TESIS DOCTORAL

Resolución de Problemas con GeoGebra en la formación inicial de profesores de matemáticas:

Un Análisis desde la Actividad Matemática

Autor:
Alexánder Hernández

Directores:
Dr. Matías Camacho Machín
Dra. Josefa Perdomo Díaz

Universidad de La Laguna

Año 2021

"Pero Jesús pasó por medio de ellos y siguió su camino."

Lucas 4:30

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Esta tesis doctoral se ha realizado en la Universidad de La Laguna, dentro del programa de Doctorado en Matemáticas y Estadística que se imparte conjuntamente con otras cuatro universidades españolas. En este programa se congregan diversas áreas de conocimiento con los objetivos de proporcionar y facilitar la formación avanzada en materia de investigación en diversas ramas de las Matemáticas, además de promover la interdisciplinariedad e internacionalización de los resultados de la investigación. Específicamente, el trabajo que se presenta en esta memoria se sitúa en el área de conocimiento de Didáctica de la Matemática.

La investigación comenzó en el curso 2015/2016 con la realización de un estudio exploratorio a partir del cual se presentó el Trabajo Fin de Master: "*Aportaciones de la Geometría Dinámica para el desarrollo de la Actividad y Competencia Matemática en la Resolución de Problemas de Variación*" (Hernández, 2016), como complemento formativo del programa de doctorado. Esta primera experiencia, además de servir de estudio piloto a la investigación, permitió alcanzar dos de los objetivos que se propusieron en el plan de investigación: primero, caracterizar el tipo de conocimientos matemáticos, en términos de comprensión matemática, que necesitan los futuros profesores de Educación Secundaria para ser capaces de desarrollar actividades de resolución de problemas en el aula haciendo uso de tecnologías digitales y, segundo, adaptar una propuesta de actividades en resolución de problemas incorporando recursos tecnológicos basada en dicha caracterización. Como fruto de esta experiencia inicial se presentaron las siguientes comunicaciones en congresos nacionales:

- Taller: "*Describir el Conocimiento Matemático para Profesores de Secundaria que se identifica en estudiantes cuando resuelven un problema con tecnología*". XX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Málaga. Septiembre 2016.
- Comunicación: "*Estudio del conocimiento matemático de estudiantes de grado en matemáticas cuando resuelven un problema con GeoGebra*". XIII Reunión Interuniversitaria sobre Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática. ULPGC. Enero 2017.

- Comunicación: *"El Problema del Túnel"*. XXXV Jornadas de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas de la SCPM "Isaac Newton". Las Palmas de Gran Canaria. Febrero 2017

Además, a partir de este trabajo se pudieron hacer dos estudios de casos particulares que dieron lugar a dos publicaciones científicas (Hernández, Perdomo-Díaz, & Camacho-Machín, 2017; 2019 a). En estas se presentaron los resultados de dicho estudio piloto sobre la comprensión matemática para la enseñanza, en un contexto de uso de tecnología para la resolución de problemas.

La siguiente tarea que se abordó en el doctorado fue el diseño y puesta en marcha de una nueva experimentación, de la que se detallan los resultados en esta memoria. El diseño fue realizado, en gran parte, con la colaboración del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV) del Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México. Esta colaboración se llevó a cabo en una primera estancia realizada en junio y julio de 2017, motivada por las directrices del programa de Doctorado que promueve la internacionalización de la investigación y amparada por el Convenio de Cooperación que hay entre el Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV y el área de Didáctica de la Matemática de la ULL.

La experimentación se realizó durante el primer cuatrimestre del curso 2017/2018. A continuación, se comenzó con el análisis de los datos recogidos tras la aplicación en el aula de dicha propuesta de enseñanza y se llegaron a establecer las primeras implicaciones, tanto metodológicas como didácticas, que se podrían desarrollar con los profesores en formación para impulsar su comprensión matemática en torno a la resolución de problemas con tecnología. Fruto del análisis inicial de los resultados nacionales e internacionales se presentaron las siguientes comunicaciones en congresos nacionales e internacionales:

- Comunicación: "Reflexionando sobre una situación que surge en clase". XXXVI Jornadas de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas de la SCPM "Isaac Newton". Puerto del Rosario. Noviembre 2017
- Comunicación: "*Tecnología y resolución de problemas en la formación de profesores de matemáticas. Acontecimientos para la enseñanza y aprendizaje en educación secundaria". VII punto de Encuentro de Jóvenes Investigadores en Matemáticas. Diciembre 2017.*

- Comunicación: "". 42nd Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Umeå. Julio 2018.
- Comunicación: "¿y por qué? Introducción a los estudiantes en una tarea del quehacer matemático: justificar". XXXVII Jornadas de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas de la SCPM "Isaac Newton". La Laguna. Noviembre 2018
- Comunicación: "Task Designed for Training Secondary Mathematics Teachers Using Technology". Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Utrecht. Febrero 2019.

Además, a partir de los primeros resultados de investigación obtenidos, se generaron varias publicaciones, en el ámbito nacional (Camacho-Machín & Hernández, 2017; Camacho-Machín, Perdomo-Díaz, & Hernández, 2019) e internacional (Hernández, Perdomo-Díaz, & Camacho-Machín, 2018 a; 2018 b; 2019 b). Las primeras conclusiones indicaron que, de la actividad de resolución de problemas con GeoGebra, surgían situaciones de aula interesantes para tomar como punto de partida en la formación de profesores de matemáticas de educación secundaria.

En la última fase del programa de doctorado, se desarrolló un análisis más profundo del tipo de actividad matemática que provoca el uso de GeoGebra en la resolución de problemas y cómo estos pueden ser aprovechados en la formación de futuros profesores. Parte de este análisis se desarrolló durante la segunda estancia en el CINVESTAV en octubre de 2018, que además se utilizó para discutir los primeros resultados publicados y los avances que se presentan desarrollados aquí.

La tesis doctoral está estructurada en cinco capítulos, denominados: Problema de Investigación, Marco Conceptual, Metodología, Presentación y Discusión de Resultados y, por último, Conclusiones y Perspectivas de Futuro.

En el Capítulo 1, Problema de Investigación, se hace una breve introducción al papel de las tecnologías digitales en la educación actual. Se incide en como incluirlas dentro de la formación de profesores de matemáticas de Educación Secundaria, presentando diferentes marcos sobre el conocimiento del profesor que abordan el uso de las tecnologías directamente, o que han sido adaptados para ello. Además, se presenta la investigación previa inicial sobre el uso de GeoGebra y su implicación en la formación docente, que se realizó como punto de partida del programa de doctorado. El capítulo termina con el planteamiento de los objetivos de la investigación que se presenta en esta memoria.

En el Capítulo 2, Marco Conceptual, se establece lo que entendemos por Comprensión Matemática para la Enseñanza en Secundaria (Heid, Wilson, & Blume, 2015) para atender a eventos, o situaciones de aula, provocadas por el uso de GeoGebra en la resolución de problemas matemáticos. Para ello, se hace una introducción a las tres perspectivas desde las que se estudia esa comprensión matemática: Competencia Matemática, Actividad Matemática y Contexto Matemático de la Enseñanza (Heid, Wilson, & Blume, 2015). Y para cada una de ellas, se revisan otras fuentes que conectan el uso de GeoGebra con los aspectos y acciones que se combinan para darles forma. De esta manera, se consigue analizar los datos y discutir los resultados de la investigación y justificar cómo las actividades propuestas en la experimentación, proporcionan una oportunidad para desarrollar la comprensión matemática de futuros profesores.

En el Capítulo 3, Metodología, se describe el contexto de la investigación, una asignatura de formación docente dentro del Grado en Matemáticas; los participantes, estudiantes universitarios con interés en la enseñanza de las matemáticas; las actividades propuestas dentro del Taller de Resolución de Problemas con GeoGebra (TRPG), que incluye el análisis de situaciones de aula, la resolución de problemas usando GeoGebra y un ejercicio de auto-reflexión; la recogida de datos, que incluyen documentos escritos, construcciones de GeoGebra y vídeos del desempeño de los participantes dentro del aula; y el proceso de análisis, organizado por cada uno de los objetivos de la investigación.

En el Capítulo 4, Presentación y Discusión de Resultados, se presenta el análisis de los datos recogidos y seleccionados para obtener los resultados. Estos se clasifican según el tipo de análisis aplicado, es decir, una categoría para cada objetivo de investigación.

En el Capítulo 5, Conclusiones y Perspectivas de Futuro, se justifican los logros obtenidos para cada uno de los objetivos propuestos. De esta forma se presentan tres bloques de conclusiones, el primero recoge los aspectos más importantes de la Actividad Matemática que se identifican a la hora de usar GeoGebra en la resolución de problemas. El segundo presenta una clasificación de los participantes de la investigación que corresponde a sus habilidades a la hora de realizar las actividades propuestas. El tercero, y último apartado, presenta una síntesis de las reflexiones de los participantes y cómo estas los acercan a la práctica docente.

Finalmente, a modo de problema abierto se presentan algunos aspectos para investigar en el futuro.

Capítulo I. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En la última década, con la irrupción de las tecnologías digitales y las redes sociales, los modelos clásicos de educación han sido cuestionados. En el debate sobre el futuro de la Educación Secundaria aparece la pregunta ¿de qué manera y en qué medida deben intervenir las nuevas tecnologías? Teniendo en cuenta la cantidad de posibilidades que ofrece la tecnología, dentro y fuera del aula, para dar respuesta a parte de las demandas de innovación. Algunas de las cuestiones abordadas desde la Didáctica de la Matemática son: ¿Cuáles de estas herramientas digitales son útiles en la escuela? ¿Qué pueden ofrecer?

En respuesta a esas preguntas Santos-Trigo y Reyes-Martínez (2018) defienden que en la práctica docente debe realizarse un uso coordinado de las tecnologías. Pudiendo incorporar dispositivos electrónicos (tabletas o móviles), el uso de webs o aplicaciones que funcionan como plataformas de comunicación (Google Classroom, Padlet, Mensajería instantánea…), la consulta a plataformas de recursos (Khan Academy, Youtube, Wikipedia…) y, de forma más específica, el uso de tecnologías diseñadas para la actividad matemática como WolframAlpha y GeoGebra, entre otras. Una de las propuestas realizadas por los investigadores, experimentada con estudiantes de maestría en Educación Matemática, consistió en dirigir la actividad de resolución de problemas dentro de este entorno tecnológico, en el que incluían la construcción de un modelo dinámico en GeoGebra para buscar la solución y extender los problemas. Sus conclusiones revelaron que, el uso de GeoGebra, influyó en la forma de los razonamientos matemáticos de los participantes, ya que les permitió identificar e interpretar conceptos geométricos clave.

Por otra parte, hay que tener en cuenta que la tecnología evoluciona constantemente, y afecta no solo a actualizaciones técnicas o a la ampliación de herramientas sino también a la estructura y filosofía que la envuelve. En este sentido, cuando se revisan las investigaciones didácticas relacionadas con el uso de GeoGebra, este aparece denominado como un Sistema de Geometría Dinámica (SGD), ahora bien, si se revisan las opiniones de los usuarios, se podrá encontrar referencias a GeoGebra como un software de matemáticas que reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un paquete fácil de usar y útil para cualquier nivel (GeoGebra GmbH, 2019). También es frecuente encontrar referencias a

GeoGebra como grupo, comunidad o red de usuarios de diferentes países que comparten recursos de matemática dinámica para la educación en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM: Science Technology Engineering & Mathematics). De esta forma, al hablar de GeoGebra, se puede considerar que integra el uso del SGD con la plataforma de comunicación en la que se pueden compartir recursos. Esto es signo de que alrededor del proyecto de la utilización de GeoGebra en las aulas, se ha desarrollado una comunidad internacional de usuarios interesados en la enseñanza de las matemáticas y otras ciencias con apoyo de GeoGebra. En esta investigación, en cambio, se planteó un entorno tecnológico limitado a un uso de GeoGebra como un SGD ventajoso para la resolución de problemas y a una comunicación restringida de los resultados entre los participantes y el profesor.

Se eligió el GeoGebra como recurso tecnológico para la investigación por distintas razones. Por un lado, está extendido ampliamente en la comunidad educativa, hay muchos profesores que lo introducen en la educación secundaria (también en primaria) por su facilidad de manejo, naturalidad y sencillez de la interfaz (Sánchez-Muñoz, 2011). Por otro lado, que sea libre su distribución y que se pueda usar en distintos dispositivos como ordenadores, tabletas y *smartphones* es sin duda otro punto a favor de su expansión (Ascanio-Zárate, 2014), además permite diseñar applet que se pueden incrustar en libros interactivos o webs (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2018). Esta valoración del GeoGebra está avalada por otros autores e investigaciones (Gómez-Chacón & Escribano, 2014; Granberg & Olsson, 2015) que también reconocen al GeoGebra como un SGD que permite integrar las distintas representaciones de un objeto matemático desde las vistas algebraica, vista gráfica y la hoja de cálculo. Las tareas que analizaron en estas investigaciones muestran como el uso del GeoGebra permite definir y manipular objetos matemáticos, al utilizar diferentes herramientas[1] y observar de forma simultánea el objeto en las diferentes representaciones. Es por ello, que los usuarios pueden, y se ven en la necesidad de interpretar y evaluar sus acciones sobre el SGD. De esta forma, se puede convertir un ejercicio matemático en una actividad para poner en marcha la creatividad y el razonamiento matemático al implementar diferentes estrategias para aproximarse a la

[1] Las herramientas permiten crear nuevos objetos con un simple clic. Se activan con el botón correspondiente situado, habitualmente, sobre la vista gráfica en una barra superior. En este trabajo identificaremos las herramientas escribiendo su nombre en cursiva. Por ejemplo, si escribimos *Recta* hacemos referencia a la herramienta que llamando a un comando de GeoGebra permite añadir una recta a la vista gráfica a partir de dos puntos.

solución (Santos-Trigo, Camacho-Machín, & Olvera-Martínez, 2014).

Realizar tareas de matemáticas integrando el uso del GeoGebra, ofrece la oportunidad de plantearse preguntas, hacer conjeturas, representar objetos y explorar sus propiedades matemáticas (Santos-Trigo, Reyes-Martínez, & Ortega-Moreno, 2015). Se le presenta al profesor un nuevo reto: integrar tareas donde los estudiantes de secundaria hagan uso de tecnologías digitales. Investigaciones en las que los participantes realizan tareas y actividades en las que se usa algún SGD (Acosta, Mejía, & Rodríguez, 2011; Contreras, 2014; Iranzo & Fortuny, 2009) han mostrado cómo, trabajar sobre un entorno que permite la experimentación, posibilita la formulación de conjeturas, que son expresadas de una forma más o menos rigurosa dependiendo de la comprensión matemática de los usuarios. Los problemas o tareas de esta investigación, mostraron que el uso de la tecnología es totalmente necesario para seguir un proceso que va de lo experimental a lo formal, pasando por el descubrimiento de propiedades. Como elementos necesarios aparecen la observación del movimiento, la cuantificación de atributos y la posibilidad de dar con la solución por un camino diferente al seguido con lápiz y papel. También quedan registradas en las investigaciones, dificultades en el uso de la tecnología, que pueden derivarse de obstáculos cognitivos previos o en la carencia de conocimientos teóricos y, por tanto, es necesaria que las intervenciones del profesorado puedan guiar a sus estudiantes cuando formulan una conjetura y decidir hasta qué punto se debe profundizar en el proceso de su justificación matemática. Santos-Trigo, Reyes-Martínez y Ortega-Moreno (2015), indican que el uso de tecnología producirá cambios en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y señalan además que:

> *El uso de la tecnología digital ofrece a los estudiantes la oportunidad de ampliar formas de razonar sobre los problemas. Sin embargo, representar y explorar tareas matemáticas mediante el uso de tecnologías digitales presenta nuevos desafíos para los profesores, entre los que se incluye el desarrollo de cierta habilidad en el uso de estas herramientas para analizar qué cambios en los contenidos y la práctica docente deben tenerse en cuenta. (pág. 256)*

I.1. Investigación Previa

Como investigación previa de esta tesis doctoral, se desarrolló una investigación con el objeto de conocer cómo se puede integrar GeoGebra en tareas matemáticas. Se diseñó una experimentación para analizar la formación inicial de profesores, cuando los estudiantes del Grado en Matemáticas eligen asignaturas relacionadas con la Didáctica de la Matemática. En ese momento, se buscaba esbozar cuál es el conocimiento matemático que debían mostrar los futuros profesores de matemáticas en la Educación Secundaria, en un entorno donde la tecnología está presente. El estudio realizado se centró en un grupo de estudiantes de cuarto curso que realizaron una tarea que integraba la resolución de problemas con el uso de GeoGebra, para lo cual se utilizó un protocolo de resolución. Este protocolo tenía como objeto enfatizar las diferentes posibilidades que ofrece GeoGebra, planteando tres aproximaciones de la solución (dinámica, numérica y algebraica), una extensión y contextualización del problema. Para este trabajo se eligió un marco de referencia centrado en la comprensión de las matemáticas que debe tener un profesor de matemáticas de Educación Secundaria, el denominado *Mathematical Understanding for Secondary Teaching* (Heid, Wilson, & Blume, 2015), que se describe con todo detalle en el Capítulo II de esta memoria. El MUST describe las perspectivas Competencia Matemática, Actividad Matemática y Contexto Matemático de la Enseñanza descomponiéndolas en una serie de componentes o aspectos. En esta investigación no se analizó la tercera perspectiva del marco, ya que, la tarea que fue fruto del análisis no incluía intervenciones docentes reales, ni hipotéticas. Los objetivos que se establecieron para ese estudio fueron: i) Identificar las componentes de la Competencia Matemática que muestran los estudiantes al utilizar un protocolo de resolución de problemas que guía las aproximaciones dinámica, numérica y algebraica y ii) Identificar las componentes de la Actividad Matemática que muestran los estudiantes al utilizar un protocolo de resolución de problemas que guían las aproximaciones dinámica, numérica y algebraica. La identificación de las componentes de la Competencia y Actividad Matemática podrían ser usadas para configurar una serie de materiales, basados en la resolución de problemas haciendo uso de SGD, para la formación de profesores de Educación Secundaria.

Un elemento fundamental tanto de la investigación previa como de la investigación que se presenta en esta memoria lo constituye lo que se va considerar como resolución de problemas con tecnología. La fuente principal para establecer nuestra concepción son los planteamientos propuestos por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013)[2]. En este primer estudio, fue especialmente relevante la idea de resolver un problema desde tres aproximaciones: dinámica, numérica y algebraica. Entonces, se pretendía tener una visión general de la influencia de GeoGebra en el desarrollo del MUST de los estudiantes y, según los autores:

> *[L]os estudiantes que van a desarrollar una comprensión conceptual de las ideas matemáticas y la competencia para resolver problemas, deben pensar en diferentes formas de resolver un problema o examinar un concepto matemático. En este contexto, los enfoques visual y empírico utilizados previamente para explorar el problema proporcionan una base para introducir otros enfoques. Argumentamos que cada aproximación del problema hace que el resolutor piense en el problema de diferentes maneras y, también, le hace usar diferentes conceptos y recursos para resolverlo. (Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2013, p. 291)*

La tarea propuesta consistió en que los participantes resolvieran un problema siguiendo una serie de pautas, llamado *Protocolo de Resolución* (Camacho-Machín, Afonso, & Moreno, 2014), con dos propósitos: dar a conocer las posibilidades de que les dota el uso del SGD GeoGebra y provocar la argumentación matemática en cada una de las distintas aproximaciones sobre conocimientos que están dentro del currículo de Secundaria. Los enunciados de los problemas fueron los siguientes:

- De todos los rectángulos inscritos en una semicircunferencia de radio R, determinar el de mayor área.
- De todos los triángulos isósceles circunscritos a una circunferencia de radio R, determinar el de área mínima.
- De todos los trapecios isósceles circunscritos a una circunferencia de radio R determinar el de área mínima.

[2] Se describen con más detalle en el Capítulo II.

- La sección de un túnel de perímetro constante, tiene forma de rectángulo completado con un semicírculo. Determinar el radio del semicírculo para que el área de la sección sea máxima.

El protocolo de resolución seguía el esquema general que se muestra en la Tabla 1 y fue el que dio estructura a cada una de las tareas. Se puede considerar que está dividido en cinco partes, un enunciado, tres aproximaciones y una reflexión sobre posibles extensiones y contexto real (Camacho-Machín, Afonso, & Moreno, 2014).

Partes	Descripción
Enunciado	Corresponde a la formulación, de forma escrita, del problema concreto que se trabajará con el protocolo.
Aproximación dinámica	*Construcción*. Se realiza una construcción dinámica en GeoGebra que represente la situación planteada en el enunciado, de tal forma que al arrastrar un elemento de la construcción se observa para cada posición un caso particular y al animar el elemento se visiona la familia de figuras a estudiar.
	Análisis. Consiste en manipular la construcción y observar como varían las dimensiones, buscando regularidades o invariantes en los distintos casos particulares.
	Lugar geométrico. Se representa de forma gráfica la relación funcional entre dos de las dimensiones de la figura haciendo uso de un comando.
Aproximación numérica	Usando la hoja de cálculo de GeoGebra se seleccionan los elementos de la figura, cuyas dimensiones se registrarán de forma automática. Se buscan patrones numéricos entre las dimensiones y se pueden hacer cálculos entre ellas en una de las columnas.
Aproximación algebraica	Se realiza una resolución con papel y lápiz, utilizando la matemática formal. De forma general, se plantean ecuaciones que relacionen las dimensiones de la figura y que permitan obtener una expresión de la función a estudiar. El estudio de esta función debería conducir a la demostración.
	Comparación. Se representa gráficamente la función y se compara con la representación gráfica del lugar geométrico realizada en la aproximación dinámica. Estas representaciones deben coincidir haciendo las restricciones oportunas.
	Demostración. Consiste en justificar las conjeturas hechas. Para argumentar, siguiendo una lógica matemática, cual es la solución del problema.
Extensión y contexto real	*Extensión*. Se plantean enunciados diferentes al original, que permitan aplicar una resolución similar, que extienda el objetivo del problema o cambie las condiciones para buscar una solución más general o restringida.
	Contextualización. Se plantean enunciados en los que las condiciones del problema y el objetivo estén determinados por una situación en un contexto no matemático.

Tabla 1. Esquema del Protocolo de Resolución usado en la investigación previa

Se recogieron los datos de la resolución de la misma tarea en dos situaciones diferentes: trabajo individual y trabajo en grupo. Los participantes la realizaron individualmente de forma presencial, en una sesión de clase y, luego, en grupo de forma autónoma fuera del aula. Del trabajo individual se recogieron las respuestas a papel y lápiz y las construcciones de GeoGebra de los tres estudiantes. Del trabajo en grupo se analizaron un informe escrito presentado por el grupo, dos construcciones realizadas con el GeoGebra, una del problema original y otra de una extensión, y la grabación de la exposición oral que tuvo lugar al final de la asignatura frente al resto de sus compañeros.

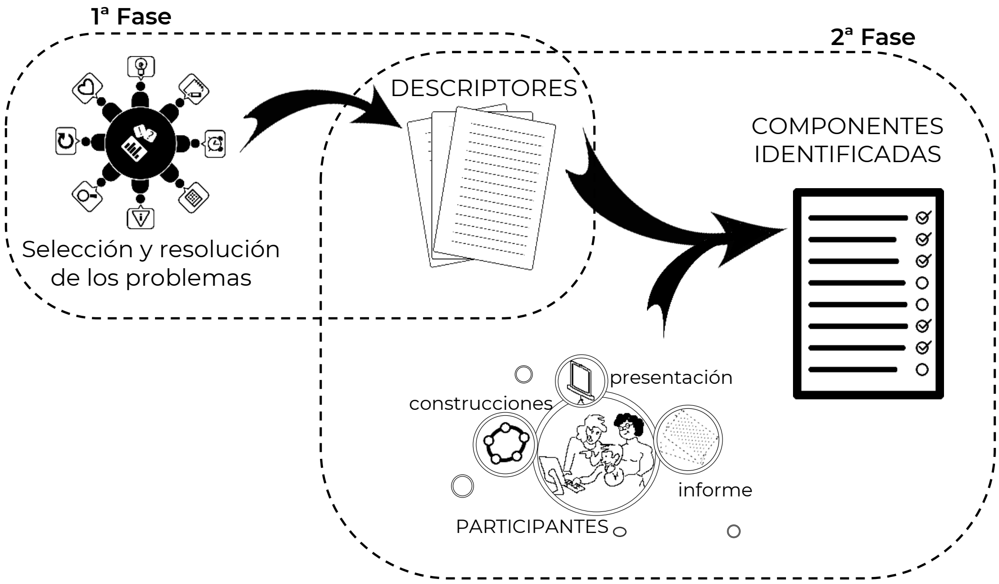


Figura 1. Fases de la investigación previa

Para el análisis de los datos, se realizó una primera fase donde el equipo investigador, formado por tres personas, entre las que se encontraba el profesor de la asignatura, eligió los problemas que se iban a utilizar y realizó un análisis detallado de los mismos, identificando una serie de descriptores asociados a la Competencia Matemática y la Actividad Matemática (Figura 1). En la Tabla 2 se muestra un ejemplo del resultado de este análisis. A partir de una cuestión sobre la construcción dinámica, el equipo investigador se planteó qué es lo que implicaba que un trapecio estuviera circunscrito a una circunferencia dada. Basándose en la reflexión matemática y las acciones que dieron paso al resultado, describieron, desde la perspectiva de la Competencia Matemática, la capacidad de entender el concepto de trapecio circunscrito, es decir, la *comprensión conceptual* necesaria para contestar a la cuestión.

Cuestión	Construir una circunferencia arbitraria con radio constante y circunscribir un trapecio isósceles a dicha circunferencia. El trapecio construido, debe moverse y tener su área variable. Indicar brevemente cómo se ha hecho.
Reflexión matemática	¿Qué posición relativa debe tener el trapecio respecto a la circunferencia? Las bases de un trapecio isósceles son paralelas, esto determina que los puntos de tangencia de las bases con la circunferencia delimitan un diámetro de ésta. Los ángulos del trapecio isósceles son iguales dos a dos y la mediatriz de las bases es un eje de simetría axial. Por tanto, los otros puntos de tangencia son simétricos respecto a dicha mediatriz y el centro de la circunferencia pertenece a ella.
Resultado	Construcción donde el punto móvil es un vértice del trapecio que se desplaza por una semirrecta. Por el punto pasan las rectas tangentes a la circunferencia y se traza el lado contrario por simetría axial. Se obtiene inequívocamente un trapecio isósceles circunscrito.
Descriptor para la *comprensión conceptual*	Conocer la definición de trapecio isósceles y sus propiedades geométricas (paralelismo y simetría).

Tabla 2. Identificación de la *comprensión conceptual* al realizar la construcción

En la segunda fase, se analizaron los datos obtenidos de la experimentación, tomando como referencia los descriptores obtenidos en la primera fase. Lo que permitió identificar qué componentes del MUST aparecían en la resolución de los participantes y que relación tenían con las distintas aproximaciones planteadas en la tarea. Para ilustrar este proceso se muestran en la Tabla 3 las componentes de la Competencia Matemática y de la Actividad Matemática descritas tras analizar los datos aportados por los estudiantes, que realizaron la tarea sobre la familia de trapecios circunscritos (Hernández, Perdomo-Díaz, & Camacho-Machín, 2019 a).

Como conclusiones de esta investigación previa, se pudo constatar que era posible identificar aspectos de la Comprensión Matemática en un grupo de estudiantes del Grado en Matemáticas cuando resuelven problemas de búsqueda de mínimos y máximos haciendo uso del GeoGebra. Analizando las tareas, se observó que los estudiantes necesitaron movilizar distintos conocimientos y habilidades en las distintas partes del Protocolo de Resolución. Durante la construcción dinámica usaron las propiedades geométricas de los trapecios circunscritos, eligieron y utilizaron las herramientas que ofrece el GeoGebra para conseguir visualizar toda la familia de figuras. En la aproximación algebraica realizaron una demostración formal en la que movilizaron conocimientos de geometría analítica y de cálculo. En ambas aproximaciones, se identificaron diversos componentes de la Competencia Matemática: la *comprensión conceptual*, la *fluidez en los procedimientos*, la *competencia estratégica* y el *razonamiento flexible*. Las evidencias relacionadas con la Actividad Matemática fueron más numerosas y cubrieron sus tres componentes. La naturaleza del propio modelo MUST, incluye dentro de la Actividad Matemática un abanico amplio de habilidades. Esto, junto con el diseño del Protocolo de Resolución, que propone manipular una familia de figuras en cada aproximación de diferentes formas, hizo que destacaran más las componentes de dicha perspectiva frente a la otra.

Respecto a la influencia de las distintas aproximaciones, los estudiantes mostraron su Comprensión de la Matemática de diferentes formas en cada aproximación. Se pudo constatar que los estudiantes eran capaces de trabajar con las distintas representaciones, observando y conjeturando, tanto en la aproximación dinámica, como en la numérica, cuál era la solución, para luego argumentar y demostrar de forma analítica. También se comprobó que el uso de la tecnología es determinante para motivar que surjan algunas de estas habilidades.

Descriptores de la aproximación dinámica	Componente	
Conocer la definición de trapecio isósceles y sus propiedades geométricas (paralelismo y simetría).	cc	●
Reconocer el entorno de trabajo en GeoGebra como un plano cartesiano, y usar las herramientas para plasmar propiedades geométricas con representaciones métricas.	pm	●
Realizar la construcción del trapecio circunscrito tomando los vértices como los puntos de corte de rectas trazadas usando tangencia, paralelismo y simetría.	fp	●
Manipular los elementos del trapecio para conseguir circunscribirlo a la circunferencia dada y poder deducir las propiedades de la familia.	cm	●
Plantear opciones de construcción que dependan de la elección de un único punto móvil que en cada posición muestra un trapecio circunscrito diferente.	ce	●
Restringir la permanencia del punto móvil (a una semirrecta o a la semicircunferencia) para que los vértices siempre formen un trapecio de la familia.	rm	○
Representar la familia de trapecios isósceles circunscritos al visionar la construcción dinámica.	cm	●
Ampliar la idea de trapecio para aceptar el cuadrado como solución al problema.	rf	●
Reconocer que visionar la familia de trapecios o la representación gráfica del área permite dar una solución general.	pm	○
Observar que la figura de la familia con menor área es el cuadrado y conjeturar que es la solución determinando que el trapecio isósceles circunscrito de menor área es el cuadrado de lado 2R.	rm	●
Elegir un punto con coordenadas una de las dimensiones del trapecio y el área, para que la representación del lugar geométrico represente la variación del área de la familia de trapecios.	fp	●
Conectar la idea de lugar geométrico de un punto con la gráfica del área respecto a una dimensión del trapecio.	pm	●
Descriptores de la aproximación numérica		
Identificar cada fila de la hoja de cálculo con un trapecio de la familia.	pm	○
Representar la familia de trapecios circunscritos como una lista dónde se relacionan las longitudes de los lados de cada trapecio.	cm	○
Dar se cuenta que por cada representación de un trapecio de la familia se obtiene una fila de datos con sus dimensiones, y que las relaciones observadas en la vista gráfica se trasladan a relaciones aritméticas.	pm	○
Definir una dimensión que permita representar la diferencia de las bases de forma numérica para ilustrar cuando se alcanza la solución.	cm	□
Notar que, para un radio elegido, queda determinado el trapecio de área mínima por la longitud de sus lados registrada en la hoja.	pm	○
Comprender las limitaciones técnicas cuando no aparecen soluciones exactas debido a que al arrastrar el punto móvil da saltos discretos, que corresponden con saltos numéricos en la tabla.	rf	□
Observar que la fila de la lista con menor área es la que tiene todas las dimensiones idénticas, de distancia 2R, y conjeturar entonces que la figura es un cuadrado que pertenece a la familia de trapecios isósceles circunscritos.	rm	●

Descriptores de la aproximación algebraica		
Comprender la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras como propiedades que relacionan las dimensiones de las bases, los lados y el radio, y permite escribir una expresión algebraica para el área.	cc	○
Conocer los recursos de la geometría analítica referente a la intersección de rectas con las cónicas y las propiedades que verifica una recta tangente.	cc	▫
Planificar la resolución algebraica planteando una función cuyo mínimo permita dar con las dimensiones del trapecio de área mínima.	ce	●
Elegir las relaciones analíticas que expresan el área en forma de una dimensión variable.	ce	●
Transformar las expresiones algebraicas obtenidas, ya sea usando semejanza o geometría analítica, y aplicar los procedimientos asociados a encontrar el mínimo de una función.	fp	●
Transformar dentro del registro analítico las distintas ecuaciones deducidas definiendo una función.	cm	●
Identificar la función área de una de las dimensiones como una expresión de la familia de trapecios. Para dar una visión de forma simbólica de la familia.	cm	●
Darse cuenta de que la expresión del radio de forma general con R, proporciona una solución para cualquiera que sea la circunferencia.	pm	○
Darse cuenta que se puede colocar la figura sobre los ejes de coordenadas sin perder la generalidad y así usar la geometría analítica.	pm	▫
Demostrar haciendo un uso formal de la lógica que la figura de área mínima de la familia es el cuadrado de radio 2R.	rm	●
Conectar la idea de función área con la de representación de lugar geométrico	pm	○
Restringir el dominio de la función para que tenga sentido con los valores posibles de la base del trapecio.	rm	○
Extensión y contexto real		
Plantear enunciados similares al del trapecio y preguntarse si aparecen en otros estudios. Buscar información y resultados geométricos sobre cuadriláteros circunscritos que sirvan para demostrar la generalización.	dm	○
Darse cuenta de que problemas similares con otras familias de cuadriláteros pueden resolverse siguiendo los mismos pasos.	pm	●
Extender las propiedades observadas a la hora de resolver el problema a otros cuadriláteros.	rm	●
Observar los distintos enunciados y plantear una generalización de la solución para todos los cuadriláteros circunscritos.	rm	○
Ser capaz de buscar un entorno realista en el que el problema podría plantearse u otro similar.	pm	●

● Descriptores identificados previamente
○ Descriptores que no se identificaron en la tarea del grupo de estudiantes.
▫ Descriptores que no se identificaron inicialmente en el trabajo del equipo investigador

Competencia Matemática
- cc- comprensión conceptual
- fp- fluidez en los procedimientos
- ce- competencia estratégica
- rf- razonamiento flexible
- dm- disposición al trabajo matemático

Actividad matemática
- pm- percepción matemática
- rm- razonamiento matemático
- cm- creación matemática

Tabla 3. Identificación de la *comprensión conceptual* al realizar la construcción

Hay que recordar que, en la primera fase del análisis, el equipo investigador analizó su propia resolución del problema siguiendo el *Protocolo* de *Resolución* y se obtuvieron una serie de evidencias que permitieron describir las componentes del MUST. Por otra parte, las observaciones que se obtuvieron a la hora de analizar las tareas de los estudiantes, aunque en algún caso no coincidían exactamente, permitieron tener la perspectiva suficiente para identificar y reflexionar sobre su Comprensión Matemática. Sin embargo, las evidencias previas eran más numerosas que las identificadas en los estudiantes. Se señaló como posible causa que, al analizar su propia resolución, eran conscientes de todo el proceso y, por tanto, era más clara la identificación. Mientras que en los datos que se recogieron no era posible observar actuaciones claras en las que se mostrasen algunas de las componentes, ya que la recogida de los datos no contempló el proceso propio de resolución. Como los momentos relacionados con el paso previo a la construcción, el momento en que movían los objetos y cuando construían el lugar geométrico. Lo que hizo plantear cambios en la forma de recoger los datos e implementar la tarea, para la investigación que se presenta aquí.

También se analizaron, en esta investigación previa, las ventajas y desventajas de utilizar un Protocolo de Resolución. Éste marcó el camino de resolución de los problemas y generó situaciones que permitieron valorar la Comprensión Matemática, principalmente por motivar la búsqueda de la solución por distintas aproximaciones, pero también por las cuestiones que planteaba al estudiante. El ejemplo más claro fue construir en GeoGebra la representación gráfica usando la herramienta *Lugar geométrico,* para luego compararla más adelante con la función que representa el área a optimizar. Se concluyó que: primero, el Protocolo de Resolución se mostró como una herramienta útil para que los estudiantes mostraran su Competencia y Actividad Matemática, y, segundo, una revisión de las cuestiones que se plantearon podría generar nuevas situaciones que fomentasen la aparición del resto de aspectos de las componentes del modelo detectados en el análisis previo y que no surgieron en la resolución de los estudiantes.

I.2. Antecedentes

Durante la investigación previa salieron a relucir diferentes habilidades necesarias para un futuro profesor de Educación Secundaria de Matemáticas. Aparecen no solo conceptos matemáticos que incluyen nuevas ideas y ampliaciones de conceptos elementales, sino que existe también un cambio en la naturaleza del pensamiento matemático involucrado (Kilpatrick, 2015). Por ejemplo, hay un mayor énfasis en los aspectos deductivos y en la demostración. Los profesores necesitan una comprensión de las matemáticas que les permita elaborar y dar forma a actividades más complejas como: buscar ejemplos y contraejemplos para justificar la validez o falsedad de las conjeturas, extender propiedades a sistemas matemáticos más amplios que los iniciales (Conner, Wilson, & Kim, 2011) o plantear problemas interesantes que surjan de la propia resolución de problemas (Malaspina, Torres, & Rubio, 2019). En definitiva, el profesor de Educación Secundaria debe tener una comprensión de las matemáticas que le permita acompañar a los estudiantes hacia una concepción de la disciplina más formal y rigurosa.

El problema de investigación que se presenta en este capítulo requiere, en primer lugar, describir el perfil del profesor de matemáticas que los distintos programas de formación, inicial o contínua, tienen en cuenta para definir sus objetivos. Para Camacho-Machín y Santos-Trigo (2015), sobre la educación matemática y la formación didáctica de los profesores, el conocimiento incluiría, además del dominio de contenidos matemáticos; la capacidad de establecer relaciones entre los contenidos matemáticos y los conceptos que se deben enseñar, la comprensión de cómo se desarrolla el pensamiento matemático de los estudiantes y un bagaje de estrategias de enseñanza-aprendizaje. Camacho-Machín y Santos-trigo (2015) concluyen que "el conocimiento matemático para la enseñanza viene condicionado por el modo en que se conceptualiza lo que significa que un alumno sea competente en el estudio y desempeño de las matemáticas"(p.119). De esta forma, hacen concurrir el conocimiento matemático del profesor y del estudiante asociándolo con un aprendizaje basado en el cuestionamiento continuo sobre y para la resolución de problemas. Proponiendo, además, que los hábitos propios del trabajo matemático sean parte de la cultura del aula.

El modelo MUST señala, con respecto al profesor, que su comprensión de los conceptos matemáticos debe incluir cómo usar este conocimiento para promover la comprensión de sus estudiantes. De tal forma que debe ser capaz de reconocer en cada momento estructuras matemáticas (por ejemplo: números racionales, reales o complejos) sobre las que trabajan sus estudiantes y estar atento a que no se confundan las reglas simbólicas comunes de cada estructura. También apunta que un profesor debe moverse entre la rigurosidad de los argumentos matemáticos y la informalidad de los argumentos usados por sus estudiantes. En sus explicaciones debe conectar las matemáticas con diferentes ideas o conceptos dentro del área y con aplicaciones a otras ramas del conocimiento. Además, debe explorar ideas, manipular expresiones o cambiar de representación un objeto matemático para dar ejemplos, definir nuevos conceptos y conjeturar o justificar razonamientos matemáticos, de forma que pueda contestar a las preguntas de sus estudiantes o evaluar sus respuestas. Desde un punto de vista de la práctica docente, un profesor debe entender lo que piensan sus estudiantes sobre una idea matemática y conocer los conceptos erróneos más frecuentes que estos asocian a dicha idea.

El objeto de un gran número de investigadores es establecer qué es lo que debe saber y saber hacer un profesor de matemáticas de Educación Secundaria. Algunas de esas investigaciones se basan en los planteamientos de Shulman (1986) que define el eje esencial de los conocimientos de un profesor. Para ello, combina el conocimiento de la materia con el conocimiento pedagógico y delimita el Conocimiento Pedagógico de la Materia, llamado habitualmente PCK por sus siglas en inglés, Pedagogical Content Knowledge. Este planteamiento general del PCK ha servido para generar nuevos marcos teóricos que extienden el trabajo de Shulman y lo desarrollan para áreas de conocimiento más concretas (Figura 2).

El trabajo de Shulman ha sido desarrollado en marcos específicos para el área de Matemáticas. Para ello, se han incluido los aspectos específicos de las matemáticas en el conocimiento de la materia y los aspectos que provienen de las demandas propias de su enseñanza en los conocimientos pedagógicos. De esta forma, Ball y Bass (2000) establecieron la noción de Matemáticas para la Enseñanza (Mathematics for Teaching o su acrónimo MfT) y concretan el denominado Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKfT, acrónimo de *Mathematical Knowledge for Teaching)*. El MKfT hace referencia al conocimiento que cubre “el contenido matemático que los profesores deben saber y saber usar para resolver con éxito los problemas matemáticos que surgen en su práctica docente" (Stylianides & Stylianides, 2010, pág. 161). Este marco aporta un refinamiento del PCK y señala la idea de que el conocimiento del profesor sobre las matemáticas y su enseñanza es exclusivo del mismo.

Sobre el MKfT Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013) contemplan que:

> *[R]econociendo la innovación que suponen algunas de estas ideas, existen ciertos elementos de este modelo que desde nuestra perspectiva requieren una discusión en profundidad, en pos de su coherencia desde un punto de vista teórico, así como desde la perspectiva de la utilidad del modelo como marco teórico para el análisis del conocimiento del profesor. (p. 594)*

Del análisis profundo que hacen los autores nace el denominado Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (Mathematics Teachers' Specialised Knowledge o su acrónimo MTSK). Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013) proponen que el conocimiento del profesor se puede tratar desde seis subdominios, tres para el Conocimiento Matemático y tres para el Didáctico, en los que se entretejen sus creencias y concepciones sobre las matemáticas. El Conocimiento Didáctico lo conforman los subdominios: Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas, Características del Aprendizaje de las Matemáticas y Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas. El Conocimiento Matemático tiene por subdominios: Conocimiento de los Temas, Conocimiento de la Estructura de la Matemática y Conocimiento de la Práctica Matemática. Muñoz-Catalán et al. (2015) concluyen que el modelo MTSK permite una mejor comprensión de qué y cómo conoce el profesor de matemáticas y permite, también, dar un marco para el diseño de propuestas de formación para futuros profesores. Además, destacan que un factor a tener en cuenta son las peculiaridades de cada etapa educativa, para las que se "requiere de un conocimiento matemático especializado para la enseñanza sólido, muy específico, y fuertemente enraizado en la propia disciplina" (p. 603).

El Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK) es una de las extensiones del PCK. La principal aportación que hicieron Misrha y Koheler (2006) al diseñar el marco TPACK fue introducir el conocimiento tecnológico al mismo nivel que el conocimiento de la materia y el conocimiento pedagógico. De modo que "el TPACK sugiere que los profesores deben tener una comprensión profunda de cada uno de los tres componentes de conocimiento para poder organizar y coordinar tecnología, pedagogía y contenido en la enseñanza." (Koehler, Mishra, Kereluik, Shin, & Graham, 2014, p. 102). Este marco da un punto de vista general que hay que adaptar a las diferentes materias, es más, el TPACK sólo se concibe situado y conectado a contextos específicos.

Otro enfoque que surge es el propuesto por Thomas y Palmer denominado Conocimiento Pedagógico y Tecnológico de las Matemáticas (MPTK por su acrónimo inglés de Mathematical Pedagogical Technological Knowledge) (Thomas & Palmer, 2014) es un marco que aborda simultáneamente el conocimiento matemático desde el MKfT (Ball, Thames, & Phelps, 2008), la incorporación de la tecnología desde la Génesis Instrumental (Guin, Ruthven, & Trouche, 2006) y las orientaciones personales del profesor que debe decidir cómo incorporar la tecnología a la enseñanza (Schoenfeld, 2011). El MPTK marca la diferencia con los marcos descritos en los párrafos anteriores, por un lado, se diferencia con el MKT al reconocer que los profesores deben tener habilidades y actitudes particulares para implementar el uso exitoso de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas. Por otro lado, a diferencia del TPACK, el MPTK tiene en cuenta la valoración del profesor sobre las aplicaciones didácticas de la tecnología y sus creencias en torno a la validez de su uso en matemáticas por parte de los estudiantes (Thomas & Palmer, 2014). Los autores concluyen que un profesor con un alto MPKT dispondrá de "un buen conocimiento del contenido matemático, una buena comprensión de cómo usar la tecnología, creencias y actitudes positivas para su uso y la confianza para ponerla en práctica." (Thomas & Palmer, p. 77).

Se puede observar los marcos mencionados, el MTfT, el MTSK y el MPTK se centran en los contenidos de las Matemáticas, aunque el PCK y TPACK pueden contextualizarse para ser usados para hablar del conocimiento de profesores de matemáticas. El TPACK y el MPTK introducen explícitamente el uso de la tecnología, pero los otros marcos también son válidos para analizar contextos que incluyan actividades que usen la tecnología. Todos ellos comparten la segregación que hace Shulman (Figura 2) entre el Contenido pedagógico y de la materia (Shulman, 1986). Por supuesto existen otros marcos que no parten directamente del PCK.

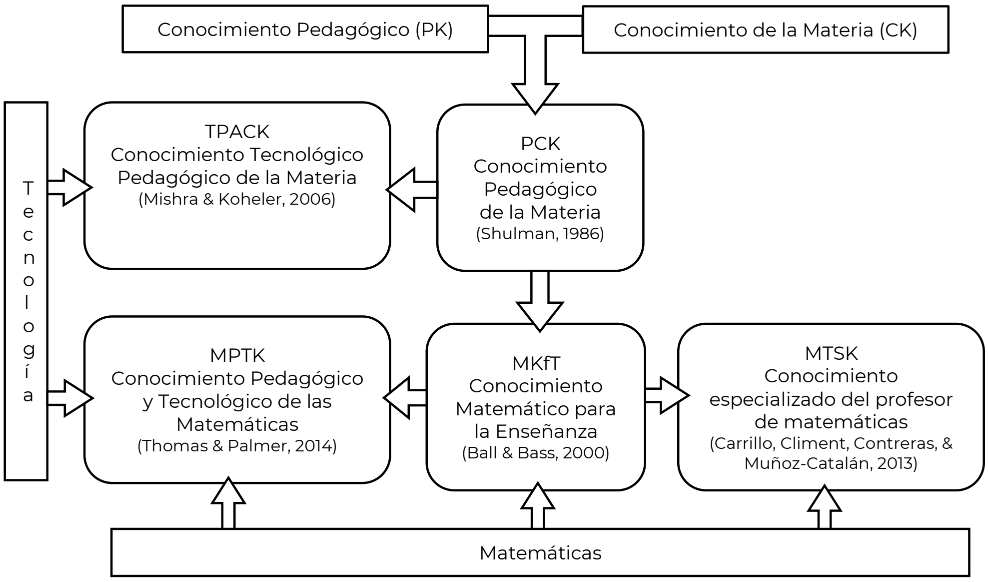


Figura 2: Relación entre los marcos para el conocimiento del profesor

El marco propuesto por Churchill, Fox y King (2016) propone utilizar las múltiples posibilidades de las tecnologías en la enseñanza. Este marco se diseñó para centrarse en el diseño de un aprendizaje que integrara las posibilidades que ofrecen en su conjunto todas las tecnologías de las que dispone un estudiante. Para ello, es necesario que se coordinen cuatro componentes: los Recursos, las Actividades, el Soporte y la Evaluación. Estas cuatro componentes dan nombre al marco RASE (siglas de Resources, Activity, Support and Evaluation). “La idea central detrás del marco de diseño de aprendizaje RASE es que los recursos no son suficientes para el logro completo de los resultados del aprendizaje.” (Churchill, Fox, & King, 2016, p. 4). Además de los recursos, es necesario que los profesores pongan en práctica *actividades* para que los estudiantes aprovechen los recursos, den apoyo a los estudiantes para que resuelvan de manera independiente sus tareas y usen las tecnologías de forma que la evaluación informe a los estudiantes y a ellos mismos de los progresos alcanzados. Esta visión integrada de las tecnologías puede adaptarse a la enseñanza de las matemáticas, un ejemplo de ello es el que presentan Santos-Trigo y Reyes-Martínez (2018) para mostrar actividades de formación de futuros profesores donde los recursos que se utilizan incorporan: plataformas online, tareas matemáticas, muros digitales, libros electrónicos, tablets y plataformas de enseñanza.

