Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Jorge de la Paz Abreu

Grupos de Homotopía de Orden Superior

Higher Homotopy Groups

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Junio de 2022

Dirigido por
Josué Remedios Gómez

Josué Remedios Gómez
Matemáticas, Estadística e
Investigación Operativa
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi tutor, Josué Remedios Gómez, por guiarme y ayudarme en este proceso, sin él esto no habría sido posible.

A toda mi familia y personas que representan un pilar en mi vida, mis padres, mi abuela y hermano.

Por último, también agradecer a mis amigos de clase los buenos momentos que he pasado en mi etapa universitaria. Ha merecido la pena estudiar esta carrera solo por haberles conocido.

Jorge de la Paz Abreu
La Laguna, 13 de junio de 2022

Resumen · Abstract

Resumen

Los grupos de homología son un invariante algebraico que permite distinguir espacios topológicos. Su estructura está generada a partir de ciclos que se pueden definir en cada dimensión del espacio. Por otra parte, el grupo fundamental de un espacio proporciona otro invariante a partir de lazos en dimensión uno. Parece natural intentar extender este concepto de lazo a dimensiones superiores, y esto es lo que desarrollaron, a partir de 1932, Eduard Cěch y Witold Hurewicz, definiendo los grupos de homotopía de orden superior, y estudiando la relación entre estos y los grupos de homología.
En esta memoria se pretende mostrar dicha construcción y sus principales propiedades, haciendo uso de fibraciones y sucesiones exactas para el estudio de los grupos de homotopía de las esferas.

Palabras clave: *Grupos de homotopía - Grupos de homotopía de las esferas - Fibración de Hopf - Grupos de homotopía estables.*

Abstract

Homology groups are an algebraic invariant that allows us to distinguish spaces. Its structure is generated from cycles that can be defined in each dimension of the space. On the other hand, the fundamental group of a space provides another invariant from loops in dimension one. It seems natural to try to extend this concept of loop to higher dimensions, and this is what Eduard Cěch and Witold Hurewicz developed, starting in 1932, defining the higher order homotopy groups, and studying the relationship between these and the homology groups.
This memory intends to show this construction and its main properties, making use of fibrations and exact sequences for the study of the homotopy groups of the spheres.

Keywords: *Homotopy Groups - Homotopy Groups of Spheres - Hopf Fibration - Stable Homotopy Groups.*

Contenido

Introducción

Uno de los problemas básicos de la topología es el de determinar cuándo dos espacios son o no homeomorfos. No hay un método general para resolver este problema, pero existen técnicas que se pueden aplicar en casos particulares. La rama de la topología algebraica busca usar herramientas algebraicas para contestar esta pregunta. El objetivo es definir invariantes que nos permitan diferenciar espacios entre sí.

La noción de grupo fundamental de un espacio fue introducida por Poincaré en 1895. Entre los años 1925 y 1930 se reformulan las propiedades combinatorias desarrolladas por Poincaré, dando origen a la teoría de la homología tal y como la conocemos actualmente [5, cap. 50]. La versatilidad de los grupos de homología en el estudio de los espacios topológicos motiva la extensión del grupo fundamental a otras dimensiones, materializada en 1932 por el matemático Eduard Čech. Este propuso una definición para los grupos de homotopía de orden superior empleando aplicaciones cuyos dominios eran esferas de dimensión n. A Witold Hurewicz se le atribuye también, casi en paralelo (en 1935), la introducción de los grupos superiores de homotopía, además de la sucesión exacta larga de homotopía de una fibración, y el teorema que lleva su nombre: el teorema de Hurewicz, que como veremos al final de este trabajo, establece una relación entre los grupos de homotopía y de homología.

Los objetos geométricos de interés en topología algebraica se pueden construir “pegando” esferas de diferentes dimensiones. Construcciones celulares como los CW-complejos permiten aproximar cualquier espacio topológico de esta manera. Por tanto, el conocimiento detallado de los grupos de homotopía de las esferas es relevante, y su estudio ocupa la parte final de esta memoria.

En el primer capítulo se recordarán algunos conceptos y resultados conocidos, además de introducir una serie herramientas básicas de teoría de categorías.

En el segundo capítulo se darán tres definiciones equivalentes de grupos superiores de homotopía. A continuación mostraremos que estos grupos son conmutativos para órden estrictamente mayor que uno. Finalmente, se probará que espacios homotópicamente equivalentes tienen grupos de homotopía isomorfos en cada dimensión.

El tercer capítulo está dedicado al cálculo de los grupos de homotopía de las esferas. Se definirá el concepto de fibración y la sucesión exacta que esta genera. Se aplicará a la fibración de Hopf para obtener ciertos casos particulares de grupos de homotopía de las esferas. Con este mismo objetivo se enunciarán sin demostración tres teoremas clásicos: teorema de Hurewicz, teorema de finitud de Serre y teorema de la suspensión de Freudenthal, siendo este último clave para el estudio de los grupos de homotopía estables.

1

Teoría de Categorías y Homotopía

En este primer capítulo se introducirán conceptos y resultados de teoría de categorías, en particular de categorías homotópicas. Para ello en la primera sección recordaremos algunos teoremas clásicos de topología general, así como algunas herramientas que usaremos a lo largo de esta memoria.

1.1. Preliminares

En esta sección se comienza recordando conceptos básicos de topología así como resultados generales sin exponer las demostraciones.

Definición 1.1.1 *Un espacio topológico X se dice localmente compacto si todo punto admite una base de entornos compactos.*

Lema 1.1.1 *(Lema de continuidad) Sea X un espacio topológico tal que $X = F_1 \cup \ldots \cup F_n$, donde F_i es un subespacio cerrado de X, para todo $i, \ldots, n$. Se suponen continuas las aplicaciones $f_i : F_i \to Y$ con $f_{i|F_i \cap F_j} = f_{j|F_i \cap F_j}$, para todo $i, j = 1, \ldots, n$. Entonces la aplicación $f : X \to Y$ definida por $f(x) = f_i(x), x \in F_i$ es continua*

Definición 1.1.2 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación entre un espacio X y un conjunto Y. Se define en Y la topología imagen por:*

$$\tau_f = \left\{ A \subset Y : f^{-1}(A) \text{ es abierto en } X \right\}.$$

Luego, una aplicación continua $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ se dice una identificación si es sobre y $\tau_Y = \tau_f$.

Proposición 1.1.1

1. *Toda aplicación continua, sobre y abierta (o bien cerrada) es identificación.*
2. *Toda identificación biyectiva es homeomorfismo.*
3. *Si $f : X \to Y$ es una identificación y $g : Y \to Z$ una aplicación, con Z un espacio, entonces g es continua si y sólo si gf es continua.*

4. *Si $f : X \to Y$ es continua y sobre, entonces la relación xRx' si y sólo si $f(x) = f(x')$ es de equivalencia. Además, si f es identificación, existe un homeomorfismo $\bar{f} : X/R \overset{\cong}{\to} Y$ definido por $\bar{f}([x]) = f(x)$, tal que $\bar{f}\pi = f$*
5. *Sea R una relación de equivalencia en el espacio X. Dada $f : X \to Y$ continua, existe $f' : X/R \to Y$ continua tal que $f'\pi = f$ si y sólo si $(xRx' \iff f(x) = f(x'))$.*
6. *Si $f : X \to X'$ es una identificación e Y es un espacio localmente compacto, entonces $f \times 1_Y : X \times Y \to X' \times Y$, es identificación.*

Proposición 1.1.2 *Sea X un espacio topológico y sea R una relación de equivalencia en X. Sea $\pi : X \to X/Y$ la proyección en el cociente, y sea Y un espacio localmente compacto. Entonces,*

- *$\pi \times 1_Y : X \times Y \to (X/R) \times Y$ es una identificación.*
- *Si consideramos la relación de equivalencia R' en $X \times Y$ dada por*

$$(x, y)R'(x', y') \iff xRx', y = y',$$

entonces existe un homeomorfismo

$$\phi : (X \times Y)/R' \cong (X/R) \times Y,$$

tal que $\phi\pi' = \pi \times 1_Y$.

Proposición 1.1.3 *Sea C un subespacio compacto de X y $\pi : X \to X/C$ la proyección canónica. Entonces, para todo espacio topológico Y, $\pi \times 1_Y : X \times Y \to (X/C) \times Y$ es una identificación.*

Teorema 1.1.1 *Un espacio Hausdorff X es localmente compacto si y sólo si todo punto tiene un entorno compacto. [10]*

Definición 1.1.3 *Sea I=[0,1], el intervalo unidad cerrado. Se denomina n-cubo al producto $I^n = I \times I \times \overset{n}{\cdots} \times I$. Se denota δI^n a la frontera del n-cubo.*

Definición 1.1.4 *Dados X, Y espacios topológicos, se define el espacio de funciones de Y en X como:*

$$X^Y = \{f : Y \to X / f \text{ es continua}\}$$

Se tomará la topología compacto-abierta en X^Y, es decir, aquella que tiene como subbase todos los subconjuntos de X^Y de la forma $(K, A) = \{f \in X^Y : f(K) \subset A\}$, donde $K \subset Y$ es compacto y $A \subset X$ es abierto.

Definición 1.1.5 *Se define la aplicación evaluación como*

$$\begin{array}{rcl} e : X^Y \times Y \to & & X \\ (f, y) & \rightsquigarrow & e(f, y) = f(y) \end{array}$$

Proposición 1.1.4 *Si Y es localmente compacto entonces la aplicación evaluación es continua.*

Demostración. Sea $(f_0, y_0) \in X^Y \times Y$. Veamos que e es continua en el punto (f_0, y_0) : Sea V un abierto en X tal que $e(f_0, y_0) = f_0(y_0) \in V$. Como f_0 es continua e Y localmente compacto, existe un entorno compacto de y_0, W, tal que $f_0(W) \subset V$. Por tanto (W, V) es un entorno abierto de f_0 en X^Y. Sea $U = (W, V) \times \mathrm{Int}(W)$. Entonces U es un entorno abierto de (f_0, y_0) en $X^Y \times Y$, y $e((W, V) \times \mathrm{Int}(W)) \subset V$. Por tanto e es continua en (f_0, y_0). $\square$

Definición 1.1.6 *Dado un espacio topológico X, se dice que un par $(\tilde{X}, p)$ es un espacio recubridor de X cuando:*

- *$\tilde{X}$ es un espacio topológico conexo por caminos.*
- *$p : \widetilde{X} \to X$ es continua* y *sobreyectiva.*
- *Todo punto $x \in X$ tiene un entorno abierto U tal que $p^{-1}(U)$ es una unión disjunta de subconjuntos abiertos de $\tilde{X}, p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in I} U_i$, de forma que las restricciones $p_{|U_i} : U_i \to U$ son homeomorfismos.*

La aplicación p se denomina proyección recubridora, un entorno del tipo descrito en el punto anterior se llama entorno admisible de x, y los *abiertos U_i se denominan hojas.*

Proposición 1.1.5 *Toda aplicación recubridora es abierta, y por tanto una identificación. Además, todo espacio que tiene un recubridor es conexo por caminos.*

Teorema 1.1.2 *(Teorema de elevación de caminos) Si $(\widetilde{X}, p)$ es un espacio recubridor de X y $f : (I, 0) \to (X, x_0)$ es un camino, entonces para todo $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ existe un único $\tilde{f} : (I, 0) \to \left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0\right)$ tal que $p\widetilde{f} = f$.*

Teorema 1.1.3 *(Teorema de elevación de homotopías) Sean $(\tilde{X}, p)$ espacio recubridor de X, e Y otro espacio topológico. Entonces, dado un cuadrado conmutativo del tipo*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "i_0"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, "\tilde{F}"] & X \end{tikzcd}$$

existe una aplicación continua $\tilde{F} : Y \times I \to \widetilde{X}$ haciendo conmutar todo el diagrama, esto es, tal que $p\widetilde{F} = F$ y $\widetilde{F} i_0 = \tilde{f}$. Además, si Y es conexo entonces $\widetilde{F}$ es única.
Si se define $g : Y \to X$ por $g(y) = F(y, 1)$, y $\tilde{g} : Y \to \tilde{X}$ por $\tilde{g}(y) = \tilde{F}(y, 1)$, entonces $p\tilde{g} = g$ y $\tilde{F} : \tilde{f} \simeq \tilde{g}$. Por tanto, si $f \simeq g$, entonces sus respectivas elevaciones $\widetilde{f}$ y $\tilde{g}$ son también homótopas.

Teorema 1.1.4 *(Teorema de elevación de aplicaciones arbitrarias a un espacio recubridor) Si* $(\widetilde{X}, p)$ *es un espacio recubridor de* X*, e* Y *es un espacio topológico conexo por caminos y localmente conexo por caminos. Dado* $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ *y* $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$*, entonces existe* $\tilde{f} : (Y, y_0) \to \left(\tilde{X}, \widetilde{x}_0\right)$ *tal que* $p\tilde{f} = f$ *si y sólo si* $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \leq p_*\left(\pi_1\left(\tilde{X}, \tilde{x}_0\right)\right)$*. Además, en caso de existir la elevación es única. [6, Teorema 21.2]*

1.2. Teoría de categorías

En esta sección se introduce la teoría de categorías y se muestran algunos ejemplos, como sus principales propiedades. Una categoría se podría entender como la formalización de una estructura matemática específica.

Definición 1.1. *Una categoría C consiste en la siguiente estructura:*

1. *Una clase Ob(C), cuyos elementos se denominan objetos de la categoría.*
2. *Para cada par de objetos X,Y, un conjunto* $Hom_C(X, Y)$*, cuyos elementos se denominan morfismos de X a Y.*
3. *Para cada terna de objetos X,Y,Z, una aplicación llamada composición:*

$$\begin{array}{rcl} \circ : Hom_C(X, Y) \times Hom_c(Y, Z) & \to & Hom_c(X, Z) \\ (f, g) & \rightsquigarrow & g \circ f = gf \end{array}$$

Para cada objeto X, un morfismo 1_X*:X →X llamado identidad de X, el cual satisface dos axiomas:*

- *Axioma de asociatividad: Dados* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$*, se verifica h(gf) = (hg)f*
- *Axioma de identidad: Dado* $X \xrightarrow{f} Y$ *se verifica* $1_Y f = f = f 1_X$

Si f ∈ $Hom_C(X, Y)$*, se dice que X es el dominio de f (dom f = X), y que Y es el codominio de f (codom f = Y)*

Algunos ejemplos:

- La categoría de conjuntos, *Set*, con las aplicaciones de X en Y .
- La categoría de espacios topológicos Top formada por los espacios topológicos y las aplicaciones continuas, y de forma análoga la categoría Top_* de espacios topológicos basados y aplicaciones punteadas.
- La categoría de parejas de espacios, Top^2, que tiene por objetos los pares de espacios (X, A) con A ⊂ X, y los morfismos $f : (X, A) \to$ (Y,B) son aplicaciones continuas f : X → Y tales que $f(A) \subset B$.
- La categoria de grupos, *Grp*, con los homomorfismos de grupos.

