

TESIS DOCTORAL

**Estudio y cálculo
de la regularidad de Castelnuovo-Mumford
y otros invariantes
de álgebras graduadas de dimensión dos**

Presentada por Eva García Llorente para la obtención del
Grado de Doctora por la Universidad de La Laguna

Dirigida por:
Isabel Bermejo Díaz

Codirigida por:
Ignacio García Marco



Universidad
de La Laguna

SECCIÓN DE
MATEMÁTICAS | FACULTAD
DE CIENCIAS

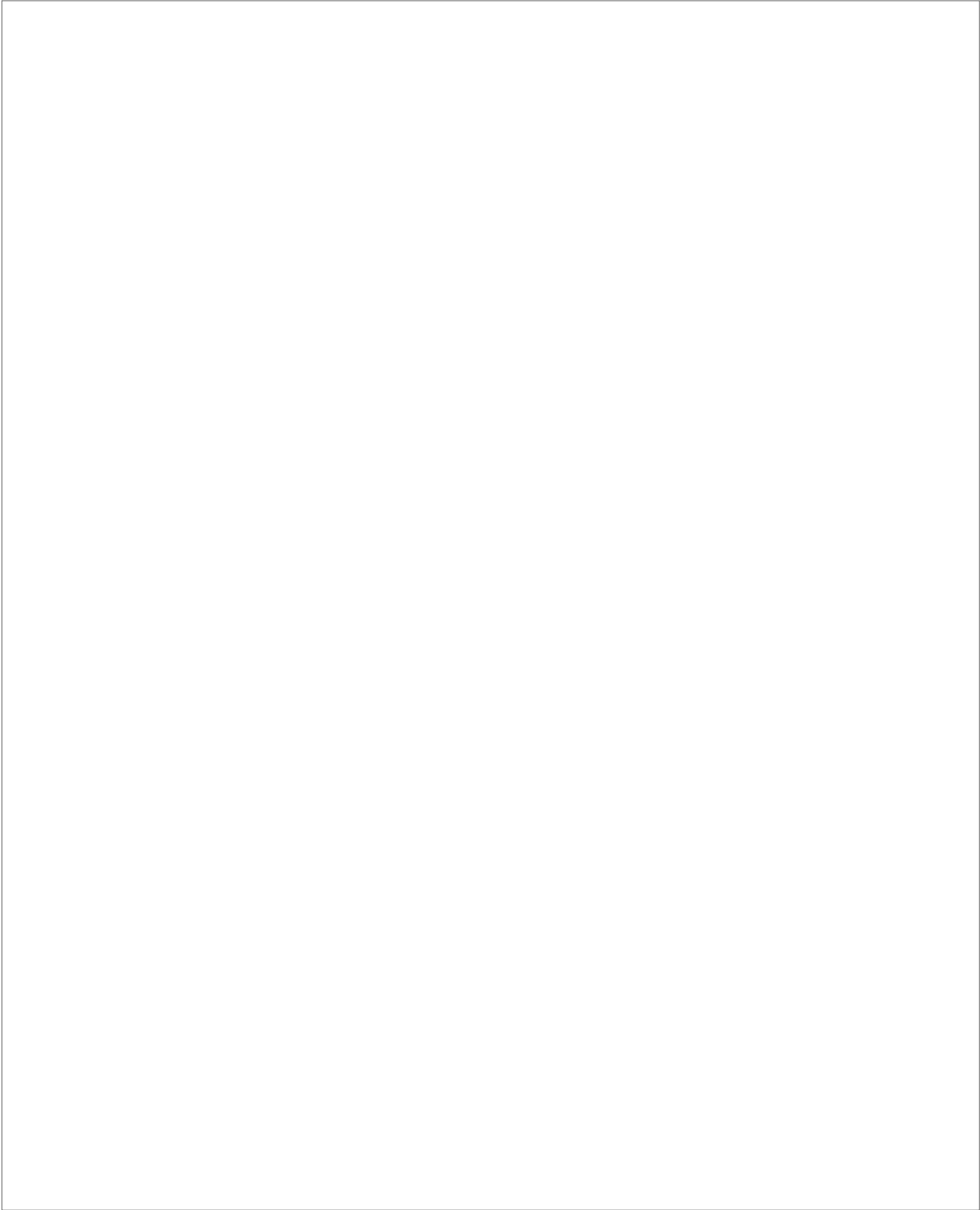
Universidad de La Laguna
Facultad de Ciencias
Sección de Matemáticas
La Laguna, 2018

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52



Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Índice

Introducción	5
1. La propiedad Cohen-Macaulay en ideales ω-homogéneos.	11
1.1. Generalidades	12
1.2. Ideales ω -homogéneos Cohen-Macaulay	20
1.2.1. Aplicación: curvas monomiales proyectivas asociadas a sucesiones aritméticas generalizadas.	24
1.3. Ideales tóricos simpliciales Cohen-Macaulay	28
1.3.1. Aplicación: curvas monomiales proyectivas asociadas a sucesiones casi aritméticas de diferencia uno.	31
1.4. Macaulayficación en ideales tóricos simpliciales	34
1.4.1. Aplicación: Macaulayficación de curvas monomiales lisas	37
2. Invariantes algebraicos de curvas monomiales proyectivas asociadas a sucesiones aritméticas generalizadas	39
2.1. Generalidades	40
2.2. Curvas monomiales proyectivas definidas por sucesiones aritméticas	47
2.3. Curvas monomiales proyectivas definidas por sucesiones aritméticas generalizadas	52
2.4. Curvas monomiales proyectivas Koszul	61
2.4.1. Curvas monomiales proyectivas Koszul definidas por sucesiones aritméticas generalizadas	62
2.4.2. Curvas monomiales proyectivas Koszul de codimensión 2 y 3	63
3. Resoluciones de Noether	67
3.1. Generalidades	69
3.2. Resoluciones de Noether en dimensión 1 y 2: ideales ω -homogéneos	72
3.3. Resoluciones de Noether en dimensión 1 y 2: anillos de semigrupo	79
3.3.1. Una cota superior para la regularidad de Castelnuovo-Mumford de curvas monomiales proyectivas.	81
3.3.2. Aplicación: proyecciones canónicas de las curvas monomial proyectivas asociada a una sucesión aritmética.	84
Bibliografía	91

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
 Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52



Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Introducción

Sea I un ideal homogéneo del anillo de polinomios $R = K[x_1, \dots, x_n]$ sobre un cuerpo K , uno de los conocimientos más profundos que se puede tener del anillo cociente R/I , y por tanto de I , es el de su resolución libre minimal graduada. Desafortunadamente hay muy pocos casos en los que se conoce una descripción explícita de esta resolución y aunque existen métodos efectivos para su cálculo, en términos prácticos es inabordable incluso en pequeños ejemplos. Es por este motivo que muchos autores han concentrado esfuerzos en la obtención de información parcial de la resolución sin pasar por un cálculo explícito de la misma. Este conocimiento parcial de la resolución, además de aportar información relevante del anillo R/I , puede ayudar posteriormente a agilizar el cálculo de la resolución. Un ejemplo es el de la regularidad de Castelnuovo-Mumford, que aporta una cota superior sobre los grados de las sicigias y, por ende, su conocimiento a priori evita cálculos innecesarios de sicigias de alto grado. En esta línea de investigación se encuadra el trabajo de Bayer y Stillman [7], así como los posteriores de Bermejo y Gimenez [13], [14], [15] y [17]. Estos trabajos tratan el cálculo de invariantes cohomológicos de ideales homogéneos en el anillo de polinomios, haciendo especial hincapié en el cálculo de la regularidad de Castelnuovo-Mumford. La herramienta común a los mismos es la utilización de las buenas propiedades de la base de Gröbner de un ideal homogéneo respecto del orden monomial lexicográfico inverso graduado.

Esta Tesis se enmarca en el mismo ámbito que los trabajos ya citados y entre las aportaciones que realiza caben destacar:

1. *La aplicación de los resultados de Bermejo-Gimenez para el estudio de ciertos anillos de coordenadas de curvas proyectivas.*

Calculamos invariantes cohomológicos tales como la serie, la función y el polinomio de Hilbert, la dimensión proyectiva y la regularidad de Castelnuovo-Mumford para ciertas familias de anillos coordenados de curvas monomiales proyectivas. Asimismo, somos capaces de caracterizar cuándo son Cohen-Macaulay y calcular su tipo Cohen-Macaulay cuando lo son, cuándo son Gorenstein, intersección completa y Koszul. Como paso intermedio para obtener estos resultados, se estudia la base de Gröbner del ideal de definición de la curva monomial correspondiente con respecto al orden lexicográfico inverso graduado.

2. *La generalización de resultados a ideales homogéneos respecto a un vector de pesos.*

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Una generalización natural de los ideales homogéneos son los ideales ω -homogéneos u homogéneos respecto a un vector de pesos $\omega \in (\mathbb{Z}^+)^n$. Los ideales ω -homogéneos y sus respectivos anillos graduados cociente son el objeto principal de estudio de esta Tesis. Para estos ideales y anillos obtenemos versiones análogas de los resultados conocidos para los ideales homogéneos usuales. De forma natural, la herramienta utilizada para generalizar los resultados es el estudio de las buenas propiedades de las bases de Gröbner respecto del orden lexicográfico graduado respecto del correspondiente vector de pesos ω .

3. *La profundización en el entendimiento de las buenas propiedades de las bases de Gröbner respecto del orden lexicográfico inverso de un ideal homogéneo respecto de un vector de pesos I .*

Sea A una normalización de Noether de R/I , demostramos cómo a partir de la base de Gröbner de I con respecto al orden lexicográfico inverso graduado, se puede obtener información interesante de la resolución libre minimal graduada de R/I como A -módulo, que llamaremos resolución de Noether. En algunos casos que incluyen cuando R/I es Cohen-Macaulay o tiene dimensión de Krull a lo sumo 2, veremos cómo a partir de esta base de Gröbner se puede describir enteramente su resolución de Noether. Dado que la resolución de Noether está íntimamente ligada con la resolución usual como R -módulo, los resultados en esta línea aportan un entendimiento más profundo de algunos resultados de Bayer-Stillman y de Bermejo-Gimenez.

4. *La especialización de los resultados generales para anillos de semigrupo.*

En esta Tesis se hace especial hincapié en los anillos de semigrupo y muchos de los resultados obtenidos con carácter general se han especializado para anillos de semigrupo. El fin de estos resultados es el de describir los invariantes cohomológicos y las propiedades del anillo en términos del semigrupo subyacente y evitar el cálculo de bases de Gröbner.

Todos los capítulos de esta Tesis comienzan con una sección llamada Generalidades en la que no se aportan resultados novedosos pero se introducen las nociones, resultados y notaciones que son necesarios para el desarrollo de las otras secciones, donde sí se incluye material original. El esquema seguido para la redacción de esta memoria cambia según el capítulo con el único fin de poder presentar los resultados de forma lógica y concisa. Así, en los Capítulos 1 y 3 se ha optado por ir de lo general a lo particular. En ambos capítulos se estudian primero los anillos graduados respecto de un vector de pesos y posteriormente los anillos de semigrupo. Dado el carácter más general de los primeros, los resultados que se obtienen se aplican en el contexto de anillos de semigrupo y profundizamos en ellos a fin de lograr que sean puramente combinatorios. Por contra, en el Capítulo 2 vamos de lo particular a lo general. En este caso se procede de este modo porque se construyen los casos más generales sobre los resultados obtenidos para los particulares.

Los contenidos y principales resultados de esta Tesis son los siguientes:

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
 Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

El Capítulo 1 comenzamos por introducir las propiedades e invariantes que se trabajan en el mismo. En particular, presentamos los objetos de estudio de esta tesis: los ideales homogéneos pesados, también denominados ω -homogéneos donde ω es un vector de pesos, y los anillos de semigrupo simpliciales. En la segunda sección del capítulo consideramos un ideal ω -homogéneo I y una normalización de Noether $A = K[x_{n-d+1}, \dots, x_n] \hookrightarrow R/I$ y proporcionamos en el Teorema 1.2.3 un criterio efectivo para determinar si el anillo R/I es Cohen-Macaulay. Dicho criterio afirma que R/I es Cohen-Macaulay si y solo si las variables x_{n-d+1}, \dots, x_n no dividen a ningún generador minimal del ideal inicial de I respecto al orden lexicográfico inverso ω -graduado. Como aplicación de este, en el Teorema 1.2.6 caracterizamos las curvas asociadas a sucesiones aritméticas generalizadas cuyo anillo de coordenadas es Cohen-Macaulay. Posteriormente nos centramos en los anillos de semigrupo simpliciales y aportamos en la Proposición 1.3.3 una prueba alternativa de una conocida caracterización de la propiedad Cohen-Macaulay para anillos de semigrupo simpliciales. Como aplicación de estos últimos resultados, en el Teorema 1.3.6 determinamos cuándo el anillo de coordenadas de una curva monomial proyectiva asociada a una sucesión casi aritmética de diferencia 1 es Cohen-Macaulay. En la última sección de este capítulo estudiamos la Macaulayficación de anillos de semigrupo. En el Teorema 1.4.3, que es el principal de esta sección, describimos en términos combinatorios la Macaulayficación de los anillos de semigrupo simpliciales. Como aplicación del mismo, en el Corolario 1.4.6, concluimos que la Macaulayficación de una curva monomial lisa es la curva racional normal de igual grado.

El Capítulo 2 está dedicado al estudio de diferentes invariantes en curvas monomiales proyectivas asociadas a sucesiones aritméticas generalizadas. Comenzamos presentando la estrategia que usamos en el capítulo para calcular la regularidad de Castelnuovo-Mumford del anillo de coordenadas $k[\mathcal{C}]$ de la curva \mathcal{C} . Seguimos el capítulo con el estudio de los invariantes de las curvas monomiales proyectivas asociadas a sucesiones aritméticas, que ya probamos que son aritméticamente Cohen-Macaulay en el Teorema 1.2.6. Así en el Teorema 2.2.2 se da una fórmula para calcular la regularidad y en los Teoremas 2.2.3 y 2.2.5 la serie y función de Hilbert del anillo, respectivamente. Además, se calcula el tipo Cohen-Macaulay de $K[\mathcal{C}]$ en el Teorema 2.2.8 y se caracteriza en consecuencia la propiedad Gorenstein en el Corolario 2.2.9. La tercera sección del capítulo estudia los invariantes de $K[\mathcal{C}]$ con \mathcal{C} una curva monomial proyectiva asociada a una sucesión aritmética generalizada. Caracterizamos en el Corolario 2.3.1 cuándo $K[\mathcal{C}]$ es intersección completa y en el Teorema 2.4.2 cuándo es Koszul. Consideramos posteriormente una subfamilia de curvas de este tipo para la que proveemos en el Teorema 2.3.12 una fórmula para el cálculo de la regularidad del anillo y en los Teoremas 2.3.14 y 2.3.16 las series y función de Hilbert del mismo, respectivamente. Concluimos el capítulo estudiando la propiedad Koszul del anillo coordinado de curvas monomiales proyectivas de baja codimensión; en los Teoremas 2.4.6 y 2.4.7 listamos todas las curvas monomiales proyectivas cuyo anillo coordinado es Koszul y tienen codimensión 2 y 3, respectivamente.

Sea I un ideal ω -homogéneo y A una normalización de Noether de R/I , en el Capítulo 3 estudiamos la resolución libre minimal ω -graduada de R/I como A -módulo, que llama-

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
 Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por:	Fecha:
EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

remos resolución de Noether de R/I . Comenzamos por explicar cómo obtener el primer paso de dicha resolución. En la Proposición 3.2.1 y el Teorema 3.2.3 describimos cómo hallar la resolución de Noether de R/I en términos de una base de Gröbner de I con respecto al orden lexicográfico inverso ω -graduado cuando R/I tiene dimensión de Krull 1 o 2. Como consecuencia, obtenemos una fórmula para la serie de Hilbert ω -graduada en el Corolario 3.2.4. Si el ideal es graduado (estándar), en el Corolario 3.2.6 proporcionamos una fórmula para el cálculo de la regularidad de Castelnuovo-Mumford de R/I . Posteriormente nos restringimos a anillos de semigrupo simpliciales y obtenemos versiones de los resultados anteriores en términos del semigrupo. A saber, en el Teorema 3.3.1 describimos el segundo (y último) paso de la resolución de Noether cuando $d = 2$ y en el Corolario 3.3.2 la serie de Hilbert de R/I . En la Nota 3.3.3 se muestra cómo calcular la regularidad en anillos de semigrupo simpliciales homogéneos de dimensión 2. Como aplicación de este método, a continuación nos centramos en las curvas monomiales proyectivas y aportamos en el Teorema 3.3.5 una cota superior para la regularidad de Castelnuovo-Mumford del anillo de semigrupo asociado a la curva. Cerramos el capítulo aportando la resolución de Noether de las proyecciones canónicas de las curvas monomiales proyectivas asociadas a sucesiones aritméticas en el Teorema 3.3.15.

A lo largo de esta memoria se encuentran ejemplos que requieren del cálculo de bases de Gröbner. Estos cálculos, salvo que se indique lo contrario, se han efectuado haciendo uso del software SINGULAR [26]. Igualmente, dichos cálculos se pueden llevar a cabo mediante cualquier programa especializado como CoCoA [22] o MACAULAY2 [34].

La mayoría de los resultados presentados en esta Tesis forman parte de [8] y [9]:

- *I. Bermejo, E. García-Llorente e I. García-Marco, Algebraic invariants of projective monomial curves associated to generalized arithmetic sequences.*

En este artículo se estudian invariantes algebraicos del anillo coordinado homogéneo de curvas monomiales proyectivas asociadas a sucesiones aritméticas generalizadas. Más concretamente, se caracterizan las propiedades Cohen-Macaulay y Koszul del anillo. En los casos de codimensión 2 y 3, se listan todas las curvas monomiales proyectivas cuyo anillo asociado es Koszul. Además en el caso Cohen-Macaulay se obtiene una fórmula para el tipo Cohen-Macaulay. Asimismo, se obtienen fórmulas para la regularidad de Castelnuovo-Mumford, la serie de Hilbert y la función de Hilbert del anillo asociado a un subconjunto de estas curvas.

- *I. Bermejo, E. García-Llorente, I. García-Marco y M. Morales, Noether resolutions in dimension 2.*

En este artículo se trabaja bajo la hipótesis de que I es un ideal ω -homogéneo del anillo de polinomios $R = K[x_1, \dots, x_n]$ y que $A = K[x_{n-d+1}, \dots, x_n]$ es una normalización de Noether de R/I , y se estudia la resolución minimal graduada de R/I como A -módulo. En particular, cuando R/I es Cohen-Macaulay o su dimensión de Krull es a lo sumo 2, describimos cómo obtener enteramente la resolución de

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
 Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por:	Fecha:
EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Noether de R/I a partir de una base de Gröbner de I respecto del orden lexicográfico inverso ω -graduado. Además, cuando R/I es un anillo de semigrupo simplicial de dimension a lo sumo 2, proporcionamos la resolución de Noether multigradaada en términos puramente combinatorios. Como consecuencia, a partir de estas resoluciones obtenemos criterios para determinar si R/I es Cohen-Macaulay así como fórmulas para la serie de Hilbert y, cuando el ideal es homogéneo, la regularidad de Castelnuovo-Mumford. Adicionalmente, cuando I es tórico simplicial y en cualquier dimensión calculamos la Macaulayficación del anillo de semigrupo asociado.

Los resultados obtenidos en esta tesis, tanto en sus versiones preliminares como en su versión definitiva, han sido presentados por Eva García Llorente en los siguientes congresos y foros de difusión científica:

- Jornadas de trabajo Ideales monomiales, cálculo y aplicaciones, celebrado en Logroño, España, en 2010.
- Ciclo de seminarios públicos del CESGA, celebrado en Santiago de Compostela, España, en 2010.
- XII Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones EACA, celebrado en Santiago de Compostela, España, en 2010.
- Toric Geometry Seminar, celebrado en Cáceres, España, en 2010.
- EACA's First International School on Computer Algebra and Applications, celebrada en Tenerife, España, en 2011.
- Effective Methods in Algebraic Geometry (MEGA 2011), celebrado en Estocolmo, Suecia, en 2011.
- International School on Computer Algebra COCOA 2011, celebrado en Passau, Alemania, en 2011.
- I Encuentro de Jóvenes Investigadores en Matemáticas de la ULL, celebrado en Tenerife, España, en 2011.
- XIII Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones EACA, celebrado en Alcalá de Henares, España, en 2012.
- 37th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC 2012), celebrado en Grenoble, Francia, en 2012.
- Syzygies in Berlin, celebrado en Berlín, Alemania, en 2013.
- Effective Methods in Algebraic Geometry (MEGA 2013), celebrado en Frankfurt, Alemania, en 2013.

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por:	Fecha:
EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

- Jornadas de Álgebra, Geometría Algebraica y Singularidades, celebrado en Tenerife, España, en 2013.
- EACA's Second International School on Computer Algebra and Applications, celebrada en Valladolid, España, en 2013.
- Seminaire de l'équipe Algèbre et Combinatorire de la Université de Montpellier, Francia, en 2013.
- XIV Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones EACA, celebrado en Barcelona, España, en 2014.
- Effective Methods in Algebraic Geometry (MEGA 2015), celebrado en Trento, Italia, en 2015.
- Congreso de jóvenes investigadores de la RSME, celebrado en Murcia, España, en 2015.
- Quinto punto de encuentro de jóvenes investigadores de matemáticas, celebrado en Tenerife, España, en 2015.
- Encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones EACA, celebrado en Logroño, España, en 2016.
- Effective Methods in Algebraic Geometry (MEGA 2017), celebrado en Niza, Francia, en 2017.
- 42nd International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC 2017), celebrado en Kaiserslautern, Alemania, en 2017.

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por:	Fecha:
EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Capítulo 1

La propiedad Cohen-Macaulay en ideales ω -homogéneos.

"Life is really worth living in a Cohen-Macaulay ring."
Hochster [40] (1978)

Este primer capítulo está dividido en cuatro secciones y está dedicado a estudiar la propiedad Cohen-Macaulay de los anillos de la forma R/I , donde $R = K[x_1, \dots, x_n]$ es un anillo de polinomios sobre un cuerpo infinito K e I un ideal graduado respecto a un vector de pesos enteros positivos.

En la primera sección introducimos las definiciones y resultados que consideramos básicos para la consecución del resto del capítulo. Comenzamos definiendo el concepto de anillo Cohen-Macaulay y recordando algunos resultados relativos a estos anillos. Posteriormente introducimos el principal objeto de estudio de esta tesis: los ideales homogéneos I respecto a un vector de pesos positivos $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in (\mathbb{Z}^+)^n$, que llamaremos ideales ω -homogéneos. Introducimos asimismo la hipótesis adicional bajo la que trabajaremos: el anillo de polinomios $A := K[x_{n-d+1}, \dots, x_n]$ es una normalización de Noether de R/I , donde $d = \dim(R/I)$. Finalmente, como familias interesantes de ideales homogéneos respecto a un vector de pesos, consideramos los ideales tóricos simpliciales y, su subfamilia notable, de las curvas monomiales proyectivas y recordamos algunas de sus propiedades básicas.

En la segunda sección consideramos R -módulos R/I con I un ideal ω -homogéneo y $\omega \in (\mathbb{Z}^+)^n$. Cuando A es una normalización de Noether de R/I describimos en la Proposición 1.2.2 un sistema de generadores de R/I como A -módulo. Bajo las mismas hipótesis, aportamos en el Teorema 1.2.3 un criterio para determinar si R/I es Cohen-Macaulay. La herramienta para obtener estos resultados son las bases de Gröbner. De hecho, el Teorema 1.2.3 afirma que R/I es Cohen-Macaulay si y solo si las variables x_{n-d+1}, \dots, x_n no dividen a ningún generador minimal monomial del ideal inicial de I respecto de un determinado orden monomial; a saber, el orden lexicográfico inverso ω -graduado. Este resultado supone una generalización natural de [14, Proposition 2.1], válido cuando I es homogé-

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

neo en el sentido usual. Como aplicación del Teorema 1.2.3 obtenemos el Teorema 1.2.6, que determina que las curvas monomiales proyectivas asociadas a sucesiones aritméticas generalizadas que son aritméticamente Cohen-Macaulay son exactamente las asociadas a sucesiones aritméticas. Este resultado se obtiene a su vez como consecuencia de los Teoremas 1.2.7 y 1.2.11. En el primero proporcionamos una familia infinita de curvas monomiales proyectivas que no son aritméticamente Cohen-Macaulay y, como corolario directo, se tiene que si la sucesión aritmética generalizada no es aritmética, entonces la curva correspondiente no es aritméticamente Cohen-Macaulay. En el segundo describimos una base de Gröbner, que a su vez es un sistema minimal de generadores, del ideal de definición de una curva monomial proyectiva asociada a una sucesión aritmética. De este se deduce que estas curvas son siempre aritméticamente Cohen-Macaulay.

En la tercera sección consideramos los anillos de semigrupo simpliciales. En este contexto sacamos provecho de la estructura de semigrupo subyacente y del hecho de que A sea una normalización de Noether del anillo. Concretamente, en la Proposición 1.3.1 describimos un sistema minimal de generadores del álgebra R/I como A -módulo en términos del semigrupo. Como consecuencia de la Proposición 1.3.1 y del hecho de que R/I es Cohen-Macaulay si y solo si R/I es un A -módulo libre (ver Proposición 1.1.10), obtenemos en la Proposición 1.3.3 una prueba alternativa de un conocido criterio para determinar si R/I es Cohen-Macaulay en términos de su semigrupo asociado. Como aplicación de este resultado, determinamos en el Teorema 1.3.6 las curvas monomiales proyectivas definidas por una sucesión casi aritmética de diferencia 1 que son aritméticamente Cohen-Macaulay.

Por último, en la cuarta sección estudiamos la Macaulayficación de anillos de semigrupo simpliciales. El principal resultado de esta sección es el Teorema 1.4.3, donde se describe cómo obtener la Macaulayficación de cualquiera de estos anillos. Como aplicación, en la Proposición 1.4.5 se obtiene la Macaulayficación del anillo de semigrupo asociado a toda curva monomial lisa y, en consecuencia, en el Corolario 1.4.6 se llega a que la Macaulayficación de una curva monomial lisa es la curva racional normal del mismo grado.

1.1. Generalidades

Comenzamos este capítulo con algunas definiciones básicas (ver, e.g., [3], [20] o [27] para un tratamiento más profundo de los conceptos aquí expuestos). Sea T un anillo Noetheriano y conmutativo y $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(T)$, es decir, \mathfrak{p} es un ideal primo de T ; la *altura* de \mathfrak{p} , denotada $\text{ht}(\mathfrak{p})$, es el supremo de las longitudes de cadenas estrictamente decrecientes de ideales primos $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{p}_{t-1} \supset \mathfrak{p}_t$. Como T es Noetheriano, entonces $\text{ht}(\mathfrak{p}) < \infty$ para todo $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(T)$.

Definición 1.1.1. *La dimensión (de Krull) de un anillo conmutativo T , denotada $\dim(T)$, es el supremo de las alturas de sus ideales primos, es decir,*

$$\dim(T) := \sup\{\text{ht}(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in \text{Spec}(T)\}.$$

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Análogamente, dado M un T -módulo, se define

$$\dim(M) := \dim(T/\text{Ann}(M))$$

donde $\text{Ann}(M) := \{a \in T \mid aM = 0\}$ es el ideal anulador del módulo M .

Definición 1.1.2. Sea T un anillo graduado con un único ideal maximal homogéneo \mathfrak{m} . La profundidad de un T -módulo M , denotada $\text{depth}_T(M)$, es la longitud de cualquier sucesión regular maximal sobre M contenida en el ideal maximal \mathfrak{m} . Es decir, es el mayor entero r tal que existe una sucesión $f_1, \dots, f_r \in \mathfrak{m}$ con f_i no divisor de cero de $M/(f_1, \dots, f_{i-1})M$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$.

En general, para todo T -módulo M se satisface que $\text{depth}_T(M) \leq \dim(M)$ (ver, e.g., [20, Proposition 1.2.12]). Cuando esta desigualdad es, en efecto, una igualdad se dice que M es un T -módulo Cohen-Macaulay.

Definición 1.1.3. Sea T un anillo graduado con un único ideal maximal homogéneo. Un T -módulo finito $M \neq 0$ se dice que es Cohen-Macaulay si $\text{depth}_T(M) = \dim(M)$. Si T es un T -módulo Cohen-Macaulay, decimos que es un anillo Cohen-Macaulay. Además, para I un ideal graduado de T , decimos que I es Cohen-Macaulay si T/I es un anillo Cohen-Macaulay.

Definición 1.1.4. Sea T un anillo y M un T -módulo. La dimensión proyectiva de M , denotada $\text{pd}_T(M)$, es el mínimo de las longitudes de las resoluciones proyectivas de M . Si M no admite una resolución proyectiva finita, se considera que la dimensión proyectiva de M es infinita.

La fórmula de Auslander-Buchsbaum, que mostramos en el siguiente resultado, nos da una relación entre la dimensión proyectiva y la profundidad de un módulo finito.

Teorema 1.1.5. [20, Theorem 1.3.3] Sea T un anillo graduado con un único ideal maximal homogéneo y $M \neq 0$ un T -módulo graduado finitamente generado. Si $\text{pd}_T(M) < \infty$,

$$\text{pd}_T(M) + \text{depth}_T(M) = \text{depth}_T(T)$$

Sean K un cuerpo infinito y $R := K[x_1, \dots, x_n]$ un anillo de polinomios en n variables. Dado un vector de pesos $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in (\mathbb{Z}^+)^n$, consideramos en R la estructura de álgebra graduada inducida por la graduación $\deg_\omega(x_i) = \omega_i$. Entonces $R = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R_i$, donde R_i es el K -espacio vectorial generado por todos los polinomios ω -homogéneos de grado i . En este contexto, el Teorema de las cigigias de Hilbert nos garantiza que todo R -módulo graduado finitamente generado tiene dimensión proyectiva finita (y a lo sumo n). Como además la profundidad de R como R -módulo es igual a su dimensión y coincide con el número de variables, la fórmula de Auslander-Buchsbaum para R -módulos queda

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
 Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

como sigue: sea M un R -módulo graduado finitamente generado, entonces $\text{pd}_R(M) + \text{depth}_R(M) = n$.

Sea $I \subset R$ un ideal ω -homogéneo, en este capítulo estudiaremos la propiedad Cohen-Macaulay para R/I . Denotamos por d a la dimensión de Krull de R/I . Como ya mencionamos, la profundidad de un módulo está acotada superiormente por la dimensión del mismo. Es por ello que, a partir del Teorema 1.1.5, se tiene que

$$\text{pd}_R(R/I) = \dim(R) - \text{depth}_R(R/I) \geq \dim(R) - \dim(R/I) = n - d.$$

Observamos entonces que si R/I es Cohen-Macaulay, su dimensión proyectiva es exactamente igual a $n - d$.

Sea:

$$\mathcal{F} : 0 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{\beta_p} R(-e_{pj}) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{\beta_1} R(-e_{1j}) \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0 \quad (1.1)$$

una resolución libre minimal graduada de R/I , con $\beta_i, e_{ij} \in \mathbb{Z}^+$ para todo $i \in \{1, \dots, p\}$ y $j \in \{1, \dots, \beta_i\}$. Recordamos que $R(-a) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} R(-a)_i$, donde $a \in \mathbb{N}$, es el R -módulo graduado obtenido por un desplazamiento (*shift* en inglés) en la graduación de R ; es decir, donde la i -ésima componente graduada de $R(-a)$ es $R(-a)_i = R_{i+a}$.

Nota 1.1.6. En virtud del Teorema de Quillen-Suslin (ver [56] y [63]), todo módulo proyectivo finitamente generado sobre el anillo de polinomios es libre. Por tanto, cualquier resolución proyectiva finita de R/I es a la vez resolución libre; y como consecuencia tenemos que la dimensión proyectiva de R/I es p , donde p es el número de pasos de la resolución (1.1).

Los anillos Cohen-Macaulay R/I son, pues, aquellos en los que la resolución libre minimal graduada de R/I tiene $p = n - d$ pasos, que es el menor número de pasos posible. Debido a las buenas propiedades de los anillos Cohen-Macaulay, como la que acabamos de mencionar, se han dedicado muchos trabajos al estudio de familias de anillos Cohen-Macaulay y la obtención de criterios efectivos para determinar si un anillo es Cohen-Macaulay. Este es también el objetivo de este primer capítulo.

Definición 1.1.7. La función de Hilbert ω -graduada de R/I es $HF_{R/I} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$HF_{R/I}(s) := \dim_K(R_s/(I \cap R_s)), \text{ para todo } s \in \mathbb{N},$$

y la serie de Hilbert ω -graduada de R/I es

$$\mathcal{H}_{R/I}(t) := \sum_{s \in \mathbb{N}} HF_{R/I}(s) t^s \in \mathbb{Z}[[t]].$$

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Sea $F_i := \bigoplus_{j=1}^{\beta_i} R(-e_{ij})$ el i -ésimo módulo libre de la resolución (1.1) para todo $i \in \{1, \dots, p\}$. Dado que toda resolución minimal graduada es una sucesión exacta graduada, se tiene que

$$\mathcal{H}_{R/I}(t) = \mathcal{H}_R(t) + \sum_{i=1}^p (-1)^i \mathcal{H}_{F_i}(t).$$

Además, es fácil comprobar que la serie de Hilbert de $R(-a)$ viene dada por $\mathcal{H}_{R(-a)}(t) = t^a / \prod_{i=1}^n (1 - t^{\omega_i})$ para todo $a \in \mathbb{N}$ y, por tanto,

$$\mathcal{H}_{F_i}(t) = \frac{\sum_{j=1}^{\beta_i} t^{e_{ij}}}{\prod_{i=1}^n (1 - t^{\omega_i})}.$$

Juntando estas observaciones se obtiene la siguiente fórmula relaciona la serie de Hilbert ω -graduada de R/I y la resolución libre minimal graduada de R/I .

Proposición 1.1.8. *Sea $I \subset R$ un ideal ω -homogéneo y sea \mathcal{F} la resolución minimal graduada R/I dada en (1.1). La serie de Hilbert ω -graduada de R/I viene dada por:*

$$\mathcal{H}_{R/I}(t) = \frac{1 + \sum_{i=1}^p (-1)^i \sum_{j=1}^{\beta_i} t^{e_{ij}}}{\prod_{i=1}^n (1 - t^{\omega_i})}.$$

Así, conocida la resolución libre minimal graduada de R/I , somos capaces de hallar la serie de Hilbert del mismo. En la Proposición 1.2.4 de este capítulo vamos a calcular la serie de Hilbert ω -graduada cuando el anillo cociente R/I es Cohen-Macaulay sin necesidad de calcular la resolución libre minimal graduada del mismo; en el Capítulo 3 (Proposición 3.1.1) veremos que este resultado es un caso particular de una situación más general.

A lo largo de esta memoria vamos a trabajar bajo la hipótesis:

$$A := K[x_{n-d+1}, \dots, x_n] \text{ es una normalización de Noether de } R/I.$$

Definición 1.1.9. *Sea $m \in \{1, \dots, n\}$, el anillo $A = K[x_{n-m+1}, \dots, x_n]$ es una normalización de Noether de R/I si la inclusión $A \hookrightarrow R/I$ es una extensión de anillos entera. En otras palabras, $I \cap A = (0)$ y $x_i + I \in R/I$ es un elemento entero sobre A para $i \in \{1, \dots, n - m\}$. En virtud del Teorema del ascenso (ver, e.g., [3, Theorem 5.11]), si A es una normalización de Noether de R/I , entonces $\dim(A) = m = d = \dim(R/I)$.*

Notar que, por el Lema de normalización de Noether (ver, e.g., [20, Theorem 1.5.17]) estar en las condiciones que hemos impuesto no implica restricciones. En efecto, el Lema de normalización de Noether asegura que existen $h_1, \dots, h_d \in R$ tales que $K[h_1, \dots, h_d] \hookrightarrow R/I$ es una extensión entera de anillos. Al ser K infinito, los polinomios h_i se pueden tomar formas lineales para todo $i \in \{1, \dots, d\}$. Es más, para cualesquiera h_1, \dots, h_d formas lineales genéricas, se tiene que $K[h_1, \dots, h_d] \hookrightarrow R/I$ es una extensión entera. Por tanto, bastaría con efectuar un cambio de variables lineal para conseguir que A sea una normalización de Noether de R/I . Vale la pena mencionar que si bien añadir esta hipótesis no

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

supone restricción teórica alguna, estos cambios de variables no son muy recomendables en la práctica ya que destruyen la posible dispersión (*sparsity* en inglés) de los polinomios involucrados en el cálculo.

El siguiente resultado relaciona la dimensión proyectiva de R/I como A -módulo y como R -módulo. Como consecuencia directa de esta relación obtendremos que R/I es Cohen-Macaulay si y solo si R/I es un A -módulo libre; utilizaremos este hecho en repetidas ocasiones a lo largo de esta memoria.

Proposición 1.1.10. *Sea I un ideal ω -homogéneo y $A = K[x_{n-d+1}, \dots, x_n]$ una normalización de Noether de R/I . Entonces*

$$\text{pd}_R(R/I) = n - d + \text{pd}_A(R/I).$$

En particular, el anillo R/I es Cohen-Macaulay $\iff \text{pd}_R(R/I) = n - d \iff R/I$ es un A -módulo libre.

Demostración. Por un lado, puesto que R/I es un R -módulo finitamente generado podemos aplicar el Teorema 1.1.5 y tenemos que

$$\text{pd}_R(R/I) + \text{depth}_R(R/I) = \dim(R) = n. \quad (1.2)$$

De la misma manera, ya que R/I es también un A -módulo finitamente generado,

$$\text{pd}_A(R/I) + \text{depth}_A(R/I) = \dim(A) = d. \quad (1.3)$$

Además, dado que los anillos A , R/I y R tienen un único ideal maximal ω -homogéneo y R/I es A -módulo finitamente generado, se tiene que $\text{depth}_A(R/I) = \text{depth}_R(R/I) = \text{depth}_{R/I}(R/I)$ (ver, por ejemplo, [20, Exercise 1.2.26(b)]). De (1.2) y (1.3) deducimos entonces que $\text{pd}_R(R/I) = n - d + \text{pd}_A(R/I)$. Luego, R/I es un anillo Cohen-Macaulay si y solo si $\text{pd}_R(R/I) = n - d$, y esto a su vez es equivalente a que $\text{pd}_A(R/I) = 0$ o, lo que es lo mismo, R/I es un A -módulo libre. \square

Los ideales tóricos son un caso particular de ideales ω -homogéneos. En este trabajo trataremos en diversas ocasiones con ellos. Damos por ello una breve introducción a estos ideales (ver, e.g., [25], [47], [62] o [66] para un tratamiento más profundo de los conceptos aquí expuestos).

Sea $I \subseteq R$ un ideal, decimos que I es un ideal tórico si existe un entero $m \geq 1$ y un conjunto $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^m$ con $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{im}) \in \mathbb{N}^m$ tal que $I = I_{\mathcal{A}}$; donde $I_{\mathcal{A}}$ denota el núcleo del homomorfismo de K -álgebras

$$\begin{aligned} \varphi: R &\longrightarrow K[t_1, \dots, t_m] \\ x_i &\longmapsto t^{a_i} = t_1^{a_{i1}} \dots t_m^{a_{im}}. \end{aligned}$$

Por [62, Lemma 4.2], se tiene que $d = \dim(R/I) = \dim(\mathbb{Q}\mathcal{A}) \leq m$. Además es fácil comprobar que si $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^m$ con $m > d$, existe $\mathcal{A}' \subset \mathbb{N}^d$ tal que $I_{\mathcal{A}} = I_{\mathcal{A}'}$; es por ello que a partir de ahora supondremos sin pérdida de generalidad que $m = d$.

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Si denotamos $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}^d$ al semigrupo generado por a_1, \dots, a_n , es decir,

$$\mathcal{S} := \langle a_1, \dots, a_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i \mid \alpha_i \in \mathbb{N} \right\},$$

la imagen de φ es el anillo de semigrupo $K[\mathcal{S}] := K[t^s \mid s \in \mathcal{S}]$. Por el primer Teorema de isomorfía de anillos se tiene que $K[\mathcal{S}] \simeq_{\bar{\varphi}} R/I$, donde $\bar{\varphi} : R/I \rightarrow K[\mathcal{S}]$ es el isomorfismo dado por $\bar{\varphi}(x_i + I) := t^{a_i}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. De [62, Corollary 4.3], se tiene que

$$I_{\mathcal{A}} = \left(\left\{ x^\alpha - x^\beta \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = \sum_{i=1}^n \beta_i a_i \right\} \right). \quad (1.4)$$

En particular, $I_{\mathcal{A}}$ es multigradado con respecto a la graduación dada por \mathcal{S} , es decir, la graduación inducida por $\deg_{\mathcal{S}}(x_i) = a_i \in \mathbb{N}^d$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Esta \mathcal{S} -graduación nos permite definir para todo $s \in \mathbb{N}^d$, el espacio vectorial R_s engendrado por los polinomios \mathcal{S} -homogéneos de \mathcal{S} -grado igual a s , la función de Hilbert multigraduada de $K[\mathcal{S}]$ como $HF_{K[\mathcal{S}]} : \mathbb{N}^d \rightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$HF_{K[\mathcal{S}]}(s) := \dim_K(R_s / (I_{\mathcal{A}} \cap R_s))$$

y la serie de Hilbert multigraduada de $K[\mathcal{S}]$ como

$$\mathcal{H}_{K[\mathcal{S}]}(t) := \sum_{s \in \mathbb{N}^d} HF_{K[\mathcal{S}]}(s) t^s \in \mathbb{Z}[[t_1, \dots, t_d]].$$

Dado que $HF_{K[\mathcal{S}]}(s) \in \{0, 1\}$ y que $HF_{K[\mathcal{S}]}(s) = 1$ si y solo si $s \in \mathcal{S}$, la serie de Hilbert multigraduada de $K[\mathcal{S}]$ viene dada por:

$$\mathcal{H}_{K[\mathcal{S}]}(t) = \sum_{b \in \mathcal{S}} t^b \in \mathbb{Z}[[t_1, \dots, t_d]]. \quad (1.5)$$

Además, cabe destacar que $I_{\mathcal{A}}$ también tiene una estructura de ideal ω -homogéneo con $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{N}^n$ siendo $\omega_i = \sum_{j=1}^d a_{ij}$. A continuación vemos un resultado que caracteriza cuándo un ideal tórico $I_{\mathcal{A}}$ es homogéneo (con la graduación usual, i.e., cuando $\deg(x_i) = 1$ para todo i).

Lema 1.1.11. [62, Lemma 4.14] $I_{\mathcal{A}}$ es homogéneo si y sólo si existe un vector $v \in \mathbb{Q}^d$ tal que $a_i \cdot v = 1$ para $i \in \{1, \dots, n\}$.