En el escenario que se presenta en esta investigación, se considera el planteamiento de problemas y actividades por parte de un futuro profesor, junto con el uso de tecnologías digitales, como elementos clave de la comprensión matemática necesaria para la enseñanza en la Educación Secundaria. Entendiendo que, al igual que Penalva y Llinares (2011), las tareas que propone un profesor conforman un espacio de oportunidades para sus estudiantes pudiendo además dirigir la atención sobre el significado de determinados conceptos. Es decir, un profesor debe ser capaz de identificar, seleccionar y preparar tareas que den oportunidades para pensar, razonar y reflexionar sobre ideas matemáticas con la intención de potenciar el aprendizaje de sus estudiantes. Desde la óptica de la integración del GeoGebra en este quehacer, un futuro profesor debe prepararse para ahondar en tareas digitales que brindarán a sus estudiantes un espectro de oportunidades más diverso que una tarea para la que solo se usen recursos sobre el papel.

I.3. OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

La investigación de la que se hace el informe en esta memoria parte de la idea de que un futuro profesor debe tener una comprensión de las matemáticas particular para enseñar en secundaria, además, debe conocer y ser capaz de aprovechar las ventajas que ofrecen las tecnologías digitales, en concreto el uso del GeoGebra, a la hora de plantear tareas y realizar actividades matemáticas. Es importante tener en cuenta que las universidades tienen dentro de sus funciones la de formar a futuros profesores de Educación Secundaria, de forma que adquieran competencias en grado suficiente para, luego, abordar su desarrollo profesional.

El estudio que se presenta, como ya se dijo, estuvo precedido por una investigación. En dicha investigación previa se trató de hacer un primer diagnóstico sobre la Comprensión Matemática para la Enseñanza de los estudiantes de último curso del grado en Matemáticas de la Universidad de La Laguna (Hernández, 2016), en términos de la Competencia Matemática y Actividad Matemática (lo que se analizó fue qué elementos de estas perspectivas mostraban estos futuros docentes, cuando resolvían problemas usando GeoGebra siguiendo un protocolo de resolución). Se marcó como objetivo identificar aspectos de dicha comprensión matemática y para ello, se propuso un problema de variación, diferente para cada uno de los cuatro grupos de estudiantes que participaron. Estos debían resolverlo siguiendo un Protocolo de Resolución dado y que promovía el uso del GeoGebra siguiendo tres aproximaciones: dinámica, numérica y algebraica. Para alcanzar el objetivo de la primera etapa se hizo un análisis previo de los problemas que condujo a una relación de descriptores de la comprensión matemática que se pudieron identificar en las resoluciones presentadas por los grupos de estudiantes. El Protocolo de Resolución que estructuraba las tareas marcadas, fue útil para motivar la búsqueda de soluciones por distintas aproximaciones y sirvió de recurso para el control de la resolución del problema (Hernández, Perdomo-Díaz, & Camacho-Machín, 2019 a). Aunque, también puede haber condicionado las posibles respuestas de los estudiantes al dirigir sus razonamientos.

A partir de la investigación previa, se diseñó la investigación que se presenta en esta memoria, en la cual se trabajó, también, con estudiantes de la asignatura Matemáticas para la Enseñanza, pero en otro año académico. Esta vez, el interés se dirigió a prestar mayor atención a cómo se enfrentaban inicialmente a la resolución de problemas cuando usaban tecnología, en vez de a profundizar y orientar las múltiples aproximaciones que podían llevar acabo para resolverlo. Además, se observó de qué forma los estudiantes pueden situarse en el rol de un profesor de secundaria y de alguna manera anticiparse a los eventos o acontecimientos que podrían surgir durante una clase de matemáticas en la que se use el GeoGebra para la resolución de problemas. Nos planteamos las siguientes preguntas de investigación, que se abordarán siguiendo los objetivos propuestos a continuación:

¿De qué manera el uso de GeoGebra influye en la forma de resolver problemas que tienen los futuros profesores? ¿Cómo podrían reconocer, esos futuros profesores, en esta forma de resolución una oportunidad de anticiparse a su futura práctica docente en Educación Secundaria?

Se presentan a continuación los tres objetivos que han dirigido la investigación realizada para esta tesis doctoral.

Objetivo 1

Como se ha puesto en evidencia en los aspectos anteriores el uso de GeoGebra en la resolución de problemas convierte esta tarea una actividad rica en discusiones matemáticas. Nos interesará determinar con más detalle cómo esta tarea hace surgir la Actividad Matemática. ¿Qué acciones relacionadas con las componentes de la Actividad Matemática surgen en la resolución de problemas con GeoGebra? ¿Cuáles de estas acciones aparecen en los distintos episodios que configuran el proceso de resolución de problemas?

Atendiendo a estas preguntas se plantea el siguiente objetivo:

Analizar los aspectos más relevantes de las componentes de la Actividad Matemática— percepción, razonamiento y creación matemática— que surgen a la hora de usar GeoGebra en la resolución de problemas.

Objetivo 2

Si nos fijamos en cómo abordan la resolución de problemas con tecnología los futuros profesores que cursan la materia Matemáticas para la Enseñanza, ¿se podrán establecer diferencias en la forma de desarrollar sus resoluciones? ¿Quedan determinadas estas diferencias por su capacidad para usar GeoGebra? ¿Serán consecuencia de su *percepción*, *razonamiento* o *creación matemática*?

Atendiendo a estas preguntas se plantea el siguiente objetivo:

Establecer tipologías en el comportamiento de los participantes cuando usan GeoGebra en la resolución de problemas.

Objetivo 3

Si a los participantes se les pide situarse en el rol de un profesor de Educación Secundaria para realizar un ejercicio de reflexión sobre lo que constituye la práctica docente. ¿Cómo conectan su propia resolución con la actividad de resolver problemas con tecnología en la Educación Secundaria? ¿Qué propuestas hacen para anticiparse a posibles situaciones que podrían requerir su intervención en el aula?

Atendiendo a estas preguntas se plantea el siguiente objetivo:

Analizar las reflexiones que los participantes, en el rol de futuros profesores, hacen sobre su propia experiencia al usar GeoGebra en la resolución de problemas.

Capítulo II. MARCO CONCEPTUAL

En este capítulo se presentan los principales conceptos que dan soporte a la investigación, dotándola así de conceptos teóricos clave, tales como, la comprensión matemática del profesor, motivando preguntas como cuál es papel de la tecnología en la Educación Secundaria y proveyéndola de un marco de referencia para analizar e interpretar los resultados. Para organizar el capítulo se introduce en primer lugar la noción de Comprensión Matemática para la Enseñanza como lo que debe saber y saber hacer un profesor de matemáticas en Educación Secundaria. A continuación, se distinguen dos apartados, Actividad Matemática y Contexto Matemático de la Enseñanza, en cada uno de los cuales se describen las componentes y aspectos de esta comprensión. En todo este capítulo se entrelaza cómo el uso de GeoGebra contribuye en algunos de los aspectos que se describen.

El concepto de Comprensión Matemática para la Enseñanza en Educación Secundaria que se considera en esta investigación se establece en *Mathematical Understanding for Secondary Teaching: A Framework and Classroom-Based Situations* (Heid, Wilson, & Blume, 2015). Los autores aprecian y consideran la comprensión matemática desde tres perspectivas, Competencia Matemática[3], Actividad Matemática y Contexto Matemático de la Enseñanza (Figura 3). Una descripción sintética de estas perspectivas, sería: “saber” matemáticas, “saber hacer” matemáticas y capacidad de “ajustar” este saber hacer a los estudiantes de secundaria. Kilpatrick et al. (2015) consideran que estas tres perspectivas se entrelazan debido a que la Actividad y el Contexto emergen de la Competencia Matemática del Profesor, la Actividad Matemática pone en acción esta competencia y el Contexto adapta estas acciones a los estudiantes. Estas perspectivas nacen a partir del análisis y la reflexión en torno a la práctica de profesores de matemáticas en la Educación Secundaria. Este nivel educativo el de la Educación Secundaria tiene la peculiaridad de conectar las matemáticas de primaria, que ya conocen los estudiantes, con las de universidad, que verán en un futuro. Se contempla una mayor formalización de los procedimientos y una comprensión conceptual más profunda (Kilpatrick, 2015). Por tanto, el profesorado debe tener una cualificación que recoja los

[3] Para esta investigación se ha traducido Mathematical Proficiency como Competencia Matemática, entendiendo este término de la misma manera que Kilpatrick (Background for the Mathematical Understanding Framework, 2015)

conocimientos matemáticos y la forma de usarlos para poder asesorar y formar a los estudiantes. Esta Comprensión de las Matemáticas para la Enseñanza tiene un carácter "dinámico", ya que se conforma desde la comprensión que tendría un profesor como estudiante, para desarrollarse y transformarse durante su formación y todo su ejercicio profesional (Kilpatrick, 2015).

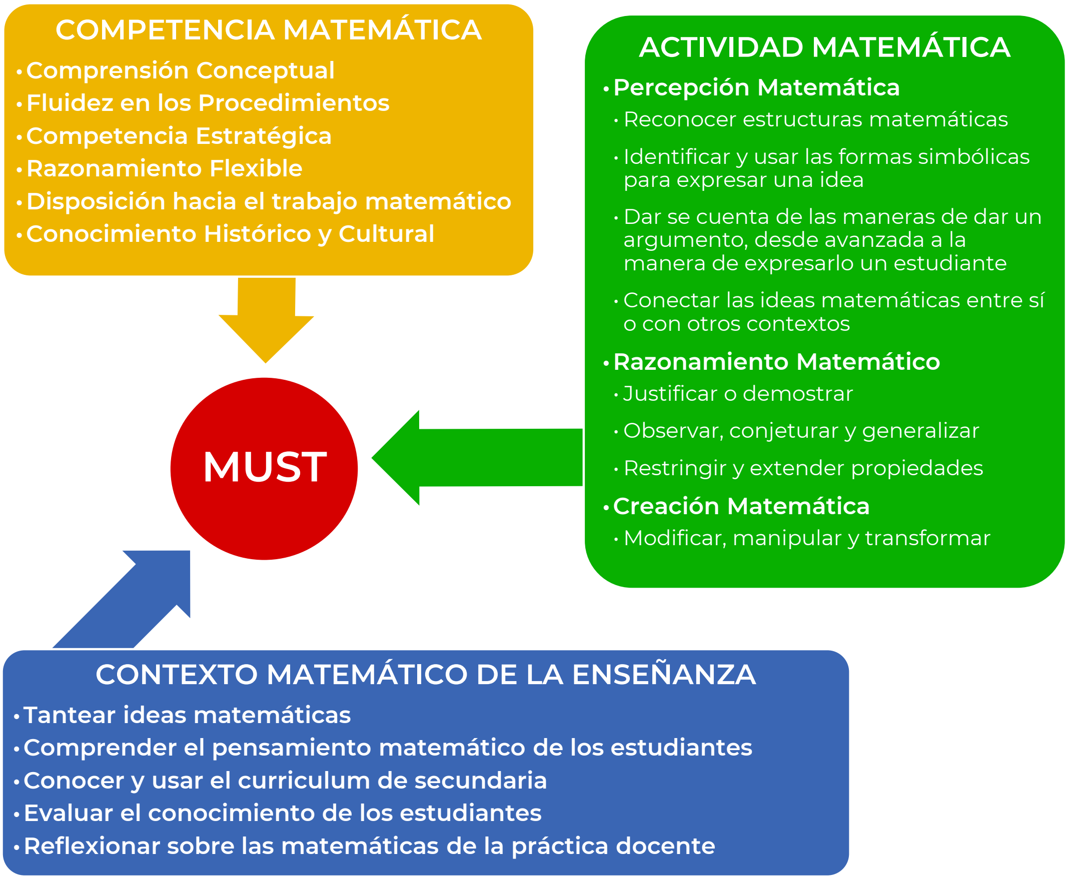


Figura 3. Diagrama del modelo MUST: Perspectivas, Componentes y Aspectos.

Heid, Wilson y Blume (2015) analizaron la comprensión a partir de una serie de eventos o acontecimientos, que podrían definirse como cuestiones matemáticas, dudas o asuntos que requieren una respuesta por parte del profesor. Estos eventos transcurrieron durante la práctica docente, entendiéndola como las sesiones de clase, la preparación de estas o las reflexiones sobre ellas. Estos eventos son el punto de partida del análisis, donde los autores tratan de dar respuestas a cuestiones sobre la formación de profesores de matemáticas: ¿Qué deben conocer los futuros profesores?, ¿qué conocimientos matemáticos deben poseer? o ¿cómo formarlos para que en el futuro puedan enseñar matemáticas en la escuela? Las respuestas y su análisis dan forma al MUST. A partir de esos eventos (o acontecimientos) los autores diseñan un conjunto de actividades formativas que denominan Situaciones.

La Competencia Matemática es una de las perspectivas del MUST y fija su atención en lo que podría denominarse "saber" matemáticas. Una peculiaridad de la competencia matemática del profesor es que debe abarcar bastante más que la de los estudiantes o la de otros profesionales, la competencia de los estudiantes estará sustentada e influenciada en gran medida por la del profesor (Kilpatrick, et al., 2015). Además, la competencia matemática debe cubrir un espectro amplió que permiten acompañar el desarrollo matemático de los estudiantes que parten de una competencia desarrollada en la Educación Primaria, así como, deben terminar con capacidades matemáticas pre-universitarias. Para analizar con más detalle la competencia matemática se puede descomponer en capacidades, habilidades, motivaciones o actitudes hacia las matemáticas. Kilpatrick (2015) describe las siguientes componentes (*strands*):

- **Comprensión conceptual**: Capacidad de comprender los conceptos matemáticos que se recuerdan, es decir, entender el razonamiento que lleva a ese concepto y ser capaz de seguirlo.
- **Fluidez en los procedimientos**: Agilidad para elegir y aplicar conocimientos de matemáticas o ejecutar algoritmos de resolución adecuados.
- **Competencia estratégica**: Capacidad para elegir la estrategia adecuada para resolver un problema y saber llevarla a término. Esta competencia lleva implícita parte de la comprensión conceptual y la fluidez en los procedimientos, además para algunos problemas debe complementarse con creatividad y flexibilidad de pensamiento.

- **Razonamiento flexible**: Capacidad de adaptar su propio razonamiento a un nuevo entorno en el que haya cambios matemáticos sustanciales, que requieran ampliar una definición, adaptar un algoritmo, trabajar sobre otras estructuras matemáticas o en varias simultáneamente.
- **Disposición hacia el trabajo matemático**: Motivación por extrapolar las matemáticas a cualquier campo, buscando en su entorno y en otras áreas, la presencia de las matemáticas y su utilidad.
- **Conocimiento histórico y cultural**: Conocimiento de la presencia de la ciencia en nuestra cultura a lo largo de la historia, así como la historia de la ciencia y en qué medida las distintas culturas han aportado su conocimiento a las matemáticas.

Desde el punto de vista de Camacho-Machín y Santos-Trigo (2015), esta perspectiva coincide en parte con lo que ellos llaman conocimiento matemático para la enseñanza y la investigación en Educación Matemática, concretamente, en lo relacionado con el dominio del contenido que se enseña y la capacidad para establecer conexiones entre los conceptos que se deben enseñar y otros contenidos matemáticos. Señalando que el desarrollo de la comprensión conceptual y la fluidez procedimental son dos puntos esenciales para un "aprendizaje matemático asociado al cuestionamiento y la resolución de problemas" (p. 119).

En esta investigación, analizaremos los conceptos y procesos matemáticos que siguen futuros profesores cuando resuelven los problemas con ayuda del GeoGebra. Es preciso hacerlo, ya que el trabajo matemático del profesor está unido a su Competencia Matemática. Además, el uso de las tecnologías es necesario incluirlo como parte del conocimiento del profesor, al respecto Camacho-Machín y Santos-Trigo dicen que:

> *[C]abe señalar la relevancia de que el profesorado de matemáticas aprenda a utilizar y en efecto utilice la tecnología para generar más y mejores oportunidades de aprendizaje del alumnado. A raíz de nuestro trabajo entendemos, pues, que un componente esencial en el desarrollo del pensamiento matemático se vincula con el uso de diversas herramientas digitales en las actividades de aprendizaje y resolución de problemas. (Camacho-Machín & Santos-Trigo, 2015, p. 121)*

Por tanto, nos interesa centrarnos en cómo un futuro profesor pone en uso su "saber hacer" matemático y tecnológico para "ajustarlo" a la enseñanza. En términos del MUST, nos interesa el desarrollo de la Actividad Matemática y el Contexto Matemático de la Enseñanza de futuros profesores en un entorno que incluya la tecnología.

Para complementar y tratar de ampliar este marco, que parte de eventos y situaciones relacionadas con la práctica docente, se considera en esta investigación que, el uso de SGD (Sistemas de Geometría Dinámica) en la resolución de problemas, promueve oportunidades para la aparición de preguntas, conjeturas y conexiones entre las matemáticas (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2009). Un profesor debe poseer soltura y experiencia para aprovechar estas oportunidades que brinda la tecnología (Camacho-Machín & Santos-Trigo, 2015), de la misma forma que debe poseer cierta habilidad y pericia para abordar las preguntas, dudas e interpretaciones matemática que ocurren a diario en las aulas (Conner, Wilson, & Kim, 2011). Pretendemos evidenciar que la reflexión y discusión, por parte de futuros profesores, dirigidas a analizar estas oportunidades podría tener un efecto en la práctica docente, ya que aportaría una serie de aspectos de la Comprensión Matemática con los que podrían anticiparse a situaciones propias de un contexto de enseñanza tecnológico.

Esta investigación se centra en observar cómo el uso de la tecnología influye en la Actividad Matemática y el Contexto Matemático de la Enseñanza, ya que incorpora una manera diferente de dar respuesta a eventos o acontecimientos que surgen en el aula y produce otros diferentes. A continuación, se amplían ambas perspectivas y se señala las interacciones que aparecen con el uso de la tecnología.

II.1. ACTIVIDAD MATEMÁTICA

La Actividad Matemática describe las acciones matemáticas específicas que un profesor realiza o promueve durante la práctica docente. Puede entenderse también como una serie de actividades que componen el "saber hacer" matemático y que el profesor, siendo consciente de ellas, utiliza para involucrar a los estudiantes en el estudio de las Matemáticas (Carrillo, 2015). Las acciones que identifican Heid, Wilsom y Blume (2015) dentro de esta perspectiva quedan agrupadas en tres componentes: Percepción Matemática, Razonamiento Matemático y Creación Matemática.

La Actividad Matemática tiene un carácter universal en la disciplina, permitiendo conectar las matemáticas de diferentes niveles educativos (Wasserman, Zazkis, Baldinger, Marmur, & Murray, 2019), siendo importante el punto del que se parte para buscar la conexión. Cuando se comienza desde las experiencias de profesores de Matemáticas de la Educación Secundaria, para luego identificar qué acciones Matemáticas se corresponden en las actividades de formación, se abordan de manera implícita los ejemplos relevantes para la enseñanza (Zbiek & Heid, 2018). Las autoras apuestan por una práctica docente en la que se explicite la Actividad Matemática, de modo que se puedan extender las matemáticas más allá del contenido de la materia considerado en términos de procedimientos y conceptos.

A continuación, se caracterizan y ejemplifican las tres componentes de la Actividad Matemática mencionadas. Por cada componente se aborda cómo el uso de GeoGebra puede estimular los aspectos que la conforman. Para ello, se utilizan distintos ejemplos de actividades. Hay que tener en cuenta, también, que el contenido que se trata en una actividad implementada puede hacer destacar a algunas componentes de la Actividad Matemática en detrimento de otras (Zbiek & Heid, 2018). La primera componente considerada es la percepción matemática.

> **Percepción Matemática**: Reúne las acciones de reconocer e identificar las características matemáticas particulares de las distintas estructuras, las distintas notaciones o formas simbólicas, además de la capacidad para percatarse de cuándo un argumento matemático expresado de forma simple o rigurosa es válido, y de la habilidad de conectar las ideas matemáticas entre sí (representar ideas en distintas estructuras y conectando distintos conceptos) y con el mundo real (explicar problemas del entorno desde las matemáticas).

Un ejemplo para mostrar a qué nos referimos cuando se habla de este componente se describe en la situación sobre el eje de simetría de una parábola propuesta por Rhodes et al. (2015): “Un futuro profesor que prepara una lección quiere saber de dónde proviene la expresión $x = -\frac{b}{2a}$ para el eje de simetría de la parábola $y = ax^2 + bx + c$”. Se proponen cuatro Elementos Matemáticos asociados a este evento que van desde, conocer la forma general de la función hasta las fórmulas de Viète. Zbiek y Heid (2018) señalan que una componente que queda en evidencia al trabajar esta actividad es la percepción matemática. Especialmente en lo relacionado con la habilidad de analizar y reconocer cadenas de símbolos. Además, reconocen que esta habilidad es común a distintos contenidos relacionados con el álgebra y que conecta el álgebra impartida en Educación Secundaria con la que estudian los futuros profesores en la universidad. Aunque los contenidos de un curso universitario de álgebra no corresponderían, dicha habilidad adquirida durante el curso es, de alguna manera, la misma que la necesaria para realizar actividades de álgebra en Educación Secundaria.

En Hernández (2016), se señalaron varios descriptores de acciones relacionadas con la percepción matemática que se podían identificar cuando se usaba el GeoGebra para resolver problemas de variación (hallar el área máxima o mínima de una familia de figuras). Estas acciones fueron: i) discriminar los elementos importantes de una construcción dinámica que permitan su cuantificación para analizar el problema, ii) identificar las distintas características matemáticas de las vistas gráfica, algebraica y de hoja de cálculo de GeoGebra y iii) conectar las ideas matemáticas entre sí, concretamente la de lugar geométrico de un punto al mover la figura con la de función área con restricciones de domino. Estas acciones están relacionadas con utilidades del GeoGebra que se hacen presentes en una construcción dinámica. En este caso serían la posibilidad de cuantificar parámetros, el uso de diferentes sistemas de representación y la generación de lugares geométricos junto al acercamiento funcional. Reyes-Martínez (2016) considera estos aspectos necesarios para la apropiación de un SGD.

En relación con la segunda componente, razonamiento matemático, se tiene:

> **Razonamiento Matemático**: Agrupa las actividades de observar, conjeturar y justificar o demostrar haciendo uso de lógica deductiva, propiedades matemáticas, regularidades y patrones, generalizaciones de casos particulares, restricciones de propiedades y extensiones a otras estructuras.

Hernández, Perdomo-Díaz y Camacho-Machín (2019 a) señalan que en el uso de GeoGebra en la resolución de problemas es importante la acción de observar el movimiento en una construcción dinámica para realizar conjeturas de propiedades matemáticas. Las acciones relacionadas con el *razonamiento matemático* son más frecuentes que las del resto de componentes. Esto quiere decir que no sólo el contenido que se trata en una actividad hace destacar algunas componentes frente a otras (Zbiek & Heid, 2018), sino que el tipo de actividad y el tipo de recurso (en este caso, el dinamismo que permite el SGD) también pueden influir.

Para ejemplificar de cómo el uso de las tecnologías en la resolución de problemas influye en las acciones en las que debe ser hábil el profesor (y los estudiantes), Contreras (2014) estudia cómo el conocimiento matemático, en interacción con el uso de tecnologías digitales, facilita que los profesores refinen conjeturas cuando resuelven el problema de elegir un lugar para un aeropuerto (similar al Problema Conectar Islas, Capítulo III.2.2). Esta acción de refinamiento, se da en un proceso de lo experimental a lo formal y del descubrimiento de propiedades que es imposible lograr usando lápiz y papel, ya que es necesaria la visualización del movimiento y cuantificación de los atributos que ofrece el GeoGebra. En su análisis, Contreras revela que los SGD facilitan el establecimiento de conjeturas rigurosas que contemplen todos los casos. A partir de ella, los profesores son capaces de realizar una demostración formal. Las acciones que se identifican con el razonamiento matemático y aparecen de forma recurrente en esta actividad son: observar, formular conjeturas y justificar con distintos grados de formalización.

Acosta, Mejía y Rodríguez (2011) realizaron una investigación sobre la formalización de dos conjeturas que surgieron de la observación de una construcción dinámica del SGD *Cabri*. Señalaron que es posible que los estudiantes de Educación Secundaria sólo deban formular la conjetura en algunos casos, en los que resulta demasiado difícil abordar su formalización por falta de conocimientos teóricos. Aunque sí ven posible que el profesorado se sumerja en la justificación matemática para tener una idea más clara de las ventajas de los SGD.

Un aspecto del razonamiento matemático propio de un profesor de secundaria que debe tenerse en cuenta, es el de la atención que debe prestar a los distintos argumentos que podrían expresar sus estudiantes. Cuando se usa GeoGebra, esta característica sigue presente, como muestran Iranzo y Fortuny (2009). Quienes comprueban, con un grupo de estudiantes de Educación Secundaria, que GeoGebra facilita a la mayoría de ellos un soporte visual, algebraico y conceptual. Los estudiantes resuelven problemas con ayuda del movimiento y la cuantificación de atributos. Sin embargo, los autores también observan que los obstáculos cognitivos previos quedan patentes en el uso del GeoGebra y en los argumentos que suministran. También observaron que se podría describir el grado de adquisición de la habilidad de los estudiantes en un contexto de resolución de problemas con GeoGebra. Para ello, señalan como fundamental el uso que hacen del arrastre (draging) para comprobar si la figura conserva las condiciones matemáticas, combinado con el conocimiento de las propiedades geométricas y las herramientas necesarias para la construcción.

En Hernández (2016), se señalaron varios descriptores de acciones relacionadas con el razonamiento matemático. Estas acciones fueron: i) formular conjeturas válidas sobre la solución, basándose en las observaciones realizadas sobre la construcción dinámica, ii) restringir un argumento matemático como el dominio de una función para hacer coincidir su gráfica con un lugar geométrico, iii) justificar conjeturas realizadas al observar el movimiento controlado en la vista gráfica haciendo uso formal de la lógica, iv) justificar conjeturas realizadas al observar la cuantificación de atributos haciendo uso formal de la lógica. Estas acciones están relacionadas con las diferentes ventajas de GeoGebra que se hacen presentes en una construcción dinámica y con los aspectos necesarios para la apropiación de GeoGebra. En este caso son la cuantificación de atributos, el movimiento de elementos (arrastre) y el movimiento controlado. La habilidad al usar estas ventajas en GeoGebra influye en el enunciado de argumentos matemáticos.

La tercera componente se denomina creación matemática:

> **Creación Matemática**: Implica la capacidad de encontrar nuevos caminos para expresar objetos matemáticos, generar nuevos y transformar su representación. Se relaciona con elegir representaciones de objetos que resaltan su estructura, sus restricciones o sus propiedades, cuando se definen objetos nuevos y cuando se manipulan cambiando su forma, pero no su representación.

Kilpatrick et al. (2015, pág. 23) señalan dentro de esta componente, como aspectos propios de los profesores, la capacidad de construir representaciones que hagan resaltar características claves de un objeto matemático. Esta capacidad se manifiesta al elegir una representación (o crear una nueva) que muestre los aspectos cruciales que se necesitan para realizar una tarea determinada. En ocasiones estas representaciones se pueden dirigir a resaltar propiedades menos comunes, en busca de presentar un contraejemplo en una discusión matemática. Atendiendo a esta concepción del MUST sobre la creación matemática, se puede interpretar que el hecho de hacer una construcción dinámica que responda a un problema, es en sí misma una forma de poner en evidencia esta componente (Hernández, 2016). Jacinto y Carreira (2017) también se fijan en la habilidad que conlleva la realización de una construcción dinámica para la resolución de un problema. Estos autores la consideran como un signo de fluidez tecno-matemática, es decir, la capacidad de combinar dos tipos de conocimientos y habilidades, matemáticas y tecnológicas que se van entrelazando constantemente para desarrollar nuevas formas de conocimiento y comprensión.

La manipulación (transformación) de las representaciones de los objetos matemáticos incluye, por supuesto, la manipulación simbólica que sin duda es una de la más utilizadas en Matemáticas. Igualmente relevante es la transformación de gráficos para crear nuevos puntos de vista de una representación, lo cual resulta ser fundamental para la resolución de problemas (Kilpatrick, et al., 2015). GeoGebra expande las oportunidades que prestan las transformaciones gráficas a la hora de resolver problemas, en parte, porque la relación con el usuario es interactiva. Granberg y Olsson (2015) mostraron cómo GeoGebra favorece lo que llaman razonamiento creativo de los estudiantes para resolver problemas y lo relacionan con la acción de interpretar las respuestas de GeoGebra. Califican al GeoGebra como un compañero interactivo. A diferencia de un libro de texto que ofrece la solución, o de un profesor que marca los pasos a seguir, GeoGebra sólo visualiza las ideas que van representando y da respuesta a las acciones que ellos realizan. Esta retroalimentación que ofrecen los SGD, motiva la manipulación de la construcción, apoyada por estrategias que pueden concluir en diferentes soluciones del problema (Reyes-Martínez, 2016).

En Hernández (2016) se señalaron varios descriptores de acciones relacionadas con la Creación Matemática. Estas acciones son: i) realizar una construcción dinámica de una familia de figuras dejando fijas sus propiedades tal que al mover un punto se visualizan las figuras de la familia, ii) elegir las dimensiones de una familia de figuras para realizar una tabla de registro automático donde se puede identificar cada uno de sus miembros, iii) representar el área de una familia de figuras como una función analítica. En conclusión, la realización de una construcción dinámica y su manipulación genera un objeto matemático, o una serie de ellos, que puede ser útil para el profesor que necesita elegir una representación u otra para resaltar aspectos de dicho objeto, o diseñar una actividad en la que los estudiantes puedan interpretar y profundizar sobre la comprensión de conceptos a través de la resolución de problemas.

Resumiendo, la Actividad Matemática puede ser desarrollada con ayuda de GeoGebra. Este SGD tiene una serie de características ventajosas, entre las que se encuentran las referidas como arrastre o movimiento, cuantificación de atributos y movimiento controlado, que permiten realizar construcciones dinámicas. Estas construcciones son configuraciones de elementos matemáticos que se representan en distintas vistas, es decir, en distintos registros de representación (Duval, 1993), de forma simultánea. Además, en ellas se conservan las relaciones matemáticas entre los elementos que las conforman, aunque se mueva alguno de ellos. Este escenario permite poner en práctica acciones tales como:

- Reconocer las distintas formas de realizar un argumento
- Conectar distintas ideas o representaciones matemáticas
- Observar el movimiento para formular conjeturas
- Justificar propiedades observadas con diferente formalidad
- Crear representaciones de objetos matemáticos que resalten alguna de sus características
- Manipular las representaciones para resolver problemas

Estas acciones son algunas de las que dan forma a la Percepción Matemática, el Razonamiento matemático y la Creación Matemática, componentes de la Comprensión Matemática para la Enseñanza, desde la perspectiva de la Actividad Matemática. A su vez, las investigaciones que se han descrito muestran cómo, un buen aprovechamiento de GeoGebra en la resolución de problemas pasa por la apropiación de la herramienta (SGD) para que sea considerado un instrumento (Guin, Ruthven, & Trouche, 2006). Tiene sentido entonces abordar el desarrollo de la Actividad Matemática conjuntamente con el uso de la tecnología en la resolución de problemas. El uso de la tecnología es una forma de transformar problemas rutinarios en un conjunto de actividades que generan oportunidades para la enseñanza de las matemáticas (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2009). La resolución de problemas con GeoGebra es un escenario idóneo para que los profesores provoquen la reflexión matemática de sus estudiantes, a partir de la realización de construcciones dinámicas y la extensión de un problema concreto al estudio de una familia de casos (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013). Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013) contemplan cinco episodios para describir el proceso de resolución de problemas con tecnología y en Gómez-Arciga y Poveda-Fernández (2017) plantean, de forma sintetizada acompañados de preguntas, tales episodios. Se describen a continuación tales episodios:

1. Comprensión: El uso de la tecnología se enfoca en la construcción de un modelo dinámico como un medio para plantear y explorar preguntas que lleven a los estudiantes a comprender y dar sentido al problema.
2. Exploración: Haciendo uso de las posibilidades del GeoGebra (movimiento controlado, cuantificación de atributos, representación funcional, lugares geométricos,...) se promueve la observacción de regularidades, de atributos invariantes que deriven en propiedades y formulación de conjeturas.
3. Búsqueda de múltiples aproximaciones: Las conjeturas y las soluciones empíricas deducidas al explorar el problema, proporcionan una serie de propiedades que lleva a realizar y llevar a cabo distintos planes para dar con la solución. Es necesario promocionar entre los estudiantes la importancia de que piensen y resuelvan el problema de diferentes maneras. En cada forma de solucionar el problema se deben utilizar diferentes conceptos, representaciones o recursos matemáticos. De este modo se busca que los estudiantes conecten las distintas ideas matemáticas que conocen y han utilizado.
4. Conexiones y extensiones: La construcción dinámica es un recurso sobre el que se puede interactuar, ¿qué condiciones pueden relajarse? ¿la variación de que elementos puede llevar a un resultado más general? Son cuestiones que se deben intentar responder en busca de extender el problema, al mismo tiempo que se amplían las matemáticas que lo envuelven.
5. Visón retrospectiva y reflexiones: Discutir sobre los resultados obtenidos es una tarea que el profesor debe realizar e invitar a los estudiantes a practicar. ¿Qué acciones de las utilizadas fueron las trascendentales para la actividad?¿Cuáles fueron necesarias o más efectivas? ¿Qué preguntas se plantearon antes, durante y después de resolver el problema?

De esta forma, al utilizar la tecnología de forma sistemática, la resolución de un problema se convierte en una actividad que potencia enormemente la discusión matemática. Siguiendo estos episodios de resolución de problemas usando tecnología, aparecen acciones relacionadas con las componentes de la Actividad Matemática. El análisis de las soluciones de los problemas que realicen los participantes, permitirán abordar el primer objetivo de la investigación, es decir, determinar qué acciones relacionadas con la *percepción*, el *razonamiento* y la *creación matemática* son las más frecuentes y relevantes en cada uno de los episodios de la resolución de problemas con GeoGebra.

Además, atendiendo al desarrollo que presenten los participantes respecto a su Actividad Matemática, cuando usan GeoGebra para resolver problemas, se podrán analizar las diferencias entre ellos. Alcanzando, así, el segundo objetivo de la investigación, esto es, establecer tipologías en sus comportamientos.

II.2. CONTEXTO MATEMÁTICO DE LA ENSEÑANZA

La perspectiva Contexto Matemático de la Enseñanza incluye aspectos de la comprensión matemática que entran en juego de forma exclusiva en la profesión docente, tal como entender el pensamiento matemático de los estudiantes, reconociendo la naturaleza matemática de sus dudas y errores o el reconocimiento de cuándo un argumento o una solución proporcionada por un alumno está incompleta o satisface las condiciones de un problema (Kilpatrick, et al., 2015). La manera en que el profesor actúa para ajustar las matemáticas al contexto de los estudiantes dentro de esta perspectiva, se agrupa en las siguientes cinco componentes:

- **Sintetizar ideas matemáticas**: Capacidad de separar ideas matemáticas complejas en partes más simples, para expresarlas como pequeños resultados de las matemáticas que puedan ser usados por los estudiantes. Estas ideas simples configurarán de nuevo la idea compleja cuando aumente la madurez matemática de los estudiantes.
- **Interactuar y comprender el pensamiento matemático de los estudiantes**: Ser capaz de comprender qué entienden los estudiantes al interactuar con ellos, especialmente en debates que surjan en el aula, sobre un concepto matemático. Esto requiere comprender el relato coloquial que emplean los estudiantes y conectarlo con la terminología matemática.
- **Conocer y usar el currículo**: Capacidad para reconocer en el currículo los conceptos fundamentales en los que se apoyan las matemáticas que tendrán que aprender en el futuro. Además, de la capacidad de conocer errores básicos que se presentan con frecuencia y que pueden afectar a la comprensión matemática de los estudiantes.
- **Evaluar el conocimiento matemático de los estudiantes**: Ser capaz de determinar el progreso de los estudiantes durante las clases, estando atento a sus posibles errores, su agilidad con los procedimientos e identificando la comprensión sobre los elementos esenciales de cada concepto matemático. Esta evaluación marca el tipo de tareas y el desarrollo de las sesiones de clase.

- **Reflexionar sobre las matemáticas de la práctica docente**: Es relevante analizar los hechos transcurridos y las acciones tomadas durante la práctica docente, ya que, algunas de ellas dependen de decisiones tomadas rápidamente. Por ejemplo, la reflexión sobre cómo una aclaración en la resolución de un problema reduce su complejidad o cómo el uso de un ejemplo permite introducir un concepto matemático nuevo. Todo ello facilitará la preparación de nuevas sesiones de clase.

Esta perspectiva de la comprensión matemática está ligada al ejercicio de la profesión docente, por lo que al estudiarla desde la formación de profesores, se plantea un inconveniente. Las actividades que surgen en dicho entorno no contemplan, en muchos casos, la interacción con estudiantes de Educación Secundaria. La investigación que se presenta en esta tesis se encuentra enmarcada en el tipo de investigación que incluyen a futuros profesores, pero no a estudiantes de Educación Secundaria. Cabe plantearse entonces si existe, alguna conexión entre este tipo de formación y la enseñanza en Educación Secundaria. Previamente a este informe se han presentado resultados para responder a esta cuestión, en los que se concluye que hay una conexión entre el uso de GeoGebra en la resolución de problemas y el diseño de actividades de formación docente, (Camacho-Machín, Perdomo-Díaz, & Hernández, 2019) proponen oportunidades para reflexionar sobre los contenidos del currículo, las ideas matemáticas explorables con SGD y la conexión entre ambas.

En las actividades de formación de profesores se pueden encontrar correspondencia con la enseñanza en la Educación Secundaria (Wasserman, Zazkis, Baldinger, Marmur, & Murray, 2019)se refieren a estas correspondencias como conexiones de enseñanza en el aula (*Classroom Teaching Conections*), que abarcan conexiones para los que los estudiantes las actividades realizadas en cursos universitarios motivan una particular acción didáctica. Un ejemplo que la muestran en su trabajo se refiere al para ilustrar este tipo de conexión surge además del uso de la tecnología. Usando MAPLE en un curso universitario, interaccionan con uno de los comandos que permite verificar cuándo un número es primo. Al usar este comando obtuvieron la respuesta no esperada de que: al introducir como argumento de entrada operación $\left(\frac{14}{2}\right)$, MAPLE indicó que no era primo. Algo que no hubiera pasado si la entrada hubiera sido un número (7). Esta contingencia se podría aprovechar para interactuar con los estudiantes y discutir sobre la importancia de diferenciar los conjuntos numéricos , conceptualizar la multiplicación con números racionales (Wasserman, Zazkis, Baldinger, Marmur, & Murray, 2019) y distinguir las expresiones racionales. Otro ejemplo donde la tecnología motiva la aparición de una contingencia similar es el presentado en Hernández, Perdomo-Díaz y Camacho-Machín (2019 b). En este caso GeoGebra no presenta ninguna respuesta cuando se trata de usar la herramienta *Tangentes*[4] dando como valores de entrada dos puntos, uno exterior y otro sobre una circunferencia. La interacción propuesta pasa por preguntarse ¿por qué no ocurre nada? ¿Qué propiedades importantes relacionadas con las rectas tangentes a una circunferencia no contempla esta selección? Es decir, la contingencia se podría aprovechar para introducir una discusión en la que se traten las propiedades de las rectas tangentes a las circunferencias y cómo GeoGebra las tiene en cuenta para trazarlas.

Los eventos presentados por Wasserman et al. (2019) y Hernández et al. (2019 b) se pueden convertir en actividades de formación. Serían ejercicios de anticipación para que futuros profesores pudieran asociar componentes de esta perspectiva, en concreto *conocer el currículo* y *reflexionar sobre las matemáticas de la práctica docente*. Anticiparse a posibles eventos o contingencias que podrían surgir en las clases es una manera de desarrollar habilidades relacionadas con el Contexto de la Enseñanza (Carrillo, 2015). En consecuencia, el análisis de contingencias y los ejercicios de anticipación pueden considerarse una conexión entre la formación de futuros profesores de Matemáticas y la enseñanza en Educación Secundaria. En esta investigación consideramos también las contingencias dentro de los posibles eventos que pueden surgir en la práctica docente. En esta investigación, el diseñó una tarea que hizo reflexionar a los participantes sobre el uso de GeoGebra para resolver problemas (descrita en Capítulo III.2.2), cuyo análisis conduce a alcanzar el tercer objetivo propuesto (Capítulo I.2).

En el momento que trascurre el evento, el profesor debe decidir entre ignorarlo, dejar a un lado la cuestión tras prestarle atención o intentar incorporarlo a la clase (Rowland & Zazkis, 2013) como elemento para el debate. La decisión tendrá que ver con la preparación y el repertorio de opciones que posea el profesor. En el momento que surja una situación deberá improvisar una respuesta en clase (*Knowing-to act in the moment*) (Rowland & Zazkis, 2013). Según Conner, Wilsom y Blume (2011), tomar una buena decisión muestra la experiencia

[4] A la herramienta Tangentes se accede con un clic y el trazado presenta diferentes alternativas, en este caso: un punto A y una cónica c para producir todas las tangentes a c que pasan por A

(*expertise*) del profesor:

> *Para tomar buenas decisiones[entre seguir la lección programada o atender la cuestión planteada], los maestros necesitan un tipo particular de experiencia que incluya una profunda comprensión matemática que les permita reconocer la oportunidad de enseñanza, sopesar sus ventajas e inconvenientes para seguirla o rechazarla hábilmente. (p. 879)*

Un ejemplo de actividad en la que se busca que un profesor desarrolle la habilidad para comprender el pensamiento matemático de sus estudiantes y la capacidad de valorar su progreso, estando atento a posibles errores en sus planteamientos, se presenta en Rowland & Zazkis (2013). Los autores analizan opciones a una hipotética respuesta de una estudiante a la que se le solicita dar con una fracción situada entre un medio y tres cuartos. La estudiante responde dos tercios y justifica su respuesta razonando que para el numerador eligió 2 porque está entre 1 y 3, y para el denominador eligió 3 por estar entre 2 y 4, por tanto, dos tercios debe estar entre un medio y tres cuartos. Una de las opciones fue presentada por los autores, para incorporar a la clase la idea de la estudiante ya propone representar, con ayuda de la tecnología, una situación geométrica que pueda resolver las dudas a simple vista. Para ello las fracciones se representarían como pendientes de rectas que pasan por el origen de coordenadas y por un punto de coordenadas (n,d) donde n sería el numerador y d el denominador de cada fracción. Esto es una evidencia de que en otras investigaciones se consideran también opciones relacionadas con la tecnología. Es importe reconocer que un profesor necesita incorporar a sus opciones de respuesta ante un evento o contingencia el uso de la tecnología. Para ello, debe conocer y comprender en profundidad las ventajas de las herramientas y cómo aprovecharlas para dar una respuesta matemática a las dudas de los estudiantes.

Como consecuencia de todos estos planteamientos, se puede decir que la Comprensión Matemática para la Enseñanza, desde la perspectiva del Contexto Matemático de la Enseñanza, se puede desarrollar durante la formación inicial de profesores, ya que existen conexiones entre sus componentes y la enseñanza. Se hace presente en los eventos o acontecimientos de aula relacionados con dar respuesta a las contingencias y en la reflexión para lograr anticiparse a las situaciones de aula donde pudieran surgir. La tecnología interviene de dos formas. Por un lado, como promotora de eventos o contingencias sobre los que merece la pena reflexionar para conectarlos con el currículo de Secundaria y, por otro lado, como posible respuesta a un evento donde la tecnología puede aportar una oportunidad de aprendizaje, aunque no hubiera intervenido en la aparición de este.

Parece plausible, entonces, que un análisis de las reflexiones que realicen los participantes de la investigación, sobre sus propias experiencias a la hora de resolver problemas haciendo uso de GeoGebra, mostrará aspectos de su Comprensión Matemática necesaria para la Enseñanza. Especialmente los relacionados con la perspectiva del Contexto Matemático de la Enseñanza.

Capítulo III. METODOLOGÍA

En este capítulo se hace una descripción del contexto en que se realizó la investigación, los participantes, los problemas propuestos en el taller de Resolución de Problemas con GeoGebra (TRPG) y una tarea contextualizada para la enseñanza. Además, se detalla el proceso de recogida de datos y el método de análisis seguido.

Se trata de un estudio exploratorio, de carácter descriptivo interpretativo, con un enfoque cualitativo.

III.1. CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

El Grado en Matemáticas en la Universidad de La Laguna oferta una asignatura optativa dedicada a la enseñanza de las matemáticas en Educación Secundaria. En el primer cuatrimestre del curso 2017/2018, se llevó a cabo la parte experimental de esta investigación durante el desarrollo de la materia citada y se recogieron datos durante su implementación. Del análisis de esos datos se obtuvieron los resultados que se presentan en esta memoria y constituyen la tesis doctoral.