- La categoria de grupos abelianos, Ab, con los homomorfismos de grupos.

Definición 1.2.1 *Dada una categoría C se define la categoría opuesta de C, C^{op}, como la que tiene por objetos los mismos de C y como morfismos los de C, pero permutando dominios por codominios y el orden de las composiciones. Es decir, $Hom_C(X,Y) = Hom_{C_{op}}(X,Y)$*

Definición 1.2.2 *Se dice que un cuadrado conmutativo*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\bar{f}"'] \arrow[d, "\bar{g}"'] & Z \arrow[d, "g"'] \\ Y \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

es un pull back cuando para todo par de morfismos $Y \overset{r}{\leftarrow} T \overset{s}{\rightarrow} Z$ tales que $fr = gs$, existe un único morfismo $h : T \to B$, que se denota $< r,s >$, verificando $\bar{g} < r,s >= r$ y $\bar{f} < r,s >= s$.

El concepto dual al de pull back es el de push out. Explícitamente, se dice que un cuadrado conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "f"'] & Z \arrow[d, "\bar{f}"'] \\ Y \arrow[r, "\bar{g}"'] & P \end{tikzcd}$$

es un push out cuando para todo par de morfismos $Y \overset{r}{\rightarrow} T \overset{s}{\leftarrow} Z$ tales que $rf = sg$, existe un único morfismo $h : P \to T$, que se denota $\{r,s\}$, verificando $\{r,s\}\bar{g} = r$ y $\{r,s\}\bar{f} = s$.

Ejemplo 1.2.1 *Sean $Y \overset{f}{\leftarrow} X \overset{g}{\rightarrow} Z$ aplicaciones continuas en Top. Sobre la unión disjunta $Y \sqcup Z = (Y \times \{0\}) \cup (Z \times \{1\})$ se define la relación de equivalencia generada por las relaciones elementales $(f(x), 0) \sim (g(x), 1)$, y se tiene que*

$$Y \cup_X Z = Y \sqcup Z / \sim$$

con inducidas definidas por $\bar{f}(z) = [(z,1)]$ y $\bar{g}(y) = [(y,0)]$. Este cociente define el push out de f y g en esta categoría.

Definición 1.2.3 *Un funtor F de una categoría C en otra D, denotado por F:C→D, consiste en:*

1. *Una aplicación F:Ob(C) → Ob(D)*
2. *Para cada par de objetos X,Y de C una aplicación*

$$F : Hom_C(X,Y) \to Hom_D(F(X), F(Y))$$

que preserva las composiciones y las identidades, es decir:

- *F(gf) = F(g)F(f), para* $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$.
- *F(1*$_X$*)= 1*$_{F(X)}$*, para todo objeto X de C.*

Proposición 1.2.1 *Sea* $F : C \to D$ *un funtor. Si* $f : X \to Z$ *es isomorfismo en C, entonces* $F(f)$ *es isomorfismo en D. En particular,* $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$.

Algunos ejemplos:

- Funtor cilindro: denotado $I : Top \to Top$ se define
  - Para objetos: $I(X) = X \times I$
  - Para morfismos: $f : X \to Y, I(f) = f \times 1_I$
- Funtor suspensión: $\Sigma : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}_*$ se define, de forma clásica, como
  - Para objetos: $\Sigma X = (X \times I)/\left((X \times \{0,1\}) \cup (\{x_0\} \times I)\right)$ donde $\{*\} = \pi\left((X \times \{0,1\}) \cup (\{x_0\} \times I)\right)$.
  - Para morfismos: Sea $f : (X, x_0) \to (X', x_0')$ es una aplicación continua punteada, entonces se induce de forma natural $\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma X'$ como $\Sigma f([(x,t)]) = [(f(x), t)]$

Proposición 1.2.2 *Fijado un espacio topológico X, las siguientes construcciones definen un funtor:*

- $-^X : Top \to Top$*, definido para objetos como* $-^X(Y) = Y^X$*, y para morfismos* $f : Y \to Y'$*, como* $-^X(f) = f_* : Y^X \to (Y')^X$ *con* $f_*(h) = fh$.
- X^- *:*$Top^{\,op} \to Top$*, definido para objetos como* $X^-(Y) = X^Y$*y, para morfismos* $f : Y' \to Y,$ como $X^-(f) = f^* : X^Y \to X^{Y'}$*, con* $f^*(h) = hf$.

Demostración.

- Sea $f : Y \to Y'$ continua, entonces :
$$\begin{aligned}(f_*)^{-1}((K,U)) &= \{g \in Y^X / fg \in (K,U)\} = \left\{g \in Y^X / fg(K) \subset U\right\} \\ &= \left\{g \in Y^X / g(K) \subset f^{-1}(U)\right\} = \left(K, f^{-1}(U)\right)\end{aligned}$$
  donde K es compacto en X, y $f^{-1}(U)$ es abierto en Y por ser f continua. Luego, $f_* : Y^X \to (Y')^X$ es continua.
  Además, conserva la identidad y composición:
  - $-^X(1_Y) = 1_{Y^X}$
  - Sea $Y \xrightarrow{f} Y' \xrightarrow{g} Y''$ tenemos que $g_* f_*(h) = g_*(fh) = (gfh) = (gf)_*(h)$.
- Sea $f : Y' \to Y$ es continua entonces $f^* : X^Y \to X^{Y'}$ es continua: Si(K,U) es abierto subbásico en $X^{Y'}$, entonces:
$$\begin{aligned}(f^*)^{-1}\left((K,U)\right) &= \left\{g \in X^Y / gf \in (K,U)\right\} = \left\{g \in X^Y \quad (gf)(K) \subset U\right\} \\ &= \left\{g \in X^Y, g(f(K)) \subset U\right\} = (f(K), U).\end{aligned}$$
  Como f es continua y K compacto entonces $f(K)$ es también compacto en Y, por lo que f^* es continua. De manera similar al apartado anterior tenemos que X^- conserva identidades y composición, luego se concluye que es funtor.

$\square$

Nota 1.2.1 *Consideremos la notación exponencial para parejas de espacios en Top* $^{(2)}$ *:*

$$(X, A)^{(Y,B)} = \left\{ f \in X^Y : f(B) \subset A \right\}$$

En concreto, para el caso punteado, dados $(X, x_0), (Y, y_0)$ *espacios punteados, se denota*

$$(X, x_0)^{(Y,y_0)} = \left\{ f \in X^Y : f(y_0) = x_0 \right\} = Hom_{\mathrm{Top}^{(2)}}(Y, y_0; X, x_0)$$

Este espacio es punteado, con punto base la aplicación constante en x_0*, que denotaremos por* $c_{x_0} : Y \to X$.

Proposición 1.2.3 *De manera análoga a la definición en* Top *de la proposición anterior, se pueden definir también los funtores en* $Top^{(2)}$*:*

$$-^{(X,Y)} : \mathrm{Top}^{(2)} \to \mathrm{Top}^{(2)} \quad y \quad (X, Y)^{-} : \mathrm{Top}^{op(2)} \to \mathrm{Top}^{(2)}$$

Corolario 1.2.1 *Por lo que en particular, tenemos los funtores de caminos, espacio de caminos punteados y espacio de lazos:*

- $-^I : \mathrm{Top} \to$ *Top definido por* $-^I(X) = X^I$ *y* $-^I(f) = f_*$.
- $-^I : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}_*$ *definido por* ${}^I(X, x_0) = \left(X^I, c_{x_0}\right)$ y $- {}^I(f) = f_*$.
- $P = -^{(I,0)} : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}_*$ *definido por* $P\left((X, x_0)^{(I,\{0\})}, c_{x_0}\right)$ *y* $P(f) = f_*$.
- $\Omega : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}_*$ *definido por* $\Omega(X, x_0) = \left((X, x_0)^{(I,\{0,1\})}, c_{x_0}\right)$ *y* $\Omega(f) = f_*$.

Nota 1.2.2 *Definimos las aplicaciones evaluación en 0 y 1 respectivamente como:*

$$e_0, e_1 : X^I \to X, e_j(\alpha) = \alpha(j), j = 0, 1$$

Definimos la inclusiones en las tapas del cilindro como:

$$i_0, i_1 : X \to IX, i_j(x) = (x, j), j = 0, 1$$

Definición 1.2. *Una transformación natural entre dos funtores* $F, G : C \to D$ *consiste en una colección* $\{\alpha_X : F(X) \to G(X)/X \in Ob(\mathbf{C})\}$ *de morfismos en* D*, tal que para todo morfismo* $f : X \to Y$ *en* C *el siguiente cuadrado es conmutativo en* D *:*

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\alpha_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\alpha_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Denotamos por $\alpha : F \to G$ *la transformación natural.*
Si cada α_X *es isomorfismo, entonces* α *se denomina equivalencia natural o isomorfismo natural*

Definición 1.3. *Dados dos funtores F: $C \to D$ y G: $D \to C$, se dice que (F,G) es un par adjunto de funtores cuando existen una equivalencia natural:*

$$\Phi : Hom_D(F-, \sim) \to Hom_C(-, G \sim)$$

Definición 1.2.4 *Se define el producto wedge de dos espacios punteados* (X, x_0) *e* (Y, y_0) *como* $X \vee Y = (X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y) \subset X \times Y$*, espacio punteado con punto base* (x_0, y_0)*.*

Definición 1.2.5 *Dados dos espacios topológicos punteados* (X, x_0) *e* (Y, y_0)*, su producto smash se define como el espacio punteado* $(X \wedge Y, *)$*, donde* $X \wedge Y = (X \times Y)/(X \vee Y)$ *y* $\{*\} = \pi(X \vee Y)$*, siendo* $\pi : X \times Y \to X \wedge Y$ *la proyección canónica. Dadas* $f : (X, x_0) \to (X', x_0')$ *y* $g : (Y, y_0) \to (Y', y_0')$*, se define* $f \wedge g = \widetilde{f \times g}$ *inducida de* $f \times g$ *en el diagrama siguiente:*

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{f \times g} & X' \times Y' \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ X \vee Y & \xrightarrow[\widetilde{f \times g}]{} & X' \vee Y' \end{array}$$

Proposición 1.2.4 *El funtor suspensión se puede definir de otra manera naturalmente equivalente:*

- *Para objetos:* $\Sigma\left((X, x_0)\right) = (X \wedge S^1, *)$
- *Para morfismos: Sea* $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$*, entonces* $\Sigma(f) = f \wedge 1_{S^1}$*.*

Donde S^1 *es la circunferencia.*

Demostración.
Sea $\pi : I \to I/\{0, 1\}$ la proyección canónica. Entonces, al ser $\{0, 1\}$ compacto, $1 \times \pi : X \times I \to X \times (I/\{0, 1\})$ es una identificación por la proposición 1.1.3 apartado 4
Por otro lado, como $I/\{0, 1\} \cong S^1$, por la aplicación exponencial $\exp : I/\{0, 1\} \to S^1, \exp([t]) = (\cos(2\pi t), \mathrm{sen}(2\pi t))$, entonces se induce una identificación $(1 \times \exp)(1 \times \pi) : X \times I \to X \times S^1$. De esta forma, la composición $h = \pi'(1 \times exp) : X \times I \to X \wedge S^1$, es identificación, donde $\pi' : X \times S^1 \to X \wedge S^1$ es la proyección canónica. Tenemos la siguiente relación de equivalencia en $X \times I$:

$$(x, t) \sim (x', t') \text{ si y sólo si } h(x, t) = h\left(x', t'\right).$$

Entonces, por proposición 1.1.1 se tiene el homeomorfismo.

$$\begin{array}{l} \bar{h} : X \times I/\sim \xrightarrow{\cong} X \wedge S^1 \\ \qquad [x, t] \quad \rightsquigarrow [x, cos((2\pi t), sen(2\pi t))] \end{array}$$

Tenemos que, $h(x,t) = h(x',t')$ si y sólo si $(x,t) = (x',t')$ o bien $(x,t),(x',t') \in (X \times \{0,1\}) \cup (\{x_0\} \times I)$, por tanto

$$X \times I / ((X \times \{0,1\}) \cup (\{x_0\} \times I)) \xrightarrow{\cong} X \wedge S^1$$

El anterior homeomorfismo induce una equivalencia natural, pues si $f : (X, x_0) \to (X', x_0')$ es un morfismo en Top_* entonces el siguiente cuadrado es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \Sigma X \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\Sigma f"'] & X \wedge S^1 \arrow[d, "f \wedge 1"] \\ \Sigma Y \arrow[r, "\cong"'] & Y \wedge S^1 \end{tikzcd}$$

Sea $z = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t))$

- $(f \wedge 1)\bar{h}([x,t]) = (f \wedge 1)([x,z]) = [f(x), z]$
- $\bar{h}\Sigma f([x,t]) = \bar{h}([f(x),t]) = [f(x), z]$. □

Teorema 1.2.1 *(Ley exponencial). Dado un espacio K localmente compacto, el par de funtores $\left(- \times K, -^K\right)$ es adjunto.*

Demostración. Sean X, Y espacios, entonces definimos H como:

$$\begin{array}{rcl} H : Hom_{\text{Top}}(X \times K, Y) & \to & Hom_{\text{Top}}\left(X, Y^K\right) \\ f & \rightsquigarrow & H(f) = f^{\#} \end{array}$$

donde $f^{\#}(x) : K \to Y$ esta definida por la aplicación continua $f^{\#}(x)(k) = f(x,k)$. Veamos que H es una biyección natural:

- Bien definida: Sea $x \in X$, $f^{\#}(x)$ es la composición de aplicaciones continuas $f^{\#}(x) = f j_x$
$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{j_x} & X \times K & \xrightarrow{f} & Y \\ k & \rightsquigarrow & (x,k) & \rightsquigarrow & f(x,k) \end{array}$$
- Continuidad: Sea $x_0 \in X$ y sea (C,U) abierto subbásico de $f^{\#}(x_0)$ en Y^K. Entonces sabemos que $f(\{x_0\} \times C) \subset U$, Como f es continua, para todo $k \in K$ existen entornos abiertos A_k de x_0 y B_k de k tales que $f(A_k \times B_k) \subset U$, siendo $A_k \times B_k$ entorno abierto de (x_0, k) en $X \times K$. Entonces $C \subset \bigcup_{k \in K} B_k$, y como C es compacto, existe un subrecubrimiento finito $C \subset \bigcup_{i=1}^n B_{k_i}$. Tomamos $V = \bigcap_{i=1}^n A_{k_i}$ entorno abierto de x_0, y entonces $f(V \times C) \subset U$, luego $f^{\#}(V) \subset (C,U)$. Es decir, $f^{\#}$ es continua en x_0.
- Inversa: Definimos la inversa de H como:
$$\begin{array}{rcl} H^{-1} : \text{Hom}_{\text{Top}}\left(X, Y^K\right) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\text{Top}}(X \times K, Y) \\ g & \rightsquigarrow & H^{-1}(g) = g^{\circ} \end{array}$$

donde $g^{\circ}(x,k) = g(x)(k)$ para todo $(x,k) \in X \times K$, continua por ser composición de aplicaciones continuas.
Veamos que efectivamente es la inversa:
- $H^{-1}H = 1_{Hom_{Top(X\times K,Y)}}$: Sea $f \in Hom_{\text{Top}}\,(X\times K, Y)$, entonces $H^{-1}(H(f)) = H^{-1}\left(f^{\#}\right)$, se define $\forall (x,k) \in X\times K$ como $H^{-1}\left(f^{\#}\right)(x,k) = \left(f^{\#}\right)^{\circ}(x,k) = f^{\#}(x)(k) = fj_x(k) = f(x,k)$.

