EJERCICIOS TEÓRICOS DE MATRICES Y DETERMINANTES.

MATEMÁTICAS II

GRADO EN ECONOMÍA Y

GRADO EN ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

Domingo Israel Cruz Báez
Departamento de Economía Aplicada
y Métodos Cuantitativos

Universidad de La Laguna

Actualizado a 10/12/2021

Índice

PRÓLOGO

El estudiantado de la Facultad en Economía, Empresa y Turismo, en sus primeros cursos, encuentra especial dificultad en los ejercicios teóricos de matrices y determinantes. La presente colección de ejercicios resueltos es una recopilación del material de prácticas propuesto sobre la materia. Por lo que espero que les sea de especial ayuda en los temas correspondientes de Matemáticas II, asignatura obligatoria de primer curso en los Grados en Economía y en Administración y Dirección de Empresas, así como en otras asignaturas de los grados mencionados.

EJERCICIOS PROPUESTOS

31. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos matrices de órdenes tales que tengan sentido las operaciones que se realizan con las mismas. Compruébense, con casos particulares, las siguientes igualdades:

a) $(\mathbf{A}^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = \mathbf{A}$. **b)** $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{\mathrm{t}} = \mathbf{A}^{\mathrm{t}} + \mathbf{B}^{\mathrm{t}}$. **c)** $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{\mathrm{t}} = \mathbf{B}^{\mathrm{t}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{t}}$.

32. $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices cuadradas del mismo orden, ¿son correctas las siguientes igualdades? ¿por qué?

a) $(\mathbf{A}-\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}^2$ b) $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = (\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B})$

33. Simplificar todo lo posible la siguiente expresión, sabiendo que las matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ son de órdenes tales que todas las operaciones que aparecen en esta expresión existen:

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}-\mathbf{CD}) + \mathbf{A}(\mathbf{C}-\mathbf{B})\mathbf{D} - \mathbf{AB}(\mathbf{C}-\mathbf{D})$$

34. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

a) Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada tal que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. Si $\mathbf{B} = 2\mathbf{A} - \mathbf{I}$, entonces $\mathbf{B}^2 = \mathbf{I}$.

b) Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada tal que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ entonces $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

c) Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada con $|\mathbf{A}| \neq 0$ y tal que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ entonces $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

35. Demuéstrese si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz antisimétrica, esto es, $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathrm{t}}$. Si n es un número impar, entonces $|\mathbf{A}| = 0$.
b) Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz antisimétrica. Si n es un número par, entonces $|\mathbf{A}| = 0$.
c) Si $\mathbf{A}$ es una matriz unitaria (esto es, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{t}} = \mathbf{A}^{\mathrm{t}}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}$) entonces $\mathbf{A}$ es inversible.
d) Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\mathbf{A}^{10} = \mathbf{I}$ entonces $\mathbf{A}$ es inversible.
e) Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\mathbf{A}^6 = \mathbf{I}$ entonces $|\mathbf{A}| = 1$.

36. Demuéstrese si son verdaderas o falsas las siguientes cuestiones:

a) $\mathrm{rango}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}) = \text{orden de } \mathbf{A}, \quad \forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.

b) $\mathrm{rango}(\mathbf{A}) = \mathrm{rango}(\mathbf{A}^{\mathrm{t}}), \quad \forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c) $\mathrm{rango}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \mathrm{rango}(\mathbf{A}) + \mathrm{rango}(\mathbf{B}), \quad \forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}),\ \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$.

d) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$, para cierta $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ entonces $\mathbf{B} = \mathbf{C}, \quad \forall \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$.

e) Si $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}, \quad \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ entonces $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

37. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calcúlese $|\mathbf{A}|$ si:

a) $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.
b) $\mathbf{A}^{\mathrm{t}}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

38. Demuéstrese que si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada $\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{t}}$ es simétrica.

39. Demuéstrese que si $\mathbf{A}$ verifica la relación $\mathbf{A}^2-\mathbf{A}-\mathbf{I}=\mathbf{0}$, entonces existe la inversa de $\mathbf{A}$. Exprésese la inversa en función de $\mathbf{A}$.

40. Demuéstrese que si $\mathbf{A}$ verifica la relación $\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}+\mathbf{I}=\mathbf{0}$, entonces $\mathbf{A}^{-1}=3\mathbf{I}-\mathbf{A}$.

41. Demuéstrese que si $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son dos matrices simétricas, $\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}$ es simétrica si, y sólo si $\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}=\mathbf{Y}\cdot\mathbf{X}$.

42. Compruébese si las cuestiones que vienen a continuación son verdaderas o falsas:

a) $((\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1})^t=(\mathbf{I}-\mathbf{A}^{\mathrm{t}})^{-1}$, $\forall\mathbf{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) $\begin{vmatrix} ax & ay \\ az & at \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix}$, $\forall a,x,y,z,t\in\mathbb{R}$.

c) Sean $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, entonces $(\mathbf{A}^{\mathrm{t}}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{t}})^{-1}=((\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})^{-1})^t$.

43. Sea $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calcúlese $|\mathbf{A}|$ si $\exists m\in\mathbb{N}$ tal que: $\mathbf{A}^m=\mathbf{0}$.

44. Sea $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Hállese $|\lambda\cdot\mathbf{A}|$ en función de $|\mathbf{A}|$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.