Descripción de la asignatura

La materia "Matemáticas para la Enseñanza" toma en consideración tres elementos fundamentales: el conocimiento matemático, el aprendizaje de los conceptos matemáticos y la enseñanza de las matemáticas (Camacho-Machín, 2016). La materia aborda el conocimiento matemático tratando de *reflexionar sobre varios aspectos relevantes del conocimiento o saber matemático, resaltando fines, características y distintas concepciones del conocimiento matemático. Además, se intenta situar las Matemáticas en la sociedad actual y en las ciencias como elemento de una cultura básica y común* (pág. 60). En relación con el aprendizaje de los conceptos matemáticos, este se centra en el análisis de los procesos del pensamiento matemático, incluyendo las dificultades, errores y obstáculos que estos conceptos y procesos podrían generar en los estudiantes de Educación Secundaria, así como los *procesos cognitivos implicados en el pensamiento matemático que, aunque no exclusivos* *del pensamiento matemático avanzado, quizás pueden considerarse más presentes en él* (pág. 61). En la materia se trabajan y analizan posibles situaciones de aula que muestran ejemplos de esas dificultades, obstáculos y errores que atienden a los diferentes bloques de contenido de las matemáticas de la Educación Secundaria. Finalmente, relacionado con la enseñanza de las matemáticas, en la materia se destaca la Resolución de Problemas. En este sentido Camacho-Machín expone

> *El estudio de las Matemáticas debe, por tanto, hacer hincapié en la resolución de problemas, de manera que los estudiantes puedan utilizar enfoques de resolución de los mismos para investigar y entender los contenidos matemáticos; reconocer y formular problemas a partir de situaciones matemáticas cercanas; desarrollar y aplicar estrategias para resolver una extensa gama de problemas; verificar e interpretar resultados en relación a los problemas originales; adquirir confianza en el uso significativo de las Matemáticas; generalizar situaciones y estrategias para nuevas situaciones problemáticas; o aplicar el proceso de formulación de modelos matemáticos a situaciones de problemas del mundo real. (Camacho-Machín, 2016, pág. 63)*

Y señala posteriormente

> *Una componente esencial en el desarrollo de la enseñanza es aquella que se vincula con el papel y el uso de diversas herramientas digitales en las actividades de enseñanza y resolución de problemas. Hay diferentes tipos de software relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. (Camacho-Machín, 2016, pág. 64)*

El desarrollo de estos tres elementos, se recogen en la asignatura mediante cuatro tipos de actividades, que se encuentran descritas en detalle y ejemplificadas en Camacho-Machín (2016). A continuación, se presenta un resumen:

i) Actividades de Tipo 1. Las denominadas, por el autor, como "Situaciones de aula"[5] que son

[5] Algunas de estas son Situaciones que están ideadas como actividades para el desarrollo de las componentes del MUST. Una Situación se compone de tres partes: Prompt, Mathematical Foci y Commentary (Wilson & Zbiek, 2015). El Prompt, al que nos referimos en este trabajo como Acontecimiento, que es una simplificación de algo que ocurre en

posibles situaciones en las que estudiantes de Educación Secundaria se plantean dudas principalmente conceptuales que se transforman en actividades de formación para analizar conceptos relevantes (significado de la división por cero, posibilidades de inscripción de cuadriláteros, representaciones de funciones inversas de las funciones trigonométricas…). Estas actividades son adaptaciones de las *Situaciones* propuestas en “Mathematical Understanding for Secondary Teaching: A Framework and Classroom-Based Situations” (Heid, Wilson, & Blume, 2015).

ii) Actividades de Tipo 2. Consisten en la resolución de problemas con lápiz y papel, en las que que se pide explicitar los heurísticos utilizados y las fases de resolución para contextualizarla en el Currículum de Educación Secundaria.

iii) Actividades de Tipo 3. Se centran en el uso de GeoGebra en la resolución de problemas u otras herramientas tecnológicas. Las actividades se trabajan en parejas y, en ellas, hay que explicitar los procedimientos de resolución y realizar su análisis siguiedo una serie de indicaciones que se le facilitan. Se busca que los participantes reflexionen sobre la forma de abordar los problemas haciendo construcciones dinámicas, así como, su implicación para la enseñanza.

iv) Actividades de Tipo 4. Estas consisten en el análisis de secuencias de enseñanza innovadoras. Se le entrega a los participantes una secuencia de enseñanza que podemos considerar como innovadora y se les pide que, después de trabajar en parejas, cumplimenten un protocolo que les permita identificar los elementos básicos del diseño de la actividad. La intención de este análisis es desarrollar la capacidad de diseñar sus propias secuencias de enseñanza.

Realizando estas actividades dentro de la materia se busca alcanzar los siguientes resultados de aprendizaje:

- Desarrollar competencias teóricas, prácticas e instrumentales vinculadas a la actividad de enseñar matemáticas que le capacitan para poder tomar decisiones adecuadas relativas a la enseñanza de las matemáticas en los niveles de Educación Secundaria y de Universidad.

---

el aula que motiva y es el punto de partida de una discusión matemática. Debe incluir la información suficiente para poder comprender el contexto en el que se produjo y poder así conectar las matemáticas con la práctica docente. El Mathematical Foci, al que nos referiremos como Elementos Matemáticos, es un conjunto de posibilidades matemáticas que se suscitan al analizar el evento desde distintas perspectivas. Cada uno de estos Elementos Matemáticos serviría para desarrollar alguna de los aspectos del MUST. El Commentary, o Comentario, es una síntesis general de los diferentes Elementos Matemáticos que explica el criterio seguido para aglutinarlos alrededor de dicho Acontecimiento.

- Conocer, utilizar y elaborar estrategias heurísticas para la resolución de problemas de Matemáticas susceptibles de ser enseñadas en la Educación Secundaria.
- Conocer y utilizar nuevos instrumentos interactivos para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas haciendo uso de TIC.
- Profundizar sobre la naturaleza del pensamiento matemático como elemento de enseñanza y conoce teorías de aprendizaje del conocimiento matemático.

Durante el curso 2017/2018 se diseñó la parte experimental de esta investigación, para la que se entrelazaron actividades del Tipo 1 y Tipo 3. La intervención didáctica diseñada incluyó, como elemento básico y trasversal para el desarrollo de los contenidos de la materia, un Taller de Resolución de Problemas haciendo uso de GeoGebra (se hará referencia a él como TRPG) en el que se intercalaron ambos tipos de actividades y que constituye en sí mismo el contexto experimental de investigación elegido.

Participantes

Para la investigación se seleccionó el grupo de estudiantes que cursaba la asignatura descrita en el apartado anterior durante el curso 2017-2018. De los dieciocho estudiantes matriculados se seleccionaron doce, seis mujeres y seis hombres, con edades comprendidas entre los 21 y los 24 años. Como criterio de selección se determinó que hubieran realizado y entregado, en tiempo y forma, todas las tareas relacionadas con la investigación y el resto de actividades de la asignatura previas a esta.

Pareja 1 **Nicol - Nami**	**Pareja 2** **Bruce - Betty**
Pareja 3 **Sam - Claudio**	Pareja 4 No seleccionada
Pareja 5 **Evan - Sophie**	Pareja 6 No seleccionada
Pareja 7 **Phineas - Isabella**	**Pareja 8** **Sabine - Wolfgang**

Tabla 4: Disposición de las parejas en el aula de informática

La asignatura Matemáticas para la Enseñanza, tal como se ha señalado, es una materia es optativa. Es por ello que, a efectos de la investigación, a los participantes se les considera un cierto interés para formarse como profesores de Educación Secundaria y, por tanto, se hace referencia a ellos como futuros profesores. Además, al ser estudiantes de cuarto del grado en Matemáticas se les reconoce con conocimientos afianzados en análisis, algebra, geometría, estadística y computación. También cabe señalar que en alguna de las asignaturas cursadas han trabajado con GeoGebra, por lo que no es su primera experiencia con el entorno de este SGD.

Los estudiantes trabajaron en pequeños grupos o parejas para la realización de las actividades de Tipo 1. Para las actividades de Tipo 3 se organizaron en parejas que se mantuvieron durante todas las sesiones del TRPG. De modo que los participantes trabajaron siempre con la misma pareja y en el en mismo ordenador (Tabla 4), facilitándose la recogida de datos para la investigación.

III.2. TALLER DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON GEOGEBRA

La asignatura Matemáticas para la Enseñanza tiene asignadas cuatro horas semanales de clase, divididas en dos sesiones de dos horas. Durante la experimentación, realizada entre septiembre y noviembre de 2017, una de esas sesiones semanales se dedicó al TRPG y la otra al análisis de un conjunto de situaciones de aula (actividades de Tipo 1), de las cuáles cinco fueron trabajadas presencialmente por todo el grupo y las otras repartidas en pequeño grupo para que las desarrollaran en casa y posteriormente las presentarán al grupo de clase. En total se dedicaron nueve sesiones al TRPG, a la resolución de problemas haciendo uso de GeoGebra (actividades de Tipo 3) que dieron lugar a lo que hemos denominado TRPG.

Las primeras sesiones se dedicaron exclusivamente a actividades de Tipo 1. Las siguientes semanas se intercalaron las actividades de tipo 1 y 3, para terminar con 2 sesiones dedicadas exclusivamente a sesiones con actividades de tipo 3. Así, las actividades de Tipo 3 (más detalles en la página 63) se distribuyeron de la siguiente forma: dos sesiones para el problema 1 (Cuerdas Iguales), dos sesiones para el problema 2 (Ángulo 45°), una sesión para el problema 3 (Conectar Islas) y tres sesiones para la Tarea de Reflexión donde se realiza una conexión entre tareas de tipo 1 y tipo 3.

La dinámica de las sesiones del TRPG implicaba la interacción del profesor y el resto del equipo con los participantes. Previamente al desarrollo del taller se consensuó un conjunto de formas de proceder durante las sesiones. Se realizó la siguiente lista para guiar su intervención:

- El Rol del profesor debe ser el de guiar y apoyar en la resolución. Planteará el problema a trabajar y cuestionará a los estudiantes, sin resolver el problema.
- Se observarán las construcciones y planteamientos con el objeto de mostrar a todo el grupo los que puedan generar una discusión sobre aspectos de interés de la sesión.
- Las dudas que surjan, a los estudiantes, sobre conceptos, o propiedades que no recuerden exactamente deben intentar resolverlas con su pareja buscando en la red. El profesor puede confirmar si están en lo cierto en el caso de falta de seguridad.
- Hay que dar pie a que todos participen. Habrá personas que colaboren de forma continua y voluntaria, por lo que se deberán administrar sus intervenciones y cuestionar directamente a los más reservados.

Al seguir esta dinámica, en las sesiones del TRPG el tiempo se dedicó, en su mayor parte, a que los participantes trabajaran de forma autónoma con su pareja (Figura 4).

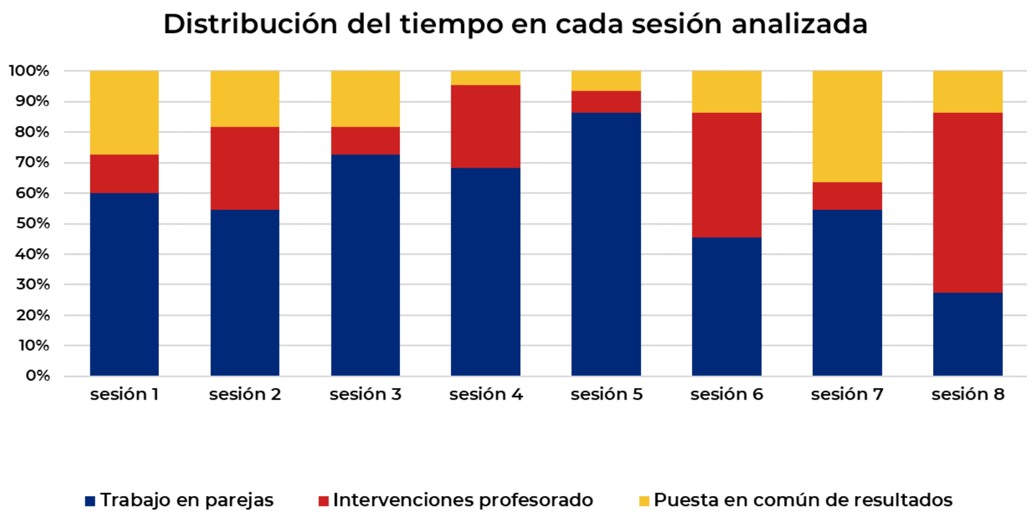


Figura 4: Tiempo empleado en cada sesión a las distintas formas de trabajo en el aula

Se puede considerar que cada pareja afrontaba las tareas de forma independiente, aunque, hubo interacciones entre ellas en alguna ocasión, además de interacciones de la pareja con el profesor cuando necesitaron resolver alguna duda. En cada sesión se reservaba tiempo para que las parejas hicieran puestas en común de los resultados que iban obteniendo, siempre coordinados por el profesor o el equipo de investigación. El profesor coordinaba los tiempos de las intervenciones, elegía a algún participante para que presentara al gran grupo sus observaciones, pedía voluntarios para que resumieran el trabajo de la sesión anterior o les consultaba sus opiniones sobre las tareas que realizaban. La séptima sesión dedicó más tiempo a las puestas en común, para lo cual, cada pareja realizó una intervención.

También hubo intervenciones para el gran grupo por parte del equipo investigador, frecuentemente para introducir las tareas o explicar dudas generales. Las sesiones 6 y 8 fueron aquellas en las que el tiempo de intervención del equipo de investigación fue mayor. La intervención de la sexta sesión consistió en la presentación de una síntesis de las cinco sesiones anteriores y de las otras sesiones de clase semanal en las que habían trabajado situaciones de aula en ella, se sintetizó y se reflexionó sobre el trabajo realizado utilizando los episodios del uso de la tecnología en la resolución de problemas (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013) y se recordaron las partes que configuraban una Situación, según Heid, Wilson y Blume (2015). Se finalizó con la presentación por parte del equipo investigador de una situación de aula, como ejemplo de Situación, derivada de la resolución del problema Ángulo 45° (ver Tabla 6).

Durante la sesión ocho, el profesor de la materia insistió en recordar cuáles eran los principales objetivos del taller: usar la tecnología para resolver problemas de matemáticas y construir una serie de Acontecimientos o eventos que podrían surgir en un aula de secundaria a partir de la resolución de estos problemas. Les invitó a ponerse en el papel de profesores que analizan y construyen Acontecimientos que podrían ocurrir en la clase, con el objetivo fundamental de mirar las matemáticas que hay detrás. Además, presentó tres ejemplos de los acontecimientos que entregaron y que el equipo investigador reformuló con el fin de ayudarlos con la Tarea de Reflexión Docente. En esta sesión también se presentó una resolución completa del problema *Ángulo 45°* (descrita en detalle en Capítulo IV.1.2) siguiendo un camino que no había aflorado durante las sesiones del TRPG.

Al contabilizar el tiempo de las ocho sesiones analizadas (Figura 5), se pudo observar que más de la mitad del tiempo del taller se dedicó al trabajo autónomo de las parejas. De este tiempo el 71% fue para la resolución de problemas y el resto para realizar la Tarea de Reflexión. El resto del tiempo del Taller se utilizó para las intervenciones del profesorado y las puestas en común.

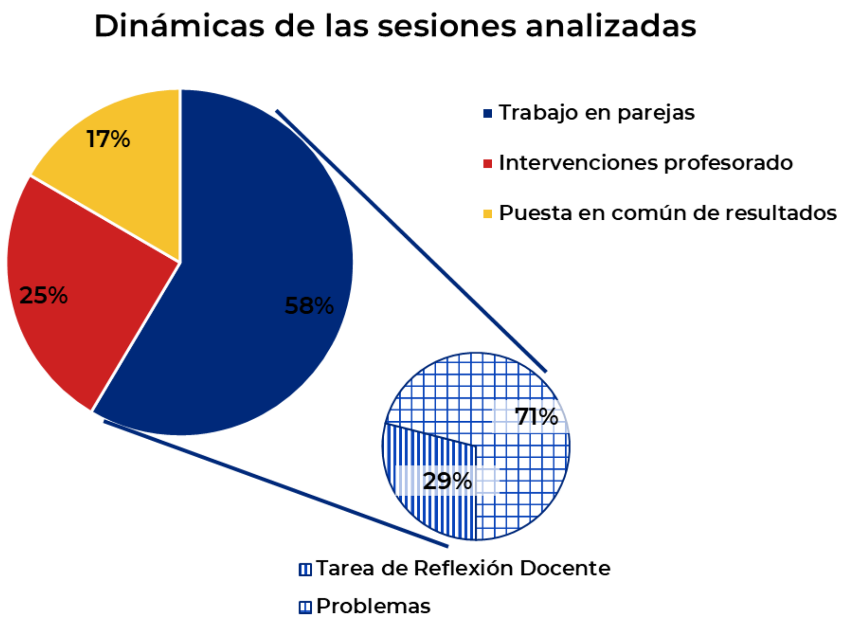


Figura 5: Recuento total del tiempo dedicado a cada forma de trabajo en las ocho sesiones analizadas

III.2.1. Actividades de Tipo 1: Situaciones de aula

La dinámica de desarrollo en el aula de las actividades de Tipo 1 siguió siempre la misma estructura. El profesor, miembro del equipo de investigación, presentaba la actividad cuyo punto de partida era una situación de aula que se acompañaba de una serie de cuestiones relacionadas con los Elementos Matemáticos (Anexo I). Los participantes debatían sobre estas cuestiones, individualmente o en pequeños grupos, teniendo como material de consulta el texto original de Heid, Wilson y Blume (2015) del que había adaptado la actividad. Posteriormente los grupos se turnaban para presentar al resto de la clase cada uno de los elementos matemáticos descritos en él. Durante la presentación surgieron discusiones o dudas, que en ocasiones profesor resolvía en la pizarra. Quién también intervino en ocasiones para ampliar contenidos relacionados o que aparecían sin desarrollar en el texto original.

Tras cinco sesiones dedicadas a trabajar con actividades relacionadas con conceptos de análisis matemático, álgebra, geometría, estadística y probabilidad, el profesor planteó una actividad de cierre (Anexo I). La actividad consistió en analizar, una situación de aula, para desarrollar los elementos matemáticos y plantear algunos nuevos. Los estudiantes formaron siete grupos de dos o tres personas y eligieron una situación de aula de una lista preseleccionada por el profesor. Los grupos, prepararon una presentación que expusieron durante veinte minutos para, a continuación, responder algunas cuestiones durante otros diez minutos.

III.2.2. Actividades de Tipo 3: Problemas y Reflexión Docente

Los principales instrumentos de análisis para esta investigación, fueron cuatro actividades de las que hemos denominado tipo 3. Tres de ellas consistieron en la resolución de otros tantos problemas y la cuarta actividad pretende que los futuros profesores realicen una reflexión como docentes, sobre dichas resoluciones.

Para la selección de los problemas se trabajó con el grupo de investigación Resolución de Problemas y Tecnología Digital, perteneciente al Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN (México). Se resolvieron y discutieron una docena de problemas haciendo uso de la tecnología. De esta forma se constituyó un pequeño banco de problemas con potencialidad para trabajar en la formación de profesores. De este conjunto, el equipo investigador seleccionó tres problemas para el TRPG, que hemos denominado: Cuerdas iguales(Tabla 5), Ángulo 45°(Tabla 6) y Conectar Islas (Tabla 7). Para la selección de los tres problemas, se consideró que se debía restringir el área de conocimiento para acotar el estudio, por ello se eligieron dentro del área de Geometría. Para esta decisión se tuvo en cuenta, además, que se pudieran abordan realizando una construcción con GeoGebra que permitiera dar con una solución empírica, de modo que los participantes pudieran dar con la respuesta a la cuestión que se les planteaba sin necesidad de recurrir a razonamientos de lápiz y papel. Otro factor usado en la selección fue la tipología de cada problema, atendiendo a la propuesta de Santos-Trigo (2019) los problemas deberían pertenecer a distintas categorías. De este modo,

Universidad de La Laguna
Oficina de Sede Electrónica
Entrada
Nº registro: 2021/6406
Nº reg. oficina: OF002/2021/6320
Fecha: 28/01/2021 21:35:45

el problema cuerdas Iguales se corresponde con la categoría “problemas con enunciados que incluyen figuras”, Ángulo 45º se corresponde con una “tarea de investigación” y, finalmente, el problema Conectar Islas se corresponde con una “construcción dinámica simple para plantear problemas”, a la vez que con una “tarea de investigación”.

Estos tres problemas, que iban acompañados de instrucciones para que se realizara una construcción dinámica en GeoGebra, incluían además una serie de recomendaciones para trabajar en parejas y unas cuestiones que se tenían que contestar por escrito para entregar al finalizar la sesión (Anexo II). En el diseño de los problemas y de las instrucciones para guiar el desarrollo de las actividades del taller, se pretendió que haciendo uso de GeoGebra para resolver problemas de matemáticas se generará un escenario rico en discusiones matemáticas. Para ello, se organizaron las sesiones de trabajo diseñadas para registrar en el aula de informática el trabajo de los participantes, durante los tres primeros episodios para la resolución de problemas: comprensión, exploración y búsqueda de múltiples aproximaciones (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013). Hay que tener en cuenta que “El uso de herramientas computacionales se vuelve relevante no solo para representar el problema, sino también para identificar y explorar las propiedades matemáticas integradas en el problema” (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2009, pág. 277).

El trabajo sobre la resolución de problemas se programó para que en cada problema se centrara la atención en uno de los tres primeros episodios de resolución de problemas con tecnología planteado por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013). En el primer problema, se trató de resaltar el episodio de comprensión y mostrar cómo a partir de la construcción dinámica, se pueden explorar propiedades y objetos matemáticos. De esta forma, los participantes ahondaban en la comprensión del problema, al tiempo que realizaban la construcción dinámica. En el segundo y tercer problema se pondría el foco en los episodios de exploración y búsqueda de múltiples aproximaciones a la solución, ¿qué propiedades encontradas son claves a la hora de dar con una solución? ¿Distintas propiedades provocan distintas aproximaciones? Son preguntas que se deberían hacer en estas sesiones.

Los participantes, por parejas, tenían que entregar por escrito las propiedades o conjeturas que observaran, para luego, con ayuda de estas últimas, realizar el plan que les permitiera justificar la propiedad o resolver el problema.

La cuarta actividad motivaba la reflexión como docente de los participantes, que debían analizar sus propias resoluciones para identificar eventos surgidos durante el TRPG. Para ello, se dedicaron algunas sesiones que concluía con la composición de una situación de aula.

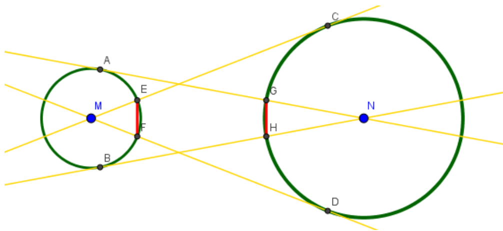
A continuación, se describen con mayor detalle estas cuatro actividades incluyendo algunos elementos que explican, de alguna manera, su elección y su función en la investigación desarrollada.

Cuerdas iguales

A la hora de elegir este problema (Tabla 5) se tuvo en cuenta que en su enunciado apareciera una figura. La actividad de reconstruir una figura a partir de su dibujo, ya es en sí misma una tarea que hace que se generen preguntas (Santos-Trigo, 2019, pág. 72). ¿Cómo representar cada objeto? ¿En qué orden debo construirlos? Son cuestiones que pueden derivar en eventos y que parten del uso de la tecnología. La reconstrucción de la figura usando GeoGebra se convierte, por si sola, en un problema, es decir, en una actividad para la que se ponen en uso los conocimientos matemáticos y los aprendizajes adquiridos, dentro de un contexto matemático geométrico. En este nuevo problema hay que afrontar una situación cuyo objetivo es trasladar los datos y relaciones matemáticas, expuestas de forma taxativa en el enunciado, a un elemento nuevo: una construcción dinámica.

Problema 1

Cuerdas iguales
Se dan dos circunferencias con centros M y N. Desde el centro de cada circunferencia se trazan rectas tangentes a la otra. Los puntos de intersección de las rectas tangentes con las circunferencias definen dos cuerdas EF y GH (ver dibujo). Probar que la longitud de las cuerdas es la misma, EF=GH.



RECOMENDACIONES
Durante la resolución, comenta con tu compañero las ideas que te surjan.
Puede que necesites consultar en internet alguna idea, concepto o definición.
Es importante verbalizar las ideas que tengas en cada momento, sin preocuparte de si son correctas, la grabación no será utilizada para la evaluación de la asignatura, sus fines son investigativos.

ENTREGAR AL FINAL DE LA SESIÓN
Durante la sesión observaran distintas propiedades y relaciones entre elementos.
Realizar un listado de todas ellas, aunque no las hayan demostrado.

Tabla 5: Enunciado del problema 1 e instrucciones que lo acompañaban

Universidad de La Laguna
Oficina de Sede Electrónica
Entrada
Nº registro: 2021/6406
Nº reg. oficina: OF002/2021/6320
Fecha: 28/01/2021 21:35:45

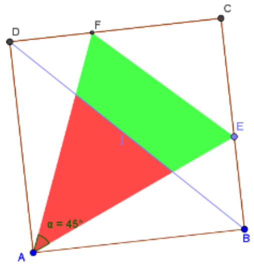
Ángulo 45°

En este problema (Tabla 6), una “tarea de investigación” en la que la posición del ángulo hace variar la situación que se quiere estudiar (Santos-Trigo, 2019). Después de construir el ángulo, apoyándose en un punto que está sobre el lado del cuadrado, se consigue un movimiento ordenado que permite investigar sobre la familia de triángulos resultante y entender cuáles son las relaciones matemáticas que hay entre los polígonos que lo componen.

Al igual que en el problema anterior, la reconstrucción de la figura motivaría cuestiones matemáticas, ¿cómo se puede construir un ángulo para que permanezca constante cuando se mueve la semirrecta? ¿Qué elemento debo construir primero? ¿Qué punto me permite estudiar la familia de polígonos cuando se arrastra? Además, es posible comenzar señalando algunos casos “extremos” o “particulares” como, por ejemplo, el caso en que uno de los lados del ángulo se superpone a un lado del cuadrado. La investigación de estas cuestiones requerirá de la cuantificación de atributos (lados, ángulos, áreas...) y tendrá como objetivo realizar distintas conjeturas matemáticas.

Problema 2

Ángulo 45°
Dado un cuadrado ABCD, se traza un ángulo de 45° interior al cuadrado y con vértice en A. De esta manera las dos semirrectas del ángulo cortan a los lados opuestos a A en dos puntos E y F (ver dibujo). Estudia la relación que existe entre las dos partes en las que queda dividido el triángulo AEF por la diagonal BD.



RECOMENDACIONES
Durante la resolución, comenta con tu compañero las ideas que te surjan.
Puede que necesites consultar en internet alguna idea, concepto o definición.
Es importante verbalizar las ideas que tengas en cada momento, sin preocuparte de si son correctas, la grabación no será utilizada para la evaluación de la asignatura, sus fines son investigativos.

ENTREGAR AL FINAL DE LA SESIÓN
Durante la sesión observaran distintas propiedades y relaciones entre elementos.
Realizar un listado de todas ellas, aunque no las hayan demostrado.

Tabla 6: Enunciado del problema 2 e instrucciones que lo acompañaban

Conectar islas

A diferencia de los otros dos, este problema no incorpora en su enunciado figura alguna para reproducir. Lo que sí que recoge en el enunciado (Tabla 7) son datos de una situación particular (distancias entre las islas). Si se relajan sus restricciones iniciales (no se tienen en cuenta las distancias) la construcción dinámica es fácilmente realizable, al constar de objetos simples (un triángulo y un punto libre en el plano), convirtiéndose en una "configuración dinámica sobre la que se podrían hacer conjeturas y buscar cómo respaldarlas" (Santos-Trigo, 2019). ¿Dónde situar el punto de conexión? ¿Qué propiedades cumple el punto buscado? ¿Estas propiedades se mantienen al mover los vértices? Son algunas cuestiones que podrían guiar la resolución. Por otra parte, si se tienen en cuenta las distancias para conseguir una construcción robusta, es necesario algún procedimiento de construcción de un triángulo dada la longitud de sus lados. Esto conllevaría la posibilidad de dar con una solución empírica. ¿Cómo se puede justificar este resultado? ¿Qué propiedades verifica ese punto de conexión? Serían cuestiones a resolver una vez den con la solución sobre la construcción dinámica.

Problema 3	**Conectar Islas** Se quiere conectar las tres islas con una red de fibra óptica, de tal forma que se utilice la menor cantidad de cable posible. La distancia entre islas es La Gomera-La Palma 79.322m, La Gomera- EL Hierro 64.514m y La Palma-El Hierro 95.932m. ¿En qué lugar se debe ubicar el punto de conexión para minimizar la cantidad de cable necesario? ENTREGAR AL FINAL DE LA SESIÓN Realizar un listado de: • Propiedades que observan, aunque no las hayan demostrado. • Conjeturas que realizas y que al comprobarlas no son ciertas. • Planes de resolución.

Tabla 7: Enunciado del problema 3 e instrucciones que lo acompañaban

Tarea de Reflexión Docente

La finalidad de esta actividad, era fundamentalmente, que los participantes reflexionaran sobre el trabajo realizado durante el desarrollo de las tres actividades anteriores, desde la perspectiva de un profesor de Educación Secundaria que está dispuesto a usar con su alumnado herramientas digitales para la enseñanza de Matemáticas. Era importante utilizar los conceptos y habilidades adquiridos en el transcurso de la resolución de las actividades de Tipo 1. En este caso, la situación de aula sería la resolución de esos tres problemas usando GeoGebra y la tarea o actividad consisten en analizar su propia resolución e identificar eventos o acontecimientos que surgieron durante el TRPG. El orden seguido en el taller fue, primero, señalar los acontecimientos que surgieron motivados por el uso de la tecnología. Segundo, desarrollar diferentes elementos matemáticos derivados de estos acontecimientos y, por último, componer una situación de aula (Tabla 8).

Tarea de Reflexión Docente

Situaciones relacionadas con la tecnología

Escribir Situaciones fruto del uso de la tecnología en la resolución de los problemas Cuerdas iguales, Ángulo 45º y Conectar islas.

En cada situación indicar:

- El acontecimiento
    - Al menos tres acontecimientos por problema
    - Usar el GeoGebra para mostrar cómo surge el acontecimiento
- Distintos elementos matemáticos
    - Elegir un acontecimiento de cada problema
    - Apoyarte en la tecnología para describir los elementos matemáticos
- Un comentario

Tabla 8: Enunciado de la Tarea de Reflexión

Esta tarea se trabajó de forma presencial en tres sesiones, en las que se realizó una actividad intermedia para su evaluación por parte del equipo investigador. Esta actividad intermedia consistió en entregar una situación de aula que pudiera surgir a parte de uno de los problemas y opcionalmente una lista de tres acontecimientos que se derivasen de cada uno de los tres problemas. A las parejas se le devolvieron los documentos entregados, con algunas correcciones y propuestas de mejora antes de que entregaran su propuesta final.

Durante estas tres sesiones las parejas se situaron en el rol de profesores de matemáticas de Educación Secundaria. Los participantes en la investigación debían separar y analizar las ideas que habían averiguado a partir del trabajo desarrollado en el resto de sesiones, es decir, debían extraer y sintetizar ideas matemáticas surgidas a partir del uso de la tecnología en la resolución de problemas. Además, en la medida de lo posible, debían anticiparse a las discusiones matemáticas que pudieran ejercer en una clase de secundaria a la hora de realizar actividades similares. De esta manera, se trataba de buscar que consiguieran que los participantes mostraran su Comprensión Matemática para la Enseñanza en la Educación Secundaria desde la perspectiva del Contexto Matemático de la Enseñanza, descrita en el Capítulo II.2. En particular, los aspectos que se relacionan directamente con la síntesis de las ideas matemáticas, la interacción con los estudiantes y la comprensión de su pensamiento (Kilpatrick, et al., 2015).

III.3. Proceso de análisis

Para organizar el análisis de los datos obtenidos, se ha optado por considerar cada objetivo asociado directamente con un tipo de análisis que surge directamente del estudio de las acciones realizadas por las parejas durante las sesiones de resolución de los problemas y la tarea de reflexión docente. De esta forma, a partir de la resolución de los tres problemas derivaron los resultados dedicados a analizar los aspectos de la Actividad Matemática (I Objetivo). Atendiendo al comportamiento de las parejas, en esas mismas sesiones de problemas, resultaron distintas tipologías de parejas (II Objetivo). Por último, se plantea un análisis de la Tarea de Reflexión Docente, para ello se analizan los documentos redactados por las parejas y entregados al final del TRPG (III Objetivo).

III.3.1. Datos recogidos

Durante el TRPG se registraron las sesiones de forma audiovisual y para ello se utilizaron cámaras que grabaron lo acontecido en el aula de forma general, además de un software de vídeo (OBS Studio) que registraba al mismo tiempo, la pantalla del ordenador operado por cada pareja y sus conversaciones captadas por la webcam. Se obtuvieron dos tipos de archivos de vídeo:

- Grabaciones Generales. Que contienen lo transcurrido en la clase durante cada sesión, incluyendo las intervenciones del profesor cuando usaba la pizarra o en la pantalla. También se recoge en ellas puestas en común e intervenciones de los participantes presentados al resto del grupo. (Figura 6_a)
- Vídeo-capturas de los ordenadores. Cada pareja utilizaba un único ordenador con webcam. Haciendo uso del programa OBS-Studio se grabó la pantalla al mismo tiempo que a la pareja durante la realización de cada tarea. (Figura 6_b)


(a)

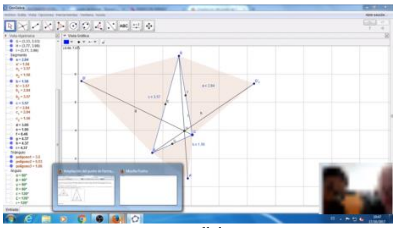
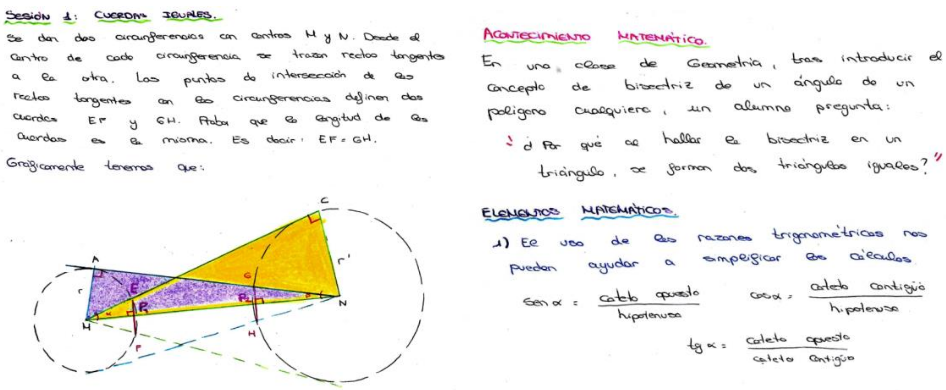

(b)

Figura 6: (a)Grabación general del aula de informática. (b)Video-captura de la pantalla de la Pareja 2

Se obtuvieron otros productos durante el TPRG, estos fueron documentos escritos, a mano o a ordenador, y las diferentes construcciones de GeoGebra que los participantes entregaron como fruto de la resolución de las tareas marcadas. Se clasificaron en:

- Construcciones. Archivos de GeoGebra con la extensión ggb que realizaron las parejas para resolver cada problema. Cada pareja entregó al menos tres construcciones, una por cada problema.
- Informes escritos. Durante las sesiones las parejas hacían anotaciones sobre el papel con las distintas propiedades que observaban, planes de resolución, intentos de llegar a una solución o propuestas de acontecimientos. De cada pareja se obtuvieron cuatro entregas escritas, una de cada tarea.
- Informe final del TRPG. Al final de la experimentación cada pareja entregó en un único documento la resolución escrita de cada problema, acompañada de un Acontecimiento y una lista de Elementos Matemáticos (Figura 7).



SESIÓN 1: CUERDAS IGUALES.

Se dan dos circunferencias con centros M y N. Desde el centro de cada circunferencia se trazan rectas tangentes a la otra. Los puntos de intersección de las rectas tangentes con las circunferencias definen dos cuerdas EF y GH. Probar que la longitud de las cuerdas es la misma. Es decir: EF = GH.

Gráficamente tenemos que:

ACONTECIMIENTO MATEMÁTICO.

En una clase de Geometría, tras introducir el concepto de bisectriz de un ángulo de un polígono cualquiera, un alumno pregunta:

"¿Por qué al hallar la bisectriz en un triángulo, se forman dos triángulos iguales?"

ELEMENTOS MATEMÁTICOS.

1) El uso de las razones trigonométricas nos pueden ayudar a simplificar los cálculos

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

Figura 7: Parte del informe de una de las parejas

Los datos recogidos se utilizaron para el análisis que se presenta en esta memoria, de modo que las Video-Capturas, complementadas con las construcciones y parte de las entregas escritas, fueron la evidencia principal para alcanzar el primer y segundo objetivo de la investigación. Estos datos se analizaron de dos formas, que llamamos: Análisis por problema y Análisis por Parejas. El Informe Final, complementado con parte de las entregas escritas, fueron la evidencia principal para la justificación del tercer objetivo de la Investigación. Este proceso de análisis se recogió como Análisis de la Reflexión Docente. En el siguiente diagrama (Figura 8) se representa la recogida de datos y su participación en el proceso de análisis.

Recogida y selección de datos para su análisis

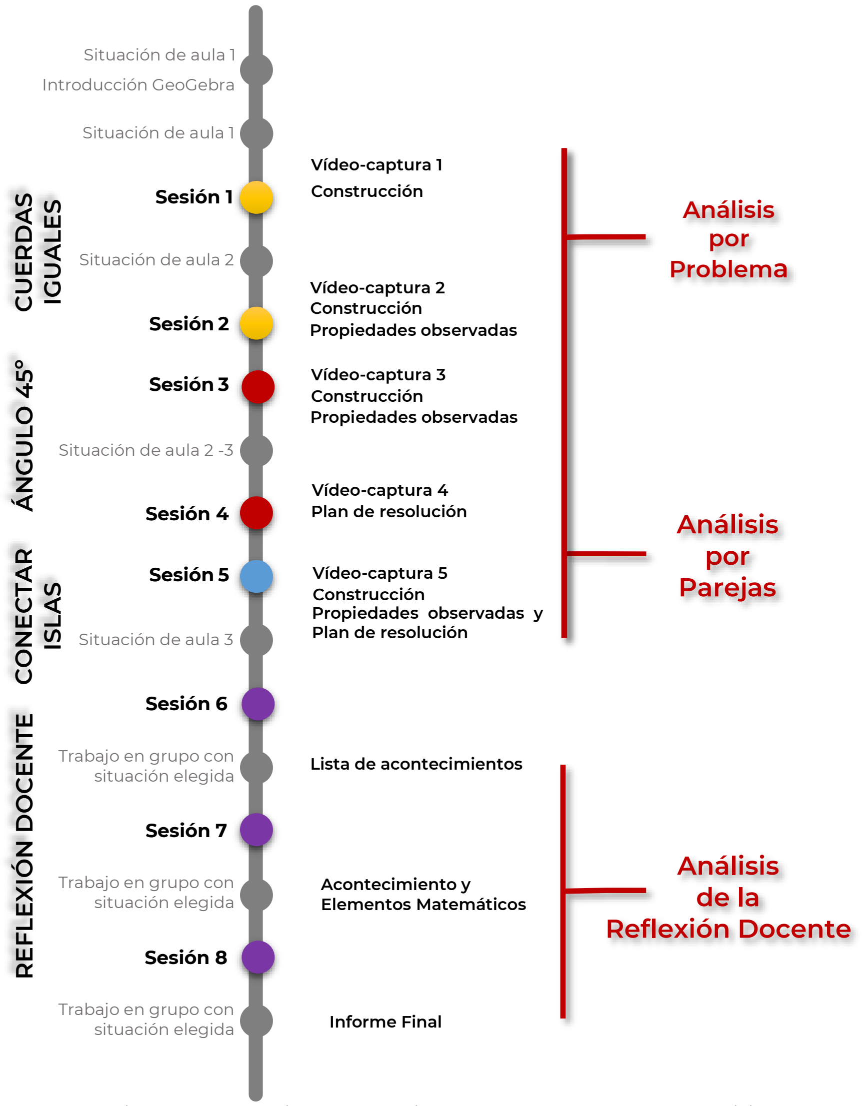


Figura 8: Secuencia de la recogida de datos y su uso para el análisis

III.3.2. Análisis por Problema

Esta parte del análisis se guía principalmente por una estructura basada en episodios de resolución de problemas con tecnología (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013). A la hora de presentar el análisis de las resoluciones de los problemas, los episodios de resolución que se utilizan son los que enmarcan las acciones y el comportamiento de las parejas en las fases de comprensión, exploración y búsqueda de aproximaciones. Durante el Taller se recogió información de estos tres episodios de forma presencial haciendo video-capturas de pantalla, recogiendo las construcciones y los documentos escritos (Figura 8). Con dicha información, se realizó una síntesis de las resoluciones de las parejas, que incluyó distintas formas de realizar la construcción dinámica, las observaciones y conjeturas formuladas y los diferentes caminos a la solución que se plantearon. Esta síntesis es la que denominamos *Resolución dinámica del problema*, la cual aparece dividida en tres partes:

- **Primer Episodio: Comprensión del problema**. Se describen y analizan las acciones de las parejas cuando abordan el problema, los cuestionamientos que se hacen y cómo usan las herramientas de GeoGebra. Esto permitió describir y analizar el tipo de construcciones, junto con su utilidad para afrontar el problema. Además, de qué preguntas se hace a sí misma cada pareja y cómo las resuelven, hasta considerar que la construcción refleja la información que da el problema.
- **Segundo episodio: Exploración**. Se describen y analizan las formas de profundizar en el problema de las parejas. Se fija la atención en qué elementos auxiliares utilizan, así como, de qué forma utilizan las posibilidades del SGD para realizar observaciones y formular conjeturas. Además de para comprobar si sus conjeturas son ciertas o no.
- **Tercer Episodio: Búsqueda de Múltiples aproximaciones**. A partir de las conjeturas formuladas por las parejas y sus intentos para dar con una aproximación a la solución, se enuncian varias propiedades matemáticas que dan pie a componer las diferentes aproximaciones a la solución. Se presentan, además, los pasos básicos de las aproximaciones para mostrar los conceptos y propiedades matemáticas que se abordarían en cada camino a la solución.

Las acciones realizadas por las parejas, en los diferentes episodios de resolución, son analizadas bajo la perspectiva de la Actividad Matemática (ver Capítulo II.1). ¿Qué aspectos descritos dentro de esta perspectiva se ponen de manifiesto en las acciones de las parejas? ¿Se pueden identificar con más facilidad alguno de estos aspectos frente a otros en los distintos episodios? Son las preguntas que guiaron esta parte del análisis.

III.3.3. Análisis por Parejas

Esta parte del análisis se diseñó una vez recogida la información y finalizado el Análisis por Problema, con el objetivo de centrar la atención en los participantes. Se tuvieron en cuenta las acciones, relacionadas con la *creación matemática* y el *razonamiento matemático,* que cada una de las parejas realizaron cuando resolvían los problemas. De esta manera se realizó un análisis del comportamiento de las parejas cuando usan GeoGebra, tratando de identificar diferencias y semejanzas entre ellas.

Las características del comportamiento analizado fueron:

- **Construcción**. Análisis de la habilidad de cada pareja para usar GeoGebra, de forma que en su construcción dinámica incluyan los objetos necesarios para **resaltar** una **característica**, propiedad o condición matemática **clave** en la resolución del problema. Esta habilidad se puede identificar en el episodio de comprensión, pero también en algún momento de los otros episodios. Ya que inicialmente realizan la construcción a partir del enunciado del problema, pero al avanzar también añaden elementos y objetos que les ayudan a explorar o dar con la solución.
- **Dinamismo**. Análisis de la habilidad de cada pareja para usar la posibilidad de **movimiento** de **objetos construidos** que permite GeoGebra, de forma que sean capaces de comprobar si las condiciones matemáticas del problema se conservan al mover los elementos y de realizar observaciones que les lleven a formular conjeturas. Estas acciones se pueden identificar en cualquier momento de la resolución, aunque es más evidente durante el episodio de exploración.

En este apartado del análisis se buscó obtener resultados que justificaran el segundo objetivo de investigación, tratando de resaltar cómo GeoGebra influye en la actividad de resolver problemas de cada pareja. ¿Hay diferencias entre las parejas en cuanto a su Actividad Matemática? ¿En qué aspectos de esa componente hay diferencias? ¿Qué acciones realizadas por las parejas son las que marcan la diferencia? ¿Se mantienen estas diferencias en todos los problemas? Son las preguntas que guiaron la caracterización de las parejas.

III.3.4. Análisis de la Reflexión Docente

Esta parte del análisis se desarrolló tras estudiar las propuestas de los participantes durante la Tarea de Reflexión Docente y una vez recogido el Informe Final. Al reunir los acontecimientos y elementos matemáticos de todas las parejas emergen una serie de categorías relacionadas con el papel de GeoGebra en el desarrollo de los acontecimientos. Dichas categorías se explicarán con detalle más adelante, una descripción breve de cada una de ellas sería:

- **Apropiación de GeoGebra**. Eventos o acontecimientos que intentan dar una explicación matemática del funcionamiento de una herramienta de GeoGebra.
- **Justificación de propiedades descubiertas usando GeoGebra**. Eventos o acontecimientos que parten de la observación que se hace cuando de una construcción dinámica, aparece una regularidad o propiedad matemática que se desea demostrar.
- **Representación de nuevos elementos en GeoGebra**. Eventos o acontecimientos que parten de una conjetura matemática, antes de observarla en una construcción dinámica; para comprobarla es necesario construir nuevos elementos en GeoGebra que permitan analizar distintos casos particulares.

Los acontecimientos y elementos matemáticos propuestos por las parejas no se comparan estrictamente con los propuestos en Heid, Wilson y Blume (2015), ya que desarrollar una *Situación* hubiera requerido de un diseño diferente de la tarea. El sentido de la tarea era que los participantes realizaran un ejercicio de reflexión sobre una futura práctica docente, basándose en su propia experiencia cuando usan GeoGebra para resolver problemas matemáticos. Por tanto, hay que entender las aportaciones de los participantes, como eventos que les permiten anticiparse a situaciones de aula surgidas al resolver problemas con tecnología. Estas propuestas se utilizarán para ver de qué manera los futuros profesores muestran su Comprensión Matemática, más concretamente, se analizan sus propuestas desde la perspectiva de Contexto Matemático de la Enseñanza (ver Capítulo II.2).

Capítulo IV. PRESENTACIÓN Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

En este capítulo se analizan los datos recogidos en el Taller de Resolución de Problemas con GeoGebra. La discusión se organiza atendiendo a los objetivos presentados en el segundo capítulo. De esta forma, se ha divido en tres apartados atendiendo a los tres tipos de análisis presentados en el capítulo anterior.