Por otro lado, dado un conjunto $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^d$, el cono generado por \mathcal{A} se define como

$$\text{Cone}(\mathcal{A}) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\} \subset \mathbb{R}^d.$$

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

La *dimensión del cono* de \mathcal{A} es por definición $\dim(\mathbb{Q}\mathcal{A})$ que, como ya indicamos, suponemos sin pérdida de generalidad que es d . Es evidente que todo sistema generador del cono de \mathcal{A} tiene al menos d generadores. Decimos que el cono de \mathcal{A} es *simplicial* si está generado por d elementos, que supondremos que son a_{n-d+1}, \dots, a_n ; esto es, el cono de \mathcal{A} es simplicial si $\text{Cone}(\mathcal{A}) = \text{Cone}(\{a_{n-d+1}, \dots, a_n\})$. Se observa que si $d \in \{1, 2\}$, entonces el cono de \mathcal{A} siempre es simplicial.

Recordamos que las hipótesis bajo las que trabajaremos son: I ideal tórico y $A := K[x_{n-d+1}, \dots, x_n]$ normalización de Noether de R/I . Un ideal que satisface estas hipótesis se denomina *ideal tórico simplicial*. En el siguiente resultado damos una caracterización de estas hipótesis en términos del cono que, a su vez, justifica su denominación como ideal tórico simplicial.

Proposición 1.1.12. *Son equivalentes:*

- (a) I es un ideal tórico simplicial.
- (b) Existe $\mathcal{A}'' = \{a''_1, \dots, a''_n\} \subset \mathbb{N}^d$ tal que $I = I_{\mathcal{A}''}$ y $\text{Cone}(\mathcal{A}'')$ es simplicial.
- (c) Existe $\mathcal{A}' = \{a'_1, \dots, a'_n\} \subset \mathbb{N}^d$ tal que $I = I_{\mathcal{A}'}$ y $a'_i = \omega_i e_{n-d+i}$ para todo $i \in \{1, \dots, d\}$, donde $\omega_i \in \mathbb{Z}^+$ y $\{e_1, \dots, e_d\}$ base canónica de \mathbb{N}^d .

Demostración. ((a) \implies (b)) Sea I un ideal tórico, entonces existe $\mathcal{A} := \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^d$ tal que $I = I_{\mathcal{A}}$. Probaremos que $\text{Cone}(\mathcal{A}) = \text{Cone}(\{a_{n-d+1}, \dots, a_n\})$. Por hipótesis tenemos que $A := K[x_{n-d+1}, \dots, x_n]$ es una normalización de Noether de R/I , o lo que es lo mismo, A es una extensión entera de R/I . En particular, $x_i + I \in R/I$ es entero sobre A para cada $i \in \{1, \dots, n-d\}$. Por tanto, existe $p_i(t) \in A[t]$ mónico tal que $p_i(x_i) \in I$. Luego $p_i(x_i) = x_i^{r_i} + \sum_{j=0}^{r_i-1} h_j x_i^j \in I_{\mathcal{A}} \cap K[x_i, x_{n-d+1}, \dots, x_n]$ con $h_j \in A$. Además, $I \cap K[x_i, x_{n-d+1}, \dots, x_n]$ es un ideal tórico asociado al conjunto $\{a_i, a_{n-d+1}, \dots, a_n\}$ por [62, Proposition 4.13.(a)]. Luego $I \cap K[x_i, x_{n-d+1}, \dots, x_n]$ es binomial y primo, y por tanto debe existir un binomio $q = x_i^{s_i} - \prod_{j=n-d+1}^n x_j^{b_j} \in I \cap K[x_i, x_{n-d+1}, \dots, x_n]$ con $b_j \in \mathbb{N}$ para todo $j \in \{n-d+1, \dots, n\}$ y $0 < s_i \leq r_i$. Entonces, como $q \in I_{\mathcal{A}}$, tenemos que $s_i a_i = \sum_{j=n-d+1}^n b_j a_j$. Por tanto, $a_i = \sum_{j=n-d+1}^n (b_j/s_i) a_j \in \text{Cone}(\{a_{n-d+1}, \dots, a_n\})$.

((b) \implies (c)) Sea $\mathcal{A}'' = \{a''_1, \dots, a''_n\} \subset \mathbb{N}^d$ tal que $I = I_{\mathcal{A}''}$ y

$$\text{Cone}(\mathcal{A}'') = \text{Cone}(\{a''_{n-d+1}, \dots, a''_n\}).$$

Tomamos M la matriz $d \times n$ cuya i -ésima columna es a_i para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Como $\dim(R/I) = d = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\mathcal{A})$ por [62, Lemma 4.2] y $\mathbb{Q}\{a''_{n-d+1}, \dots, a''_n\} = \mathbb{Q}\mathcal{A}''$, se tiene que a_{n-d+1}, \dots, a_n son linealmente independientes y así las d últimas columnas de M también lo son. Sea C la matriz $d \times d$ formada por las d últimas columnas de M . Sabemos que el determinante de C , $\det(C)$, es no nulo y suponemos sin pérdida de generalidad que $\det(C) > 0$. Denotamos por $(C^*)^t$ la matriz traspuesta de la adjunta de C . Entonces $(C^*)^t$ tiene coeficientes enteros y $(C^*)^t C = \det(C) I_d$, donde I_d es la matriz identidad de orden d . Si tomamos ahora $\mathcal{A}' = \{a'_1, \dots, a'_n\}$ donde $a'_i = (C^*)^t a''_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$,

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

entonces $a'_j = \det(C) e_{n-d+j}$ para todo $j \in \{n-d+1, \dots, n\}$ y es fácil comprobar usando (1.4) que $I_{\mathcal{A}'} = I_{\mathcal{A}''} = I$ pues $(C^*)^t$ es una matriz inversible.

Para tener el resultado falta probar que $a'_i \in \mathbb{N}^d$. Tenemos que, por definición, $a'_i \in \mathbb{Z}^d$. Por hipótesis $a''_i \in \text{Cone}(\{a''_{n-d+1}, \dots, a''_n\})$, entonces $a'_i \in \text{Cone}(\{a'_{n-d+1}, \dots, a'_n\}) = \text{Cone}(\{\det(C) e_1, \dots, \det(C) e_d\}) = (\mathbb{R}_{\geq 0})^d$. Concluimos entonces que $a_i \in \mathbb{Z}^d \cap (\mathbb{R}_{\geq 0})^d = \mathbb{N}^d$.

((c) \implies (a)) Sea $\mathcal{A}' = \{a'_1, \dots, a'_n\} \subset \mathbb{N}^d$ tal que $I = I_{\mathcal{A}'}$ y $a'_i = \omega_i e_{n-d-i}$ para todo $i \in \{n-d+1, \dots, n\}$, donde $\omega_i \in \mathbb{Z}^+$. Así, existe $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ tal que $a'_i = \sum_{j=n-d+1}^n \alpha_{ij} a'_j$. Por tanto existen $r_i, \beta_{ij} \in \mathbb{N}$ para todo $i \in \{1, \dots, n-d\}$ y $j \in \{n-d+1, \dots, n\}$ tales que

$$r_i a'_i = \sum_{j=n-d+1}^n \beta_{ij} a'_j.$$

Luego, como $I = I_{\mathcal{A}'}$, tenemos que $x_i^{r_i} - \prod_{j=n-d+1}^n x_j^{\beta_{ij}} \in I$ y se sigue el resultado. \square

Una subfamilia notable de ideales tóricos simpliciales es la de los ideales de definición de curvas monomiales proyectivas. De hecho, las curvas monomiales proyectivas, sus ideales de definición y sus anillos coordenados son objetos centrales de esta tesis que pasamos a definir.

Sea $m_1 < \dots < m_n$ una sucesión de números enteros positivos, la curva monomial proyectiva $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_K^n$ asociada a esta sucesión viene dada paramétricamente por las ecuaciones:

$$x_1 = s^{m_1} t^{m_n - m_1}, \dots, x_{n-1} = s^{m_{n-1}} t^{m_n - m_{n-1}}, x_n = s^{m_n}, x_{n+1} = t^{m_n}.$$

Denotamos $\mathcal{A} := \{a_1, \dots, a_{n+1}\} \in \mathbb{N}^2$ donde $a_i := (m_i, m_n - m_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y $a_{n+1} := (0, m_n)$. Al ser K infinito, el ideal tórico $I_{\mathcal{A}} \subset K[x_1, \dots, x_{n+1}]$ coincide con el ideal de anulación $I(\mathcal{C})$ de \mathcal{C} (ver, e.g. [66, Corollary 8.4.13]). Cabe destacar que:

- $I_{\mathcal{A}} = I(\mathcal{C})$ es homogéneo (basta con tomar $v = (1/m_n, 1/m_n)$ en el Lema 1.1.11),
- $K[x_n, x_{n+1}]$ es una normalización de Noether del anillo coordenado de la curva $K[\mathcal{C}] := K[x_1, \dots, x_{n+1}]/I(\mathcal{C})$ (ver Proposición 1.1.12), y
- $\dim(K[\mathcal{C}]) = 2$.

De hecho, se tiene que un ideal $I \subset K[x_1, \dots, x_{n+1}]$ es el ideal de definición de una curva monomial proyectiva $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_K^n$ si y solo si I es un ideal tórico simplicial homogéneo tal que $\dim(K[x_1, \dots, x_{n+1}]/I) = 2$.

A lo largo de esta tesis estudiaremos las curvas monomiales proyectivas asociadas a varios tipos de sucesiones de enteros positivos $m_1 < \dots < m_n$ particulares.

En la cuarta sección de este capítulo estudiamos la Macaulayficación de un anillo de semigrupo simplicial. En pocas palabras, la Macaulayficación de un anillo es el ‘menor’

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

anillo Cohen-Macaulay que lo contiene. En [43], Kawasaki aporta ciertas condiciones suficientes para que un anillo admita una Macaulayficación. Para todo anillo de semigrupo $K[\mathcal{S}]$ (no necesariamente simplicial), en [35] y [65] se demuestra la existencia de un semigrupo \mathcal{S}' tal que $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}' \subset \bar{\mathcal{S}}$, donde $\bar{\mathcal{S}}$ es la normalización del semigrupo \mathcal{S} ,

$$0 \longrightarrow K[\mathcal{S}] \longrightarrow K[\mathcal{S}'] \longrightarrow K[\mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}] \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta y $\dim(K[\mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}]) \leq \dim(K[\mathcal{S}]) - 2$. Este anillo $K[\mathcal{S}']$ satisface la condición S_2 de Serre, y se dice que es la S_2 -ficación de $K[\mathcal{S}]$. Cuando esta S_2 -ficación de $K[\mathcal{S}]$ es Cohen-Macaulay, se dice que $K[\mathcal{S}']$ es la *Macaulayficación* de $K[\mathcal{S}]$. Cuando \mathcal{S} es un semigrupo simplicial, se tiene que la S_2 -ficación es siempre Cohen-Macaulay por [52, Theorem 5] y por tanto $K[\mathcal{S}']$ es siempre la Macaulayficación de $K[\mathcal{S}]$. Es por ello que se define la Macaulayficación de un anillo de semigrupo simplicial como sigue:

Definición 1.1.13. Sea $K[\mathcal{S}]$ un anillo de semigrupo simplicial de dimensión de Krull d , el anillo de semigrupo $K[\mathcal{S}']$ es una Macaulayficación de $K[\mathcal{S}]$ si:

1. $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$,
2. $K[\mathcal{S}']$ es Cohen-Macaulay, y
3. la dimensión de Krull de $K[\mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}]$ es $\leq d - 2$.

1.2. Ideales ω -homogéneos Cohen-Macaulay

Sea $I \subset R$ un ideal ω -homogéneo con $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in (\mathbb{Z}^+)^n$, es decir, I es homogéneo respecto de la graduación que induce ω cuando consideramos $\deg_\omega(x_i) = \omega_i$. Denotamos por d a la dimensión de Krull del anillo R/I y suponemos que $A := K[x_{n-d+1}, \dots, x_n]$ es una normalización de Noether de R/I .

Una primera observación es que si A es una normalización de Noether de R/I , entonces R/I es un A -módulo finitamente generado. Esta sección comienza con un resultado que proporciona un sistema minimal de generadores ω -homogéneos del anillo R/I como A -módulo. Recordamos primeramente el orden monomial lexicográfico inverso ω -graduado ya que vamos a estudiar propiedades de las bases de Gröbner de ideales respecto de este orden monomial (ver [1] o [24] para una explicación detallada de la teoría de bases de Gröbner).

El orden lexicográfico inverso ω -graduado $>_\omega$ se define como: $x^\alpha >_\omega x^\beta$ si y sólo si

- $\deg_\omega(x^\alpha) > \deg_\omega(x^\beta)$, o
- $\deg_\omega(x^\alpha) = \deg_\omega(x^\beta)$ y la última entrada no nula del vector $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$ es negativa.

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Dado un polinomio $f \in R$, el término inicial de f , denotado $\text{in}(f)$, es el mayor término de f respecto a $>_\omega$. Además, el ideal inicial de un ideal J , denotado $\text{in}(J)$, es el ideal generado por los términos iniciales de los polinomios que pertenecen a J , es decir,

$$\text{in}(J) := (\{\text{in}(f) \mid f \in J\}).$$

En adelante, salvo que se diga lo contrario, tanto $\text{in}(f)$ como $\text{in}(J)$ harán referencia al término inicial y al ideal inicial respecto de $>_\omega$.

En esta sección vamos a explotar las buenas propiedades del orden $>_\omega$ para caracterizar la propiedad de ser Cohen-Macaulay en ideales ω -homogéneos. Una de estas buenas propiedades es la mostrada en el siguiente lema técnico, que nos será útil para el resto de la sección y que es una generalización natural de [7, Lemma 2.2(a)]

Lema 1.2.1. *Sea I un ideal ω -homogéneo y sea $m \in \{1, \dots, n\}$. Entonces,*

$$\text{in}(I + (x_m, \dots, x_n)) = \text{in}(I) + (x_m, \dots, x_n)$$

Demostración. Sea $G_1 = \{f_1, \dots, f_k\}$ la base de Gröbner reducida de I respecto de $>_\omega$. Observamos que como I es ω -homogéneo, f_i es ω -homogéneo para todo $i \in \{1, \dots, k\}$. Para obtener el resultado basta probar que $G_2 = \{f_1, \dots, f_k, x_m, \dots, x_n\}$ es base de Gröbner de $I + (x_m, \dots, x_n)$ respecto de $>_\omega$. Como G_1 es base de Gröbner de I , $\text{in}(I) = (\text{in}(f_1), \dots, \text{in}(f_k))$. Llegamos de este modo a que

$$\text{in}(I) + (x_m, \dots, x_n) = (\text{in}(f_1), \dots, \text{in}(f_k), x_m, \dots, x_n).$$

Veamos entonces G_2 es base de Gröbner de $I + (x_m, \dots, x_n)$. Es claro que G_2 es un sistema de generadores del ideal. Para probar que G_2 es base de Gröbner vamos a comprobar que los S -polinomios entre elementos de G_2 se reducen a 0 módulo G_2 (ver [24, Theorem 2.3]). Observamos primero que $S(f_i, f_j) \rightarrow_{G_2} 0$, para $i, j \in \{1, \dots, k\}$ e $i \neq j$; ya que G_1 base de Gröbner y $f_i, f_j \in G_1 \subset G_2$. Además, para todo $i, j \in \{m, \dots, n\}$ con $i \neq j$, $S(x_i, x_j) = 0$. Ahora, si $x_j \nmid \text{in}(f_i)$ para ciertos $i \in \{1, \dots, k\}$ y $j \in \{m, \dots, n\}$, se tiene que $S(f_i, x_j) \rightarrow_{G_2} 0$ puesto que $\text{gcd}\{\text{in}(f_i), x_j\} = 1$. Nos queda únicamente estudiar $S(f_i, x_j)$ cuando $x_j \mid \text{in}(f_i)$ con $i \in \{1, \dots, k\}$ y $j \in \{m, \dots, n\}$. Tenemos que

$$S(f_i, x_j) = f_i - (\text{in}(f_i)/x_j)x_j = f_i - \text{in}(f_i).$$

Como G_1 es base de Gröbner reducida y x_j divide a $\text{in}(f_i)$, en cada monomio de $f_i - \text{in}(f_i)$ aparece x_r con $r \geq j$ ya que f_i es ω -homogéneo. Luego al dividir eliminamos uno de esos monomios en cada paso, y llegamos así a 0. \square

El siguiente resultado es fundamental en este trabajo en tanto en cuanto nos proporciona un sistema (finito) minimal de generadores de R/I como A -módulo.

Proposición 1.2.2. *Sea \mathcal{B} el conjunto de monomios que no pertenecen al ideal $\text{in}(I + (x_{n-d+1}, \dots, x_n))$. Entonces, \mathcal{B} es finito y las clases en R/I de los elementos de \mathcal{B} , es decir,*

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015. Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección https://sede.ull.es/validacion/	
Identificador del documento: 1177709	Código de verificación: cLLpSpfn
Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

$$\{u + I \mid u \in \mathcal{B}\},$$

forman un sistema minimal de generadores homogéneos de R/I como A -módulo.

Demostración. Sabemos que \mathcal{B} es finito por ser A una normalización de Noether de R/I . Veamos que $\mathcal{D} := \{u + I \mid u \in \mathcal{B}\}$ es un conjunto de generadores de R/I como A -módulo. Si $v \notin \text{in}(I)$ es un monomio, entonces v se descompone como $v = v_1 v_2$, donde v_1, v_2 son monomios $v_1 \in A$ y $v_2 \notin \text{in}(I) + (x_{n-d+1}, \dots, x_n) = \text{in}(I + (x_{n-d+1}, \dots, x_n))$; por tanto $v_2 \in \mathcal{B}$. Ahora bien, sea $f + I \in R/I$, basta con considerar un representante de $f + I$ sin monomios en $\text{in}(I)$ y aplicar lo anterior para obtener que \mathcal{D} genera R/I como A -módulo.

Probemos ahora la minimalidad de \mathcal{D} . Supongamos por reducción al absurdo que $v + I = \sum_{j=1}^r h_j(u_j + I) \in R/I$, con $v, u_j \in \mathcal{B}$, $v \neq u_j$ y $h_j \in A$ para todo $j \in \{1, \dots, r\}$. Denotamos por $c_j \in K$ el término independiente de h_j . Entonces $v = \sum_{j=1}^r c_j u_j \in R/(I + (x_{n-d+1}, \dots, x_n))$, lo que es absurdo puesto que \mathcal{B} es K -base de $R/(I + (x_{n-d+1}, \dots, x_n))$. \square

El ideal $\text{in}(I)$ es un ideal monomial y, por ende, tiene un único sistema minimal de generadores formado por monomios como consecuencia del Lema de Dickson (ver, e.g., [24, Theorem 5]). A continuación damos una caracterización de la propiedad Cohen-Macaulay de un ideal ω -homogéneo en términos del sistema minimal de generadores formado por monomios de su ideal inicial.

Teorema 1.2.3. *Sea $I \subset R$ un ideal ω -homogéneo, con $\omega \in (\mathbb{Z}^+)^n$. Entonces R/I es Cohen-Macaulay si y sólo si x_{n-d+1}, \dots, x_n no dividen a ningún generador minimal de $\text{in}(I)$.*

Demostración. Sabemos por la Proposición 1.1.10 que R/I es Cohen-Macaulay si y sólo si R/I es libre como A -módulo. Por tanto, probaremos que R/I es un A -módulo libre si y sólo si x_{n-d+1}, \dots, x_n no dividen a ningún generador minimal de $\text{in}(I)$. Entonces, por la Proposición 1.2.2, queremos probar que $\mathcal{D} := \{x^\alpha + I \mid x^\alpha \in \mathcal{B}\}$ genera un A -módulo libre si y sólo si x_{n-d+1}, \dots, x_n no dividen a ningún generador minimal de $\text{in}(I)$, donde \mathcal{B} es el conjunto de monomios que no pertenecen a $\text{in}(I + (x_{n-d+1}, \dots, x_n))$.

Por contrarrecíproco, supongamos que existe $i \in \{n-d+1, \dots, n\}$ tal que x_i divide a un generador minimal x^α de $\text{in}(I)$. Consideramos entonces $u = x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n-d}^{\alpha_{n-d}}$ y $x^{\alpha'} = x_{n-d+1}^{\alpha_{n-d+1}} \cdots x_n^{\alpha_n} \neq 1$, así $u \in \mathcal{B}$, $x^{\alpha'} \in A$ y $x^\alpha = u x^{\alpha'}$. Sea $f \in R$ el resto de dividir x^α por una base de Gröbner minimal de I respecto de $>_\omega$. Entonces $x^\alpha - f \in I$ y ningún monomio de f pertenece a $\text{in}(I)$, es decir, $f = \sum_{j=1}^t c_j v_j x^{\beta_j}$ con $c_j \in K$, $v_j \in \mathcal{B}$, $x^{\beta_j} \in A$ y $c_j v_j x^{\beta_j} \notin \text{in}(I)$ para todo $j \in \{1, \dots, t\}$. Tenemos de este modo que $u x^{\alpha'} - \sum_{j=1}^t c_j v_j x^{\beta_j} \in I$ con $u, v_j \in \mathcal{B}$. Luego $u(x^{\alpha'} + I) - \sum_{j=1}^t c_j v_j (x^{\beta_j} + I) = 0$ en R/I con $x^{\alpha'} + I, x^{\beta_j} + I \in \mathcal{D}$, lo que implica que R/I no es un A -módulo libre.

Supongamos ahora que x_{n-d+1}, \dots, x_n no dividen a ningún generador de $\text{in}(I)$ y veamos que el conjunto \mathcal{D} genera un módulo libre. Por reducción al absurdo supongamos que $\sum_{j=1}^t h_j (x^{\alpha_j} + I) = 0$ en R/I con $h_j \in A$ y $x^{\alpha_j} \in \mathcal{B}$ para todo $j \in \{1, \dots, t\}$. Sea $\text{in}(\sum_{j=1}^t h_j x^{\alpha_j}) = c m x^{\alpha_i} \in \text{in}(I)$ con $c \in K \setminus \{0\}$, $m \in A$ un monomio y $i \in \{1, \dots, t\}$.

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Como x_{n-d+1}, \dots, x_n no dividen a ningún generador de $\text{in}(I)$, tenemos que $x^{\omega_i} \in \text{in}(I)$, lo cual es una contradicción. \square

Es interesante resaltar aquí que esta caracterización de la propiedad Cohen-Macaulay es una generalización de [14, Proposition 2.1], que se aplica cuando el ideal I es homogéneo en el sentido usual.

Como consecuencia de este Teorema, en la siguiente Proposición damos una fórmula para calcular la serie de Hilbert ω -graduada de R/I cuando éste es Cohen-Macaulay. En el Capítulo 3 veremos que este resultado no es más que un caso particular de un resultado más general.

Proposición 1.2.4. *Si R/I es Cohen-Macaulay, entonces la serie de Hilbert ω -graduada de R/I viene dada por:*

$$\mathcal{H}_{R/I}(t) = \frac{\sum_{v \in \mathcal{B}} t^{\deg_{\omega}(v)}}{\prod_{i=n-d+1}^n (1 - t^{\omega_i})},$$

donde \mathcal{B} es el conjunto de monomios que no pertenecen a $\text{in}(I) + (x_{n-d+1}, \dots, x_n)$.

Demostración. Es un resultado clásico de Macaulay [46] que $\mathcal{H}_{R/I}(t) = \mathcal{H}_{R/\text{in}(I)}(t)$; además, al ser $\text{in}(I)$ un ideal monomial, tenemos que:

$$\mathcal{H}_{R/I}(t) = \sum_{\substack{v \text{ monomio} \\ v \notin \text{in}(I)}} t^{\deg_{\omega}(v)}.$$

Denotamos por $J_i := \text{in}(I) + (x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$ para todo $i \in \{n-d+1, \dots, n\}$ y $J_{n+1} := \text{in}(I)$. Al ser R/I es Cohen-Macaulay, aplicando el Teorema 1.2.3, observamos que para todo monomio v y para todo $i \in \{n-d+1, \dots, n\}$ se tiene que

$$v \in J_{i+1} \iff x_i v \in J_{i+1}.$$

Ahora denotamos por H_i la serie $\sum_{v \notin J_i} t^{\deg_{\omega}(v)}$ para todo $i \in \{n-d+1, \dots, n+1\}$, y observamos que $\mathcal{H}_{R/I}(t) = H_{n+1}$, que $H_{n-d+1} = \sum_{v \in \mathcal{B}} t^{\deg_{\omega}(v)}$ y que $H_i = (1 - t^{\omega_i})H_{i+1}$, ya que:

$$\begin{aligned} H_{i+1} &= \sum_{v \notin J_{i+1}} t^{\deg_{\omega}(v)} = \\ &= \sum_{v \notin J_i} t^{\deg_{\omega}(v)} + \sum_{\substack{v \notin J_{i+1} \\ v \in J_i}} t^{\deg_{\omega}(v)} = \\ &= H_i + \sum_{\substack{v=x_i u \\ u \notin J_{i+1}}} t^{\deg_{\omega}(v)} = \\ &= H_i + t^{\omega_i} \sum_{u \notin J_{i+1}} t^{\deg_{\omega}(u)} = \\ &= H_i + t^{\omega_i} H_{i+1} \end{aligned}$$

De donde concluimos que $\mathcal{H}_{R/I}(t) = H_{n-d+1} / (\prod_{i=n-d+1}^n (1 - t^{\omega_i}))$. \square

Como consecuencia directa de este resultado se obtiene el hecho bien conocido de que si R/I es Cohen-Macaulay, entonces $(\prod_{i=n-d+1}^n (1 - t^{\omega_i}))\mathcal{H}_{R/I}(t)$ es un polinomio de coeficientes enteros no negativos (ver por ejemplo [61, Section 3]).

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Ilustramos a continuación el Teorema 1.2.3 y la Proposición 1.2.4 anteriores con un ejemplo. En el mismo evidenciamos además que la propiedad Cohen-Macaulay del ideal de definición de una variedad dada por su parametrización depende de la característica del cuerpo K que estemos considerando.

Ejemplo 1.2.5. Consideramos la superficie en \mathbb{A}_K^4 dada paramétricamente por

$$f_1 := s^3 + s^2t, f_2 := t^4 + st^3, f_3 := s^2, f_4 := t^2 \in K[s, t]$$

y denotamos por I a su ideal de definición. Usando cualquiera de los programas de computación polinomial que incluya el cálculo de bases de Gröbner, obtenemos que si K es un cuerpo de característica 0, los polinomios $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ conforman una base de Gröbner minimal de I con respecto de $>_\omega$, donde $\omega = (3, 4, 2, 2)$ y $g_1 := 2x_2x_3^2 - x_1^2x_4 + x_3^3x_4 - x_3^2x_4^2$, $g_2 := x_1^4 - 2x_1^2x_3^3 + x_3^6 - 2x_1^2x_3^2x_4 - 2x_3^5x_4 + x_3^4x_4^2$, $g_3 := x_2^2 - 2x_2x_4^2 - x_3x_4^3 + x_4^4$ y $g_4 := 2x_1^2x_2 - x_1^2x_3x_4 + x_3^4x_4 - 3x_1^2x_4^2 - 2x_3^3x_4^2 + x_3^2x_4^3$. En particular

$$\text{in}(I) = (x_2x_3^2, x_1^4, x_2^2, 2x_1^2x_2).$$

Por consiguiente, atendiendo al Teorema 1.2.3, R/I no es Cohen-Macaulay ya que la variable x_3 divide a un generador minimal de $\text{in}(I)$.

Por contra, si consideramos la misma superficie esta vez sobre un cuerpo infinito de característica 2, se tiene que el conjunto $\{x_1^2 + x_3^3 + x_3^2x_4, x_2^2 + x_3x_4^3 + x_4^4\}$ es una base de Gröbner de I con respecto de $>_\omega$. En consecuencia, en este caso el anillo R/I es Cohen-Macaulay. Basta observar de nuevo por el Teorema 1.2.3 que en el sistema minimal de generadores de $\text{in}(I) = (x_1^2, x_2^2)$, no aparecen las variables x_3 ni x_4 . Además, en este caso, como los monomios que no pertenecen a $\text{in}(I) + (x_3, x_4)$ son $1, x_1, x_2$ y x_1x_2 , de ω -grados 1, 3, 4 y 7 respectivamente, se tiene por la Proposición 1.2.4 que

$$\mathcal{H}_{R/I}(t) = \frac{1 + t^3 + t^4 + t^7}{(1 - t^2)^2}.$$

1.2.1. Aplicación: curvas monomiales proyectivas asociadas a sucesiones aritméticas generalizadas.

En esta subsección clasificamos las curvas monomiales proyectivas asociadas a sucesiones aritméticas generalizadas que son aritméticamente Cohen-Macaulay como aplicación del Teorema 1.2.3 de la sección anterior. De este estudio también vamos a obtener una gran familia de curvas monomiales proyectivas que no son aritméticamente Cohen-Macaulay. Recordamos que una variedad V se dice que es *aritméticamente Cohen-Macaulay* si su anillo coordenado $R/I(V)$ es Cohen-Macaulay, donde $I(V)$ es el ideal de definición de la variedad.

Una *sucesión aritmética generalizada* es una sucesión de números enteros $m_1 < \dots < m_n$ tales que existen $h, d, m_1 \in \mathbb{Z}^+$ verificando que $m_i = hm_1 + (i - 1)d$ para todo

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

$i \in \{2, \dots, n\}$ o lo que es lo mismo $hm_1 < m_2 < \dots < m_n$ forman una sucesión aritmética.

Es esta sección el objetivo es probar el Teorema que enunciamos a continuación.

Teorema 1.2.6. *Sea $m_1 < \dots < m_n$ una sucesión aritmética generalizada, entonces*

$K[\mathcal{C}]$ es Cohen-Macaulay $\iff m_1 < \dots < m_n$ es una sucesión aritmética.

Comenzamos con un resultado con unas hipótesis menos restrictivas que el resto de la sección.

Teorema 1.2.7. *Sea $m_1 < \dots < m_n$ una sucesión de enteros positivos que contiene una sucesión aritmética generalizada $m_{i_1} < \dots < m_{i_l} = m_n$ tal que $l \geq 3$. Sea $h \in \mathbb{Z}^+$ el entero que verifica que $hm_{i_j} = hm_{i_1} + (j-1)d$ para $j \in \{1, \dots, l\}$. Si $h > 1$ y $hm_{i_1} \notin \{m_1, \dots, m_n\}$, entonces $K[\mathcal{C}]$ no es Cohen-Macaulay.*

Demostración. Por el Teorema 1.2.3 es suficiente encontrar un generador minimal de $\text{in}(I(\mathcal{C})) \subset K[x_1, \dots, x_{n+1}]$ en el que aparezca x_n . Consideramos para ello el binomio $f := x_{i_1}^h x_n - x_{i_2} x_{i_1-1} x_{n+1}^{h-1}$ y observamos que $f \in I(\mathcal{C})$ puesto que $hm_{i_1} + m_{i_1} = m_{i_2} + m_{i_1-1}$. Además, $\text{in}(f) = x_{i_1}^h x_n$ ya que $h > 1$. Si $x_{i_1}^h \notin \text{in}(I(\mathcal{C}))$ existe un generador minimal de $\text{in}(I(\mathcal{C}))$ donde aparece la variable x_n y hemos terminado. Supongamos entonces que $x_{i_1}^h \in \text{in}(I(\mathcal{C}))$. Entonces existe $x^\alpha \notin \text{in}(I(\mathcal{C}))$ donde $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ tal que $g := x_{i_1}^h - x^\alpha \in I(\mathcal{C})$. Afirmamos que $\alpha_{n+1} < h-1$. En efecto, x^α tiene grado h y $x^\alpha \neq x_{i_1}^h$, por tanto $\alpha_{n+1} \leq h-1$, y si $\alpha_{n+1} = h-1$ tendríamos que $g = x_{i_1}^h - x_j x_{n+1}^{h-1} \in I(\mathcal{C})$ para cierto $j \in \{1, \dots, n\}$, una contradicción puesto que tendríamos que $hm_{i_1} = m_j$.

Consideramos ahora el binomio $f - x_n g = x^\alpha x_n - x_{i_2} x_{i_1-1} x_{n+1}^{h-1} \in I(\mathcal{C})$. Puesto que $\alpha_{n+1} < h-1$ tenemos que $g' := \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} x_n - x_{i_2} x_{i_1-1} x_{n+1}^{h-1-\alpha_{j+1}} \in I(\mathcal{C})$ y $\text{in}(g') = \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j} x_n \in \text{in}(I(\mathcal{C}))$. No obstante, $x^\alpha \notin \text{in}(I(\mathcal{C}))$ y en consecuencia existe un generador minimal de $\text{in}(I(\mathcal{C}))$ donde aparece la variable x_n y demostramos el resultado. \square

El siguiente ejemplo ilustra una aplicación del Teorema anterior.

Ejemplo 1.2.8. *Sea $K[\mathcal{C}]$ el anillo de coordenadas de la curva monomial proyectiva definida por la sucesión $m_1 = 2 < m_2 = 4 < m_3 = 7 < m_4 = 11 < m_5 = 15 < m_6 = 16$. La sucesión anterior contiene una subsucesión aritmética generalizada $m_1 < m_4 < m_6$ (subsucesión de tres términos con primer término igual a 2, $h = 3$ y diferencia $d = 5$). Dado que la subsucesión involucra a m_6 , $h > 1$ y $hm_1 = 6$ no pertenece a la sucesión, se verifican todas las hipótesis del Teorema anterior y podemos concluir que $K[\mathcal{C}]$ no es Cohen-Macaulay.*

Observamos que, como consecuencia directa del Teorema 1.2.7, se deduce lo siguiente:

Corolario 1.2.9. *Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_K^n$ una curva monomial proyectiva asociada a una sucesión aritmética generalizada con $h > 1$ y $n \geq 3$. Entonces $K[\mathcal{C}]$ no es Cohen-Macaulay.*

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Para caracterizar la propiedad Cohen-Macaulay en este contexto nos queda estudiar el caso $h = 1$ o, equivalentemente, que la sucesión $m_1 < \dots < m_n$ sea aritmética. Para ello vamos a describir explícitamente una base de Gröbner del ideal de definición de la curva asociada a la sucesión aritmética y así poder aplicar el Teorema 1.2.3.

El siguiente resultado es un lema técnico que va a ser clave para el resto de la sección. Dada una sucesión aritmética $m_1 < \dots < m_n$, le asociamos un par $(\alpha, k) \in \mathbb{N}^2$ como sigue:

Lema 1.2.10. Sean $q \in \mathbb{N}$ y $r \in \{1, \dots, n-1\}$ tales que $m_1 = q(n-1) + r$ y tomamos $\alpha := q + d$ y $k := n - r$. Entonces,

- (a) $\alpha m_1 + m_i = m_{n-k+i} + qm_n$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$ y
- (b) $\alpha + 1 = \min \{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b m_1 \in \sum_{i=2}^n \mathbb{N}m_i\}$.
- (c) $q + 1 = \min \{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b m_n \in \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{N}m_i\}$.

Demostración. (a) es directo de la definición de α , q y k . Probemos ahora (b). Tomamos

$$M := \min \{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b m_1 \in \sum_{i=2}^n \mathbb{N}m_i\}.$$

Por (a) se sigue que $(\alpha + 1)m_1 = m_{n-k+1} + qm_n$, por tanto $M \leq \alpha + 1$. Supongamos por reducción al absurdo que $M \leq \alpha$. Tenemos entonces que

$$M m_1 = \sum_{i=2}^n \delta_i m_i \text{ para ciertos } \delta_2, \dots, \delta_n \in \mathbb{N}. \quad (1.6)$$

Probaremos que

- (i) $M - \sum_{i=2}^n \delta_i > 0$,
- (ii) $M - \sum_{i=2}^n \delta_i < d$, y
- (iii) d divide a $M - \sum_{i=2}^n \delta_i$,

lo que nos conduce a una contradicción y tendremos el resultado. En efecto, (i) se sigue fácilmente de (1.6). También de (1.6) tenemos que $(M - \sum_{i=2}^n \delta_i) m_1 = \sum_{i=2}^n (i-1) \delta_i d$, y por tanto se satisface (iii) pues $\gcd\{m_1, d\} = 1$. Usando (1.6) y la hipótesis $M \leq \alpha$ llegamos a que $(\sum_{i=2}^n \delta_i) m_n \geq \sum_{i=2}^n \delta_i m_i = M m_1 = M m_n - M(n-1)d \geq M m_n - \alpha(n-1)d > (M-d) m_n$. Así probamos (ii) y, por tanto, hemos probado (b). Un argumento análogo sirve para demostrar (c). \square

Siguiendo la notación del Lema anterior damos una base de Gröbner de $I(\mathcal{C})$ en función de los enteros que hemos asociado a la sucesión en el resultado anterior.

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015. Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección https://sede.ull.es/validacion/	
Identificador del documento: 1177709	Código de verificación: cLLpSpfn
Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Teorema 1.2.11. Sea $C \subset \mathbb{P}_K^n$ la curva monomial proyectiva asociada a la sucesión aritmética $m_1 < \dots < m_n$. El conjunto

$$\mathcal{G} = \{x_i x_j - x_{i-1} x_{j+1} \mid 2 \leq i \leq j \leq n-1\} \cup \{x_1^\alpha x_i - x_{n+1-i} x_n^q x_{n+1}^d \mid 1 \leq i \leq k\}$$

es una base de Gröbner minimal de $I(C) \subset K[x_1, \dots, x_{n+1}]$ con respecto al orden lexicográfico inverso graduado. Además \mathcal{G} es un sistema minimal de generadores de $I(C)$.

Demostración. Es fácil comprobar que $\mathcal{G} \subseteq I(C)$ usando Lema 1.2.10.(a). Veamos que $\text{in}(I(C)) \subseteq (\text{in}(\mathcal{G}))$ donde $\text{in}(\mathcal{G}) = \{x_i x_j \mid 2 \leq i \leq j \leq n-1\} \cup \{x_1^\alpha x_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ y $(\text{in}(\mathcal{G}))$ es el ideal generado por los términos iniciales de los elementos del conjunto \mathcal{G} . Supongamos por contradicción que $\text{in}(I(C)) \not\subseteq (\text{in}(\mathcal{G}))$. Afirmamos que entonces existen dos monomios $l_1, l_2 \notin (\text{in}(\mathcal{G}))$ tales que $l_1 - l_2 \in I(C)$. En efecto, como $\text{in}(I(C)) \not\subseteq (\text{in}(\mathcal{G}))$, tenemos que las clases en $\{l \mid l \text{ es monomial y } l \notin (\text{in}(\mathcal{G}))\}$ no forman una K -base de $K[C]$. Luego existen monomios $l_1, \dots, l_t \notin (\text{in}(\mathcal{G}))$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K \setminus \{0\}$ tales que $f = \sum_{i=1}^t \lambda_i l_i \in I(C)$. Entonces $\varphi(f) = 0$ y $\varphi(l_1) \neq 0$ donde φ es el homomorfismo de anillos tal que $\text{Ker}(\varphi) = I(C)$. Así existe $j \in \{2, \dots, t\}$ tal que $\varphi(l_1) = \varphi(l_j)$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $j = 2$; luego tenemos que $l_1 - l_2 \in I(C)$ y $l_1, l_2 \notin (\text{in}(\mathcal{G}))$. Podemos suponer también que $\text{gcd}\{l_1, l_2\} = 1$ puesto que $I(C)$ es un ideal primo. Además $\text{in}(\mathcal{G}) = \{x_i x_j \mid 2 \leq i \leq j \leq n-1\} \cup \{x_1^\alpha x_i \mid 1 \leq i \leq k\}$, luego podemos suponer que $l_1 = x_1^a x_i^{\delta_i} x_n^{b_1} x_{n+1}^{c_1}$ y $l_2 = x_j^{\delta_j} x_n^{b_2} x_{n+1}^{c_2}$, donde:

- (a) $0 \leq a \leq \alpha$,
- (b) $2 \leq i, j \leq n-1, i \neq j$,
- (c) $\delta_i, \delta_j \in \{0, 1\}$,
- (d) $b_1, b_2, c_1, c_2 \geq 0$, y
- (e) si $a = \alpha$ y $\delta_i = 1$, entonces $i > k$ (si no $l_1 \in (\text{in}(\mathcal{G}))$).

Como $\varphi(l_1) = \varphi(l_2)$, tenemos que $am_1 + \delta_i m_i + b_1 m_n = \delta_j m_j + b_2 m_n$. Si $a = 0$, entonces podemos suponer que $b_1 = 0$ pues $\text{gcd}\{l_1, l_2\} = 1$. En consecuencia tenemos que $\delta_i m_i = \delta_j m_j + b_2 m_n$, pero esto implica que $b_2 = 0$ y $m_i = m_j$ y, por consiguiente, $l_1 = l_2$, una contradicción.

Sea entonces a partir de ahora $a \geq 1$. Observamos primero que $b_1 = 0$; en otro caso, tendríamos que $b_2 = 0$ y así $am_1 + \delta_i m_i + b_1 m_n \geq m_n > \delta_j m_j$, lo que es absurdo. Por consiguiente

$$am_1 + \delta_i m_i = \delta_j m_j + b_2 m_n. \quad (1.7)$$

Consideramos casos con respecto a los coeficientes en la expresión anterior.

Caso 1: Si $\delta_i = 0$ entonces (1.7) queda $am_1 = \delta_j m_j + b_2 m_n$. Usando el Lema 1.2.10.(b), obtenemos que $a \geq \alpha + 1$, una contradicción.

Caso 2: Si $\delta_j = 0$ entonces (1.7) queda $am_1 + \delta_i m_i = b_2 m_n$. Luego $a = \alpha$ por el Lema 1.2.10 y esto implica que $\delta_i = 1$ y $i = k$, lo que es absurdo.

Firmado por:	Fecha:
EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Caso 3: Si $\delta_i = \delta_j = 1$, entonces de (1.7) tenemos $am_1 + m_i = m_j + b_2m_n$. Consideramos aquí distintos subcasos:

Subcaso 3.1: Si $i > j$, se deduce que $am_1 = m_{n-i+j} + (b_2 - 1)m_n$. Por el Lema 1.2.10.(b), esto implica que $a \geq \alpha + 1$, lo que contradice (a).

Subcaso 3.2: Si $i < j$, se obtiene que $am_1 + m_{n-j+i} = (b_2 + 1)m_n$, lo que implica que $a \geq \alpha$. Por tanto, $a = \alpha$ y $n - j + i = k$, que es un absurdo por (e).

Además es fácil comprobar que \mathcal{G} es minimal. Por último, no es complicado verificar que además es sistema minimal de generadores del ideal. \square

Nota 1.2.12. El hecho de que \mathcal{G} es un sistema minimal de generadores del ideal $I(\mathcal{C})$ ya fue probado en [44, Remark 3.13].

