) + (1 - e^{-A(T)}) \int_0^t e^{A(s)} b(s) \right\}}. \quad (1.16)$$

Usando la T periodicidad de a y b se demuestra que p admite la expresión más compacta ([7]):

$$p(t) = \frac{1 - e^{-A(T)}}{\left\{ \int_0^T e^{-\int_0^s a(t-\sigma) d\sigma} b(t-s) ds \right\}}. \quad (1.17)$$

Probamos el carácter globalmente atractivo de p . Si $x(t)$ es cualquier solución positiva de la ecuación entonces $z = \frac{1}{x} - \frac{1}{p}$ cumple:

$$z' = -a(t)z.$$

Si $\bar{a} > 0$ resulta que $z(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ que es lo que queríamos probar.

La estabilidad asintótica de $x = 0$ cuando $\bar{a} < 0$ se sigue del Teorema 1.3. Finalmente, si $\bar{a} < 0$ y $x(t)$ es una solución positiva entonces $z = \frac{1}{x}$ se representa en la forma (1.13) donde $z_0 = x_0^{-1} > 0$. El segundo miembro tiende a $+\infty$ cuando $t \rightarrow \infty$ y resulta que $x(t) \rightarrow 0$. \square

Observación 1.21. La existencia de una solución positiva también se sigue del Teorema 1.14 si imponemos la condición más fuerte:

$$b(t) \geq b_0 > 0.$$

En este caso $(a(t) - b(t)x)x < 0$ si $x > \frac{\max a}{b_0}$. De aquí se deduce que todas las soluciones positivas están acotadas en $t \geq 0$. El Teorema 1.14 implica la existencia de una solución periódica positiva.

La siguiente propiedad es consecuencia de cualquiera de las dos representaciones (1.15) ó (1.17).

Lema 1.22. Sean $p_i(t)$, $i = 1, 2$ las correspondientes soluciones periódicas positivas de las ecuaciones logísticas:

$$x' = x(a_i(t) - b(t)x), \quad 1 = 1, 2.$$

Si las funciones a_i cumplen $a_1(t) \leq a_2(t)$ para $t \in [0, T]$ entonces $p_1(t) < p_2(t)$ en $[0, T]$. En cambio, si las soluciones $p_i(t)$ resuelven

$$x' = x(a(t) - b_i(t)x) \quad 1 = 1, 2,$$

donde $b_1(t) \leq b_2(t)$ en $[0, T]$ entonces $p_1(t) > p_2(t)$.

Observación 1.23. Supongamos que $a, b \in C_T(\mathbb{R})$ son estrictamente positivas en $[0, T]$ y que p es la solución periódica de $x' = x(a - bx)$. Se deduce entonces del lema precedente la siguiente estimación de $p(t)$:

$$\frac{a_{\min}}{b_{\max}} \leq p(t) \leq \frac{a_{\max}}{b_{\min}}, \quad t \in [0, T].$$

Concluimos la sección deduciendo una expresión más sencilla de la ecuación logística periódica:

$$x' = x(a(t) - b(t)x),$$

con a, b en las condiciones de la Sección 1.5. Suponemos que estamos en las condiciones de existencia de una solución periódica positiva, es decir $\bar{a} > 0$. Introducimos el cambio $y = q(t)x$ donde y es la nueva incógnita y buscamos un coeficiente $q(t)$ periódico y positivo. Al derivar:

$$y' = q'x + qx(a - bx) = x(q' + (a - bx)q) = y \left(\frac{q'}{q} + a - \frac{b}{q}y \right).$$

Definimos entonces q como la única solución positiva de:

$$\frac{q'}{q} + a = \frac{b}{q} \quad \Leftrightarrow \quad q' = -aq + b.$$

Con esta elección de q la ecuación logística se convierte en:

$$y' = \frac{b}{q}y(1 - y). \quad (1.18)$$

La ecuación (1.18) es de variables separadas. Su integración permite concluir que la única solución T -periódica es $y(t) = 1$. Deshaciendo el cambio resulta que:

$$x = \frac{1}{q(t)}$$

es la solución periódica que construimos en la sección anterior. Las propiedades estudiadas en el Teorema 1.20 se observan muy bien en la ecuación (1.18). Nótese que la solución de la dicha ecuación que vale $y(0) = y_0$ es:

$$y = \frac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)\exp\left(\int_0^t \frac{b}{q}\right)}.$$

Sistemas competitivos

Nos ocupamos del estudio de sistemas:

$$\begin{cases} u' = u(a(t) - a_{11}(t)u - a_{12}(t)v) \\ v' = v(b(t) - a_{21}(t)u - a_{22}(t)v), \end{cases} \quad (2.1)$$

en donde todos los coeficientes a, b, a_{ij} son funciones continuas y periódicas en $C_T(\mathbb{R})$, mientras los coeficientes de interacción a_{ij} son positivos en $[0, T]$. Sin embargo, a las tasas naturales de crecimiento $a(t)$ y $b(t)$ se les permite cambiar de signo a condición de que sus promedios \bar{a} y \bar{b} sean positivos:

$$\bar{a} > 0, \quad \bar{b} > 0.$$

Usando la parte final de la Sección 1.5, las ecuaciones (2.1) pueden normalizarse a través del cambio periódico de función incógnita:

$$u = q_1(t)x, \quad v = q_2(t)y,$$

donde $q_1, q_2 \in C_T^1(\mathbb{R})$ son positivas y están unívocamente determinadas por las ecuaciones:

$$q_1' = -aq_1 + a_{11}, \quad q_2' = -bq_2 + a_{22}.$$

Se obtiene así un sistema de aspecto más sencillo:

$$\begin{cases} u' = a_1(t)x(1 - x - b_1(t)y) \\ v' = a_2(t)y(1 - y - b_2(t)x). \end{cases} \quad (2.2)$$

En esta nueva ecuación los coeficientes $a_i, b_i \in C_T(\mathbb{R})$ y son positivos.

La ecuación (2.2) sólo tiene tres soluciones de equilibrio (constantes): $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Las dos últimas y a través del cambio de variable dan lugar respectivamente a las soluciones semitrivales $(u(t), 0)$ y $(0, v(t))$ donde u es la solución periódica positiva de $u' = u(a - a_{11}u)$ y v la correspondiente solución de $v' = v(b - a_{22}v)$. Estas soluciones semitriviales representan la extinción de una de las especies.

2.1. Coeficientes constantes

En el estudio de ecuaciones N -dimensionales T -periódicas:

$$x' = f(t, x)$$

se toma como referencia el ‘sistema promediado’ (‘averaged’):

$$y' = \bar{f}(y), \quad \bar{f}(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dx.$$

Nótese que éste último define una ecuación autónoma que es un tipo de ecuaciones con una teoría cualitativa bien establecida. Se sabe por ejemplo que en el problema perturbado $x' = \varepsilon f(t, x, \varepsilon)$, los equilibrios $y = p_0$ del sistema promediado $y' = \varepsilon \bar{f}(y, 0)$ generan soluciones T -periódicas de la ecuación siempre que ε sea *suficientemente pequeño* ([4]).

Sin embargo nuestro problema carece de ese pequeño parámetro. No obstante vamos a describir las propiedades dinámicas de la versión promediada de la ecuación (2.2):

$$\begin{cases} u' = \bar{a}_1 x(1-x) - \overline{a_1 b_1} xy \\ v' = \bar{a}_2 y(1-y) - \overline{a_2 b_2} xy. \end{cases} \quad (2.3)$$

Luego compararemos los resultados con los obtenidos para (2.2).

A efectos de que los equilibrios $(1, 0)$ y $(0, 1)$ sean no degenerados vamos a imponer las condiciones:

$$\bar{a}_i - \overline{a_i b_i} \neq 0. \quad (2.4)$$

En el próximo resultado se estudian los equilibrios de (2.3). Resaltamos que los que son nodos estables constituyen –de acuerdo a la Definición 1.9– soluciones asintóticamente estables. Por otro lado los nodos inestables y puntos de silla son soluciones inestables ([12]). La noción de “invariancia” se presenta en la Sección 2.2.

Teorema 2.1. *La ecuación (2.3) satisface las siguientes propiedades.*

- i) *Los cuadrantes \mathbb{R}_+^2 y $\overline{\mathbb{R}_+^2}$ son invariantes. En particular toda solución $(x(t), y(t))$ con valores en $\overline{\mathbb{R}_+^2}$ está definida para $t \geq 0$. Asimismo, los ejes Ox y Oy son invariantes.*
- ii) *El cuadrado $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ es positivamente invariante y globalmente atractivo en $\overline{\mathbb{R}_+^2}$ es decir:*

$$\text{dist}((x(t), y(t)), Q) \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.5)$$

para toda solución contenida en $\overline{\mathbb{R}_+^2}$. Más aún dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$ la solución que de él parte alcanza Q en tiempo finito t , es decir $(x(t), y(t)) \in Q$.

iii) El punto $(0, 0)$ es un nodo inestable. El punto $(1, 0)$ (respectivamente $(0, 1)$) es un nodo estable si $\bar{a}_2 - \overline{a_2 b_2} < 0$ (r. $\bar{a}_1 - \overline{a_1 b_1} < 0$) y un punto de silla si $\bar{a}_2 - \overline{a_2 b_2} > 0$ (r. $\bar{a}_1 - \overline{a_1 b_1} > 0$). En éste último caso el eje Ox (r. Oy) constituye su variedad estable ([12]).

iv) Existe un tercer punto de equilibrio de componentes positivas $p_c = (x_c, y_c)$ sí y sólo sí

$$\Pi_{i=1}^2(\bar{a}_i - \overline{a_i b_i}) > 0. \quad (2.6)$$

El punto p_c es un nodo estable si los factores de (2.6) son positivos, un punto de silla si son negativos.

Demostración. i) Es consecuencia de la propiedad de unicidad de soluciones.

ii) Notamos que $x' < 0$ si $x \geq 1$ pues:

$$x' = \bar{a}_1 x(1 - x) - \overline{a_1 b_1} xy \leq -\overline{a_1 b_1} xy < 0 \quad \text{si } x, y > 0.$$

Por las mismas razones $y' < 0$ si $y \geq 1$. Esto implica que el campo definido por (2.3) apunta hacia dentro en ∂Q . Por consiguiente Q es positivamente invariante: soluciones que empiezan en $p_0 \in Q$ permanecen en Q para todo $t \geq 0$.

Para probar la atractividad global tomamos $p_0 \notin Q$. Una primera posibilidad es $0 < x_0 < 1$ (si fuese $0 < y_0 < 1$ el razonamiento es simétrico). En ese caso $0 < x(t) < x_0$ para todo t . Si fuese $y(t) > \gamma > 1$ se tendría:

$$y' < \bar{a}_2(1 - \gamma)y \Rightarrow y(t) \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty,$$

contra lo supuesto. Así o bien $y(t) \rightarrow 1$ cuando $t \rightarrow \infty$ o bien $\varphi(t_1, p_0) \in Q$ en algún $t_1 > 0$ (recuérdese la notación $(x(t), y(t)) = \varphi(t, p_0)$). En cualquier caso se concluye (2.6) (véase la Observación 2.2). La única posibilidad que nos queda es $x_0 \geq 1$ e $y_0 \geq 1$. Si $x_0 = 1$ entonces inmediatamente después estamos en $0 < x < 1$ (algo similar si $y_0 = 1$). Por tanto suponemos que $x_0 > 1$ e $y_0 > 1$. Ahora, no puede ser que $(x(t), y(t)) \in (1, \infty) \times (1, \infty)$ para todo $t \geq 0$; en ese caso $x' < 0$, $y' < 0$, existe $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (x^*, y^*) \in [1, \infty) \times [1, \infty)$. Esto no es posible pues (x^*, y^*) es un punto de equilibrio. Luego estamos en $x = 1$ o $y = 1$ en tiempo finito que es el caso anterior. Esto prueba (2.6).

En cuanto a los apartados iii) y iv) su demostración se omite por brevedad. \square

Observación 2.2. De acuerdo a iii) el punto $(0, 1)$ es asintóticamente estable en algunos casos y existen soluciones $(x(t), y(t))$ que con $y(t) > 1$ cumplen $y(t) \rightarrow 1$ cuando $t \rightarrow \infty$.

El Teorema 2.1 afirma que las órbitas de (2.3) tienden asintóticamente a Q . Basta conocer sus propiedades en el cuadrado para determinar el comportamiento *global*. Recuérdese que la teoría cualitativa predice únicamente las tendencias locales. En el siguiente resultado utilizamos la notación del flujo φ para vincular la solución a su dato inicial (Sección 2.2).

Teorema 2.3.

- i) Si se cumple la condición (2.6) y los factores son positivos entonces el estado de coexistencia p_c es globalmente atractivo. Es decir toda solución $\varphi(t, p_0)$ con $p_0 \in \mathbb{R}_+^2$ satisface $\varphi(t, p_0) \rightarrow p_c$ cuando $t \rightarrow \infty$ (Figura 2.1).
- ii) Si se satisface la condición (2.6) pero los factores son negativos entonces existe una curva creciente \mathcal{C} que empieza en $(0, 0)$, pasa por p_c y divide \mathbb{R}_+^2 en dos componentes $\Omega_i, i = 1, 2$, tales que $\varphi(t, p_0) \rightarrow p_i$ cuando $t \rightarrow \infty$ si $p_0 \in \Omega_i$, donde $p_1 = (0, 1), p_2 = (1, 0)$. Por otro lado $\mathcal{C} \setminus \{(0, 0), p_c\}$ lo forman dos órbitas convergiendo a p_c cuando $t \rightarrow \infty$ (Figura 2.1).
- iii) Si:

$$\prod_{i=1}^2 (\bar{a}_i - \overline{a_i b_i}) < 0, \tag{2.7}$$

y $\bar{a}_j - \overline{a_j b_j} < 0$ (para uno solo de los $j \in \{1, 2\}$) entonces $\forall p_0 \in \mathbb{R}_+^2$ se tiene que $\varphi(t, p_0) \rightarrow p_j$ cuando $t \rightarrow \infty$ (Figura 2.2).

Observación 2.4. En el caso i) las dos especies consiguen convivir armoniosamente en el mismo habitat a pesar de la competencia por los recursos. El caso ii) –en el que los dos equilibrios p_i son simultáneamente asintóticamente estables– indica que la cohabitación no es posible. Dependiendo de dónde se tomen las condiciones iniciales (Ω_i) una de las especies lleva a la otra a la extinción. En el escenario iii) no hay coexistencia y además sólo hay una especie que es asintóticamente estable; lleva a la otra a la extinción con independencia del estado inicial (Figura 2.2). Esta es la esencia del *Principio de Exclusión Competitiva* ([1]).

