

María González Falcón

La Topología del Universo

The Topology of the Universe

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Septiembre de 2021

DIRIGIDO POR

Domingo China Miranda

Francisco Javier Díaz Díaz

Domingo China Miranda

*Departamento de Matemáticas,
Estadística e Investigación
Operativa*

Universidad de La Laguna

38200 La Laguna, Tenerife

Francisco Javier Díaz Díaz

*Departamento de Matemáticas,
Estadística e Investigación
Operativa*

Universidad de La Laguna

38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

A mis tutores, Domingo y Francisco, por su dedicación, paciencia y ayuda.

A mi familia y amigos, por su apoyo, por mostrar su interés y compartir mi ilusión en aquello que me apasiona, darme fuerzas en los momentos más bajos y animarme a seguir adelante.

En especial, a mi padre, quien siempre ha sido una fuente de preguntas, respuestas y conversación.

María González Falcón
La Laguna, 3 de septiembre de 2021

Resumen · Abstract

Resumen

La Topología C3smica estudia la forma del Universo. Y es que, aunque se suele asumir que es simplemente conexo, no existe ninguna raz3n para presuponerlo. Nuestro universo puede ser multiconexo.

En esta memoria nos centramos en los modelos cosmol3gicos multiconexos. Para ello, primero introducimos los conceptos geom3tricos y topol3gicos necesarios. Seguimos con una descripci3n de las formas espaciales tridimensionales. Y finalizamos con los modelos cosmol3gicos multiconexos como posibles formas del Universo, las ilusiones que se crearían al vivir en estos espacios, dos m3todos observacionales para encontrar signos de multiconexidad e introducimos dos ejemplos ampliamente estudiados: el 3-Toro y el Dodecaedro de Poincaré.

Palabras clave: *formas espaciales – topología c3smica – modelos cosmol3gicos multiconexos – 3-Toro – Dodecaedro de Poincaré.*

Abstract

Cosmic Topology studies the shape of the Universe. Although it is often assumed that its topology is simply connected, there is no reason to presuppose it. Our Universe could be multi-connected.

In this memory we focus on the multi-connected cosmological models. To do so, we first introduce the necessary geometrical and topological concepts. We continue with a description of the three-dimensional space forms. And we conclude with the multi-connected cosmological models as possible shapes of the Universe, the illusions that could be created by living in these spaces, two observational methods to find signs of multi-connectedness and two widely studied examples: the 3-Torus and the Poincaré Dodecahedral Space.

Keywords: *space forms – cosmic topology – multi-connected cosmological models – 3-Torus – Poincaré Dodecahedron.*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Introducción de Conceptos Teóricos Geométricos y Topológicos	1
1.1. Variedades de Riemann	1
1.1.1. Variedades de Riemann	2
1.1.2. Conexión de Riemann	3
1.1.3. Geodésicas	4
1.1.4. Curvatura	5
1.2. Grupos de Lie. Acción de un Grupo de Lie. Variedad Recubridora	7
1.2.1. Grupos de Lie	7
1.2.2. Acción de un Grupo de Lie sobre una Variedad	9
1.2.3. Variedad Recubridora	13
2. Espacios de Curvatura Constante	17
2.1. Espacios de Curvatura Constante	17
2.2. Formas Espaciales Tridimensionales	21
2.2.1. Formas Espaciales Euclídeas	22
2.2.2. Formas Espaciales Esféricas	28
2.2.3. Formas Espaciales Hiperbólicas	32
3. Topología Cósmica	35
3.1. Modelos Cosmológicos Multiconexos	35
3.2. Imágenes Fantasma y Métodos Observacionales	37
3.2.1. Cristalografía Cósmica	38
3.2.2. Círculos en el Cielo	39
3.3. Ejemplos	41
3.3.1. 3-Toro	41

3.3.2. Dodecaedro de Poincaré	42
Bibliografía	47
Poster	49

Introducción

El objetivo de la Cosmología Relativista es deducir de las ecuaciones de la Relatividad General los posibles modelos que describen el espacio en el que vivimos.

La publicación de Einstein en 1917 de la primera solución cosmológica de las ecuaciones de la Relatividad General inició un debate acerca de la forma de nuestro universo. La solución que él propuso fue un modelo simplemente conexo estático de curvatura esférica, la esfera tridimensional. Sin embargo, de Sitter observó que a esta solución también podían corresponderle otros espacios con curvatura positiva, como el espacio multiconexo \mathbb{P}^3 , con misma métrica (solución de las ecuaciones) que S^3 pero topologías diferentes. La idea de que el universo podía tener una topología multiconexa es anterior a la Relatividad General. En 1900 Schwarzschild señaló la posibilidad de que el espacio tuviera curvatura constante positiva, nula o negativa y topología no trivial. Además, indicó que si el espacio tuviese dicha topología se podrían observar imágenes múltiples de objetos astronómicos en diferentes direcciones.

Durante la década de los años 20, los descubrimientos de modelos no estáticos por Friedmann (1922) y Lemaître (1927) dieron un gran impulso a la cosmología relativista. Estos modelos isotrópicos y homogéneos admiten secciones espaciales de tipo esférica, euclídea e hiperbólica según tengan curvatura positiva, nula o negativa. Los modelos para un universo simplemente conexo son S^3 , si es de curvatura positiva, \mathbb{R}^3 si es de curvatura nula, o H^3 si es de curvatura negativa. Además, Friedmann precisó que las ecuaciones de Einstein no eran suficientes para concluir si el espacio es finito o no, ni deducir su estructura global. Sin embargo la falta de medios experimentales provocó que la mayoría de los cosmólogos de la época perdieran el interés en el estudio de la forma del universo.

En 1971 se publica un artículo de George Ellis [4] acerca de avances matemáticos en la clasificación de las variedades tridimensionales y su posible aplicación a la cosmología. Con este importante estudio, resurgió el interés en la

topología del universo de la mano de investigadores como Sokoloff, Starobinsky, Zeldovich, Gott, Fang, Sato y Fagundes, entre otros, quienes investigaron distintos modelos de universos compactos. Tan solo tres años más tarde del artículo de Ellis, Sokoloff y Shvartsmann dirigieron un programa observacional en la Unión Soviética con la intención de buscar copias de objetos reales creadas a partir de las identificaciones en los espacios multiconexos, las imágenes fantasmas. Aunque no se obtuvieron resultados el programa fijó una línea para este tipo de investigaciones. Entre los estudios matemáticos soporte de estas investigaciones caben destacar las aportaciones de Wolf [16] y Thurston [13] sobre las variedades tridimensionales y su aplicación a la cosmología y el artículo divulgativo de Thurston y Weeks [14]. Sin embargo, los modelos multiconexos seguían sin conseguir mucho apoyo y el interés volvió a decaer. Muchos libros y estudios omitían directamente la posibilidad de topologías multiconexas centrándose solamente en los modelos simplemente conexos \mathbb{R}^3 , S^3 y H^3 .

En la última década del siglo XX se produce un resurgimiento gracias a los datos del Fondo Cósmico de Microondas obtenidos por el telescopio COBE. En 1995 Lachieze-Rey y Luminet [8] dieron un importante impulso con un profundo estudio físico y matemático sobre los modelos del universo y métodos observacionales para la detección de la topología de los mismos. Desde entonces, el número de artículos sobre la cosmología teórica y observacional ha aumentado considerablemente hasta el punto de que entre 1994 y 1997 se publicaron aproximadamente la misma cantidad de artículos en Topología Cósmica que en los 80 años anteriores.

Con este trabajo se pretende dar a conocer una importante aplicación de la Topología en la Cosmología, la *Topología Cósmica*, encargada de estudiar la forma de nuestro universo, desde propiedades geométricas locales como su curvatura hasta topológicas como su conexidad, o si es finito o infinito, así como describir una base matemática para construir y clasificar los modelos que dan forma a nuestro de universo.

Para llevarlo a cabo se ha estructurado la memoria en tres capítulos. Con el primero se pretende asentar las bases geométricas y topológicas para definir matemáticamente el espacio. Nos introduciremos en la geometría de Riemann con las definiciones de variedad de Riemann, el objeto matemático que usamos para describir la forma espacial de nuestro universo, la conexión de Riemann y su expresión en los símbolos de Christoffel, las geodésicas junto a su visualización en los modelos básicos S^n , \mathbb{R}^n y el plano H^2 , y la curvatura, donde veremos cómo el tensor de Riemann nos mide cuánto difiere una variedad de ser euclídea y definiremos la curvatura seccional K , imprescindible para la clasificación de los modelos cosmológicos. Terminaremos de discutir los conceptos teóricos con los grupos de Lie y sus subgrupos. Estudiaremos cómo transformar el espacio con la acción de los grupos de Lie y los grupos discretos. El carácter multiconexo que

buscamos nace de estas transformaciones. Por último, estudiaremos variedades recubridoras y transformaciones recubridoras.

En el segundo capítulo daremos un paso más en la construcción matemática de nuestro universo. Nos centraremos en los espacios de curvatura constante, las *formas espaciales*. Describiremos los tres modelos básicos \mathbb{R}^n , S^n y H^n definiendo su métrica, curvatura y algunas características que nos serán de utilidad. Veremos el resultado que nos dará pie a poder determinar todas las formas espaciales: *Toda variedad de Riemann M completa de curvatura constante es el cociente del recubridor universal \widetilde{M} con un subgrupo Γ del grupo de isometrías que actúa de forma libre y propiamente discontinua sobre \widetilde{M}* . Por último, nos centraremos en la descripción de las formas espaciales tridimensionales a partir de su recubrimiento universal, los subgrupos Γ del grupo de isometrías y los correspondientes dominios fundamentales. Ejemplificaremos algunos de estos espacios, como los toros con giro, los espacios lenticulares y diedrales o los espacios de Sokoloff y Starobinskii entre otros. Estas formas espaciales serán las candidatas a ser modelos cosmológicos.

Con la anterior base matemática, en el tercer capítulo nos centraremos en la *Topología Cósmica*. Transportaremos los conceptos estudiados a fin de modelizar nuestro universo. Recordaremos los modelos cosmológicos de Friedmann-Lemaître y justificaremos la posibilidad de utilizar las formas espaciales tridimensionales multiconexas como modelos del universo. Estudiaremos los posibles efectos de observación que pueden causar la multiconexidad en la distribución de objetos cósmicos y describiremos dos métodos observacionales con los que actualmente se intenta buscar signos de multiconexidad, la *Cristalografía Cósmica* y el método de *círculos en el cielo*, el cual también nos proporcionaría la topología del universo y nuestra posición en él. Cerramos la memoria con dos importantes modelos: el *3-Toro* y el *dodecaedro de Poincaré*.

Introducción de Conceptos Teóricos Geométricos y Topológicos

El objetivo de este capítulo será estudiar las propiedades geométricas y topológicas necesarias para definir matemáticamente la parte espacial del Universo. Para ello comenzaremos con las variedades de Riemann y explicaremos la conexión de Riemann y su expresión en los símbolos de Christoffel, las geodésicas y su visualización en S^n , \mathbb{R}^n y H^2 . Continuaremos con la curvatura, veremos cómo el tensor de Riemann mide cuánto difiere una variedad de tener curvatura cero y definiremos la curvatura seccional K . En la siguiente parte del capítulo tratamos con los grupos de Lie y sus subgrupos, que nos ayudarán a determinar algunas propiedades geométricas de las variedades. Estudiaremos cómo transformar el espacio con la acción de los grupos de Lie y los grupos discretos. Estas transformaciones son las que dotarán al espacio del carácter multiconexo.

Además, veremos dos importantes definiciones en la construcción de las formas espaciales, la *acción libre* y la *acción propiamente discontinua*. Por último, las variedades recubridoras y las transformaciones recubridoras nos darán las bases para estudiar las formas espaciales con un importante resultado: *Una variedad M es difeomorfa al cociente de su variedad recubridora simplemente conexa por el subgrupo de transformaciones recubridoras.*

1.1. Variedades de Riemann

En esta sección nos sumergiremos en las variedades de Riemann. Podremos introducir un producto escalar en el espacio tangente de cada punto que nos permitirá medir distancias, ángulos o volúmenes, así como trasladar otros conceptos e ideas métricas a las variedades diferenciales. Presentaremos también algunos conceptos básicos en Geometría de Riemann. Concretamente, una vez introducida la métrica, veremos las conexiones sobre una variedad diferenciable, que generalizan el concepto de diferenciación de campos de vectores a lo largo de curvas o subvariedades de \mathbb{R}^n , y son fundamentales para el estudio de las geodésicas y la curvatura de la variedad.

1.1.1. Variedades de Riemann

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Consideramos un campo de tensores g de tipo $(0, 2)$ sobre M . Entonces para cada punto x de M , g_x es una aplicación bilineal:

$$g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$$

Se dice que g es simétrico si $g_x(X, Y) = g_x(Y, X)$ para todo par de vectores tangentes X, Y a M en x . Se dice que g es definido positivo si $g_x(X, X) > 0$ para todo vector tangente X no nulo.

Definición 1.1. *Una variedad de Riemann (M, g) es una variedad diferenciable M con un campo de tensores g de tipo $(0, 2)$ simétrico y definido positivo.*

Si M es una variedad de Riemann, al campo de tensores g se le denomina *métrica de Riemann*.

Sea $(U, (x_1 \dots x_n))$ una carta coordenada sobre M . Entonces g se expresará en U de la siguiente manera:

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j,$$

donde $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$.

Como toda variedad diferenciable es paracompacta se tiene que:

Teorema 1.2. *Toda variedad diferenciable admite una métrica de Riemann.*

Las *isometrías* son las aplicaciones que nos permiten saber cuándo dos variedades de Riemann son equivalentes, jugando el mismo papel que los homeomorfismos entre espacios topológicos o isomorfismos entre espacios vectoriales. En el espacio euclídeo \mathbb{R}^n son los movimientos rígidos que conservan las distancias (y por tanto los ángulos). Estas transformaciones son las rotaciones, reflexiones, traslaciones y composiciones de ellas.