- $HH^{-1} = 1_{Hom_{Top(X,Y^K)}}$: Sea $g \in Hom_{\text{Top}}\,\left(X, Y^K\right)$, entonces $H\left(H^{-1}(g)\right)$ se define $\forall x \in X$ como $H\left(H^{-1}(g)\right)(x) = \left(g^{\circ}\right)^{\#}(x)$, que, a su vez, para cada $k \in K$ se define como $\left(g^{\circ}\right)^{\#}(x)(k) = \left(g^{\circ}\right)j_x(k) = \left(g^{\circ}\right)(x,k) = g(x)(k)$.

- Equivalencia natural: Veamos que dadas $f : X' \to X$ y $h : Y \to Y'$ aplicaciones continuas, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
Hom_{Top}(X \times K, Y) \arrow[r, "H_{X,Y}"] \arrow[d, "(f\times 1_K)^* h_*"'] & Hom_{Top}(X, Y^K) \arrow[d, "f^* h_*"] \\
Hom_{Top}(X' \times K, Y') \arrow[r, "H_{X',Y'}"'] & Hom_{Top}(X', Y'^K)
\end{tikzcd}$$

Sea $g : X \times K \to Y$ continua, tenemos:
- $f^*h_*\left(H_{X,Y}(g)\right) = f^*h_*\left(g^{\#}\right) = hg^{\#}f$, que viene definida por $hg^{\#}f\left(x'\right)(k) = hgj_{f(x')}(k) = hg\left(f\left(x'\right), k\right) \in Y'$, $\forall k \in K$.
- $H_{X',Y'}\left(f \times 1_K\right)^* h_*(g) = H_{X',Y'}\left(hg\left(f \times 1_K\right)\right) = \left(hg\left(f \times 1_K\right)\right)^{\#}$ que viene definida por $hg\left(f \times 1_K\right)j_{x'}(k) = hg\left(f \times 1_K\right)\left(x', k\right) = hg\left(f\left(x'\right), k\right)$, $\forall k \in K$. □

Teorema 1.2.2 *Dados los espacios punteados (X, x_0) e (Y, y_0), y el espacio punteado localmente compacto (K, k_0). La biyección H de la ley exponencial induce una biyección natural*

$$H : (Y, y_0)^{(X\times K, X\vee K)} \to \left((Y, y_0)^{(K,k_0)}, c_{y_0}\right)^{(X,x_0)}$$

Proposición 1.2.5 *Si (Y, A) una pareja de espacios, entonces la proyección canónica $\pi : Y \to Y/A$ induce, para todo espacio punteado (X, x_0), una biyección en Top $^{(2)}$ $\pi^* : (X, x_0)^{(Y/A,*)} \to (X, x_0)^{(Y,A)}$.*

Demostración. Dado que $(X, x_0)^{-} : Top^{op(2)} \to \text{Top}^{(2)}$ es un funtor y $\pi : (Y, A) \to (Y/A, *)$ es continua en $Top^{(2)}$, se tiene que π^* es continua. Se prueba facílmente que π^* es biyectiva. □

Proposición 1.2.6 *Si en el enunciado de la proposición anterior se exige, además, que el espacio Y sea compacto, y que Y/A sea Hausdorff, entonces la biyección $\pi^* : (X, x_0)^{(Y/A,*)} \to (X, x_0)^{(Y,A)}$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Veamos que además π^* es abierta:

Dado que todo abierto en la topología compacto-abierta de $(X,x_0)^{(Y/A,A)}$ es unión de interseciones finitas de elementos de la forma (C,U) con U abierto en X y C compacto en Y/A, basta ver que π^* es biyectiva, ya que esta conserva uniones e intersecciones:

Sea (C,U) un abierto de la subbase de la topologia compacto-abierta de $(X,x_0)^{(Y/A,A)}$, entonces U es abierto en X y C es compacto en Y/A. Por lo que,

$$\pi^*((C,U)) = \left\{\pi^*(f)/f \in (X,x_0)^{(Y/A,*)}, f(C) \subset U\right\} =$$
$$\{f\pi : (Y,A) \to (X,x_0) \,/ f(C) \subset U\} = \left(\pi^{-1}(C),U\right).$$

Dado que Y/A es de Hausdorff e Y compacto, entonces $\pi^{-1}(C)$ es compacto en Y. Luego $\pi^*((C,U))$ es abierto en $(X,x_0)^{(Y,A)}$. □

Corolario 1.2.2 *El funtor cilindro I es adjunto por la izquierda del funtor espacio de caminos $-^I$.*

Proposición 1.2.7 *El funtor suspensión Σ es adjunto por la izquierda del funtor espacio de lazos Ω.*

Demostración. Dado un espacio punteado (X,x_0) tenemos que $\Sigma(X,x_0) = (X\times S^1/X\vee S^1,*)$, existe una biyección

$$(Y,y_0)^{\Sigma(X,x_0)} \xrightarrow{\cong} (Y,y_0)^{\left(X\times S^1, X\vee S^1\right)}$$

Por tanto, se tiene una biyección natural

$$Hom_{\text{Top}^{(2)}}\left(\Sigma(X,x_0);(Y,y_0)\right) \cong Hom_{\text{Top}^{(2)}}\left(\left(X\times S^1, X\vee S^1\right);(Y,y_0)\right)$$

Además, por el teorema 1.2.2 , existe una biyección natural

$$\text{Hom}_{\text{Top}^{(2)}}\left(\left(X\times S^1, X\vee S^1\right);(Y,y_0)\right) \longrightarrow \text{Hom}_{\text{Top}^{(2)}}\left((X,x_0);\left((Y,y_0)^{\left(S^1,1\right)}, c_{y_0}\right)\right)$$

y dado que $\Omega(Y,y_0) = \left((Y,y_0)^{\left(S^1,1\right)}, c_{y_0}\right)$, tenemos que el funtor suspensión Σ es adjunto por la izquierda del funtor lazos Ω. □

1.3. Categoría Homotópica

En esta sección presentamos la categoría homotópica, sobre la cual se definirán, en el siguiente capítulo, los grupos de homotopía. Para ello recordaremos algunos conceptos y propiedades básicos de homotopía, además de introducir nuevas propiedades. Concluye la sección con la prueba de que la adjunción entre los funtores suspensión y lazos se da en esta nueva categoría.

Definición 1.3.1 *Si $f, g : X \to Y$ son aplicaciones continuas y $A \subset X$, se dice que f es homótopa a g relativamente a A (denotado $f \simeq g$ rel A) si existe una aplicación continua $H : X \times I \to Y$ tal que $H(x,0) = f(x), H(x,1) = g(x)$ y $H(a,t) = f(a) = g(a)$, para todo $x \in X, a \in A$ y $t \in I$. La aplicación continua H se denomina homotopía relativa de f a g relativa a A, y se denota $H : f \simeq g$* $\operatorname{rel} A$ *(Tomando $A = \emptyset$ se tiene la homotopía no relativa en Top).*

Proposición 1.3.1 *Dados dos espacios topológicos X e Y, y un subconjunto A de X, la homotopía relativa a A es una relación de equivalencia en el conjunto de las aplicaciones continuas de X en Y.*

Proposición 1.3.2 *Sean dos aplicaciones continuas $f, f' : X \to Y$ y un subconjunto A de X. Si $f \simeq f'$ rel A entonces:*

- *Para toda aplicación continua $g : Y \to Z$ se verifica que $gf \simeq gf'$ rel A.*
- *Para toda aplicación continua $h : Z \to X$ y todo $B \subset Z$ tal que $h(B) \subset A$ se verifica que $fh \simeq f'h$ rel B.*

Definición 1.3.2 *Una aplicación continua $f : X \to Y$ se dice nulhomótopa si es homótopa a una aplicación constante. Una homotopía F entre f y la aplicación constante se denomina nulhomotopía.*
Sea $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ una aplicación continua punteada. Se dice que f es nulhomótopa, y se denota por $f \simeq 0$, si $f \simeq c_{y_0}$ rel $\{x_0\}$.

Proposición 1.3.3 *Si $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ es continua punteada entonces f es nulhomótopa si y sólo si existe una aplicación continua punteada $F : (X, x_0) \to (PY, c_{y_0})$ tal que $e_1 F = f$.*

Demostración. Si $f \simeq 0$, existe una homotopía $H : X \times I \to Y$ verificando $H(x,0) = c_{y_0}(x), H(x,1) = f(x)$ y $H(x_0, t) = y_0$ para todo $t \in I$. Como el funtor caminos $-^I : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}_*$ y el funtor cilindro $I : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}_*$ forman un par adjunto, usando el isomorfismo de adjunción (proposición 1.2.1) se obtiene una aplicación continua $F : X \to Y^I$, definida por $(F(x))(t) = H(x,t)$, para todos $x \in X, t \in I$. Además, $e_1 F = f$, pues $e_1 F(x) = F(x)(1) = H(x,1) = f(x)$, para todo $x \in X$.

Recíprocamente, si existe una aplicación continua punteada $F : (X, x_0) \to (PY, c_{y_0})$ tal que $e_1 F = f$, se puede considerar $F : X \to Y^I$ y usando de nuevo el isomorfismo de adjunción, se obtiene $H : X \times I$ continua definida por $H(x,t) = (F(x))(t)$, que es la homotopía que estábamos buscando. □

Definición 1.3.3 *Sean X, Y espacios topológicos. Se dice que la aplicación continua $f : X \to Y$ es equivalencia de homotopía si existe alguna aplicación continua $g : Y \to X$ tal que $gf \simeq 1_X$ y $fg \simeq 1_Y$. También se dice que X es homotópicamente equivalente a Y o que X e Y son del mismo tipo de homotopía, lo cual se denota por $X \simeq Y$.*

Definición 1.3.4 *La categoria homotópica, denominada $hTop_*$, es la categoría cociente de los espacios topológicos punteados con la relación de equivalencia dada por la relación de homotopía relativa al punto base. Esto es,*

- $Ob(hTop\ _*) = Ob(\ Top_*)$
- $Hom_{hTop_*}((X,x_0),(Y,y_0)) = \{[f]/f \in Hom\ _{Top.}((X,x_0),(Y,y_0))\}$*, siendo* $[f]$ *la clase de homotopia de* f*. Este conjunto se suele denotar* $[X,x_0,Y,y_0]$ *o incluso* $[X,Y]$ *cuando no hay posibilidad de confusión de los puntos base.*

Análogamente se define la categoría hTop de espacios topológicos y clases de homotopía de aplicaciones continuas no basadas.

Teorema 1.3.1 *Sea* (X,x_0) *un espacio punteado definimos el funtor*

$$[X,x_0;-] : hTop_* \to Set_*$$

donde:

- *Objetos:* $[X,x_0;-]((Y,y_0)) = [X,x_0;Y,y_0]$
- *Morfismos: Sea* $[g] : (Y,y_0) \to (Z,z_0)$ *en* $hTop_*$*, se define* $[X,x_0;-]([g]) = g_*$ *donde*
$$\begin{array}{c} g_* : [X,x_0;Y,y_0] \to [X,x_0;Z,z_0] \\ [h] \quad \rightsquigarrow \quad [gh] \end{array}$$

Demostración. Veamos que está bien definida para morfismos:

- Veamos que no depende del representante. Sea $[g] = [g'] \in [Y,y_0;Z,z_0]$, luego $g \simeq g'$ rel $\{y_0\}$ entonces, $gh \simeq g'h$ rel $\{x_0\}$ luego, $g_* = g'_*$
- Veamos que está bien definida sea $[g] \in [Y,y_0;Z,z_0]$ y $[h] = [h'] \in [X,x_0;Y,_0]$ luego $h \simeq h'$ rel $\{x_0\}$ por lo que $gh \simeq gh'$ rel $\{x_0\}$. Por lo que, $g_*(h) = [gh] = [gh'] = g_*(h')$.

Veamos que conserva las identidades y composiciones.

