Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

María Patricia Rodríguez Batista

La derivada schwarziana

The Schwarzian derivative

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Septiembre de 2021

Dirigido por
María José Martín Gómez

María José Martín Gómez
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de La Laguna 38200
La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a mi tutora, María José Martín Gómez, por enseñarme lo que está aquí escrito y por su férrea paciencia conmigo.

También a mis padres y a mi hermano, por su apoyo estos cuatro años.

A mis tíos abuelos, y en particular a mi tío, que sabe lo difícil que es escribir, aún por poco convencional que le resulte este texto.

Y a mis dos abuelas, por todo.

Mª Patricia Rodríguez Batista
La Laguna, 10 de septiembre de 2021

Resumen · Abstract

Resumen

En este Trabajo de Fin de Grado se presenta una demostración del famoso criterio de univalencia (inyectividad de funciones holomorfas) de Nehari en términos de la derivada schwarziana.

Como se explicará a lo largo del trabajo (y tras revisar las propiedades del operador derivada schwarziana, su conexión con las transformaciones de Möbius y algunas características de las funciones univalentes en el disco unidad), el punto clave para la demostración del mencionado resultado es la conexión entre la univalencia y las propiedades de los ceros de las soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden a través de los teoremas de Sturm, que también serán revisados en la memoria para, finalmente, disponer de todas las herramientas necesarias para la demostración del teorema de Nehari.

Palabras clave: *Criterio de univalencia – Derivada schwarziana – Teorema de Nehari – Teoremas de Sturm.*

Abstract

This undergraduate thesis presents a demonstration of Nehari's famous univalence (injectivity of holomorphic functions) criterion in terms of the Schwarzian derivative. First, the properties of the Schwarzian derivative operator and its connection to Möbius transformations are reviewed, as are some properties of univalent functions on the unit disk. As it will be explained throughout the work, Sturm's theorem (which is also reviewed) is used to illustrate the connection between univalence and the zeros of the solutions of a second order homogeneous linear differential equation, which is the key point in demonstrating Nehari's result. Finally, with all necessary tools in hand, a proof of Nehari's theorem is given.

Keywords: *Univalence criterion – Schwarzian derivative – Nehari's theorem – Sturm's theorems.*

Contenido

Introducción

La derivada schwarziana es un concepto matemático que ha sido ampliamente utilizado en la teoría geométrica de funciones, que estudia las propiedades geométricas de las funciones holomorfas. En esta teoría, tienen especial importancia las funciones holomorfas e inyectivas, denominadas habitualmente funciones univalentes, en el disco unidad del plano complejo $\mathbb{D}$. También son llamadas aplicaciones conformes, debido a su propiedad de preservar ángulos.

Mientras que no es difícil determinar si una función holomorfa es localmente univalente en un dominio simplemente conexo, pues basta con comprobar que su derivada no se anula en ese dominio, comprobar que la función es globalmente univalente requiere de argumentos más elaborados.

En particular, y a este respecto, uno de los criterios de univalencia global para funciones localmente inyectivas y holomorfas en $\mathbb{D}$ más conocidos es debido al matemático Zeev Nehari. Este criterio se establece en términos de la derivada schwarziana de la función f, definida por

$$S(f) = (f''/f')' - \frac{1}{2}(f''/f')^2 \,.$$

Concretamente, Nehari prueba, en 1949, el siguiente teorema (véase [13]).

Teorema de Nehari. *Sea f una función holomorfa en el disco unidad que cumple $f'(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Entonces, f es univalente en $\mathbb{D}$ si*

$$\|S(f)\| = \sup_{z\in\mathbb{D}} |S(f)(z)|(1-|z|^2)^2 \leq 2 \,.$$

Hille, [9], demuestra ese mismo año que la constante 2 en el teorema de Nehari es precisa, combrobando que, para todo $\varepsilon > 0$, existen funciones holomorfas y localmente univalentes en $\mathbb{D}$ con $\|S(f_\varepsilon)\| = 2(1+\varepsilon^2)$ que no son univalentes en el disco unidad.

En este Trabajo de Fin de Grado se presenta una demostración más moderna que la del artículo original [13], preservando, no obstante, el argumento principal utilizado por Nehari: conseguir relacionar la condición de la inyectividad de la función f con cierta propiedad sobre los ceros de las soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea y aplicar el teorema de comparación de Sturm para ecuaciones diferenciales lineales de orden 2.

Con el fin de recopilar todos los argumentos necesarios para la demostración del teorema de Nehari, la definición de los conceptos y principales propiedades básicas de las herramientas a utilizar, en el primer capítulo de este este Trabajo de Fin de Grado se presenta la definición y primeras propiedades de la derivada schwarziana, íntimamente relacionada con las transformaciones de Möbius, que también serán consideradas. Se incluye además una sección sobre la que parece ser la primera aparición histórica de su fórmula.

En el capítulo 2, se revisa la teoría relacionada con las funciones univalentes en el disco unidad y se prueba que, para funciones f de este tipo, se tiene la siguiente acotación:

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |S(f)(z)|(1-|z|^2)^2 \leq 6\,.$$

Se incluyen, también, las propiedades básicas de las llamadas funciones convexas y una familia de ejemplos de funciones holomorfas en el disco que serán utilizadas posteriormente.

El tercer capítulo recoge la indispensable teoría clásica de Sturm sobre los ceros de las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de orden 2.

Finalmente, en el capítulo 4, se demuestran el criterio de univalencia de Nehari y el resultado de Hille ya mencionado.

1

Transformaciones de Möbius y la derivada schwarziana

Comenzamos este primer capítulo con algunas de las propiedades fundamentales de las llamadas transformaciones de Möbius, que se usarán para deducir la definición de la derivada schwarziana (siguiendo el procedimiento que parece atribuirse al mismo H. A. Schwarz).

1.1. Transformaciones de Möbius

La siguiente definición recoge el concepto fundamental de esta sección.

Definición 1.1. *Una transformación de Möbius, también llamada transformación lineal fraccionaria, es una aplicación definida en el cuerpo de los números complejos* $\mathbb{C}$ *de la forma*

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \quad ad-bc \neq 0, \tag{1.1}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.
La condición $ad-bc \neq 0$ en la definición anterior es equivalente a que la transformación de Möbius es no constante. Para comprobar este hecho, basta observar que si $c \neq 0$ (el caso $c = 0$ es obvio), podemos escribir

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a(cz+d)}{c(cz+d)} - \frac{ad-bc}{c(cz+d)} = \frac{a}{c} - \frac{ad-bc}{c(cz+d)}\,. \tag{1.2}$$

De hecho, a la vista de (1.2), se deduce que esa misma condición $ad-bc \neq 0$ es, también, equivalente a que la transformación T como en (1.1) es inyectiva en su dominio.

Observemos que, dada una transformación de Möbius T, y definiendo $T(\frac{-d}{c}) = \infty, c \neq 0$, y

$$T(\infty) = \begin{cases} \infty\,,\ c = 0\,, \\ \\ \frac{a}{c}\,,\ \ c \neq 0\,, \end{cases} \tag{1.3}$$

podemos extender la transformación de Möbius dada a todo el plano complejo ampliado $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, obteniendo así una transformación biyectiva en la esfera de Riemann.

1.1.1. Propiedades básicas de las transformaciones de Möbius

Es muy fácil comprobar que las transformaciones de Möbius forman un grupo (no conmutativo) con unidad la función I definida por $I(z) = z$, $z \in \mathbb{C}$. Es un grupo finitamente generado, donde el sistema de generadores viene dado por las siguientes transformaciones, conocidas como *transformaciones de Möbius simples*:

1. *Traslación:* $z \mapsto z + b$, $b \neq 0$.
2. *Rotación:* $z \mapsto \lambda z$, $|\lambda| = 1$.
3. *Homotecia:* $z \mapsto rz$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
4. *Inversión:* $z \mapsto \frac{1}{z}$.

No es difícil demostrar (véase [3, p.4]) que las transformaciones de Möbius simples preservan la familia

$$\mathcal{F} = \{\text{circunferencias en } \widehat{\mathbb{C}}\} = \{\text{circunferencias y rectas en } \mathbb{C}\}\,.$$

Se sigue, entonces, el siguiente teorema cuya demostración se omite.

Teorema 1.2. *Sea $\gamma \in \mathcal{F}$ y T una transformación de Möbius como en (1.1). Entonces, $T(\gamma) \in \mathcal{F}$.*

Otra propiedad fundamental de las transformaciones de Möbius es que están determinadas por sus valores en *tres* puntos distintos del plano complejo ampliado. Este resultado se recoge en el siguiente teorema cuya demostración se basa en el hecho, fácil de probar, de que una transformación de Möbius T distinta de la identidad tiene, a lo sumo, 2 puntos fijos en la esfera de Riemann.

En efecto, una transformación de Möbius de la forma $T(z) = Az + B$ con $(A, B) \neq (1, 0)$ tiene a $z = -B/(A-1)$ y $z = \infty$ como puntos fijos. Si $A = 1$ y $B \neq 0$, el único punto fijo es ∞. Si $T(z) = Az$, $A \neq 1$, $T(z) = z$ si y solo si $z \in \{0, \infty\}$.

En el caso en que T sea de la forma dada en (1.1) con $c \neq 0$, las soluciones de $T(z) = z$ son

$$z = \frac{d - a \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c}\,.$$

Teorema 1.3. *Dadas las tripletas de puntos distintos (z_1, z_2, z_3) y (w_1, w_2, w_3) en $\widehat{\mathbb{C}}^3$, existe una única transformación de Möbius T como en (1.1) tal que*

$$T(z_i) = w_i\,, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.4}$$

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que $w_1 = 1$, $w_2 = 0$ y $w_3 = \infty$ y que $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

En este caso, la transformación

$$S(z) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z - z_2}{z - z_3} \tag{1.5}$$

verifica (1.4).

Si alguno de los $z_i = \infty$, $i = 1, 2, 3$, basta considerar el límite cuando z_i tiende a infinito en la expresión anterior para obtener la transformación buscada que cumple (1.4). En el caso más general en el que w_1, w_2 y w_3 no son, necesariamente 1, 0, ∞, respectivamente, definimos la transformación de Möbius T que cumple $T(w_1) = 0$, $T(w_2) = 1$ y $T(w_3) = \infty$, siguiendo el procedimiento anterior. Es claro que $M = T^{-1} \circ S$ cumple las condiciones requeridas.

Para comprobar la unicidad, observemos que si existiese otra transformación $\widehat{M}$ verificando (1.4), entonces $\widehat{M}^{-1} \circ M$ (y $M \circ \widehat{M}^{-1}$) tendrían 3 puntos fijos. Serían igual, por tanto, a la identidad, lo que implica que la transformación es única. $\square$

La transformación S definida en la demostración del teorema anterior (es decir, la única transformación de Mobius que cumple $S(z_1) = 1$, $S(z_2) = 0$ y $S(z_3) = \infty$ para tres puntos distintos z_1, z_2 y z_3 de la esfera de Riemann) da lugar a la siguiente definición.

Definición 1.4. *La razón doble* (z_0, z_1, z_2, z_3) *de cuatro puntos distintos* $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ *es el valor* $S(z_0)$*, siendo* S *la (única) transformación de Möbius que satisface* $S(z_1) = 1$*,* $S(z_2) = 0$*,* $S(z_3) = \infty$*. Es decir,*

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3}\,, \tag{1.6}$$

entendiendo que, si alguno de los puntos involucrados es ∞*, es necesario tomar límites en la expresión anterior.*

A la vista de la definición anterior y por el teorema 1.3, se sigue el siguiente resultado.

Teorema 1.5. *Sea* $T \in M$ *y sean* z_0, z_1, z_2, z_3 *cuatro puntos distintos del plano complejo ampliado. Entonces,*

$$(T(z_0), T(z_1), T(z_2), T(z_3)) = (z_0, z_1, z_2, z_3)\,. \tag{1.7}$$

Es decir, la razón doble se preserva por las transformaciones de Möbius.

Quizá en este punto el lector puede preguntarse por la razón del término "razón doble" y su utilidad geométrica. A este respecto, podemos señalar que parece ser que Pappus de Alejandría (290-350) en su colección de libros (concretamente, en el libro VII) hizo ya uso implícito de la razón doble. De hecho, A. Jones [10] hace, en 1986, una traducción del texto original de Pappus y escribe distintos comentarios sobre cómo algunos de los célebres lemas de este autor se relacionan con la terminología moderna. La denominación actual de este concepto se debe al término *Doppelverhältnis* (razón doble), usado por los geómetras alemanes, y queda completamente justificada sin más que observar que (1.6) es equivalente al cociente de las razones simples $\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}$ y $\frac{z_0-z_2}{z_0-z_3}$. Es una cantidad con numerosas aplicaciones geométricas. Por ejemplo, es fácil ver que si los cuatro puntos están en una recta, entonces su razón doble es negativa si y solo si solo uno de los puntos z_2 o z_3 pertenece al intervalo determinado por z_0 y z_1. El hecho de que, en este caso, la razón doble resulte ser real se sigue del siguiente teorema.

Teorema 1.6. *La razón doble* (z_0, z_1, z_2, z_3) *es real si y solo si los cuatros puntos están en una circunferencia en la esfera de Riemann.*

Demostración. Observemos, en primer lugar, que toda circunferencia en el plano complejo ampliado queda determinada por tres puntos distintos, z_1, z_2 y z_3. Es una circunferencia en el plano complejo si y solo si estos tres puntos son números complejos y una recta si alguno de ellos es ∞.

Para demostrar el teorema, supongamos, en primer lugar, que $z_1 = 1$, $z_2 = 0$ y $z_3 = \infty$, de manera que es el eje real la recta determinada por estos tres puntos y, además, se tiene que

$$(z, z_1, z_2, z_3) = z\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

Por lo tanto, el punto z está en el eje real si y solo si (z, z_1, z_2, z_3) es un número real.

Dados tres puntos cualesquiera z_1, z_2 y $z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$, tomemos ahora la transformación de Möbius S con $S(z_1) = 1$, $S(z_2) = 0$ y $S(z_3) = \infty$. Por el teorema 1.2, y teniendo en cuenta que las transformaciones de Möbius son biyectivas, la imagen de la circunferencia determinada por los puntos z_1, z_2 y z_3 es el eje real y, de hecho, z_0 pertenece a esta circunferencia si y solo si $\mathrm{Im}\{S(z_0)\} = 0$. Con esta observación y usando (1.7), resulta que z_0 está en la circunferencia determinada por z_1, z_2 y z_3 si y solo si

$$(S(z_0), 1, 0, \infty) = (S(z_0), S(z_1), S(z_2), S(z_3)) = (z_0, z_1, z_2, z_3)$$

es un número real. $\square$

1.1.2. Automorfismos del disco

Es fácil comprobar que las siguientes transformaciones de Möbius son automorfismos holomorfos (es decir, aplicaciones holomorfas y biyectivas) del disco unidad $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$.

- Las *rotaciones* R_λ definidas, para $|\lambda| = 1$, por $R_\lambda(z) = \lambda z$, $z \in \mathbb{D}$.

- Los *automorfismos involutivos* φ_p, $p \in \mathbb{D}$, determinados por la fórmula

$$\varphi_p(z) = \frac{p - z}{1 - \overline{p}z}\,, \quad |z| < 1\,. \tag{1.8}$$

Algunas propiedades sobre los automorfismos φ_p que se usarán más adelante quedan recogidas en la siguiente proposición cuya demostración se omite.