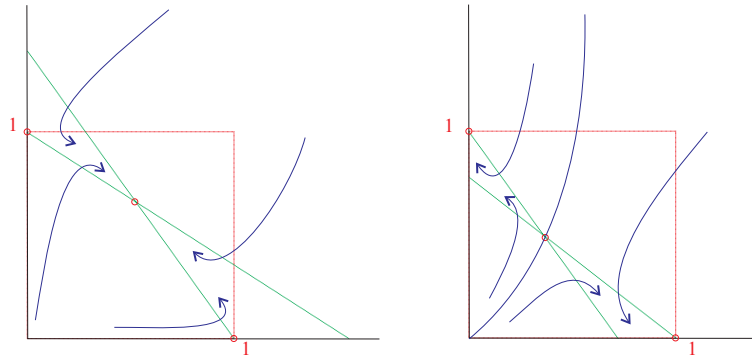


Figura 2.1. Los casos donde existe estado de coexistencia estable (izquierda) e inestable (derecha).

2.2. El sistema periódico. Propiedades de monotonía

Refrescamos (Capítulo 1) la siguiente notación. Para $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ una aplicación continua con $\frac{\partial f}{\partial x}$ continua representaremos por $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$,

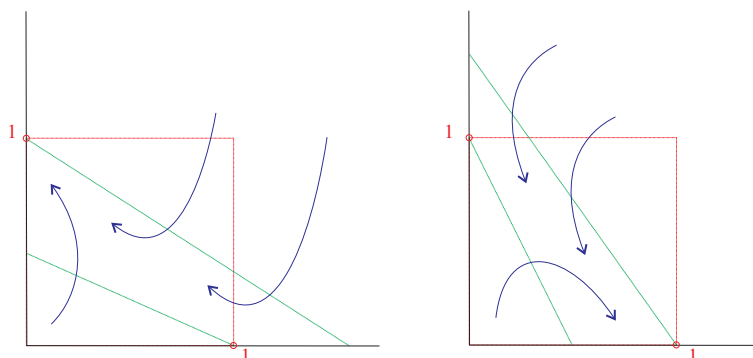


Figura 2.2. Situaciones simétricas donde la coexistencia no es posible.

$t \in (\alpha, \beta)$ a la solución del problema $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$. Por extensión del caso de las ecuaciones autónomas diremos que φ es el flujo de la ecuación. Emplearemos $\varphi(t, x_0)$ en lugar de $\varphi(t, 0, x_0)$. Se dice que una región del plano Ω es invariante (positivamente invariante) si $\varphi(t, p_0) \in \Omega$ para todo t ($t \geq 0$) cuando $p_0 \in \Omega$.

Con ideas similares a las del Teorema 2.1 se prueba la siguiente propiedad.

Teorema 2.5.

- i) Los cuadrantes abierto \mathbb{R}_+^2 y cerrado $\overline{\mathbb{R}_+^2}$ son invariantes respecto de la ecuación (2.2).
- ii) Los ejes son invariantes y las únicas soluciones T -periódicas en los mismos son los puntos de equilibrio.
- iii) Todos los rectángulos de la forma $[0, x_0] \times [0, y_0]$ con $x_0, y_0 \geq 1$ son positivamente invariantes. En particular, la solución $\varphi(t, p_0)$ está definida en $[0, \infty)$, $\forall p_0 \in \mathbb{R}_+^2$. Finalmente,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\varphi(t, p_0), Q) = 0, \quad Q = [0, 1] \times [0, 1]. \quad (2.8)$$

Observación 2.6. De la propiedad (2.8) y el hecho de que la frontera ∂Q de Q es positivamente invariante se deduce que las soluciones periódicas de (2.2) en caso de existir, deben encontrarse en el interior de Q .

Demostración (del Teorema 2.5). Para probar (2.8) damos $\gamma > 1$. Afirmamos que para cualquier solución $(x(t), y(t))$ en \mathbb{R}_+^2 existe un t_1 tal que $x(t_1) = \gamma$. Como la recta $x = \gamma$ ha de cruzarse necesariamente de derecha a izquierda entonces se tendrá que $x(t) < \gamma$ para todo $t > t_1$ y la solución quedará atrapada en la banda $0 < x < \gamma$. Afirmamos que no puede ser $x(t) > \gamma$ para todo t pues se tendría:

$$x' < a_1(t)(1 - \gamma)x \quad \Rightarrow \quad x(t) \rightarrow 0, \quad \text{para } t \rightarrow \infty,$$

lo cual no es posible. Con el mismo argumento se prueba que $y(t) < \gamma$ a partir de un momento $t = t_2$. Al final, $(x(t), y(t))$ está en el cuadrado $[0, \gamma] \times [0, \gamma]$ de un tiempo en adelante. Como $\gamma > 1$ es arbitrario hemos terminado. \square

Observación 2.7. Una advertencia. Mientras las soluciones siempre están definidas hacia el futuro, pueden presentar en cambio singularidades hacia el pasado. Véase el Lema 2.8.

Lema 2.8. *Sea $(x(t), y(t))$ una solución de (2.2) tal que $(x(\tau), y(\tau)) \in \mathbb{R}_+^2 \setminus Q$ para algún $\tau \in \mathbb{R}$. Entonces su dominio de existencia (α, ∞) cumple $\alpha > -\infty$. En particular, $|(x(t), y(t))| \rightarrow \infty$ cuando $t \rightarrow \alpha+$.*

Demostración. Si se tiene por ejemplo que $x(\tau) > 1$ entonces $(x(t), y(t))$ sólo está definida hacia el pasado en un intervalo $(\alpha, \tau]$ con $\alpha > -\infty$ cumpliéndose que: $\lim_{t \rightarrow \alpha+} x(t) = +\infty$. En efecto, $x(\tau) > 1$ implica que $x(t) \geq x_0 > 1$ para todo $t \leq \tau$ mientras la solución exista. Llamamos $z(t) = x(-t)$ (integrar hacia el pasado) y

$$z' = a_1 z(z - 1) + a_1 b_1 z y \geq a_1 z(z - 1), \quad z(\tau) > 1.$$

Se comprueba que $\lim_{t \rightarrow -\alpha} z = +\infty$ para cierto $-\alpha > 0$ finito. \square

Hablamos ahora de las propiedades de monotonía del flujo. A tal fin introducimos dos relaciones de orden en \mathbb{R}^2 .

Definición 2.9. *Denotemos:*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 &= \{(x, y) : x > 0, y > 0\}, & \overline{\mathcal{P}}_1 &= \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}, \\ \mathcal{P}_2 &= \{(x, y) : x < 0, y > 0\}, & \overline{\mathcal{P}}_2 &= \{(x, y) : x \leq 0, y \geq 0\}. \end{aligned}$$

Para $p, q \in \mathbb{R}^2$ se define $p \leq_{(1)} q$ si $q - p \in \mathcal{P}_1$. Análogamente $p \leq_{(2)} q$ si $q - p \in \mathcal{P}_2$. Escribiremos $p <_{(1)} q$ si $p \leq_{(1)} q$ y $p \neq q$. Asimismo $p \ll_{(1)} q$ si $q - p \in \mathcal{P}_1$. Definiciones simétricas se introducen con $\leq_{(2)}$.

Observación 2.10.

- i) Las relaciones $\leq_{(i)}$ constituyen órdenes parciales asociados a los conos $\overline{\mathcal{P}}_i$. De hecho $\leq_{(1)}$ es lo que se conoce como el ‘orden lexicográfico’ (v. Apéndice).
- ii) Nótese que si $p = (x, y)$, $q = (x', y')$ entonces $p \leq_{(1)} q$ sí y sólo sí $x \leq x'$ e $y \leq y'$. Análogamente $(x, y) \leq_{(2)} (x', y')$ sí y sólo sí $x \geq x'$ e $y \leq y'$.

El siguiente resultado es consecuencia del denominado teorema de Kamke (Apéndice, Teorema A.2).

Teorema 2.11. *Sean $p_0, q_0 \in \mathbb{R}_+^2$, $p_0 \neq q_0$.*

a) Si

$$p_0 \leq_{(2)} q_0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(t, p_0) \ll_{(2)} \varphi(t, q_0) \quad \text{para todo } t \geq 0. \quad (2.9)$$

b) *Simétricamente:*

$$p_0 \leq_{(1)} q_0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(t, p_0) \ll_{(1)} \varphi(t, q_0) \quad \text{para todo } t \leq 0, \quad (2.10)$$

mientras ambas soluciones estén definidas.

Demostración. La afirmación a) es exactamente el Corolario A.5 siempre que $p_0 \ll_{(2)} q_0$. Supongamos entonces que $p_0 \leq_{(2)} q_0$ con $q_0 = p_0 + \sigma e_2$ y $\sigma > 0$ y denotemos $\bar{x}(t) = \varphi(t, p_0)$, $\bar{y}(t) = \varphi(t, q_0)$. Si representamos nuestro sistema como $\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x})$ y escribimos $\bar{h} = \bar{y} - \bar{x}$ entonces \bar{h} cumple la ecuación diferencial:

$$\bar{h}' = \bar{f}(t, \bar{x} + \bar{h}) - \bar{f}(t, \bar{x}) =: \bar{g}(t, \bar{h}).$$

Se comprueba que $g_1(t, \bar{h})_{t=0} = g_1(0, \bar{x}(0) + \sigma e_2) - g_1(0, \bar{x}(0)) < 0$ por ser el sistema estrictamente competitivo. Luego $\bar{x}(t) \ll_{(2)} \bar{y}(t)$ para $t > 0$ pequeño y aplicamos el corolario. Se razona igual si $q_0 = p_0 - \sigma e_1$ ($\sigma > 0$). Otra manera de proceder es verificar que $\bar{\mathcal{P}}_2$ es invariante para la ecuación de \bar{h} .

La afirmación b) se deduce de integrar el sistema inverso y tener en cuenta que éste es cooperativo.

Observación 2.12.

- i) Se dice en el teorema que el orden $\leq_{(2)}$ se ‘preserva’ fuertemente hacia el futuro, mientras que el orden $\leq_{(1)}$ se preserva fuertemente hacia el pasado, siempre que las soluciones estén definidas (véase el Lema 2.8).
- ii) La afirmación en (2.9) puede expresarse como:

$$\varphi(t, q_0) \in \varphi(t, p_0) + \mathcal{P}_2, \quad t > 0,$$

mientras que la de (2.10) se reformula como

$$\varphi(t, q_0) \in \varphi(t, p_0) + \mathcal{P}_1, \quad t < 0.$$

El siguiente resultado establece qué opciones cabe esperar en el comportamiento de dos soluciones cuando sus datos iniciales están ordenados con respecto de $\leq_{(1)}$. Su demostración se sigue del Teorema 2.11.

Teorema 2.13. Sean $p_0, q_0 \in \mathbb{R}_+^2$ cumpliendo $p_0 \ll_{(1)} q_0$ mientras $\bar{x}(t) = \varphi(t, p_0)$, $\bar{y}(t) = \varphi(t, q_0)$. Entonces:

- a) O bien $\bar{x}(t) \ll_{(1)} \bar{y}(t)$ para todo $t \geq 0$,
- b) O bien existe $t_1 > 0$ tal que $\bar{x}(t_1) \leq_{(2)} \bar{y}(t_1)$ en cuyo caso $\bar{x}(t) \ll_{(2)} \bar{y}(t)$ para todo $t > t_1$ o alternativamente $\bar{y}(t_1) \leq_{(2)} \bar{x}(t_1)$ y en ese caso $\bar{y}(t) \ll_{(2)} \bar{x}(t)$ para todo $t > t_1$.

2.3. Puntos fijos. Existencia de soluciones periódicas

En el siguiente resultado se estudia la aplicación de Poincaré (bidimensional) Π relativa al sistema (2.2) (ver la Definición 1.15). Recordemos que para $p_0 \in \overline{\mathbb{R}_+^2}$ se define como $\Pi(p_0) = \varphi(T, p_0) = \varphi(T, 0, p_0)$.

Proposición 2.14.

- a) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\Pi^n(x_0) = \varphi(nT, x_0)$.
- b) La aplicación de Poincaré Π_1 del sistema invertido es Π^{-1} .
- c) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\Pi^{-n}(x_0) = \varphi(-nT, x_0)$.

Demostración. a) Se tiene que:

$$\varphi(t, \varphi(T, x_0)) = \varphi(t + T, x_0) \quad \Rightarrow \quad \Pi^2(x_0) = \varphi(2T, x_0).$$

Por inducción, si

$$\Pi^{n-1}(x_0) = \varphi((n-1)T, x_0) \quad \Rightarrow \quad \varphi(t, \Pi^{n-1}(x_0)) = \varphi(t + (n-1)T, x_0),$$

de donde $\Pi^n(x_0) = \varphi(nT, x_0)$.

b) Se tiene que:

$$\varphi(t, \varphi(-T, x_0)) = \varphi(t - T, x_0) \quad \Rightarrow \quad \Pi \circ \Pi_1 = I.$$

Basta hacer $t = T$. De $\varphi(t, \varphi(T, x_0)) = \varphi(t + T, x_0)$ se deduce $\Pi_1 \circ \Pi = I$ al tomar $t = -T$. □

Proposición 2.15.

- a) La aplicación de Poincaré Π asociada a (2.2) está bien definida en todo el cuadrante $\overline{\mathbb{R}_+^2}$.
- b) Los puntos fijos \hat{p} de Π se corresponden con las soluciones T -periódicas de (2.2).
- c) Si \hat{p} es asintóticamente estable (respectivamente estable, inestable) relativamente a la aplicación Π (véase Apéndice, Sección A.3) entonces la solución periódica $\bar{p}(t) = \varphi(t, \hat{p})$ es asintóticamente estable (r. estable, inestable).

El siguiente resultado ([9]) constituye una genuina extensión del Teorema de Massera (Teorema 1.19) a sistemas competitivos. Debe notarse que todas las soluciones de (2.2) están acotadas hacia el futuro (Teorema 2.1, apartado i)).

