EXÁMENES DE CONVOCATORIA RESUELTOS CON WOLFRAM ALPHA. MATEMÁTICAS II. OPTIMIZACIÓN.

GRADOS EN ECONOMÍA Y EN ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

Domingo Israel Cruz Báez

Departamento de Economía Aplicada
y Métodos Cuantitativos

Universidad de La Laguna

Actualizado a 9/02/2024

Contenido

PRÓLOGO

En este libro se han recopilado las soluciones de las preguntas principales de los exámenes del módulo de optimización en Matemáticas II, asignatura obligatoria de primer curso de los Grados en Economía y en Administración y Dirección de Empresas. Es recomendable que el alumnado intente plantear estos problemas antes de consultar el solucionario. De esa forma el aprendizaje será más efectivo. Se han resuelto los problemas ya planteados utilizando el Wolfram Alpha, para que así dispongan de las soluciones correspondientes y las puedan contrastar cuando realicen el procedimiento analítico completo.

Primer llamamiento junio 2016

3. Una compañía petrolífera tiene que determinar cuántos barriles de petróleo va a extraer de los pozos que opera en los dos próximos años para maximizar los beneficios. Se sabe que si extrae x_1 millones de barriles durante el primer año, puede vender cada barril por $(40 - x_1)$ dólares siendo el coste total de extracción de x_1^2 millones de dólares. Durante el segundo año, si extrae x_2 millones de barriles el precio de venta por barril es de $(30 - x_2)$ dólares y el coste total de extracción sería $2x_2^2$ millones de dólares. La empresa sólo tiene permiso para extraer un máximo de 10 millones de barriles cada dos años.

a) Plantear un problema de optimización que permita decidir la política óptima de extracción en los próximos dos años teniendo en cuenta las limitaciones descritas.

$$\max B(x_1, x_2) = x_1(40 - x_1) - x_1^2 + x_2(30 - x_2) - 2x_2^2 = 40x_1 - 2x_1^2 + 30x_2 - 3x_2^2$$

$$\text{sujeto a} \quad \left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Sin resolver el problema planteado, ¿se puede garantizar la existencia de máximo global?

Sabiendo que se debe extraer petróleo los dos años, es decir el óptimo no satura las restricciones de no negatividad:

c) Escribe las condiciones de Kuhn-Tucker.

d) ¿Cuál es el máximo beneficio que puede lograr la empresa? ¿Cómo debe realizar la explotación de sus pozos en los próximos dos años para conseguirlo?

Input interpretation:

maximize	function	$40x - 2x^2 + 30y - 3y^2$
	domain	$x + y \leq 10 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$

Open code

$e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots$ is the logical AND function

Global maximum:

$$\max\{40x - 2x^2 + 30y - 3y^2,\ x + y \leq 10 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\} = 245 \text{ at } (x, y) = (7, 3)$$

e) Debido a una política de contención de costes, el gerente desea limitar a un máximo de 70 millones de dólares el gasto realizado en tareas de extracción en el período considerado (dos años). **Sin resolver el nuevo problema**, razona si debería modificar su política de extracción.

Segundo llamamiento junio 2016

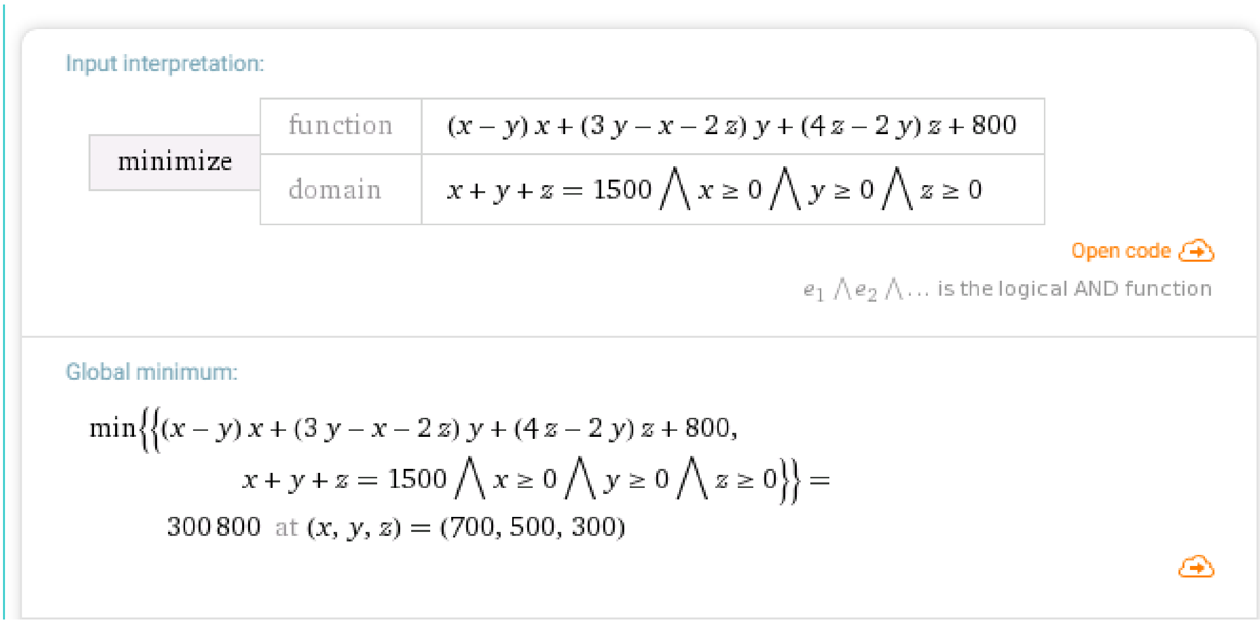
3. Una empresa exporta un producto a tres países en cantidades x, y, z, respectivamente. La empresa tiene unos costes variables positivos de transporte de $\boldsymbol{x-y}$ u.m. por cada unidad del producto enviada al primer país, $\boldsymbol{3y-x-2z}$ u.m. por cada unidad enviada al segundo país y finalmente $\boldsymbol{4z-2y}$ u.m. por cada unidad transportada hasta el tercero. Además, la empresa ha calculado que sus costes fijos son de 800 u.m. Se sabe que en total exportará 1500 unidades. Se pide:

a) Formular el modelo matemático que permite obtener las cantidades que se exportarán a cada país si el objetivo de la empresa es minimizar sus costes totales de transporte. Escribir las condiciones de Kuhn-Tucker para dicho problema.

Minimizar $\mathbf{CT}=\mathbf{CV}+\mathbf{CF}=(\boldsymbol{x-y})\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{3y-x-2z})\boldsymbol{y}+(\boldsymbol{4z-2y})\boldsymbol{z}+\mathbf{800}$

sujeto a $\boldsymbol{x+y+z}=\mathbf{1500},\boldsymbol{x}\geq\mathbf{0},\boldsymbol{y}\geq\mathbf{0},\boldsymbol{z}\geq\mathbf{0}$

b) Obtener la estrategia de exportación óptima que minimiza los costes totales de transporte sabiendo que la empresa exportará algo a cada uno de los tres países (no utilizar el método de sustitución)



c) Razonar, sin resolver, cuál sería el efecto sobre el coste mínimo global que tendría una disminución de 3 unidades en la cantidad total exportada.

Julio 2016

3. Una empresa produce al año $Q(x,y) = xy$ miles de unidades de un bien, empleando las cantidades de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ miles de unidades de los factores productivos capital y trabajo respectivamente. Para cumplir con los compromisos adquiridos con sus clientes el próximo año, la producción tiene que ser de **3** mil unidades ($\boldsymbol{Q = 3}$).

La empresa se plantea para el próximo año minimizar los costes de producción, siendo, 8 miles de € los costes de emplear mil unidades del factor capital, y 6 miles de € los costes de emplear mil unidades del factor trabajo.

La empresa está limitada en los factores productivos que puede emplear, estando dicha limitación representada por la condición $\boldsymbol{x^2 + y^2 \leq 10}$.

Obsérvese que en las restricciones $\boldsymbol{x} \geq 0$ e $\boldsymbol{y} \geq 0$, ni $\boldsymbol{x}$ ni $\boldsymbol{y}$ pueden anularse para que la producción pueda ser de **3** mil unidades.

a) Plantea un modelo matemático cuya solución permita a la empresa conocer cómo lograr su objetivo.

Minimizar $\boldsymbol{C(x,y) = 8x + 6y}$

sujeto a:

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x \cdot y = 3} \\ \boldsymbol{x^2 + y^2 \leq 10} \\ \boldsymbol{x \geq 0, y \geq 0} \end{array}\right\}$$

b) Escribe las condiciones de Kuhn-Tucker para máximo y mínimo.

c) Sabiendo que la región factible es cerrada, acotada y no vacía, ¿qué puedes decir sobre los óptimos globales?

d) Indica el carácter local y/o global de los candidatos a máximo y mínimo obtenidos. ¿Qué debería hacer la empresa para lograr su objetivo? ¿A cuánto ascendería el coste óptimo?

Input interpretation:

extrema	function	$8x + 6y$
	domain	$xy = 3 \bigwedge x^2 + y^2 \leq 10 \bigwedge x \geq 0 \bigwedge y \geq 0$

Open code

$e_1 \bigwedge e_2 \bigwedge \ldots$ is the logical AND function

Global maximum:

$$\max\{\{8x + 6y,\, xy = 3 \bigwedge x^2 + y^2 \leq 10 \bigwedge x \geq 0 \bigwedge y \geq 0\}\} = 30 \text{ at } (x, y) = (3, 1)$$

Global minimum:

Approximate form

$$\min\{\{8x + 6y,\, xy = 3 \bigwedge x^2 + y^2 \leq 10 \bigwedge x \geq 0 \bigwedge y \geq 0\}\} = 24 \text{ at } (x, y) = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$$

e) Justifica también el óptimo mediante Hessiano Orlado.

f) Obtener el máximo coste global por otro método.

g) Sin resolver el nuevo problema, ¿cómo quedaría aproximadamente el coste mínimo si se incrementase 500 unidades la producción?

Septiembre 2016

3. Supongamos un monopolista que vende el único producto que fabrica en dos mercados (1 y 2). Y supongamos que no ser posible transferir el producto entre ambos mercados, por lo que en principio dicho monopolista puede fijar un precio diferente en cada uno de ellos. Supongamos que los precios y las cantidades demandadas en cada mercado son p_1 y q_1, p_2 y q_2 respectivamente los cuales se relacionan siguiendo las expresiones

$$p_1 = 100 - q_1; p_1 = 80 - q_2$$

Y la función de costes es $C = 6(q_1 + q_2)$. Se sabe que $q_1 > 0$ y $q_2 > 0$.

a) Plantea el problema optimización que nos permita saber cuánto debe vender el monopolista en cada mercado para maximizar su beneficio.

Maximizar $\boldsymbol{B(q_1, q_2) = (100 - q_1)q_1 + (80 - q_2)q_2 - 6(q_1 + q_2)}$

Input interpretation:

maximize	$(100 - x)\,x + (80 - y)\,y - 6\,(x + y)$

Open code

Global maximum:

$\max\{(100 - x)\,x + (80 - y)\,y - 6\,(x + y)\} = 3578$ at $(x, y) = (47, 37)$

b) Si el mercado 1 absorbe a lo sumo 20 u de producto y el mercado 2 necesitara abastecerse como mínimo de 50 u., plantear el nuevo problema y resolverlo completamente. ¿Cuánto debe vender ahora, y a qué precios, el monopolista para seguir maximizando su beneficio? ¿Cómo ha afectado esta nueva circunstancia a su beneficio máximo?

Maximizar $\boldsymbol{B(q_1, q_2) = (100 - q_1)q_1 + (80 - q_2)q_2 - 6(q_1 + q_2)}$

sujeto a $\boldsymbol{\begin{matrix} q_1 \leq 20 \\ q_2 \geq 50 \end{matrix}}$

Del enunciado se sabe también que $\boldsymbol{q_1 > 0}$**.**

Input interpretation:

maximize	function	$(100 - x)\,x + (80 - y)\,y - 6\,(x + y)$
	domain	$x \leq 20 \wedge y \geq 50$

Open code

$e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots$ is the logical AND function

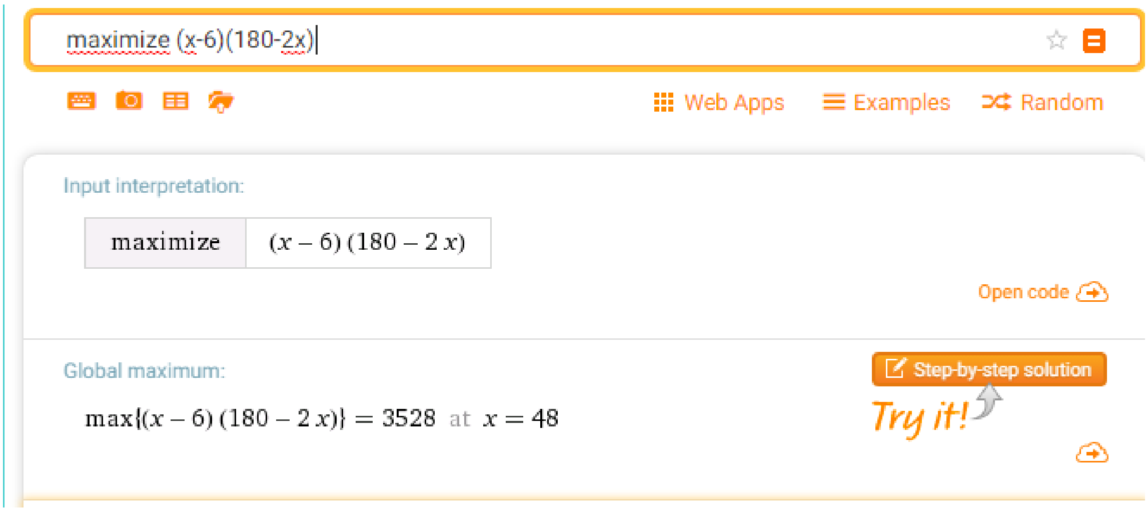
Global maximum:

$\max\{\{(100 - x)\,x + (80 - y)\,y - 6\,(x + y),\ x \leq 20 \wedge y \geq 50\}\} = 2680$ at $(x, y) = (20, 50)$

c) Partiendo del apartado a), si no estuviera permitida la discriminación de precios, esto es, que es necesario legalmente fijar el mismo precio en ambos mercados ¿cómo habría que modificar el planteamiento inicial? ¿Cuánto debe vender ahora, y a qué precios, el monopolista para seguir maximizando su beneficio?

$$p_1 = p_2 = p$$
$$q = q_1 + q_2$$
$$p = 100 - q_1$$
$$p = 80 - q_2$$
$$q_1 + q_2 = 180 - 2p = q$$

Maximizar $\boldsymbol{B(p) = p \cdot q - 6q = (p-6)(180-2p)}$



d) Partiendo del apartado c), si las autoridades del país 1 fijan un impuesto de t u.m. por cada unidad de producto vendido en el mercado 1, ¿cómo habría que modificar el planteamiento. Calcula de nuevo las cantidades a vender y precios para seguir maximizando beneficio. ¿Cuánto recibirá el gobierno por la vía de este impuesto?