Dadas dos variedades de Riemann (M_1, g_1) y (M_2, g_2) , una *isometría* f es un difeomorfismo $f : M_1 \rightarrow M_2$ que conserva la métrica, es decir,

$$g_{1|x}(X, Y) = g_{2|f(x)}(f_{*|x}X, f_{*|x}Y)$$

para todo punto x de M y vectores X, Y tangentes a M en x .

Una aplicación diferenciable $f : M_1 \rightarrow M_2$ se denomina *isometría local* si para cada $x \in M_1$ existe un entorno U de x en M_1 tal que $f|_U : U \rightarrow f(U)$ es una isometría.

1.1.2. Conexión de Riemann

Sea M una variedad diferenciable. Denotemos por $\mathfrak{X}(M)$ el conjunto de todos los campos vectoriales de clase C^∞ sobre M . Por otro lado, $\mathcal{F}(M)$, denotará el anillo de funciones real de clase C^∞ definida sobre M .

Definición 1.3. Una conexión sobre una variedad es una aplicación

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que satisface las siguientes propiedades:

1. $\nabla_{fX+gX} Y = f\nabla_X Y + g\nabla_X Y$
2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
3. $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

donde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

Dada una curva $\gamma : I \rightarrow M$, si $X \in \mathfrak{X}(M)$, la derivada covariante de X a lo largo de γ se define como $\frac{DX}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} X$.

Si $(U, (x_1 \dots x_n))$ es una carta local y X un campo de vectores sobre M con $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ se sigue que

$$\frac{DX}{dt} = \sum_k \left(\frac{dX^k}{dt} + \sum_{ij} \frac{dx_i}{dt} X^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

donde los Γ_{ij}^k son los símbolos de Christoffel dados por $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$.

Definición 1.4. Sea M una variedad diferenciable con una conexión ∇ . Un campo de vectores V a lo largo de una curva $\gamma : I \rightarrow M$ se dice que es paralelo cuando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Sea (M, g) una variedad de Riemann. Una conexión ∇ sobre M se dice que es compatible con la métrica g si

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

La conexión es *simétrica* si $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

En una carta coordenada $(U, (x_1 \dots x_n))$ esta simetría implica que para todo $i, j = 1, \dots, n$ se tiene:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = 0$$

Un importante resultado en geometría de Riemann es la existencia de conexiones simétricas y compatibles con la métrica.

Teorema 1.5 (Levi-Civita). *Dada una variedad de Riemann M , existe una única conexión ∇ sobre M que satisface las condiciones de simetría y compatibilidad con la métrica g .*

De la compatibilidad de la métrica se sigue que si existe ∇ debe verificar

$$g(Z, \nabla_Y X) = \frac{1}{2} \{X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y)) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) - g([X, Y], Z)\} \quad (1.1)$$

expresión que a su vez determina ∇ .

A esta conexión se la denomina *conexión de Riemann* (o de *Levi-Civita*).

Concluimos con la expresión clásica para los símbolos de Christoffel de la conexión de Riemann en términos de la métrica g_{ij} :

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{km}$$

1.1.3. Geodésicas

Uno de los conceptos fundamentales de la geometría de Riemann es el de geodésica. En esta sección introduciremos esta noción como una curva con aceleración nula.

Definición 1.6. *Una curva diferenciable $\gamma : I \rightarrow M$ es una geodésica si su campo de vectores tangente es paralelo a lo largo de γ , esto es, si $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$.*

En un sistema de coordenadas $(U, (x_1, \dots, x_n))$, una curva

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

es una geodésica si y solo si

$$0 = \frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = \sum_k \left(\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}$$

Las geodésicas son las curvas más cortas que unen dos puntos. De hecho se tiene que en una variedad de Riemann (M, g) , si una curva que une dos puntos p y q tiene longitud igual a la distancia de p a q , entonces la curva es una geodésica. Además, si M es completa, dados dos puntos cualesquiera p y q existe una geodésica minimal que los une.

Este concepto de geodésica es muy importante en la relatividad general. Así, las trayectorias de los objetos dejados en libertad son geodésicas de la métrica que representa el campo gravitatorio. Por ejemplo, las partículas materiales o las galaxias siguen geodésicas temporales del espacio-tiempo.

Los siguientes ejemplos nos ayudarán a visualizar mejor este concepto en los espacios mencionados al inicio del capítulo \mathbb{R}^n y \mathbb{S}^n y en el plano hiperbólico.

Ejemplo 1.7. Sea $M = \mathbb{R}^n$. Dado que la derivada covariante coincide con la derivada usual, las geodésicas son líneas rectas.

Ejemplo 1.8. Consideremos ahora $M = \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. En este caso las geodésicas son los círculos máximos.

Ejemplo 1.9. Tomemos ahora el semiplano superior $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ con la métrica de Riemann $g_{11} = g_{22} = 1/y^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$. Aquí las geodésicas son las semirrectas perpendiculares al eje OX y las semicircunferencias con centro en puntos del dicho eje (ver [5]).

1.1.4. Curvatura

En esta sección introduciremos la noción de curvatura, a la que intuitivamente podemos imaginar como la medida de cuánto se desvía una variedad de Riemann de ser euclídea.

Sea (M, g) una variedad de Riemann con conexión de Riemann ∇ .

Definición 1.10. Se denomina *tensor de curvatura de M* (o simplemente *curvatura de M*) al campo de tensores R de tipo $(1, 3)$:

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y, Z) &\mapsto R(X, Y)Z \end{aligned}$$

dado por $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Si $M = \mathbb{R}^n$ y g es la métrica euclídea entonces $R(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Es decir, hay ausencia de curvatura en \mathbb{R}^n . Así R nos mide el hecho de que una variedad sea o no euclídea.

De la definición se tienen las siguientes propiedades:

1. $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$
2. $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ (*Identidad de Bianchi*)
3. $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$
4. $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$

Si en una carta coordenada (U, x_1, \dots, x_n) ponemos $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ para $i = 1 \dots n$, el tensor de curvatura R se expresará en coordenadas de la siguiente manera:

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R_{kij}^l X_l$$

donde R_{kij}^l son los componentes de la curvatura R en (U, x_1, \dots, x_n) . Tomando $X = \sum_i u^i X_i$, $Y = \sum_j v^j X_j$, $Z = \sum_k w^k X_k$, obtenemos de la linealidad de R :

$$R(X, Y)Z = \sum_{i,j,k,l} R_{kij}^l u^i v^j w^k X_l$$

Expresando R_{kij}^l en términos de los coeficientes de Christoffel:

$$R(X_i X_j)X_k = \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k - \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k = \nabla_{X_i} \left(\sum_l \Gamma_{jk}^l X_l \right) - \nabla_{X_j} \left(\sum_l \Gamma_{ik}^l X_l \right)$$

con un cálculo directo llegamos a:

$$R_{kij}^s = \sum_l \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s - \sum_l \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s + \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_{jk}^s - \frac{\partial}{\partial x_j} \Gamma_{ik}^s$$

A continuación, a partir del tensor de curvatura vamos a introducir la curvatura seccional.

Sea $p \in M$ y π un subespacio bidimensional (un plano) de $T_p M$, generado por dos vectores tangentes $X, Y \in T_p M$.

Definición 1.11. La curvatura seccional $K(\pi)$ de la sección π es definida por

$$K_p(\pi) = K_p(X, Y) = \frac{-g(R(X, Y)X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \quad (1.2)$$

Se prueba que esta definición no depende de los vectores elegidos en π .

Un importante resultado es que la curvatura seccional determina completamente el tensor de curvatura.

Definición 1.12. Sea (M, g) una variedad de Riemann y $K \in \mathbb{R}$. Se dice que M es de curvatura seccional constante K si $K_p(\pi) = K$, para todo $p \in M$ y para todo $\pi \subset T_p M$.

Otro importante resultado es que si (M, g) tiene curvatura seccional constante K entonces

$$g(R(X, Y)Z, W) = K[g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W)]$$

1.2. Grupos de Lie. Acción de un Grupo de Lie. Variedad Recubridora

En esta sección terminaremos de discutir los conceptos teóricos necesarios con la introducción a los grupos de Lie, la acción de estos sobre las variedades y definiendo la noción de *acción propiamente discontinua*. Seguiremos con las variedades recubridoras y cerraremos con un resultado que nos simplificará mucho el trabajo en adelante.

1.2.1. Grupos de Lie

Los grupos de Lie juegan un importante papel como grupos de simetría de otras variedades. Además, también serán de gran utilidad sus subgrupos, ya que, junto con sus acciones, nos ayudarán a determinar algunas propiedades geométricas de las variedades sobre las que actúan.

Definición 1.13. Diremos que un grupo G , que es a su vez variedad diferenciable, es un grupo de Lie si las aplicaciones que definen el producto y el inverso son C^∞ .

Ejemplo 1.14. El conjunto \mathbb{R}^n es una variedad diferenciable con carta global dada por las coordenadas (x_1, \dots, x_n) . Además, \mathbb{R}^n tiene estructura de grupo con la operación suma, la cual se expresa en coordenadas como sigue:

$$((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

Con esta operación \mathbb{R}^n es un grupo de Lie.

Ejemplo 1.15. El conjunto complejo $\mathbb{C} - \{0\}$ tiene estructura de grupo con la multiplicación de números complejos, y tiene estructura de variedad a través de la carta global $\varphi : \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(x + iy) = (x, y)$.

En coordenadas la operación del grupo se define por:

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

y el inverso por:

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

Estas dos aplicaciones son diferenciables, luego $\mathbb{C} - \{0\}$ es un grupo de Lie.

Ejemplo 1.16. El grupo $GL(n, \mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden n no singulares es una variedad diferenciable, como abierto de \mathbb{R}^{n^2} . Además es un grupo de Lie al ser el producto de matrices y matriz inversa aplicaciones diferenciables.

Ejemplo 1.17. Si G_1 y G_2 son grupos de Lie, entonces el producto directo $G_1 \times G_2$ es de nuevo un grupo de Lie, con la estructura de variedad del producto.

Así, por ejemplo, el toro $T^2 = S^1 \times S^1$ (o más generalmente $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$) es un grupo de Lie.

Muchos grupos de Lie importantes, tanto en geometría diferencial como en física, son subgrupos de $GL(n, \mathbb{R})$. A continuación veremos condiciones para que un subgrupo sea grupo de Lie.

Teorema 1.18. *Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo que es también una subvariedad regular. Entonces, H es un grupo de Lie con su estructura diferenciable de subvariedad.*

Teorema 1.19. *Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo cerrado. Entonces H es un grupo de Lie.*

Ejemplo 1.20. Consideramos la circunferencia $S^1 = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$ como el grupo de números complejos de norma 1 con la multiplicación. Dado que S^1 es un subgrupo de \mathbb{C}^* y una subvariedad regular, por el teorema 1.18, S^1 es un grupo de Lie.

Definición 1.21. *Un subgrupo de Lie H de un grupo de Lie G es cualquier subgrupo algebraico que es subvariedad y grupo de Lie con su estructura C^∞ como subvariedad inmersa. Por otro lado, si un homomorfismo algebraico de grupos de Lie $F : G_1 \rightarrow G_2$ es también una aplicación C^∞ , se dice que F es un homomorfismo de grupos de Lie.*

Algunos ejemplos importantes de subgrupos de Lie de $GL(n, \mathbb{R})$ son:

Ejemplo 1.22. El grupo lineal especial, $SL(n, \mathbb{R})$, es el grupo de matrices $n \times n$ con determinante igual a 1.

Ejemplo 1.23. El grupo ortogonal, $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) / AA^t = I\}$.

Ejemplo 1.24. El grupo ortogonal especial, $SO(n)$, es el grupo de matrices ortogonales $n \times n$ con determinante 1.

1.2.2. Acción de un Grupo de Lie sobre una Variedad

Una acción de un grupo sobre un conjunto es una aplicación que asocia a cada elemento del grupo una transformación biyectiva del conjunto dado, de forma que la operación de grupo se corresponde con la composición de transformaciones. Originalmente su motivación surgió del Grupo Simétrico $S(X)$, el conjunto de todas las permutaciones de un conjunto X .

La acción de un grupo sobre un conjunto X puede interpretarse como un grupo de transformaciones de X . Así, en las geometrías clásicas (euclídea, proyectiva e hiperbólica), cada una de ellas está asociada a un grupo de transformaciones del espacio subyacente. Por ejemplo el grupo asociado a la geometría euclídea plana es el grupo de los movimientos rígidos, generado por traslaciones, reflexiones y rotaciones. A continuación damos algunos conceptos y resultados sobre acciones de un grupo de Lie sobre una variedad.

Definición 1.25. Sea G un grupo de Lie y M una variedad diferenciable. Se dice que G actúa (por la izquierda) sobre M si existe un aplicación diferenciable $\theta : G \times M \rightarrow M$ que satisface las condiciones:

1. Si e es el elemento identidad en G , entonces $\theta(e, x) = x$ para todo $x \in M$.
2. Si $g_1, g_2 \in G$, entonces $\theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta(g_1 g_2, x)$ para todo $x \in M$.

Denotaremos $\theta(g, x)$ simplemente por gx . De la definición de θ , fijado $g \in G$ la aplicación $\theta_g : M \rightarrow M$ dada por $\theta_g(x) = gx$ es un difeomorfismo de M .