Proposición 1.7. *Las funciones φ_p definidas en (1.8) satisfacen las siguientes condiciones.*

i. $\varphi_p^{-1} = \varphi_p$.
ii. $\varphi_p(0) = p$ *y* $\varphi_p(p) = 0$.
iii. $\varphi_p'(0) = |p|^2 - 1$ *y* $\varphi_p'(p) = \frac{1}{|p|^2-1}$.

El resto de esta sección estará destinado a comprobar que las rotaciones y los automorfismos involutivos φ_p son los generadores del grupo de automorfismos holomorfos del disco unidad teniendo, así, que todo automorfismo holomorfo de $\mathbb{D}$ es una transformación de Möbius. Este resultado está basado en el célebre lema de Schwarz, una consecuencia directa del principio del módulo máximo para funciones holomorfas.

Lema 1.8 (Lema de Schwarz). *Sea φ una aplicación holomorfa en el disco unidad que fija el origen y cumple $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Entonces:*

(1) $|\varphi(z)| \le |z|$ *para todo* $|z| < 1$,
(2) $|\varphi'(0)| \le 1$.

La igualdad se da en (1), para algún $z \neq 0$, o en (2) si y solo si φ es una rotación.

Demostración. Puesto que $\varphi(0) = 0$ y φ es holomorfa en $\mathbb{D}$, se tiene que la función ψ definida en el disco unidad por $\psi(z) = \varphi(z)/z$ es también holomorfa en $\mathbb{D}$. Tomando $r \in (0,1)$ arbitrario y usando que $|\varphi(z)| \le 1$ para todo z en el disco unidad, resulta que, si $|z| = r$,

$$|\psi(z)| = \frac{|\varphi(z)|}{|z|} = \frac{|\varphi(z)|}{r} \le \frac{1}{r}\,.$$

Se sigue, entonces, que $|\psi(z)| \le 1/r$ para todo $|z| \le r$. Basta dejar que r tienda a 1 para concluir que ψ es una función holomorfa en $\mathbb{D}$ acotada (en módulo) por 1. Esto demuestra (1) y (2), dado que

$$\psi(0) = \lim_{z\to 0} \frac{\varphi(z)}{z} = \varphi'(0)\,.$$

Para concluir la demostración, basta observar que la igualdad en la condición primera se da para algún $z \neq 0$ o en la segunda si y solo si ψ alcanza su módulo máximo (que sería 1) en un punto del disco unidad. En estos casos, la función ψ debe ser una constante λ de módulo 1, como queríamos demostrar. □

Utilizando los automorfismos definidos en (1.8), se puede obtener una versión más general del lema de Schwarz conocida como lema de Schwarz-Pick o, también, como versión invariante del lema de Schwarz. El resultado concreto es el siguiente.

Lema 1.9 (Lema de Schwarz-Pick). *Sea φ una función holomorfa en el disco unidad con $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Entonces:*

(1) Para $z, w \in \mathbb{D}$,

$$\left| \frac{\varphi(z) - \varphi(w)}{1 - \varphi(z)\overline{\varphi(w)}} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - z\overline{w}} \right| . \tag{1.9}$$

(2)

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{1 - |\varphi(z)|^2}{1 - |z|^2}\,, \quad z \in \mathbb{D}\,. \tag{1.10}$$

La igualdad se da en (1) para algunos z y w distintos o en (2) para algún z en $\mathbb{D}$ si y solo si existen $|\lambda| = 1$ y $p \in \mathbb{D}$ tales que $\varphi = \lambda\varphi_p$, donde φ_p es el automorfismo definido en (1.8). En estos casos, se tiene la igualdad en (1) y en (2) para todos los z y w del disco unidad.

Nótese que si $\varphi(0) = 0$ se tienen las conclusiones del lema de Schwarz tomando, en (1.9) y (1.10), $z = 0$.

Demostración. Sea $w \in \mathbb{D}$ un punto arbitrario. Entonces, utilizando los automorfismos definidos en (1.8) y sus propiedades, es fácil ver que la función $\psi = \varphi_{\varphi(w)} \circ \varphi \circ \varphi_w$ verifica las condiciones del lema de Schwarz. Por tanto, se tiene que para todo $z \in \mathbb{D}$, $|\psi(z)| \leq |z|$ y $|\psi'(0)| \leq 1$.

De la condición $|\psi'(0)| \leq 1$ se tiene, tras aplicar la regla de la cadena, (1.10). De la condición $|\psi(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ resulta

$$|\left(\varphi_{\varphi(w)} \circ \varphi\right)(\varphi_w(z))| \leq |z|\,,$$

que es equivalente a

$$|\left(\varphi_{\varphi(w)} \circ \varphi\right)(\zeta)| \leq |\varphi_w(\zeta)|\,,$$

donde $\zeta = \varphi_w(z)$. Es decir, se tiene (1.9).

Para caracterizar los casos de igualdad, observamos que ocurren si y solo si ψ es una rotación, es decir, si y solo si existe μ de módulo 1 tal que

$$\left(\varphi_{\varphi(w)} \circ \varphi\right)(\varphi_w(z)) = \mu z\,, \quad z \in \mathbb{D}\,.$$

Denotando de nuevo $\zeta = \varphi_w(z)$, se obtiene

$$\left(\varphi_{\varphi(w)} \circ \varphi\right)(\zeta) = \mu\varphi_w(\zeta)\,, \quad \zeta \in \mathbb{D}\,.$$

Es decir, para todo $\zeta \in \mathbb{D}$,

$$\varphi(\zeta) = \varphi_{\varphi(w)}\left(\mu\varphi_w(\zeta)\right) = \mu\varphi_{\overline{\mu}\varphi(w)}\left(\varphi_w(\zeta)\right) = \lambda\varphi_p(\zeta)\,,$$

donde

$$\lambda = -\mu\frac{1-\overline{\mu}\varphi(w)\overline{w}}{1-\mu\,\overline{\varphi(w)}w} \quad \text{y} \quad p = \frac{w-\overline{\mu}\varphi(w)}{1-\overline{\mu}\varphi(w)\overline{w}}\,.$$

Un cálculo directo muestra que si $\varphi = \lambda\varphi_p$ con $|\lambda| = 1$ y $p \in \mathbb{D}$, entonces se tiene la igualdad en (1) y (2) para todos los puntos z y w del disco unidad. □

Ya disponemos de todas las herramientas para demostrar el resultado principal de este apartado.

Teorema 1.10. *Sea φ una aplicación holomorfa del disco unidad con $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Entonces, φ es un automorfismo del disco si y solo si $\varphi = \lambda\varphi_p$, donde $|\lambda| = 1$ y φ_p es como en (1.8) para algún $|p| < 1$. En particular, todo automorfismo holomorfo del disco unidad es una transformación de Möbius.*

Demostración. Es claro que toda aplicación holomorfa de la forma $\lambda\varphi_p$, como en el enunciado, es un automorfismo del disco. Para concluir la demostración del teorema, supongamos, en primer lugar, que φ es un automorfismo (holomorfo) de $\mathbb{D}$ con $\varphi(0) = 0$.

En este caso, aplicando el lema de Schwarz, se sigue que $|\varphi'(0)| \leq 1$. Pero aplicando este mismo lema al automorfismo φ^{-1}, resulta que $|\varphi'(0)| \geq 1$. Por lo tanto, se cumple la igualdad en 2 del lema 1.8 y se tiene que existe $|\lambda| = 1$ tal que, para todo $z \in \mathbb{D}$, $\varphi(z) = \lambda z = -\lambda\varphi_0(z)$.

Supongamos ahora que $\varphi(0) = p \neq 0$ y sea $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que $\varphi(z_0) = 0$. Nótese que la existencia de tal z_0 está garantizada por ser φ una aplicación biyectiva. De hecho, por esta misma razón se tiene, necesariamente, que $z_0 \neq 0$. Entonces, también ocurre que $\varphi^{-1}(0) = z_0$ y $\varphi^{-1}(p) = 0$. Por lo tanto, aplicando el lema de Schwarz-Pick a la función φ, tenemos

$$\left|\frac{\varphi(z_0)-\varphi(0)}{1-\varphi(z_0)\overline{\varphi(0)}}\right| = |p| \leq |z_0|\ .$$

Aplicando el mismo lema a φ^{-1}, resulta

$$\left|\frac{\varphi^{-1}(p)-\varphi^{-1}(0)}{1-\varphi^{-1}(p)\overline{\varphi^{-1}(0)}}\right| = |z_0| \leq |p|\ .$$

Es decir, a la vista de estas dos estimaciones, se concluye que se da la igualdad en (1.9) en el lema 1.9 y, por lo tanto, φ es de la forma requerida. □

1.2. La derivada schwarziana

Introducimos en esta sección la definición y principales propiedades de la derivada schwarziana. Comenzamos con la siguiente observación, que será necesaria posteriormente, y restringimos nuestra exposición a las funciones holomorfas en el disco unidad, que serán las que se consideren en este trabajo, aunque los argumentos puedan aplicarse a cualquier dominio simplemente conexo contenido en el plano (y distinto de $\mathbb{C}$).

Es una consecuencia directa del teorema de la función inversa que si f es una aplicación holomorfa en el disco unidad y f' no tiene ceros en el disco, entonces f es localmente inyectiva, que como se ha señalado en la introducción, es equivalente al término "localmente univalente"(partiendo de f holomorfa), que se utilizará en el resto del trabajo. Es decir, dado un punto $z_0 \in \mathbb{D}$, existe un disco $D(z_0, r)$ de centro z_0 y radio $r > 0$ tal que la restricción de f a $D(z_0, r)$ es inyectiva. En el teorema 1.12 veremos que, para este tipo de funciones, la inyectividad local es, de hecho, equivalente a que f' no se anule. Para demostrarlo, necesitaremos el siguiente lema auxiliar.

Lema 1.11. *Sea f una función holomorfa en un disco $D = D(z_0, r)$ de centro z_0 y radio $r > 0$. Supongamos que f no tiene ceros en D. Entonces,*

(1) Existe una función G holomorfa en D tal que $e^G = f$. Es decir, existe una rama holomorfa del logaritmo de f.
(2) Para todo número natural $k \geq 2$, existe una función analítica H tal que $H^k = f$.

Demostración. Puesto que f no se anula en D, la función f'/f es holomorfa en D. Siendo este un dominio simplemente conexo, se tiene por el teorema de cauchy que existe una primitiva holomorfa, G, de f'/f (existen otras condiciones equivalentes, como puede verse en [11]). Es decir, existe una función holomorfa G en D tal que $G' = f'/f$. Esta función G está determinada salvo constante aditiva, por lo que podemos suponer $e^{G(z_0)} = f(z_0)$.

Definamos la función $F = fe^{-G}$, que es holomorfa en D. Además,

$$F' = f'e^{-G} - G'fe^{-G} = f'e^{-G} - \frac{f'}{f}fe^{-G} \equiv 0\,,$$

de manera que $F \equiv f(z_0)e^{-G(z_0)} = 1$. Esto concluye la demostración de (1). Para demostrar (2), basta definir $H = e^{\frac{1}{k}G}$. □

Se enuncia a continuación el resultado ya anunciado.

Teorema 1.12. *Sea f una función holomorfa en el disco unidad $\mathbb{D}$. Entonces, f es localmente inyectiva si y solo si f' no se anula en $\mathbb{D}$.*

Demostración. Como se ha mencionado anteriormente, la suficiencia se sigue del teorema de la función inversa, sin más que observar que el jacobiano de la función f en el punto $z \in \mathbb{D}$ es igual a $|f'(z)|^2$.

Para probar la necesidad, supongamos que f es localmente inyectiva y que existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que $f'(z_0) = 0$. En este caso, la función $F = f - f(z_0)$ también será holomorfa en $\mathbb{D}$, localmente inyectiva en ese disco y cumplirá que $F(z_0) = F'(z_0) = 0$. Por lo tanto, F tiene un cero de multiplicidad $k \geq 2$ en z_0. Así, existe una función holomorfa g en el disco unidad con $g(z_0) \neq 0$ y tal que

$$F(z) = (z - z_0)^k g(z).$$

Por la continuidad de la función g, se sigue que existe $r > 0$ tal que g no tiene ceros en el disco $D = D(z_0, r)$. Aplicando el lema anterior, considerando la función H holomorfa en D tal que $H^k = g$, se tiene

$$F(z) = (z - z_0)^k H^k(z)\,, \quad z \in D. \tag{1.11}$$

Por otro lado, siendo F localmente inyectiva y escogiendo el valor de r lo suficientemente pequeño, podemos suponer que, a la vez, se cumple (1.11) y que F es inyectiva en D. Veamos que esto da lugar a una contradicción.

Sea $\widehat{F}(z) = (z - z_0)H(z)$, $z \in D$, holomorfa en D y con $\widehat{F}(z_0) = 0$. Por el teorema de la aplicación abierta, existe $R > 0$ tal que $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| < R\} \subset \widehat{F}(D)$. Existen, entonces, $z_0, z_1, \ldots z_{k-1} \in D$ tales que $\widehat{F}(z_j) = e^{\frac{2\pi j i}{k}} R/2$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Pero esto implica que

$$F(z_0) = F(z_1) = \ldots = F(z_{k-1})\,,$$

lo que contradice que F es inyectiva en D. □

Introducimos en este punto la definición de derivada schwarziana de una función holomorfa cuya derivada no se anula.

Definición 1.13. *La* <u>*derivada schwarziana*</u> $S(f)$ *de una función holomorfa y localmente inyectiva* f *es:*

$$S(f) = (f''/f')' - \frac{1}{2}(f''/f')^2\,. \tag{1.12}$$

Para llegar a la fórmula (1.12) parece que H. A. Schwarz empleó, en 1873, el siguiente procedimiento (véase [7]), partiendo del estudio de propiedades preservadas por composiciones con aplicaciones de Möbius.

Sea T una aplicación de Möbius como en (1.1) y sea f una función localmente univalente en un abierto en el plano complejo. Sea $g = T \circ f$ de manera que $g = (af + b)/(cf + d)$, $ad - bc \neq 0$. Entonces, rescribiendo la ecuación anterior como $c(fg) + dg - af - b = 0$ y derivando tres veces, se llega al sistema lineal homogéneo

$$\begin{cases} c(fg)' + dg' - af' &= 0\,, \\ c(fg)'' + dg'' - af'' &= 0\,, \\ c(fg)''' + dg''' - af''' &= 0\,, \end{cases}$$

que tiene solución no trivial $(c, d, -a)$. Por lo tanto, el determinante de los coeficientes

$$\begin{vmatrix} (fg)' & g' & -f' \\ (fg)'' & g'' & -f'' \\ (fg)''' & g''' & -f''' \end{vmatrix} = 0\,.$$

Desarrollando este determinante obtenemos

$$3(f')^2(g'')^2 - 3(f'')^2(g')^2 + 2f'f'''(g')^2 - 2(f')^2g'g''' = 0\,,$$

o, también,

$$\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = \frac{g'''}{g'} - \frac{3}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2\,.$$

Es decir,

$$S(f) = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = \left(\frac{g''}{g'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2 = S(g)\,.$$

Algunas consecuencias inmediatas son las siguientes.