Maximizar $B(p) = p \cdot q - 6q - t \cdot q_1 = (p-6)(180-2p) - t(100-p)$

Primer llamamiento Junio 2017

3. Sea la función de utilidad de un consumidor $U(x,y) = 6xy + 2(y-2)$ donde x e y son las cantidades que se adquieren de dos bienes A y B, estando obligado por razones de salud a consumir algo de ambos bienes en cantidades que podrían ser fracciones de unidad. Los precios unitarios de dichos bienes determinados por el mercado son 4 y 2 u.m. respectivamente. Se pide:

a) ¿Cuál es la elección óptima del consumidor si su objetivo es alcanzar el máximo nivel de utilidad, suponiendo que se gasta toda su renta monetaria que asciende a 8 u.m. En dicha elección óptima, ¿cuál es el valor de la utilidad para el consumidor?

$$\begin{aligned} &\textbf{Maximizar } \boldsymbol{U(x,y) = 6xy + 2(y-2)} \\ &\textbf{sujeto a: } \boldsymbol{4x + 2y = 8,} \\ &\qquad\qquad \boldsymbol{x \geq 0, y \geq 0.} \end{aligned}$$

Input interpretation:

maximize	function	$6xy + 2(y-2)$
	domain	$4x + 2y = 8 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$

Open code

$e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots$ is the logical AND function

Global maximum:

Approximate form

$$\max\{6xy + 2(y-2) \mid 4x + 2y = 8 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\} = \frac{37}{3} \text{ at } (x, y) = \left(\frac{5}{6}, \frac{7}{3}\right)$$

b) Justificar matemáticamente qué cambio puede esperar el consumidor en su nivel máximo de utilidad si su renta monetaria disminuyera en 3 u.m. $\boldsymbol{M^* \approx M + \lambda \cdot \Delta k \to M^* \approx -21/2}$

Partiendo del apartado a) se pide:

c) Si el consumidor estuviera obligado a consumir una cantidad menor del bien A que del bien B, ¿debería cambiar su elección para seguir obteniendo utilidad máxima? ¿en esta nueva situación cuánto elegiría consumir de cada bien y qué utilidad máxima alcanzaría?

$$\begin{aligned} &\textbf{Maximizar } \boldsymbol{U(x,y) = 6xy + 2(y-2)} \\ &\textbf{sujeto a: } \boldsymbol{4x + 2y = 8,} \\ &\qquad\qquad \boldsymbol{x \leq y,} \\ &\qquad\qquad \boldsymbol{x \geq 0, y \geq 0.} \end{aligned}$$

d) Si el consumidor estuviera obligado a consumir una cantidad del bien A al menos igual que la consumida del bien B, ¿debería cambiar su elección para seguir obteniendo utilidad máxima? ¿en esta nueva situación cuánto elegiría consumir de cada bien y qué utilidad máxima alcanzaría?

$$\begin{aligned} &\textbf{Maximizar } \boldsymbol{U(x,y) = 6xy + 2(y-2)} \\ &\textbf{sujeto a: } \boldsymbol{4x + 2y = 8,} \\ &\qquad\qquad \boldsymbol{x \geq y,} \\ &\qquad\qquad \boldsymbol{x \geq 0, y \geq 0.} \end{aligned}$$

Input interpretation:

maximize	function	$6xy + 2(y-2)$
	domain	$4x + 2y = 8 \wedge x \geq y \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$

Open code

$e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots$ is the logical AND function

Global maximum:

Approximate form

$$\max\{6xy + 2(y-2) \mid 4x + 2y = 8 \wedge x \geq y \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\} = \frac{28}{3} \text{ at } (x, y) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Segundo llamamiento Junio 2017

3. Una empresa aeronáutica construye dos tipos de aviones A y B. Para ello dispone como máximo de 1800 millones de euros, siendo el coste de cada avión 30 y 20 millones de euros, respectivamente. Además las condiciones de mercado exigen que el número total de aviones no sea mayor de 80. Se sabe que si se construyen x aviones de tipo A e y aviones de tipo B la función de Beneficio (en millones de euros) viene dada por $B(x,y) = 3x^2 + y^2 + 5xy$, y el objetivo de la empresa es maximizar su beneficio.

a) Plantear el problema de optimización en su forma más general, incluyendo las condiciones de no negatividad.

Maximizar $\boldsymbol{B(x,y) = 3x^2 + y^2 + 5xy}$
sujeto a: $\boldsymbol{30x + 20y \leq 1800}$
$\boldsymbol{x + y \leq 80}$
$\boldsymbol{x \geq 0, y \geq 0}$

b) Si se conoce que el óptimo no satura las condiciones de no negatividad, estudiar cuántos aviones debe construir de cada clase para que el beneficio sea máximo. Para ello, obtener los puntos de Kuhn-Tucker y clasificarlos, si es posible, con la matriz Hessiana y Hessiano Orlado.

c) Sabiendo que la región factible del problema planteado es cerrada y acotada, discutir la globalidad de los óptimos obtenidos en el apartado anterior y obtener el beneficio máximo.

Input interpretation:

maximize	function	$3x^2 + y^2 + 5xy$
	domain	$30x + 20y \leq 1800 \wedge x + y \leq 80 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$

Global maximum:

$$\max\{3x^2 + y^2 + 5xy \mid 30x + 20y \leq 1800 \wedge x + y \leq 80 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\} = 11700$$
at $(x, y) = (40, 30)$

Julio 2017

3. En una empresa se fabrican dos productos A y B en cantidades x e y respectivamente. Por la venta de cada unidad A se obtienen 4 euros y por cada unidad de B se obtienen 3 euros. Las posibilidades de producción de la empresa vienen dadas tal manera que el valor de la expresión $8x^2 + 3y^2$ ha de ser como máximo de 8000 unidades.

a) Plantear el problema que permite maximizar los ingresos de la empresa en su forma más general, es decir, considerando las condiciones de no negatividad para las variables.

$$\textbf{Maximizar } I(x,y) = 4x + 3y$$
$$\textbf{sujeto a:} \quad 8x^2 + 3y^2 \leq 8000$$
$$x \geq 0, y \geq 0$$

b) Sabiendo que el conjunto factible del problema anterior es cerrado y acotado ¿qué se puede decir sobre la existencia de óptimos globales?

c) Se sabe que el óptimo no satura las condiciones de no negatividad, es decir esas restricciones no son activas en el óptimo buscado. Con esta información se pide:

c.1) Calcular los candidatos a máximo.

c.2) Utilizar las condiciones de segundo orden para determinar la solución del problema. ¿Cuáles son las unidades de A y B que se han de producir para maximizar el ingreso y cuál es el ingreso máximo?

c.3) ¿Qué se puede deducir al aplicar el criterio del Hessiano Orlado?

Input interpretation:

maximize	function	$4x+3y$
	domain	$8x^2+3y^2 \leq 8000 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$

Open code

$e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots$ is the logical AND function

Global maximum:

$\max\{4x+3y \mid 8x^2+3y^2 \leq 8000 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\} = 200$ at $(x, y) = (20, 40)$

d) Calcular, sin resolver el nuevo problema, cuánto varían aproximadamente los ingresos máximos si las posibilidades de producción se incrementan en 3 unidades.

Septiembre 2017

3. Una empresa tiene que producir en los próximos dos años $\boldsymbol{x}$ miles de unidades de un bien el primer año e $\boldsymbol{y}$ miles de unidades del bien el segundo año. Para cumplir con los compromisos adquiridos con sus clientes en estos próximos dos años, la producción tiene que ser de **10** mil unidades. Existe la posibilidad de que parte de la demanda del primer año se puede posponer para el segundo y también que parte de la demanda del segundo año se pueda producir el primero, pero con el límite de que cada año deben de producirse al menos **3** mil unidades del bien.

Los costes de producción del primer año son $C(x) = 2x^2 + 20$ cientos de miles de €, y, tras la entrada en funcionamiento para el segundo año de una mejora productiva, los costes de producción del segundo año sean $C(y) = 1{,}25\,y^2 + 100$ cientos de miles de €.

El precio de venta de mil unidades del bien producido el primer año es de **34** cientos de miles de €. En cambio, como promoción de la nueva versión evolucionada del bien producido el segundo año y tras la relativa mejora en los costes productivos, el precio de venta de mil unidades del bien producido el segundo año será de **33** cientos de miles de €.

La empresa se plantea cómo distribuir la producción los próximos dos años para maximizar los beneficios.

a) Plantear un modelo matemático cuya solución permita a la empresa conocer cómo lograr su objetivo.

$$\begin{aligned}
&\textbf{Maximizar } \boldsymbol{B(x,y) = 34x + 33y - (2x^2 + 1,25y^2 + 120)}\\
&\textbf{sujeto a:} \quad \boldsymbol{x + y = 10}\\
&\qquad\qquad\quad\ \boldsymbol{x \geq 3, y \geq 3}
\end{aligned}$$

b) Sin emplear el método de sustitución, obtener tanto los máximos como los mínimos del problema matemático planteado indicando el carácter local y/o global de los óptimos obtenidos, e indica la peor decisión que podría tomar la empresa (mínimo beneficio global) para lograr su objetivo.

c) Confirmar mediante otro método el carácter global del máximo obtenido en el apartado anterior.

d) Aplicar el Hessiano Orlado a dicho punto y extraer la conclusión que proceda.

e) ¿Qué debería hacer la empresa para lograr su objetivo? ¿A cuánto ascendería el beneficio óptimo?

Input interpretation:

maximize	function	$34x + 33y - (2x^2 + 1.25y^2 + 120)$
	domain	$x + y = 10 \wedge x \geq 3 \wedge y \geq 3$

Open code

$e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots$ is the logical AND function

Global maximum:

$\max\{34x + 33y - (2x^2 + 1.25y^2 + 120) \mid x + y = 10 \wedge x \geq 3 \wedge y \geq 3\} = 137$ at $(x, y) = (4, 6)$

Primer llamamiento junio 2018

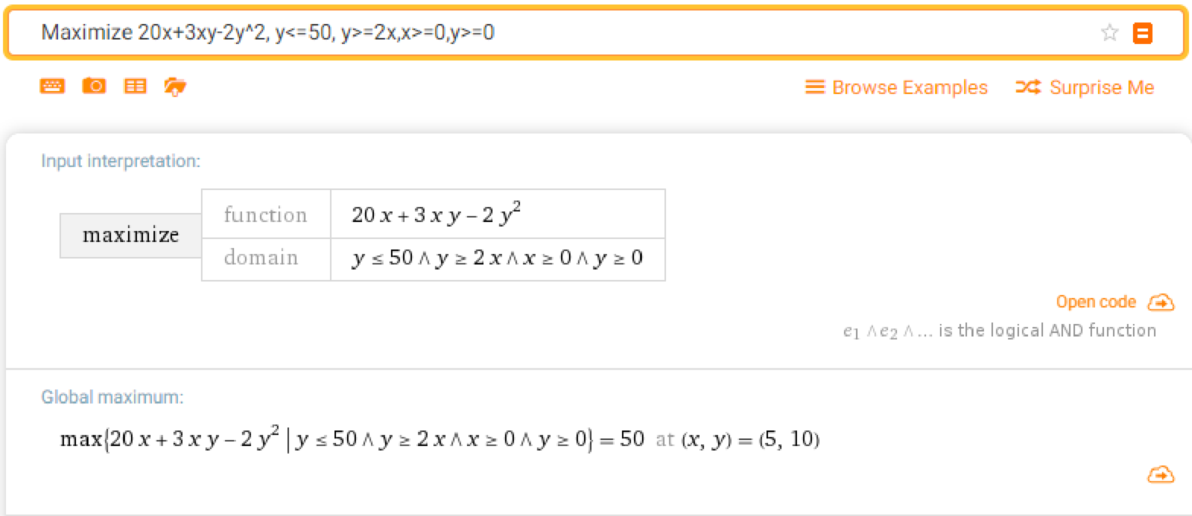
3. La función de producción de una empresa viene dada por:

$F(x, y) = 20x + 3\,x\,y - 2\,y^2$ donde x e y son las cantidades utilizadas de cada factor productivo A y B, respectivamente. Además, la empresa en virtud de su contrato con el proveedor de recursos, no puede exceder de 50 unidades de factor productivo B y tiene que utilizar como mínimo el doble de unidades del factor B que del factor A. Si la empresa se plantea como objetivo maximizar la cantidad producida, se pide:

a) Plantear el problema de optimización en su forma más general, incluyendo las condiciones de no negatividad.

$$\begin{aligned} &\textbf{Maximizar } 20x + 3\,x\,y - 2\,y^2 \\ &\textbf{sujeto a: } y \le 50 \\ &\qquad\qquad\; y \ge 2x \\ &\qquad\qquad\; x \ge 0, y \ge 0 \end{aligned}$$

b) Calcular los niveles de ambos factores que maximizan la cantidad producida, así como el correspondiente nivel de producción máximo. Para ello, obtener los puntos de Kuhn-Tucker y clasificarlos, si es posible, con la matriz Hessiana y Hessiano Orlado, y estudiar si se puede garantizar la característica global del óptimo obtenido. **Nota:** Se conoce que el óptimo no satura las condiciones de no negatividad.



c) Si el proveedor de recursos nos permite aumentar la disponibilidad máxima de factor productivo B hasta 51.2 unidades, razonar en cuánto varía aproximadamente la nueva producción máxima.