Por ello, cuando un grupo de Lie G actúa sobre una variedad diferenciable M se dice que el grupo es un grupo de transformaciones de M . Si las transformaciones dejan invariante una cierta función sobre M entonces se dice que G es un grupo de simetría de esa función. Por ejemplo $SO(3)$, con su acción natural sobre \mathbb{R}^3 , es un grupo de isometría de cualquier función invariante por rotaciones.

Veamos algunos ejemplos de acciones.

Ejemplo 1.26. $GL(n, \mathbb{R})$ actúa de forma natural sobre \mathbb{R}^n ,

$$\begin{aligned} \theta : Gl(n, R) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (A, x) &\mapsto Ax \end{aligned}$$

donde Ax indica la multiplicación de la matriz A por la matriz columna x , formada por las componentes de x .

Ejemplo 1.27. Sea el espacio \mathbb{R}^n con la métrica usual. Una isometría $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es dada por $T(x) = Ax + b$, donde $A \in O(n)$ y $b \in \mathbb{R}^n$.

Denotamos por G el grupo de todas las isometrías de \mathbb{R}^n . Es claro que G se puede identificar con $O(n) \times \mathbb{R}^n$, y que la aplicación

$$\begin{aligned} \theta : G \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ ((A, b), x) &\mapsto Ax + b \end{aligned}$$

es una acción de G sobre \mathbb{R}^n .

Definición 1.28. *La órbita de un elemento $x \in M$ es el conjunto*

$$Gx = \{gx / g \in G\}.$$

En el caso de que $Gx = x$, entonces decimos que x es un punto fijo de G . Si $Gx = M$ para algún x , entonces decimos que G es transitivo sobre M . En este segundo caso, tenemos $Gx = M$ para todo x .

Si $A \subset M$ un subconjunto, se denota por $GA = \{ga / g \in G, a \in A\}$.

Para ilustrar la definición de órbita consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.29. Sea la acción natural de $Gl(n, \mathbb{R})$ sobre $M = \mathbb{R}^n$ definida en el ejemplo 1.26. Entonces el punto origen 0 es un punto fijo de $Gl(n, \mathbb{R})$ y $Gl(n, \mathbb{R})$ es transitivo sobre $\mathbb{R}^n - \{0\}$. En efecto, dado $x = (x_1, \dots, x_n) \neq 0$ existe una base $\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_n$ con $x = \mathbf{f}_1$. Si expresamos los elementos de esta base en términos de la base canónica tenemos $\mathbf{f}_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} \mathbf{e}_i, j = 1, \dots, n$. Entonces vemos que $x = A \cdot \mathbf{e}_1$ y $A = (a_{ij}) \in Gl(n, \mathbb{R})$. Por tanto, se sigue que todo $x \neq 0$ está en la órbita de \mathbf{e}_1 .

Como acabamos de ver, esta acción no es muy interesante desde el punto de vista de sus órbitas, pero si la consideramos restringida a varios subgrupos $G \subset Gl(n, \mathbb{R})$ entonces las órbitas se pueden complicar un poco.

Un caso relativamente simple se obtiene tomando $G = O(n)$. Este es un grupo cerrado y la acción natural de $Gl(n, \mathbb{R})$ restringida a $O(n)$ es una acción C^∞ . Las órbitas son esferas concéntricas con el origen siendo un punto fijo (esfera de radio cero).

En el Grado de Matemáticas, en concreto en la asignatura de *Introducción a la Topología Algebraica* vimos cómo los espacios cocientes originados por relaciones de equivalencia generan distintas variedades. La acción de grupos sobre variedades proporciona una útil e importante fuente para generar tales espacios cocientes.

Así, considerando la acción $\theta : G \times M \rightarrow M$, donde G es un grupo de Lie C^∞ y M una variedad podemos definir una *relación de equivalencia* \sim sobre M por $p \sim q$ si $q = \theta_g(p) = gp$ para algún $g \in G$. En esta relación, las clases de equivalencia coinciden con las órbitas de G y surge así la siguiente definición:

Definición 1.30. *El espacio de órbitas de una acción, que denotaremos por M/G , es el conjunto de clases de equivalencia módulo \sim dotado de la topología cociente.*

La proyección $\pi : M \rightarrow M/G$ es continua, y al ser la acción θ continua es también abierta. Efectivamente, si $U \subset M$ es abierto entonces lo es también $\theta_g(U)$ para todo $g \in G$ y por tanto $GU = \bigcup_{g \in G} \theta_g(U)$ es abierto.

Ejemplo 1.31. Cuando $M = \mathbb{R}^n$ y $G = O(n)$ actúa naturalmente como un subgrupo de $Gl(n, \mathbb{R})$, entonces las órbitas corresponden a esferas concéntricas y están por tanto en correspondencia biyectiva con los números reales $r \geq 0$. Se trata de un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^n/O(n)$ y la semirrecta $0 \leq r < \infty$. Esto no es una variedad, pero se aproxima.

Ejemplo 1.32. Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo. Entonces H actúa sobre G por la derecha por traslaciones. Si H es un subgrupo de Lie la acción es C^∞ . El conjunto G/H de clases laterales izquierdas coincide con el espacio de órbitas de esta acción y es por tanto un espacio con la topología cociente.

Con esto llegamos a dos importantes conceptos. Para introducirlos, consideremos G un grupo actuando sobre una variedad M y $x \in M$.

Definición 1.33. *El grupo de isotropía de x denotado por G_x , es el subgrupo de todos los elementos de G que dejan a x fijo, esto es $G_x = \{g \in G / gx = x\}$.*

Definición 1.34. *Se dice que un grupo G actúa libremente sobre M si $gx = x$ implica que $g = e$. Es decir, G actúa libremente sobre M si y solo si todos los grupos de isotropía son triviales.*

Vemos ahora un caso más específico de cómo obtener nuevos ejemplos de variedades a través del cociente o el espacio de órbitas. Usando la acción de un grupo discreto.

Definición 1.35. *Un grupo discreto Γ es un grupo con un número contable de elementos y con la topología discreta.*

El hecho de que sea contable implica que Γ es una variedad ya que tiene una base contable de abiertos, cada uno homeomorfo al espacio euclídeo cero dimensional, siendo así Γ un grupo de Lie cero dimensional.

Sea ahora $\theta : \Gamma \times \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ una acción del grupo Γ sobre una variedad diferenciable \widetilde{M} . Dado $h \in \Gamma$, denotamos también por h al difeomorfismo $\theta_h : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$. Consideramos ahora el espacio de órbitas $M = \widetilde{M}/\Gamma$.

Definición 1.36. *Se dice que un grupo discreto Γ actúa de forma propiamente discontinua sobre una variedad \widetilde{M} si la acción es C^∞ y satisface las siguientes condiciones:*

1. *Cada $x \in \widetilde{M}$ tiene un entorno U tal que el conjunto $\{h \in \Gamma / hU \cap U \neq \emptyset\}$ es finito.*
2. *Si $x, y \in \widetilde{M}$ no están en la misma órbita, entonces existen entornos U y V de x e y , respectivamente, tales que $U \cap \Gamma V = \emptyset$.*

Esta segunda condición implica que $M = \widetilde{M}/\Gamma$ es Hausdorff, (ver [2], pág 94).

La siguiente consecuencia de la definición 1.36 puede reemplazar la condición 1:

- 1.' *El grupo de isotropía Γ_x de cada $x \in \widetilde{M}$ es finito, y todo x tiene un entorno U tal que $hU \cap U = \emptyset$ si $h \notin \Gamma_x$ y $hU = U$ si $h \in \Gamma_x$.*

Ejemplo 1.37. Tomemos la variedad $M = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$ y $\Gamma = \mathbb{Z}_2$, el grupo cíclico de orden dos con generador h . Entonces $hx = -x$ y $ex = x$ define la acción de Γ sobre S^{n-1} . Además, la acción $\theta : \mathbb{Z}_2 \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ es libre y propiamente discontinua y el espacio cociente S^{n-1}/\mathbb{Z}_2 es el espacio proyectivo $P^{n-1}(\mathbb{R})$.

Terminaremos la sección con el siguiente resultado, que prácticamente determina el concepto de *variedad recubridora*, central en esta memoria.

Teorema 1.38. *Sea Γ un grupo discreto que actúa libre y propiamente discontinuo sobre una variedad \widetilde{M} . Entonces existe una única estructura C^∞ de variedad diferenciable sobre $M = \widetilde{M}/\Gamma$ tal que cada $p \in M$ tiene un entorno conexo U tal que $\pi^{-1}(U) = \bigcup \widetilde{U}_\alpha$ es una descomposición de $\pi^{-1}(U)$ en sus componentes conexas (abiertas) y $\pi|_{\widetilde{U}_\alpha}$ es un difeomorfismo sobre U para cada \widetilde{U}_α .*

1.2.3. Variedad Recubridora

En esta sección formalizaremos las definiciones de variedad recubridora y transformación recubridora. Con ellas podremos establecer las bases para determinar y estudiar las formas espaciales.

Definición 1.39. Sean \widetilde{M} y M dos variedades C^∞ de la misma dimensión y $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ una aplicación C^∞ . Se dice que \widetilde{M} es una variedad recubridora de M si p es sobre, \widetilde{M} conexa y cada $x \in M$ tiene un entorno U tal que $p^{-1}(U)$ es una unión de componentes conexas abiertas \widetilde{U}_α , con la propiedad de que $p|_{\widetilde{U}_\alpha}$ es un difeomorfismo sobre U . Además, U es llamado entorno admisible de x y p aplicación recubridora.

Definición 1.40. Se dice que un difeomorfismo $h : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ es una transformación recubridora si $p \circ h = p$.

Nótese que la condición establecida en la anterior definición es equivalente a decir que cada conjunto $p^{-1}(x)$ es llevado a sí mismo por h . Si Γ es un subgrupo discreto que actúa de forma libre y propiamente discontinua sobre una variedad \widetilde{M} , como en el teorema 1.38, la proyección $\pi : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}/\Gamma$ es una aplicación recubridora y cada $h \in \Gamma$ es una transformación recubridora. Más generalmente, el conjunto $\widetilde{\Gamma}$ de todas las transformaciones recubridoras actúa como un grupo de difeomorfismos sobre \widetilde{M} . Dado que contiene al menos la identidad, no es vacío.

Lema 1.41. Si dos transformaciones recubridoras tienen el mismo valor sobre un punto entonces son idénticas.

Demostración. Sean $h_1, h_2 : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$, dos transformaciones recubridoras tales que existe $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ verificando $h_1(\tilde{x}) = h_2(\tilde{x})$. Consideramos la aplicación $g : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ dada por $g = h_1^{-1}h_2$. Entonces g es una transformación recubridora que verifica $g(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Veamos ahora que g es la identidad.

Tomando $\tilde{x} \in \widetilde{M}$ y $x = p(\tilde{x})$, con U un entorno admisible de x y $p^{-1}(U) = \bigcup \widetilde{U}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots$, entonces al ser \widetilde{U}_α las componentes conexas de $p^{-1}(U)$ se tiene que $g(\widetilde{U}_\alpha) \cap \widetilde{U}_{\alpha'} = \emptyset$ o $g(\widetilde{U}_\alpha) = \widetilde{U}_{\alpha'}$, y que $g : \widetilde{U}_\alpha \rightarrow \widetilde{U}_{\alpha'}$ es un difeomorfismo con $g|_{\widetilde{U}_\alpha} = p_{\widetilde{U}_{\alpha'}}^{-1} p_{\widetilde{U}_\alpha}$. Por tanto, los puntos fijos de g forman un conjunto abierto y, por continuidad de g , también forman uno cerrado. Como \widetilde{M} es conexo y g tiene al menos un punto fijo entonces g es la identidad, y en consecuencia $h_1 = h_2$.

□

Así pues, las transformaciones recubridoras están completamente determinadas por la permutación que inducen en el conjunto de puntos $\{x_\alpha\} = p^{-1}(x)$

para un punto arbitrario (pero fijo) $x \in M$. En particular, la acción de $\tilde{\Gamma}$ sobre \tilde{M} es libre.

Siguiendo esta notación tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.42. *El subgrupo $\tilde{\Gamma}$ de todas las transformaciones recubridoras actúa sobre \tilde{M} de forma libre y propiamente discontinua, y la proyección natural $\pi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\tilde{\Gamma}$ es una aplicación recubridora. Además, la acción de $\tilde{\Gamma}$ es transitiva sobre cada $\pi^{-1}(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in \tilde{M}/\tilde{\Gamma}$.*

Demostración. Del hecho que la aplicación $\pi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/\tilde{\Gamma}$ es regular se tiene que la acción de $\tilde{\Gamma}$ sobre \tilde{M} es transitiva (ver [11], Lema 8.1 y Prop 8.2). Probemos ahora que $\tilde{\Gamma}$ actúa de forma libre y propiamente discontinua sobre \tilde{M} .

La parte de acción libre es inmediata dado que solo la identidad tiene un punto fijo. Para ver que actúa de una forma propiamente discontinua debemos comprobar las condiciones 1 y 2 de la definición 1.36.

Para probar 1 tomamos $y \in \tilde{M}$ y $x = p(y)$, luego $y \in \{y_\alpha\} = p^{-1}(x)$. Supongamos (sin pérdida de generalidad) que $y = y_1$, y si $h \neq e$ entonces $h(y_1) = y_\beta \neq y_1$ y por tanto $h(\tilde{U}_1) = \tilde{U}_\beta$, con $\tilde{U}_\beta \cap \tilde{U}_1 = \emptyset$.