- Si T es una transformación de Möbius como en (1.1) y f es localmente inyectiva, $S(T \circ f) = S(f)$.
- Si T es una transformación de Möbius como en (1.1), $S(T) = 0$.
  Efectivamente, mediante simple computación es fácil comprobar que $S(T) = S(I)$, donde I es la función identidad definida por $I(z) = z, z \in \mathbb{C}$, siendo obvio que $S(I) = 0$.

Estos hechos son un caso particular de la regla de la cadena para la derivada schwarziana (que se sigue directamente de la regla de la cadena): Si f y g son localmente univalentes y la composición $f \circ g$ está bien definida,

$$S(f \circ g) = (S(f) \circ g)(g')^2 + S(g). \tag{1.13}$$

- Si f es una función holomorfa en el disco unidad y φ es un automorfismo del disco con $\varphi(0) = z_0$, usando la regla de la cadena para la derivada schwarziana y el hecho de que los automorfismos del disco son transformaciones de Möbius que cumplen $|\varphi'(0)| = (1 - |\varphi(0)|^2)$, resulta

$$|S(f \circ \varphi)(0)| = |S(f)(z_0)|(1 - |z_0|^2)^2\,.$$

Esta relación, que será importante en los capítulos posteriores, da lugar a la siguiente definición.

Definición 1.14. *Sea f una función holomorfa y localmente inyectiva en $\mathbb{D}$. Se define la* <u>*norma schwarziana*</u> $\|S(f)\|$*de f como*

$$\|S(f)\| = \sup_{z \in \mathbb{D}} |S(f)(z_0)|(1 - |z_0|^2)^2 \,. \tag{1.14}$$

Notoriamente, la regla de la cadena y el lema de Schwarz-Pick dan lugar a la igualdad $\|S(f \circ \varphi_a)\| = \|S(f)\|$.

El siguiente resultado relaciona la derivada schwarziana con la razón doble recientemente definida. Omitimos la demostración, que es técnica pero directa, y que puede encontrarse en [2].

Teorema 1.15. *Sea f una función holomorfa y localmente inyectiva en un dominio simplemente conexo Ω del plano complejo. Sean además $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $z_j = z_0 + hj \in \Omega$, $j = 0, 1, 2, 3$, para todo $|h| < r$, y $w_j = f(z_j)$. Entonces,*

$$\frac{1}{6} Sf(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{(w_0,w_1,w_2,w_3)}{(z_0,z_1,z_2,z_3)} - 1}{h^2} \,.$$

1.2.1. La derivada schwarziana y el método numérico de aproximación de ceros de Halley.

El método seguido por Schwarz para deducir la expresión de la derivada schwarziana descrito anteriormente data de 1873. No obstante, la fórmula de este operador aparece en los trabajos de Halley (1656-1742) sobre su método numérico de aproximación de raíces de funciones reales de variable real. Este método involucra la aproximación obtenida en el método de Newton-Raphson, que revisamos de manera somera a continuación. Omitimos los detalles técnicos con el fin de no extender en demasía estas observaciones históricas.

El método de Newton-Raphson aproxima el valor de los ceros de una función $y = f(x)$, asumiendo que f cumple las condiciones necesarias para asegurar la convergencia del método. Comenzando por un valor x_0, la intersección de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto x_0 con el eje de abscisas da lugar al siguiente término de la sucesión, x_1, y, de manera reiterada, se obtiene una sucesión $\{x_n\}_{n \geq 0}$ con límite α y se cumple $f(\alpha) = 0$. La fórmula de recurrencia de esta sucesión es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

o, de manera equivalente, la función generatriz del método de Newton-Raphson es

$$F_N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \,.$$

Nótese que esta misma función se obtiene al aproximar la función f usando su polinomio de Taylor de orden 1 centrado en x (suficientemente cercano a α), de manera que

$$0 = f(\alpha) \approx f(x) + f'(x)(\alpha - x)\,.$$

Despejando α se obtiene, en los términos anteriores, $\alpha \approx F_N(x)$. Más aún, también se establece que

$$\alpha - x \approx -\frac{f(x)}{f'(x)}\,, \tag{1.15}$$

que es utilizado por Halley para proponer su método, argumentando como sigue. Aproximamos utilizando, en lugar del polinomio de Taylor de orden 1, el de orden 2, para obtener

$$\begin{aligned} 0 = f(\alpha) &\approx f(x) + f'(x)(\alpha - x) + \frac{1}{2}f''(x)(\alpha - x)^2 \\ &= f(x) + (\alpha - x)\left(f'(x) + \frac{1}{2}f''(x)(\alpha - x)\right) \\ &\approx f(x) + (\alpha - x)\left(f'(x) - \frac{1}{2}f''(x)\frac{f(x)}{f'(x)}\right)\,. \end{aligned}$$

Despejando α, resulta $\alpha \approx F_H(x)$, donde F_H es la función generatriz del método numérico de Halley:

$$F_H(x) = x - \frac{2f(x)f'(x)}{2(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}\,.$$

Así, la sucesión que aproxima al cero α de la función f por este método viene dada por la recurrencia $x_{n+1} = F_H(x_n)$. Quizá sea apropiado mencionar que x_{n+1} se obtiene, en lugar de usando la recta tangente a la gráfica de f en el punto x_n (que era el caso en el método de Newton-Raphson), la curva de la forma $y = a + \frac{b}{1+cx}$ que mejor aproxima a la gráfica de la función f en x_n. Es decir, en este caso, en lugar de funciones lineales se utilizan transformaciones lineales fraccionarias.

La función generatriz del método de Halley satisface una conocida expresión:

$$F_H'''(\alpha) = \frac{1}{2}((f''/f')(\alpha))^2 - (f''/f')'(\alpha) = -S(f)(\alpha).$$

2

Funciones univalentes en el plano complejo

En este capítulo se introducen la clase S de funciones univalentes y normalizadas en el disco unidad, la clase Σ, en torno a la que se desarrolla el teorema del área, la clase de Carathéodory y la clase de Schwarz. Se consideran, también, la clase de las llamadas funciones convexas, que transforman el disco unidad sobre un dominio convexo del plano complejo.

2.1. La clase S

Los orígenes de la teoría de funciones univalentes se remontan a principios del siglo XX, quizá motivados por el siguiente resultado, el célebre teorema de representación de Riemann, que permite restringir el estudio de las propiedades de las funciones univalentes en un dominio simplemente conexo del plano complejo (distinto del plano en sí) al de las de las funciones del mismo tipo en el disco unidad.

Teorema 2.1 (Teorema de representación de Riemann). *Sea Ω un dominio simplemente conexo del plano complejo, distinto de $\mathbb{C}$ y no vacío. Entonces existe una aplicación f holomorfa y biyectiva en Ω tal que $f(\Omega) = \mathbb{D}$. Más aún, tal aplicación es única bajo las condiciones $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0$, donde $z_0 \in \Omega$.*

Centramos, por lo tanto, nuestro estudio en el disco unidad y definimos a continuación la clase S.

Definición 2.2. *La clase S es el conjunto de funciones univalentes en el disco unidad $\mathbb{D}$ normalizadas bajo las condiciones: $f(0) = f'(0) - 1 = 0$.*

La normalización en la definición anterior no es, en absoluto, restrictiva para multitud de problemas a considerar: si f es univalente en el disco unidad, la función $g = \frac{f-f(0)}{f'(0)}$ pertenece a la clase S y preserva todas las condiciones geométricas de la función f que son invariantes por transformaciones afines. No obstante, esta normalización es importante, como veremos a lo largo de este capítulo. Además, a partir de ella, es inmediato que podemos escribir toda función f de la clase S de la siguiente forma:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n + ... \qquad z \in \mathbb{D}\,. \tag{2.1}$$

2.1.1. Algunos ejemplos de funciones en la clase *S*

Destacamos los siguientes ejemplos:

1. La *función del semiplano*:

$$h(z) = \frac{z}{1-z} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n\,, \quad z \in \mathbb{D}\,. \tag{2.2}$$

Es fácil comprobar, dado que esta función es una transformación de Möbius, que $h(\mathbb{D}) = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > -\frac{1}{2}\}$.

2. La *función sobre la banda*:

$$s(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Log}\left[\frac{1+z}{1-z}\right]\,, \quad z \in \mathbb{D}\,, \tag{2.3}$$

donde Log es el logaritmo principal determinado por la rama del argumento principal $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$.
No es difícil ver que $s(\mathbb{D}) = \{w \in \mathbb{C}\colon |\operatorname{Im} w| < \pi/4\}$, dado que la imagen de la transformación $z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$, $z \in \mathbb{D}$, es el semiplano derecho $\mathbb{H} = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w > 0\}$.
3. También destacamos la *función de Koebe*:

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right] = z + \sum_{n=2}^{\infty} n z^n\,, \quad z \in \mathbb{D}\,, \tag{2.4}$$

que transforma el disco unidad sobre el plano complejo exceptuando la parte del eje real negativo de -1/4 a ∞.

2.1.2. Transformaciones que preservan la clase *S*

Las transformaciones que preservan la clase S aquí mostradas no son todas las conocidas. Ni siquiera, todas las más habituales (véanse [6] o [14]). No obstante, serán las que se utilizarán de manera frecuente en este trabajo. Las recogemos en la siguiente proposición cuya demostración es directa y se omite.

Proposición 2.3. *Sea f una función de la clase S. Las siguientes transformaciones dan lugar a funciones de esta misma clase.*

i. Rotaciones. Dado un número complejo λ de módulo 1, la rotación f_λ definida por $f_\lambda(z) = \overline{\lambda} f(\lambda z)$, $z \in \mathbb{D}$, pertenece a S.
ii. Dilataciones. Dado un número real $r \in (0,1)$, la dilatación f_r definida por $f_r(z) = \frac{1}{r} f(rz)$, $z \in \mathbb{D}$, pertenece a S.
iii. La transformación de los automorfismos, o de Koebe. Dado $z_0 \in \mathbb{D}$, sea φ_{z_0} el automorfismo definido por (1.8). Para toda $f \in S$, la función

$$K_{z_0}(f)(z) = \frac{f(\varphi_{z_0}(z)) - f(z_0)}{f'(z_0)\varphi'_{z_0}(0)}\,, \quad z \in \mathbb{D}\,, \tag{2.5}$$

pertenece a la clase S.

2.1.3. La clase Σ y la norma schwarziana de las funciones univalentes en el disco

Íntimamente relacionada con la clase S está la clase que presentamos en la siguiente definición.

Definición 2.4. *Sea $\Delta = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| > 1\}$. La clase Σ es el conjunto de funciones F holomorfas en Δ que son inyectivas y tienen un polo simple en ∞ con residuo 1.*

A la vista de la definición anterior, es fácil comprobar que $F \in \Sigma$ si y solo si es univalente en Δ y tiene desarrollo en serie de la forma

$$F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\zeta^k}\,, \quad |\zeta| > 1\,. \tag{2.6}$$

Uno de los teoremas principales sobre funciones en la clase Σ es el conocido como *teorema del área*. Debe su nombre a que su demostración involucra el cálculo de las áreas de ciertas regiones determinadas por la función F. Los argumentos se deben a Gronwall, que aportó la prueba en 1914. Remitimos al lector a [14] para su demostración, que omitimos por cuestiones de espacio.

Teorema 2.5 (Teorema del área). *Sea F una función de la clase Σ como en (2.6). Entonces,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2 \leq 1\,. \tag{2.7}$$

En particular, $|\alpha_1| \leq 1$ y se tiene $|\alpha_1| = 1$ si y solo si existen $\alpha_0 \in \mathbb{C}$ y $|\lambda| = 1$ tales que

$$F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \lambda\zeta^{-1}\,, \quad \zeta \in \Delta\,.$$

Las funciones de la clase Σ cuyo coeficiente α_1 es un número complejo de módulo 1 tienen, como conjunto excepcional, un segmento de longitud 4. Esta afirmación se prueba en el siguiente lema.

Lema 2.6. *Dados $\alpha_0 \in \mathbb{C}$ y $\lambda = e^{it}$, $t \in (-\pi, \pi]$, la función*

$$F(\zeta) = \zeta + \alpha_0 + \lambda\zeta^{-1}\,, \quad \zeta \in \Delta\,,$$

satisface $F(\Delta) = \mathbb{C} \setminus s$, donde s es el segmento rectilíneo que une los puntos $\alpha_0 - 2e^{\frac{it}{2}}$ y $\alpha_0 + 2e^{\frac{it}{2}}$

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que $\alpha_0 = 0$ y $\lambda = 1$, de manera que se obtiene la llamada transformación de Joukowsky $J(\zeta) = \zeta + 1/\zeta$, $\zeta \in \Delta$.

Fijamos ahora $r > 1$ y parametrizamos la circunferencia centrada en el origen y de radio r por $z = re^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. Se tiene, entonces,

$$J(re^{i\theta}) = re^{i\theta} + \frac{e^{-i\theta}}{r} = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\operatorname{sen}\theta\,,$$

expresión que determina la elipse con focos en $z_1 = 2$ y $z_2 = -2$ (y excentricidad $e = 2/(r^2+1)$).

Estas elipses degeneran en el segmento rectilíneo s que une los puntos -2 y 2, probando así el resultado del lema para este caso, dado que Δ es la unión de circunferencias centradas en el origen y radios $r > 1$.

Si $\alpha_0 = 0$ y $\lambda = e^{it}$ para algún $t \in (-\pi, \pi]$ distinto de 0, se tiene

$$F(\zeta) = \zeta + e^{it}\zeta^{-1} = e^{\frac{it}{2}} J(e^{\frac{-it}{2}}\zeta)\,.$$

Por lo tanto, s es el segmento rectilíneo que une los puntos $-2e^{\frac{it}{2}}$ y $2e^{\frac{it}{2}}$.

Basta aplicar una traslación para concluir el resultado en el caso en que α_0 no sea necesariamente igual a 0. $\square$

La relación entre las clases S y Σ, que se detalla en la proposición siguiente, junto con el teorema del área, serán fundamentales para la estimación de la norma schwarziana de las funciones univalentes en el disco unidad.

Proposición 2.7. *Sea $f \in S$ y sea $\beta \in \mathbb{C}$. Entonces,*

$$F(\zeta) = \frac{1}{f(1/\zeta)} + \beta\,, \quad \zeta \in \Delta\,, \tag{2.8}$$

pertenece a la clase Σ.
Recíprocamente, sea $F \in \Sigma$ y sea $\beta \in \mathbb{C} \setminus F(\Delta)$. Entonces,

$$f(z) = \frac{1}{F(1/z) - \beta}\,, \quad z \in \mathbb{D}\,, \tag{2.9}$$

pertenece a la clase S.

Demostración. Dada $f \in S$, y denotando $\zeta = 1/z$, $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, es claro que se cumple que la función F definida en (2.8) es univalente en Δ. Hemos de probar, por tanto, que tiene un desarrollo similar al dado en (2.6). Para ello, basta aplicar el algoritmo de la división (y utilizar las normalizaciones de f). De hecho, se tiene que si

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots\,, \quad z \in \mathbb{D}\,,$$

$$F(\zeta) = \zeta + \beta - a_2 + \frac{a_2^2 - a_3}{\zeta} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\zeta^k}\,, \quad \zeta \in \Delta. \tag{2.10}$$

El mismo argumento, utilizando en esta ocasión que $\beta \in \mathbb{C} \setminus F(\Delta)$, muestra que la función f definida en (2.9) pertenece a la clase S. □

A la vista de los resultados anteriores, es posible estimar la norma schwarziana de toda función univalente.