Segundo llamamiento junio 2018

3. Una empresa, que produce al año dos bienes A y B en las cantidades respectivas de x e y miles de unidades, se plantea maximizar los beneficios que ascienden a $B(x, y) = 6x + 3y - 4x^2 - y^2 + 400$ millones de €.

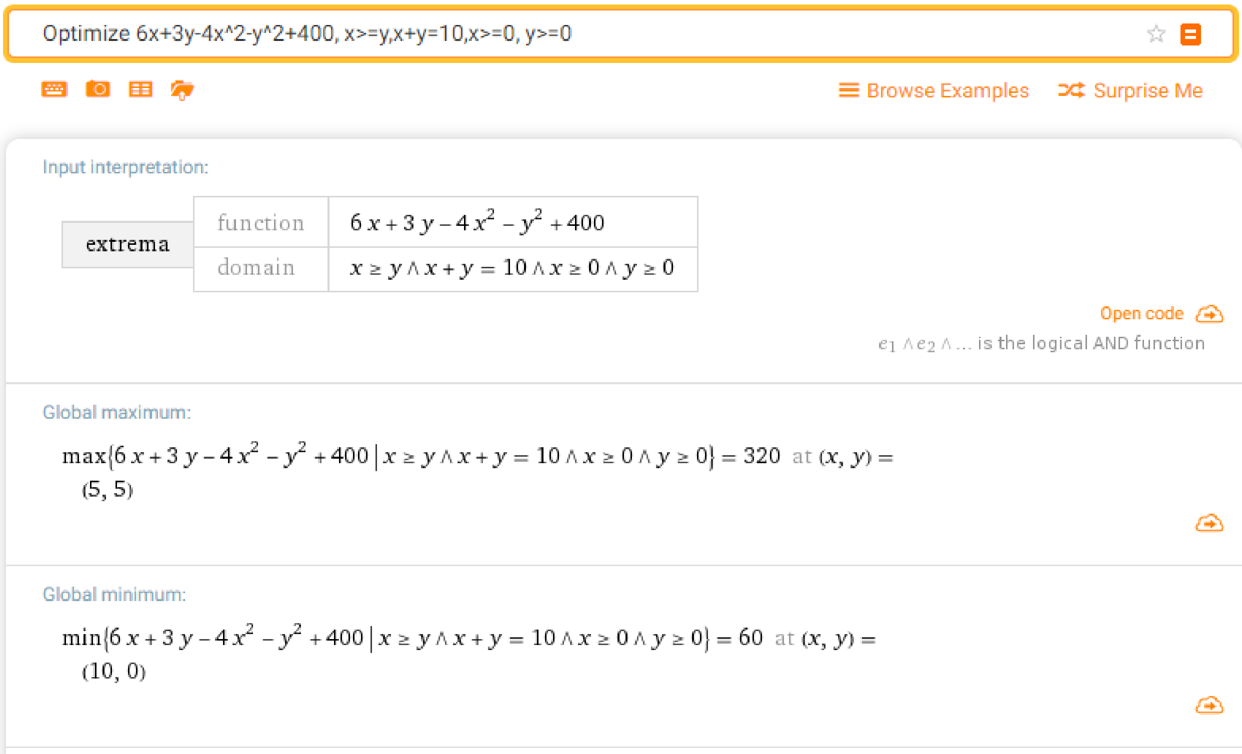
Por un lado, por razones estratégicas, la empresa desea producir las mismas o más unidades del bien A que del B. Y por otra parte, para asegurar la venta de los bienes, la empresa estima que la producción total de ambos bienes ha de ser de **10** mil unidades. Sin emplear el método de sustitución, realizar lo siguiente:

a) Obtener los candidatos a mínimo y a máximo del problema matemático de optimización cuya función objetivo es la función de beneficios, teniendo en cuenta las condiciones mencionadas y las que se sobreentienden ($x \geq 0$ e $y \geq 0$).

No obstante, nótese que la restricción $x \geq 0$ se puede ignorar ya que siempre se verificará si lo hacen las restantes restricciones.

El problema que nos plantean es:

$$
\begin{aligned}
&\textbf{Optimizar } B(x, y) = 6x + 3y - 4x^2 - y^2 + 400\\
&\textbf{sujeto a: } x \geq y\\
&\qquad\qquad x + y = 10\\
&\qquad\qquad x \geq 0\\
&\qquad\qquad y \geq 0
\end{aligned}
$$



b) Analizar el carácter de óptimo local y/o global de los candidatos obtenidos e interpretar dichas soluciones en el contexto del problema económico inicial.

c) En cuanto se estima que se incrementaría el beneficio óptimo si las unidades producidas del bien A tuviesen que ser no sólo las mismas o más que las del B, sino que fuesen al menos **500** unidades más que las de B.

Julio 2018

3. Una empresa produce botas y zapatos de piel asumiendo unos costes mensuales de $4x^2 + 6y^2$ decenas de €, siendo x e y el número de pares de botas y zapatos producidos al mes. Se sabe que la fabricación de un par de botas requiere 2 horas de mano de obra mientras que cada par de zapatos necesita 1 hora de mano de obra para su producción. La plantilla fija de empleados permite garantizar como máximo 40 horas de mano de obra al mes. Además, la dirección quiere garantizar una producción total mínima mensual de 3 decenas de pares para poder responder a las demandas imprevistas. Con el fin de evaluar su rendimiento real, la empresa desea conocer el mayor y el menor coste posible en las condiciones descritas.

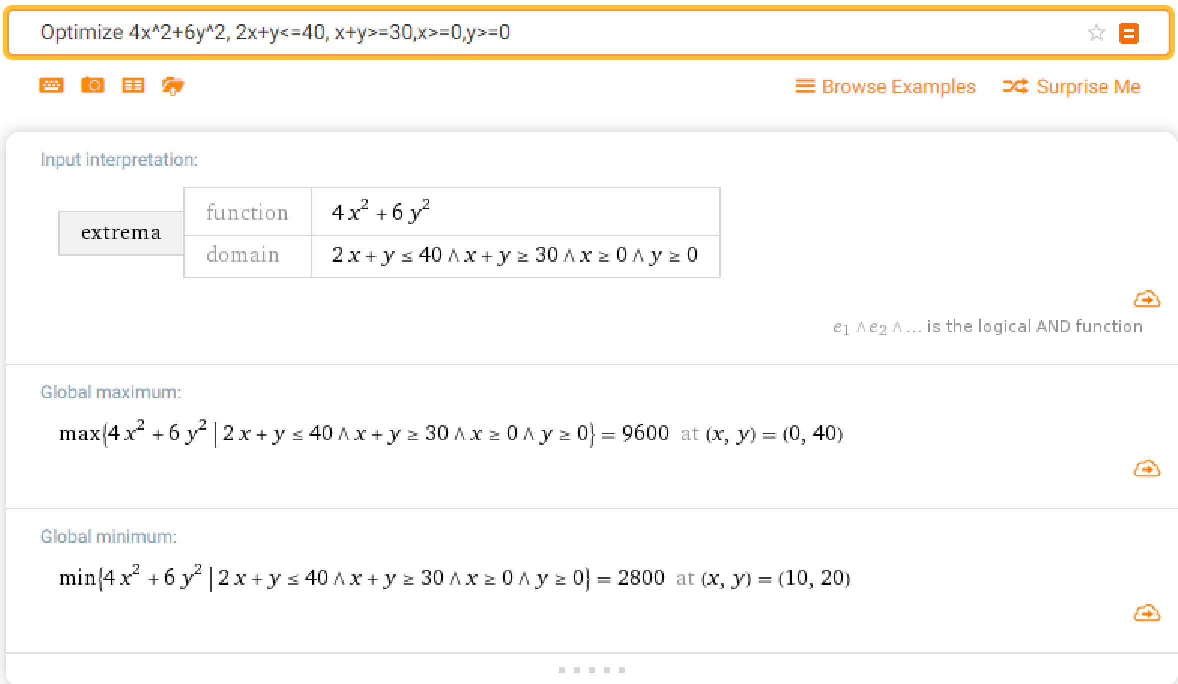
a) Plantear el problema general de la optimización de los costes de esta empresa teniendo en cuenta los requisitos señalados y la no negatividad de la producción.

$$\begin{aligned}
&\textbf{Optimizar } \boldsymbol{B(x,y) = 4x^2 + 6y^2}\\
&\textbf{sujeto a: } \boldsymbol{2x + y \leq 40}\\
&\qquad\qquad\ \boldsymbol{x + y \geq 30}\\
&\qquad\qquad\ \boldsymbol{x \geq 0}\\
&\qquad\qquad\ \boldsymbol{y \geq 0}
\end{aligned}$$

b) Escribir las condiciones de Kuhn-Tucker asociadas al problema anterior

c) Estudiar si los puntos (10, 20), (0, 30) y (0, 40) son candidatos a máximo o mínimo del problema. Aplicar Hessiano y/o Hessiano Orlado y obtener las conclusiones que correspondan.

d) Sabiendo que no existen más puntos de Kuhn-Tucker (salvo los obtenidos en el apartado anterior), obtener la producción de mínimo coste y de máximo coste posible.



e) Calcular el coste mínimo que debe asumir la empresa en la situación actual e interpretar el resultado. ¿Cómo variaría el coste mínimo si se incrementara en dos pares la producción total mínima mensual exigida?

Septiembre 2018

3. Una empresa zapatera está pensando en la posibilidad de lanzar al mercado dos nuevos tipos de zapatos. Según un análisis realizado, los ingresos que producirían estos nuevos productos vendrían dados por la siguiente función:

$$I(x,y) = x^2 - 1 + 4xy + y,$$

donde x e y representan las cantidades producidas (en miles) de los dos nuevos tipos de zapatos, mientras que la función de costes generada sería:

$$C(x,y) = 4xy + 2x^2.$$

Debido a exigencias del proceso productivo, las cantidades obtenidas de los dos tipos de zapatos deben verificar la siguiente relación:

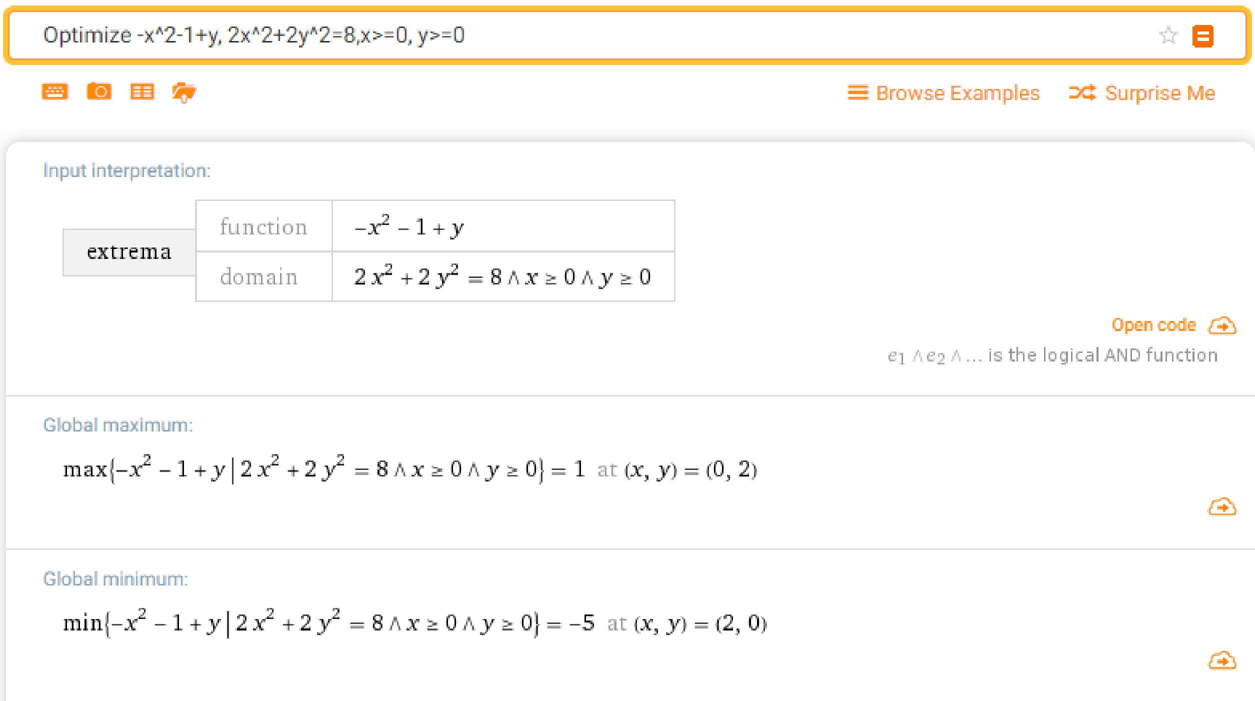
$$2x^2 + 2y^2 = 8.$$

Si la empresa tiene como objetivo maximizar su beneficio, se pide:

a) Plantear el problema de optimización en su forma más general, incluyendo las condiciones de no negatividad.

$$\begin{aligned} &\textbf{Optimizar } \boldsymbol{B(x,y) = -x^2 - 1 + y} \\ &\textbf{sujeto a: } \boldsymbol{2x^2 + 2y^2 = 8} \\ &\qquad\qquad \boldsymbol{x \geq 0} \\ &\qquad\qquad \boldsymbol{y \geq 0} \end{aligned}$$

b) Calcular las cantidades producidas de los dos tipos de zapatos que maximizan el beneficio. Para ello, obtener los puntos de Kuhn-Tucker y clasificarlos, si es posible, con la matriz Hessiana.



c) Si la empresa no lanzara al mercado los zapatos en el caso de que generen un beneficio máximo inferior a 2 u. m., ¿los lanzará finalmente?

d) Supongamos que las exigencias del proceso productivo varían, concretamente siguiendo la nueva relación: $x^2 + y^2 = 4.5$. ¿Cuánto será aproximadamente el nuevo beneficio máximo (sin resolver un nuevo problema)?

