Escuela de Doctorado
y Estudios de Posgrado
Universidad de La Laguna

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA Y BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZAS DE IDIOMAS (INTERUNIVERSITARIO)

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Preferencias sobre la prueba en matemáticas: un estudio exploratorio con estudiantes de primer curso de los Grados de Física y Matemáticas

Presentado por:

Karim Omar Jerez Santana

Tutor:

Matías Camacho Machín

La Laguna, Julio de 2021

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo constituye el colofón del proceso vital que tuve que fijar allá cuando estaba finalizando el Bachillerato. Por ello, usaré este apartado no solo para agradecer a los que me han ayudado en la elaboración de esta memoria, sino también a aquellos que han aportado su granito de arena para que yo pueda estar donde estoy hoy.

A mi tutor el Dr. Matías Camacho Machín por sus sabios consejos, su paciencia, su predisposición a atender mis dudas y querer brindarme oportunidades.

A los docentes el Dr. Benito Juan González Rodríguez, el Dr.Ignacio García Marco y la Dra. María José Martín Gómez por alentar a sus respectivos alumnados a participar en el estudio.

A todos los profesores de matemáticas que he tenido y en especial, a Bebey, Luis y Maite, por ser quienes me ilustraron por primera vez el proceder matemático y lo bonita que es esta profesión.

A mis padres y a mi hermano por conformar mi principal sustento emocional y afectivo, y tener que soportar mis ausencias en muchas ocasiones por tener que estudiar.

A mis amigos no matemáticos Harum y Ramos por acompañarme en este trayecto, motivarme y sacarme de la biblioteca cuando lo necesitaba.

A mis amigos matemáticos Airam, Alfredo, Carlos, Christian, Fabrizio, Guillermo, Henry, Marcos y Ulises porque sin nuestras discusiones, nuestros cafés, nuestros intercambios de apuntes y nuestras comilonas, todavía seguiría en primero.

A Sibisse por darle sentido a todo.

Resumen – Abstract

Resumen

La memoria de este Trabajo Fin de Máster corresponde a la modalidad de Investigación y culmina la fase del denominado "Prácticum" del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas (Interuniversitario) por la Universidad de La Laguna. Se presenta una investigación desarrollada con estudiantes de primer curso de los Grados de Física y Matemáticas, en la que se indaga sobre el tipo de justificaciones (entre argumentos de tipo deductivo simbólico, deductivo narrativo, visual y comprobación empírica) que prefieren construir al probar resultados y proposiciones matemáticas. También, se averiguan las creencias que poseen sobre la prueba matemática, las experiencias que han tenido con la misma y sus visiones al respecto. Se concluye, entre otras cosas, que existe una clara predilección por los argumentos de tipo deductivo, concretamente los de tipo deductivo simbólico, en contraposición con los argumentos de tipo empírico.

Palabras clave: Didáctica de la Matemática – Prueba y argumentación – Creencias sobre la prueba.

Abstract

The dissertation constitutes an investigation master thesis project, which allows to conclude the "Practicum" part of this academic degree and to be enabled as secondary education teacher by the University of La Laguna. In this project, we present a research carried out with undergraduate mathematics and physics students in order to identify the type of argument (empirical-numeric, deductive-narrative, deductive-symbolic or empirical-visual) they prefer to use when are asked to provide a proof of a mathematical statement. We also look into their beliefs about proofs, their classroom experiences with learning proofs and their views with regard to the latter. From analyses carried out, one can conclude, among other things, that there is a predilection for deductive arguments (more specifically, deductive-symbolic arguments), in constrast with empirical arguments.

Keywords: Didactics of Mathematics – Proof and argumentation - Beliefs about proofs.

Índice

Introducción

La investigación que se presenta en esta memoria constituye el Trabajo Fin de Máster enmarcado en la modalidad de investigación. Conforma el último paso para la obtención del título de Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas (Interuniversitario) por la Universidad de La Laguna. Este trabajo consiste, en líneas generales, en realizar una adaptación de la investigación desarrollada por Stylianou et al. (2015) con el objetivo de explorar, tanto la relación entre las creencias de los estudiantes respecto a las pruebas de enunciados matemáticos y su comprensión, como el tipo de argumentos que prefieren cuando se les presenta la justificación o prueba de un argumento relativamente sencillo y elemental.

El trabajo está estructurado en cinco capítulos.

En el capítulo 1, se presenta el problema de investigación, se realiza una revisión bibliográfica con el objeto de estudiar los antecedentes de nuestro trabajo y se establecen cuáles son los objetivos que guiarán la investigación.

El capítulo 2 presenta el marco conceptual de la investigación. A partir de un estudio detallado de la literatura reciente sobre este ámbito de investigación, se caracterizan los conceptos de prueba, esquemas sobre la prueba y el papel que juegan, tanto en el profesorado como en los estudiantes, las concepciones sobre la prueba

En el capítulo 3, se detalla la metodología seguida en la investigación. La elección de los estudiantes, los instrumentos utilizados en la investigación y el método seguido para la recolección de los datos y el análisis de los mismos, son los elementos que conforman este capítulo de la memoria.

El cuarto capítulo, que es el más amplio, incorpora el análisis de los resultados obtenidos, así como su discusión. Se presentan en él, las respuestas de los estudiantes de los Grados en Física y Matemáticas a los tres aspectos que se analizan en el cuestionario suministrado, los cuales constituyen los instrumentos de análisis de esta investigación. Asmismo, en este capítulo se realiza la comparación de los resultados con el estudio llevado a cabo por Stylianou et al. (2015).

Finalmente, en el capítulo 5 se presentan las limitaciones que posee el estudio y las conclusiones organizadas en torno a los objetivos de investigación. Se puede afirmar que, en general, existe una preferencia de los estudiantes a seleccionar un argumento de tipo deductivo, más específicamente uno deductivo simbólico, frente a argumentos de tipo empírico o deductivos narrativos. En estas preferencias no han influido los estudios que están cursando ni su aptitud matemática. También, se puede afirmar que hasta el momento, el rol que han desempeñado los estudiantes en la enseñanza y el aprendizaje de la prueba, ha sido pasivo e individual. Por este motivo, quieren cambiar hacia posturas más activas y grupales.

Capítulo 1. Problema de investigación.

En el presente capítulo, en primer lugar se plantea el problema que se aborda en este trabajo, el cual en líneas generales consiste en explorar la relación entre las ideas y creencias que tienen los estudiantes de la prueba, una vez que han cursado alguna asignatura universitaria de contenido matemático. Luego, se exponen antecedentes teóricos del mismo, intentando incorporar investigaciones recientes. Por último, se presentan los orientadores que guiarán el proceso de investigación, es decir, el objetivo general, los objetivos específicos y las preguntas de investigación.

1.1.- El problema.

Desde que hay registros, el ser humano ha estado inmerso en el conflicto epistemológico que entraña considerar a las matemáticas como disciplina científica. El mostrar la veracidad de un enunciado, a través de una prueba –que no es más que una secuenciación de deducciones rigurosas partiendo de unas premisas calificadas como verdaderas-, motivan que el proceder matemático se distingue de cualquier otra ciencia. Que la prueba sea la seña diferenciadora, aporta ciertos indicios acerca del papel vital que desempeña dentro de las matemáticas. Michael Atiyah señala que “la prueba es el pegamento que mantiene a las matemáticas unidas” (citado en Dunham, 1994, p.15).

Sin embargo, probar no siempre ha conformado parte de la actividad matemática regular, pues los matemáticos de las civilizaciones antiguas (como la babilónica, egipcia o china) solo se interesaban en presentar los resultados y no en cómo fueron obtenidos o justificados (Hemmi y Löfwall, 2009). El cisma, tal y como afirma Raman (2002), se produjo en el siglo VI a.C., cuando los matemáticos griegos establecieron el método axiomático. Desde entonces, “la prueba es la *sine qua non* de las matemáticas”.

Vista su relevancia en la disciplina, es natural pensar que la prueba deba estar presente en la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles. En esta línea, Gardiner y Moreira (1999) afirman que “matemáticas no es probar; matemáticas no es detectar patrones; matemáticas no es calcular. Todos son necesarios, pero ninguno es suficiente.”, poniendo de relieve que no se puede enseñar matemáticas sin enseñar a probar. Esta visión, no solo se ha visto refrendada por multitud de especialistas en educación matemática, sino por organizaciones a nivel internacional como el *National Council of*

Teachers of Mathematics (NCTM, 2000).

Con tales respaldos, cabe esperar que la prueba ocupe un lugar preponderante en el currículo matemático, tal y como propone Hanna (1990). Atendiendo al currículo español actual, el cual se encuadra en la LOMCE, la prueba solo aparece explícitamente en los cursos de bachillerato. Se encuentra situada dentro de los contenidos transversales: "Iniciación a la demostración en matemáticas: métodos, razonamientos, lenguajes, etc." (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, p. 414 y p. 419), "Métodos de demostración: reducción al absurdo, método de inducción, contraejemplos, razonamientos encadenados, etc." (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, p. 414 y p. 419) y "Razonamiento deductivo e inductivo" (Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, p. 414, p. 419). El hecho que aparezca únicamente en estos cursos y a través de esos contenidos, hace pensar que es únicamente en estos dos niveles, donde se pretende que los estudiantes se acerquen por primera vez a la prueba y a las técnicas de construcción de esta. No obstante, la descripción tan vaga de los contenidos, no permite dilucidar qué demostraciones enseñar ni cuáles se esperan que los estudiantes construyan.

Lo anterior, junto con la amplia extensión del currículo y los recursos de tiempo que se dispone, el carácter preuniversitario de las matemáticas de bachillerato –que preparan más para el cálculo que el razonamiento-, la dificultad que entraña enseñar a demostrar o explicar una prueba (Arce et al., 2019; Knuth, 2002) y el desinterés de los alumnos por la misma (Arce et al., 2019), constituyen una secuencia de las posibles causas de la problemática principal que atañe a este trabajo.

Los docentes de los primeros cursos universitarios han detectado que los estudiantes, o bien desconocen completamente qué es una prueba, o bien han recibido una visión periférica y meramente anecdótica de la misma durante la educación preuniversitaria. En líneas generales, en este trabajo se trata de indagar sobre las ideas que tienen los estudiantes acerca de la prueba, una vez que han comenzado a introducirse en las matemáticas universitarias. También, se desea averiguar qué creencias poseen sobre la misma y explorar la relación entre estas y su comprensión.

En menor medida, también se pretende mostrar la resistencia a usar el registro gráfico como justificación o explicación de las afirmaciones o resultados matemáticos, y explorar la relación entre esta y sus creencias.

1.2.- Antecedentes.

El carácter dicotómico –pero no excluyente- de la problemática obliga a realizar una doble revisión bibliográfica. En primer lugar, se muestran algunas investigaciones que se han realizado en educación matemática respecto a la prueba, su papel dentro de las matemáticas y el proceso de enseñanza y aprendizaje de la misma. Posteriormente, se presentan resultados de investigación que avalan la resistencia a visualizar las matemáticas, sus posibles causas y cómo se podría tender un puente entre el lenguaje simbólico y el visual.

1.2.1-Proceso de enseñanza-aprendizaje de la prueba.

Uno de los campos de investigación más interesantes y difíciles de abordar en la educación matemática se centra en averiguar cómo ayudar a los estudiantes a llegar una comprensión adecuada de la prueba y desarrollar técnicas de construcción de la misma (Marrades y Gutierrez, 2000). Por ello, existe una amplia literatura que se podría organizar en torno a 3 ámbitos de investigación: (1) las dificultades que poseen los estudiantes al enfrentarse a una prueba, (2) las concepciones y creencias respecto a las pruebas matemáticas y (3) el concepto de prueba y su rol en las matemáticas. Aunque esta categorización no genera tres grupos disjuntos, pues se articulan entre ellos, únicamente se realizará un breve repaso histórico de lo primero, ya que en el capítulo 2 se tratará el resto.

Williams (1980), en su afán de identificar y categorizar algunos de los procesos de pensamiento subjetivo usados por los estudiantes de 16-17 años (undécimo grado de secundaria) al intentar justificar una serie de generalizaciones matemáticas, se percató que: los que mejores notas tenían (menos del 30%), eran los únicos que conocían algo del significado de la prueba; aproximadamente la mitad de los alumnos encuestados no mostró siquiera la necesidad de probar una proposición matemática ("si el producto de dos números reales es 0 y uno de ellos es distinto de 0, entonces el otro es cero") que consideraran intuitivamente obvia; no hay evidencia de que los estudiantes entiendan que un enunciado lógico y su contrapuesto son equivalentes, y que cerca del 70%, no advirtió en que el razonamiento inductivo es inadecuado para justificar generalizaciones matemáticas.

Posteriormente, Senk (1985) desarrolló una investigación acerca de la escritura de pruebas de geometría por parte de los estudiantes de 15-17 años (décimo grado y undécimo grado de secundaria). Para ello, analizó el desempeño de los mismos rellenando huecos en pruebas de dos-columnas (Figura 1) y construyendo pruebas basadas en figuras (Figura 1), concluyendo que muestran un nivel de éxito bajo.

Dos años más tarde, Selden y Selden (1987) caracterizaron y catalogaron varios errores y conceptos érroneos que surgen comúnmente en los niveles universitarios a la hora de probar un teorema.

Casi una década más tarde, Moore (1994), en una investigación con estudiantes de matemáticas y educación matemática ("majoring in mathematics or mathematics education") encontró que las principales dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje tienen tres orígenes distintos. Un primer origen denominado "Comprensión del Concepto" ("Concept Understanding"), debido a: la falta de intuición, la incapacidad de usar ideas visuales para probar, la incapacidad de enunciar las definiciones, el fallo en generar ejemplos y usarlos, y al desconocimiento de cómo articular una prueba desde una definición. Un segundo, asociado a la incapacidad de entender y usar el lenguaje y la notación matemática, que se denomina "Lenguaje y notación matemática" ("Mathematical Language and Notation"). Y finalmente, un tercero causado por el desconocimiento de cómo comenzar una prueba, denominado "Comienzo de la prueba" ("Getting Started on a Proof").

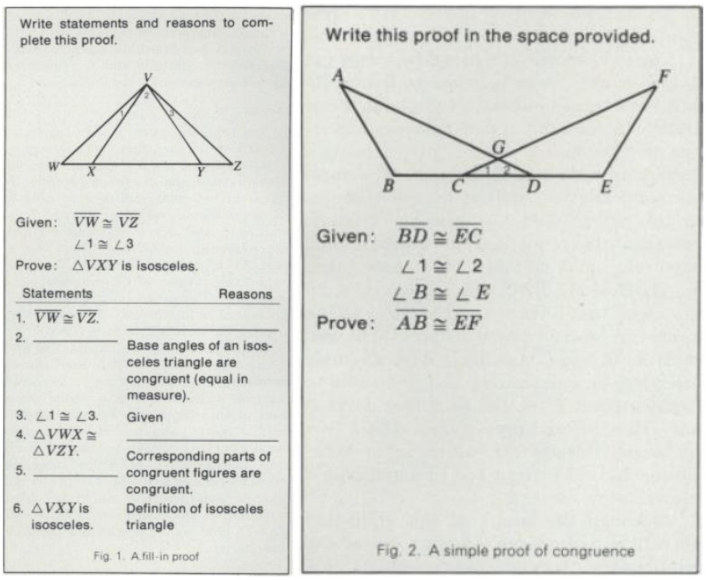


Figura 1. Muestras de una prueba de dos columnas y prueba basada en una figura, respectivamente. Extraídas de Senk (1985).

En esta línea, Weber (2001) comparó las pruebas (contextualizadas en teoría de grupos) construidas por un grupo de estudiantes de Grado de Matemáticas, con las de un grupo de estudiantes de doctorado. El análisis de este estudio sugiere que una causa principal del fracaso estudiantil en este proceso, puede ser la falta de "conocimiento estratégico" ("strategic knowledge"), refiriéndose con esto a una serie de pautas heurísticas que el alumnado puede usar para recordar acciones que le sean útiles, o le permita elegir qué acción aplicar entre varias alternativas. En este sentido, destaca tres pautas diferenciadoras entre ambos grupos que los doctorados parecen poseer y los estudiantes de grado no. Los estudiantes de doctorado mostraron el conocimiento de las técnicas de prueba propias del dominio, de qué teoremas son importantes y cuándo serán útiles, y de cuándo utilizar estrategias "sintácticas" y cuándo no, algo que no se evidenció en el alumnado de grado.