Varios autores (ver, e.g. [2, 53, 54, 60]) han estudiado la curva monomial afín $\mathcal{C}' \subseteq \mathbb{A}_K^n$ dada paramétricamente por $x_1 = t^{m_1}, \dots, x_n = t^{m_n}$ con $m_1 < \dots < m_n$ una sucesión aritmética; llegando incluso en [33] a dar una descripción de una resolución libre minimal graduada del ideal de la curva \mathcal{C}' . Notar que la curva \mathcal{C} es la homogeneización de \mathcal{C}' . En [2] se describe una base de Gobner minimal \mathcal{G}' de $I(\mathcal{C}')$. Cabe destacar que la base de Grobner \mathcal{G} descrita en el Teorema 1.2.11 coincide con la homogeneización de \mathcal{G}' con respecto a la variable x_{n+1} .

Corolario 1.2.13. El ideal inicial de $I(\mathcal{C})$ respecto al orden lexicográfico inverso graduado es:

$$\text{in}(I(\mathcal{C})) = (\{x_i x_j \mid 2 \leq i \leq j \leq n - 1\}) + (\{x_1^\alpha x_i \mid 1 \leq i \leq k\})$$

Observamos que las variables x_n y x_{n+1} no aparecen en los generadores el ideal inicial. Así pues, por el Teorema 1.2.3, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 1.2.14. Si $m_1 < \dots < m_n$ una sucesión aritmética, entonces $K[\mathcal{C}]$ es Cohen-Macaulay.

Nota 1.2.15. El Corolario 1.2.14 es una generalización de [48, Proposition 1.2], donde los autores obtienen el mismo resultado en un contexto más restrictivo, a saber, cuando $\{m_1, \dots, m_n\}$ es un sistema minimal de generadores del semigrupo $\sum_{i=1}^n \mathbb{N}m_i$. Cabe resaltar además que las técnicas que manejan para demostrar el resultado son distintas de las nuestras.

Sea ahora $m_1 < \dots < m_n$ una sucesión aritmética generalizada. Como consecuencia del Teorema 1.2.7 y el Corolario 1.2.14 se deduce fácilmente el Teorema 1.2.6, resultado principal de esta sección.

1.3. Ideales tóricos simpliciales Cohen-Macaulay

Sea I un ideal tórico simplicial. En virtud de la Proposición 1.1.12 podemos suponer sin pérdida de generalidad que $I = I_{\mathcal{A}}$ donde $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^d$, $a_{n-d+i} = \omega_{n-d+i}e_i$

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015. Su autnticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección https://sede.ull.es/validacion/	
Identificador del documento: 1177709	Código de verificación: cLLpSpfn
Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

para todo $i \in \{1, \dots, d\}$, y $\{e_1, \dots, e_d\}$ es la base canónica de \mathbb{N}^d y $\omega_{n-d+j} \in \mathbb{Z}^+$ para todo $j \in \{1, \dots, d\}$. En esta sección vamos a caracterizar la propiedad Cohen-Macaulay de I_A en términos del semigrupo \mathcal{S} generado por \mathcal{A} . También veremos que, cuando R/I_A es Cohen-Macaulay, seremos capaces de describir su serie de Hilbert multigradaada (ver (1.5)).

Para comenzar la sección damos un resultado conocido que determina en términos de \mathcal{S} un sistema minimal finito de generadores de $K[\mathcal{S}]$ como A -módulo, donde $A = K[x_{n-d+1}, \dots, x_n]$. La Proposición 1.2.2 describe cómo obtener un sistema minimal de generadores de R/I_A como A -módulo a partir del ideal inicial de $I_A + (x_{n-d+1}, \dots, x_n)$ respecto del orden lexicográfico inverso ω -graduado. En esta sección, bajo la hipótesis de que el ideal es tórico simplicial, lo interesante es que este sistema de generadores de R/I_A como A -módulo se puede describir en términos de \mathcal{S} y sin necesidad del cálculo de bases de Gröbner.

Sabemos que $I_A = \ker(\varphi)$ y $K[\mathcal{S}] = \text{Im}(\varphi) = K[t^s | s \in \mathcal{S}]$, donde $\varphi : R \rightarrow K[t_1, \dots, t_d]; x_i \mapsto t^{a_i} = t_1^{a_{i1}} \dots t_d^{a_{id}}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Por otro lado, tenemos que $R/I_A \simeq_{\bar{\varphi}} K[\mathcal{S}]$ donde $\bar{\varphi} : R/I_A \rightarrow K[\mathcal{S}]; x_i + I_A \mapsto t^{a_i}$. Puesto que $\bar{\varphi}$ es un isomorfismo, la aplicación que a la clase de equivalencia de cada monomio de R/I_A le asocia su \mathcal{S} -grado es una biyección; notar además que $\bar{\varphi}(x_{n-d+i} + I_A) = t_i^{\omega_{n-d+i}}$ para todo $i \in \{1, \dots, d\}$. Por tanto, como consecuencia de la Proposición 1.2.2, el conjunto $\{t^{\deg_{\mathcal{S}}(u)} \mid u \text{ monomio, } u \notin \text{in}(I + (x_{n-d+1}, \dots, x_n))\}$ es un sistema minimal de generadores de $K[\mathcal{S}]$ como $K[t_1^{\omega_{n-d+1}}, \dots, t_d^{\omega_n}]$ -módulo. El resultado siguiente da una caracterización de este conjunto enteramente en términos de \mathcal{S} .

Proposición 1.3.1. *Sea I_A un ideal tórico simplicial y sea*

$$\mathcal{S}_0 := \{s \in \mathcal{S} \mid s - a_i \notin \mathcal{S} \text{ para todo } i \in \{n-d+1, \dots, n\}\}.$$

El conjunto

$$\{t^s \mid s \in \mathcal{S}_0\},$$

es un sistema minimal de generadores de $K[\mathcal{S}]$ como $K[t_1^{\omega_{n-d+1}}, \dots, t_d^{\omega_n}]$ -módulo.

Demostración. Sea $s \in \mathcal{S}$, vamos a ver que existen $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{N}$ tales que $s - \sum_{i=1}^d \lambda_i a_{n-d+i} \in \mathcal{S}_0$. Basta tomar $\lambda_1 = \max\{\lambda \in \mathbb{N} \mid s - \lambda a_{n-d+1} \in \mathcal{S}\}$ y $\lambda_{i+1} = \max\{\lambda \in \mathbb{N} \mid s - \sum_{j=1}^i \lambda_j a_{n-d+j} - \lambda a_{n-d+i+1} \in \mathcal{S}\}$ para todo $i \in \{1, \dots, d-1\}$. Por definición tenemos que $s - \sum_{i=1}^d \lambda_i a_i \in \mathcal{S}_0$ pues en caso contrario tendríamos que existe $j \in \{1, \dots, d\}$ tal que $s - \sum_{i=1}^d \lambda_i a_i - a_j \in \mathcal{S}_0$, lo que contradice la elección de λ_j .

Así, tomando $s' := s - \sum_{i=1}^d \lambda_i a_{n-d+i}$, tenemos que $s' \in \mathcal{S}_0$ y $t^s = t^{s'} t_1^{\lambda_1 \omega_{n-d+1}} \dots t_d^{\lambda_d \omega_n}$, luego $K[\mathcal{S}] \subseteq (\{t^s \mid s \in \mathcal{S}_0\})K[t_1^{\omega_{n-d+1}}, \dots, t_d^{\omega_n}]$ y hemos terminado, siendo el otro contenido evidente. La minimalidad de $\{t^s \mid s \in \mathcal{S}_0\}$ es evidente. \square

En la sección anterior caracterizamos en la Proposición 1.2.3 cuándo R/I es Cohen-Macaulay siendo A una normalización de Noether de R/I . En esta sección tratamos el

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

caso particular en que I sea un ideal tórico simplicial. Haciendo uso de las Proposiciones 1.2.3 y 1.3.1 vamos a caracterizar en Proposición 1.3.3 los ideales tóricos simpliciales que son Cohen-Macaulay. Recordar que, como se vió en la primera sección de este capítulo, el hecho de que $I_{\mathcal{A}}$ sea un ideal tórico simplicial es equivalente a que $I_{\mathcal{A}}$ sea tórico y A una normalización de Noether de $R/I_{\mathcal{A}}$. En [35, Theorem 1] (ver también [61, Theorem 6.4]), se aportan resultados equivalentes al que mostramos aquí. No obstante, incluimos su prueba puesto que tiene ideas que serán utilizadas en secciones posteriores.

Dado \mathcal{S} el semigrupo generado por el conjunto $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^d$, con $a_{n-d+i} = \omega_{n-d+i}e_i$ para todo $i \in \{1, \dots, d\}$. Denotamos por $\mathbb{Z}\mathcal{S}$ al menor subgrupo de \mathbb{Z}^d que contiene a \mathcal{S} y por $\mathbb{Z}\mathcal{S}'$ al menor subgrupo de \mathbb{Z}^d que contiene a $\{a_{n-d+1}, \dots, a_n\}$ y definimos la siguiente relación de equivalencia en $\mathbb{Z}\mathcal{S}$:

$$u \sim v \iff u - v \in \mathbb{Z}\mathcal{S}'. \quad (1.8)$$

Esta relación particiona $\mathbb{Z}\mathcal{S}$ en $[\mathbb{Z}\mathcal{S} : \mathbb{Z}\mathcal{S}']$ clases de equivalencia. Ahora bien, como el grupo $\mathbb{Z}^d/\mathbb{Z}\mathcal{S}$ es isomorfo a $(\mathbb{Z}^d/\mathbb{Z}\mathcal{S}') / (\mathbb{Z}\mathcal{S}'/\mathbb{Z}\mathcal{S}')$, tenemos que

$$[\mathbb{Z}\mathcal{S} : \mathbb{Z}\mathcal{S}'] = \left(\prod_{i=1}^d \omega_{n-d+i} \right) / [\mathbb{Z}^d : \mathbb{Z}\mathcal{S}].$$

Se tiene el siguiente Lema:

Lema 1.3.2. *Para todo $x \in \mathbb{Z}\mathcal{S}$ existe un elemento $b \in \mathcal{S}_0$ tal que $b \sim x$. En particular, $|\mathcal{S}_0| \geq [\mathbb{Z}\mathcal{S} : \mathbb{Z}\mathcal{S}']$.*

Demostración. Para todo $i \in \{1, \dots, n-d\}$ existen $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$ y $\beta_{ij} \in \mathbb{N}$ tales que $\alpha_i a_i = \sum_{j=n-d+1}^n \beta_{ij} a_j$. Usando estas igualdades es fácil comprobar que en cada clase de equivalencia hay un elemento de \mathcal{S} . Como $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathbb{N}\{\omega_{n-d+1}e_1, \dots, \omega_n e_d\}$, se tiene que además hay un elemento de \mathcal{S}_0 en cada clase de equivalencia. \square

Proposición 1.3.3. $K[\mathcal{S}]$ es Cohen-Macaulay $\iff |\mathcal{S}_0| = [\mathbb{Z}\mathcal{S} : \mathbb{Z}\mathcal{S}']$.

Demostración. Basta probar que $K[\mathcal{S}]$ es un A -módulo libre si y solo si $|\mathcal{S}_0| = [\mathbb{Z}\mathcal{S} : \mathbb{Z}\mathcal{S}']$ por la Proposición 1.1.10.

Supongamos que $|\mathcal{S}_0| > [\mathbb{Z}\mathcal{S} : \mathbb{Z}\mathcal{S}']$, entonces existen $u, v \in \mathcal{S}_0$ tales que $u \sim v$ o, lo que es lo mismo, $u + \sum_{i=1}^d \lambda_i a_{n-d+i} = v + \sum_{i=1}^d \mu_i a_{n-d+i}$ para ciertos $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{N}$, para todo $i \in \{1, \dots, d\}$. Por lo tanto, existen $u', v' \in \mathcal{B}$ tales que $\deg_{\mathcal{S}}(u') = u$, $\deg_{\mathcal{S}}(v') = v$ y $u'x_{n-d+1}^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_d} - v'x_{n-d+1}^{\mu_1} \cdots x_n^{\mu_d} \in I$ y entonces $K[\mathcal{S}]$ no es un módulo libre puesto que $u', v' \in \mathcal{B}$.

Es fácil demostrar que el recíproco es cierto, ya que en virtud del Lema 1.3.2, por cada clase hay un único elemento $b \in \mathcal{S}_0$ y por tanto es un A -módulo libre. \square

Nota 1.3.4. *Cabe resaltar en este punto que como consecuencia de la Proposición 1.3.3, la propiedad Cohen-Macaulay en ideales tóricos simpliciales no depende del cuerpo K .*

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015. Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección https://sede.ull.es/validacion/	
Identificador del documento: 1177709	Código de verificación: cLLpSpfn
Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Recordar que este hecho es particular de los ideales tóricos simpliciales, en el caso de un ideal ω -graduado cualquiera no ocurre así como se puede observar en el Ejemplo 1.2.5.

Por otro lado, en el caso de ideales tóricos no simpliciales la propiedad Cohen-Macaulay puede depender de la característica del cuerpo K . En [65], los autores dan un ejemplo de este hecho.

Además, cuando $K[\mathcal{S}]$ es Cohen-Macaulay, como consecuencia de las Proposiciones 1.2.4 y 1.3.1, se tiene una descripción de la serie de Hilbert multigrada de $K[\mathcal{S}]$ en términos del conjunto \mathcal{S}_0 . En el Capítulo 3 veremos que este resultado es consecuencia de otro más general

Corolario 1.3.5. Si $K[\mathcal{S}]$ es Cohen-Macaulay, entonces:

$$\mathcal{H}_{K[\mathcal{S}]}(t) = \frac{\sum_{s \in \mathcal{S}_0} t^s}{\prod_{i=1}^d (1 - t_i^{w_{n-d+i}})}.$$

1.3.1. Aplicación: curvas monomiales proyectivas asociadas a sucesiones casi aritméticas de diferencia uno.

Los enteros m_1, \dots, m_n se dice que forman en una *sucesión casi aritmética de diferencia d* si $m_1 < \dots < m_{n-1}$ son una sucesión aritmética creciente de diferencia d y m_n es un entero cualquiera diferente de los anteriores. En esta sección aplicaremos el criterio aportado en la Proposición 1.3.3 para caracterizar las curvas monomiales proyectivas aritméticamente Cohen-Macaulay asociadas a una sucesión casi aritmética de diferencia 1. A saber, aquellas asociadas a sucesiones de enteros positivos $\{m_1, \dots, m_{n-1}, m_n\}$ donde $m_1 < \dots < m_{n-1}$ son números consecutivos y $m_n \in \mathbb{N}$ es un entero cualquiera. Más concretamente, el objetivo de esta subsección es demostrar el siguiente resultado:

Teorema 1.3.6. Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_K^n$ la curva monomial proyectiva asociada a m_1, \dots, m_{n-1}, m_n , una sucesión casi aritmética de diferencia 1. Sea $k := \left\lceil \frac{m_{n-1}}{m_{n-1} - m_n} \right\rceil$, entonces

$$K[\mathcal{C}] \text{ es Cohen-Macaulay} \iff k \leq 0 \text{ ó } (k-1)m_1 \leq km_n$$

La prueba del Teorema 1.3.6 es una consecuencia directa de la Proposición 1.3.7 que considera la situación en que $m_n < m_1$ y la Proposición 1.3.9 que considera la situación $m_n > m_{n-1}$.

Suponemos primero que $m_n < m_1$. Tomamos $\mathcal{A} := \{a_1, \dots, a_n, c\} \subseteq \mathbb{N}^2$ donde $a_i := (m_i, n-1-i) \in \mathbb{N}^2$, para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $a_n := (0, m_{n-1})$ y $c := (m_n, m_{n-1} - m_n)$ y \mathcal{S} es el semigrupo de \mathbb{N}^2 generado por \mathcal{A} .

Proposición 1.3.7. Sea \mathcal{C} la curva monomial proyectiva asociada a $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$, donde $m_1 < \dots < m_{n-1}$ son consecutivos y $m_n < m_1$. Sea $k := \left\lceil \frac{m_{n-1}}{m_{n-1} - m_n} \right\rceil$, entonces

$$K[\mathcal{C}] \text{ es Cohen-Macaulay} \iff (k-1)m_1 \leq km_n$$

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Demostración. Sea $a := m_1$ y $b := m_n$. Para demostrar el resultado consideramos el conjunto

$$\Delta := \{(\lambda_i, i) \mid 0 \leq i \leq a + n - 3\},$$

donde $\lambda_i := \min\{\lambda \mid (\lambda, i) \in \mathcal{S}\}$ para todo $i \in \{0, \dots, a + n - 3\}$. Por definición es claro que $\Delta \subseteq \mathcal{S}_0$. Además Δ tiene $a' := a + n - 2$ elementos. Así, como consecuencia de la Proposición 1.3.3, tenemos que $K[\mathcal{C}]$ es Cohen-Macaulay si y solo si $\Delta = \mathcal{S}_0$. Probaremos entonces que

$$\Delta = \mathcal{S}_0 \iff (k-1)a \leq kb.$$

Supongamos que $(k-1)a \leq kb$ y veamos que $\mathcal{S}_0 \subseteq \Delta$. Sea $u = (u_1, u_2) \in \mathcal{S}_0 \setminus \Delta$, entonces $u_2 \geq a'$ pues $u \notin \Delta$ y $u := \sum_{j=1}^{n-2} \alpha_j(a' - j, j) + \beta(b, a' - b)$, con $\alpha_j, \beta \in \mathbb{N}$, para todo $j \in \{1, \dots, n-2\}$. Estudiamos dos casos:

- $\beta \geq k$. Por definición de k tenemos que $k(a' - b) \geq a'$ y podemos escribir entonces $k(a' - b) = a' + t$ con $t \geq 0$ y $t = \gamma(n-2) + r$, con $r \in \{1, \dots, n-2\}$. Así tenemos que

$$k(a' - b) = a' + \gamma(n-2) + r \quad (1.9)$$

y llegamos a que

$$kc = a_n + \gamma a_1 + a_{n-1-r} + (k - \gamma - 2)a_{n-1}.$$

Afirmamos que $k - \gamma - 2 \geq 0$. En efecto, de (1.9) se deduce que tenemos que $(k-1)a - kb = (\gamma - k + 1)(n-2) + r$. Además, por hipótesis, $(k-1)a - kb \leq 0$. Entonces $0 \geq (k-1)a - kb = (\gamma - k - 1)(n-2) + r \geq (\gamma - k - 1)(n-2) + 1$. Entonces $\gamma - k - 1 \leq -1$ y, por consiguiente, $k - \gamma - 2 \geq 0$.

De esta manera podemos escribir

$$u = \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_i a_{n-1-i} + \gamma a_1 + a_r + a_n + (k - \gamma - 2)a_{n-1} + (\beta - k)c,$$

con $\alpha_j, \gamma, k - \gamma - 2, \beta - k \geq 0$, una contradicción puesto que $u \in \mathcal{S}_0$.

- $\beta < k$. Por definición de k tenemos que $\beta(a' - b) < k(a' - b) \geq a'$ y $u_2 = \sum_{j=1}^{n-2} j\alpha_j + \beta(a' - b)$. Como $u_2 > a'$ podemos escribir $u_2 - a' = q(n-2) + r$ con $r \in \{1, \dots, n-2\}$, o lo que es lo mismo $u_2 = a' + q(n-2) + r$. Además, si $\beta = 0$ es fácil probar que $\sum_{j=1}^{n-2} \alpha_j \geq q + 2$ y si $\beta \geq 1$, ver que $\sum_{j=1}^{n-2} \alpha_j + \beta \geq \sum_{j=1}^{n-2} \alpha_j + 1 \geq q + 2$. Por tanto, si tomamos $\delta := \sum_{j=1}^{n-2} j\alpha_j + \beta - q - 2 \geq 0$,

$$\begin{aligned} u &= (0, a') + q(a' - (n-2), n-2) + (a' - r, r) + \delta(a', 0) \\ &= a_n + qa_1 + a_{n-1-r} + \delta a_{n-1}. \end{aligned}$$

Luego, $u - a_n \in \mathcal{S}$, lo que contradice que $u \in \mathcal{S}_0$.

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Hemos probado de este modo que $(k-1)a \leq kb$, entonces $\Delta = \mathcal{S}_0$. Veamos ahora el recíproco. Supongamos que $(k-1)a > kb$ donde $k = \lfloor a'/(a'-b) \rfloor$ y veamos que $\Delta \neq \mathcal{S}_0$ probando que $kc \in \mathcal{S}_0 \setminus \Delta$. Por un lado, es evidente que $kc \notin \Delta$ pues $k(a'-b) \geq a'$ por definición de k . Veamos que $kc \in \mathcal{S}_0$. Para demostrarlo probaremos que si

$$kc = \sum_{j=1}^n \alpha_j a_j + \beta c, \quad (1.10)$$

entonces $\alpha_{n-1} = \alpha_n = 0$.

Observamos primero que $k = \sum_{j=1}^n \alpha_j + \beta$ pues I_A es homogéneo. De las segundas componentes en (1.10) y teniendo en cuenta la definición de k obtenemos que $\alpha_n \in \{0, 1\}$. Si $\alpha_n = 0$, entonces

$$k = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j + \beta. \quad (1.11)$$

Pero $a' - b \geq n - 2$, pues $b < a$, y entonces de las segundas componentes tenemos que $(k - \beta)(a' - b) = \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_j (n - 1 - j) \leq \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_j (a' - b)$. Por consiguiente llegamos a que $k \leq \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_j + \beta$. Por la última desigualdad y (1.11), concluimos que $k = \sum_{i=1}^{n-2} \alpha_j + \beta$ y, en consecuencia, $\alpha_{n-1} = 0$ como queríamos demostrar.

Si $\alpha_n = 1$, entonces $(k - \beta) = \sum_{i=1}^n \alpha_j a_j$. Como $\alpha_n = 1$, tenemos que $(k - \beta)c \geq a'$ y, por la definición de k , que $\beta = 0$. En caso contrario, $\beta > 0$ implica que $(k - \beta)c < a'$, una contradicción. Así llegamos a que $kc = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_j a_j + a_n$. De las segundas componentes se tiene que $k(a' - b) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_j (n - 1 - j) + a' = (\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_j)(n - 2) + a'$. Pero por hipótesis $k(a' - b) \geq a' + (k - 1)(n - 2)$, entonces $\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_j \geq k$; absurdo ya que $k = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_j + \alpha_n + \beta = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_j + 1 > k$. \square

Ejemplo 1.3.8. Sea $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}_K^5$ la curva proyectiva asociada a la sucesión m_1, \dots, m_5 con $m_1 := 17 < m_2 := 18 < m_3 := 19 < m_4 := 20 < m_5 < m_1$. Entonces,

$$K[\mathcal{C}] \text{ es Cohen-Macaulay} \iff m_5 \in \{9, 10, 12, 13, 14, 15, 16\}.$$

En efecto, si $1 \leq m_5 \leq 10$, se tiene que $k = \lceil 20/(20 - m_5) \rceil = 2$. Por tanto, por la Proposición 1.3.7, $K[\mathcal{S}]$ es Cohen-Macaulay si y sólo si $m_5 \geq 17/2$, es decir, $m_5 \in \{9, 10\}$. Por otro lado, si $11 \leq m_5 \leq 16$, entonces $k = 3$ y, en consecuencia, obtenemos que la condición es $m_5 \geq 34/3$, o lo que es lo mismo $m_5 \in \{12, 13, 14, 15, 16\}$.

Estudiamos ahora el caso $m_n > m_{n-1}$; observamos que esta condición es equivalente a $k \leq 0$. En este caso demostraremos que $K[\mathcal{C}]$ siempre es Cohen-Macaulay. Sea ahora $\mathcal{A} := \{a_1, \dots, a_n, c\} \subseteq \mathbb{N}^2$ donde $a_i := (m_i, m_n - m_i) \in \mathbb{N}^2$, para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $a_n := (0, m_n)$ y $c := (m_n, 0)$ y \mathcal{S} el semigrupo de \mathbb{N}^2 generado por \mathcal{A} .

Proposición 1.3.9. Sea \mathcal{C} la curva monomial proyectiva asociada a $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$, donde $m_1 < \dots < m_{n-1}$ son consecutivos y $m_n > m_{n-1}$. Entonces, $K[\mathcal{C}]$ es Cohen-Macaulay.

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Demostración. Sea $a := m_1$ y $b := m_n$. Definimos

$$\Delta := \{(\gamma_i, \delta_i) \mid 0 \leq i < b\} \subset \mathbb{N}^2,$$

donde $\gamma_i := \min\{i + \mu_i b \mid i + \mu_i b \in \sum_{j=0}^{n-2} \mathbb{N}(a+j)\}$ y $\delta_i := \lambda_i b - \gamma_i$ tal que $\lambda_i := \min\{\lambda \mid \lambda a \leq \gamma_i \leq (\lambda+1)a\}$. Ya que $|\Delta| = b$, por la Proposición 1.3.3, es suficiente probar que $\Delta = \mathcal{S}_0$. Veamos el doble contenido. Es evidente que para todo $i \in \{0, \dots, b-1\}$, $(\gamma_i, \delta_i) \in \mathcal{S}_0$ pues no es complicado probar que $(\gamma_i, \delta_i) - a_n \notin \mathcal{S}$ por definición de γ_i y $(\gamma_i, \delta_i) - a_{n+1} \notin \mathcal{S}$ por la definición de δ_i .

Sea $s = (s_1, s_2) \in \mathcal{S}_0$, y supongamos $s_1 \equiv i \pmod{b}$. Queremos probar que $s = (\gamma_i, \delta_i)$. Por definición de γ_i tenemos que $s_1 \geq \gamma_i$. Entonces existe $\delta \geq 0$ tal que $s_1 - \gamma_i = \delta b$. Por hipótesis, $s \in \mathcal{S}_0$ y podemos entonces escribir $s = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j a_j$ con $\alpha_j \in \mathbb{N}$ para todo $j \in \{0, \dots, n\}$. Del mismo modo, existen $\beta_j \in \mathbb{N}$, $j \in \{0, \dots, n\}$, tales que $(\gamma_i, \delta_i) = \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j a_j$. Por definición de λ_i se tiene además que $\sum_{j=1}^{n-1} \beta_j = \lambda_i$. Observamos ahora que, de nuevo por definición de λ_i , $s_1 = \gamma_i + \delta b > (\lambda_i - 1)(a + n - 2) + \delta b$. De donde $s_1 > (\lambda_i - 1 + \delta)(a + n - 2)$ ya que por hipótesis $b > a + n - 2$. Por otro lado, es claro que $s_1 < (\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j)(a + n - 2)$. De las dos desigualdades anteriores obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j - \lambda_i \geq \delta. \quad (1.12)$$

Ahora, como $\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j = (s_1 + s_2)/b$ y $\lambda_i = (\gamma_i + \delta_i)/b$, usando la desigualdad (1.12) llegamos a que $s_2 - \delta_i \geq 0$; y por lo tanto existe $\delta' \in \mathbb{N}$ tal que $s_2 - \delta_i = \delta' b$.

Hemos llegado a este modo a que $(s_1, s_2) - \delta a_n - \delta' a_{n+1}$ con $\delta, \delta' \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, puesto que $(s_1, s_2) \in \mathbb{N}$, se tiene que $\delta = \delta' = 0$ y terminamos así la prueba. \square

1.4. Macaulayficación en ideales tóricos simpliciales

Sea I un ideal tórico simplicial. En esta sección vamos a describir la Macaulayficación del anillo de semigrupo simplicial $K[\mathcal{S}]$ en términos del conjunto numérico \mathcal{S}_0 que definimos en la Proposición 1.3.1.

Consideramos la misma relación de equivalencia en \mathbb{Z}^d que introducimos en la sección 1.3, ver (1.8); sean $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}^d$, se define

$$s_1 \sim s_2 \iff s_1 - s_2 \in \mathbb{Z}\{\omega_{n-d+1}e_1, \dots, \omega_n e_d\}.$$

En el Lema 1.3.2 vimos que la citada relación particiona el conjunto $\mathcal{S}_0 \subset \mathbb{Z}^d$ en $D := \omega_{n-d+1} \cdots \omega_n / [\mathbb{Z}^d : \mathbb{Z}\mathcal{S}]$ clases de equivalencia, pongamos S^1, \dots, S^D , mediante la relación anterior.

Definimos ahora para cada clase de equivalencia S^i el vector b_i de la siguiente manera. Sea $i \in \{1, \dots, D\}$, consideramos $S^i = \{s_1, \dots, s_t\}$ con $s_j := (s_{j1}, \dots, s_{jd}) \in \mathbb{N}^d$ para

Firmado por:	Fecha:
EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

todo $j \in \{1, \dots, t\}$ y definimos $b_i = (b_{i1}, \dots, b_{id}) \in \mathbb{N}^d$ el vector cuya coordenada l -ésima b_{il} es la menor l -ésima coordenada de los vectores s_1, \dots, s_t , esto es, $b_{il} := \min\{s_{jl} \mid j \in \{1, \dots, t\}\}$. Denotamos $\mathfrak{B}' := \{b_1, \dots, b_D\}$ y

$$\mathcal{S}' := \mathfrak{B}' + \mathbb{N}\{\omega_{n-d+1}e_1, \dots, \omega_n e_d\}. \quad (1.13)$$

El objetivo de esta sección es probar que $K[\mathcal{S}']$ es la Macaulayficación de $K[\mathcal{S}]$. El punto clave de esta demostración es ver que $\dim(K[\mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}]) \leq d - 2$. Para este propósito usamos una técnica desarrollada en [51] que consiste en determinar la dimensión de un anillo graduado estudiando su función de Hilbert. Más concretamente, si I es un ideal ω -homogéneo, entonces, por [49, Lema 1.4], existen polinomios $Q_1, \dots, Q_s \in \mathbb{Z}[t]$ con $s \in \mathbb{Z}^+$ tales que la función de Hilbert de R/I satisface que $HF_{R/I}(ls + i) = Q_i(l)$ para todo $i \in \{1, \dots, s\}$ y para todo $l \in \mathbb{Z}^+$ suficientemente grande. Además, en el trabajo no publicado aún [50], el autor prueba el siguiente resultado.

Teorema 1.4.1. *Sean I un ideal ω -homogéneo y $d = \dim(R/I)$. Denotamos por $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ a la función $h(n) = \sum_{i=0}^n HF_{R/I}(i)$, entonces existen $s \geq 1$ polinomios $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{Z}[t]$ tales que $h(ls + i) = f_i(l)$ para todo $i \in \{1, \dots, s\}$ y $l \in \mathbb{Z}^+$ suficientemente grande. Además, los polinomios f_1, \dots, f_s tienen el mismo término inicial $ct^d/d!$, para cierto $c \in \mathbb{Z}^+$.*

En la demostración del Teorema 1.4.3 describimos la función de Hilbert de $K[\mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}]$ en términos de las respectivas funciones de Hilbert de varios ideales monomiales. El siguiente resultado nos aporta información sobre la dimensión de los anillos asociados a los ideales monomiales que utilizamos para describir la función de Hilbert.

Lema 1.4.2. *Sea $M \subset K[y_1, \dots, y_d]$ un ideal monomial. Si para todo $i \in \{1, \dots, d\}$ existe $x^\alpha \in M$ tal que $x_i \nmid x^\alpha$, entonces $\dim(R/I) \leq d - 2$.*

Demostración. Basta probar que la altura del ideal I es mayor o igual que 2. Por contradicción asumimos que I tiene un primo asociado \mathfrak{P} de altura uno. Puesto que I es monomial, también lo es \mathfrak{P} (ver [66, Theorem 6.1.4]). Por ende, tendríamos que $I \subset \sqrt{I} \subset \mathfrak{P} = (x_i)$, lo que es absurdo. \square

Estamos ya en condiciones de probar el principal resultado de esta sección.

Teorema 1.4.3. *Sea \mathcal{S}' el semigrupo descrito en (1.13). $K[\mathcal{S}']$ es la Macaulayficación de $K[\mathcal{S}]$.*

Demostración. Es claro que $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$. Queda probar que \mathcal{S}' es un semigrupo, que $K[\mathcal{S}']$ es Cohen-Macaulay y que $\dim(K[\mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}]) \leq \dim(K[\mathcal{S}]) - 2$.

Veamos primero que \mathcal{S}' es un semigrupo. Sean $s_1, s_2 \in \mathcal{S}'$, entonces existen $i, j \in \{1, \dots, D\}$ tales que $s_1 = b_i + c_1$ y $s_2 = b_j + c_2$ para ciertos $c_1, c_2 \in \mathbb{N}\{\omega_{n-d+1}e_1, \dots, \omega_n e_d\}$. Así $s_1 + s_2 = b_i + b_j + c_1 + c_2$ y tomamos $l \in \{1, \dots, D\}$ tal que $b_l \sim b_i + b_j$. Por construcción de \mathfrak{B}' , tenemos que $b_{lm} \leq b_{im} + b_{jm}$ para todo $m \in \{1, \dots, D\}$ y, por consiguiente, $s_1 + s_2 \in \mathcal{S}'$.

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Para probar que \mathcal{S}' es Cohen-Macaulay basta observar que $\mathfrak{B}' = \{b \in \mathcal{S}' \mid b - a_i \notin \mathcal{S}'\}$ para todo $i \in \{1, \dots, D\}$ y que $|\mathfrak{B}'| = D$, pues por la Proposición 1.3.3 deducimos que \mathcal{S}' es Cohen-Macaulay.

Veamos por último que $\dim(K[\mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}]) \leq d - 2$. Consideramos la graduación usual $\deg(t^s) = \sum_{i=1}^d s_i$ donde $s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{N}^d$ y observamos que $K[\mathcal{S}]$, $K[\mathcal{S}']$ y $K[\mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}]$ son álgebras graduadas respecto a este orden. Denotamos por HF , HF' y \widehat{HF} las funciones de Hilbert correspondientes a $K[\mathcal{S}]$, $K[\mathcal{S}']$ y $K[\mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}]$, respectivamente. Así la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K[\mathcal{S}] \longrightarrow K[\mathcal{S}'] \longrightarrow K[\mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}] \longrightarrow 0$$

es también graduada y, por lo tanto, $\widehat{HF} = HF' - HF$. Observamos además que $HF' = \sum_{i=1}^D h'_i$ y $HF = \sum_{i=1}^D h_i$, con

$$h'_i(r) := |\{s \in \mathcal{S}' \mid \deg(t^s) = r \text{ y } s \sim b_i\}|, \text{ y}$$

$$h_i(r) := |\{s \in \mathcal{S} \mid \deg(t^s) = r \text{ y } s \sim b_i\}|.$$

Para cada $i \in \{1, \dots, D\}$ definimos un ideal monomial $M_i \subset k[y_1, \dots, y_d]$ como sigue: para todo $b \in \mathcal{S}$ tal que $b \sim b_i$ definimos el monomio $m_b := y_1^{\beta_1} \cdots y_d^{\beta_d}$ si y sólo si $b = b_i + \sum_{j=1}^d \beta_j \omega_{n-d+j} e_j$ y $M_i := (\{m_b \mid b \in \mathcal{S}, b \sim b_i\})$. Consideramos en $K[y_1, \dots, y_d]$ la graduación $\deg_{\omega}(y_j) = \omega_{n-d+j}$ y denotamos por HF_i la correspondiente función de Hilbert ω -homogénea de $K[y_1, \dots, y_d]/M_i$. Tenemos la siguiente igualdad $HF_i(\lambda) = h'_i(\sum_{j=1}^d b_{ij} + \lambda) - h_i(\sum_{j=1}^d b_{ij} + \lambda)$ pues $y^{\beta} \notin M_i$ si y solo si $b_i + \sum_{j=1}^d \beta_j \omega_{n-d+j} e_j \in \mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}$. Entonces, hemos escrito la función de Hilbert \widehat{HF} de $K[\mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}]$ como suma de las funciones de Hilbert de $K[y_1, \dots, y_d]/M_i$, para $i \in \{1, \dots, D\}$. Por construcción de M_1, \dots, M_D y el Lema 1.4.2, tenemos que $\dim(K[y_1, \dots, y_d]/M_i) \leq d - 2$. Por consiguiente, por el Teorema 1.4.1, concluimos que la dimensión de $K[\mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}]$ es el máximo de $\dim(K[y_1, \dots, y_d]/M_i) \leq d - 2$ y obtenemos así el resultado. \square

A continuación ilustramos con un ejemplo el cálculo de la Macaulayficación haciendo uso del conjunto \mathcal{S}_0 . El ejemplo que trabajamos además ilustra un hecho que nos parece interesante resaltar. A saber, puede ocurrir que el ideal asociado al anillo del semigrupo $K[\mathcal{S}']$ no sea homogéneo con la graduación estándar, siendo $K[\mathcal{S}] = R/I_A$ con I_A un ideal homogéneo.

Ejemplo 1.4.4. Consideramos el anillo $K[\mathcal{S}]$, donde $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}^2$ es el semigrupo generado por $\mathcal{A} := \{(1, 9), (4, 6), (5, 5), (10, 0), (0, 10)\} \subset \mathbb{N}^2$. Así, $K[\mathcal{S}] = R/I_A$ e I_A es un ideal homogéneo de grado 10. Obtenemos que

$$\mathcal{S}_0 = \{(0, 0), (1, 9), (2, 18), (3, 27), (13, 17), (4, 6), (5, 5), (6, 14), (7, 23), (8, 12), (9, 11)\}.$$

Además $D = 100/[\mathbb{Z}^2 : \mathbb{Z}\mathcal{S}] = 10$, y calculamos las 10 clases de equivalencia que hay: $S^1 = \{(0, 0)\}$, $S^2 = \{(1, 9)\}$, $S^3 = \{(2, 18)\}$, $S^4 = \{(3, 27), (13, 17)\}$, $S^5 = \{(4, 6)\}$,

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

$S^6 = \{(5, 5)\}$, $S^7 = \{(6, 14)\}$, $S^8 = \{(7, 23)\}$, $S^9 = \{(8, 12)\}$ y $S^{10} = \{(9, 11)\}$. Por consiguiente, la Macaulayficación $K[S']$ de $K[S]$ viene dada por $S' = \mathfrak{B}' + \mathbb{N}\{(10, 0), (0, 10)\}$, donde

$$\mathfrak{B}' = \{(0, 0), (1, 9), (2, 18), (3, 17), (4, 6), (5, 5), (6, 14), (7, 23), (8, 12), (9, 11)\}.$$

O, lo que es lo mismo, S' es el semigrupo generado por el conjunto

$$\mathcal{A}' = \{(1, 9), (3, 17), (4, 6), (5, 5), (10, 0), (0, 10)\}.$$

$e_{\mathcal{A}'}$ es ω -homogéneo con $\omega = (1, 2, 1, 1, 1, 1)$ y sin embargo no es homogéneo en el sentido usual.

1.4.1. Aplicación: Macaulayficación de curvas monomiales lisas

En esta subsección vamos a aplicar la construcción que hemos presentado en la sección anterior para obtener la Macaulayficación de los anillos de coordenadas de las curvas monomiales proyectivas lisas. Más concretamente, demostramos que la Macaulayficación del anillo de coordenadas de cualquier curva monomial lisa es el correspondiente a la curva racional normal del mismo grado.

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado. La curva monomial proyectiva \mathcal{C} definida por la sucesión $m_1 < \dots < m_n$ de enteros primos entre sí es lisa si y sólo si $m_1 = 1$ y $m_n = m_{n-1} + 1$ (ver, e.g., [25, Exercise 2.1.8]). La curva racional normal de grado g , que denotamos por \mathcal{CR}_g , es la curva asociada a la sucesión $1 < 2 < \dots < g$; en otras palabras, es la curva parametrizada por $x_i = s^i t^{g-i}$ para todo $i \in \{1, \dots, g\}$ y $x_{g+1} = t^g$.

Proposición 1.4.5. Sean K un cuerpo algebraicamente cerrado y \mathcal{C} una curva monomial proyectiva lisa de grado g . La Macaulayficación de $K[\mathcal{C}]$ es $K[\mathcal{CR}_g]$.

Demostración. Consideramos la sucesión $m_1 = 1 < m_2 < \dots < m_n = m_{n-1} + 1 = g$ que define \mathcal{C} . Denotamos por $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}^2$ al semigrupo generado por a_1, \dots, a_{n+1} con $a_i := (m_i, m_n - m_i)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y $a_{n+1} := (0, m_n)$; se tiene que $K[\mathcal{C}] = K[\mathcal{S}]$. Por el Teorema 1.4.3, la Macaulayficación de $K[\mathcal{C}]$ es $K[S']$, donde $S' = \mathcal{B}' + \{(g, 0), (0, g)\}$ y \mathcal{B}' es el conjunto descrito en (1.13). Para determinar \mathcal{B}' vamos primero a estudiar el conjunto $\mathcal{S}_0 = \{s \in \mathcal{S} \mid s - (g, 0), s - (0, g) \notin \mathcal{S}\}$. Observamos que $(m_1, m_n - m_1) = (1, g - 1) \in \mathcal{S}$, por lo tanto $s_i = (i, i(g - 1)) \in \mathcal{S}$ para cada $i \in \{1, \dots, g - 1\}$. De aquí se deduce que para cada $i \in \{1, \dots, g - 1\}$ existe $v_i = (i, v_{i2}) \in \mathcal{S}_0$. Por otro lado, puesto que $(g - 1, 1) \in \mathcal{S}$, podemos hacer el mismo razonamiento que antes y llegamos a que para cada $i \in \{1, \dots, g - 1\}$ existe $w_i = (w_{i1}, i) \in \mathcal{S}_0$. Como además

- $\mathbb{Z}\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x + y \equiv 0 \pmod{g}\}$, y
- para todo $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}^2$, $s_1 \sim s_2$ si y solo si $s_1 - s_2 = \lambda(g, 0) + \mu(0, g)$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$;

Identificador del documento: 1177709	Código de verificación: cLLpSpfn
Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

se tiene que $v_i \sim w_{g-i}$ para todo $i \in \{1, \dots, g-1\}$ y, por tanto $(i, g-i) \in \mathcal{B}'$ para todo $i \in \{1, \dots, g-1\}$. El número de elementos de \mathcal{B}' es igual al número de clases de equivalencia en \mathcal{S}_0 , que es $D := g^2/[\mathbb{Z}^2 : \mathbb{Z}\mathcal{S}] = g$. En consecuencia, $\mathcal{B}' = \{(i, g-i) \mid 1 \leq i < g\} \cup \{(0, 0)\}$ y concluimos que $K[\mathcal{S}'] = K[\mathcal{C}\mathcal{R}_g]$. \square

Como consecuencia directa del resultado anterior obtenemos lo siguiente.

Corolario 1.4.6. *Sea \mathcal{C} una curva monomial lisa, entonces*

\mathcal{C} es aritméticamente Cohen-Macaulay $\iff \mathcal{C}$ es una curva racional normal.