Primer llamamiento junio 2019

3. Una empresa fabrica al año dos productos A y B en las cantidades respectivas de $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ (medidas en miles de unidades). Por la venta de mil unidades de A se obtienen 2 u.m., y por cada mil unidades de B se obtienen 4 u.m. La empresa está limitada en las cantidades que puede producir, estando dicha limitación representada por la condición $\boldsymbol{x^2+y^2 = 5}$. Por otra parte, para cumplir con los compromisos adquiridos con sus clientes, la empresa estima que la producción tiene que verificar $\boldsymbol{x+2y \geq 4}$.

a) Plantear el problema de optimización cuya función objetivo es la función de ingresos, teniendo en cuenta todas las restricciones (incluyendo las de no negatividad).

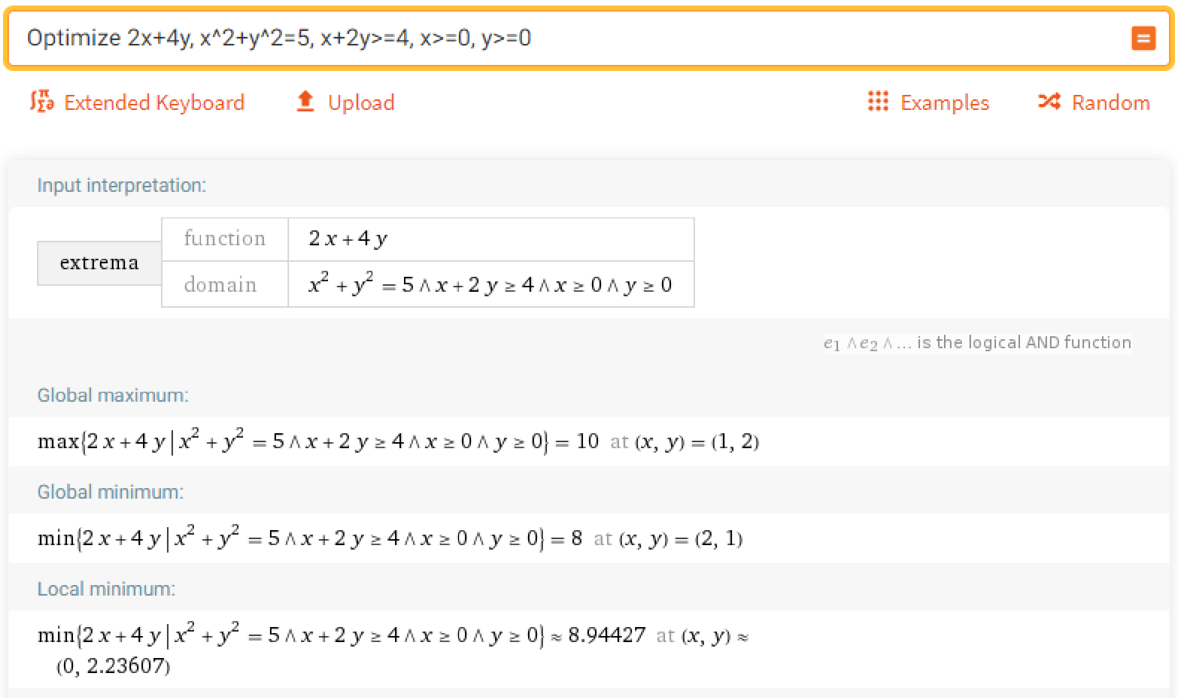
El problema que nos plantean es:

$$\begin{aligned}
&\textbf{Optimizar } \boldsymbol{I(x,y) = 2x+4y}\\
&\textbf{sujeto a: } \boldsymbol{x^2+y^2 = 5}\\
&\qquad\qquad \boldsymbol{x+2y \geq 4}\\
&\qquad\qquad \boldsymbol{x \geq 0}\\
&\qquad\qquad \boldsymbol{y \geq 0}
\end{aligned}$$

En los siguientes apartados, utiliza la información de que los óptimos buscados no saturan la condición $\boldsymbol{y \geq 0}$, y por tanto, no es activa:

b) Obtener y clasificar los candidatos a máximo y a mínimo del problema de optimización matemática planteado en a).
b1) Utilizando la matriz Hessiana, ¿cuál es la mejor solución que podría tomar la empresa (mayor ingreso absoluto)?, ¿a cuánto ascendería ese ingreso máximo?

b2) Si sabemos que el conjunto factible es cerrado y acotado, ¿cuál es la peor solución que podría tomar la empresa (menor ingreso absoluto)? ¿por qué? ¿a cuánto ascendería ese ingreso mínimo?



c) Estima cuáles serían los nuevos ingresos (tanto el mínimo, como el máximo) si la restricción de demanda cambiara a: $\boldsymbol{x+2y \geq 4.1}$

Segundo llamamiento junio 2019

3. Una compañía puede destinar su planta a la elaboración de dos tipos de productos, A y B. Y obtiene una utilidad de 4$ por cada mil unidades de A y 6$ por cada mil unidades de B. La cantidad que puede producir de cada tipo está restringida por la ecuación de transformación del producto, que es $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 8$ siendo x, y las cantidades respectivas de A y B (medidas en miles de unidades) producidas por semana.

a) Plantea el problema de optimización matemática cuya función objetivo es la función de utilidad, teniendo en cuenta todas las restricciones (incluyendo las condiciones de no negatividad).

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{Optimizar } \boldsymbol{U(x,y) = 4x+6y} \\ \textbf{sujeto a:} \\ \qquad \boldsymbol{x^2+y^2+2x+4y=8} \\ \qquad \boldsymbol{x \geq 0} \\ \qquad \boldsymbol{y \geq 0} \end{array}\right\}$$

En los siguientes apartados, utiliza la información de que x no puede valer 0.

b) Obtener y clasificar los candidatos a máximo y a mínimo del problema de optimización matemática planteado en a).

b1) Utilizando la matriz Hessiana, ¿cuántas unidades de cada tipo deben producirse a fin de maximizar la utilidad?

¿Cómo se vería afectada la utilidad máxima si la ecuación de transformación del producto tuviera que modificarse a $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 9.2$? Nota: Responder sin resolver el nuevo problema.

b2) Si sabemos que el conjunto factible es cerrado y acotado, ¿cuál sería la peor solución que puede adoptar la empresa?

¿Es válida la solución obtenida en el apartado b2) para minimizar la utilidad si la empresa puede mantener la ecuación de transformación inicial $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 8$ pero, sin embargo, está obligada a producir un mínimo de 300 unidades del bien B? En caso negativo, ¿cómo se vería modificada la utilidad mínima si se exige este último requisito?

Julio 2019

3. Una empresa planea producir durante el próximo año $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ millones de unidades de iPhone Tipo 1 y iPhone Tipo 2. La empresa se plantea maximizar los beneficios sabiendo que, obtendrá 400 millones de € por la venta de un millón de iPhone Tipo 1 y 600 millones de € por la venta de un millón de iPhone Tipo 2. Por otra parte los costes de la empresa al producir $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ millones de unidades de iPhone Tipo 1 y iPhone Tipo 2, respectivamente, ascienden a $x^2 + y^2 + 380x + 580y + 100$ millones de €.

El número total de iPhone producidos el próximo año no puede superar los 12 millones de unidades. Por razones estratégicas, la empresa desea que los iPhone Tipo 2 producidos sean como mínimo la mitad de los iPhone Tipo 1.

a) Plantear el problema de optimización de esta empresa, teniendo en cuenta las condiciones mencionadas y la que se sobreentiende ($x \geq 0$); pero nótese que se puede ignorar la restricción $y \geq 0$, pues esta ya está incluida en las restantes restricciones.

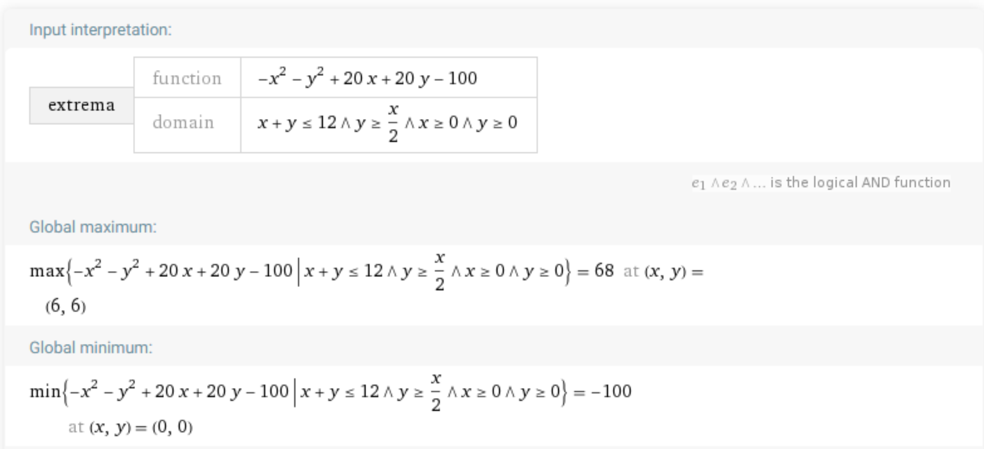
$$\begin{aligned}
&\textbf{Optimizar } \boldsymbol{B(x,y) = 20x + 20y - x^2 - y^2 - 100} \\
&\textbf{sujeto a: } \boldsymbol{x + y \leq 12} \\
&\qquad\qquad \boldsymbol{y \geq \frac{x}{2}} \\
&\qquad\qquad \boldsymbol{x \geq 0} \\
&\qquad\quad\ (\boldsymbol{y \geq 0})
\end{aligned}$$

b) Escribir las condiciones de Kuhn-Tucker de máximo/mínimo para el problema anterior.

c) Estudiar si los puntos (12, 0), (0, 10), (6, 6), (8, 4) son candidatos a óptimo del problema. Aplicar Hessiano y/o Hessiano Orlado en los casos que corresponda y obtener las conclusiones adecuadas.

d) Sabiendo que todos los puntos de Kuhn-Tucker son los obtenidos en el punto anterior y, además, el (0,0) y (0,12), ¿qué debería hacer la empresa para lograr la maximización de los beneficios? ¿A cuánto ascendería el beneficio óptimo? ¿Cuál es la peor solución que podría tomar la empresa (mínimo beneficio global) si produce el máximo de 12 millones de unidades de iPhones?

e) Confirmar mediante Hessiano Orlado que el máximo global obtenido es también local.


Input interpretation:

extrema	function	$-x^2 - y^2 + 20x + 20y - 100$
	domain	$x + y \leq 12 \wedge y \geq \frac{x}{2} \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$

$e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots$ is the logical AND function

Global maximum:

$\max\{-x^2 - y^2 + 20x + 20y - 100 \mid x + y \leq 12 \wedge y \geq \frac{x}{2} \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\} = 68$ at $(x, y) = (6, 6)$

Global minimum:

$\min\{-x^2 - y^2 + 20x + 20y - 100 \mid x + y \leq 12 \wedge y \geq \frac{x}{2} \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0\} = -100$ at $(x, y) = (0, 0)$

Septiembre 2019

3. Un fabricante de dos productos relacionados, de los que siempre le demandan el triple del primero que del segundo, sabe que fabricar x toneladas del primer producto e y del segundo, conlleva unos costes totales de $C(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 190$. Los precios (unitarios) dependen de las cantidades demandadas de cada uno de los productos según la ecuación $p_1 = 4(63 - x)$ y $p_2 = 3(60 - y)$.

a) Plantear el problema de optimización de dos variables cuya función objetivo es la función de beneficios, teniendo en cuenta todas las restricciones (incluyendo las de no negatividad tanto para las cantidades demandadas como para los precios).

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{Optimizar } U(x,y) = 4(63-x)x + 3(60-y)y - (x^2+xy+y^2+190) \\ \textbf{sujeto a:} \\ \qquad x = 3y \\ \qquad 0 \le x \le 63 \\ \qquad 0 \le y \le 60 \end{array}\right\}$$

b) Utilizando las condiciones de Kuhn-Tucker para el problema de dos variables, obtener y clasificar los candidatos a óptimo (máx y mín) del problema de optimización matemática planteado en a) (incluyendo solamente las condiciones de no negatividad para x y p_1). ¿Cuál es la mejor solución que podría tomar la empresa (máximo global)?, ¿qué demandas y qué precios son los óptimos?, ¿a cuánto ascendería ese beneficio máximo? ¿Y cuál sería la peor solución (mínimo global)? Razona tu respuesta.

Optimize -5x^2-4y^2-x y+252x +180y-190, x=3y, x>=0, x<=63

Extended Keyboard   Upload   Examples   Random

Input interpretation:

extrema	function	$-5x^2 - 4y^2 - xy + 252x + 180y - 190$
	domain	$x = 3y \land x \ge 0 \land x \le 63$

$e_1 \land e_2 \land \ldots$ is the logical AND function

Global maximum:

$\max\{-5x^2 - 4y^2 - xy + 252x + 180y - 190 \mid x = 3y \land x \ge 0 \land x \le 63\} = 4022$ at $(x, y) = (27, 9)$

Global minimum:

$\min\{-5x^2 - 4y^2 - xy + 252x + 180y - 190 \mid x = 3y \land x \ge 0 \land x \le 63\} = -3466$ at $(x, y) = (63, 21)$

c) Resolver el problema anterior sin considerar las condiciones de no negatividad y utilizando el método de sustitución, en vez de Lagrange.

c1) ¿Las soluciones obtenidas coinciden con las del apartado b)? ¿Por qué ocurre esto?

c2) Si el segundo producto tiene cumplir $10 \le y \le 16$, ¿valdría alguna solución obtenida anteriormente? En caso negativo, obtener sin aplicar Lagrange nueva solución (cantidades demandadas y precios) para maximizar y nuevo beneficio máximo. Razona tu respuesta.

Primer llamamiento junio 2021

3. Una empresa fabrica al año dos productos A y B en las cantidades respectivas de x e y (medidas en cientos de unidades). Por la venta de cien unidades de A se obtienen 4 u.m., y por cada cien unidades de B se obtienen 3 u.m., mientras que la función de costes generada sería $C(x, y) = 0.02x^2 + 0.03y^2$. Por otra parte, la empresa está limitada en las cantidades que puede producir, estando dicha limitación representada por la condición $x + y \leq 100$.