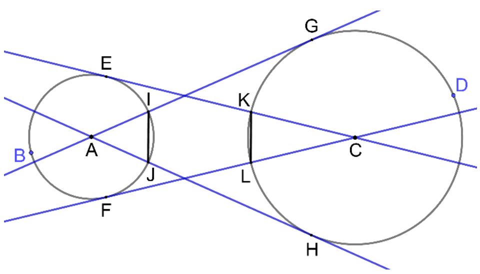
IV.1. RESULTADOS DEL ANÁLISIS POR PROBLEMA

A continuación, se presenta un análisis organizado por cada uno de los problemas, en el mismo orden en el que se presentaron a los participantes. El objeto de este análisis es destacar cómo las características del SGD influyeron para la resolución de los problemas. Se presta atención a las acciones que se realizan en los episodios de Comprensión, Exploración y Búsqueda de Múltiples aproximaciones (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013). Además, se observa y destaca el modo en que la resolución de problemas con GeoGebra conecta con la Actividad Matemática.

IV.1.1. Cuerdas iguales

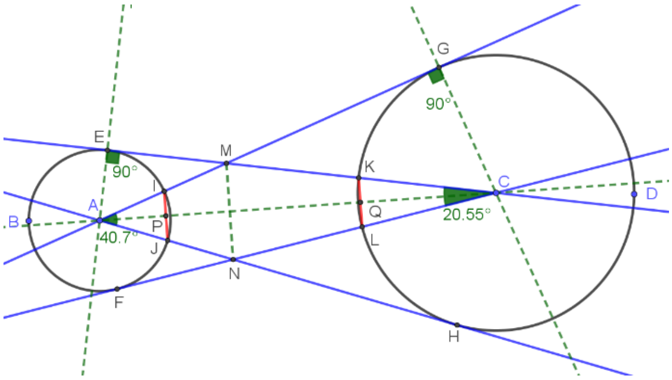
El primer problema elegido para esta investigación fue el denominado “Cuerdas Iguales”. En el capítulo III se encuentran sus características y tipología. Su enunciado es el siguiente:

Se dan dos circunferencias con centros M y N. Desde el centro de cada circunferencia se trazan rectas tangentes a la otra. Los puntos de intersección de las rectas tangentes con las circunferencias definen dos cuerdas EF y GH (ver dibujo). Probar que la longitud de las cuerdas es la misma, EF=GH.



Este problema fue presentado después de la clase introductoria, donde el profesor les explicó los principios del uso del GeoGebra y realizó algunas construcciones dinámicas que permitieron a los estudiantes recordar algunas propiedades básicas de las cónicas.

Construcción de referencia para Cuerdas Iguales



Objetos de la construcción

A centro de la circunferencia de radio AB

C centro de la circunferencia de radio CD

E, F, G y H puntos de tangencia de las circunferencias y las rectas

I y J puntos de corte de la circunferencia de centro A con las rectas tangentes a la circunferencia de centro C que pasan por A

K y L puntos de corte de la circunferencia de centro C con las rectas tangentes a la circunferencia de centro A que pasan por C

Elementos auxiliares

Recta que pasa por ambos centros A y C

P y Q puntos de corte de la recta AC con las cuerdas

Segmento MN, donde M y N son los puntos de corte de las rectas tangentes

Recta que pasa por A y E

Recta que pasa por C y G

Ángulos que forman las rectas tangentes entre sí, IAJ y KCL

Ángulos (rectos) AEC, AGC, API y KQC

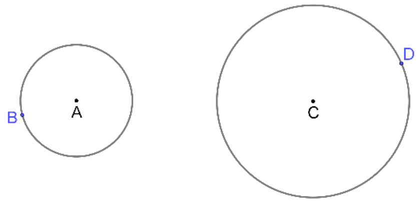
Tabla 9: Objetos de la construcción que se usan de referencia para el análisis del problema 1

El problema Cuerdas iguales fue abordado en dos sesiones del TRPG. A cada participante se le entregó el enunciado del problema, que incluía la figura y las instrucciones en papel (Anexo I). Se le pidió a cada pareja que resolviera el problema con ayuda de GeoGebra y que comentaran entre ellos las ideas que surgieran en cada momento del proceso de resolución. Hay que tener en cuenta que cada pareja utilizó en sus construcciones diferentes nomenclaturas para los elementos de la construcción dinámica. Para describir las acciones que realizaron durante este episodio se usa una notación única y se reproducen sus acciones y comentarios sobre una construcción de referencia que puede observarse en la Tabla 9.

Respecto a la marcha de las sesiones, durante la primera sesión el profesor-investigador realizó dos puestas en común, una para que las parejas explicaran cómo hicieron la construcción dinámica y otra para que comentaran las propiedades observadas. Durante la segunda sesión, se pidió a las parejas que trabajaran con las propiedades que habían descubierto, con el objetivo de encontrar una aproximación a la solución. Seguidamente, el profesor intervino para hacer una recapitulación de las ideas con las que estaban trabajando y que podrían servir para la resolución. Ya al final de la segunda sesión, las parejas iban indicando al grupo las propiedades que encontraban y que consideraban interesantes. El problema se cerró con la intervención de dos de las parejas participantes, que trazaron de forma independiente una aproximación a la solución basada en propiedades de semejanza de triángulos.

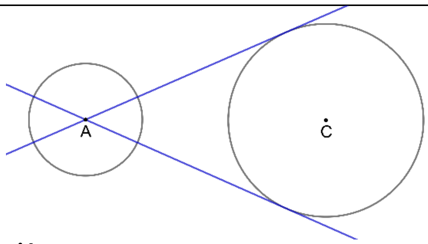
La reflexión sobre una construcción dinámica, que represente la figura del enunciado y que incluya las relaciones matemáticas existentes entre las circunferencias, las rectas tangentes a las circunferencias y las cuerdas, constituyó el punto de partida para comprender el problema. El tipo de construcción realizada influye en la forma de explorar y visualizar atributos, lo que, a su vez, influye en la formulación de unas primeras conjeturas. Una decisión que se debe tomar cuando se resuelve un problema es el orden de construcción de los elementos (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2016). En este caso, la manera de trazar las rectas tangentes y el orden de trazado de los objetos sobre la construcción va a marcar su funcionalidad, ya que determinará si se pueden, o no, arrastrar unos objetos u otros y qué propiedades se conservan al hacerlo.

Paso 1: Circunferencias

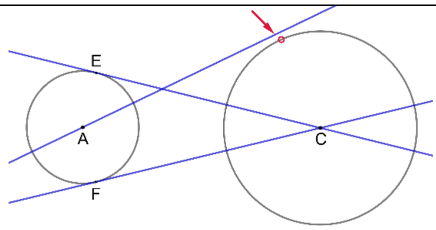


Construcción de las circunferencias con la herramienta *Circunferencia (centro, punto)*

Paso 2: Rectas tangentes a circunferencias

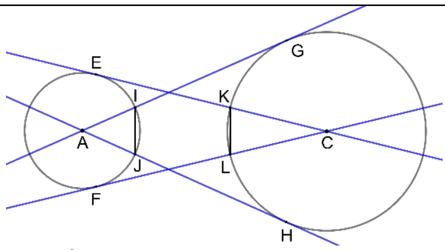


Opción 1:
Usando la herramienta *Tangentes* se elige el punto A y la circunferencia de centro C. Luego se repite el procedimiento para el otro par de rectas.



Opción 2:
Usando la herramienta *Recta* se elige como primer punto uno de los centros, A o C. Para elegir otro punto, si se acerca el puntero a una circunferencia, GeoGebra coloca la recta tangente a esta.

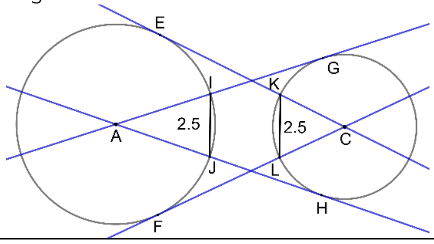
Paso 3: Cuerdas



Usando *Punto* de construyen los puntos I, J, K y L. Luego, se usa *Segmento* para trazar IJ y KL

Las relaciones matemáticas se conservan al mover objetos

Al mover objetos los puntos C y D se modifican las distancias entre los centros de las circunferencias y el radio de una de ellas. La manera de trazar las rectas tangentes en el paso 2, hace que la propiedad de tangencia se conserve o no.



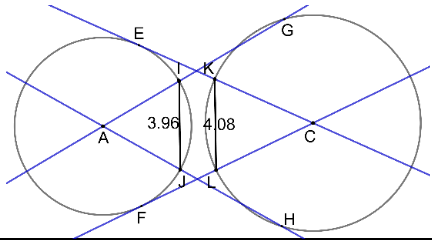


Tabla 10: Pasos básicos que compondrían los tipos de construcción del problema 1

Primer episodio: Comprensión del problema

Las parejas abordaron el problema Cuerdas Iguales realizando, en primer lugar, una construcción dinámica que representara la figura para estudiar las relaciones entre las circunferencias (radio y centro), las rectas tangentes y las cuerdas. Como en el enunciado no se especifica ningún valor concreto, colocaron de forma arbitraria las circunferencias en la vista gráfica de GeoGebra. Para el siguiente paso, la construcción de las rectas tangentes a cada circunferencia desde el centro de la otra (Tabla 10_Paso2), las parejas mostraron dos opciones: Usar la herramienta *Tangentes*[6] o usar la herramienta *Recta*. La primera opción implica que se conserva la propiedad de tangencia al arrastrar los objetos lo que hace que la construcción hecha sea una construcción robusta. La segunda opción conduce a una construcción donde, al mover los objetos, se pierde la tangencia de las rectas. En Camacho-Machín y Hernández (2017) se describen de forma detallada ambas formas de construcción, denominadas robusta y no robusta.

En la Tabla 11 se indica cuál de estos dos tipos de construcción realiza inicialmente cada una de las parejas de estudiantes, si se produce algún cambio en dicha construcción y si en este cambio intervino el profesor. Las parejas 1 y 5, desde el inicio, utilizan la herramienta *Tangentes*. Las otras cuatro parejas, inicialmente, trazan las rectas tangentes con la herramienta *Recta*: se apoyan en dos puntos, uno de ellos es el centro de una circunferencia y el segundo lo colocan de forma arbitraria sobre la otra circunferencia. A medida que avanzan en la construcción, las parejas 2 y 3 se dan cuenta por sí mismas de que no se conserva la tangencia de las rectas, mientras que 5 y 8 lo hacen cuando el profesor interactúa con ellas e interviene realizando la prueba de arrastre. Después de la intervención del profesor, estas parejas retoman la construcción desde el principio y realizan la construcción dinámica usando la herramienta *Tangentes*.

Característica clave de los tipos de construcciones	P1	P2	P3	P5	P7	P8
Pierde la propiedad de tangencia	-	□	□	-	□	□
					↓	↓
Conserva la propiedad de tangencia	□	■	■	□	■	■

□ Construcción dinámica realizada al comienzo
■ Reconstrucción de la figura al avanzar en la resolución
↓ Intervención del profesor

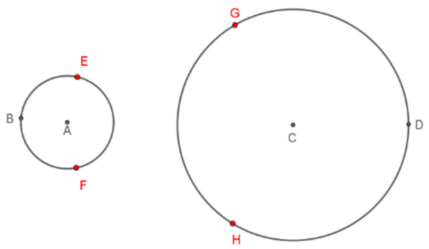
Tabla 11: Tipos de construcción dinámica que realizan las parejas

[6] En este trabajo identificaremos las herramientas escribiendo su nombre en cursiva.

La elección de un tipo de herramienta u otro para construir las rectas tangentes marca la diferencia en este problema. Desde un punto de vista tecnológico, la herramienta *Tangentes* de GeoGebra es una función programada que tiene como entrada o elementos primarios un punto y una cónica o curva. Desde el punto de vista matemático, el concepto de recta tangente lleva implícito la idea de "tangente a", es decir, una recta tangente se asocia a la gráfica de una función, curva o cónica. Tener en cuenta estos dos puntos de vista y usarlos, en una acción integrada, puede relacionarse con la habilidad tecno-matemática en el sentido que describen Jacinto y Carreira (2017). Cuando se intenta representar la recta tangente seleccionando dos puntos, de forma similar a cómo se haría con lápiz y papel, GeoGebra no da ninguna respuesta, tal y como le ocurrió a la Pareja 5 (Tabla 12). De este modo, el SGD hace interpretar la definición de recta tangente. Esto es, no permite colocar el punto de tangencia de forma arbitraria, como se haría con lápiz y papel, sino que es necesario establecer una relación entre el punto exterior y la circunferencia (Hernández, Perdomo-Díaz, & Camacho-Machín, 2019 b). Esta respuesta, o falta de respuesta, de GeoGebra a una acción realizada por la pareja debe ser interpretada por los estudiantes, para luego decidir la acción siguiente (probar otras entradas o elementos primarios, releer las instrucciones de la herramienta o elegir otra herramienta), poniendo la pareja en marcha su razonamiento creativo (Granberg & Olsson, 2015).

Conviene destacar que un profesor debe conocer y comprender las posibles contingencias que podrían ocurrir cuando se plantea un problema para resolver con GeoGebra, donde se requiere el trazado de rectas tangentes a ciertos objetos. Para el problema presentado, es importante considerar que en el trazado intervienen tres objetos: el punto exterior, la circunferencia y la recta tangente. Estos están relacionados entre sí y con otros objetos, como el punto de tangencia o el radio perpendicular a la recta tangente. En un contexto de enseñanza se debe separar la idea principal (la recta tangente en este caso) en sus partes más simples y mostrar resultados parciales que puedan ser usados por los estudiantes (Kilpatrick, et al., 2015). Reflexionar sobre las rectas tangentes a un objeto, desde el punto de vista matemático, puede ofrecer distintas alternativas, dos ejemplos serían: i) considerar la recta tangente a un objeto, ii) considerar la recta tangente a un objeto que pasa por un punto exterior. Estas dos alternativas también presentan diferencias desde el punto de vista tecnológico cuando se estudian haciendo uso de GeoGebra.

Interacción de una Pareja con GeoGebra



Sophie: ¿Qué haces?

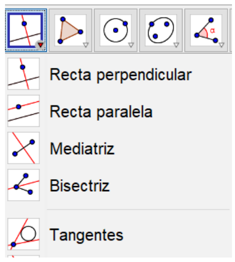
Evan: Los puntos ¿será? [*refiriéndose a los puntos de tangencia*]

Sophie: ¿Sí?

Evan: Sí, los E, F, G y H [*los dibuja sobre la circunferencia*] y ahora desde aquí…

Sophie: ¿y eso no sería después? Con la construcción de punto de intersección entre la tangente y el …

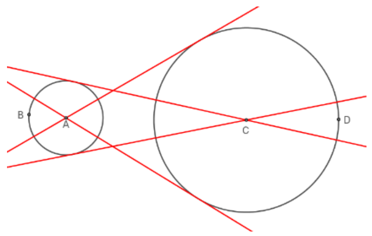
Evan: No, sales de ahí. Hay que calcular ahora. Dale ahí, [primero a] tangentes y [luego a] los puntos



Con la herramienta Tangentes elegida hacen clic sobre uno de los centros y los puntos dibujados sobre la circunferencia. No pasa nada.

Sophie: Sí, ya…

Reiteran el proceso varias veces, con los dos centros y los puntos dibujados, sin conseguir ninguna respuesta. En un momento dado introducen otros inputs haciendo clic sobre el centro y la circunferencia. Consiguen como respuesta las rectas tangentes a la circunferencia.



Evan: ¿Qué hiciste?

Sophie: Que le di a la circunferencia, los puntos estos no, no [*refiriéndose a E, F, G y H*].

Eliminan los puntos dibujados inicialmente.

Tabla 12: Diálogo mantenido por la Pareja 5 sobre el uso de la herramienta *Tangentes*

El final del episodio de comprensión lo marca la puesta en común que el profesor organiza, una vez todas las parejas han realizado la construcción dinámica robusta. El objeto de esta fue reflexionar y analizar los pasos de la construcción en la pizarra (fueron expuestos por la pareja 1). Se destacó cómo el trazado de rectas tangentes debe superar la "prueba del arrastre", siendo esta un elemento de control (Schoenfeld, 1985) para verificar la construcción, en el sentido de que, cuando se mueve alguno de sus elementos, se siguen representando las características y las relaciones que el enunciado del problema indica. También se señaló que, al medir la longitud de ambas cuerdas, se puede comprobar que son iguales. En la puesta en común se plantearon dos cuestiones: ¿Cómo se podría realizar la construcción sin la herramienta? ¿Cómo demostrar que las cuerdas tienen la misma longitud en cualquier caso? La primera cuestión invitaba a los participantes a recordar las propiedades de las rectas tangentes y la segunda los llevó a introducirse en el episodio de exploración del problema.

Como resultado del análisis de este episodio, se puede señalar que, para realizar la construcción dinámica en este problema, las parejas tuvieron que darse cuenta, en primer lugar, que la propiedad de tangencia debía conservarse, para luego buscar la forma de usar las herramientas de GeoGebra y conseguirlo. Realizar esta tarea en sí misma es una acción que se relaciona con la *creación matemática*, ya que los participantes deben elegir una o varias herramientas para representar las rectas tangentes a la circunferencia y las cuerdas, de forma que se resalte como característica la conservación de la propiedad de tangencia, aunque se muevan los objetos.

Segundo episodio: Exploración

Este episodio empieza durante el resto de la primera sesión y el principio de la segunda. Durante ese tiempo las parejas trabajan de forma autónoma, consultando al profesorado o en la web las dudas que les van surgiendo. La manipulación de la construcción dinámica les permitió verificar algunas propiedades, gracias a que podían cuantificar atributos y mover elementos. Además de los elementos que aparecen en la figura del enunciado, añadieron elementos auxiliares que se presentan en la (Tabla 13), que le sirvieron para realizar observaciones y discutir sobre propiedades matemáticas como por ejemplo de semejanza, simetría, paralelismo o perpendicularidad, buscando aplicar resultados geométricos que dieran pie a un posible camino para hallar la solución.

La posibilidad de poder hacer consultas en la web se convirtió en un recurso para los participantes, como ya se ha señalado en otros estudios (Santos-Trigo & Reyes-Martínez, 2018). Acudieron a ese medio en varias ocasiones para repasar algún concepto o propiedad, incluso para mediar cuando los miembros de la pareja no coincidían y buscar ideas cuando estaban bloqueados. Las consultas de las parejas fueron comunes para este problema, principalmente consultaron tópicos relacionados con la semejanza o congruencia de triángulos, fijándose especialmente en los criterios de semejanza o el teorema de Thales.

Elementos auxiliares	**P1**	**P2**	**P3**	**P5**	**P7**	**P8**
Ángulos IAJ y KCL	■	□	□	□	-	□
Segmento MN	■	□	-	■	□	□
Bisectriz	■	□	□	-	■	-
Mediatriz	-	-	□	□	-	-
Otros elementos	■	■	□	■	□	□

□ Añadidos al inicio de la sesión
■ Añadidos tras las puestas en común

Tabla 13: Elementos que utilizan las parejas en algún momento en episodio de exploración del problema 1

La manipulación de la construcción dinámica en este problema se dirigió a observar la longitud de las cuerdas, la distancia entre los centros y la longitud de los radios de las circunferencias. Al añadir otros elementos como ángulos y triángulos, también pudieron observar relaciones de semejanza y proporcionalidad. Esta acción de observar para buscar propiedades, formular y verificar conjeturas forma parte del *razonamiento matemático* de los participantes desde la perspectiva de la Actividad Matemática (Kilpatrick, et al., 2015). Para realizar estas acciones, las parejas se apoyaban en la construcción dinámica que realizaron inicialmente y a la que le añadieron una serie de elementos auxiliares (Tabla 9).

Los cuatro elementos auxiliares más frecuentes fueron: los ángulos IAJ y KCL con vértices en el centro de las circunferencias, el segmento MN que une los puntos de corte de las rectas tangentes, las bisectrices del ángulo que forman las rectas tangentes a las circunferencias y las mediatrices de las cuerdas IJ y KL (Tabla 13). Las parejas fueron añadiendo estos elementos mientras exploraban y buscaban una solución al problema. GeoGebra tiene implementada herramientas para el trazado de la bisectriz de un ángulo y la mediatriz de un segmento, lo que facilitó su construcción. Para este problema las cuatro rectas (bisectriz de IAJ, bisectriz de KCL, mediatriz de AJ y mediatriz de KL) eran coincidentes con la recta AC, además, la recta AC era un eje de simetría de la figura. Todas las parejas consideraron esta simetría en algún momento. Otros elementos auxiliares frecuentes en las construcciones fueron distintos ángulos y el segmento MN. Los participantes los usaron para formular varias hipótesis o conjeturas que luego trataban de verificar. Por ejemplo, una idea que apareció fue la de que los ángulos IAJ y KCL tenían la misma amplitud. Al medir su amplitud se comprobó que la intención era errónea.

La construcción dinámica inicial y los elementos auxiliares constituyen el centro del episodio de exploración en el caso de resolver problemas con ayuda de tecnología. Las parejas manipularon la construcción moviendo las circunferencias (los objetos que definían sus centros y radios) y midiendo radios, cuerdas o ángulos, de modo que pudieron verificar o refutar conjeturas que hacían antes, durante y después de la manipulación. Quedó evidenciado que aprovechaban principalmente dos de las posibilidades que brinda GeoGebra: el movimiento y la cuantificación de atributos, (Reyes-Martínez, 2016). las considera relevantes para la apropiación del SGD. El resultado de este proceso puede englobarse dentro de la formulación de conjeturas, acertadas (√) o no (×). Algunas de las conjeturas fueron realizadas por varias parejas de forma independiente, otras son singulares y sólo una pareja se percató de ella, en la Tabla 14 se presenta una lista de ellas y se indica qué parejas las formularon en algún momento de forma independiente.

Conjeturas formuladas	**P1**	**P2**	**P3**	**P5**	**P7**	**P8**
√ La longitud del segmento IP es igual que la del segmento KQ	-	-	■	■	■	-
√ Las mediatrices de las cuerda IJ y KL coinciden con la recta AC	-	-	■	■	■	-
√ Las bisectrices de los ángulos IAJ y KCL coinciden con la recta AC	-	■	■	-	■	-
√ Los triángulos AIJ y AMN son semejantes. Al igual que CLK y CNM	-	■	-	-	■	■
× Los ángulos IAJ y KCL tienen la misma amplitud	■	■	-	-	-	-
× Los triángulos IAJ y KCL son semejantes	■	■	-	-	-	-
√ La longitud de las cuerdas depende de la longitud de los radios	■	-	-	-	-	-
√ La longitud de las cuerdas depende de la distancia entre los centros	■	-	-	-	-	-
√ La longitud de las cuerdas depende de la amplitud de los ángulos IAJ y KCL	-	■	-	-	-	-
× Los triángulos AKL y CIJ son semejantes o congruentes	-	-	■	-	-	-
× Los arcos IAJ y KCL tienen la misma longitud	-	-	-	■	-	-
√ Los triángulos IMK y JNL son congruentes	-	-	-	■	-	-
√ Los triángulos IAJ y KCL son isósceles	-	-	-	■	-	-
× Los triángulos AGH y CEF son semejantes	-	-	-	-	■	-

Tabla 14: Conjeturas formuladas por cada pareja durante el episodio de Exploración para el problema 1

La manipulación de la construcción y su visualización promovió que los participantes formularan varias conjeturas. Una vez trazada la recta AC de alguna forma (como bisectriz, mediatriz o directamente) se dieron cuenta de que el problema podría reducirse a verificar la igualdad de la mitad de la longitud de las cuerdas, es decir, los segmentos IP y KQ. Para comprobarlo verificaron la igualdad de las longitudes de los segmentos o de la amplitud de los ángulos implicados. Estas observaciones están sustentadas en propiedades geométricas, como que la mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia que la contiene o que la bisectriz del ángulo que forman las rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior pasa por el centro de esta.

Los participantes, a medida que exploraban la situación, iban considerando la idea de que debía existir una relación de semejanza entre algunos de los objetos presentes en la figura. Esto les hacía formular conjeturas sobre la igualdad de amplitud de ángulos, la semejanza o congruencia de triángulos. GeoGebra fue utilizado, entonces, para comprobar las conjeturas. Para ello, primero debían construir nuevos elementos y comparar sus atributos. Por ejemplo, al construir los triángulos AKL y CIJ lo hicieron con la intención de comprobar si eran congruentes. Esta idea surgió a raíz de que los segmentos IJ y KL tenían igual longitud y les llevo a construir los triángulos, para ver si también coincidían las longitudes del resto de los lados. En este caso, el argumento era erróneo y, al ver refutada su idea, la Pareja 3 eliminó los triángulos de la construcción. Este comportamiento se repitió en todas las parejas: después de añadir un elemento auxiliar para comprobar una idea, pasaban a eliminarlo. La captura de pantalla permitió observar esta forma de proceder característica del episodio de exploración en la resolución de problemas con tecnología, dado que los participantes pueden añadir y eliminar objetos a la construcción con facilidad.

La puesta en común, al final de la primera sesión, se utilizó para marcar el cambio de episodio. En la pizarra se mostraron algunas conjeturas realizadas por las parejas, para lo que es necesario añadir algunos elementos auxiliares. Luego, el profesor les pide que refinen esas conjeturas que han establecido, de forma que se puedan utilizar como propiedades que permitan demostrar que las cuerdas tienen la misma longitud.

Durante este episodio se mostraron, a partir de la manipulación del SGD, varias acciones relacionadas con la Actividad Matemática. Reconocer las características matemáticas de los distintos ángulos, segmentos y triángulos que componían la figura, en las vistas de GeoGebra es un aspecto descrito en la *percepción matemática.* Las acciones más frecuentes fueron observar los atributos de los triángulos cuando se arrestaban las circunferencias o se variaban sus radios. Esta acción que llevaba a formular conjeturas, es decir, en este episodio destacó el *razonamiento matemático* de los participantes.

Tercer episodio: Búsqueda de múltiples aproximaciones

En este episodio los participantes estuvieron involucrados poco menos de dos horas, comprendidas dentro del tiempo que duró la segunda sesión. En este tiempo, se dedicaron a lo que se podría llamar "refinamiento" y formalización de conjeturas (Contreras, 2014). Para facilitar estas acciones se realizó una puesta en común donde se compartieron varias conjeturas y se señaló que estas debían ser formuladas como propiedades útiles para la demostración de que las cuerdas IJ y KL tenían la misma longitud. De esta forma, a lo largo de la sesión se configuró una lista de propiedades observadas que se detallan en la (Tabla 15) para tratar de dar al menos con una aproximación a la solución.

Propiedades observadas	AG1	AA1
Las mediatrices de las cuerda IJ y KL coinciden con la recta AC	●	●
Las bisectrices de los ángulos IAJ y KCL coinciden con la recta AC	●	○
El segmento MN es paralelo a las cuerdas IJ y KL, que también son paralelas	○	○
Los triángulos AIJ y AMN son semejantes. Al igual que CLK y CNM	○	○
Los triángulos rectángulos AEC y KQC son semejantes. Al igual que CGA y API *	●	○
Los puntos de tangencia E,F,G y H están sobre la circunferencia con diámetro el segmento AC	○	●

* Se hizo al final de la sesión

Tabla 15: Lista de propiedades observadas por los participantes que dieron pie a distintas aproximaciones

A partir de las propiedades observadas, los participantes esbozaron algunos caminos para encontrar la solución del problema. Las parejas 3, 5 y 7 desarrollaron algunos de sus argumentos, a partir de la simetría de la figura, buscando exclusivamente relaciones en la parte superior de la recta AC. Dan por válido que la recta AC es un eje de simetría, al observar que coincide con las mediatrices de ambas cuerdas y con las bisectrices de los ángulos que forman las rectas tangentes. Las parejas 1, 2 y 8 consideraron la idea de encontrar una razón de proporcionalidad entre las cuerdas y otros segmentos, por ejemplo, al partir de la relación de semejanza entre los triángulos AIJ y AMN y tratar de compararla con el triángulo CNM, que a su vez es semejante a AIJ. La Pareja 1 valida este argumento, observando la relación de dependencia que hay entre los radios y la distancia entre los centros. Mientras, las parejas 2 y 8 se fijan en que AOM y AIP están en posición de Thales. También, utilizaron las razones trigonométricas de los ángulos IAP y KCQ o escribieron expresiones algebraicas entre los catetos y la hipotenusa de los triángulos rectángulos API y KQC, haciendo uso del Teorema de Pitágoras. Cuando no lograban dar con una solución, volvían a evaluar la construcción dinámica o a realizar búsquedas en la web para desbloquearse y cuando descubrían alguna propiedad interesante la comentaban en el gran grupo. En este sentido mostraron interés en resolver el problema y capacidad para salir de una situación de bloqueo (Schoenfeld, 1985). De esta manera, al final de la sesión, se esbozó una **aproximación geométrica** que denominamos **AG1** que utiliza algunas de las propiedades observadas en la Tabla 15. El paso clave para dar con esta aproximación lo dio la pareja 8, cuando observó que los triángulos AEC y KQC eran semejantes, al ser ambos triángulos rectángulos y compartir otro ángulo, al igual que CGA y API (Tabla 16_ figura AG1).

Atendiendo a los razonamientos de las parejas (concretamente los de la pareja 5) durante la sesión, se puede establecer otro camino a la solución que constituye una **aproximación analítica** denominada **AA1**. Esta aproximación consiste en colocar los centros de las circunferencias sobre el eje X y usar sus expresiones algebraicas para plantear sistemas de ecuaciones.

En la Tabla 15 se señalan (marcadas con ●) las propiedades observadas que habría que justificar y utilizar para realizar cada una de las aproximaciones propuestas.

La Tabla 16 recoge detalladamente las dos aproximaciones geométrica y analítica, desarrolladas por las parejas indicadas, que dan lugar a la solución del problema Cuerdas iguales (Camacho-Machín & Hernández, 2017).

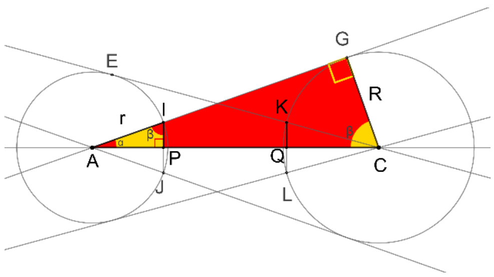
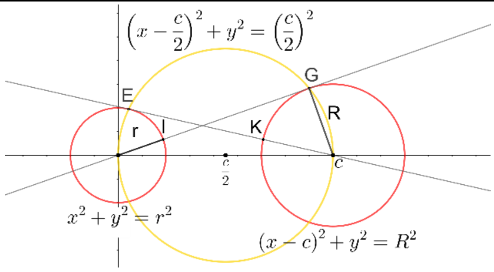
AG1 Aproximación geométrica	AA1 Aproximación analítica
	
Paso 1: Demostrar que las mediatrices de las cuerda IJ y KL y las bisectrices de los ángulos IAJ y KCL coinciden con la recta AC	**Paso 1:** El eje X será la mediatriz de las cuerdas IJ y KL. El objetivo del problema es verificar que la segunda coordenada de los puntos I y K coinciden.
Paso 2: Aplicar el criterio de semejanza AAA para ver que los triángulos API y AGC son semejantes. De forma homóloga también lo son KQC y AEC.	**Paso 2:** Se calculan las coordenadas de E y G como punto de corte de las circunferencias.
Paso 3: Resolver un sistema de ecuaciones con las expresiones de proporcionalidad de los lados. $\left.\begin{array}{l}\frac{\boldsymbol{R}}{\overline{\boldsymbol{PI}}}=\frac{\overline{\boldsymbol{AC}}}{\boldsymbol{r}}\Rightarrow\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}}{\overline{\boldsymbol{AC}}}=\overline{\boldsymbol{PI}}\\ \frac{\boldsymbol{r}}{\overline{\boldsymbol{KQ}}}=\frac{\overline{\boldsymbol{AC}}}{\boldsymbol{R}}\Rightarrow\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}}{\overline{\boldsymbol{AC}}}=\overline{\boldsymbol{KQ}}\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{\boldsymbol{PI}}=\overline{\boldsymbol{KQ}}$	**Paso 3:** Se expresan las ecuaciones de las rectas que pasan por A y G y E y C. Se calculan las coordenadas de I y K como puntos de corte entre esas rectas y las circunferencias. $I=\left(\frac{r\sqrt{c^2-R^2}}{c},\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{c}}\right)$ $K=\left(c-\frac{R\sqrt{c^2-R^2}}{c},\frac{\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{c}}\right)$

Tabla 16: Pasos para la aproximación geométrica y la analítica.

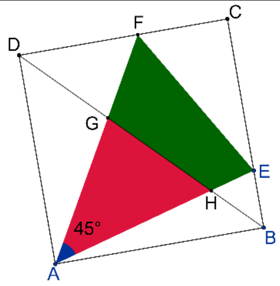
La observación de que la bisectriz de IAJ o la mediatriz de IJ coinciden con la recta AC y justificarlo formalmente puede considerarse como un ejemplo de formalización. Es decir, se transformaron las observaciones experimentales realizadas al usar tecnología en un resultado matemático formal (Contreras, 2014). Esta actividad de profundizar en la justificación matemática, buscaba que los futuros profesores tuvieran una idea más clara de cómo el uso del SGD interviene en el proceso de demostración (Acosta, Mejía, & Rodríguez, 2011). Cuando el profesor preguntó por las ventajas de usar GeoGebra, al término de la sesión, los participantes señalaron que la visualización gráfica del problema les ayudó a acercarse a la solución. Además, indicaron que las observaciones hechas hubiera sido muy difícil hacerlas sin el SGD y que cualquier comprobación resultaba ahora más sencilla. Otras ventajas tecnológicas que los estudiantes señalaron fueron: la precisión de GeoGebra, y la utilidad de las herramientas para trazar objetos sin recordar pasos intermedios. La pareja 5 señaló que el SGD permitiría un cambio para enseñar matemáticas, ya que daría la oportunidad al alumnado de Educación Secundaria de descubrir las propiedades. A su juicio, eso permitiría aprender de otra manera. Para ejemplificar su idea, señalaron que "no es lo mismo decir que la mediatriz de una cuerda pasa por el centro, a que un estudiante manipulando se dé cuenta de ello y se pregunte el porqué".

En este episodio las parejas buscaron una aproximación, basando sus argumentos en las propiedades de simetría de la figura y en las relaciones de semejanza entre algunos triángulos. Apoyándose, además, en otras propiedades geométricas de triángulos rectángulos o bisectrices de ángulos. Esta acción de búsqueda de argumentos se apoya en las distintas representaciones de GeoGebra y va seguida de la acción de evaluar si una serie de argumentos son válidos o no para justificar, por ejemplo, la igualdad entre las longitudes de las cuerdas. Se puede afirmar que estas acciones se relacionan, en gran parte, con la *percepción matemática,* ya que hay que reconocer las distintas estructuras matemáticas, representadas en las vistas de GeoGebra, y conectarlas entre ellas. Por ejemplo, cuando la Pareja 5 reconoce las ecuaciones, de las rectas tangentes y las cónicas, en la vista algebraica y las conecta con las propiedades observadas en la vista gráfica, para diseñar una aproximación analítica al problema. Estas acciones se entrelazan con algunos aspectos del *razonamiento matemático*, como el de observar la simetría de la figura o conjeturar que la recta AC coincide con la mediatriz de ambas cuerdas, para luego justificarlo.

IV.1.2. Ángulo 45°

El segundo problema elegido para esta investigación fue el denominado "Ángulo 45°". En el capítulo III se encuentran sus características y tipología. Su enunciado es el siguiente:

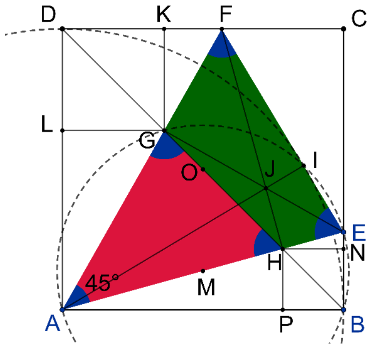
Dado un cuadrado ABCD, se traza un ángulo de 45° interior al cuadrado y con vértice en A. De esta manera las dos semirrectas del ángulo cortan a los lados opuestos a A en dos puntos E y F (ver dibujo). Estudia la relación que existe entre las dos partes en las que queda dividido el triángulo AEF por la diagonal BD.



Este problema se presentó a los participantes en la tercera sesión del Taller de Resolución de Problemas con GeoGebra. El enunciado y las actividades que debían hacer se colocaron en el Aula Virtual de la asignatura, en la que ellos podían también entregar el fichero de GeoGebra con la construcción dinámica o cualquier otro documento. La tarea incluyó el enunciado con la figura y una lista de indicaciones para proceder (Anexo I). Además, en la siguiente sesión (sesión 4), se les entregó un documento con indicaciones para que realizaran un plan de resolución que les llevara a justificar por qué las áreas de los polígonos eran iguales (Anexo I). En total se dedicaron cuatro horas, dos sesiones del taller, para que los participantes trabajaran el problema, también se le dedicaron unos 15 minutos de la octava sesión, en la que el profesor mostró los pasos para poder hacer una aproximación geométrica a la solución.

Hay que tener en cuenta que cada pareja utilizó en sus construcciones diferentes nomenclaturas para los elementos de la construcción dinámica. Para describir las acciones que realizaron durante este episodio, se usa una notación única y se reproducen sus acciones y comentarios sobre una construcción de referencia presentada en la Tabla 17.

Ángulo 45º: Construcción de referencia



Objetos de la construcción

ABCD cuadrado arbitrario

BD diagonal de cuadrado

E punto móvil sobre el lado BC

F punto del lado CD tal que el ángulo EAF mide 45º

G punto de corte de AF con BD

H punto de corte de AE con BD

AGH triángulo rojo

EFGH polígono verde

Elementos auxiliares

Circunferencia de centro A y radio AB

Circunferencia que pasa por los puntos A, B, E y G

Alturas del triángulo AEF o diagonales de EFGH: AI, EG y FH

J ortocentro de AEF o punto de corte de las diagonales EG y FH

M punto medio de AE

O punto de corte de las diagonales del cuadrado

K punto de corte de la recta perpendicular a CD que pasa por G con el lado CD

L punto de corte de la recta perpendicular a AD que pasa por G con el lado AD

N punto de corte de la recta perpendicular a BC que pasa por H con el lado BC

P punto de corte de la recta perpendicular a AB que pasa por H con el lado AB

Tabla 17: Construcción que se usa de referencia para el análisis del problema 2

En cada una de las sesiones se hizo una puesta en común. La primera se realizó después de que todas las parejas habían realizado la construcción dinámica, y ya se habían dado cuenta de que las áreas de los polígonos de los que hablaba el enunciado eran iguales. Para esta puesta en común, el profesor pidió a cada pareja que formularan conjeturas a partir del análisis de su construcción. La segunda puesta en común tuvo como objetivo que los estudiantes resolvieran dudas surgidas después de que el profesor hiciera una intervención para explicar cómo hacer un plan de resolución utilizando las propiedades observadas. Para lo cual, mostró un ejemplo de resolución donde usaba, sin demostrarlas, distintas propiedades que se habían observado.

Usar GeoGebra para resolver este problema conlleva realizar una construcción dinámica que permita explorar las propiedades de los dos polígonos en los que queda divido el triángulo AEF por la diagonal DB (Figura 9). Para identificar la relación existente entre ambos polígonos, es necesario trazar un ángulo de una amplitud dada con vértice en el punto A y poder arrastrarlo sobre el cuadrado. Una característica importante del problema es que en su enunciado no se indica cuál es la propiedad que hay que demostrar, sino que los participantes tienen primero que explorar la situación hasta encontrar dicha propiedad.

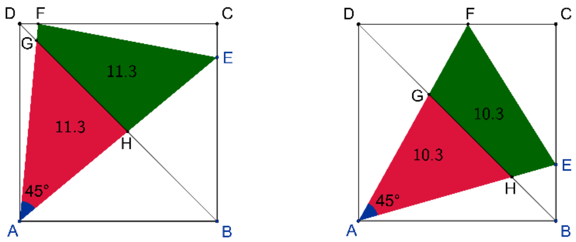


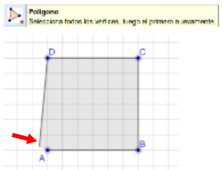
Figura 9: Distintas posiciones del ángulo sobre el cuadrado obtenidas al animar E sobre BC

Primer episodio: Comprensión del problema

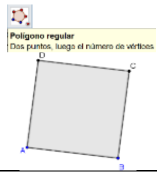
Las parejas abordaron el problema con la necesidad de realizar la construcción dinámica y averiguar la relación a la que hacía referencia el enunciado. El profesor dio mucha autonomía para decidir cómo realizar la construcción y no intervino para guiarles en la construcción a no ser que le consultaran. En las construcciones de las parejas, se pueden destacar dos pasos relevantes: la manera en la que construyeron el cuadrado y la forma de construir el ángulo de 45°. La elección de la herramienta para construir estos elementos determinará en gran parte si se puede realizar un movimiento controlado a la vez que se conservan las restricciones del enunciado, es decir, marca la robustez de la construcción dinámica.

Paso 1: Cuadrado

Opción 1:
Usando la herramienta *Polígono* y con referencia la cuadrícula de la vista gráfica se marcan los cuatro puntos y se cierra el cuadrado.

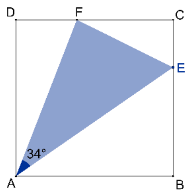


Opción 2:
Usando la herramienta *Polígono regular* se eligen dos puntos arbitrarios del plano y se introduce en el diálogo de GeoGebra 4 como número de lados.

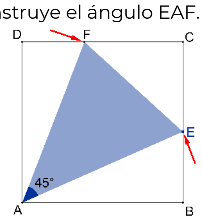


Paso 2: Ángulo 45°

Opción 1:

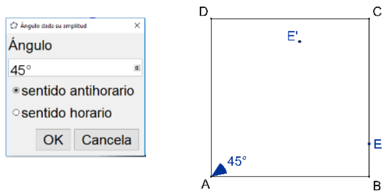


Usando la herramienta *Polígono* se construye un triángulo inscrito en el cuadrado. Luego usando *Ángulo* se construye el ángulo EAF.

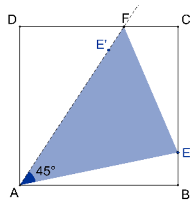


Arrastre de los puntos E y F hasta conseguir un ángulo de 45°

Opción 2:

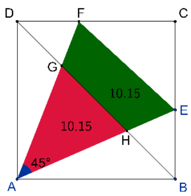


Usando la herramienta *Ángulo dada su amplitud* se selecciona un punto arbitrario E sobre el lado BC y el vértice A.



Trazado de la semirrecta AE', el punto de corte de esta con el lado CD y el triángulo AEF.

Paso 3: Diagonal y polígonos



Trazar la diagonal DB, los puntos de corte G y H, y los polígonos AGH y EFHG.

Movimiento controlado
Al definir el punto E sobre el segmento BC, este no puede ser arrastrado fuera del segmento. Cuando un punto está restringido a pertenecer a un objeto lineal (segmento, recta, curva…) el movimiento se realiza de forma ordenada, haciendo un recorrido exhaustivo. De esta forma, se puede “animar” el punto E para que se mueva automáticamente de B hasta C.

Tabla 18: Pasos básicos que compondrían los tipos de construcciones del problema 2

Una de las parejas (Pareja 1) comenzó la construcción usando la herramienta *Polígono*[7] para trazar un cuadrado. Esto generaba una configuración no robusta, ya que, al arrastrar un vértice, el polígono dejaba de ser cuadrado (Tabla 18_Paso 1_Opción 1). El resto de las parejas comenzó usando *Polígono regular*, consiguiendo de entrada un cuadrado robusto (Tabla 18_Paso 1_Opción 2). Las parejas se centraron en estudiar el movimiento del ángulo 45° y que se pudiera arrastrar, lo que la construcción del cuadrado y su robustez en un segundo plano. En este caso, no se produjo discusión, ni matemática, ni sobre el uso del SGD, que hiciera referencia a ello. Por otro lado, desde un punto de vista riguroso, si no se usa la herramienta P*olígono regular,* u otro proceso equivalente, al arrastrar alguno de los vértices, la condición matemática de cuadrado no se conservaría. Sólo la Pareja 1, avanzó en una construcción usando la herramienta *Polígono*, las demás eligieron directamente *Polígono regular* o dudaron unos instantes antes de elegirla.

La característica clave para este problema (que permite hablar de tipos de construcciones) es el trazado del ángulo de 45°, debido a que mover el ángulo, permite a los participantes observar como varían los atributos de los polígonos que debían analizar. En el Paso 2 de la Tabla 18 se pueden observar las dos opciones que los participantes utilizaron durante el TRPG para construir el ángulo, que marcaron la posibilidad de poder realizar un movimiento controlado del ángulo o no.

Característica que diferencia los tipos de construcciones	P1	P2	P3	P5	P7	P8
No permite el movimiento controlado	-	□	-	-	-	□
		↓				↓
Permite el movimiento controlado	□*→■	■	□	□	□	■

□ Construcción dinámica realizada al comienza
■ Reconstrucción de la figura al avanzar en la resolución
↓ Intervención del profesor
* Usaron la herramienta *Polígono* para construir el cuadrado

Tabla 19: Tipos de construcción dinámica que realizan las parejas

Aunque todas las parejas realizaron una construcción que permitía mover el ángulo sin que variara su amplitud, no fue así desde el principio. En general, tuvieron dificultades para usar las herramientas de GeoGebra que permiten trazar ángulos. Para las parejas 2 y 8, estas

[7] Para usar esta herramienta hay que seleccionar los puntos que constituirán los vértices. Además, el valor del área aparece en la Vista Algebraica junto a la etiqueta que identifica el polígono.

dificultades les permitieron realizar dos tipos de construcciones; primero una que no permitía el movimiento y después otra que sí lo permitía (Tabla 19).

La herramienta *Ángulo dada su amplitud* necesita introducir cuatro informaciones de entrada: dos puntos (el segundo de ellos será el vértice del ángulo), la amplitud de un ángulo y una dirección de giro. GeoGebra construye de esta forma un ángulo con la amplitud dada y un nuevo punto (Tabla 18_Opción 2). La acción realizada por GeoGebra no corresponde con la idea matemática de ángulo, dado que no se representan las semirrectas que seccionarían, lo que puede generar dudas a los estudiantes, tal y como ocurrió con la Pareja 5 (Tabla 20). La respuesta de GeoGebra se identifica con la rotación o giro de un punto dado un ángulo y su centro (vértice). Comprender las ideas matemáticas de esta herramienta y su funcionamiento de forma integrada sería parte de la habilidad Tecno-Matemática (Jacinto & Carreira, 2017) necesaria para realizar una construcción que permita el movimiento controlado. El trazado de un ángulo dada una amplitud determinada es una idea matemática simple. En este caso, el transportador de ángulos es sustituido, al usar GeoGebra, por una herramienta tecnológica: *Ángulo dada su amplitud*. En (Camacho-Machín, Perdomo-Díaz, & Hernández, 2019) concluyen que un futuro profesor que sea capaz de desarrollar habilidades tecnológicas para trazar y medir ángulos a la vez que profundiza en las ideas de definición de ángulo, amplitud o construcción de ángulos usuales, estaría desarrollando así su fluidez tecno-matemática.