- Identidad: Sea 1_X la identidad en (X,x_0) luego,
$$\begin{array}{c} (1_X)_* : [X,x_0;Y,y_0] \to [X,x_0;Y,y_0] \\ [h] \quad \rightsquigarrow \quad [h] \end{array}$$
- Composición: Sea $[g] \in [Y,y_0;Z,z_0]$ y $[f] \in [Z,z_0;K,k_0]$ luego, $(fg)_*([h]) = [fgh] = f_*([gh]) = f_*g_*([h])$ para todo $[h] \in [X,x_0;Y,y_0]$. □

Teorema 1.3.2 *Sea* (X,x_0) *un espacio punteado definimos el funtor*

$$[-;X,x_0] : hTop_*^{op} \to Set_*$$

donde:

- *Objetos:* $[-;X,x_0]((Y,y_0)) = [Y,y_0;X,x_0]$

- *Morfismos: Sea* $[g]:(Z,z_0)\to(Y,y_0)$ *en* $hTop_*$*, se define* $[-;X,x_0]([g])=g_*$ *donde*

$$\begin{array}{rcl} g^*:[Y,y_0:,X,x_0] & \to & [Z,z_0:X,x_0] \\ [h] & \rightsquigarrow & [hg] \end{array}$$

A continuación extenderemos la construcción del funtor espacio de lazos y suspensión a la categoría hTop

Proposición 1.3.4 $\Omega:hTop_*\to hTop_*$*, definida para objetos como en* Top_* *y, para morfismos, mediante* $\Omega([f])=[f_*]$*, es un funtor.*

Demostración. Dado que ya demostramos que Ω es un funtor en la categoria Top_* basta ver que Ω está bien definida sobre los morfismos, es decir, que no depende del representante:

Sean $f,f':(X,x_0)\to(X',x'_0)$ tales que $f\simeq f'$ rel $\{x_0\}$. Luego, existe $H: X\times I\to X'$ homotopía relativa a x_0 tal que $Hi_0=f, Hi_1=f'$ y $H(x_0,t)=x'_0$, para todo $t\in I$. Sea $\tilde{G}$:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{G}:\Omega(X,x_0)\times I\times I & \to & (X',x'_0) \\ (\alpha,t,s) & \rightsquigarrow & H(\alpha(s),t) \end{array}$$

continua al ser composición de aplicaciones continuas

$$\Omega X\times I\times I\xrightarrow{1\times T}\Omega X\times I\times I\xrightarrow{e\times 1}X\times I\xrightarrow{H}X'$$

donde $T: I\times I\to I\times I$ es el homeomorfismo dado por $T(t,s)=(s,t)$, y e es la aplicación de evaluación continua por proposición 1.1.4. Luego, por la proposición 1.2.1 existe una aplicación continua, adjunta G de $\tilde{G}$ tal que

$$\begin{array}{rcl} G:\Omega(X,x_0)\times I & \to & (X')^I \\ (\alpha,t) & \rightsquigarrow & G(\alpha,t) \end{array}$$

definida por $G(\alpha,t)(s)=\tilde{G}(\alpha,t,s)$.

Además, G cumple que $G(\alpha,t)(0)=G(\alpha,t)(1)=x'_0,\forall\alpha\in\Omega(X,x_0),\forall t\in I$. Esto nos permite considerar G como:

$$\begin{array}{rcl} G:\Omega(X,x_0)\times I & \to & \Omega(X',x'_0) \\ (\alpha,t) & \rightsquigarrow & G(\alpha,t) \end{array}$$

Además, $G(c_{x_0},t)(s)=x'_0,\forall t,s\in I, G(\alpha,0)(s)=f\alpha(s)$, y $G(\alpha,1)(s)=f'\alpha(s),\forall s\in I$. Por tanto, $G:f_*\simeq f'_*$ rel $\{c_{x_0}\}$. ◻

Proposición 1.3.5 *Existe un isomorfismo natural* $(-)^{(I,\{0,1\})}\xrightarrow{\cong}(-)^{(S^1,s_0)}$*, tanto en la categoría hTop, como en Top.(Consecuencia de la proposición 1.2.5)*

Proposición 1.3.6 $\Sigma: hTop,\to hTop$*, definido para objetos como en Top, y para morfismos por* $\Sigma([f])=[\Sigma f]$ *es un funtor.*

Demostración. Como ya demostramos que Σ es un funtor en la categoria Top_* basta ver que Σ está bien definida sobre los morfismos, es decir, que no depende del representante:

Sea $f, f' : (X, x_0) \to (X', x'_0)$ tal que $f \simeq f'$ rel $\{x_0\}$, entonces existe $F : X \times I \to X'$ homotopía relativa a $\{x_0\}$ tal que $F(x,0) = f(x), F(x,1) = f'(x), \forall x \in X$, y $F(x_0, t) = x'_0, \forall t \in I$.

Definimos $H : \Sigma X \times I \to \Sigma X'$ como $H([(x,t)], s) = [(F(x,s), t)]$. Veamos que F es una homotopía relativa respecto $\{*\}$ tal que $H : \Sigma f \simeq \Sigma f'$

- H está bien definida: basta con comprobar casos, por ejemplo:
  Si $x = x_0$ y $x' = x_0$: $H([(x',t')], s) = [(F(x_0,s), t')] = [(x'_0, t')]$ y $H([(x,t)], s) = [(F(x_0,s), t)] = [(x'_0, t')]$. Además, $H([x,t], s) = H([x',t'], s)$.
- F es continua: Como I es localmente compacto, por la proposición 1.1.2, se tiene el homeomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \varphi : (X \times I \times I)/\sim & \xrightarrow{\cong} & ((X \times I)/((X \times \{0,1\}) \cup (\{x_0\} \times I))) \times I \\ [x,t,s] & \rightsquigarrow & ([x,t], s) \end{array}$$

  Sea π la proyección en el cociente

$$\pi : X \times I \times I \to (X \times I \times I)/\sim$$

  Entonces, H continua $\iff H\varphi$ continua $\iff H\varphi\pi$ continua. Pero,

$$H\varphi\pi : \; X \times I \times I \to ((X' \times I)/(X' \times \{0,1\} \cup (\{x_0\} \times I))$$

  $H\varphi\pi = \pi (F \times 1_I)(1_X \times T)$ es composición de aplicaciones continuas, por tanto también continua.
- Veamos que $H : \Sigma f \simeq \Sigma f'$ rel $\{*\}$: Tenemos que $H(([x,t], 0) = [F(x,0), t] = [(f(x), t)] = \Sigma f$ y $H(([x,t], 1) = [F(x,1), t] = [(f'(x), t)] = \Sigma f'$. Además, $H(([x_0,t], s) = [F(x_0,s), t] = [(x'_0, t)]$ □

Teorema 1.3.3 *Si (Z, z_0) es un espacio punteado localmente compacto entonces $- \wedge Z : hTop_* \to hTop_*$ es un funtor adjunto a izquierda de $(-)^{(Z,z_0)} : hTop_* \to hTop_*$.*

Demostración. Sean $(X, x_0), (Y, y_0)$ espacios punteados. Entonces se define

$$\Upsilon : [X \wedge Z, *; Y, y_0] \to \left[X, x_0; (Y, y_0)^{(Z,z_0)}, c_{y_0}\right]$$

como $\Upsilon([f]) = [\hat{f}]$, donde $\hat{f} : (X, x_0) \to \left((Y, y_0)^{(Z,z_0)}, c_{y_0}\right)$ se define, a su vez por $\hat{f}(x)(z) = f([(x,z)]), \forall x \in X, z \in Z$. En primer lugar veamos que $\hat{f} \in Hom_{Top^{(2)}}(X, x_0; (Y, y_0)^{(Z,z_0)}, c_{y_0})$

- Bien definida: $\hat{f}(x_0)(z) = f([x_0, z]) = f([*]) = y_0 \; \forall z \in Z$, luego $\hat{f}(x_0) = c_{y_0}$.

- Continuidad: La ley exponencial nos da un isomorfismo de adjunción

$$H : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}^{(2)}}\left((X\times Z, X\vee Z);(Y,y_0)\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}^{(2)}}\left((X,x_0)\,;\left((Y,y_0)^{(Z,z_0)}, c_{y_0}\right)\right)$$

Definimos $\hat{f} : (X\times Z, X\vee Z) \to (Y,y_0)$ como $\hat{f}(x,z) = f([x,z])$ tenemos que $\tilde{f} = f\pi$ y dado que f es continua, se concluye que $\tilde{f}$ es continua, luego por adjunción se tiene la continuidad de $\hat{f}$.

Υ se define a través de $\hat{f}$, y hasta aquí se ha estudiado la buena definición de $\hat{f}$. A continuación se prueba que Υ es isomorfismo de adjunción.

- Υ está bien definida: Sea $[f] = [f'] \in [(X\wedge Z,*),(Y,y_0)]$ entonces existe $F : f \simeq f'$ rel $\{*\}$. Por lo que $F' = F(\pi\times 1_I)(1_X\times T) : X\times I\times Z \to Y$, continua por ser composición de aplicaciones continuas. Entonces se induce, por la ley exponencial, una aplicación $H(F') = (F')^{\#} : X\times I \to (Y,y_0)^{(Z,z_0)}$ continua, dada por $\left((F')^{\#}(x,t)\right)(z) = F'(x,t,z) = F([(x,z)],t)$, tal que $(F')^{\#}(x,0)(z) = \hat{f}(x)(z)$, $(F')^{\#}(x,1)(z) = \hat{f}'(x)(z)$ y $(F')^{\#}(x_0,t)(z) = c_{y_0}$, luego $(F')^{\#} : \hat{f}_0 \simeq \hat{f}_1$ rel. $\{x_0\}$.
- Υ inyectividad: Sean $f, f' : (X\wedge Z,*) \to (Y,y_0)$ tal que existe $F : (X\times I,\{x_0\}\times I) \to \left((Y,y_0)^{(Z,z_0)}, c_{y_0}\right)$ homotopía tal que $F : \hat{f} \simeq \hat{f}'$ rel $\{x_0\}$. Por la ley exponencial, $\tilde{F} : X\times Z\times I \to Y$ definida por $\tilde{F}(x,z,t) = F(x,t)(z)$, y es compatible con la relación en el cociente $(X\times Z\times I/\sim) \cong (X\times Z/X\vee Z)\times I$. Por tanto, se induce por proposición 1.1.1, a su vez, una aplicación continua $(\tilde{F})' : (X\times Z/X\vee Z)\times I \to Y$ tal que $(\tilde{F})'(\pi\times 1_I) = \tilde{F}$. Sabemos que viene dada por $(\tilde{F})'([x,z],t) = \tilde{F}(x,z,t)$. Además, $(\tilde{F})' : f \simeq g$ rel $\{*\}$.
- Υ es sobreyectiva: Sea $g : (X,x_0) \to \left((Y,y_0)^{(Z,z_0)}, c_{y_0}\right)$. Se induce, por la ley exponencial, una aplicación continua de parejas, $\tilde{g} : (X\times Z, X\vee Z) \to (Y,y_0)$, dada por $\tilde{g}(x,z) = g(x)(z)$. Por lo que $\tilde{g}$ es compatible con la relación del cociente $X\times Z/X\vee Z$. Entonces se induce proposición 1.1.1 una aplicación continua $(\tilde{g})' : (X\times Z/X\vee Z,*) \to (Y,y_0)$ tal que $\tilde{g} = (\tilde{g})'\pi$, donde $\pi : X\times Z \to X\times Z/X\vee Z = X\wedge Z$ la proyección canónica. Luego, $\Upsilon([(\tilde{g})'] = [g]$
- Υ es natural: Sean $f : (X',x_0') \to (X,x_0)$ y $f' : (Y,y_0) \to (Y',y_0')$. Basta ver que el siguiente diagram conmuta:

$$\begin{tikzcd}
{[X\wedge Z,*;Y,y_0]} \arrow[r, "\Upsilon_{X,Y}"] \arrow[d, "f'_*(f\wedge 1_Z)^*"'] & {[X,x_0;(Y,y_0)^{(Z,z_0)},c_{y_0}]} \arrow[d, "f'_*f^*"] \\
{[X'\wedge Z,*;Y',y_0']} \arrow[r, "\Upsilon_{X',Y'}"] & {[X',x_0';(Y',y_0')^{(Z,z_0)},c_{y_0'}]}
\end{tikzcd}$$

Sea $[h] \in [X\wedge Z,*;Y,y_0]$
- $f'_*[\hat{h}]f^* = [f'\hat{h}f]$.

- $\Upsilon_{X',Y'}(f \wedge 1_Z)^* f'_*[h] = \Upsilon_{X',Y'}[f'h(f \wedge 1_Z)] = \left[f'h(\widehat{f \wedge 1_Z})\right]$.

Luego, dado $x' \in X'$ y dado $z \in Z$,

- $(f'\hat{h}f)(x')(z) = f'\hat{h}(f(x'))(z) = f'h([f(x'), z])$.
- $\left.f'h(\widehat{f \wedge 1_Z}\right)(x')(z) = f'h(f \wedge 1_Z)([x', z]) = f'h([f(x'), z])$. $\square$

Corolario 1.3.1 *El funtor espacio de lazos $\Omega : hTop_* \to hTop_*$ es adjunto a la derecha del funtor suspensión $\Sigma : hTop_* \to hTop_*$*

Proposición 1.3.7 $\Sigma(S^n) \cong S^{n+1}$ *en Top_**

Demostración. La $(n+1)$-esfera $S^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+2}/\|x\| = 1\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{n+2}$. Además, también podemos considerar los siguientes espacios en $\mathbb{R}^{n+2}$:

$$\begin{array}{rlrl} S^n &= \left\{x \in \mathbb{R}^{n+2}/\|x\| = 1, x_{n+2} = 0\right\} & D^{n+1} &= \left\{x \in \mathbb{R}^{n+2}/\|x\| \leq 1, x_{n+2} = 0\right\} \\ H_+^{n+1} &= \left\{x \in \mathbb{R}^{n+2}/\|x\| = 1, x_{n+2} \geq 0\right\} & H_-^{n+1} &= \left\{x \in \mathbb{R}^{n+2}/\|x\| = 1, x_{n+2} \leq 0\right\} \end{array}$$

Tomando como punto base para estos espacios $s_0 = (1, 0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+2}$, se tienen los homeomorfismos

$$p_+ : \left(D^{n+1}, S^n\right) \to \left(H_+^{n+1}, S^n\right) \qquad p_- : \left(D^{n+1}, S^n\right) \to \left(H_-^{n+1}, S^n\right)$$

definidos por:

$$p_\pm(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, 0) = \left(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, \pm\sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2}\right)$$

Definimos $h : \Sigma(S^n) \to S^{n+1}$, como:

$$h([(x,t)]) = \begin{cases} p_-(2tx + (1-2t)s_0), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ p_+(2(1-t)x + (2t-1)s_0), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Se puede comprobar, sin dificultad, que h es el homeomorfismo buscado. $\square$

2

Grupos de homotopía

El grupo fundamental de un espacio proporciona más información que su primer grupo de homología, ya que este está completamente determinado por el grupo fundamental, teorema como el de hurewicz pone esto de manifiesto . Por ello surge la necesidad de extender la definición del grupo de homotopía, estas fueron dadas por Eduard Cech y Witold Hurewicz en los años 1932-1935.