Finalmente, Antonini y Mariotti (2008), de manera similar a Williams (1980), destacaron la dificultad de algunos estudiantes para convencerse de la veracidad de alguna conjetura a partir de una demostración por contradicción.

1.2.2-Resistencia a visualizar en matemáticas.

Muchos estudiantes se muestran reticentes a visualizar los conceptos matemáticos, a pesar de que cuando se enfrentan a tareas de suma dificultad, entre ellas realizar una prueba, con frecuencia representan la situación gráficamente (Schoenfeld, 1985). En esta línea, González-Martín y Camacho (2004) destacan la renuencia a usar diagramas y esquemas visuales para dar justificaciones y explicaciones sobre la veracidad o falsedad de resultados en el análisis real. Similarmente, Zazkis et al. (2016) afirman que en análisis real, las pruebas verbales-simbólicas (aquellas que combinan el lenguaje cotidiano y la sintaxis lógica con manipulaciones algebraicas) tienen preferencia sobre los argumentos gráficos.

No parece ser un problema de madurez matemática, pues auténticos pesos pesados han pecado de lo mismo. Muestra de ello es David Hilbert, quien declaró que (extraído de Hadamard, 1954, p. 103): "He dado una demostración simplificada de la parte a) del Teorema de la curva de Jordan. Por supuesto, mi demostración es completamente aritmetizable (de lo contrario, se consideraría inexistente); pero al investigarla, nunca dejé de pensar en el diagrama (solo pensando en una curva muy retorcida) y también lo sigo recordando”. Parece ser que la exigencia de rigor exigida por la escuela bourbakista y su enfatización en la expresión analítica de las ideas matemáticas, ha supuesto el “arkhé” del proceder matemático y por consiguiente, de la enseñanza de las mismas.

Eisenberg y Dreyfus (1991) manifiestan que los estudiantes prefieran usar argumentos no visuales no es algo accidental, sino que es debido a tres razones:

- Cognitiva: el pensamiento visual requiere mayores demandas cognitivas que el algorítmico. Es más difícil, en muchas ocasiones, encontrar en una imagen los elementos “esenciales” que determinan la clave de una prueba.

- Sociológica: los aspectos visuales son difíciles de enseñar. La transposición didáctica del saber matemático, para ser enseñado, necesita de un proceso a veces complicado que requiere una mayor preparación de materiales y recursos didácticos.

- Relacionada con las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas: los aspectos visuales no son matemáticos.

Esta última razón, puede tener su origen en las aulas, donde el profesorado, también erróneamente influenciado en su momento, contagia su visión a sus pupilos. Para muestra, Eisenberg (1994) presentó a un grupo de profesores de matemáticas tres métodos para resolver la inecuación $\frac{3x}{x^2-1} > 2$: el primero denominado “case method”, que se basa en hacer un estudio de casos; el segundo denominado “snake method”, que se basa en graficar un polinomio de una inecuación equivalente, y un tercero, que se denomina “graphical method” y se basa en graficar ambos miembros de la desigualdad. Posteriormente, les pidió que eligieran qué método usarían para probar la solución a sus estudiantes. Un 90% eligió el “case method”, un 10% el “snake method” y nadie el “graphical method”, ya que consideraban a las soluciones gráficas como “inferiores”. Similarmente, Dickerson (2008) llevó a cabo un estudio sobre la comprensión de la prueba, para lo que entrevistó a 17 profesores de secundaria estadounidenses. 16 de los participantes manifestaron su reticencia a convencerse de la veracidad de un enunciado a través de una prueba visual, debido al formato o a la falta de detalle que presenta.

No obstante, el registro gráfico tiene un uso potencial en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la prueba, tal y como indican Weber y Alcock (2009, 2010), quienes sostienen que las pruebas basadas en un argumento gráfico, aportan un mayor convencimiento de las proposiciones que se están probando, y que el hecho de construir argumentos gráficos para justificar una afirmación, conforma un importante primer paso para la escritura de una prueba.

De esta forma, la atención se ha focalizado en tender un puente entre el mundo visual y el algebraico. En esta línea, Zaskis et al. (2016) analizaron el vacío que existe al pasar de un argumento informal, concretamente uno gráfico, a una prueba de tipo verbal-simbólico. Para ello, se estudió las pruebas construidas por 21 graduados en matemáticas, las cuales estaban basadas en un argumento gráfico. Como resultado de esta investigación, se establecen tres actividades que los participantes realizan al transcribir lo visual a lo verbal-simbólico: una primera denominada “Elaboración” (“Elaborating”), cuando los participantes justificaban afirmaciones que daban por sentadas; una segunda denominada “Sintactificación” (“Syntactifying”), cuando escribían el significado de lo que se quería transmitir mediante la representación gráfica, y una tercera que se denomina “Re-garantización” (“Rewarranting”), cuando trataban de encontrar una razón nueva y más apropiada para una afirmación que la utilizada en su argumento gráfico.

1.3.- Objetivos.

Como se observa en el apartado anterior y en el capítulo 2 del presente trabajo, cuando se ha investigado acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la pueba, el foco se ha puesto principalmente en la educación secundaria. También, se han tratado de forma compartimentada las concepciones y dificultades del alumnado respecto a la misma. Así, mediante este estudio se pretende tender un puente entre ambas, explorando las experiencias previas del alumnado respecto al proceso de enseñanza y aprendizaje de la prueba, la relación entre las creencias de los estudiantes respecto a las pruebas y su comprensión y el tipo de argumentos que prefieren cuando se les presenta la justificación o prueba de un argumento relativamente sencillo, una vez que han comenzado a sumergirse en las matemáticas universitarias. Para lograrlo, se adaptará el estudio desarrollado por Stylianou et al. (2015) y se tratará de responder a las siguientes preguntas: ¿Qué tipo de justificación toman los estudiantes como prueba y por qué?, ¿Influyen la naturaleza de los estudios cursados y la aptitud matemática? y ¿Cuáles son las experiencias del alumnado en la enseñanza y aprendizaje de la prueba y qué creen al respecto?

De este modo, el objetivo general de esta investigación consiste en:

- Analizar las concepciones y creencias que tienen los estudiantes de primeros cursos universitarios sobre el papel de la prueba en su aprendizaje de las matemáticas, así como el tipo de argumentaciones que consideran más rigurosas, válidas, claras y más comunicables a los demás, cuando se encuentran con una situación, propiedad o resultado matemático.

Para alcanzar este objetivo general, nos hemos propuesto los siguientes objetivos específicos, los cuales guiarán el desarrollo de este trabajo de investigación:

- Determinar las preferencias de los estudiantes a la hora de seleccionar, entre diferentes formas de presentar una prueba, la justificación que construiría y que encuentre más clara y más rigurosa entre varias opciones de pruebas (deductiva simbólica, deductiva narrativa, visual y empírica).
- Caracterizar la concepción de los estudiantes sobre qué tipo de justificación posee imperfecciones lógicas, es consistente, no es rigurosa y no conforma una prueba.
- Indagar sobre los antecedentes de los estudiantes en su formación previa de matemáticas, así como el papel del profesor en la enseñanza y aprendizaje de la prueba, y el del alumno en la construcción de las argumentaciones necesarias para aprender lo que es una prueba.
- Establecer cuáles son las creencias que poseen los estudiantes sobre la importancia de la prueba en su formación, así como cómo debe ser enseñada la prueba de propiedades o resultados matemáticos.

En el capítulo 4, se incorporará la discusión de los resultados de Stylianou et al. (2015).

Capítulo 2. Marco conceptual.

En este capítulo, en primera instancia se realiza un repaso histórico sobre el concepto de prueba en matemáticas, poniendo de relieve su papel dentro de las mismas y la falta de consenso existente dentro de la comunidad matemática respecto a qué constituye una. Luego, ante la imposibilidad de establecer una definición precisa, se opta por analizar para qué sirve la prueba matemática. Finalmente, se realiza una revisión bibliográfica sobre las investigaciones que se han llevado a cabo acerca de las concepciones que poseen tanto el alumnado como el profesorado respecto a la prueba matemática.

2.1.- La prueba en matemáticas.

Dentro de la comunidad matemática, es ampliamente aceptado que la principal característica que diferencia a las matemáticas de cualquier otra disciplina científica o rama del saber es el razonamiento deductivo que se practica y que culmina en lo que se conoce como prueba o demostración (Davis y Hersh, 1981). Paradójicamente, no se ha llegado a ningún consenso respecto qué es o qué se considera por prueba matemática.

Según Hersh (1993), la prueba en matemáticas posee dos significados, uno más común y práctico, y otro más tradicional y especializado en la lógica matemática. El primero consiste en que la prueba es un argumento que convence a jueces cualificados. El segundo estriba en que es una secuencia de argumentos lógicos que permite dilucidar la veracidad de un enunciado o establecer uno.

En los últimos tiempos, el primer significado es el que se ha ido estableciendo, siendo refrendado por diversos matemáticos y especialistas en didáctica de las matemáticas, como Balacheff (1987) quien afirma que una prueba es una explicación aceptada por una comunidad dada en un momento dado. O Hanna (1991), quien afirma que la prueba es un argumento que se necesita para validar enunciados y que puede adoptar diferentes formas siempre que sea convincente. Esto puede encontrar su justificación en el hecho que el segundo significado ha perdido coherencia con las pruebas que hacen realmente los matemáticos hoy en día. Bien sea porque diversas concatenaciones lógicas se presuponen para que la exposición no sea extremadamente larga (Thurston, 1994), o porque no sean pruebas tradicionales.

Las matemáticas recientes han tenido que convivir con el desarrollo computacional y su uso para probar o falsear conjeturas. Ejemplo de ello es la prueba del teorema de los cuatro colores realizada por Appel y Haken (1976), en la cual se hizo uso de un ordenador para encontrar todos los posibles contraejemplos. Esta fue rechazada por algunos matemáticos debido a la concepción tradicional que tenían, siendo acusada la prueba de carecer elegancia y comparada, incluso, con una guía telefónica.

No obstante, aunque exista esta dicotomía de significados, Davis y Hersh (1981) postularon que cualquier argumento que se categorice de prueba, posee intrínsecamente o parten de los siguientes ingredientes: la abstracción, la axiomatización, la deducción y la formalización. Similarmente, Stylianides (2007) propone evaluar si un argumento o no constituye una prueba atendiendo a: 1) los hechos que se toman como puntos iniciales del argumento, (2) el sistema de representación usado y (3) la validez de los métodos de inferencia usados en el argumento.

Como consecuencia de lo anterior, se tiene que el concepto de prueba no solo es difícil de establecer, sino vago y amplio. Por ello, los especialistas en didáctica de las matemáticas y los matemáticos han intentado aproximarse a él, investigando sobre los propósitos o roles de la prueba en las matemáticas. En este sentido, Hanna (2000) recopiló las visiones efectuadas hasta la fecha y concluyó que la prueba constituye un medio de: verificación, pues permite probar la veracidad de una conjetura matemática o afirmación; explicación, ya que permite comprender las razones subyacentes por las que la conjetura es cierta; sistematización, puesto que en ella, se organizan varios resultados en un sistema deductivo de axiomas, conceptos y teoremas; descubrimiento; debido a que hay resultados que se han descubierto de una manera puramente deductiva; comunicación, ya que en ella, se transmite conocimiento matemático; construcción, pues permite la construcción de una teoría empírica; exploración; debido a que permite indagar en el significado de una definición o las consecuencias de una suposición, e incorporación, pues permite incorporar hechos conocidos en un nuevo marco, viéndolos desde una nueva perspectiva.

Ante el conflicto que supone discutir lo qué es una prueba y para qué sirve, resulta importante que la situación pueda ser analizada atendiendo a las opiniones de los estudiantes que se están iniciando en ella. Por ello, este trabajo trata, de alguna manera, de contribuir a la comprensión del significado de la prueba desde distintas perspectivas.

2.2.- Concepciones sobre la prueba.

Es natural considerar que las dificultades que existen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la prueba, están relacionadas con el sistema de creencias de las personas que suelen participar, es decir, los profesores y los estudiantes de matemáticas. Por ello, en este apartado se realizará una revisión de la literatura que recoge las visiones de ambos colectivos sobre qué es una prueba y el rol que posee.

2.2.1.- Según alumnado.

En este ámbito, el foco se ha puesto principalmente en conocer qué pruebas construye el alumnado y qué tipo de argumentos consideran los estudiantes como prueba.

Balacheff (1988) realizó un estudio acerca de las prácticas matemáticas en la secundaria, concretamente de la prueba. Para ello, analizó las pruebas construidas en parejas por un grupo de 28 alumnos con edades comprendidas entre los trece y catorce años. Estas fueron principalmente clasificadas en dos categorías, las cuales se subdividen y corresponden a varios niveles de pensamiento, uno más sofisticado que el anterior, denominados esquemas de prueba:

- Justificaciones pragmáticas: son aquellas en las que el alumnado selecciona ejemplos para justificar las afirmaciones.
    - Empirismo ingenuo: si selecciona de manera aleatoria uno o varios ejemplos, que son percibidos como casos aislados.
    - Experimento crucial: si selecciona cuidadosamente varios ejemplos, pues parte de que todos se comportarán de la misma manera.
    - Ejemplo genérico: si selecciona ejemplos que representen características de toda una clase de casos.
- Justificaciones conceptuales: son aquellas en las que el estudiante justifica siguiendo un proceso deductivo.
    - Experimento mental: si la justificación se dilucida de ejemplos

específicos.

- Cálculo simbólico: si la justificación está basada en una transformación de símbolos.

Una década más tarde, Harel y Sowder (1998) adujeron que probar o justificar una conjetura matematica comprende verificar (convencerse a uno mismo) y persuadir (convencer a los demás). De esta forma, las creencias de una persona acerca de qué consiste verificar y persuadir constituye lo que se denomina su esquema de prueba individual. Propusieron tres tipos principales de esquemas de prueba en estudiantes:

- Por convicción externa. Los estudiantes construyen las justificaciones o aceptan la validez de un argumento según:
  - El formato del mismo sin importar su contenido (esquema de prueba ritual).
  - La palabra de una autoridad, como por ejemplo un profesor (esquema de prueba de autoridad).
  - Alguna manipulación simbólica sin referencia al significado de los símbolos (esquema de prueba simbólico).
- Empírico. Si justifican:
  - La veracidad de una conjetura realizando comprobaciones numéricas o ejemplos (esquema de prueba inductivo).
  - Una afirmación matemática basándose únicamente en la apariencia de una representación visual de un objeto matemático (esquema de prueba perceptual).
- Analítico. Si justifican la veracidad de una conjetura usando deducción lógica. Puede ser:
  - Esquema de prueba transformacional: Si el estudiante actúa con un objetivo en mente realizando distintas transformaciones.

- Esquema de prueba axiomático: Si va más allá y se percata que los distintos sistemas matemáticos parten de los axiomas.

Healy y Hoyles (2000), a partir de un cuestionario que incluía preguntas de álgebra y geometría, analizaron las concepciones que poseían los estudiantes ingleses y galeses de 14 y 15 años acerca de las demostraciones. Además, examinaron la relación con el currículo nacional y el desempeño que presenta el alumnado en la construcción de pruebas. Observaron que los estudiantes usan argumentos empíricos cuando se les pide construir una prueba, pero la mayoría reconoce que: tienen un bajo estatus, no recibirían la mejor nota por parte de los profesores, no son generales y constituyen un poderoso medio para ganar convencimiento acerca de la veracidad de un enunciado. También, el equipo investigador detectó que: la mayoría de alumnos era consciente que una prueba válida debe ser general, es decir, que no necesita ningún trabajo adicional para determinar la veracidad de casos específicos. Asimismo, descubrió que los argumentos deductivos escritos de forma narrativa en lenguaje cotidiano, conforman las construccciones que más se aproximarían a las que hacen los estudiantes y las que consideran más claras y explicativas. En cambio, estas características no las comparten con los argumentos deductivos con expresiones algebraicas, aunque sí creen que estos recibirían la mejor nota por parte de los profesores.