Teorema 2.16 (de Mottoni–Schiaffino, 1981). *Sea $\bar{x}(t) = \varphi(t, p_0)$ una solución arbitraria de (2.2) con dato inicial $p_0 \in \overline{\mathbb{R}_+^2}$. Entonces existe una solución T -periódica $\bar{p}(t)$ tal que:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\bar{x}(t) - \bar{p}(t)| = 0. \quad (2.11)$$

Observación 2.17. Si p_0 está en el eje Ox (respectivamente, Oy) entonces la solución T -periódica resulta ser $(1, 0)$ (r., $(0, 1)$). Por consiguiente la cuestión relevante es conocer cuándo no es trivial la solución $\bar{p}(t)$ referida en el teorema. Aclararla requiere determinar qué clase de propiedades de atractividad exhiben los equilibrios. Comparando con el caso de coeficientes constantes esto equivaldría a encontrar estados de coexistencia (equilibrios de componentes positivas).

Demostración. Tomamos $p_0 \in \mathbb{R}_+^2$ (no es necesario estudiar el caso en que p_0 se sitúa en los ejes). El punto crucial es probar la convergencia:

$$II^n(p_0) \rightarrow \hat{p}, \quad (2.12)$$

para cierto $\hat{p} \in \overline{\mathbb{R}_+^2}$. En este punto debe notarse que \hat{p} muy bien pudiera ser un punto de equilibrio. La continuidad de II implica entonces que \hat{p} es un punto fijo así $\bar{p}(t) = \varphi(t, \hat{p})$ es una solución T -periódica de (2.2). Por otro lado para probar (2.11) observamos que:

$$\varphi(t, p_0) = \varphi(t - nT, p_n), \quad nT \leq t < (n + 1)T, \quad p_n = II^n(p_0).$$

Al comparar las soluciones en el intervalo $nT \leq t < (n + 1)T$:

$$\begin{aligned} \varphi(t, p_0) - \varphi(t, \hat{p}) &= \varphi(t, nT, p_n) - \varphi(t - nT, \hat{p}) \\ &= \varphi(t - nT, p_n) - \varphi(t - nT, \hat{p}) = \varphi(\tau, p_n) - \varphi(\tau, \hat{p}), \end{aligned}$$

donde $\tau = t - nT \in [0, T)$. Es bien conocido –dependencia continua en los datos iniciales– que $\sup_{[0, T]} |\varphi(\tau, p_n) - \varphi(\tau, \hat{p})| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$. Como $\sup_{[0, T]} |\varphi(\tau, p_n) - \varphi(\tau, \hat{p})| < \varepsilon$ para $n \geq n_0$ entonces:

$$\sup_{t \geq n_0 T} |\varphi(t, p_0) - \varphi(t, \hat{p})| < \varepsilon.$$

Esto es equivalente a (2.11).

Dirigimos por tanto la vista a (2.12). El punto crucial consiste en comparar p_0 con $p_1 = II(p_0)$ usando las relaciones de orden de la Sección 2.2. Caben esencialmente dos posibilidades. La primera es $p_0 \leq_{(2)} p_1$ o su simétrica $p_1 \leq_{(2)} p_0$. En el primer caso (Teorema 2.11):

$$p_0 \leq_{(2)} p_1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(t, p_0) \leq_{(2)} \varphi(t, p_1),$$

para todo $t \geq 0$. Ahora $\varphi(t, p_1) = \varphi(t + T, p_0)$, luego eligiendo $t = nT$:

$$\varphi(nT, p_0) \leq_{(2)} \varphi(nT + T, p_0) \quad \Rightarrow \quad II^n(p_0) \leq_{(2)} II^{n+1}(p_0),$$

para todo n . En el caso simétrico concluimos $II^{n+1}(p_0) \leq_{(2)} II^n(p_0)$ para todo n .

La segunda posibilidad es complementaria de la anterior y significa o bien $p_0 \ll_{(1)} p_1$ o bien $p_1 \ll_{(1)} p_0$. En el primer caso (Teorema 2.13) o bien:

$$\varphi(t, p_0) \ll_{(1)} \varphi(t, p_1) \quad \text{para todo } t \geq 0,$$

o bien (por ejemplo) $\varphi(t, p_0) \ll_{(2)} \varphi(t, p_1)$ para $t \geq t_1$. En la primera opción:

$$\Pi^n(p_0) \ll_{(1)} \Pi^{n+1}(p_0)$$

para todo n , mientras en la segunda $\Pi^n(p_0) \ll_{(2)} \Pi^{n+1}(p_0)$ para $n \geq n_0$.

Algo simétrico ocurre si $p_1 \ll_{(1)} p_0$.

En conclusión la sucesión de iteradas acaba siendo monótona en alguno de los dos órdenes y en alguno de los sentidos (creciente o decreciente) para n suficientemente grande. Como la sucesión está acotada concluimos rápidamente (2.12). \square

2.4. Estabilidad de las soluciones periódicas triviales

En la siguiente propiedad denotamos $p_1 = (0, 1)$, $p_2 = (1, 0)$ a los equilibrios semitriviales. Se habla asimismo de equilibrios *repulsivos* $x = x^*$ de una ecuación $x' = f(t, x)$. Esto significa que tal equilibrio es asintóticamente estable para la propia ecuación pero con el tiempo invertido $x' = -f(-t, x)$; la que cumplen las funciones $y(t) = x(-t)$ cuando $x(t)$ resuelve $x' = f(t, x)$.

Teorema 2.18. *Los puntos de equilibrio $(0, 0)$, $p_1 = (0, 1)$ y $p_2 = (1, 0)$ exhiben las siguientes propiedades de estabilidad.*

- i) *El punto $(0, 0)$ es repulsivo y ‘expulsa’ todo un entorno \mathcal{U}_0 de $(0, 0)$ en $\overline{\mathbb{R}_+^2}$.*
- ii) *Si $\bar{a}_i - \bar{a}_i \bar{b}_i < 0$ entonces el punto p_i es asintóticamente estable mientras que si $\bar{a}_i - \bar{a}_i \bar{b}_i > 0$ el punto p_i es inestable.*
- iii) *Más precisamente, si $\bar{a}_1 - \bar{a}_1 \bar{b}_1 > 0$ el punto $(0, 1)$ atrae el semieje abierto Oy^+ mientras repele, es decir no atrae, una región de la forma $(0, \varepsilon) \times (0, 1 + \varepsilon)$. La afirmación simétrica se satisface para el equilibrio $(1, 0)$.*

Demostración. Tomando la versión invertida de (2.2) y formando la ecuación linealizada en $(0, 0)$ obtenemos:

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Phi(T) = \begin{pmatrix} e^{-A_1(T)} & 0 \\ 0 & e^{-A_2(T)} \end{pmatrix}.$$

Véase la Sección A.4 para la definición de Φ . Luego se satisface la condición de estabilidad asintótica prescrita en el Teorema A.7 aplicado al sistema invertido. Por definición atrae un entorno \mathcal{U} de $(0, 0)$ y $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U} \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}$.

En cuanto a, por ejemplo, $p_1 = (0, 1)$ la linealización de (2.2) en él da lugar a:

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(1-b_1) & 0 \\ -a_2b_2 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Su matriz fundamental normalizada en $t = 0$ es:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{\int_0^t a_1(1-b_1)} & 0 \\ -B(t) & e^{-\int_0^t a_2} \end{pmatrix}, \quad B(t) = e^{-\int_0^t a_2} \int_0^t e^{\int_0^s a_2} e^{\int_0^s a_1(1-b_1)} a_2 b_2 ds.$$

Por tanto:

$$\bar{a}_1 - \overline{a_1 b_1} < 0 \quad (\text{respectivamente, } > 0) \quad \Rightarrow \quad e^{\int_0^T a_1(1-b_1)} < 1 \quad (r. > 1).$$

Las afirmaciones en ii) y iii) se siguen entonces del Teorema A.7.

Estudiamos ahora la afirmación sobre repulsividad. Si $\bar{a}_1 - \overline{a_1 b_1} > 0$ basta tomar $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{a_1(1-\varepsilon-b_1(1+\varepsilon))} > 0$ para concluir que una solución mientras está en $\mathcal{V} = (0, \varepsilon) \times (0, 1 + \varepsilon)$ ha de satisfacer:

$$x' > a_1(1-\varepsilon-b_1(1+\varepsilon))x.$$

Por consiguiente dicha solución sólo puede yacer en \mathcal{V} una cantidad finita de tiempo. \square

Observación 2.19.

- Es consecuencia del Teorema 2.18 que si $\bar{a}_i - \overline{a_i b_i} < 0$ existe un entorno del punto p_i que carece de puntos fijos de Π , salvo el propio p_i .
- No puede existir solución alguna $\varphi(t, p_0) \rightarrow p_1$ cuando $t \rightarrow \infty$ si $\bar{a}_1 - \overline{a_1 b_1} > 0$, salvo las soluciones en el eje Oy .
- Asimismo si $\bar{a}_1 - \overline{a_1 b_1} > 0$ existe un entorno \mathcal{V} de p_1 que no puede contener datos iniciales p_0 de soluciones periódicas. Por dependencia continua, dada $B(p_1, \varepsilon_0) \subset (0, \varepsilon) \times (0, 1 + \varepsilon)$ podemos encontrar $B(p_1, \delta_0) \subset B(p_1, \varepsilon_0)$ tal que si $p_0 \in B(p_1, \delta_0)$ entonces $\varphi(t, p_0) \in B(p_1, \varepsilon_0)$ para $t \in [0, T]$. Si fuese $\varphi(t, p_0)$ T -periódica toda su órbita caería dentro de $(0, \varepsilon) \times (0, 1 + \varepsilon)$. Lo cual no es posible.

2.5. Dominios de atracción

Definición 2.20. Sean Π la aplicación de Poincaré de una ecuación periódica N -dimensional $x' = f(t, x)$ y \hat{p} un punto fijo de Π .

- El dominio de atracción $\mathcal{A}(\hat{p})$ del punto \hat{p} se define como:

$$\mathcal{A}(\hat{p}) = \{p_0 : \Pi^n(p_0) \rightarrow \hat{p}\}.$$

- El dominio de repulsión $\mathcal{A}^{-1}(\hat{p})$ del punto \hat{p} se define en cambio como:

$$\mathcal{A}^{-1}(\hat{p}) = \{p_0 : \Pi^{-n}(p_0) \rightarrow \hat{p}\}, \quad \Pi^{-n} = (\Pi^{-1})^n.$$

Observación 2.21. Si $p_0 \in \mathcal{A}(\hat{p})$ entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t, p_0) - \varphi(t, \hat{p})| = 0.$$

Lo mismo ocurre si $p_0 \in \mathcal{A}^{-1}(\hat{p})$ pero cambiando $t \rightarrow \infty$ por $t \rightarrow -\infty$ en el límite. En efecto, la aplicación de Poincaré Π_1 de la ecuación con tiempo invertido es:

$$\Pi_1(x_0) = \varphi(-T, x_0) = \Pi^{-1}(x_0).$$

Como se observó en la Proposición 2.14 esto se basa en que $\varphi(t, \varphi(\pm T, x_0)) = \varphi(t \pm T, x_0)$.

Se ha visto en la Sección 2.2 que tanto el flujo φ como la aplicación de Poincaré Π relativos a (2.2) poseen propiedades de monotonía adecuadas. Una consecuencia inmediata es el siguiente lema. La conclusión es significativa cuando los intervalos $[p_0, q_0]_i$ allí mencionados son no vacíos.

Lema 2.22. Sean $p_0, q_0 \in \mathcal{A}(\hat{p})$. Entonces el intervalo $[p_0, q_0]_2$ relativo a $\leq_{(2)}$ satisface $[p_0, q_0]_2 \subset \mathcal{A}(\hat{p})$. Análogamente $p_0, q_0 \in \mathcal{A}^{-1}(\hat{p})$ implica $[p_0, q_0]_1 \subset \mathcal{A}^{-1}(\hat{p})$ donde el intervalo es relativo al orden $\leq_{(1)}$.

2.6. Dominio de repulsión de $(0, 0)$

El que sigue es un resultado de considerable importancia para nuestros propósitos. Como trabajamos con la ecuación (2.2) en \mathbb{R}_+^2 al hablar de atractores $\mathcal{A}^\pm(\hat{p})$ nos referiremos únicamente a los puntos de $\overline{\mathbb{R}_+^2}$.

Teorema 2.23. El conjunto $\mathcal{A}^{-1}(0, 0) \subset Q$, es abierto, conexo e invariante respecto de Π^{-1} . Su frontera $\Gamma := \partial\mathcal{A}^{-1}(0, 0)$ es un conjunto invariante que consiste en la gráfica de una función continua, estrictamente decreciente, que definida en $[0, 1]$ conecta $(0, 1)$ con $(1, 0)$.

Demostración. Que $\mathcal{A}^{-1}(0, 0) \subset Q$ se sigue del Lema 2.8, que es abierto es consecuencia de la repulsividad de $(0, 0)$ y la continuidad de $\varphi(t, t_0, x_0)$ en (t_0, x_0) (Teorema A.1). Es conexo porque dos puntos se conectan a través de una curva que pasa por $(0, 0)$. De hecho si $(x_0, y_0) \in \mathcal{A}^{-1}(0, 0)$ la poligonal: $\overline{(0, 0), (x_0, 0)} \cup \overline{(x_0, 0), p_0}$ está en $\mathcal{A}^{-1}(0, 0)$. Es evidente que es invariante respecto de Π^{-1} .

La frontera $\Gamma = \partial\mathcal{A}^{-1}(0, 0)$ es un conjunto cerrado y $p_i \in \Gamma$, $i = 1, 2$. Si $p_0 \in \Gamma$, $p_0 = \lim p_n$ donde $p_n \in \mathcal{A}^{-1}(0, 0)$. Como $\Pi^{-1}p_0 = \lim \Pi^{-1}p_n$ resulta que $\Pi^{-1}p_0 \in \Gamma$ pues los $\Pi^{-1}p_n \in \mathcal{A}^{-1}(0, 0)$ mientras $\Pi^{-1}p_0 \notin \mathcal{A}^{-1}(0, 0)$. Luego Γ también es invariante.

Notamos ahora que ninguno de los puntos de $\partial Q \setminus \{x = 0 \text{ ó } y = 0\}$ está en $\mathcal{A}^{-1}(0, 0)$. Luego $\mathcal{A}^{-1}(0, 0)$ es interior a Q (relativo a $\overline{\mathbb{R}_+^2}$).