Para la condición 2 tomamos $y, y' \in \tilde{M}$ de forma que no estén en la misma órbita de $\tilde{\Gamma}$. Consideramos los casos $p(y) = p(y')$ y $p(y) \neq p(y')$. En el primer caso denotamos a este punto por x , luego, si permutamos $\{y_\alpha\} = p^{-1}(x)$, ningún $h \in \tilde{\Gamma}$ lleva $y = y_\alpha$ a $y' = y'_\beta$, con $\alpha \neq \beta$, por tanto ningún h lleva \tilde{U}_α a \tilde{U}_β , cumpliendo así la condición 2. En el segundo caso tomamos $p(y) = x$ y $p(y') = x'$. Sean U y V entornos admisibles disjuntos de x y x' respectivamente. Entonces los conjuntos de abiertos $p^{-1}(U)$ y $p^{-1}(V)$ son disjuntos y llevados a sí mismos por todo $h \in \tilde{\Gamma}$ y por tanto cumplen la segunda condición de la definición.

Por último, aplicando el teorema 1.38 tenemos la primera parte del enunciado. □

Finalizaremos la sección probando el siguiente resultado, crucial a la hora de describir las variedades de Riemann de curvatura constante.

Teorema 1.43. *Sea $p : \tilde{M} \rightarrow M$ una aplicación recubridora y $\tilde{\Gamma}$ el subgrupo de las transformaciones recubridoras. Si \tilde{M} es simplemente conexa entonces $\tilde{M}/\tilde{\Gamma}$ es difeomorfa a M .*

Demostración. Como \tilde{M} es simplemente conexa, la aplicación $p : \tilde{M} \rightarrow M$ es regular, lo que implica que la acción de $\tilde{\Gamma}$ es transitiva sobre $p^{-1}(x)$ (ver [11] Lemma 8.1, Prop. 8.2).

Así podemos obtener una biyección $h : M \rightarrow \widetilde{M}/\widetilde{\Gamma}$ tal que $\pi = h \circ p$. Como π y p son difeomorfismos locales, h es un difeomorfismo de M en $\widetilde{M}/\widetilde{\Gamma}$ (figura 1.1)

$$\begin{array}{ccc}
 \widetilde{M} & \xrightarrow{p} & M \\
 \pi \downarrow & & \swarrow h \\
 \widetilde{M}/\widetilde{\Gamma} & &
 \end{array}$$

Figura 1.1. Diagrama del recubridor universal p y el difeomorfismo h .

□

Finalmente, señalar que si $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ es una aplicación recubridora y \widetilde{M} es simplemente conexa entonces se dice que \widetilde{M} es recubridor universal de M . De hecho, se tiene que \widetilde{M} es único salvo difeomorfismo. (Ver [11]).

Espacios de Curvatura Constante

Dentro de las variedades de Riemann, aquéllas con curvatura seccional constante son las más simples. Una importante propiedad de estos espacios es que tienen un número suficientemente grande de isometrías locales, lo que nos permite desplazar isométricamente dos pequeños triángulos situados en diferentes posiciones y comprobar si se pueden superponer. Esta propiedad es fundamental en la construcción de geometrías elementales y fue considerada como un postulado que debían de satisfacer las geometrías no euclídeas.

En este capítulo, daremos un paso más en la construcción matemática de nuestro universo con una clasificación de las formas espaciales que posteriormente serán las candidatas a ser los modelos cosmológicos. Para ello escribiremos los tres modelos básicos \mathbb{R}^n , S^n y H^n definiendo su métrica, curvatura y algunas características que nos serán de utilidad. Veremos cómo el recubrimiento universal de una variedad de Riemann M completa y de curvatura constante es isométrico a uno de los tres modelos básicos. Cerraremos la sección con el resultado que nos dará pie a poder determinar todas las formas espaciales: *la variedad M es cociente del recubridor universal \widetilde{M} por un subgrupo del grupo de isometrías que actúa de forma libre y propiamente discontinua sobre \widetilde{M}* . Por último, nos centraremos en la descripción de las formas espaciales tridimensionales a partir de su recubrimiento universal, el subgrupo del grupo de isometrías y su dominio fundamental y ejemplificaremos algunos de estos espacios, como los toros con giro, los espacios lenticulares y los espacios diedrales o los espacios de Sokoloff y Starobinskii.

2.1. Espacios de Curvatura Constante

En esta sección haremos una descripción de los tres modelos básicos n -dimensionales, estudiaremos su métrica y veremos cómo determinar todas las variedades completas con curvatura seccional constante.

Podemos suponer que el valor de la curvatura seccional constante de una variedad de Riemann es 1, 0, o -1 ya que al multiplicar una métrica de Riemann por una constante positiva c , su curvatura seccional constante es multiplicada por $1/c$.

Los tres modelos básicos de curvatura seccional constante K son:

1. El espacio euclídeo \mathbb{R}^n , con $K = 0$.
2. La esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con $K = 1$.
3. El espacio hiperbólico H^n , con $K = -1$.

Un teorema fundamental de este capítulo nos dice que son, salvo isometrías, las únicas variedades de Riemann completas, simplemente conexas y con curvatura seccional constante. Veremos cómo esto nos permite reducir el problema de encontrar todas las variedades de curvatura seccional constante al problema de determinar ciertos subgrupos de los grupos de isometrías de \mathbb{R}^n , S^n y H^n .

Comenzaremos con una descripción de los tres modelos básicos.

El Espacio Euclídeo \mathbb{R}^n

Consideramos \mathbb{R}^n con su estructura natural de variedad diferenciable n -dimensional. Fijada una carta global, con coordenadas (x_1, \dots, x_n) podemos introducir la métrica:

$$g = (dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2 \quad (2.1)$$

Las componentes de g son:

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1 \dots n$$

de donde se sigue que los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k son nulos. Por tanto, como indicamos en el ejemplo 1.7, las geodésicas son las rectas. Como pueden ser extendidas indefinidamente se sigue que \mathbb{R}^n es completo. Además es simplemente conexo.

Por la anulación de los símbolos de Christoffel se deduce que el tensor de curvatura R es nulo y por tanto \mathbb{R}^n tiene curvatura seccional $K = 0$.

La Esfera S^n

En el espacio euclídeo (\mathbb{R}^{n+1}, g) consideramos la esfera

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

La métrica euclídea g induce sobre S^n una métrica que la dota de su estructura de variedad de Riemann. Las geodésicas de S^n son las circunferencias máximas, por lo que es completo. Además tiene curvatura seccional constante $K = 1$ (ver [5]).

A diferencia del espacio euclídeo y del espacio hiperbólico, que veremos a continuación, S^n es compacto. También es simplemente conexo.

El Espacio Hiperbólico H^n

Podemos considerar a H^n como el semiespacio superior abierto de \mathbb{R}^n

$$H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_n > 0\}$$

con la métrica

$$g = \frac{1}{x_n^2}(dx_1^2 + \dots + dx_n^2)$$

Las geodésicas de H^n son las semirectas perpendiculares al hiperplano $x_n = 0$ y las semicircunferencias en planos perpendiculares a $x_n = 0$ y centro en este hiperplano. Por tanto H^n es completo. Además su curvatura seccional constante es $K = -1$ (ver [5]), y es simplemente conexo.

Teorema 2.1 (Cartan-Ambrose). *Sean M y N variedades de Riemann completas y conexas con igual dimensión, cada una con curvatura paralela, y supongamos que M es simplemente conexa. Si $x \in M$, $y \in N$ y $\varphi : T_x(M) \rightarrow T_y(N)$ es una aplicación lineal que conserva el producto interior y la curvatura, es decir, para cualesquiera $X_x, Y_x, Z_x, W_x \in T_x(M)$ arbitrarios se tiene $(\varphi(X_x), \varphi(Y_x))_y = (X_x, Y_x)_x$ y $R_y(\varphi(X_x), \varphi(Y_x), \varphi(Z_x), \varphi(W_x)) = R_x(X_x, Y_x, Z_x, W_x)$, entonces existe una única aplicación C^∞ $p : M \rightarrow N$ con las propiedades:*

- i) $p(x) = y$
- ii) $p_{*|x} : T_x(M) \rightarrow T_y(N)$ coincide con φ .
- iii) p es un recubrimiento de Riemann, esto es, un recubrimiento tal que p_* es una isometría en cada espacio tangente, luego una isometría local.

El teorema implica que, en cierto sentido, la métrica es determinada localmente por la curvatura. Como consecuencia de este teorema tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.2. *Toda variedad de Riemann M completa y simplemente conexa de curvatura constante $K = +1$, 0 o -1 es isométrica a:*

- a) S^n , si $K = +1$
- b) \mathbb{R}^n , si $K = 0$

c) H^n , si $K = -1$

Demostración. Consideramos la variedad de Riemann M y ponemos $N = S^n$, \mathbb{R}^n o H^n , según sea la curvatura de M , $K = 1, 0$ o -1 . Dado $x \in M$ e $y \in N$ fijamos una isometría lineal $\varphi : T_x M \rightarrow T_y N$. Entonces, como M y N tienen la misma curvatura seccional constante, aplicando el Teorema de Cartan-Ambrose 2.1 existe una única isometría $p : M \rightarrow N$, tal que $p(x) = y$ y de forma que $p_{*|x}$ coincide con la aplicación lineal dada en $T_x(M)$.

□

Las variedades completas con curvatura seccional constante son llamadas *formas espaciales*. Para poder describirlas recordamos primero que si (M, g) es una variedad de Riemann y $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ es una aplicación recubridora existe una única métrica de Riemann sobre \widetilde{M} tal que p es isometría local ([2]).

Dada una variedad de Riemann (M, g) y un subgrupo de isometrías Γ del grupo de isometrías de M que actúa de forma libre y propiamente discontinua podemos dotar al espacio de órbitas M/Γ de una métrica de Riemann tal que la proyección $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ es una isometría local ([5]).

Ahora estamos en condiciones de dar un resultado que nos ayudará a obtener todas las variedades de curvatura constante, y así reducir el problema de encontrar todas las formas espaciales al problema de determinar todos los subgrupos de grupos de isometrías que actúan de manera libre y propiamente discontinua sobre cada modelo simplemente conexo.

Teorema 2.3. *Sea M una variedad completa de curvatura constante $K = 1, 0$, o -1 . Entonces el recubridor universal \widetilde{M} es isométrico a S^n, \mathbb{R}^n , o H^n , respectivamente, y M es el espacio de órbitas de un subgrupo Γ del grupo de isometrías de \widetilde{M} que actúa de forma libre y propiamente discontinua sobre \widetilde{M} .*

Demostración. Dada la variedad de Riemann M y su recubrimiento universal $p : \widetilde{M} \rightarrow M$, consideramos sobre \widetilde{M} la métrica de recubrimiento. Sea Γ el grupo de transformaciones recubridoras. Entonces Γ es un subgrupo de isometrías de \widetilde{M} que actúa de forma libre y propiamente discontinua. Así, \widetilde{M}/Γ es una variedad diferenciable y, a través de la proyección $\pi : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}/\Gamma$, la podemos dotar de una métrica tal que π es isometría local.

Del teorema 1.43, existe un difeomorfismo $h : M \rightarrow \widetilde{M}/\Gamma$ tal que $\pi = h \circ p$ (ver figura 2.1). Además como π y p son isometrías locales, h es también isometría local. Por último, como h es biyectiva se concluye que h es isometría.

□

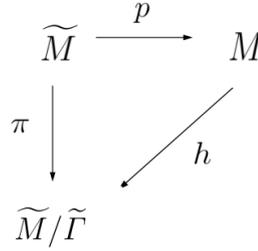


Figura 2.1. Diagrama de la isometría $\pi = hp$.

2.2. Formas Espaciales Tridimensionales

Como habíamos visto en el Teorema 2.3, una variedad de Riemann (M, g) completa de curvatura constante K (que podemos considerar $K = 0, +1, -1$) se puede expresar como un cociente $M = \widetilde{M}/\Gamma$, donde \widetilde{M} es el recubridor universal de M , que es el espacio euclídeo \mathbb{R}^n si $K = 0$, la esfera S^n si $K = 1$ o el espacio hiperbólico H^n si $K = -1$, y Γ es un subgrupo discreto del grupo de isometrías de \widetilde{M} que actúa de forma libre y propiamente discontinua.

En esta sección haremos una descripción de las formas espaciales de dimensión 3. Dado que nuestro universo es orientable (los conceptos de derecha e izquierda tienen sentido) solo nos centraremos en aquellas que preservan la orientabilidad.

Un método para obtener tales variedades M es considerar su recubrimiento universal, el llamado “dominio fundamental” asociado y el subgrupo de transformaciones recubridoras Γ asociado a las aplicaciones recubridoras.

El dominio fundamental es el desarrollo en \widetilde{M} del dominio simplemente conexo más grande que contiene a un punto dado de la variedad M , es siempre conexo y tiene un número finito de caras. A cada cara C le corresponde una única cara $C' = \gamma C$, que es la imagen de C por un generador γ de Γ .

La configuración formada por el dominio fundamental P y sus imágenes γP , ($\gamma \in \Gamma$) se denomina teselación de \widetilde{M} , y cada imagen γP es una celda de la teselación. Cabe destacar que en dimensión dos las celdas son polígonos y en dimensión tres poliedros.

La variedad M va a ser isométrica al dominio fundamental con las identificaciones de las caras a través del subgrupo de isometrías Γ , obteniendo el carácter multiconexo del espacio.

En nuestro caso, estamos interesados en conocer las variedades completas M de dimensión 3 y curvatura seccional constante. Así, podemos considerar el recubrimiento universal \widetilde{M} (\mathbb{R}^3, S^3 o H^3), el poliedro fundamental y los posibles subgrupos discretos Γ del grupo de isometrías de \widetilde{M} , que actúan de forma libre y propiamente discontinua.