Teorema 2.8. *Sea f una función univalente en el disco unidad. Entonces,*

$$\|S(f)\| = \sup_{z \in \mathbb{D}} |S(f)(z)|(1 - |z|^2)^2 \leq 6\,.$$

La constante 6 *es precisa y se alcanza por la función de Koebe definida en* (2.4) *(y sus correspondientes rotaciones y transformaciones por automorfismos).*

Demostración. Sea f una función univalente en $\mathbb{D}$. Puesto que la función $F = (f - f(0))/f'(0) \in S$ y, por la regla de la cadena para la derivada schwarziana (y el hecho de que las transformaciones de Möbius tengan derivada schwarziana idénticamente nula) se tiene $S(F) = S(f)$, y podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $f \in S$.
Comencemos demostrando que $|S(f)(0)| \leq 6$ para toda función $f \in S$. Para ello, observemos que si

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n\,, \quad z \in \mathbb{D}\,,$$

un cálculo directo da lugar a $|S(f)(0)| = 6|a_3 - a_2^2|$. Por lo tanto, hemos de demostrar que $|a_3 - a_2^2| \leq 1$, una consecuencia directa de la proposición 2.7 y del teorema del área: la función F definida por (2.8) tiene el desarrollo en serie (2.10), lo que prueba el resultado.

Utilizando la regla de la cadena para la derivada schwarziana, se tiene

$$|Sf(z)|(1 - |z|^2)^2 = |S(K_z(f))(0)|, \tag{2.11}$$

donde $K_z(f)$ es la función obtenida en (2.5), lo que demuestra que la norma schwarziana de toda función univalente en el disco unidad está acotada por 6.

Un cálculo directo muestra que la derivada schwarziana de la función de Koebe cumple $|S(k)(0)| = 6$. Por lo tanto, la norma schwarziana de esta función es igual a 6. Lo mismo ocurre con sus rotaciones y sus transformaciones por automorfismos por la regla de la cadena.

□

2.2. Funciones convexas

Esta sección está dedicada al estudio de una subfamilia de la clase S formada por aquellas funciones que cumplen que $f(\mathbb{D})$ es un dominio convexo en el plano complejo. No obstante, antes de centrarnos en este estudio, es necesario analizar la siguiente clase de funciones.

2.2.1. La clase de Carathéodory

Definición 2.9. *La clase $\mathcal{P}$ (o clase de Carathéodory) es el conjunto de funciones p holomorfas en $\mathbb{D}$ que cumplen que $p(0) = 1$ y verifican*

$$\operatorname{Re}\{p(z)\} > 0\,, \quad z \in \mathbb{D}\,. \tag{2.12}$$

Nótese que el desarrollo en serie de Taylor de toda función $p \in \mathcal{P}$ es de la forma

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n\,, \quad z \in \mathbb{D}\,.$$

La función p_0, definida por

$$p_0(z) = (1+z)/(1-z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2z^n,\ z \in \mathbb{D}, \tag{2.13}$$

pertenece a la clase $\mathcal{P}$. Su relevancia se muestra, por ejemplo, en el siguiente teorema.

Teorema 2.10. *Sea $p \in \mathcal{P}$. Entonces, existe una función holomorfa w en el disco unidad que verifica $|w(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y tal que $p = p_0 \circ w$. Es decir,*

$$p(z) = \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)}\,, \quad z \in \mathbb{D}\,. \tag{2.14}$$

Demostración. Observemos que la función p_0 dada en (2.13) establece una biyección entre en disco unidad y el semiplano derecho $\mathbb{H}$. Por lo tanto, dada $p \in \mathcal{P}$, la función $w = p_0^{-1} \circ p$ es holomorfa en el disco unidad y cumple que $w(0) = 0$ y $w(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Basta aplicar el lema de Schwarz para obtener el resultado. □

La relación establecida en el teorema anterior entre funciones de la clase $\mathcal{P}$ y funciones holomorfas que verifican las hipótesis del lema de Schwarz permite obtener información sobre los coeficientes de las funciones del primer tipo.

Teorema 2.11. *Sea p una función en la clase $\mathcal{P}$ con desarrollo en serie de Taylor como se ha establecido en su definición. Entonces,*

(1) $|p_1| \leq 2$.
(2) $|p_2 - \frac{1}{2}p_1^2| \leq 2$.

Ambas estimaciones son precisas.

Demostración. Utilizando el teorema 2.10, se tiene que existe una función holomorfa w en el disco unidad con $w(0) = 0$ y $w(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ tal que

$$p(z) = \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)} .$$

Por lo tanto, $p_1 = p'(0) = 2w'(0)$, y aplicando el lema de Schwarz, se obtiene (1).

Para demostrar (2) se define la función α holomorfa en el disco unidad:

$$\alpha(z) = \frac{w(z) + w(-z)}{2} , \quad z \in \mathbb{D} .$$

Observemos que $\alpha(0) = 0$ y, además,

$$|\alpha(z)| \leq \frac{|w(z)| + |w(-z)|}{2} \leq \frac{1 + 1}{2} = 1 .$$

Es decir, $\alpha(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Así, argumentando como en la demostración del lema de Schwarz, también se obtiene que

$$\beta(z) = \begin{cases} \frac{\alpha(z)}{z} , & \text{si } z \neq 0 , \\ \alpha'(0) , & \text{si } z = 0 , \end{cases}$$

es holomorfa en el disco unidad y cumple $|\beta(z)| \leq 1$, $z \in \mathbb{D}$.

Por el lema de Schwarz-Pick,

$$|\beta'(0)| \leq \frac{1 - |\beta(0)|^2}{1 - |0|^2} = 1 - |\alpha'(0)|^2 \leq 1 .$$

Un cálculo directo muestra que

$$\beta'(0) = \frac{\alpha''(0)}{2} = \frac{w''(0)}{2} ,$$

lo que prueba que $|w''(0)| \leq 2$. Por ende, volviendo a la relación entre las funciones p y w e igualando los coeficientes de las series de Taylor, se obtiene

$$w''(0) = p_2 - \frac{p_1^2}{2},$$

de donde se deduce (2).

Para comprobar que las cotas son precisas, basta considerar las funciones p_0 definida anteriormente y que proporciona la igualdad en la estimación del apartado (1) y la función $\widehat{p_0}$, definida por $\widehat{p_0}(z) = p_0(z^2)$, $z \in \mathbb{D}$, que pertenece claramente a la clase $\mathcal{P}$ y tiene desarrollo en serie de Taylor

$$\widehat{p_0}(z) = 1 + 2z^2 + \dots, \quad z \in \mathbb{D},$$

por lo que da lugar a la igualdad en (2). □

2.2.2. Dominios convexos en $\mathbb{C}$

Comenzamos este apartado con una revisión sobre curvas y dominios convexos. La referencia utilizada, donde el lector puede encontrar los detalles aquí presentados, es [12].

Definición 2.12. *Dada una curva regular cerrada y simple en el plano complejo, se dice que es una curva* <u>*convexa*</u> *si la recta tangente en cada punto deja a la curva completamente a uno de los lados que determina dicha recta.*

Toda curva convexa acota un dominio convexo, que queda determinado por la siguiente definición.

Definición 2.13. *Un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ es* <u>*convexo*</u> *si dados dos puntos $z_1, z_2 \in \Omega$ el segmento que los une está, también, contenido en Ω.*

Todo dominio convexo es un dominio simplemente conexo. Esta última afirmación se sigue de observar que, fijado $z_0 \in \Omega$ la aplicación $C : [0,1] \times \Omega \to \Omega$ definida por $c(t,z) = z_0 + t(z - z_0)$ es continua. Por lo tanto, toda curva cerrada y simple en Ω, parametrizada por $\gamma : [0,1] \to \Omega$ puede deformarse en el dominio de manera continua en un punto z_0 considerando las funciones $c(t,s) = c(t,\gamma(s))$, $s, t \in [0,1]$.

El siguiente resultado será fundamental en nuestro estudio. De nuevo, remitimos al lector a [12] para su demostración. Adaptamos su enunciado a nuestro caso particular en el que las curvas consideradas quedarán parametrizadas por $\gamma(\theta) = f(re^{i\theta})$, $\theta \in [0, 2\pi]$, donde f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y $0 < r < 1$.

Teorema 2.14. *Consideremos una curva determinada por la parametrización $\gamma(\theta) = f(re^{i\theta})$, $\theta \in [0, 2\pi]$, donde f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y $0 < r < 1$. Entonces, la curva es convexa si y solo si es simple y*

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\arg\left\{\frac{\partial}{\partial \theta} f(re^{i\theta})\right\}\right) \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \tag{2.15}$$

2.2.3. La clase $\mathcal{K}$

Acorde con los conceptos de convexidad vistos recientemente, el objeto de estudio de esta sección se define como sigue.

Definición 2.15. *Una función f holomorfa en el disco unidad se dice convexa si $f(\mathbb{D})$ es convexo. La clase $\mathcal{K}$ es el conjunto de todas las funciones convexas en la clase S.*

La convexidad es una propiedad que se preserva por traslaciones y por la multiplicación por un número complejo no nulo: si se cumple que para algunos z_0, z_1 y z_2 en Ω y para $0 \leq t \leq 1$ se tiene

$$z_0 = tz_1 + (1-t)z_2 \,,$$

entonces, para todo a y $b \in \mathbb{C}$, con $a \neq 0$,

$$z_0 + b = t(z_1 + b) + (1-t)(z_2 + b) \in \Omega + b \quad \text{y} \quad az_0 = taz_1 + (1-t)az_2 \in a\Omega \,.$$

Por lo tanto, es inmediato que tanto las rotaciones como la transformación de Koebe definidas en la sección 2.1.2 preservan la clase $\mathcal{K}$. Que las dilataciones también cumplen esta propiedad es consecuencia de la siguiente proposición.

Proposición 2.16. *Sea $f \in \mathcal{K}$ y $0 < r < 1$. Entonces, la función f_r definida en el disco unidad por $f_r(z) = f(rz)$ transforma $\mathbb{D}$ en un dominio convexo.*

Demostración. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ tales que $|z_1| \leq |z_2| < r$. Denotemos por $w_1 = f_r(z_1)$ y $w_2 = f_r(z_2)$. Hemos de probar que todo punto del segmento que une w_1 y w_2 pertenece a $f_r(\mathbb{D})$. Es decir, que para todo punto w_0 en ese segmento, existe $|z_0| < r$ tal que $f(z_0) = w_0$. Escribamos

$$w_0 = t_0 w_1 + (1-t_0)w_2 \,, \quad 0 < t_0 < 1 \,.$$

Puesto que $f \in \mathcal{K}$, y por ende $f \in S$, existe un único punto $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que $f(z_0) = w_0$. Sea g la función dada por

$$g(z) = tf\left(\frac{z_1}{z_2} z\right) + (1-t)f(z) \,, \quad z \in \mathbb{D} \,,$$

que es holomorfa en $\mathbb{D}$, fija el origen y verifica $g(z_2) = tf(z_1) + (1-t)f(z_2) = w_0$.

Consideremos ahora una nueva función h:

$$h(z) = f^{-1}(g(z)) \,, z \in \mathbb{D}.$$

Para que esta función esté bien definida, hemos de probar que $g(\mathbb{D}) \subset f(\mathbb{D})$, lo cual es una consecuencia de que la función f es convexa: si $w \in g(\mathbb{D})$, entonces existe $z \in \mathbb{D}$ tal que

$$t f\left(\frac{z_1}{z_2} z\right) + (1-t) f(z) = w\,.$$

y, entonces, los puntos $f\left(\frac{z_1}{z_2}z\right)$ y $f(z)$ pertenecen a $f(\mathbb{D})$, de manera que también lo hace el segmento que los une y, en particular, el punto w.

Siendo composición de dos funciones holomorfas, h es holomorfa. Además, es claro que $h(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ y que $h(0) = 0$, por lo que aplicando el lema de Schwarz se tiene $|h(z)| \leq |z|$ para todo $|z| < 1$, lo que implica que

$$|z_0| = |h(z_2)| \leq |z_2| < r\,,$$

como queríamos demostrar. □

La descripción de las funciones en la clase $\mathcal{K}$ en términos de la clase de Carathéodory, considerada en la sección 2.2.1, se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.17. *Sea $f \in S$. Entonces, f pertenece a la clase $\mathcal{K}$ si y solo si para todo $z \in \mathbb{D}$*

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right\} > 0\,. \tag{2.16}$$

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que $f \in \mathcal{K}$. Sea $z \in \mathbb{D}$ arbitrario no nulo con $|z| = r$. Por la proposición anterior, se tiene que la curva parametrizada por $f(re^{i\theta})$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, es una curva convexa, de manera que se verifica (2.15). Es decir,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta} f(re^{i\theta})\right\}\right) &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\arg\left\{ie^{i\theta} f'(re^{i\theta})\right\}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{Im}\left\{\log\left(ie^{i\theta} f'(re^{i\theta})\right)\right\}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\log\left(ie^{i\theta} f'(re^{i\theta})\right)\right)\right\} \\
&= \operatorname{Im}\left\{i\left(1 + \frac{re^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right)\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{1 + \frac{re^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}\right\} \geq 0\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para todo z en el disco unidad,

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}\right\} \geq 0\,.$$

Definamos ahora como F la función $F(z) = 1 + \frac{z f''(z)}{f'(z)}$, $z \in \mathbb{D}$. Esta función es holomorfa en el disco unidad, cumple $F(0) = 1$ y $\operatorname{Re}(F(z)) \geq 0$ para todo

$|z| < 1$. De hecho, si existiera $z_0 \in \mathbb{D}$ con $\operatorname{Re}(F(z_0)) = 0$, por el teorema de la aplicación abierta, también debería existir otro punto z_1 en el disco tal que $\operatorname{Re}(F(z_1)) < 0$, lo que sería una contradicción. Esto prueba (2.16), o lo que es lo mismo, que F está en la clase $\mathcal{P}$.

Recíprocamente, la condición (2.16) da lugar, a la vista de los cálculos realizados, a la condición de que, para todo $0 < r < 1$,

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(re^{i\theta})\right\}\right) \geq 0\,.$$

Además, puesto que f es univalente, la curva parametrizada por $f(re^{i\theta})$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ es simple para todos los valores de r mencionados.

Esto termina la demostración, pues implica que f transforma todo disco centrado en el origen y de radio r en un dominio convexo, lo que garantiza que dados z_1, z_2 en $\mathbb{D}$ con $|z_1| \leq |z_2| = r$, el segmento rectilíneo que une $f(z_1)$ y $f(z_2)$ está contenido en la imagen por f del mencionado disco con radio r y, por tanto, en $f(\mathbb{D})$. $\square$

2.2.4. Derivada schwarziana de las funciones convexas

En la sección 2.1.3 se ha probado que toda función de la clase S tiene norma schwarziana menor o igual a 6. En el siguiente teorema mostramos que esta cota se puede mejorar si la función considerada pertenece a la clase $\mathcal{K}$. La demostración seguirá los pasos de la del teorema 2.8, en la que se usa que la clase S se preserva por las transformaciones de Koebe (2.5). Propiedad que, como ya se ha señalado, también verifica la clase $\mathcal{K}$.