Recio y Godino (2001) presentaron la hipótesis de que los esquemas de prueba podían estar relacionados con el significado de la prueba en distintos contextos en los que los estudiantes están inmersos. Para ello, analizaron los esquemas de prueba en estudiantes que estaban comenzando sus estudios en la Universidad de Córdoba (España) mediante un cuestionario que incluía problemas de geometría y aritmética. Distinguieron cuatro tipo de esquemas y lo relacionaron con cuatro significados de la prueba en distintas instituciones:

Tipo de esquema de prueba	Institución
Esquema argumentativo-explicativo. Buscan explicar la proposición no validarla.	Vida cotidiana. Es una argumentación informal que no produce verdad y depende del contexto y la situación emocional del sujeto.
Esquema inductivo-empírico. Verifican la proposición a través de procedimientos empírico-inductivos, en	Ciencias experimentales. Es una argumentación científica con intención validatoria que conduce a generar

particular usando ejemplos.	conocimiento científico condicionada por confirmación experimental.
Esquema deductivo informal. Usan teoremas, proposiciones o analogías, a través de procedimientos lógicos informales o parcialmente correctos.	Matemáticas profesional. Es el proceso argumentativo que los matemáticos desarrollan para justificar la veracidad de las proposiciones matemáticas, el cual es esencialmente un proceso lógico, pero que se aleja mucho de la clásica concepción de prueba.
Esquema deductivo formal. Usan las formas elementales de una prueba deductiva, es decir, siguen un procedimiento formal usando un lenguaje simbólico y algebraico en el que operan los términos matemáticos y no el significado de los mismos.	Lógica y fundamentos de la matemática. Es una argumentación deductiva que tiene lugar en los sistemas formales o axiomáticos, los cuales lo conforman: a) una colección indefinida de términos y símbolos, b) reglas sintácticas para construir oraciones y fórmulas partiendo de símbolos y términos indefinidos, y c) una colección de axiomas.

Además, se apreció que la correcta instrucción del profesor fue efectiva en desarrollar los esquemas deductivo formales, pero los inductivo-empíricos fueron resistentes al cambio. Estos últimos, comprendían el tipo de argumentación espontánea en un alto porcentaje de los estudiantes cuando se enfrentaban a problemas nuevos, en los cuales tenían que desarrollar nuevas técnicas de prueba. Por este motivo, propusieron que la enseñanza de las matemáticas en la escuela debería tener en cuenta los significados de la prueba en distintos contextos, en orden de ayudar a los estudiantes a discernir las circunstancias apropiadas para cada tipo de argumento.

En el mismo año, Ibañes y Ortega (2001) llevaron a cabo una experimentación con alumnos de primer curso de bachillerato, con el objetivo de abordar cómo los alumnos pasan de un esquema a otro y cómo influye en esta transformación la instrucción.

En primer lugar, se pidió que los alumnos justificaran que "la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180º". Para categorizar las respuestas, se refinó la clasificación de Harel y Sowder (1998):

- Se introduce el esquema de prueba experimental entre los esquemas de prueba empíricos, ya que "hay alumnos que precisan de la manipulación física, real o virtual, para llevar a cabo su argumentación". Según el procedimiento usado, se dividen en: estáticos y dinámicos.
- Los esquemas de prueba inductivos se clasifican ahora atendiendo a:
    - La interpretación del alumno:

        - Falsamente inductivos: "el alumno entiende la justificación de la proposición como su comprobación en algún caso".
        - Inductivos auténticos: "el alumno comprueba la proposición en en algún caso particular, siendo consciente de la necesidad de suponer su validez universal particular, siendo consciente de la necesidad de suponer su validez universal ante la imposibilidad práctica de realizar la comprobación en todos los casos".
    - El número de casos:
        - De un caso: "se comprueba un caso particular".
        - De varios casos: "se comprueba en dos o más casos".
    - La forma de seleccionarlos:
        - Sistemáticos: "la elección de los casos obedece a un criterio".
        - No sistemáticos: "no hay criterio definido en la elección de los casos".
- El esquema de prueba transformacional se clasifica ahora según su: procedimiento (estático o dinámico), extensión (particular si "razona sobre un objeto particular" o general si "razona con elementos genéricos") y grado de corrección (incompleto si "el razonamiento es incompleto o incorrecto", o completo si es el caso contrario).

Atendiendo a esta categorización, se visualizó que: mayoritariamente "los estudiantes no conocen las reglas que deben respetar para justificar un resultado", el esquema inductivo se manifestó menos de lo esperado y existe una "abundancia de esquemas de prueba transformacionales erróneos".

Luego, el equipo investigador diseñó una clase para conducir al alumnado hacia a los esquemas de prueba transformacionales y pidió a los alumnos que obtuviesen justificadamente "la suma de las medidas de los ángulos exteriores de un triángulo". Como resultado, el equipo tuvo que ratificar su opinión inicial sobre los esquemas inductivos, ya que observó una alta presencia en el estudiantado.

Por último, se propuso al alumnado cinco justificaciones de distinto tipo (inductivo de un caso, inductivo de varios casos, inductivo sistemático, transformacional y axiomática) y se pidió que decidieran si el teorema quedaba o no probado en cada caso. Para analizar las respuestas fue necesario introducir nuevas modalidades que completan la idea previa de esquema de prueba:

- Esquema aceptado: "es el de una prueba que el alumno admite como demostración".
- Esquema adherido: "si el alumno rechaza explícitamente las pruebas anteriormente expuestas"
- Esquema declarado: "es el que el alumno considera haber seguido. Este esquema no tiene por qué coincidir ni con el esquema utilizado ni con el aceptado"**.**

Se visualizó que tras una secuencia didáctica adecuada, gran parte del alumnado (dos de cada tres) abandona las posiciones inductivas fuertemente enraizadas hacia esquemas analíticos.

Similarmente, dos años más tarde los mismos autores (Ibañes y Ortega, 2003) también llevaron a cabo un estudio sobre el reconocimiento de diferentes procesos matemáticos, en particular la demostración, por parte de alumnos de primero de bachillerato. Al igual que el otro, se dividió en tres partes: una primera, en la que tuvieron discernir entre comprobaciones y demostraciones de una serie de enunciados; una segunda, en la que tras un periodo instructivo sobre la identificación y distinción de distintos procesos, se pide a los alumnos que contesten tres cuestiones, y una tercera, en la que el equipo investigador diseña una serie de preguntas activadoras basadas en "la identificación de las demostraciones y su distinción frente a las comprobaciones" y "las consecuencias de demostrar un teorema", para ayudar al estudiantado a contestar una serie de cuestiones similares a las de las dos primeras partes. Tras analizar las respuestas, concluyeron que: el rol que más destaca el alumnado de la prueba es el explicativo; el reconocimiento de la demostración está influenciado por los esquemas de prueba individuales y en concreto, el "fuerte enraizamiento de los esquemas inductivos", y los alumnos que no han recibido una instrucción adecuada creen que se pueden encontrar ejemplos que no satisfagan un problema ya demostrado, lo cual mejora con una correcta intervención.

Catorce años más tarde, Stylianou et al. (2015) exploraron la relación entre el entendimiento que poseen los estudiantes de primer curso universitario acerca de las pruebas con sus creencias respecto a las mismas, y cómo se comparan estas visiones con el proceso de enseñanza-aprendizaje que han tenido en etapas anteriores. Debido a la proximidad del estudio que este trabajo concierne con esta investigación, en el capítulo 4 se mostrarán los principales resultados de la misma junto a las diferencias o similitudes con el nuestro.

2.2.2.- Según el profesorado.

La necesidad de analizar a este colectivo en este capítulo reside principalmente en la influencia que tienen sobre el alumnado. Si un profesor posee una serie concepciones sobre las pruebas y una idea equivocada sobre ellas, ¿acaso no es normal que contagie ambas a sus estudiantes y provoque las dificultades que se han mostrado? No obstante, existe poca reproducción literaria en este ámbito y la que hay, la mayor parte está realizada con estudiantes universitarios (futuros profesores) y no con profesores en activo. Sin embargo, se ha podido recapitular suficiente información para obtener una visión general acerca de las concepciones del profesorado respecto al rol de la prueba, qué constituye una prueba para ellos y qué esquemas de prueba poseen. Para los dos primeros fines, a la par que se introduce algo de literatura hispana, se realizará una traducción de parte del trabajo realizado por Yi-Yin Ko (2010), quien efectuó una revisión bibliográfica (fundamentalmente estadounidense) existente sobre las concepciones de la prueba de los profesores de matemáticas de primaria y secundaria, además de proponer unas líneas de trabajo para atajar la problemática que expone sobre las mismas.

En primer lugar, se realizará una revisión bibliográfica concerniente a las concepciones del rol de la prueba por parte del profesorado de secundaria. Goetting (1995) y Mingus y Grassl (1999) entrevistaron a 16 y 30 alumnos estadounidenses, respectivamente. Todos se encontraban enrolados en un programa universitario que les permitía ser profesor de secundaria. De los análisis llevados a cabo, dedujeron que la principal función que le otorgan a la prueba es el explicativo. Knuth (2002) llevó a cabo una investigación acerca de las concepciones del profesorado de secundaria sobre las pruebas en EEUU. Para este fin, entrevistó a 16 profesores de secundaria de matemáticas y encontró que, aunque todos aludiesen el rol verifcativo que posee la prueba, nadie hizo lo con el explicativo. Vicario y Carrillo-Yañez (2005) examinaron las concepciones que tenían dos profesores de secundaria (licenciados en matemáticas) respecto a la demostración y sus funciones. El estudio llevado a cabo sugirió que el profesorado tiene una concepción equivocada acerca de lo que constituye una demostración, aunque sí reconoce la diversidad de funciones que posee.

Ahora, se analizará cómo profesores y futuros profesores siguen aceptando argumentos empíricos como pruebas en geometría y teoría de números, aunque ya hayan cursado asignaturas de contenido puramente matemático. En el estudio de Goetting (1995), también se entrevistó a 11 futuros profesores de primaria, de los cuales un 72% aceptaron la evidencia empírica como una prueba matemática válida. Además, se encontró que en geometría, los futuros profesores de primaria eran más proclives a aceptar los ejemplos como prueba. Similarmente, Morris (2002) llevó a cabo una investigación sobre la capacidad de los adultos de distinguir aspectos inductivos y deductivos en matemáticas. Para tal fin, analizó a 30 estudiantes universitarios que se estaban preparando para ser profesores de primaria y secundaria. El estudio arrojó que el 40% fallaba al distinguir ambos tipos de argumentos, además de considerar que los dos establecían veracidad matemática. En la investigación de Knuth (2002), 5 de los 16 entrevistados señalaron que un ejemplo constituye una prueba válida. Gholamazad et al. (2004) condujeron un estudio con el propósito de conocer qué constituye una prueba para el profesorado. Para lograrlo, entrevistaron a 75 futuros profesores de primaria y visualizaron que la mayoría creía que dos o tres ejemplos concretos era suficiente para probar una afirmación matemática.

Por último, se examinarán algunas investigaciones recientes respecto a los esquemas de prueba por parte del profesorado. Gskenderoglu et al. (2011) llevaron a cabo un estudio con el propósito de conocer cómo el profesorado justifica las soluciones cuando resuelven los problemas de matemáticas. Para lograrlo, distribuyeron un cuestionario a 40 futuros profesores de primaria (estudiantes de primer curso universitario) y se realizó una entrevista clínica a 6 de ellos. Las respuestas fueron categorizadas siguiendo el esquema de Harel y Sowder (1998). El análisis de los datos mostró que el esquema empírico fue el que más se manifestó, apareciendo los otros dos en menor medida y de la misma forma. Además, el equipo investigador destaca que hay personas en las que el esquema empírico no se ha presentado, sugiriendo que la predisposición hacia un esquema u otro está determinada por las previas de los estudiantes. De forma similar, Sears (2019) analizó los esquemas de prueba de 6 estudiantes universitarios de tercer y cuarto curso, los cuales estaban cursando una carrera que les capacitaba para ser profesor de secundaria. Al igual que en la investigación anterior, usó el esquema de Harel y Sowder (1998) para analizar las pruebas construidas de una serie de conjeturas propuestas con el fin de mejorar los futuros programas de preparación docente. Se observó que: quien aspira a enseñar en los primeros cursos de secundaria ("grades 5-9 certification"), principalmente usa un esquema de prueba por convicción externa; quien aspira a enseñar en los cursos superiores ("grade 9-12 certification") usa una amplia gama de esquemas, y quien aspira en ser profesor en los dos, fundamentalmente usa un esquema empírico de prueba.

Capítulo 3. Metodología.

En este capítulo se detallan los componentes metodológicos que fueron seleccionados para conseguir los objetivos propuestos. Se ha decidido dividirlo en tres apartados: un primero, dedicado a describir los participantes del estudio y la formación que han tenido; un segundo, en el que se describen las distintas partes del instrumento de investigación y cómo se corresponden con los objetivos específicos, y un último, en el que se detalla cómo se realizó el procesamiento de las respuestas.

3.1.- Participantes.

En este estudio, participaron 66 estudiantes de primer curso universitario de la Universidad de La Laguna, de los cuales 42 estaban matriculados en el Grado de Física, concretamente en la asignatura "Métodos Matemáticos II: Cálculo Diferencial", y 24 en el de Matemáticas, en las asignaturas "Álgebra Lineal" y "Cálculo Integral de una variable real".

La participación fue voluntaria y no se hizo atendiendo a ningún criterio específico, sino simplemente se requería que hubiesen cursado alguna asignatura universitaria, preferiblemente al menos 12 créditos ECTS, de contenido eminentemente matemático, y que se encontrasen matriculados de alguna de primer curso de la misma naturaleza.

El plan de estudios de ambas carreras está organizado de tal forma que durante el primer cuatrimestre, prácticamente la mitad de las asignaturas son de matemáticas, en las que, tal y como atestigüan un 94% de los participantes, se dan importancia a las demostraciones. Particularmente, los participantes de matemáticas han cursado: "Fundamentos de Matemáticas" (6 créditos ECTS), en la cual se introducen la teoría de conjuntos y los sistemas de ecuaciones, y "Cálculo Diferencial de una variable real" (9 créditos ECTS), en la cual, tal y como su nombre indica, se hace un recorrido de todo el análisis real de una variable real. Similarmente, los de física han estudiado: "Fundamentos de Matemáticas" (6 créditos ECTS), en la cual se recorre todo el análisis real de una variable real, álgebra lineal básica y geometría, y "Métodos matemáticos I: Álgebra Lineal y Geometría", donde se estudia todo lo concerniente a espacios vectoriales euclídeos, cónicas, planos y rectas.

Por lo anterior, al ser obligatorio matricularse del primer curso completo[1] y al efectuarse el estudio durante el segundo cuatrimestre, solo bastó, tal y como se explicitará posteriormente, con encontrar voluntarios que estuviesen matriculados en alguna asignatura matemática de este nivel. Por ello, no fue posible seleccionar aleatoriamente a los participantes.

En la tabla 1, se muestra cómo se distribuyen los participantes del estudio por género, poniéndolos en relieve con la población universitaria española enrolada en estudios de ciencias. Se aprecia que la demografía de nuestro estudio no se corresponde a la estatal, habiendo una presencia predominantemente masculina en nuestro estudio. Este fenómeno parece repetirse en la submuestra de física (Tabla 2), recuperando cierta paridad en la de matemáticas (Tabla 3).

GÉNERO	NÚMERO DE INDIVIDUOS	PORCENTAJE	POBLACIÓN EN CIENCIAS
Masculino	48	73	49
Femenino	18	27	51

Tabla 1. Todos los participantes en comparación con la estatal.

GÉNERO	NÚMERO DE INDIVIDUOS	PORCENTAJE	POBLACIÓN EN CIENCIAS
Masculino	34	81	49
Femenino	8	19	51

Tabla 2. Participantes de física en comparación con la estatal.

GÉNERO	NÚMERO DE INDIVIDUOS	PORCENTAJE	POBLACIÓN EN CIENCIAS
Masculino	14	58	49
Femenino	10	42	51

Tabla 3. Participantes de matemáticas en comparación con la estatal.

Además, 51 de los participantes estaban cursando las asignaturas por primera vez, mientras que 15 se encontraban repitiéndola (Tabla 4).

GRADO \ CURSO ACCESO	2020-2021	OTRO
Matemáticas	18	6
Física	33	9

Tabla 4. Participantes según el curso de acceso a la universidad.

[1] Norma obligatoria según la “Normativa de progreso y permanencia en las titulaciones oficiales de la Universidad de La Laguna”.

3.2.- Instrumentos de investigación. Descripción.

El instrumento de análisis fue un solo cuestionario con 3 partes claramente diferenciadas: un cuestionario, un test de elección múltiple y un cuestionario de opinión. El cuestionario fue administrado a todos los participantes.

Parte 1: el cuestionario. Consistió en una lista de ocho preguntas con el objetivo de recabar datos demográficos acerca de la muestra. Se pidió a los estudiantes que proveyeran información acerca de su género, el grado que están estudiando, su nota en las pruebas de acceso a la universidad del examen de matemáticas, el curso de acceso a la universidad y ciertos antecedentes que poseen acerca de la prueba y de las asignaturas de matemáticas en la universidad.