Mostramos ahora que $\Gamma = \partial\mathcal{A}^{-1}(0, 0)$ es un conjunto no creciente en el sentido de que si $(x, y), (x_1, y_1) \in \Gamma$ y $x < x_1$ entonces $y \geq y_1$. En efecto, observamos primero que si $p \in \mathcal{A}^{-1}(0, 0)$ entonces todo el intervalo:

$$[0, p]_1 \subset \mathcal{A}^{-1}(0, 0).$$

Si fuese

$$(x, y) \ll_{(1)} (x_1, y_1) \quad \Rightarrow \quad (x, y) \ll_{(1)} q \ll_{(1)} (x_1, y_1),$$

para cierto $q \in \mathcal{A}^{-1}(0, 0)$ de donde $(x, y) \in \mathcal{A}^{-1}(0, 0)$ contra lo supuesto. Resumiendo, Γ carece de puntos p, q ordenados en la forma $p \ll_{(1)} q$.

Probamos ahora algo más: que en esas condiciones ha de ser incluso $y > y_1$. Es decir, no hay puntos en Γ a la misma altura. En efecto, si fuese $y = y_1$

$$(x, y) \leq_{(1)} (x_1, y_1) \quad \Rightarrow \quad \Pi^{-1}(x, y) \ll_{(1)} \Pi^{-1}(x_1, y_1),$$

y esto no es posible pues $\Pi^{-1}(x, y), \Pi^{-1}(x_1, y_1) \in \partial\mathcal{A}^{-1}(0, 0)$. Probamos finalmente que no hay tramos verticales en $\partial\mathcal{A}^{-1}(0, 0)$. Si existen $y < y_1$ con:

$$(x, y), (x, y_1) \in \partial\mathcal{A}^{-1}(0, 0) \quad \Rightarrow \quad \Pi^{-1}(x, y) \ll_{(1)} \Pi^{-1}(x, y_1),$$

que tampoco es posible.

Hemos verificado entonces que $\partial\mathcal{A}^{-1}(0, 0)$ es la gráfica de una función decreciente y positiva con $0 < h(x) < 1$ pues $(0, 1) \in \partial\mathcal{A}^{-1}(0, 0)$.

Finalmente, dado $0 < x < 1$ si designamos por $h(x \pm 0)$ a los límites laterales de h en el punto x entonces:

$$(x, h(x \pm 0)) \in \partial\mathcal{A}^{-1}(0, 0),$$

pues la frontera es cerrada. Entonces necesariamente $h(x \pm 0) = h(x)$ pues caso contrario tendríamos un tramo vertical a la altura de x . Así pues Γ es continua. \square

Observación 2.24. Está implícito en la demostración que tanto $\mathcal{A}^{-1}(0, 0)$ como su frontera también son invariantes frente a Π . Sin embargo no son invariantes en general frente al flujo $\varphi(\cdot, t_0, p_0)$ para $t_0 \neq nT, n \in \mathbb{Z}$.

Afrontamos ahora una caracterización alternativa de Γ . Es de suma importancia en base al Teorema 2.28 que enunciamos al final de la sección. Siguiendo a [11] se definen:

$$\Sigma = \{p_0 \in \overline{\mathbb{R}}_+^2 : \varphi(t, p_0) \text{ está definida en } \mathbb{R}\},$$

$$\Sigma_0 = \{p_0 \in \Sigma : \varphi(t, p_0) \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow -\infty\}, \quad \Gamma^1 = \Sigma \setminus \Sigma_0.$$

Notamos que Σ_0 no es otra cosa $\mathcal{A}^{-1}(0, 0)$, mientras $\Sigma_0 \subset \Sigma$ pues las soluciones iniciadas en este conjunto son necesariamente acotadas. Por otro lado, los puntos fijos $\hat{p} \neq (0, 0)$ de Π están en $\Sigma \setminus \Sigma_0$.

En base al Lema 2.8 se ha de tener $\Sigma \subset Q$. En efecto si $p_0 \notin Q$ entonces el dominio de $\varphi(t, p_0)$ no es \mathbb{R} . Asimismo, $p_0 \in \Sigma$ implica que $\varphi(t, p_0) \in Q$ para todo $t \in \mathbb{R}$ por la misma razón. Luego las soluciones referidas en Σ además de definidas en \mathbb{R} están acotadas. En la siguiente propiedad usamos el orden lexicográfico \leq (es decir $\leq_{(1)}$) omitiendo el subíndice para simplificar. Se recuerda que $x < y$ significa $x \leq y$ con $x \neq y$.

Lema 2.25 ([11]). *Sean $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ soluciones de (2.2) que toman valores en \mathbb{R}_+^2 . Si $v \gg 0$ y está acotada mientras $u(\tau) < v(\tau)$ en algún τ entonces no sólo se tiene que u también está acotada sino que:*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u = 0.$$

Demostración. De la acotación se sigue que v está definida en \mathbb{R} . Como el sistema (2.2) es competitivo entonces resulta ser cooperativo al integrar hacia el pasado luego:

$$0 \leq u(t) \ll v(t) \quad \text{para } t \leq \tau \text{ mientras } u \text{ exista.}$$

En particular $u(t)$ está acotada no sólo para $t \geq \tau$ sino en $t \leq \tau$ y su dominio de definición es por consiguiente \mathbb{R} . Podemos asumir ahora que $u \gg 0$ ya que si por ejemplo $u_2 = 0$ entonces $u_1(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$ al resolver la ecuación logística escalar. Suponemos entonces que $u \gg 0$ y probamos que $u_1(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$ (con u_2 se procedería igual). Llamamos:

$$g(t, u) = a_1(t)(1 - u_1 - b_1(t)u_2)$$

que es decreciente en u_1 y u_2 . Introducimos $z_1(t) = \frac{u_1(t)}{v_1(t)}$. Lo primero que se observa es que $0 < z_1 < 1$ para $t < \tau$. Lo segundo es que:

$$z_1' = z_1(g(t, u) - g(t, v)) > 0, \quad t < \tau.$$

Existe entonces el límite $l = \lim_{t \rightarrow -\infty} z_1 < 1$. Si $l = 0$ claramente $u_1 \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$ pues $u_1 = z_1 v_1$ y v_1 está acotada. Suponemos entonces que $l \neq 0$. Integrando la ecuación:

$$\log \left(\frac{z_1(\tau)}{l} \right) = \int_{-\infty}^{\tau} (g(t, u) - g(t, v)) dt < \infty.$$

Puede probarse entonces que:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} (g(t, u) - g(t, v)) = 0.$$

Existe $t_m = -k_m T + r_m$, $r_m \rightarrow r$ en $[0, T]$, $k_m \rightarrow \infty$, tales que $u_m := u(t_m) \rightarrow u^*$, $v_m := v(t_m) \rightarrow v^*$, mientras:

$$g(t_m, u_m) - g(t_m, v_m) = g(r_m, u_m) - g(r_m, v_m) \rightarrow g(r, u^*) - g(r, v^*) = 0.$$

Como $u^* \leq v^*$ y $g(r, u^*) = g(r, v^*)$ se tiene que $u^* = v^*$. De aquí se sigue que $l = \frac{u_1^*}{v_1^*} = 1$. Esto no es posible pues $l < 1$. Por tanto $l = 0$ y hemos terminado. \square

La prueba que del siguiente resultado fundamental se presenta en ‘de Mottoni y Schiaffino’ ([9]) es a todas luces incompleta, si no incorrecta. La que aquí se incluye se debe a [11] donde se estudia un caso mucho más general.

Teorema 2.26. *Todos los puntos fijos $\hat{p} \in \overline{\mathbb{R}_+^2}$ distintos de $(0, 0)$ están situados en la curva Γ .*

Demostración. Afirmamos en primer lugar que $\Gamma = \Gamma^1$ siendo este último conjunto el introducido en la pág. 26. Si eso es así Γ agrupa los datos iniciales de todas aquellas soluciones acotadas que no tienden a $(0, 0)$ cuando $t \rightarrow -\infty$. En particular los puntos fijos de Π distintos de $(0, 0)$.

Probamos por tanto que $\Gamma = \Gamma^1$. Que $\Gamma^1 \subset \Gamma$ se sigue de que si $p_0 \in \Gamma \setminus \{(0, 1), (1, 0)\}$ entonces $p_0 = \lim p_n$, $p_n = p_0 - \frac{1}{n}e_2$. Por el Lema 2.25 los puntos $p_n \in \Sigma_0 = \mathcal{A}^{-1}(0, 0)$. Luego $p_0 \in \Gamma$ pues $p_0 \notin \Sigma_0$. Por otra parte, si $p_0 \in \Gamma$ entonces $\Pi^{-n}p_0 \in \Gamma$ lo que viene a decir que $\varphi(t, p_0)$ está definida en $(-\infty, 0]$, de ahí en \mathbb{R} . Como $p_0 \notin \Sigma_0$ entonces $p_0 \in \Gamma^1$ y hemos concluido. \square

2.7. Dominios de atracción de los equilibrios (0, 1) y (1, 0)

No ocupamos a continuación de los dominios de atracción $\mathcal{A}(p_i)$ cuando los puntos p_i son asintóticamente estables es decir si $\bar{a}_i - \overline{a_i b_i} < 0$.

Lema 2.27. *Sea $p_0 \in \mathcal{A}(p_1)$. Entonces $(p_0 + \mathcal{P}_2) \cap \overline{\mathbb{R}_+^2} \subset \mathcal{A}(p_1)$. Análogamente:*

$$p_0 \in \mathcal{A}(p_2) \quad \Rightarrow \quad (p_0 - \mathcal{P}_2) \cap \overline{\mathbb{R}_+^2} \subset \mathcal{A}(p_2).$$

Demostración. Si $q \geq_2 p_0$ entonces $\Pi^n(q) \gg_2 \Pi^n(p_0)$ luego la primera componente de $\Pi^n(q)$ tiende a cero mientras que $\text{dist}(\Pi^n(q), Q) \rightarrow 0$. Luego $\Pi^n(q) \rightarrow p_1$. \square

Teorema 2.28. *Admitamos que $\bar{a}_2 - \overline{a_2 b_2} < 0$ y que $p_2 = (1, 0)$ no atrae a \mathbb{R}_+^2 . Entonces:*

$$\mathcal{A}(1, 0) = \{(x, y) : 0 < y < \psi(x), x > 0\},$$

donde ψ es una función continua, creciente, $\psi(0) = 0$ tal que posiblemente exista un valor $0 < \xi \leq \infty$ tal que $\psi(x) = \infty$ para $x \geq \xi$.

Demostración. El conjunto $\mathcal{A}(1,0)$ es abierto, invariante y contiene –por dependencia continua– un entorno del eje Ox^+ en la topología relativa de $\overline{\mathbb{R}_+^2}$. Empleando exactamente las mismas ideas que en la prueba del Teorema 2.23 se concluye que $\partial\mathcal{A}(1,0)$ es la gráfica de una función continua y estrictamente creciente con las propiedades señaladas. Debe notarse que $\psi(x) = \sup\{y > 0 : (x, y) \in \mathcal{A}(1,0)\}$ y que por ello pudiera ser $\psi(x) = \infty$ de un valor en adelante.

Observación 2.29. En el caso de coeficientes constantes p_2 atrae a todo \mathbb{R}^2 si $\bar{a}_1 - \overline{a_1 b_1} > 0$ y no es posible la coexistencia de las especies.

2.8. Soluciones periódicas no triviales

Como en muchas situaciones similares del análisis no lineal, el hándicap del Teorema 2.16 radica en no saber si las soluciones obtenidas son no triviales, es decir, distintas de alguno de los puntos de equilibrio de la ecuación.

Como la solución periódica se obtiene vía el límite \hat{p} de iteradas de Π , está claro que éste no puede ser $(0,0)$ debido a su carácter repulsivo. Asimismo el límite no puede valer, digamos $p_1 = (0,1)$ cuando $\bar{a}_1 - \overline{a_1 b_1} > 0$. En efecto si fuese $\Pi^n(p_0) \rightarrow p_1$ entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, p_0) = p_1.$$

Esto conlleva sin embargo que la solución $\varphi(t, p_0) \in (0, \varepsilon) \times (0, 1 + \varepsilon)$ de un t en adelante, siendo ése el entorno referido en el Teorema 2.18-iii). Como esto es imposible, p_1 nunca puede ser límite de una sucesión de iteradas. Tenemos pues lo siguiente.

Teorema 2.30. *Si $\bar{a}_i - \overline{a_i b_i} > 0$ para $i = 1, 2$ entonces el sistema (2.2) admite una solución T -periódica no trivial.*

La situación referida en el Teorema 2.30 corresponde en coeficientes constantes al caso de coexistencia *globalmente* atractiva. En el siguiente resultado se cubre el caso complementario de coexistencia, que también se observa en coeficientes constantes. Se presenta cuando los dos equilibrios de los ejes son atractivos.

Teorema 2.31. *Supongamos que $\Pi_{i=1}^2(\bar{a}_i - \overline{a_i b_i}) > 0$ para $i = 1, 2$ entonces el sistema (2.2) admite en cada caso una solución T -periódica no trivial emanada de un punto fijo en Γ .*

Demostración. Comenzamos con el caso en que los factores son negativos y los puntos p_i son asintóticamente estables. La aplicación Π deja Γ invariante. Usando la restricción a Γ de la primera proyección $g(x, y) = x$ y llamando:

$$h = g \circ \Pi \circ g^{-1},$$

resulta que h es continua, inyectiva, $h(0) = 0$, $h(1) = 1$ por tanto define un homeomorfismo creciente de $[0, 1]$ sobre sí mismo. Al ser p_1 asintóticamente estable encontramos $p_0 = (x_0, y_0) \in \Gamma$ próximo a p_1 con $p_0 \ll_{(2)} \Pi(p_0)$. En efecto el lado a la izquierda de p_0 cae en $p_0 + \mathcal{P}_2$; el lado de Γ a la derecha en $p_0 - \mathcal{P}_2$. Si $\Pi(p_0)$ se situara a la derecha, $\Pi^n p_0$ no podría converger a p_1 . Que $p_0 \ll_{(2)} \Pi(p_0)$ se traduce en que $h(x_0) < x_0$. Razonando simétricamente en p_2 encontramos x_1 (próximo a 1) tal que $h(x_1) > x_1$. De ahí se sigue la existencia de un punto fijo $\hat{x} \in (x_0, x_1)$ para h que da lugar al correspondiente punto fijo de Π . Nótese que si no hubiese otros puntos fijos entonces \hat{p} es un punto fijo inestable, en coherencia con el caso de coeficientes constantes.