Teorema 2.18. *Sea f una función de la clase $\mathcal{K}$. Entonces,*

$$\|S(f)\| = \sup_{z\in\mathbb{D}} |S(f)(z)|(1-|z|^2)^2 \leq 2\,.$$

La constante 2 es precisa.

Demostración. De nuevo utilizando la regla de la cadena para la derivada schwarziana se sigue que, para toda $f \in \mathcal{K}$,

$$|Sf(z)|(1-|z|^2)^2 = |S(K_z(f))(0)|\,, \tag{2.17}$$

donde $K_z(f)$ es la función obtenida en (2.5). Por lo tanto, basta demostrar que para toda función f en esta clase, $|S(f)(0)| \leq 2$.

Recordemos que si

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n\,, \quad z \in \mathbb{D}\,,$$

se tiene que $|S(f)(0)| = 6|a_3 - a_2^2|$. Por lo tanto, el objetivo es comprobar que para todo $f \in \mathcal{K}$ con desarrollo en serie de Taylor de esta manera, se cumple que $6|a_3 - a_2^2| \leq 2$.

Para ello, usamos el teorema 2.17, que garantiza que la función $F(z) = 1 + zf''(z)/f'(z)$, $z \in \mathbb{D}$, pertenece a la clase $\mathcal{P}$. Escribiendo el desarrollo en serie de Taylor de esta función, se tiene

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \dots , \quad z \in \mathbb{D} .$$

Calculando explícitamente los coeficientes de Taylor de la función F en términos de los de f, se obtiene $p_1 = 2a_2$ y $p_2 = 6a_3 - 4a_2^2$. Entonces,

$$6|a_3 - a_2^2| = |6a_3 - 4a_2^2 - 2a_2^2| = |p_2 - \frac{1}{2}p_1^2| \leq 2 ,$$

por el teorema 2.11.

La función s definida en (2.3) pertenece a la clase $\mathcal{K}$. Un cálculo directo muestra que el módulo de su derivada schwarziana en el origen es igual a 2, lo que indica que la cota es precisa. $\square$

2.3. Las funciones de Koebe generalizadas

Consideremos la función s definida por (2.3) y denotémosla, en esta sección (y por la naturaleza de la notación que usarán las funciones aquí presentadas), por k_0. Es decir,

$$k_0(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left[\frac{1+z}{1-z} \right] , \quad z \in \mathbb{D} . \tag{2.18}$$

El hecho de que la transformación $p_0(z) = (1+z)/(1-z)$ transforme el disco sobre el semiplano derecho $\mathbb{H}$ garantiza la holomorfía de k_0 en el disco unidad, dado que el logaritmo principal Log es una función holomorfa en el dominio $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 0\}$. Por esta misma razón, la transformación

$$z \mapsto e^{a \operatorname{Log}\left[\frac{1+z}{1-z}\right]} = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^a , \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\} ,$$

también resulta ser holomorfa en el disco unidad, por lo que las funciones

$$k_a(z) = \frac{1}{2a} \left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^a - 1 \right] , \quad z \in \mathbb{D} \tag{2.19}$$

también lo son. Nótese que k_2 es la función de Koebe definida en (2.4). Esta es la razón por la que este tipo de funciones son denominadas como sigue.

Definición 2.19. *A las funciones k_a dadas por (2.18) y (2.19) se las llama funciones de Koebe generalizadas .*

Todas las funciones de Koebe generalizadas fijan el origen y cumplen que $k_a'(0) = 1$. Además, son localmente univalentes en el disco unidad, puesto que su derivada es

$$k_a'(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^a \frac{1}{1-z^2}\,, \tag{2.20}$$

que no se anula en $\mathbb{D}$. No obstante, estas funciones pertenecen a la clase S solo para ciertos valores del parámetro a, como se demuestra en el siguiente teorema que se debe a Hille [9].

Teorema 2.20. *Las funciones de Koebe generalizadas k_a son univalentes si y solo si el parámetro a pertenece a la unión de los discos de radio 1 centrados en los puntos 1 y -1. Es decir, si y solo si se cumple $|a-1| \leq 1$ o $|a+1| \leq 1$.*

Demostración. El caso $a = 0$ es sencillo: la función k_0 es univalente por ser composición de dos funciones univalentes. Supongamos entonces que $a \neq 0$.

Observemos, en primer lugar, que se tiene la identidad $k_{-a}(z) = -k_a(-z)$. Por lo tanto, estudiar la univalencia de una función de Koebe generalizada correspondiente al valor $-a$ es equivalente a la determinada por el valor a. Esta observación nos permite suponer que $\operatorname{Re} a \geq 0$. Por lo tanto, el resultado a demostrar es que k_a es univalente en el disco unidad si y solo si $|a-1| \leq 1$ o, de manera equivalente escribiendo $a = \alpha + i\beta$, si y solo si $|a|^2 = \alpha^2 + \beta^2 \leq 2\alpha$.

Teniendo en cuenta que k_a es univalente si y solo si p_0^a lo es, y dado, como se ha mencionado anteriormente, que p_0 es una aplicación biyectiva del disco sobre el semiplano derecho, la univalencia de k_a en el disco unidad viene dada por la univalencia de la función $w \mapsto w^a$ en el semiplano $\mathbb{H}$. Determinemos, entonces, los valores de los parámetros $a \neq 0$ con parte real no negativa que verifican esta condición.

Sean w_1 y w_2 dos números complejos con parte real positiva y escribámoslos en forma polar: $w_1 = r_1 e^{it_1}$, $w_2 = r_2 e^{it_2}$, con r_1 y $r_2 > 0$ y $-\pi/2 < t_1, t_2 < \pi/2$. Nótese que esta última condición implica que $|t_1 - t_2| < \pi$.

Entonces, $w_1^a = w_2^a$ si y solo si $e^{a(\log r_1 + it_1)} = e^{a(\log r_2 + it_2)}$, es decir, si y solo si existe un número entero k tal que

$$\begin{cases} \alpha \log r_1 - \beta t_1 = \alpha \log r_2 - \beta t_2\,, \\ \alpha t_1 + \beta \log r_1 = \alpha t_2 + \beta \log r_2 + 2k\pi\,. \end{cases} \equiv \begin{cases} \log r_1 - \log r_2 = \frac{2k\beta\pi}{|a|^2}\,, \\ \qquad t_1 - t_2 \quad = \frac{2k\alpha\pi}{|a|^2}\,. \end{cases} \tag{2.21}$$

Supongamos ahora que $|a|^2 > 2\alpha$. Sea $0 < \varepsilon < 1 - 2\alpha/|a^2|$, con $\varepsilon < 1$. Distinguimos dos casos:

Si $\beta \geq 0$, consideramos los puntos $w_1 = r_1 e^{it_1}$ y $w_2 = r_2 e^{it_2}$, con $r_2 = 1$, $\log r_1 = 2\beta\pi/|a|^2$, $t_2 = -\pi/2 + \varepsilon\pi$ y $t_1 = t_2 + 2\alpha\pi/|a|^2$, que tienen parte real positiva y cumplen $w_1^a = w_2^a$ (puesto que se verifica (2.21) para $k = 1$).

Si $\beta < 0$, consideramos los puntos $w_1 = r_1 e^{it_1}$ y $w_2 = r_2 e^{it_2}$, con $r_2 = 1$, $\log r_1 = -2\beta\pi/|a|^2$, $t_2 = \pi/2 - \varepsilon\pi$ y $t_1 = t_2 - 2\alpha\pi/|a|^2$, que tienen parte real positiva. De nuevo, dado que se verifica (2.21) con $k = -1$, se tiene $w_1^a = w_2^a$. Por lo tanto, k_a no es univalente si $|a|^2 > 2\alpha$.

Ahora bien, si $|a|^2 \leq 2\alpha$ y suponiendo que existen dos puntos $w_1 = r_1 e^{it_1}$ y $w_2 = r_2 e^{it_2}$, con parte real positiva para los que se cumple $w_1^a = w_2^a$, se tiene, usando (2.21),

$$\pi > |t_1 - t_2| = \frac{2|k|\alpha\pi}{|a|^2} \geq |k|\pi\,,$$

lo cual da lugar a una contradicción, salvo que $k = 0$. Pero si $k = 0$, se sigue que (de nuevo de (2.21)) $w_1 = w_2$. Por lo tanto, k_a es univalente si $|a|^2 \leq 2\alpha$, lo que termina la demostración. □

Concluimos el capítulo con el cálculo de la norma schwarziana de este interesante conjunto de funciones, un resultado cuanto menos útil.

Teorema 2.21. *La norma schwarziana de las funciones de Koebe generalizadas es*

$$\|S(k_a)\| = 2|1 - a^2|\,.$$

Demostración. Un cálculo directo muestra que

$$S(k_a)(z) = \left(\frac{k_a''(z)}{k_a'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{k_a''(z)}{k_a'(z)}\right)^2 = \frac{2(1-a^2)}{(1-z^2)^2}\,.$$

Por lo tanto, usando la desigualdad triangular, queda

$$\|S(k_a)\| = \sup_{z\in\mathbb{D}} |S(k_a)(z)|(1-|z|^2)^2 \leq 2|1-a^2|\,.$$

Para terminar la demostración, basta observar que $|S(k_a)(0)| = 2|1-a^2|$. □

3

Algunos resultados sobre Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

A diferencia de lo que ocurre con las ecuaciones diferenciales de primer orden, no existe un procedimiento general para obtener la solución de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes no necesariamente constantes

$$y''(z) + P(z)y'(z) + Q(z)y(z) = 0\,, \quad z \in \mathbb{D}\,.$$

Este capítulo está dedicado a revisar algunos de los resultados que permiten obtener propiedades cualitativas sobre las soluciones de las ecuaciones del tipo anterior, sin conocerlas explícitamente. En particular, nos interesaremos por distintas propiedades de los ceros de las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden.

Los resultados aquí expuestos se aplicarán a la demostración del teorema principal de este trabajo, debido a Nehari, y recogida en el capítulo 4. Puesto que los coeficientes de las ecuaciones diferenciales en la prueba del teorema de Nehari son funciones holomorfas en el disco unidad, se satisfacen las hipótesis del teorema de Picard-Lindelöf sobre la existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales (véase [16]). Esta es la razón por la que se asume en este capítulo que todas las ecuaciones diferenciales mencionadas admiten soluciones únicas en las regiones consideradas.

3.1. Resultados básicos sobre ecuaciones diferenciales lineales homogéneas

Esta primera sección recoge algunos resultados conocidos sobre ecuaciones diferenciales lineales de primer y segundo orden y otras ecuaciones relacionadas, con especial énfasis en la ecuación de Riccati, debido a su relación con la derivada schwarziana.

La solución general de una ecuación diferencial de la forma

$$y'(z) + P(z)y(z) = 0\,, \quad z \in \mathbb{D}\,,$$

donde P es una función continua en el disco unidad, es

$$y(z) = Ke^{-\int_0^z P(\zeta)\,d\zeta}, \quad K \in \mathbb{C}.$$

Aplicando el procedimiento de variación de las constantes (o un factor integrante apropiado) se obtienen también soluciones explícitas de ecuaciones lineales de primer orden no necesariamente homogéneas.

En el caso de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes, el procedimiento para obtener la solución general también es conocido: se buscan soluciones de la forma $y(z) = e^{rz}$ que cumplan

$$y''(z) + py'(z) + qy(z) = 0,$$

lo que da lugar a la solución general de este tipo de ecuaciones siguiendo los procedimientos habituales.

La situación es radicalmente más complicada si los coeficientes no son constantes. En este caso sí es posible determinar la solución general de la ecuación conocida, de antemano, una solución particular, debido a la posibilidad de que conocida una solución y_1 se puede obtener otra y_2, no proporcional a la primera.

Esto es suficiente para obtener la solución general de una ecuación lineal homogénea de segundo orden, puesto que el conjunto de soluciones de este tipo de ecuaciones es un espacio vectorial de dimensión 2. Por lo tanto, conocidas las soluciones y_1 e y_2 mencionadas, se tiene que toda solución es de la forma

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}. \tag{3.1}$$

No obstante, puede no ser posible determinar esa primera solución de la ecuación diferencial homogénea.

3.1.1. Cambios de variable

Existen procedimientos que permiten transformar ecuaciones diferenciales en otras cuya solución general puede ser calculada. Por la importancia que tiene para este trabajo, recordamos que, dada una *ecuación diferencial de Riccati* de la forma

$$y'(z) = P(z) + Q(z)y(z) + R(z)y^2(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

(donde P, Q y R son funciones con suficiente regularidad), se puede transformar, mediante el cambio de variable (propuesto por Euler en 1870) $y = y_p + 1/u$, donde y_p es una solución particular de la ecuación de Riccati, en una ecuación lineal de primer orden en u que, como se ha explicado anteriormente, es posible resolver de manera explícita. Destaca entonces la necesidad de conocer una solución particular (como ocurría en el caso de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes no constantes) para que este procedimiento sea aplicable. Esta relación entre las ecuaciones de Riccati y las lineales homogéneas de segundo orden se hace evidente en el siguiente lema, que particularizamos a las ecuaciones de Riccati que se utilizarán en el capítulo siguiente (aunque se verifica para toda ecuación de este tipo).

Lema 3.1. *Toda ecuación de Riccati de la forma*

$$y'(z) = 2p(z) + \frac{1}{2}y^2(z)\,, \quad z \in \mathbb{D}\,,$$

donde p es una función holomorfa en el disco unidad, puede transformarse en una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden.

Demostración. Consideremos el cambio de variable $v = y/2$, de manera que

$$v' = \frac{y'}{2} = \frac{2p + \frac{1}{2}y^2}{2} = p + \frac{y^2}{4} = p + v^2\,. \tag{3.2}$$

Sea ahora $u(z) = e^{-\int_0^z v(\zeta)\,d\zeta}$, donde v es una solución de la ecuación anterior. Entonces,

$$u'' = (-vu)' = (-v' + v^2)u = -pu\,.$$

Es decir, se tiene la ecuación diferencial lineal de segundo orden $u'' + pu = 0$.

Nótese que si u es solución de esta ecuación diferencial (distinta de la función idénticamente nula), entonces, por simples cálculos, $y = -2u'/u$ es solución de la ecuación original de Riccati. $\square$

Otro procedimiento que será útil para nuestros propósitos se recoge a continuación. Se trata de un método que permite transformar una ecuación lineal homogénea de segundo orden en otra cuyo coeficiente en la derivada de primer orden es nulo. Es decir, permite transformar una ecuación como las mencionadas en su llamada *forma normal*.