Parte 2: el test de elección múltiple. Consistió en una prueba compuesta por 21 preguntas destinadas a averiguar el punto de vista de los estudiantes acerca de: qué implica probar un teorema, qué se necesita para falsear un teorema, la necesidad de las pruebas en matemáticas, el papel de las mismas, qué constituye una y el porqué. En él, hay dos categorías de preguntas:

- Las preguntas comprendidas entre la número 1 y 5, tratan de obtener información acerca de la visión estudiantil sobre el papel general, el significado y el propósito de la prueba.
- Las preguntas comprendidas entre la número 6 y 21, tratan de conocer qué tipo de justificación toman los estudiantes como prueba y qué opinión tienen sobre cada una. Para ello, se muestran cuatro conjeturas, denominadas de aquí en adelante situaciones, de distinta naturaleza (numéricas y geométricas) junto a cuatro posibles justificaciones. Después, tendrán que realizar dos tareas. La primera consiste en elegir qué justificación se asemeja más a las que ellos darían, cuál consideran la más rigurosa y cuál es la más clara, es decir, la que ellos usarían para convencer o explicar a otro compañero. La segunda, en clasificar cada argumento según su validez lógica, su consistencia, su rigurosidad y su firmeza. Las preguntas 6-9, 10-13, 14-17 y 18-21 muestran las situaciones 1, 2, 3 y 4, respectivamente junto a las dos tareas correspondientes. La figura 2 muestra la situación número 2 junto a las cuatro posibles justificaciones y las dos tareas.

El diseño de las preguntas fue realizado por Stylianou et al. (2015) quienes se sirvieron de otros estudios previos respecto a las creencias de las pruebas por parte de profesores y estudiantes. Así, se parte del marco teórico implementado por Healy y Hoyles (2000), quienes analizaron las concepciones de la prueba en estudiantes de secundaria, los cuales debían elegir qué justificación recibiría la mejor nota por parte del profesor y cuál se parecería más a la respuesta que darían entre:

a) un argumento caracterizado de específico o empírico.

b) un argumento que depende de propiedades de un caso genérico.

c) un argumento escrito de forma narrativa que sugiere las razones y explicaciones subyacentes.

d) una prueba deductiva escrita en un formato formal con una argumentación lógica entre premisas y conclusiones.

En nuestro estudio, las posibles justificaciones de cada conjetura son prácticamente las mismas, pero con una serie de singularidades: el argumento b) se presenta de forma visual –gráfica-, el c) en cierta manera es deductivo, por ello se denominará deductivo narrativo, y el d), que se llamará deductivo simbólico.

De este modo, atendiendo a los esquemas de la prueba, cada justificación puede clasificarse en: empírica y deductiva (Bell, 1976; Harel y Sowder, 1998) o pragmática y conceptual (Balacheff, 1988).

Como ya se anunció previamente, la naturaleza de las cuatro situaciones son distintas, pues tres tratan acerca de una relación numérica y la otra de una visual. Además, los cuatro tipos de justificaciones se presentan en distinto orden en cada una.

Parte 3: cuestionario de opinión. Consistió en 26 preguntas de escala Likert propuestas con el objetivo de indagar las creencias que poseen los estudiantes de las pruebas, así como de conocer más sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje en los que han estado inmersos, respecto a las matemáticas y en particular de la prueba. Para ello, nos centramos en cuatro organizadores: (1) Experiencias previas de los estudiantes con la prueba durante su formación, (2) Papel del estudiante durante el aprendizaje de la prueba, (3) Creencias de los estudiantes sobre qué son y para qué sirven las pruebas y (4)

Creencias sobre la prueba cuando se consideran como sujetos que tratan de aprender el significado de probar y argumentar resultados matemáticos.

Lee con detalle la siguiente situación y las cuatro posibles justificaciones A, B, C y D. Tomando como referencia estas cuatro justificaciones responde a las preguntas 10-13.

SITUACIÓN 2
Si a, b son dos números reales, entonces $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Justificación A

Es cierto, pues solo hay que aplicar la definición de potenciación, la ley distributiva y la ley conmutativa de la suma y del producto.

Justificación B

Por la definición,

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b).$$

Por la ley distributiva,

$$(a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b\,.$$

Nuevamente por la ley distributiva,

$$(a+b)a + (a+b)b = aa + ba + ab + bb\,.$$

Por la definición, la ley conmutativa del producto y de la suma

$$aa + ba + ab + bb = a^2 + b^2 + 2ab\,.$$

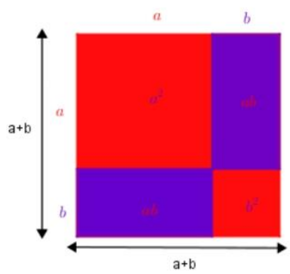
Justificación C

- Si $a = 1$ y $b = 3.5$, entonces
$$(1+3.5)^2 = 4.5^2 = 20.25 = 1 + 12.25 + 7 = 1^2 + 3.5^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3.5\,.$$
- Si $a = -\frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{3}$, entonces
$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} = \frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\cdot(-\frac{1}{2})\cdot\left(\frac{1}{3}\right).$$
- Si $a = -\pi$ y $b = -3$, entonces
$$(-\pi-3)^2 = \left(-(3+\pi)\right)^2 = (3+\pi)^2 = (3+\pi)(3+\pi) = 3^2 + 3\cdot\pi + \pi\cdot 3 + \pi^2 = 3^2 + \pi^2 + 2\cdot 3\cdot\pi\,.$$

He elegido aleatoriamente distintos tipos de reales y la fórmula se ha verificado en todos los casos.
Así, si a, b son dos números reales, entonces

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Justificación D



10. De las justificaciones presentadas anteriormente, ¿cuál se aproxima más a la respuesta que tú darías?
(a) Justificación A.
(b) Justificación B.
(c) Justificación C.
(d) Justificación D.

11. ¿Qué justificación consideras más rigurosa matemáticamente?
(a) Justificación A.
(b) Justificación B.
(c) Justificación C.
(d) Justificación D.

12. ¿Cuál es para ti es la más clara?
(a) Justificación A.
(b) Justificación B.
(c) Justificación C.
(d) Justificación D.

13. Para cada justificación señala lo que opinas (solo una por solución).

	Justificación A	**Justificación B**	**Justificación C**	**Justificación D**
[illegible]				
[illegible]				
[illegible]				
[illegible]				

Figura 2. La situación 2 junto a las cuatro posibles justificaciones y sus correspondientes preguntas de elección múltiple.

Para conseguir los objetivos específicos de la investigación, se pretenderá seguir la siguiente relación de instrumentos. Para el primer objetivo, se usarán las respuestas de los estudiantes a las preguntas 6, 10, 14 y 18 del test de elección múltiple. Para el segundo, las respuestas a las preguntas 7-9, 11-13, 15-17 y 19-21 del test de elección múltiple. Para el tercero, las respuestas a las preguntas 1-14 del cuestionario de opinión. Para el cuarto y último, las respuestas a las preguntas 15-26 del cuestionario de opinión.

3.3.- Recolección y análisis de los datos.

El instrumento de evaluación fue suministrado como "Formulario de Google" a los estudiantes que se encontraban matriculados en el curso 2020-21 en: "MM. MM. II: Cálculo Diferencial" (primer curso, Grado en Física), "Cálculo Integral de una variable real" (primer curso, Grado en Matemáticas) y "Álgebra Lineal" (primer curso, Grado en Matemáticas). En un primer momento, el formulario estuvo abierto tres días, pero debido a que la participación era voluntaria, esta fue mínima. Por lo que se decidió mantenerlo accesible durante dos semanas más.

Al no tener una muestra seleccionada aleatoriamente, se decidió no hacer uso de la inferencia estadística y limitarnos simplemente a realizar un estudio descriptivo de los datos. Para ello, trabajamos con la librería "Python Data Analysis Library" de Python.

Para analizar los datos, se decidió dividir a los estudiantes por estudios y por aptitud matemática. Para el primer propósito, solo bastó con atender si estudiaban el Grado en Física o el Grado en Matemáticas, lo cual detallaban en el cuestionario. Para el segundo, se decidió considerar estudiantes de bajas aptitudes a los que hubiesen sacado un 6 o menos en el examen de matemáticas en las pruebas de acceso universitario. De forma similar, se consideró estudiantes de altas aptitudes a los que hubiesen obtenido un 9 o más.

Además, para conseguir el tercer y cuarto objetivo específico se establecieron los siguientes organizadores en el cuestionario de opinión:

(1) Experiencias previas de los estudiantes con la prueba durante su formación, desde la pregunta 1 a la 5.

(2) Papel del estudiante durante el aprendizaje de la prueba, desde la pregunta 6 a la 14.

(3) Creencias de los estudiantes sobre qué son y para qué sirven las pruebas, desde la pregunta 15 a la 17.

(4) Creencias sobre la prueba cuando se consideran como sujetos que tratan de aprender el significado de probar y argumentar resultados matemáticos, desde la pregunta 18 a la 26.

En relación con la presentación de los resultados, las respuestas al test de elección múltiple se presentan en forma de tabla o diagrama de rectángulos, cuyos datos o alturas de los rectángulos se corresponden al porcentaje poblacional situado en la cuestión que se trate. En cambio, los obtenidos para el cuestionario de opinión, aunque se presenten de igual manera, los datos o alturas de los rectángulos se corresponden a la media aritmética de las respuestas dadas a la pregunta que se trate.

Capítulo 4. Resultados y discusión.

En este capítulo, tal y como su nombre indica, se realizará el análisis y discusión de los resultados comparándolos en la medida de lo posible, con los obtenidos en la investigación de Stylianou et al. (2015). Se presentan los resultados a través de cinco apartados, mediante los cuales se pretende conseguir una correspondencia con los objetivos específicos. De este modo, con los dos primeros se persigue conseguir el primer objetivo y con el tercero, cuarto y quinto, los otros tres.

4.1.-¿Qué tipo de pruebas prefieren los estudiantes?

La Tabla 5 muestra la distribución de las respuestas (en porcentaje) a las preguntas 6,10,14 y 18 del test de elección múltiple, que tenían por objetivo averiguar qué tipo de argumento de los cuatro expuestos darían los estudiantes para justificar una situación. En la primera columna, se presenta la distribución en el grupo compuesto por la totalidad de los participantes; en la segunda, lo mismo pero en el estudio llevado a cabo por Stylianou et al. (2015); en la tercera, en el grupo de los estudiantes con altas aptitudes; en la cuarta, en el grupo de estudiantes con bajas aptitudes; en la quinta, en el estudiantado de matemáticas, y en la sexta, en el de física.

	Todos los estudiantes	Todos los estudiantes Stylianou et al. (2015)	Altas aptitudes	Bajas aptitudes	Matemáticas	Física
Situación 1						
Justificación A (Comprobación empírica)	1.52	32	0	0	0	2.38
Justificación B (Deductivo narrativo)	16.67	34	15.62	28.57	8.33	21.43
Justificación C (Deductivo simbólico)	81.82	28	84.38	71.43	91.67	76.19
Justificación D (Visual)	0	6	0	0	0	0
Situación 2						
Justificación A (Deductivo narrativo)	4.55	23	3.12	14.29	4.17	4.76
Justificación B (Deductivo simbólico)	89.39	37	93.75	85.71	91.67	88.1
Justificación C (Comprobación empírica)	3.03	30	3.12	0	0	4.76
Justificación D (Visual)	3.03	10	0	0	4.17	2.38
Situación 3						
Justificación A (Visual)	1.52	10	3.12	0	0	2.38
Justificación B (Deductivo simbólico)	78.79	27	81.25	57.14	83.33	76.19
Justificación C (Comprobación empírica)	3.03	30	0	0	0	4.76
Justificación D (Deductivo narrativo)	16.67	33	15.62	42.86	16.67	16.67
Situación 4						
Justificación A (Deductivo simbólico)	71.21	21	71.88	100	87.5	61.9
Justificación B (Visual)	9.09	38	6.25	0	8.33	9.52
Justificación C (Comprobación empírica)	6.06	12	9.38	0	4.17	7.14
Justificación D (Deductivo narrativo)	13.64	29	12.5	0	0	21.43

Tabla 5. Distribución de las respuestas (en porcentaje) correspondientes a la justificación que darían para las situaciones del test de elección múltiple.

Fundamentalmente, el alumnado construiría una prueba de tipo deductivo simbólico, siendo elegida por al menos siete de cada diez participantes (81.82%, 89.39%, 78.79% y 71.21%, para las situaciones 1,2,3 y 4, respectivamente). Además, si se atiende al esquema de prueba Harel y Sowder (1998), prácticamente la totalidad de los estudiantes señalan que en las situaciones 1,2 y 3 (que tratan de una relación numérica), construirían una justificación de tipo deductivo (98.49%, 93.94% y 95.46%, respectivamente). La preferencia por este esquema desciende ligeramente (84.85%) en la cuarta situación, la cual trata sobre una relación geométrica.

A diferencia de este estudio, en el Stylianou et al. (2015) las construcciones para las tres primeras situaciones, se dividieron de manera equitativa entre la comprobación empírica, la narrativa y la simbólica. También, el número de estudiantes que se decantaba por una prueba deductiva fue reseñablemente menor: 62%, 60%, 60% y 50%, para las situaciones 1, 2, 3 y 4, respectivamente.

Por último, cabe reseñar la ínfima cantidad de alumnado que construiría un argumento de tipo visual para justificar las situaciones. Siendo el número irrisorio en las tres primeras situaciones (0%, 3.03% y 1.52%, respectivamente), las cuales tratan de relaciones numéricas. En la cuarta, que es sobre una relación geométrica, el número de personas aumenta hasta un 9.09%. Esta fenomenología, también ocurre en la investigación de Stylianou et al. (2015), aunque en esta, el argumento visual es al que más se acudiría cuando se prueba una relación geométrica.

4.2.-El esquema de prueba según los estudios y aptitud matemática.

Por lo general, como se observa en la tabla 5, tanto los estudiantes con altas aptitudes como los de baja son más propensos a construir un argumento de tipo deductivo simbólico en las cuatro situaciones, al igual que en el estudio de Stylianou et al. (2015). Cabe destacar que en la situación 3 se observa cierta anomalía respecto a las otras, ya que, aunque todas las personas que poseen una baja aptitud la justificarían con una prueba de tipo deductivo, prácticamente la mitad lo haría con uno de tipo narrativo. También, nadie de este grupo de personas daría como respuesta una justificación empírica (comprobación empírica o visual) en las cuatro situaciones.

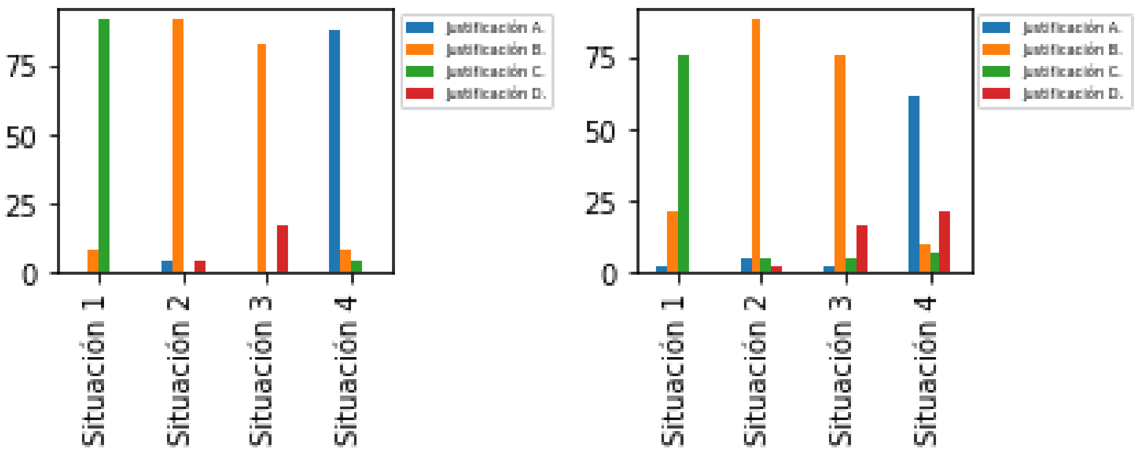


Figura 3. Representación gráfica de las construcciones que harían los estudiantes de matemáticas y física, respectivamente. Las alturas representan el porcentaje de la población que elegiría la correspondiente justificación para cada una de las cuatro situaciones.