2.1. H-espacios y co-H-espacios

En esta sección veremos bajo qué condiciones podremos dotar al corchete de homotopía punteada $[Y, y_0; X, x_0]$ de estructura de grupo. A lo largo de esta sección trabajaremos en la categoría Top_*, luego al referirnos a una aplicación continua, entenderemos que se trata de una aplicación punteada.

2.1.1. H-espacios

Definición 2.1.1 *Sea $c_{k_0} : (K, k_0) \to (K, k_0)$ la aplicación constante en $k_0 \in K$. Un H-espacio es un espacio punteado (K, k_0) junto con una aplicación continua $m : (K \times K, (k_0, k_0)) \to (K, k_0)$ llamada multiplicación tal que el siguiente diagrama es conmutativo salvo homotopia punteada:*

$$\begin{tikzcd}
& K & \\
K \arrow[ur, "1"] \arrow[r, "<c_{k_0},1>"'] & K \times K \arrow[u, "m"] & K \arrow[ul, "1"'] \arrow[l, "<1,c_{k_0}>"]
\end{tikzcd}$$

Es decir, $m < 1, c_{k_0} > \simeq 1 \simeq m < c_{k_0}, 1 >$ rel. $\{k_0\}$.

En adelante usaremos la notación $f * g$ para representar la composición $m < f, g >$, donde $f, g : (X, x_0) \to (K, k_0)$ son morfismos, con (X, x_0) un espacio punteado cualquiera. Por lo que, la definición de H-espacio es equivalente a:

$$1 * c_{k_0} \simeq 1 \simeq c_{k_0} * 1 \ rel \ \{k_0\}$$

Denominamos a c_{k_0} neutro homotópico.

Proposición 2.1.1 *Dado un espacio (K, k_0) y una aplicación continua $m : (K \times K, (k_0, k_0)) \to (K, k_0)$, se tiene que (K, k_0) es un H-espacio con multiplicación m si y sólo si para cualquier espacio (X, x_0) y toda $f : (X, x_0) \to (K, k_0)$ se verifica que*

$$f * c^X_{k_0} \simeq f \simeq c^X_{k_0} * f \ rel. \ \{x_0\}$$

donde $c^X_{k_0} = c_{k_0} f : (X, x_0) \to (K, k_0)$ es la aplicación constante.

Demostración.

- Supongamos que (K, k_0) es un H espacio $f * c^X_{k_0} = m < f, c^X_{k_0} >= m < f, c_{k_0} f >= m < 1, c_{k_0} > f = (1 * c_{k_0}) f \simeq 1f$ rel $\{x_0\}$. De manera similar $c^X_{k_0} * f \simeq 1f$ rel $\{x_0\}$.
- Recíprocamente, Basta tomar $f = 1_K : (K, k_0) \to (K, k_0)$. □

Definición 2.1.2 *Un H-espacio se dice homotópicamente asociativo si el siguiente diagrama es conmutativo salvo homotopía punteada:*

$$\begin{tikzcd} K \times K \times K \arrow[r, "m\times 1"] \arrow[d, "1\times m"'] & K \times K \arrow[d, "m"] \\ K \times K \arrow[r, "m"'] & K \end{tikzcd}$$

Es decir, $m(m \times 1) \simeq m(1 \times m)$ rel $\{(k_0, k_0, k_0)\}$.

Proposición 2.1.2 *Un H-espacio es homotópicamente asociativo si y sólo si para cualquier espacio punteado (X, x_0) y para todas $f, g, h : (X, x_0) \to (K, k_0)$ se verifica que*

$$(f * g) * h \simeq f * (g * h) \ rel \ \{x_0\}$$

Demostración. En primer lugar, sea (K, k_0) un H-espacio con multiplicación m. Por la propiedad universal de los pull back:
$(f * g) * h = (m < f, g >) * h = m < m < f, g >, h >= m(m \times 1) << f, g >, h >$
$f * (g * h) = f * (m < g, h >) = m < f, m < g, h >>= m(1 \times m) < f, < g, h >>$
Además $X \times Y \times Z = (X \times Y) \times Z = X \times (Y \times Z)$, luego $< f, g, h >=< f, < g, h >>=<< f, g >, h >$.

- Supongamos que es un espacio homotópicamente asociativo, luego dado que $m(1 \times m) \simeq m(m \times 1)$ rel $\{(k_0, k_0, k_0)\}$ componiendo por la derecha:

$$m(m \times 1) << f, g >, h >= m(m \times 1) < f, g, h > \simeq_{\mathrm{rel}\{x_0\}} m(1 \times m) < f, g, h >= m(1 \times m) < f, < g, h >>$$

Por lo que, $(f * g) * h \simeq f * (g * h)$ rel $\{x_0\}$.

- Recíprocamente, Sean $p_i : K \times K \times K \to K$ las proyeccciones i-ésimas. Por la propiedad universal del pull back, $1_{K \times K \times K} =< p_1, p_2, p_3 >$.
  Sabemos que $p_1 * (p_2 * p_3) \simeq (p_1 * p_2) * p_3$ rel $\{(k_0, k_1, k_2)\}$. Entonces, $p_1 * (p_2 * p_3) = m < p_1, m < p_2, p_3 >>= m\,(1_K \times m) < p_1, < p_2, p_3 >>= m\,(1_K \times m) < p_1, p_2, p_3 >= m\,(1_K \times m)$. Además, $(p_1 * p_2) * p_3 = m < m < p_1, p_2 >, p_3 >= m\,(m \times 1_K) << p_1, p_2 >, p_3 >= m\,(m \times 1_K) < p_1, p_2, p_3 >= m\,(m \times 1_K)$.
  Luego, $m\,(1_K \times m) \simeq m\,(m \times 1_K)$ rel $\{(k_0, k_0, k_0)\}$. □

Definición 2.1.3 *Un inverso homotópico para un H-espacio (K, k_0) es una aplicación continua punteada $h : (K, k_0) \to (K, k_0)$ haciendo conmutativo, salvo homotopía punteada, el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
 & K & \\
K \arrow[ur, "c_{k_0}"] \arrow[r, "<h{,}1>"'] & K \times K \arrow[u, "m"] & K \arrow[ul, "c_{k_0}"'] \arrow[l, "<1{,}h>"]
\end{tikzcd}$$

Es decir, $h * 1 \simeq c_{k_0} \simeq 1 * h$ rel $\{k_0\}$.

Proposición 2.1.3 *Una aplicación continua punteada $h : (K, k_0) \to (K, k_0)$ es un inverso homotópico en un H-espacio (K, k_0) si y sólo si para cualquier espacio punteado (X, x_0) y todo $f : (X, x_0) \to (K, k_0)$ se verifica que*

$$hf * f \simeq c^X_{k_0} \simeq f * hf \ \ rel \ \{x_0\}$$

Demostración. De manera similar a la proposición 2.1.1

Definición 2.1.4 . *Diremos que un H-espacio es homotópicamente conmutativo si el siguiente diagrama conmuta salvo homotopía punteada, donde $T =< p_2, p_1 >: K \times K \to K \times K$, con p_i la proyección i-ésima.*

$$\begin{tikzcd}
K \times K \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "m"'] & & K \times K \arrow[dl, "m"] \\
 & K &
\end{tikzcd}$$

Es decir, $mT \simeq m$ rel $\{(k_0, k_0)\}$, obsérvese que T viene definido explícitamente por $T(x, y) = (y, x)$

Proposición 2.1.4 *Un H-espacio es homotópicamente conmutativo si y sólo si para todas $f, g : (X, x_0) \to (K, k_0)$, con (X, x_0) un espacio cualquiera punteado, se verifica que*

$$f * g \simeq g * f \ \mathit{rel}\ \{x_0\}$$

Demostración.

- Supongamos que H es un espacio homotópicamente conmutativo, luego $f*g = m < f, g > \simeq_{\text{rel } \{x_0\}} mT < f, g >= m < g, f >= g * f$.
- Recíprocamente, sean $p_i : K \times K \to K, i = 0, 1$, las proyecciones i-ésimas. Luego, $p_1 * p_2 \simeq p_2 * p_1$ rel $\{(k_0, k_0)\}$, equivalentemente, $m < p_1, p_2 > \simeq m < p_2, p_1 >$ rel $\{(k_0, k_0)\}$. Por lo que, $m < p_1, p_2 > \simeq mT < p_1, p_2 >$ rel $\{(k_0, k_0)\}$, luego $m \simeq mT$ rel $\{k_0, k_1\}$ ya que $< p_1, p_2 >= 1_{K\times K}$. □

Definición 2.1. *Un H-grupo es un H-espacio (K, k_0) con inverso homotópico y homotópicamente asociativo.*

Teorema 2.1.1 *Sea (K, k_0) un H-grupo entonces $[-; K, k_0] : \mathbf{hTop}_*^{op} \to Grp$ es un funtor.*

Demostración.

- Veamos que dado un espacio punteado (X, x_0) el corchete $[X, x_0; K, k_0]$ tiene estructura de grupo, para ello definimos la operación $[f] \cdot [g] = [f * g]$.
  Bien definida: $F : f \simeq f'$ rel $\{x_0\}$ y $G : g \simeq g'$ rel $\{x_0\}$ entonces $< F, G >:< f, g > \simeq < f', g' >$ rel $\{(x_0, x_0)\}$, de donde $[f] \cdot [g] = [f * g] = [m < f, g >] = [m < f', g' >] = [f' * g'] = [f'] \cdot [g']$.
  La existencia de elemento neutro, existencia de inversos y la asociatividad es consecuencias de las proposiciones 2.1.1, 2.1.1 y 2.1.1
- Dado $[t] : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ morfismo en $\mathbf{hTop}_*^{\mathrm{op}}$, entonces $t^* : [X, x_0; K, k_{0t}] \to [Y, y_0; K, k_0]$ por el teorema 1.3.2 es homomorfismo de grupos ya que:

$$t^*([f]\cdot[g]) = t^*([f*g]) = t^*([m < f, g >]) = [m < f, g > t] = [m < ft, gt >] =$$

$$[ft * gh] = [ft] \cdot [gt] = t^*([f]) \cdot t^*([g]).$$

  Además es independiente del representante que tomemos, ya que si $[t] = [t'] : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ en $\mathbf{hTop}_*^{\mathrm{op}}$ entonces $t^* = t'^*$. □

Nota 2.1.1 *Obsérvese que, si además (K, k_0) es homotópicamente conmutativo entonces, por la Proposición 2.1.1, se tiene $[-; K, k_0] : \mathbf{hTop}_*^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$.*

Corolario 2.1.1 *Si f es equivalencia de homotopia punteada entonces f^* es isomorfismo de grupos.*

Proposición 2.1.5 *Para todo espacio punteado, (Y, y_0), su espacio de lazos $(\Omega Y, c_{y_0})$ es un H-grupo.*

Demostración. Definimos la operación

$$\begin{array}{rcl} m: \ \Omega Y \times \Omega Y & \to & \Omega Y \\ (\alpha,\beta) & \rightsquigarrow & \alpha\cdot\beta \end{array}$$

donde,

$$\alpha\cdot\beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & si \ \ 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & si \ \ \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Aplicación continua, ya que por la ley exponencial basta ver que su adjunta:

$$\tilde{m}(\alpha,\beta,t) = \begin{cases} \alpha(2t) & si \ \ 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & si \ \ \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

es continua. Pero $\tilde{m}$ es continua ya que está definida por partes a través de dos aplicaciones continuas, que se pueden ver como composición de aplicaciones continuas:

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega Y \times \Omega Y \times \left[0,\frac{1}{2}\right] & \longrightarrow & \Omega Y \times I & \longrightarrow & \Omega Y \times I & \xrightarrow{e} & Y \\ (\alpha,\beta,t) & \rightsquigarrow & (\alpha,t) & \rightsquigarrow & (\alpha,2t) & \rightsquigarrow & \alpha(2t) \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega Y \times \Omega Y \times \left[\frac{1}{2},1\right] & \longrightarrow & \Omega Y \times I & \longrightarrow & \Omega Y \times I & \xrightarrow{e} & Y \\ (\alpha,\beta,t) & \rightsquigarrow & (\beta,t) & \rightsquigarrow & (\beta,2t-1) & \rightsquigarrow & \beta(2t-1) \end{array}$$

Por proposición 1.1.4 la aplicación evaluación es continua.
Por otra parte, definimos el inverso homotópico como:

$$\begin{array}{rcl} \nu: \Omega Y & \to & \Omega Y \\ \alpha & \rightsquigarrow & \bar{\alpha} \end{array}$$

donde $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$.
continua, dado que su adjunta, por la ley exponencial, es composición de aplicaciones continuas:

$$\begin{array}{ccccc} \Omega Y \times I & \longrightarrow & \Omega Y \times I & \xrightarrow{e} & Y \\ (\alpha,t) & \rightsquigarrow & (\alpha,1-t) & \rightsquigarrow & \alpha(1-t) \end{array}$$

Además la aplicación evaluación es continua por el mismo argumento que en el caso anterior.
Veamos ahora ahora que $(\Omega Y, c_{y_0})$ es un H-grupo:

- H-espacio: Consideramos la aplicación:

$$H(\alpha,r,t) = \begin{cases} \alpha(\frac{2t}{1+r}) & si \ \ 0 \le t \le \frac{1+r}{2} \\ y_0 & si \ \ \frac{1+r}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

La cual es continua por el lema de continuidad, ya que H esta definida por partes a través de dos aplicaciones continuas, que se pueden ver como composición de aplicaciones continuas:
Luego, por la proposición 1.2.1 y por proposición 1.1.4, $\tilde{H}(\alpha, r)(t) = H(\alpha, r, t)$ es continua y define una homotopía $\tilde{H} : 1_{\Omega Y} * c_{y_0} \simeq 1_{\Omega Y}$ rel $\{c_{y_0}\}$ De manera análoga tomando,

$$G(\alpha, r, t) = \begin{cases} y_0 & si \;\; 0 \leq t \leq \frac{1-r}{2} \\ \alpha(\frac{2t-1+r}{1+r}) & si \;\; \frac{1-r}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Tenemos que $\tilde{G} : c_{y_0} * 1_{\Omega Y} \simeq 1_{\Omega Y}$ rel $\{c_{y_0}\}$, donde $\tilde{G}(\alpha, r)(t) = G(\alpha, r, t)$.