45. Justifica si cada una de las siguientes afirmaciones es cierta o falsa.

a) Para toda matriz cuadrada $\mathbf{A}$ que verifica $\mathbf{A}^2=\mathbf{I}$ entonces $\mathbf{A}=\mathbf{I}$ ó $\mathbf{A}=-\mathbf{I}$.

b) Para cualquier par de matrices compatibles para el producto. $\mathrm{Rango}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\mathrm{Rango}(\mathbf{A})\cdot\mathrm{Rango}(\mathbf{B})$

c) No existen dos matrices $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ no nulas compatibles para el producto tales que $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$.

46. Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) Si se intercambian dos filas en $\mathbf{A}$, el determinante de la nueva matriz es igual al de $\mathbf{A}$.

b) Si a una fila de $\mathbf{A}$ se le suma otra fila cualquiera de $\mathbf{A}$, el determinante de la nueva matriz es igual al de $\mathbf{A}$.

c) Si una columna de $\mathbf{A}$ es nula, su determinante no existe.

d) Si los elementos de $\mathbf{A}$ se multiplican por un número no nulo, el determinante de la nueva matriz es igual al de $\mathbf{A}$ multiplicado por dicho número.

e) $|x\cdot\mathbf{B}|=x^y\cdot|\mathbf{B}|$ siendo x e y números reales tales que $x\neq 0$ e $y=1$.

47. Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) El rango de una matriz rectangular de orden $m \times n$ puede llegar a valer $m + n$.

b) Si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que verifica que $\mathbf{A}^{\mathrm{t}} \cdot \mathbf{A}$ es inversible, entonces $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^{\mathrm{t}} \cdot \mathbf{A})^{-1}$ también es inversible.

c) Si $\mathbf{A^2} = \mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A}$ no es inversible.

d) Si $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son matrices inversibles, entonces $|(\mathbf{A}^{\mathrm{t}}\mathbf{B})^{-1}| = |\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1}|$.

e) Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ entonces se verifica que $\mathbf{A}^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} + |\mathbf{A}|\mathbf{I} = \mathbf{0}$.
Nota: Tener en cuenta que $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$ representa la traza de la matriz $\mathbf{A}$, esto es, las suma de los elementos de su diagonal principal.

f) Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos matrices cuadradas arbitrarias. Demostrar si cuando $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son simétricas e inversibles, entonces $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{t}}\mathbf{A}$ también es inversible y simétrica.

g) Si $\mathbf{A}$ es una matriz de orden n inversible, entonces $|\mathbf{A}^{\mathrm{t}}\mathbf{A}^{-1}| = 1$.

h) Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices de orden n y si $\mathbf{AB} + \mathbf{A}$ es inversible, entonces:

$((\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A})^{-1})^t = \left((\mathbf{B}^t + \mathbf{I})\mathbf{A}^t\right)^{-1}$.

i) Si $\mathbf{A}$ es una matriz de orden n inversible, entonces rang($\mathbf{A^3}$)=rang($\mathbf{A^2}$).

EJERCICIOS DE EXÁMENES RECIENTES

Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(Segundo llamamiento JUNIO 2017)

a) Si $\mathbf{A} \in \mathrm{M_n}$ es una matriz tal que $\mathrm{A^t(I\text{-}A^2)A} = 3\mathrm{I}$ entonces se puede garantizar que **A** es inversible.

b) No existe ningún valor de x tal que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, siendo $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & x \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 18 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$

(JULIO 2017) Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ dos matrices inversibles de orden 3. Si $|\mathbf{A}| = 2$, $|\mathbf{B}| = 1$, entonces $|(2\mathbf{B}^{\mathrm{t}}(\mathbf{A}^{-1})^3\mathbf{B}^3)^{\mathrm{t}}|$ =1/4.

(SEPTIEMBRE 2017) Sean $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ matrices de orden n tales que existen las operaciones que aparecen en la siguiente expresión: $((\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A})^{-1})^{\mathrm{t}} - \left((\mathbf{B}^{\mathrm{t}}+\mathbf{I})\mathbf{A}^{t}\right)^{-1}$. Entonces empleando las propiedades se puede probar que dicha expresión es la matriz nula.

(Primer llamamiento JUNIO 2018) Si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ es una matriz que verifica la relación:

$\mathbf{A^2} + 3\mathbf{AA^t} + 2\mathbf{I} = \mathbf{0}$, entonces se puede garantizar que $\mathbf{A^t}$ es inversible.

(Segundo llamamiento JUNIO 2018)

a) Si $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ son matrices de orden $\boldsymbol{n}$ cualesquiera inversibles y simétricas, entonces se puede probar que $(2\mathbf{A^{-1}B}) - \mathbf{B^2}$ es simétrica.

b) Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada cuyo determinante no cambia al intercambiar entre sí dos de sus filas, entonces podemos afirmar que dicha matriz no tiene rango máximo.

(JULIO 2018) Se verifica que $((2\mathbf{AB}-2\mathbf{A})^{-1})^{\mathrm{t}} = (2(\mathbf{B^t}-\mathbf{I})\mathbf{A^t})^{-1}$, siendo $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ matrices cualesquiera tales que estén bien definidas todas las operaciones.

(SEPTIEMBRE 2018) Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices cuadradas e inversibles y $\mathbf{C} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{BA})^2$ entonces $\mathbf{C}$ es inversible y $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}^{-1})^2\mathbf{A}$.