En el caso de inestabilidad, iteramos en Γ sobre cualquier p_0 y el límite es un punto fijo distinto de p_i , $i = 1, 2$, en virtud de lo argumentado más arriba. \square

Observación 2.32. Si $\bar{a}_1 - \overline{a_1 b_1} > 0$ entonces h carece de puntos fijos en un intervalo de la forma $(0, \varepsilon_0)$ (Observación 2.19). Es más, por esta razón ha de ser $h(x) > x$ en dicho intervalo. Análogamente, $h(x) < x$ en un intervalo de la forma $(0, \varepsilon_0)$ si es que $\bar{a}_1 - \overline{a_1 b_1} < 0$.

Observación 2.33. Un punto fijo \hat{x} de h para el que $\text{signo}(h(x) - x) = -\text{signo}(x - \hat{x})$ con x en un entorno de \hat{x} constituye un punto fijo asintóticamente estable de h ; siendo inestable si $\text{signo}(h(x) - x) = \text{signo}(x - \hat{x})$ en un entorno de \hat{x} . Usando este hecho y que el número de puntos fijos de h es finito (Teorema 2.35), se puede probar que si $\bar{a}_i - \overline{a_i b_i} > 0$ para $i = 1, 2$ entonces h (luego Π) admite al menos un punto fijo asintóticamente estable. Esto complementa sustancialmente la conclusión del Teorema 2.30.

Si por ejemplo el punto p_2 es asintóticamente estable y no globalmente atractivo obtenemos también la existencia de una solución periódica no trivial. Esto supone una ligera mejora del Teorema 2.31.

Teorema 2.34. Si $\bar{a}_2 - \overline{a_2 b_2} < 0$ y $\mathcal{A}(1, 0) \neq \mathbb{R}_+^2$ entonces Π admite un punto fijo \hat{p} interior a Γ .

Demostración. Como la curva $y = \psi(x)$ referida en el Teorema 2.28 es inicialmente finita entonces necesariamente corta al arco Γ en un único punto interior \hat{p} que resulta ser un punto fijo, por pertenecer a dos conjuntos invariantes. \square

Hasta el momento nada se ha dicho sobre el número de soluciones periódicas que puede admitir la ecuación (2.2). El siguiente resultado se debe a R. Ortega y A. Tineo ([10]). Un ingrediente fundamental de la demostración, cuyos detalles se omiten, es el hecho de que Π como función de p_0 es una aplicación analítica.

Teorema 2.35. *Se satisface la siguiente alternativa: o bien cada punto de Γ es un punto fijo de Π , o bien Γ contiene únicamente un número finito de puntos fijos de Π . Esto último ocurre si por ejemplo alguno de los puntos p_i exhibe propiedades de atractividad o repulsividad como las estudiadas en el Teorema 2.18.*

2.9. Un ejemplo

Como señalamos en la Observación 2.29 si $\bar{a}_1 - \overline{a_1 b_1} < 0$ y $\bar{a}_2 - \overline{a_2 b_2} > 0$ ($(0, 1)$ asintóticamente estable, $(1, 0)$ inestable) entonces no hay posibilidad de coexistencia en el caso de coeficientes constantes (el sistema promediado en este caso). En la presente sección damos un ejemplo debido a [9], de sistema periódico que sí admite una solución periódica positiva aún estando bajo esas condiciones. Se trata por tanto de una situación inédita bajo la óptica de los coeficientes constantes.

Tal sistema (2.2) se construye con idea de que admita una solución periódica positiva $(x(t), y(t))$ de la forma $y = f(t)x$. Esto impone sobre sus coeficientes las restricciones:

$$\frac{f'}{f} = a_2 - a_1, \quad a_1(1 + b_1 f) = a_2(b_2 + f). \quad (2.13)$$

Dichas relaciones implican $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$ y $\overline{f a_1} = \overline{f a_2}$. De la primera ecuación de (2.2) se llega a:

$$x' = a_1 x(1 - (1 + b_1 f)x).$$

Elijiendo $b_1 f = 1$ ésta posee $x = \frac{1}{2}$ como única solución periódica. Tomando $f = 1 + \varepsilon \sin t$, $0 < \varepsilon < 1$, nuestro sistema admitiría la solución periódica $x(t) = \frac{1}{2}$, $y(t) = \frac{1}{2}f(t)$. Para determinar todos los coeficientes usamos (2.13) obteniendo:

$$a_2 - a_1 = \varepsilon b_1 \cos t.$$

Elijiendo $a_1 = f + \varepsilon$ resulta $a_2 = f + \varepsilon + \varepsilon b_1 \cos t$. Sólo nos falta b_2 por determinar. Usando (2.13):

$$a_2(b_2 + f) = 2a_1 \quad \Rightarrow \quad b_2 = 2\frac{a_1}{a_2} - f.$$

Cotejamos ahora las condiciones de estabilidad. Por un lado:

$$\overline{a_1 - a_1 b_1} = \frac{\varepsilon^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{1 + \varepsilon \sin t} = -\frac{\varepsilon^3}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t} < 0.$$

Luego $(0, 1)$ es asintóticamente estable. Asimismo, usando (2.13) otra vez:

$$\overline{a_2 - a_2 b_2} = \overline{f(a_1 - a_1 b_1)} = \overline{\varepsilon f \sin t + \varepsilon^2 \sin t} = \overline{\varepsilon^2 \sin^2 t} = \frac{\varepsilon^2}{2} > 0.$$

Por tanto $(1, 0)$ es inestable.

Se ha construido así un ejemplo:

$$\bar{x}' = g(t, \bar{x}), \quad \bar{x} = (x, y), \quad g = (g_1, g_2),$$

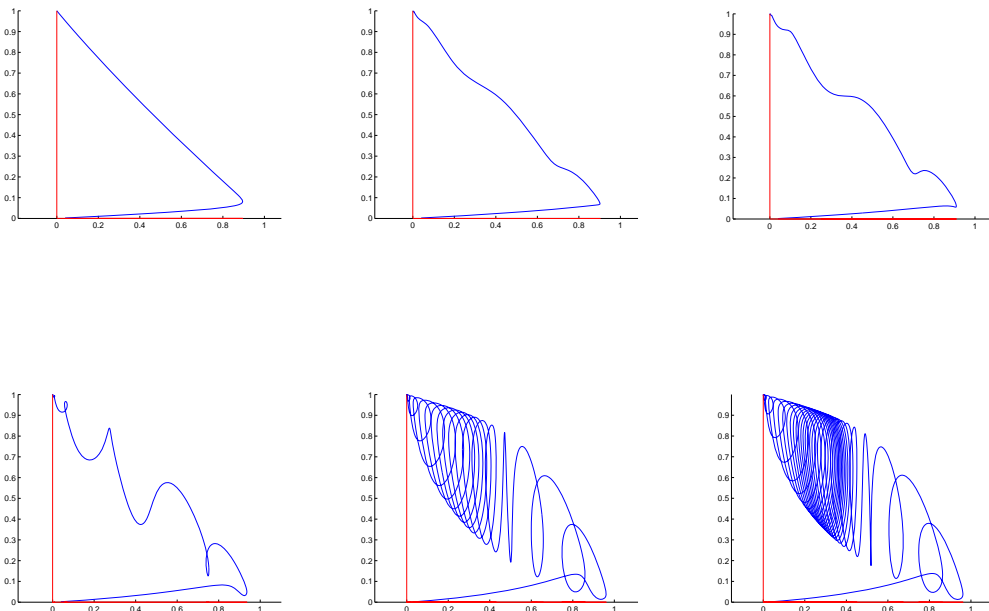
de sistema (2.2) que posee una solución periódica positiva mientras que su correspondiente sistema promediado (2.3):

$$\bar{x}' = \bar{g}(\bar{x}), \quad \bar{g}(\bar{x}) = \frac{1}{T} \int_0^T g(t, \bar{x}) dt,$$

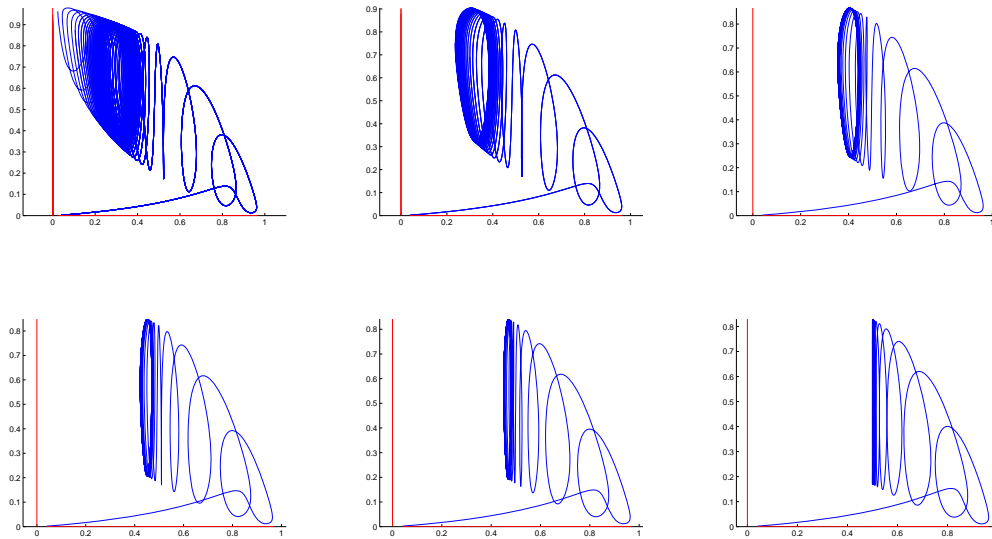
carece de puntos de equilibrio positivos. Procedemos ahora a enriquecer considerablemente el estudio al analizar la familia de sistemas competitivos:

$$\bar{x}' = \lambda \bar{g}(\bar{x}) + (1 - \lambda)g(t, \bar{x}), \quad (2.14)$$

donde $0 \leq \lambda \leq 1$ es un parámetro de deformación. En el valor $\lambda = 1$ tenemos el sistema promediado, en $\lambda = 0$ el que hemos construido en esta sección. El sistema (2.14) representa la transición continua entre los dos escenarios. La simulación numérica que aquí mostramos describe el “nacimiento” de la solución periódica para un valor intermedio de λ próximo a $\lambda = 0.07$. La solución periódica se mantiene hasta $\lambda = 0$ donde ésta coincide con la que hemos calculado.



En la simulación $\varepsilon = 0.66$ y se parte en todos los casos de $(x_0, y_0) = (0.04, 0.002)$, muy cerca del eje x . La solución es por esta razón atraída hacia



el punto $(1,0)$ hasta que la inestabilidad de este punto la arroja al interior del primer cuadrante. La estabilidad asintótica del punto $(1,0)$ acaba atrapando la solución siempre que λ no sea pequeño. Sin embargo, para valores de λ menores que $\lambda = 0.07$, una solución periódica se interpone en el camino de la solución y acaba siendo atraída por aquélla. Se han dado valores decrecientes a λ desde $\lambda = 1$ hasta $\lambda = 0$. Los cuatro últimos son $\lambda = 0.05, 0.03, 0.02$ y $\lambda = 0$.

Sistemas depredador–presa

Consideramos en este capítulo una clase más delicada de ecuaciones periódicas; los así denominados sistemas depredador–presa:

$$\begin{cases} u' = u(b_1(t) - c_{11}(t)u - c_{12}(t)v) \\ v' = v(-b_2(t) + c_{21}(t)u - c_{22}(t)v), \end{cases} \quad (3.1)$$

en el que u representa el número de presas y v el de depredadores. Todos los coeficientes son funciones en $C_T(\mathbb{R})$. Se supone que los de interacción $c_{ij}(t)$, $i \neq j$, junto con los de autocompetición $c_{ii} \geq 0$ son no negativos. Para la validez de algunos de los resultados a tratar será necesario que algunos de ellos sean no nulos.

Un caso especial es el conocido modelo de Lotka–Volterra es ([12]):

$$\begin{cases} u' = u(b_1(t) - c_{12}(t)v) \\ v' = v(-b_2(t) + c_{21}(t)u). \end{cases} \quad (3.2)$$

En cuanto a las tasas naturales de crecimiento b_i no se imponen restricciones de signo, salvo la hipótesis razonable:

$$\bar{b}_1 > 0, \quad \bar{b}_2 > 0. \quad (3.3)$$

Esto significa que en ausencia de depredadores las presas crecen en régimen Malthusiano y los depredadores se se extinguen. Puede demostrarse y no es un resultado en absoluto inmediato que las condiciones (3.3) son necesarias y suficientes para la existencia de una solución T –periódica positiva del modelo clásico (3.2). Véase [3].

3.1. Coeficientes constantes

Para hacernos una idea del caso de coeficientes periódicos analizamos el sistema promediado (de coeficientes constantes):

$$\begin{cases} u' = u(\bar{b}_1 - \bar{c}_{11}u - \bar{c}_{12}v) \\ v' = v(-\bar{b}_2 + \bar{c}_{21}u - \bar{c}_{22}v), \end{cases} \quad (3.4)$$

donde suponemos que todos los coeficientes son positivos.

El sistema presenta el equilibrio trivial $(0, 0)$, otro semitrivial $p_1 := \left(\frac{\bar{b}_1}{\bar{c}_{11}}, 0\right)$, y un tercer equilibrio más:

$$p_c = (u_c, v_c) = \left(\frac{\bar{b}_1\bar{c}_{22} + \bar{b}_2\bar{c}_{12}}{\bar{c}_{11}\bar{c}_{22} + \bar{c}_{12}\bar{c}_{21}}, \frac{\bar{b}_1\bar{c}_{21} - \bar{b}_2\bar{c}_{11}}{\bar{c}_{11}\bar{c}_{22} + \bar{c}_{12}\bar{c}_{21}} \right),$$

que tiene sentido biológico, es decir define un estado de coexistencia, cuando sus componentes son positivas. Esto ocurre siempre que:

$$\bar{b}_1\bar{c}_{21} - \bar{b}_2\bar{c}_{11} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \bar{b}_2 < \frac{\bar{b}_1\bar{c}_{21}}{\bar{c}_{11}} =: b_{2,c}.$$

Esta relación sugiere considerar \bar{b}_2 como parámetro y mantener los restantes coeficientes fijos. Por tanto sólo observamos coexistencia si el parámetro \bar{b}_2 es menor que el valor crítico $b_{2,c}$. De hecho, para $\bar{b}_2 = b_{2,c}$ se tiene que p_1 y p_c coinciden. Este hecho se refleja diciendo que “*el equilibrio p_c bifurca del equilibrio fijo p_1 cuando \bar{b}_2 cruza el valor crítico $b_{2,c}$* ” (Sección A.5).