Proposicion 3.2 *Sean P y Q funciones holomorfas en el disco. El cambio de variable $y(z) = u(z)e^{-\frac{1}{2}\int_0^z P(\zeta)\,d\zeta}$, $z \in \mathbb{D}$, transforma la ecuación*

$$y'' + Py' + Qy = 0 \tag{3.3}$$

a

$$u'' + pu = 0\,, \tag{3.4}$$

con

$$p = Q - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{2}P'\,. \tag{3.5}$$

Demostración. Sea $v(z) = e^{-\frac{1}{2}\int_0^z P(\zeta)\,d\zeta}$, de manera que $y = uv$. Observemos que v es holomorfa en $\mathbb{D}$. Por tanto, $y' = uv' + u'v$ e $y'' = uv'' + 2u'v' + u''v$. Sustituyendo estas expresiones en (3.3), se obtiene $vu'' + (2v' + Pv)u' + (v'' + Pv' + Qv)u = 0$, que resulta ser de la forma (3.4) tras dividir por v (una función que no se anula), donde p es la función en (3.5). $\square$

Debemos destacar que, a la vista del cambio utilizado en la proposición anterior, se tiene que si y es una solución de (3.3), entonces $u = y/v$ es solución de (3.4) y u se anula precisamente en los mismos puntos que y. Es decir, la transformación de una ecuación lineal de orden dos a su forma normal no modifica los ceros de las soluciones de la ecuación original.

El siguiente lema, fácil de demostrar, también será útil.

Lema 3.3. *El wronskiano de dos soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial de la forma*

$$u''(z) + p(z)u(z) = 0\,, \quad z \in \mathbb{D}\,,$$

es constante. Más aún, siempre es posible encontrar dos soluciones linealmente independientes para las que su wronskiano es idénticamente 1.

Demostración. Sean u_1 y u_2 dos soluciones de la ecuación, de manera que su wronskiano es, para todo z en el disco unidad,

$$W(u_1, u_2)(z) = \begin{vmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) \end{vmatrix} = u_1(z)u_2'(z) - u_2(z)u_1'(z)\,.$$

Por lo tanto, usando que $u_i'' = -pu_i, i = 1, 2$, se tiene

$$\begin{aligned} W'(u_1, u_2)(z) &= u_1(z)u_2''(z) - u_2(z)u_1''(z) \\ &= -p(z)u_1(z)u_2(z) + p(z)u_1(z)u_2(z) = 0\,, \end{aligned}$$

lo que prueba que el wronskiano es constante.

Para demostrar la última parte del lema, recordemos que el conjunto de las soluciones de toda ecuación diferencial lineal de segundo orden es un espacio vectorial de dimensión dos. Por lo tanto, dadas dos soluciones u_1 y u_2 linealmente independientes, se tiene que toda solución de la ecuación es de la forma

$$u = c_1u_1 + c_2u_2\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}\,.$$

Se sigue entonces que, dado un punto $z_0 \in \mathbb{D}$ y dos números complejos w_0 y w_0', siempre podemos resolver el sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned} u(z_0) &= w_0\,, \\ u'(z_0) &= w_0'\,. \end{aligned}$$

En particular, existen dos soluciones U_1 y U_2 con $U_1(0) = 0$, $U_1'(0) = 1$, $U_2(0) = 1$, $U_2'(0) = 0$.

El valor del wronskiano de U_1 y U_2 en $z = 0$ es 1. Por lo tanto, es idénticamente 1 en todos los puntos del disco. □

3.2. Teorema de separación de Sturm

Como se menciona en la introducción de este capítulo, se plantea conocer propiedades de las soluciones de ecuaciones diferenciales que no pueden resolverse de forma explícita. Nos ocupamos, en particular, de la disposición de los ceros de las soluciones de ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden. Abandonaremos, de manera momentánea, el análisis de funciones complejas de variable compleja, asumiendo que todas las funciones consideradas son reales de variable real, puesto que los métodos empleados en las demostraciones de los próximos teoremas solo se aplican a este tipo de funciones.

Atendiendo a la proposición 3.2 (y al comentario señadado tras su demostración), podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la ecuación es de la forma

$$y''(x) + p(x)y(x) = 0\,, \quad x \in I \subset \mathbb{R}\,, \tag{3.6}$$

donde p es una función suave (en nuestro caso, podemos suponer que es infinitamente diferenciable) en el invervalo I de la recta real, que podría coincidir con todo $\mathbb{R}$.

Con el fin de motivar la importancia de los resultados de esta sección, recordemos que, en el caso en que la función p en (3.6) sea constante, las siguientes funciones son pares de soluciones linealmente independientes de la ecuación.

$$\begin{cases} y_1(x) = e^{\sqrt{-p}x} \quad e \quad y_2(x) = e^{\sqrt{-p}x}\,, & p < 0\,, \\ y_1(x) = 1 \quad e \quad y_2(x) = x\,, & p = 0\,, \\ y_1(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{p}x) \; e \; y_2(x) = \cos(\sqrt{p}x)\,, & p > 0\,. \end{cases} \tag{3.7}$$

Observemos que, desde el punto de vista de la existencia de ceros de soluciones no triviales, el caso interesante es $p > 0$. En efecto, si $p < 0$, las combinaciones lineales de las soluciones en (3.7) tienen, a lo sumo, 1 cero en $\mathbb{R}$, ya que la solución x de la ecuación

$$c_1 e^{\sqrt{-p}x} + c_2 e^{\sqrt{-p}x} = 0\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,,$$

de existir, es única, asumiendo que $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$.

Por otro lado, si $p > 0$, y_1 e y_2 tienen infinitos ceros en la recta real y, además, entre dos ceros consecutivos de una de ellas, existe otro de la otra.

Revisamos, pues, en esta sección los resultados de Sturm que generalizan este comportamiento a los casos en los que el coeficiente p en (3.6) no es constante.

Teorema 3.4 *Sea p una función infinitamente diferenciable en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Si $p < 0$ en I e y es una solución no trivial de* (3.6)*, entonces y tiene a lo sumo un cero en ese intervalo.*

Demostración. Supongamos, para llegar a contradicción, que existen dos ceros (consecutivos) $x_0 < x_1 \in I$ de y.

El hecho de que y no sea idénticamente nula prueba que $y'(x_0) \neq 0$, ya que la única solución de una ecuación diferencial lineal de orden dos con $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, $x_0 \in I$ es $y \equiv 0$. Considerando $-y$ en lugar de y si fuese necesario, podemos suponer que $y'(x_0) > 0$, de manera que existe $y(x) > 0$ para todo $x \in (x_0, x_1)$.

Puesto que $p < 0$ en I, $y''(x) = -p(x)y(x)$ es una función positiva en (x_0, x_1), lo que implica que y' es una función creciente en ese intervalo. Entonces, $y'(x) > 0$ para todo $x \in (x_0, x_1)$, lo que contradice el teorema de Rolle. □

Observemos que, en la prueba del teorema anterior, se ha comentado que los ceros de las soluciones no idénticamente nulas de la ecuación diferencial (3.6) son *simples*: si $y(x_0) = 0$, entonces $y'(x_0) \neq 0$.

Consideramos ahora ecuaciones diferenciales de la forma (3.6) cuyo coeficiente p es una función positiva.

Teorema 3.5. *Sea y una solución no trivial de $y(x)'' + p(x)y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Si $p > 0$ y existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\int_{x_0}^{\infty} p(x)dx = \infty\,, \tag{3.8}$$

entonces y tiene infinitos ceros.

Demostración. Supongamos que y se anula, como mucho, un número finito de veces, de manera que existe un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $y(x) \neq 0$ para todo $x > x_0$. De hecho, considerando $-y$ en lugar de y, podemos suponer que $y(x) > 0$, $x > x_0$.

Con estas condiciones, la función $v = -y'/y$ es derivable en $I = (x_0, \infty)$, y verifica $v' = p + v^2$. Por lo tanto, para todo $x \in I$,

$$v(x) - v(x_0) = \int_{x_0}^{x} p(x)dx + \int_{x_0}^{x} v^2(x)dx \geq \int_{x_0}^{x} p(x)dx\,,$$

es decir,

$$v(x) \geq v(x_0) + \int_{x_0}^{x} p(x)dx\,,$$

de donde se sigue, por (3.8), que existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $v(x) > 0$ para todo $x \in (x_1, \infty)$. Por lo tanto, y' es menor que 0 en ese intervalo.

Pero, siendo y una función cóncava (puesto que $y'' = -py$) y decreciente en (x_1, ∞), se tiene que $\lim_{x\to\infty} y(x) = -\infty$, de donde se tiene, tras aplicar el teorema de Bolzano, que existe otro cero de y mayor que x_0. Esta es la contradicción que demuestra el teorema. □

El siguiente resultado que mencionamos muestra que, al restringirnos al estudio de los ceros de una solución de la ecuación diferencial $y'' + py = 0$ en un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, se tiene que no es posible que la cantidad de raíces de y en ese intervalo sea infinita.

Proposición 3.6. *El conjunto de ceros de una solución no trivial de (3.6) en el intervalo $[a, b] \subset I$ no puede tener un punto de acumulación $x_0 \in [a, b]$.*

Demostración. Por reducción al absurdo supongamos que existe tal punto de acumulación de los ceros $\{x_n\}$ de la solución no idénticamente nula y, lo que implica que y tiene infinitos ceros.

Escogiendo una subsucesión si fuese necesario (denotada de nuevo por $\{x_n\}$), se tiene, por un lado, $y(x_0) = \lim_{n\to 0} y(x_n) = 0$. Por otro lado, si $y'(x_0)$ fuera distinto de 0, se tendría, por ser y' una función continua en I, que y es estrictamente creciente (si $y'(x_0) > 0$) o estrictamente decreciente (si $y'(x_0) < 0$) en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ para algún $\delta > 0$, lo que contradice el hecho de que x_0 es un punto de acumulación de los ceros de y. Nótese que el mismo argumento es aplicable en el caso en que $x_0 = a$ o $x_0 = b$.

Así, se obtiene que $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Por lo tanto, y es idénticamente cero. Esta contradicción termina la demostración. □

Finalizamos esta sección con el siguiente teorema, que establece un resultado sobre la distribución de los ceros de soluciones de la ecuación (3.6).

Teorema 3.7 (Teorema de separación de Sturm). *Sean y_1 e y_2 dos funciones reales de variable real linealmente independientes que verifican (3.6). Entonces, sus ceros son distintos. Más aún, entre dos ceros consecutivos de una de las funciones, existe un cero de la otra.*

Demostración. Siendo y_1 e y_2 linealmente independientes, se tiene que su Wronskiano,

$$W(y_1, y_2)(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)\,, \quad x \in \ I \subset \mathbb{R}\,, \tag{3.9}$$

es distinto de cero. Por lo tanto, no puede existir $x_0 \in I$ tal que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$.

Supongamos ahora que x_1 y $x_2 \in I$ son dos ceros consecutivos de y_2 con $x_1 < x_2$, de manera que $y_2(x_1) = y_2(x_2) = 0$ e $y_2(x) \neq 0$ para todo $x \in (x_1, x_2)$. Nótese que, de hecho, cambiando $-y_2$ por y_2 si fuese necesario, podemos suponer que $y_2(x) > 0$ para todo $x \in (x_1, x_2)$.

Observemos que $y_2'(x_1)y_2'(x_2) < 0$. En efecto, tal y como se ha señalado en la demostración del teorema 3.4, si uno de estos dos valores fuera igual a 0, y_2 sería idénticamente nula, que no es el caso.

Siendo y_2 positiva en (x_1, x_2), se sigue que $y_2'(x_1) > 0$ y que $y_2'(x_2) < 0$.

En estos puntos se tiene que el wronskiano es igual a, respectivamente,

$$W(y_1, y_2)(x_1) = y_1(x_1)y_2'(x_1) \quad \text{y} \quad W(y_1, y_2)(x_2) = y_1(x_2)y_2'(x_2)\,.$$

Puesto que ambas cantidades (no nulas) deben tener el mismo signo, se deduce que $y_1(x_1)y_1(x_2) < 0$. Basta aplicar el teorema de Bolzano para concluir que existe $x_0 \in (x_1, x_2)$ tal que $y_1(x_0) = 0$. Este cero debe ser único, puesto que el mismo argumento es aplicable a dos ceros consecutivos de y_1. □

A la vista de los resultados anteriores, se tiene que todas las soluciones no idénticamente nulas oscilan de forma que en un intervalo (finito), el número de ceros de una de ellas no puede diferir en más de una unidad del número de ceros de otra.

3.3. Teorema de comparación de Sturm

Los resultados mostrados en esta sección están, al igual que en la anterior, motivados por los comportamientos de los ceros de soluciones de ecuaciones lineales homogéneas de segundo orden. Más concretamente, y como ejemplo, cosideremos las siguientes ecuaciones diferenciales

$$y'' + 4y = 0 \tag{3.10}$$

y

$$y'' + y = 0\,. \tag{3.11}$$

En el segundo caso, todas las soluciones son combinaciones lineales de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, mientras que en el primero, lo son de $\operatorname{sen}(2x)$ y $\cos(2x)$. Es fácil ver que la última expresión de cualquiera de estos pares de ecuaciones tiene, al menos, un cero entre cualesquiera dos ceros sucesivos de la primera, algo que, como muestra el siguiente teorema, es común al comparar ecuaciones del mismo tipo.

Teorema 3.8 (Teorema de comparación de Sturm) *Sean y y z soluciones no triviales de*

$$y''(x) + p(x)y(x) = 0 \tag{3.12}$$

y

$$z''(x) + q(x)z(x) = 0\,, \quad x \in I \subset \mathbb{R}\,, \tag{3.13}$$

respectivamente, donde p y q son funciones positivas en I. Si $p(x) > q(x)$ para todo $x \in I$, entonces y se anula al menos una vez entre cada dos ceros sucesivos de z.

Demostración. Sean $x_1 < x_2 \in I$ dos ceros sucesivos de z. Supongamos que $y(x) \neq 0$ para todo $x \in (x_1, x_2)$.

Como en demostraciones anteriores, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que ambas funciones y y z son positivas en (x_1, x_2) (basta considerar $-y$ o $-z$, de ser necesario). De esta manera, se tiene que $z'(x_1) > 0$ y $z'(x_2) < 0$.

Definimos

$$W(x) = z(x)y'(x) - y(x)z'(x)\,, \quad x \in I \subset \mathbb{R}\,.$$

Entonces, por las condiciones mencionadas, $W(x_1) = -y(x_1)z'(x_1) \leq 0$ y $W(x_2) = -y(x_2)z'(x_2) \geq 0$. Es decir,

$$W(x_2) - W(x_1) \geq 0\,.$$

Pero, por otro lado,

$$\begin{aligned} W(x_2) - W(x_1) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{dW(x)}{dx} = \int_{x_1}^{x_2} (z(x)y''(x) - y(x)z''(x))dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (q(x) - p(x))y(x)z(x)dx < 0\,. \end{aligned}$$

Esto contradice lo anterior, por lo tanto y debe tener, al menos, un cero en (x_1, x_2). □

Un corolario inmmediato es que si la función $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y verifica que existe una constante no nula k tal que $p(x) > k^2$ para todo x, entonces cualquier solución de $y'' + py = 0$ debe anularse en todo intervalo de longitud mayor o igual que $\frac{2\pi}{k}$, sin más que observar que los ceros de la solución $z(x) = \sin(kx)$ de $z''+k^2z = 0$ son $x_n = n\pi/k$, donde n es un número entero.

Otro teorema de comparación, que también se atribuye a Sturm y cuya demostración sigue la línea de la demostración anterior, es el siguiente. De nuevo, consideramos que las funciones p y q son regulares.

Teorema 3.9. *Consideremos las ecuaciones diferenciales*

$$y''(x) + p(x)y(x) = 0 \tag{3.14}$$

y

$$z''(x) + q(x)z(x) = 0\,, \quad x \in I \subset \mathbb{R}\,, \tag{3.15}$$

donde p y q son funciones que verifican $p \leq q$ en I.