Interacción de la Pareja 5 con GeoGebra	
Sophie:	¿Y ahora? ¿E' lo hizo sólo?
Evan:	… Sí, el E' lo hizo sólo
Evan:	Ya, tienes que hallar la recta que pasa por E' y por A. Hallar el punto de corte con el lado CD y ese es el punto que hace el ángulo…
Sophie:	Y lo mismo con E. Pero claro, el E lo pusiste tú.
Evan:	Claro, pero como el E ya lo puse dentro pues…
Sophie:	A ver, dibújalo
Evan:	Si tú haces la recta [*segmento*] de E a A…
Sophie:	OK
Evan:	…es el ángulo

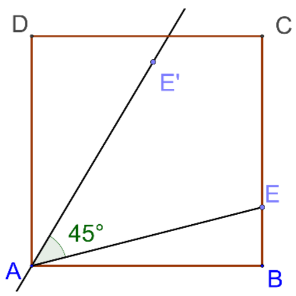


Tabla 20: Diálogo de la pareja 5 cuando GeoGebra da respuesta al uso de *Ángulo de amplitud dada*

El profesor, del curso, en esta ocasión no hizo hincapié en el cambio de episodio mediante una puesta en común. Ahora bien, se considera que una referencia para determinar cuándo las parejas comienzan la exploración de este problema, es el momento en el que dan por válida su construcción y comienzan a cuantificar los atributos de los objetos.

Se pueden señalar, como resultado del análisis de este episodio, que las parejas tuvieron que superar algunas dificultades de manejo de GeoGebra para poder realizar una construcción dinámica que representa un ángulo de 45° móvil. Usaron las herramientas del SGD de forma que la amplitud del ángulo se conservase, para luego pasar a construir los polígonos que conformaban la figura y observar que las áreas coincidían en cualquier posición del ángulo. La resolución de este problema supuso un desarrollo de sus las capacidades de los futuros profesores para usar GeoGebra, ya que pusieron en uso herramientas que no conocían, pero, sobre todo, pusieron en marcha su *creación matemática*. De hecho, los participantes eligieron varias herramientas para construir primero el ángulo, luego el triángulo AEF y por último los polígonos AGH y EFGH, de forma que se resaltará como característica la conservación de la amplitud del ángulo al arrastrar un punto y representar así una familia de triángulos inscrita en un cuadrado para poder estudiarla más adelante.

Segundo episodio: Exploración

Los participantes pasaron a explorar la situación, mediada la tercera sesión del TRPG, la primera que se dedicó a este problema. Al igual que en el problema Cuerdas Iguales, su principal recurso para buscar información fue la web, dirigiéndose al profesor en casos puntuales o cuando se les preguntaba por sus avances. Definir los polígonos AEF y EFGH y cuantificar sus áreas, fue esencial para descubrir que coincidían. Esto les llevo a identificar la demostración de esta propiedad como el objetivo principal del problema. La primera puesta en común se produjo una vez todos habían observado la igualdad de las áreas y el profesor indicara que debían buscar justificación. En este proceso, trazaron y añadieron elementos auxiliares a la figura, como rectas, segmentos, puntos, circunferencias y ángulos. En la tabla 21 se indican cuáles fueron esos elementos auxiliares y qué parejas los hicieron (Tabla 21).

Elementos auxiliares	P1	P2	P3	P5	P7	P8
Ángulos de los triángulos AGH y AEF	■	□	-	□	□	□
Alturas del triángulo AEF: AI, EG y FH	■	■	□	□	□	-
J ortocentro de AEF	-	-	□	□	□	-
Circunferencia de centro A y radio AB	■	-	-	■	□	-
Las diagonales de EFGH: EG y FH	-	□	-	-	-	-
K, L, N Y P puntos de corte con los lados	-	-	-	□	-	-
Otros elementos	-	□	-	□	□	□

□ Añadidos al inicio de la sesión
■ Añadidos tras las puestas en común

Tabla 21: Elementos que utilizan las parejas en algún momento en episodio de exploración del problema 2

Los elementos elegidos por las parejas para estudiar su comportamiento, se relacionaban principalmente con los triángulos AEF y AGH. Añadieron sus alturas y ángulos para buscar alguna regularidad cuando se movía E. Al observar el comportamiento de estos atributos, algunas parejas añadieron el ortocentro de AEF y se fijaron en otros elementos como la longitud de los lados de AGH o la amplitud de otros ángulos. Otros elementos relevantes para el establecimiento de conjeturas por parte de los participantes, fueron: la circunferencia centrada en A y radio AB que visualizaba cómo la altura del triángulo AEF desde A permanecía constante al mover E que construyó la pareja 7 y los puntos K, L, N y P de la pareja 5, construidos como puntos de corte de las rectas perpendiculares a los lados del cuadrado con ellos mismos y que pasan por G y H.

La manipulación de la construcción dinámica para este problema, se concentró en estudiar las variaciones de los elementos, al arrastrar el punto E. Observar regularidades como, igualdad de áreas, longitudes invariantes y la amplitud de los ángulos permitió a las parejas descubrir algunas propiedades y hacer conjeturas. Estas acciones se destacan entre los aspectos la Actividad Matemática y en particular con la componente razonamiento matemático.

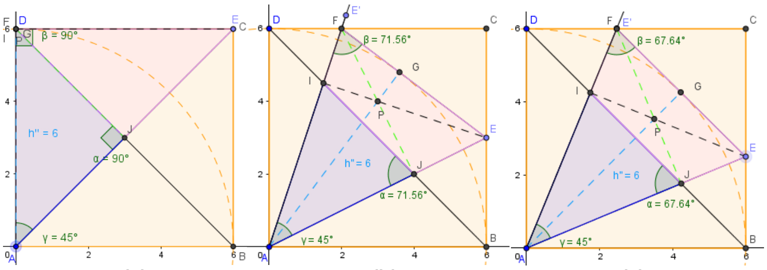
La Tabla 22 recoge las conjeturas que realizaron las distintas parejas. Dichas afirmaciones se formularon a partir de las observaciones realizadas sobre la construcción dinámica o se verificaron sobre la propia construcción. Al igual que en el problema anterior, las ventajas del SGD que usaron los participantes fueron la cuantificación de los atributos y el movimiento controlado. Las parejas se fijaron en los atributos de los polígonos en los que quedaba dividido el cuadrado por el ángulo y la diagonal, concretamente en sus áreas, las longitudes de sus lados o alturas, y la amplitud de sus ángulos.

Conjeturas formuladas	P1	P2	P3	P5	P7	P8
√ Las áreas del triángulo AHG y del polígono EFGH coinciden.	■	■	■	■	■	■
√ Si E coincide con C o B, AHG y EFGH son triángulos rectángulos congruentes entre sí y cuya superficie es la cuarta parte del cuadrado.	■	■	■	■	■	-
√ Para una posición de E, el triángulo AEF es Isósceles y EFGH es un trapecio.	■	-	-	-	■	-
√ Para una posición de E, las diagonales AC y DB dividen a AEF en triángulos rectángulos semejantes.	-	-	■	-	-	-
√ Si E coincide con C o B , el área de AEF es la mitad de la del cuadrado.	-	■	-	-	-	-
× El área de AEF no varían al mover E.	-	-	-	■	-	-
× El área de AEF es la mitad del área del cuadrado.	-	-	-	-	■	-
√ Los triángulos AGH y AEF son semejantes.	-	■	■	-	-	■
√ La altura del triángulo AEF desde A hasta EF no varía al mover E.	-	-	-	■	■	-
√ La altura del triángulo AEF desde F hasta AE “pasa” por H.	-	-	■	-	-	-
√ La altura del triángulo AEF desde A hasta EF pasa por el punto de corte de las diagonales del cuadrilátero EFGH.	-	-	■	-	-	-
√ El triángulo CGH es congruente con el triángulo AGH.	-	-	■	■	-	-
√ La superficie de EFGH que no se solapa con el triángulo CGH tiene el mismo área que la superficie de CGH que no se solapa con EFGH	-	-	■	-	-	-
× La suma de las áreas de los triángulos AGD y ABH es igual al área de AGH	-	-	■	-	-	-
× La longitud de los segmentos GH y AE no varían al mover E.	-	-	-	■	-	-
√ El triángulo AHF es isósceles.	-	-	■	-	-	-
√ Los triángulos ABE, ECF y FDA son rectángulos.	-	-	-	-	■	-
√ Los ángulos BAE y FAD suman 45°.	-	-	-	-	■	-
√ La circunferencia de centro A y radio AB es tangente al segmento EF.	-	-	-	-	■	-
√ Las áreas de los triángulos DGF, ECF y BEH suman lo mismo que la suma de las áreas de los triángulos AGD y ABH.	-	-	-	-	-	■

Tabla 22: Conjeturas formuladas por cada pareja durante el episodio de Exploración para el problema 2

En este problema, la posibilidad de arrastrar elementos, que ofrece GeoGebra, fue utilizada únicamente para mover E sobre el lado BC. Algunas parejas también usaron la opción automática “animación” para visualizar las variaciones de las construcciones en todo el recorrido. Muchas de las conjeturas realizadas por las parejas se desprenden directamente de la observación de los elementos de la construcción original, al mover el punto E (Figura 9). De esta forma reconocieron los casos extremos en los que E coincide con uno de los vértices del cuadrado y lo que hace que los polígonos sean congruentes y deduciendo fácilmente la igualdad de sus áreas. En este caso, se observó que se corresponde con la cuarta parte del área del cuadrado, dando lugar a dos triángulos rectángulos isósceles. También descubrieron que, para una posición intermedia de E, los polígonos corresponden a un triángulo isósceles y un trapecio. Esta idea facilitó el diseño de un plan de resolución. La Figura 10 presenta los casos explorados por la pareja 1.

La relación implícita entre las áreas de los polígonos y la amplitud del ángulo, era desconocida para participantes, lo que les llevó a realizar diversas pruebas y explorar el problema en busca de alguna idea que pudiera dar luz al origen de dicha propiedad. De esta forma descubrieron que dos de las alturas del triángulo AEF coincidían con las diagonales del cuadrilátero EFGH y que la otra era constante. Otras exploraciones llevaron a propiedades de semejanza y congruencia de distintos triángulos. Si nos fijamos en los distintos tópicos de Geometría que los participantes recordaron en este episodio de la exploración se podrían agrupar en: i) criterios de congruencia y semejanza de triángulos, ii) clasificación y cálculo de áreas de cuadriláteros y, iii) clasificación de triángulos según sus lados.



(a) (b) (c)

Figura 10: Casos explorados por la Pareja 1.
(a) Triángulos rectángulos isósceles, (b) Triángulo y trapecio y (c) Triángulo y trapecio isósceles.

Algunas conjeturas se formularon previamente, para luego comprobarlas en la construcción. Partieron de la idea de que, aparte de la igualdad entre las áreas de los polígonos, debería haber otros objetos con las mismas dimensiones. Una manera de hacerlo consistió en registrar los valores de las longitudes de algunos segmentos como GH y AE para verificar si variaban al arrastrar el punto E.

Al igual que en el problema anterior, el comportamiento de las parejas cuando se exploraba la construcción, muestra su habilidad tecno-matemática, así como la capacidad de aprovechar las posibilidades del software (Jacinto & Carreira, 2017; Reyes-Martínez, 2016) que influyen en el *razonamiento matemático* en lo referente a las acciones de observar y formular conjeturas, relacionadas con la Actividad Matemática. Observar los atributos de los polígonos con el movimiento del punto E, prestando atención a elementos invariantes como la altura AI y los diversos ángulos de amplitud 45° y 90° les condujo a formular una gran cantidad y variedad de conjeturas, es decir, se puede, por tanto, afirmar que en este episodio el uso de GeoGebra activó significativamente el *razonamiento matemático*.

Tercer episodio: Búsqueda de múltiples aproximaciones

Los participantes dedicaron a este episodio algo más de dos horas, que transcurrieron desde el final de la tercera sesión y toda la cuarta sesión. El profesor dio instrucciones para que realizaran un "plan de resolución". Se podría considerar esta tarea como la realización de un plan y su ejecución, segunda y tercera fase de la resolución de problemas (Pólya, 1945). Para ello, indicó que tenían que seleccionar algunas de las observaciones hechas y ver de qué manera las podrían usar para demostrar que el área del triángulo AGH coincidía con el área del polígono EFGH. Al final de la tercera sesión deberían entregar un plan indicando qué estrategia seguirían para dar con la solución (Schoenfeld, 1985). Podrían utilizar algunas de las propiedades observadas, aunque no tuvieran su justificación, quedando así un plan cuya ejecución consistiera en demostrar las propiedades utilizadas.

En el TRPG, se pidió a cada pareja que trabajara para conformar una aproximación, si no completa, al menos esbozada. Se pudo observar que del trabajo de las parejas surgió un abanico de caminos distintos hacia la solución, el desarrollo de varios de estos caminos se enmarcaría dentro del episodio de búsqueda de múltiples aproximaciones, que Santos-Trigo y Camacho-Machín (2009) señalan como relevante en la resolución de problemas.

Atendiendo a los caminos propuestos por las parejas, el equipo investigador planteó tres aproximaciones, que se denominaron aproximación geométrica (AG2), aproximación analítica (AA2) y aproximación basada en semejanza (AS2) (Camacho-Machín, Perdomo-Díaz, & Hernández, 2019). En la Tabla 23 se incluyen las propiedades descubiertas por los participantes relacionadas con cada una de las tres aproximaciones propuestas (marcadas con ●).

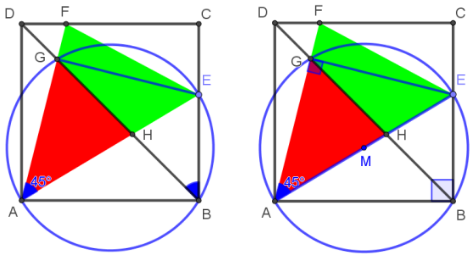
Propiedades observadas	AG2	AA2	AS2
Las diagonales del cuadrilátero EFGH coinciden con dos de las alturas del triángulo AEF	●	○	○
La altura del triángulo AEF desde A hasta el lado EF es siempre igual a la longitud de AB	○	○	●
La circunferencia de centro A y radio el lado del cuadrado es tangente al segmento EF	○	○	○
Los puntos A, B, E y G son cocíclicos. Igualmente, los puntos A, D, F y H.	●	○	○
El punto medio de AE es el centro de la circunferencia que pasa por A, B, E y G	●	○	○
El segmento con extremos el punto medio de AE y G es una altura del triángulo AGH	●	○	○
La suma de las áreas de los triángulos ABG y ADH coincide con las de BEG, CEF y DFH	○	●	○
El triángulo AHG es semejante al triángulo AEF	○	○	●
Los cuadriláteros PBNH y DLGK son cuadrados	○	●	○

Tabla 23: Lista de propiedades observadas por los participantes que dieron pie a distintas aproximaciones

La **aproximación geométrica (AG2)** consiste en calcular el área del cuadrilátero EFGH y demostrar que es la mitad que la del triángulo AEF. Para ello, se demuestra que las diagonales del cuadrilátero son las alturas del triángulo AEF y que las rectas GM y FH son paralelas, siendo M el punto medio de AE (Tabla 25). La **aproximación analítica (AA2)** se fundamenta en la búsqueda de la relación entre la longitud del lado del cuadrado, las distancias de los puntos E y F a los vértices del cuadrado, y el ángulo de 45°. Partiendo de un cuadrado de lado la unidad, utilizando las observaciones hechas en la fase de exploración y que la tangente de 45° mide uno, se presenta un sistema de ecuaciones que permite dar con la solución (Tabla 25). La **aproximación basada en la semejanza de triángulos (AS2)** usa la propiedad de que la razón entre las áreas de dos figuras semejantes es el cuadrado de la razón de proporcionalidad entre sus lados de esta forma, demostrando que los triángulos AEF y AGH son semejantes, sólo es necesario demostrar que la razón de proporcionalidad entre los lados del triángulo AGH y el triángulo AEF es $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (Tabla 26).

AG2: Aproximación geométrica

Demostrar que el área del triángulo AHG es igual al del cuadrilátero EFGH es equivalente a demostrar que área del triángulo AEF es el doble de una de ellas.



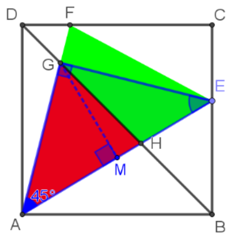
Paso 1:

Los ángulos EAG y EBG miden 45° y abarcan EG, luego

i) A, B, E y G forman un cuadrilátero circunscribible y

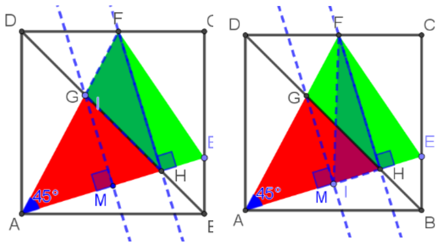
ii) Los ángulos AGE y ABE son suplementarios.

Por tanto, el ángulo AGE es recto. Análogamente, AHF es recto.



Paso 2:

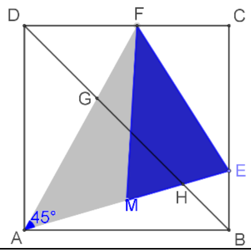
El triángulo AEG es isósceles. Es un triángulo rectángulo y el ángulo EAG mide 45°, entonces, AEG también mide 45°. En consecuencia, la altura del triángulo AEG desde el vértice G se apoya en M, punto medio del lado no congruente AE.



Paso 3:

Como los ángulos AHF y CMA miden 90°, la recta GM es paralela a la recta FH, todos los triángulos con base FH y otro vértice sobre la recta GM, tendrán la misma área. En particular, los triángulos FGH y FMH tienen la misma área.

En consecuencia, el área del triángulo EFM es igual a la del polígono EFGH.



Paso 4:

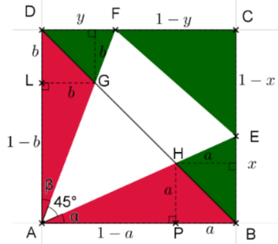
La mediana de un triángulo lo divide en dos triángulos de la misma área.
FM es una mediana del triángulo AEF, entonces el área del triángulo EFM es la mitad del área del triángulo AEF, que es igual a el área del cuadrilátero EFGH.
Por tanto, el área de del triángulo AEF es el doble del área del cuadrilátero EFGH, para cualquier posición de E sobre BC ▪.

Tabla 24: Pasos para la aproximación geométrica que aparecieron en la sesión del taller

Los planes de resolución presentados por las parejas 3 y 5 estuvieron en la misma línea que la aproximación analítica (AA2), su idea fue buscar relaciones entre las dimensiones de los distintos segmentos de la figura y demostrar que la suma de las áreas de los triángulos ABG y ADH coincidía con la suma de las áreas de BEG, CEF y DFH.

AA2: Aproximación analítica

Demostrar que el área del triángulo AHG es igual al del cuadrilátero EFGH es equivalente a demostrar que, la suma de las áreas de los triángulos ABH y AGD ($\boldsymbol{AR}$) es igual a la suma de las áreas de los triángulos BEH, ECF y FDG ($\boldsymbol{AV}$).



Paso 1:

Se parte de un cuadrado de lado la unidad y se utiliza una notación acorde. Los triángulos ABE y APH son semejantes, ya que son triángulos rectángulos que tienen α como ángulo común.

Entonces,

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{1-a} \Rightarrow a = \frac{x}{1+x} \wedge 1-a = \frac{1}{1+x}$$

Análogamente,

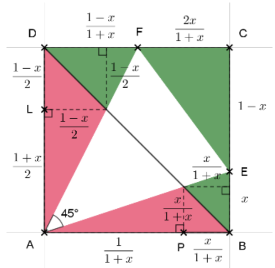
$$\frac{y}{b} = \frac{1}{1-b} \Rightarrow b = \frac{y}{1+y} \wedge 1-b = \frac{1}{1+y}$$

Además,

$$\left.\begin{array}{r} \tan\alpha = \frac{x}{1} = x \\ \tan\beta = \frac{y}{1} = y \\ \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\cdot\tan\beta} \\ \alpha+\beta = 45^\circ \\ \tan 45^\circ = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = \frac{x+y}{1-x\cdot y} \Rightarrow y = \frac{1-x}{1+x} \quad 1-y = \frac{2x}{1+x} \Rightarrow b = \frac{1-x}{2} \wedge 1-b = \frac{1+x}{2}$$

Paso 2:

Por tanto, se pueden poner todos los parámetros en función de x, que define la posición de E sobre BC.



Paso 3:

$$\boldsymbol{AR} = \acute{A}\boldsymbol{rea\ ABH} + \acute{A}\boldsymbol{rea\ AGD} = \frac{1}{2}\cdot\overline{\boldsymbol{AB}}\cdot\overline{\boldsymbol{PH}} + \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{AD}}\cdot\overline{\boldsymbol{LG}} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1-x}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x} + \frac{1-x}{2}\right) = \frac{-x^2+2x+1}{4(1+x)} = \acute{A}\boldsymbol{rea\ BEH} + \acute{A}\boldsymbol{rea\ ECF} + \acute{A}\boldsymbol{rea\ FDG}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\overline{\boldsymbol{BE}}\cdot\overline{\boldsymbol{HN}} + \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{EC}}\cdot\overline{\boldsymbol{CF}} + \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{FD}}\cdot\overline{\boldsymbol{GK}} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{1+x} + \frac{2x(1-x)}{1+x} + \frac{(1-x)^2}{2\cdot(1+x)}\right) = \frac{-x^2+2x+1}{4(1+x)}$$

Por tanto, $\boldsymbol{AR} = \boldsymbol{AV}$ para cualquier valor de x

Paso 4:

En un caso general, con l lado del cuadrado, también se conservaría la propiedad. Las sumas de las áreas AR y AV serían proporcionales a las correspondientes áreas de un caso general con razón de proporción l^2. Verificándose que:

$$\boldsymbol{l^2\cdot AR = l^2\cdot AV}$$

Luego, el área del triángulo AGH es igual al área del cuadrilátero EFGH para cualquier posición de E y para cualquier lado del cuadrado ■.

Tabla 25: Pasos para la aproximación analítica que aparecieron en la sesión del taller

Tal y como se puede observar en la Tabla 25, GeoGebra permitió a estas parejas observar que las alturas de los triángulos coincidían dos a dos y reconocieron en ello una oportunidad para trasladar esta idea a una relación analítica. Dicho de otra forma, GeoGebra facilitó el paso de lo experimental a lo formal para dar con un camino a la solución. A la hora de ejecutar el plan, se encontraron con la dificultad de relacionar la distancia entre los puntos B y E con la distancia entre los puntos F y D (Tabla 25 Paso 1). En el informe escrito que presentaron, se incluyeron cuáles eran las propiedades les faltaba demostrar.

La Pareja 1 realizó un plan de resolución fundamentado en el reconocimiento tres casos distintos que dependían de la posición del ángulo. El uso de GeoGebra facilitó el reconocimiento de los tres casos, diferenciado por la forma de los polígonos: a) *Triángulo y triángulo*, b) *Triángulo y trapecio* y c) *Triángulo y trapezoide* (Figura 10 y Figura 11). Usaron GeoGebra para cuantificar los atributos en cada caso y determinar las propiedades se cumplían en cada uno de ellos. De esta forma reconocieron como casos más simples los dos primeros y se refirieron al tercero como un caso general. Los tres casos los abordaron directamente usando la resolución de sistemas de ecuaciones, estas ecuaciones las dedujeron a partir de las expresiones algebraicas de las áreas de los polígonos. Tuvieron éxito con el primero e hicieron avances importantes en el caso del trapecio, pero no fueron capaces de abordar el caso general.

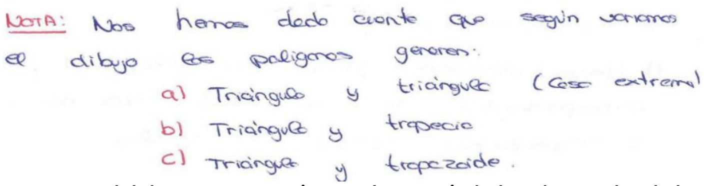
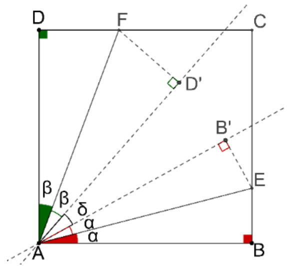

NOTA: Nos hemos dado cuenta que según variamos el dibujo los polígonos generan:
a) Triángulo y triángulo (Caso extremo)
b) Triángulo y trapecio
c) Triángulo y trapezoide.

Figura 11: Extracto del documento escrito con las propiedades observadas de la Pareja 1

Por otro lado, las parejas 2, 7 y 8 fundamentan sus planes de resolución en el hecho de que los triángulos AGH y AEF son semejantes, es decir, trabajan en la línea de la aproximación basada en semejanza (AS2). Los caminos que trazan las parejas tienen básicamente dos pasos para demostrar que: AEF es semejante triángulo AGH y la razón de semejanza entre sus lados homólogos es $\sqrt{2}/2$. Las parejas se dieron cuenta de la viabilidad de este camino, en cuanto observaron la propiedad de semejanza de esos triángulos, quedando la dificultad en la justificación formal de los pasos.

AS2: Aproximación basada en semejanza

Paso 1: Semejanza de triángulos



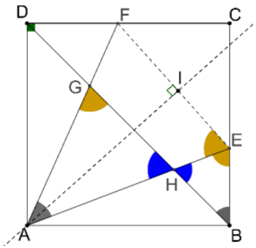
La idea es aplicar el criterio de semejanza AA, es decir, que los ángulos de los triángulos AEF y AGH son iguales dos a dos. Se parte de que los triángulos AEF y AGH comparten el ángulo de 45° por lo que sólo hay que ver la igualdad de otro de sus ángulos.

Se quiere probar que los ángulos AFE y AHG tienen la misma amplitud. Una forma de hacerlo es ver previamente que AIE es congruente con ABE y que AIF es congruente con ADF.

Dado un cuadrado ABCD y dos puntos E y F de los lados BC y DC respectivamente, se tiene que los puntos simétricos de B y D respecto a los segmentos AE y AF, respectivamente, son B' y D' (IMAGEN). Se cumple que:

$$\mathbf{2\alpha + 2\beta + \delta = 90° \ con \ 0 \le \alpha, \beta \le 45°}$$

$$\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{AB'}} = \overline{\mathbf{AD}} = \overline{\mathbf{AD'}}$$



Hay que observar que B' y D' coincidirán cuando $\boldsymbol{\delta = 0}$, es decir, cuando $\mathbf{2\alpha} + \mathbf{2\beta} = \mathbf{90°}$ o lo que es lo mismo, $\boldsymbol{\alpha + \beta = 45°}$. Esta es la condición inicial del problema, el ángulo EAF mide 45°.

Luego, en este caso, tenemos que los puntos B' y D' coinciden. Llamaremos a ese punto I, para usar la notación de referencia. Por propiedades de simetría, se tiene que el triángulo AIE es congruente con ABE y que AIF es congruente con ADF. En consecuencia, los ángulos AEI y AEB tienen la misma amplitud.

Por otra parte, la figura inicial se podía deducir que el triángulo BEH era semejante al AGH, debido a que los ángulos AHG y BHE eran congruentes y que el ángulo CBD mide 45°. Con el resultado anterior además se puede afirmar que los ángulos AGH y AEF son congruentes. Aplicando el criterio de semejanza AA a los triángulos AEF y AGH que tienen dos ángulos de la misma amplitud, afirmamos que son triángulos semejantes.

Paso 2: Razón de proporcionalidad

Se parte de que los triángulos AEF y AGH son semejantes. Al final de la sesión, se supuso cierta esta propiedad y se discutió durante la puesta en común cómo utilizarla.

Al ser triángulos semejantes, existe una razón de proporcionalidad r tal que $\mathbf{base_{AEF}} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{base_{AGH}}$ y que $\mathbf{altura_{AEF}} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{altura_{AGH}}$, lo que implica que

$$\text{Área}_{\mathbf{AEF}} = \frac{\mathbf{base_{AEF}} \cdot \ \mathbf{altura_{AEF}}}{\mathbf{2}} = \mathbf{r^2} \frac{\mathbf{base_{AGH}} \cdot \mathbf{altura_{AGH}}}{\mathbf{2}} = \mathbf{r^2}\text{Área}_{\mathbf{AGH}}$$

Demostrar que el área del triángulo AGH es igual a la del cuadrilátero EFGH es equivalente a demostrar que el área del triángulo AEF es el doble que la del triángulo AGH. Es decir, que la razón de proporcionalidad entre áreas es 2 ($\mathbf{r^2 = 2}$).

Si llamamos O al punto de corte de las diagonales del cuadrado, se tiene que AO es perpendicular a GH. Entonces, la altura de AGH desde A es la longitud de AO (1).

Por otra parte, el triángulo ABE es congruente al triángulo AIE, por lo que la altura del triángulo AEF coincide con la longitud del lado del cuadrado (2).
Las alturas de AEF y AGH desde A son proporcionales, por (1) y (2) tenemos que

$$\mathbf{r} = \frac{\overline{\mathbf{AI}}}{\overline{\mathbf{AO}}} = \frac{\overline{\mathbf{AB}}}{\frac{\overline{\mathbf{AC}}}{\mathbf{2}}} = \mathbf{2}\frac{\overline{\mathbf{AB}}}{\overline{\mathbf{AC}}} = \mathbf{2}\frac{\mathbf{l}}{\sqrt{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{l}} = \sqrt{\mathbf{2}} \Rightarrow \mathbf{r^2 = 2} \ \blacksquare$$

Tabla 26: Pasos para la aproximación geométrica y analítica que aparecieron en la sesión del taller

Las parejas 2 y 8 fueron capaces de justificar el segundo paso, pero sólo la pareja 7 encontró una manera de justificar el primer paso. La justificación que presentó la pareja 7 es menos formal que la presentada en la aproximación AS2. Haciendo uso de GeoGebra dan por válido que el punto I coincide con los puntos simétricos de B y de D respecto de las rectas AE y AF, respectivamente (Figura 12) y hacen referencia a la simetría de una forma demasiado informal como la acción de "doblarse" sobre un lado.

Doblamos ΔADF sobre el lado AF y ΔAEB sobre AE. Observamos que:
1) $A\hat{D}F + A\hat{E}B = A\hat{E}F = 45°$
2) Los bordes AD y AB de los triángulos van a coincidir.
3) L es el punto final común resultante de doblar lo explicado al principio: $A\hat{L}E = A\hat{L}F = 90°$.
4) L se encuentra en EF y $L \perp EF$
5) AL es una altura del triangulo AEF.

Figura 12: Extracto del plan de la pareja 7 (L corresponde al punto I en la figura de referencia).

En general, en este episodio las parejas que trabajaron la actividad tuvieron la oportunidad de desarrollar aspectos de su Comprensión Matemática para la Enseñanza. Dichos aspectos están relacionados, por un lado, con su *razonamiento matemático*, ya que realizaron una actividad donde GeoGebra permitió que realizaran observaciones, conjeturaron propiedades y se apoyaran en resultados que pudieron llevarles a una justificación formal. Por otro lado, la Actividad Matemática de los participantes se pudo observar desde su *percepción matemática*, lo que se evidenció desde el momento que fueron capaces de reconocer las distintas estructuras matemáticas proporcionadas por cada una de las vistas de GeoGebra (algebraica y gráfica), y las conectaban entre ellas. Por ejemplo, las parejas mostraron esta habilidad cuando fueron capaces de reconocer la vista gráfica, como propiedades relevantes, la semejanza de los triángulos AEF y AGH, que la altura del triángulo AEF fuera constante y que la suma de las áreas de los triángulos exteriores también coincidía (la suma de las áreas de los triángulos AGD y AHB coincide con la suma de las áreas de los triángulos BEH, CFE y DGF). Ese reconocimiento sirvió para escribir esas propiedades formalmente, fijándose en la vista algebraica, para llevar a cabo su plan de resolución. La construcción dinámica fue fundamental en este proceso, siendo muy difícil que en un entorno no tecnológico los participantes se dieran cuenta de algunas propiedades, como por ejemplo la de que el triángulo AEF es semejante a AGH o que la altura AI coincidía con el lado del cuadrado. En consecuencia, el uso de GeoGebra en este episodio permitió que aparecieran diversos caminos a la solución.

Durante este episodio se pudieron observar, de forma recurrente, algunas situaciones matemáticas, relacionadas con la resolución del problema, en las que se desarrollaron aspectos de la Comprensión Matemática para la Enseñanza en Secundaria, concretamente los aspectos de la Actividad Matemática: definir, manipular, conjeturar, justificar, restringir y extender.

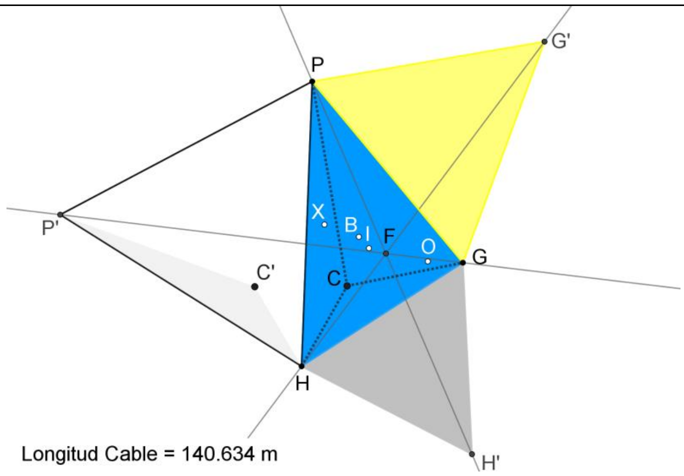
IV.1.3. Conectar Islas

El último problema elegido para esta investigación fue el denominado “Conectar islas”. En el capítulo III se encuentran sus características y tipología. Su enunciado es el siguiente:

> Se quiere conectar tres islas con una red de fibra óptica, de tal forma que se utilice la menor cantidad de cable posible. La distancia entre islas es La Gomera-La Palma 79.322m, La Gomera- El Hierro 64.514m y La Palma-El Hierro 95.932m. ¿En qué lugar se debe ubicar el punto de conexión para minimizar la cantidad de cable necesario?

La quinta sesión del TRPG fue la única que los participantes dedicaron a la resolución de este problema. Se entregó el enunciado (Anexo I) al principio de la sesión, en papel, además de facilitarles acceso al enunciado en el Aula Virtual. El profesor indicó que debían trabajar como en el resto de las sesiones y marcó como tarea, entregar un archivo con la construcción hecha en el aula virtual y un documento escrito con las propiedades observadas, y también el plan y la resolución del problema. Sólo hubo una puesta en común, al final de la sesión, en la que el profesor solicitó a la pareja 2 que presentara lo que habían investigado y le pidió a los participantes que terminaran de resolverlo en casa. La pareja 2 señaló, que el problema que trataban de resolver era equivalente a hallar el punto de Fermat y justificar que la suma de las distancias de este punto a los vértices era mínima. Algo que observaron también el resto de los participantes. La pareja 3 tenía una aproximación casi completa y se compartió en el aula virtual, para que el resto pudiera verla.

Conectar Islas: Construcción de referencia



Objetos de la construcción

G , P YH puntos del plano tal que $\overline{GP}$=79.322 , $\overline{GH}$=64.514 y $\overline{PH}$=95.932

Elementos auxiliares

C punto libre del plano

Longitud Cable valor de la suma de las longitudes de los segmentos CG, CP y CH

B baricentro del triángulo GPH

O ortocentro del triángulo GPH

I incentro del triángulo GPH

X circuncentro del triángulo GPH

F punto de Fermat del triángulo GPH

P' vértice del triángulo equilátero de lado HP

H' vértice del triángulo equilátero de lado GH

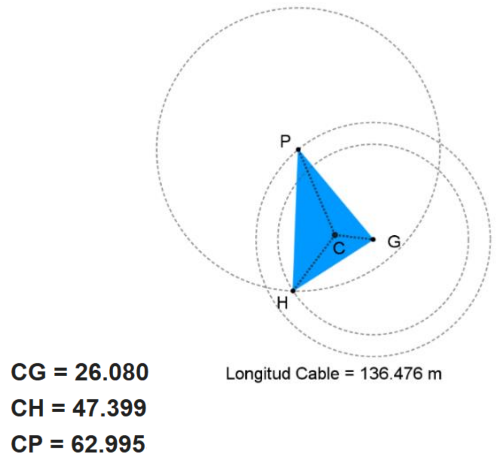
G' vértice del triángulo equilátero de lado PG

C' rotación de 60º del punto C sobre H

Tabla 27: Construcción que se usa de referencia para el análisis del problema 3

Hay que tener en cuenta que cada pareja utilizó en sus construcciones, diferentes nomenclaturas para los elementos de la construcción dinámica. Para describir las acciones que realizaron durante este episodio se usará una notación única y se reproducirán sus acciones y comentarios sobre una construcción de referencia, expuesta en la Tabla 27.

La construcción dinámica de este problema aporta una oportunidad para dar con la longitud del cable y la posición del punto de conexión de forma directa. La figura principal de la construcción es elemental (Figura 13). Se trata de un triángulo del que se conocen las longitudes de sus lados (triángulo GPH), en el que cada vértice representa una isla. Para encontrar la solución al problema, se puede añadir un punto libre sobre el plano, llamado C, que representa el punto de conexión entre las islas y luego hallar la longitud del cable sumando las distancias de los tres vértices al punto de conexión ($Longitud\ Cable = \underline{CG} + \underline{CP} + \underline{CH}$) (Figura 13). El uso de GeoGebra permite dar con una solución de una forma simple, moviendo el punto por el plano e ir acercándose poco a poco al lugar donde es mínimo el valor *Longitud Cable*, a lo que los participantes se refieren como un proceso de búsqueda por "frío y caliente". Una vez averiguada la posición del punto, se hicieron otras preguntas ¿Por qué es esa la solución? ¿Se puede construir el punto de una forma robusta? ¿Cumple otras propiedades dicho punto? Dar respuesta a estas nuevas preguntas convirtió el problema en una tarea para desarrollar el razonamiento matemático de los participantes. Además, si se relajan las condiciones iniciales del problema (Santos-Trigo & Reyes-Martínez, 2018) construyendo un triángulo de dimensiones arbitrarias. Esta decisión servirá para dar una respuesta general, que luego habría que trasladar al caso concreto que plantea el enunciado.



G punto libre del plano (La Gomera)

P punto sobre la circunferencia de centro G y radio 79.322 (La Palma)

H punto de intersección entre las circunferencias de centro G y P con radios 64.514 y 95.932, respectivamente (El Hierro)

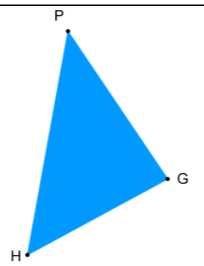
Figura 13: Construcción elemental para explorar el problema 3

Primer episodio: Comprensión del problema

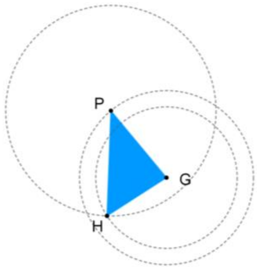
Para realizar una construcción dinámica que permitiera abordar el problema Conectar Islas, las parejas se centraron inicialmente en comprender el significado de "punto de conexión". Una vez interpretaron que se requería encontrar un punto cuya suma de distancias a las islas sea la menor posible, pasaron a buscar cómo representar esa relación en la construcción dinámica. La representación que eligieron para las islas fue la de tres puntos que conformaban los vértices de un triángulo. Algunas parejas usaron imágenes de las islas para ilustrar el contexto no matemático del problema. Para ello, colocaron en el fondo de la construcción imágenes de las tres islas, o del archipiélago, y trazaron cada vértice sobre cada una de las imágenes de las islas. El profesor no intervino en este problema para dar instrucciones de cómo tenían que ser las construcciones.

El análisis de las construcciones realizadas permitió identificar dos momentos clave: la forma en que representan las islas y cómo construyen el punto de conexión. La forma en que representan las islas, tiene que ver con el hecho de trasladar los datos de las distancias que aparecen en el enunciado a la construcción de GeoGebra. Mayoritariamente, las parejas optaron por utilizar tres puntos separados por una distancia arbitraria, en vez de considerar la distancia indicada (Tabla 29). El segundo momento hace referencia al modo de utilizar GeoGebra para buscar y construir el punto de conexión. La mitad de las parejas (marcadas con ***** en Tabla 29) usan un punto libre del plano, C, desde el cuál trazar los segmentos hasta los vértices del triángulo, para definir una variable como la suma de sus longitudes, *LongitudCable* (Tabla 28_Paso 2_Opción 1). De esta forma podrían mover C por el plano y observar la suma de las distancias en cada instante. La otra mitad de las parejas calculó y registró dicha suma en una variable diferente para cada punto que quería verificar (Tabla 28_Paso 2_Opción 2). En la Tabla 28 se muestran las distintas opciones descritas que conforman los pasos básicos para realizar una construcción dinámica del problema.

PASO 1: Puntos que representan las islas



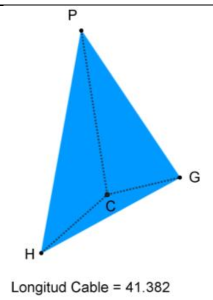
Opción 1: Puntos arbitrarios
Usando la herramienta *Punto* se trazan tres puntos arbitrarios del plano. Luego, usando la herramienta *Polígono* se traza el triángulo con vértices G, P y H.



Opción 2: Tiene en cuenta las distancias
Usando *Punto* se construye G sobre el plano. Luego usando *Circunferencia* se trazan las circunferencias de radios 79322 y 64514 con centro G. Se construye un punto P sobre la primera circunferencia. Se traza la circunferencia de centro P y radio 95932. H es uno de los puntos de intersección de las circunferencias de centros G y P con radios 64514 y 95932. Usando la herramienta *Polígono* se traza el triángulo con vértices G, P y H.

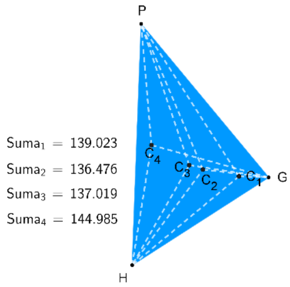
Relajar las condiciones iniciales
Al no tener en cuenta las longitudes que hay entre las islas que da el enunciado, los puntos G, P y H de pueden moverse libremente y con independencia. Al eliminar esas rectricciones es posible usar la construcción dinámica para buscar una solución general al problema. Para luego usar los datos de distancias y dar una solución para un caso particular.

PASO 2: Punto de conexión



Opción 1: Punto libre en el plano
Usando *Punto* se traza C como punto libre del plano. Usando *Segmento* se construyen CG, CP y CH. Se define en la barra de entrada

$$\mathbf{LongitudCable} = \mathbf{CG} + \mathbf{CP} + \mathbf{CH}$$



Opción 2: Varios puntos notables
Siguiendo las definiciones de puntos notables de triángulos se construyen diferentes posibilidades para el punto de conexión C_i $i \in I$. Usando *Segmento* se construyen C_iG, C_iP y C_iH. Se definen en la barra de entrada los valores

$$\mathrm{Suma}_i = C_iG + C_iP + C_iH$$

para cada punto C_i construido.

Encontrar una solución de forma dinámica
Moviendo C, punto libre, se puede encontrar por aproximación el punto donde la Longitud del Cable necesario sería la mínima posible. Una vez conocida la solución, se puede comparar con otros puntos o estudiar que característica cumple dicho punto óptimo.

Tabla 28: Pasos básicos que compondrían los tipos de construcciones del problema 3

En definitiva, se puede decir que los participantes realizaron diferentes construcciones dinámicas (Tabla 28). En unas se tuvieron en cuenta las distancias dadas en el enunciado (Tabla 28_Paso 1_Opción 2) y en otras se partía de puntos arbitrarios (Tabla 28_Paso 1_Opción 1). Además, unas construcciones incluyeron como elemento auxiliar un punto libre que permitía encontrar el punto de conexión buscado directamente (marcadas con *****) y otras no. Al no intervenir el profesor para dar instrucciones sobre cómo tenían que ser las construcciones sólo hubo un cambio por parte de la Pareja 1, quienes en un momento de la resolución vio necesario representar las distancias y decidió cambiar su construcción. La Pareja 5, también barajó incluir las distancias, pero finalmente prefirió seguir con su primera idea y trabajar con puntos arbitrarios.

Utilizando herramientas básicas de GeoGebra, tal como *Circunferencia (centro, radio)* y *Punto* es posible incluir las distancias del enunciado en una construcción dinámica. Se puede afirmar que la falta de conocimientos geométricos para construir un triángulo dada la longitud de sus lados, o la falta de hábito, podrían ser las razones por las que las parejas no usan esa opción. En cambio, hacen uso de la herramienta *Segmento de longitud dada.* Esta herramienta tiene como información de entrada un punto del plano y una longitud siendo la respuesta de GeoGebra un segmento de dicha longitud y un punto que marca el extremo final de este. Usando la herramienta varias veces, se pueden conectar tres segmentos con las distancias dadas. La dificultad radica en hacer coincidir los extremos tal y como se observa en el diálogo presentado en la Tabla 30.

Característica que diferencia los tipos de construcciones	P1	P2	P3	P5	P7	P8
Puntos arbitrarios para representar las islas	□*	□*	-	□	□	□
Tienen en cuenta las distancias	■*	-	□*	▲	-	-

□ Construcción dinámica realizada al comienzo
■ Reconstrucción de la figura al avanzar en la resolución
▲Reconstrucción inconclusa de la figura que no llegan a usar para explorar el problema
* Incluyeron un punto libre para calcular *Longitud Cable*

Tabla 29: Tipos de construcción dinámica que realizan las parejas

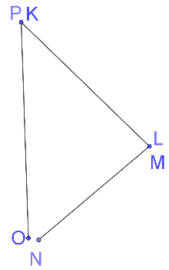
Interacción de la Pareja 5 con GeoGebra
La Pareja 5 usa la herramienta Segmento de longitud dada para construir tres segmentos de longitud MN=64.514, OP=95.932 y KL=79.322 hacen coincidir el principio de uno y con el final de otro, introduciendo en la vista algebraica M=L y K=P. GeoGebra cuando de la misma manera escriben O=N, mueve todos los puntos de manera que O y N siguen sin coincidir.
Sophie: No llega [O no coincide con N], debería llegar. ¿Los podemos unir?
Arrastran varios puntos intentando que coincidan O y N
Evan: Sólo me falta un pisquito… [intenta de nuevo en la vista gráfica escribir O=N] pero, ¿por qué no puedo cambiarlos?
Sophie: No te compliques Evan, no le ponemos las medidas y ya.
Evan: Con la distancia real sería mejor.
Sophie: Pero no lo puedes hacer
Evan: ¿cómo qué no? Sólo falta una miguita

Evan usa el Zoom para reducir la diferencia durante algunos minutos. Mientras Sophie propone estudiar varios puntos notables y observar cuál sería el mejor.
Sophie: Si es una miguita… usamos ese triángulo con las distancias
Evan conjetura que debe cumplirse para cualquier triángulo. Deciden volver al primer triángulo.