Además, si comparamos las respuestas que daría el alumnado de matemáticas y el de física, se observa que la distribución de las respuestas (Figura 3) es esencialmente la misma. Por lo tanto, no hay diferencias significativas entre las dos poblaciones. No obstante, cabe destacar que nadie de matemáticas (Tabla 5) acudiría a una comprobación empírica para demostrar una relación numérica (situaciones 1, 2 y 3) y que en ocasiones, una mayor proporción de estudiantes de física que de matemáticas (Tabla 5) construiría una justificación de tipo deductivo narrativo.

4.3.-Percepciones de los estudiantes acerca del tipo de prueba.

En el test de elección múltiple no solo se solicitó al alumnado que eligiese el tipo de justificación que construiría, sino también que seleccionase (preguntas 11 y 12 de la figura 2) el tipo que considerase más rigurosa y clara (en el sentido que fuese inteligible, fácil de comprender y usada presumiblemente para convencer a un compañero). La tabla 6 presenta la distribución de las elecciones de los estudiantes, en comparación con las que efectuaron los participantes en Stylianou et al. (2015).

Para cada una de las cuatro situaciones, más del 90% de los estudiantes eligen un argumento de tipo deductivo como la justificación más rigurosa. Concretamente, tres de cada cuatro personas seleccionan la justificación de tipo deductivo simbólico (95.45%, 95.45%, 78.79% y 87.88% para las situaciones 1,2, 3 y 4, respectivamente), llegando a ser prácticamente cuatro para las dos primeras situaciones, las cuales exponen una relación algebraica ya conocida.

	Respuestas que darían	Respuestas que darían Stylianou et al. (2015)	Respuesta más rigurosa	Respuesta más rigurosa Stylianou et al. (2015)	Respuesta más clara	Respuesta más clara Stylianou et al. (2015)
Situación 1						
Justificación A (Comprobación empírica)	1.52	32	1.52	14	16.67	32
Justificación B (Deductivo narrativo)	16.67	34	3.03	14	18.18	34
Justificación C (Deductivo simbólico)	81.82	28	95.45	68	60.61	12
Justificación D (Visual)	0	6	0	4	4.55	22
Situación 2						
Justificación A (Deductivo narrativo)	4.55	23	0	18	1.52	29
Justificación B (Deductivo simbólico)	89.39	37	95.45	56	77.27	25
Justificación C (Comprobación empírica)	3.03	30	1.52	20	4.55	25
Justificación D (Visual)	3.03	10	3.03	6	16.67	21
Situación 3						
Justificación A (Visual)	1.52	10	7.58	5	15.15	15
Justificación B (Deductivo simbólico)	78.79	27	78.79	52	59.09	21
Justificación C (Comprobación empírica)	3.03	30	0	17	4.55	32
Justificación D (Deductivo narrativo)	16.67	33	13.64	26	21.21	32
Situación 4						
Justificación A (Deductivo simbólico)	71.21	21	87.88	58	69.7	14
Justificación B (Visual)	9.09	38	7.58	13	15.15	48
Justificación C (Comprobación empírica)	6.06	12	1.52	8	4.55	14
Justificación D (Deductivo narrativo)	13.64	29	3.03	21	10.61	24

Tabla 6. Distribución de las respuestas (en porcentaje) correspondientes a las percepciones respecto al tipo de prueba.

Cuando se solicita que se elija el argumento más claro, por lo menos seis de cada diez participantes (65.15%, 80.30%, 68.18% y 74.24% para las situaciones 1,2,3 y 4, respectivamente) seleccionan la misma justificación que ellos construirían. Igual que en la pregunta previa, la justificación de tipo deductivo simbólico es la considerada como más clara en las cuatro situaciones: 60.61%, 77.27%, 59.09% y 69.7%, para las situaciones 1, 2, 3 y 4, respectivamente.

En la investigación llevada a cabo por Stylianou et al. (2015), el argumento de tipo deductivo simbólico también fue el elegido como justificación más rigurosa, pero en menor medida: 68%, 56%, 52% y 58% para las situaciones 1,2,3 y 4, respectivamente. Al igual que cuando se solicitó que eligieran el argumento más "explicativo", la elección parecía que coincidía con la justificación que construirían. Sin embargo, para las cuatro situaciones, la mayoría de los estudiantes (al menos el 75%) no usaría este argumento para convencer a un compañero, siendo más populares: el narrativo, cuando se trata de una relación numérica y el visual, cuando se trata de una relación geométrica.

Si se atiende al grado que se estudia, no hay ninguna diferencia significativa (Figura 4) entre las consideraciones de los estudiantes de matemáticas y los de física respecto a qué justificaciones consideran más rigurosas, pues la distribución es esencialmente la misma. En cambio, la distribución se modifica (Figura 5) al preguntar acerca de la justificación el más clara.

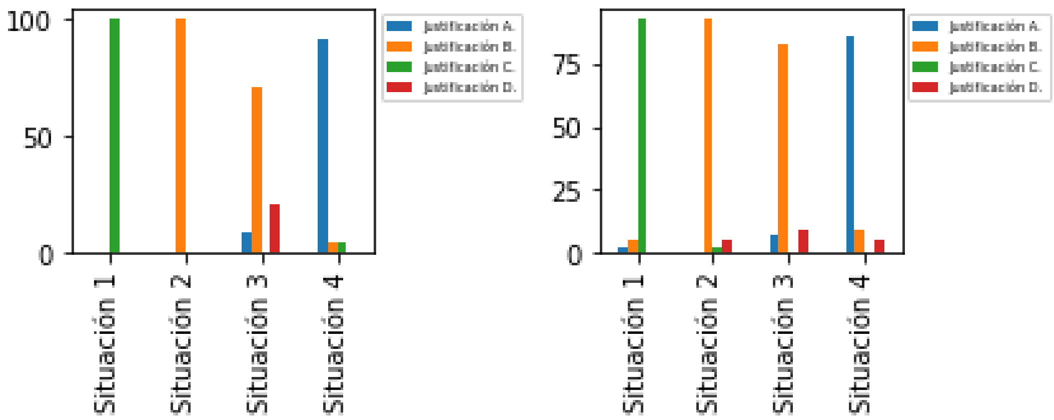


Figura 4. Representación gráfica de las justificaciones que consideran más rigurosas los estudiantes de matemáticas y física, respectivamente. Las alturas representan el porcentaje de la población que elegiría la correspondiente justificación para cada una de las cuatro situaciones.

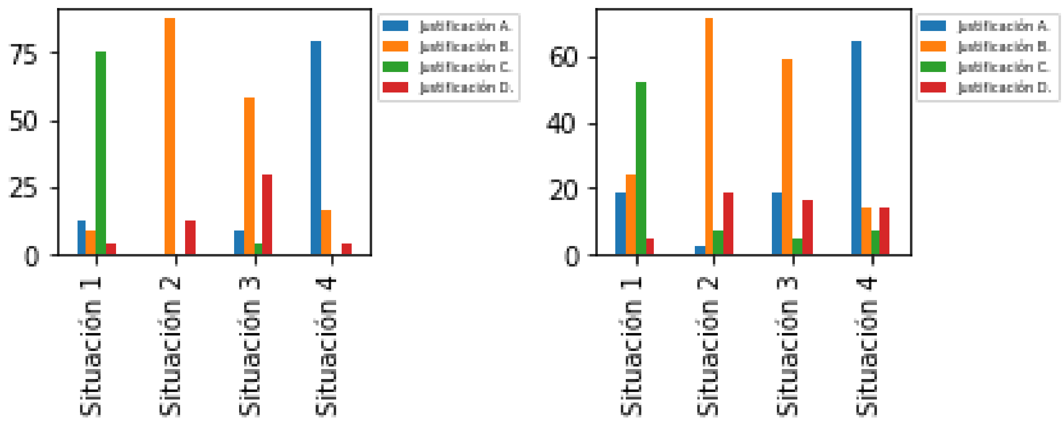


Figura 5. Representación gráfica de las justificaciones que consideran más claras los estudiantes de matemáticas y física, respectivamente. Las alturas representan el porcentaje de la población que elegiría la correspondiente justificación para cada una de las cuatro situaciones.

Más de la mitad de los estudiantes de física y los matemáticas (Tabla 7), consideraría la justificación de tipo deductivo simbólico como la más clara. No obstante, en la mayoría de las situaciones (1, 2 y 4), el alumnado matemático tiene una mayor tendencia (Tabla 7) a seleccionarla que sus iguales de física. En contrapartida, existe un mayor número de físicos, 2 de cada 10 (Tabla 7), que elegiría un argumento empírico como justificación más clara, mientras los matemáticos son más reacios.

Para obtener una idea más concreta acerca de las percepciones del alumnado, en el test de elección múltiple también se requirió que encuadrasen cada justificación en cada una de las siguientes concepciones: (1) Es imperfecta lógicamente, (2) Es un argumento consistente, (3) Es un argumento correcto, pero no riguroso y (4) No es una demostración, sino una comprobación. Las tablas 8 y 9 representan la distribución de estas evaluaciones en el presente estudio y en el llevado a cabo por Stylianou et al. (2015), respectivamente.

	Matemáticas	Física
Situación 1		
Justificación A (Comprobación empírica)	12.5	19.05
Justificación B (Deductivo narrativo)	8.33	23.81
Justificación C (Deductivo simbólico)	75	52.38
Justificación D (Visual)	4.17	4.76
Situación 2		
Justificación A (Deductivo narrativo)	0	2.38
Justificación B (Deductivo simbólico)	87.5	71.43
Justificación C (Comprobación empírica)	0	7.14
Justificación D (Visual)	12.5	19.05
Situación 3		
Justificación A (Visual)	8.33	19.05
Justificación B (Deductivo simbólico)	58.33	59.52
Justificación C (Comprobación empírica)	4.17	4.76
Justificación D (Deductivo narrativo)	29.17	16.67
Situación 4		
Justificación A (Deductivo simbólico)	79.17	64.29
Justificación B (Visual)	16.67	14.29
Justificación C (Comprobación empírica)	0	7.14
Justificación D (Deductivo narrativo)	4.17	14.29

Tabla 7. Distribución de las justificaciones que consideran más claras los alumnos de matemáticas y física.

Al igual que en el estudio referencia, los estudiantes son conscientes de las limitaciones de la comprobación empírica, siendo no considerada como prueba por una amplia mayoría de los participantes (86.36%, 84.85%, 92.42% y 86.36% para las situaciones 1, 2, 3 y 4, respectivamente) y como argumento consistente por alguien (0%, 3.03%, 0% y 0% para las situaciones 1, 2, 3 y 4, respectivamente). Similarmente y tal como era previsible, la justificación de tipo deductivo simbólico es la que resulta en mayor medida calificada como argumento consistente (96.97%, 95.45%, 86.36% y 92.42% para las situaciones 1,2, 3 y 4, respectivamente).

También, los resultados parecen replicarse con las justificaciones visuales y narrativas. Más de la mitad de los participantes (77.27%, 78.79%, 56.06% y 69.7%, para las situaciones 1, 2, 3 y 4, respectivamente) asegura que la justificación de tipo deductivo narrativo conforma un argumento correcto, pero no riguroso. Las justificaciones visuales son tachadas de lo mismo por al menos un 40% de los participantes (48.48%, 45.45% y 42.42%, para las situaciones 2, 3 y 4, respectivamente), a la par que, al menos 2 de cada

10 (46.97%, 19.7%, 21.21% y 33.33%, para las situaciones 1, 2, 3 y 4, respectivamente), aluden que son imperfectas lógicamente.

	Comprobación empírica	Deductivo narrativo	Deductivo simbólico	Visual
Situación 1				
Es imperfecta lógicamente	6.06	4.55	1.52	46.97
Es un argumento consistente	0	10.61	96.97	0
Es un argumento correcto, pero no riguroso	7.58	77.27	1.52	13.64
No es una demostración, sino una comprobación	86.36	7.58	0	39.39
Situación 2				
Es imperfecta lógicamente	6.06	10.61	0	19.7
Es un argumento consistente	3.03	6.06	95.45	16.67
Es un argumento correcto, pero no riguroso	6.06	78.79	3.03	48.48
No es una demostración, sino una comprobación	84.85	4.55	1.52	15.15
Situación 3				
Es imperfecta lógicamente	3.03	12.12	6.06	21.21
Es un argumento consistente	0	25.76	86.36	25.76
Es un argumento correcto, pero no riguroso	4.55	56.06	6.06	45.45
No es una demostración, sino una comprobación	92.42	6.06	1.52	7.58
Situación 4				
Es imperfecta lógicamente	6.06	9.09	3.03	33.33
Es un argumento consistente	0	16.67	92.42	7.58
Es un argumento correcto, pero no riguroso	7.58	69.7	3.03	42.42
No es una demostración, sino una comprobación	86.36	4.55	1.52	16.67

Tabla 8. Distribución de las respuestas (en porcentaje) correspondientes a las evaluaciones de las pruebas por parte del alumnado.

La distribución de las evaluaciones en la población de matemáticas y física es muy similar (Figura 6), pero existen una serie de singularidades respecto a las justificaciones visuales que convienen reseñar. En ambos grupos, en las situaciones 2 y 3 prácticamente la mitad acepta que conforman argumentos correctos, pero no rigurosos. Ahora bien, cerca de un tercio del alumnado de matemáticas (25% y 33.33%, para las situaciones 2 y 3, respectivamente) sostiene que son imperfectas lógicamente frente a una minoría de física (16.67% y 14.29%, respectivamente). Por el contrario, existe un mayor número de estudiantado de física que sostiene que estas justificaciones constituyen fuertes argumentos matemáticos (21.43% y 38.1%, para las situaciones 2 y 3, respectivamente) frente al de matemáticas (8.33% y 4.17%, respectivamente).

	Comprobación empírica	Deductivo narrativo	Deductivo simbólico	Visual
Situación 1				
Es imperfecta lógicamente	7	12	14	30
Es un argumento consistente	12	37	64	10
Es un argumento correcto, pero no riguroso	25	40	13	43
No es una demostración, sino una comprobación	56	9	10	17
Situación 2				
Es imperfecta lógicamente	11	17	9	23
Es un argumento consistente	15	28	59	12
Es un argumento correcto, pero no riguroso	23	45	19	38
No es una demostración, sino una comprobación	51	10	12	27
Situación 3				
Es imperfecta lógicamente	11	22	13	39
Es un argumento consistente	14	36	52	10
Es un argumento correcto, pero no riguroso	23	31	19	30
No es una demostración, sino una comprobación	52	11	15	20
Situación 4				
Es imperfecta lógicamente	13	7	17	18
Es un argumento consistente	21	37	53	29
Es un argumento correcto, pero no riguroso	22	41	15	44
No es una demostración, sino una comprobación	43	14	14	9

Tabla 9. Distribución de las respuestas (en porcentaje) correspondientes a las evaluaciones de las pruebas por parte del alumnado Stylianou et al. (2015).

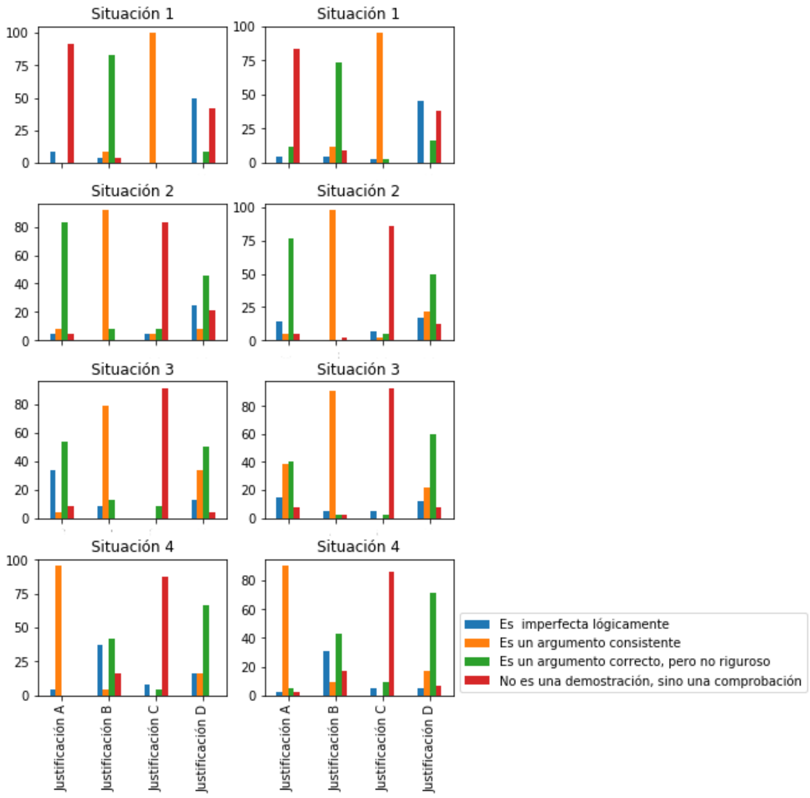


Figura 6. Representación gráfica de las evaluaciones realizadas por el alumnado de matemáticas (1º columna) y física (2º columna). Las alturas representan el porcentaje de la población que realizaría la correspondiente consideración para cada una de las cuatro justificaciones en cada situación.