Teorema 3.1. *El sistema (3.4) presenta las siguientes propiedades.*

i) *Los ejes están constituidos por órbitas. Además, la caja: $\mathcal{R} = [0, \bar{b}_1/\bar{c}_{11}] \times [0, \bar{b}_1/\bar{c}_{12}]$, es globalmente atractiva, es decir toda solución $(x(t), y(t))$ del primer cuadrante satisface:*

$$\text{dist}((x(t), y(t)), \mathcal{R}) \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty.$$

ii) *Si $\bar{b}_2 > b_{2,c}$ no admite ningún equilibrio en \mathbb{R}_+^2 y el punto p_1 es globalmente atractivo.*

ii) *Si $\bar{b}_2 < b_{2,c}$ el punto p_1 se convierte en punto de silla mientras el estado de coexistencia p_c se vuelve globalmente atractivo.*

Como consecuencia del resultado, cuya prueba sigue la pauta de la del Teorema 2.1, se espera la existencia de una solución T -periódica positiva cuando el promedio \bar{b}_2 del coeficiente $b_2(t)$ cruce un cierto valor crítico. Tal es el resultado principal de este capítulo.

3.2. Coexistencia periódica

Considerando de nuevo el sistema periódico inicial observamos que para $c_{11} \gneq 0$ y b_1 T -periódicas siendo $\bar{b}_1 > 0$ la ecuación:

$$u' = u(b_1 - c_{11}u), \quad (3.5)$$

admite una única solución T -periódica y positiva $p(t)$ que es globalmente atractiva (Capítulo 1). Por contra la ecuación:

$$v' = v(-\bar{b}_2 - \bar{c}_{22}v),$$

tiene a $v = 0$ como estado globalmente atractivo. El sentido biológico de las afirmaciones es claro: las presas subsisten en equilibrio periódico en ausencia de los depredadores, éstos se extinguen en ausencia de las presas.

Proposición 3.2. *Tanto los semiejes Ou , Ov , como los cuadrantes abierto \mathbb{R}_+^2 y cerrado $\overline{\mathbb{R}_+^2}$ son invariantes para la ecuación (3.1). Todas sus soluciones en \mathbb{R}_+^2 están definidas en intervalos de la forma $[t_0, \infty)$. Más aún, si $\bar{b}_1 > 0$, $c_{11} \geq 0$ y $c_{22} \geq 0$ entonces tales soluciones también están acotadas.*

Demostración. Sea $(u(t), v(t))$ una solución en \mathbb{R}_+^2 , se sigue de (3.1) que mientras exista:

$$u' \leq b_1u, \quad v' \leq (-b_2 + c_{21}u)v.$$

Obsérvese que en la segunda ecuación no podemos suprimir $-b_2$ pues tiene signo variable. La primera inecuación impide que u explote en tiempo finito, es decir la existencia de $0 < \omega < \infty$ tal que $\lim_{t \rightarrow \omega} u = \infty$. La segunda impide a su vez que lo haga v . Se sabe además que si (u, v) está definida en el intervalo maximal $[t_0, \omega)$ entonces una de las dos componentes diverge cuando $t \rightarrow \omega-$ si este valor fuese finito. Luego $\omega = \infty$.

Por otro lado:

$$u' = u(b_1 - c_{11}u - c_{12}v) \leq u(b_1 - c_{11}u).$$

Luego $u(t) \leq z(t)$ siendo z la solución de $z' = z(b_1 - c_{11}z)$ con el mismo dato inicial que u . Como $z(t) \rightarrow p(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$ resulta:

$$u(t) \leq p(t) + \varepsilon,$$

para todo $t \geq t_1$ suficientemente grande. A su vez $v(t) \leq w(t)$ donde w resuelve, con el mismo dato que v , la ecuación logística:

$$w' = w(-b_2 + c_{21}(p + \varepsilon) - c_{22}w). \quad (3.6)$$

En particular $w(t) \rightarrow \tilde{p}(t)$ donde \tilde{p} es la solución T -periódica no negativa de esta última ecuación (que muy bien pudiera ser $\tilde{p} = 0$). Luego v también está acotada. \square

Observamos ahora que así como el equilibrio p_1 pierde su estabilidad en el caso de coeficientes constantes, cuando el promedio \bar{b}_2 cruza el valor $b_{2,c}$, al pasar de nodo estable a silla; un fenómeno similar se observa en el sistema periódico. En efecto el papel de p_1 lo desempeña en la ecuación (3.1) la solución periódica $(p(t), 0)$ y ésta pierde su estabilidad cuando \bar{b}_2 cruza un valor crítico adecuado.

Proposición 3.3. *Admitamos que los coeficientes de (3.1) son no negativos y cumplen:*

$$\bar{b}_1 > 0, \quad c_{11} \geq 0, \quad c_{21} \geq 0. \quad (3.7)$$

Entonces, la solución periódica semitrivial $(p(t), 0)$ es asintóticamente estable si:

$$\bar{b}_2 > \overline{c_{21}p}, \quad (3.8)$$

e inestable cuando:

$$\bar{b}_2 < \overline{c_{21}p}. \quad (3.9)$$

Demostración. Las dos primeras condiciones de (3.7) aseguran la existencia y positividad de la solución periódica $p(t)$ de (3.5); la tercera la empleamos ahora. De acuerdo con el Teorema A.7 (Apéndice), para estudiar la estabilidad se forma la ecuación linealizada en torno a $(p(t), 0)$ que es:

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b_1 - 2c_{11}p) & -c_{12}p \\ 0 & (-b_2 + c_{21}p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi(T) = \begin{pmatrix} e^{A_1(T)} & E(T) \\ 0 & e^{A_2(T)} \end{pmatrix},$$

donde $A_1 = \int_0^t (b_1 - 2c_{11}p)$, $A_2 = \int_0^t (-b_2 + c_{21}p)$ y $E = -e^{A_1} \int_0^t e^{-A_1+B_2} c_{12}p$. Se observa ahora que:

$$0 = \int_0^T \frac{p'}{p} = \int_0^T (b_1 - c_{11}p) \Rightarrow A_1(T) < 0.$$

La conclusión se sigue notando que $A_2(T) = T(-\bar{b}_2 + \overline{c_{21}p})$. □

Observación 3.4. Es consecuencia de la demostración de la Proposición 3.2 que si se cumple la condición (3.8) la solución periódica semitrivial $(p(t), 0)$ es globalmente atractiva entre las soluciones positivas. De hecho, nótese que (3.8) implica que:

$$\overline{-b_2 + c_{21}(p + \varepsilon)} < 0,$$

si ε es pequeño. De ahí todas las soluciones no negativas w de la ecuación (3.6) tienden a cero cuando $t \rightarrow \infty$. Por tanto $v(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Como $u(t)$ se acerca tanto al eje Ou como se desee entonces $u(t) - p(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Enunciamos ahora la existencia de soluciones periódicas positivas. La clave es que la pérdida de estabilidad de la solución semitrivial $(p(t), 0)$ se salda con la aparición de un estado de coexistencia T-periódico. Como la única componente

variable del sistema va a ser el promedio \bar{b}_2 del coeficiente b_2 resulta oportuno escribir éste en la forma

$$b_2(t) = \lambda + \tilde{b}_2(t), \quad \int_0^T \tilde{b}_2 = 0.$$

Teorema 3.5. *Supongamos que los coeficientes de (3.1) son no negativos, cumplen las condiciones (3.7) y además $c_{22} \geq 0$. Se satisfacen entonces las siguientes propiedades.*

i) *La relación:*

$$\bar{b}_2 < \overline{c_{21}p}, \quad (3.10)$$

es condición necesaria para la existencia de una solución T -periódica positiva $(u(t), v(t))$. Más aún, caso de existir dicha solución debe cumplir:

$$0 < u(t) < p(t), \quad t \in [0, T]. \quad (3.11)$$

ii) *Existe $\delta > 0$ tal que para todo $\bar{b}_2 = \lambda$ cumpliendo*

$$\overline{c_{21}p} - \delta \leq \lambda < \overline{c_{21}p}, \quad (3.12)$$

el sistema admite una solución T -periódica $(u_c(t, \lambda), v_c(t, \lambda))$ que satisface:

$$0 < u_c(t, \lambda) < p(t), \quad v_c(t) > 0, \quad (3.13)$$

junto con:

$$(u_c(t, \lambda), v_c(t, \lambda)) \rightarrow (p(t), 0), \quad (3.14)$$

uniformemente en $[0, T]$ cuando $\lambda \rightarrow \overline{c_{21}p}-$.

Observación 3.6.

- i) La condición (3.10) implica que los estados de coexistencia son únicamente posibles cuando la solución $(p(t), 0)$ es inestable.
- ii) La relación (3.14) refleja el hecho de que el estado de coexistencia se origina como una perturbación de la solución semitrivial $(p(t), 0)$ (ver la simulación al final de la sección).

La prueba del teorema hace uso de herramientas de bifurcación (Sección A.5 del Apéndice) y del siguiente lema.

Lema 3.7. *Sean:*

$$A(t) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad A(t)^* = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}, \quad (A^* = \text{la traspuesta de } A),$$

matrices de coeficientes periódicos $a, b, c \in C_T(\mathbb{R})$ tales que $\bar{a} \neq 0$.

i) Si $\bar{c} \neq 0$ entonces $\forall \bar{f} = (f_1, f_2) \in C_T(\mathbb{R}) \times C_T(\mathbb{R})$ la ecuación:

$$\bar{y}' = A(t)\bar{y} + \bar{f},$$

admite una única solución T -periódica $\bar{y} = (y_1, y_2)$.

ii) Si $\bar{c} = 0$ las ecuaciones:

$$\bar{y}' = A(t)\bar{y}, \quad \bar{y}' = -A(t)^*\bar{y},$$

admiten soluciones periódicas no triviales que se reducen a los múltiplos de una solución particular, $\psi(t)$ en el primer caso, $\psi(t)^*$ en el segundo.

iii) Si $\bar{c} = 0$ y $\bar{f} \in C_T(\mathbb{R}) \times C_T(\mathbb{R})$, la ecuación:

$$\bar{y}' = A(t)\bar{y} + \bar{f},$$

admite una solución periódica sí y sólo sí (el integrando representa el producto escalar)

$$\langle \bar{f}, \psi \rangle = \int_0^T \bar{f} \psi^* = 0.$$

En ese caso sólo existe una solución \bar{y} que satisface $\langle \bar{y}, \psi \rangle = 0$.

Demostración. Se basa en las ideas del Capítulo 1. Cuando $\bar{c} = 0$ la solución ψ referida en ii) es $\psi = (\psi_1, \psi_2) = (\psi_1, e^{\int_0^t c})$, donde ψ_1 es la solución periódica de $x' = ax + b\psi_2$. Asimismo, $\psi^* = (\psi_1^*, \psi_2^*) = (0, e^{-\int_0^t c})$. \square

Observación 3.8. La ecuación $\bar{y}' = -A^*\bar{y}$ se denomina el sistema *adjunto* de $\bar{y}' = A\bar{y}$.

Demostración (del Teorema 3.5). Comenzamos con una observación. Si (3.1) admite una solución periódica positiva $(u(t), v(t))$ entonces u resuelve la ecuación logística artificial:

$$u' = u(a_1 - c_{11}u), \quad a_1 = b_1 - c_{12}v.$$

Del sólo hecho de la existencia podemos concluir por un lado que $\bar{a}_1 > 0$ mientras que como $a_1 \leq b_1$ (aquí $c_{12} \geq 0$) entonces (Lema 1.22):

$$0 < u(t) < p(t).$$

Esto prueba directamente (3.11). Por otro lado, v es solución periódica positiva de:

$$v' = v((-b_2 + c_{21}u) - c_{22}v),$$

que es una ecuación logística con coeficiente asociado $a_2 := -b_2 + c_{21}u$. Como ha de ser $\bar{a}_2 > 0$:

$$0 < \overline{-b_2 + c_{21}u} < \overline{-b_2 + c_{21}p}.$$

Probamos así la condición (3.10).

Abordamos ahora la parte de existencia. Efectuamos el cambio $u(t) = x(t) + p(t)$, $v(t) = y(t)$ en las ecuaciones (3.1) y obtenemos:

$$\begin{cases} x' = x(b_1 - 2c_{11}p) - c_{12}py - c_{11}x^2 - c_{12}xy \\ y' = y(c_{21}p - \tilde{b}_2) - \lambda y + c_{21}xy - c_{22}y^2, \end{cases} \quad (3.15)$$

pues $b_2 = \lambda + \tilde{b}_2$. Admiten la representación más concisa:

$$\bar{y}' = A\bar{y} - \lambda\mathcal{N}\bar{y} + \mathcal{G}(\bar{y}), \quad (3.16)$$

donde $\bar{y} = (x, y)$,

$$A = \begin{pmatrix} (b_1 - 2c_{11}p) & -c_{12}p \\ 0 & c_{21}p - \tilde{b}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{G} = \begin{pmatrix} -x(c_{11}x + c_{12}y) \\ y(c_{21}x - c_{22}y) \end{pmatrix}.$$

Definimos los espacios $X = C_T(\mathbb{R}) \times C_T(\mathbb{R})$, $X_1 = C_T^1(\mathbb{R}) \times C_T^1(\mathbb{R})$ con sus normas naturales. El operador $\mathcal{L} : X_1 \rightarrow X$, $\mathcal{L}\bar{y} = \bar{y}' - A(t)\bar{y}$ tiene inverso \mathcal{L}^{-1} pues:

$$\overline{b_1 - 2c_{11}p} < 0, \quad \lambda_0 := \overline{c_{21}p - \tilde{b}_2} = \overline{c_{21}p} > 0.$$

y entonces la afirmación se deduce de aplicar el Lema 3.7. Por consiguiente, en la búsqueda de soluciones T -periódicas podemos reducir (3.16) a encontrar elementos $\bar{y} \in X_1$ que satisfagan la ecuación abstracta:

$$\mathcal{L}\bar{y} = -\lambda\mathcal{N}\bar{y} + \mathcal{G}(\bar{y}),$$

Equivalentemente:

$$\bar{y} + \lambda\mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}\bar{y} - \mathcal{L}^{-1}\mathcal{G}(\bar{y}) = 0. \quad (3.17)$$

Si representamos el primer miembro como $F(\lambda, \bar{y})$ y consideramos $F : \mathbb{R} \times X_1 \rightarrow X_1$ nuestro objetivo es comprobar que estamos en las condiciones de aplicar el Teorema A.10 del Apéndice. Específicamente, vamos a probar que existe un punto de bifurcación $(\lambda_0, 0) \in \mathbb{R} \times X_1$ de soluciones periódicas. Para ello escribimos (3.17) en la forma:

$$(I + \lambda_0\mathcal{L}^{-1}\mathcal{N})\bar{y} + (\lambda - \lambda_0)\mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}\bar{y} - \mathcal{L}^{-1}\mathcal{G}(\bar{y}) = 0, \quad (3.18)$$

donde identificamos $L_0 = I + \lambda_0\mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}$, $B = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{N}$.