- Asociatividad homotópica: Consideramos la aplicación $H : \Omega Y \times \Omega Y \times \Omega Y \times I \times I \to Y$, definida por:

$$H(\alpha, \beta, \gamma, t, s) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{4t}{1+s}\right), & 0 \leq t \leq \frac{1+s}{4} \\ \beta(4t - s - 1), & \frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4} \\ \gamma\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right), & \frac{2+s}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

aplicación continua por el lema de continuidad. Luego, por la ley exponencial, $\tilde{H}(\alpha, \beta, \gamma, s)(t) = H(\alpha, \beta, \gamma, t, s)$ es continua, y define una homotopía $\tilde{H} : m\,(m \times 1_{\Omega Y}) \simeq m\,(1_{\Omega Y} \times m)$ rel $\left\{\left(c_{c_{y_0}}, c_{c_{y_0}}, c_{c_{y_0}}\right)\right\}$.

- Inverso homotópico: Consideramos la aplicación $H : \Omega Y \times I \times I \to Y$, definida por:

$$H(\alpha, r, t) = \begin{cases} \alpha(2t(1-r)) & si \;\; 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha((2-2t)(1-r)) & si \;\; \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

continua. Luego, por la ley exponenical, $\tilde{H}(\alpha, r)(t) = H(\alpha, r, t)$ es continua y define una homotopía $\tilde{H} : 1_{\Omega Y} * \nu \simeq c_{c_{y_0}}$ rel $\{c_{y_0}\}$
De manera análoga tomando, $G : \Omega Y \times I \times I \to Y$, definida por:

$$G(\alpha, r, t) = \begin{cases} \alpha((2-2t)(1-r)) & si \;\; 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2t(1-r)) & si \;\; \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Tenemos que $\tilde{G} : \nu * 1_{\Omega Y} \simeq c_{c_{y_0}}$ rel $\{c_{y_0}\}$, donde $\tilde{G}(\alpha, r)(t) = G(\alpha, r, t)$. □

2.1.2. Co-H-espacios

Veamos ahora el concepto dual

Definición 2.1.5 *Un Co-H-espacio es un espacio punteado (K, k_0) junto con una aplicación continua punteada, llamada comultiplicación, $\mu : K \to K \vee K$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo salvo homotopía punteada:*

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "1_K"'] \arrow[d, "\mu"] \arrow[dr, "1_K"] & \\ K & K \vee K \arrow[l, "\{c_{k_0}, 1\}"] \arrow[r, "\{1, c_{k_0}\}"'] & K \end{tikzcd}$$

esto es, $\{c_{k_0}, 1_K\}\,\mu \simeq 1_K$ *rel* $\{k_0\}$ *y* $\{1_K, c_{k_0}\} \simeq 1_K$ *rel* $\{k_0\}$.

En adelante usaremos la notación $f * g$ *para representar la composición* $\{f(x), g(x)\}\mu$*, donde* $f, g : (K, k_0) \to (X, x_0)$ *son morfismos, con* (X, x_0) *un espacio punteado cualquiera. Por lo que, la definición de Co-*H*-espacio es equivalente a:*

$$c_{k_0} * 1_K \simeq 1_K \simeq 1_K * c_{k_0} \ \ rel \ \{k_0\}$$

Y por ello llamaremos a c_{k_0} *neutro homotópico*

Proposición 2.1.6 *Dado un espacio punteado* (K, k_0) *con una aplicación continua* $\mu : (K, k_0) \to (K \vee K, (k_0, k_0))$*, se tiene que* (K, k_0) *es un co-H- espacio si y sólo si para cualquier espacio punteado* (X, x_0) *y toda* $f : (K, k_0) \to (X, x_0)$ *se verifica que*

$$c_{x_0} * f \simeq f \simeq f * c_{x_0} \ \ rel \ \{k_0\}$$

donde $c_{x_0} : (K, k_0) \to (X, x_0)$ *es la aplicación constante.*

Definición 2.1.6 *Un co-H-espacio* (K, k_0) *es homotópicamente asociativo si el guiente diagrama conmuta salvo homotopía punteada:*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mu"] & K \vee K \arrow[d, "1_K \vee \mu"] \\ K \vee K \arrow[r, "\mu \vee 1_K"] & K \vee K \vee K \end{tikzcd}$$

es decir, $(\mu \vee 1_K)\,\mu \simeq (1_K \vee \mu)\,\mu$ *rel* $\{k_0\}$.

Proposición 2.1.7 *Un co-H-espacio es homotópicamente asociativo si y sólo si para cualquier espacio* X *y para todas* $f, g, h : (K, k_0) \to (X, x_0)$*, se verifica que*

$$(h * f) * g \simeq h * (f * g) \ \ rel \ \{k_0\}$$

Definición 2.1.7 *Un inverso homotópico en un co-H-espacio* (K, k_0) *es una aplicación continua punteada* $u : K \to K$ *haciendo conmutativo salve homotopía punteada el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "c_{k_0}"'] \arrow[d, "\mu"] \arrow[dr, "c_{k_0}"] & \\ K & K \vee K \arrow[l, "\{u,1\}"] \arrow[r, "\{1,u\}"'] & K \end{tikzcd}$$

es decir, $u * 1_K \simeq c_{k_0}$ *rel* $\{k_0\}$ *y* $c_{k_0} \simeq 1_K * u$ *rel* $\{k_0\}$.

Proposición 2.1.8 *Una aplicación continua punteada* $u : K \to K$ *es un inverso homotópico en un co-H-espacio* (K, k_0) *si y sólo si para cualquier espacio punteado* (X, x_0) *y toda* $f : (K, k_0) \to (X, x_0)$ *se verifica que*

$$fu * f \simeq c_{x_0} \simeq f * fu \ \ rel \ \{k_0\}$$

Definición 2.1.8 *Diremos que un co-H-espacio es homotópicamente conmutativo si el siguiente diagrama es conmutativo salvo homotopía punteada, donde* $T = \{a_1, a_0\} : K \vee K \to K \vee K$*, con* a_i *la inclusión en la i-ésima componente.*

$$\begin{tikzcd} K \vee K \arrow[rr, "T"] & & K \vee K \\ & K \arrow[ul, "\mu"] \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

esto es, $T\mu \simeq \mu \operatorname{rel}\{k_0\}$*. Obsérvese que* T *viene definido explícitamente por* $T([(x,y)]) = [(y,x)]$*.*

Proposición 2.1.9 *Un co-H-espacio es homotópicamente conmutativo si y sólo si para cualquier espacio punteado* (X, x_0) *y para todas* $f, g : (K, k_0) \to (X, x_0)$*, se verifica que*

$$f * g \simeq g * f \ \ rel \ \{k_0\}$$

Definición 2.1.9 *Un co-H-grupo es un co-H-espacio homotópicamente asociativo y con inverso homotópico.*

Teorema 2.1.2 *Si* (K, k_0) *es un co-H-grupo entonces* $[K, k_0; -] : \mathrm{hTop}, \to \mathrm{Grp}$ *es un funtor.*

Nota 2.1.2 *Obsérvese que, si además* (K, k_0) *es homotópicamente conmutativo entonces, por la proposición anterior, se tiene* $[K, k_0; -] : \mathrm{hTop}_* \to \mathrm{Ab}$*.*

Corolario 2.1.2 *Si* f *es equivalencia de homotopia punteada entonces* f_* *es isomorfismo de grupos.*

Proposición 2.1.10 *Para cada espacio punteado,* (X, x_0)*, su suspensión* $(\Sigma X, *)$*, es un co-H-grupo.*

Demostración. Se da un esbozo de la demostración:

- Definimos la comultiplicación y el inverso homotópico respectivamente como

$$\mu : \Sigma X \to \Sigma X \vee \Sigma X$$

$$\mu([(x,t)]) = \begin{cases} ([(x,2t)], *), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ (*, [(x, 2t-1)]), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

y $\nu : \Sigma X \to \Sigma X$ se define por $\nu([(x,t)]) = [(x, 1-t)]$.
- Co-H-espacio: Definimos $F : \Sigma X \times I \to \Sigma X$

$$F([(x,t)], s) = \begin{cases} *, & 0 \le t \le \frac{1-s}{2} \\ \left[\left(x, \frac{2t}{1-s}\right)\right], & \frac{1-s}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$F : c_* * 1 \simeq 1$ rel $\{*\}$. De manera análga, $1 * c_* \simeq 1$ rel $\{*\}$.

- Asociatividad homotópica: Definimos $G : \varSigma X \times I \to \varSigma X \vee \varSigma X \vee \varSigma X$ dada por:
$$G([(x,t)],s) = \begin{cases} \left(\left[\left(x, \frac{4t}{1+s}\right)\right], *, *\right), & 0 \le t \le \frac{1+s}{4} \\ (*, [(x, 4t-s-1)], *]), & \frac{1+s}{4} \le t \le \frac{2+s}{4} \\ \left(*, *, \left[\left(x, \frac{4t-s-2}{2-s}\right)\right]\right), & \frac{2+s}{4} \le t \le 1 \end{cases}$$
$G : (\mu \vee 1)\mu \simeq (1 \vee \mu)\mu$ rel $\{*\}$.
- Inverso homotópico: Definimos define $H : \varSigma X \times I \to \varSigma X$ como
$$H([(x,t)],s) = \begin{cases} [(x, 2t(1-s))], & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ [(x, (2-2t)(1-s))], & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$
y se verifica que $H : 1 * \nu \simeq c_*$, rel $\{*\}$. De manera análoga se tiene que $\nu * 1 \simeq c_*$ rel $\{*\}$. □

2.1.3. Equivalencia entre los grupos obtenidos a través de lazos y la suspensión

Existen dos formas posibles de dotar de estructura de grupo al corchete $[\varSigma X, *; \varOmega Y, c_{y_0}]$, la inducida por el co- H-grupo $(\varSigma X, *)$ y la inducida por el H-grupo $(\varOmega Y, c_{y_0})$. Veamos que estas coinciden.

Proposición 2.1.11 $\varUpsilon : [\varSigma X, *; Y, y_0] \to [X, x_0; \varOmega Y, c_{y_0}]$ *es isomorfismo de grupos.*

Demostración. Sabemos que $\varUpsilon$, definido por $\varUpsilon([f]) = [\hat{f}]$ con $\hat{f}(x)(t) = f([(x,t)])$ es un isomorfismo natural, por lo que basta ver que es homomorfismo de grupos. Sea $f, g : (\varSigma X, *) \to (Y, y_0)$ denotamos por $f \diamond g$ la composición $\{f, g\}\mu$ y sea $f', g' : (X, x) \to (\varOmega Y, c_{y_0})$ denotamos $f' \circ g'$ la composición $m < f', g' >$. Por lo que,
$$((\widehat{f \diamond g})(x))(t) = (f \diamond g)([(x,t)]) = \begin{cases} f([(x, 2t)]), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g([(x, 2t-1)]), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$
mientras que,
$$((\hat{f} \circ \hat{g})(x))(t) = (m(\hat{f}(x), \hat{g}(x)))(t) = \begin{cases} \hat{f}(x)(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \hat{g}(x)(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} f([(x, 2t)]), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ g([(x, 2t-1)]), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$
Luego, $\widehat{f \diamond g} = \hat{f} \circ \hat{g}$, en particular $\widehat{f \diamond g} \simeq \hat{f} \circ \hat{g}$ rel $\{x_0\}$. Por lo que $\varUpsilon([f \diamond g]) = \varUpsilon([f]) \circ \varUpsilon([g])$. □

Lema 2.1.1 *Sea X un conjunto con dos operaciones $\diamond$ y $*$ satisfaciendo las siguientes propiedades:*

1. *Existe un neutro e común para ambas operaciones:*

$$x \diamond e = x * e = x = e \diamond x = e * x, \forall x \in X$$

2. *Las operaciones $\diamond$ y $*$ son mutuamente distributivas, es decir:*

$$(x \diamond x') * (y \diamond y') = (x * y) \diamond (x' * y'), \forall x, x', y, y' \in X$$

Entonces, $\diamond = *$. Además, esta operación es asociativa y conmutativa.

Demostración. Veamos en primer lugar que las operaciones coinciden:
Sean $x, y \in X$. Entonces,

$$x * y = (x \diamond e) * (e \diamond y) = (x * e) \diamond (e * y) = x \diamond y.$$

Veamos que es conmutativa:

$$x * y = (e \diamond x) * (y \diamond e) = (e * y) \diamond (x * e) = y \diamond x = y * x$$

Veamos la asociatividad:

$$x*(y*z) = x*(y\diamond z) = (x\diamond e)*(y\diamond z) = (x*y)\diamond(e*z) = (x*y)\diamond z = (x*y)*z.$$

□

Proposición 2.1.12 *Si (K, k_0) es un co-H-espacio y (L, l_0) un H-espacio, entonces las dos operaciones inducidas en el conjunto $[K, k_0; L, l_0]$ coinciden y son conmutativas.*

Demostración. Se considera μ la comultiplicación en K y m la multiplicación en L, siendo $\diamond$ la operación inducida por K y $\circ$ la inducida por L.
Veamos que se cumplen las hipótesis del lema 2.1.1:

- Neutro común: $[c_{l_0}]$ es el neutro común para ambas operaciones.
- Mutuamente distributivas: sean $f, g, f', g' : (K, k_0) \to (L, l_0)$ veamos que $([f] \diamond [f']) \circ ([g] \diamond [g']) = ([f] \circ [g]) \diamond ([f'] \circ [g'])$.
  Se observa que $< \{f, f'\}, \{g, g'\} >= \{< f, g >, < f', g' >\} : (K, k_0) \vee (K, k_0) \to (L, l_0) \times (L, l_0)$, debido a la unicidad inducida desde el push out:

$$\begin{tikzcd}
\{K\} \arrow[r] \arrow[d] & (K, k_0) \arrow[d] & \\
(K, k_0) \arrow[r] & (K, k_0) \vee (K, k_0) \arrow[r] & (L, l_0) \vee (L, l_0)
\end{tikzcd}$$

  Por lo que tenemos que,
  $(f \circ g) \diamond (f' \circ g') = \{f \circ g, f' \circ g'\} \mu = \{m < f, g >, m < f', g' >\} \mu = m \{< f, g >, < f', g' >\} \mu = m < \{f, f'\}, \{g, g'\} > \mu = m < \{f, f'\} \mu, \{g, g'\} \mu >= m < f \diamond f', g \diamond g' >= (f \diamond f') \circ (g \diamond g')$
  Entonces, al pasar a clases de mantiene la igualdad.