Dado $x_0 \in I$, sean y y z las soluciones de (3.14) y (3.15), respectivamente, con $y(x_0) = z(x_0) = a > 0$ e $y'(x_0) = z'(x_0)$. Supongamos que existe $x_1 > x_0 \in I$ tal que $z(x) > 0$ para todo $x \in (x_0, x_1)$ y $z(x_1) = 0$ Entonces, si $x \in (x_0, x_1)$,

$$y(x) \geq z(x)\,.$$

En particular, y no se anula antes que z.

Demostración. Si $y \equiv z$, no hay nada que demostrar (de hecho, en este caso, se tendría $p = q$). Supongamos, entonces, que $y - z$ no es idénticamente nula.

Como se ha calculado en la demostración del teorema 3.8, la derivada de la función W es

$$W'(x) = (q(x) - p(x))y(x)z(x)\,.$$

Puesto que $y(x_0)$ y $z(x_0) > 0$ y $p \leq q$ en I, existe $\varepsilon > 0$ tal que $W'(x) \geq 0$ en $(x_0, x_0 + \varepsilon)$. Así, como $W(x_0) = 0$, se tiene, para todo x en este intervalo, $W(x) = z(x)y'(x) - y(x)z'(x) \geq 0$, por lo que, al ser y y z funciones positivas en este intervalo,

$$\frac{y'(x)}{y(x)} \geq \frac{z'(x)}{z(x)}\,.$$

Por lo tanto,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{y(t)}\,dt \geq \int_{x_0}^{x} \frac{z'(t)}{z(t)}\,dt\,. \tag{3.16}$$

Esto implica que

$$\log y(x) - \log y(x_0) \geq \log z(x) - \log z(x_0) = \log z(x) - \log y(x_0)\,,$$

de manera que si $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, entonces $y(x) \geq z(x)$.

Si $x_0 + \varepsilon \geq x_1$, la demostración está terminada. Si ocurre el caso contrario, es porque existe un cero $\widehat{x_0}$ de la solución y en $(x_0 + \varepsilon, x_1)$. Pero, entonces, por el teorema de Bolzano, debe haber, al menos, un punto $\widehat{x_1} \in (x_0, x_1)$ tal que $y(\widehat{x_1}) = z(\widehat{x_1})$. Veamos que esto no es posible si y no es idénticamente igual a z.

Sea $S = \{x \in [x_0 + \varepsilon, x_1) \colon y(x) = z(x)\}$. Puesto que S es no vacío ya que $\widehat{x_1} \in S$, y está acotado inferiomente, podemos considerar el ínfimo de este conjunto, al que denotamos, de nuevo, por $\widehat{x_1}$.

Por la continuidad de las funciones y y z, la definición de $\widehat{x_1}$ y los resultados anteriores, ocurre que $W'(x) \geq 0$ en $(x_0, \widehat{x_1})$. Pero, repitiendo el razonamiento anterior con $x = \widehat{x_1}$ en (3.16) se sigue que

$$\int_{x_0}^{\widehat{x_1}} \left(\frac{y'(t)}{y(t)} - \frac{z'(t)}{z(t)}\right) dt = 0\,, \tag{3.17}$$

de manera que $y \equiv z$. Esto es una contradicción. □

4

El teorema de Nehari

En este último capítulo se demuestra el criterio de univalencia de Nehari. Recordemos su enunciado.

Teorema 4.1 (Teorema de Nehari). *Sea f una función localmente univalente en el disco unidad $\mathbb{D}$. Si se cumple que*

$$\|S(f)\| = \sup_{z\in\mathbb{D}} |S(f)(z)|(1-|z|^2)^2 \leq 2\,,$$

donde $S(f)$ es la derivada schwarziana de f definida en 1.13, entonces la función f es globalmente univalente en $\mathbb{D}$.

Cabe destacar que la constante 2 es precisa. En efecto, basta tomar las funciones de Koebe generalizadas k_a definidas en 2.19. Si $\varepsilon > 0$, entonces $k_{i\varepsilon}$ no es univalente, por el teorema 2.20 y $\|S(k_{i\varepsilon})\| = 2(1+\varepsilon^2)$.

Por otro lado, el teorema 2.18 muestra que toda función de la clase $\mathcal{K}$ verifica las condiciones del teorema de Nehari.

4.1. La derivada schwarziana y ecuaciones diferenciales

Comenzamos estableciendo la relación entre la derivada schwarziana de una función localmente univalente y las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Para ello, se plantea el problema de caracterizar aquellas funciones f localmente univalentes en el disco unidad que satisfacen $S(f) = 2p$ para una función dada p holomorfa en $\mathbb{D}$. Es decir, aquellas funciones f que verifican

$$\left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 = 2p\,. \tag{4.1}$$

Claramente, el problema anterior puede plantearse en términos de las soluciones de la ecuación de Riccati

$$y' - \frac{1}{2}y^2 = 2p\,, \quad y = \frac{f''}{f'}\,,$$

como ya se había mencionado.
Una vez obtenida la solución y de la ecuación de Riccati, el nuevo cambio de variable $v = f'$ da lugar a la ecuación lineal de primer orden $v' = yv$, permitiendo así (tras integrar), obtener f.

El siguiente teorema proporciona una manera alternativa en términos, esta vez, de las soluciones de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden, de determinar todas las funciones f con $S(f) = 2p$. Este es, justamente, el método que siguió Nehari.

Teorema 4.2. *Sea p una función holomorfa en el disco unidad. Entonces, la función f cumple que $Sf = 2p$ si y solo si $f = u_1/u_2$, donde u_1 y u_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial*

$$u'' + pu = 0\,. \tag{4.2}$$

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que $F = U_1/U_2$, donde U_1 y U_2 son las soluciones linealmente independientes de (4.2) con $U_1(0) = 0$, $U_2(0) = 1$, $U_1'(0) = 1$, $U_2'(0) = 0$. De ser necesario, restringimos nuestro análisis a un entorno del origen donde, por continuidad, la función U_2 no se anula.

Como se ha comprobado en la demostración del lema 3.3, el Wronskiano $W(U_1, U_2)$ de estas dos soluciones es idénticamente 1.

Un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned}\frac{F''}{F'} &= \frac{(U_1''U_2 - U_1U_2'')U_2 - 2U_2'W(U_1,U_2)}{U_2W(U_1,U_2)}\\ &= \frac{(-2pU_1U_2 + 2pU_1U_2)U_2 - 2U_2'}{U_2} = -2\frac{U_2'}{U_2}\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}S(F) &= \left(\frac{F''}{F'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{F''}{F'}\right)^2 = -2\frac{U_2''U_2 - (U_2)^2}{(U_2)^2} - 2\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\\ &= -2\frac{U_2''}{U_2} = 2p\,.\end{aligned}$$

En el caso más general en el que $f = u_1/u_2$, donde u_1 y u_2 cumplen las condiciones del enunciado, se tiene, dado que toda solución de (4.2) es combinación lineal de U_1 y U_2, que para ciertas constantes a, b, c y $d \in \mathbb{C}$,

$$u_1 = aU_1 + bU_2 \quad \text{y} \quad u_2 = cU_1 + dU_2\,.$$

Además, siendo u_1 y u_2 linealmente independientes y mediante una computación sencilla,

$$W(u_1, u_2) = (ad - bc)W(U_1, U_2) \neq 0\,.$$

Por lo tanto,

$$f = \frac{u_1}{u_2} = \frac{aU_1 + bU_2}{cU_1 + dU_2} = T \circ F\,,$$

donde T es la transformación de Möbius $T(z) = (az + b)/(cz + d)$. Por tanto, por razones ya comentadas en el capítulo 1, $S(f) = S(F) = 2p$.

Recíprocamente, supongamos que f cumple $S(f) = 2p$ y sea g tal que $2f'g' + f''g = 0$, de manera que

$$2g' + \left(\frac{f''}{f'}\right) g = 0$$

Entonces, derivando una vez más, se tiene

$$0 = 2g'' + \left(\frac{f''}{f'}\right)' g + \left(\frac{f''}{f'}\right) g' = 2g'' + \left[\left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right] g\,.$$

Por lo tanto, g es una solución de la ecuación $u'' + pu = 0$.

Definimos en este punto una nueva función $h = fg$. De esta manera, el resultado se seguirá si se verifica $h'' + ph = 0$, algo fácil de comprobar puesto que $h' = f'g + fg'$ y, entonces, $h'' = f''g + 2f'g' + fg''$. Por tanto, se tiene

$$h'' + ph = f''g + 2f'g' + f(g'' + 2pg) = f''g + 2f'g' = 0\,.$$

□

Antes de continuar, observemos que toda función de la forma $f = u_1/u_2$, donde u_1 y u_2 son soluciones de (4.2), tiene singularidades en los ceros de u_2. Por lo tanto, suponer que existe una función localmente univalente con $S(f) = 2p$ implica que existe una solución sin ceros de (4.2).

Otra consecuencia importante del teorema 4.2 es la siguiente. Como ya ocurrió con algunos de los resultados expuestos en los capítulos 1 y 2, nos restringimos al disco unidad aunque el resultado es cierto en general en los dominios simplemente conexos del plano (distintos del propio plano y no vacíos).

Teorema 4.3. *Sean f y F dos funciones localmente univalentes en $\mathbb{D}$. Entonces, $S(f) = S(F)$ si y solo si existe una transformación de Möbius T como en* (1.1) *tal que $F = T \circ f$.*

Demostración. Si $F = T \circ f$ para alguna transformación de Möbius T, por la regla de la cadena para la derivada schwarziana (1.13) y el hecho de que la derivada schwarziana de las transformaciones de Möbius es idénticamente cero, se tiene $S(F) = S(f)$.

Supongamos ahora $S(f) = S(F)$, y sea $p = \frac{S(f)}{2}$. Entonces, por el teorema anterior, $F = U_1/U_2$ y $f = u_1/u_2$, donde u_1, u_2 y U_1, U_2 son soluciones linealmente independientes (dos a dos) de (4.2). Por lo tanto, como el espacio vectorial de las soluciones de esta ecuación tiene dimensión 2, existen constantes a, b, c y d tales que $U_1 = au_1 + bu_2$ y $U_1 = cu_1 + du_2$, de manera que

$$F = \frac{U_1}{U_2} = \frac{au_1 + bu_2}{cu_1 + du_2} = \frac{af + b}{cf + d} = T \circ f \, ,$$

con $T(z) = (az + b)/(cz + d)$. Puesto que U_1 y U_2 son soluciones linealmente independientes, se tiene, como en la demostración del teorema 4.2, $ad - bc \neq 0$.□

A la vista de los resultados anteriores, Nehari identifica el problema de la univalencia de una función f con los ceros de las soluciones de la ecuación diferencial (4.2), con $p = S(f)/2$. Este es un punto clave en su demostración original en [13] y, también, en la modificación que mostraremos en este trabajo.

El siguiente lema es un resultado clave en ambas demostraciones.

Lema 4.4. *Sea f una función localmente univalente en el disco unidad. Entonces, f es (globalmente) univalente en $\mathbb{D}$ si y solo si ninguna solución de* (4.2) *tiene más de un cero en $\mathbb{D}$.*

Demostración. Claramente, si existe una solución con dos ceros distintos en $\mathbb{D}$, la función $f = u_1/u_2$, donde u_2 es una solución sin ceros (cuya existencia queda justificada por el hecho de que f sea holomorfa en el disco unidad), se anula en ambos puntos y, por lo tanto, no es univalente en $\mathbb{D}$.

Recíprocamente, el hecho de que f no sea univalente en $\mathbb{D}$, equivale a la existencia de dos puntos distintos z_1 y z_2 en el disco tales que

$$f(z_1) = f(z_2) = \alpha \, .$$

Usando el teorema 4.2, y por tanto escribiendo $f = u_1/u_2$, la condición anterior es equivalente a que la función $u_1 - \alpha u_2$ se anule en los puntos z_1 y z_2. Esta función es combinación lineal de dos soluciones de (4.2), lo que la hace, a su vez, una solución. □

Dado el lema anterior, surge la necesidad del análisis de los ceros de las soluciones de (4.2). De ahí el uso de los teoremas de Sturm enunciados en el capítulo anterior. No obstante, esos teoremas eran aplicables en aquellos casos en los que el coeficiente p resultaba ser una función real de variable real, que no es el caso si $p = S(f)/2$, donde f es una función analítica en el disco. El siguiente lema nos permitirá restringir nuestra atención, sin pérdida de generalidad, al intervalo $(-1, 1)$, utilizando la no inyectividad como hipótesis porque es así como lo aplicaremos en la sección 4.3.

Lema 4.5. *Sea f una función holomorfa en el disco unidad. Supongamos que existen dos puntos distintos z_1 y z_2 en $\mathbb{D}$ tales que $f(z_1) = f(z_2)$. Entonces, existe un automorfismo del disco φ y $0 < r < 1$ tales que $\varphi(z_1) = r$ y $\varphi(z_2) = -r$.*

Demostración. Para la demostración, utilizaremos los automorfismos definidos en (1.8). Concretamente, en primer lugar, tomemos φ_{z_1} para obtener $\varphi_{z_1}(z_1) = 0$ y $\varphi_{z_1}(z_2) = R\lambda$, donde $|\lambda| = 1$ y $0 < R < 1$.

Sea $r = (1 - \sqrt{1-R^2})/R$ y consideremos el automorfismo φ definido por

$$\varphi(z) = \varphi_r(\overline{\lambda}\varphi_{z_1}(z))$$

que cumple $\varphi(z_1) = r$ y

$$\varphi(z_2) = \frac{r-R}{1-rR} = \frac{1-R^2-\sqrt{1-R^2}}{R\sqrt{1-R^2}} = \frac{\sqrt{1-R^2}-1}{R} = -r\,.$$

□

4.2. La forma analítica del teorema de comparación de Sturm

En esta sección se muestra el caso analítico del teorema 3.9. Es decir, consideramos ahora los casos en los que el coeficiente p en ese teorema es una función compleja de valores reales, que es precisamente lo que ocurre tras aplicar el lema 4.5 y considerando (4.2).

Necesitaremos el siguiente lema auxiliar.