(Primer llamamiento JUNIO 2019) Sean $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, entonces se puede realizar $(\mathbf{A^{-1}}\cdot\mathbf{B})^{\mathrm{t}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{t}}$ y además:

$(\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B})^{\mathrm{t}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{t}} = \mathbf{B}.$

(Segundo llamamiento JUNIO 2019) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \\ -8 & 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, entonces se puede calcular $|A^{-1} \cdot B \cdot A^t| \cdot |A^2 \cdot B|$ y además:

$|A^{-1} \cdot B \cdot A^t| \cdot |A^2 \cdot B| = 4.$

(JULIO 2019) Dadas $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ dos matrices cuadradas e inversibles cualesquiera, $|-\mathbf{B}^t(\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1})^2| = -\frac{|\mathbf{A}|^2}{|\mathbf{B}|}$.

(Primer llamamiento JUNIO 2021) Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_3$ tal que $\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{B} - 2\mathbf{I} = \mathbf{0}$. Entonces $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son inversibles y $|\mathbf{A}| = 8|\mathbf{B}^{-1}|$.

(Segundo llamamiento JUNIO 2021) Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$ inversibles. Entonces:
$((\mathbf{B}\mathbf{A})^t)^{-1}\, \mathbf{A}^t = (\mathbf{B}^{-1})^t$.

(JULIO 2021) Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_3$ inversibles. Entonces $\left|2\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1}\right|^3 = 512\, |\mathbf{B}^t|^3 |\mathbf{A}|^{-3}$.

(SEPTIEMBRE 2021) Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n$ inversibles. Entonces:

$$\left|\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}\right| |\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{A} + \mathbf{B}|.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS RESUELTOS

31. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos matrices de órdenes tales que tengan sentido las operaciones que se realizan con las mismas. Compruébense con casos particulares las siguientes igualdades:

a) $(\mathbf{A}^{t})^{t} = \mathbf{A}$. **b)** $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{t} = \mathbf{A}^{t} + \mathbf{B}^{t}$. **c)** $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{t} = \mathbf{B}^{t}\cdot\mathbf{A}^{t}$.

Sugerencia. *Busca casos particulares primero de matrices de orden dos y comprueba que se verifican las igualdades. Posteriormente, si quieres, comprueba otros casos particulares con ejemplos de mayor orden.*

32. $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices cuadradas del mismo orden, ¿son correctas las siguientes igualdades? ¿por qué?

a) $(\mathbf{A}-\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}^2$

Solución. *Falso, ya que en general el producto de matrices no es conmutativo,* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$. *Se tiene que:*

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})^2 = (\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} - \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{B}^2 \neq \mathbf{A}^2 - \mathbf{2}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}^2$$

b) $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B})$

Solución. *Falso, ya que en general el producto de matrices no es conmutativo,* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$. *Se tiene que:*

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} - \mathbf{B}^2 \neq \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$$

33. Simplificar todo lo posible la siguiente expresión, sabiendo que las matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ son de órdenes tales que todas las operaciones que aparecen en esta expresión existen:

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}-\mathbf{CD}) + \mathbf{A}(\mathbf{C}-\mathbf{B})\mathbf{D} - \mathbf{AB}(\mathbf{C}-\mathbf{D})$$

Solución.

$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}-\mathbf{C}\cdot\mathbf{D}) + \mathbf{A}\cdot(\mathbf{C}-\mathbf{B})\cdot\mathbf{D} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}-\mathbf{D}) =$

$= \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{D} + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{D} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{D} =$

$= \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{D} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{D} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{D} = \mathbf{O}$

siendo $\mathbf{O}$ *la matriz nula.*

34. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

a) Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada tal que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. Si $\mathbf{B} = 2\mathbf{A} - \mathbf{I}$, entonces $\mathbf{B}^2 = \mathbf{I}$.

Solución. *Cierta.*

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = (2\mathbf{A}-\mathbf{I})\cdot(2\mathbf{A}-\mathbf{I}) = 4\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} - 2\mathbf{A} + \mathbf{I} \underset{\uparrow}{=} 4\mathbf{A} - 4\mathbf{A} + \mathbf{I} = \mathbf{O} + \mathbf{I} = \mathbf{I}$$

$\boxed{\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}}$

b) Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz cuadrada tal que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ entonces $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Solución. *Falso.*

Un contraejemplo es $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *ya que* $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ *y sin embargo* $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$.

c) Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada con $|\mathbf{A}| \neq 0$ y tal que $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ entonces $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Solución. *Cierto.*

Si $|\mathbf{A}| \neq 0 \Rightarrow \mathbf{A}$ *es inversible, es decir, existe* $\mathbf{A}^{-1}$, *tal que* $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$. *Entonces:*

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A} \underset{\uparrow}{\Rightarrow} \mathbf{A}\cdot\underbrace{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}}_{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}} = \underbrace{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}}_{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{I}} \Rightarrow \mathbf{A}\cdot\mathbf{I} = \mathbf{I}$$

Multiplicamos por la inversa en los dos lados de la igualdad

35. Demuéstrese si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz antisimétrica, esto es, $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^t$. Si n es un número impar, entonces $|\mathbf{A}| = 0$.

Solución. ***Verdadera.***

Si $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^t$, *tomamos determinantes*

$\boxed{|\mathbf{A}^t| = |\mathbf{A}|}$

$|\mathbf{A}| = |-\mathbf{A}^t| = |(-1)\cdot\mathbf{A}^t| = (-1)^n\cdot|\mathbf{A}^t| \underset{\uparrow}{=} (-1)\cdot|\mathbf{A}^t| = -|\mathbf{A}^t| \overset{\downarrow}{=} -|\mathbf{A}|$. *Por lo tanto:*

n es un número impar

$|\mathbf{A}| = -|\mathbf{A}| \Rightarrow 2|\mathbf{A}| = 0 \Rightarrow |\mathbf{A}| = 0.$

b) Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz antisimétrica ($\mathbf{A} = -\mathbf{A}^t$). Si n es un número par, entonces $|\mathbf{A}| = 0$.