2.2.1. Formas Espaciales Euclídeas

El espacio \mathbb{R}^3 es el modelo euclídeo abierto, simplemente conexo, completo de volumen infinito y con curvatura nula. Con sus coordenadas (x_1, x_2, x_3) podemos introducir la métrica:

$$g = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 \quad (2.2)$$

Considerando las coordenadas esféricas (χ, θ, φ) , con:

$$x_1 = \chi \sin \varphi \cos \theta, \quad x_2 = \chi \sin \varphi \sin \theta, \quad x_3 = \chi \cos \varphi$$

tenemos:

$$dx_1 = d\chi \sin \varphi \cos \theta + \chi \cos \varphi d\varphi \cos \theta - \chi \sin \varphi \sin \theta d\theta$$

$$dx_2 = d\chi \sin \varphi \sin \theta + \chi \cos \varphi d\varphi \sin \theta + \chi \sin \varphi \cos \theta d\theta$$

$$dx_3 = d\chi \cos \varphi - \chi \sin \varphi d\varphi$$

y sustituyendo en 2.2 obtenemos la métrica en coordenadas (χ, ϕ, φ)

$$g = d\chi^2 + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Su grupo de isometrías completo es $G = ISO(3) \equiv \mathbb{R}^3 \times SO(3)$, y denotamos por Γ los posibles subgrupos de isometrías.

Toda isometría se compone de una rotación o reflexión, según el espacio sea orientable o no orientable, seguida de una traslación:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{pmatrix}$$

La matriz M pertenece al grupo ortogonal $O(3)$ y representa la rotación (espacios orientables) o reflexión (espacios no orientables) dependiendo de si el signo del determinante es $+1$ o -1 respectivamente. El vector T representa la traslación.

De las 18 formas espaciales generadas, diez son cerradas (compactas) y ocho son abiertas (no compactas). Solo estudiaremos los modelos orientables:

- **E_1 , el 3-Toro.**

Para obtener el 3-toro consideramos como poliedro fundamental un paralelepípedo recto, de longitud de aristas L_x, L_y, L_z y lo suponemos centrado en el origen. Las caras opuestas se identifican por las traslaciones:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pm L_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \pm L_y \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm L_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Estas traslaciones son los generadores del subgrupo discreto Γ .

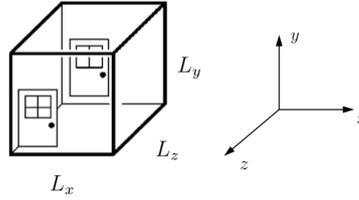


Figura 2.2. Dominio fundamental de E_1 .

El espacio E_1 es compacto y orientable.

■ E_2 , el espacio con medio giro.

Consideramos como poliedro fundamental un paralelepípedo recto, de longitud de aristas L_x, L_y, L_z y lo suponemos centrado en el origen.

En este caso, dos pares de caras son identificadas mediante traslaciones y el tercer par se identifica mediante un giro de ángulo π seguido de una traslación en la dirección del eje de rotación (movimiento helicoidal). Los generadores de su subgrupo de isometrías Γ son

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pm L_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \pm L_y \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm L_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

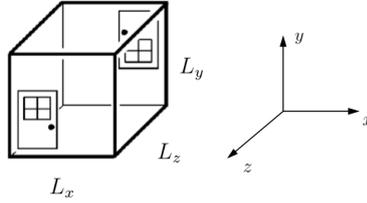


Figura 2.3. Dominio fundamental de E_2 .

El espacio E_2 es compacto y orientable.

■ E_3 , el espacio con un cuarto de giro.

Consideramos como poliedro fundamental un paralelepípedo recto, de longitud de aristas L_x, L_y, L_z y lo suponemos centrado en el origen.

Para su construcción se identifican dos pares de caras mediante traslaciones y el tercer par mediante un giro de ángulo $\pi/2$ seguido de una traslación en la dirección del eje de rotación (movimiento helicoidal). Los generadores de su subgrupo de isometrías Γ son

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pm L_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \pm L_y \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm L_z \end{pmatrix}$$

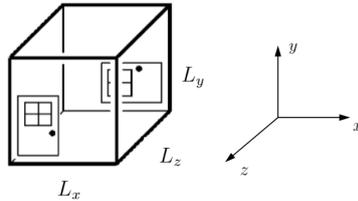


Figura 2.4. Dominio fundamental de E_3 .

El espacio es compacto y orientable.

■ E_4 , el espacio con un tercio de giro.

Consideramos como poliedro fundamental un prisma hexagonal y lo suponemos centrado en el origen.

Se identifican tres pares de caras mediante traslaciones y el cuarto par mediante un giro de ángulo $2\pi/3$ seguido de una traslación en la dirección del eje de rotación (movimiento helicoidal). Los generadores de su subgrupo de isometrías Γ son

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pm L \\ \pm\sqrt{3}L \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pm 2L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm L_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

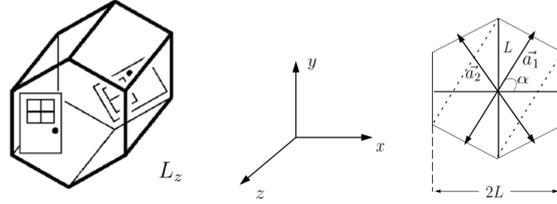


Figura 2.5. Dominio fundamental de E_4 .

Donde L es la apotema del hexágono y L_z la longitud de las aristas que unen las bases del prisma.

El espacio E_4 es compacto y orientable.

■ **E_5 , el espacio con un sexto de giro.**

Consideramos como poliedro fundamental un prisma hexagonal, como en el caso anterior.

Se identifican tres pares de caras mediante traslaciones y el cuarto par mediante un giro de ángulo $\pi/3$ seguido de una traslación en la dirección del eje de rotación (movimiento helicoidal). Los generadores de su subgrupo de isometrías Γ son

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pm L \\ \pm\sqrt{3}L \\ 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pm 2L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm L_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

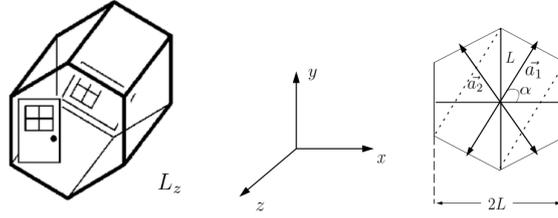


Figura 2.6. Dominio fundamental de E_5 .

El espacio E_5 es compacto y orientable.

■ E_6 . El espacio Hantzsche-Wendt.

El poliedro fundamental es un dodecaedro rómbico (y también puede ser un prisma hexagonal [8]). Se identifican las caras opuestas mediante rotaciones compuestas cada una con una traslación. Su subgrupo de isometrías está generado por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pm L_x \\ \pm L_y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \pm L_y \\ \pm L_z \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pm L_x \\ 0 \\ \pm L_z \end{pmatrix}$$

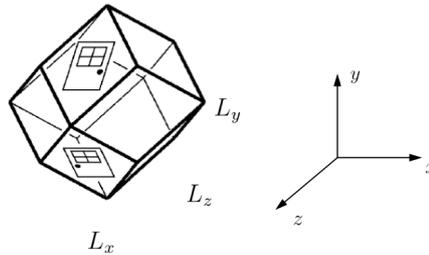


Figura 2.7. Dominio fundamental de E_6 .

El espacio E_6 es compacto y orientable.

■ E_{11} , el espacio chimenea.

Consideramos como dominio fundamental una alta chimenea infinita con sección un paralelogramo y la suponemos centrada en el origen.

En este caso, los dos pares de caras son identificadas mediante traslaciones. Los generadores de su subgrupo de isometrías Γ son

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pm L_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm L_z \end{pmatrix},$$

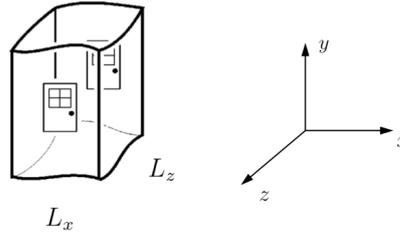


Figura 2.8. Dominio fundamental de E_{11} .

El espacio E_{11} es compacto en dos direcciones, no compacto en la tercera y orientable.

■ E_{12} , el espacio chimenea con medio giro.

Consideramos el mismo dominio fundamental del ejemplo anterior, y en este caso, un par de caras es identificado mediante una traslación y el segundo mediante un giro de de ángulo π seguido de una traslación en la dirección del eje de rotación (movimiento helicoidal). Los generadores de su subgrupo de isometrías Γ son

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pm L_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm L_z \end{pmatrix},$$

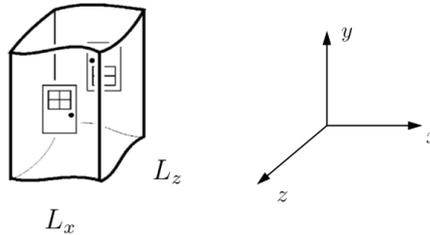


Figura 2.9. Dominio fundamental de E_{12} .

El espacio E_{12} es compacto en dos direcciones, no compacto en la tercera y orientable.

■ E_{16} , el espacio losa.

Consideramos como dominio fundamental una losa amplia y alta infinita con sección un paralelogramo, de distancia entre las caras L_z y la suponemos centrada en el origen.

En este caso, el par de caras es identificado mediante una traslación. Los generadores de su subgrupo de isometrías Γ son

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm L_z \end{pmatrix}$$

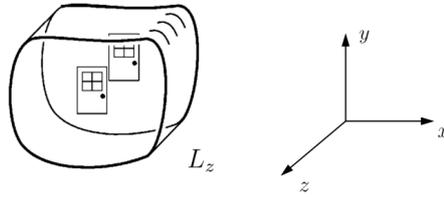


Figura 2.10. Dominio fundamental de E_{16} .

El espacio E_{16} es compacto en una dirección, no compacto en las otras dos y orientable.

■ E_{18} , el espacio euclídeo.

En este caso el subgrupo de isometrías se reduce a la identidad por lo que $E_{18} = \mathbb{R}^3$.

2.2.2. Formas Espaciales Esféricas

El espacio S^3 es el modelo esférico simplemente conexo, completo, con volumen finito y curvatura positiva.

Analíticamente, la esfera S^3 de radio R se define como el conjunto de todos los puntos (x_1, x_2, x_3, x_4) en el espacio cuatridimensional euclídeo tales que

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 = R^2$$

En \mathbb{R}^4 consideramos la métrica euclídea:

$$g = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + (dx_4)^2 \tag{2.3}$$

Para obtener la métrica sobre S^3 tomamos la parametrización

$$x_1 = R \cos \chi, \quad x_2 = R \sin \chi \cos \theta, \quad x_3 = R \sin \chi \sin \theta \cos \varphi,$$

$$x_4 = R \sin \chi \sin \theta \sin \varphi;$$

con $0 \leq \chi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Entonces

$$dx_1 = R(-d\chi \sin \chi),$$

$$dx_2 = R(d\chi \cos \chi \cos \theta - d\theta \sin \chi \sin \theta),$$

$$dx_3 = R(d\chi \cos \chi \sin \theta \cos \varphi + d\theta \sin \chi \cos \theta \cos \varphi - d\varphi \sin \chi \sin \theta \sin \varphi)$$

$$dx_4 = R(d\chi \cos \chi \sin \theta \sin \varphi + d\theta \sin \chi \cos \theta \sin \varphi + d\varphi \sin \chi \sin \theta \cos \varphi)$$

Ahora sustituimos en 2.3 y obtenemos la métrica inducida sobre S^3 :

$$g = R^2[d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]$$

Su grupo de isometrías completo es $SO(4)$ y Γ los posibles subgrupos de isometrías. Estos subgrupos de isometrías admisibles fueron descritos por Wolf [16]:

- **El grupo cíclico de orden p , para $p \geq 2$.**

$\mathbb{Z}_p = \{a, a^2, \dots, a^{p-1}, a^p = 1\}$ consiste en todas las potencias de un elemento a del grupo (generador) y 1 representa el elemento neutro (con el producto). Por ejemplo, las p -ésimas raíces de la unidad $\exp(2\pi mi/p)$, $m = 0, 1, \dots, p-1$, forman este grupo con la operación producto.

En una representación geométrica, podemos considerar que \mathbb{Z}_p es generado por rotaciones de ángulo $2\pi/p$.

- **El grupo diedral de orden $2m$, para $m > 2$.**

$D_m = \{1, r, \dots, r^{m-1}, s, rs, \dots, r^{m-1}s\}$ está generado por dos elementos r y s tal que $r^m = 1$, $s^2 = 1$ y $sr s^{-1} = cr^{-1}$, donde 1 representa el elemento neutro (con el producto) y $c = \exp(2\pi ki/m)$ es una m -ésima raíz de la unidad.

En la representación geométrica, D_m es generado por las rotaciones en el plano según un ángulo de $2\pi/m$ y una simetría respecto de una recta que pasa por el origen. Estas simetrías preservan un polígono regular de m lados que reposa en el plano y está centrado en el origen.

- **Los grupos poliédricos.**

Son los grupos de simetría de un poliedro regular en \mathbb{R}^3 que preservan su forma (figura 2.11):

- El grupo T^* del tetraedro, con 4 vértices, 6 aristas y 4 caras, de orden 12.

- El grupo O^* del octaedro, con 6 vértices, 12 aristas y 8 caras, de orden 24.
- El grupo I^* del icosaedro, con 12 vértices, 30 aristas y 20 caras, de orden 60.