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
 Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Capítulo 2

Invariantes algebraicos de curvas monomiales proyectivas asociadas a sucesiones aritméticas generalizadas

*"Algebra is but written geometry and
 geometry is but figured algebra."
 Sophie Germain*

En este capítulo estudiaremos invariantes algebraicos del anillo de coordenadas $K[\mathcal{C}] = R/I(\mathcal{C})$ de una curva monomial proyectiva \mathcal{C} . Recordamos que toda curva monomial proyectiva viene determinada por una sucesión de enteros positivos $m_1 < \dots < m_n$ como la curva definida paraméricamente por las ecuaciones

$$x_1 = s^{m_1}t^{m_n-m_1}, \dots, x_{n-1} = s^{m_{n-1}}t^{m_n-m_{n-1}}, x_n = s^{m_n}, x_{n+1} = t^{m_n}.$$

En particular, prestaremos especial atención a aquellas curvas en las que $m_1 < \dots < m_n$ es una sucesión aritmética generalizada.

En la primera sección recordamos cómo, a partir de una resolución libre minimal graduada de R/I siendo I un ideal homogéneo, podemos determinar fácilmente si R/I es Cohen-Macaulay, Gorenstein o intersección completa y calcular la serie de Hilbert y la regularidad de Castelnuovo-Mumford de R/I . Recordamos también los resultados necesarios para definir la estrategia que usaremos en el resto del capítulo para el cálculo de la regularidad. Asimismo definimos las álgebras de Koszul e incluimos algunos resultados básicos útiles para caracterizar las álgebras de Koszul. También incluimos en esta sección un resultado que proporciona una expresión de la serie de Hilbert de $K[\mathcal{C}]$, cuando \mathcal{C} es una curva monomial proyectiva asociada a una sucesión de enteros positivos, en términos del ideal inicial del ideal de definición de la curva respecto del orden lexicográfico inverso graduado.

Una vez definida la estrategia que seguimos en este capítulo, el resto del mismo lo dedicamos a estudiar clases de curvas monomiales proyectivas. Comenzamos en la segunda

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
 Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

sección con curvas monomiales proyectivas asociadas a una sucesión aritmética (que ya demostramos que son aritméticamente Cohen-Macaulay en el Capítulo 1). En este contexto proporcionamos fórmulas para la regularidad de Castelnuovo-Mumford y la función y la serie de Hilbert del anillo de coordenadas de la curva. Se obtiene también el tipo Cohen-Macaulay y una caracterización de cuándo son Gorenstein.

En la tercera sección de este capítulo se obtienen algunos invariantes de las curvas monomiales proyectivas asociadas a sucesiones aritméticas generalizadas. En particular, comenzamos caracterizando cuándo $K[\mathcal{C}]$ es intersección completa. Para una cierta subfamilia de sucesiones aritméticas generalizadas damos una base de Gröbner de $I(\mathcal{C})$ respecto del orden lexicográfico inverso graduado. Como consecuencia de tener esta base de Gröbner, proporcionamos la regularidad y la serie y función de Hilbert de $K[\mathcal{C}]$. Asimismo, probamos que la regularidad se alcanza en el último paso de la resolución libre minimal graduada de $K[\mathcal{C}]$.

Finalmente, en el último capítulo de esta sección estudiaremos la propiedad de Koszul de $K[\mathcal{C}]$. Más concretamente, caracterizamos cuándo $K[\mathcal{C}]$ es Koszul siendo $m_1 < \dots < m_n$ una sucesión aritmética generalizada. También listamos todas las curvas monomiales proyectivas cuya álgebra $K[\mathcal{C}]$ es Koszul y tiene codimensión 2 y 3.

2.1. Generalidades

Sea $I \subset R$ un ideal homogéneo y

$$\mathcal{F} : 0 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{\beta_p} R(-e_{pj}) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{j=1}^{\beta_1} R(-e_{1j}) \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

una resolución libre minimal graduada de R/I como R -módulo. Comenzamos esta sección con varios resultados clásicos que indican qué peculiaridades tiene esta resolución cuando R/I es Cohen-Macaulay, Gorenstein o intersección completa.

Sea $d = \dim(R/I)$. Recordamos que $p = \text{pd}(R/I) \geq n - d$ y que, como ya vimos en la Proposición 1.1.10, R/I es Cohen-Macaulay si y solo si $p = n - d$. Por tanto cuando R/I es Cohen-Macaulay, su resolución es lo más corta posible.

Definición 2.1.1. Si R/I Cohen-Macaulay, al entero β_p de la resolución \mathcal{F} (2.1) se le denomina el tipo Cohen-Macaulay de R/I . Además, R/I se dice Gorenstein si es Cohen-Macaulay de tipo 1.

Usualmente se toma como definición que R/I es Gorenstein si y solo si el módulo canónico es libre de rango 1; no obstante, esta definición coincide con la aquí dada (ver, e.g., [41, Proposition 3.2]).

Cuando R/I es Gorenstein se tiene que su resolución como R -módulo es ‘simétrica’,

Firmado por:	Fecha:
EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

más precisamente se tiene que

$$\bigoplus_{j=1}^{\beta_i} R(-e_{ij}) \simeq \bigoplus_{j=1}^{\beta_{p-i}} R(-(e_{p1} - e_{p-ij})), \text{ con } i \in \{1, \dots, p-1\} \quad (2.2)$$

y, en particular, $\beta_{p-i} = \beta_i$ para todo $i \in \{1, \dots, p-1\}$ y $e_{p1} = e_{ij} + e_{p-ij}$ para todo $i \in \{1, \dots, p-1\}$ y para todo $j \in \{1, \dots, \beta_i\}$ (ver, e.g., [19, Theorem 1.5]).

Una subfamilia notable de los anillos Gorenstein es la de los anillos de intersección completa.

Definición 2.1.2. *Sea I un ideal homogéneo de R . Se dice que I es intersección completa si está generado por una sucesión regular. Además, se dice que R/I es intersección completa si I lo es.*

Al ser I homogéneo, como consecuencia de la versión graduada del Lema de Nakayama tenemos que todos los sistemas minimales de generadores homogéneos de I tienen el mismo número de elementos y, además, que las siguientes propiedades son equivalentes (ver, e.g., [55, Theorem 2.12]):

- I es intersección completa,
- I está generado por $\text{ht}(I)$ elementos,
- I está generado por $\text{ht}(I)$ elementos homogéneos,
- $\beta_1 = \text{ht}(I)$, y
- cualquier sistema minimal de generadores homogéneos de I tiene $\text{ht}(I)$ elementos.

Por tanto, para determinar si I es intersección completa basta con calcular un sistema minimal de generadores homogéneos y comprobar si tiene $h := \text{ht}(I)$ elementos. Cuando I es intersección completa, el complejo de Koszul asociado a un sistema minimal de generadores homogéneos de I es una resolución libre minimal graduada de R/I (ver, e.g., [55, Chapter 14]). Por tanto, si los grados de los generadores minimales de I son $d_1, \dots, d_h \in \mathbb{Z}^+$, la resolución libre minimal graduada viene dada por

$$0 \rightarrow R \left(- \sum_{j=1}^h d_j \right) \cdots \rightarrow \bigoplus_{\substack{|J|=i \\ J \subset \{1, \dots, h\}}} R \left(- \sum_{j \in J} d_j \right) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{j=1}^h R(-d_j) \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

Como consecuencia, si R/I es intersección completa, entonces es Gorenstein.

El ideal I es homogéneo, lo que equivale a que I sea ω -homogéneo con $\omega = (1, \dots, 1)$. La serie y la función de Hilbert de R/I son la serie y función de Hilbert ω -graduada de la Definición 1.1.7 con $\omega = (1, \dots, 1)$. Más concretamente, si R_s denota el espacio vectorial generado por los polinomios homogéneos de grado s , entonces $HF_{R/I}(s) :=$

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

$\dim_K(R_s/(I \cap R_s))$, para todo $s \in \mathbb{N}$, y $\mathcal{H}_{R/I}(t) := \sum_{s \in \mathbb{N}} HF_{R/I}(s) t^s$ son la función y la serie de Hilbert de R/I , respectivamente.

Ahora bien, al ser I homogéneo, existe un único polinomio con coeficientes racionales tal que $P(s) = HF_{R/I}(s)$ para $s \gg 0$ (ver, por ejemplo, [3]); este polinomio $P(t)$ se denomina el *polinomio de Hilbert* de R/I . El menor entero s_0 tal que $P(s) = HF_{R/I}(s)$ para todo $s \geq s_0$ es la *regularidad de la función de Hilbert* de R/I .

Es bien sabido que para todo ideal homogéneo I , la serie de Hilbert de $\mathcal{H}_{R/I}(t)$ se puede expresar (formalmente) como una expresión racional con denominador $(1-t)^d$, donde $d = \dim(R/I)$; es decir, existe un polinomio $h(t) \in \mathbb{Z}[t]$ tal que

$$\mathcal{H}_{R/I}(t) = \frac{h(t)}{(1-t)^d}. \quad (2.4)$$

Este polinomio $h(t)$ es el denominado *h-polinomio* de R/I .

Como ya vimos en la Proposición 1.1.8, se puede expresar la serie de Hilbert de R/I en términos de la resolución (2.1) por medio de la fórmula siguiente:

$$\mathcal{H}_{R/I}(t) = \frac{1 + \sum_{i=1}^p (-1)^i \sum_{j=1}^{\beta_i} t^{e_{ij}}}{(1-t)^n}. \quad (2.5)$$

La regularidad de Castelnuovo-Mumford se puede definir vía la resolución libre minimal graduada (ver [29], y también [6], para definiciones equivalentes) como sigue:

Definición 2.1.3. *La regularidad de Castelnuovo-Mumford, o simplemente regularidad, de R/I es*

$$\text{reg}(R/I) := \max \{e_{ij} - i; 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq \beta_i\}.$$

Schenzel demostró en [58, Theorem 3.11] (ver también [13, Corollary 1.2] para una prueba elemental del mismo resultado) que la regularidad se alcanza en la ‘cola’ de la resolución, es decir, en alguno de los módulos libres $\bigoplus_{j=1}^{\beta_i} R(-e_{ij})$ con $n - \dim(R/I) \leq i \leq p = \text{pd}_R(R/I)$ y, por tanto, que $\text{reg}(R/I) := \max \{e_{ij} - i; n - \dim(R/I) \leq i \leq p, 1 \leq j \leq \beta_i\}$.

En particular, cuando R/I es Cohen-Macaulay, la regularidad se alcanza en el último paso de la resolución y $\text{reg}(R/I) := \max \{e_{pj} - p; 1 \leq j \leq \beta_p\}$, donde $p = \text{pd}_R(R/I) = n - \dim(R/I)$. También como consecuencia se tiene lo siguiente.

Nota 2.1.4. *Si R/I es Cohen-Macaulay, la regularidad de R/I se puede obtener a partir de la serie de Hilbert de R/I . En efecto, al alcanzarse la regularidad de R/I en el último paso de la resolución, el grado del polinomio $q(x) = 1 + \sum_{i=1}^p (-1)^i \sum_{j=1}^{\beta_i} t^{e_{ij}}$ es exactamente $\max \{e_{pj}; 1 \leq j \leq \beta_p\} = \text{reg}(R/I) + p$. Por tanto, de (2.5) se tiene que el grado de la serie de Hilbert de R/I vista como función racional es*

$$\deg(q(x)) - n = \text{reg}(R/I) + p - n = \text{reg}(R/I) - \dim(R/I).$$

Además, de (2.4) se deduce a su vez que la regularidad de R/I coincide con el grado del *h-polinomio* de R/I .

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
 Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Cuando R/I es Gorenstein, de (2.2) se deduce la siguiente igualdad para su serie de Hilbert (ver también por [61, Theorem 4.1]):

$$\mathcal{H}_{R/I}(1/t) = (-1)^d t^{n-e_{p^1}} \mathcal{H}_{R/I}(t).$$

Como consecuencia, el h -polinomio de R/I es simétrico, es decir, si $\sum_{i=0}^{\ell} h_i t^i$ es el h -polinomio de R/I , entonces $h_i = h_{\ell-i}$ para todo i .

En el caso particular en que R/I es intersección completa, de (2.3) se derivan las siguientes fórmulas para su serie de Hilbert:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{R/I}(t) &= \frac{1 + \sum_{i=1}^h (-1)^i \sum_{J \subset \{1, \dots, h\}, |J|=i} t^{\sum_{j \in J} d_j}}{(1-t)^n} = \\ &= \frac{\prod_{i=1}^h (1-t^{d_i})}{(1-t)^n} = \frac{\prod_{i=1}^h (1+t+\dots+t^{d_i-1})}{(1-t)^d} \end{aligned}$$

y para su regularidad de Castelnuovo-Mumford: $\text{reg}(R/I) = \sum_{i=1}^h (a_i - 1)$.

En general el cálculo de una resolución libre minimal graduada de R/I es una tarea muy costosa computacionalmente y hay pocas excepciones (como es el caso de las intersecciones completas) en las que se conocen descripciones explícitas de la resolución. En esta sección hemos visto cómo:

- conocer si R/I satisface alguna propiedad algebraica como ser Cohen-Macaulay, Gorenstein y/o intersección completa, o
- conocer invariantes cohomológicos tales como la regularidad y/o la serie de Hilbert de R/I ,

aporta información relevante sobre la resolución de R/I . Es por ello que han surgido multitud de trabajos que buscan caracterizar estas propiedades o calcular estos invariantes sin pasar por el cálculo explícito de la resolución. En este capítulo, seguiremos esta filosofía para estudiar los anillos coordenados de las curvas monomiales proyectivas asociadas a sucesiones aritméticas generalizadas. En particular, para el cálculo de la regularidad haremos uso de algunos resultados que se encuentran en [15]. En este artículo se describe un algoritmo para el cálculo de la regularidad de R/I y está implementado en la librería [16] para el software SINGULAR. En pocas palabras, la idea del algoritmo consiste en asociar a cada ideal homogéneo I , un ideal monomial de tipo encajado J de manera que $\text{reg}(R/I) = \text{reg}(R/J)$; además el cálculo de la regularidad de R/J es sencillo.

Definición 2.1.5. *Un ideal monomial $J \subset R$ es de tipo encajado si todo ideal primo $\mathfrak{p} \subset R$ asociado a J es de la forma $\mathfrak{p} = (x_1, \dots, x_i)$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Recordamos que $\text{in}(I)$ denota al ideal inicial de I respecto al orden lexicográfico inverso graduado.

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Teorema 2.1.6. [15, Theorem 4.1] Si $\text{in}(I)$ es un ideal monomial de tipo encajado, entonces $\text{reg}(R/I) = \text{reg}(R/\text{in}(I))$.

En general, la regularidad de R/I está acotada superiormente por la regularidad de R/J siendo J el ideal inicial de I con respecto a cualquier orden monomial (ver [5]). Cuando este orden es el lexicográfico inverso graduado, Bayer y Stillman prueban en [7] que en coordenadas genéricas la regularidad de R/I y la de $R/\text{in}(I)$ coinciden. Además, haciendo uso de un resultado de Galligo [30], deducen en [7, Proposición 2.9] que en característica 0 esta regularidad coincide además con el mayor grado de un generador de $\text{in}(I)$ menos uno. El Teorema 2.1.6 asegura que cuando $\text{in}(I)$ es de tipo encajado, la regularidad de R/I y la de $R/\text{in}(I)$ coinciden sin necesidad de efectuar cambios de coordenadas y sin importar la característica del cuerpo. Además, en el contexto que vamos a trabajar el ideal inicial de I es siempre de tipo encajado, como nos asegura el siguiente resultado cuya demostración es sencilla (ver [15, Proposition 3.2] para criterios efectivos para determinar si un ideal monomial es de tipo encajado).

Proposición 2.1.7. Si $\dim(R/I) = 2$ y $K[x_{n-1}, x_n] \hookrightarrow R/I$ es una normalización de Noether, entonces $\text{in}(I)$ es de tipo encajado.

La regularidad de los ideales monomiales de tipo encajado es fácil de calcular. En particular, haremos uso de un resultado que se encuentra en [15] donde se calcula dicha regularidad de forma combinatoria mediante la descomposición irreducible del ideal. Recordamos que un ideal se dice que es *irreducible* si no se puede escribir como intersección de otros dos ideales. Los ideales monomiales irreducibles tienen una estructura sencilla como se muestra en el siguiente lema.

Lema 2.1.8. (ver, e.g., [66, Proposition 6.1.16]) Sea $J \subseteq R$ un ideal monomial. J es irreducible si y sólo si J se puede escribir como $J = (x_{i_1}^{a_1}, \dots, x_{i_s}^{a_s})$, donde $i_1, \dots, i_s \in \{1, \dots, n\}$ son todos distintos y $a_j \in \mathbb{N}$ para todo $j \in \{1, \dots, s\}$.

Una *descomposición irreducible* de un ideal monomial es una expresión de dicho ideal como intersección de ideales monomiales irreducibles. Si en esta intersección no sobra ninguno de los ideales se dice que la descomposición irreducible es *irredundante*. Además un ideal monomial tiene una única descomposición irreducible irredundante (ver, por ejemplo, [66, Theorem 6.1.17]), que llamaremos *la descomposición irreducible*. Los ideales que aparecen en una descomposición irreducible irredundante de un ideal monomial se denominan sus *componentes irreducibles*. En la librería [10] para el software SINGULAR se han implementado diversos métodos para calcular la descomposición irreducible de un ideal monomial.

El resultado principal en el que nos apoyamos para el cálculo de la regularidad es el siguiente.

Proposición 2.1.9. [15, Corolary 3.17] Sea $M \subset R$ un ideal monomial de tipo encajado y sea $M = \bigcap_{i=1}^s \mathfrak{q}_i$ su descomposición irreducible. Entonces,

$$\text{reg}(R/M) = \max \{ \text{reg}(R/\mathfrak{q}_i) \mid i \in \{1, \dots, s\} \}.$$

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Por último, dado que los ideales monomiales irreducibles son siempre intersección completa, se tiene lo siguiente (ver [14, Remark 2.3]):

Proposición 2.1.10. *Sea $\mathfrak{q} = (x_{i_1}^{d_1}, \dots, x_{i_r}^{d_r}) \subset R$ un ideal monomial irreducible, entonces $\text{reg}(R/\mathfrak{q}) = d_1 + \dots + d_r - r$*

En este capítulo consideraremos la curva proyectiva \mathcal{C} definida por una sucesión de enteros positivos $m_1 < \dots < m_n$ y estudiaremos el anillo $K[\mathcal{C}] = R/I(\mathcal{C})$ donde $I(\mathcal{C})$ es el ideal de definición de \mathcal{C} . Recordamos que $I(\mathcal{C}) \subset K[x_1, \dots, x_{n+1}]$ es el núcleo del homomorfismo de K -álgebras

$$\begin{aligned} \varphi: R = K[x_1, \dots, x_{n+1}] &\longrightarrow K[t_1, t_2] \\ x_i &\longmapsto t_1^{m_i} t_2^{m_n - m_i} \text{ para } i \in \{1, \dots, n-1\} \\ x_n &\longmapsto t_1^{m_n} \\ x_{n+1} &\longmapsto t_2^{m_n} \end{aligned}$$

Nuestra estrategia para el cálculo de la regularidad de Castelnuovo-Mumford es hallar una base de Gröbner minimal de $I(\mathcal{C})$. Luego, obtener la descomposición irreducible (irredundante) de $\text{in}(I(\mathcal{C}))$ y a partir de esta deducir la regularidad atendiendo a la Proposición 2.1.9.

Asimismo, en virtud de un clásico resultado de Macaulay [46] que demuestra que la serie (y la función) de Hilbert de $K[\mathcal{C}] = R/I(\mathcal{C})$ coincide con la de $R/\text{in}(I(\mathcal{C}))$ para cualquier orden monomial, también obtenemos la función y la serie de Hilbert de $R/I(\mathcal{C})$ a partir de la base de Gröbner minimal de $I(\mathcal{C})$. El siguiente resultado muestra cómo obtener la serie de Hilbert $\mathcal{H}_{K[\mathcal{C}]}$ de $K[\mathcal{C}]$ a partir de $\text{in}(I)$.

Proposición 2.1.11. *Sea \mathcal{C} una curva monomial proyectiva. Entonces,*

$$\mathcal{H}_{K[\mathcal{C}]}(t) = \frac{\sum_{x^\gamma \notin J+(x_n, x_{n+1})} t^{|\gamma|} - t \sum_{\substack{x^\gamma \notin J+(x_{n+1}) \\ x_n x^\gamma \in J}} t^{|\gamma|}}{(1-t)^2},$$

donde $|\gamma| := \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i$ para $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ y $J := \text{in}(I(\mathcal{C}))$. Además, si $K[\mathcal{C}]$ es Cohen-Macaulay, entonces

$$\mathcal{H}_{K[\mathcal{C}]}(t) = \frac{\sum_{x^\gamma \notin J+(x_n, x_{n+1})} t^{|\gamma|}}{(1-t)^2}.$$

Demostración. Como la serie de Hilbert de $K[\mathcal{C}] = R/I(\mathcal{C})$ coincide con la de R/J , entonces $\mathcal{H}_{K[\mathcal{C}]}(t) = \sum_{x^\gamma \notin J} t^{|\gamma|}$. Observamos que

$$\mathcal{H}_{K[\mathcal{C}]}(t) = \sum_{\substack{x^\gamma \notin J \\ \gamma_{n+1}=0}} t^{|\gamma|} + \sum_{\substack{x^\gamma \notin J \\ \gamma_{n+1} \neq 0}} t^{|\gamma|}.$$

Como estamos trabajando con el orden lexicográfico inverso graduado y el ideal $I(\mathcal{C})$ es un ideal primo homogéneo, tenemos que la variable x_{n+1} no aparece en ningún generador

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015. Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección https://sede.ull.es/validacion/	
Identificador del documento: 1177709	Código de verificación: cLLpSpfn
Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

minimal de J . Por lo tanto se deduce que $\{x^\gamma \notin J \mid \gamma_{n+1} \neq 0\} = \{x_{n+1}x^\beta \mid x^\beta \notin J\}$.
 Luego,

$$\mathcal{H}_{K[C]}(t) = \sum_{\substack{x^\gamma \notin J \\ \gamma_{n+1}=0}} t^{|\gamma|} + t \sum_{x^\beta \notin J} t^{|\beta|} = \sum_{\substack{x^\gamma \notin J \\ \gamma_{n+1}=0}} t^{|\gamma|} + t \mathcal{H}_{K[C]}(t).$$

Hemos llegado así a que

$$(1-t) \mathcal{H}_{K[C]}(t) = \sum_{\substack{x^\gamma \notin J \\ \gamma_{n+1}=0}} t^{|\gamma|} = \sum_{\substack{x^\gamma \notin J \\ \gamma_n=\gamma_{n+1}=0}} t^{|\gamma|} + \sum_{\substack{x^\gamma \notin J \\ \gamma_n \neq 0, \gamma_{n+1}=0}} t^{|\gamma|}.$$

Además,

$$\sum_{\substack{x^\gamma \notin J \\ \gamma_n \neq 0, \gamma_{n+1}=0}} t^{|\gamma|} = t \sum_{\substack{x^\beta \notin J \\ \beta_{n+1}=0}} t^{|\beta|} - t \sum_{\substack{x^\beta \notin J, x_n x^\beta \in J \\ \beta_{n+1}=0}} t^{|\beta|}.$$

Para obtener finalmente el resultado, observamos que

$$t \sum_{\substack{x^\beta \notin J \\ \beta_{n+1}=0}} t^{|\beta|} = t(1-t) \mathcal{H}_{K[C]}(t).$$

Por último, si $K[C]$ es Cohen-Macaulay, por el Teorema 1.2.3 tenemos que $x_n x^\gamma \in J$ si y sólo si $x^\gamma \in J$ y sigue el resultado. \square

Por último, en este capítulo también estudiamos la propiedad Koszul del anillo $R/I(C)$.

Definición 2.1.12. *Sea I un ideal ω -homogéneo, R/I es un álgebra de Koszul si K tiene una resolución lineal como R/I -módulo.*

El clásico ejemplo de álgebra de Koszul es $T = K[x]/(x^2)$, ya que K tiene como resolución minimal:

$$\dots \rightarrow T \xrightarrow{x} T \xrightarrow{x} \dots \xrightarrow{x} T \rightarrow K \rightarrow 0,$$

donde $T \xrightarrow{x} T$ denota el morfismo multiplicación por x .

Una de las principales propiedades de las álgebras de Koszul, demostrada por Avramov y Eisenbud [4], es la siguiente: si R/I es un álgebra de Koszul y T es un R/I -módulo finitamente generado, si bien puede ser que la resolución de T como R/I sea infinita, su regularidad como R/I -módulo es finita.

Para estudiar la propiedad de Koszul nos apoyaremos las siguientes implicaciones bien conocidas (ver, por ejemplo, [23]). Se verifica que (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii), donde

- (i) $I(C)$ posee una base de Gröbner cuadrática
- (ii) $R/I(C)$ es Koszul
- (iii) $I(C)$ está generado por cuádricas.

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015. Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección https://sede.ull.es/validacion/	
Identificador del documento: 1177709	Código de verificación: cLLpSpfn
Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

2.2. Curvas monomiales proyectivas definidas por sucesiones aritméticas

En esta sección estudiaremos el anillo $K[\mathcal{C}]$ cuando $m_1 < \dots < m_n$ es una sucesión aritmética de números enteros positivos primos entre sí, es decir, $m_i = m_1 + (i-1)d$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, con $d, m_1 \in \mathbb{Z}^+$ tales que $\gcd\{m_1, d\} = 1$. En el capítulo anterior, en el Teorema 1.2.11, obtuvimos una base de Gröbner de $I(\mathcal{C})$, el ideal de definición de la curva proyectiva \mathcal{C} que define la sucesión $m_1 < \dots < m_n$ con respecto al orden lexicográfico inverso graduado. Este es el punto clave para obtener los invariantes que en esta sección vamos a estudiar.

El primer objetivo que nos planteamos es hallar una fórmula para calcular la regularidad de Castelnuovo-Mumford de $K[\mathcal{C}]$. Para ello, a partir de la base de Gröbner de $I(\mathcal{C})$, vamos a obtener la descomposición irreducible del ideal inicial de $I(\mathcal{C})$ con respecto al orden lexicográfico inverso graduado. A partir de esta, seremos capaces de calcular la regularidad del mismo.

En el Lema 1.2.10 introdujimos los enteros (α, k) definidos unívocamente por la sucesión aritmética $m_1 < \dots < m_n$ y que nos sirven para describir la base de Gröbner del Teorema 1.2.11. Recordamos que

$$\alpha = q + d \text{ y } k = n - r, \quad (2.6)$$

donde $m_1 = q(n-1) + r$ con $q \in \mathbb{N}$ y $r \in \{1, \dots, n-1\}$.

Proposición 2.2.1. 1. Si $k < n-1$, entonces

$$\text{in}(I(\mathcal{C})) = \bigcap_{i=2}^{n-1} (x_1^{\alpha+\delta_i}, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i^2, x_{i+1}, \dots, x_{n-1})$$

es la descomposición irreducible de $\text{in}(I(\mathcal{C}))$, donde $\delta_i = 0$ si $i \in \{2, \dots, k\}$ y $\delta_i = 1$ si $i \in \{k+1, \dots, n-1\}$.

2. Si $k = n-1$, entonces

$$\text{in}(I(\mathcal{C})) = \left[\bigcap_{i=2}^{n-1} (x_1^\alpha, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i^2, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}) \right] \bigcap (x_1^{\alpha+1}, x_2, \dots, x_{n-1})$$

es la descomposición irreducible de $\text{in}(I(\mathcal{C}))$.

Demostración. Sea $A_i := (x_1^{\alpha+\delta_i}, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i^2, x_{i+1}, \dots, x_{n-1})$, para todo $i : 2 \leq i \leq n-1$, donde $\delta_i = 0$ si $i \in \{2, \dots, k\}$ y $\delta_i = 1$ si $i \in \{k+1, \dots, n-1\}$; y sea también $B := (x_1^{\alpha+1}, x_2, \dots, x_{n-1})$. Consideramos $A := \bigcap_{i=2}^{n-1} A_i$ si $k < n-1$, o $A := \bigcap_{i=2}^{n-1} A_i \cap B$ en caso contrario, y queremos probar que $\text{in}(I(\mathcal{C})) = A$. Por el Teorema 1.2.11, tenemos que $\{x_i x_j \mid 2 \leq i \leq j \leq n-1\} \cup \{x_1^\alpha x_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ es un sistema minimal de generadores de $\text{in}(I(\mathcal{C}))$ con respecto al orden lexicográfico inverso graduado. Observamos que

Firmado por:	Fecha:
EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

$\text{in}(I(\mathcal{C})) \subseteq A_i$ para todo $i \in \{2, \dots, n-1\}$ y, si $k = n-1$, se tiene que $\text{in}(I(\mathcal{C})) \subseteq B$. Por lo tanto $\text{in}(I(\mathcal{C})) \subseteq A$.

Para ver el contenido recíproco, tomamos un monomio $l \notin \text{in}(I(\mathcal{C}))$. Tenemos entonces tres posibilidades:

(a) $l = x_1^a x_i x_n^b x_{n+1}^c$ con $0 \leq a < \alpha$, $i \in \{2, \dots, n-1\}$ y $b, c \geq 0$,

(b) $l = x_1^a x_n^b x_{n+1}^c$ con $0 \leq a \leq \alpha$ y $b, c \geq 0$, o

(c) $l = x_1^\alpha x_i x_n^b x_{n+1}^c$ con $i \in \{k+1, \dots, n-1\}$ y $b, c \geq 0$.

Si se verifica (a), entonces $l \notin A_i$. En (b), tenemos que $l \notin A_{n-1}$ si $k < n-1$ y $l \notin B$ si $k = n-1$. Por último si estamos en las condiciones de (c), observamos que $k < i \leq n-1$, y entonces $l \notin A_i$. Así pues $\text{in}(I(\mathcal{C})) = A$.

Queda, para finalizar la demostración, ver que no hay ningún ideal redundante en la intersección. Sea $i \in \{2, \dots, n-1\}$. Observamos que $x_i \in A_j$ para todo $j \neq i$ y $x_i \in B$ si $k = n-1$, pero $x_i \notin \text{in}(I(\mathcal{C}))$; y por consiguiente A_i no es redundante. Si $k = n-1$, entonces $x_1^\alpha \in A_i$ para todo $i \in \{2, \dots, n-1\}$; sin embargo, $x_1^\alpha \notin \text{in}(I(\mathcal{C}))$, y se concluye así que B no es redundante. \square

Recordamos en este punto que $\text{reg}(K[\mathcal{C}]) = \text{reg}(R/I(\mathcal{C})) = \text{reg}(R/\text{in}(I(\mathcal{C})))$ donde $\text{in}(I(\mathcal{C}))$ es el ideal inicial de $I(\mathcal{C})$ respecto al orden lexicográfico inverso graduado ya que $\text{in}(I(\mathcal{C}))$ es de tipo encajado. Además, $\text{reg}(R/\text{in}(I(\mathcal{C})))$ es el máximo de las regularidades de las componentes irreducibles de $I(\mathcal{C})$. Por tanto, a la vista de estas observaciones y las Proposiciones 2.1.10 y 2.2.1, deducimos fácilmente el siguiente resultado que nos proporciona una fórmula para el cálculo de la regularidad en términos de la sucesión aritmética de partida.

Teorema 2.2.2. *Sea \mathcal{C} la curva monomial proyectiva definida por la sucesión aritmética $m_1 < \dots < m_n$ de enteros primos entre sí. Entonces,*

$$\text{reg}(K[\mathcal{C}]) = \left\lfloor \frac{m_n - 1}{n - 1} \right\rfloor.$$

Demostración. Sean α, k como en (2.6). Como consecuencia directa de las proposiciones 2.2.1 y 2.1.9 tenemos que

$$\text{reg}(K[\mathcal{C}]) = \begin{cases} \alpha + 1 & \text{si } k < n - 1, \\ \alpha & \text{si } k = n - 1. \end{cases}$$

Observamos que $k = n-1$ si y sólo si $m_n \equiv 1 \pmod{n-1}$. Por tanto, si $k = n-1$, entonces $\alpha = q + d = \left\lfloor \frac{m_1-1}{n-1} \right\rfloor + d = \left\lfloor \frac{m_n-1}{n-1} \right\rfloor = \left\lceil \frac{m_n-1}{n-1} \right\rceil$. Además, si $k < n-1$ se tiene que $\alpha + 1 = q + d + 1 = \left\lfloor \frac{m_1-1}{n-1} \right\rfloor + d + 1 = \left\lfloor \frac{m_n-1}{n-1} \right\rfloor + 1 = \left\lceil \frac{m_n-1}{n-1} \right\rceil$. \square

Ahora explotaremos de nuevo el hecho de tener $\text{in}(I(\mathcal{C}))$ para hallar la serie y la función de Hilbert y el tipo Cohen-Macaulay de $K[\mathcal{C}]$. Estos resultados se encuentran también

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015. Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección https://sede.ull.es/validacion/	
Identificador del documento: 1177709	Código de verificación: cLLpSpfn
Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

en [48] en un contexto más restringido. A saber, cuando $\{m_1, \dots, m_n\}$ es además un sistema minimal de generadores del semigrupo numérico $\sum_{i=1}^n \mathbb{N}m_i$. Se puede demostrar que la condición anterior es equivalente a que $n < m_1$. Nosotros no supondremos que $\{m_1, \dots, m_n\}$ es un sistema minimal de generadores del semigrupo que generan.

Por un lado sabemos que si $m_1 < \dots < m_n$ es una sucesión aritmética, $K[\mathcal{C}]$ es Cohen-Macaulay por el Corolario 1.2.14. Por otro, tenemos en el Teorema 1.2.11 una base de Gröbner de $I(\mathcal{C})$. Por tanto, aplicando la Proposición 2.1.11 obtenemos el siguiente resultado que proporciona la serie de Hilbert de $K[\mathcal{C}]$ en términos de la sucesión aritmética que define la curva.

Teorema 2.2.3. *La serie de Hilbert de $K[\mathcal{C}]$ es*

$$\mathcal{H}_{K[\mathcal{C}]}(t) = \frac{1 + (n-1)(t + \dots + t^\alpha) + (n-1-k)t^{\alpha+1}}{(1-t)^2}.$$

Demostración. Sabemos que $K[\mathcal{C}]$ es Cohen-Macaulay por el Corolario 1.2.14. Por tanto, por la Proposición 2.1.11, tenemos que $(1-t)^2 \mathcal{H}_{K[\mathcal{C}]}(t) = \sum_{x^\gamma \notin \text{in}(I(\mathcal{C})) + (x_n, x_{n+1})} t^{|\gamma|}$. Así, usando ahora el Teorema 1.2.11 obtenemos que $\{x^\gamma \mid x^\gamma \notin \text{in}(I(\mathcal{C})) + (x_n, x_{n+1})\} = \{1\} \cup \{x_1^\alpha x_i \mid 1 \leq i \leq n-1 \text{ and } 0 \leq \alpha \leq \alpha-1\} \cup \{x_1^\alpha x_i \mid k+1 \leq i \leq n-1\}$ y se deduce el resultado de forma fácil. \square

Nota 2.2.4. *Como ya indicamos en la Nota 2.1.4, al ser $K[\mathcal{C}]$ Cohen-Macaulay, a partir del resultado anterior podemos obtener también la fórmula para la regularidad de $K[\mathcal{C}]$ dada en el Teorema 2.2.2. En efecto, como $\text{reg}(K[\mathcal{C}])$ coincide con el grado del h -polinomio de $K[\mathcal{C}]$ que, por el Teorema 2.2.3, es $1 + (n-1)(t + \dots + t^\alpha) + (n-1-k)t^{\alpha+1}$. Se deduce entonces que $\text{reg}(K[\mathcal{C}]) = \alpha$ si $k = n-1$ y $\text{reg}(K[\mathcal{C}]) = \alpha + 1$ si $k < n-1$.*

Teorema 2.2.5. *La función de Hilbert de $K[\mathcal{C}]$ es*

$$HF_{K[\mathcal{C}]}(s) = \begin{cases} \binom{s+2}{2} + (n-2)\binom{s+1}{2} & \text{si } 0 \leq s < \alpha, \\ m_n s + \alpha(2-n+k) - \binom{\alpha+1}{2} - (n-2)\binom{\alpha}{2} + 1 & \text{si } s \geq \alpha. \end{cases}$$

Demostración. Por el Teorema 1.2.11 tenemos que

$$R/\text{in}(I(\mathcal{C})) \simeq \bigoplus_{\gamma, \beta \in \mathbb{N}} \left\{ \left(\bigoplus_{0 \leq \lambda \leq \alpha} K\{x_1^\lambda x_n^\beta x_{n+1}^\gamma\} \right) \oplus \left(\bigoplus_{\substack{0 \leq \lambda < \alpha \\ 2 \leq i \leq n-1}} K\{x_1^\lambda x_i x_n^\beta x_{n+1}^\gamma\} \right) \right. \\ \left. \oplus \left(\bigoplus_{k+1 \leq i \leq n-1} K\{x_1^\alpha x_i x_n^\beta x_{n+1}^\gamma\} \right) \right\}$$

Así, llegamos a que

$$HF_{K[\mathcal{C}]}(s) = HF_{R/I(\mathcal{C})}(s) = HF_{R/\text{in}(I(\mathcal{C}))}(s) = \binom{s+2}{2} + (n-2)\binom{s+1}{2},$$

para todo $s \in \{0 \leq s < \alpha\}$. Por otro lado, para $s \geq \alpha + 1$, se verifica que

$$\begin{aligned} HF_{K[\mathcal{C}]}(s) &= \sum_{i=0}^{\alpha} (s+1-i) + (n-2) \sum_{i=0}^{\alpha-1} (s-i) + (n-1-k)(s-\alpha) \\ &= (s+1)(\alpha+1) - \binom{\alpha+1}{2} + (n-2) \left(s\alpha - \binom{\alpha}{2} \right) + (n-1-k)(s-\alpha) \\ &= ((n-1)\alpha + n-k)s + \alpha(2-n+k) - \binom{\alpha+1}{2} - (n-2)\binom{\alpha}{2} + 1. \end{aligned}$$

Para finalizar, basta observar que $(n-1)\alpha + n-k = (n-1)(q+d) + n-k = m_n$. \square

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Nota 2.2.6. Cabe destacar de nuevo la relación entre la regularidad de Castelnuovo-Mumford de $K[\mathcal{C}]$ y la regularidad de la función de Hilbert del anillo. Recordamos aquí que la regularidad de la función de Hilbert de $K[\mathcal{C}]$ es el menor entero s_0 tal que para todo $s \geq s_0$ el polinomio y la función de Hilbert de $K[\mathcal{C}]$ coinciden en s .

Como $K[\mathcal{C}]$ es Cohen-Macaulay, la regularidad de $K[\mathcal{C}]$ es una unidad mayor que la regularidad de su función de Hilbert (ver, por ejemplo, [14, Theorem 2.5]). Por tanto, el Teorema 2.2.5 nos permite de nuevo obtener la fórmula de la regularidad del Teorema 2.2.2. En efecto, el polinomio de Hilbert de $K[\mathcal{C}]$ es $P_{K[\mathcal{C}]}(s) := m_n s + \alpha(2 - n + k) - \binom{\alpha+1}{2} - (n-2)\binom{\alpha}{2} + 1$ y $P_{R/I}(s) = HF_{R/I}(s)$ para todo $s \geq \alpha$. Además no es difícil comprobar que $P_{K[\mathcal{C}]}(\alpha-1) \neq HF_{K[\mathcal{C}]}(\alpha-1)$ si y sólo si $k < n-1$. Por otro lado, si $k = n-1$, $P_{K[\mathcal{C}]}(\alpha-2) \neq HF_{K[\mathcal{C}]}(\alpha-2)$; y obtenemos de este modo la regularidad.

Como $K[\mathcal{C}]$ es Cohen-Macaulay, el siguiente invariante que nos planteamos calcular es el tipo Cohen-Macaulay de $K[\mathcal{C}]$ y para hacerlo nos basaremos en un resultado de Cavaliere y Niesi [21].

Teorema 2.2.7. [21, Theorem 4.9] Sean los conjuntos

$$\mathcal{B} := \{\deg(x^\gamma) \mid x^\gamma \notin \text{in}(I(\mathcal{C})) + (x_n, x_{n+1})\} \subset \mathbb{N}^2 \text{ y}$$

$$\tilde{\mathcal{B}} := \{s \in \mathcal{B} \mid s + a_i \notin \mathcal{B}, \forall i \in \{1, \dots, n-1\}\},$$

donde $a_i := (m_i, m_n - m_i)$ para $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $a_n := (m_n, 0)$ y $a_{n+1} := (0, m_n)$ y \deg denota la multigradación en \mathbb{N}^2 inducida por $\deg(x_i) = a_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n+1\}$.

Si $K[\mathcal{C}]$ es Cohen-Macaulay, entonces el tipo Cohen-Macaulay de $K[\mathcal{C}]$ es el número de elementos en $\tilde{\mathcal{B}}$.

Teorema 2.2.8. Sean $c \in \mathbb{N}$ y $\tau \in \{1, \dots, n-1\}$ tales que $m_1 - 1 = c(n-1) + \tau$. El tipo Cohen-Macaulay de $K[\mathcal{C}]$ es τ .

Demostración. Tomamos $a_i := (m_i, m_n - m_i) \in \mathbb{N}^2$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y $a_{n+1} := (0, m_n) \in \mathbb{N}^2$ y consideramos la graduación en R inducida por $\deg(x_i) := a_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n+1\}$. Por el Teorema 1.2.11, tenemos que

$$\mathcal{B} = \{(0, 0)\} \cup \{ba_1 + a_i \mid 0 \leq b \leq \alpha - 1, 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\alpha a_1 + a_i \mid k+1 \leq i \leq n-1\},$$

donde $k \in \{1, \dots, n-1\}$ satisface que $m_1 + k \equiv 1 \pmod{n-1}$. Afirmamos que

$$\tilde{\mathcal{B}} = \begin{cases} \{\alpha a_1 + a_i \mid k+1 \leq i \leq n-1\} & \text{si } k < n-1 \\ \{(\alpha-1)a_1 + a_i \mid 1 \leq i \leq n-1\} & \text{si } k = n-1. \end{cases}$$

Para $k < n-1$, si $c = ba_1 + a_i$ con $0 \leq b \leq \alpha - 1$ y $1 \leq i \leq n-1$, entonces $c + a_{n-i} = ba_1 + a_i + a_{n-i} = (b+1)a_1 + a_{n-1} \in \mathcal{B}$ y, por tanto, $c \notin \tilde{\mathcal{B}}$. Además, es fácil ver que $\alpha a_1 + a_i \in \tilde{\mathcal{B}}$ para todo $i : k+1 \leq i \leq n-1$. Para $k = n-1$ se sigue fácilmente la afirmación.