Solución. ***Falso.***

Un contraejemplo es $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ *que tiene de determinante* $|\mathbf{A}| = 1 \neq 0$.

c) Si $\mathbf{A}$ es una matriz unitaria (esto es, $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^t = \mathbf{A}^t\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}$) entonces $\mathbf{A}$ es inversible.

Solución. ***Cierto.*** *Inmediato por la definición de matriz inversa* $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^t$.

d) Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\mathbf{A}^{10} = \mathbf{I}$ entonces $\mathbf{A}$ es inversible.

Solución*. *Cierto. *Una forma (por definición de inversa):*

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^9 = \mathbf{I}\\ \mathbf{A}^9\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^9$$

Otra forma: Aplicando determinante…

e) Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\mathbf{A}^6 = \mathbf{I}$ entonces $|\mathbf{A}| = 1$.

Solución*. *Falso.

Aplicando determinante a la igualdad $\mathbf{A}^6 = \mathbf{I}$, *nos queda:*

$|\mathbf{A}^6| = |\mathbf{I}| \Rightarrow (|\mathbf{A}|)^6 = 1 \Rightarrow |\mathbf{A}| = \pm 1$

36. Demuéstrese si son verdaderas o falsas las siguientes cuestiones:

a) $\text{rango}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}) = \text{orden de } \mathbf{A}, \quad \forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.

Solución*. *Cierto.

Si $\mathbf{A}$ *es inversible entonces:*

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}_n \Rightarrow \text{rango}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}) = \text{rango } \mathbf{I}_n = n = \text{orden de } \mathbf{A}$

b) $\text{rango}(\mathbf{A}) = \text{rango}(\mathbf{A}^t), \quad \forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solución*. *Cierto. $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^t|$

c) $\text{rango}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \text{rango}(\mathbf{A}) + \text{rango}(\mathbf{B}), \quad \forall \mathbf{A} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}),\ \mathbf{B} \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$.

Solución*. *Falso.

Supongamos el caso particular $n = 3, m = 2, p = 1$ *y que no sea ninguna la matriz nula:*

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{rango}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \leq \min(3,1) = 1 \Rightarrow \text{rango}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = 1$

$\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{rango}(\mathbf{A}) \leq \min(3,2) = 2 \Rightarrow \text{rango}(\mathbf{A}) = 1 \text{ ó } \text{rango}(\mathbf{A}) = 2$

$\mathbf{B} \in \mathcal{M}_{2\times 1}(\mathbb{R}) \Rightarrow \text{rango}(\mathbf{B}) \leq \min(2,1) = 1 \Rightarrow \text{rango}(\mathbf{B}) = 1$

Ya vemos que el $\text{rango}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \neq \text{rango}(\mathbf{A}) + \text{rango}(\mathbf{B})$

También los puedes hacer utilizando la matriz identidad de orden dos como contraejemplo.

d) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$, para cierta $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ entonces $\mathbf{B} = \mathbf{C}, \quad \forall \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$.

Solución*. *Falso. *Sin embargo, si* $\mathbf{A}$ *es regular sí sería cierto (bastaría con multiplicar por la izquierda por la inversa de* $\mathbf{A}$*)*

Contraejemplo: Utiliza las siguientes matrices y comprueba que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$, *pero* $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$*:*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

e) Si $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ entonces $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Solución*. *Falso.

Por ejemplo $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *verifica que* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$ *y* $\mathbf{A}$ *no es la matriz identidad.*

37. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calcúlese $|\mathbf{A}|$ si:

a) $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

***Solución*.**

Aplicando determinantes a la igualdad

$$|\mathbf{A}^2| = |\mathbf{A}| \Rightarrow (|\mathbf{A}|)^2 = |\mathbf{A}| \Rightarrow (|\mathbf{A}|)^2 - |\mathbf{A}| = 0 \Rightarrow |\mathbf{A}| \cdot (|\mathbf{A}| - 1) = 0$$

Entonces $|\mathbf{A}| = 0$ ó $|\mathbf{A}| = 1$.

b) $\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$.

***Solución*.**

Aplicando determinantes a la igualdad

$$|\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}| = |\mathbf{I}| \Rightarrow |\mathbf{A}^t| \cdot |\mathbf{A}| \underset{\uparrow\\ \boxed{|\mathbf{A}^t| = |\mathbf{A}|}}{=} 1 \Rightarrow |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{A}| = 1 \Rightarrow (|\mathbf{A}|)^2 = 1 \Rightarrow |\mathbf{A}| = \pm 1$$

38. Demuéstrese que si $\mathbf{A}$ es una matriz cuadrada $\mathbf{A} + \mathbf{A}^t$ es simétrica.

***Solución*.**

$$(\mathbf{A} + \mathbf{A}^t)^t = \mathbf{A}^t + (\mathbf{A}^t)^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^t.$$

39. Demuéstrese que si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ verifica la relación $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - \mathbf{I} = \mathbf{O}$ (siendo $\mathbf{I}$ la matriz identidad y $\mathbf{O}$ la matriz nula), entonces existe la inversa de $\mathbf{A}$. Exprésese la inversa en función de $\mathbf{A}$.