Tabla 30: Diálogo sobre el uso de la herramienta *Segmento de longitud dada* que tuvo la Pareja 5

En conclusión, por una parte se pudo evidenciar que la habilidad tecno-matemática (Jacinto & Carreira, 2017), saber usar las herramientas de GeoGebra, y las dificultades cognitivas previas (Iranzo & Fortuny, 2009), el trazado de un triángulo conocidos sus lados, influyen en la forma de abordar el problema. Que los participantes trabajaran la resolución con un tipo de construcción, u otra, marcó en cierta manera sus razonamientos. La construcción que relajaba las condiciones iniciales permitía hacerse cuestiones sobre si la forma del triángulo estaba relacionada con la ubicación del punto. En contra, al trabajar con la construcción que incluía las distancias, la formulación de conjeturas iba dirigida a las características del punto conexión.

El final del episodio de comprensión en este problema es difícil de determinar, ya que la construcción del punto de conexión se entrelaza con la exploración del problema. Lo situaremos en el momento en que las parejas calcularon o representaron con un parámetro, la suma de las distancias del punto de conexión con los vértices del triángulo.

El análisis de este episodio permite determinar algunos resultados relacionados con la

Actividad Matemática de los participantes. La realización de construcciones dinámicas distintas, unas recogiendo todas las condiciones del problema y otras no incluyendo las distancias, así como construcciones que añadieron, en algunos casos, como elemento auxiliar un punto libre para buscar la solución, puso de manifiesto actuaciones que pueden asociarse a la *creación matemática* de los participantes. Por un lado, las parejas que quisieron incluir las distancias en su construcción, se encontraron con las dificultades matemáticas, de construir el triángulo dados sus lados, y de apropiación del SGD, y usar algunas de las herramientas como por ejemplo segmento *dada su amplitud*. Los participantes que lograron salvar las dificultades, consiguieron representar sobre la vista gráfica de GeoGebra una figura que les permitió encontrar el punto de conexión óptimo, para luego explorar sus propiedades. Por otro lado, cuando las parejas trabajaron sin tener en cuenta las distancias, representaban en la vista gráfica un caso general que les permitió dar con una solución general al problema.

Segundo episodio: Exploración

La exploración de este problema que realizaron los participantes con ayuda de la construcción dinámica, se basó en la incorporación de elementos auxiliares a la construcción. En la Tabla 31 se recogen los elementos auxiliares mencionados. La elección de estos elementos surgió principalmente de la consulta en la web de información necesaria para construir puntos notables del triángulo. También se realizaron búsquedas sobre la denominación de los puntos notables a partir de su construcción.

Elementos auxiliares	**P1**	**P2**	**P3**	**P5**	**P7**	**P8**
Longitud Cable	■	■	■	-	-	-
C punto libre del plano	■	■	■	-	-	-
F punto de Fermat	■	■	■	■	■	■
Circuncentro del triángulo GPH	■	■	-	■	-	■
Baricentro del triángulo GPH	-	■	-	■	-	■
Incentro del triángulo GPH	-	-	-	■	■	■
Ortocentro del triángulo GPH	-	-	-	■	■	-
Sumas de distancias de los vértices a los puntos notables	■	-	-	■	■	■

Tabla 31: Elementos que utilizan las parejas en algún momento en episodio de exploración del problema 3

La forma de comprobar la suma de las distancias entre los puntos notables del triángulo y los vértices del mismo, marca una diferencia en la manera de razonar durante este episodio. Las parejas que utilizan el punto C libre en el plano, pueden encontrar la solución de forma directa. A partir de este descubrimiento trabajan de dos formas: por un lado, buscaron si ese punto libre coincidía con algún punto notable conocido; y por otro, estudiaron qué propiedades cumple en ese punto, cuando está en la posición óptima. El resto de las parejas, al no saber dónde estaba el punto de conexión, hacen una exploración por comparación: construyendo distintos puntos notables y verificando cuál de ellos tiene la suma de las distancias a los vértices, menor. Las parejas también aprovecharon la posibilidad de movimiento de GeoGebra para arrastrar los vértices (Islas) y analizar si el punto de conexión coincide para distintos triángulos.

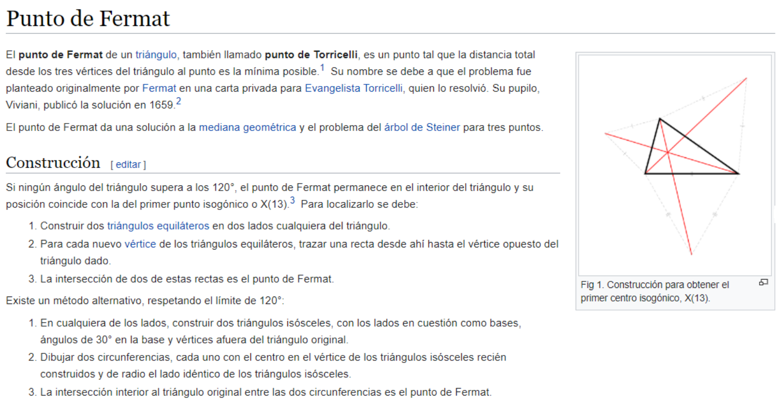
Las conjeturas formuladas por las parejas durante este episodio se incluyen en la Tabla 32. Estas conjeturas son independientes del tipo de construcción realizada, ya que están hechas a partir de una idea común: el punto buscado es uno de los puntos notables del triángulo GPH. El tipo de construcción genera otro tipo de diferencias. Por ejemplo, las parejas 1, 2 y 3, que usan el punto libre, son capaces de verificar si sus conjeturas son ciertas o no, mientras que las parejas 5, 7 y 8, habiendo formulado las mismas conjeturas, no pueden comprobarlas, sólo ver qué punto notable es una mejor aproximación a la solución.

Conjeturas formuladas	**P1**	**P2**	**P3**	**P5**	**P7**	**P8**
× El Circuncentro del triángulo GPH es la solución	■	■	-	■	-	■
× Baricentro del triángulo GPH es la solución	-	■	-	■	-	■
× Incentro del triángulo GPH es la solución	-	-	-	■	■	■
× Ortocentro del triángulo GPH es la solución	-	-	-	■	■	-
× Usando la suma de las distancias a los vértices se pueden ordenar los puntos notables de la siguiente forma: Punto de Fermat-Incentro-Baricentro-Ortocentro-Circuncentro	-	-	-	■	-	-
√ El punto de Fermat del triángulo GPH es la solución	■	■	■	■	■	■
√ La amplitud de cada uno de los ángulos GFP, PFH y HFG es de 120°	-	-	■	-	-	-

Tabla 32: Conjeturas formuladas por las parejas durante el episodio de Exploración para el problema 3

Al revisar las grabaciones y los diálogos de las parejas, se pudo constatar que la formulación de conjeturas precedió a la manipulación del SGD. De esta forma, usaron las herramientas de GeoGebra para trazar las mediatrices, bisectrices, medianas y alturas del triángulo GPH para luego analizar, respectivamente, el circuncentro, incentro, baricentro u ortocentro, de alguna de las maneras descritas anteriormente. Dos de las conjeturas partieron de la observación de la construcción y se representan en la Tabla 32, son la última y antepenúltima. Una de ellas se relaciona con la amplitud de los ángulos con vértice en el punto de conexión y la otra se relaciona con un supuesto orden entre los puntos notables, en referencia a la suma de distancias a los vértices.

Las parejas recurrieron a la búsqueda en la web de elementos que le permitieran encontrar una solución. El resultado de referencia que siguieron fue la definición de Punto de Fermat que se encuentra en la Wikipedia (Figura 14). En dicha entrada pudieron ver que el Punto de Fermat cumplía la condición de ser un punto tal que "la distancia total desde los tres vértices del triángulo al punto era la mínima posible". Además, encontraron instrucciones para su construcción con regla y compás. Descubrir el punto de Fermat y reconocerlo como solución general del problema marca el fin del episodio de exploración. Posteriormente se trataría de buscar una justificación formal de que el punto de Fermat es el punto de conexión buscado.


Punto de Fermat

El **punto de Fermat** de un triángulo, también llamado **punto de Torricelli**, es un punto tal que la distancia total desde los tres vértices del triángulo al punto es la mínima posible.[1] Su nombre se debe a que el problema fue planteado originalmente por Fermat en una carta privada para Evangelista Torricelli, quien lo resolvió. Su pupilo, Viviani, publicó la solución en 1659.[2]

El punto de Fermat da una solución a la mediana geométrica y el problema del árbol de Steiner para tres puntos.

Construcción [editar]

Si ningún ángulo del triángulo supera a los 120°, el punto de Fermat permanece en el interior del triángulo y su posición coincide con la del primer punto isogónico o X(13).[3] Para localizarlo se debe:

1. Construir dos triángulos equiláteros en dos lados cualquiera del triángulo.
2. Para cada nuevo vértice de los triángulos equiláteros, trazar una recta desde ahí hasta el vértice opuesto del triángulo dado.
3. La intersección de dos de estas rectas es el punto de Fermat.

Existe un método alternativo, respetando el límite de 120°:

1. En cualquiera de los lados, construir dos triángulos isósceles, con los lados en cuestión como bases, ángulos de 30° en la base y vértices afuera del triángulo original.
2. Dibujar dos circunferencias, cada uno con el centro en el vértice de los triángulos isósceles recién construidos y de radio el lado idéntico de los triángulos isósceles.
3. La intersección interior al triángulo original entre las dos circunferencias es el punto de Fermat.

Fig 1. Construcción para obtener el primer centro isogónico, X(13).

Figura 14: Entrada sobre el Punto de Fermat en la Wikipedia.

La Pareja 3, una vez encontrado el punto de conexión usando el punto libre C, se preguntó si el punto C cumple alguna condición que lo pueda identificar con algún punto notable conocido. Comprueba que C no coincide con el centro de la circunferencia que pasa por G, P y H, ni con el centro de las circunferencias tangentes a los lados del triángulo. Comprobaron también que las rectas perpendiculares a los lados que pasan por C, no coinciden ni con alturas ni con mediatrices. Esta pareja fue la primera que descubrió que la solución estaba relacionada con el punto de Fermat, tal como se observan en el diálogo que se encuentre en la Tabla 33.

Interacción de la Pareja 3 con su búsqueda en la web

Claudio: Busca Puntos del triángulo cuyas distancias sean mínima a los vértices

Sam escribe "Punto triangulo distancia minima vertices" en el buscador y aparece la siguiente entrada de la Wikipedia como primer resultado de búsqueda.

Leen en voz alta la definición y la construcción, discuten sobre sus pasos.

WIKIPEDIA
La enciclopedia libre

Punto de Fermat

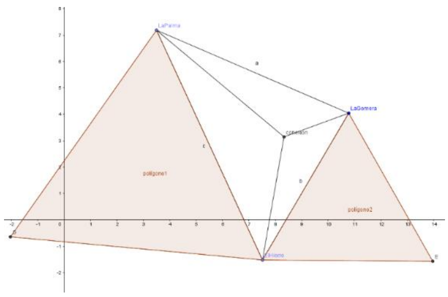
El **punto de Fermat** de un triángulo, también llamado **punto de Torricelli**, es un punto tal que la distancia total desde los tres vértices del triángulo al punto es la mínima posible.[1] Su nombre se debe a que el problema fue planteado originalmente por Fermat en una carta privada para Evangelista Torricelli, quien lo resolvió. Su pupilo, Viviani, publicó la solución en 1659.[2]

El punto de Fermat da una solución a la mediana geométrica y el problema del árbol de Steiner para tres puntos.

Construcción [editar]

Si ningún ángulo del triángulo supera a los 120°, el punto de Fermat permanece en el interior del triángulo y su posición coincide con la del primer punto isogónico o X(13).[3] Para localizarlo se debe:

1. Construir dos triángulos equiláteros en dos lados cualquiera del triángulo.
2. Para cada nuevo vértice de los triángulos equiláteros, trazar una recta desde ahí hasta el vértice opuesto del triangulo dado.
3. La intersección de dos de estas rectas es el punto de Fermat.



Claudio: Vamos a hacerlo, por curiosidad.

Sam: Polígono regular...ah, sería para el otro lado para no pisar [el triángulo GPH]...Vale es que depende del sentido que le des.

Trazan los triángulos equiláteros de lados GH y PH de forma que no se solapen con el triángulo GPH

Claudio: Y ahora decía que estaba...decía que así [*traza el segmento GP*]y así [*traza el segmento PH*].

Sam: ¿Cómo seguía? Trazar una recta desde ahí hasta el vértice opuesto.

Claudio: Es esto.

Sam: La intersección de estas dos rectas es el punto de Fermat... Vale esto es una construcción.

Claudio: ¿y por qué?

Sam: ¿por qué minimiza? ¿verdad?

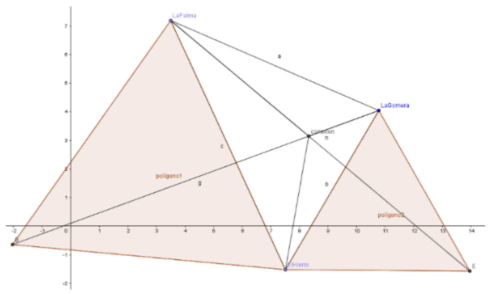


Tabla 33: Diálogo de la Pareja 3 para construir el punto de Fermat basándose en la entrada de la Wikipedia

La acción de formular conjeturas se vio influenciada al integrar las ventajas que aporta GeoGebra. El *razonamiento matemático* de los participantes se puso de manifiesto de forma diferente dependiendo de su interacción con GeoGebra y, por tanto, el uso del SGD en la resolución de problemas influyó en su Actividad Matemática. Durante este episodio se pudieron observar diferencias a la hora de explorar definidas por la manera en que las parejas usaron GeoGebra. Si utilizaban el punto libre del plano y el valor *LongitudCable,* se podía observar que un punto notable construido no coincidía con el punto de conexión, de esta forma lo descartaban directamente. En cambio, si sólo construían los puntos notables y los comparaban sabían cuál era mejor, pero no si alguno de ellos era el punto buscado.

Tercer episodio: Búsqueda de múltiples aproximaciones

Los participantes en la investigación dedicaron poco tiempo a formalizar los planes o caminos a la solución que habían trazado debido a que sólo se dedicó una sesión del TRPG al problema Conectar Islas. En ese tiempo, las parejas señalaron tres propiedades, dos relacionadas con el punto de Fermat y la tercera considerando la función LongitudCable como se observa en la Tabla 34.

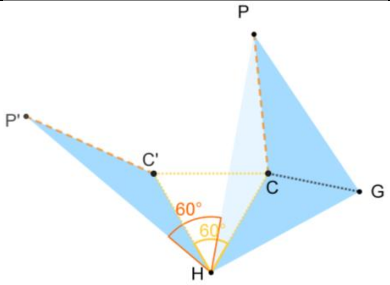
Propiedades observadas	AG3	AA3
La amplitud de cada uno de los ángulos GFP, PFH y HFG es de 120°	●	○
Las circunferencias que inscriben a los triángulos equiláteros se cortan en F	○	○
Longitud cable se puede expresar como una función	○	●

Tabla 34: Lista de propiedades observadas por los participantes y aproximación

Teniendo en cuenta estas propiedades (Tabla 34), las parejas intentaron buscar una aproximación formal a la solución. Consideraron necesario, por tanto, justificar que el Punto de Fermat era el punto de conexión buscado. Descubrir que los ángulos con vértice en F tenían amplitud constante de 120° y que las circunferencias que inscribían a los triángulos equiláteros se intersecaban en F, llevó a relacionar ambas observaciones con los conceptos de ángulo central y ángulo inscrito de una circunferencia. Esta idea les sirvió para justificar porque la amplitud de los ángulos era 120°. Ahora bien, no sirvió para justificar por qué el punto de Fermat era el mejor punto de conexión.

Las dos aproximaciones a la solución del problema que trabajaron los participantes, se denominaron **aproximación geométrica** (**AG3**) y **analítica** (**AA3**). En la Tabla 35 se presentan los diferentes pasos seguidos. La aproximación geométrica es una demostración conocida para este problema y se puede encontrar en la red.

AG3: Aproximación geométrica



Nota: Ángulos del triángulo GPH menores de 120°

Paso 1:

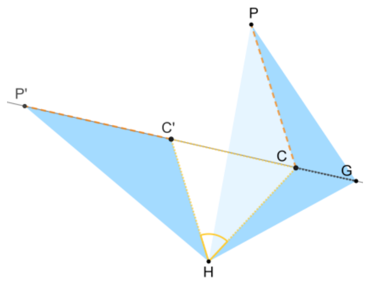
Transformar la figura inicial rotando 60° en sentido antihorario el triángulo PHC. De esta forma:

$$\overline{PC} = \overline{P'C'}$$

$$\overline{HC} = \overline{HC'} = \overline{CC'}$$

Por tanto, hay que encontrar un punto C tal que,

$$\overline{P'C'} + \overline{C'C} + \overline{CG}\ \textit{sea lo mínimo posible}$$



Paso 2:

Debido a que la distancia más corta entre P' y G es la longitud del segmento que los une. La solución se alcanzará cuando P', C', C y G estén alineados.

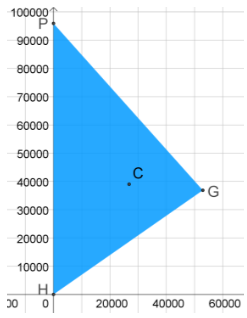
Es decir, se tiene que cumplir que

$$\widehat{HC'P'} + \widehat{HC'C} = 180° \xRightarrow{\widehat{HC'C}=60°} \widehat{HC'P'} = 120°$$

$$\widehat{C'CH} + \widehat{HCG} = 180° \xRightarrow{\widehat{C'CH}=60°} \widehat{HCG} = 120°$$

Como los ángulos del triángulo son menores de 120°, se pueden alinear los puntos como muestra la imagen anterior.

AA3: Aproximación analítica

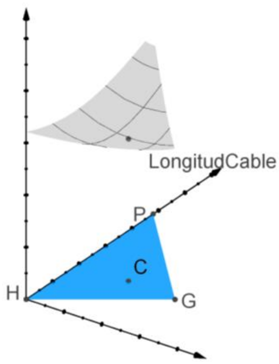


Paso 1:

Supongamos que H está en el origen de coordenadas, entonces P será el punto (0, 95,932) tenemos entonces que:

$$G = (52{,}944\ , 36{,}865)$$

Sea $C = (x, y)$ un punto del plano. La longitud del cable $LongitudCable = d(C, G) + d(C, P) + d(C, H)$

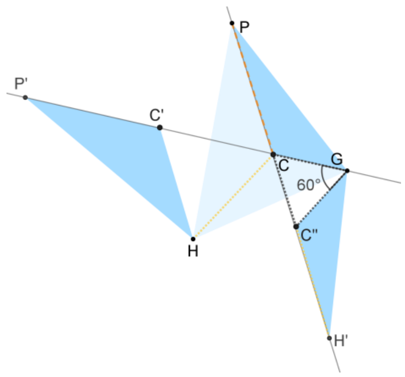


Paso 2:

Se define la función de dos variables

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y - 95{,}932)^2} +$$
$$+\sqrt{(x - 52{,}944)^2 + (y - 36{,}865)^2}$$

El punto buscado donde se encuentra el valor mínimo de $f(x, y)$ dará las coordenadas del punto de conexión buscado. Para ello, se calculan las derivadas parciales:



Paso 3:

De forma análoga se puede concluir que el punto de conexión buscado estará en la recta H'P.

Por tanto, el punto de intersección de ambas rectas es el punto de conexión buscado. Este punto es F, punto de Fermat del triángulo GPH.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+(y-95{,}932)^2}} + \frac{x-52{,}944}{\sqrt{(x-52{,}944)^2+(y-36{,}865)^2}}$$

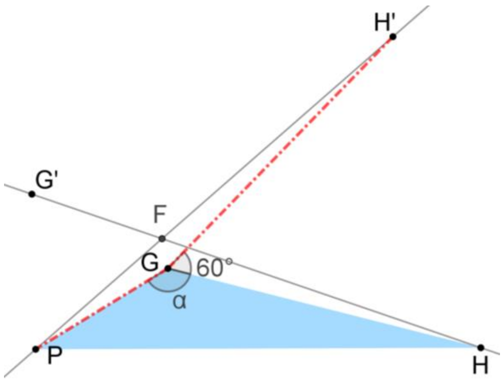
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y-95{,}932}{\sqrt{x^2+(y-95{,}932)^2}} + \frac{y-36{,}865}{\sqrt{(x-52{,}944)^2+(y-36{,}865)^2}}$$

Paso 3:

Se resuelve el sistema con apoyo computacional

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow F = (26{,}960\,,38{,}985)$$

Un ángulo del triángulo GPH mayor de 120°



Nota: Cuando α>120° el ángulo PGH' es mayor de 180°, por lo que el punto de Fermat F queda fuera del triángulo. En este caso el punto de conexión buscado sería G**.**

Paso 4:

Cálculo de las distancias de F a los vértices del triángulo GPH:

El punto F es el punto de conexión buscado. Las distancias serían:

$$d(F,G) = 26{,}070$$

$$d(F,P) = 63{,}006$$

$$d(F,H) = 47{,}400$$

Nota: El procedimiento tiene un coste operacional elevado.

Tabla 35: Pasos para la aproximación geométrica y analítica que aparecieron en la sesión del taller

Las parejas dedicaron los últimos minutos de la sesión a dar una respuesta numérica al problema. Para dar esa respuesta en los mismos términos que pedía el enunciado, los participantes que no habían tenido en cuenta las distancias entre islas en su construcción se encontraron con que necesitaron, por tanto trasladar esa información a su construcción. En general, lo resolvieron arrastrando los puntos G, P y H, es decir, poniendo aproximadamente los puntos a la distancia dada en el enunciado. De esta forma, las distancias de los vértices al punto de Fermat coincidieron con la respuesta del problema. Fueron capaces de pasar de lo general a lo particular con ayuda de la tecnología (Contreras, 2014).

Se puede concluir que la justificación estuvo precedida por la observación y la formulación de conjeturas basadas en la construcción de diferentes puntos notables del triángulo, hasta que, en último lugar, construyeron el Punto de Fermat y formularon nuevas propiedades relacionadas con él (Tabla 34). Lo que permite afirmar que en la búsqueda de una aproximación para la solución de este problema se evidenciaron conexiones con el *razonamiento matemático*. También se pudo observar que los participantes, guiados por la Pareja 3, fueron capaces de entender y transcribir la aproximación geométrica (AG3), conectando los pasos de la construcción con GeoGebra, con los de la demostración formal. Esto se evidenció, cuando realizaron la construcción dinámica cada uno de los pasos de la demostración y luego escribieron formalmente en uno de los documentos entregados como tarea del TRPG. Evidencia de la *percepción matemática* de los participantes, otra de las componentes de la Actividad Matemática.

IV.2. RESULTADOS DEL ANÁLISIS POR PAREJAS

En este apartado se analizan los datos obtenidos en las sesiones del TRPG desde otra perspectiva. El interés radica en establecer tipologías de comportamiento de los participantes cuando usan GeoGebra para abordar los problemas propuestos. Al realizar el análisis por problema y obtener los resultados presentados en el apartado anterior, se resaltaron los aspectos más relevantes de las componentes de la Actividad Matemática cuando se usa GeoGebra. Realizar dicho análisis conllevó estudiar las acciones que realizó cada pareja con GeoGebra cuando resolvían los problemas. De esta forma, se pudo comprobar que existían diferencias entre las parejas en dos dimensiones que se desarrollarán en el siguiente apartado y hemos denominado Construcción y Dinamismo.

IV.2.1. Construcción

En el Marco Conceptual se identificó la *creación matemática* con la realización de una construcción dinámica que **incorpora las características clave del problema** (Capítulo II). Las características clave para cada uno de los problemas fueron identificadas en el Análisis por Problema para caracterizar los tipos de construcción. Para el primer problema, se vio la importancia de que se conservará la propiedad de tangencia de las rectas al manipular los radios, centros y posición de las circunferencias (Tabla 11). Para el segundo problema, la clave de la construcción estaba en que se permitiera el movimiento del ángulo, animando un punto sobre el lado del cuadrado (Tabla 19). Finalmente, para el tercer problema, la construcción debía incluir las distancias entre islas y un punto libre como elemento auxiliar para determinar en qué punto se podría encontrar una solución(Tabla 29).

Este apartado del análisis por parejas, recoge la información de cada pareja fijando la atención en las características claves de las construcciones dinámicas presentadas, es decir, se revisó si en las construcciones que hicieron por su cuenta (sin intervención del profesor) consideraron los elementos señalados. Además, de una forma más descriptiva se presentaron semejanzas y diferencias entre los comportamientos de las parejas en el episodio de comprensión de la resolución de los problemas (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013).

Cuerdas Iguales						
Característica clave	**P1**	**P2**	**P3**	**P5**	**P7**	**P8**
Pierde la propiedad de tangencia	-	▫	▫	-	▫ ↓	▫ ↓
Conserva la propiedad de tangencia	▫	▪	▪	▫	▪	▪
▫ Construcción dinámica realizada al comienzo ▪ Reconstrucción de la figura al avanzar en la resolución ↓ Intervención del profesor						

Tabla 36: Características clave del Problema Cuerdas Iguales

En la Tabla 36 se puede observar que, en el problema Cuerdas Iguales hay 3 tipos de comportamiento de las parejas. Las parejas 1 y 5 se fijan desde el inicio en la propiedad de tangencia, buscando y eligiendo de entrada la herramienta *Tangentes*. Cuando se le plantean dudas para su uso, la Pareja 1 recurre a la información de la pantalla para saber el orden en que debe elegir los objetos, mientras que la Pareja 5 tantea varios elementos hasta conseguir el resultado buscado.

Las parejas 2 y 3 también se centran en construir rectas tangentes, pero comienzan utilizando la herramienta *Recta* obteniendo una construcción no robusta. Según construyen las rectas, se cuestionan lo que han hecho, al arrastrar comprueban que hay casos en los que se ve claramente que las rectas son secantes a las circunferencias, al percatarse de que no son tangentes exactamente vuelven a empezar. Por último, las parejas 7 y 8 también comienzan usando la herramienta *Recta*, consiguen una figura en la que las rectas son aparentemente tangentes a las circunferencias. Prosiguen representando las cuerdas y observando que sus longitudes son iguales o, por lo menos, aproximadamente iguales. A diferencia de las parejas 2 y 3, requieren la intervención del profesor para darse cuenta de la pérdida de la propiedad de tangencia cuando se arrastran los elementos. Teniendo en cuenta los comportamientos descritos, puede considerarse como un primer resultado que las parejas 1, 2, 3 y 5 fueron capaces de realizar una construcción dinámica que incorpora la característica clave del problema (▪), mientras que 7 y 8 no (×) (Tabla 41).

En el caso del problema Ángulo 45°, una vez han construido el cuadrado, la elección de la herramienta *Ángulo* y *Ángulo dada su amplitud* marcó la diferencia en la manera de actuar de las parejas. En general, las parejas tuvieron como primera idea utilizar la herramienta *Ángulo* para trazar el ángulo de 45° (Tabla 37) y todas, menos la Pareja 8, la descartan por tener que ajustar el ángulo manualmente.

Interacción de la Pareja 7 con GeoGebra
La Pareja 7 tiene construido el cuadrado en la vista gráfica y busca la forma de construir el ángulo EAF con una amplitud de 45°. Phineas maneja el ordenador.
Isabella: Tú puedes poner la primera raya como tú quieras y, luego, medir los 45°y hacer la otra.
Phineas usa la herramienta Segmento, apoyándose en A y un punto arbitrario sobre CD construye AF. Luego, selecciona la herramienta Ángulo, pincha sobre AF y da algunas vueltas con el cursor dudando donde colar el punto E.
Isabella: No. ¿No te da más opciones? Arriba...Ahí, Ángulo dada su amplitud.

Tabla 37: Diálogo sobre la construcción del ángulo EAF que mantuvo la Pareja 7

Utilizar la herramienta *Ángulo dada su amplitud* les produjo algunas dificultades, posiblemente porque no tenían experiencia con ella. Después de algunos intentos las parejas 1, 3, 5 y 7 lograron su objetivo, obtener un ángulo de 45° con vértice en A y que se pudiera mover al animar o arrastrar el punto E (Tabla 38).

Ángulo 45°						
Característica clave	**P1**	**P2**	**P3**	**P5**	**P7**	**P8**
No permite el movimiento controlado	-	□ ↓	-	-	-	□ ↓
Permite el movimiento controlado	□*→■	■	□	□	□	■
□ Construcción dinámica realizada al comienza ■ Reconstrucción de la figura al avanzar en la resolución ↓ Intervención del profesor * Usaron la herramienta *Polígono* para construir el cuadrado						

Tabla 38: Características clave Ángulo 45°

Las parejas 2 y 8 pasaron al episodio de exploración con construcciones que no permitían arrastrar el ángulo. De nuevo es necesaria la intervención del profesor para que se den cuenta de las limitaciones de su construcción. La Pareja 8 se conformó con representar la figura ajustando los puntos E y F a mano, para que el ángulo EAF midiera 45° (Tabla 39).

Interacción de la Pareja 8 con GeoGebra
La Pareja 8 tiene construido el cuadrado, y construyen un triángulo AEF apoyándose en A y en dos puntos arbitrarios de los lados BC y CD. Lo borran debido a que EAF no mide 45º. Prueban la herramienta Ángulo dada su amplitud, pero en el primer intento se apoyan en AB y retroceden. Vuelven a la idea de construir primero el triángulo.
Sabine: Simplemente, tienes que mover este punto [E] y este puntito [F].
Wolfgang mueve E y F a una posición que aparentemente es la buscada.
Wolfgang: No, pero tendrían que ser los dos iguales [AE y AF] ¿no?....
Sabine: Sí... muévelo un pelín para abajo.
Wolfgang: Ahora sí...
Sabine: Prueba el ángulo.
Usando la herramienta Ángulo, construyen el ángulo EAF. Al no dar exacto 45º Wolfgang lo borra, pero Sabine le pide que lo vuelva a construir.
Sabine: Muévelo [E], ahora mueve este [F].
Prueban un rato y consiguen que el ángulo EAF mida exactamente 45º.

Tabla 39: Diálogo de la pareja 8 sobre la construcción del ángulo EAF

Por otro lado, la Pareja 2 descartó ese camino; en vez de ello usó la herramienta *Ángulo dada su amplitud*, pero para trazar un ángulo de 22,5° y otro de 67,5° con vértice en A y sobre el lado AB, obteniendo un ángulo de 45° fijo y centrado en el interior del cuadrado (Figura 15).

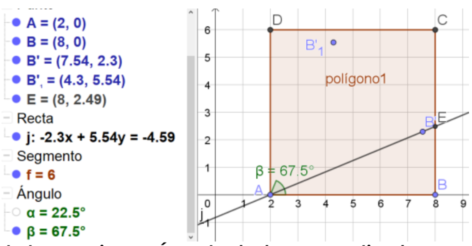


Figura 15: Uso de la herramienta *Ángulo dada su amplitud* por parte de la Pareja 2

En definitiva, se podría considerar que todas las parejas comienzan presentando el mismo tipo de comportamiento al inicio de la construcción, sin embargo, rápidamente se observan diferencias. Por un lado, están las parejas 1, 3, 5 y 7 que se dan cuenta de que su construcción les debe permitir mover el ángulo para explorar el problema (■) y, por otro lado, están las parejas 2 y 8 que necesitan la intervención del docente para darse cuenta de este hecho (×)

(Tabla 41). De forma paralela se observaron dos formas distintas de usar la herramienta *Ángulo dada su amplitud*, una que permite el movimiento del ángulo y otra que no (Figura 15).

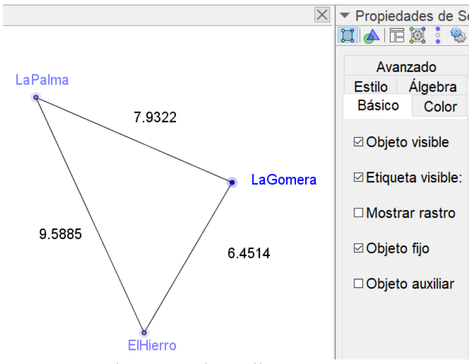


Figura 16: Marcado de la propiedad Objeto fijo de los puntos por parte de la Pareja 3

En el problema Conectar Islas, solo la Pareja 3 comienza la construcción trasladando los datos de las distancias del enunciado. Usaron la herramienta *Segmento de longitud dada* para las tres distancias. Hicieron coincidir los extremos de los segmentos manualmente y, para que no se deformara la construcción, "fijaron" los puntos al plano modificando está característica en la ventana *propiedades* de los objetos en GeoGebra (Figura 16).

Conectar Islas						
Característica clave	**P1**	**P2**	**P3**	**P5**	**P7**	**P8**
Puntos arbitrarios para representar las islas	□*	□*	-	□	□	□
Tienen en cuenta las distancias	■*	-	□*	▲	-	-

□ Construcción dinámica realizada al comienzo
■ Reconstrucción de la figura al avanzar en la resolución
▲Reconstrucción inconclusa de la figura que no llegan a usar para explorar el problema
* Incluyeron un punto libre para calcular *Longitud Cable*

Tabla 40: Características clave Conectar Islas

Las parejas 1 y 5 se plantearon incluir las distancias, pero no les resultó sencillo y lo dejaron para explorar otras posibles soluciones. Más adelante, tras haber explorado el problema, la Pareja 1 retomo la idea e incluyó las distancias en su construcción (Tabla 40). La decisión de estas tres parejas (1, 3 y 5) tuvo que ver con la falta habilidad con el uso de la herramienta *Segmento de longitud dada* y la falta de conocimientos geométricos para construir un triángulo dada la longitud de sus lados.

No pareció que las parejas 2, 7 y 8 llegaran a plantearse incluir los datos de distancias desde el principio de la resolución, considerando que el estudio de un caso general daría una solución al problema (Tabla 40). A partir de los comportamientos descritos se consideró que las parejas 1 y 3 fueron capaces de presentar una construcción dinámica que incluyera las características clave de este problema (■), mientras que 2, 5, 7 y 8 no (×) (Tabla 41).

Pareja	Acción	**Cuerdas Iguales**	**Ángulo 45º**	**Conectar islas**
P1	Incorporar características clave	■	■	■
P2	Incorporar características clave	■	×	×
P3	Incorporar características clave	■	■	■
P5	Incorporar características clave	■	■	×
P7	Incorporar características clave	×	■	×
P8	Incorporar características clave	×	×	×

Tabla 41: Parejas cuya capacidad de incorporar características clave fue identificada en cada problema

Esta capacidad de incluir las características clave es un aspecto de la *creación matemática* de los participantes y podría servir para caracterizar a las parejas. La característica observada se describiría como:

- Identificar las **características clave** del problema e **incorporarlas** a la construcción dinámica. (■)

Durante la resolución de los problemas hubo otras acciones puntuales de las parejas que se pueden relacionar con su capacidad para que una construcción dinámica resalte objetos o propiedades matemáticas relevantes. Esta capacidad se cruza con cómo usan, las parejas, el movimiento de los objetos construidos con GeoGebra. En el siguiente apartado se describen momentos del episodio de exploración o búsqueda de la solución donde las parejas cuantifican atributos o añaden elementos auxiliares para observar sus propiedades cuando se mueven. En la elección de estos elementos auxiliares y la cuantificación de unos atributos frente a otros, los participantes, muestran su *creación* y *percepción matemática* al usar GeoGebra.

IV.2.2. Dinamismo

Una característica que asociamos al *razonamiento matemático* es la habilidad de usar el movimiento de los objetos construidos, principal característica de los SGD, en distintos momentos del proceso de resolución de un problema. Tal y como se indica en el Marco Conceptual, observar el movimiento en GeoGebra permite realizar conjeturas y encontrar formas de justificarlas. Realizar la prueba del arrastre, es decir, **mover algunos objetos para comprobar que las condiciones matemáticas** del problema se conservan, es uno de los elementos que se señalaron y aparecen en las resoluciones de los participantes (Cap.IV.1). Otro elemento señalado, en la sección anterior, fue que **mover los objetos de una construcción dinámica, al tiempo que señalan alguna de sus características**, lleva a los participantes a hacer observaciones y conjeturas que terminan en el descubrimiento de propiedades. En el primer problema, usar el arrastre para comprobar si se conservan las condiciones matemáticas del enunciado fue una de las acciones que diferenció el comportamiento de las parejas. En el segundo problema, una construcción que permitía mover el ángulo, abrió la puerta para observar características y formular diversas conjeturas. En el tercer problema, la cuantificación de ciertos atributos, integrada con el movimiento, marcó las diferencias entre los participantes que podían comprobar sus conjeturas frente a los que no.

Las parejas 1, 2 y 3 usan el movimiento en la construcción del problema Cuerdas Iguales para realizar una prueba de arrastre, verificando que, al mover los centros y los puntos que determinan los radios de las circunferencias, se siguen manteniendo las propiedades de tangencia de las rectas y que, para cualquier caso particular, la longitud de las dos cuerdas es igual (Marcados con √ en la Tabla 43). Un ejemplo de la forma de proceder que resulta ser un indicador para caracterizar el comportamiento se puede ver en la Tabla 42, donde la Pareja 1 manipula la construcción para verificar que recoge las condiciones del enunciado.

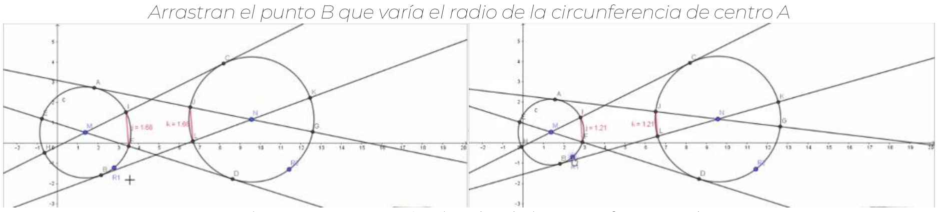
Nami: Ya está, en GeoGebra está. Porque date cuenta que, claro, lo haces más grande o más pequeño y te da igual ¿verdad?

Nicol: Sí, exacto. Si muevo uno [*secuencia 1*] y muevo el otro [*secuencia 2*] también… también pasa. Y si lo muevo en plan girarlo también. Y si lo hago más lejos es más pequeño [*secuencia 3*]

Nami: Entonces hay que ver que esa distancia de aquí a aquí [*señala los extremos de una cuerda*] es la misma que la de aquí a aquí.

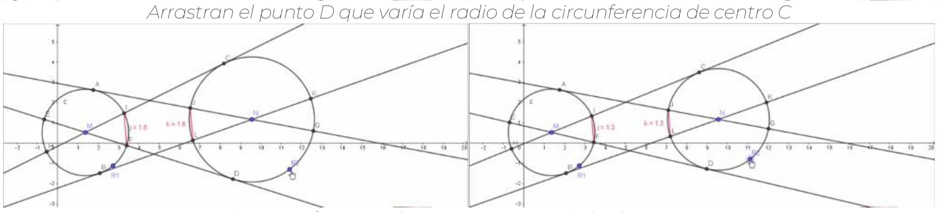
Arrastran el punto B que varía el radio de la circunferencia de centro A

Secuencia 1



Arrastran el punto D que varía el radio de la circunferencia de centro C

Secuencia 2



Arrastran la circunferencia de centro C que varía la distancia entre A y C

Secuencia 3

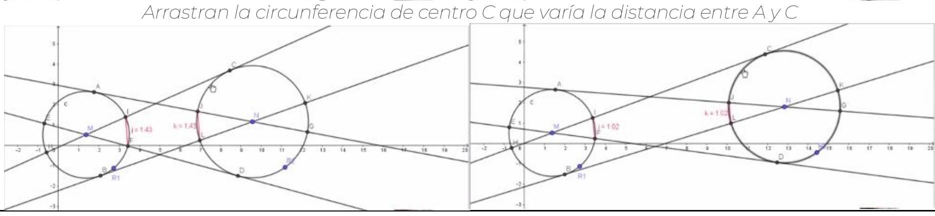


Tabla 42: Transcripción del vídeo 2017-09-26 Pareja 1_Cuerdas (min 11:50)

Al revisar las grabaciones de las resoluciones de este problema por parte de las parejas, se pudieron observar formas de actuar con el SGD relacionadas con el dinamismo y el establecimiento de conjeturas. Estas parejas fueron la 1, 2, 3 y 5 quienes usaron el movimiento para discutir varias ideas y verificar sus conjeturas (Marcados con un ↕ en la Tabla 43).

Cuerdas iguales						
Acción realizada	**P1**	**P2**	**P3**	**P5**	**P7**	**P8**
Mover y Comprobar	√	√	√	×	×	×
Mover, observar y conjeturar	↕	↕	↕	↕	×	↕

Tabla 43: Acciones identificadas al resolver el problema Cuerdas Iguales

Por ejemplo, cuando las parejas 2 y 3 añadieron la bisectriz de las rectas tangentes y se dieron cuenta de que las cuerdas quedaban divididas en dos partes iguales. Este hecho resultó ser un hecho relevante para resolver el problema. La Pareja 3 reforzó esta idea, al observar que la mediatriz de las cuerdas coincidía con la bisectriz (Tabla 44). Por otra parte, hay parejas que no acompañaban de movimiento sus deducciones (Marcados con un × en la Tabla 43), como por ejemplo, la Pareja 7 que trazó la bisectriz, pero no arrastró ningún objeto ni analizó el movimiento o los atributos en distintos casos, es decir, dio por supuesto que para un caso general lo que observaba en el caso particular que había representado, se cumplía.

Razonamiento de la Pareja 3 para formular una conjetura	
Profesor:	[Sam] va a contar los avances que ha hecho él, que no quiere decir que los que ustedes tengan, aunque sean distintos, no sean válidos para continuar los razonamientos. Él va a contar lo que ellos dos [Pareja 3] han visto.
Sam:	Primero de todo, obvio, no lo tenemos resuelto, simplemente hicimos la construcción como todos ustedes y nos pusimos a hablar un poco. Y lo que hicimos fue trazar la recta bisectriz del ángulo que establecimos aquí [IAJ], entre las rectas que pasan por el centro y son tangentes a la otra circunferencia. Y llegamos a la conclusión de que, por trigonometría, simplemente hay que probar que este trocito de segmento [IP], desde I hasta el punto de la bisectriz que corta la cuerda, y este trocito [KQ] son iguales... Además, este punto de intersección [P] es el punto medio, porque hubo un momento que trazamos mediatrices y coincidían totalmente con la bisectriz, pero aun así no somos capaces de probar que esos trocitos de cuerda son iguales.

Tabla 44: Exposición de Sam al resto del grupo sobre sus avances en el problema

Una idea frecuente durante la resolución del primer problema, fue la de comprobar si los ángulos IAJ y KCL tenían la misma amplitud. Por una parte, las parejas 1 y 8 movieron las circunferencias hasta visualizar un caso en el que claramente fueran diferentes y, por otra, las parejas 2 y 3 trazaron los ángulos y cuantificaron su amplitud, además de observar que, al mover las circunferencias, estos no coincidían. En este sentido, aunque los participantes llegaron a la misma conclusión, la forma de llegar a ella podría considerarse un indicador del grado de adquisición de la habilidad para usar tecnología en la resolución de problemas (Iranzo & Fortuny, 2009). Esto es, las parejas 2 y 3 mostraron un mayor conocimiento sobre las posibilidades que brinda el SGD para cuantificar los ángulos, por el contrario, la pareja 1 y 8 que querían verificar su idea y optaron por mover los elementos.

En el segundo problema, la mayoría de las parejas (1, 3, 5 y 7) se preguntaron por la relación entre los dos polígonos o cuadriláteros, que se formaban al dividir el triángulo por la diagonal del cuadrado, a la vez que movían el punto E. Es decir, movieron los objetos de su construcción dinámica, al tiempo que señalaban alguna de sus características (Marcados con un ⇕ en la Tabla 45).

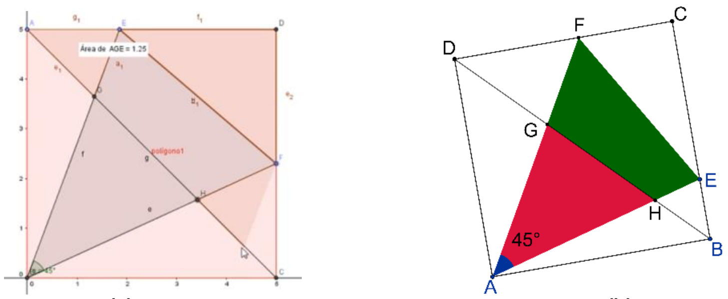
Ángulo 45°						
Acción realizada	**P1**	**P2**	**P3**	**P5**	**P7**	**P8**
Mover y Comprobar	√	√	√	√	×	×
Mover, observar y conjeturar	⇕	×	⇕	⇕	⇕	×

Tabla 45: Acciones identificadas al resolver el problema Ángulo 45°

Se observó que las parejas 3, 5 y 7 fueron las que formularon más conjeturas, lo que se puede explicar con el hecho de que estas parejas interactuaron más con el SGD y, exceptuando la Pareja 1, fueron las que realizaron una construcción que permitía el movimiento controlado desde el principio. La Pareja 1, aunque realizó el mismo tipo de construcción, pasó directamente al episodio de búsqueda de aproximaciones a la solución, deteniéndose menos en la exploración de propiedades. La Pareja 2 y la Pareja 8 actuaron de otra forma.

La Pareja 2 formuló primero cuál sería la relación entre los polígonos, para luego pasar a comprobarla cuantificando las áreas y moviendo E. Además, esta pareja estableció las conjeturas, después de rehacer la construcción dinámica para mover el ángulo.

La Pareja 8, debido a que no realizó una construcción que permitía el movimiento de E, dedujo la relación después de conjeturar la igualdad de la suma de las áreas de los triángulos exteriores. En definitiva, ser observó que, el uso del movimiento facilitó a cuatro parejas la deducción de la relación buscada, para la Pareja 2 fue un recurso para comprobar que estaba en lo cierto y la Pareja 8 no lo necesitó, aunque, después de la puesta en común, cambiaron su construcción para ver las ideas aportadas por sus compañeros y verificar sus propias conjeturas.



(a) (b)

Figura 17: Captura de la pantalla de la pareja 8 mientras trazan los triángulos que rodean al triángulo AEF

Este comportamiento de la Pareja 8, la cual no empleó la posibilidad de mover los objetos, se apoyó en la cuantificación de las áreas de varios triángulos, que sirvió para confirmar sus ideas. En lugar de trazar los polígonos en los que se dividía el triángulo AEF (Figura 17_b) se fijaron en los cinco triángulos que lo rodean (Figura 17_a). Trazaron los cinco triángulos y observaron que la suma de las áreas de los triángulos DGF, ECF y BEH coincide con la suma de las áreas de los triángulos AGD y ABH. Como además saben que la diagonal divide al cuadrado en dos partes de igual área, llegan a la misma conclusión que sus compañeros. Trabajar con una construcción que no permitiese el movimiento controlado del ángulo, influyó notablemente en este razonamiento diferente. Se evidenció también que, aunque no hicieron uso de todas las posibilidades del SGD, los estudiantes son capaces de dirigir sus razonamientos para avanzar en la resolución del problema.