Firmado por:	Fecha:
EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Por consiguiente, por el Teorema 2.2.7, el tipo Cohen-Macaulay de $K[\mathcal{C}]$ es $n - 1$ si $k = n - 1$, o $n - 1 - k$, en caso contrario; y el resultado se obtiene por la definición del entero k . \square

Como consecuencia directa del resultado anterior obtenemos en el siguiente una caracterización de la propiedad Gorenstein de $K[\mathcal{C}]$ pues, por definición, solo hay que imponer que el tipo Cohen-Macaulay sea uno.

Corolario 2.2.9. $K[\mathcal{C}]$ es Gorenstein $\iff m_1 \equiv 2 \pmod{n - 1}$.

Veamos algunos ejemplos que ilustren los resultados de esta sección.

Ejemplo 2.2.10. Consideramos el conjunto $\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ con $m_1 := 10$, $m_2 := 13$, $m_3 := 16$, $m_4 := 19$ y $m_5 := 22$. Observamos que $m_1 = 2 \cdot 4 + 2$, entonces $q = 2$ y $r = 2$ y así tenemos que $\alpha = q + d = 5$ y $k = 5 - 2 = 3$. Por el Teorema 2.2.2 obtenemos que

$$\text{reg}(K[\mathcal{C}]) = \lceil (22 - 1)/(5 - 1) \rceil = 6.$$

Por otro lado, como $m_1 - 1 = 2(n - 1) + 1$, el tipo Cohen-Macaulay es $\tau = 1$ según el Teorema 2.2.8 y, en consecuencia, $K[\mathcal{C}]$ es Gorenstein.

Por otro lado, aplicando el Teorema 2.2.3, tenemos que

$$\mathcal{H}_{K[\mathcal{C}]}(t) = \frac{1 + \sum_{i=1}^5 4t^i + t^6}{(1 - t)^2}$$

y por el Teorema 2.2.5 la función de Hilbert es

$$HF_{K[\mathcal{C}]}(s) = \begin{cases} \binom{s+2}{2} + 3\binom{s+1}{2} & \text{if } 0 \leq s < 5, \\ 22s - 44 & \text{if } s \geq 5, \end{cases},$$

donde $\alpha = 5$ es la regularidad de la función de Hilbert, pues $k = 3 < n - 1 = 4$ (ver Nota 2.2.6).

Ejemplo 2.2.11. Consideramos el conjunto $\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ con $m_1 := 4$, $m_2 := 5$, $m_3 := 6$, $m_4 := 7$ y $m_5 := 8$. Observamos que $m_1 = 0 \cdot 4 + 4$, luego $q = 0$ y $r = 4$, y así $\alpha = 1$ y $k = 1$. Obtenemos que

$$\text{reg}(K[\mathcal{C}]) = \lceil (8 - 1)/(5 - 1) \rceil = 2.$$

Ahora, como $m_1 - 1 = 0(n - 1) + 3$, el tipo Cohen-Macaulay es $\tau = 3$. La serie y la función de Hilbert son, respectivamente,

$$\mathcal{H}_{K[\mathcal{C}]}(t) = \frac{1+4t+3t^2}{(1-t)^2} \text{ and } HF_{R/I}(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } s = 0, \\ 8s - 2 & \text{if } s \geq 1, \end{cases}$$

donde $\alpha = 1$ es la regularidad de la función de Hilbert.

Firmado por:	Fecha:
EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

2.3. Curvas monomiales proyectivas definidas por sucesiones aritméticas generalizadas

En esta sección trabajamos con el anillo $K[\mathcal{C}]$ siendo $m_1 < \dots < m_n$ una sucesión aritmética generalizada de enteros positivos primos entre sí, es decir, $m_i = hm_1 + (i-1)d$ para todo $i \in \{2, \dots, n\}$, con $h, d, m_1 \in \mathbb{Z}^+$ tales que $\gcd\{m_1, d\} = 1$.

El estudio de la propiedad Cohen-Macaulay de $K[\mathcal{C}]$ bajo las hipótesis que hemos planteado se realizó en la Sección 1.2.1 concluyendo en el Corolario 1.2.6 que solo es Cohen-Macaulay si la sucesión es aritmética. Para estudiar el anillo en este caso vamos a hacer uso de los resultados correspondientes para el caso aritmético de la sección precedente.

El primer resultado nos proporciona las curvas monomiales proyectivas asociadas a sucesiones aritméticas generalizadas cuyo anillo de coordenadas es intersección completa. Este resultado se encuentra también en [12, Theorem 6.1], donde se llega al mismo con otra aproximación al problema.

Corolario 2.3.1. *Sea $m_1 < \dots < m_n$ una sucesión aritmética generalizada de enteros positivos primos entre sí. Entonces, $K[\mathcal{C}]$ es una intersección completa si y sólo si $n = 3$, $h = 1$, y m_1 es par.*

Demostración. Supongamos que $K[\mathcal{C}]$ es una intersección completa, entonces en particular $K[\mathcal{C}]$ es Cohen-Macaulay y, por el Corolario 1.2.6, $m_1 < \dots < m_n$ es una sucesión aritmética. Luego, usando el hecho de que la base de Gröbner del Teorema 1.2.11 es un sistema minimal de generadores de $I(\mathcal{C})$, $K[\mathcal{C}]$ es intersección completa si y sólo si $\binom{n-1}{2} + k = n - 1$. Esta igualdad se verifica si y sólo si $n = 3$ y $k = 1$ o, lo que es lo mismo, si $n = 3$ y m_1 es par. \square

En el resto de la sección vamos a suponer que $m_1 < \dots < m_n$ es una sucesión aritmética generalizada de enteros positivos primos entre sí donde $n \geq 3$, $h > 1$ y h divide a d . Bajo estas hipótesis vamos a demostrar que el ideal $I(\mathcal{C})$ está íntimamente relacionado con $I(\mathcal{C}')$, donde \mathcal{C}' es la curva monomial proyectiva asociada a la sucesión aritmética $m_2 < \dots < m_n$. Equivalentemente, puesto que $\gcd\{m_2, \dots, m_n\} = h$, \mathcal{C}' es la curva monomial proyectiva asociada a la sucesión aritmética $m_2/h < \dots < m_n/h$ que ahora satisface que son enteros primos entre sí y podemos aplicar todos los resultados de la sección anterior para obtener los invariantes asociados a $I(\mathcal{C}')$. Por facilitar notación, suponemos que $I(\mathcal{C}') \subset K[x_2, \dots, x_{n+1}]$. El primer resultado que presentamos muestra la relación entre los ideales iniciales de $I(\mathcal{C})$ y $I(\mathcal{C}')$ con respecto al orden lexicográfico inverso graduado con $x_1 > \dots > x_{n+1}$. Esta relación va a ser fundamental para la consecución del resto de la sección.

Proposición 2.3.2. $\text{in}(I(\mathcal{C}')) = \text{in}(I(\mathcal{C})) \cap K[x_2, \dots, x_{n+1}]$.

Demostración. Es evidente que $\text{in}(I(\mathcal{C}')) \subset \text{in}(I(\mathcal{C})) \cap K[x_2, \dots, x_{n+1}]$. Para ver el otro contenido consideramos el vector $\lambda = (0, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tal que $x^\lambda \in$

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

$\text{in}(I(\mathcal{C}))$ y suponemos sin pérdida de generalidad que $\lambda_{n+1} = 0$. Entonces, existe $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tal que $f = x^\lambda - x^\epsilon \in I(\mathcal{C})$ e $\text{in}(f) = x^\lambda$. Consideramos dos casos:

Caso 1: Si $\epsilon_1 = 0$, entonces $f \in I(\mathcal{C}) \cap K[x_2, \dots, x_n] = I(\mathcal{C}')$ y $x^\lambda \in \text{in}(I(\mathcal{C}'))$.

Caso 2: Si $\epsilon_1 \neq 0$, entonces probaremos que existe $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tal que $\mu_1 < \epsilon_1$ y $g := x^\lambda - x^\mu \in I$ con $\text{in}(g) = x^\lambda$. Afirmamos para empezar que $\epsilon_1 \geq h$. De hecho, $\epsilon_1 m_1 = \sum_{i=2}^n (\lambda_i - \epsilon_i) m_i$, $\text{gcd}\{m_1, h\} = 1$ y h divide a m_i para todo $i \in \{2, \dots, n\}$; por lo tanto, $\epsilon_1 = h\epsilon'_1$. También, existe $j \in \{3, \dots, n\}$ tal que $\epsilon_j > 0$. En caso contrario tendríamos que $\epsilon_1 m_1 + \epsilon_2 m_2 = \sum_{i=2}^n \lambda_i m_i$ y $m_1 < m_2 \leq m_i$ para todo $i \in \{2, \dots, n\}$, entonces $\sum_{i=2}^n \lambda_i < \epsilon_1 + \epsilon_2$. Esto implica que $\lambda_{n+1} > 0$ pues f es homogéneo, absurdo. Luego, tomamos $j \in \{3, \dots, n\}$ tal que $\epsilon_j > 0$ y consideramos el monomio $x^\mu = x^\epsilon x_1^{-h} x_2 x_{j-1} x_j^{-1} x_{n+1}^{h-1}$. Asimismo tomamos $g := x^\lambda - x^\mu \neq 0$ y es fácil comprobar que $g \in I(\mathcal{C})$ y $x^\mu < x^\epsilon$, así $\text{in}(g) = \text{in}(f)$, y $\mu_1 = \epsilon_1 - h < \epsilon_1$. Iterando el mismo argumento si fuese necesario, obtenemos el resultado. \square

Nota 2.3.3. Cuando h no divide a d es fácil encontrar ejemplos en los que la conclusión de la Proposición 2.3.2 no se satisfaga.

Por ejemplo, si consideramos el conjunto $\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ donde $m_1 := 2$, $m_2 := 35$, $m_3 := 46$, $m_4 := 57$ y $m_5 := 68$, y por tanto $h = 12$ y $d = 11$. Por el Teorema 1.2.11 tenemos que $\text{in}(I(\mathcal{C}')) = (x_2^{23}, x_2^{22} x_3, x_3^2, x_3 x_4, x_4^2)$. Sin embargo, se puede comprobar que $\text{in}(I(\mathcal{C})) \cap K[x_2, \dots, x_6] = (x_2^2, x_3^2, x_3 x_4, x_4^2)$

Incluso considerando $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ con $m_1 := 5$, $m_2 := 26$, $m_3 = 32$ y $m_4 := 38$, donde tenemos que $h = 4$, $d = 6$ y por tanto $\text{gcd}\{h, d\} = h/2 = 2 \neq 1$. Observamos que $\text{in}(I(\mathcal{C}')) = (x_2^{10}, x_2^9 x_3, x_3^2) \neq \text{in}(I(\mathcal{C})) \cap K[x_2, \dots, x_5] = (x_2^5, x_2^5 x_3, x_3^2)$.

La estrategia para hallar los invariantes tiene como punto fundamental, al igual que en la sección anterior, obtener una base de Gröbner de $I(\mathcal{C})$ respecto del orden lexicográfico inverso graduado. Para dar dicha base introducimos previamente dos lemas técnicos.

Lema 2.3.4. Sean $p \in \mathbb{N}$ y $s \in \{1, \dots, n-1\}$ tales que $m_1 = p(n-1) + s$ y sea $\delta := ph + d + h$. Entonces

(a) $\delta m_1 = m_{s+1} + pm_n$,

(b) si $\delta m_1 = m_j + p'm_n$ con $p' \in \mathbb{N}$ y $j \in \{2, \dots, n\}$, entonces $j = s+1$ y $p' = p$, y

(c) $\delta = \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b m_1 \in \sum_{i=2}^n \mathbb{N} m_i\}$.

Demostración. Es directo comprobar (a) y (b). Para ver (c) consideramos $M := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b m_1 \in \sum_{i=2}^n \mathbb{N} m_i\}$ y tenemos que h divide a M ya que h divide a m_i para todo $i \in \{2, \dots, n\}$ y $\text{gcd}\{m_1, h\} = 1$. Podemos considerar entonces que $M = hM'$ con $M' = \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid b m_1 \in \sum_{i=2}^n \mathbb{N} m'_i\}$ donde $m'_i = m_i/h$ para todo $i \in \{2, \dots, n\}$. Entonces, por el Lema 1.2.10 aplicado a la sucesión aritmética $m_1 < m'_2 < \dots < m'_n$ de diferencia d/h , llegamos a que $M' = p + d/h + 1$. Por consiguiente $M = hM' = \delta$ y hemos probado de este modo (c). \square

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Lema 2.3.5. Sea $\beta_j := \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid (jh)m_1 + bm_2 \in \sum_{i=3}^n \mathbb{N}m_i\}$, para cada $j \in \{0, \dots, \delta' - 1\}$, donde $\delta' := \delta/h$, entonces

- (a) para cada $j \in \{0, \dots, \delta' - 1\}$, existen únicos $\sigma_j \in \{3, \dots, n\}$ y $\lambda_j \in \mathbb{N}$ tales que $jh m_1 + \beta_j m_2 = m_{\sigma_j} + \lambda_j m_n$, y
- (b) tomando $\sigma_{\delta'} := s + 1$, $\lambda_{\delta'} := p$ and $\beta_{\delta'} := 0$, entonces, para todo $j \in \{1, \dots, \delta'\}$ tenemos que:
- (b.1) si $\sigma_j \neq n$, entonces $\sigma_{j-1} = \sigma_j + 1$, $\lambda_{j-1} = \lambda_j$ y $\beta_{j-1} = \beta_j + 1$;
- (b.2) si $\sigma_j = n$, entonces $\sigma_{j-1} = 3$, $\lambda_{j-1} = \lambda_j + 1$ and $\beta_{j-1} = \beta_j + 2$.

Demostración. Por definición de β_j podemos escribir

$$jh m_1 + \beta_j m_2 = m_{\sigma_j} + \lambda_j m_n,$$

con $\lambda_j \in \mathbb{N}$ y $\sigma_j \in \{3, \dots, n\}$. Supongamos ahora que existe $\sigma'_j \in \{3, \dots, n\}$ y $\lambda'_j \in \mathbb{N}$ tales que $jh m_1 + \beta_j m_2 = m_{\sigma'_j} + \lambda'_j m_n$. Suponemos, sin pérdida de generalidad, que $\sigma_j \geq \sigma'_j$. Entonces, $\lambda'_j \geq \lambda_j$ y llegamos a que $m_{\sigma_j} - m_{\sigma'_j} = (\lambda'_j - \lambda_j)m_n$. Por tanto $\lambda'_j = \lambda_j$ y $\sigma_j = \sigma'_j$, y probamos (a).

Veamos ahora (b). Consideramos primero el caso $\sigma_j \neq n$. Como $jh m_1 + \beta_j m_2 = m_{\sigma_j} + \lambda_j m_n$, entonces $(j-1)hm_1 + (\beta_j + 1)m_2 = m_{\sigma_j+1} + \lambda_j m_n$, así se tiene que $\beta_{j-1} \leq \beta_j + 1$. Por otro lado $(j-1)hm_1 + \beta_{j-1}m_2 = m_{\sigma_{j-1}} + \lambda_{j-1}m_n$, lo que implica que $jh m_1 + (\beta_{j-1} - 1)m_2 = m_{\sigma_{j-1}-1} + \lambda_{j-1}m_n$ y deducimos que $\beta_{j-1} - 1 \geq \beta_j$. Por tanto $\beta_j = \beta_{j-1} - 1$, $\sigma_j = \sigma_{j-1} - 1$ y $\lambda_j = \lambda_{j-1}$.

Queda el caso $\sigma_j = n$. De las igualdades $jh m_1 + \beta_j m_2 = m_n + \lambda_j m_n$ y $2m_2 = m_3 + hm_1$, se deduce que $(j-1)hm_1 + (\beta_j + 2)m_2 = m_3 + (\lambda_j + 1)m_n$, y en consecuencia $\beta_{j-1} \leq \beta_j + 2$. Además, como $(j-1)hm_1 + \beta_{j-1}m_2 = m_{\sigma_{j-1}} + \lambda_{j-1}m_n$, se tiene que

$$jh m_1 + (\beta_{j-1} - 1)m_2 = m_{\sigma_{j-1}-1} + \lambda_{j-1}m_n. \quad (2.7)$$

Si $\sigma_{j-1} = 3$, entonces $\beta_{j-1} - 2 \geq \beta_j$; y en caso contrario, es decir, si $\sigma_{j-1} > 3$, tenemos que $\beta_{j-1} - 1 \geq \beta_j$. Así pues $\beta_j + 1 \leq \beta_{j-1} \leq \beta_j + 2$. Supongamos que $\beta_{j-1} = \beta_j + 1$, usando (2.7) obtenemos entonces que $jh m_1 + \beta_j m_2 = m_{\sigma_{j-1}-1} + \lambda_{j-1}m_n$. Ahora bien, por el apartado (a), $\sigma_j = \sigma_{j-1} - 1$, una contradicción con la hipótesis $\sigma_j = n$. Concluimos entonces que $\beta_{j-1} = \beta_j + 2$, $\sigma_{j-1} = 3$ y $\lambda_{j-1} = \lambda_j + 1$. \square

Nota 2.3.6. Los Lemas 2.3.4 y 2.3.5 proporcionan una manera algorítmica de calcular los enteros β_j, σ_j y λ_j comenzando por $\beta_{\delta'} = 0$, $\lambda_{\delta'} = p$ y $\sigma_{\delta'} = s + 1$. Sin embargo, podemos obtener una fórmula explícita para calcularlos. De hecho se tiene que

$$\beta_{\delta'-j} = j + \lfloor (j + s - 2)/(n - 2) \rfloor,$$

$\sigma_{\delta'-j}$ es el único entero perteneciente a $\{3, \dots, n\}$ tal que

$$\sigma_{\delta'-j} \equiv s + 1 + j \pmod{n - 2},$$

y

$$\lambda_{\delta'-j} = p + \lfloor (j + s - 2)/(n - 2) \rfloor.$$

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Nota 2.3.7. Es interesante destacar que $\beta_0 = \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid bm_2 \in \sum_{i=3}^n \mathbb{N}m_i\}$. Luego, aplicando el Lema 1.2.10 a la sucesión $m_2/h < \dots < m_n/h$, se tiene que $\beta_0 = \alpha + 1$, donde

$$\alpha = \left\lfloor \left(\frac{m_n}{h} - 1 \right) / (n - 2) \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m_n - h}{nh - 2h} \right\rfloor.$$

Además, si C' denota la curva monomial proyectiva asociada a la sucesión aritmética $m_2 < \dots < m_n$, tenemos que $\text{reg}(K[C'])$ es β_0 si $\sigma_0 \neq 3$, o $\beta_0 - 1$ si $\sigma_0 = 3$ según el Teorema 2.2.2.

Siguiendo la notación de los Lemas anteriores, somos capaces de dar una base de Gröbner minimal de $I(\mathcal{C})$ con respecto al orden lexicográfico inverso graduado.

Teorema 2.3.8. Sea $\mathcal{G}_1 \subset K[x_2, \dots, x_n, x_{n+1}]$ una base de Gröbner minimal de $I(\mathcal{C}')$ con respecto al orden lexicográfico inverso graduado, donde \mathcal{C}' es la curva monomial proyectiva asociada a la sucesión aritmética $m_2 < \dots < m_n$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{G} := \mathcal{G}_1 \cup & \{x_1^h x_i - x_2 x_{i-1} x_{n+1}^{h-1} \mid 3 \leq i \leq n\} \\ & \cup \{x_1^j x_2^{\beta_j} - x_{\sigma_j} x_n^{\lambda_j} x_{n+1}^{j(h-1)+(d/h)} \mid 1 \leq j \leq \delta/h\}, \end{aligned}$$

es una base de Gröbner minimal de $I(\mathcal{C})$ con respecto al orden lexicográfico inverso graduado. Asimismo, \mathcal{G} es un sistema minimal de generadores de $I(\mathcal{C})$.

Demostración. Sean $h_i := x_1^h x_i - x_2 x_{i-1} x_{n+1}^{h-1} \in I(\mathcal{C})$ para todo $i \in \{3, \dots, n\}$ y $p_j := x_1^j x_2^{\beta_j} - x_{\sigma_j} x_n^{\lambda_j} x_{n+1}^{j(h-1)+(d/h)} \in I(\mathcal{C})$ para todo $j \in \{1, \dots, \delta/h\}$. Por el Lema 2.3.4 tenemos que $p_j \in I(\mathcal{C})$. Además es claro que $\mathcal{G}_1 \subset I(\mathcal{C})$ puesto que $I(\mathcal{C}') \subset I(\mathcal{C})$.

Probemos ahora que $\text{in}(I(\mathcal{C})) \subset (\text{in}(\mathcal{G}))$, donde $(\text{in}(\mathcal{G}))$ es el ideal generado por los términos iniciales de los binomios que forman \mathcal{G} con respecto al orden lexicográfico inverso graduado. Consideramos $f = x^\lambda - x^\epsilon \in I(\mathcal{C})$ con $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$, $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$, $\text{gcd}\{x^\lambda, x^\epsilon\} = 1$ y $\text{in}(f) = x^\lambda$. Consideramos dos casos:

Caso 1: Si $\lambda_1 = 0$, entonces $\text{in}(f) \in \text{in}(I(\mathcal{C})) \cap k[x_2, \dots, x_{n+1}]$ y, por la Proposición 2.3.2, obtenemos que $\text{in}(f) \in \text{in}(\mathcal{G}_1) \subset \text{in}(\mathcal{G})$.

Caso 2: Si $\lambda_1 > 0$, entonces h divide a λ_1 pues $\lambda_1 m_1 = \sum_{i=2}^n (\epsilon_i - \lambda_i) m_i$, h divide a m_i para todo $i \in \{2, \dots, n\}$ y $\text{gcd}\{m_1, h\} = 1$. Si existe $i \in \{3, \dots, n\}$ tal que $\lambda_i > 0$, entonces $\text{in}(h_i)$ divide a x^λ y deducimos que $x^\lambda \in \text{in}(\mathcal{G})$. Por lo tanto, solo queda considerar $f = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} - x_2^{\epsilon_2} \dots x_{n+1}^{\epsilon_{n+1}}$. Si $\lambda_1 \geq \delta$, entonces $\text{in}(p_{\delta/h})$ divide a x^λ por el Lema 1.2.10. En otro caso, es decir, si $\lambda_1 < \delta$, entonces $\lambda_1 m_1 + \lambda_2 m_2 = \epsilon_3 m_3 + \dots + \epsilon_n m_n$ y tomando $j := (\delta - \lambda_1)/h$ se deduce que $\delta_2 \geq \beta_j$ por la definición de β_j . Por consiguiente $\text{in}(p_j)$ divide $\text{in}(f)$ y terminamos la prueba.

Queda probar que \mathcal{G} es un sistema minimal de generadores de $I(\mathcal{C})$. Para probarlo es suficiente verlo cuando \mathcal{G}_1 es la base de Gröbner de $I(\mathcal{C}')$ que nos facilita el Teorema 1.2.11. Sabemos que \mathcal{G}_1 es un sistema minimal de generadores de $I(\mathcal{C}')$. Como todos los elementos de grado 2 de \mathcal{G} pertenecen a \mathcal{G}_1 , se sigue que los elementos de grado 2 no son redundantes. Sea entonces $f \in \mathcal{G}$ de grado mayor o igual que 3. Si $f = h_i$ o $f = p_i$, tenemos que $\text{in}(g)$

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

no divide a $\text{in}(f)$ con $g \in \mathcal{G} \setminus \{f\}$ y, por consiguiente, f no es redundante. Supongamos ahora que $\text{in}(f) = x_2^\alpha x_i$ y

$$f = \sum_{g \in \mathcal{G} \setminus \{f\}} h_g g, \quad (2.8)$$

donde $h_g = 0$ o $\deg(h_g) = \deg(f) - \deg(g)$. Consideramos el homomorfismo τ inducido por $x_1 \mapsto 0$, $x_{n+1} \mapsto 0$ y $x_i \mapsto x_i$ para todo $i \in \{2, \dots, n\}$. Aplicando τ a (2.8) se deduce que existe una forma lineal l tal que $x_2^\alpha l \in L$, donde L es el ideal $(x_j x_k - x_{j-1} x_{k+1} \mid 3 \leq j < k \leq n-1)$, que es primo y binomial. Por lo tanto, $l \in L$, una contradicción. Así pues \mathcal{G} es un sistema minimal de generadores de $I(\mathcal{C})$. \square

Nota 2.3.9. *Teniendo en cuenta los Teoremas 1.2.11 y 2.3.8, proporcionamos una base de Gröbner minimal de $I(\mathcal{C})$ con respecto al orden lexicográfico inverso graduado. Notar además que si tomamos $h = 1$ en esta base, el conjunto \mathcal{G} obtenido no es una base de Gröbner minimal de $I(\mathcal{C})$. Es decir, el Teorema 2.3.8 no generaliza el Teorema 1.2.11.*

Nota 2.3.10. *Si no imponemos la hipótesis de que h divide a d , en general, no toda base de Gröbner minimal de $I(\mathcal{C})$ con respecto al orden lexicográfico inverso graduado es un sistema minimal de generadores del ideal. En efecto, si consideramos el conjunto $\{2, 35, 46, 57, 68\}$ del Ejemplo 2.3.3, se tiene que una base de Gröbner minimal de $I(\mathcal{C})$ tiene 9 elementos y sin embargo el número de generadores de un sistema minimal de generadores del ideal, es 8.*

Como hicimos en la sección anterior, nos servimos de la base de Gröbner de $I(\mathcal{C})$ para hallar la regularidad de $K[\mathcal{C}]$. Comenzamos por dar la descomposición irreducible de $\text{in}(I(\mathcal{C}))$.

Proposición 2.3.11. *Sean δ y β_j como en los Lemas 2.3.4 y 2.3.5 y sean q_1, \dots, q_m las componentes irreducibles de $I(\mathcal{C})$. Entonces*

$$\text{in}(I(\mathcal{C})) = \bigcap_{i=1}^m (x_1^h, q_i) \cap \left[\bigcap_{j=2}^{\delta/h} (x_1^{jh}, x_2^{\beta_j-1}, x_3, \dots, x_n) \right].$$

es la descomposición irreducible de $\text{in}(I(\mathcal{C}))$.

Demostración. Sean $A_i := (x_1^h, q_i)$ y $B_j := (x_1^{jh}, x_2^{\beta_j-1}, x_3, \dots, x_n)$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ y $j \in \{2, \dots, \delta/h\}$. Por el Teorema 2.3.8 obtenemos que

$$\text{in}(I(\mathcal{C})) = \text{in}(I(\mathcal{C}')) + (x_1^h x_i \mid 3 \leq i \leq n) + (x_1^{jh} x_2^{\beta_j} \mid 1 \leq j \leq \delta/h)$$

es un sistema minimal de generadores de $\text{in}(I(\mathcal{C}))$ con respecto al orden lexicográfico inverso graduado. En consecuencia, es fácil comprobar que $\text{in}(I(\mathcal{C})) \subset A_i, B_j$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ y $j \in \{2, \dots, \delta/h\}$. Para ver el contenido contrario, consideramos un monomio l tal que $l \notin \text{in}(I(\mathcal{C}))$ y distinguimos dos casos:

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

- (a) $l = x_1^a x_i x_{n+1}^c$ con $0 \leq a < h$, $i \in \{2, \dots, n\}$ y $c \geq 0$, o
 (b) $l = x_1^a x_2^b x_{n+1}^c$ con $h \leq jh \leq a < \delta$, $b < \beta_j$ y $c \geq 0$.

En (a), tomando $l' = x_i x_{n+1}^c$ se tiene que $l' \notin \text{in}(I(\mathcal{C}'))$ y, por lo tanto, $l' \notin \mathfrak{q}_i$ para cierto $i \in \{1, \dots, m\}$. Luego, $l \notin A_i$. Por otro lado, si se verifica (b), tenemos que $l \notin B_{j+1}$.

Queda probar que no hay ideales redundantes en la intersección. Usando el mismo argumento que en la Proposición 2.2.1 llegamos a que A_i no es redundante para todo $i \in \{1, \dots, m\}$. Por último, B_j no es redundante para $j \in \{2, \dots, \delta/h\}$ ya que $x_1^{jh-1} x_2^{\beta_{j-1}-1} \notin \text{in}(I(\mathcal{C}))$ y, sin embargo, $x_1^{jh-1} \in B_k$ para todo $k < j$ y $x_2^{\beta_{j-1}-1} \in B_k$ para todo $k > j$. \square

Teniendo la descomposición irreducible de $\text{in}(I(\mathcal{C}))$ somos capaces de obtener el valor de la regularidad.

Teorema 2.3.12. *Sea $m_1 < \dots < m_n$ una sucesión aritmética generalizada tal que $\text{gcd}\{m_1, d\} = 1$, $h > 1$ y h divide a d . Sea $\delta := \lfloor (m_1 - 1)/(n - 1) \rfloor h + d + h$, entonces*

$$\text{reg}(K[\mathcal{C}]) = \begin{cases} \delta - 1, & \text{si } n - 1 \text{ no divide a } m_1, \\ \delta, & \text{si } n - 1 \text{ divide a } m_1. \end{cases}$$

Demostración. Por la Proposición 2.3.11, tenemos que

$$\text{in}(I(\mathcal{C})) = \bigcap_{i=1}^m (x_1^h, \mathfrak{q}_i) \cap \left[\bigcap_{j=2}^{\delta/h} (x_1^{jh}, x_2^{\beta_{j-1}}, x_3, \dots, x_n) \right],$$

donde $\{\mathfrak{q}_i\}_{i=1}^m$ son las componentes irreducibles de $\text{in}(I(\mathcal{C}'))$. Así la Proposición 2.1.9 nos conduce a que

$$\text{reg}(K[\mathcal{C}]) = \max \{h - 1 + \text{reg}(K[\mathcal{C}']), \max_{j \in \{2, \dots, \delta/h\}} \{jh + \beta_{j-1} - 2\}\}.$$

Asimismo, es claro que $\max_{j \in \{2, \dots, \delta/h\}} \{jh + \beta_{j-1} - 2\} = \delta + \beta_{\delta/h-1} - 2$ pues $h \geq 2$ y $\beta_{j-1} - \beta_j \leq 2$ para todo $j \in \{2, \dots, \delta/h\}$. Por lo tanto deducimos que $\text{reg}(K[\mathcal{C}]) = \max \{h - 1 + \text{reg}(K[\mathcal{C}']), \delta + \beta_{\delta/h-1} - 2\}$. Nuestro objetivo es probar que el máximo anterior coincide con $\delta + \beta_{\delta/h-1} - 2$. O, equivalentemente, que

$$\text{reg}(K[\mathcal{C}']) - \beta_{(\delta/h)-1} \leq \delta - h - 1. \quad (2.9)$$

En la demostración usamos los siguientes hechos:

- (i) Por el Teorema 2.2.2 y la Nota 2.3.7, tenemos que $\text{reg}(K[\mathcal{C}']) \in \{\beta_0 - 1, \beta_0\}$.
 (ii) Por el Lema 2.3.5, tenemos que

$$\beta_0 - \beta_{(\delta/h)-1} = \sum_{i=1}^{(\delta/h)-1} (\beta_{i-1} - \beta_i) \leq 2((\delta/h) - 1) = 2(\delta/h) - 2.$$

- (iii) Como h divide a δ y $m_1 \notin \sum_{i=2}^n \mathbb{N}m_i$, por el Lema 2.3.4(c) se tiene que $\delta \geq 2h$.

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Dividiremos la prueba en cuatro casos:

- (a) $h \geq 3$,
- (b) $\text{reg}(K[\mathcal{C}']) = \beta_0 - 1$,
- (c) $\beta_0 - \beta_{(\delta/h)-1} \leq 2(\delta/h) - 3$, y
- (d) $h = 2$, $\text{reg}(K[\mathcal{C}']) = \beta_0$ y $\beta_0 - \beta_{(\delta/h)-1} = 2(\delta/h) - 2$.

Si se satisface (a), por (iii) se tiene que $h(h-1) \leq 2h(h-2) \leq (h-2)\delta$, así $2(\delta/h) - 2 \leq \delta - h - 1$. Por consiguiente, a la vista de (i) y (ii), llegamos a que $\text{reg}(K[\mathcal{C}']) - \beta_{(\delta/h)-1} \leq \beta_0 - \beta_{(\delta/h)-1} \leq 2(\delta/h) - 2 \leq \delta - h - 1$, y concluimos (2.9).

Si estamos en las condiciones de (b) o (c), entonces $2(\delta/h) - 2 \leq \delta - h$. Por consiguiente, en ambos casos deducimos que $\text{reg}(K[\mathcal{C}']) - \beta_{(\delta/h)-1} \leq 2(\delta/h) - 3 \leq \delta - h - 1$ haciendo uso de (i) y (ii), obteniendo de este modo (2.9).

Probemos por último que (d) no se puede dar. Supongamos, por contradicción, que se verifica (d). Como $\text{reg}(K[\mathcal{C}']) = \beta_0$, por el Teorema 2.2.2 deducimos que $n \geq 4$. Afirmamos que $\delta = 4$. En efecto, tomando $\Delta_i := \beta_{i-1} - \beta_i$ para todo $i \in \{1, \dots, (\delta/2) - 1\}$, observamos que $\Delta_i \in \{1, 2\}$ y $\sum_{i=1}^{(\delta/2)-1} \Delta_i = \beta_0 - \beta_{(\delta/2)-1} = 2(\delta/2) - 2$, así $\Delta_i = 2$ para todo $i \in \{1, \dots, (\delta/2) - 1\}$. Sin embargo $n \geq 4$, luego no podemos tener dos valores consecutivos de Δ_i que sean 2 por el Lema 2.3.5. Por lo tanto llegamos a que $\delta = 4$ y $\beta_0 - \beta_1 = 2$; luego $\beta_0 = 3$ y $\sigma_0 = 3$. Sin embargo, esto implica que $\text{reg}(K[\mathcal{C}']) = \beta_0 - 1$ atendiendo a la Nota 2.3.7, lo que es una contradicción.

Para concluir es suficiente observar que, por el Lema 2.3.4, $\beta_{(\delta/h)-1} \in \{1, 2\}$ y que es 2 si y sólo si $n - 1$ divide a m_1 . \square

Como ya vimos al comienzo del capítulo, cuando $K[\mathcal{C}]$ es Cohen-Macaulay, la regularidad se alcanza en el último paso de la resolución. Cuando $K[\mathcal{C}]$ no es Cohen-Macaulay, la regularidad se puede alcanzar en cualquiera de los dos últimos pasos de la resolución. Haciendo uso de [13, Corollary 2.11], probaremos que en nuestras condiciones la regularidad se alcanza siempre en el último paso de la resolución libre minimal de $K[\mathcal{C}]$.

Corolario 2.3.13. $\text{reg}(K[\mathcal{C}])$ se alcanza en el último paso de una resolución libre minimal graduada de $K[\mathcal{C}]$.

Demostración. Sea F el conjunto formado por $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, 0, 0) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tales que $x^\gamma \in \text{in}(I(\mathcal{C}))|_{x_n=x_{n+1}=1}$ and $x^\gamma \notin \text{in}(I(\mathcal{C}))|_{x_n=x_{n+1}=0}$. Según el criterio [13, Corollary 2.11], una condición suficiente para que la regularidad se alcance en el último paso de la resolución es que $\text{reg}(K[\mathcal{C}]) = \max\{\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \mid \gamma \in F\}$. Por el Teorema 2.3.8, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{in}(I(\mathcal{C}))|_{x_n=x_{n+1}=1} &= \text{in}(I(\mathcal{C}'))|_{x_n=x_{n+1}=1} + (x_1^h), \\ \text{in}(I(\mathcal{C}))|_{x_n=x_{n+1}=0} &= \text{in}(I(\mathcal{C}'))|_{x_n=x_{n+1}=0} + (\{x_1^h x_i \mid 3 \leq i \leq n-1\}) + \\ &\quad (\{x_1^{ih} x_2^{\beta_i} \mid 1 \leq i \leq \delta/h\}), \end{aligned}$$

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
 Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

donde \mathcal{C}' es la curva monomial proyectiva asociada a la sucesión aritmética $\{m_2, \dots, m_n\}$. Ahora, según el Teorema 1.2.11, tenemos que $\text{in}(I(\mathcal{C}'))|_{x_n=x_{n+1}=1} = \text{in}(I(\mathcal{C}'))|_{x_n=x_{n+1}=0}$; y entonces llegamos a que $F = \{(\gamma_1, \gamma_2, 0, \dots, 0) \mid jh \leq \gamma_1 < (j+1)h, 0 \leq \gamma_2 < \beta_j, \text{ for all } j \in \{1, \dots, \delta/h - 1\}\}$. Como $h \geq 2$ y $\beta_j \leq \beta_{j+1} + 2$ concluimos que $\max\{\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \mid \gamma \in F\} = \delta + \beta_{\delta/h-1} - 2$, que coincide con $\text{reg}(K[\mathcal{C}])$ y tenemos así el resultado. \square

A continuación damos sendas fórmulas para la serie y la función de Hilbert de $K[\mathcal{C}]$.

Teorema 2.3.14. *La serie de Hilbert de $K[\mathcal{C}]$ es*

$$\mathcal{H}_{K[\mathcal{C}]}(t) = (1 + \dots + t^{h-1})\mathcal{H}_{K[\mathcal{C}']}(t) + \frac{\sum_{j=h}^{\delta-1} t^j - \left(\sum_{j=0}^{h-1} t^j\right) \left(\sum_{i=1}^{(\delta/h)-1} t^{ih+\beta_i}\right)}{(1-t)^2},$$

donde $\mathcal{H}_{K[\mathcal{C}']}(t)$ es la serie de Hilbert de $K[\mathcal{C}']$ y \mathcal{C}' la curva monomial proyectiva asociada a la sucesión aritmética $m_2 < \dots < m_n$.

Demostración. Sea $J := \text{in}(I(\mathcal{C}))$. Por la Proposición 2.1.11 tenemos que

$$\begin{aligned} (1-t)^2 \mathcal{H}_{K[\mathcal{C}]}(t) &= \sum_{x^\gamma \notin J+(x_n, x_{n+1})} t^{|\gamma|} - t \sum_{\substack{x^\gamma \notin J+(x_{n+1}) \\ x_n x^\gamma \in J}} t^{|\gamma|} \\ &= \sum_{\substack{x^\gamma \notin J+(x_n, x_{n+1}) \\ \gamma_1 < h}} t^{|\gamma|} + S, \end{aligned}$$

donde $S := \sum_{\substack{x^\gamma \notin J+(x_n, x_{n+1}) \\ \gamma_1 \geq h}} t^{|\gamma|} - t \sum_{\substack{x^\gamma \notin J+(x_{n+1}) \\ x_n x^\gamma \in J}} t^{|\gamma|}$. Observamos en el Teorema 2.3.8 que el único generador minimal de J donde aparece x_n es $x_1^h x_n$. Luego, para todo $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{N}^{m+1}$ tenemos que

- (a) $x^\lambda \notin \text{in}(I(\mathcal{C}))$ con $\lambda_1 < h$ si y sólo si $x_2^{\lambda_2} \dots x_{n+1}^{\lambda_{n+1}} \notin \text{in}(I(\mathcal{C}'))$,
- (b) si $x^\lambda \notin \text{in}(I(\mathcal{C}))$, entonces $x_n x^\lambda \in \text{in}(I(\mathcal{C}))$ si y sólo si $\lambda_1 \geq h$.

De (a) se deduce que

$$(1+t+\dots+t^{h-1})\mathcal{H}_{K[\mathcal{C}']}(t) = \frac{\sum_{\substack{x^\gamma \notin J+(x_n, x_{n+1}) \\ \gamma_1 < h}} t^{|\gamma|}}{(1-t)^2}.$$

Por otro lado, de (b) derivamos que

$$\begin{aligned} S &= (1-t) \sum_{\substack{x^\gamma \notin J+(x_{n+1}) \\ \gamma_1 \geq h}} t^{|\gamma|} \\ &= \sum_{j=h}^{\delta-1} t^j - \left(\sum_{j=0}^{h-1} t^j\right) \left(\sum_{i=1}^{\delta/h-1} t^{ih+\beta_i}\right), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se deduce directamente del Teorema 2.3.8; y demostramos así el resultado. \square

Directamente del resultado anterior se obtiene una expresión más sencilla de la serie de Hilbert cuando $n = 3$.

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015. Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección https://sede.ull.es/validacion/	
Identificador del documento: 1177709	Código de verificación: cLLpSpfn
Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Corolario 2.3.15. Si $n = 3$, la serie de Hilbert de $K[\mathcal{C}]$ es $\mathcal{H}_{K[\mathcal{C}]}(t) = \frac{h(t)}{(1-t)^2}$, donde

1. $h(t) = 1 + 2t + \sum_{j=2}^h 3t^j + t^{h+1} - t^{2h}$, si $\delta = 2h$ y m_1 es impar,
2. $h(t) = 1 + 2t + 3t^2 + \sum_{j=3}^h 4t^j + 3t^{h+1} + t^{h+2} - t^{2h} - t^{2h+1}$, si $\delta = 2h$ y m_1 es par,
3. $h(t) = 1 + 2t + \sum_{j=2}^{(\delta-4)/2} 3t^j - ((\delta-6)/2)t^{\delta-1} - ((\delta-2)/2)t^\delta$, si $\delta > 4$ y $h = 2$,
4. $h(t) = \sum_{j=0}^{h-1} (j+1)t^j + \sum_{j=h}^{(m_3/h)-1} (h+1)t^j + \sum_{j=0}^{h-3} (h-j)t^{(m_3/h)+j} + t^{(m_3/h)+h-2} - \sum_{j=2}^{(\delta/h)-1} (t^{jh+\beta_j} + t^{jh+\beta_j+1}) - t^\delta$, si $\delta > 2h$, $h \geq 3$ y m_1 es impar,
5. $h(t) = \sum_{j=0}^{h-1} (j+1)t^j + \sum_{j=h}^{(m_3/h)-1} (h+1)t^j + \sum_{j=0}^{h-3} (h-j)t^{(m_3/h)+j} + t^{(m_3/h)+h-2} - \sum_{j=2}^{\delta/h} (t^{jh+\beta_j} + t^{jh+\beta_j+1})$, si $\delta > 2h$, $h \geq 3$ y m_1 es par.

Teorema 2.3.16. La función de Hilbert de $K[\mathcal{C}]$ es

$$HF_{K[\mathcal{C}]}(s) = \sum_{i=0}^{h-1} HF_{K[\mathcal{C}']} (s-i) + (n-3)\Delta_s + \Delta_{s+1},$$

donde $\Delta_s := \#\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a+b < s \text{ y } b < \beta_j, \text{ con } j := \lfloor a/h \rfloor \geq 1\}$, \mathcal{C}' es la curva monomial proyectiva asociada a la sucesión aritmética $m_2 < \dots < m_n$ y $HF_{K[\mathcal{C}']} (a) := 0$ si $a < 0$.