Luego, por el lema anterior, ambas operaciones coinciden. □

Corolario 2.1.3 *Si* $(X, x_0), (Y, y_0)$ *son espacios punteados, las operaciones definidas en* $[\Sigma X, *; \Omega Y, c_{y_0}]$ *coinciden.*

Corolario 2.1.4 *Si* (X, x_0) *es un espacio punteado y* $n \geq 2$*, entonces* $[\Sigma^n X, *; Z, z_0]$ *es grupo conmutativo. Análogamente, si* (Y, y_0) *es un espacio punteado y* $n \geq 2$*, entonces* $[Z, z_0, \Omega^n Y, c_{y_o}]$ *es un grupo conmutativo.*

Corolario 2.1.5 *Si* (X, x_0) *es un espacio punteado entonces* $[\Sigma^n X, *; \Omega^k Z, c_{z_0}] \cong [\Sigma^{n-i} X, *; \Omega^{k+i} Z, c_{z_0}]$.

2.2. Distintas definiciones de grupos de homotopía

Si consideramos los posibles métodos para definir el segundo grupo de homotopía $\pi_2(X, x_0)$, teniendo en cuenta que $\pi_1(X, x_0)$ es el grupo formado por las clases de homotopía de los 1-lazos basados en x_0, debemos definir en primer lugar a que denominaremos 2-lazo. De manera intuitiva podemos pensar en tres posibles definiciones, una aplicación continua $\beta : I \times I \to X$ que manda el borde del cuadrado a x_0, una aplicación continua $\beta : S^2 \to X$ que manda el 1 a x_0 o bien podríamos pensar que un 2-lazo debería ser un lazo de lazos, es decir, una aplicación β con dominio en I, la cual para cada valor $\beta(t)$ tenemos un lazo en X, además de cumplir que $\beta(0) = \beta(1)$.

Probaremos que estos tres enfoques conducen al mismo grupo $\pi_2(X, x_0)$. La siguiente secciones presentarán las definiciones basadas en estas tres ideas generalizando para dimensiones superiores y probando su equivalencia. Además de algunas propiedades análogas al grupo fundamental.

Sea X un espacio topológico podemos definir en él la relación de equivalencia $\sim$ dada por:

$$x \sim y \text{ si y sólo si existe un camino en } X \text{ de } x \text{ a } y.$$

El conjunto cociente $X/\sim$ está formado por las componentes conexas por caminos que contienen a x y se denota por $[x]$. A este cociente le denotaremos por $\pi_0(X)$. Luego sea $f : X \to Y$ aplicación continua podemos definir $\pi_0(f)([x]) = [f(x)]$, por lo que se puede comprobar que $\pi_0 : hTop \to Set$ es un funtor.

Si (X, x_0) es un espacio punteado, $\pi_0(X)$ se puede considerar la construcción análoga para espacios basados y aplicaciones punteadas.

Veamos ahora que podemos dar otra definición para π_0 ya sea en el caso no punteado como en el punteado.

Proposición 2.2.1 *Si denotamos por* $*$ *el espacio unipuntual, existe una equivalencia natural entre los funtores* $[*, \_], \pi_0 : hTop \to Set$

Demostración. Basta tomar la aplicación:

$$\begin{aligned} \alpha : [*, X] &\to \pi_0(X) \\ [f] &\rightsquigarrow [f(*)] \end{aligned}$$

□

Proposición 2.2.2 *Si consideramos la la 0-esfera, con punto base $s_0 = +1$, existe una equivalencia natural entre los funtores $[S^0, s_0; \_], \pi_0 : hTop_* \to Set_*$*

Demostración. Veamos que existen biyecciones dadas por

$$\begin{aligned} \alpha : [S^0, s_0; X, x_0] &\to \pi_0(X, x_0) \\ [f] &\rightsquigarrow [f(-1)] \end{aligned}$$

- Bien definida: Sean $f, g : (S^0, s_0) \to (X, x_0)$ tal que $[f] = [g]$ entonces $\exists H : f \simeq g \text{ rel}\{*\}$. Luego, $\gamma : I \to X$ definido por $\gamma(t) = H(-1, t)$ es un camino entre $f(-1)$ y $g(-1)$. Entonces, $[f(-1)] = [g(-1)]$
- Inyectiva: Sean $f, g : (S^0, s_0) \to (X, x_0)$ tal que $[f(-1)] = [g(-1)]$ entonces existe γ camino en X tal que $\gamma(0) = f(-1)$ y $\gamma(1) = g(-1)$. Por lo que,
$$H(x,t) = \begin{cases} \gamma(t) \; si & x = 1 \\ x_0 \quad si \; x = -1 \end{cases}$$
define una homotopía entre f y g, es decir, $H : f \simeq g \text{ rel}\{s_0\}$
- Sobreyectiva: sea $[x] \in \pi_0(X, x_0)$, consideramos $f : (S^0, s_0) \to (X, x_0)$ definidica como $f(1) = x_0$ y $f(-1) = x$. Entonces $\alpha([f]) = [x]$.

Sea $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, la naturalidad es consecuencia de la conmutatividad del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} {[S^0, s_0; X, x_0]} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_0(X, x_0) \arrow[d, "\pi_0(f)"'] \\ {[S^0, s_0; Y, y_0]} \arrow[r, "\alpha"] & \pi_0(Y, y_0) \end{tikzcd}$$

□

Por ahora hemos visto que tan solo podemos asegurar que π_0 tiene estructura de conjunto. Sin embargo, dado que los espacios de lazos y las suspensiones tienen estructura de H-grupo y co-H-grupo, podemos hablar de grupos de homotopía.

Definición 2.2.1 *Sea (X,x_0) un espacio punteado y n $\geq$ 1. Se define el n-grupo de homotopía de (X,x_0) como:*

$$\pi_n(X, x_0) = [S^n, s_{s_0}; X, x_0]$$

Tenemos que es un grupo para n $\geq$ 1, pues S^n es la suspensión de S^{n-1}. Además:

$$S^n = \Sigma(S^{n-1}) = \Sigma^2(S^{n-2}) = ... = \Sigma^n(S^0)$$

Teniendo en cuenta esto y que el par (Σ, Ω) es adjunto, obtenemos la siguiente definición alternativa:

$$\pi_n(X,x_0) = [S^n, s_0; X, x_0] \cong [S^{n-1}, s_0; \Omega X, c_{x_0}] \cong .... \cong [S^0, s_0; \Omega^n X, c_{x_0}]$$

Por lo que, $\pi_n(X,x_0) \cong \pi_{n-1}(\Omega X, c_{x_0}) \cong ... \cong \pi_1(\Omega^{n-1}X, c_{x_0}) \cong \pi_0(\Omega^n X, c_{x_0})$

Nota 2.2.1 *Para $n \geq 1$ se tienen homeomorfismo $I^n/\delta I^n \cong S^n$ en Top_*. En adelante los denotaremos como:*

$$\theta_n : I^n/\delta I^n \to S^n$$

Lema 2.2.1 *Para cada $n \geq 1$ existe un homeomorfismo en Top_*:*

$$\varphi_n : I^n/\delta I^n \to \Sigma(S^{n-1})$$

tal que $\varphi_n([(t_1, ..., t_n)]) = [(\theta_{n-1}([(t_1, ..., t_{n-1})]), t_n)]$

Demostración. Consideramos las siguientes aplicaciones:

- La siguiente identificación:

$$\begin{array}{rccl} \gamma = \pi \times 1_I : & I^n & \to & (I^{n-1}/\delta I^{n-1}) \times I \\ & (t_1, ..., t_n) & \rightsquigarrow & ([(t_1, ..., t_{n-1})], t_n) \end{array}$$

- El homeomorfismo punteado $\theta_{n-1} \times 1_I : (I^{n-1}/\delta I^{n-1}) \times I \to S^{n-1} \times I$
- La proyección canónica $\rho : S^{n-1} \times I \to \Sigma(S^{n-1})$

Componiendo obtenemos la siguiente identificación,

$$\begin{array}{rccc} h = \rho(\theta_{n-1} \times 1_I)\gamma : & I^n & \to & \Sigma(S^{n-1}) \\ & (t_1, ..., t_n) & \rightsquigarrow & [(\theta_{n-1}([(t_1, ..., t_{n-1})]), t_n)] \end{array}$$

Por lo que tenemos el homeomorfismo $\varphi_n : (I^n/\delta I^n) \to \Sigma(S^{n-1})$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} I^n \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\pi"'] & \Sigma(S^{n-1}) \\ & I^n/\delta I^n \arrow[u, dashed, "\varphi_n"'] \end{tikzcd}$$

con π la proyección canónica. □

Lema 2.2.2 *Para todo espacio punteado (X, x_0), se tiene una biyección*

$$\begin{array}{rcl} \phi : Hom_{Top^{(2)}}((I^n, \delta I^n), (X, x_0)) & \to & Hom_{Top_*}((I^n/\delta I^n, *), (X, x_0)) \\ f & \rightsquigarrow & \tilde{f} \end{array}$$

con $\tilde{f}([(t_1, ..., t_n)]) = f(t_1, ..., t_n)$. Además, dadas f,g: $(I^n, \delta I^n) \to (X, x_0)$, se verifica que $f \simeq g$ rel δI^n si y solo si $\tilde{f} \simeq \tilde{g}$ rel $\{*\}$

Demostración. Sea $\pi : I^n \to I^n/\delta I^n$ la proyección canónica , por la proposición 1.2.6 sabemos que $\pi^* : (X, x_0)^{(I^n/\delta I^n, *)} \to (X, x_0)^{(I^n, \delta I^n)}$ es un homeomorfismo punteado con inversa ϕ, en particular ϕ es una biyección. Por otro lado, tenemos el siguiente push out.

$$\begin{tikzcd}
\delta I^n \times I \arrow[r, "c_* \times 1_I"] \arrow[d, "i \times 1_I"'] & \{*\} \times I \arrow[d] \\
I^n \times I \arrow[r, "\pi \times 1_I"'] & I^n/\delta I^n \times I
\end{tikzcd}$$

Por lo que si H :$f \simeq g$ rel δI^n entonces se induce $\tilde{H} : I^n/\delta I^n \times I$, una única aplicación continua tal que $\tilde{H}(\pi \times 1) = H$, que cumple $\tilde{H} : \tilde{f} \simeq \tilde{g}$ rel $\{*\}$ □

Definición 2.2.2 *Todo morfismo de la forma f:* $(I^n, \delta I^n) \to (X, x_o)$ *en* $Top^{(2)}$ *se denomina lazo n-cúbico en* (X, x_0).

Definición 2.2.3 *Dados f,g:* $(I^n, \delta I^n) \to (X, x_o)$ *lazos n-cúbicos en* (X, x_0) *se define* $f \diamond g$*:* $(I^n, \delta I^n) \to (X, x_o)$ *como*

$$(f \diamond g)(t_1, ..., t_n) = \begin{cases} f(t_1, ..., 2t_n) & si\ 0 \leq t_n \leq \frac{1}{2} \\ g(t_1, ..., 2t_n - 1) & si\ \frac{1}{2} \leq t_n \leq 1 \end{cases}$$

Además, si $[f], [g] \in [I^n, \delta I^n; X, x_0]$ *podemos definir* $[f] \diamond [g] = [f \diamond g]$

De manera análoga a como se realizó con el grupo fundamental, podemos comprobar que esta operación dota de estructura de grupo al corchete de homotopía $[I^n, \delta I^n; X, x_0]$. Obteniendo que el elemento neutro del grupo es $[c_{x_0}]$ y el inverso de $[f] \in [I^n, \delta I^n; X, x_0]$ es $[f]^{-1} = [\bar{f}]$ con $\bar{f}(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_{n-1}, 1 - x_n)$.

Teorema 2.2. *La aplicación b:* $[I^n, \delta I^n; X, x_0] \to [\Sigma(S^{n-1}), *; X, x_0]$ *definida como* $b([f]) = [\tilde{f}\varphi_n^{-1}]$ *es isomorfismo de grupos.*

Demostración.