Falta hallar el valor crítico λ_0 . Observamos que $\bar{z} \in N(L_0)$ si \bar{z} es una solución periódica de:

$$\bar{z}' = (A - \lambda_0\mathcal{N})\bar{z},$$

con lo que se hace necesario imponer que $\overline{c_{21}p - \tilde{b}_2} - \lambda_0 = 0$ lo que dice que:

$$\lambda_0 = \overline{c_{21}p}.$$

Abreviando $c = c_{21}p - \tilde{b}_2 - \lambda_0$ resulta que $N(L_0)$ está generado por la solución:

$$\psi = (\psi_1, e^{\int_0^t c}),$$

en donde $x = \psi_1$ es la solución periódica de la ecuación:

$$x' = (b_1 - 2c_{11}p)x - c_{12}p\psi_2.$$

Asimismo, el espacio de soluciones periódicas del sistema adjunto:

$$\bar{z}' = -(A^* - \lambda_0\mathcal{N})\bar{z},$$

está generado por $\psi^* = (\psi_1^*, \psi_2^*) = (0, e^{-\int_0^t c})$. Llamamos:

$$Z = \psi^\perp = \{\bar{y} \in X_1 : \langle \bar{y}, \psi \rangle = 0\}.$$

Afirmamos que para todo $\bar{f} \in X_1$ existen $\hat{z} \in Z$, $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\bar{f} = L_0\hat{z} + \hat{\lambda}B\psi,$$

siendo esa representación única. En efecto la relación equivale a:

$$L_0\hat{z} = \bar{f} - \hat{\lambda}B\psi \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{L} + \lambda_0\mathcal{N})\hat{z} = \mathcal{L}\bar{f} - \hat{\lambda}\mathcal{L}B\psi.$$

Es decir, $\bar{z} = \hat{z}$ es solución periódica de la ecuación no homogénea:

$$\bar{z}' = (A - \lambda_0\mathcal{N})\bar{z} + \mathcal{L}\bar{f} - \hat{\lambda}\mathcal{L}B\psi.$$

Por el Lema 3.7, dicha ecuación admite una única solución en Z sí y sólo sí:

$$\langle \mathcal{L}\bar{f} - \hat{\lambda}\mathcal{L}B\psi, \psi^* \rangle = 0.$$

Llamando $\mathcal{L}^* = -\frac{d}{dt} - A^*$ la condición equivale a:

$$\langle \bar{f}, \mathcal{L}^*\psi^* \rangle - \hat{\lambda}\langle \mathcal{N}\psi, \psi^* \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\hat{\lambda} = -\frac{\lambda_0}{T}\langle \bar{f}, \mathcal{N}\psi^* \rangle = -\frac{\lambda_0}{T} \int_0^T f_2 e^{-\int_0^s c} ds,$$

pues $\mathcal{L}^*\psi^* = -\lambda_0\mathcal{N}\psi^*$.

El Teorema A.10 nos permite concluir que la ecuación (3.17) admite la familia de soluciones no triviales:

$$(\lambda, \bar{y}) = (\lambda(s), s(\psi(t) + w(t, s))) \quad |s| < \varepsilon.$$

De ahí se obtienen las soluciones de (3.1):

$$(u, v) = (p(t), 0) + s(\psi(t) + w(t, s))$$

cuya segunda componente es $v = s(\psi_2 + w_2)$. Notamos que $v > 0$ si $s > 0$ es pequeño. Luego las soluciones bifurcadas son positivas si $s > 0$. Probamos ahora que:

$$\lambda_1 := \frac{d\lambda}{ds}(0) < 0.$$

Eso significa que tales soluciones positivas surgen cuando $\lambda < \lambda_0$ que es la condición (3.12) del teorema. Para calcular λ_1 sustituimos $\bar{y} = s(\psi + w)$ en la ecuación (3.18) donde notamos que por la naturaleza cuadrática de \mathcal{G} obtenemos tras simplificar s :

$$(I + \lambda_0 \mathcal{L}^{-1} \mathcal{N})w + (\lambda - \lambda_0) \mathcal{L}^{-1} \mathcal{N}(\psi + w) - s \mathcal{L}^{-1} \mathcal{G}(\psi + o(1)) = 0. \quad (3.19)$$

Derivando con respecto de s , haciendo $s = 0$, denotando $w_1 = \frac{dw}{ds}(0)$ y observando que $w(0) = 0$ llegamos a:

$$(I + \lambda_0 \mathcal{L}^{-1} \mathcal{N})w_1 + \lambda_1 \mathcal{L}^{-1} \mathcal{N}\psi - \mathcal{L}^{-1} \mathcal{G}(\psi) = 0.$$

Aplicando \mathcal{L} :

$$(\mathcal{L} + \lambda_0 \mathcal{N})w_1 = \mathcal{G}(\psi) - \lambda_1 \mathcal{N}\psi.$$

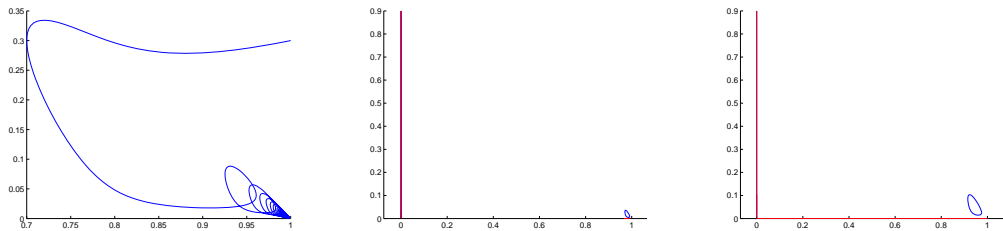
La condición de resolubilidad implica:

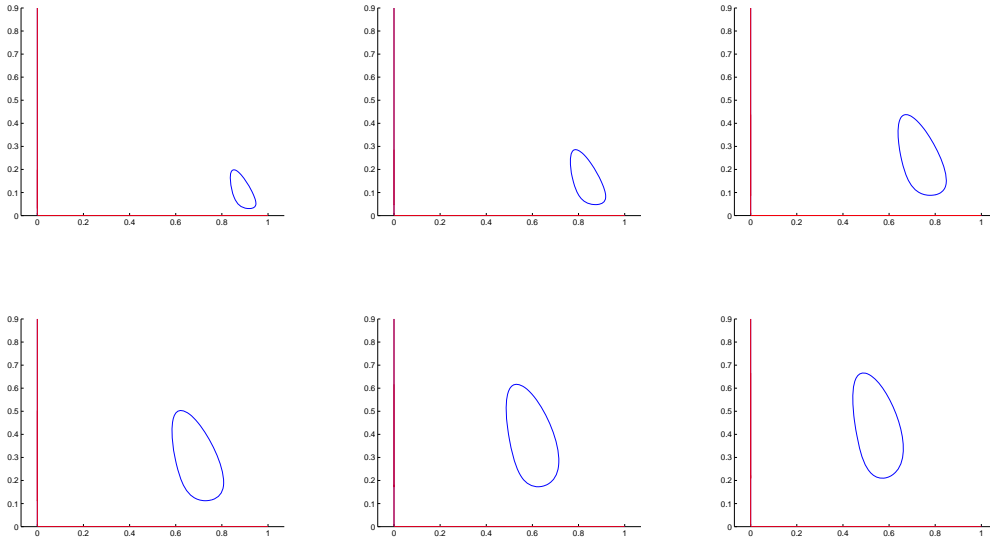
$$\lambda_1 = \frac{1}{T} \langle \mathcal{G}(\psi), \psi^* \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{G}_2(\psi) e^{-\int_0^s c} ds < 0,$$

pues afirmamos que $\mathcal{G}_2(\psi) < 0$. En efecto esto se reduce a verificar que $\psi_1 < 0$. Para ello, ψ_1 es T -periódica y resuelve:

$$x' = (b_1 - 2c_{11}p)x - c_{12}p\psi_2.$$

Notamos que $\frac{p'}{p} = b_1 - c_{11}p$ implica $\overline{b_1 - c_{11}p} = 0$ luego $\overline{b_1 - 2c_{11}p} < 0$. Que $\psi_2 < 0$ se sigue precisamente de esta última desigualdad. Con esto concluye la demostración. \square





La simulación ilustra la génesis de la solución periódica tal como se establece en el Teorema 3.5. Se consideran $b_1 = c_{ij} = 1 + 0.5 \sin t$ cuyos promedios son la unidad y $b_2 = \varepsilon + 0.5 \sin t$ de promedio ε . Se tiene $p = 1$ luego $\overline{c_{21}p} = 1$ y la solución periódica surge cuando ε cruza el valor 1 en sentido decreciente. La primera figura corresponde a $\varepsilon = 1$ y refleja la estabilidad asintótica del punto $(1, 0)$. En las siguientes se describe la solución periódica para valores decrecientes que van desde $\varepsilon = 0.97$ hasta $\varepsilon = 0.1$.

A

Apéndice

A.1. Dependencia continua en datos iniciales

Sean $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ un abierto $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ una aplicación continua con $\frac{\partial f}{\partial x}$ también continua.

Teorema A.1. *Si $y(t)$ es una solución de la ecuación $x' = f(t, x)$ que está definida en un intervalo finito $[\alpha, \beta]$, entonces existe $\eta > 0$ tal que para todo*

$$(t_0, x_0) \in B((\alpha, y(\alpha)), \eta) = \{(t, x) : |(t, x) - (\alpha, y(\alpha))| < \eta\}$$

la solución $\varphi(t, t_0, x_0)$ también está definida en $[\alpha, \beta]$. Además $\varphi(t, t_0, x_0) \rightarrow y(t)$ uniformemente en $[\alpha, \beta]$ cuando $(t_0, x_0) \rightarrow (\alpha, y(\alpha))$

Una consecuencia del teorema es que el flujo $\varphi(t, t_0, x_0)$ está definido en un abierto de $\Theta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ y que es continuo dicho abierto.

A.2. Monotonía del flujo

Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ una aplicación continua con $\frac{\partial f}{\partial x}$ continua. Se dice que el sistema $x' = f(t, x)$ es cooperativo en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ si

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \geq 0 \quad \text{en } \Omega \text{ para todo } 1 \leq j \leq N, j \neq i. \quad (\text{A.1})$$

Se dice que es estrictamente cooperativo en Ω si la desigualdad es estricta en todos los puntos de Ω . Las correspondientes nociones de sistema competitivo y competitivo estricto se obtienen cambiando el sentido de la desigualdad en (A.1) ([6]).

En el resultado que sigue para $x, y \in \mathbb{R}^N$ se denota (orden lexicográfico):

$$x \leq y \quad \text{si} \quad y - x \in \overline{\mathbb{R}^N}_+.$$

Denotamos $x < y$ si $x \leq y$ con $x \neq y$, mientras $x \ll y$ (x fuertemente menor que y) significa que $y - x \in \mathbb{R}^N_+$. El siguiente es un resultado debido a E. Kamke (1932) ([2]).

Teorema A.2. *Supongamos que $x' = f(t, x)$ es cooperativo en $\mathbb{R} \times G$ con G un abierto convexo de \mathbb{R}^N y sean $x(t), y(t)$ soluciones definidas en $[a, b]$. Entonces:*

$$x(a) < y(a) \quad \Rightarrow \quad x(t) < y(t) \quad \forall t \in [a, b].$$

Si el sistema es además estrictamente cooperativo entonces:

$$x(a) < y(a) \quad \Rightarrow \quad x(t) \ll y(t) \quad \forall t \in [a, b].$$

Al cambiar el sentido del tiempo en el teorema anterior se obtiene lo siguiente.

Corolario A.3. *Supongamos ahora que $x' = f(t, x)$ es competitivo en $\mathbb{R} \times G$, $G \subset \mathbb{R}^N$ abierto y convexo mientras $x(t), y(t)$ son soluciones definidas en $[a, b]$. Entonces:*

$$x(b) < y(b) \quad \Rightarrow \quad x(t) < y(t) \quad \forall t \in [a, b].$$

Si el sistema es además estrictamente competitivo entonces:

$$x(b) < y(b) \quad \Rightarrow \quad x(t) \ll y(t) \quad \forall t \in [a, b].$$

Otra consecuencia del Teorema de Kamke es el siguiente resultado. A tal fin decimos que $x \not\leq y$ si no se cumplen ni $x \leq y$ ni $y \leq x$.

Corolario A.4. *Si $x' = f(t, x)$ es competitivo y $x(t), y(t)$ son soluciones definidas en $[a, b]$ entonces:*

$$x(a) \not\leq y(a) \quad \Rightarrow \quad x(t) \not\leq y(t) \quad \forall t \in [a, b].$$

En el caso del plano \mathbb{R}^2 éste último resultado admite una lectura más sugestiva si usamos el orden $x \leq_{(2)} y$ (Capítulo 2). En efecto nótese que relativamente al orden lexicográfico, $x(a) \not\leq y(a)$ significa o bien $x(a) \ll_{(2)} y(a)$ ó $y(a) \ll_{(2)} x(a)$.

Corolario A.5. *Si $N = 2$ y el sistema $x' = f(t, x)$ es competitivo, para $x(t), y(t)$ soluciones definidas en $[a, b]$ se cumple:*

$$x(a) \ll_{(2)} y(a) \quad \Rightarrow \quad x(t) \ll_{(2)} y(t) \quad \forall t \in [a, b].$$

A.3. Dinámica discreta

Una aplicación C^1 , $T : D \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ define el sistema dinámico discreto N -dimensional:

$$x_{n+1} = T(x_n).$$

La órbita que pasa por x_0 se define por la sucesión de iteradas $\{T^n(x_0)\}$. Una solución de equilibrio es aquella cuyo dato inicial es un punto fijo:

$$T(\hat{x}) = \hat{x}.$$

En este caso la órbita se reduce al propio \hat{x} . Emulando la Definición 1.9 se dice que \hat{x} es estable si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$|T^n(x_0) - \hat{x}| < \varepsilon,$$

para todo n cuando $|x_0 - \hat{x}| < \delta$. El punto \hat{x} se dice inestable cuando no es estable, mientras se denomina asintóticamente estable cuando además de ser estable existe $r > 0$ tal que:

$$\lim |T^n(x_0) - \hat{x}| = 0,$$

siempre que $|x_0 - \hat{x}| < r$.