Demostración. La función de Hilbert de $K[\mathcal{C}]$ coincide con la de $R/\text{in}(I(\mathcal{C}))$. Por tanto $HF_{K[\mathcal{C}]}(s) = \#\{x^\gamma \notin \text{in}(I(\mathcal{C})) \mid \deg(x^\gamma) = s\}$. Podemos escribir

$$HF_{K[\mathcal{C}]}(s) = \#\{x^\gamma \notin \text{in}(I(\mathcal{C})) \mid \deg(x^\gamma) = s, \gamma_1 < h\} + \#\{x^\gamma \notin \text{in}(I(\mathcal{C})) \mid \deg(x^\gamma) = s, \gamma_1 \geq h\}.$$

Usando el Teorema 2.3.8, se obtiene que $\{x^\gamma \notin \text{in}(I(\mathcal{C})) \mid \deg(x^\gamma) = s, \gamma_1 < h\} = \{x_1^{\gamma_1} x^{\gamma'} \notin \text{in}(I(\mathcal{C})) \mid \gamma' = (0, \gamma_2, \dots, \gamma_{n+1}), \deg(x^{\gamma'}) + \gamma_1 = s, \text{ and } \gamma_1 < h\} = \{x^{\gamma'} \notin \text{in}(I(\mathcal{C}')) \mid s-h+1 \leq \deg(x^{\gamma'}) \leq s, \gamma'_1 = 0\}$. Así

$$HF_{K[\mathcal{C}]}(s) = \sum_{i=0}^{h-1} HF_{K[\mathcal{C}']} (s-i) + \#\{x^\gamma \notin \text{in}(I(\mathcal{C})) \mid \deg(x^\gamma) = s, \gamma_1 \geq h\}.$$

Por el mismo resultado, también tenemos que $\#\{x^\gamma \notin \text{in}(I(\mathcal{C})) \mid \deg(x^\gamma) = s, \gamma_1 \geq h\} = \#\{x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} x_i^{\epsilon_i} x_{n+1}^{\gamma_{n+1}} \notin \text{in}(I(\mathcal{C})) \mid \gamma_1 + \gamma_2 + \epsilon_i + \gamma_{n+1} = s, \gamma_1 \geq h, \epsilon_i \in \{0, 1\} \text{ and } i \in \{3, \dots, n-1\}\} = (n-3)\Delta_s + \Delta_{s+1}$, y terminamos así la demostración. \square

Asimismo, somos capaces de dar el polinomio de Hilbert de $K[\mathcal{C}]$ en función del polinomio de Hilbert de $K[\mathcal{C}']$. Recordamos que el polinomio de Hilbert de $K[\mathcal{C}']$ es $P_{K[\mathcal{C}']} (s) = (m_n/h)s + \gamma$, donde γ viene dado por el valor de la Nota 2.2.6.

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Corolario 2.3.17. El polinomio de Hilbert de $K[C]$ es

$$P_{K[C]}(s) = m_n s + m_n \frac{h-1}{2} + h\gamma + (n-2)h \sum_{i=0}^{\delta/h-1} \beta_i.$$

Demostración. Sea $\Delta := h \sum_{i=0}^{\delta/h-1} \beta_i$. Para llegar al resultado es suficiente observar que $\Delta_s = \Delta$ para todo $s \gg 0$ y que $P_{K[C]}(s) = \sum_{i=0}^{h-1} P_{K[C]}(s-i) + \Delta$ por el Teorema 2.3.16. \square

Acabamos la sección ilustrando todos los resultados que hemos obtenido a lo largo de la misma en un ejemplo.

Ejemplo 2.3.18. Consideramos el conjunto $\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6\}$ con $m_1 := 7, m_2 := 30, m_3 := 39, m_4 := 48, m_5 := 57$ y $m_6 := 66$. Observamos que m_1, \dots, m_6 son primos entre sí, $h = 3$ y $d = 9$, por tanto h divide a d . Calculamos $\delta = \lfloor (7-1)/(6-1) \rfloor 3 + 9 + 3 = 15$ y observamos que $n-1$ no divide a m_i . Entonces, por el Teorema 2.3.12, se tiene que $\text{reg}(K[C]) = 14$.

Además, como $m_1 = 1 \cdot 5 + 2, p = 1$ y $s = 2$, siguiendo la Nota 2.3.6 obtenemos que $\beta_1 = 4 + \lfloor (4+2-2)/4 \rfloor = 5, \beta_2 = 3 + \lfloor (3+2-2)/4 \rfloor = 3, \beta_3 = 2 + \lfloor (2+2-2)/4 \rfloor = 2$ y $\beta_4 = 1 + \lfloor (1+2-2)/4 \rfloor = 1$. En consecuencia, atendiendo al Teorema 2.3.14 llegamos a que

$$\mathcal{H}_{K[C]}(t) = (1+t+t^2)\mathcal{H}_{K[C']}(t) + \frac{\sum_{j=3}^{14} t^j - (1+t+t^2)(t^8+t^9+t^{11}+t^{13})}{(1-t)^2}.$$

Por otro lado, como las sucesiones $30 < 39 < 48 < 57 < 66$ y $10 < 13 < 16 < 19 < 22$ definen la misma curva monomial proyectiva, podemos usar el Ejemplo 2.2.10, y tenemos así que $\mathcal{H}_{K[C']}(t) = \frac{1+\sum_{i=1}^5 4t^i+t^6}{(1-t)^2}$. Por consiguiente,

$$\mathcal{H}_{K[C]}(t) = \frac{1+5t+9t^2+13(t^3+t^4+t^5)+10t^6+6t^7+t^8-t^9-t^{10}-t^{11}-t^{13}-t^{15}}{(1-t)^2}.$$

2.4. Curvas monomiales proyectivas Koszul

En esta última sección estudiamos la propiedad Koszul de $K[C]$. Como ya indicamos en la primera sección de este capítulo, haremos uso de las implicaciones (i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii), donde

- (i) $I(C)$ posee una base de Gröbner cuadrática
- (ii) $R/I(C)$ es Koszul
- (iii) $I(C)$ está generado por cuádricas.

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

En la primera subsección caracterizaremos cuándo $K[\mathcal{C}]$ es Koszul siendo $m_1 < \dots < m_n$ una sucesión aritmética generalizada. En este contexto veremos que las siguientes tres características son equivalentes: $I(\mathcal{C})$ está generado por cuádricas, $R/I(\mathcal{C})$ es Koszul y la base de Gröbner respecto del orden lexicográfico inverso de $I(\mathcal{C})$ es cuadrática.

En la segunda subsección estudiaremos cuándo $K[\mathcal{C}]$ es Koszul para $n = 3$ y $n = 4$ (la codimensión de $K[\mathcal{C}]$ es 2 y 3, respectivamente). En este contexto veremos que $I(\mathcal{C})$ está generado por cuádricas si y sólo si existe una base de Gröbner cuadrática (que no siempre será respecto del orden lexicográfico inverso, sino que en ocasiones será respecto a un orden monomial producto que definimos a tal propósito). Este resultado junto con un estudio exhaustivo de todos los casos en que $I(\mathcal{C})$ está generado por cuádricas conducen a las caracterización buscada.

2.4.1. Curvas monomiales proyectivas Koszul definidas por sucesiones aritméticas generalizadas

Sea $m_1 < \dots < m_n$ una sucesión de enteros positivos cualquiera y sea \mathcal{C} su curva monomial proyectiva asociada. Empezamos con un resultado técnico.

Lema 2.4.1. *Si $I(\mathcal{C})$ está generado por cuádricas, entonces para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$ existen $j, l \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$ tales que $2m_i = m_j + \mu m_l$ con $\mu \in \{0, 1\}$.*

Demostración. Sea $w \in \mathbb{Z}^+$ el menor entero tal que $f := x_i^w - \prod_{\substack{j \in \{1, \dots, n+1\} \\ j \neq i}} x_j^{\alpha_j} \in I(\mathcal{C})$ con $\alpha_j \in \mathbb{N}$ para todo $j \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{i\}$. Ocurre que existe un sistema minimal de generadores de $I(\mathcal{C})$ que contiene a f (ver, e.g., [11, Lemma 3.1.(b)]); por lo tanto, f es una cuádrica y $w = 2$. Como f es homogéneo, existen $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, $l \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{i\}$ tales que $f = x_i^2 - x_j x_l$. Concluimos de este modo que $2m_i = m_j$ si $l = n+1$, o $2m_i = m_j + m_l$ en otro caso. \square

Ahora aplicaremos el resultado anterior junto con el Teorema 1.2.11 para caracterizar cuándo $K[\mathcal{C}]$ es Koszul siendo $m_1 < \dots < m_n$ una sucesión aritmética generalizada.

Teorema 2.4.2. *Sea $m_1 < \dots < m_n$ una sucesión aritmética generalizada de enteros positivos primos entre sí. Entonces, $K[\mathcal{C}]$ es un álgebra de Koszul si y sólo si $m_1 < \dots < m_n$ son números consecutivos y $n > m_1$.*

Demostración. (\Rightarrow) Por hipótesis $K[\mathcal{C}]$ es Koszul, luego $I(\mathcal{C})$ está generado por cuádricas. Entonces deducimos del Lema 2.4.1 que $2m_1 > m_2$ y, por lo tanto, $h = 1$. Además, si $n \leq m_1$ o si $d \neq 1$ se tiene que $2m_1 \neq m_j$ para todo $j \in \{1, \dots, n-1\}$ y $2m_1 \neq m_j + m_l$ para todo $j, l \in \{2, \dots, n\}$. Así, usando de nuevo el Lema 2.4.1, deducimos que $n > m_1$ y $d = 1$.

(\Leftarrow) Observamos que $m_1 < \dots < m_n$ es una sucesión aritmética, $d = 1$, y que $\alpha = \lceil m_1/(n-1) \rceil + d - 1 = 1$. La base de Gröbner que nos proporciona el Teorema 1.2.11 está formada solo por cuádricas y concluimos así que $K[\mathcal{C}]$ es un álgebra de Koszul. \square

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

2.4.2. Curvas monomiales proyectivas Koszul de codimensión 2 y 3

Para finalizar este capítulo estudiamos la propiedad Koszul de $K[\mathcal{C}]$, siendo \mathcal{C} una curva monomial proyectiva cualquiera de \mathbb{P}_K^n con $n \in \{3, 4\}$. En otras palabras, vamos a proporcionar una lista de todas las curvas monomiales proyectivas \mathcal{C} tales que el álgebra asociada $K[\mathcal{C}]$ es Koszul y tiene codimensión 2 o 3. Aunque los resultados que daremos no constituyen una aplicación directa de la caracterización de la propiedad Koszul en el caso de sucesiones aritméticas generalizadas, lo utilizamos en algunos casos de la prueba.

Introducimos primero algunos resultados técnicos que necesitamos para las pruebas de los resultados principales que quedan. Sea \mathcal{C}_m la curva monomial proyectiva definida paramétricamente por las ecuaciones

$$x_1 = s^{m_1}t^{m_n-m_1}, \dots, x_{n-1} = s^{m_{n-1}}t^{m_n-m_{n-1}}, x_n = s^{m_n}, x_{n+1} = t^{m_n}, y = s^m t^{m_n-m},$$

donde $m_1 < \dots < m_n$ es una sucesión de enteros positivos, $\gcd\{m_1, \dots, m_n, m\} = 1$ y $m < m_n$. Así $I(\mathcal{C}_m) \subset K[x_1, \dots, x_{n+1}, y]$ es el ideal de anulación de la curva \mathcal{C}_m . Definimos también

$$B_m := \gcd\{m_1, \dots, m_n\},$$

con esta notación y de [11, Lemma 2.1 and Proposition 2.3] se sigue directamente el siguiente lema:

Lema 2.4.3. *Supongamos que $B_m = 2$, entonces:*

- si $2m = m_i + m_j$ para ciertos $i, j \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que:

$$I(\mathcal{C}_m) = I(\mathcal{C}) \cdot K[x_1, \dots, x_{n+1}, y] + (y^2 - x_i x_j);$$

- si $2m = m_i$ con $i \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que:

$$I(\mathcal{C}_m) = I(\mathcal{C}) \cdot K[x_1, \dots, x_{n+1}, y] + (y^2 - x_i x_{n+1}).$$

Este lema nos será útil para probar los siguientes dos:

Lema 2.4.4. *Si $m_i := 2^{i-1}d$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ con $d \in \mathbb{Z}^+$, entonces $K[\mathcal{C}]$ es un álgebra de Koszul. Además, si $B_m = 2$ y $2m = m_i + m_j$ para ciertos $i, j \in \{1, \dots, n\}$, entonces $K[\mathcal{C}_m]$ es un álgebra de Koszul*

Demostración. Por hipótesis tenemos que $m_i/d = 2^{i-1}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Por lo tanto, por [11, Theorem 5.3 and Corollary 5.8], $I(\mathcal{C})$ es una intersección completa y está generado por cuádricas. En consecuencia $K[\mathcal{C}]$ es un álgebra de Koszul.

Observamos por último que $B_m m = 2m = m_i + m_j$. Por tanto, usando el Lema 2.4.3, tenemos que $I(\mathcal{C}_m) = I(\mathcal{C}) + (y^2 - x_i x_j)$. Por tanto $I(\mathcal{C}_m)$ es una intersección completa y está generado por cuádricas; en consecuencia, $K[\mathcal{C}_m]$ es un álgebra de Koszul. \square

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Lema 2.4.5. Sea $d := \gcd\{m_1, \dots, m_n\}$. Si $m_1/d, \dots, m_n/d$ son números consecutivos, $n > m_1$, $B_m = 2$ y $2m = m_i + \mu m_j$ para ciertos $i, j \in \{1, \dots, n\}$ y $\mu \in \{0, 1\}$, entonces $K[\mathcal{C}_m]$ es un álgebra de Koszul.

Demostración. En la prueba del Teorema 2.4.2 comprobamos que la base de Gröbner de $I(\mathcal{C})$ con respecto al orden lexicográfico inverso graduado que nos proporciona el Teorema 1.2.11 está formada por cuádricas. Observamos por otro lado que $B_m m = 2m = m_i + m_j$ si $\mu = 1$ o $B_m m = 2m = m_i$ si $\mu = 0$. En consecuencia, por el Lema 2.4.3, tenemos que $I(\mathcal{C}_m) = I(\mathcal{C}) + (y^2 - x_i x_l)$, donde $l = j$ si $\mu = 1$ o $l = n + 1$ si $\mu = 0$. Probemos a continuación que $\mathcal{G}_m := \mathcal{G} \cup \{y^2 - x_i x_l\}$ es una base de Gröbner de $I(\mathcal{C}_m)$ con respecto al orden $>_y$ en $K[x_1, \dots, x_{n+1}, y]$ definido por:

$$\prod_{i=1}^{n+1} x_i^{\alpha_i} y^\alpha >_y \prod_{i=1}^{n+1} x_i^{\beta_i} y^\beta \iff \begin{cases} \alpha > \beta, \text{ o} \\ \alpha = \beta \text{ y } \prod_{i=1}^{n+1} x_i^{\alpha_i} >_{dp} \prod_{i=1}^{n+1} x_i^{\beta_i}, \end{cases}$$

donde $>_{dp}$ es el orden lexicográfico inverso graduado en $K[x_1, \dots, x_{n+1}]$. En efecto, tomamos $f := \prod_{i=1}^{n+1} x_i^{\alpha_i} y^\alpha - \prod_{i=1}^{n+1} x_i^{\beta_i} y^\beta \in I(\mathcal{C}_m)$, donde $\alpha_i, \alpha, \beta_i, \beta \in \mathbb{N}$ y $\text{in}_{>_y}(f) = \prod_{i=1}^{n+1} x_i^{\alpha_i} y^\alpha$. Consideramos varios casos:

Caso 1: Si $\alpha = 0$, entonces $\beta = 0$ y $f = \prod_{i=1}^{n+1} x_i^{\alpha_i} - \prod_{i=1}^{n+1} x_i^{\beta_i} \in I(\mathcal{C})$. Por tanto, existe $g \in \mathcal{G} \subset \mathcal{G}_m$ tal que $\text{in}_{>_y}(g) = \text{in}_{>_{dp}}(g) \mid \text{in}_{>_y}(f)$.

Caso 2: Si $\alpha = 1$, entonces $\beta \in \{0, 1\}$. Luego, si $\beta = 1$, $f/y = \prod_{i=1}^{n+1} x_i^{\alpha_i} - \prod_{i=1}^{n+1} x_i^{\beta_i} \in I(\mathcal{C})$. Existe entonces $g \in \mathcal{G} \subset \mathcal{G}_m$ tal que $\text{in}_{>_y}(g) = \text{in}_{>_{dp}}(g) \mid \text{in}_{>_{dp}}(f/y) \mid \text{in}_{>_y}(f)$. Por otro lado, si $\beta = 0$, entonces $f = \prod_{i=1}^{n+1} x_i^{\alpha_i} y - \prod_{i=1}^{n+1} x_i^{\beta_i} \in I(\mathcal{C}_m)$, y se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(m_i, m_n - m_i) + (m, m_n - m) = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i(m_i, m_n - m_i),$$

y así $m \in \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} \mathbb{Z}m_i$, lo que implica que $B_m = 1$, una contradicción.

Caso 3: Si $\alpha \geq 2$ se tiene que $\text{in}_{>_y}(y^2 - x_i x_j) = y^2 \mid \text{in}_{>_y}(f)$.

Por consiguiente $\mathcal{G}_m = \mathcal{G} \cup \{y^2 - x_i x_j\}$ es una base de Gröbner cuadrática de $I(\mathcal{C}_m)$ con respecto a $>_y$, siendo entonces $K[\mathcal{C}_m]$ un álgebra de Koszul. \square

Teorema 2.4.6. Si $n = 3$ y $\gcd\{m_1, m_2, m_3\} = 1$; entonces $K[\mathcal{C}]$ es un álgebra de Koszul si y sólo si $\{m_1, m_2, m_3\}$ es una de las siguientes sucesiones

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\} \text{ o } \{2, 3, 4\}.$$

Demostración. (\Rightarrow) Como $I(\mathcal{C})$ está generado por cuádricas, por el Lema 2.4.1 tenemos que $2m_1 \in \{m_2, m_3\}$ o bien $2m_2 \in \{m_3, m_1 + m_3\}$. Puesto que $\gcd\{m_1, m_2, m_3\} = 1$ se deduce fácilmente que $\{m_1, m_2, m_3\}$ es $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$ o $\{2, 3, 4\}$.

(\Leftarrow) Si $\{m_1, m_2, m_3\} = \{1, 2, 4\}$ entonces $K[\mathcal{C}]$ es Koszul por el Lema 2.4.4. En los otros dos casos llegamos a que $K[\mathcal{C}]$ es Koszul por el Teorema 2.4.2. \square

Teorema 2.4.7. Si $n = 4$ y $\gcd\{m_1, m_2, m_3, m_4\} = 1$; entonces $K[\mathcal{C}]$ es un álgebra de Koszul si y sólo si $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ es una de las siguientes sucesiones

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

$\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 4, 6\}, \{1, 2, 4, 8\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 6\},$
 $\{2, 3, 4, 8\}, \{2, 4, 5, 6\}, \{2, 4, 5, 8\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{3, 4, 6, 8\}, \{4, 5, 6, 8\}$ o $\{4, 6, 7, 8\}$.

Demostración. (\Rightarrow) Como $I(\mathcal{C})$ está generado por cuádricas por ser $K[\mathcal{C}]$ Koszul, por el Lema 2.4.1, tenemos que $2m_1 \in \{m_2, m_3, m_4\}$, $2m_2 \in \{m_3, m_4, m_1 + m_3, m_1 + m_4\}$ y que $2m_3 \in \{m_4, m_1 + m_4, m_2 + m_4\}$. Un análisis caso a caso de todos los posibles valores $2m_1, 2m_2$ y $2m_3$ teniendo en cuenta que $\gcd\{m_1, m_2, m_3, m_4\} = 1$ prueba esta implicación.

(\Leftarrow) Para las sucesiones $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$ y $\{3, 4, 5, 6\}$, $K[\mathcal{C}]$ es un álgebra de Koszul por el Teorema 2.4.2. Ahora, como consecuencia del Lema 2.4.4, tenemos que $K[\mathcal{C}]$ es Koszul para los conjuntos $\{1, 2, 4, 8\}$, $\{2, 4, 5, 8\}$ y $\{2, 3, 4, 8\}$. Además, para $\{1, 2, 4, 6\}$, $\{2, 4, 5, 6\}$, $\{2, 3, 4, 6\}$, $\{3, 4, 6, 8\}$, $\{4, 5, 6, 8\}$ y $\{4, 6, 7, 8\}$ probamos la implicación usando el Lema 2.4.5. Por último, para $\{1, 2, 3, 6\}$ y $\{1, 2, 3, 5\}$, calculamos una base de Gröbner de $I(\mathcal{C})$ con respecto al orden lexicográfico inverso graduado y observamos que está formada por cuádricas, luego $K[\mathcal{C}]$ es Koszul. \square

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
 Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por:	Fecha:
EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Capítulo 3

Resoluciones de Noether

*"My (algebraic) methods are really methods of working and thinking;
this is why they have crept in everywhere anonymously."*

Emmy Noether

Consideramos en este capítulo un ideal $I \subseteq R$ tal que $A := K[x_{n-d+1}, \dots, x_n]$ es una normalización de Noether de R/I . Bajo estas hipótesis, R/I es un A -módulo finitamente generado. Si además I es ω -homogéneo, en virtud del Teorema de las sicias de Hilbert la resolución libre minimal ω -graduada de R/I como A -módulo es finita. El objetivo de este capítulo es el de estudiar y describir esta resolución, que denominaremos resolución de Noether de R/I .

En la primera sección proporcionamos resultados generales y reescribimos algunos de los resultados obtenidos en los capítulos precedentes en términos de resoluciones de Noether. Comenzaremos por observar que el conocimiento de la resolución de Noether nos proporciona información importante sobre R/I . En particular, en la Proposición 3.1.1 mostraremos cómo a partir de la resolución de Noether de R/I se puede obtener la serie de Hilbert ω -graduada de R/I y, si I es homogéneo, podemos calcular la regularidad de Castelnuovo-Mumford de R/I . Dado que el primer paso de esta resolución se corresponde con un sistema minimal de generadores de R/I como A -módulo, este primer paso queda descrito por la Proposición 1.2.2. Asimismo, por la Proposición 1.1.10 sabemos que R/I es Cohen-Macaulay si y solo si la resolución de Noether tiene un solo paso y, por ende, el Teorema 1.2.3 que caracteriza cuándo R/I es Cohen-Macaulay, caracteriza también cuándo esta resolución tiene un único paso. En segunda instancia, consideramos el caso de anillos de semigrupo simpliciales $K[S]$. En este contexto, el objetivo es describir la resolución de Noether respecto a la multigraduación inducida por el semigrupo S y sin necesidad del cálculo de bases de Gröbner. Al igual que antes, comenzamos por describir el primer paso de la resolución en términos del semigrupo basándonos en la descripción de un sistema minimal de generadores como A -módulo que habíamos obtenido en la Proposición 1.3.1. Asimismo, la Proposición 1.3.3 que caracteriza la propiedad de ser Cohen-Macaulay en términos del semigrupo S , caracteriza también cuándo esta resolución tiene un único paso. Finalizamos esta sección describiendo la resolución de Noether multigraduada del

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por:	Fecha:
EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

anillo de coordenadas de la curva monomial proyectiva asociada a una sucesión aritmética que, como ya vimos en el Corolario 1.2.14, es Cohen-Macaulay.

En la sección 2, comenzamos considerando I un ideal ω -homogéneo tal que R/I es de dimensión 1 y no es Cohen-Macaulay. En la Proposición 3.2.1 describimos el segundo (y último) paso de la resolución de Noether. Posteriormente estudiamos la resolución de Noether cuando R/I es 2-dimensional y el ideal I es saturado; en el Teorema 3.2.3 describimos completamente su resolución de Noether, siendo este el principal resultado del capítulo. Además de este Teorema se desprende un método efectivo para calcular la resolución de Noether que pasa por calcular una base de Gröbner de R/I respecto del orden lexicográfico inverso ω -graduado.

En la tercera sección aplicamos los resultados de la segunda a los anillos de semigrupo simpliciales $K[S]$. Cuando $K[S]$ es 2-dimensional, en el principal resultado de esta sección, el Teorema 3.3.1, obtenemos una descripción puramente combinatoria de los desplazamientos del segundo (y último) paso de la resolución de Noether multigradaada.

Dado que los anillos de semigrupo de dimensión 2 que son homogéneos estándar coinciden con los anillos de semigrupo de curvas monomiales proyectivas, podemos dar un método efectivo para calcular su regularidad de Castelnuovo-Mumford basándonos en los resultados de la sección 3. Como una curva monomial proyectiva C viene determinada por una sucesión de enteros positivos primos entre sí $m_1 < \dots < m_n$, nos planteamos el objetivo de aportar una cota superior para la regularidad de Castelnuovo-Mumford del anillo coordenado de la curva $K[C]$ que dependa de esta sucesión. Este objetivo se consigue en el Teorema 3.3.5, que es el principal resultado de esta sección. La prueba de esta cota es elemental y puramente combinatoria, solo usa algunos resultados básicos sobre semigrupos numéricos. En este mismo contexto son clásicas las cotas de Gruson et al. [36]: $\text{reg}(K[C]) \leq m_n - n + 1$ y la cota de L'vovsky [45] que mejora la anterior: $\text{reg}(K[C]) \leq \max_{1 \leq i < j \leq n} \{m_i - m_{i-1} + m_j - m_{j-1}\} - 1$, donde $m_0 := 0$. Las pruebas de ambas cotas usan herramientas cohomológicas avanzadas. Si bien el resultado de L'vovsky normalmente da una mejor cota, es fácil construir familias tales que nuestra cota mejora la de L'vovsky.

La última sección de este capítulo también versa sobre curvas monomiales proyectivas. Cuando $m_1 < \dots < m_n$ es una sucesión aritmética, el anillo coordenado de la curva correspondiente ha sido ampliamente estudiado en esta Tesis. En la última sección consideraremos las proyecciones canónicas de estas curvas. Como aplicación de los resultados ya obtenidos aportaremos en el Corolario 3.3.12 un criterio para determinar cuándo estas curvas son Cohen-Macaulay y, cuando no lo son, obtendremos en el Corolario 3.3.13 la Macaulayficación de su anillo coordenado. Además, en el Teorema 3.3.15 describiremos enteramente sus resoluciones multigradaadas. Por último y como consecuencia de lo anterior, en el Teorema 3.3.16 damos una fórmula para su regularidad de Castelnuovo-Mumford.

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
 Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

3.1. Generalidades

Consideramos $I \subset R$ un ideal ω -homogéneo, es decir, un ideal homogéneo pesado respecto a un vector de pesos $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in (\mathbb{Z}^+)^n$. Suponemos que $A := K[x_{n-d+1}, \dots, x_n]$ es una normalización de Noether de R/I donde $d := \dim(R/I)$. Esto implica, en particular, que R/I es un A -módulo finitamente generado y, por tanto, su resolución libre minimal ω -graduada como A -módulo es finita. Esta sección está dedicada al estudio de esta resolución, que llamaremos la *resolución de Noether* de R/I :

$$\mathcal{F} : 0 \longrightarrow \bigoplus_{v \in \mathcal{B}_p} A(-s_{p,v}) \xrightarrow{\psi_p} \dots \xrightarrow{\psi_1} \bigoplus_{v \in \mathcal{B}_0} A(-s_{0,v}) \xrightarrow{\psi_0} R/I \longrightarrow 0, \quad (3.1)$$

donde \mathcal{B}_i es un conjunto finito y $s_{i,v}$ es un entero no negativo para todo $i \in \{0, \dots, p\}$ y $v \in \mathcal{B}_i$.

Como ya vimos en la Proposición 1.1.10, el número de pasos de esta resolución es $p = \text{pd}_A(R/I) = \text{pd}_R(R/I) - n + d$, por lo que la resolución de Noether de R/I es siempre más corta que su resolución como R -módulo. Además, tenemos que R/I es Cohen-Macaulay si y solo si $\text{pd}_A(R/I) = 0$, por tanto, conocida la resolución de Noether es directo determinar si R/I es Cohen-Macaulay, basta con observar si solo tiene un paso.

Uno de los intereses de esta resolución es que a partir de ella se pueden leer características interesantes de R/I , en particular el resultado siguiente muestra cómo obtener a partir de la resolución de Noether la serie de Hilbert ω -graduada y, cuando I es homogéneo, la regularidad de Castelnuovo-Mumford de R/I .

Proposición 3.1.1. *Sea $A \hookrightarrow R/I$ una normalización de Noether y sea \mathcal{F} la resolución de Noether de R/I dada en (3.1), entonces:*

1. *La serie de Hilbert ω -graduada de R/I viene dada por:*

$$\mathcal{H}_{R/I}(t) = \frac{\sum_{i=0}^p (-1)^i \sum_{v \in \mathcal{B}_i} t^{s_{i,v}}}{\prod_{i=1}^d (1 - t^{\omega_{n-d+i}})}$$

2. *Si $\omega = (1, \dots, 1)$, entonces la regularidad de Castelnuovo-Mumford de R/I viene dada por:*

$$\text{reg}(R/I) = \max\{s_{i,v} - i \mid 0 \leq i \leq p, v \in \mathcal{B}_i\}.$$

Demostración. La expresión (1) se obtiene del hecho de que toda resolución minimal graduada es una sucesión exacta graduada y de que $\mathcal{H}_{A(-s)}(t) = t^s / \prod_{i=1}^d (1 - t^{\omega_{n-d+i}})$ para todo $s \in \mathbb{N}$. Como consecuencia de la versión graduada del Teorema de independencia de la cohomología local (ver [18, Theorem 14.1.7] o [37, Corollary 5.7]) se tiene (2) (ver también [64, Section 1] para una explicación más detallada).

Recordamos que en la Proposición 1.2.2 demostramos que el conjunto \mathcal{B} de monomios que no pertenecen al ideal $\text{in}(I + (x_{n-d+1}, \dots, x_n))$ es un conjunto minimal de generadores de R/I como A -módulo. Así, el primer paso de la resolución viene dado por el conjunto

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

$\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$ y que los desplazamientos en ese paso son los ω -grados de los monomios de \mathcal{B}_0 , i.e., $s_{0,v} = \deg_\omega(v)$ para $v \in \mathcal{B}_0$. Además, el morfismo ψ_0 viene dado por

$$\begin{aligned} \psi_0 : \bigoplus_{v \in \mathcal{B}_0} A(-s_{0,v}) &\longrightarrow R/I \\ e_v &\mapsto v + I, \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde $\{e_v \mid v \in \mathcal{B}_0\}$ denota la base canónica de $\bigoplus_{v \in \mathcal{B}_0} A(-s_{0,v})$.

Si R/I es Cohen-Macaulay ya comentamos que $\text{pd}_A(R/I) = 0$ y, por tanto, la resolución de Noether queda descrita con (3.2). Además, en el Teorema 1.2.3 se proporciona un criterio efectivo para determinar si R/I es Cohen-Macaulay. Es fácil ver cómo la Proposición 1.2.4 que obtuvimos en el Capítulo 1 en la que se describe la serie de Hilbert cuando R/I es Cohen-Macaulay es un caso particular de Proposición 3.1.1.(1)

En la sección 2 de este capítulo daremos una descripción completa de la resolución de Noether de R/I cuando R/I es 1-dimensional o cuando es 2-dimensional e I es saturado. Recordamos que la saturación de un ideal $I \subset R$ se define como

$$I^{sat} := \bigcup_{i \geq 0} (I : \mathfrak{m}^i),$$

y que un ideal I es saturado si $I = I^{sat}$ (o, equivalentemente, si $I = I : \mathfrak{m}$).

Considerando el caso en que $K[\mathcal{S}]$ es un anillo de semigrupo simplicial. Como ya vimos en la Proposición 1.1.12, estos son los anillos son isomorfos a R/I siendo $I = I_{\mathcal{A}}$ un ideal tórico simplicial, i.e., con $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^d$ y $a_{n-d+i} = w_{n-d+i} e_i$ para todo $i \in \{1, \dots, d\}$, donde $\{e_1, \dots, e_d\}$ es la base canónica de \mathbb{N}^d . Si K es infinito, $I_{\mathcal{A}}$ es el ideal de anulación de la variedad dada paramétricamente por $x_i := t^{a_i}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ (ver, e.g., [66]) y, por tanto, $K[\mathcal{S}]$ es el anillo de coordenadas de dicha variedad tórica. En este contexto, podemos considerar la resolución de $K[\mathcal{S}]$ como A -módulo con respecto al multigrado $\deg_{\mathcal{S}}(x_i) = a_i \in \mathcal{S}$, que llamaremos la resolución de Noether multigrada de $K[\mathcal{S}]$; a saber,

$$\mathcal{F} : 0 \longrightarrow \bigoplus_{s \in \mathcal{S}_p} A \cdot s \xrightarrow{\psi_p} \dots \xrightarrow{\psi_1} \bigoplus_{s \in \mathcal{S}_0} A \cdot s \xrightarrow{\psi_0} K[\mathcal{S}] \longrightarrow 0. \quad (3.3)$$

donde $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{S}$ para todo $i \in \{0, \dots, p\}$. Como ya hemos mencionado con anterioridad en el Capítulo 1, este multigrado es un refinamiento del grado dado por $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ con $\omega_i := \sum_{j=1}^d a_{ij} \in \mathbb{Z}^+$; así pues $I_{\mathcal{A}}$ es un ideal ω -homogéneo y podemos aplicar los resultados obtenidos para calcular la resolución de Noether de un ideal ω -homogéneo.

El resultado siguiente muestra cómo obtener a partir de la resolución de Noether la serie de Hilbert multigrada y, cuando I es homogéneo, la regularidad de Castelnuovo-Mumford de R/I .

Proposición 3.1.2. *Sea $K[\mathcal{S}]$ un anillo de semigrupo simplicial y sea \mathcal{F} la resolución de Noether multigrada de $K[\mathcal{S}]$ dada en (3.3), entonces:*

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

1. La serie de Hilbert multigradaada de $K[\mathcal{S}]$ viene dada por:

$$\mathcal{H}_{K[\mathcal{S}]}(t) = \frac{\sum_{s \in \mathcal{S}_i} (-1)^i t^s}{\prod_{i=1}^d (1 - t_i^{\omega_{n-d+i}})}.$$

2. Sea $u := (1/\omega_{n-d+1}, \dots, 1/\omega_n) \in \mathbb{Q}^d$, si $u \cdot a_i = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces la regularidad de Castelnuovo-Mumford de $K[\mathcal{S}]$ viene dada por:

$$\text{reg}(K[\mathcal{S}]) = \max\{(u \cdot s) - i \mid s \in \mathcal{S}_i, 0 \leq i \leq p\}.$$

Demostración. La expresión (1) se obtiene del hecho de que la resolución de Noether es una sucesión exacta \mathcal{S} -gradaada y de que $\mathcal{H}_{A \cdot s}(t) = t_1^{s_1} \cdots t_d^{s_d} / \prod_{i=1}^d (1 - t_i^{\omega_{n-d+i}})$ para todo $s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{N}^d$. Para probar (2) primero observamos que por el Lema 1.1.11, I_A es homogéneo si y solo si existe un vector $u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{Q}^d$ tal que $u \cdot a_i = 1$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Del hecho que I_A sea simplicial se sigue que $u \cdot a_{n-d+i} = u_i \omega_{n-d+i} = 1$ y, por tanto, $u_i = 1/\omega_{n-d+i}$ para $i \in \{1, \dots, d\}$. Ahora bien, basta con observar que a partir de una resolución de Noether podemos obtener una resolución gradaada estándar con solo transformar el desplazamiento $A \cdot s$ por $A \cdot (-u \cdot s)$ y, por tanto, aplicando la Proposición 3.1.1.(2) obtenemos la fórmula para la regularidad.

Dado que los desplazamientos de la resolución de Noether vienen dados por ciertos subconjuntos \mathcal{S}_i de \mathcal{S} , un problema natural e interesante es el de describir la resolución multigradaada de Noether únicamente en términos de \mathcal{S} . Cualquier avance en esta línea conduciría a resultados que serían independientes de la característica de K . En general, para un anillo de semigrupo simplicial, se sabe que el número mínimo de generadores de I_A no depende de la característica de K (ver, e.g., [62, Theorem 5.3]) y, por ello, la propiedad de ser intersección completa tampoco. Es sabido que, por contra, las propiedades de ser Gorenstein, Cohen-Macaulay y Buchsbaum de $K[\mathcal{S}]$ sí que dependen de la característica de K (ver [39], [65] y [38], respectivamente). No obstante, para anillos de semigrupo simpliciales estas propiedades también son independientes de K (ver [35], [61] y [31], respectivamente). Todos estos hechos dan soporte a nuestro objetivo de describir la resolución de Noether multigradaada de $K[\mathcal{S}]$ en términos de \mathcal{S} para anillos de semigrupo simpliciales. En este capítulo alcanzaremos esta meta cuando $K[\mathcal{S}]$ sea Cohen-Macaulay (en esta sección) y también cuando $d = 2$ (sección 3 de este capítulo).

Para cualquier valor de $d \geq 1$, el primer paso de la resolución de Noether se corresponde con un conjunto minimal de generadores de $K[\mathcal{S}]$ como A -módulo. En vista de la Proposición 1.3.1, este primer paso viene dado por el conjunto $\mathcal{S}_0 = \{s \in \mathcal{S} \mid s - a_i \notin \mathcal{S} \text{ para todo } i \in \{n-d+1, \dots, n\}\}$ y ψ_0 es el homomorfismo de A -módulos siguiente:

$$\psi_0 : \bigoplus_{s \in \mathcal{S}_0} A \cdot s \longrightarrow K[\mathcal{S}]$$

$$e_s \longmapsto t^s, \tag{3.4}$$

donde $\{e_s \mid s \in \mathcal{S}_0\}$ es la base canónica de $\bigoplus_{s \in \mathcal{S}_0} A \cdot s$.

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Cuando $K[\mathcal{S}]$ es Cohen-Macaulay, se tiene que $\text{pd}_A(K[\mathcal{S}]) = 0$ y, por tanto, la resolución de Noether queda descrita con (3.4). Es fácil ver cómo el Corolario 1.3.5 que obtuvimos en el Capítulo 1 en el que se describe la serie de Hilbert multigradaada cuando $K[\mathcal{S}]$ es Cohen-Macaulay es un caso particular de Proposición 3.1.2.(1).

Finalmente, para $m_1 < \dots < m_n$ una sucesión aritmética, denotamos por \mathcal{C} la curva monomial proyectiva asociada a la misma. Estas curvas fueron ampliamente estudiadas en la Secciones 1.2 y 2.2, donde dimos una base de Gröbner del ideal de definición de la curva, demostramos que su anillo coordinado es siempre Cohen-Macaulay y dimos fórmulas para su tipo Cohen-Macaulay y su serie de Hilbert, entre otros. A partir de los resultados aportados se puede deducir fácilmente el siguiente resultado (que fue anteriormente demostrado en [44]):

Teorema 3.1.3. [44, Theorem 3.4] $\mathcal{S}_0 = \{(\lceil \frac{j}{n-1} \rceil m_n - jd, jd) \mid 0 \leq j < m_n\}$

Y, a partir de él, se puede obtener la resolución de Noether de $K[\mathcal{C}]$.

Corolario 3.1.4. Sea \mathcal{C} la curva monomial proyectiva definida por la sucesión aritmética $m_1 < \dots < m_n$. La resolución de Noether multigradaada de $K[\mathcal{C}]$ viene dada por:

$$0 \rightarrow (\oplus_{\lambda=0}^{m_n-1} A \cdot s_\lambda) \rightarrow K[\mathcal{C}] \rightarrow 0,$$

donde $s_\lambda = (\lceil \frac{\lambda}{n-1} \rceil m_n - \lambda d, \lambda d) \in \mathbb{N}^2$.

Este resultado será de utilidad en la Sección 5 de este capítulo, donde describiremos la resolución de Noether de las proyecciones canónicas de esta curva.

3.2. Resoluciones de Noether en dimensión 1 y 2: ideales ω -homogéneos

Esta sección está dedicada al estudio de la resolución de Noether de R/I cuando $A \hookrightarrow R/I$ es una normalización de Noether y la dimension de Krull de R/I es a lo sumo 2.

Comenzamos describiendo completamente la resolución de Noether cuando R/I es 1-dimensional. Una primera observación es que la profundidad del anillo 0 o 1. Si es 1, entonces el anillo R/I es Cohen-Macaulay y la resolución consta de un único paso, que viene dado por el conjunto \mathcal{B}_0 de monomios que no están en $\text{in}(I) + (x_n)$, ver (3.2). Si su profundidad es 0, entonces R/I no es Cohen-Macaulay y su dimensión proyectiva como A -módulo es 1. Bajo estas hipótesis, para describir la resolución de Noether queda determinar \mathcal{B}_1 , ψ_1 y los desplazamientos $s_{1,v} \in \mathbb{N}$ para todo $v \in \mathcal{B}_1$. En la Proposición 3.2.1 que se da a continuación se obtienen \mathcal{B}_1 y ψ_1 a partir de una base de Gröbner de I con respecto a $>_\omega$, el orden lexicográfico inverso ω -gradaado.

Consideramos $\chi_1 : R \rightarrow R$ el homomorfismo de evaluación inducido por $x_i \mapsto x_i$ para $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $x_n \mapsto 1$.

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
 Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por:	Fecha:
EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Proposición 3.2.1. Sea R/I un anillo de dimensión 1 y profundidad 0. Tomamos L el ideal $\chi_1(\text{in}(I)) \cdot R$. Entonces

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_0 \cap L$$

en la resolución de Noether (3.1) de R/I y los desplazamientos del segundo paso de la resolución vienen dados por $\deg_\omega(u x_n^{\delta_u})$, donde $u \in \mathcal{B}_1$ y $\delta_u := \min\{\delta \mid u x_n^\delta \in \text{in}(I)\}$.

Demostración. Para todo $u = x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \in \mathcal{B}_0 \cap L$, existe $\delta \in \mathbb{N}$ tal que $u x_n^\delta \in \text{in}(I)$; sea δ_u el menor de tales δ . Consideramos $p_u \in R$ el resto de dividir $u x_n^{\delta_u}$ modulo la base de Gröbner de I con respecto a $>_\omega$. Luego $u x_n^{\delta_u} - p_u \in I$ es ω -homogéneo y todo monomio x^β que aparece en p_u no pertenece a $\text{in}(I)$, entonces por el Lema 1.2.1 podemos escribir $x^\beta = v x_n^{\beta_n}$, donde $\beta_n \geq 0$ y $v \in \mathcal{B}_0$. Además, como $u x_n^{\delta_u} >_\omega x^\beta$, tenemos que $\beta_n \geq \delta_u$ y $u >_\omega v$. Por consiguiente, como p_u es ω -homogéneo, podemos escribir que

$$p_u = \sum_{\substack{v \in \mathcal{B}_0 \\ u >_\omega v}} x_n^{\delta_u} m_{uv} v,$$

con $m_{uv} = c x_n^{\alpha_{uv}} \in A = K[x_n]$ un monomio (posiblemente 0) para todo $v \in \mathcal{B}_0$, $u >_\omega v$.