Lema 4.6. *Sea u una solución de la ecuación diferencial*

$$u''(z) + p(z)u(z) = 0\,, \quad z \in \mathbb{D}\,.$$

Supongamos que existe $0 < a < 1$ tal que $u(t) \neq 0$ para todo $t \in (-a, a) \subseteq (-1, 1)$. Sea $\widehat{u}(t) = |u(t)|$. Entonces,

$$\widehat{u}''(t) + |p(t)|\widehat{u}(t) \geq 0\,, \quad t \in (-a, a)\,.$$

Es decir, para esos valores de t,

$$|u|'' + |p||u| \geq 0\,.$$

Demostración. Puesto que $\widehat{u}^2 = |u|^2 = u\overline{u}$, se tiene, aplicando la regla de la cadena, que para todo $t \in (-a, a)$,

$$2\widehat{u}(t)\widehat{u}\,'(t) = u'(t)\overline{u(t)} + \overline{u'(t)}\,u(t) = 2\,\mathrm{Re}\left(u'(t)\overline{u(t)}\right)\,. \tag{4.3}$$

Por lo tanto, tomando módulos y usando el hecho de que la parte real de un número complejo es menor o igual a su módulo, resulta

$$|\widehat{u}(t)\widehat{u}\,'(t)| \leq |u'(t)u(t)|\,.$$

Es decir, $|\widehat{u}\,'(t)| \leq |u'(t)|$, $t \in (-a, a)\,.$

Teniendo en cuenta que en (4.3) se cumple $u'' + pu = 0$ y derivando, se obtiene

$$\begin{aligned}
\widehat{u}\,(t)\widehat{u}\,''(t) + (\widehat{u}\,'(t))^2 &= \operatorname{Re}\left(u''(t)\overline{u(t)} + |u'(t)|^2\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(-p(t)u(t)\overline{u(t)}\right) + |u'(t)|^2 \\
&= -\operatorname{Re}\,(p(t))\;\widehat{u}^2(t) + |u'(t)|^2\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\widehat{u}\,(t)\widehat{u}\,''(t) + \operatorname{Re}\,(p(t))\,\widehat{u}\,^2(t) = |u'(t)|^2 - (\widehat{u}\,'(t))^2 \geq 0\,.$$

Así, $\widehat{u}\,''(t) + \operatorname{Re}\,(p(t))\,\widehat{u}\,(t) \geq 0$, lo que implica, usando que $|z| - \operatorname{Re} z \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$,

$$\widehat{u}\,''(t) + |p(t)|\widehat{u}\,(t) \geq 0\,, \quad t \in (-a, a)\,.$$

$\square$

Se enuncia a continuación la forma compleja del teorema 3.9.

Teorema 4.7 (Teorema complejo de comparación de Sturm). *Sean q una función real de variable real continua en $(-1, 1)$ y p una función holomorfa en el disco unidad. Supongamos que $|p(z)| \leq q(|z|)$ para todo $z \in \mathbb{D}$.*

Sean u y v las soluciones de

$$u'' + pu = 0 \quad \text{y} \quad v'' + qv = 0$$

respectivamente, con $u(t_0) = v(t_0) = 1$ y $u'(t_0) = v'(t_0) = 0$ para algún $t_0 \in (-1, 1)$.

Entonces, si $v(x) > 0$ para todo $x \in (t_0, 1)$, se tiene que $u \neq 0$ en ese mismo intervalo .

Demostración. Aplicando el lema anterior a la función u, se tiene

$$|u|'' + |p||u| \geq 0\,, \quad t \in (-a, a)\,.$$

Además, $|u(t_0)| = 1$ y $|u|'(t_0) = 0$.

Basta repetir todos los pasos en la prueba del teorema 3.9 con con $|u|$ en lugar de y y v en lugar de z para concluir que $|u| \geq v$ en el intervalo $(t_0, 1)$. $\square$

4.3. Demostración del teorema de Nehari

Finalmente, ya se han desarrollado todas las herramientas para demostrar el Criterio de Univalencia de Nehari. A ello dedicamos esta sección.

Supongamos, para llegar a contradicción, que existe una función holomorfa y localmente univalente F en el disco unidad que verifica

$$\|SF\| \leq 2$$

pero no es univalente.

Sean z_1 y z_2 dos puntos distintos en $\mathbb{D}$ tales que $F(z_1) = F(z_2) = \alpha \in \mathbb{C}$. Consideremos el automorfismo dado por el lema 4.5 y la función $\widetilde{f} = F \circ \varphi^{-1} - \alpha$. Es claro que, siendo φ^{-1} un automorfismo, la función $\widetilde{f}$ es holomorfa y no es univalente. De hecho, para los valores de r y $-r$ dados por el lema 4.5, se tiene

$$\widetilde{f}(-r) = 0 = \widetilde{f}(r)\,.$$

Podría ocurrir que $\widetilde{f}$ se anulara en otros puntos del intervalo $[-r, r]$. De ser así, este problema se solventaría tomando dos ceros consecutivos a y b y aplicando el lema 4.5 tal que $z_1 = a$ y $z_2 = b$. Se obtiene así una nueva función

$$f = \widetilde{f} \circ \varphi^{-1}$$

tal que $f(-r) = 0 = f(r)$ y $f(t) \neq 0$ para todo $t \in (-r, r)$. La razón que justifica esta última afirmación es que los automorfismos del disco son transformaciones de Möbius, por lo que el automorfismo considerado debe transformar el intervalo $(-1, 1)$ en sí mismo de manera biyectiva, siendo $\varphi^{-1}(-r) = a$, $\varphi^{-1}(r) = b$ y $\varphi^{-1}(t) \in (a, b)$ para todo $t \in (-r, r)$.

Consideremos la ecuación diferencial

$$u'' + pu = 0\,,$$

donde $p = S(f)/2$. Por el teorema 4.2, $f = u_1/u_2$, donde u_1 es una solución de la ecuación anterior con $u(-r) = u(r) = 0$ y $u(t) \neq 0$ para todo $t \in (-r, r)$. Sea $\widehat{u}(t) = |u(t)|$, $t \in (-r, r)$. Puesto que esta función verifica las hipótesis del teorema de rolle, existe $t_0 \in (-r, r)$ tal que $\widehat{u}'(t_0) = 0$. Dividiendo por $\widehat{u}(t_0)$ si fuese necesario, se tiene que esta función es solución de la ecuación

$$|u|'' + |p||u| \geq 0\,, \quad |u|(t_0) = 1\,, \quad |u|'(t_0) = 0\,.$$

Por otro lado, consideremos la solución de la ecuación

$$v''(x) + \frac{1}{(1-x^2)^2} v(x)\,, \quad x \in (-1, 1)\,,$$

con $v(t_0) = 1$, $v'(t_0) = 0$. Explícitamente,

$$v(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}\,, & t_0 = 0 \\ \beta \left(x \log \frac{1+x}{1-x} + 1 \right) \sqrt{1-x^2}\,, & t_0 \neq 0\,, \end{cases}$$

donde

$$\beta = \frac{1}{\left(t_0 \log \frac{1+t_0}{1-t_0} + 1 \right) \sqrt{1-t_0^2}}\,.$$

Nótese que si $t_0 \neq 0$, entonces

$$t_0 \log \frac{1+t_0}{1-t_0} > 0\,,$$

luego la constante β está bien definida. De hecho, por esta misma razón, se concluye fácilmente que ninguna de estas soluciones se anula en $(-1, 1)$, de manera que, por el teorema 4.7, $|u|$ no puede anularse en r. Esta contradicción demuestra el teorema de Nehari. $\square$

Conclusiones

El artículo de Nehari [13] (el más antiguo de entre los artículos que incluyen 'Schwarzian derivative' en su título, según la base de datos MathSciNet) ha sido citado, por el momento, un total de 157 veces, siendo el séptimo trabajo más citado en el área 30.0X, correspondiente a 'Funciones de variable compleja' de la clasificación de las matemáticas por áreas (MSC). De hecho, de entre los otros seis trabajos más citados en el listado, y considerando solamente los artículos en revistas matemáticas, el trabajo de Nehari ocupa el segundo lugar, solo superado por el trabajo de Beurling y Ahlfors publicado en la revista *Acta Mathemática* en 1956.

La demostración del teorema de Nehari presentada en este trabajo es, como se ha mencionado en la introducción, una versión revisada de la prueba original en [13] que, a su vez, tiene una primera revisión más detallada en [6]. Hemos considerado presentar, de entre las tres, la que es quizá menos conocida de todas. Puede encontrarse en las notas de Chuaqui [4] con algunas erratas y con menos detalles que los recogidos en este trabajo. Todas estas demostraciones mantienen, como punto clave, la relación entre la propiedad de la univalencia de una función holomorfa y localmente univalente en el disco unidad con el estudio de los ceros de las soluciones de una ecuación diferencial lineal de segundo orden. Esta conexión entre las disciplinas de la Variable Compleja y las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias es el punto clave que permitió a Nehari demostrar su teorema.

Es por esto que la demostración del resultado principal en [13] es otro ejemplo más de la importancia de conocer herramientas y métodos propios de distintas áreas de las matemáticas. Conseguir reducir un problema a otro que necesite de técnicas de demostración de otras materias puede ser la clave para demostrar teoremas tan reconocidos como el criterio de univalencia de Nehari.

Bibliografía

[1] L. V. Ahlfors, *Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory*, McGraw-Hill, 1973. Reprinted by the AMS, 2010.

[2] L. V. Ahlfors, *Schwarzian Derivatives and Cross-Ratios in* $\mathbb{R}^n$, in Complex Analysis: A Collection of Papers Dedicated to Albert Pfluger, Birkhauser, Boston, 1989

[3] C. Carathéodory, *Conformal Representation.* Reedición de la segunda edición de 1952, Dover publications, INC., Mineola, NY, 1998.

[4] M. Chuaqui, *Teoría Geométrica de Funciones.* Apuntes Seminario, Facultad de Matemáticas. Pontificia Universidad Católica de Chile, 2007.

[5] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable II*, Springer-Verlag, New York-Berlín, 1978.

[6] P. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[7] P. Duren, *Harmonic Mappings in the Plane*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[8] I. Graham y G. Kohr, *Geometric Function Theory in one and Higher Dimensions*, Marcel Dekker, INC., New York, 2003.

[9] E. Hille, Remarks on a paper by Zeev Nehari, *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 552–553.

[10] A. Jones, *Book 7 of the Collection, Part 1: Introduction, Text, Translation and Part 2: Commentary, Index, Figures*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[11] C. Ledesma-Díaz, *Caracterización de Dominios Simplemente conexos*, Trabajo de Fin de Grado, Facultad de Ciencias. Universidad de La Laguna, 2018.

[12] R. López-Camino, *Curvas Planas Convexas.* Material Docente para el Alumno, Facultad de Ciencias. Universidad de Granada, 1995/96.

[13] Z. Nehari, The Schwarzian derivative and schlicht functions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 545–551.

[14] P. Pérez-Pacheco, *Teoría Geométrica de Funciones y Aplicaciones.* Trabajo de Fin de Grado, Facultad de Ciencias. Universidad de La Laguna, 2020.

[15] J. H. Shapiro, *Composition Operators and Classical Function Theory*, Springer, New York, 1993.
[16] G. F. Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes*, McGraw-Hill, Boca Raton, FL, 1991.

The Schwarzian derivative

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

María Patricia Rodríguez Batista

Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0101158433@ull.edu.es

Abstract

On the study of univalent functions in the unit disc a local univalence criterion is easily known and proof. Nevertheless, the same kind of criterion but concerning global univalence is a more delicate subject. It was, hence, a big achievement by Nehari when he published, in 1949, the article this Bachelor Thesis breaks down in detail, where he establishes his famous univalence criterion and its proof, where the famous Sturm's theorems play an important role.
This result has the Schwarzian derivative as basis, the main topic of study in this dissertation, and claims that an holomorphic function is univalent if its Schwarizian norm is less than or equal to the sharp constant 2.

1. Möbius transformations and the Schwarzian derivative

Functions of the form

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \quad ad-bc \neq 0\,, \quad a,b,c,d \in \mathbb{C},$$

are called Möbius transformations.

H. A. Schwarz proved that whenever f and g are two holomorphic functions with non-vanishing derivative in a simply connected domain $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$, the relation $f = T \circ g$ for a given Möbius transformation T gives $S(f) = S(g)$, where S is the Schwarzian derivative defined by

$$S(f) = \left(\frac{f''}{f}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

The chain rule: whenever f and g are as above and the composition $f \circ g$ is well defined,

$$S(f \circ g) = (S(f) \circ g) \cdot (g')^2 + S(g)\,.$$

In particular, due to the Riemann representation theorem and the chain rule, we assume that $\Omega = \mathbb{D}$.

The Schwarzian norm of a holomorphic function f in $\mathbb{D}$ with non-vanishing derivative is given by

$$\|S(f)\| = \sup_{z\in\mathbb{D}} |S(f)(z)|(1-|z|^2)^2\,.$$

2. Univalent functions in the unit disk

The class S is the family of univalent (holomorphic and inyective) functions in the unit disc $\mathbb{D}$ normalized by the condition: $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. A function $f \in S$ belongs to the class $\mathcal{K}$ if $f(\mathbb{D})$ is convex.

Theorem. *Every function $f \in S$ satisfies*

$$\|S(f)\| \leq 6.$$

If $f \in \mathcal{K}$,

$$\|S(f)\| \leq 2.$$

Both constants 6 and 2 are sharp.

The function

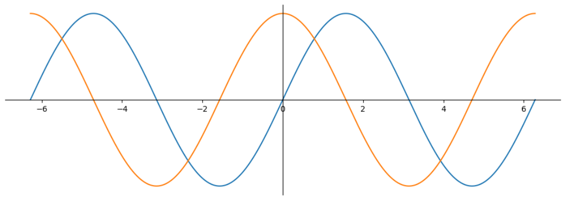
$$k_{i\varepsilon}(z) = \frac{1}{2i\varepsilon}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{i\varepsilon} - 1\right]\,, \quad z \in \mathbb{D}\,, \quad \varepsilon > 0\,,$$

has the following properties:

- The derivative $k'_{i\varepsilon}$ does not vanish in $\mathbb{D}$.
- $k_{i\varepsilon}$ is not univalent in the unit disk.
-
$$\|S(k_{i\varepsilon})\| = 2(1+\varepsilon^2)\,. \tag{1}$$

3. Sturm's theorems

Sine and cosine functions are very illustrative of this chapter.



Sturm's separation theorem. Let y_1 and y_2 be two real functions with real variables that are linearly independent and verify $y''(x) + p(x)y(x) = 0$, $x \in I \subset \mathbb{R}$. Then, these functions' zeros are distinct and occur alternatively.

Sturm's comparison theorem. Let y and z be non-trivial solutions of

$$y''(x) + p(x)y(x) = 0 \quad \text{and} \quad z''(x) + q(x)z(x) = 0\,, \quad x \in I \subset \mathbb{R}$$

respectively, where $p(x) > q(x) > 0$ in $x \in I$. Then, y vanishes at least once between two successive zeros of z.

4. Nehari's theorem

Let f be a holomorphic function with non-vanishing derivative in the unit disk.

Nehari's theorem. If $\|S(f)\| \leq 2$, then f is univalent in $\mathbb{D}$. The constant 2 is sharp (due to (1)).

The key tool to prove Nehari's theorem is the following.

Theorem. Let f be an holomorphic function as above with $S(f) = 2p$. Then,

$$f = \frac{u_1}{u_2}\,,$$

where u_1 and u_2 are linearly independent solutions of the ODE $u'' + pu = 0$. Moreover, f is univalent in $\mathbb{D}$ if and only if no solution of the ODE has more than one zero in $\mathbb{D}$.

References

[1] M. Chuaqui, *Teoría Geométrica de Funciones*. Apuntes Seminario, Facultad de Matemáticas. Pontificia Universidad Católica de Chile, 2007.

[2] I. Graham and G. Kohr, *Geometric Function Theory in one and Higher Dimensions*, Marcel Dekker, INC., New York, 2003.

[3] E. Hille, Remarks on a paper by Zeev Nehari, *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 552–553.

[4] Z. Nehari, The Schwarzian derivative and schlicht functions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **55** (1949), 545–551.

[5] G. F. Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes*, McGraw-Hill, INC., Boca Raton, FL, 1991.