Otro momento, en el que se diferencia el comportamiento de las parejas por acompañar su *razonamiento matemático* con movimiento (↕), es el que se produce cuando observaron los polígonos, cuando E coincidía con un vértice del cuadrado. Esta acción fue suficiente para argumentar que sus áreas eran iguales, sin necesidad de fijarse en su valor numérico. La Pareja 1 llegó a formular dicha conjetura en los siguientes términos: "si E coincide con los vértices del cuadrado B y D, ambos polígonos son congruentes" (Figura 18). Esta conjetura fue formulada por todas las parejas, excepto por la pareja 8, se puede afirmar que lo consideraron como un caso particular del problema, con una justificación evidente.

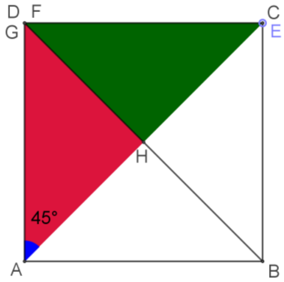


Figura 18: Triángulos rectángulos que se forma al mover E hasta el vértice B

Cuando resolvieron el tercer problema, se puede afirmar que, los elementos elegidos para explorar el problema, marcaron de algún modo la forma de usar el dinamismo de GeoGebra. Por un lado, la Pareja 7 y la Pareja 8, que construyeron varios puntos notables de triángulos analizando posibilidades para el punto de conexión C (Figura 19), realizaron la comparación de los valores de las sumas de las distancias sin utilizar el movimiento de los objetos para su comprobación (Marcadas con × en la Tabla 46).

Conectar islas						
Acción realizada	**P1**	**P2**	**P3**	**P5**	**P7**	**P8**
Mover y Comprobar	√	√	√	√	×	×
Mover, observar y conjeturar	↕	↕	↕	×	×	×

Tabla 46: Acciones identificadas al resolver el problema Conectar Islas

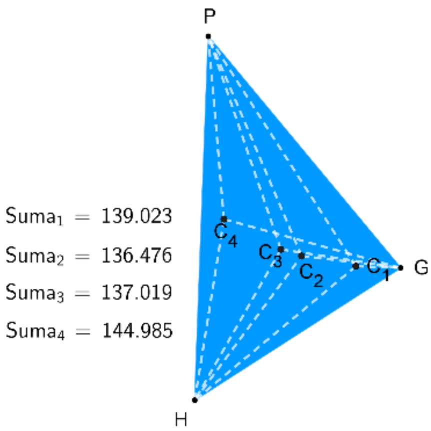
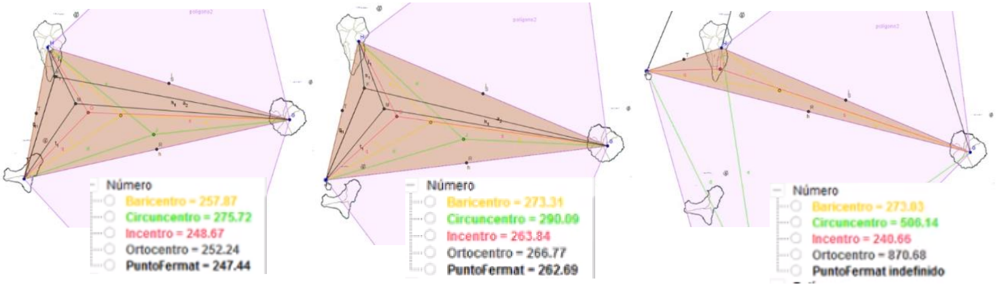


Figura 19: Construcción de puntos notables, junto a la suma de las distancias de ellos hasta los vértices

Por otro lado, la Pareja 5, que también construyo varios puntos notables, sí razonó utilizando el movimiento. Para ello arrastraron los vértices del triángulo (Figura 20) y comprobaron conjeturas sobre qué puntos notables eran mejores que otros (Aparece √ en la Tabla 46).



(a) (b) (c)

Figura 20: Movimiento de un vértice del triángulo, que hace la Pareja 5 mientras observa las sumas de distancias a cada centro

Finalmente se pudo observar que, la Pareja 1, la Pareja 2 y la Pareja 3 utilizaron el movimiento del punto libre C y cuantificaron el valor Longitud Cable para comprobar sus conjeturas, al tiempo que arrastraban el punto C, logrando encontrar el punto de conexión de los cables buscándolo por "frío y caliente". Además, estudiaron si ese punto coincidía con algún punto notable del triángulo que ellos habían considerado (Marcadas con √ y ↕ en la Tabla 46).

En la Tabla 47 se resumen las acciones relacionadas con el movimiento en una construcción dinámica de GeoGebra de las seis parejas, es decir, con el dinamismo considerado como característica que facilita la resolución del problema durante el episodio de exploración y búsqueda de múltiples aproximaciones.

La tabla siguiente facilita la visualización para caracterizar las parejas y establecer tipologías de comportamiento.

Pareja	Acción	Cuerdas Iguales	Ángulo 45	Conectar islas
P1	Mover y Comprobar	√	√	√
	Mover, observar y conjeturar	↕	↕	↕
P2	Mover y Comprobar	√	√	√
	Mover, observar y conjeturar	↕	×	↕
P3	Mover y Comprobar	√	√	√
	Mover, observar y conjeturar	↕	↕	↕
P5	Mover y Comprobar	×	√	√
	Mover, observar y conjeturar	↕	↕	×
P7	Mover y Comprobar	×	×	×
	Mover, observar y conjeturar	×	↕	×
P8	Mover y Comprobar	×	×	×
	Mover, observar y conjeturar	↕	×	×

Tabla 47: Acciones identificadas en la comprensión del problema

La diversidad de las acciones que realizan los participantes, relacionadas con el movimiento en GeoGebra, serán indicadores de sus diferencias respecto a su habilidad tecno-matemática o de su capacidad para aprovechar las posibilidades del software (Jacinto & Carreira, 2017; Reyes-Martínez, 2016). Además, los diferentes usos del movimiento que se relacionan con aspectos del *razonamiento matemático* de los participantes, tales como la observación y la formulación de conjeturas, podrían servir para caracterizar a las parejas. Las características observadas serían:

- Mover los elementos (de forma controlada o libre) para **comprobar** que se mantienen las **condiciones** del enunciado o alguna **conjetura previa**. (√)
- Mover objetos para **encontrar** posibles **soluciones** del problema o **regularidades** que nos lleven a ella. (↕)

En los tres problemas se hicieron patentes estas acciones con la propiedad de tangencia, el movimiento controlado del ángulo y la búsqueda del punto de conexión con un punto libre C, respectivamente. Estas acciones manifiestan las diferencias entre las parejas, en lo referente a su grado de adquisición (Iranzo & Fortuny, 2009) o a su nivel de apropiación (Reyes-Martínez, 2016) del SGD para la resolución de problemas.

La Tabla 48 muestra todas las acciones que se han descrito en la discusión del Análisis por Parejas, de una forma resumida. Marcando en qué problemas mostró cada pareja alguna de las acciones mencionadas.

Pareja	Acción	Cuerdas Iguales	Ángulo 45	Conectar islas
P1	Incorporar características clave	■	■	■
	Comprobar conjeturas o verificar condiciones	√	√	√
	Encontrar regularidades o soluciones.	↕	↕	↕
P2	Incorporar características clave	■	×	×
	Comprobar conjeturas o verificar condiciones	√	√	√
	Encontrar regularidades o soluciones.	↕	×	↕
P3	Incorporar características clave	■	■	■
	Comprobar conjeturas o verificar condiciones	√	√	√
	Encontrar regularidades o soluciones.	↕	↕	↕
P5	Incorporar características clave	■	■	×
	Comprobar conjeturas o verificar condiciones	×	√	√
	Encontrar regularidades o soluciones.	↕	↕	×
P7	Incorporar características clave	×	■	×
	Comprobar conjeturas o verificar condiciones	×	×	×
	Encontrar regularidades o soluciones.	×	↕	×
P8	Incorporar características clave	×	×	×
	Comprobar conjeturas o verificar condiciones	×	×	×
	Encontrar regularidades o soluciones.	↕	×	×

Tabla 48: Acciones identificadas como diferenciadoras en la resolución de problemas con SGD

En la Tabla 48 se puede observar que los participantes del Taller de Resolución de Problemas con GeoGebra mostraron diferentes formas de actuar con GeoGebra frente a los problemas presentados. Respecto a las características clave de la construcción dinámica de cada problema, las parejas 1, 3 y 5 mostraron interés en representarlas, además lo consiguieron sin una intervención directa del profesor. Las otras parejas no fueron independientes en este aspecto, la intervención del profesor o de los compañeros fue la que hizo que se plantearan o incluyeran en la construcción dicha característica. Desde el punto de vista de la *creación matemática*, la habilidad de las parejas se diferencia en su autonomía para realizar una representación que resalte las características relevantes del problema. Respecto al uso del movimiento en la construcción dinámica para abordar los problemas, las parejas 1, 2, 3 y 5 mostraron capacidad para aprovechar esta característica del SGD como medio de control para verificar las condiciones del problema, así como para visualizar sus razonamientos. Particularmente la Pareja 5 necesitó de la intervención del profesor en el primer problema, para entender. Estas ventajas del SGD y la Pareja 2 necesitó la ayuda en el segundo problema, básicamente para construir y mover el ángulo. En el resto de las resoluciones fueron bastante autónomos. Las parejas 7 y 8 mostraron, en general, un comportamiento más “estático”, es decir, el dinamismo de GeoGebra no influyó en la mayor parte de sus razonamientos. Estas dos parejas discurrieron en el Taller y resolvieron los problemas sin hacer uso de todas las posibilidades que presta el SGD.

Finalmente, se puede considerar que, el uso de GeoGebra al explorar y buscar solución al problema, hace aflorar numerosos argumentos y conjeturas interrelacionadas. Las distintas variables que se entrelazan en el proceso de observación, formulación de conjeturas y justificación, induce la singularidad de cada pareja. De forma que, las parejas pueden reconocer la validez de un argumento por distintos caminos, fijándose en un solo caso particular, visualizando una familia de casos para llegar a una conclusión o apoyándose en algún resultado conocido (o un resultado encontrado en la red). Sea cual sea su comportamiento, las parejas son capaces de formular conjeturas que los encaminan a la solución. El uso de GeoGebra durante el TRPG mostró que la tecnología fue un catalizador para generar una gran cantidad de conjeturas. Hubo parejas como la 3 y la 5, que se diferenciaron de otras, como la 1 y la 8, en el número de conjeturas formuladas. Aunque su apropiación del SGD pudo tener que ver, se puede concluir, a partir de su forma de proceder que parece ser un efecto de su manera característica de enfrentarse a los problemas. Las parejas 3 y 5 exploraban diferentes caminos que abandonaban si consideraban que eran demasiado complejos. Mientras las parejas 1 y 8, dedicaban más tiempo a profundizar en cada camino.

IV.3. RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE LA REFLEXIÓN DOCENTE

Este apartado se dedica al análisis de las propuestas realizadas por los participantes, cuando se les pidió que ejercieran un rol de futuro profesor de secundaria. El instrumento que se utilizó es la tarea que se ha denominado Tarea de Reflexión Docente. A continuación, se analizan los eventos o acontecimientos, así como los elementos matemáticos que las seis parejas presentaron, los cuales se diseñaron a partir de la resolución de los tres problemas trabajados en el TRPG.

Conviene recordar que los participantes tuvieron la oportunidad de reflexionar sobre la enseñanza en Educación Secundaria en tres de las sesiones presenciales del Taller de Resolución de Problemas con GeoGebra (sesión 6, 7 y 8), durante las cuales se les pidió que respondieran a lo siguiente:

SITUACIONES RELACIONADAS CON LA TECNOLOGÍA

Escribir Situaciones fruto del uso de la tecnología en la resolución de los problemas Cuerdas iguales, Ángulo 45° y Conectar islas.

En cada situación indicar:

- El acontecimiento
    - Al menos tres acontecimientos por problema
    - Usar el GeoGebra para mostrar cómo surge el acontecimiento
- Distintos elementos matemáticos
    - Elegir un acontecimiento de cada problema
    - Apoyarte en la tecnología para describir los elementos matemáticos
- Un comentario

El profesor realizó varias intervenciones durante estas sesiones con el objetivo de dar instrucciones para realizar esta tarea, aclarar conceptos y resolver dudas. Además, coordinó las puestas en común de las parejas, en las que iban presentando sus avances. Las parejas, presentaron tres documentos por escrito: una lista de acontecimientos o eventos (sin elementos matemáticos), un acontecimiento acompañado de una lista de elementos matemáticos relacionados con él y un informe final (Anexo II) que incluía la resolución escrita de cada problema, incluyendo la solución y también un acontecimiento o evento con los enunciados de varios elementos matemáticos asociados a este.

La sexta sesión comenzó con una síntesis del trabajo realizado en el Taller de Resolución de Problemas con GeoGebra y de las clases dedicadas a las *situaciones de aula* (Actividades de Tipo 1). Se discutió sobre estas sesiones, que de alguna manera habían transitado por los episodios de resolución de problemas haciendo uso de la tecnología. Se explicitó que llegaba el momento en el que debían converger las *Situaciones de aula* con la resolución de problemas. Apoyándose en una presentación, se expuso un ejemplo de situación a desarrollar, derivada del problema Ángulo 45°. Para ello, se indicó las tres partes que la compondrían:

i) El acontecimiento: Discusión sobre la semejanza de dos triángulos que no estaban en posición de Thales.
ii) Los elementos matemáticos: Criterios de semejanza, transformaciones en el plano y Teorema de Thales.
iii) Comentario: idea general de semejanza en la Educación Secundaria.

La séptima sesión, se dedicó a seguir con la resolución por parejas de esta tarea de reflexión. Como paso intermedio se les pidió a los participantes que entregaran al final de la sesión una de las situaciones diseñadas. Además, tuvieron que compartirla oralmente con el resto del grupo. El origen de las seis ideas entregadas al final de la sesión enlazaba con los tres problemas, dos por cada uno de ellos.

Las parejas 7 y 8 presentaron una situación relacionada con el problema Cuerdas Iguales, las situaciones de las parejas 1 y 5 provenían de la resolución del problema Ángulo 45°, y las situaciones presentadas por las parejas 2 y 3 estaban derivadas de la resolución del problema Conectar Islas. Después de la presentación, el profesor dio las instrucciones oportunas para que las parejas replantearan el enunciado de los acontecimientos. No era necesario incluir todo el problema en él. Era importante ajustar la redacción del evento para que no dependiera directamente del enunciado del problema. Los participantes consideraron que la principal dificultad de la tarea era precisamente eso, y también el rigor de la escritura de *elementos matemáticos*.

La mayor parte de la octava sesión estuvo dedicada a dos intervenciones del profesor, una para resolver la aproximación geométrica (AG2) del problema Ángulo 45° y, la otra, para aclarar las dudas que los participantes tuvieron a la hora de formalizar los acontecimientos. Para esto último, realizó una intervención en la que tomó tres ejemplos de acontecimientos presentados por los estudiantes que habían sido reformulados por el equipo investigador. Estos acontecimientos fueron presentados en la sesión anterior por las parejas 1, 3 y 5, y se denominaron Comando Tangente, Rotación 60° y Sobre la diagonal, respectivamente. El objeto de la sesión fue que los participantes tuvieran una referencia del trabajo que se les había marcado.

En este apartado, se presenta el análisis de los documentos presentados por los estudiantes los acontecimientos descritos por los participantes se clasificaron atendiendo a su implementación con GeoGebra y a la Actividad Matemática que subyace en el evento propuesto. Como resultados de este análisis, se encontraron evidencias que permitieron agruparlos en tres categorías de acontecimientos relacionados con la:

- **Apropiación de GeoGebra** (Categoría 1). El evento o acontecimiento parte del uso de herramientas implementadas en GeoGebra por parte del estudiante. Al usarlas se plantea cuál es el significado matemático de estas acciones y de qué manera se podría sustituir la herramienta por una serie de pasos más simples. Por tanto, los eventos de esta categoría surgen directamente del uso de GeoGebra y de las matemáticas en las que se fundamentan. La integración de ambas, relaciona esta categoría con la habilidad Tecno-matemática (Jacinto & Carreira, 2017).
- **Justificación de propiedades descubiertas** (Categoría 2). El evento o acontecimiento descrito, parte de una observación que un estudiante haría al usar GeoGebra, a partir de la cual enuncia una propiedad que debe justificarse. Esta categoría contempla los eventos en los que se genera una necesidad de justificar o demostrar conjeturas matemáticas surgidas del uso de GeoGebra. Por lo que se relaciona con el r*azonamiento matemático* (Kilpatrick, et al., 2015).
- **Representación de nuevos elementos en GeoGebra** (Categoría 3). El evento o acontecimiento propuesto parte de una hipótesis de un estudiante, que le lleva a formular una conjetura matemática. Luego se plantea realizar una construcción dinámica en GeoGebra que incluya los objetos necesarios y represente la propiedad formulada. Al manipular la construcción se podría verificar o refutar la conjetura. Esta última categoría recoge los eventos propuestos por las parejas que plantean un uso de GeoGebra como recurso para comprobar una idea matemática previa. Su desarrollo pondría en marcha la *creación matemática* (Kilpatrick, et al., 2015).

A continuación, se procederá a describir en mayor detalle las categorías de acontecimientos establecidos.

IV.3.1. Apropiación de GeoGebra

Los eventos que se han denominado como “apropiación de GeoGebra son aquellos que se relacionan con la actividad tecno-matemática.

Hubo cuatro parejas que presentaron acontecimientos relacionados con la apropiación del SGD. Estas cuatro propuestas se pueden sintetizar en dos eventos que surgen del primer problema y tratan el mismo tópico matemático construcción de rectas tangentes a una circunferencia (Tabla 49). Ambos están relacionados con el uso del GeoGebra, pero tienen características diferentes. El primero surge de comprender el funcionamiento de la herramienta *Tangentes,* para sustituirla por otro procedimiento, y el segundo al comprender el funcionamiento de la herramienta *Recta,* para hacer un uso adecuado de ella y evitar errores de interpretación.

Problema	Tópico	Síntesis del argumento	P1	P2	P3	P5	P7	P8
Cuerdas iguales	Rectas tangentes	¿Se puede obtener la recta tangente a una circunferencia desde un punto exterior sin utilizar la herramienta *Tangentes*?	▪	-	▪	▪	-	-
Cuerdas iguales	Rectas tangentes	Usando la herramienta *Recta* se construye una recta tangente a una circunferencia desde un punto exterior. ¿Por qué parece cumplir la propiedad de tangencia si en realidad no lo es?	-	-	-	-	-	▪

Tabla 49: Relación de argumentos que propusieron las parejas relacionados con la apropiación del SGD

Las parejas 1, 3 y 5 proponen un evento relacionado con el uso de la herramienta *Tangentes*. El uso de esta herramienta produce una respuesta que el estudiante podría comprender, el trazado de rectas tangentes a una circunferencia, pero no conocen los pasos que realiza GeoGebra para dar esa respuesta. La Pareja 3 enuncia el evento de la siguiente manera: “Trazar rectas tangentes a la circunferencia desde un punto exterior sin emplear los comandos.”.

La Pareja 8 propone un acontecimiento relacionado con el uso de la herramienta *Recta* y la manera en que GeoGebra “coloca” el punto de forma que la recta parece tangente a una circunferencia. La enuncia de la siguiente manera: “Un alumno realiza la construcción del problema [*Cuerdas Iguales*] tomando, en lugar de rectas tangentes, rectas que pasan por el centro de la circunferencia y tocan tangencialmente un punto de la otra. El alumno observa que dicha propiedad [*cuerdas de igual longitud*] se verifica sin necesidad de ser rectas tangentes." (Figura 21).

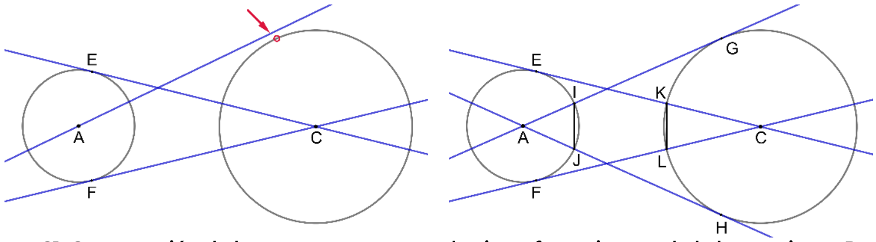


Figura 21: Construcción de las rectas tangentes a la circunferencia usando la herramienta *Recta*

Se puede concluir que estas parejas identificaron la respuesta de GeoGebra, como una contingencia a la que hay que anticiparse para la preparación de clases de matemáticas (Jacinto & Carreira, 2017). Además, conectan el uso de GeoGebra en la resolución de problemas con las matemáticas de Educación Secundaria. Los *elementos matemáticos* que presentan los participantes como tópicos en los que se deben profundizar de cara a las implementaciones un aula de Educación Secundaria son: la construcción con regla y compás de rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior y la propiedad de perpendicularidad en el punto de tangencia de la recta tangente a una circunferencia y su radio. Desde la perspectiva Contexto Matemático de la Enseñanza, cuando los participantes resaltan las contingencias posibles para comprender matemáticamente cómo funciona una herramienta de GeoGebra, están mostrando su capacidad para *Reflexionar sobre las matemáticas de la práctica docente*. Analizar estas contingencias para ver las acciones posibles que se podrían tomar en un aula, los prepara para tomar la mejor decisión en un caso similar. Además, proponer elementos matemáticos que se pueden desarrollar en la Educación Secundaria, pone de manifiesto que son conscientes de la relevancia de *Conocer y usar el currículo de la Educación Secundaria* (Kilpatrick, 2015).

Aunque las parejas solo presentaron acontecimientos en los que el tópico subyacente es el de rectas tangentes, durante las sesiones dedicadas a la resolución de problemas se pudieron observar otras faltas de apropiación del SGD. Las relacionadas, por ejemplo, con utilizar *Ángulo dada su amplitud* o *Segmento de longitud dada*. Esta dificultad a la hora de usar el SGD o el desconocimiento de los fundamentos matemáticos de las herramientas, podría generar un evento de las mismas características que los propuestos por las parejas. En Camacho-Machín, Perdomo-Díaz y Hernández (2019) se presentó una actividad relacionada con el trazado de un ángulo en GeoGebra y otra con el uso de las herramientas *Ángulo* y *Ángulo dada su amplitud*.

IV.3.2. Justificación de propiedades descubiertas usando GeoGebra

Las parejas 1, 3 y 5 presentaron eventos o acontecimientos que se pueden considerar que pertenecen a esta categoría. Un total de quince propuestas, que se sintetizaron en la Tabla 50. Estos eventos hipotéticos que se relacionan con la acción de buscar una justificación, formal o no, describen una situación de aula en la que un estudiante de Educación Secundaria descubre una propiedad mientras resuelve un problema con GeoGebra. Las parejas anunciaron el acontecimiento, poniéndose en el lugar del estudiante, preguntando o afirmando un argumento que requiere ser formalizado.

Las propuestas de las parejas surgen a partir de los tres problemas propuestos en el Taller de Resolución de Problemas con GeoGebra. Por ejemplo, la Pareja 1 escribe:

"A continuación, un compañero se percata de que al trazar la bisectriz del ángulo formado por las dos semirrectas tangentes (desde un punto exterior a una circunferencia), pasa por el centro de esta. Se cuestiona ¿qué condiciones se deben dar para que esto ocurra?"

Este evento surge de la resolución del problema Cuerdas Iguales y también hace referencia a él la Pareja 3 (Tabla 50).

Una propuesta que surge del problema Ángulo 45°, y que entregó la Pareja 5, fue:

> "Al calcular las alturas se observa que la altura de los triángulos DGA y DFG, y los triángulos AHB y EHB son iguales respectivamente. Un alumno se plantea por qué estas alturas son iguales."

La pareja contextualiza el acontecimiento que propone, suponiendo que un estudiante de Secundaria está resolviendo el segundo problema (Ángulo 45°).

Otro ejemplo de estas propuestas, que surge del problema Conectar islas y fue formulado por la Pareja 3, fue:

> "Durante el desarrollo del problema se observa la siguiente propiedad: los segmentos que conectan los vértices de los triángulos equiláteros de la construcción con el punto de Fermat forman un ángulo de 120° entre ellos. Vamos a verlo."

Estas propuestas nacen de observaciones realizadas sobre la construcción dinámica.

Problema	Tópico	Propiedad o argumento	P1	P2	P3	P5	P7	P8
Cuerdas iguales	Rectas tangentes	Una recta tangente a una circunferencia forma un ángulo de 90° con el radio que une el centro con el punto de tangencia.	-	-	■	-	-	-
Cuerdas iguales	Bisectriz	Los dos triángulos que se forman entre una cuerda de circunferencia, los radios que la abarcan y la bisectriz de dichos radios son congruentes.	■	-	-	■	-	-
Cuerdas iguales	Bisectriz	La bisectriz de las dos rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior, pasa por el centro de esta.	■	-	■	-	-	-
Cuerdas iguales	Semejanza	Dos triángulos superpuestos (con un ángulo común) son semejantes, aunque no están en posición de Thales.	-	-	-	■	-	-
Ángulo 45°	Invariante	Dado una familia de triángulos AEF cuyo ángulo $\hat{A}$ mide 45° y están inscritos en un cuadrado ABCD de lado l, de modo que, A coincide con un vértice y E está en el lado BC. Resulta que, la altura desde A de cualquier triángulo de la familia es constante y mide l.	-	-	■	■	-	-
Ángulo 45°	Diagonal del cuadrado	Desde un punto P sobre la diagonal que une dos vértices de un cuadrado, se pueden trazar dos segmentos a los otros dos vértices. Se forman así cuatro triángulos. Las alturas de los triángulos desde P coinciden dos a dos.	■	-	-	■	-	-
Conectar islas	Punto de Fermat	El punto de Fermat coincide con el punto de intersección de las 3 circunferencias en la que están inscritos los triángulos equiláteros con los que se construye.	-	-	-	■	-	-
Conectar islas	Punto de Fermat	El punto de Fermat junto a tres vértices de uno de los triángulos equiláteros que se usan para construirlo forma un cuadrilátero cíclico.	-	-	■	■	-	-
Conectar islas	Punto de Fermat	Los tres segmentos que unen el punto de Fermat de un triángulo con los vértices de los triángulos equiláteros usados para construirlo forman entre sí ángulos de 120°.	-	-	■	-	-	-
Conectar islas	Rotaciones	Dados dos puntos A y B. El triángulo formado por A, B y el punto resultante de rotar B, 60° respecto a A, es equilátero.	-	-	■	-	-	-

Tabla 50: Propiedades o argumentos derivados de la justificación de propiedades descubiertas usando GeoGebra.

La Tabla 50 reformula los eventos propuestos por las tres parejas en término de propiedades o argumentos, organizados por problema y tópico matemático involucrado. Los seis eventos asociados al primer problema, se pudieron sintetizar en cuatro propiedades o argumentos y versaron de tres tópicos diferentes: rectas tangentes, bisectriz de un ángulo y semejanza de triángulos. Los cuatro eventos del segundo problema, giraron en torno a dos argumentos o propiedades y recogen dos ideas singulares sobre los tópicos: Diagonal del cuadrado y la altura constante del AEF. Los cinco eventos propuestos para el tercer problema tratan dos tópicos, punto de Fermat y rotaciones en el plano, y se sintetizan en cuatro argumentos diferenciables.

No es casualidad que las parejas 1, 3 y 5 fueran las que hicieran propuestas de esta categoría. Estas parejas usaban el arrastre, el movimiento y la observación de propiedades durante la resolución de problemas continuamente. Dicho de otra manera, coincide con parejas que mostraron su r*azonamiento matemático* observando y formulando conjeturas, al tiempo que aprovechaban las posibilidades de movimiento y cuantificación de GeoGebra. Las parejas, a la hora de proponer acontecimientos, se basaron mayoritariamente en su propia experiencia cuando resolvieron los problemas, resultando contingencias que partían del descubrimiento de una propiedad y de la necesidad de justificarla matemáticamente. Esta acción, de repasar su propia experiencia en el Taller, para proponer posibles situaciones de aula en una clase de Educación Secundaria, que es con la habilidad de r*eflexionar sobre las matemáticas de la práctica docente o se relaciona directamente*, una componente del Contexto Matemático de la Enseñanza, una de las perspectivas que describen la Comprensión Matemática para la Enseñanza (Heid, Wilson, & Blume, 2015).

El proceso de reflexión que siguieron las tres parejas citadas (1, 2 y 5), se puede ver como un ejercicio en el que se separan los resultados intermedios que aparecen en la resolución del problema, para tratarlos o analizarlos por separado. En su mayoría, la formalización de estos resultados más simples, permitirá usarlos en una tarea matemática más compleja, acercarse a una aproximación completa al problema. Desde el punto de vista del Contexto Matemático de la Enseñanza, las parejas han mostrado capacidad de *síntesis de ideas matemáticas*, es decir, la capacidad de compartimentalizar ideas matemáticas complejas, en ideas más simples para que puedan ser usadas por los estudiantes, para posteriormente volver a configurar la idea compleja, una vez los estudiantes tengan mayor madurez matemática. Todo lo anterior constituye una habilidad relevante para los profesores de Educación Secundaria (Heid, Wilson, & Blume, 2015).

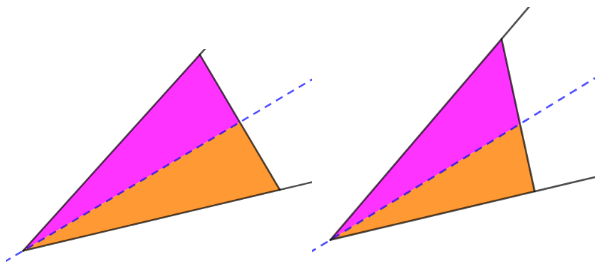
IV.3.3. Representación de nuevos elementos en GeoGebra

A partir del análisis de los documentos y trabajos presentados por las parejas, se identificaron diez propuestas para esta categoría. Se sintetizaron en 8 propiedades o argumentos correspondientes a los tres problemas y se relacionan 6 tópicos matemáticos diferentes (Tabla 51). Las parejas 1, 2, 7 y 8 propusieron eventos de esta categoría, es más, las parejas 2 y 7 solo identificaron eventos de esta categoría. A diferencia de la anterior categoría, la fórmula para describir el acontecimiento parte de una situación en que los estudiantes de Educación Secundaria deben tener una idea, para luego recurrir a la tecnología y comprobarla. Este planteamiento induce a un cambio en las acciones siguientes: hay que trasladar una idea matemática, previa a una construcción dinámica, de modo que quede representada y se resalte la propiedad matemática que se quiere verificar. Las propuestas de esta categoría servirían como punto de partida para desarrollar aspectos propios de la *creación matemática*.

Las parejas hicieron propuestas de esta categoría para los tres problemas que se trabajaron en el Taller de RPG. Por ejemplo, para el problema "Cuerdas Iguales", la Pareja 7 propuso:

> "[S]i trazamos la bisectriz del ángulo formado por cualquiera de las dos tangentes [...]vemos que se forman dos triángulos iguales [...]. Viendo esto el alumno pregunta si esta "propiedad" se verificaría siempre."

La "propiedad" que mencionan quedo registrada en la videograbación y se podría enunciar de la siguiente forma: La bisectriz de un ángulo divide a cualquier triángulo limitado por las semirrectas en dos triángulos congruentes (Figura 22_a). Los participantes indican que, haciendo una comprobación en la que se pueda tomar un segmento cualquiera con un extremo en cada semirrecta del ángulo, se podría refutar la observación del hipotético estudiante (Figura 22_b).



(a) (b)
Figura 22: Evento hipotético, observación del estudiante vs caso general

La Pareja 2 hizo una propuesta para el segundo problema, describiendo un acontecimiento que surge al usar propiedades de la semejanza de triángulos. El enunciado fue el siguiente:

> "Hemos utilizado la relación entre triángulos semejantes y sus áreas y alguien podría plantearse la siguiente pregunta: ¿dos triángulos semejantes tienen la misma área?"

En este caso, la pareja no propuso una representación para verificarlo, pero sí indicó que, de entre todos los triángulos semejantes, sólo coinciden en área aquellos cuya razón de proporcionalidad es la unidad. Una construcción dinámica, diseñada para resaltar la relación entre las áreas de una familia de triángulos semejantes, sería una actividad que surge para abordar este evento.

La Pareja 8 propuso como acontecimientos, posibles una situación similar a la que ellos experimentaron cuando resolvieron el problema Conectar islas. Partiendo de la situación de que en una clase están resolviendo dicho problema, y enuncian:

> "Un alumno se plantea que el circuncentro es el punto que minimiza todas las distancias"

La pareja considera que una forma de hacer frente a esta contingencia sería realizar una construcción que permitiera estudiar la suma de las distancias, cómo se hizo en el Taller de Resolución de Problemas con GeoGebra. Además, plantearon que se podría hacer lo mismo con los otros puntos notables.

Problema	Tópico	Propiedad o argumento	P1	P2	P3	P5	P7	P8
Cuerdas iguales	Rectas tangentes	Dada una configuración de dos circunferencias y las rectas tangentes a ellas desde los centros de la otra. Las cuerdas formadas por los puntos de tangencia son iguales, de la misma forma que lo son los formados por los puntos de corte con las rectas secantes. (Figura 22)	-	■	-	-	-	-
Cuerdas iguales	Bisectriz	La bisectriz de un ángulo divide en dos triángulos congruentes a cualquier triángulo limitado por las semirrectas.	-	-	-	-	■	-
Ángulo 45°	Invariante	El área de una de familia de polígonos inscrita en un triángulo es constante.	■	-	-	-	-	-
Ángulo 45°	Diagonal del cuadrado	Dados dos triángulos semejantes, hay una relación de proporción entre sus áreas.	-	■	-	-	-	-
Ángulo 45°	Invariante	Dado un rectángulo se traza un ángulo de 45° en uno de sus vértices de modo que se forma un triángulo con los puntos de corte de los lados no contiguos. La diagonal del rectángulo divide al triángulo en dos superficies con la misma área.	-	-	-	-	■	■
Conectar islas	Punto de Fermat	El punto de Fermat minimiza la suma de las distancias a los vértices para cualquier triángulo.	■	-	-	-	■	-
Conectar islas	Punto de Fermat	Los tres segmentos que unen el punto de Fermat de un triángulo con los vértices de los triángulos equiláteros usados para construirlo tienen la misma longitud.	-	■	-	-	-	-
Conectar islas	Puntos notables	En un triángulo cualquiera la suma de las distancias a los vértices al circuncentro es la mínima posible. (Ídem con baricentro, ortocentro, incentro)	-	-	-	-	-	■

Tabla 51: Propiedades o argumentos derivados de la representación de nuevos elementos en GeoGebra

La Tabla 51 organiza en diez propiedades o argumentos los diez eventos presentados por las parejas participantes, ordenados por problema y tópico, y acompañados por una síntesis de la propiedad o argumento matemático subyacente. Hay que señalar que el argumento de esta categoría de eventos fue original en cada pareja encontrando sólo dos coincidencias entre ellas. Para el problema Cuerdas iguales hubo dos propuestas con tópicos diferentes y, de cada uno de los otros dos problemas, surgieron tres propuestas con dos tópicos diferentes. Los tópicos presentados fueron los mismos que para la categoría anterior, excepto el de Puntos Notables de triángulos que propuso la Pareja 8.

Hemos podido constatar que las propuestas de los participantes, son el punto de partida para desarrollar una serie de elementos matemáticos que ellos señalan para abordar la situación usando el SGD GeoGebra. De esta forma el foco se pondría en realizar una construcción dinámica que destaque las características de cada propuesta y permita la exploración de la propiedad enunciada. Esta actividad proporcionará la representación de un elemento nuevo haciendo uso de GeoGebra, para resaltar la propiedad deseada. Explorar la nueva construcción podrá concluir con la verificación o refutación de la conjetura realizada. Los participantes desarrollan aspectos propios de la *creación matemática*. Desde otra perspectiva, esta clase de eventos recoge pequeñas cuestiones que extienden o se derivan de la resolución del problema inicialmente propuesto. En general, profundizar en estas cuestiones, servirá para conectar con otros resultados matemáticos. Plantearse conocer las distintas variaciones que surgen de la resolución de un problema y reflexionar sobre las posibles conexiones con las matemáticas, es un ejercicio relevante para prepararse para futuras contingencias. Los resultados obtenidos a partir de este análisis muestran que la capacidad de reflexionar sobre las matemáticas, pensando en la práctica docente, es una habilidad necesaria, que forma parte del contexto matemático que debe contemplarse en la enseñanza de las Matemáticas en Educación Secundaria (Heid, Wilson, & Blume, 2015).

Capítulo V. CONCLUSIONES

En este capítulo se da respuesta a las preguntas que guiaron nuestra investigación. La información se ha organizado en torno a los objetivos de investigación que, tal y como se indicó, también articularon la estructura de la presentación del análisis de los resultados. El capítulo se divide, por tanto, en cuatro apartados, el primero se corresponde con los resultados obtenidos en el Análisis por Problema, el segundo con los obtenidos del Análisis por Parejas y el tercero con los obtenidos del Análisis de la Reflexión Docente. El cuarto apartado está dedicado a las perspectivas de futuro que se deriva de la investigación.

V.1. ASPECTOS RELEVANTES DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA AL USAR GEOGEBRA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

El Taller de Resolución de Problemas con GeoGebra, implementado como escenario de la investigación, se configuró alrededor de la resolución de tres problemas. Las indicaciones dadas a los participantes para la resolución, se enmarcaron en el proceso de resolución de problemas con tecnología descrito por Santos-Trigo y Camacho-Machín (2013), basado en episodios. Este proceso promueve el uso de la tecnología de forma sistemática, convirtiendo la resolución de los problemas en una actividad que fomenta la discusión matemática entre los participantes. Los tres episodios que se analizaron fueron el de Comprensión, el de Exploración y el de Búsqueda de Múltiples Aproximaciones. En la Presentación y Discusión de los Resultados, a partir del análisis por problema (sección IV.1), se mostró cómo las parejas ponían de manifiesto distintos aspectos de su Actividad Matemática (Heid, Wilson, & Blume, 2015) cuando realizaban y manipulaban la construcción dinámica del problema.

Teniendo en cuenta el Objetivo 1:

Analizar los aspectos más relevantes de las componentes de la Actividad Matemática—percepción, razonamiento y creación matemática— que surgen a la hora de usar GeoGebra en la resolución de problemas.

Se analizan en cada uno de los apartados siguientes uno de los aspectos de la Actividad Matemática.

V.1.1. Percepción Matemática

La *percepción matemática* reúne las acciones de reconocer e identificar las características matemáticas particulares de las distintas estructuras, las distintas notaciones o formas simbólicas, además de la capacidad para percatarse de cuándo un argumento matemático expresado de forma simple o rigurosa es válido, y de la habilidad de conectar las ideas matemáticas entre sí (Heid, Wilson, & Blume, 2015). El uso de GeoGebra favorece las acciones de la *percepción matemática*. En relación con la habilidad de conectar las ideas matemáticas entre sí. La representación simultánea de diferentes vistas que aporta GeoGebra facilitan esa conexión. Es decir, al representar una idea matemática mediante distintas estructuras y su conexión entre distintos conceptos simultáneamente, estas se combinan y hacen necesario modificar la forma de analizar estas conexiones para desarrollar una percepción matemática integradora. Además, GeoGebra a su vez facilitó a los participantes el proceso de formalización dentro de cada aproximación, acompañando el paso de lo experimental a lo formal (Contreras, 2014).

Estas conclusiones están basadas en el análisis de las observaciones realizadas en el TRPG, donde se pudo observar como acción principal asociada a la *percepción matemática*, que los participantes reconocieron una serie de argumentos cómo válidos para dar con una aproximación a la solución. Por ejemplo, durante el episodio de exploración y en el primer problema, reconocieron como relevante el hecho de que la recta que pasaba por los dos centros de las circunferencias (recta AC) fuera un eje de simetría de la figura, que las rectas tangentes a las circunferencias fueran perpendiculares a sus radios y que una igualdad de las longitudes se relacionaba con la semejanza de triángulos (Tabla 13 y Tabla 14). Dar por válidos estos argumentos permitió construir la aproximación a la solución que se llevó acabo al final de las sesiones dedicadas al problema. En el segundo problema, los participantes reconocieron dos argumentos fundamentales para realizar la aproximación analítica: bastaba resolver un problema equivalente, demostrando que la suma de las áreas de los triángulos exteriores coincidía y que las distancias desde G Y H (puntos de corte entre las semirrectas del ángulo de

45° y la diagonal del cuadrado) a los lados del cuadrado coincidían dos a dos (Tabla 22). Por último, se evidenció en el análisis de los resultados del tercer problema, que reconocer el punto de Fermat como solución les llevó a centrarse en encontrar una justificación de por qué las características de dicho punto le conferían la propiedad de minimizar la suma de las distancias (Tabla 31 y Tabla 33).

En el episodio de búsqueda de múltiples aproximaciones, también se observó la acción asociada a la *percepción matemática*, de que los participantes reconocían una serie de argumentos cómo válidos para dar con una aproximación a la solución. Se mostró en el análisis de los resultados que, en el primer problema los participantes descubrieron que los puntos de tangencia están sobre la circunferencia cuyo diámetro coincide con el segmento AC (Tabla 15). En el segundo problema, descubrieron que los triángulos con el ángulo de 45° en común (AHG y AEF) eran semejantes (Tabla 23) y, en el tercero, que los ángulos con vértice en el punto de conexión óptimo medían 120° (Tabla 34). Estas propiedades son necesarias para abordar las aproximaciones presentadas AA1, AS2 y AG3, respectivamente (Tabla 16 AA1, Tabla 25 AS2 y Tabla 35 AG3).

Se puede afirmar que, desde la perspectiva de la Actividad Matemática, el uso de GeoGebra ha permitido que los estudiantes identificaran características matemáticas particulares asociadas a los problemas que debían resolver, conectaran distintas ideas matemáticas entre sí e identificaran un conjunto de argumentos que les permitió ir aproximándose a la solución. De esta forma, se evidencia cómo el uso de GeoGebra favorece la realización de acciones relacionadas con la percepción matemática.

V.1.2. Razonamiento matemático

El *razonamiento matemático* está relacionado directamente con las acciones de observar, formular conjeturas y justificarlas (Heid, Wilson, & Blume, 2015). Al usar un SGD como GeoGebra, con el que se puede visualizar el movimiento, se extiende la acción de observar, es decir, se facilita pasar de un caso particular a una acción que acerca a la generalización o a un proceso que permite refinar conjeturas. A partir del análisis realizado, se puede también concluir que, en la actividad de resolver problemas con tecnología, las acciones relacionadas con el *razonamiento matemático* destacan frente a otras acciones, lo que concuerda con la idea de que la propia naturaleza de una actividad puede influir en que unas componentes destaquen frente a otras (Hernández, Perdomo-Díaz, & Camacho-Machín, 2017; Zbiek & Heid, 2018). En este sentido, se observó que el uso de GeoGebra en la resolución de problemas favoreció la realización de diferentes acciones tales como, observar, formular conjeturas y justificar, que surgen al usar las posibilidades de mover objetos de GeoGebra, que facilita la visualización de una amplia cantidad y variedad de casos particulares.

Se observó en el Taller de Resolución de Problemas con GeoGebra que los participantes descubrieron relaciones matemáticas que los llevaron a formular conjeturas al visualizar qué ocurría con los elementos de la construcción hecha, cuando se aplicaba el movimiento. Es decir, GeoGebra favoreció el establecimiento, por parte de los participantes de gran número de conjeturas. Este resultado concuerda con lo mostrado en otras investigaciones (Acosta, Mejía, & Rodríguez, 2011; Ascanio-Zárate, 2014; Camacho-Machín & Hernández, 2017; Contreras, 2014; Granberg & Olsson, 2015; Gómez-Arciga & Poveda-Fernández, 2017). Además, otro resultado que conviene destacar derivado del manejo de GeoGebra es que se pudo identificar cómo la acción de formular conjeturas, no siempre fue posterior a la de visualizar en GeoGebra, sino que, los participantes recurrieron a la construcción para verificar o refutar una conjetura previa (Tabla 14, Tabla 16, Tabla 22 y Tabla 32). Estas formas de proceder de los participantes concuerdan con dos ideas principales acordes con resultados obtenidos por otros investigadores: La interacción de los estudiantes con el uso de las tecnologías digitales facilita el proceso de refinamiento de conjeturas (Contreras, 2014)) y GeoGebra hace de compañero interactivo (Granberg & Olsson, 2015), dando la oportunidad al usuario de representar una idea, para analizar la respuesta del SGD.

Una habilidad relevante que se observó en el desarrollo del episodio de exploración, fue la de que las parejas supieran usar el movimiento para aprovecharlo en sus razonamientos. Esta ventaja que ofrecen los SGD puede ser empleada como herramienta de control (Schoenfeld, 1985), si en un determinado momento de la resolución se desea verificar si va por buen camino. Se pudo observar esta forma de utilizar GeoGebra en algunos momentos del TRPG. Por ejemplo, al trazar las bisectrices de las rectas tangentes y las mediatrices de las cuerdas en el primer problema, algunas parejas pudieron verificar que coincidía con la recta AC (A y C eran los centros de las circunferencias) y que el problema podía simplificarse al estudio de la mitad de la figura (Tabla 15). En el problema 3, una acción que sirvió de herramienta de control, se registró cuando los participantes comparaban el ortocentro, baricentro, incentro o circuncentro como punto de conexión de los cables. Al mover los vértices del triángulo se percataron de que, entre los puntos notables construidos, el mejor variaba según fuera la forma de triángulo (Figura 20). En definitiva, la capacidad para usar el movimiento a la vez que se verifican o descartan conjeturas se puede entender como parte de la habilidad Tecno-Matemática de los participantes.

Otra habilidad relevante, propia del *razonamiento* matemático, que se observó en el desarrollo del episodio de exploración fue la combinación de la cuantificación de atributos con el movimiento controlado. Así pues, se observó que los participantes exploraron la situación presentada en el primer problema moviendo las circunferencias, sus centros, y modificando los radios para verificar que las longitudes de las cuerdas coinciden en todo momento (Tabla 14). Algo parecido ocurrió durante el segundo problema, cuando comprobaron la igualdad de las áreas de los polígonos, para distintas posiciones del ángulo moviendo de forma controlada el punto E situado sobre el lado del cuadrado (Tabla 22). Para el tercer problema, algunas parejas añadieron un punto auxiliar y la suma de la distancia (*LongitudCable*), de forma que, al mover el punto pudieron dar con una solución empírica (Tabla 31). Otras parejas, añadieron varios puntos notables y las distintas sumas de distancias, al mover los puntos que representaban las islas comprobaban si alguno de ellos minimizaba la suma de distancias (Tabla 31).