***Solución*.**

Sabemos que la inversa de una matriz es la que cumple $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$.

$\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - \mathbf{I} = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I}$. *Entonces sacando factor común* $\mathbf{A}$ *por la derecha y también por la izquierda nos queda*

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I} \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{I}) = \mathbf{I} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A} - \mathbf{I})$$

40. Demuéstrese que si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ verifica la relación $\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + \mathbf{I} = \mathbf{O}$, entonces $\mathbf{A}^{-1} = 3\mathbf{I} - \mathbf{A}$.

***Sugerencia*.** *Inténtalo hacer fijándote en el ejercicio anterior.*

41. Demuéstrese que si $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ son dos matrices simétricas, $\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}$ es simétrica si, y sólo si $\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}=\mathbf{Y}\cdot\mathbf{X}$.

Solución.

$$(\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y})^t=\mathbf{Y}^t\cdot\mathbf{X}^t\underset{\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{Y}^t=\mathbf{Y}\\ \mathbf{X}^t=\mathbf{X}\end{array}}}{=}\mathbf{Y}\cdot\mathbf{X}\overset{\boxed{Y\cdot X=X\cdot Y}}{=}\mathbf{X}\cdot\mathbf{Y}$$

42. Compruébese si las cuestiones que vienen a continuación son verdaderas o falsas:

a) $((\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1})^{\mathrm{t}}=(\mathbf{I}-\mathbf{A}^{\mathrm{t}})^{-1}$, $\forall\mathbf{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Solución. Falsa en general. Necesitamos que las matrices que aparecen en la igualdad sean inversibles.

Por ejemplo, si $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ la matriz $\mathbf{I}-\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ no es inversible y entonces es falsa ya que ni siquiera existe la inversa de $\mathbf{I}-\mathbf{A}$.

Verdadera, siempre que las matrices sean inversibles.

Aquí utilizaremos las propiedades $(\mathbf{B}^{-1})^t=(\mathbf{B}^t)^{-1}$, $(\mathbf{A}-\mathbf{B})^t=\mathbf{A}^t-\mathbf{B}^t$ y que $\mathbf{I}^t=\mathbf{I}$:

$$((\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1})^t=((\mathbf{I}-\mathbf{A})^t)^{-1}=(\mathbf{I}^t-\mathbf{A}^t)^{-1}=(\mathbf{I}-\mathbf{A}^t)^{-1}.$$

b) $\begin{vmatrix}ax&ay\\az&at\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}x&y\\z&t\end{vmatrix}$, $\forall a,x,y,z,t\in\mathbb{R}$.

Solución. Falso. *En un determinante las constantes salen fuera del determinante por cada fila o columna*

$$\begin{vmatrix}ax&ay\\az&at\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}x&y\\az&at\end{vmatrix}=a\cdot a\begin{vmatrix}x&y\\z&t\end{vmatrix}=a^2\begin{vmatrix}x&y\\z&t\end{vmatrix}$$

c) Sean $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, entonces $(\mathbf{A}^{\mathrm{t}}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{t}})^{-1}=((\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})^{-1})^t$.

Solución. Falsa en general. Necesitamos que las matrices que aparecen en la igualdad sean inversibles.

Por ejemplo, si $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ y $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}$ que no es inversible.

Verdadera siempre que sean matrices inversibles.

Aquí utilizaremos las propiedades $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^t=\mathbf{B}^t\cdot\mathbf{A}^t$, $(\mathbf{C}^t)^{-1}=(\mathbf{C}^{-1})^t$:

$$(\mathbf{A}^t\cdot\mathbf{B}^t)^{-1}=((\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})^t)^{-1}=((\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})^{-1})^t$$

43. Sea $\mathbf{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calcúlese $|\mathbf{A}|$ si: $\exists m\in\mathbb{N}$ tal que: $\mathbf{A}^{\boldsymbol{m}}=\mathbf{O}$.

Solución. *Aplicando determinantes nos queda* $|\mathbf{A}^m|=|\mathbf{O}|=0\Rightarrow(|\mathbf{A}|)^m=0\Rightarrow|\mathbf{A}|=0$.

44. Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Hállese $|\lambda \cdot \mathbf{A}|$ en función de $|\mathbf{A}|$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Solución.

$$|\lambda \cdot \mathbf{A}| = \lambda^n \cdot |\mathbf{A}|$$

45. Justifica si cada una de las siguientes afirmaciones es cierta o falsa.

a) Para toda matriz cuadrada $\mathbf{A}$ que verifica $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ entonces $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ ó $\mathbf{A} = -\mathbf{I}$.

Solución. Falso.

Un contraejemplo es $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *ya que* $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ *y sin embargo* $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$ *y* $\mathbf{A} \neq -\mathbf{I}$

b) Para cualquier par de matrices compatibles para el producto. $\text{Rango}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{Rango}(\mathbf{A}) \cdot \text{Rango}(\mathbf{B})$

Solución. Falso.

Por ejemplo, si tomamos $\mathbf{A} = \mathbf{I}_2$ *y* $\mathbf{B}$ *cualquier matriz de orden dos con rango máximo,* $\text{Rango}(\mathbf{I} \cdot \mathbf{B}) = \text{Rango}(\mathbf{B}) = 2 \neq \text{Rango}(\mathbf{I}_2) \cdot \text{Rango}(\mathbf{B}) = 2 \cdot 2 = 4$

c) No existen dos matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ no nulas compatibles para el producto tales que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{O}$.