4.4.-Proceso de enseñanza y aprendizaje del estudiante respecto a la prueba.

Los estudiantes han experimentado un ligero acercamiento a la prueba en sus primeras asignaturas universitarias, presenciando a veces alguna construcción (pregunta 1, 10, 11; tabla 10), la cual rara vez fue visual (pregunta 2; tabla 10) y otras muchas, constituía un ejemplo o comprobación (pregunta 3; tabla 10). El proceso de instrucción que han tenido, ha sido mayormente pasivo (preguntas 4, 6, 7, 8; tabla 10), aunque han tenido que construir pruebas individualmente (pregunta 13; tabla 10). Asimismo, destacan que el profesorado ha insistido mucho en lo importante que es razonar (pregunta 12, pregunta 14; tabla 10) y en que los enunciados deben ser probados (pregunta 9; tabla 10).

La figura 7 representa las distribuciones de las experiencias previas de los estudiantes de matemáticas y física con la prueba, así como el papel que han desempeñado durante su aprendizaje. Se observa que son prácticamente las mismas pero con dos singularidades. En las clases de física, hay mayor tendencia a justificar los teoremas con ejemplos o comprobaciones y no con una prueba. También, en la construcción de pruebas en el aula, contribuyen menos en clase que los de matemáticas.

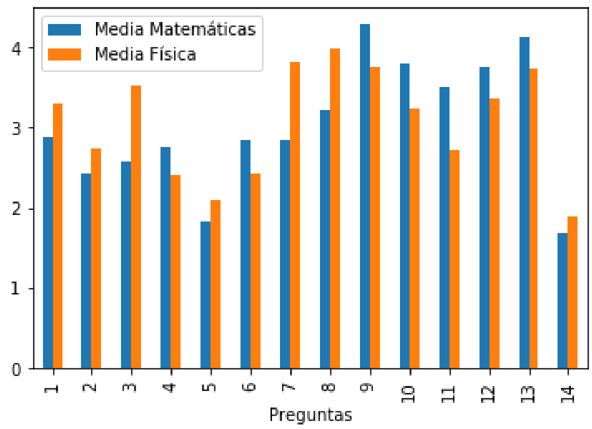


Figura 7. Representación gráfica de las medias aritméticas a las respuestas a las preguntas 1-14 por parte del alumnado de matemáticas (azul) y física (naranja). Las alturas representan las medias aritméticas de todas las respuestas dadas a las preguntas por la población estudiada.

De igual manera, la figura 8 representa las distribuciones de los los estudiantes de altas aptitudes y los de baja, las cuales tal y como se observa son prácticamente las mismas. Con lo cual, no hay diferencias significativas entre ambas poblaciones.

	$\bar{x}$	σ	$\bar{x}$ M	σ M	$\bar{x}$ F	σ F	$\bar{x}$ $\uparrow Apt$	σ $\uparrow Apt$	$\bar{x}$ $\downarrow Apt$	σ $\downarrow Apt$
Experiencias previas de los estudiantes con la prueba durante su formación										
1. Los profesores de matemáticas que he tenido en el pasado han demostrado los teoremas y los hechos matemáticos que han expuesto.	3.14	1.15	2.88	1.15	3.29	1.13	3.22	1.24	3.43	0.98
2. Los profesores de matemáticas que he tenido en el pasado han demostrado los teoremas y los hechos matemáticos que han expuesto mediante gráficas o diagramas.	2.62	0.78	2.42	0.78	2.74	0.77	2.56	0.62	2.86	0.69
3. Los profesores de matemáticas que he tenido en el pasado han demostrado los teoremas y los hechos matemáticos que han expuesto mediante ejemplos.	3.18	1.2	2.58	1.28	3.52	1.02	3.12	1.29	3.14	0.69
4. En las clases de matemáticas que he tenido, el alumnado ha trabajado individualmente a la hora de construir demostraciones.	2.53	1.22	2.75	1.39	2.4	1.11	2.59	1.29	2.71	0.95
5. Los profesores de matemáticas que he tenido en el pasado presentaban más de una demostración para el mismo teorema.	2	0.98	1.83	0.64	2.1	1.12	2.06	1.01	2.71	1.25
Papel del estudiante durante el aprendizaje de la prueba										
6. En las clases de matemáticas que he tenido, el alumnado a la hora de desarrollar demostraciones desempeñaba un papel significativo.	2.58	1.02	2.83	1.01	2.43	1.02	2.72	1.2	2.86	0.69
7. A la hora de construir una demostración, los profesores de matemáticas que he tenido la han escrito en la pizarra con poca contribución del alumnado.	3.45	0.96	2.83	0.96	3.81	0.77	3.41	1.16	3.29	0.95
8. Según mi experiencia, las clases de matemáticas se basan más en tomar apuntes de lo que el docente expone que en discutir con mis compañeros el porqué los enunciados matemáticos son ciertos o falsos.	3.7	1.21	3.21	1.41	3.98	1	3.44	1.29	4	0.82
9. En las clases de matemáticas que he tenido, se enfatizaba en que los enunciados matemáticos deben ser demostrados.	3.95	1.14	4.29	1.08	3.76	1.14	4.09	1.15	4.14	0.69
10. En las clases de matemáticas que he tenido, el demostrar los enunciados matemáticos era una actividad regular.	3.44	1.3	3.79	1.35	3.24	1.25	3.75	1.22	3.57	0.98
11. En las clases de matemáticas que he tenido, el hacer demostraciones era una parte usual de la tarea que tenía que realizar.	3	1.31	3.5	1.38	2.71	1.2	3.34	1.26	3	1
12. En la tarea que tenía que realizar en el pasado se me pedía constantemente justificar mi pensamiento o explicar el porqué de algo.	3.5	1.26	3.75	1.29	3.36	1.23	3.44	1.39	3.57	0.79
13. En los exámenes de matemáticas que he tenido, se me ha pedido construir al menos una demostración matemática.	3.88	1.16	4.12	1.12	3.74	1.17	3.97	1.12	3.86	1.07
14. En los exámenes de matemáticas que he tenido, rara vez he tenido que explicar mi razonamiento.	1.8	1.03	1.67	1.01	1.88	1.04	1.72	1.02	2.14	0.9

Tabla 10. Media aritmética y desviación estándar de las respuestas a las preguntas 1-14 del cuestionario de opinión. Por orden de columna: de toda la población y de los estudiantes de matemáticas, física, de altas aptitudes y los de baja.

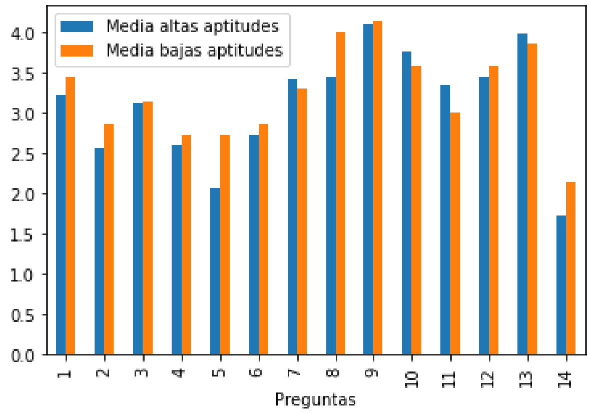


Figura 8. Representación gráfica de las medias aritméticas a las respuestas a las preguntas 1-14 por parte del alumnado de altas aptitudes (azul) y bajas aptitudes (naranja). Las alturas representan las medias aritméticas de todas las respuestas dadas a las preguntas por la población estudiada.

4.5.-Creencias de los estudiantes sobre la prueba.

En el cuestionario de opinión también se preguntó a los estudiantes acerca de las creencias que poseen sobre las pruebas, tanto como sujetos que tratan de aprender el significado de probar y argumentar resultados matemáticos, como de sus concepciones respecto a qué constituye una prueba y para qué sirven.

El alumnado es consciente del papel esencial que desempeña la prueba dentro de las matemáticas (pregunta 15; tabla 11), de la cual no solo destacan su rol verificativo, sino el explicativo y comunicativo (pregunta 17; tabla 11). Por ello, el alumnado se percata del potencial uso pedagógico que poseen las pruebas, manifestándose así a favor de que todos los estudiantes deben tener la oportunidad de aprender a leer y efectuar demostraciones (pregunta 16; tabla 11) y que lo conseguirían con suficiente esfuerzo (pregunta 19; tabla 11). En esta línea, los estudiantes sienten que poseen un mejor entendimiento de las matemáticas cuando comprenden por qué un teorema es cierto (pregunta 20; tabla 11).

Además, los participantes efectúan una serie de consideraciones respecto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, y en particular de la prueba. Así, resaltan que: les gustaría adquirir un rol más activo en la elaboración (pregunta 18, 24; tabla 11), les molesta que un profesor les diga que acepten un enunciado sin atender a sus razones (pregunta 21; tabla 11), otorgan más importancia a entender las razones que memorizar fórmulas (pregunta 22; tabla 11) y se beneficiarían del proceso que entraña discutir en grupos cómo probar enunciados matemáticos (pregunta 26; tabla 11). También, muestran indiferencia respecto a incluir pruebas en los instrumentos de evaluación (pregunta 25; tabla 11) y que sea el docente quien presente las pruebas a la clase (pregunta 23; tabla 11).

	$\bar{x}$	σ	$\bar{x}$ M	σ M	$\bar{x}$ F	σ F	$\bar{x}$ $\uparrow Apt$	σ $\uparrow Apt$	$\bar{x}$ $\downarrow Apt$	σ $\downarrow Apt$
Creencias de los estudiantes sobre qué es y para qué sirven las pruebas										
15. Considero que demostrar es una parte importante de hacer matemáticas.	4.41	0.78	4.42	0.97	4.4	0.66	4.47	0.84	4.14	0.69
16. Todos los estudiantes deberían tener la oportunidad de aprender a leer y efectuar demostraciones.	4.52	0.71	4.42	0.93	4.57	0.55	4.56	0.8	4.29	0.76
17. Las demostraciones no solo sirven para validar conjeturas matemáticas, sino para comunicar y explicar ideas nuevas.	4.38	0.82	4.25	1.03	4.45	0.67	4.38	0.94	4.43	0.79
Creencias sobre la prueba cuando se consideran como sujetos que tratan de aprender el significado de probar y argumentar resultados matemáticos										
18. Es importante para mi participar en la construcción de argumentos matemáticos o demostraciones durante la enseñanza.	4.03	1.02	4	1.18	4.05	0.94	3.94	1.08	4.14	0.69
19. Si me esfuerzo lo suficiente, creo que puedo aprender a leer y hacer demostraciones.	4.45	0.81	4.46	0.98	4.45	0.71	4.38	0.98	4.43	0.79
20. Siento que mi entendimiento de las matemáticas es mejor si comprendo el porqué un teorema es cierto.	4.41	0.91	4.33	1.09	4.45	0.8	4.38	1.07	4.14	0.69
21. Me molesta si un profesor me dice que acepte un enunciado matemático sin explicarme por qué es verdadero.	3.92	1.01	3.92	1.18	3.93	0.92	3.66	1.21	3.71	0.49
22. En el aprendizaje de las matemáticas, es importante para mí entender las razones y no solo memorizar las fórmulas.	4.47	0.81	4.38	1.1	4.52	0.59	4.38	0.98	4.29	0.76
23. Si un enunciado matemático requiere una demostración, pienso que es responsabilidad del docente (no de los estudiantes) de presentarla a la clase.	3.48	1.03	3.25	0.99	3.62	1.03	3.62	0.98	3.29	0.95
24. Pienso que el alumnado debería participar en la elaboración de demostraciones en clase.	3.94	0.86	3.92	0.97	3.95	0.79	3.94	0.98	3.71	0.49
25. En las asignaturas de matemáticas pienso que en los instrumentos de evaluación se deben incluir el efectuar demostraciones.	3.39	1.11	3.62	1.13	3.26	1.08	3.25	1.27	3.29	1.11
26. Creo que me beneficiaría del proceso que entraña el discutir en grupos cómo demostrar enunciados matemáticos.	4.15	0.93	4.04	1.04	4.21	0.87	4.12	1.01	4.29	0.49

Tabla 11. Media aritmética y desviación estándar de las respuestas a las preguntas 15-26 del cuestionario de opinión. Por orden de columna: de toda la población y de los estudiantes de matemáticas, física, de altas aptitudes y los de baja.

La figura 9 representa las de las creencias de los estudiantes de matemáticas y de física, las cuales tal y como se observa son prácticamente las mismas. Por ello, no hay diferencias significativas entre ambas poblaciones.

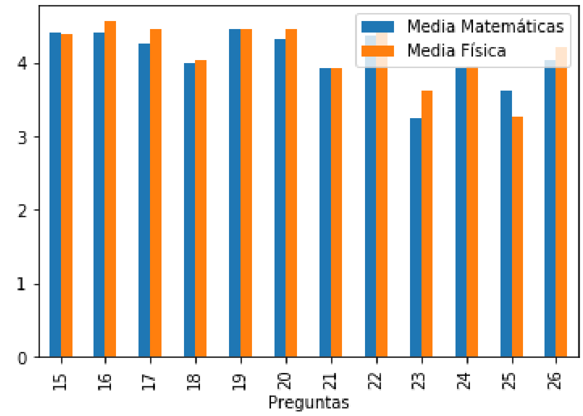


Figura 9. Representación gráfica de las medias aritméticas a las respuestas a las preguntas 15-26 por parte del alumnado de matemáticas (azul) y física (naranja). Las alturas representan las medias aritméticas de todas las respuestas dadas a las preguntas por la población estudiada.

De igual manera, la figura 10 representa las distribuciones de las creencias de los estudiantes de altas aptitudes y los de baja, las cuales tal y como se observa son prácticamente las mismas. Con lo cual, no hay diferencias significativas entre ambas poblaciones.

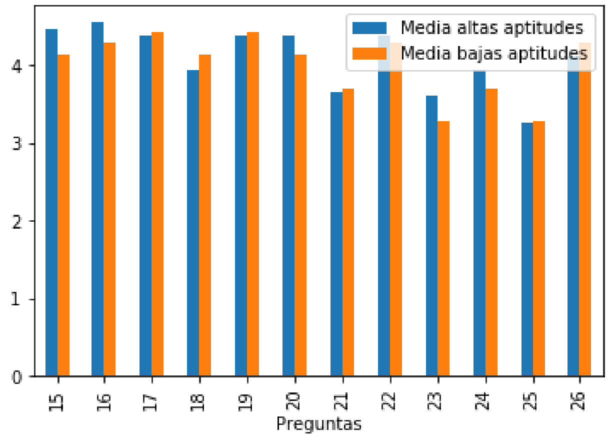


Figura 10. Representación gráfica de las medias aritméticas a las respuestas a las preguntas 15-26 por parte del alumnado de altas aptitudes (azul) y bajas aptitudes (naranja). Las alturas representan las medias aritméticas de todas las respuestas dadas a las preguntas por la población estudiada.

Capítulo 5. Conclusiones y perspectivas de futuro.

En este trabajo se han presentado los resultados obtenidos a partir de un estudio, para el que se utilizó un cuestionario, un test de elección múltiple y un cuestionario de opinión. Participaron en él 66 estudiantes de primer curso universitario (42 matriculados en el Grado de Física y 24 del Grado en Matemáticas) en el curso 2020-21. Esta investigación nos ha permitido determinar sus esquemas de prueba individuales, indagar acerca de las experiencias que han tenido en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la prueba y establecer algunas creencias respecto a esta. Al conformar una adaptación de una investigación ya existente (Stylianou et al. (2015)), se ha procurado en la medida de lo posible realizar una comparación entre las respuestas de las poblaciones utilizadas.

En relación con el primer objetivo específico de nuestra investigación, el análisis del test de elección múltiple revela que existe una tendencia mayoritaria, sin diferencias significativas según los estudios y la aptitud matemática, a construir argumentaciones de tipo deductivo, en concreto de tipo deductivo simbólico. Al igual que se refleja una resistencia generalizada a seleccionar la argumentación visual para justificar cualquier tipo de relación, ya sea geométrica o numérica. A diferencia de los resultados de Stylianou et al. (2015), quienes encontraron que la predilección por el argumento deductivo se reduce prácticamente a la mitad y que el argumento visual constituye elección más popular al justificar una relación geométrica.