Si la empresa tiene como objetivo optimizar su beneficio, se pide:

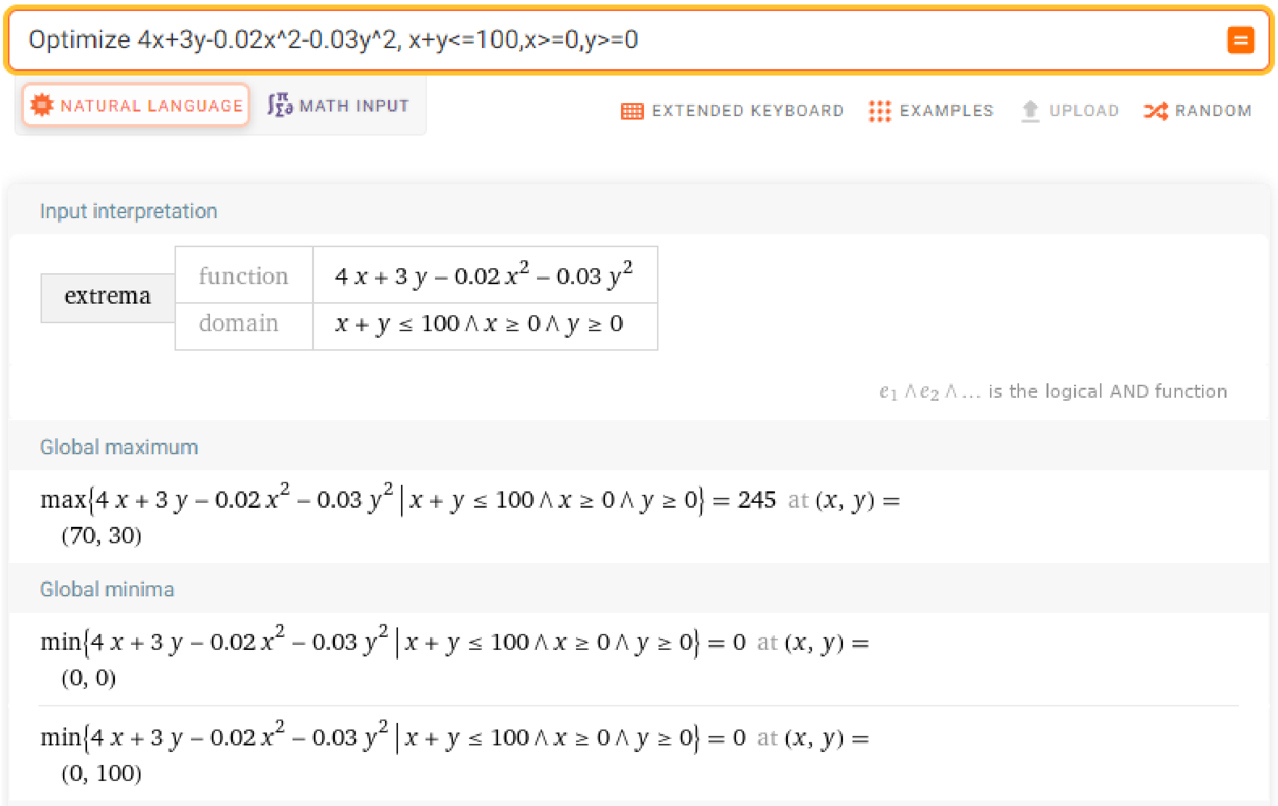
a) Plantear el problema de optimización (máximos y mínimos) en su forma más general, **incluyendo las condiciones de no negatividad**.

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{Optimizar } B(x,y) = 4x + 3y - 0.02x^2 - 0.03y^2 \\ \textbf{sujeto a:} \\ \qquad \boldsymbol{x + y \leq 100} \\ \qquad \boldsymbol{x \geq 0} \\ \qquad \boldsymbol{y \geq 0}\end{array}\right\}$$

b) Escribe la función de Lagrange y las condiciones necesarias de primer orden de Kuhn-Tucker. Estudiar si los puntos (0, 100), (0, 50), (70, 30), (100, 50) son candidatos a óptimos del problema.

c) Sabiendo que todos los puntos de Kuhn-Tucker son los obtenidos en el apartado anterior y además el punto (0,0), ¿puedes concluir qué cantidades de A y B nos darán el mínimo beneficio?, ¿por qué?

d) Utilizando la matriz Hessiana, ¿puedes concluir qué cantidades de A y B nos darán el máximo beneficio que puede lograr la empresa?, en caso afirmativo, ¿a cuánto ascendería ese beneficio máximo?



e) Si nos dijeran que la limitación de la producción tiene que ser $x + y = 100$. Comprobar si por el método de sustitución se llega a la misma solución del apartado d).

Segundo llamamiento junio 2021

3. La función de producción de una empresa viene dada por $P(x,y) = x \cdot y$ miles de unidades de producto, siendo x e y la cantidad de los dos factores productivos utilizados para elaborar su producto, expresados en miles de unidades. Durante el proceso productivo se producen emisiones de CO_2 a la atmósfera, que se estiman en 10 toneladas por cada mil unidades usadas del primer factor productivo y 6 toneladas por cada mil unidades del segundo factor productivo empleada. Se desea obtener al menos 60000 unidades del bien producido.

a) Plantear un modelo de optimización para conocer las cantidades (no negativas) de los factores productivos que se deben emplear para minimizar las emisiones generadas garantizando los requisitos de producción.

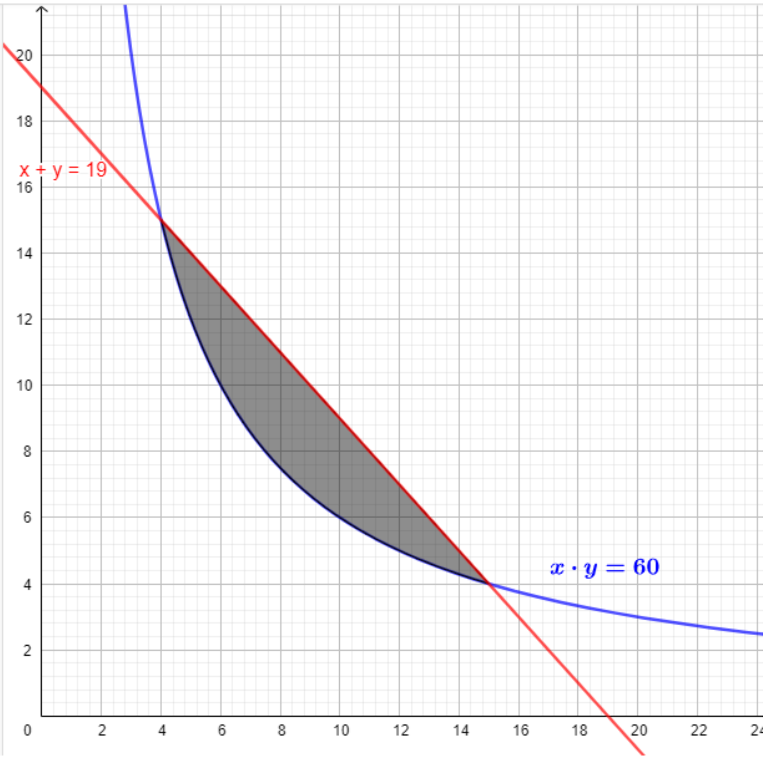
$$\left.\begin{array}{l} \textbf{Minimizar } \boldsymbol{10x+6y} \\ \textbf{sujeto a}: \\ \qquad \boldsymbol{x \cdot y \geq 60} \\ \qquad \boldsymbol{x \geq 0} \\ \qquad \boldsymbol{y \geq 0} \end{array}\right\}$$

b) Escribir las condiciones de Kuhn-Tucker asociadas al problema anterior.

c) Sabiendo que para obtener la producción deseada los dos factores productivos deben usarse (es decir, en el óptimo $x > 0$, $y > 0$), obtener la solución matemática del problema, indicando si se puede garantizar o no el carácter de óptimo global de la solución.

Matemáticamente obtendremos un mínimo local en el punto: $\boldsymbol{x = 6, y = 10}$.

d) Debido a un fallo de inventario, la cantidad total de factores productivos empleados en el proceso no podrá superar las 19000 unidades. En el problema de optimización que se obtiene al añadir al planteado en **a)** esta nueva condición, estudiar (<u>sin resolver</u>) si se puede garantizar la existencia de óptimos (máximos y mínimos) globales.



e) Sabiendo que los únicos candidatos a máximo o mínimo del problema de apartado **d)** son (6, 10) y (15, 4), razonar cuál es el mínimo nivel y el máximo nivel de emisiones que se genera en esa situación y con qué cantidades de factores productivos se alcanzan dichos niveles.

Julio 2021

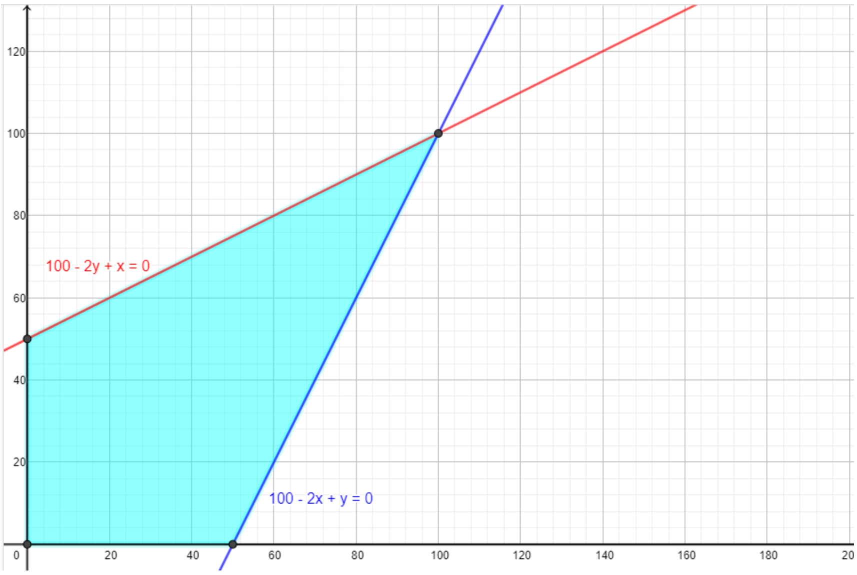
3. Una empresa fabrica al año dos productos A_1 y A_2 en las cantidades respectivas, que coinciden con sus demandas previstas, de $x_1 = 100 - 2p_1 + p_2$ y $x_2 = 100 - 2p_2 + p_1$, siendo p_1 y p_2 los precios respectivos de ambos bienes en cientos de €. Se tienen unos costes anuales fijos de 10000€. Además, por la producción de cada unidad, tanto de A_1 como de A_2 se producen unos costes adicionales de 1000 €.

a) Plantear el problema de optimización que determinen a qué precios debe vender sus productos para obtener el mayor, y el menor, beneficio posible (máximo y mínimo global), incluyendo las condiciones de no negatividad, $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0, x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. Plantéalo únicamente en función de los precios.

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{Optimizar } (\boldsymbol{p_1}-\mathbf{10})(\mathbf{100}-\mathbf{2}\boldsymbol{p_1}+\boldsymbol{p_2})+(\boldsymbol{p_2}-\mathbf{10})(\mathbf{100}-\mathbf{2}\boldsymbol{p_2}+\boldsymbol{p_1})-\mathbf{100} \\ \textbf{sujeto a}: \\ \qquad \boldsymbol{p_1} \geq \mathbf{0} \\ \qquad \boldsymbol{p_2} \geq \mathbf{0} \\ \qquad \mathbf{100}-\mathbf{2}\boldsymbol{p_1}+\boldsymbol{p_2} \geq \mathbf{0} \\ \qquad \mathbf{100}-\mathbf{2}\boldsymbol{p_2}+\boldsymbol{p_1} \geq \mathbf{0} \end{array}\right\}$$

b) Escribe la función de Lagrange y las condiciones necesarias de primer orden de Kuhn-Tucker. Estudiar si los precios, (100, 100), (50, 0), (55, 55), (27.5, 0), (150, 150) son candidatos a óptimo local del problema.

c) Sin utilizar la matriz Hessiana, ¿puedes concluir qué cantidades de A_1 y A_2 nos darán el máximo y mínimo beneficio posible, suponiendo que todos los puntos de Kuhn-Tucker son los obtenidos del apartado anterior y el punto (0, 0)?, ¿por qué?, ¿qué debería hacer la empresa? Aplica Hessiano Orlado a los restantes puntos de Kuhn-Tucker de **b)** y obtener las conclusiones que correspondan.



d) ¿Qué concluyes al aplicar la matriz Hessiana para obtener los óptimos globales?

e) Si contratásemos una campaña publicitaria las demandas se estiman que se modificarían, quedando $x_1 = 100 - 1{,}5p_1 + p_2$ y $x_2 = 100 - 1{,}5p_2 + p_1$. Comprobar por el método de sustitución, pues se sabe que en el óptimo se tiene $p_1 = p_2$ (sólo en este apartado), si compensaría contratar la campaña publicitaria, valorada en 10000€, teniendo en cuenta los beneficios que generarían únicamente tras su primer año.