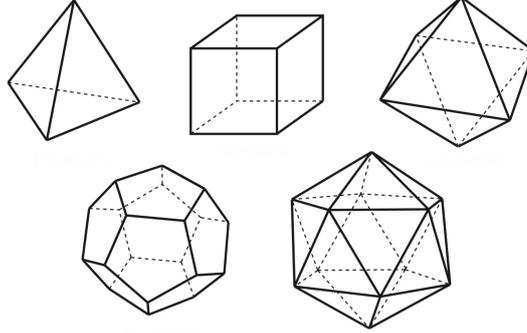


Figura 2.11. Sólidos platónicos. En su diálogo *Timeo*, Platón identificó los sólidos básicos con los cuatro elementos. El fuego lo identificó con el tetraedro, el aire con el octaedro, la tierra con el hexaedro y el mar con el icosaedro. Curiosamente, el último "sólido básico", el dodecaedro, estudiado ampliamente como modelo cosmológico, representaba el propio cosmos. Cortesía de [7].

Dado que los parámetros p y m pertenecen a \mathbb{Z} el número de subgrupos descritos y por tanto el número de posibles espacios de curvatura constante positiva es infinito. Sin embargo, solo hay un número finito de topologías "bien proporcionadas", es decir, con un tamaño aproximadamente igual en todas las direcciones, que podrían servir como modelos para nuestro cosmos.

Una característica del espacio S^3 es que tiene volumen finito:

$$\text{vol}(S^3) = \int_0^\pi 4\pi R^2 \sin^2 \chi R d\chi = 2\pi^2 R^3$$

El volumen de las formas espaciales $M = S^3/\Gamma$ es

$$\text{vol}(M) = 2\pi^2 R^3/|\Gamma|$$

donde $|\Gamma|$ es el orden del grupo Γ . Cuando las variedades son topológicamente complicadas, $|\Gamma|$ se vuelve muy grande por lo que el volumen de la forma espacial disminuye de forma proporcional. Dado que Γ puede tener un alto número de elementos, no hay un límite inferior para el volumen de M . Por otro lado, el diámetro, la máxima distancia entre dos puntos en el espacio, está limitado inferiormente por

$$\frac{1}{2} \arccos[1/\sqrt{3} \cotan \pi/5] R \approx 0.326 R$$

correspondiente al espacio dodecaédrico [8].

Las 3-variedades de curvatura constante positiva fueron clasificadas por Seifert y Threlfall (1930). Todas ellas son compactas ya que el recubrimiento universal S^3 es compacto.

Veamos algunos ejemplos de estas formas espaciales:

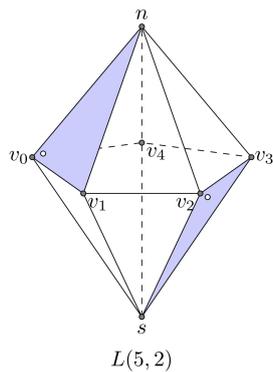
Ejemplo 2.4 (El espacio proyectivo). El espacio proyectivo de dimensión tres $\mathbb{P}^3 = S^3/\mathbb{Z}_2$ se obtiene por la identificación de los puntos diametralmente opuestos de S^3 :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (-x_1, -x_2 - x_3, -x_4)$$

\mathbb{P}^3 es orientable y su volumen es $\pi^2 R^3$. A diferencia de su recubrimiento universal S^3 , en el que las geodésicas que comienzan en un punto también se intersectan con su antipodal, en \mathbb{P}^3 las geodésicas no pueden tener más de un punto en común.

Ejemplo 2.5 (Los espacios lenticulares). Son los espacios cuyo subgrupo de isometría Γ es el grupo cíclico \mathbb{Z}_p . Su dominio fundamental tiene forma de lente.

Tomemos la bola sólida en \mathbb{R}^3 formada por todos los puntos (x, y, z) tal que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Expresemos los puntos del borde, la 2-esfera, en coordenadas (z, t) , donde $z \in \mathbb{C}$ y $t \in \mathbb{R}$ tales que $|z|^2 + t^2 = 1$. El espacio lenticular $L(p, q)$, con $p > q$ dos números coprimos, se obtiene a partir de esta bola identificando cada punto (z, t) de la 2-esfera con el punto $(e^{(2\pi q/p)i} z, -t)$.



De esta manera tenemos que el polo norte de la 2-esfera queda identificado con el polo sur. Cualquier otro punto de la semiesfera superior se identifica con un solo punto de la semiesfera inferior mediante una reflexión por el plano xy y una rotación, de eje OZ , de $2\pi q/p$ radianes. Cada punto del ecuador se identifica con los otros $p - 1$ puntos. La división de celdas tiene $p + 2$ vértices, el polo norte n , el polo sur s y otros p vértices igualmente espaciados a lo largo del ecuador. En la figura 2.12 tenemos un ejemplo para el caso de $p = 5$.

Figura 2.12. Cortesía de [7].

Ejemplo 2.6 (El espacio diedral). Los espacios diedrales son los espacios con subgrupo de isometrías el grupo diedral D_m . Su poliedro fundamental tiene forma de prisma. El más sencillo es S^3/D_3 que divide S^3 en 12 celdas triedrales.

Otro importante ejemplo de formas espaciales esféricas es el espacio dodecaédrico de Poincaré. Es generado por el cociente de S^3 y el grupo poliédrico del icosaedro I . En la siguiente sección profundizaremos en sus características.

2.2.3. Formas Espaciales Hiperbólicas

El espacio H^3 es el modelo hiperbólico abierto, simplemente conexo, completo de volumen infinito. Puede ser descrito como una hipersuperficie con ecuación:

$$-(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 = R^2$$

en el espacio de Minkowski con métrica:

$$g = -(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + (dx_4)^2 \quad (2.4)$$

Si consideramos la parametrización:

$$\begin{aligned} x_1 &= R \cosh \chi, & x_2 &= R \sinh \chi \cos \theta, & x_3 &= R \sinh \chi \sin \theta \cos \varphi, \\ & & & & x_4 &= R \sinh \chi \sin \theta \sin \varphi; \end{aligned}$$

con $0 \leq \chi \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, entonces:

$$\begin{aligned} dx_1 &= R(d\chi \sinh \chi) \\ dx_2 &= R(d\chi \cosh \chi \cos \theta - d\theta \sinh \chi \sin \theta) \\ dx_3 &= R(d\chi \cosh \chi \sin \theta \cos \varphi + d\theta \sinh \chi \cos \theta \cos \varphi - d\varphi \sinh \chi \sin \theta \sin \varphi) \\ dx_4 &= R(d\chi \cosh \chi \sin \theta \sin \varphi + d\theta \sinh \chi \cos \theta \sin \varphi + d\varphi \sinh \chi \sin \theta \cos \varphi) \end{aligned}$$

Sustituyendo en 2.4 obtenemos la métrica en H^3 :

$$g = R^2(d\chi^2 + \sinh^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)) \quad (2.5)$$

Para describir las isometrías consideramos H^3 como el semiespacio superior \mathbb{R}_+^3 (ver el espacio H^n). Su grupo de isometrías completo es isomorfo al grupo de transformaciones lineales fraccionarias que actúa en el plano complejo, $PSL(2, \mathbb{C})$:

$$z = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc = 1$$

Para obtener los 3-espacios euclídeos compactos, el poliedro fundamental puede tener no más de ocho caras y un volumen arbitrario. En el caso esférico, el volumen de S^3/Γ es finito, una fracción entera del volumen de S^3 , el máximo valor. Sin embargo, para el caso hiperbólico, es posible teselar H^3 por poliedros con un número arbitrario de caras y los posibles valores para el volumen de estos poliedros (los dominios fundamentales) están acotados inferiormente, es decir, existe una 3-variedad hiperbólica con volumen mínimo. De hecho, el volumen del espacio hiperbólico 3-dimensional es un invariante topológico. Por esta razón es posible clasificar las variedades 3-dimensionales hiperbólicas compactas.

Esta clasificación a día de hoy está sin completar (ver [1],[6],[13]).

Veamos algunos ejemplos [8]:

Ejemplo 2.7 (Espacio de Sokoloff y Starobinskii). Son espacios hiperbólicos no compactos con forma de cuerno infinito.

La métrica es obtenida por la transformación de las coordenadas

$$x_1 = -\ln(\cosh \chi - \sin \chi \cos \theta); \quad x_2 = \frac{\sin \theta \cos \varphi}{\operatorname{argth} \chi - \cos \theta}; \quad x_3 = \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\operatorname{argth} \chi - \cos \theta}$$

por lo que 2.5 queda

$$g = (dx_1)^2 + e^{-2x_1}((dx_2)^2 + (dx_3)^2)$$

El subgrupo de isometrías actúa mediante las identificaciones $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1 + m, x_2 + nb, x_3)$, con $m, n \in \mathbb{Z}$ y a, b constantes positivas que definen la topología toroidal. Su poliedro fundamental está comprendido entre dos planos paralelos y es representado por el interior de un cuerno cilíndrico infinito.

Ejemplo 2.8 (Espacio de Seifert-Weber). El espacio de Seifert-Weber es obtenido identificando las caras opuestas de un dodecaedro después de una rotación de 108° . Mediante esta identificación se unen los veinte vértices en un punto.

Ejemplo 2.9 (Espacio de Löbell). El espacio de Löbell es un espacio hiperbólico compacto. Su poliedro fundamental tiene 14 caras, dos de ellas son hexágonos rectangulares regulares y las otras 12 pentágonos rectangulares regulares.

Ejemplo 2.10 (Espacios de Best). Los espacios de Best son espacios hiperbólicos compactos cuyos poliedros fundamentales son icosaedros regulares. Los generadores del subgrupo de isometrías de este espacio se expresan en términos de matrices de 4×4 que corresponden a transformaciones de Lorentz homogéneas.

Ejemplo 2.11 (Espacio de Weeks). El espacio de Weeks es un espacio hiperbólico compacto cuyo poliedro fundamental tiene 26 vértices y 18 caras, 12 de ellas pentágonos y 6 tetragonales. Los generadores del subgrupo de isometrías se expresan también en términos de matrices de 4×4 correspondientes a transformaciones de Lorentz homogéneas. Es el espacio hiperbólico compacto más pequeño conocido.

Topología Cósmica

En este último capítulo nos centraremos en estudiar los modelos cosmológicos multiconexos y algunas de las ilusiones que crearían sobre nuestro cielo, como la sensación de vivir en un salón de espejos con infinitas copias de nosotros. A continuación, detallaremos dos métodos observacionales con los que actualmente se intenta encontrar alguna prueba de la multiconexidad, la *crystalografía cósmica* y el método de *círculos en el cielo* el cual también nos proporcionaría la topología del universo y nuestra posición en él. Por último, cerraremos el capítulo con dos modelos multiconexos ampliamente estudiados: *el 3-Toro* y *el Dodecaedro de Poincaré*.

3.1. Modelos Cosmológicos Multiconexos

La cosmología relativista trata de deducir, de las ecuaciones de Einstein, los posibles modelos cosmológicos.

Para ello se supone la materia como un fluido donde cada objeto cósmico es una partícula. A esta escala, sólo se consideran las fuerzas que ejercen las unas sobre las otras por la gravedad.

Según la Relatividad General, el movimiento de las partículas es representado por geodésicas del espacio-tiempo (M, g) , una variedad diferenciable de dimensión 4, con una métrica g que es solución de las ecuaciones de Einstein. La métrica relaciona la geometría del espacio-tiempo con la distribución de materia y la energía del universo (se considera el universo en un instante t_0 como la sección espacial o el espacio en ese instante).

Para obtener g se supone que las propiedades geométricas y físicas de nuestro universo son las mismas en todos los puntos y en todas las direcciones en cada instante. Es decir, el universo es homogéneo e isotrópico.

En la actualidad se piensa que nuestro universo está correctamente descrito a gran escala por un modelo de Friedmann-Lemaître. Estos modelos son solu-

ciones homog3neas e isotr3picas de las ecuaciones de Einstein, y sus secciones espaciales tienen curvatura constante.

El modelo global m3s sencillo de espacio-tiempo es una variedad $\mathbb{R} \times M$ con m3trica

$$g = c^2 dt^2 - R^2(t) d\sigma^2,$$

donde $d\sigma^2 = d\chi^2 + S_K(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$, es una m3trica de curvatura constante $K = 1, 0, -1$ sobre M . La funci3n $S_K^2(\chi)$ es dada por $S_K(\chi) = \sinh(\chi)$, si $K = -1$; $S_K(\chi) = \chi$ si $K = 0$; $S_K(\chi) = \sin(\chi)$ si $K = 1$. El factor escalar $R^2(\chi)$ es igual al radio de curvatura espacial para modelos no planos, as3 la curvatura espacial es K/R^2 . La forma cuadr3tica $R^2(t)d\sigma^2$ es la m3trica del espacio en el tiempo c3smico t .

En la mayor3a de los estudios y libros de textos, se presupone una topolog3a simplemente conexa, por lo que los modelos de espacio de Friedmann-Lema3tre que suelen aparecer son:

- El modelo de curvatura plana, \mathbb{R}^3 .
- El modelo de curvatura positiva, S^3 .
- El modelo de curvatura negativa, H^3 .

Sin embargo, no hay ninguna raz3n particular para que la topolog3a del universo sea simplemente conexa. Las ecuaciones de Einstein son ecuaciones en derivadas parciales y s3lo describen las caracter3sticas del espacio-tiempo desde un punto vista local, por lo que nos proporcionan sus propiedades geom3tricas locales pero no fijan la estructura global del espacio-tiempo. Adem3s, como hemos visto, para una misma m3trica existen varias o infinitas topolog3as compatibles, y por tanto, posibles modelos para describir la forma de nuestro universo. De esta manera, el espacio eucl3deo \mathbb{R}^3 y las formas espaciales eucl3deas descritas en el cap3tulo anterior son localmente id3nticas, y los modelos cosmol3gicos relativistas los describen con las mismas ecuaciones, pero, globalmente, son espacios diferentes. Lo mismo ocurre con los modelos esf3ricos e hiperb3licos.

En resumen, las formas espaciales tridimensionales multiconexas (y orientables) pueden servir como modelo de universo, al igual que los modelos simplemente conexos.