Denotamos ahora por $\{e_v \mid v \in \mathcal{B}_0\}$ la base canónica de $\bigoplus_{v \in \mathcal{B}_0} A(-\deg_\omega(v))$ y consideramos el homomorfismo graduado $\psi_0 : \bigoplus_{v \in \mathcal{B}_0} A(-\deg_\omega(v)) \rightarrow R/I$ inducido por $e_v \mapsto v + I \in R/I$. La anterior construcción nos lleva a

$$h_u := x_n^{\delta_u} (e_u - \sum_{\substack{v \in \mathcal{B}_0 \\ u >_\omega v}} m_{uv} e_v) \in \text{Ker}(\psi_0)$$

para todo $u \in \mathcal{B}_0 \cap L$. Veremos que $\text{Ker}(\psi_0)$ es un A -módulo libre cuya base es

$$\mathcal{C} := \{h_u \mid u \in \mathcal{B}_0 \cap L\}.$$

Primeramente observamos que el A -módulo generado por los elementos de \mathcal{C} es libre debido a que la matriz que forman los elementos de \mathcal{C} es triangular. Sea ahora $g = \sum_{v \in \mathcal{B}_0} g_v e_v \in \text{Ker}(\psi_0)$ con $g_v \in A$, y suponemos que $g \in \bigoplus_{v \in \mathcal{B}_0} A(-\deg_\omega(v))$ es ω -homogéneo, por lo tanto, g_v es 0 o un monomio de la forma $c x_n^{\beta_v}$ con $c \in K$ y $\beta_v \in \mathbb{N}$ para todo $v \in \mathcal{B}_0$. Tomamos $\bar{\psi}_0 : \bigoplus_{v \in \mathcal{B}_0} A(-\deg_\omega(v)) \rightarrow R$ el homomorfismo de A -módulos inducido por $e_v \mapsto v$. Como $\psi_0(g) = 0$, entonces $g' := \bar{\psi}_0(g) = \sum_{u \in \mathcal{B}_0} g_u u \in I$ y $\text{in}(g') = c x_n^\gamma w$ para cierto $w \in \mathcal{B}_0$, $\gamma \in \mathbb{N}$ y $c \in K$. Como $\text{in}(g') \in \text{in}(I)$, tenemos que $w \in \mathcal{B}_0 \cap L$ y $\gamma \geq \delta_w$. Por tanto, $g_1 := g - c x_n^{\gamma - \delta_w} h_w \in \text{Ker}(\psi_0)$. Si g_1 es idénticamente nulo, entonces $g \in (\{h_u \mid u \in \mathcal{B}_0 \cap L\})$. Si g_1 no es cero, tenemos que $0 \neq \text{in}(\bar{\psi}_0(g_1)) < \text{in}(\bar{\psi}_0(g))$ y reiteramos el proceso con g_1 para deducir que $\{h_u \mid u \in \mathcal{B}_0 \cap L\}$ genera a $\text{Ker}(\psi_0)$. \square

El resto de la sección está dedicada a estudiar la resolución de Noether (3.1) cuando I es un ideal saturado tal que R/I es un anillo de dimensión 2 y no es Cohen-Macaulay (y, en particular, $\text{depth}(R/I) = 1$). Suponemos además que $A = K[x_{n-1}, x_n]$ es una normalización de Noether de R/I . Como vimos en la primera sección de este capítulo,

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

el primer paso de la resolución de Noether está determinado. Así pues queda únicamente describir el conjunto \mathcal{B}_1 , la aplicación ψ_1 y los desplazamientos $s_{1,v} \in \mathbb{N}$ para tenerla descrita completamente. En la Proposición 3.2.2 se explica cómo obtener \mathcal{B}_1 y ψ_1 a través de una base de Gröbner del ideal I con respecto a $>_\omega$.

Notar que, puesto que K es un cuerpo infinito, I es un ideal saturado y A es una normalización de Noether de R/I , se tiene que $x_n + \tau x_{n-1}$ es un no divisor de cero en R/I para todo $\tau \in K$ excepto un conjunto finito. Por tanto, haciendo un pequeño cambio de coordenadas, podemos suponer que x_n es un no divisor de cero de R/I .

Consideramos ahora el homomorfismo de evaluación $\chi : R \rightarrow R$ inducido por la asignación $x_i \mapsto x_i$ para $i \in \{1, \dots, n-2\}$, $x_i \mapsto 1$ para $i \in \{n-1, n\}$.

Proposición 3.2.2. *Sea R/I un anillo 2-dimensional, no Cohen-Macaulay tal que x_n es un no divisor de cero. Sea J el ideal $\chi(\text{in}(I)) \cdot R$. Entonces,*

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_0 \cap J$$

en la resolución de Noether (3.1) de R/I y los desplazamientos del segundo paso de esta resolución están dados por $\deg_\omega(ux_{n-1}^{\delta_u})$, donde $u \in \mathcal{B}_1$ y $\delta_u := \min\{\delta \mid ux_{n-1}^\delta \in \text{in}(I)\}$.

Demostración. Como x_n es un no divisor de cero de R/I e I es un ideal ω -homogéneo, x_n no puede dividir a ningún generador minimal de $\text{in}(I)$. Sea entonces $u = x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n-2}^{\alpha_{n-2}} \in \mathcal{B}_0 \cap J$, existe $\delta \in \mathbb{N}$ tal que $ux_{n-1}^\delta \in \text{in}(I)$; por definición, δ_u es el mínimo de ellos. Consideramos $p_u \in R$ el resto de reducir $ux_{n-1}^{\delta_u}$ módulo la base de Gröbner de I con respecto a $>_\omega$. Así, $ux_{n-1}^{\delta_u} - p_u \in I$ es ω -homogéneo y todo monomio x^β que aparece en p_u no pertenece a $\text{in}(I)$. Por tanto, aplicando la Proposición 1.2.2 se puede escribir $x^\beta = vx_{n-1}^{\beta_{n-1}}x_n^{\beta_n}$, donde $\beta_{n-1}, \beta_n \geq 0$ y $v \in \mathcal{B}_0$. Además, tenemos que o bien $\beta_n \geq 1$, o bien $\beta_n = 0$, $\beta_{n-1} \geq \delta_u$ y $u >_\omega v$. Luego,

$$p_u = \sum_{\substack{v \in \mathcal{B}_0 \\ u >_\omega v}} x_{n-1}^{\delta_u} f_{uv} v + \sum_{v \in \mathcal{B}_0} x_n g_{uv} v,$$

con $f_{uv} \in K[x_{n-1}]$ para todo $v \in \mathcal{B}_0$, $u >_\omega v$ y $g_{uv} \in A$ para todo $v \in \mathcal{B}_0$.

Denotamos ahora $\{e_v \mid v \in \mathcal{B}_0\}$ la base canónica de $\bigoplus_{v \in \mathcal{B}_0} A(-\deg_\omega(v))$ y consideramos el homomorfismo graduado $\psi_0 : \bigoplus_{v \in \mathcal{B}_0} A(-\deg_\omega(v)) \rightarrow R/I$ inducido por $e_v \mapsto v + I \in R/I$. La construcción anterior nos conduce a que

$$h_u := x_{n-1}^{\delta_u} e_u - \sum_{\substack{v \in \mathcal{B}_0 \\ u >_\omega v}} x_{n-1}^{\delta_u} f_{uv} e_v - \sum_{v \in \mathcal{B}_0} x_n g_{uv} e_v \in \text{Ker}(\psi_0),$$

para todo $u \in \mathcal{B}_0 \cap J$. Probaremos que $\text{Ker}(\psi_0)$ es un A -módulo libre cuya base es

$$\mathcal{C} := \{h_u \mid u \in \mathcal{B}_0 \cap J\}.$$

Identificador del documento: 1177709	Código de verificación: cLLpSpfn
Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Veremos primeramente que el A -módulo generado por los elementos del conjunto \mathcal{C} es libre. Supongamos que $\sum_{u \in \mathcal{B}_0 \cap J} q_u h_u = 0$ con $q_u \in A$ para todo $u \in \mathcal{B}_0 \cap J$ y, como x_n es no divisor de cero de R/I , también podemos suponer que x_n no divide a q_v para algún $v \in \mathcal{B}_0 \cap J$. Consideramos ahora el homomorfismo de evaluación τ inducido por $x_n \mapsto 0$. Entonces $\sum_{u \in \mathcal{B}_0 \cap J} \tau(q_u) \tau(h_u) = \sum_{u \in \mathcal{B}_0 \cap J} \tau(q_u) (x_{n-1}^{\delta_u} e_u + \sum_{\substack{v \in \mathcal{B}_0 \\ u >_{\omega} v}} x_{n-1}^{\delta_u} f_{uv} e_v) = 0$, dada la forma 'triangular' de esta expresión, esto implica que $\tau(q_u) = 0$ para todo $u \in \mathcal{B}_0 \cap J$ así $x_n \mid q_u$ para todo $u \in \mathcal{B}_0 \cap J$, una contradicción.

Tomamos $g = \sum_{v \in \mathcal{B}_0} g_v e_v \in \text{Ker}(\psi_0)$ con $g_v \in A$, y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $g \in \bigoplus_{v \in \mathcal{B}_0} A(-\text{deg}_{\omega}(v))$ es ω -homogéneo y, en consecuencia, g_v es 0 o un polinomio ω -homogéneo para todo $v \in \mathcal{B}_0$. Asimismo podemos suponer que x_n no divide a g_v . Consideramos el homomorfismo inyectivo de A -módulos $\bar{\psi}_0 : \bigoplus_{v \in \mathcal{B}_0} A(-\text{deg}_{\omega}(v)) \rightarrow R$ inducido por $e_v \mapsto v$. Como $\psi_0(g) = 0$, el polinomio $g' := \bar{\psi}_0(g) = \sum_{u \in \mathcal{B}_0} g_u u \in I$ y $\text{in}(g') = cx_{n-1}^{\gamma} w$ para ciertos $w \in \mathcal{B}_0$ y $c \in K$; por tanto, $w \in \mathcal{B}_0 \cap J$. Por definición de δ_w obtenemos que $\gamma \geq \delta_w$, luego $g_1 := g - cx_{n-1}^{\gamma - \delta_w} h_w \in \text{Ker}(\psi_0)$. Además, $\text{in}(\bar{\psi}_0(g_1)) < \text{in}(\bar{\psi}_0(g))$. Si $\bar{\psi}_0(g_1)$ es idénticamente nulo, entonces también lo es g_1 por ser $\bar{\psi}_0$ inyectiva y $g \in (\{h_u \mid u \in \mathcal{B}_0 \cap J\})$. Si g_1 es no nula, repetimos el proceso con g_1 y llegamos a que $\{h_u \mid u \in \mathcal{B}_0 \cap J\}$ genera $\text{Ker}(\psi_0)$. \square

De las Proposiciones 1.2.2 y 3.2.2 y sus pruebas, podemos obtener la resolución de Noether \mathcal{F} de R/I a partir de una base de Gröbner de I con respecto a $>_{\omega}$. También observamos que para obtener los desplazamientos de la resolución es suficiente conocer un conjunto de generadores de $\text{in}(I)$. El siguiente teorema nos proporciona dicha resolución.

Teorema 3.2.3. *Sea R/I un anillo de dimensión 2 tal que x_n es un no divisor de cero. Denotamos por \mathcal{G} una base de Gröbner de I con respecto al orden $>_{\omega}$. Si $\delta_u := \min\{\delta \mid ux_{n-1}^{\delta} \in \text{in}(I)\}$ para todo $u \in \mathcal{B}_1$, entonces*

$$\mathcal{F} : 0 \longrightarrow \bigoplus_{u \in \mathcal{B}_1} A(-\text{deg}_{\omega}(u) - \delta_u \omega_{n-1}) \xrightarrow{\psi_1} \bigoplus_{v \in \mathcal{B}_0} A(-\text{deg}_{\omega}(v)) \xrightarrow{\psi_0} R/I \longrightarrow 0,$$

es la resolución de Noether de R/I , donde

$$\psi_0 : \bigoplus_{v \in \mathcal{B}_0} A(-\text{deg}_{\omega}(v)) \rightarrow R/I, \\ e_v \mapsto v + I$$

y

$$\psi_1 : \bigoplus_{u \in \mathcal{B}_1} A(-\text{deg}_{\omega}(u) - \delta_u \omega_{n-1}) \longrightarrow \bigoplus_{v \in \mathcal{B}_0} A(-\text{deg}_{\omega}(v)), \\ e_u \mapsto x_{n-1}^{\delta_u} e_u - \sum_{v \in \mathcal{B}_0} f_{uv} e_v$$

donde $f_{uv} \in A$ y $\sum_{v \in \mathcal{B}_0} f_{uv} v$ es el resto de la división de $ux_{n-1}^{\delta_u}$ por \mathcal{G} .

De la resolución que nos proporciona el resultado anterior es fácil obtener la serie de Hilbert ω -graduada de R/I .

Corolario 3.2.4. Sea R/I un anillo de dimensión 2 tal que x_n es un no divisor de cero, entonces su serie de Hilbert ω -graduada viene dada por:

$$\mathcal{H}_{R/I}(t) = \frac{\sum_{v \in \mathcal{B}_0} t^{\deg_\omega(v)} - \sum_{u \in \mathcal{B}_1} t^{\deg_\omega(u) + \delta_u \omega_n - 1}}{(1 - t^{\omega_{n-1}})(1 - t^{\omega_n})}$$

El siguiente ejemplo muestra cómo calcular la resolución de Noether y la serie de Hilbert ω -graduada del anillo coordenado graduado de una superficie en \mathbb{A}_K^4 .

Ejemplo 3.2.5. Sea I el ideal de definición de la superficie de \mathbb{A}_K^4 definida paramétricamente por $f_1 := s^3 + s^2t, f_2 := t^4 + st^3, f_3 := s^2, f_4 := t^2 \in K[s, t]$. Si K es un cuerpo de característica 0, los polinomios $\{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ constituyen una base de Gröbner minimal de I con respecto a $>_\omega$ con $\omega = (3, 4, 2, 2)$, donde $g_1 := 2x_2x_3^2 - x_1^2x_4 + x_3^3x_4 - x_3^2x_4^2, g_2 := x_1^4 - 2x_1^2x_3^3 + x_3^6 - 2x_1^2x_3^2x_4 - 2x_3^5x_4 + x_3^4x_4^2, g_3 := x_2^2 - 2x_2x_4^2 - x_3x_4^3 + x_4^4$ y $g_4 := 2x_1^2x_2 - x_1^2x_3x_4 + x_3^4x_4 - 3x_1^2x_4^2 - 2x_3^3x_4^2 + x_3^2x_4^3$. En particular,

$$\text{in}(I) = (x_2x_3^2, x_1^4, x_2^2, x_1^2x_2).$$

Entonces, tenemos que

- $\mathcal{B}_0 = \{u_1, \dots, u_6\}$ con $u_1 := 1, u_2 := x_1, u_3 := x_2, u_4 := x_1^2, u_5 := x_1x_2, u_6 := x_1^3,$
- $J = (x_1^4, x_2) \subset K[x_1, x_2, x_3, x_4],$ y
- $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_0 \cap J = \{u_3\}.$

Como x_3 divide a $x_2x_3^2$, que es un generador minimal de $\text{in}(I)$, por el Teorema 1.2.3 deducimos que R/I no es Cohen-Macaulay. Calculamos $\delta_3 = \min\{\delta \mid u_3x_3^\delta \in \text{in}(I)\} = 2$ y $r_3 = -x_4u_4 + (x_3^3x_4 - x_3^2x_4^2)u_1$ es el resto de dividir $u_3x_3^2$ por \mathcal{G} . Por tanto, siguiendo el Teorema 3.2.3, la resolución de Noether de R/I es:

$$\mathcal{F} : 0 \rightarrow A(-8) \xrightarrow{\psi} \begin{matrix} A \oplus A(-3) \oplus A(-4) \oplus \\ \oplus A(-6) \oplus A(-7) \oplus A(-9) \end{matrix} \rightarrow R/I \rightarrow 0,$$

donde ψ viene dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} -x_3^3x_4 + x_3^2x_4^2 \\ 0 \\ x_3^2 \\ x_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Además, por el Corolario 3.2.4, llegamos a que la serie de Hilbert ω -graduada de R/I es

$$\mathcal{H}_{R/I}(t) = \frac{1 + t^3 + t^4 + t^6 + t^7 - t^8 + t^9}{(1 - t^2)^2}.$$

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Ahora bien, si consideramos la misma superficie paramétrica esta vez sobre un cuerpo de característica 2, obtenemos que el conjunto $\{x_1^2 + x_3^3 + x_3^2x_4, x_2^2 + x_3x_4^3 + x_4^4\}$ es una base de Gröbner minimal de I con respecto a $>_\omega$, con $\omega = (3, 4, 2, 2)$. Tenemos entonces que

$$\mathcal{B}_0 = \{v_1 := 1, v_2 := x_1, v_3 := x_2, v_4 := x_1x_2\},$$

y $\mathcal{B}_1 = \emptyset$, así R/I es Cohen-Macaulay. También se obtiene la resolución de Noether de R/I :

$$\mathcal{F}' : 0 \rightarrow A \oplus A(-3) \oplus A(-4) \oplus A(-7) \rightarrow R/I \rightarrow 0$$

y la serie de Hilbert ω -graduada de R/I ,

$$\mathcal{H}_{R/I}(t) = \frac{1 + t^3 + t^4 + t^7}{(1 - t^2)^2}.$$

Para terminar esta sección, consideramos el caso particular de que I sea un ideal homogéneo (estándar), i.e., un ideal ω -homogéneo donde $\omega = (1, \dots, 1)$. Bajo estas condiciones, obtenemos una fórmula para la regularidad de Castelnuovo-Mumford de R/I en términos de $\text{in}(I)$ o, más precisamente, en términos de \mathcal{B}_0 y \mathcal{B}_1 . Esta fórmula es equivalente a [13, Theorem 2.7] siempre y cuando x_n sea un no divisor de cero de R/I .

Corolario 3.2.6. *Sea R/I un anillo graduado (estándar) de dimensión 2 tal que x_n es un no divisor de cero. Entonces*

$$\text{reg}(R/I) = \max\{\deg(v), \deg(u) + \delta_u - 1 \mid v \in \mathcal{B}_0, u \in \mathcal{B}_1\}$$

En el siguiente ejemplo aplicamos todos los resultados de esta sección.

Ejemplo 3.2.7. *Sea K un cuerpo de característica cero. Consideramos \mathcal{C} la curva proyectiva de \mathbb{P}_K^4 definida paramétricamente por :*

$$x_1 = s^3t^5 - st^7, x_2 = s^7t, x_3 = s^4t^4, x_4 = s^8, x_5 = t^8.$$

La base de Gröbner minimal \mathcal{G} del ideal de definición $I \subset R = K[x_1, \dots, x_5]$ de \mathcal{C} con respecto al orden lexicográfico inverso tiene 10 elementos y

$$\text{in}(I) = (x_1^4, x_2^4, x_1^3x_3, x_1x_3x_4^2, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_1x_2x_3, x_2^2x_3, x_1^2x_4, x_3^2).$$

Entonces

$$\mathcal{B}_0 = \{u_1 := 1, u_2 := x_1, u_3 := x_2, u_4 := x_3, u_5 := x_1^2, u_6 := x_1x_2, u_7 := x_2^2, u_8 := x_1x_3, u_9 := x_2x_3, u_{10} := x_1^3, u_{11} := x_2^3, u_{12} := x_1^2x_3\}$$

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

y el ideal J es

$$J = (x_1^2, x_1x_3, x_2^4, x_2^2x_3, x_3^2) \subset R.$$

Por consiguiente, $\mathcal{B}_1 = \{u_5, u_8, u_{10}, u_{12}\}$. Para cada $i \in \{5, 8, 10, 12\}$ calculamos δ_i , el menor entero tal que $u_i x_4^{\delta_i} \in \text{in}(I)$ y llegamos a que $\delta_5 = \delta_{10} = \delta_{12} = 1$ y $\delta_8 = 2$. Si r_i es el resto de dividir $u_i x_4^{\delta_i}$ para todo $i \in \{5, 8, 10, 12\}$, tenemos que

- $r_5 = -x_4x_5^2b_1 + 2x_4x_5b_4 + x_5b_6 + x_5b_7$,
- $r_8 = x_4^2x_5b_3 + x_5b_{11}$,
- $r_{10} = x_4^2x_5b_2 + 3x_4x_5b_8 + (x_5^2 - x_4x_5)b_9$,
- $r_{12} = x_4^2x_5^2b_1 + x_4x_5b_6 + x_5^2b_7$.

Llegamos así a la resolución libre minimal graduada de R/I , que se muestra a continuación

$$\mathcal{F} : 0 \rightarrow A(-3) \oplus A^3(-4) \xrightarrow{\psi} A \oplus A^3(-1)A^5(-2) \oplus A^3(-3) \rightarrow R/I \rightarrow 0,$$

donde ψ viene dada por la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} x_4x_5^2 & 0 & 0 & -x_4^2x_5^2 \\ 0 & 0 & -x_4^2x_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2x_4x_5 & -x_4^2x_5 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 \\ -x_5 & 0 & 0 & -x_4x_5 \\ -x_5 & 0 & 0 & -x_5^2 \\ 0 & x_4^2 & -3x_4x_5 & 0 \\ 0 & 0 & x_4x_5 - x_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & x_4 & 0 \\ 0 & -x_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{pmatrix}$$

Además, la serie de Hilbert de R/I es

$$\mathcal{H}_{R/I}(t) = \frac{1 + 3t + 5t^2 + 2t^3 - 3t^4}{(1-t)^2}.$$

$$\text{y } \text{reg}(R/I) = \max\{3, 4 - 1\} = 3.$$

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
 Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por:	Fecha:
EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

3.3. Resoluciones de Noether en dimensión 1 y 2: anillos de semigrupo

El objetivo de esta sección es el de estudiar los anillos de semigrupo $K[\mathcal{S}]$ de dimensión $d \leq 2$ y describir su resolución de Noether multigradaada en términos del semigrupo \mathcal{S} . Cuando $K[\mathcal{S}]$ es de dimensión 1 o 2, siempre es simplicial (ver Proposición 1.1.12.(b)). Por ende, si tomamos $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^d$ un sistema de generadores de \mathcal{S} , el primer paso de la resolución viene dado por el conjunto $\mathcal{S}_0 = \{s \in \mathcal{S} \mid s - a_i \notin \mathcal{S} \text{ para todo } i \in \{n-d+1, \dots, n\}\}$, ver (3.4). Además, este es el único paso de la resolución cuando $K[\mathcal{S}]$ es Cohen-Macaulay.

Notar que cuando $K[\mathcal{S}]$ es 1-dimensional, siempre es Cohen-Macaulay y además el conjunto \mathcal{S}_0 coincide con el llamado conjunto de Apèry del semigrupo \mathcal{S} con respecto al elemento a_n (ver, e.g., [57]).

De ahora en adelante suponemos que $K[\mathcal{S}]$ es un anillo de semigrupo simplicial de dimensión 2 no Cohen-Macaulay. En este contexto, consideramos el conjunto

$$\Delta := \{s \in \mathcal{S} \mid s - a_{n-1}, s - a_n \in \mathcal{S} \text{ y } s - a_n - a_{n-1} \notin \mathcal{S}\}.$$

El conjunto Δ , o pequeñas variantes, ha sido considerado por varios autores (ver, por ejemplo, [35], [61], [65]). Afirmamos que Δ tiene exactamente $|\mathcal{S}_0| - D$ elementos. De hecho, si consideramos la relación de equivalencia \sim introducida en el capítulo 1 (1.8), entonces \sim particiona $\mathbb{Z}\mathcal{S}$ en D clases de equivalencia C_1, \dots, C_D y es directo ver que $|\Delta \cap C_i| = |\mathcal{S}_0 \cap C_i| - 1$ para todo $i \in \{1, \dots, D\}$. De ahí se puede deducir fácilmente que $|\Delta| = |\mathcal{S}_0| - D$. Por tanto, una consecuencia directa de la Proposición 1.3.3 es que el conjunto Δ es vacío si y solo si $K[\mathcal{S}]$ es Cohen-Macaulay. El siguiente resultado muestra cómo Δ no es solo útil para caracterizar la propiedad Cohen-Macaulay, sino que también nos proporciona el conjunto de los desplazamientos del segundo paso de la resolución de Noether multigradaada de $K[\mathcal{S}]$.

Teorema 3.3.1. Sean $K[\mathcal{S}]$ un anillo de semigrupo simplicial de dimensión 2 y

$$\Delta = \{s \in \mathcal{S} \mid s - a_{n-1}, s - a_n \in \mathcal{S} \text{ and } s - a_n - a_{n-1} \notin \mathcal{S}\}.$$

Entonces, $\mathcal{S}_1 = \Delta$.

Demostración. Sea \mathcal{B}_0 la base monomial de $R/(\text{in}(I_A) + (x_{n-1}, x_n))$, donde $\text{in}(I_A)$ es el ideal inicial de I_A con respecto a $>_\omega$. Para todo $u = x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n-2}^{\alpha_{n-2}} \in \mathcal{B}_1$ consideramos $\delta_u \geq 1$ el mínimo entero tal que $ux_{n-1}^{\delta_u} \in \text{in}(I_A)$. Tomamos $p_u \in R$ el resto de reducir $ux_{n-1}^{\delta_u}$ módulo la base de Gröbner reducida de I_A con respecto a $>_\omega$. Entonces, $ux_{n-1}^{\delta_u} - p_u \in I_A$ y, como I_A es un ideal binomial, tenemos que $p_u = x^\gamma$ para cierto $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{N}^n$. Además, la condición $x^\alpha > x^\gamma$ y la minimalidad de δ_u implica que $\gamma_n > 0$ y $\gamma_{n-1} = 0$, así que $x^\gamma = v_u x_n^{\gamma_{vu}}$ con $v_u \in \mathcal{B}_0$. Como probamos en la Proposición 3.2.2, si denotamos por $\{e_v \mid v \in \mathcal{B}_0\}$ a la base canónica de $\bigoplus_{v \in \mathcal{B}_0} A(-\deg_S(v))$ y $h_u := x_{n-1}^{\delta_u} e_u - x_n^{\gamma_{vu}} e_{v_u}$ para todo

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

$u \in \mathcal{B}_1$, entonces $\text{Ker}(\psi_0)$ es el A -módulo generado minimalmente por $\mathcal{C} := \{h_u \mid u \in \mathcal{B}_1\}$.
 Probemos que

$$\{\deg_S(h_u) \mid u \in \mathcal{B}_1\} = \{s \in \mathcal{S} \mid s - a_{n-1}, s - a_n \in \mathcal{S} \text{ and } s - a_{n-1} - a_n \notin \mathcal{S}\}.$$

Sea $s = \deg_S(h_u)$ para cierto $u \in \mathcal{B}_1$, entonces $s = \deg_S(h_u) = \deg_S(u) + \delta_u a_{n-1} = \deg_S(v_u) + \gamma_{v_u} a_n$. Como $\delta_u, \gamma_{v_u} \geq 1$, llegamos a que $s - a_{n-1}, s - a_n \in \mathcal{S}$. Además, si $s - a_{n-1} - a_n = \sum_{i=1}^n \mu_i a_i \in \mathcal{S}$, entonces el binomio $x_{n-1}^{\delta_u-1} u - x^\mu x_{n+1} \in I_A$, lo que contradice la minimalidad de δ_u .

Tomamos ahora $s \in \mathcal{S}$ tal que $s - a_{n-1}, s - a_n \in \mathcal{S}$ y $s - a_{n-1} - a_n \notin \mathcal{S}$. Como $s - a_{n-1}, s - a_n \in \mathcal{S}$, se tiene que $s', s'' \in \mathcal{S}_0$ y $\gamma_1, \gamma_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N}$ tal que $s - a_n = s' + \gamma_1 a_{n-1} + \gamma_2 a_n$ y $s - a_{n+1} = s'' + \lambda_1 a_{n-1} + \lambda_2 a_n$. Observamos que $\gamma_2 = 0$, pues en otro caso $s - a_{n-1} - a_n = s' + \gamma_1 a_{n-1} + (\gamma_2 - 1)a_n \in \mathcal{S}$, una contradicción. Análogamente $\lambda_1 = 0$. Sean $u, v \in \mathcal{B}_0$ tal que $\deg_S(u) = s'$ y $\deg_S(v) = s''$. Afirmamos que $u \in J$ y $\delta_u = \gamma_1$. De hecho, $f := ux_{n-1}^{\gamma_1} - vx_n^{\lambda_2} \in I_A$ y $\text{in}(f) = ux_{n-1}^{\gamma_1}$, luego $u \in \mathcal{B}_1$. Además si existe $\gamma' < \delta_u$, entonces $s - a_{n-1} - a_n \in \mathcal{S}$, un absurdo. \square

Una de las cosas interesantes de la Proposición 1.3.3 y el Teorema 3.3.1 es que con ellos se describe la resolución de Noether multigradaada de los anillos de semigrupo de dimensión 2 en términos del semigrupo \mathcal{S} y, en particular, se obtiene la resolución no depende de la característica del cuerpo K .

Cuando $d = 2$, de la descripción de la resolución de Noether multigradaada de $K[\mathcal{S}]$ se deriva una expresión de su serie de Hilbert multigradaada en términos de \mathcal{S}_0 y \mathcal{S}_1 .

Corolario 3.3.2. *Sea $K[\mathcal{S}]$ un anillo de semigrupo de dimensión 2. La serie de Hilbert multigradaada de $K[\mathcal{S}]$ es*

$$\mathcal{H}_{K[\mathcal{S}]}(t) = \frac{\sum_{s \in \mathcal{S}_0} t^s - \sum_{s \in \mathcal{S}_1} t^s}{(1 - t_1^{\omega_{n-1}})(1 - t_2^{\omega_n})}$$

Nota 3.3.3. *Sea $K[\mathcal{S}]$ es un anillo de semigrupo de dimensión dos y consideremos el conjunto $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{N}^2$ de generadores de \mathcal{S} . Si tomamos $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbb{N}^n$ con $\omega_i := a_{i,1} + a_{i,2}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces $I_{\mathcal{A}}$ es ω -homogéneo. La resolución de Noether de $K[\mathcal{S}]$ con respecto a esta graduación se obtiene fácilmente de la multigradaada. De hecho, viene dada por la siguiente expresión:*

$$\mathcal{F} : 0 \longrightarrow \bigoplus_{(b_1, b_2) \in \mathcal{S}_1} A(-(b_1 + b_2)) \xrightarrow{\psi_1} \bigoplus_{(b_1, b_2) \in \mathcal{S}_0} A(-(b_1 + b_2)) \xrightarrow{\psi_0} K[\mathcal{S}] \longrightarrow 0.$$

Adicionalmente, la serie de Hilbert ω -gradaada de $K[\mathcal{S}]$ se deduce de la multigradaada, basta con considerar la transformación $t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \mapsto t^{\alpha_1 + \alpha_2}$.

Si se tiene que $\omega_1 = \dots = \omega_n$, entonces $I_{\mathcal{A}}$ es un ideal homogéneo. En este contexto, tal y como observamos en la Proposición 3.1.2.(2), la resolución de Noether con respecto a la graduación estándar es

$$\mathcal{F} : 0 \longrightarrow \bigoplus_{(b_1, b_2) \in \mathcal{S}_1} A(-(b_1 + b_2)/\omega_1) \xrightarrow{\psi_1} \bigoplus_{(b_1, b_2) \in \mathcal{S}_0} A(-(b_1 + b_2)/\omega_1) \xrightarrow{\psi_0} K[\mathcal{S}] \longrightarrow 0.$$

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Por lo tanto, la regularidad de Castelnuovo-Mumford de $K[\mathcal{S}]$ es

$$\text{reg}(K[\mathcal{S}]) = \max \left(\left\{ \frac{b_1 + b_2}{\omega_1} \mid (b_1, b_2) \in \mathcal{S}_0 \right\} \cup \left\{ \frac{b_1 + b_2}{\omega_1} - 1 \mid (b_1, b_2) \in \mathcal{S}_1 \right\} \right). \quad (3.5)$$

Además, la serie de Hilbert de $K[\mathcal{S}]$ se obtiene de la multigradaada considerando la transformación $t_1^{\alpha_1} t_2^{\alpha_2} \mapsto t^{(\alpha_1 + \alpha_2)/\omega_1}$.

3.3.1. Una cota superior para la regularidad de Castelnuovo-Mumford de curvas monomiales proyectivas.

Dada una curva monomial proyectiva \mathcal{C} , su anillo coordenado $K[\mathcal{C}]$ es un álgebra de semigrupo de dimensión 2 homogénea estándar y, por tanto, su regularidad de Castelnuovo-Mumford viene dada por la fórmula (3.5) de la Nota 3.3.3. El objetivo de esta sección es explotar esta fórmula para aportar una cota superior para la regularidad de $K[\mathcal{C}]$ en términos de la sucesión $m_1 < \dots < m_n$ de enteros positivos primos entre sí que define \mathcal{C} .

Sea $\mathcal{R} \subset \mathbb{N}$ el semigrupo (numérico) generado por m_1, \dots, m_n . Al ser m_1, \dots, m_n primos entre sí, es bien sabido (ver, e.g., [32] o [57]) que el complemento de \mathcal{R} en \mathbb{N} es finito. El mayor entero que no pertenece a \mathcal{R} se denomina *número de Frobenius* de \mathcal{R} y lo denotamos por $g(\mathcal{R})$. El conjunto de Apèry de \mathcal{R} con respecto a m_n es

$$\text{Ap}(\mathcal{R}, m_n) := \{a \in \mathcal{R} \mid a - m_n \notin \mathcal{R}\}.$$

Es conocido y fácil de comprobar que $\text{Ap}(\mathcal{R}, m_n)$ es un conjunto completo de residuos módulo m_n (y, en particular, tiene m_n elementos) y que

$$\max(\text{Ap}(\mathcal{R}, m_n)) = g(\mathcal{R}) + m_n.$$

Para obtener la cota buscada haremos usaremos de una cota superior de $g(\mathcal{R})$ que es una pequeña variante de la que da Selmer en [59] (la cual se deduce a su vez de un resultado de Erdős y Graham [28]). La razón por la que no usamos directamente la cota de Selmer es que solo es válida bajo la hipótesis de que $n \leq m_1$. Esta hipótesis no es restrictiva si estamos estudiando semigrupos numéricos ya que siempre que $m_1 < \dots < m_n$ sea un conjunto de generadores minimal de \mathcal{R} se satisface que $n \leq m_1$. Sin embargo, estamos trabajando en el terreno de las curvas monomiales proyectivas, donde el hecho de que $m_1 < \dots < m_n$ no sea un sistema minimal de generadores de \mathcal{R} tiene sentido. Así pues una adaptación directa de la prueba de la cota de Selmer permite demostrar que

$$g(\mathcal{R}) \leq 2m_n \left\lfloor \frac{m_\tau}{n} \right\rfloor - m_\tau, \quad (3.6)$$

para todo $m_\tau \geq n$. Notar que $m_n \geq n$ y, por lo tanto, τ siempre existe.

Primero veremos un resultado que da una cota superior para $\text{reg}(K[\mathcal{S}])$ cuando $K[\mathcal{S}]$ es Cohen-Macaulay.

Identificador del documento: 1177709	Código de verificación: cLLpSpfn
Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Proposición 3.3.4. Sea \mathcal{C} la curva monomial proyectiva definida por la sucesión de enteros $m_1 < \dots < m_n$ primos entre sí y sea $\tau \in \{1, \dots, n\}$ tal que $m_\tau \geq n$. Si $K[\mathcal{C}]$ es Cohen-Macaulay, entonces

$$\text{reg}(K[\mathcal{C}]) \leq \left\lfloor (2m_n \left\lfloor \frac{m_\tau}{n} \right\rfloor - m_\tau + m_n) / m_1 \right\rfloor.$$

En particular, si $m_1 \geq n$, se tiene que $\text{reg}(K[\mathcal{C}]) \leq \left\lfloor m_n \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{m_1} \right) - 1 \right\rfloor$.

Demostración. Consideramos la relación de equivalencia sobre \mathbb{Z}^d introducida en (1.8). Dado que m_1, \dots, m_n son primos entre sí, se tiene que $\mathbb{Z}\mathcal{S} = \{(x, y) \mid x+y \equiv 0 \pmod{m_n}\}$, y que \sim particiona el conjunto \mathcal{S}_0 en exactamente m_n clases de equivalencia. Además, como $K[\mathcal{C}]$ es Cohen-Macaulay por hipótesis, tenemos que

- cada clase de equivalencia tiene un único elemento en \mathcal{S}_0 (ver Lema 1.3.2 y Proposición 1.3.3),
- $\mathcal{S}_1 = \emptyset$ (ver discusión previa a Teorema 3.3.1), y
- $\text{reg}(K[\mathcal{C}]) = \max \left\{ \frac{b_1+b_2}{m_n} \mid (b_1, b_2) \in \mathcal{S}_0 \right\}$ (ver Nota 3.3.3).

Tomamos $(b_1, b_2) \in \mathcal{S}_0$, entonces $(b_1, b_2) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i a_i$ y $(b_1 + b_2) / m_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i$. Además, afirmamos que $b_1 \in \text{Ap}(\mathcal{R}, m_n)$. En efecto, en otro caso $b_1 - m_n \in \mathcal{R}$ y existiría $(c_1, c_2) \in \mathcal{S}_0$ tal que $(c_1, c_2) \sim (b_1, b_2)$, lo cual no es posible. Por lo tanto, usando (3.6), se tiene que

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \right) m_1 \leq \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i m_i = b_1 \leq g(\mathcal{R}) + m_n \leq 2m_n \left\lfloor \frac{m_\tau}{n} \right\rfloor - m_\tau + m_n.$$

Concluimos entonces que

$$\frac{b_1 + b_2}{m_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \leq (2m_n \left\lfloor \frac{m_\tau}{n} \right\rfloor - m_\tau + m_n) / m_1.$$

Así, cuando $m_1 \geq n$, es suficiente tomar $\tau = 1$ para obtener el resultado. \square

Estamos ahora en condiciones de probar el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.3.5. Sea \mathcal{C} la curva monomial proyectiva definida por la sucesión de enteros $m_1 < \dots < m_n$ primos entre sí y sean τ, λ tales que $m_\tau \geq n$ y $m_n - m_\lambda \geq n$. Entonces

$$\text{reg}(K[\mathcal{C}]) \leq \left\lfloor \frac{(2m_n \left\lfloor \frac{m_\tau}{n} \right\rfloor - m_\tau + m_n)}{m_1} + \frac{(2m_n \left\lfloor \frac{m_n - m_\lambda}{n} \right\rfloor + m_\lambda)}{(m_n - m_{n-1})} \right\rfloor - 2.$$

En particular, si $m_1 \geq n$ y $m_n - m_{n-1} \geq n$, tenemos que

$$\text{reg}(K[\mathcal{C}]) \leq \left\lfloor m_n \left(\frac{4}{n} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_n - m_{n-1}} \right) \right\rfloor - 4.$$

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Demostración. Consideramos E una clase de equivalencia de $\mathbb{Z}\mathcal{S}$ inducida por la relación \sim . Suponemos primero que $\mathcal{S}_0 \cap E$ tiene un único elemento, sea este (b_1, b_2) . Entonces, $\mathcal{S}_1 \cap E = \emptyset$, y el mismo argumento que el que se utilizó en la prueba de la Proposición 3.3.4 demuestra que $\frac{b_1+b_2}{m_n} \leq (2m_n \lfloor \frac{m_r}{n} \rfloor - m_r + m_n)/m_1$.

Suponemos ahora que $\mathcal{S}_0 \cap E = \{(x_1, y_1), \dots, (x_r, y_r)\}$ con $r \geq 2$ y $x_1 < x_2 < \dots < x_r$. Vamos a demostrar que se satisfacen las siguientes propiedades:

- (a) $x_1 \equiv x_2 \equiv \dots \equiv x_r \pmod{m_n}$,
- (b) $y_1 > \dots > y_r$ y $y_1 \equiv y_2 \equiv \dots \equiv y_r \pmod{m_n}$,
- (c) $x_1 \in \text{Ap}(\mathcal{R}, m_n)$,
- (d) $y_r \in \text{Ap}(\mathcal{R}', m_n)$, donde \mathcal{R}' es el semigrupo numérico generado por $m_n - m_{n-1} < m_n - m_{n-2} < \dots < m_n - m_1 < m_n$,
- (e) $\mathcal{S}_1 \cap E = \{(x_2, y_1), (x_3, y_2), \dots, (x_r, y_{r-1})\}$, y
- (f) $\max \left\{ \frac{b_1+b_2}{m_n} \mid (b_1, b_2) \in \mathcal{S}_0 \cap E \right\} \leq \max \left\{ \frac{b_1+b_2}{m_n} \mid (b_1, b_2) \in \mathcal{S}_1 \cap E \right\} - 1$.

En efecto, las propiedades (a) y (b) son evidentes. Para probar (c) y (d) es suficiente tener en cuenta lo siguiente: $\mathcal{S} \subset \mathcal{R} \times \mathcal{R}'$ y que para todo $b_1 \in \mathcal{R}$ y $b_2 \in \mathcal{R}'$ existen $c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ tales que $(b_1, c_2), (c_1, b_2) \in \mathcal{S}$. Para obtener (e) observamos primero que

$$\mathcal{S} \cap E = \{b + \lambda(m_n, 0) + \mu(0, m_n) \mid b \in \mathcal{S}_0 \cap E, \lambda, \mu \in \mathbb{N}\}.$$

Tomamos ahora $(x, y) \in \mathcal{S}_1 \cap E$ e $i \in \{1, \dots, r\}$ el menor valor tal que $(x, y) = (x_i, y_i) + \lambda(m_n, 0) + \mu(0, m_n)$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$; observamos que

- $\lambda > 0$; en caso contrario, $(x, y) - (m_n, 0) \notin \mathcal{S}$,
- $\mu = 0$; en caso contrario, $(x, y) - (m_n, m_n) = (x_i, y_i) + (\lambda - 1)(m_n, 0) + (\mu - 1)(0, m_n) \in \mathcal{S}$, una contradicción,
- $y \geq y_r$; en caso contrario se tendría que $i = r$ y, como $(x, y) - (0, m_n) \in \mathcal{S} \cap E$, $\mu \geq 1$,
- $x \leq x_{i+1}$; en caso contrario $(x, y) = (x_{i+1}, y_{i+1}) + \lambda'(m_n, 0) + \mu'(0, m_n)$ con $\lambda', \mu' \geq 1$, una contradicción, y
- $x \geq x_{i+1}$; pues en caso contrario $(x, y) - (0, m_n) \notin \mathcal{S}$.