Septiembre 2021

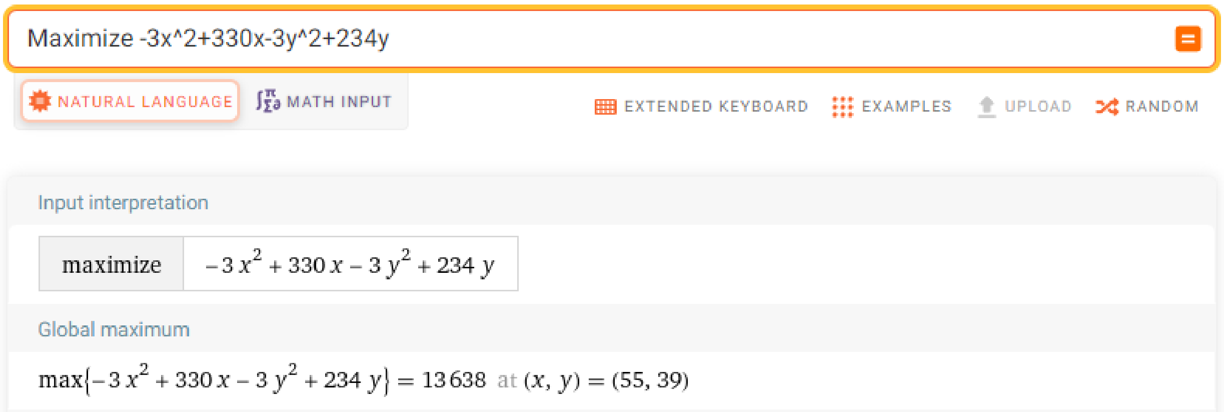
3. Una empresa desea introducir un único producto en dos mercados emergentes situados en dos regiones de Europa y América respectivamente. Ambos mercados son independientes entre sí en cuanto a los precios a fijar y las cantidades a producir. Sea $C = 12(q_E + q_A)$ la función de costes totales (con $q_E > 0$, $q_A > 0$) y $p_E = 342 - 3q_E, p_A = 246 - 3q_A$ las funciones de demanda que relacionan los precios y cantidades demandadas en cada mercado europeo y americano, respectivamente $(p_E > 0, p_A > 0)$. Se pide:

a) Determinar los niveles de producción que la empresa ha de vender en cada región a fin de maximizar el beneficio. Calcular los precios óptimos y el beneficio máximo.

$$\textbf{Maximizar } B(q_E, q_A) = (342 - 3q_E) \cdot q_E + (246 - 3q_A) \cdot q_A - 12(q_E + q_A)$$

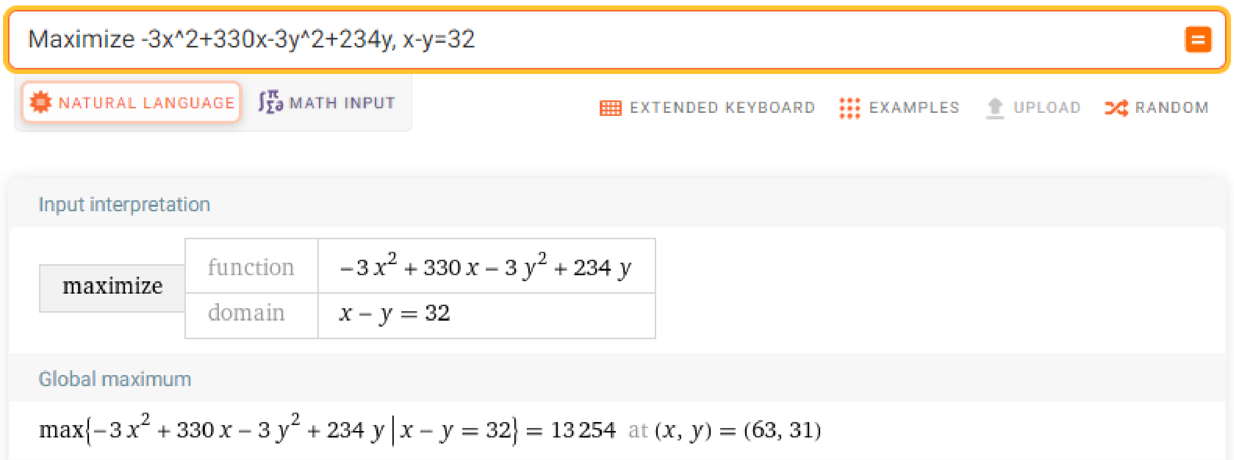
O lo que es lo mismo:

$$\textbf{Maximizar } B(q_E, q_A) = -3q_E^2 + 330q_E - 3q_A^2 + 234q_A$$



b) Partiendo de la información anterior, considera ahora que no existe discriminación de precios, por lo que el precio a fijar en cada una de las dos regiones ha de ser el mismo. Plantear de nuevo el problema y determinar las cantidades y precios que permitirían seguir maximizando el beneficio.

$$\textbf{Maximizar } B(q_E, q_A) = -3q_E^2 + 330q_E - 3q_A^2 + 234q_A$$
$$\textbf{sujeto a: } q_E - q_A = 32$$



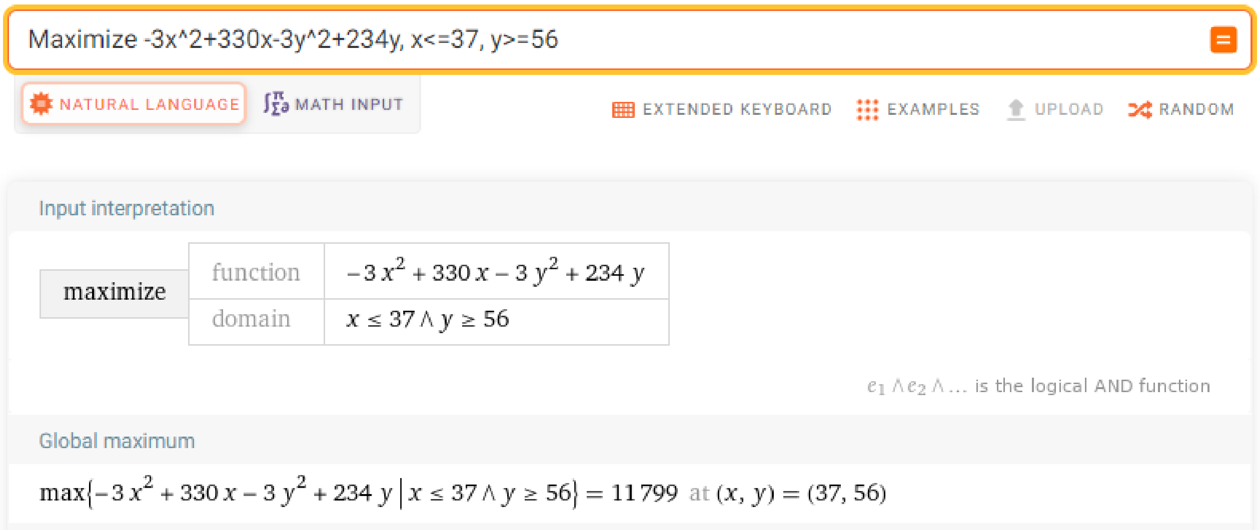
c) Partiendo del apartado b), se ha de tener además en cuenta que la política fiscal de la región europea exige que por cada unidad vendida en el mercado europeo se tributen k unidades monetarias. ¿Cómo afecta este hecho al planteamiento del problema? Determinar cuáles serían los niveles de precios y cantidades que maximizan el beneficio neto después de impuestos. Obtener la recaudación obtenida por la vía del impuesto en la región europea.

d) Partiendo de la información inicial del problema dada en el apartado a), considera que hay requerimientos en ambos mercados de forma que el mercado europeo sólo permite una cuota de producción a lo sumo de 37 unidades y el mercado americano necesitaría una cuota de al menos 56 unidades. Se pide plantear el nuevo problema y resolverlo para determinar las cantidades a producir en cada región y los precios que permitirán a la empresa seguir maximizando su beneficio (no incluir las condiciones de no negatividad). Determinar el porcentaje de variación del beneficio máximo con respecto al apartado a).

$$\textbf{Maximizar } B(q_E, q_A) = -3q_E^2 + 330q_E - 3q_A^2 + 234q_A$$

sujeto a:

$$q_E \leq 37$$
$$q_A \geq 56$$



e) Sin resolver de nuevo el problema, analiza qué efecto tendría en el beneficio máximo obtenido en el apartado anterior el hecho de que los requerimientos de producción en el mercado americano aumentaran una unidad.

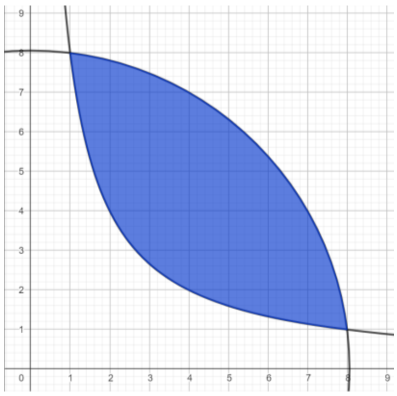
Primer llamamiento junio 2022

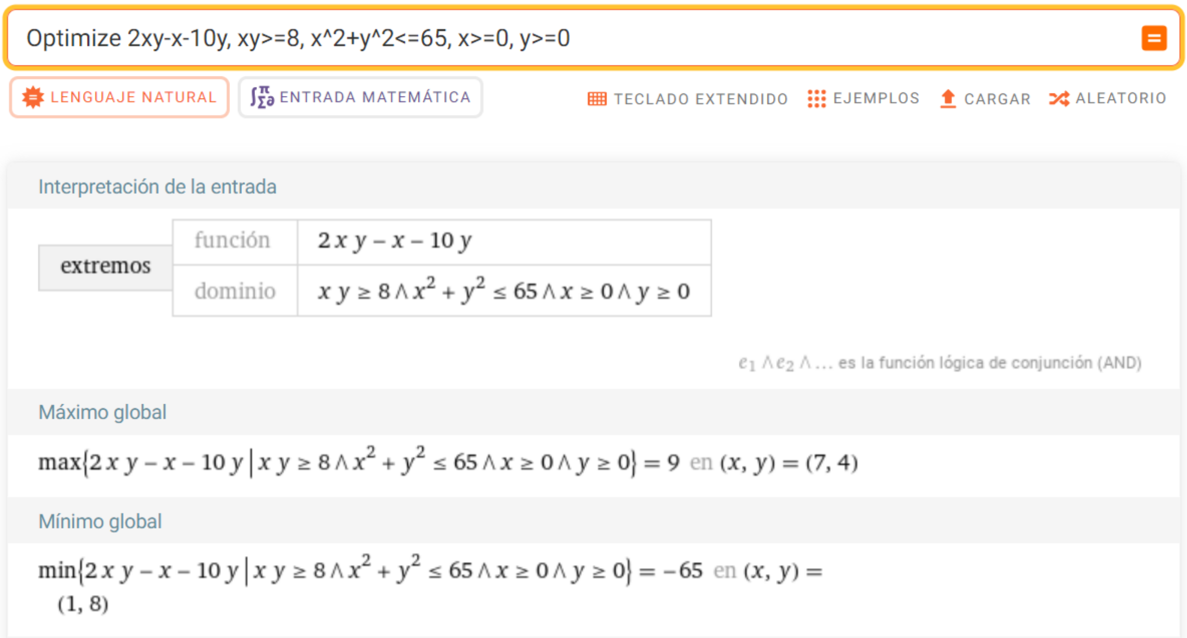
4. Una empresa emplea K y L unidades anuales de capital y mano de obra, obteniendo una producción de un único bien de $Q(K,L) = K \cdot L$ unidades.
El coste de emplear cada unidad de capital es de mil euros, mientras que el de emplear cada unidad de mano de obra es de 10 miles de euros.
El precio de venta de cada unidad del bien producido es de 2000 euros.
Para satisfacer los compromisos con los clientes se ha de producir al menos 8 unidades anuales.
Por otra parte las cantidades de factores productivos empleados, K y L, han de cumplir que: $K^2 + L^2 \leq 65$.
a) Plantear el problema de optimización del beneficio anual (máximos y mínimos) en su forma más general, **incluyendo las condiciones de no negatividad**.

Optimizar $B(K,L) = 2KL - K - 10L$
sujeto a:

$$\begin{aligned} &KL \geq 8 \\ &K^2 + L^2 \leq 65 \\ &K \geq 0, L \geq 0 \end{aligned}$$

b) Escribe la función de Lagrange y las condiciones necesarias de primer orden de Kuhn-Tucker. Estudiar si los puntos (7, 4), (1, 8), (8, 1), (6, 6) son candidatos a óptimos del problema, y cuando corresponda, aplicar Hessiana y Hessiano Orlado (ambos) para intentar clasificar cada punto como óptimo local y/o global.
c) Sabiendo que todos los puntos de Kuhn-Tucker son los obtenidos en el apartado anterior y además el punto $(4\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ (no es necesario comprobarlo), ¿qué debería hacer la empresa para obtener el mayor y menor beneficio posible? ¿por qué? (no aplicar Hessiana)





d) Sin resolver de nuevo el problema, como varía aproximadamente el beneficio mínimo si se producen al menos 2 unidades adicionales a las 8 requeridas.

$$M^* - M \approx \mu_1 \cdot \Delta k_1 = (-2.03) \cdot (-2) = 4.06$$

e) Un convenio entre el sector y la administración establece que si anualmente se contrata 2 unidades de mano de obra por cada unidad de capital empleado, recibiríamos una subvención de 0.5 miles de euros por cada unidad de mano de obra contratada.
Si nos acogemos al convenio, ¿cuál sería el máximo beneficio posible? (aplicar el método de sustitución para que el problema de optimización quede en función del capital). ¿Cómo cambiaría la respuesta si al aplicar el método sustitución el capital variase en el intervalo $[2, \sqrt{13}]$?
¿Le convendría a la empresa acogerse al convenio?

$$\begin{aligned} &\textbf{Optimizar } \boldsymbol{B(K,L) = 2KL - K - 10L + 0.5L} \\ &\textbf{sujeto a:} \\ &\qquad \boldsymbol{L = 2K} \\ &\qquad \boldsymbol{2 \leq K \leq \sqrt{13}} \end{aligned}$$

Segundo llamamiento junio 2022

3. Una multinacional de las franquicias desea analizar los beneficios que obtendrán por la franquicia de sus productos A y B, así como la producción óptima, sabiendo que si denotamos por x e y respectivamente la cantidad producida de dichos productos, la función de ingresos viene dada por $I(x,y) = x^2 + y^2 + 140$. Por otro lado, los costes unitarios son de 8 para el producto A y 20 para el producto B. Además, teniendo en cuenta la demanda del mercado, la producción total no puede ser inferior a 8 unidades y por requerimientos técnicos se tiene que se debe cumplir que: $2x + y \leq 13$.