La curvatura del espacio f3sico depende de c3mo la densidad de la energ3a total del universo puede hacer de contrapeso con la energ3a cin3tica de expansi3n del universo. Viene determinada por el par3metro de densidad normalizado Ω_0 . Si Ω_0 es mayor que 1, la curvatura es positiva y la geometr3a esf3rica. Si Ω_0 es menor que 1, la curvatura es negativa y la geometr3a hiperb3lica. Y si Ω_0 es estrictamente igual a 1, la curvatura es plana y la geometr3a eucl3dea. Sin embargo los valores de los par3metros c3smicos que se conocen no son lo suficientemente precisos como para determinar el signo de la curvatura.

La siguiente cuestión sobre la estructura global de nuestro universo es su finitud. En universos multiconexos podemos considerar el espacio observable como una parte del recubridor universal (el correspondiente modelo simplemente conexo), lleno de copias del espacio físico (el dominio fundamental). Como los modelos simplemente conexos euclídeos e hiperbólicos son infinitos están teselados por infinitas copias del poliedro fundamental, conectadas por los elementos de los subgrupos de isometrías Γ . Sin embargo, en el modelo esférico, de volumen finito, existen un número finito de copias.

Cuando nos movemos en un poliedro fundamental y llegamos a una cara, estamos a la misma vez en la cara identificada por el subgrupo de isometrías. Transportándolo al recubridor universal, el movimiento continua en la copia adyacente del poliedro fundamental. Cuando aplicamos esta idea a los rayos de luz, obtenemos uno de los efectos cosmológicos básicos debidos a los espacios multiconexos. En la siguiente sección exploraremos este efecto y su importancia en los métodos observacionales.

3.2. Imágenes Fantasma y Métodos Observacionales

Actualmente no sabemos el valor de la curvatura de nuestro universo o si es simplemente conexo. Sin embargo, se podrían observar efectos si fuera compacto (al menos en una dirección), multiconexo y si su tamaño fuera menor que el universo observable.

Como ya mencionamos, en un universo multiconexo el poliedro fundamental P se identifica con el espacio físico, donde se ubican los objetos como estrellas, planetas, galaxias, ... Cualquier objeto cósmico se encontrará en una determinada posición en el espacio físico (P). Sus imágenes por los elementos del subgrupo de isometrías Γ estarán en el recubridor universal. Este último será el “mundo del observador” que en general difiere del mundo real. Así, el observador podría ver diferentes imágenes de un mismo objeto cósmico si P es menor que la distancia del horizonte observado, en al menos una dirección. A la fuente (u objeto) más cercana la denominamos *original* y a las otras *imágenes fantasmas*.

Para detectar la topología de nuestro universo se han propuesto dos métodos. El primero se basa en la búsqueda de las imágenes fantasmas mediante el estudio de la distribución $3D$ de objetos astronómicos como galaxias. El segundo se centra en el estudio de los mapas de fluctuaciones $2D$ de la Radiación de Fondo de Microondas (CMB), por la búsqueda de círculos en el cielo. Notemos que la CMB es la radiación electromagnética que constituye el calor residual del Big Bang, como explicaremos más adelante.

3.2.1. Cristalograf3a C3smica

La b3squeda de las im3genes fantasma se lleva a cabo por la implementaci3n de la *cristalograf3a c3smica*.

En general, los objetos en nuestro universo parecen estar distribuidos al azar. Sin embargo, si nuestro universo fuera multiconexo, la posici3n de las im3genes fantasmas debe estar determinada por las dimensiones del poliedro fundamental que lo caracteriza.

Dentro de la cristalograf3a c3smica, un destacado m3todo es el de usar histogramas de separaciones de pares (PSH), propuesto en 1996 por Lehoucq. Se basa en calcular las distancias entre pares de im3genes de un conjunto dado y representar el n3mero de pares.

Para visualizarlo mejor supongamos que el espacio es bidimensional.

Tomemos un conjunto de N objetos observados y calculemos la distancia entre pares de objetos ($N(N-1)/2$ distancias). Si la muestra no contiene im3genes fantasmas, las distancia siguen una distribuci3n de Poisson. La imagen 3.1 representa un histograma de separaci3n de pares de un universo simplemente conexo, o uno en el cual nuestro espacio observable est3 contenido en el poliedro fundamental.

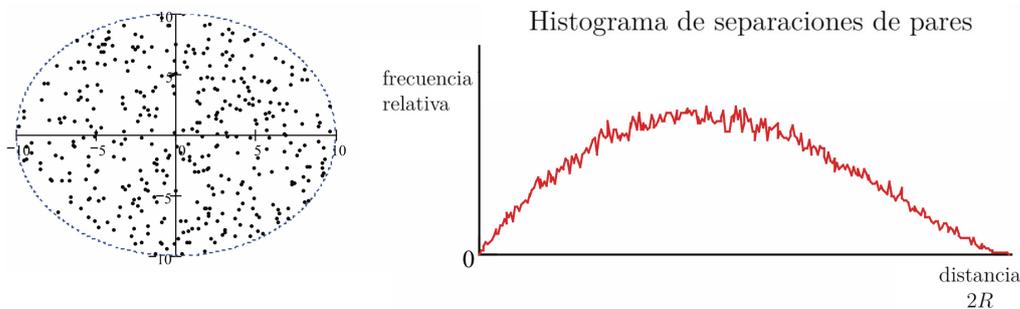


Figura 3.1. Cortes3a de [7].

Si en nuestra muestra hay im3genes repetidas, en el histograma aparecer3n ciertos picos.

En el ejemplo de la imagen 3.2 hemos supuesto que el dominio fundamental de nuestro universo es un rect3ngulo. Los picos que aparecen en el histograma se corresponden con las dimensiones del rect3ngulo. En este caso aparecen aproximadamente a distancias de 10 (desplazamiento horizontal), 14 (desplazamiento vertical) y 17 (desplazamiento diagonal). Por tanto tenemos un rect3ngulo de base 10, altura 14 y diagonal 17.

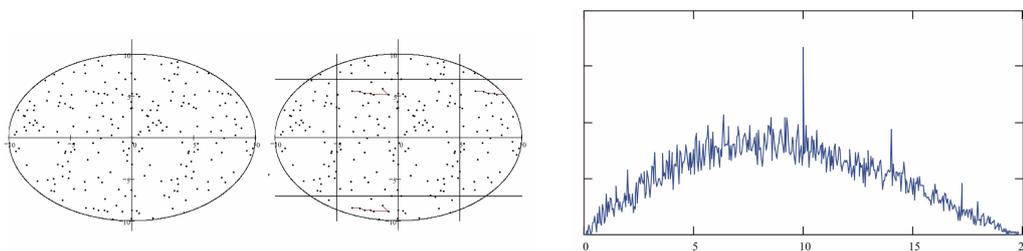


Figura 3.2. Cortesía de [7].

Este histograma se corresponde a un toro obtenido a partir del rectángulo, y donde Γ está generado por traslaciones.

En una variedad de Riemann, las transformaciones T con la propiedad $d(p, T(p)) = d(q, T(q))$, para todos los puntos p y q , se denominan *desplazamientos de Clifford*. Los picos que aparecen en el histograma son debidos a que las traslaciones son desplazamientos de Clifford.

La primera desventaja de este método es que debemos presuponer la geometría del universo. Otra desventaja es que las isometrías hiperbólicas no son transformaciones de Clifford. Además, diferentes espacios pueden producir el mismo espectro de picos. Por tanto, su presencia es una prueba de la multiconexidad pero no sería suficiente para concretar la topología del universo.

3.2.2. Círculos en el Cielo

El segundo método observacional que veremos es el de *círculos en el cielo*.

Según la teoría del Big Bang, cuando ocurrió la gran explosión inicial se produjo una radiación electromagnética. Esta radiación es el calor residual del Big Bang y la luz más antigua y distante que podemos observar. Se la conoce como *Radiación de Fondo de Microondas (CMB)* (figura 3.3) y nos llega desde todas las direcciones, viajando a la misma velocidad el mismo periodo de tiempo. Así, podemos imaginar el CMB que detectamos a un instante t como una 2-esfera con nosotros en su centro. A esta esfera se la conoce como *última superficie de dispersión (LSS)*.

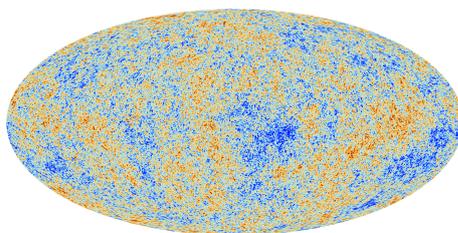


Figura 3.3. Mapa del Fondo de Microondas Cósmico (CMB). Cortesía de ESA and the Planck Collaboration.

Si la 3ltima superficie de dispersi3n es m3s peque1a que el dominio fundamental, como en la figura 3.4 (a), entonces no se interseca con ninguna de sus copias y no podr3amos usar el m3todo de c3rculos en el cielo. Si, por el contrario, la LSS es mayor, como ocurre en 3.4 (b), entonces se intersecar3 con algunas de sus copias adyacentes. Dado que la intersecci3n de dos esferas es un c3rculo, los mapas de temperatura tendr3n c3rculos emparejados con las mismas variaciones de los patrones de temperatura.

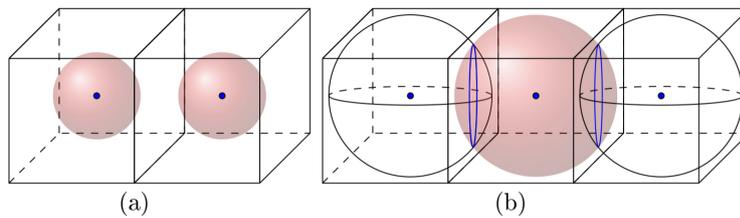


Figura 3.4. Comparaci3n de la LSS con el universo toroidal. En (a), la LSS es menor que el dominio fundamental, en (b) la LSS es mayor. Cortes3a de [7]

A partir de la geometr3a de estos c3rculos podemos deducir la topolog3a del universo, su curvatura y nuestra posici3n en 3l.

Dado que los c3rculos aparecen en las intersecciones de nuestra LSS con las distintas copias adyacentes (se interseca con su imagen fantasma), los c3rculos est3n en las distintas caras del poliedro fundamental. Los pares de c3rculos indican la ubicaci3n de pares de caras hom3logas del dominio fundamental. Adem3s, cada cara del dominio fundamental se encuentra exactamente a medio camino entre su centro (nosotros) y la imagen fantasma de su centro.

Una vez obtenido el poliedro fundamental, las distintas posiciones de cada par de c3rculos nos permitir3a encontrar la transformaci3n que los identifican y as3 saber sus subgrupos de isometr3as.

La principal desventaja del m3todo de c3rculos en el cielo es que no se puede usar si el tama1o del universo es mayor a su parte observable. Otra desventaja es que hay efectos que ignora por los cuales las fluctuaciones de temperatura en dos c3rculos podr3an no ser id3nticas. Solo en las topolog3as m3s simples como el 3-Toro y el Dodecaedro de Poincar3, el espacio es homog3neo y los c3rculos ser3an antipodales, adem3s, en general, su posici3n depende de la posici3n del observador en el dominio fundamental, lo que implica un gran n3mero de grados de libertad en su b3squeda.

Una ventaja del m3todo de c3rculos en el cielo es que, en principio, la b3squeda de los c3rculos puede llevarse a cabo sin ninguna informaci3n o suposici3n sobre la geometr3a o topolog3a del universo.

3.3. Ejemplos

3.3.1. 3-Toro

El 3-toro T^3 es uno de modelos cerrados de curvatura plana. Dentro de los diferentes espacios compactos de curvatura plana es el más simple y el más estudiado como modelo para nuestro universo debido a que encaja con los resultados del análisis del fondo de microondas y con antiguas mediciones de la densidad normalizada que indicaban una curvatura prácticamente plana.

El 3-Toro es finito, no tiene bordes y puede ser generado por un cubo donde se han identificado las caras opuestas. Su recubrimiento universal \mathbb{R}^3 está teselado por infinitos cubos. Así, cuando la luz viaja y llega a una de las caras reaparece de nuevo por la cara opuesta. Para poder ver imágenes fantasmas de objetos de nuestro universo, representado por el dominio fundamental (el cubo), debe de estar contenido en la esfera de nuestro universo observable (de radio la distancia máxima a la que podemos ver). De esta manera, si en nuestro universo observable se pueden incluir infinitas copias de cubos, tendríamos la sensación de estar en un espacio infinito, con infinitas copias de nosotros (ver imagen 3.5). Ya en 1900 K. Schwarzschild imaginaba el universo infinito dividido en cubos, y en cada uno de ellos una copia de la Vía Láctea.

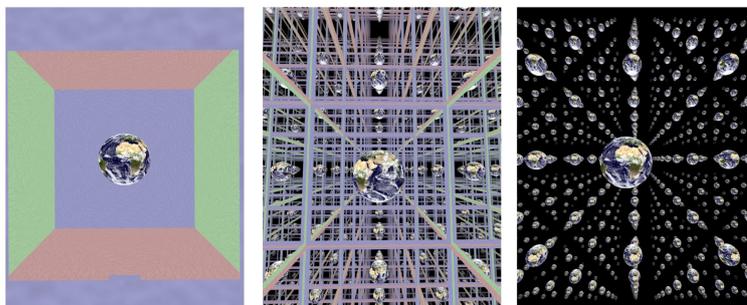


Figura 3.5. Imágenes generadas con la aplicación *Curved Spaces* [15]. En ellas se simula como sería encontrarse en el interior de un 3-toro. Las caras identificadas aparecen coloreadas.