Por consiguiente $(x, y) = (x_{i+1}, y_i)$ y $\mathcal{S}_1 \cap E = \{(x_2, y_1), (x_3, y_2), \dots, (x_r, y_{r-1})\}$.

Sea ahora $i \in \{1, \dots, r-1\}$, y consideramos $(x_{i+1}, y_i) \in \mathcal{S}$. Como $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}) \in E$, $x_i \equiv x_{i+1} \pmod{m_n}$ y $y_i \equiv y_{i+1} \pmod{m_n}$, entonces $(x_{i+1}, y_i) \in E$. Además tenemos que existen $\gamma, \delta \in \mathbb{N}$ tales que $(x_{i+1}, y_i) - (m_n, 0) = (x_i, y_i) + \gamma(m_n, 0) \in \mathcal{S}$ y $(x_{i+1}, y_i) - (0, m_n) = (x_{i+1}, y_{i+1}) + \delta(0, m_n) \in \mathcal{S}$. Afirmamos que $(x_{i+1}, y_i) - (m_n, m_n) \notin$

Firmado por:	Fecha:
EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

\mathcal{S} . En caso contrario existe $j \in \{1, \dots, r\}$ tal que $(x_{i+1} - m_n, y_i - m_n) = (x_j, y_j) + \lambda'(m_n, 0) + \mu'(0, m_n)$; lo que no es posible puesto que $x_{i+1} - m_n < x_{i+1}$ implica que $j \leq i$ y $y_i - m_n < y_i$ implica que $j \geq i + 1$. Por tanto, $(x_{i+1}, y_i) \in \mathcal{S}_1$ y hemos probado (e). La propiedad (f) se sigue de (e).

Asimismo, como $x_1 \in \text{Ap}(\mathcal{R}, m_n)$, el mismo argumento usado en la Proposición 3.3.4 prueba que

$$\frac{x_1 + y_1}{m_n} \leq \left(2m_n \left\lfloor \frac{m_\tau}{n} \right\rfloor - m_\tau + m_n \right) / m_1, \quad (3.7)$$

y un argumento análogo con $y_r \in \text{Ap}(\mathcal{R}', m_n)$ prueba que

$$\frac{x_r + y_r}{m_n} \leq \left(2m_n \left\lfloor \frac{m_n - m_\lambda}{n} \right\rfloor + m_\lambda \right) / (m_n - m_{n-1}). \quad (3.8)$$

Y, como

$$\frac{x_{i+1} + y_i}{m_n} - 1 \leq \frac{x_r + y_1}{m_n} - 1 \leq \frac{x_1 + y_1}{m_n} + \frac{x_r + y_r}{m_n} - 2. \quad (3.9)$$

Teniendo en cuenta (3.7), (3.8) y (3.9) se tiene el resultado. En el caso $m_1 \geq n$ y $m_n - m_{n-1} \geq n$, es suficiente tomar $\tau = 1$ y $\lambda = n - 1$ para tener el resultado. \square

No es difícil construir ejemplos donde la cota del Teorema 3.3.5 mejore la cota de L'vovsky. Veamos a continuación un Ejemplo.

Ejemplo 3.3.6. Sea $n \geq 6$ y consideramos $m_i = n + i$ para todo $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ y $m_n = 3n$, tomamos entonces $\tau = 1$ y $\lambda = n - 1$ y aplicamos el Teorema 3.3.5 para demostrar que

$$\text{reg}(K[\mathcal{C}]) \leq \left\lfloor 3n \left(\frac{4}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} \right) \right\rfloor - 4 = 13,$$

mientras que el resultado de L'vovsky no da $2n + 1$ como cota superior.

3.3.2. Aplicación: proyecciones canónicas de la curvas monomial proyectivas asociada a una sucesión aritmética.

Sea $m_1 < \dots < m_n$ una sucesión aritmética de enteros positivos primos entre si y sea \mathcal{C} la curva monomial proyectiva asociada a esta sucesión de enteros. En el Corolario 3.1.4 describimos la resolución de Noether multigradaada de $K[\mathcal{C}]$, el anillo de coordenadas de \mathcal{C} .

En esta sección aplicaremos los resultados vistos para calcular las resoluciones de Noether multigradaadas de las proyecciones canónicas de \mathcal{C} . Es decir, para todo $r \in \{1, \dots, n - 1\}$ y $n \geq 3$ estudiaremos la curva $\mathcal{C}_r := \pi_r(\mathcal{C})$ que se obtiene como imagen de \mathcal{C} bajo la proyección π_r de \mathbb{P}_K^n en \mathbb{P}_K^{n-1} definida por $(p_1 : \dots : p_{n+1}) \mapsto (p_1 : \dots : p_{r-1} : p_{r+1} : \dots : p_{n+1})$. Sabemos que el ideal de anulación de \mathcal{C}_r es $I_{\mathcal{A}_r}$ donde $\mathcal{A}_r = \mathcal{A} \setminus \{a_r\}$ para todo $r \in \{1, \dots, n - 1\}$. Notar que \mathcal{C}_1 es la curva monomial proyectiva asociada a

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

la sucesión aritmética $m_2 < \dots < m_n$ y, por consiguiente, su resolución de Noether la podemos obtener del Corolario 3.1.4. Cuando $n = 3$, \mathcal{C}_2 también es la curva monomial proyectiva asociada a la sucesión aritmética $m_1 < m_3$. Es por ello que esta sección se dedica al estudio de la resolución de Noether multigradaada de \mathcal{C}_r para $r \in \{2, \dots, n-1\}$ y $n \geq 4$.

Nota 3.3.7. Denotamos por \mathcal{C}_n y \mathcal{C}_{n+1} a la clausura de Zariski de $\pi_n(\mathcal{C})$ y $\pi_{n+1}(\mathcal{C})$ respectivamente. Entonces, tanto \mathcal{C}_n como \mathcal{C}_{n+1} son curvas monomiales proyectivas asociadas a una sucesión aritmética y se puede obtener la resolución de Noether de las mismas aplicando el Corolario 3.1.4.. Más concretamente, las correspondientes sucesiones aritméticas son $m_1 < \dots < m_{n-1}$ para \mathcal{C}_n y $1 < 2 < \dots < n-1$ para \mathcal{C}_{n+1} , i.e., \mathcal{C}_{n+1} es la curva racional normal de grado $n-1$.

Denotamos por \mathcal{P}_r al semigrupo generado por \mathcal{A}_r para $r \in \{2, \dots, n-1\}$ y $n \geq 4$. La Proposición 3.3.10 nos indica cómo hallar los semigrupos \mathcal{P}_r a partir de \mathcal{S} . En la demostración de este resultado usaremos los siguientes lemas; el primero es solo una reescritura del Lema 1.2.10 y el segundo se obtiene directamente de él.

Lema 3.3.8. Sea $q := \lfloor (m_1 - 1)/(n - 1) \rfloor \in \mathbb{N}$; entonces,

- (a) $q + d + 1 = \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid bm_1 \in \sum_{i=2}^n \mathbb{N}m_i\}$
- (b) $q + 1 = \min\{b \in \mathbb{Z}^+ \mid bm_n \in \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{N}m_i\}$
- (c) $(q + d)a_1 + a_i = a_{1+i} + qa_n + da_{n+1}$ para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$, donde $l := m_1 - q(n-1) \in \{1, \dots, n-1\}$.

Lema 3.3.9. Para todo $r \in \{2, \dots, n-1\}$, tenemos que $m_r \in \sum_{i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{r\}} \mathbb{N}m_i$ si y solo si $r > m_1$.

Antes de describir la resolución de Noether, aportamos un resultado que relaciona el semigrupo $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{N}^2$ de la curva monomial proyectiva asociada a una sucesión aritmética con el de sus proyecciones \mathcal{P}_r . Este resultado, si bien es bastante técnico, será esencial para describir la resolución de Noether de \mathcal{P}_r posteriormente.

Proposición 3.3.10. Sean $q := \lfloor (m_1 - 1)/(n - 1) \rfloor$ y $l := m_1 - q(n - 1)$. Si $r \leq m_1$, entonces

- (a.1) para $r = 2$,

$$\mathcal{S} \setminus \mathcal{P}_2 = \begin{cases} \{\mu a_1 + a_2 + \lambda a_{n+1} \mid 0 \leq \mu < q + d, \lambda \in \mathbb{N}\}, & \text{si } l \neq n - 1, \\ \{\mu a_1 + a_2 + \lambda a_{n+1} \mid 0 \leq \mu \leq q + d, \lambda \in \mathbb{N}\}, & \text{si } l = n - 1, \end{cases}$$
- (a.2) para $r \in \{3, \dots, n-2\}$, $\mathcal{S} \setminus \mathcal{P}_r = \{a_r + \lambda a_{n+1} \mid \lambda \in \mathbb{N}\}$, y
- (a.3) para $r = n-1$,

$$\mathcal{S} \setminus \mathcal{P}_{n-1} = \begin{cases} \{a_{n-1} + \mu a_n + \lambda a_{n+1} \mid 0 \leq \mu < q \text{ o } 0 \leq \lambda < d\}, & \text{si } l \neq n - 1, \\ \{a_{n-1} + \mu a_n + \lambda a_{n+1} \mid 0 \leq \mu \leq q \text{ or } 0 \leq \lambda < d\}, & \text{si } l = n - 1. \end{cases}$$

Identificador del documento: 1177709		Código de verificación: cLLpSpfn
Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28	
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54	
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10	
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52	

Si $r > m_1$, entonces

(b.1) para $r = 2$, $\mathcal{S} \setminus \mathcal{P}_2 = \{\mu a_1 + a_2 + \lambda a_{n+1} \mid 0 \leq \mu, \lambda < d\}$,

(b.2) para $r \in \{3, \dots, n-2\}$, $\mathcal{S} \setminus \mathcal{P}_r = \{a_r + \lambda a_{n+1} \mid 0 \leq \lambda < d\}$, y

(b.3) para $r = n-1$, $\mathcal{S} \setminus \mathcal{P}_{n-1} = \{a_{n-1} + \mu a_n + \lambda a_{n+1} \mid \mu \in \mathbb{N}, 0 \leq \lambda < d\}$.

Demostración. Para cada $s \in \mathcal{S}$ podemos escribir $s = \alpha_1 a_1 + \epsilon_i a_i + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} a_{n+1}$, con $\alpha_1, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in \mathbb{N}$, $i \in \{2, \dots, n-1\}$ y $\epsilon_i \in \{0, 1\}$. Siempre que $\epsilon_i = 0$ o $i \neq r$, es claro que $s \in \mathcal{P}_r$. Por lo tanto, supongamos que $s = \alpha_1 a_1 + a_r + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} a_{n+1}$ y la idea de la demostración es caracterizar los valores de $\alpha_1, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ de modo que $s \in \mathcal{P}_r$ en cada caso.

Suponemos primero que $r \in \{3, \dots, n-2\}$ y probamos (a.2) y (b.2). Si $\alpha_1 > 0$ o $\alpha_n > 0$, de las igualdades $a_1 + a_r = a_2 + a_{r-1}$ y $a_r + a_n = a_{r+1} + a_{n-1}$ deducimos que $s \in \mathcal{P}_r$, así es suficiente considerar el caso $s = a_r + \alpha_{n+1} a_{n+1}$. Si $r \leq m_1$, por el Lema 3.3.9 obtenemos que $s \notin \mathcal{P}_r$ pues la primera coordenada de s es precisamente m_r . Con esto probamos (a.2). Si $r > m_1$ y $\alpha_{n+1} \geq d$, entonces de $a_r + d a_{n+1} = d a_1 + a_{r-m_1}$ se tiene que $s \in \mathcal{P}_r$. Sin embargo, si $\alpha_{n+1} < d$ probaremos que $s \notin \mathcal{P}_r$. Supongamos por reducción al absurdo que $s \in \mathcal{P}_r$ y $\alpha_{n+1} < d$, entonces

$$s = a_r + \alpha_{n+1} a_{n+1} = \sum_{j \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{r\}} \beta_j a_j \quad (3.10)$$

para algún $\beta_j \in \mathbb{N}$, y así $d \geq 1 + \alpha_{n+1} = \sum_{j \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{r\}} \beta_j$. Además, si observamos las primeras coordenadas en (3.10) se tiene que $m_r = \sum_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{r\}} \beta_j m_j$. Por consiguiente, $m_1 + (r-1)d = \sum_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{r\}} \beta_j (m_1 + (j-1)d)$ y, como $\gcd\{m_1, d\} = 1$, esto implica que d divide a $(\sum_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{r\}} \beta_j) - 1$, pero $0 < (\sum_{j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{r\}} \beta_j) - 1 < d$, una contradicción. Así pues (b.2) está demostrado.

Como la demostración de (a.1) es similar a la desarrollada para (a.3) no la incluimos. Probemos entonces (b.1). Supongamos que $r = 2$. Si $\alpha_n > 0$ de la igualdad $a_2 + a_n = a_3 + a_{n-1}$ se obtiene que $s \in \mathcal{P}_2$, luego es suficiente considerar el caso $s = \alpha_1 a_1 + a_r + \alpha_{n+1} a_{n+1}$. Si $\alpha_1 \geq d$, la identidad $d a_1 + a_2 = a_3 + d a_{n+1}$ prueba que $s \in \mathcal{P}_2$. Para $\alpha_1 < d$, si $\alpha_{n+1} \geq d$, la igualdad $\alpha_1 a_1 + a_2 + d a_{n+1} = (\alpha_1 + d + 1) a_1$ también prueba que $s \in \mathcal{P}_2$. Luego, para tener (b.1) solo queda demostrar que $s \notin \mathcal{P}_2$ cuando $\alpha_1, \alpha_{n+1} < d$. De hecho, supongamos que $\alpha_1 a_1 + a_2 + \alpha_{n+1} a_{n+1} = \sum_{j \in \{1, 3, \dots, n+1\}} \beta_j a_j$. Fijándonos en las primeras coordenadas de la anterior igualdad, llegamos a que $\alpha_1 + m_2 = \sum_{j \in \{1, 3, \dots, n\}} \beta_j m_j$, pero $\alpha_1 + m_2 < m_3 < \dots < m_n$, así $\beta_3 = \dots = \beta_{n+1} = 0$. Pero esto implica que $\beta_1 = \alpha_1 + d + 1$ y, por consiguiente, $\beta_{n+1} < 0$, una contradicción.

Supongamos ahora que $r = n-1$. Si $\alpha_1 > 0$, la igualdad $a_1 + a_{n-1} = a_2 + a_{n-2}$ prueba que $s \in \mathcal{P}_{n-1}$. Por tanto es suficiente considerar $s = a_{n-1} + \alpha_n a_n + \alpha_{n+1} a_{n+1}$. Siempre que $s \in \mathcal{P}_{n-1}$, podemos expresar s como $s = \sum_{j \in \{1, \dots, n-2, n, n+1\}} \beta_j a_j$. Teniendo en cuenta ambas expresiones de s llegamos a que

$$(i) \sum_{j \in \{1, \dots, n-2, n, n+1\}} \beta_j = 1 + \alpha_n + \alpha_{n+1}, \text{ y}$$

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
 Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por:	Fecha:
EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

$$(ii) \sum_{j \in \{1, \dots, n-2, n\}} \beta_j m_j = m_{n-1} + \alpha_n m_n.$$

Si $\alpha_{n+1} < d$ probaremos que $s \notin \mathcal{P}_{n-1}$. Supongamos por reducción al absurdo que $s \in \mathcal{P}_{n-1}$. De (ii) y el Lema 3.3.8 deducimos que $\beta_n < \alpha_n$. Además, si reescribimos (ii) considerando que $m_i = m_1 + (i-1)d$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ y que $\gcd\{m_1, d\} = 1$, tenemos que d divide a $\sum_{j \in \{1, \dots, n-2, n\}} \beta_j - \alpha_n - 1 = \alpha_{n+1} - \beta_{n+1}$, una contradicción con $0 < \alpha_{n+1} - \beta_{n+1} < d$.

Caso 1: $m_1 \geq n-1$. Supongamos que $s \in \mathcal{P}_{n-1}$. Por (ii) y el Lema 3.3.9 tenemos que $\beta_n < \alpha_n$, por tanto existe $j_0 \in \{1, \dots, n-2\}$ tal que $\beta_{j_0} > 0$. En consecuencia, si añadimos $d - \beta_n m_n$ en ambos miembros de (ii) tenemos que $(\alpha_n + 1 - \beta_n)m_n = \sum_{j \in \{1, \dots, n-2\}} \beta_j m_j - m_{j_0} + m_{j_0+1} \in \sum_{j \in \{1, \dots, n-1\}} \mathbb{N}m_j$. Luego, por el Lema 3.3.8 tenemos que $\alpha_n \geq \alpha_n - \beta_n \geq q$. Si $l < n-1$, para $\alpha_n \geq q$, $\alpha_{n+1} \geq d$ la igualdad del Lema 3.3.8 $(q+d)a_1 + a_{n-l-1} = a_{n-1} + qa_n + da_{n+1}$ prueba que $s \in \mathcal{P}_{n-1}$. Esto demuestra (a.3) cuando $l \leq n-1$. Ahora bien, si $l = n-1$, para $\alpha_n \geq q+1$, $\alpha_n \geq d$, de nuevo por la igualdad $(q+d+1)a_1 = (q+1)a_n + da_{n+1}$ probamos que $s \in \mathcal{P}_{n-1}$. Solo queda entonces probar que si $\alpha_n = q$, entonces $s \notin \mathcal{P}_2$. Asumimos por reducción al absurdo que $a_{n-1} + qa_n + \alpha_{n+1}a_{n+1} = \sum_{j \in \{1, \dots, n-2, n, n+1\}} \beta_j a_j$. Entonces, de las primeras coordenadas en esta igualdad, $m_{n-1} + qm_n = \sum_{j \in \{1, \dots, n-2, n\}} \beta_j m_j$ y por el Lema 3.3.9 deducimos que $\beta_n < q$ y, en consecuencia, existe $j_0 \in \{1, \dots, n-2\}$ tal que $\beta_{j_0} > 0$. Denotamos $\beta_{n-1} := 0$, $\lambda_j := \beta_j$ para todo $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_0, j_0-1\}$, $\lambda_{j_0} = \beta_{j_0} - 1$, $\lambda_{j_0+1} = \beta_{j_0+1} + 1$, entonces sumando d en ambos miembros de la igualdad y atendiendo al Lema 3.3.8, tenemos que $(q+1)m_n = (q+d+1)m_1 = \sum_{j \in \{1, \dots, n\}} \lambda_j m_j \in \sum_{i=1}^n \mathbb{N}m_i$. Sin embargo $\lambda_1 \neq q+d+1$, $\lambda_n \neq q+1$, así aplicando sucesivamente las igualdades $a_i + a_j = a_{i-1} + a_{j+1}$ para todo $2 \leq i \leq j \leq n-1$ podemos escribir $\sum_{j \in \{1, \dots, n\}} \lambda_j m_j$ como $\mu_1 m_1 + \epsilon_k m_k + \mu_n m_n$ con $\mu_1, \mu_n \in \mathbb{N}$, $k \in \{2, \dots, n-1\}$, $\epsilon_k \in \{0, 1\}$. Es claro que $\mu_1 \neq q+d+1$ y $\mu_n \neq q+1$ y uno de ellos es no nulo; esto contradice la minimalidad de $q+d+1$ o $q+1$.

Para probar (b.3) lo único que queda es ver que si $\alpha_{n+1} \geq d$, entonces $s \in \mathcal{P}_{n-1}$, pero esto sigue fácilmente de la relación $a_{n-1} + da_{n+1} = da_1 + a_{n-1-m_1}$. \square

Usando el resultado anterior y la Proposición 1.3.1 no es difícil obtener el Corolario que damos a continuación, que nos provee los desplazamientos del primer paso de la resolución de Noether multigradaada de $K[\mathcal{P}_r]$ para todo $r \in \{2, \dots, n-1\}$, sea

$$(\mathcal{P}_r)_0 := \{s \in \mathcal{P}_r \mid s - a_n, s - a_{n+1} \notin \mathcal{P}_r\}.$$

De hecho, el Corolario 3.3.11 describe $(\mathcal{P}_r)_0$ respecto al conjunto \mathcal{S}_0 dado por el Teorema 3.1.3.

Corolario 3.3.11. Denotamos por $t_\mu := \mu a_1 + a_2$ para todo $\mu \in \mathbb{N}$. Si $r \leq m_1$, entonces

$$(a.1) \text{ para } r = 2, \\ (\mathcal{P}_2)_0 = \begin{cases} (\mathcal{S}_0 \setminus \{t_\mu \mid 0 \leq \mu < q+d\}) \cup \{t_\mu + a_n \mid 0 \leq \mu < q+d\}, & \text{si } l \neq n-1, \\ (\mathcal{S}_0 \setminus \{t_\mu \mid 0 \leq \mu \leq q+d\}) \cup \{t_\mu + a_n \mid 0 \leq \mu \leq q+d\}, & \text{si } l = n-1, \end{cases}$$

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

(a.2) para $r \in \{3, \dots, n-2\}$, $(\mathcal{P}_r)_0 = (\mathcal{S}_0 \setminus \{a_r\}) \cup \{a_r + a_n\}$,

(a.3) para $r = n-1$,
 $(\mathcal{P}_{n-1})_0 = \begin{cases} (\mathcal{S}_0 \setminus \{a_{n-1}\}) \cup \{a_{n-1} + qa_n + da_{n+1}\}, & \text{si } l \neq n-1, \\ (\mathcal{S}_0 \setminus \{a_{n-1}\}) \cup \{a_{n-1} + (q+1)a_n + da_{n+1}\}, & \text{si } l = n-1. \end{cases}$

Si $r > m_1$, entonces

(b.1) para $r = 2$,

$$(\mathcal{P}_2)_0 = (\mathcal{S}_0 \setminus \{t_\mu \mid 0 \leq \mu \leq d-1\}) \cup \{t_\mu + a_n, t_\mu + da_{n+1} \mid 0 \leq \mu < d\},$$

(b.2) para $r \in \{3, \dots, n-2\}$, $(\mathcal{P}_r)_0 = (\mathcal{S}_0 \setminus \{a_r\}) \cup \{a_r + a_n, a_r + da_{n+1}\}$, y

(b.3) para $r = n-1$, $(\mathcal{P}_{n-1})_0 = (\mathcal{S}_0 \setminus \{a_{n-1}\}) \cup \{a_{n-1} + da_{n+1}\}$.

Del Corolario 3.3.11 y la Proposición 1.3.3, tenemos la siguiente caracterización de la propiedad Cohen-Macaulay para esta familia de anillos de semigrupo teniendo en cuenta que el entero D de la Proposición 1.3.3 en este contexto es $D = m_n$.

Corolario 3.3.12. $K[\mathcal{P}_r]$ es Cohen-Macaulay $\iff r \leq m_1$ o $r = n-1$.

Además, como consecuencia del Teorema 1.4.3 y el Corolario 3.3.11, tenemos que cuando $K[\mathcal{P}_r]$ no es Cohen-Macaulay, su Macaulayficación es $K[S]$.

Corolario 3.3.13. Para todo $r \in \{2, \dots, n-2\}$ y $r > m_1$, la Macaulayficación de $K[\mathcal{P}_r]$ es $K[S]$.

Para hallar la resolución de Noether multigradaada de $K[\mathcal{P}_r]$ para todo $r \in \{2, \dots, n-2\}$ y $r > m_1$, queda estudiar el segundo paso de la misma. Por el Teorema 3.3.1, los desplazamientos vienen dados por el conjunto

$$(\mathcal{P}_r)_1 := \{s \in \mathcal{P}_r \mid s - a_n, s - a_{n+1} \in \mathcal{P}_r \text{ y } s - a_n - a_{n+1} \notin \mathcal{P}_r\}.$$

Corolario 3.3.14.

$$(\mathcal{P}_r)_1 = \begin{cases} \{\mu a_1 + a_2 + a_n + da_{n+1} \mid 0 \leq \mu < d\}, & \text{si } r = 2 \text{ y } m_1 = 1, \\ \{a_r + a_n + da_{n+1}\}, & \text{si } r \in \{3, \dots, n-2\} \text{ y } m_1 < r. \end{cases}$$

Como consecuencia del resultado anterior, somos capaces de dar la resolución de Noether multigradaada de $K[\mathcal{P}_r]$ para todo $r \in \{2, \dots, n-1\}$.

Teorema 3.3.15. Sean $q := \lceil (m_1 - 1)/(n - 1) \rceil$ y $l := m_1 - q(n - 1)$ y sea también $s_\lambda := (\lceil \frac{\lambda}{n-1} \rceil m_n - \lambda d, \lambda d) \in \mathbb{N}^2$ para todo $\lambda \in \{0, \dots, m_n - 1\}$, entonces la resolución de Noether multigradaada de $K[\mathcal{P}_r]$ viene dada por las siguientes expresiones:

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

- Para $m_1 \geq 2$ se tiene que

$$0 \rightarrow \left(\bigoplus_{\lambda=0, \lambda \notin \Lambda_1}^{m_n-1} A \cdot s_\lambda \right) \oplus \left(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_1} A \cdot (s_\lambda + a_n) \right) \rightarrow K[\mathcal{P}_2] \rightarrow 0,$$

donde $\Lambda_1 := \{\mu(n-1) - 1 \mid 1 \leq \mu \leq q + d + \epsilon\}$, y $\epsilon = 1$ si $l = n - 1$, o $\epsilon = 0$ en otro caso.

- Para $r \in \{3, \dots, n - 2\}$ y $r \leq m_1$, entonces

$$0 \rightarrow \left(\bigoplus_{\lambda=0, \lambda \neq n-r}^{m_n-1} A \cdot s_\lambda \right) \oplus A \cdot (a_r + a_n) \rightarrow K[\mathcal{P}_r] \rightarrow 0$$

- Para $r = n - 1 \leq m_1$, entonces

$$0 \rightarrow \left(\bigoplus_{\lambda=0, \lambda \neq 1}^{m_n-1} A \cdot s_\lambda \right) \oplus A \cdot (a_{n-1} + (q + \epsilon)a_n + da_{n+1}) \rightarrow K[\mathcal{P}_{n-1}] \rightarrow 0,$$

donde $\epsilon = 1$ si $l = n - 1$, o $\epsilon = 0$ en otro caso.

- Para $m_1 = 1$, entonces

$$0 \rightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_2} A \cdot (s_\lambda + a_n + da_{n+1}) \rightarrow \begin{array}{c} \bigoplus_{\lambda=0, \lambda \notin \Lambda_2}^{m_n-1} A \cdot s_\lambda \\ \oplus \\ \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_2} A \cdot (s_\lambda + a_n) \\ \oplus \\ \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_2} A \cdot (s_\lambda + da_{n+1}) \end{array} \rightarrow K[\mathcal{P}_2] \rightarrow 0,$$

donde $\Lambda_2 := \{\mu(n-1) - 1 \mid 1 \leq \mu \leq d\}$.

- Para $r \in \{3, \dots, n - 2\}$ y $r > m_1$, entonces

$$0 \rightarrow A \cdot (a_r + a_n + da_{n+1}) \rightarrow \begin{array}{c} \left(\bigoplus_{\lambda=0, \lambda \neq n-r}^{m_n-1} A \cdot s_\lambda \right) \\ \oplus \\ A \cdot (a_r + a_n) \oplus A \cdot (a_r + da_{n+1}) \end{array} \rightarrow K[\mathcal{P}_r] \rightarrow 0.$$

- Para $r = n - 1 > m_1$, entonces

$$0 \rightarrow \left(\bigoplus_{\lambda=0, \lambda \neq 1}^{m_n-1} A \cdot s_\lambda \right) \oplus A \cdot (a_{n-1} + da_{n+1}) \rightarrow K[\mathcal{P}_{n-1}] \rightarrow 0.$$

Merece la pena mencionar que del Teorema 3.3.15 y la Nota 3.3.3, se puede obtener la resolución de $K[\mathcal{P}_r]$ respecto a la graduación estándar. Adicionalmente, la descripción de $(\mathcal{P}_r)_i$ para todo $r \in \{2, \dots, n - 1\}$, $i \in \{0, 1\}$, permite usar la Nota 3.3.3 para dar una fórmula para la regularidad de Castelnuovo-Mumford de $K[\mathcal{P}_r]$.

Teorema 3.3.16. *La regularidad de Castelnuovo-Mumford de $K[\mathcal{P}_r]$ es:*

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

$$\text{reg}(K[\mathcal{P}_r]) = \begin{cases} \lceil \frac{m_n-1}{n-1} \rceil + 1, & \text{si } r \in \{2, n-1\} \text{ y } r \leq m_1, \\ 2d, & \text{si } r = 2 \text{ y } m_1 = 1, \text{ y} \\ \lceil \frac{m_n-1}{n-1} \rceil, & \text{si } r \in \{3, \dots, n-2\}, \text{ o } r = n-1 \text{ y } m_1 < r \end{cases}$$

Concluimos la sección ilustrando con un ejemplo los resultados de la misma.

Ejemplo 3.3.17. Consideramos la curva monomial proyectiva definida paramétricamente por las ecuaciones:

$$x_1 = st^6, x_2 = s^5t^2, x_4 = s^7, x_5 = t^7.$$

Observamos que la curva que se corresponde con \mathcal{C}_2 , donde \mathcal{C} es la asociada a la sucesión aritmética $m_1 < \dots < m_n$ con $m_1 = 1$, $d = 2$ y $n = 4$. Luego, por el Teorema 3.3.15, tenemos que la resolución de Noether multigradaada de $K[\mathcal{P}_2]$ es

$$0 \rightarrow A \cdot (10, 18) \oplus A \cdot (11, 24) \rightarrow A \cdot (2, 12) \oplus A \cdot (6, 8) \oplus A \cdot (10, 4) \oplus A \cdot (3, 18) \oplus A \cdot (11, 10) \oplus A \cdot (4, 24) \rightarrow K[\mathcal{P}_2] \rightarrow 0.$$

Por el Corolario 3.3.2, tenemos que la serie de Hilbert multigradaada de $K[\mathcal{P}_2]$ es

$$\mathcal{H}_{K[\mathcal{P}_2]}(t) = \frac{1 + t_1t_2^6 + t_1^2t_2^{12} + t_1^4t_2^{24} + t_1^3t_2^{18} + t_1^5t_2^2 + t_1^6t_2^8 + t_1^{10}t_2^4 - t_1^{10}t_2^{18} + t_1^{11}t_2^{10} - t_1^{11}t_2^{24}}{(1-t_1^7)(1-t_2^7)}$$

Siguiendo la Nota 3.3.3, si consideramos la graduación estándar sobre R , obtenemos la siguiente resolución de Noether de $K[\mathcal{P}_2]$:

$$0 \rightarrow A(-4) \oplus A(-5) \rightarrow A \oplus A(-1)^2 \oplus A(-2)^3 \rightarrow K[\mathcal{P}_2] \rightarrow 0, \\ A(-3)^2 \oplus A(-4)$$

y también la serie de Hilbert de $K[\mathcal{P}_2]$:

$$\mathcal{H}_{K[\mathcal{P}_2]}(t) = \frac{1 + 2t + 3t^2 + 2t^3 - t^5}{(1-t)^2}.$$

También, $\text{reg}(K[\mathcal{P}_2]) = 4$.

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

Bibliografía

- [1] W. W. Adams and P. Loustau, An Introduction to Gröbner bases. Graduate Studies in Mathematics, 3. American Mathematical Society, Providence, 1994.
- [2] I. Al-Ayyoub, Reduced Gröbner bases of certain toric varieties; a new short proof, *Comm. Algebra*, 37 (9) (2009), 2945-2955.
- [3] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, Introduction to commutative algebra. Addison-Wesley, 1969.
- [4] L. Avramov and D. Eisenbud, Regularity of modules over a Koszul algebra, *J. Algebra* 153 (1992), 85–90.
- [5] D. Bayer, Division algorithm and the Hilbert Scheme. PhD thesis, Harvard University, Cambridge, 1982.
- [6] D. Bayer and D. Mumford, What can be computed in algebraic geometry?. In: D. Eisenbud, L. Robbiano (Eds.), *Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Proceedings Cortona 1991, Cambridge University Press (1993), 1–48.
- [7] D. Bayer and M. Stillman, A criterion for detecting m -regularity. *Invent. Math.* 87 (1) (1987), 1–11.
- [8] I. Bermejo, E. García-Llorente and I. García-Marco, Algebraic invariants of projective monomial curves associated to generalized arithmetic sequences. *J. Symbolic Comput.* 81 (2017) 1–19.
- [9] I. Bermejo, E. García-Llorente, I. García-Marco and M. Morales, Noether resolutions in dimension 2. *J. Algebra* 482 (2017) 398–426.
- [10] I. Bermejo, E. García-Llorente and P. Gimenez, `monomialideal.lib`. A SINGULAR 4-1-0 library for computing a primary and the irreducible decompositions of monomial ideals (2016).
- [11] I. Bermejo and I. García-Marco, Complete intersections in simplicial toric varieties. *J. Symbolic Comput.* 68 (2015), part 1, 265–286.

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por:	Fecha:
EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

- [12] I. Bermejo and I. García-Marco, Complete intersections in certain affine and projective monomial curves, *Bull Braz Math Soc, New Series* 45(4) (2014) 1-26.
- [13] I. Bermejo and P. Gimenez, On Castelnuovo-Mumford regularity of projective curves. *Proc. Amer. Math. Soc.* 128(5) (2000), 1293–1299.
- [14] I. Bermejo and P. Gimenez, Computing the Castelnuovo-Mumford regularity of some subschemes of \mathbb{P}_K^n using quotients of monomial ideals, *Effective methods in algebraic geometry (Bath, 2000)*. *J. Pure Appl. Algebra* bf 164 (1-2) (2001) 23–33.
- [15] I. Bermejo and P. Gimenez, Saturation and Castelnuovo-Mumford regularity. *J. Algebra* 303 (2006), 592–617.
- [16] I. Bermejo and P. Gimenez, `mregular.lib`. A SINGULAR 4-1-0 library for computing the Castelnuovo-Mumford regularity of homogeneous ideals (2016).
- [17] I. Bermejo, P. Gimenez and M. Morales, Castelnuovo-Mumford regularity of projective monomial varieties of codimension two *Journal of Symbolic Computation* 41 (10) (2006), 1105-1124.
- [18] M.P. Brodmann and R.Y. Sharp, *Local cohomology. An algebraic introduction with geometric applications*. Second edition. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, 136. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [19] D.A. Buchsbaum and D. Eisenbud, Algebra Structures for Finite Free Resolutions, and Some Structure Theorems for Ideals of Codimension 3. *American Journal of Mathematics* Vol. 99, No. 3 (Jun., 1977), pp. 447-485.
- [20] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay Rings, Revised Edition*, Cambridge University Press, 1997.
- [21] M.P. Cavaliere and G. Niesi, On monomial curves and Cohen-Macaulay type. *Manuscripta Math.* 42 (1983), 147–159.
- [22] CoCoATeam, CoCoA: a system for doing Computations in Commutative Algebra, Available at <http://cocoa.dima.unige.it>
- [23] A. Conca, E. De Negri and M.E. Rossi, Koszul algebras and regularity. *Commutative algebra*, 285–315, Springer, New York, 2013.
- [24] D. Cox, J. Little and D. O’Shea, *Ideals, varieties and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*, 2nd edition, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [25] D. Cox, J. Little and H. Schenck, *Toric varieties*, Graduate Studies in Mathematics 124. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
 Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

- [26] W. Decker, G.-M. Greuel, G. Pfister and H. Schönemann, SINGULAR 4-1-0 — A computer algebra system for polynomial computations. Available at <http://www.singular.uni-kl.de> (2016).
- [27] D. Eisenbud, Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry, GTM 150, Springer-Verlag, 1995.
- [28] P. Erdős and R. L. Graham, On a linear diophantine problem of Frobenius, Acta Arithm. 21 (1972), 399–408.
- [29] D. Eisenbud and S. Goto, Linear free resolutions and minimal multiplicities. J. Algebra 88 (1984), 84–133.
- [30] A. Galligo, A propos du théorème de preparation de Weierstrass. Fonctions de Plusieurs Variables Complexes. Lect. Notes Math 409, 543–579 (1974).
- [31] P. A. García-Sánchez and J. C. Rosales, On Buchsbaum simplicial affine semigroups. Pacific J. Math. 202 (2002), no. 2, 329–393.
- [32] P. A. García-Sánchez and J. C. Rosales, Numerical semigroups. Developments in Mathematics, 20. Springer, New York, 2009. x+181 pp.
- [33] P. Gimenez, I. Sengupta and H. Srinivasan, Minimal graded free resolutions for monomial curves defined by arithmetic sequences, J. of Algebra 388 (2013) 294-310.
- [34] D. R. Grayson and M. E. Stillman, MACAULAY2, a software system for research in algebraic geometry. Available at <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2>.
- [35] S. Goto, N. Suzuki and K. Watanabe, On affine semigroups. Japan J. Math. 2 (1976), 1–12.
- [36] L. Gruson, R. Lazarsfeld and C. Peskine, On a theorem of Castelnuovo, and the equations defining space curves, Invent. Math. 72(3) (1983), 491–506.
- [37] R. Hartshorne, Local Cohomology. A seminar given by A. Grothendieck, Harvard University, Fall, 1961, Lecture Notes in Mathematics, 41 Springer-Verlag, Berlin-New York 1967.
- [38] L.T. Hoa, On Segre products of semigroup rings. Nagoya Math. J., Vol.110 (1988), 113–128.
- [39] L.T. Hoa, The Gorenstein property depends upon characteristic for affine semigroup rings. Arch. Math. 56 (1991), 228–235.
- [40] M. Hochster, Some applications of the Frobenius in characteristic 0. Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978), 886-912.

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
 Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

- [41] C. Huneke. Hyman Bass and Ubiquity: Gorenstein rings, in Algebra, K-theory, groups, and education (New York, 1997), 55–78, Contemp. Math. 243, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [42] G. Kempf, F.F. Knudsen, D. Mumford and B. Saint-Donat, Toroidal embeddings I, Lecture Notes in Math. 339, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1973.
- [43] T. Kawasaki, On Macaulayfication of Noetherian schemes. Trans. AMS 352(6), 2517–2552.
- [44] P. Li, D.P. Patil and L.G. Roberts, Bases and ideal generators for projective monomial curves. Comm. Algebra 40 (2012), no. 1, 173–191.
- [45] S. L’vovsky, On inflection points, monomial curves and hypersurfaces containing projective curves, Math. Ann. 306(4) (1996), 719–735.
- [46] F. S. Macaulay, Some properties of enumeration in the theory of modular systems, Proc. London Math. Soc. 26 (1927), 531–555.
- [47] E. Miller and B. Sturmfels, Combinatorial commutative algebra, Graduate Texts in Mathematics, vol. 227 (2005), pp. xiv+417, Springer-Verlag, New York.
- [48] S. Molinelli and G. Tamone, On the Hilbert function of certain rings of monomial curves. J. Pure Appl. Algebra 101 (1995), no. 2, 191–206.
- [49] M. Morales, Fonctions de Hilbert, genre géométrique d’une singularité quasi homogène Cohen-Macaulay [Hilbert functions, geometric genus of a Cohen-Macaulay quasihomogeneous singularity]. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 301 (1985), no. 14, 699–702.
- [50] M. Morales, On Hilbert function and Poincaré series of multigraded rings, work in preparation.
- [51] M. Morales and L. T. Nhan, On length of generalized fractions $1/(x_1^n, \dots, x_d^n, 1)$. Vietnam J. Math. 31 (2003), no. 4, 359–365 .
- [52] M. Morales, On the S2-ification of some toric varieties. Comm. Algebra 35 (2007), no. 1, 2409–2430.
- [53] D. P. Patil, Minimal sets of generators for the relation ideals of certain monomial curves, Manuscripta Math. **80**, Number 1 (1993), 239–248.
- [54] D. P. Patil and B. Singh, Generators for the derivation modules and the relation ideals of certain curves, Manuscripta Math. **68**, Number 1 (1990), 327–335.
- [55] I. Peeva, Graded syzygies, volume 14 of Algebra and Applications. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011.

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
 Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52

- [56] D. Quillen, Projective modules over polynomial rings, *Inventiones Mathematicae*, 36(1): 167–171, 1976.
- [57] J. L. Ramírez Alfonsín, *The Diophantine Frobenius Problem*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications **30**, Oxford University Press (2005).
- [58] On the use of Local Cohomology in Algebra and Geometry, In: *Six Lectures on Commutative Algebra* (J. Elias, J.M. Giral, R.M. Miró-Roig and S. Zarzuela, Eds.), *Progress in Mathematics* 166, Birkhauser, Boston, 1998.
- [59] E. S. Selmer, On the linear diophantine Problem of Frobenius, *J. Reine Angewandte Math.* 293/294(1) (1977), 1–17.
- [60] I. Sengupta, A Gröbner basis for certain affine monomial curves, *Comm. Algebra* **31(3)** (2003), 1113-1129.
- [61] R. P. Stanley, Hilbert Functions of Graded Algebras. *Adv. Math.* 28:1 (1978), 57–83.
- [62] B. Sturmfels, *Gröbner Bases and Convex Polytopes*, University Lecture Series 8, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [63] A. A. Suslin, Projective modules over polynomial rings are free, *Doklady Akademii Nauk SSSR* (in Russian), 229 (5): 1063–1066, 1976. Translated in "Projective modules over polynomial rings are free", *Soviet Mathematics*, 17 (4): 1160–1164, 1976.
- [64] P. Symonds, On the Castelnuovo-Mumford regularity of rings of polynomial invariants. *Ann. of Math.* (2) 174 (2011), no. 1, 499–517.
- [65] N. V. Trung and L. T. Hoa, Affine semigroups and Cohen-Macaulay rings generated by monomials. *Trans. AMS* 298(1) (1986), 145–167.
- [66] R. H. Villarreal, *Monomial Algebras*, Second Edition, *Monographs and Research Notes in Mathematics*. Chapman and Hall/CRC, 2015.

Este documento incorpora firma electrónica, y es copia auténtica de un documento electrónico archivado por la ULL según la Ley 39/2015.
 Su autenticidad puede ser contrastada en la siguiente dirección <https://sede.ull.es/validacion/>

Identificador del documento: 1177709

Código de verificación: cLLpSpfn

Firmado por: EVA GARCIA LLORENTE UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	Fecha: 10/01/2018 17:46:28
IGNACIO GARCIA MARCO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	10/01/2018 17:51:54
MARIA ISABEL BERMEJO DIAZ UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	11/01/2018 11:38:10
ERNESTO PEREDA DE PABLO UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA	12/01/2018 11:47:52