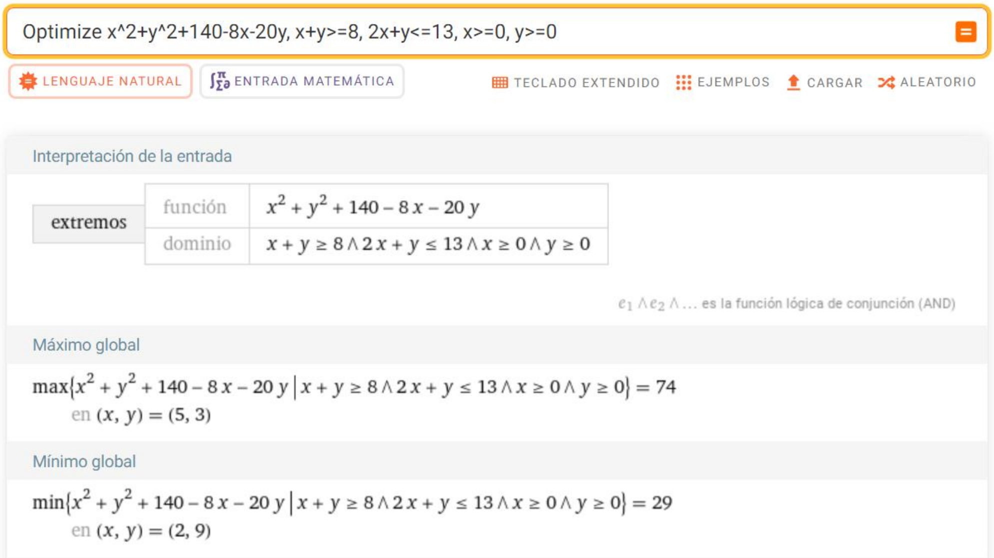
a) Plantear el problema de **optimizar el beneficio** de la multinacional (incluyendo las condiciones de no negatividad).

$$\begin{aligned} &\textbf{Optimizar } \boldsymbol{B = x^2 + y^2 + 140 - 8x - 20y} \\ &\textbf{sujeto a:} \\ &\qquad \boldsymbol{x + y \geq 8} \\ &\qquad \boldsymbol{2x + y \leq 13} \\ &\qquad \boldsymbol{x \geq 0, y \geq 0} \end{aligned}$$

Sabemos que los óptimos buscados no saturan las condiciones de no negatividad ($\boldsymbol{x \geq 0, y \geq 0}$ no son activas en los óptimos):

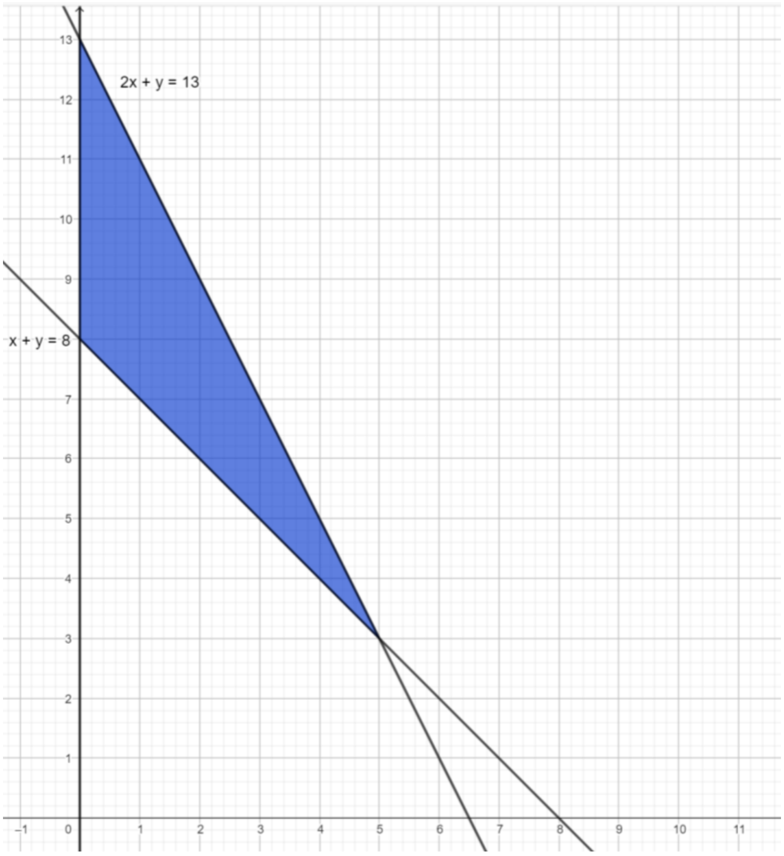
b) Construir la función de Lagrange y plantear las condiciones necesarias de primer orden de Kuhn-Tucker.

c) Obtener los puntos de K-T candidatos a máximo y a mínimo del problema. Utilizando las condiciones suficientes de segundo orden (matriz Hessiana), ¿qué conclusiones podemos obtener?



---

d) A partir de los puntos de K-T obtenidos en el apartado anterior y sin utilizar la matriz Hessiana, ¿podemos concluir qué cantidades de A y B nos darán el máximo beneficio que puede lograr la empresa y a cuánto ascendería ese beneficio máximo? **(Razona tu respuesta).**



e) A la vista de los resultados anteriores, la multinacional se plantea dos opciones para un futuro:
   i) Que la producción total no sea inferior a 7 unidades,
   ii) Que los requerimientos técnicos sean: $2x + y \leq 14$.

   Sin resolver los dos nuevos problemas de maximizar el beneficio, ¿qué recomendación le darías a la empresa?

$$M_1^* - M \approx \mu_1 \cdot \Delta k_1 = 30$$
$$M_2^* - M \approx \mu_2 \cdot \Delta k_2 = 16$$

Julio 2022

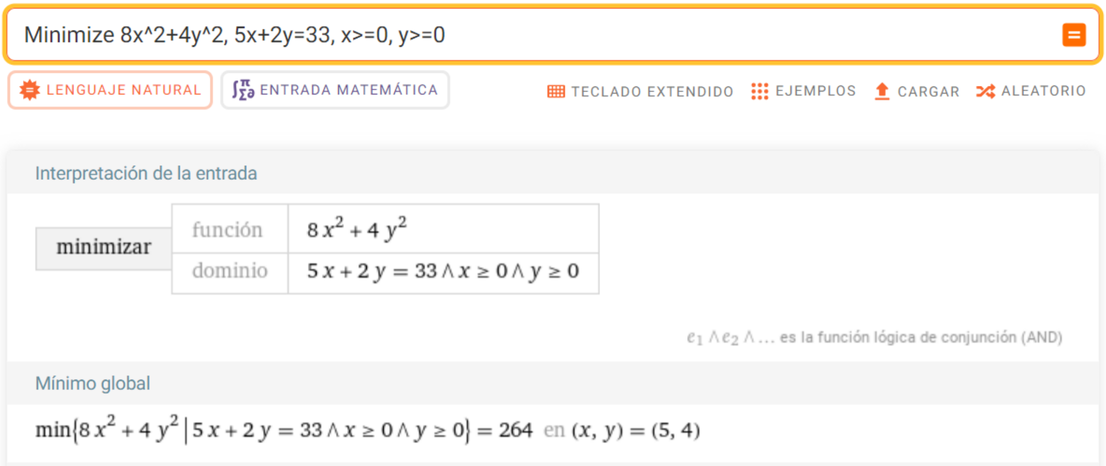
3. Una empresa produce un determinado bien a partir de dos factores productivos. Su función de producción viene dada por $Q(x,y) = 5x + 2y$. Su función de costes es $C(x,y) = 8x^2 + 4y^2$. Según las previsiones de demanda, se han de producir exactamente 33 unidades de producto. Se pide:

a) Plantear el problema completo que permite minimizar los costes para la previsión de demanda dada.

Minimizar $\boldsymbol{C = 8x^2 + 4y^2}$
sujeto a:

$$\mathbf{5x + 2y = 33}$$
$$\mathbf{x \geq 0, y \geq 0}$$

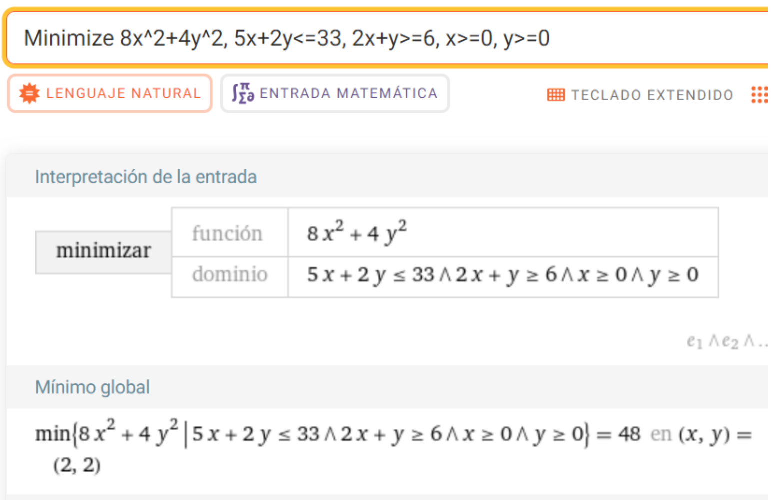
b) Sabiendo que en el óptimo las restricciones de no negatividad no son activas, determinar por el método de Lagrange el nivel de utilización de ambos factores a fin de minimizar el coste, teniendo en cuenta las previsiones de demanda.
Utilizando la matriz Hessiana, ¿puedes concluir algo sobre la globalidad del óptimo encontrado? En caso afirmativo, ¿cuál sería el coste mínimo?

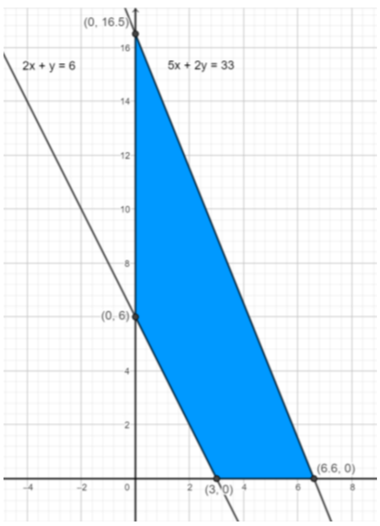


c) Empleando el método de sustitución ¿obtendrías la misma solución del apartado b)?

d) Sin resolver de nuevo el problema ¿cómo se vería afectado el coste óptimo si las necesidades de demanda se redujeran un 10%?

e) Supongamos que la empresa se plantea una nueva estrategia de minimización de costes, en la que las previsiones de demanda <u>como máximo</u> sean de 33 unidades y por requerimientos técnicos se debe verificar que $2x + y \geq 6$. Plantear el nuevo problema de minimización de costes considerando también que en el óptimo las restricciones de no negatividad no son activas. Si nos dicen que las posibles soluciones pueden ser: (0,0) (5,4), (2,2) y (21,-36), hallar el nivel óptimo de utilización de factores, así como el coste mínimo. Confirma el coste mínimo global obtenido por otro método.





Septiembre 2022

4. Una empresa produce un bien a partir de dos factores F_1 y F_2, según la función de producción dada por $P(x,y) = x \cdot y$, donde x e y son las cantidades utilizadas de dichos factores. La función de costes de la empresa viene dada por $C(x,y) = x^2 + y^2$. Además, el nivel de contaminación generado en el proceso productivo se puede estimar con la función $E(x,y) = 10x + 5y$.

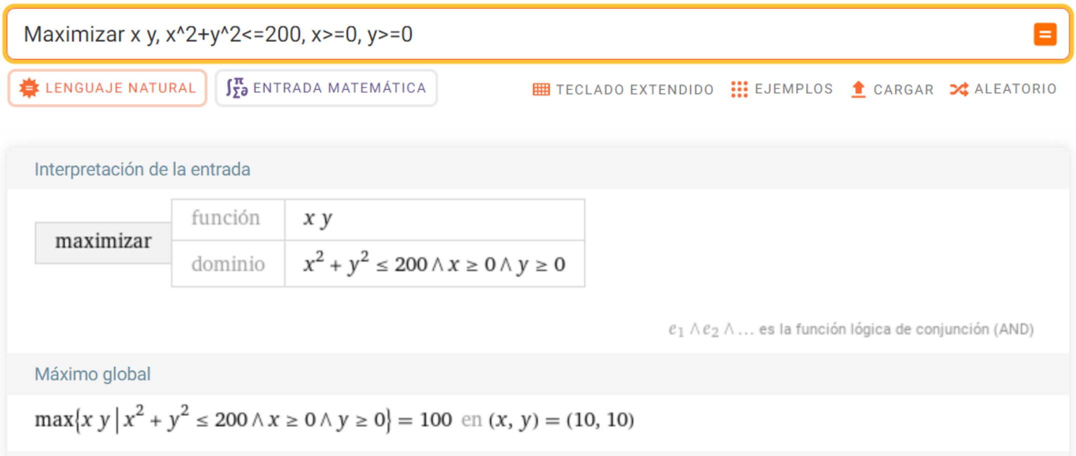
a) Si el objetivo de la empresa fuera maximizar su producción con unos costes no superiores a 200 u.m.:

a1. Plantea el problema que permite calcular las cantidades $(x, y \geq 0)$ de los factores productivos que garantizan la máxima producción.

$$\textbf{Maximizar } \boldsymbol{x \cdot y}$$
$$\textbf{sujeto a:}$$
$$\boldsymbol{x^2 + y^2 \leq 200}$$
$$\boldsymbol{x \geq 0, y \geq 0}$$

a2. Resuelve dicho problema, sabiendo que los dos factores productivos deben usarse. ¿Se puede garantizar que el óptimo obtenido es global?

a3. ¿Cuál es la producción máxima alcanzable en la situación descrita?