Ahora, en la práctica, la búsqueda de imágenes fantasmas está sujeta a una importante complicación. Si vemos imágenes fantasmas de un objeto, éstas se encuentran a distintas distancias de nosotros. Debido a la velocidad finita de la luz podrían encontrarse en edades diferentes de su evolución y por tanto las veríamos de distintas formas.

Por otra parte, si la última superficie de dispersión es suficientemente grande y contiene al dominio fundamental del toro, se apreciarían los círculos en el cielo. Deberían de verse tres pares de círculos, los obtenidos de la intersección de la última superficie de dispersión con las caras del cubo.

3.3.2. Dodecaedro de Poincar3

La variedad de Poincar3 es uno de los modelos de curvatura positiva. Es de los espacios topol3gicos que mejor encajan con la informaci3n recogida de las estadísticas de las fluctuaciones en base a las cifras de CMB obtenidas, explica la falta de fluctuaciones a larga escala en el fondo de microondas, la ligera curvatura positiva del espacio inferida del WMAP y otras observaciones.

El Dodecaedro de Poincar3 es finito y est3 generado por el cociente de S^3 y el grupo poliedral del icosaedro I . Cuando un rayo de luz atraviesa una cara pentagonal, vuelve a aparecer a trav3s de la cara opuesta despu3s de sufrir un giro de 36° . Como consecuencia, el espacio es finito pero ilimitado, por lo que se puede viajar a trav3s de 3l indefinidamente. Crea la impresi3n de vivir en un espacio 120 veces m3s grande, pavimentado con un dodecaedro que multiplica las im3genes como un sal3n de espejos. Sin embargo a diferencia del 3-Toro, las im3genes fantasma no son infinitas, hay 120 copias de cada objeto (figura 3.6).

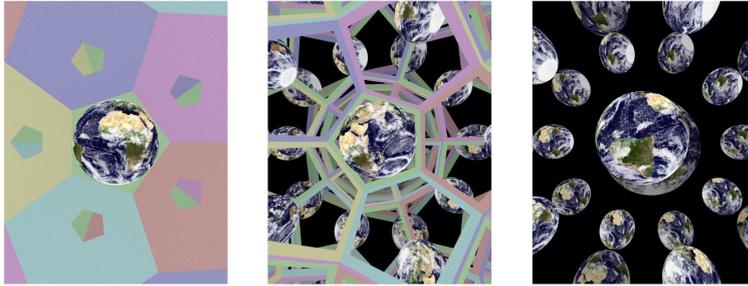


Figura 3.6. Im3genes generadas con la aplicaci3n *Curved Spaces* [15]. En ellas se simula como ser3a encontrarse en el interior de un espacio dodeca3drico. Las caras identificadas aparecen coloreadas.

Para plantear su observaci3n a trav3s del m3todo de c3rculos en el cielo supongamos el caso de que la LSS es mayor que el dominio fundamental. Debido a la rotaci3n que se realiza en las identificaciones de las caras del poliedro, los c3rculos emparejados en el cielo tendr3an un giro de 36° , (figura 3.7 (a)). Por su forma con 12 caras regulares, el modelo de Poincar3 predice seis pares de c3rculos emparejados diametralmente opuestos, girados 36° y un radio angular de $10^\circ - 50^\circ$, dependiendo de los valores precisos de los par3metros cosmol3gicos. En la imagen 3.7 (b) podemos ver una representaci3n de c3mo se ver3a desde el exterior la intersecci3n de la LSS.

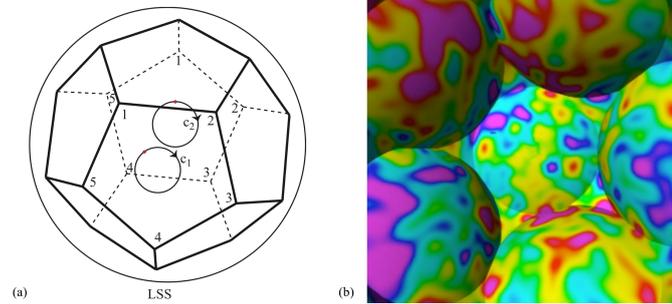


Figura 3.7. (a) Comparación de la LSS con el universo esférico dodecaédrico. Cortesía de [7] (b) LSS vista desde el exterior en el recubridor universal del Espacio Dodecaédrico de Poincaré. Cortesía de [3].

Después de que el modelo fuera propuesto en el 2003 como un candidato de universo compatible con el CMB, sus propiedades matemáticas han sido extensamente estudiadas, siendo así un ejemplo más de cómo las consideraciones cosmológicas pueden conducir a nuevos descubrimientos en las matemáticas puras.

Conclusiones

Las Matemáticas han sido la base para otras ciencias. Con ellas podemos predecir y demostrar teorías que aún no somos capaces de observar directamente. También, permiten corroborar y realizar modelos teóricos o analíticos en base a observaciones o tomas de datos estadísticos de lo que queremos comprender o predecir.

El hecho de que no podamos observar algo directamente no implica que su estudio teórico sea irrelevante. Al contrario, su importancia reside en ser la única forma de llevar a cabo su estudio. Son innumerables los casos en los que una teoría matemática ha predicho un comportamiento físico o la existencia de un elemento desconocido que posteriormente ha sido reafirmado por observaciones directas o experimentación.

En la Topología Cósmica podemos encontrar otro ejemplo más de cómo las Matemáticas modelizan la realidad en la que vivimos. Nos ayuda a vislumbrar cuestiones que han preocupado a grandes pensadores de la humanidad, como el lugar que ocupamos en el universo, o si su aparente infinitud es solo parte de una ilusión. Con ella podemos llevar a cabo una ardua tarea, el estudio de la forma de un espacio sin poder realizar mediciones en toda su magnitud u observarlo desde fuera. Junto con las teorías físicas y las observaciones realizadas, la Topología Cósmica plantea los posibles modelos que describen el tejido espacial de nuestro cosmos y es capaz de vislumbrar sus características, comportamiento y efectos sobre nuestro cielo. Y no solo estudia la forma de nuestro universo, sino que además tiene el potencial de describir otros modelos cosmológicos que podrían ser tan reales como el nuestro.

Sin embargo, aún no somos capaces de discernir la forma de nuestro universo, y cualquier teoría o modelo plausible es tan válido y erróneo como los otros. Futuras observaciones y toma de datos que tecnológicamente no están a nuestro alcance a día de hoy revelarán el modelo matemático que se corresponde realmente con nuestro universo.

Bibliografia

- [1] APANASOV, B.N. *Filling space by polyhedra and deformations of incomplete hyperbolic structures*. Siberian Math. J. 1986; volumen (27): 473-485.
- [2] BOOTHBY, W. M. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry* 2nd edition. Florida: Academic Press, INC. 1986.
- [3] CAILLERIE, S., LACHIÈZE-REY, M., LUMINET, J.-P., LEHOUCQ, R., RIAZUELO, A., WEEKS, J. *A new analysis of the Poincaré Dodecahedral space model*. Astronomy&Astrophysics. 2007; volumen (476): 691-696.
- [4] ELLIS, G.R.F. *Topology and Cosmology*. Gen. Relativ. Gravitation. 1971; volumen (2): 7-21.
- [5] DO CARMO, M. P. *Riemannian Geometry* 2nd edition. Boston: Birkhäuser, 1992.
- [6] GUTSUL, I.S. Soviet J. Math. Dkl. 1979; volumen (20): 996.
- [7] HITCHMAN, M.P. *Geometry with an Introduction to Cosmic Topology*. Linfield College McMinnville, 2018.
- [8] LACHIÈZE-REY, M, LUMINET, J.-P. *Cosmic Topology*. Physics Reports. 1995; volumen (254): 135-214.
- [9] LUMINET, J.-P. *Cosmic Topology: Twenty Years After*. Gravitation and Cosmology. 2014; volumen (20): 15-20.
- [10] LUMINET, J.-P. *Cosmic Topology*. Scholarpedia. 2015. 10(8): 31544.
- [11] MASSEY, W.S. *Algebraic Topology: An introduction*. Springer-Verlag, 1972.
- [12] RIAZUELO, A., WEEKS, J., UZAN, J.-P., LEHOUCQ, R., LUMINET, J.-P. *Cosmic microwave background anisotropies in multiconnected flat spaces*. Physical Review D. 2014; volumen (69): 103518.
- [13] THURSTON, W.P. *The geometry and topology of three manifolds*. Princeton Lecture Notes, 1979.
- [14] THURSTON, W. P., WEEKS, J.R. *The mathematics of three dimensional manifolds*. Scientific American. 1984; volumen (251)1: 108-121.
- [15] WEEKS, J. *Curved Spaces*. 2021. Disponible en: <https://www.geometrygames.org/CurvedSpaces/index.html>.
- [16] WOLF, J. *Spaces of Constant Curvature* 1st edition. McGraw-Hill, 1967.

The Topology of The Universe

Abstract

Cosmic Topology studies the shape of the Universe. Although it is often assumed that its topology is simply connected, there is no reason to presuppose it. Our Universe could be multi-connected. In this memory we focus on the multi-connected cosmological models. To do so, we first introduce the necessary geometrical and topological concepts. We continue with a description of the three-dimensional space forms. And we conclude with the multi-connected cosmological models as possible shapes of the Universe, the illusions that could be created by living in these spaces, two observational methods to find signs of multi-connectedness and two widely studied examples: the 3-Torus and the Poincaré Dodecahedral Space.

1. Mathematical Introduction

A *Riemannian manifold* (M, g) is a differentiable manifold M with a symmetric and positive-definite tensor field g of type $(0, 2)$. The tensor field g is called *Riemannian metric*.

An *isometry* f is a diffeomorphism between two manifolds which preserves the metric.

An *action of a group* on a set is a map that associates to each element of the group a bijective transformation of the given set, where the operation of the group corresponds with the composition of transformations. When we consider the action of a Lie group on a manifold, the elements of the group generate the manifolds transformations (or diffeomorphisms).

2. Space Forms

The three complete and simply connected models, with constant sectional curvature, are:

- The euclidean space \mathbb{R}^n , with constant sectional curvature $K = 0$ and it is infinity.
- The sphere S^n , with constant sectional curvature $K = 1$ and it is compact.
- The hyperbolic space H^n , with constant sectional curvature $K = -1$ and it is infinity.

The complete manifolds of constant sectional curvature are called **space forms**.

Theorem 1. *Let M be a complete manifold of constant curvature $K = 1, 0$ or -1 . Then its universal covering manifold \tilde{M} is isometric to S^n, \mathbb{R}^n or H^n , respectively, and M is the orbit space of a subgroup Γ of the group of isometries of \tilde{M} which acts freely and properly discontinuously on \tilde{M} .*

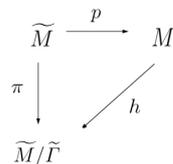


Figure 1: Diagram of the isometry $\pi = hp$

To study the spatial part of the Universe we are interested in knowing the complete three dimensional manifolds M with constant sectional curvature. They are obtained considering the universal covering \tilde{M} (\mathbb{R}^3, S^3 or H^3), the fundamental domain and the possible discrete subgroups Γ of the group of isometries of \tilde{M} , which act freely and properly discontinuously. The multi-connected nature that we were looking for arises from the quotient of the actions on the simply connected spaces.

TRABAJO FIN DE GRADO, Convocatoria de Septiembre, 2021

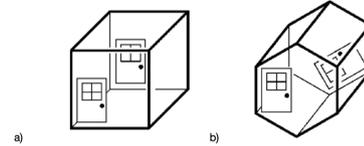


Figure 2: a) Fundamental domain of the 3-Torus. b) Fundamental domain of the third turn space.

3. Cosmic Topology

Relativistic cosmology addresses to deduce, from the Einstein's equations, the plausible cosmological models. According to the General Relativity, the space-time (M, g) is a differentiable four-manifold, with a metric g which is the solution to the Einstein's equations.

The homogeneous and isotropic Friedmann-Lemaître models are cosmological solutions of Einstein's equations, with spatial sections of constant curvature. However, each metric solution can correspond to several or infinite spatial models. Due to this, the General Relativity does not determine the global structure of the Universe.

In a multi-connected universe, the universal covering is tessellated by its fundamental domain. Nevertheless, the identification of the faces by the subgroups of isometries gives the feeling of a larger universe. When the light reaches a face it is at the same time on the opposite face, which causes the feeling of being inside a hall of mirrors, with infinities copies of us, the *ghost images*.

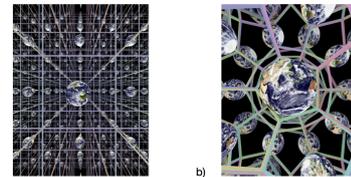
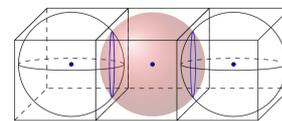


Figure 3: a) 3-Torus. It generates infinities copies. b) Poincaré Dodecahedral Sapce. It generates 120 copies.

Two observational methods to finds signs of multi-connectedness stand out.

- **Cosmic Crystallography.** It is based on analyzing distances between pair of objects to find ghost images.
- **Circles in the sky.** Searches for pairs of circles in the sky with identical pattern of temperature variations. The topology of the universe can be deduced from the geometry of these circles.



References

- [1] BOOTHBY, W. M. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry* 2nd edition. Florida: Academic Press, INC. 1986.
- [2] DO CARMO, M. P. *Riemannian Geometry* 2nd edition. Boston: Birkhäuser, 1992.
- [3] LACHIÈZE-REY, M, LUMINET, J.-P. *Cosmic Topology*. Physics Reports. 1995; volumen (254): 135-214.
- [4] MASSEY, W.S. *Algebraic Topology: An introduction*. Springer-Verlag, 1972.