La predilección por el argumento deductivo-simbólico no parece fortuita, pues tal y como muestra el análisis, la mayor parte de los encuestados considera que es la justificación más rigurosa y la más fácil de comprender. En este tipo de consideraciones, los estudios sí parecen influir, ya que los estudiantes de matemáticas son más proclives a considerar como claras las justificaciones de tipo deductivo simbólico que los de física. En contrapartida, los de física se inclinan más a considerar como claras las comprobaciones empíricas que los de matemáticas. En estas preferencias, también se mostraron diferencias con los resultados de la investigación de Stylianou et al. (2015), pues para convencer a un compañero, los argumentos más populares en este caso fueron el narrativo, cuando se trata de una relación numérica y el visual, cuando se trata de una geométrica.

En relación con el segundo objetivo específico de nuestra investigación, las concepciones de los participantes que se reflejan en el test de elección múltiple, son muy similares a las que poseían los estudiantes en Stylianou et al. (2015). De este modo, los estudiantes: son conscientes de las limitaciones de la comprobación empírica, no siendo considerada como prueba por prácticamente la totalidad de los estudiantes; señalaron que la justificación deductiva simbólica constituye el argumento más consistente, y no consideran como rigurosos los argumentos deductivos narrativos y visuales, aunque señalan que son correctos. Al atender a los estudios, las categorizaciones en la población de matemáticas y física son similares, pero existe una inclinación mayor entre los estudiantes de física a considerar los argumentos visuales como consistentes sin imperfecciones lógicas.

En relación con el tercer objetivo específico de nuestra investigación, el análisis del cuestionario de opinión refleja que el alumnado solo ha experimentado un ligero acercamiento a la prueba y ha desempeñando un rol pasivo en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la misma. Si se atiende a los estudios, se observa que las experiencias y el papel de los estudiantes son similares, aunque a los de física se les suele justificar más con un argumento empírico o visual y los de matemáticas suelen construir más pruebas.

En relación con el cuarto objetivo específico de nuestra investigación, las consideraciones realizadas por los estudiantes en el cuestionario de opinión, revelan que los estudiantes no solo son conscientes del papel importante que desempeña la prueba en matemática, sino de su potencial uso pedagógico. Asimismo, señalan que les gustaría adquirir un rol más activo en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la prueba, y discutir en grupos aspectos relacionados con la misma. Al comparar, por un lado las creencias de los estudiantes de altas aptitudes con los de baja, y por otro las creencias de los de física con los de matemáticas, se puede afirmar que prácticamente son las mismas.

Algunas de las preguntas que motivaron el problema de investigación estudiado fueron las siguientes: ¿Qué tipo de justificación toman los estudiantes como prueba y por qué?, ¿Influyen la naturaleza de los estudios cursados y la aptitud matemática? y ¿Cuáles son las experiencias del alumnado en la enseñanza y aprendizaje de la prueba y qué creen al respecto? Respondiendo a las preguntas, se puede concluir que:

- Al justificar un enunciado, resultado o propiedad matemática, los estudiantes prefieren hacer una justificación de tipo deductivo simbólico, debido a que consideran que: “constituye un argumento consistente, es fácil de comprender y es riguroso”.

- En líneas generales, no han influido en sus preferencias los estudios que están cursando ni su aptitud matemática.
- Dado que los estudiantes se encuentran actualmente en la fase inicial del proceso de enseñanza y aprendizaje de la prueba y como hasta ahora, solo han desempeñando un rol pasivo y han trabajado individualmente en la misma, consideran en general que en el aprendizaje de la prueba les gustaría adquirir posturas más activas y trabajar en grupos.

En relación con las perspectivas de futuro, es obvio que un trabajo como el presentado tiene limitaciones metodológicas implicadas por los instrumentos que se han utilizado. El cuestionario cumplimentado por los estudiantes no permite determinar el porqué de sus respuestas. Es por ello que conviene ampliar la investigación haciendo uso de entrevistas clínicas a grupos de estudiantes, que permitirán, tanto indagar más explícitamente sobre sus conocimientos y preferencias a la hora de elegir uno u otro argumento, como conocer cómo se relacionan estos con sus creencias y experiencias.

Anexo

A.1.- Instrumento de investigación: el cuestionario.

Muchas gracias por participar en el estudio mediante el cual queremos analizar qué ideas tienes sobre la demostración en matemáticas.

Se respetará el anonimato y el tratamiento de los datos será confidencial.

Cuestionario

1. Género:

__ Hombre.

__ Mujer.

__ Otro.

2. ¿Cuál fue tu calificación en el examen de matemáticas para las pruebas de acceso a la universidad? _____.

3. Curso de acceso al sistema universitario:___________.

4. Grado que estás cursando o has cursado:________________________________.

5. Número de créditos cursados correspondientes a asignaturas de matemáticas:____.

6. ¿Crees que en las materias de matemáticas que has cursado, se ha dado importancia a las demostraciones?

__ Sí. ¿En cuáles? ____.

__ No.

7. Número de créditos totales del grado superados (aproximadamente):_______________.

8. Actualmente, ¿en qué rango de valores se encuentra la nota media de tu expediente académico universitario?

__ 9-10.

__ 7-8.

__ 5-7.

__ La desconozco.

Test de elección múltiple

Rodea con un círculo la respuesta que más se aproxime a lo que crees.

1. Demostrar un teorema en matemáticas implica que:

(a) es posible que alguien necesite verificar si se cumple en todos los casos.

(b) en un futuro pueda ser refutado.

(c) alguien pueda encontrar una excepción.

(d) siempre será cierto.

2. La relación entre los lados de un triángulo rectángulo expresada en el teorema de Pitágoras es cierta porque:

(a) ha sido verificada midiendo los lados de muchos triángulos rectángulos.

(b) ha sido demostrada a través de un argumento lógico.

(c) ha sido demostrada mediante la imagen de un triángulo con cuadrados construidos sobre sus lados.

(d) te lo ha dicho tu profesor de matemáticas.

3. Las demostraciones son necesarias para:

(a) los teoremas de geometría solamente.

(b) los teoremas de álgebra solamente.

(c) todas las áreas de matemáticas.

(d) varias áreas de matemáticas, pero no para todas.

4. Para probar que un enunciado matemático es falso, se debería:

(a) encontrar todos los casos en los que el enunciado es falso.

(b) mostrar varios casos donde el enunciado es falso.

(c) encontrar un ejemplo que muestre que el enunciado es falso.

(d) hacer un dibujo.

5. Para probar que un enunciado matemático es falso, debería bastar con:

(a) encontrar una serie de contraejemplos que analicen diferentes casos.

(b) encontrar un único contraejemplo del enunciado.

(c) construir una demostración formal que pruebe que el enunciado no es cierto.

(d) un dibujo que ilustre el enunciado.

Lee con detalle la siguiente situación y las cuatro posibles justificaciones A, B, C y D. Tomando como referencia estas cuatro justificaciones responde a las preguntas 6-9.

SITUACIÓN 1
La suma de dos números impares es siempre un número par.

Justificación A

$1 + 1 = 2$	$3 + 1 = 4$	$9 + 13 = 22$
$1 + 3 = 4$	$3 + 3 = 6$	$63 + 21 = 84$
$1 + 5 = 6$	$3 + 5 = 8$	$11 + 99 = 110$

Entonces, la suma de dos números impares siempre será par.

Justificación B

Los números impares son números que pueden escribirse como la suma del número uno más un número divisible por dos. Así, la suma de dos números impares será divisible por dos, y por tanto, un número par.

Justificación C

Sean a y b dos números enteros impares.

Entonces, existen c y d enteros tales que

$$a = 2c + 1 \; y \; b = 2d + 1 \, .$$

Así,

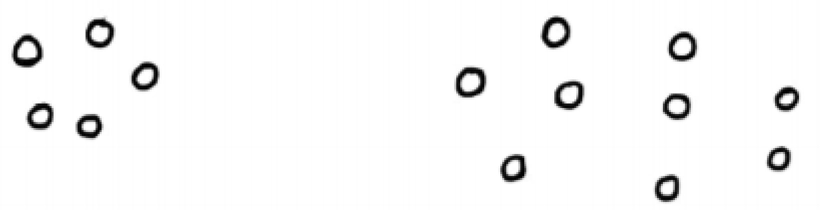
$$a + b = (2c + 1) + (2d + 1) = 2c + 2d + 2 = 2(c + d + 1)$$

donde $c + d + 1$ es un entero.

Por lo tanto, la suma de dos números impares siempre es un número par.

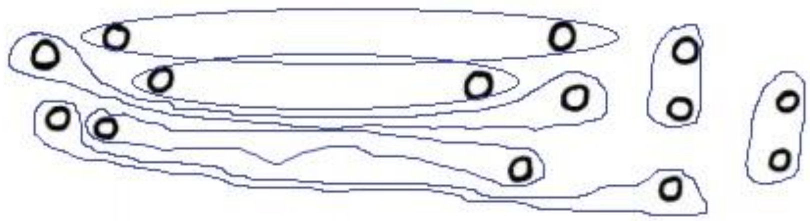
<u>Justificación D</u>

Supón que tenemos dos números impares. Estos se pueden representar mediante las siguientes fichas



.

Sumar los números consiste en juntar todas las fichas. Así, agrupándolas de la siguiente forma



,

se observa que se pueden combinar en pares sin dejar ninguna ficha suelta.

Por ello, la suma de dos números impares es siempre par.

6. De las justificaciones presentadas anteriormente, ¿cuál se aproxima más a la respuesta que tú darías?

(a) Justificación A.

(b) Justificación B.

(c) Justificación C.

(d) Justificación D.

7. ¿Qué justificación consideras más rigurosa matemáticamente?

(a) Justificación A.

(b) Justificación B.

(c) Justificación C.

(d) Justificación D.

8. ¿Cuál es para ti es la más clara?

(a) Justificación A.

(b) Justificación B.

(c) Justificación C.

(d) Justificación D.

9. Para cada justificación señala lo que opinas (solo una por solución).

	Justificación A	Justificación B	Justificación C	Justificación D
Es imperfecta lógicamente				
Es un argumento correcto, pero no riguroso				
No es una demostración, sino una comprobación				
Es un argumento consistente				

Lee con detalle la siguiente situación y las cuatro posibles justificaciones A, B, C y D. Tomando como referencia estas cuatro justificaciones responde a las preguntas 10-13.

SITUACIÓN 2

Si a, b son dos números reales, entonces $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Justificación A

Es cierto, pues solo hay que aplicar la definición de potenciación, la ley distributiva y la ley conmutativa de la suma y del producto.

<u>Justificación B</u>

Por la definición,

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b).$$

Por la ley distributiva,

$$(a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b\,.$$

Nuevamente por la ley distributiva,

$$(a+b)a + (a+b)b = aa + ba + ab + bb\,.$$

Por la definición, la ley conmutativa del producto y de la suma

$$aa + ba + ab + bb = a^2 + b^2 + 2ab\,.$$

<u>Justificación C</u>

Si $a = 1$ y $b = 3.5$, entonces

$$(1+3.5)^2 = 4.5^2 = 20.25 = 1 + 12.25 + 7 = 1^2 + 3.5^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3.5\,.$$

Si $a = -\frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{3}$, entonces

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot \left(\frac{1}{3}\right).$$

Si $a = -\pi$ y $b = -3$, entonces

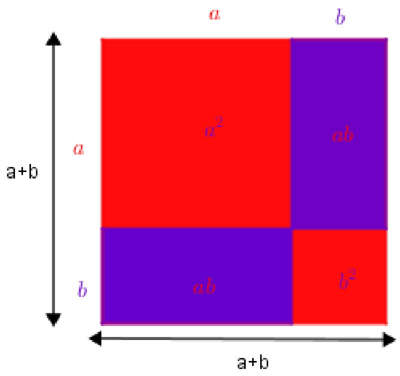
$$\begin{aligned}(-\pi-3)^2 &= \big(-(3+\pi)\big)^2 = (3+\pi)^2 = (3+\pi)(3+\pi) = 3^2 + 3\cdot\pi + \pi\cdot 3 + \pi^2 \\ &= 3^2 + \pi^2 + 2\cdot 3\cdot \pi\,.\end{aligned}$$

He elegido aleatoriamente distintos tipos de reales y la fórmula se ha verificado en todos los casos.

Así, si a, b son dos números reales, entonces

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$

Justificación D



10. De las justificaciones presentadas anteriormente, ¿cuál se aproxima más a la respuesta que tú darías?

(a) Justificación A.

(b) Justificación B.

(c) Justificación C.

(d) Justificación D.

11. ¿Qué justificación consideras más rigurosa matemáticamente?

(a) Justificación A.

(b) Justificación B.

(c) Justificación C.

(d) Justificación D.

12. ¿Cuál es para ti es la más clara?

(a) Justificación A.

(b) Justificación B.

(c) Justificación C.

(d) Justificación D.

13. Para cada justificación señala lo que opinas (solo una por solución).

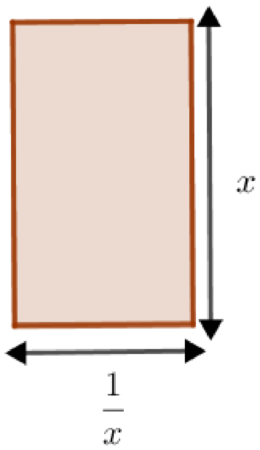
	Justificación A	Justificación B	Justificación C	Justificación D
Es imperfecta lógicamente				
Es un argumento correcto, pero no riguroso				
No es una demostración, sino una comprobación				
Es un argumento consistente				

Lee con detalle la siguiente situación y las cuatro posibles justificaciones A, B, C y D. Tomando como referencia estas cuatro justificaciones responde a las preguntas 14-17.

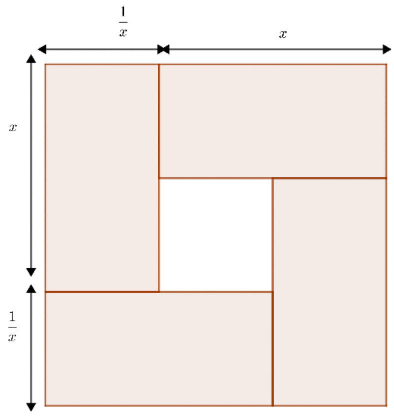
SITUACIÓN 3

Si x es un número real positivo, entonces $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

<u>Justificación A</u>



Entonces,



se observa que

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \geq 4\cdot x\cdot\frac{1}{x},$$

es decir,

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 \geq 2^2$$

con lo cual

$$x+\frac{1}{x}\geq 2\,.$$

<u>Justificación B</u>

$$x+\frac{1}{x}\geq 2 \leftrightarrow \frac{x^2+1}{x}\geq 2 \leftrightarrow x^2+1\geq 2x \leftrightarrow\ x^2-2x+1\geq 0 \leftrightarrow (x-1)^2\geq 0$$

Luego,

$$x+\frac{1}{x}\geq 2$$

siempre que x es un número real positivo.

<u>Justificación C</u>

Si $x = 1$, entonces $x+\frac{1}{x}=1+\frac{1}{1}=1+1=2\geq 2.$

Si $x = \frac{3}{2}$, entonces $x + \frac{1}{x} = \frac{3}{2} + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{9+4}{6} = \frac{13}{6} \geq \frac{12}{6} = 2$.

Si $x = 500$, entonces $x + \frac{1}{x} = 500 + \frac{1}{500} = \frac{250000+1}{500} = \frac{250001}{500} \geq \frac{1000}{500} = 2$.

Si $x = \frac{11}{10}$, entonces $x + \frac{1}{x} = \frac{11}{10} + \frac{1}{\frac{11}{10}} = \frac{11}{10} + \frac{10}{11} = \frac{121+100}{110} = \frac{221}{110} \geq \frac{220}{110} = 2$.

He elegido aleatoriamente distintos tipos de reales positivos y la desigualdad se ha verificado en todos los casos. Así, si x es un número real positivo, entonces $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Justificación D

Al ser x un número real positivo, la desigualdad $x + \frac{1}{x} \geq 2$ es equivalente a $x^2 + 1 \geq 2x$ que a su vez es equivalente a $(x-1)^2 \geq 0$ lo que es cierto. Así, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

14. De las justificaciones presentadas anteriormente, ¿cuál se aproxima más a la respuesta que tú darías?

(a) Justificación A.