La siguiente propiedad es la versión N -dimensional del Teorema 1.17. Su demostración resulta considerablemente más delicada.

Teorema A.6. Sean \hat{x} un punto fijo de T y $L : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ la aplicación lineal $L = DT(\hat{x})$.

i) Si todos los autovalores λ de L (reales o complejos) cumplen:

$$|\lambda| < 1,$$

entonces \hat{x} es asintóticamente estable.

ii) Si L admite un autovalor λ tal que $|\lambda| > 1$ entonces \hat{x} es inestable.

A.4. Estabilidad de las soluciones periódicas

Introducimos algunos conceptos básicos sobre sistemas de ecuaciones lineales:

$$x' = A(t)x,$$

donde $A(t)$ es una matriz $N \times N$ de coeficientes continuos en \mathbb{R} . Una matriz solución $\Phi(t)$ es aquella que cumple la ecuación:

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Esto equivale a que sus columnas constituyen soluciones de la ecuación. Cuando Φ es invertible se dice que es una matriz fundamental. Si cumple además $\Phi(0) = I$ (la matriz identidad) se dice que está normalizada en $t = 0$.

Admitamos entonces que Φ es una matriz fundamental normalizada en $t = 0$. Como primera consecuencia la solución de la ecuación que cumple $x(0) = x_0$ se expresa en la forma:

$$x(t) = \Phi(t)x_0.$$

En el caso especial en que la ecuación es T -periódica, es decir $A(t+T) = A(t)$ para todo t , se sabe que $x(t+T)$ es solución si $x(t)$ lo es. Como las columnas de Φ son soluciones esto lleva a la siguiente propiedad:

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)C,$$

para cierta matriz invertible C . Haciendo $t = 0$ resulta que $C = \Phi(T)$. Una consecuencia es que la aplicación de Poincaré para la ecuación lineal es:

$$\Pi(x_0) = \Phi(T)x_0.$$

En el próximo resultado se habla de la ecuación variacional. Dada una solución $y(t)$ de la ecuación $x' = f(t, x)$, la ecuación variacional evaluada en $y(t)$, también la linealización de la ecuación evaluada la solución $y(t)$ es, por definición, la ecuación lineal:

$$z' = \frac{\partial f}{\partial x}(t, y(t))z.$$

Teorema A.7. Sean $p(t)$ una solución T -periódica de $x' = f(t, x)$ y $\Phi(t)$ la matriz fundamental de la ecuación variacional evaluada en $p(t)$.

- i) Si todos los autovalores $\lambda \in \mathbb{C}$ de $\Phi(T)$ tienen módulo $|\lambda| < 1$ entonces $p(t)$ es asintóticamente estable.
- ii) Si $\Phi(T)$ admite un autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ con módulo $|\lambda| > 1$ entonces $p(t)$ es inestable.

Demostración. En primer lugar $p(t) = \varphi(t, \hat{p})$ donde \hat{p} es un punto fijo de Π . Asimismo, la estabilidad de $p(t)$ es la de \hat{p} como equilibrio de la ecuación discreta $p_{n+1} = \Pi(p_n)$. Dicha estabilidad depende del espectro de $D\Pi(\hat{p}) = \Phi(T)$. Esto prueba el resultado. \square

A.5. Bifurcación

Sea $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ una aplicación de clase \mathcal{C}^k , $k \geq 2$, que define la ecuación:

$$F(\lambda, u) = 0. \tag{A.2}$$

Se sabe que ésta admite la familia de soluciones triviales $(\lambda, u) = (\lambda, 0)$, es decir $u = 0$ resuelve la ecuación para todo $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$F(\lambda, 0) = 0.$$

Nuestro propósito es encontrar un punto $(\lambda_0, 0)$ en el que incida una ‘curva’ de soluciones no triviales. Se le denomina por esta razón un ‘punto de bifurcación’ de la ecuación (A.2).

Ejemplo A.8. El punto $(0, 0)$ es de bifurcación para la ecuación real $x(x - \lambda) = 0$, aquí $F = x(x - \lambda)$ y la curva de soluciones no triviales es $x = \lambda$.

Para estudiar la existencia de puntos de bifurcación desarrollamos F en el punto $(\lambda_0, 0)$:

$$F(\lambda, u) = D_u F(\lambda_0, 0)u + D_{u\lambda}^2 F(\lambda - \lambda_0)u + r(\lambda, u) =: L_0 u + B(\lambda - \lambda_0)u + r(\lambda, u),$$

donde el resto cumple $r(\lambda, 0) = 0$, $D_u r(\lambda_0, 0) = 0$ y $D_{u\lambda}^2 r(\lambda_0, 0) = 0$.

El siguiente resultado afirma que si la aplicación lineal L_0 tiene un núcleo unidimensional:

$$N(L_0) = \text{span} \{\psi\} = \{t\psi : t \in \mathbb{R}\},$$

y existe un espacio $Z \subset \mathbb{R}^N$ tal que:

$$\mathbb{R}^N = \text{span} \{\psi\} \oplus Z, \quad \mathbb{R}^N = \text{span} \{B\psi\} \oplus L_0(Z), \quad (\text{A.3})$$

entonces $(\lambda_0, 0)$ es un punto de bifurcación de (A.2).

Observación A.9.

- i) Para que L_0 tenga núcleo no trivial es condición necesaria y suficiente que $\det D_u F(\lambda_0, 0) = 0$.
- ii) La relación:

$$B\psi \notin R(L_0)$$

donde $R(L_0)$ es el espacio imagen de L_0 , es equivalente a (A.3).

- iii) La condición (A.3) consiste en probar que para todo $f \in \mathbb{R}^N$ existen $\hat{z} \in Z$ y $\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$ únicos tales que f se representa en la forma:

$$f = L_0 \hat{z} + B\hat{\lambda}\psi. \quad (\text{A.4})$$

Teorema A.10. *Supongamos que F satisface (A.3). Entonces $(\lambda_0, 0)$ es un punto de bifurcación. Más aún, existen aplicaciones de clase \mathcal{C}^k , $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ y $w : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Z$ tales que $\lambda(0) = \lambda_0$, $w(0) = 0$ mientras los elementos de la curva:*

$$\begin{cases} \lambda = \lambda(s) \\ u = s(\psi + w(s)), \end{cases} \quad |s| < \varepsilon, \quad (\text{A.5})$$

junto con $(\lambda, 0)$ son las únicas soluciones de la ecuación en un cierto entorno de $(\lambda_0, 0)$.

Debe observarse finalmente que el teorema es cierto si $F : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ donde X es un espacio de Banach, por ejemplo $X = C_T(\mathbb{R})$ ó $X = C_T^1(\mathbb{R})$. Véase [13] para una prueba del resultado en este formato más general.

Bibliografía

- [1] BRAUN M., *Differential Equations and its Applications. An introduction to applied mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [2] COPPEL W. A., *Stability and asymptotic behavior of differential equations*. Heath and Co., Boston, 1965.
- [3] DING T., ZANOLIN F. *Periodic solutions and subharmonic solutions for a class of planar systems of Lotka-Volterra type*. World Congress of Nonlinear Analysts '92, Vol. I-IV (Tampa, FL, 1992), 395–406, de Gruyter, Berlín, 1996.
- [4] GUCKENHEIMER J., HOLMES PH., *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [5] HALE J. K., KOÇAK H., *Dynamics and bifurcations*. 2nd edition. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [6] HIRSCH M., *Systems of differential equations which are competitive or cooperative. I: limit sets*. SIAM J. Math. Anal. **13** (1982), 167–179.
- [7] LÓPEZ-GÓMEZ J., ORTEGA R., TIENO A., *The periodic predator-prey Lotka-Volterra model*. Advances in Diff. Equations **1** (1996), 403–423.
- [8] MASSERA, JOSÉ L., *The existence of periodic solutions of systems of differential equations*. Duke Math. J. **17** (1950), 457–475.
- [9] MOTTONI P. DE, SCHIAFFINO A., *Competition Systems with Periodic Coefficients: A Geometric Approach*. J. Math. Biology **11** (1981), 319–335.
- [10] ORTEGA R., TINEO A., *On the number of positive periodic solutions for planar competing Lotka-Volterra systems*. J. Math. Anal. Appl. **193** (1995), no. 3, 975–978.
- [11] ORTEGA R., TINEO A., *An exclusion principle for periodic competitive systems in three dimensions*. Nonlinear Anal. **31** (1998), no. 7, 883–893.
- [12] J.C. SABINA DE LIS, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: Curso de Introducción*. 2020. <https://josabina.webs.ull.es>
- [13] J.C. SABINA DE LIS, *Curso de Análisis No Lineal*. Servicio de Publicaciones, ULL, 2005.

Population Dynamics in Periodic Environments

Abstract

THIS memoir addresses the interaction between two species by employing the three classical models in population dynamics. Emphasis is focussed in the cases of competitive and prey-predator systems. In strong difference regarding the standard presentations, the key point of our study is the periodic in time dependence of the coefficients in the equations. Their analysis require of advanced tools of nonlinear analysis.

Chapter 1

PRELIMINARY features as the notions of stability and the Poincaré mapping are introduced. The logistic equation, an auxiliary tool for the subsequent chapters:

$$u' = u(a(t) - b(t)u), \quad (1)$$

is studied under the hypothesis that the coefficients $a, b \in C_T(\mathbb{R})$ are T -periodic. As a main property it is shown that (1) possesses a unique positive and globally attracting periodic solution if and only if \bar{a} (the average of a) is positive.

Chapter 2

TWO species u, v competing for the available resources can be described by the system:

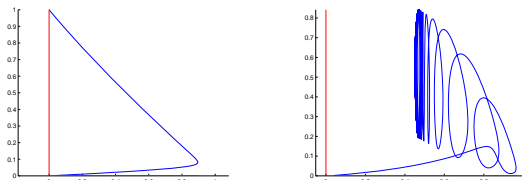
$$\begin{cases} u' = u(a(t) - a_{11}(t)u - a_{12}(t)v) \\ v' = v(b(t) - a_{21}(t)u - a_{22}(t)v), \end{cases} \quad (2)$$

where the T -periodicity of coefficients $a, b, a_{ij} \in C_T(\mathbb{R})$ accounts for the season variations of the habitat. Assuming that $a_{ij} \geq 0$ and that the averages \bar{a}, \bar{b} are positive, (2) is equivalently written as

$$\begin{cases} x' = a_1x(1 - x - b_1(t)y) \\ y' = a_2y(1 - y - b_2(t)x). \end{cases} \quad (3)$$

A main result in this chapter states that every positive solution (u, v) converges to a nonnegative and nontrivial periodic solution $(u_c(t), v_c(t))$ as $t \rightarrow \infty$. Existence of these periodic solutions is attained by finding out the fixed points of the Poincaré mapping Π . On the other hand, $(u_c(t), v_c(t))$ is shown to be positive (a 'coexistence state') provided that both $\bar{a}_i - \bar{a}_i \bar{b}_i, i = 1, 2$, exhibit the same sign.

Finally, by means of an example (see figures) it is also shown that the coexistence is still possible even when $\bar{a}_i - \bar{a}_i \bar{b}_i, i = 1, 2$, have opposite signs. This is not the case in the constant coefficients framework. Therefore, periodicity facilitates the coexistence.



Chapter 3

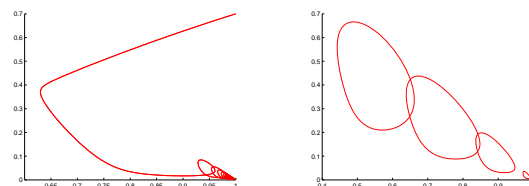
INTERACTION between a prey u and its predator v is now modeled by the equations,

$$\begin{cases} u' = u(b_1(t) - c_{11}(t)u - c_{12}(t)v) \\ v' = v(-b_2(t) + c_{21}(t)u - c_{22}(t)v), \end{cases} \quad (4)$$

where all coefficients are T -periodic, $c_{ij} \geq 0$ while the averages $\bar{b}_i > 0$ for $i = 1, 2$. In this chapter \bar{b}_2 is regarded as a parameter. Our main result asserts that periodic coexistence states are only possible in the range:

$$0 < \bar{b}_2 < b_{2,c} := \overline{c_{21}p},$$

$p(t)$ being the periodic solution to $u' = u(b_1 - c_{11}u)$. More importantly, that a coexistence periodic solution $(u_c(t), v_c(t))$ arises when \bar{b}_2 crosses in decreasing sense the value $b_{2,c}$. Furthermore, $(u_c(t), v_c(t))$ converges to $(p(t), 0)$ as $\bar{b}_2 \rightarrow b_{2,c}$.



In the figure the point $(1, 0)$ plays the rôle of $(p(t), 0)$. On the left, periodic solutions (u_c, v_c) arise from $(1, 0)$ as \bar{b}_2 decreases.

References

- [1] MOTTONI P. DE, SCHIAFFINO A., *Competition Systems with Periodic Coefficients: A Geometric Approach*. J. Math. Biology **11** (1981), 319–335.
- [2] ORTEGA R., TINEO A., *An exclusion principle for periodic competitive systems in three dimensions*. Nonlinear Anal. **31** (1998), no. 7, 883–893.
- [3] ORTEGA R., TINEO A., *On the number of positive periodic solutions for planar competing Lotka-Volterra systems*. J. Math. Anal. Appl. **193** (1995), no. 3, 975–978.
- [4] LÓPEZ-GÓMEZ J., ORTEGA R., TINEO A., *The periodic predator-prey Lotka-Volterra model*. Advances in Diff. Equations **1** (1996), 403–423.
- [5] DING T., ZANOLIN F. *Periodic solutions and subharmonic solutions for a class of planar systems of Lotka-Volterra type*. World Congress of Nonlinear Analysts '92, Vol. I-IV (Tampa, FL, 1992), 395–406, de Gruyter, Berlin, 1996.