Solución. Falso.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

46. Sea $\mathbf{A}$ una matriz cuadrada. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

a) Si se intercambian dos filas en $\mathbf{A}$, el determinante de la nueva matriz es igual al de $\mathbf{A}$.

Falso, *el determinante cambia de signo.*

b) Si a una fila de $\mathbf{A}$ se le suma otra fila cualquiera de $\mathbf{A}$, el determinante de la nueva matriz es igual al de $\mathbf{A}$.

Verdadero.

c) Si una columna de $\mathbf{A}$ es nula, su determinante no existe.

Falso. *Su determinante si existe y su valor es cero.*

d) Si los elementos de $\mathbf{A}$ se multiplican por un número no nulo, el determinante de la nueva matriz es igual al de $\mathbf{A}$ multiplicado por dicho número.

Falso. *La propiedad es cierta cuando multiplicamos una fila o una columna de la matriz por un número no nulo. Si se multiplican todos los elementos de una matriz cuadrada* $\mathbf{A}$*, el determinante de la nueva matriz es igual al de* $\mathbf{A}$ *multiplicado por dicho número elevado al orden de la matriz.*

e) $|x \cdot \mathbf{B}| = x^y |\mathbf{B}|$ siendo x e y números reales tales que $x \neq 0$ e $y = 1$.

Falso. *El valor de* y *coincidirá con el orden de* $\mathbf{B}$.

47. Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) El rango de una matriz rectangular de orden $m \times n$ puede llegar a valer $m+n$.

Falso. *Si tenemos una matriz* $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *rectangular, sabemos que:*

$\operatorname{rango}(\mathbf{A}) \leq \min(m,n) \neq m+n$.

b) Si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que verifica que $\mathbf{A}^{\mathrm{t}} \cdot \mathbf{A}$ es inversible, entonces $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^{\mathrm{t}} \cdot \mathbf{A})^{-1}$ también es inversible.

Verdadero. *Podemos verlo utilizando determinantes:*

Sabemos que $\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}$ *es inversible, es decir,* $|\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}| \neq 0$ *:*

$$0 \neq |\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}| = |\mathbf{A}^t| \cdot |\mathbf{A}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{A}| = (|\mathbf{A}|)^2$$

De donde podemos deducir que $|\mathbf{A}| \neq 0$.

Queremos ver que $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^{\mathrm{t}} \cdot \mathbf{A})^{-1}$ *es inversible, es decir,* $|\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^{\mathrm{t}} \cdot \mathbf{A})^{-1}| \neq 0$*:*

$$|\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^{\mathrm{t}} \cdot \mathbf{A})^{-1}| = |\mathbf{A}| \cdot |(\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A})^{-1}| = |\mathbf{A}| \cdot \frac{1}{|\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A}|} = |\mathbf{A}| \cdot \frac{1}{|\mathbf{A}^t| \cdot |\mathbf{A}|}$$
$$= |\mathbf{A}| \cdot \frac{1}{|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{A}|}$$

Como $|\mathbf{A}| \neq 0$ *tenemos que*

$$|\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A})^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \neq 0.$$

c) Si $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$, entonces $\mathbf{A}$ no es inversible.

Falso. *La matriz identidad es una matriz inversible que verifica* $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. *Aunque sería la única matriz inversible que lo verifica, como demostramos a continuación:* $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}^{-1} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{I}$.

d) Si $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ son matrices inversibles, entonces $|(\mathbf{A}^{\mathrm{t}}\mathbf{B})^{-1}| = |\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1}|$.

Verdadero.

$$|(\mathbf{A}^t\mathbf{B})^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}^t\mathbf{B}|} = \frac{1}{|\mathbf{A}^t| \cdot |\mathbf{B}|} = \frac{1}{|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \frac{1}{|\mathbf{B}|} = |\mathbf{A}^{-1}| \cdot |\mathbf{B}^{-1}|$$
$$= |\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1}|$$

e) Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ entonces se verifica que $\mathbf{A}^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} + |\mathbf{A}|\mathbf{I} = \mathbf{O}$.
Nota: Tener en cuenta que $\operatorname{tr}(\mathbf{A})$ representa la traza de la matriz $\mathbf{A}$, esto es, las suma de los elementos de su diagonal principal.

Verdadero.

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+dc & bc+d^2 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{tr}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a^2+da & ab+bd \\ ac+dc & ad+d^2 \end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| \cdot \mathbf{I} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} + |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

f) Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos matrices cuadradas arbitrarias. Demostrar si cuando $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son simétricas e inversibles, entonces $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{t}\mathbf{A}$ también es inversible y simétrica.

Falso.

$$|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{t}\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^{-1}| \cdot |\mathbf{B}^{t}| \cdot |\mathbf{A}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot |\mathbf{B}| \cdot |\mathbf{A}|$$

Como $\mathbf{A}$ es inversible se tiene que $|\mathbf{A}| \neq 0$, entonces podemos simplificar y nos queda:

$$|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{t}\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| \neq 0$$

Luego $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{t}\mathbf{A}$ es inversible.