(b) Justificación B.

(c) Justificación C.

(d) Justificación D.

15. ¿Qué justificación consideras más rigurosa matemáticamente?

(a) Justificación A.

(b) Justificación B.

(c) Justificación C.

(d) Justificación D.

16. ¿Cuál es para ti es la más clara?

(a) Justificación A.

(b) Justificación B.

(c) Justificación C.

(d) Justificación D.

17. Para cada justificación señala lo que opinas (solo una por solución).

	Justificación A	Justificación B	Justificación C	Justificación D
Es lógicamente imperfecta				
Es un argumento correcto, pero no riguroso				
Solo muestra que es cierto para unos pocos números				
Es un argumento consistente				

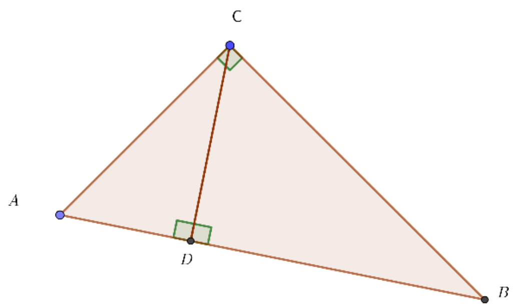
Lee con detalle la siguiente situación y las cuatro posibles justificaciones A, B, C y D. Tomando como referencia estas cuatro justificaciones responde a las preguntas 18-21.

SITUACIÓN 4

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

<u>Justificación A</u>

Sea ΔABC un triángulo rectángulo con $\angle ACB$ el ángulo recto.



Trazamos un segmento perpendicular a $\overline{AB}$ con un extremo en C y el otro en D, situado en $\overline{AB}$.

Entonces, los triángulos ΔDCA y ΔDBC son triángulos rectángulos y semejantes a ΔABC, pues comparten un ángulo agudo, luego sus lados son proporcionales y por tanto,

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} \rightarrow \ AD \ = \frac{AC^2}{AB}.$$

De forma análoga,

$$\frac{DB}{BC} = \frac{BC}{AB}$$

y así,

$$DB \ = \frac{BC^2}{AB}.$$

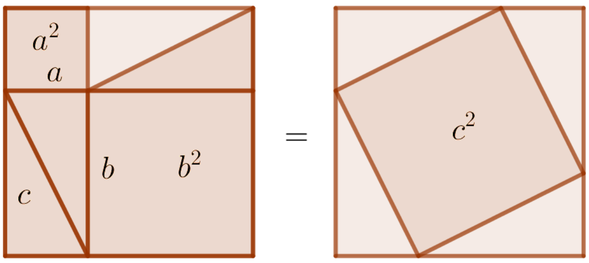
De esta manera,

$$AB \ = AD + DB \ = \frac{AC^2 + BC^2}{AB}.$$

Lo que conduce a

$$AB^2 \ = AC^2 + BC^2.$$

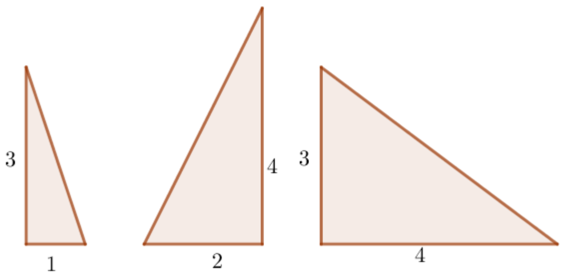
Justificación B



$$a^2 + b^2 \ = c^2.$$

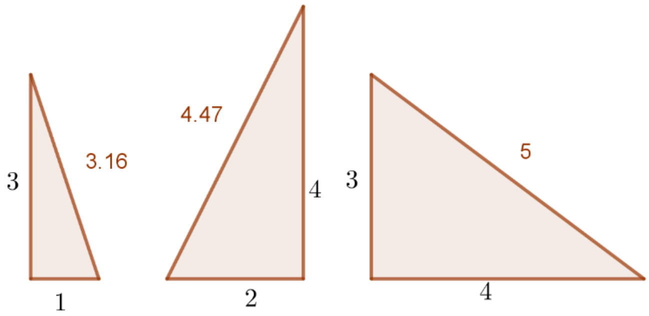
Justificación C

Trazamos tres triángulos rectángulos en GeoGebra con las siguientes medidas



.

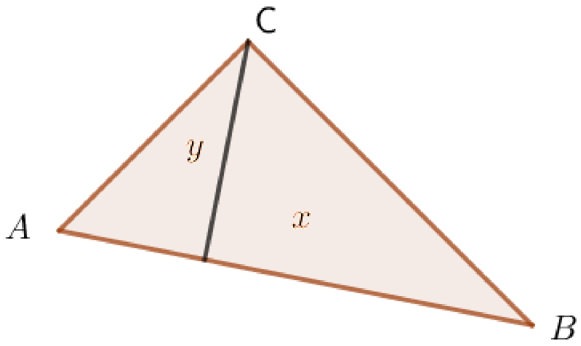
Medimos el lado que nos queda con GeoGebra



y obtenemos que efectivamente miden $\sqrt{10}$, $\sqrt{20}$ y 5, correspondientemente.

Justificación D

Sea ΔABC un triángulo rectángulo con ∠ACB el ángulo recto.



Trazamos una perpendicular desde C hasta el segmento $\overline{BA}$. En la figura, los triángulos cuyas áreas están marcadas por x e y son semejantes al triángulo original (cuya área es $x + y$). Se sabe que la razón de las áreas de dos triángulos semejantes es igual al cuadrado de su razón de semejanza. Así, $(x, y, x + y)$ es proporcional a (a^2, b^2, c^2), con lo cual se deduce el teorema de Pitágoras.

18. De las justificaciones presentadas anteriormente, ¿cuál se aproxima más a la respuesta que tú darías?

(a) Justificación A.

(b) Justificación B.

(c) Justificación C.

(d) Justificación D.

19. ¿Qué justificación consideras más rigurosa matemáticamente?

(a) Justificación A.

(b) Justificación B.

(c) Justificación C.

(d) Justificación D.

20. ¿Cuál es para ti es la más clara?

(a) Justificación A.

(b) Justificación B.

(c) Justificación C.

(d) Justificación D.

21. Para cada justificación señala lo que opinas (solo una por solución).

	Justificación A	**Justificación B**	**Justificación C**	**Justificación D**
Es imperfecta lógicamente				
Es un argumento correcto, pero no riguroso				
No es una demostración, sino una comprobación				
Es un argumento consistente				

Cuestionario de opinión

Rodea con un círculo el número que mejor refleje la frecuencia con la que ocurrían los siguientes hechos

	nunca	**raramente**	**a veces**	**muy a menudo**	**siempre**
1. Los profesores de matemáticas que he tenido en el pasado han demostrado los teoremas y los hechos matemáticos que han expuesto.	1	2	3	4	5

2. Los profesores de matemáticas que he tenido en el pasado han demostrado los teoremas y los hechos matemáticos que han expuesto mediante gráficas o diagramas.	1	2	3	4	5
3. Los profesores de matemáticas que he tenido en el pasado han demostrado los teoremas y los hechos matemáticos que han expuesto mediante ejemplos.	1	2	3	4	5
4. En las clases de matemáticas que he tenido, el alumnado ha trabajado individualmente a la hora de construir demostraciones.	1	2	3	4	5
5. Los profesores de matemáticas que he tenido en el pasado presentaban más de una demostración para el mismo teorema.	1	2	3	4	5

Rodea con un círculo el número que mejor refleje tu nivel de acuerdo o desacuerdo en relación con tu experiencia en las asignaturas de matemáticas.

	totalmente en desacuerdo	***en desacuerdo***	***neutral***	***de acuerdo***	***totalmente de acuerdo***
6. En las clases de matemáticas que he tenido, el alumnado a la hora de desarrollar demostraciones desempeñaba un papel significativo.	1	2	3	4	5
7. A la hora de construir una demostración, los profesores de matemáticas que he tenido la han escrito en la pizarra con poca contribución del alumnado.	1	2	3	4	5
8. Según mi experiencia, las clases de matemáticas se basan más en tomar apuntes de lo que el docente expone que en discutir con mis compañeros el porqué los enunciados matemáticos son ciertos o falsos.	1	2	3	4	5
9. En las clases de matemáticas que he tenido, se enfatizaba en que los enunciados matemáticos deben ser demostrados.	1	2	3	4	5
10. En las clases de matemáticas que he tenido, el demostrar los enunciados matemáticos era una actividad regular.	1	2	3	4	5
11. En las clases de matemáticas que he tenido, el hacer demostraciones era una parte usual de la tarea que tenía que realizar.	1	2	3	4	5
12. En la tarea que tenía que realizar en el pasado se me pedía constantemente justificar mi pensamiento o explicar el porqué de algo.	1	2	3	4	5
13. En los exámenes de matemáticas que	1	2	3	4	5

he tenido, se me ha pedido construir al menos una demostración matemática.					
14. En los exámenes de matemáticas que he tenido, rara vez he tenido que explicar mi razonamiento.	1	2	3	4	5

Rodea con un círculo el número que mejor refleje tu nivel de acuerdo o desacuerdo.

	totalmente en desacuerdo	***en desacuerdo***	***neutral***	***de acuerdo***	***totalmente de acuerdo***
15. Considero que demostrar es una parte importante de hacer matemáticas.	1	2	3	4	5
16. Todos los estudiantes deberían tener la oportunidad de aprender a leer y efectuar demostraciones.	1	2	3	4	5
17. Las demostraciones no solo sirven para validar conjeturas matemáticas, sino para comunicar y explicar ideas nuevas.	1	2	3	4	5
18. Es importante para mi participar en la construcción de argumentos matemáticos o demostraciones durante la enseñanza.	1	2	3	4	5
19. Si me esfuerzo lo suficiente, creo que puedo aprender a leer y hacer demostraciones.	1	2	3	4	5
20. Siento que mi entendimiento de las matemáticas es mejor si comprendo el porqué un teorema es cierto.	1	2	3	4	5
21. Me molesta si un profesor me dice que acepte un enunciado matemático sin explicarme por qué es verdadero.	1	2	3	4	5
22. En el aprendizaje de las matemáticas, es importante para mi entender las razones y no solo memorizar las fórmulas.	1	2	3	4	5
23. Si un enunciado matemático requiere una demostración, pienso que es responsabilidad del docente (no de los estudiantes) de presentarla a la clase.	1	2	3	4	5
24. Pienso que el alumnado debería participar en la elaboración de demostraciones en clase.	1	2	3	4	5
25. En las asignaturas de matemáticas pienso que en los instrumentos de evaluación se deben incluir el efectuar demostraciones.	1	2	3	4	5
26. Creo que me beneficiaría del proceso que entraña el discutir en grupos cómo demostrar enunciados matemáticos.	1	2	3	4	5

Referencias bibliográficas

Alcock, L., y Weber, K. (2010). Undergraduates' example use in proof production: Purposes and effectiveness. *Investigations in Mathematical Learning*, 3(1), 1-22.

Antonini, S. y Mariotti, M. A. (2008). Indirect proof: what is specific to this way of proving? *ZDM the International Journal on Mathematics Education*, 40, 401-412.

Appel, K. y Haken, W. (1976). Every map is four colourable. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 82, 711-712.

Arce, M., Conejo, L., Dos Santos, C., Ortega, T. y Pecharromán, C. (2019). Concepciones del profesorado de educación secundaria sobre la demostración matemática y su enseñanza y aprendizaje. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 417-438). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. En D. Pimm (Ed.), *Mathematics, teachers and children* (pp. 216–230). Londres: Hodder & Stoughton.

Bell, A.W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23–40

Davis, P. J. y Hersh, R. (1981). *The mathematical experience*. Nueva York: Viking Penguin Inc.

Dickerson, D. S. (2008). *High school mathematics teachers' understandings of the purposes of mathematical proof*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Siracusa, Siracusa.

Dunham, W. (1994). *Mathematical Universe*. Nueva York: John Wiley & Sons Inc.

Eisenberg, T. y Dreyfus, T. (1991). On the Reluctance to Visualize in Mathematics, *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (Zimmermann & Cunnigham, ed), 25-37.

Eisenberg, T. (1994). On understanding the reluctance to visualize. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 26(4), 109–113.

Gardiner, T. y Moreira, C. (1999). Proof matters. *Mathematics Teaching*, 169, 17-21.

Gholamazad, S., Liljedahl, P. y Zazkis, R. (2004). What counts as proof? Investigation of pre-service elementary teachers' evaluation of presented 'proofs'. En D. E. McDougall & J. O. Ross (Eds.), *Proceedings of the Twenty-sixth Annual Meeting* *of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 639–646), Universidad de Toronto, Toronto.

Goetting, M. (1995). *The college students' understanding of mathematical proof*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Maryland, Maryland.

González-Martín, A. S. y Camacho, M. (2004). Legitimization of the graphic register in problem solving at the undergraduate level. The case of the improper integral. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 479-486.

Gskenderoglu, T. , Baki, A., y Gskenderoglu, M. (2011). Proof schemes used by first grade of preservice mathematics teachers about function topic. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 9 , 531-536.

Hadamard, J. (1954): *The Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Nueva York: Dover Publication.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. En D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 54-61). Reino de los Países Bajos: Kluwer.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21, 6–13.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1), 5-23.

Harel, G., y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from an exploratory study. En A. H. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234–283). Providencia: American Mathematical Society.

Harel G. (2014) Deductive Reasoning in Mathematics Education. En Lerman S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Dordrecht: Springer.

Hemmi, K. y Löfwall, C. (2009). Why do we need proof. *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME6, January 28 – February 1, 2009).* (pp. 201-210). Lyon: Institut National de Recherche Pédagogique and ERME.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 389-399.

Healy, L., y Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 396–428.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2001). Un estudio sobre los esquemas de prueba en alumnos de primer curso de bachillerato. *Uno*, 28, 39-59.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2003). Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de Bachillerato. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación* *y experiencias didácticas*, 21(1), 49-63.

Ko, Y. (2010). Mathematics teachers'conceptions of proof: implications for educational research. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 8, 1109-1129.

Knuth, E. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(1), 61–88.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Marrades, R, y Gutierrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87-125.

Mingus, T. y Grassl, R. (1999). Preservice teacher beliefs about proofs. *School Science and Mathematics*, 99(8), 438–444.

Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249-266.

Morris, A. K. (2002). Mathematical reasoning: Adults' ability to make the inductive deductive distinction. *Cognition and Instruction*, 20(1), 79–118.

Mujeres matriculadas y egresadas en enseñanza de grado y de primer y segundo ciclo por rama de enseñanza. Curso 2019-2020. INE.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.

Raman, M.J. (2002). *Proof and justification in collegiate calculus*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de California, Berkeley.

Recio, A. M. and Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 83-99.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* Orlando: Academic press.

Sears, R. (2019) Proof schemes of pre-service middle and secondary mathematics teachers, *Investigations in Mathematics Learning*, 11(4), 258-274.

Selden, A. y Selden, J. (1987). Errors and misconceptions in college level theorem proving. *Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics.* Universidad de Cornell.

Senk, S.L. (1985). How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher,* 78, 448-456.

Stylianides, A. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research* *in Mathematics Education*, 38, 289–321.

Stylianou, D., Blanton, M. y Rotou, O. (2015). Undergraduate Students' Understanding of Proof: Relationships Between Proof Conceptions, Beliefs, and Classroom Experiences with Learning Proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1, 91-134.

Thurston, W.P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 30, 161-177.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: the need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 101-119.

Weber, K. *Research Sampler 8: Students' difficulties with proof* [en linea]. [Consulta: 22/04/2021]. Recuperado de: https://www.maa.org/programs/faculty-and-departments/curriculum-department-guidelines-recommendations/teaching-and-learning/research-sampler-8-students-difficulties-with-proof .

Vicario, V. y Carrillo-Yañez J. (2005). Concepciones del profesor de secundaria sobre la demostración matemática. El caso de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y las funciones de la demostración. *Actas del Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*, 145-152.

Weber, K., y Alcock, L. (2009). Semantic and syntactic reasoning and proving in advanced mathematics classrooms. En D. Stylinaiou, M. Blanton, y E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 323–338). Nueva York: Routledge.

Williams, E. (1980). An investigation of senior high school students' understanding of the nature of mathematical proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 11, 165-166.

Zazkis, D., Weber, K., y Mejía-Ramos, J.P. (2016). Bridging the gap between graphical arguments and verbal-symbolic proofs in a real analysis context. *Educational Studies in Mathematics*, 93, 155-173.