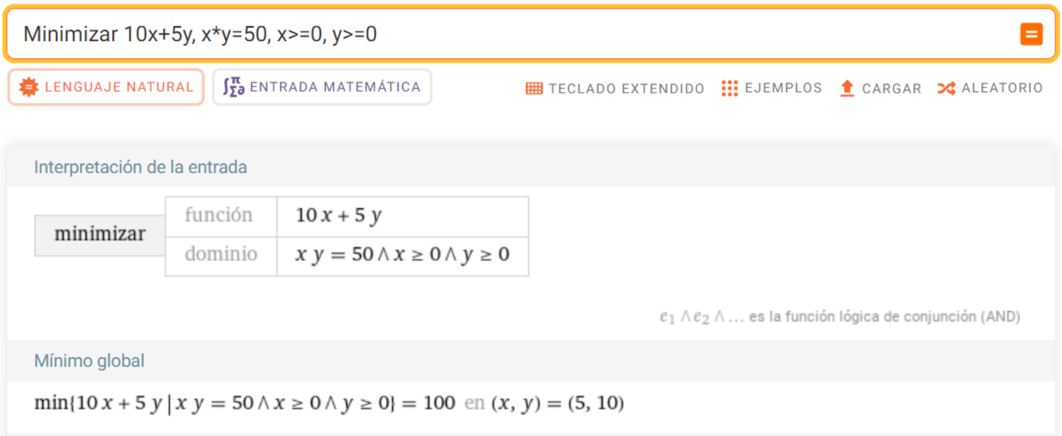


b) Si se desea obtener 50 unidades del bien producido minimizando el nivel de contaminación generado:

b1. Plantea el problema para determinar las cantidades $(x, y \geq 0)$ de cada factor que deberá emplear para lograr dicho objetivo.

$$\textbf{Minimizar } \boldsymbol{10x + 5y}$$
$$\textbf{sujeto a:}$$
$$\boldsymbol{x \cdot y = 50}$$
$$\boldsymbol{x \geq 0, y \geq 0}$$

b2. Resuelve dicho problema, asumiendo que los dos factores productivos deben usarse. ¿Se puede garantizar que el óptimo obtenido es global?



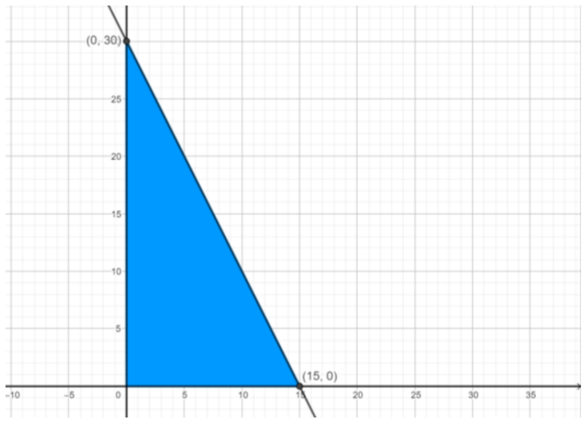
b3. Estimar la variación que se puede esperar en el nivel mínimo de contaminación obtenido como consecuencia de una disminución de un 1% en la cantidad producida.

Mayo 2023

3. Una empresa aeronáutica construye dos tipos de aviones A y B. Para ello dispone de como máximo 300 millones de euros, siendo el coste de producción de cada avión 20 y 10 millones de euros, respectivamente. Los beneficios estimados de la empresa vienen dados por la función $B(x,y) = 60x + xy + 60y - x^2 - 3y^2$, donde x e y representan el número de aviones de cada tipo que se construyen en el periodo contable. Si el objetivo de la empresa es maximizar su beneficio sin sobrepasar su presupuesto, se pide:

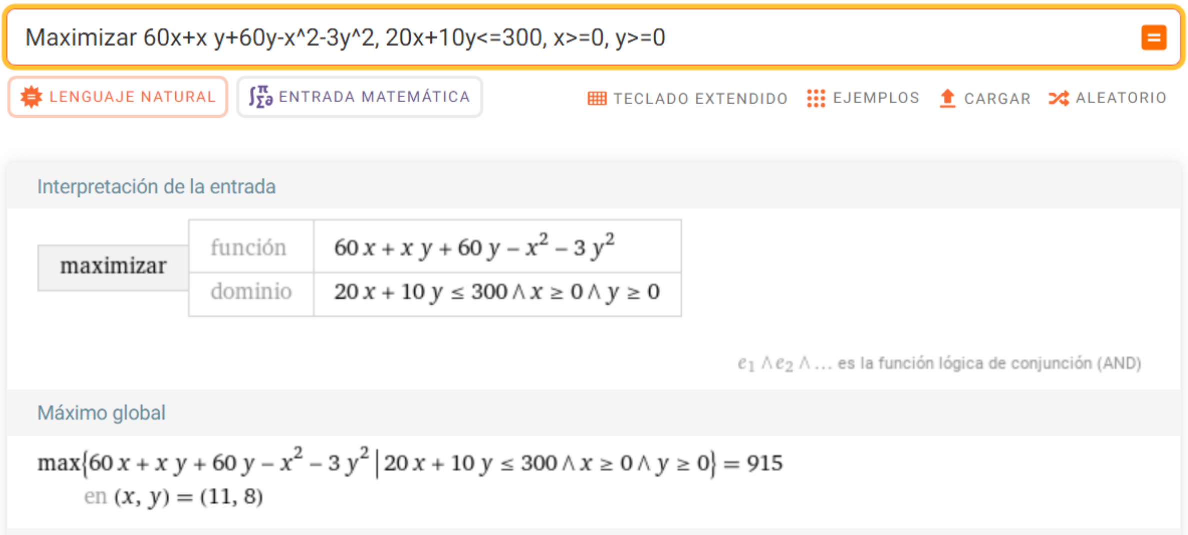
a) Plantear el problema de maximización de beneficios en su forma más general, incluyendo las condiciones de no negatividad y estudiar, sin resolverlo, la existencia de máximo global.

$$\textbf{Maximizar } 60x + xy + 60y - x^2 - 3y^2$$
sujeto a:
$$20x + 10y \le 300$$
$$x \ge 0, y \ge 0$$



b) Escribir las condiciones de Kuhn-Tucker asociadas al problema.

c) Sabiendo que lo óptimo es producir ambos tipos de aviones, resolver el problema y decidir la estrategia óptima para esta empresa. ¿A cuánto asciende el beneficio máximo?



d) Estudiar qué variación cabe esperar en el beneficio máximo ante una disminución de un 2% en el presupuesto disponible.

Junio 2023

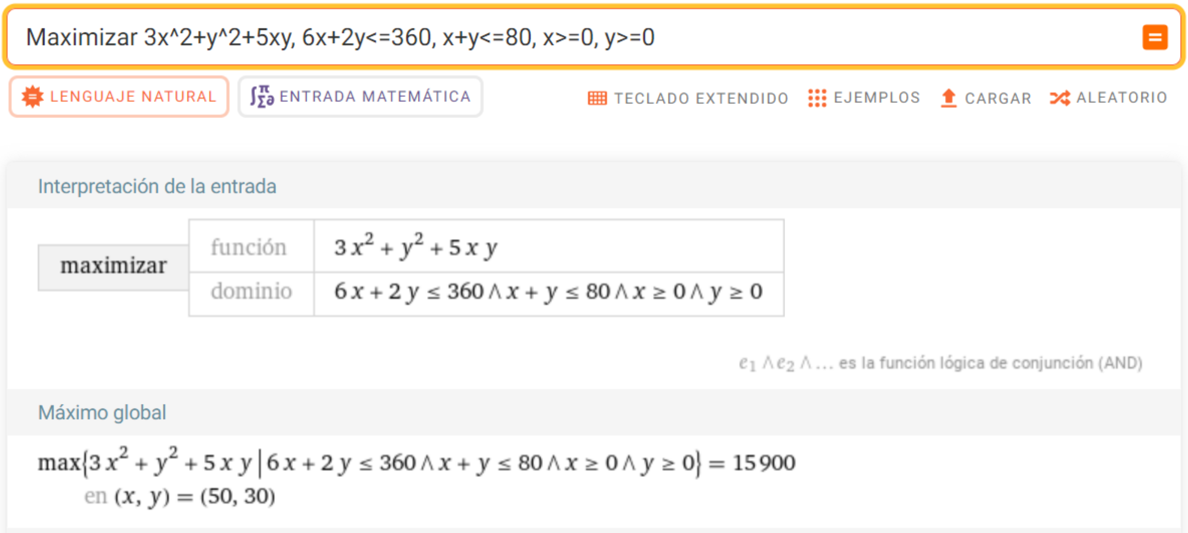
4. Una empresa produce televisores de 50 y de 65 pulgadas, si denotamos por x el número de televisores vendidos de 50 pulgadas e y el número de televisores vendidos de 65 pulgadas, el beneficio total de la empresa será $B(x,y) = 3x^2 + y^2 + 5xy$. El proceso de fabricación requiere que cada televisor pase por dos divisiones distintas de la factoría (división I y II). Los televisores de 50 y 65 pulgadas necesitan 6 y 2 horas, respectivamente, en la división I, mientras que ambos tipos de televisores requieren el mismo tiempo en la división II, concretamente 1 hora. En una jornada de trabajo semanal, las divisiones I y II trabajan un máximo de 360 y 80 horas, respectivamente.

a) Plantea el problema de optimización de maximizar el beneficio de la empresa en una jornada de trabajo semanal, añadiendo todas las restricciones posibles en el planteamiento (incluyendo las de no negatividad)

$$\textbf{Maximizar } 3x^2 + y^2 + 5xy$$
$$\textbf{sujeto a:}$$
$$\begin{aligned} 6x + 2y &\le 360 \\ x + y &\le 80 \\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

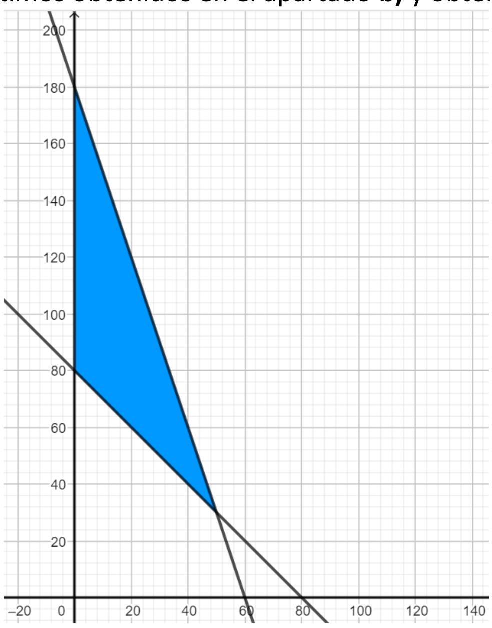
Si conocemos las condiciones de no negatividad no son activas en el óptimo buscado, resolver las siguientes cuestiones:

b) Resolver el problema de optimización de maximizar el beneficio de la empresa. Para ello, obtener los puntos de Kuhn-Tucker y clasificarlos, si es posible, con la matriz Hessiana.



c) Estudiar qué conclusiones se obtienen utilizando el Hessiano Orlado.

d) Discutir la globalidad de los óptimos obtenidos en el apartado **b)** y obtener el beneficio máximo.



e) Bajo las condiciones iniciales, si la empresa pudiera aumentar una hora de trabajo en la jornada de trabajo en solo una de las divisiones que tiene, ¿cuál debe elegir?

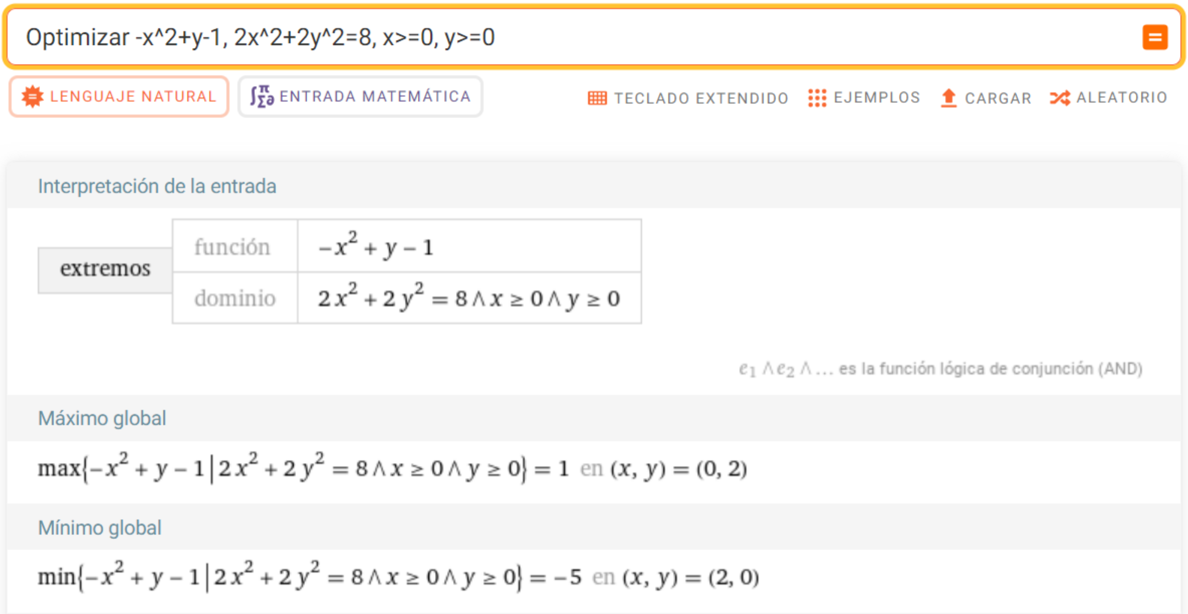
Julio 2023

4. Una empresa quiere diversificar su producción, introduciendo en el mercado una nueva bebida refrescante en dos versiones: light y cero. Según estudios de mercado, los costos de introducción vendrían dados por $C(x,y) = 4xy + 2x^2$, los ingresos por $I(x,y) = x^2 + 4xy + y - 1$, siendo x,y las cantidades producidas (en cientos) de cada versión respectivamente. Los requerimientos de producción exigen que se cumpla la relación $2x^2 + 2y^2 = 8$. Se pide:

a) Plantear el problema de optimización en su forma más general, incluyendo las condiciones de no negatividad, a fin de maximizar el beneficio.

$$\begin{aligned} &\textbf{Optimizar } \boldsymbol{B(x,y) = -x^2 + y - 1} \\ &\textbf{sujeto a: } \boldsymbol{2x^2 + 2y^2 = 8} \\ &\qquad\qquad\; \boldsymbol{x \geq 0} \\ &\qquad\qquad\; \boldsymbol{y \geq 0} \end{aligned}$$

b) Resolver el problema, obteniendo los candidatos a óptimo y clasificándolos.



c) Si la empresa decidiera no apostar por crear esta nueva línea de negocio si el beneficio máximo es inferior a 3 u.m. ¿seguiría adelante?

d) Si se plantease un nuevo escenario en el que los requerimientos de producción verifican la relación $x^2 + y^2 = 3.5$. ¿cuál sería el nuevo beneficio máximo aproximadamente? (responder sin resolver de nuevo el problema)