Además, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{t}\mathbf{A}$ es simétrica:

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{t}\mathbf{A})^{t} = \mathbf{A}^{t} \cdot (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{t})^{t} = \mathbf{A}^{t} \cdot (\mathbf{B}^{t})^{t} \cdot (\mathbf{A}^{-1})^{t} = \mathbf{A}^{t} \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A}^{t})^{-1},$$

Pero como $\mathbf{A}^{t} = \mathbf{A}$ y $\mathbf{B}^{t} = \mathbf{B}$ se tiene que

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{t}\mathbf{A})^{t} = \mathbf{A}^{t} \cdot \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A}^{t})^{-1} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^{\mathrm{t}} \cdot \mathbf{A}^{-1} \neq \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{t}\mathbf{A}$$

Otra opción, un contrajemplo:

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{t}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1/3 & 2 \end{pmatrix}$ no es simétrica

g) Si $\mathbf{A}$ es una matriz de orden n inversible, entonces $|\mathbf{A}^{\mathrm{t}}\mathbf{A}^{-1}| = 1$.

Verdadero. $\mathbf{A}$ *es inversible entonces* $|\mathbf{A}| \neq 0$, *luego:*

$$|\mathbf{A}^{t}\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}^{t}| \cdot |\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}| \cdot \frac{1}{|\mathbf{A}|} = 1$$

h) Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices de orden n y si $\mathbf{AB} + \mathbf{A}$ es inversible, entonces $((\mathbf{AB} + \mathbf{A})^{-1})^{t} = \left((\mathbf{B}^{t} + \mathbf{I})\mathbf{A}^{t}\right)^{-1}$.

Verdadero.

$$\begin{aligned}((\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A})^{-1})^{t} &= ((\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A})^{t})^{-1} = ((\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{t} + \mathbf{A}^{t})^{-1} = (\mathbf{B}^{t} \cdot \mathbf{A}^{t} + \mathbf{A}^{t})^{-1} \\ &= \left((\mathbf{B}^{t} + \mathbf{I})\mathbf{A}^{t}\right)^{-1}\end{aligned}$$

i) Si $\mathbf{A}$ es una matriz de orden n inversible, entonces rang($\mathbf{A}^{3}$)=rang($\mathbf{A}^{2}$).

Verdadero.

Si $\mathbf{A}$ *es inversible,* $|\mathbf{A}| \neq 0$. *Se tiene entonces que:* $|\mathbf{A}^{3}| = (|\mathbf{A}|)^{3} \neq 0 \Rightarrow$ $\mathrm{rang}(\mathbf{A}^{3}) = n$ *y además* $|\mathbf{A}^{2}| = (|\mathbf{A}|)^{2} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rang}(\mathbf{A}^{2}) = n$.

EJERCICIOS EXAMEN RESUELTOS

(Segundo llamamiento JUNIO 2017)

Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
a) Si $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_n$ es una matriz tal que $\mathbf{A}^{\mathrm{t}}(\mathbf{I}-\mathbf{A}^2)\mathbf{A} = 3\mathbf{I}$ entonces se puede garantizar que $\mathbf{A}$ es inversible.

Aplicando determinantes a la igualdad matricial tenemos:

$$|\mathbf{A}^{\mathrm{t}} \cdot (\mathbf{I}-\mathbf{A}^2) \cdot \mathbf{A}| = |3 \cdot \mathbf{I}| \to |\mathbf{A}^{\mathrm{t}}| \cdot |(\mathbf{I}-\mathbf{A}^2)| \cdot |\mathbf{A}| = 3^n|\mathbf{I}|$$

$$|\mathbf{A}| \cdot |(\mathbf{I}-\mathbf{A}^2)| \cdot |\mathbf{A}| = 3^n \to |\mathbf{A}| \cdot |(\mathbf{I}-\mathbf{A}^2)| \cdot |\mathbf{A}| \neq 0 \Rightarrow |\mathbf{A}| \neq 0$$

¿Sabrías identificar en cada paso qué propiedades se han ido utilizando?

(SEPTIEMBRE 2017)

Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

Sean $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ matrices de orden n tales que existen las operaciones que aparecen en la siguiente expresión: $((\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A})^{-1})^{\mathrm{t}} - \left((\mathbf{B}^{\mathrm{t}}+\mathbf{I})\mathbf{A}^{\mathrm{t}}\right)^{-1}$. Entonces empleando las propiedades se puede probar que dicha expresión es la matriz nula.

$$((\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A})^{-1})^{\mathrm{t}} - \left((\mathbf{B}^{\mathrm{t}}+\mathbf{I})\mathbf{A}^{\mathrm{t}}\right)^{-1} \overset{¿?}{\triangleq} \mathbf{0} \in \mathcal{M}_n$$

O lo que es lo mismo:

$$((\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A})^{-1})^{\mathrm{t}} \overset{¿?}{\triangleq} \left((\mathbf{B}^{\mathrm{t}}+\mathbf{I})\mathbf{A}^{\mathrm{t}}\right)^{-1}$$

$$((\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A})^{-1})^{\mathrm{t}} = ((\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A})^{\mathrm{t}})^{-1} = ((\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^{\mathrm{t}}+\mathbf{A}^{\mathrm{t}})^{-1}$$

$$= (\mathbf{B}^{\mathrm{t}}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{t}}+\mathbf{A}^{\mathrm{t}})^{-1} = \left((\mathbf{B}^{\mathrm{t}}+\mathbf{I})\mathbf{A}^{\mathrm{t}}\right)^{-1}$$

¿Sabrías identificar en cada paso qué propiedades se han ido utilizando?

(SEPTIEMBRE 2018)

Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

Si $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices cuadradas e inversibles y $\mathbf{C} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A})^2$ entonces $\mathbf{C}$ es inversible y $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}^{-1})^2\mathbf{A}$.