El tipo de elementos auxiliares que los participantes añadieron a sus construcciones afectó a las conjeturas que formularon. Algunos de estos elementos surgieron de las búsquedas en la web, que resultó ser un recurso útil para que los participantes resolvieran los problemas (Santos-Trigo & Reyes-Martínez, 2018). Las parejas consultaron conceptos matemáticos y encontraron nuevas ideas que trasladar al proceso de resolución, especialmente en los momentos de bloqueo. Se pudo registrar cómo hicieron consultas de definiciones, en Wikipedia y portales de matemáticas. Consultaron conceptos elementales, tales como el de recta tangente, arco de circunferencia, criterios de semejanza de triángulos, razones trigonométricas, puntos notables o áreas de polígonos. También, revisaron vídeos en los que se construían figuras con regla y compás del punto de Fermat de un triángulo. Dicho de otra forma, la búsqueda en la web afecta a las acciones de conjeturar y demostrar que están relacionadas directamente con el *razonamiento matemático*.

V.1.3. Creatividad Matemática

La *Creatividad Matemática* aflora cuando se definen, representan y manipulan objetos matemáticos nuevos para resaltar alguna de sus propiedades (Heid, Wilson, & Blume, 2015). Al usar GeoGebra, al visualizar el movimiento, se desarrolla la capacidad de generar objetos dinámicos que tienen el propósito de resaltar las propiedades de varios casos particulares y acercarse a la generalización. Para ello es necesario añadir elementos u objetos, incluir los atributos que se quieren analizar y que se puedan visualizar en conjunto y simultáneamente al aplicar movimiento. Es decir, realizar construcciones dinámicas en GeoGebra se puede ver como una forma de encontrar nuevos caminos para expresar objetos matemáticos.

Se ha llegado a esta conclusión al analizar las resoluciones de las parejas durante el TRPG. Las principales acciones que se observaron al usar GeoGebra de forma activa, para resolver los problemas, acaecieron principalmente en dos momentos: al realizar una construcción dinámica en el episodio de Comprensión y al añadir nuevos elementos auxiliares en los episodios de Exploración y Búsqueda de Múltiples Aproximaciones.

En el primer episodio de resolución, los participantes centran su atención en realizar una construcción que incluye los elementos y condiciones matemáticas del enunciado. Para conseguirlo, las parejas realizaron acciones que se asocian con la comprensión del problema. Al analizarlas se pudo observar que las decisiones que tomaban, influían significativamente en cómo abordaban el problema. En un primer momento, los participantes representaban los objetos principales de cada problema, haciendo uso de las herramientas de GeoGebra. Para el primer problema, usaron la herramienta *Circunferencia (centro, punto)* y construyeron las dos circunferencias, en el segundo, usaron *Polígono regular* para construir el cuadrado y, en el tercero, usaron *Punto* para representar las tres islas. Incluir el resto de los objetos en cada construcción y trasladar toda la información del enunciado, conllevó una segunda secuencia de acciones cuyo objetivo fue que las condiciones matemáticas requeridas por cada problema estuvieran presentes. En líneas generales, a partir de esta situación es cuando los participantes se preguntaron cómo conseguir representar cada figura en GeoGebra. La respuesta de cada pareja dependió de su capacidad para elegir y usar herramientas como T*angentes* y *Ángulo dada su amplitud* o saber definir un valor como suma de longitudes de segmentos (LongitudCable). Por otro lado, sus conocimientos básicos de geometría sobre el concepto de recta tangente a una circunferencia, trazado de un ángulo, rotaciones en el plano y trazado de un triángulo conocidas las longitudes de sus tres lados, intervinieron también en sus decisiones sobre qué elementos representar y en qué orden construirlos. En definitiva, se pudo constatar que el trabajo de construcción, y su *creatividad matemática*, depende no sólo del nivel de apropiación del SGD sino también de las dificultades cognitivas previas (Iranzo & Fortuny, 2009; Santos-Trigo & Reyes-Martínez, 2018). De esta forma, se puede concluir que, en la fase de comprensión de un problema, la competencia matemática se debe combinar con la capacidad de los participantes para usar las herramientas e interpretar las respuestas de GeoGebra, estableciéndose una relación interactiva entre el SGD y los participantes (Granberg & Olsson, 2015). La habilidad para integrar las respuestas recibidas al usar las herramientas de GeoGebra, con las condiciones matemáticas que se buscan representar, la hemos identificado con la habilidad Tecno-Matemática (Jacinto & Carreira, 2017). En el capítulo anterior se presentaron en detalle algunas evidencias de este hecho, como las que fueron identificadas, a la hora de trazar las rectas tangentes en el primer problema (Tabla 12), construir el ángulo de 45° en el segundo (Tabla 20) o representar un triángulo dada la longitud de sus lados en el tercero (Tabla 29). Estas acciones, consistentes en interpretar las respuestas de GeoGebra e integrar su uso con los conceptos matemáticos que se involucran en el problema, serían similares a las que podrían realizar los estudiantes de Educación Secundaria en una actividad que implique la resolución de problemas con GeoGebra. Por tanto, un futuro profesor debe ser capaz de conocer las posibles herramientas que deben elegir los estudiantes y saber cómo usarlas, del mismo modo que debe tener una comprensión amplia de los conceptos de matemáticas que intervienen.

En el análisis del episodio de exploración, de los tres problemas, se observó que las parejas recurrían a la incorporación de elementos auxiliares a la construcción dinámica constantemente (Tabla 13, Tabla 21 y Tabla 31). Se puede afirmar que el que GeoGebra incluya entre sus herramientas variedad de opciones que permiten representar fácilmente diferentes objetos (bisectrices, mediatrices, tangentes, ángulos, polígonos, circunferencias, rectas perpendiculares...) resultó ser, un aliciente, para que las parejas los añadieran a sus construcciones. A veces, estos elementos respondían a una idea previa de los participantes, que observaban alguna regularidad y querían verificarla añadiendo algunos elementos que les permitieran cuantificarla o visualizarla, aunque en otras ocasiones buscaban, en los menús de las herramientas y añadieron los nuevos elementos para ver si se les ocurría alguna idea que orientara en la búsqueda de una aproximación a la solución. La grabación de los diálogos entre los miembros de las parejas y la captura de las pantallas de lo que hacían, permitió registrar estas formas de proceder y facilitó discriminar estas acciones relacionadas con la *creatividad matemática*. Como se comentó anteriormente, las búsquedas en la web influyeron directamente en el tipo de elementos auxiliares que los participantes añadieron a sus construcciones. Este recurso que ya se ha demostrado como útil para los resolutores de problemas (Santos-Trigo & Reyes-Martínez, 2018), es, también, un recurso que diversifica y amplía la capacidad de generar nuevos objetos matemáticos por parte de los participantes, es decir, influye en desarrollo de la *creatividad matemática*.

Recapitulando las conclusiones de este objetivo se puede afirmar que en los tres episodios de resolución de problemas con GeoGebra, se ha puesto de manifiesto cómo los participantes mostraron la manera de desarrollar la Actividad Matemática. Se ha podido constatar que, aunque en cualquier episodio se podía identificar cualquiera de las componentes de la Actividad Matemática, en todos los casos, una de ellas destacaba frente al resto. De modo que, en el episodio de Comprensión, prevaleció la *creación matemática*; en el episodio de Exploración, prevaleció el *razonamiento matemático;* y en el episodio de Búsqueda de Múltiples Aproximaciones, prevaleció la *percepción matemática*.

El carácter universal de la Actividad Matemática permite conectar las acciones de diferentes niveles educativos (Wasserman, Zazkis, Baldinger, Marmur, & Murray, 2019). De esta forma, las acciones realizadas por los participantes durante la resolución de los problemas en el TRPG, que constituyó el eje del curso Matemáticas para la Enseñanza, se pueden relacionar con las acciones que realizarían los estudiantes de Educación Secundaria.

V.2. Tipologías en el comportamiento de los estudiantes mientras usan GeoGebra en la Resolución de Problemas

A partir del análisis realizado de las resoluciones de los participantes (Capítulo IV.2), en el que se observó el comportamiento de los estudiantes al resolver los problemas con GeoGebra, se puso de manifiesto la existencia de diferencias de actuación a la hora de aprovechar las oportunidades que brinda este SGD en la resolución de problemas. Las diferencias observadas en las parejas se presentaron alrededor de dos de los aspectos de la Actividad Matemática: el *razonamiento matemático* y la *creación matemática* (Kilpatrick, et al., 2015). Si se relacionan estos aspectos con la capacidad de aprovechar el dinamismo de GeoGebra y la capacidad de llevar a una construcción los datos y las relaciones matemáticas del enunciado de un problema, respectivamente, se observa que las diferencias entre los participantes parecen revelar distintos grados de apropiación del SGD, que ciertamente se entremezcla con su propia Competencia Matemática y los obstáculos cognitivos que tendrían con independencia del uso de GeoGebra (Iranzo & Fortuny, 2009). Realizando un análisis del comportamiento de los participantes respecto a su manera de usar GeoGebra podemos dar respuesta al segundo objetivo de la investigación:

Establecer tipologías en el comportamiento de los participantes cuando usan GeoGebra en la resolución de problemas.

El Análisis por Parejas se estableció a partir de las acciones que marcaron el proceso de resolución de cada pareja para cada uno de los problemas. Uno de los resultados obtenidos de este análisis por pareja, es que se pudieron distinguir dos grupos de acciones que permiten identificar semejanzas y diferencias entre los comportamientos de las seis parejas de estudiantes que participaron en esta investigación:

Construcción. Se incluyen aquí las acciones realizadas durante el episodio de comprensión que muestran si las parejas fueron capaces de incorporar las características clave de cada problema al realizar la construcción dinámica.

Dinamismo. Que incorpora las acciones de los episodios de exploración y búsqueda de múltiples aproximaciones, relacionadas con la capacidad de usar el movimiento de los objetos de dos formas: una para comprobar las condiciones iniciales del problema y alguna conjetura previa, y otra que usaba el movimiento para observar cambios y realizar conjeturas.

Estas categorías están estrechamente relacionadas con la *creación matemática,* el *razonamiento matemático* y la *percepción matemática,* que describen de forma conjunta la Actividad Matemática (Kilpatrick, et al., 2015). De esta forma, se trata de mostrar de forma integrada, la capacidad de las parejas para desenvolverse con un Sistema de Geometría Dinámica y el "saber hacer" matemáticas a la hora de resolver problemas.

La manera en que cada pareja abordó la actividad estuvo condicionada por sus conocimientos de GeoGebra y cómo fueron capaces de usar las posibilidades que ofrece. De esta manera se puede establecer un paralelismo entre la Actividad Matemática y la habilidad Tecno-matemática desde el momento en que se concibe que la Actividad Matemática parte del "saber" matemáticas para verlo de la perspectiva de el "saber hacer" matemáticas. De la misma manera la habilidad Tecno-matemática partiría del conocimiento de las herramientas digitales y las posibilidades que presta un SGD, para luego "saber usarlas" para resolver una tarea matemática.

Para un buen desempeño matemático en la resolución de problemas con tecnología, es importante la capacidad de reflejar las características clave que están presentes en el enunciado de un problema, lo que conducirá a una construcción dinámica que permita explorarlo y resolverlo. Estas acciones forman parte de la *creación matemática*, ya que se relacionan con ser capaz de hacer nuevas representaciones que hagan destacar las propiedades matemáticas, con el fin de servir de ejemplo o contraejemplo de alguna característica relevante (Kilpatrick, et al., 2015). En cada problema se pueden diferenciar las parejas que, desde el principio, son capaces de elegir la herramienta adecuada y usarla para conseguir una construcción que conserve las características matemáticas, de aquellas parejas que no pueden hacerlo. Además, entre las que no son capaces, hay parejas que actúan con autonomía, realizando pruebas de arrastre, repasando las propiedades de la herramienta y haciendo varias pruebas hasta que lo consiguen (marcadas con ■ en la acción *Incorporar características clave* de la Tabla 52), mientras otras parejas requieren la intervención del profesor o algún compañero (marcadas con × en la acción *Incorporar características clave* de la Tabla 52). En el análisis de los datos, se pudo observar que las parejas 1, 3 y 5 (la Pareja 5 lo consiguió dos de las tres veces) fueron capaces de combinar de forma autónoma sus habilidades matemáticas y tecnológicas para realizar construcciones dinámicas adecuadas. Las otras parejas tuvieron dificultades para que sus construcciones conservaran las características matemáticas, determinadas por los enunciados de los problemas, cuando se arrastraban los objetos. Es decir, sus construcciones no superaban la "prueba del arrastre". Este hecho, en ocasiones, pudo ser por la falta de práctica al usar las herramientas de GeoGebra y otras veces por dificultades en la aplicación de sus conocimientos matemáticos. Algunas parejas tenían un grado de *fluidez tecno-matemática*, en el sentido de Jacinto y Carreira (2017), mayor que las otras y como consecuencia, existieron diferencias en los aspectos relativos a la *creación matemática*. En la Tabla 52 se muestran a las parejas reordenadas por dicha habilidad, en términos de su capacidad para integrar las posibilidades de GeoGebra en su resolución de los problemas.

Respecto al Dinamismo, el uso del movimiento en la construcción realizada, combinado con la cuantificación de atributos, son importantes durante el episodio de exploración para poder aprovechar las oportunidades que ofrece GeoGebra en la resolución de problemas. Por una parte, para observar y buscar regularidades que permitan establecer una conjetura y, por otra, para comprobar dichas conjeturas. Estas acciones, comprobar, observar y conjeturar, son acciones relacionadas con el *razonamiento matemático* de los participantes, que es a su vez un aspecto clave de la Actividad Matemática (Kilpatrick, et al., 2015). Las parejas 1, 2, 3 y 5 comprobaron sus conjeturas arrastrando elementos de sus construcciones y, siempre que su construcción se lo permitía, apoyaban sus razonamientos con la visualización de la figura en movimiento, observando y conjeturando. Hubo algunos momentos en los que no lo hicieron, como el caso en el que la Pareja 5 (al principio del TRPG) aún no había integrado el movimiento al proceso de resolución o cuando, la Pareja 2, realizó una construcción para el Problema 3 que no le permitía el arrastre. Además, las parejas 1, 2 y 3 construyeron como elemento auxiliar para el tercer problema, un punto libre que permitía encontrar la solución del problema moviéndolo y cuantificando la suma de distancias. Se podría calificar esta forma de actuar de las parejas como más "dinámica" que la que presentan las parejas 7 y 8, quienes parten habitualmente de construcciones que permiten o no el movimiento, pero se pierden algunas de las propiedades que se quieren representar. La Pareja 7 y la Pareja 8, aun cuando modifican sus construcciones siguiendo instrucciones del profesor, realizan sus razonamientos sin mover los objetos, guiándose únicamente por la cuantificación de los atributos del caso particular que tienen en pantalla.

Esta forma de usar las posibilidades de GeoGebra para transformar la representación de la figura en la vista gráfica moviendo elementos, genera nuevos puntos de vista, algo que es fundamental en la resolución de problemas (Kilpatrick, et al., 2015). Todo esto es más difícil de conseguir cuando se usa lápiz y papel. Además, se concluye que el uso de las ventajas del dinamismo de GeoGebra es aprovechado de forma diferente por las parejas, lo que concuerda con la idea de que la *fluidez tecno-matemática*, se adquiere a diferentes ritmos. Los resultados mostrados anteriormente reflejan que las parejas presentan diferentes grados de fluidez, pudiéndose distinguir entrever tres niveles, las parejas 1 y 3 que incorporan el movimiento para comprobar y conjeturar (marcadas con √ y ↕ en ambas acciones en la Tabla 52), las parejas 2 y 5 que lo incorporan frecuentemente (marcadas con √ y ↕ en más de la mitad de las acciones en la Tabla 52) y las parejas 7 y 8 que no llegan a aprovechar esta ventaja de GeoGebra (marcadas con × en varias de las acción de la Tabla 52).

Como conclusión de este Análisis por Parejas, se puede señalar que entre los participantes hay diferentes grados de habilidad a la hora de usar el GeoGebra para resolver problemas. En la Tabla 52 mostramos a las parejas reordenadas por dicha habilidad, en términos de su capacidad para integrar las posibilidades de GeoGebra en su resolución de los problemas.

Reubicando las parejas, se puede generar una escala que muestre su habilidad para usar las ventajas de GeoGebra en la resolución de problemas. Atendiendo a las acciones realizadas por las parejas se pueden establecer tres tipologías de comportamiento relacionadas con el aprovechamiento de GeoGebra para la resolución de problemas:

- **Bajo**. Las parejas usan GeoGebra para representar las situaciones del problema de la misma forma que se haría con papel y lápiz, sin conseguir que las relaciones matemáticas queden presentes. Además, aprovechan poco el dinamismo del SGD que permite mover los objetos representados (Parejas 7 y 8).
- Medio. Las parejas realizan las construcciones que representan los datos del problema, e intentan que las relaciones matemáticas de los objetos también queden presentes. Necesitan ayuda para lograrlo, pero luego mueven algunos objetos que sirven para

comprobar o realizar conjeturas (Parejas 2 y 5).

- Alto. Las parejas, de una manera prácticamente autónoma, son capaces de resaltar las características clave de problema en la construcción. Esto lo acompañan del movimiento y arrastre de distintos objetos para comprobar sus conjeturas o los mueven mientras observan y buscan propiedades matemáticas que los llevan a realizar conjeturas (Parejas 1 y 3).

	Pareja	Acción	Cuerdas Iguales	Ángulo 45	Conectar islas
Alto	P1	Incorporar características clave	■	■	■
		Comprobar conjeturas o verificar condiciones	√	√	√
		Encontrar regularidades o soluciones.	↕	↕	↕
	P3	Incorporar características clave	■	■	■
		Comprobar conjeturas o verificar condiciones	√	√	√
		Encontrar regularidades o soluciones.	↕	↕	↕
Medio	P5	Incorporar características clave	■	■	×
		Comprobar conjeturas o verificar condiciones	×	√	√
		Encontrar regularidades o soluciones.	↕	↕	×
	P2	Incorporar características clave	■	×	×
		Comprobar conjeturas o verificar condiciones	√	√	√
		Encontrar regularidades o soluciones.	↕	×	↕
Bajo	P7	Incorporar características clave	×	■	×
		Comprobar conjeturas o verificar condiciones	×	×	×
		Encontrar regularidades o soluciones.	×	↕	×
	P8	Incorporar características clave	×	×	×
		Comprobar conjeturas o verificar condiciones	×	×	×
		Encontrar regularidades o soluciones.	↕	×	×

Tabla 52: Parejas clasificadas según su grado de habilidad en la resolución de problemas con GeoGebra

V.3. Reflexiones sobre su propia experiencia usando GeoGebra en la resolución de problemas

Teniendo en cuenta que estamos considerando a los participantes de la investigación como futuros profesores de matemáticas en Educación Secundaria, cabe preguntarse, cómo ven la experiencia de realizar el Taller de Resolución de Problemas con GeoGebra desde el punto de vista de la labor docente, ¿qué tipo de acontecimientos o eventos se les pueden presentar en el aula?, ¿qué contingencias tendrán que atender? Para ello, se pidió a los estudiantes que hicieran una tarea que hemos denominado Reflexión Docente, la cual consistió en hacer propuestas de acontecimientos surgidos de su propia experiencia, o la de sus compañeros, en la resolución de los problemas del TRPG y en identificar algunos elementos matemáticos relacionados con esos acontecimientos. Esta tarea se propuso como una manera de anticiparse a las posibles contingencias que conllevaría el uso de GeoGebra en una clase de resolución de problemas matemáticos en un nivel de Educación Secundaria. La tarea se relaciona directamente con la perspectiva del Contexto Matemático de la Enseñanza en el marco MUST, en la que se incluye la componente *reflexionar sobre las matemáticas de la práctica docente*. Desde esta perspectiva la práctica docente requiere, entre otras cosas de la preparación de clases y actividades para los estudiantes (Heid, Wilson, & Blume, 2015). La inclusión de esta actividad dentro del TRPG pretende mostrar aspectos de dicha perspectiva del MUST, que es exclusiva de la profesión docente siendo conscientes de las limitaciones que conlleva el desarrollo de una experiencia en la que no participan profesores que interactúen con estudiantes de Educación secundaria, se planteó el tercer objetivo y último de esta investigación.

Analizar las reflexiones que los participantes, en el rol de futuros profesores, hacen sobre su propia experiencia al usar GeoGebra en la resolución de problemas.

En los análisis de los resultados obtenidos en el capítulo anterior (por Problema y por Parejas) se pudo constatar cómo, durante el desarrollo del Taller de Resolución de Problemas con GeoGebra los participantes tuvieron dudas, cometieron errores y mantuvieron discusiones matemáticas. De cara a hacer propuestas sobre posibles eventos o acontecimientos, sus propias dudas sirvieron como base fundamental. En el epígrafe III del Capítulo IV, se pudo comprobar que los enunciados propuestos por los participantes, coincidían con los eventos o acontecimientos derivados en el TRPG. En este análisis se obvió, a propósito, entrar a evaluar la calidad de las propuestas de los participantes en lo referente a las posibilidades que brindaban para convertirse en situaciones de aula más elaboradas. Zbiek y Blume (2015) señalan que este proceso requiere del planteamiento del evento o acontecimiento para un análisis profundo y la verificación de que pueden surgir multitud de Elementos Matemáticos derivados de la propuesta. El interés del análisis de esta tarea es comprobar si las parejas tuvieron la capacidad de realizar un ejercicio de reflexión sobre su propia experiencia en el TRPG, para conectarla con su futuro como docentes de Matemáticas en la Educación Secundaria. Todas las parejas propusieron al menos un acontecimiento relacionado con el uso de la tecnología para cada uno de los problemas y también incluyeron algunas ideas para el desarrollo de Elementos Matemáticos asociados al evento. Se evidenció, sin lugar a dudas tal y como se observó en el CapítuloIV.3, que los participantes tienen en esta primera etapa de formación como profesores la habilidad de *reflexionar sobre las matemáticas de la práctica docente*.

En el análisis de la Tarea de Reflexión Docente, se organizaron las propuestas hechas por los participantes en tres categorías de eventos o acontecimientos que surgieron de las habilidades observadas durante la resolución de problemas, de forma que responden a acciones que se han relacionado en esta investigación con la *fluidez tecno-matemática*, el *razonamiento matemático* y a la *creación matemática*.

El grupo de propuestas que se corresponde con la que se ha denominado Apropiación de GeoGebra, recoge los eventos o acontecimientos que se relacionan directamente con *conexiones de enseñanza en el aula*, es decir, las acciones didácticas para resolver las dudas que se plantean como punto de partida, y que se podría considerar similares en un curso universitario que en un aula de Educación Secundaria (Wasserman, Zazkis, Baldinger, Marmur, & Murray, 2019). Las parejas hicieron pocas propuestas que se pudieran incluir en este grupo, pero los Elementos Matemáticos que señalaron, contemplan la categoría de *Conocer y usar el currículo*, que resulta ser una componente de la perspectiva del Contexto Matemático de la Enseñanza, que conlleva reconocer los conceptos fundamentales de las matemáticas y las posibles consecuencias que pueden generarse si hay dificultades y errores para su comprensión.

Los otros dos grupos de eventos o acontecimientos se relacionan con la justificación de propiedades descubiertas y la representación de nuevos elementos usando GeoGebra. Las propuestas incluidas en estos dos grupos, fueron las más numerosas. Además, el primer grupo (justificación de propiedades), lo componen propuestas que fueron realizadas por las parejas 1, 3 y 5, mientras que las del otro grupo fueron propuestas, mayoritariamente, por las parejas 2, 7 y 8. Si se compara esta información con las conclusiones establecidas anteriormente (Tabla 52), se puede observar que concuerdan con las parejas que se consideran con un mayor y un menor grado de habilidad a la hora de resolver problemas, respectivamente. Este hecho no esperado, en el que coinciden los resultados al analizarlos desde dos perspectivas diferentes, pone de manifiesto que existen relaciones entre las distintas perspectivas de la Comprensión Matemática que considera el modelo MUST. En este caso, los participantes con una mayor destreza en el uso de GeoGebra para resaltar características relevantes de un problema y para mover los objetos en busca de dar con una solución, también coinciden con los participantes que presentan eventos o acontecimientos en los que ponen de manifiesto la capacidad de separar en resultados intermedios el proceso de resolución. Este hecho nos permite concluir que existe una conexión importante entre las componentes (de dos perspectivas distintas) del *razonamiento matemático* y de la *síntesis de ideas matemáticas*.

Se puede concluir, como resumen de los resultados de esta investigación haciendo una lectura integrada de los tres apartados de este capítulo, que la inclusión de las tecnologías como herramienta para el trabajo matemático para la Resolución de problemas en el aula conlleva un cambio en la concepción de lo que es un estudiante matemáticamente competente en Educación Secundaria. Estos cambios suponen una extensión de los aspectos de Comprensión Matemática necesaria para la Enseñanza que, por definición, se debe entender como en constante evolución. La investigación llevada a cabo se centró especialmente en dos de las perspectivas del modelo MUST. Desde el punto de vista de la Actividad Matemática, los resultados obtenidos muestran la necesidad de una posible extensión de sus componentes, al objeto de incorporar acciones relacionadas con: la posibilidad de reconocer argumentos matemáticos de forma simultánea dentro de la *percepción matemática,* visualizar el movimiento de una figura para el *razonamiento matemático* y realizar una construcción dinámica para facilitar la *creación matemática*. Por último, como resultado de esta investigación, se debe destacar que se han encontrado evidencias de que, el hecho de realizar propuestas de posibles contingencias para las sesiones de clase de Matemáticas en la Educación Secundaria en las que se use GeoGebra, constituye por sí misma una actividad formativa, que permite desarrollar varios aspectos de la perspectiva del modelo MUST correspondiente al Contexto Matemático de la Enseñanza.

V.4. PERSPECTIVAS DE FUTURO PARA LA INVESTIGACIÓN

Esta investigación surgió a partir de ciertos cuestionamientos sobre el proceso de formación de los profesores de matemáticas de la Educación Secundaria en un escenario en el que están presentes las tecnologías digitales. Se ha intentado dar respuesta en parte a dicha inquietud, analizando cómo el uso de GeoGebra en la resolución de problemas ofrece nuevas oportunidades para la enseñanza de las matemáticas y para la formación de profesores. La investigación se ha realizado en el contexto de formación de futuros profesores, proponiendo actividades en las que la tecnología es protagonista durante todo el proceso, y que podrían ser utilizadas por los participantes de esta investigación en su próxima actividad docente con estudiantes de Educación Secundaria. Se han encontrado evidencias de cómo el uso de GeoGebra promueve la activación de diferentes elementos de la Actividad Matemática. Sería interesante profundizar más en esta línea de investigación, por ejemplo, cambiando los participantes del estudio por docentes en activo que utilicen GeoGebra en la enseñanza de las matemáticas y la resolución de problemas. De esta forma, se puede, por un lado, analizar la Actividad Matemática y el Contexto Matemático de la Enseñanza en docentes que usen la tecnología y, por otro lado, analizar y discutir los eventos relacionados con el uso de GeoGebra que puedan haber surgido en las aulas de dichos docentes. Se podrían plantear varias preguntas al respecto: ¿De qué manera usan GeoGebra en sus clases? ¿Qué elementos de la Actividad Matemática desarrollan en sus estudiantes? ¿Qué aspectos del Contexto Matemático de la Enseñanza los diferencia de otros docentes que no usan tecnología en clase? Contestar a este tipo de preguntas podría mostrar luz sobre si la tecnología está realmente influyendo, de alguna forma, en la comprensión de las matemáticas que debe tener un profesor de matemáticas de Educación Secundaria.

Otra posible línea de investigación sería analizar con más detalle qué es la *fluidez tecno-matemática*. A este término, utilizado en esta investigación, hacen alusión, directa o indirectamente, autores como Jacinto y Carreira (2017) o Thomas y Palmer (2014). Además, sería interesante realizar una propuesta secuenciada de cómo se podría desarrollar dicha capacidad por parte del profesorado de Educación Secundaria. Para ello, desde la misma manera que se parte de la resolución de problemas para aprender matemáticas, se podría analizar cómo al resolver problemas matemáticos haciendo uso de GeoGebra se desarrolla la *fluidez tecno-matemática* de los docentes. Un punto de partida sería la conclusión realizada en esta memoria de investigación, respecto a los diferentes tipos de aprovechamiento de GeoGebra para la resolución de problemas que pueden presentar los futuros docentes (Tabla 52). Un diagnóstico inicial de los docentes, para conocer sus distintos niveles de apropiación de GeoGebra en la resolución de problemas matemáticos sería necesario. Ya que, el objetivo de esta nueva investigación sería: Analizar la utilidad de la formación en resolución de problemas con GeoGebra para docentes en activo, en el sentido de como dicha formación podría desarrollar y actualizar su comprensión de las Matemáticas dentro de un contexto digital-matemático de la enseñanza.

En el Taller de Resolución de Problemas con GeoGebra para futuros docentes, se realizaron tres actividades que no son adecuadas para estudiantes de Educación Secundaria, pero la resolución de problemas con tecnología siguiendo los episodios (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2009) ofrece una guía para diseñar nuevas actividades, que se deben analizar de una forma similar a la planteada en la Tarea de Reflexión Docente para prever contingencias posibles de la puesta en marcha en las aulas. En este sentido, otra posible extensión de esta investigación, sería preguntarse: de qué manera se reflejan en el aprendizaje de los estudiantes de Educación Secundaria los cambios que se producen cuando están inmersos en el uso de las tecnologías para aprender matemáticas. Algunas preguntas que guiarían la línea de investigación serían: ¿Qué capacidades desarrollan los estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas haciendo uso de GeoGebra? ¿Estas capacidades se pueden relacionar con la *percepción, razonamiento* o *creatividad matemática* adaptando las descritas en el MUST para el profesorado a los estudiantes?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, M. E., Mejía, C., & Rodríguez, C. W. (2011). Resolución de problemas por medio de matemática experimental: uso de software de geometría dinámica para la construcción de un lugar geométrico desconocido. *Revista Integración, 29*(2), 163-174.

Ascanio-Zárate, M. (2014). *Elaboración y Experimentación en el aula con el libro interactivo "Resolviendo un problema con GeoGebra".* (Trabajo de Fin de Máster), Universidad de Granada.

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving Content and Pedagogy in Teaching and Learning to Teach: Knowing and Using Mathematics. En J. Boaler (Ed.), *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* (págs. 83-104). Westport, CT: Ablex Publishing.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Make It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Camacho-Machín, M. (2016). Proyecto Docente para el acceso a Catedrático de Universidad. *Documento no publicado*. Universidad de La Laguna.

Camacho-Machín, M., & Hernández, A. (2017). Resolución de Problemas y Uso de Sistemas de Geometría Dinámica. Un ejemplo. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, XII*, 31-48. Obtenido de http://fpiem.webs.ull.es/index.php/fpiem/issue/view/13/showToc

Camacho-Machín, M., & Santos-Trigo, M. (2015). Aportes sobre resolución de problemas, tecnología y formación de profesores de matemáticas. In N. Planas, *Avances y Realidades de la Educación matemática* (pp. 113-131). Barcelona: GRAÓ.

Camacho-Machín, M., Afonso, M. C., & Moreno, M. (2014). Hacia la elaboración de un marco metodológico para la formación de profesores de Secundaria haciendo uso de Software de Geometría Dinámica. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, 11*, 81-104.

Camacho-Machín, M., Perdomo-Díaz, J., & Hernández, A. (2019). Actividades para la formación de profesores derivadas del uso de GeoGebra en la resolución de problemas. En E.

Badillo, N. Climent, C. Fernández, & M. T. González (Edits.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional.* (págs. 371-394). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Carrillo, J. (2015). Estudio personal compartido sobre conocimiento y desarrollo profesional del profesorado y resolución de problemas. En P. Planrs, *Avances y realidades de la educación matemática* (págs. 133-151). España: GRAO.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Speialised Knowledge for Mathematics Teaching. In B. Ubuz, Ç. Haser, & M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the Eighth Congress of European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2985-2995). Ankara: Middle East Technical University and ERME.

Churchill, D., Fox, B., & King, M. (2016). Framework for Designing Mobile Learning Environments. In D. Churchill, T. Chiu, J. Lu, & B. Fox (Eds.), *Design, Mobile Learning* (pp. 3-25). Singapore: Springer. doi:10.1007/978-981-10-0027-0

Conner, A., Wilson, P., & Kim, H. (2011, September 15). Building on mathematical events in the classroom. *ZDM Mathematics Education, 43*, 979-992.

Contreras, J. (2014). Solving Optimization Problems with Dynamic Geometry Software: The Airport Problem. *Journal of Mathematics Education at Teacher College*, 17-28.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives, 5*, 37-65.

GeoGebra GmbH. (8 de abril de 2019). *Acerca de GeoGebra*. Obtenido de https://www.geogebra.org/about

Gómez-Arciga, A., & Poveda-Fernández, W. (2017). El uso de tecnologías digitales en actividades que extienden la discusión matemática de los estudiantes. En *Tópicos Selectos de Educación en CITeM* (págs. 65-84). La Libertad.

Gómez-Chacón, I. M., & Escribano, J. (2014). Geometric Locus activities in a dynamic geometry system. Non-iconic visualization and instrumental genesis. *Relime, 17*(4-II), 361-383. doi:10.12802/relime.13.17418

Granberg, C., & Olsson, J. (2015). ICT-supported problem solving and collaborative creative reasoning: Exploring linear functions using dynamic mathematics software. *The Journal of Mathematical Behavior, 37*, 48-62. doi:10.1016/j.jmathb.2014.11.001

Guin, D., Ruthven, K., & Trouche, L. (Edits.). (2006). *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators: turning a computational device into a mathematical instrument* (Vol. 36). Springer Science & Business Media.

Heid, M., Wilson, P. S., & Blume, G. W. (Edits.). (2015). *Mathematical Understanding for Secondary Teaching: A Framework and Classroom-Based Situations.* United States of America: NCTM and IAP.

Hernández, A. (2016). *Aportaciones de la Geometría dinámica para el desarrollo de la Actividad y Competencia Matemática en la resolución de problemas de variación. (Trabajo Fin de Máster).* Universidad de La Laguna.

Hernández, A., Perdomo-Díaz, J., & Camacho-Machín, M. (2017). Comprensión Matemática para la Enseñanza en secundaria de estudiantes del Grado en Matemáticas cuando resuelven un problema con GeoGebra. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática, XII*, 49-68. Obtenido de http://fpiem.webs.ull.es/index.php/fpiem/issue/view/13/showToc

Hernández, A., Perdomo-Díaz, J., & Camacho-Machín, M. (2018 a). Prompts, Technology and Problem Solving. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Ed.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *5*, p. 61. Umeå.

Hernández, A., Perdomo-Díaz, J., & Camacho-Machín, M. (2018 b). Propuesta de Uso de Tecnología en la Resolución de Problemas para la Formación Docente. *Investigación en Educación Matemática XXII* (pág. 633). Gijón: Ediciones de la Universidad de Oviedo. Obtenido de http://www.seiem.es/pub/actas/index.shtml

Hernández, A., Perdomo-Díaz, J., & Camacho-Machín, M. (2019 a). Mathematical understanding in problem solving with GeoGebra: a case study in initial teacher education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. doi:10.1080/0020739X.2019.1587022

Hernández, A., Perdomo-Díaz, J., & Camacho-Machín, M. (2019 b). Task Designed for Training Secondary Mathematics Teachers Using Technology. *CERME 11.*

Iranzo, N., & Fortuny, J. M. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y Lápiz y Papel en la adquisición de competencias del alumno. *Enseñanca de las ciencias, 27*(3), 433-446.

Jacinto, H., & Carreira, S. (2017). Mathematical Problem Solving with Technology: the Techno-Mathematical Fluency of a Student-with-GeoGebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 1115-1136. doi:10.1007/s10763-016-9728-8

Kilpatrick, J. (2015). Background for the Mathematical Understanding Framework. In M. K. Heid, P. Wilson, & G. W. Blume (Eds.), *Mathematical Understanding for Secondary Teaching: A Framework and Classroom-Based Situations* (pp. 1-8). Charlotte: Information Age Publishing Icc. and NCTM.

Kilpatrick, J., Blume, G., Heid, M. K., Wilson, J., Wilson, P., & Zbiek, R. M. (2015). Mathematical Understanding for Secondary Teaching: A Framework. In M. K. Heid, P. Wilson, & G. W. Blume (Eds.), *Mathematical Understanding for Secondary Teaching: A Framework and Classroom-Based Situations* (pp. 9-30). Charlotte: Information Age Publishing Icc. and NCTM.

Koehler, M. J., Mishra, P., Kereluik, K., Shin, T. S., & Graham, C. R. (2014). The Technological Pedagogical Content Knowledge Framework. In J. M. Spector, M. D. Merrill, J. Elen, & M. J. Bishop (Eds.), *Handbook of Research on Educational Communications and Technology* (pp. 101-111). New York: Springer Science+Business Media. doi:DOI 10.1007/978-1-4614-3185-5_9

Malaspina, U., Torres, C., & Rubio, N. (2019). How to Stimulate In-Service Teachers' Didactic Analysis Competence by Means of Problem Posing. En P. Liljedahl, & M. Santos-Trigo (Ed.), *ICME-13 Monographs* (págs. 133-151). Cham: Springer Nature Switzerland AG. doi:https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_7

Mishra, P., & Koheler, M. J. (Junio de 2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017-1054.

Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. Á., & Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítica para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la RSME, 18*(3), 589-605.

Penalva, M. C., & Llinares, S. (2011). Tareas matemáticas en la Educción Secundaria. En *Didactica de las Matemáticas* (págs. 27-51).

Pólya, G. (1945). *How to solve it?* Princeton: Princeton University Press.

Reyes-Martínez, I. (2016). *El diseño y resultados de la implementación de un ambiente de aprendizaje que incorpora la resolución de problemas y el uso coordinado de tecnologías digitales (Tesis Doctoral).* Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados del IPN, Matemática Educativa, Ciudad de México.

Rhodes, G., Fox, R., Karunakaran, S., Zbiek, R. M., Gleason, B., & Broderick, S. (2015). GRAPHING QUADRATIC FUNCTIONS Situation 21 From the MACMTL – CPTM Situations Project. In M. Heid, P. S. Wilson, & G. W. Blume (Eds.), *Mathematical Understanding for Secondary Teaching* (pp. 257-262). United States of America: NCTM and IAP.

Rowland, T., & Zazkis, R. (2013). Contingency in the Mathematical Classroom: Opportunities Taken and Opportunities Missed. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 13*(2), 137-153. doi:10.1080/14926156.2013.784825

Sánchez-Muñoz, J. M. (2011). Visualización de Lugares Geométricos mediante el uso de Software de Geometría Dinámica GeoGebra. *Pensamiento Matemático.*

Santos-Trigo, M. (2019). Mathematical Problem Solving and the Use of Digital Technologies. En P. Liljedahl, & M. Santos-Trigo (Edits.), *Problem solving in mathematics education, ICME-13 Topic Study Group Report.* Springer.

Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2009). Towards the Construction of a Framework to Deal with Routine Problems to Foster Mathematical Inquiry. *PRIMUS, 19*(3), 260-279.

Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematical Enthusiast, 10*(1&2), 279-302.

Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2016). Digital Technologies and Mathematical

Problem Solving: Redesigning Resources, Materials, and Extending Learning Envioronments. En K. Newton (Ed.), *Problem-Solving: Strategies, Challenges and Outcomes* (págs. 31-50). Hauppauge, New York: Nova Science Publishers, Inc.,.

Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2018). La Resolución de Problemas Matemáticos y el Uso de Tecnología Digital en el Diseño de Libros Interactivos. *Educatio Siglo XXI, 36*(3), 21-40. doi:10.6018/j/349451

Santos-Trigo, M., & Reyes-Martínez, I. (2018). High school prospective teachers' problem-solving reasoning that involves the coordinated use of digital technologies. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. doi:10.1080/0020739X.2018.1489075

Santos-Trigo, M., Camacho-Machín, M., & Olvera-Martínez, C. (2014). Preservice high school teachers' construction and exploration of dynamic model of variation phenomena. En S. Carreira, N. Amado, K. Jones, & H. Jacinto (Edits.), *Proceedings of the Problem@Web International Conference: Technology, creativity and affect in mathematical problem solving* (págs. 99-107). Faro, Portugal: Universidade do Algarve.

Santos-Trigo, M., Reyes-Martínez, I., & Ortega-Moreno, F. (2015). Fostering and supporting the cordinated use of digital technologies in mathematics learning. En *International Journal Learning Technology* (Vol. 10, págs. 251-270). Inderscience Enterprises Ltd.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (2011). *How We Think. A Theory of Goal-oriented Decision Making and its Educational Application.* New York: Routledge.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2010). Mathematics for teaching: A form of applied mathematics. *Teaching and Teacher Education, 26*(2), 161-172.

Thomas, M. O., & Palmer, J. M. (2014). Teaching with Digital Technology: Obstacles and Opportunities. In *The Mathematics Teacher in the Digital Era* (pp. 71-89). Dordrecht Heidelberg New York London: Springer. doi:DOI 10.1007/978-94-007-4638-1

Wasserman, N. H., Zazkis, R., Baldinger, E., Marmur, O., & Murray, E. (2019). Points of Connection to Secondary Teachimg in Undergraduate Mathematics Courses. *22nd Annual Conference on Reseach in Undergraduate Mathematics Education.* Oklahoma City.

Zbiek, R. M., & Blume, G. (2015). Creating New Situations as Inquiry. In M. K. Heid, P. Wilson, & G. W. Blume (Eds.), *Mathematical Understanding for Secondary Teaching: A Framework and Classroom-Based Situations* (pp. 57-64). Charlotte: Information Age Publishing Icc. and NCTM.

Zbiek, R. M., & Heid, M. (2018). Making Connections from the Secondary Classroom to the Abstract Algebra Course: A Mathematical Activity Approach. En N. H. Wasserman, *Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers* (págs. 189-2019). Cham: Springer Nature Switzerland AG. doi:10.1007/978-3-319-99214-3_10

Universidad
de La Laguna

Financiación recibida

Los estudios de doctorado que he realizados y las publicaciones surgidas de las investigaciones llevadas a cabo durante estos cinco años han sido posibles, en parte, a la financiación de entes públicos. Dicha financiación se logró mayoritariamente a través de convocatorias públicas de proyectos o becas. En la relación siguiente se detallan, por orden cronológico, las convocatorias o proyectos que se financiaron, en parte, cada actividad.

Proyecto I+D+i del Programa Estatal de Investigación, Desarrollo e Innovación Orientada a los Retos de la Sociedad, del Ministerio de Economía Ciencia e Innovación con referencia EDU2015-6570-R. Asistencia a la XII *Reunión Interuniversitaria para Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*.

Vicerrectorado de Internacionalización, Universidad de La Laguna. Bolsa de viaje para movilidad vinculada a convenios de cooperación suscritos con universidades e instituciones educativas de ámbito extracomunitario. Año 2017. Estancia de doctorado en el CINVESTAV. Junio y julio de 2017.

Proyecto I+D+I del Programa Estatal de Fomento de la Investigación Científica y Técnica de Excelencia,

Subprograma Estatal de Generación de Conocimiento, en el marco del Plan Estatal de Investigación Científica y Técnica y de Innovación 2013-2016 con referencia EDU2016-81994-REDT. Enero 2018. Traslado a la Escuela de Doctorado organizada por la RED 8 en Alicante.

Vicerrectorado de Investigación, Universidad de La Laguna. Ayudas para la presentación y defensa de resultados de investigación: asistencia a congresos y reuniones científicas. Año 2018. Asistencia al PME 42 y presentación de una comunicación.

Vicerrectorado de investigación, Universidad de La Laguna. Apoyo a la formación de personal investigador para la presentación y defensa de resultados de investigación: asistencia a congresos y reuniones científicas. Año 2018. Asistencia al PME 42 y presentación de una comunicación.

Proyecto I+D+I del Programa Estatal de Investigación, Desarrollo e Innovación Orientada a los Retos de la Sociedad, del Ministerio de Economía, Industria y Competitividad con referencia EDU2017-84276-R. Impresión del póster para el XXII SEIEM celebrado en Guijón. Septiembre 2018.

Vicerrectorado de Internacionalización, Universidad de La Laguna. Bolsa de viaje para movilidad vinculada a convenios de cooperación suscritos con universidades e instituciones educativas de ámbito extracomunitario. Año 2018. Estancia de doctorado en el CINVESTAV. Octubre de 2018.

Vicerrectorado de Investigación, Universidad de La Laguna. Apoyo al desarrollo de tesis con mención internacional: Ayudas a estancias en otros centros asociadas al desarrollo de Tesis Doctorales. Año 2018. Estancia de doctorado en el CINVESTAV en el mes de octubre de 2018.

Universidad de La Laguna. Ayudas asistenciales para la matrícula por parte del personal de la Universidad de La Laguna. Curso: 2015/16, 2017/2018 y 2018/19.

Universidad de La Laguna
Oficina de Sede Electrónica
Entrada
Nº registro: 2021/6406
Nº reg. oficina: OF002/2021/6320
Fecha: 28/01/2021 21:35:45

AGRADECIMIENTOS

Como es la costumbre, dedico unas líneas a las personas que, ya sea de forma consciente o inconsciente, han sido necesarias para llevar esta investigación a término.

En primer lugar, señalar que estoy muy agradecido con mis directores por ser los guías de esta investigación, sus incesantes apuntes hacia el "buen camino" y sus correcciones —he de confesar que estas últimas no siempre fueron bien recibidas.

En segundo lugar, he de agradecer al Doctor Santos Trigo que me permitiera, y siga permitiendo, integrarme a los seminarios del *Math Problem Solving Team*. La noción que tengo sobre la resolución de problemas haciendo uso de la tecnología es, sin duda, gracias a poder instruirme y tratar con sus participantes —echo de menos desayunar entre amigos y discusiones académicas… desayunar chiles jalapeños, no.

Un agradecimiento para aquellos que, durante estos cinco años, he tenido el placer de encontrarme como compañeros de andanzas. Sin esos ratos de aprendizaje entre iguales, de ánimo mutuo y de chanzas, esto hubiera sido poco enriquecedor y …muy aburrido. Entre todos ellos he de nombrar por orden de aparición a Miguel, William, Adrián, Daniel e Isaid, los P.P.P. que me acompañaron en México y como representante español a mi amigo Alberto al que le cedo con gusto el relevo en la ULL—¡suerte con eso!

Un agradecimiento especial a Pepi por siempre empezar o terminar nuestras agotadoras reuniones con un "¿tú cómo estás?" o un "¿cómo te sientes?". Y un reconocimiento a Matías porque entre discusiones, cavilaciones y tareas, siempre hubo tiempo para una charla amistosa junto a un té caliente y un "café sólo con sacarina y un vaso de agua con gas"— algún vino cayo también, no vamos a mentir.

Termino con unas líneas para mi familia, mucho del tiempo invertido en este trabajo era suyo por derecho legítimo. Pocas fueron las veces que me lo reclamaron y nunca lo recuperaremos. Lo intento compensar como puedo: dando abrazos más fuertes de lo normal, diciéndoles que los quiero y pidiendo a Dios que los cuide. Para no defraudar a Elisa y a Diego termino este "libro" con un…

FIN