Teniendo en cuenta que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices inversibles y aplicando determinantes a $\mathbf{C}$ tenemos:

$$|\mathbf{C}| = |(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A})^2| \underset{\boxed{\mathbf{D}^2 = \mathbf{D}\cdot\mathbf{D}}}{=} |(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A})\cdot(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A})| \underset{\boxed{(\mathbf{E}\cdot\mathbf{F})\cdot(\mathbf{G}\cdot\mathbf{H}) = \mathbf{E}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}\cdot\mathbf{H}}}{=} |\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}|$$

$$\underset{\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}}}{=} |\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{I}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}| \underset{\boxed{\mathbf{B}\cdot\mathbf{I} = \mathbf{B}}}{=} |\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}| = |\mathbf{A}^{-1}|\cdot|\mathbf{B}|\cdot|\mathbf{B}|\cdot|\mathbf{A}|$$

$$\underset{\boxed{|\mathbf{A}^{-1}| = 1/|\mathbf{A}|}}{=} \frac{1}{|\mathbf{A}|}\cdot|\mathbf{B}|\cdot|\mathbf{B}|\cdot|\mathbf{A}| \underset{\boxed{|\mathbf{E}|\cdot|\mathbf{F}| = |\mathbf{F}|\cdot|\mathbf{E}|}}{=} \frac{1}{|\mathbf{A}|}\cdot|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|\cdot|\mathbf{B}| \underset{\boxed{|\mathbf{A}| \neq 0, |\mathbf{B}| \neq 0}}{=} (|\mathbf{B}|)^2 \neq \mathbf{0}$$

Con lo que tenemos que $\mathbf{C}$ es inversible.

Demostremos ahora que: $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}^{-1})^2\mathbf{A}$

Aplicamos a $\mathbf{C} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A})^2$ directamente la inversa y nos queda:

$$\mathbf{C}^{-1} = ((\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A})^2)^{-1} \underset{\boxed{\mathbf{D}^2 = \mathbf{D}\cdot\mathbf{D}}}{=} \left((\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A})\cdot(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A})\right)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}\mathbf{A})^{-1} =$$

$$\underset{\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}}}{=} (A^{-1}B\cdot I\cdot B\cdot A)^{-1} \underset{\boxed{\mathbf{B}\cdot\mathbf{I} = \mathbf{B}}}{=} (A^{-1}B^2A)^{-1} = \left(A^{-1}\cdot(B^2A)\right)^{-1} \underset{\boxed{(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})^{-1} = \mathbf{D}^{-1}\cdot\mathbf{E}^{-1}}}{=} (B^2A)^{-1}\cdot(A^{-1})^{-1} =$$

$$\underset{\boxed{(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})^{-1} = \mathbf{D}^{-1}\cdot\mathbf{E}^{-1}}}{=} A^{-1}(B^2)^{-1}\cdot(A^{-1})^{-1} \underset{\boxed{(\mathbf{B}^2)^{-1} = (\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{B}^{-1}}}{=} A^{-1}\cdot B^{-1}\cdot B^{-1}\cdot A = A^{-1}(B^{-1})^2A$$

Entonces $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{B}^{-1})^2\mathbf{A}$. Por tanto, la afirmación es **verdadera**.

(Segundo llamamiento JUNIO 2019) Razonar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

Dadas las matrices $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&1&0\\4&0&3&0\\-8&0&-6&2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}5&1&3&0\\3&1&2&0\\-1&0&0&1\\1&2&2&0\end{pmatrix}$, entonces se puede calcular $|\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{t}}|\cdot|\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{B}|$ y además: $|\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{t}}|\cdot|\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{B}|=4$.

¿Sabrías obtener que $|\mathbf{A}|=\cdots=2\neq 0, |\mathbf{B}|=\cdots=-1\neq 0$? ¿qué método debes utilizar para ello?

¿Existe la inversa de $\mathbf{A}$?

A continuación vamos a ver si es cierta la afirmación (**debes completar en cada paso las propiedades que se han utilizado**):

$$|\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}^{\mathrm{t}}|\cdot|\mathbf{A}^2\cdot\mathbf{B}|=|\mathbf{A}^{-1}|\cdot|\mathbf{B}|\cdot|\mathbf{A}^{\mathrm{t}}|\cdot|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|$$

$$=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\cdot|\mathbf{B}|\cdot|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|=|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|\cdot|\mathbf{B}|=\cdots=4$$

(Primer llamamiento JUNIO 2021) Sean $\mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathcal{M}_3$ tal que $\mathbf{A}^{\mathrm{t}}\cdot\mathbf{B}-2\mathbf{I}=\mathbf{0}$. Entonces $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son inversibles y $|\mathbf{A}|=8|\mathbf{B}^{-1}|$.

Despejando tenemos: $\mathbf{A}^{\mathrm{t}}\cdot\mathbf{B}=2\mathbf{I}$

Aplicamos determinantes a la igualdad matricial:

$$|\mathbf{A}^{\mathrm{t}}\cdot\mathbf{B}|=|2\mathbf{I}|\rightarrow|\mathbf{A}^{\mathrm{t}}|\cdot|\mathbf{B}|=2^3\rightarrow|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|=8$$

¿Qué propiedades hemos aplicado?

Una vez hemos llegado a:

$$|\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|=8$$

¿Sabrías demostrar que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son inversibles?

¿Y que $|\mathbf{A}|=8|\mathbf{B}^{-1}|$?