- Bien definida:Si $f \simeq g$ rel δI^n entonces $\tilde{f} \simeq \tilde{g}$ rel $\{*\}$, por lo que $\tilde{f}\varphi_n^{-1} \simeq \tilde{g}\varphi_n^{-1}$ rel $\{*\}$.
- Inyectividad: Sea $[f], [g] \in [I^n, \delta I^n; X, x_0]$ tales que $\tilde{f}\varphi_n^{-1} \simeq \tilde{g}\varphi_n^{-1}$ rel$\{*\}$ tenemos que $f = \tilde{f}\pi = (\tilde{f}\varphi_n^{-1})\varphi_n\pi \simeq_{rel\,\delta I^n} (\tilde{g}\varphi_n^{-1})\varphi_n\pi = \tilde{g}\pi = g$
- Sobreyectividad : Sea $[f] \in [\Sigma(S^{n-1}), *; X, x_0]$, consideramos $h = f\varphi_n\pi \in [I^n, \delta I^n; X, x_0]$. Entonces, $b([h]) = [\tilde{g}\varphi_n^{-1}] = [(\widetilde{f\varphi_n\pi})\varphi_n^{-1}] = [(f\varphi_n)\varphi_n^{-1}] = [f]$
- Homomorfismo de grupos: Usaremos el isomorfismo de grupos (cápitulo 1)

$$\begin{array}{rcl} \Upsilon : [\Sigma(S^{n-1}), *; X, x_0] & \to & [S^{n-1}, s_0; \Omega X, c_{x_0}] \\ [f] & \rightsquigarrow & [\hat{f}] \end{array}$$

con $(\hat{f}(x))(t) = f([(x,t)])$.
Veamos que dados $[f],[g] \in [I^n, \delta I^n; X, x_0]$ tenemos que $\Upsilon(b([f]) \cdot b([g])) = \Upsilon(b([f] \diamond [g]))$ y dado que Υ es inyectiva equivale a $b([f]) \cdot b([g]) = b([f] \diamond [g])$
Tenemos que, $\Upsilon(b([f]) \cdot b([g])) = \Upsilon(b([f])) * \Upsilon(b([g])) = [\widehat{\tilde{f}\varphi^{-}1_n}] * [\widehat{\tilde{g}\varphi^{-}1_n}] = [(\widehat{\tilde{f}\varphi_n^{-1}}) * (\widehat{\tilde{g}\varphi_n^{-1}})] = [m < \widehat{\tilde{f}\varphi_n^{-1}}), \widehat{\tilde{g}\varphi_n^{-1}} >]$
Como $\theta_{n-1} : I^{n-1}/\delta I_{n-1} \to S^{n-1}$ es homeomorifismo punteado, tenemos que $\forall x \in S^{n-1}$, $x = \theta_{n-1}([(t_1, ..., t_{n-1})])$ con $(t_1, ..., t_{n-1}) \in I^{n-1}$ luego $(m < \widehat{\tilde{f}\varphi_n^{-1}}), \widehat{\tilde{g}\varphi_n^{-1}})(x) = m((\widehat{\tilde{f}\varphi_n^{-1}})(\theta_{n-1}([(t_1, ..., t_{n-1})])), (\widehat{\tilde{g}\varphi_n^{-1}})(\theta_{n-1}([(t_1, ..., t_{n-1})]))$
Por lo que, $\forall t_n \in I, (((\widehat{\tilde{f}\varphi_n^{-1}}) \cdot (\widehat{\tilde{g}\varphi_n^{-1}}))(\theta_{n-1}([(t_1, ..., t_{n-1})])))(t_n) =$

$$= \begin{cases} (\widehat{\tilde{f}\varphi_n^{-1}})(\theta_{n-1}([(t_1, ..., t_{n-1})])(2t_n) & si\ 0 \le t_n \le \frac{1}{2} \\ (\widehat{\tilde{g}\varphi_n^{-1}})(\theta_{n-1}([(t_1, ..., t_{n-1})])(2t_n - 1) & si\ \frac{1}{2} \le t_n \le 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (\tilde{f}\varphi_n^{-1})([(\theta_{n-1}([(t_1, ..., t_{n-1})])(2t_n)]) & si\ 0 \le t_n \le \frac{1}{2} \\ (\tilde{g}\varphi_n^{-1})([(\theta_{n-1}([(t_1, ..., t_{n-1})])(2t_n - 1)]) & si\ \frac{1}{2} \le t_n \le 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(t_1, ..., t_{n-1}, 2t_n) & si\ 0 \le t_n \le \frac{1}{2} \\ g(t_1, ..., t_{n-1}, 2t_n - 1) & si\ \frac{1}{2} \le t_n \le 1 \end{cases} = (f \diamond g)(t_1, ..., t_n)$$

Además, $\Upsilon(b([f] \diamond [g])) = \Upsilon(b([f \diamond g])) = [\widehat{((\widetilde{f \diamond g}))\varphi_n^{-1}}]$. Pero

$$\begin{aligned}(((\widehat{\widetilde{f \diamond g}))\varphi_n^{-1}})(\theta_{n-1}([(t_1, ..., t_{n-1})])(t_n) &= (\widetilde{f \diamond g})\varphi_n^{-1}[(\theta_{n-1}([(t_1, ..., t_{n-1})]), t_n)] = \\ &= (f \diamond g)(t_1, ..., t_n)\end{aligned}$$

□

Resumiendo, hemos visto que las tres definiciones conducen a grupos isomorfos por lo que a partir de ahora usaremos la definición de grupo de homotopía que mejor convenga en cada caso.

2.3. Propiedades de los grupos de homotopía

Ya definidos los grupos de homotopía, podemos cuestionarnos si estos cumplen propiedades análogas a las que posee el grupo fundamental. En esta sección veremos que muchos de los teoremas existentes para el grupo fundamental se pueden generalizar para grupos de homotopía de orden superior.

En primer lugar, veamos que los grupos de homotopía de espacios conexos por caminos son independientes de la elección del punto base.

Definición 2.3.1 *Sea $F : I^n \times I \to X$ una homotopía. Si φ es un camino en X y $F(u,t) = \varphi(t)$ para todo $u \in \delta I^n$ y todo $t \in I$, se dice que F es una homotopía por nivel a lo largo de φ.*

Lema 2.3.1 *$(I^n \times \{0\}) \cup (\delta I^n \times I)$ es un retracto de $I^n \times I$ [1, pág 9]*

Nota 2.3.1 *Dado un camino de x_0 a x_1 en un espacio X, vamos a usarlo, junto con la retracción estereográfica, para obtener un lazo n-cúbico basado en x_1 a partir de un lazo n-cúbico basado en x_0.*
Si $\varphi : I \to X$ es un camino en X de x_0 a x_1 y $\alpha \in (X, x_0)^{(I^n, \delta I^n)}$, entonces

$$L'_{\varphi,\alpha} : (I^n \times \{0\}) \cup (\delta I^n \times I) \to X$$

definida por

$$L'_{\varphi,\alpha}(u,t) = \begin{cases} \alpha(u), \ (u,t) \in I^n \times \{0\} \\ \varphi(t), \ \ (u,t) \in \delta I^n \times I \end{cases}$$

continua por lema 1.1.1. Además, definimos la aplicación continua $L_{\varphi,\alpha} = L'_{\varphi,\alpha} r$: $I^n \times I \to X$, donde r es la retracción del lema 2.3.1, y resulta que

- $L_{\varphi,\alpha}(u,0) = L'_{\varphi,\alpha}(u,0) = \alpha(u)$
- $L_{\varphi,\alpha}(u,t) = L'_{\varphi,\alpha}(u,t) = \varphi(t), \forall (u,t) \in \delta I^n \times I$

Luego, $L_{\varphi,\alpha}$ es una homotopía por nivel a lo largo de φ desde α hasta $L_{\varphi,\alpha}(-,1) \in (X, x_1)^{(I^n, \delta I^n)}$, por lo que es un lazo n-cúbico basado en x_1.
Luego, fijado un camino $\varphi : I \to X$ de x_0 a x_1, podemos definir la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\# : (X, x_0)^{(I^n, \delta I^n)} & \to & (X, x_1)^{(I^n, \delta I^n)} \\ \alpha & \rightsquigarrow & L_{\varphi,\alpha}(-,1) \end{array}$$

Lema 2.3.2 *Sean $\alpha, \beta : (I^n, \delta I^n) \to (X, x_0)$ lazos n-cúbicos, sea φ un lazo en X basado en x_0, nulhomótopo relativamente a $\{0,1\}$, y sea $F : \alpha \simeq \beta$ una homotopía por nivel a lo largo de φ. Entonces $\alpha \simeq \beta$ rel δI^n.*

Demostración. A continuación se da un esbozo de la demostración.
Sea $\mu : I \times I \to X$ tal que $\mu : \varphi \simeq c_{x_0}$ rel $\{0,1\}$. Se considera $h : (I^n \times I \times \{0\}) \cup (\delta I^n \times I \times I) \to X$ definida por

$$h(u,t,s) = \begin{cases} F(u,t), \ (u,t,s) \in I^n \times I \times \{0\}, \\ \mu(t,s), \ \ (u,t,s) \in \delta I^n \times I \times I. \end{cases}$$

Continua por lema 1.1.1

Consideramos $R : I^n \times I \times I \to (I^n \times I \times \{0\}) \cup (\delta I^n \times I \times I)$ dada por $R(x,t,s) = (p_1 r(x,s), t, p_2(x,s))$ la retracción obtenida a partir de la retracción estereográfica r, siendo $p_1 : (I^n \times \{0\}) \cup (\delta I^n \times I) \to I^n$ y $p_2 : (I^n \times \{0\}) \cup (\delta I^n \times I) \to I$ las proyecciones en la primera y segunda coordenada, respectivamente. Por lo que tenemos la aplicación continua

$$H = hR : I^n \times I \times I \to X$$

Luego, tomando la aplicación $K : I^n \times I \to X$, definida como

$$K(u,t) = \begin{cases} H(u,0,4t), & 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ H(u,4t-1,1), & \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ H(u,1,2-2t), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

tenemos que $K : \alpha \simeq \beta$ rel δI^n □

Lema 2.3.3 *Sean φ, φ' caminos en X de x_0 a x_1 tales que $\varphi \simeq \varphi'$ rel $\{0,1\}$, y sea $F : \alpha \simeq \beta$ una homotopia por nivel a lo largo de φ'. Entonces*

$$\varphi_{\#}(\alpha) \simeq \beta \ rel \ \delta I^n.$$

Demostración. Se define $G : I^n \times I \to X$ como

$$G(u,t) = \begin{cases} L_{\varphi,\alpha}(u,1-2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ F(u,2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Se tiene que $G : \varphi_{\#}(\alpha) \simeq \beta$ es una homotopía por nivel a lo largo de $\bar{\varphi} * \varphi'$. Luego, como $\bar{\varphi} * \varphi' \simeq c_{x_0}$ rel $\{0,1\}$, por el lema 2.3.2 se concluye, $\varphi_{\#}(\alpha) \simeq \beta$ rel δI^n. □

Definición 2.3.2 *Si X es un espacio, un sistema local de grupos, T, es una familia de grupos $\{T(x)/x \in X\}$ junto con una familia de homomorfismos de grupos $\{T(\varphi) : T(\varphi(0)) \to T(\varphi(1))/\varphi \in X^I\}$ verificando las siguientes propiedades:*

- *Si $\varphi \simeq \varphi'$ rel $\{0,1\}$ entonces $T(\varphi) = T(\varphi')$.*
- *Si c_x denota el camino constante en $x \in X$, entonces $T(c_x) = 1_{T(x)}$.*
- *Si φ, ψ son caminos en X con $\varphi(1) = \psi(0)$ entonces $T(\varphi * \psi) = T(\psi)T(\varphi)$ De las propiedades del sistema local de grupos se deduce inmediatamente que, para todo $\varphi \in X^I, T(\varphi)$ es isomorfismo de grupos con inverso $T(\varphi)^{-1} = T(\bar{\varphi})$.*

Teorema 2.3.1 *Si X es un espacio topológico y $n \ge 1$, entonces existe un sistema local de grupos T, tal que $T(x) = \pi_n(X,x), \forall x \in X$.*

Demostración. Definimos la familia de grupos $\{T(x)/x \in X\}$ como $T(x) = \pi_n(X,x)$. Ahora , para cada $\varphi \in X^I$, con $x_0 = \varphi(0)$ y $x_1 = \varphi(1)$ definimos

$$\begin{array}{rcl} T(\varphi) : \pi_n(X,x_0) & \to & \pi_n(X,x_1) \\ [\alpha] & \rightsquigarrow & [\varphi_{\#}(\alpha)] \end{array}$$

- $T(\varphi)$ está bien definida: Supongamos que $F : \alpha \simeq \beta$ rel δI^n. Entonces F es una homotopía por nivel a lo largo de c_{x_0}. Consideramos la homotopía G:

$$\text{G(t,s)}=\begin{cases} F(t,2s), & si \ \ 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ L_{\varphi,\beta}(t,2s-1), & si \ \ \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

$G : \alpha \simeq \varphi_{\#}\beta$ es una homotopía por nivel a lo largo de $c_{x_0} * \varphi$ entre α y $\varphi_{\#}(\beta)$. Además como $c_{x_0} * \varphi \simeq \varphi$ rel $\{0, 1\}$ por el lema 2.3.3, $\varphi_{\#}(\alpha) \simeq \varphi_{\#}(\beta)$ rel δI^n.

- $T(\varphi)$ es homomorfismo de grupos: Veamos que $\varphi_{\#}(\alpha * \beta) \simeq \varphi_{\#}(\alpha) * \varphi_{\#}(\beta)$ rel δI^n, $\forall \alpha, \beta \in (X, x_0)^{(I^n, \delta I^n)}$. Definimos $G : I^n \times I \to X$ como:

$$G(t_1, ..., t_n, s) = \begin{cases} L_{\varphi,\alpha}(t_1, ..., t_{n-1}, 2t_n, s) & si\ 0 \leq t_n \leq \frac{1}{2} \\ L_{\varphi,\beta}(t_1, ..., t_{n-1}, 2t_n - 1, s) & si\ \frac{1}{2} \leq t_n \leq 1 \end{cases}$$

  Entonces G es continua y $G : \alpha * \beta \simeq \varphi_{\#}(\alpha) * \varphi_{\#}(\beta)$ es una homotopía por nivel a lo largo de φ. Luego por lema 2.3.3 se concluye el resultado.
- Veamos que T verifica las tres propiedades de sistema local de grupos:
  1. Sean $\varphi \simeq \varphi'$ rel $\{0, 1\}$ entonces para $\alpha \in (X, x_0)^{(I^n, \delta I^n)}$ tenemos que $L_{\varphi',\alpha} : \alpha \simeq \varphi'_{\#}(\alpha)$ es una homotopía por nivel a lo largo de φ'. Luego por lema 2.3.3 $\varphi_{\#}(\alpha) \simeq \varphi'_{\#}(\alpha)$ rel δI^n. Por lo que $T(\varphi)([\alpha]) = [\varphi_{\#}(\alpha)] = [\varphi'_{\#}(\alpha)] = T(\varphi')([\alpha]), \forall [\alpha]$. Es decir, $T(\varphi) = T(\varphi')$.
  2. Sea $c_{x_0} : I \to X$ el camino constante x_0. Entonces, $L_{c_0,\alpha} : \alpha \simeq (c_{x_0})_{\#}(\alpha)$ rel δI^n, porque $L_{c_{x_0},\alpha}$ es una homotopía por nivel a lo largo de c_{x_0}. Luego $T(c_{x_0}) = 1_{\pi_n(X,x_0)}$.
  3. Sean φ, ψ caminos en X, con $\varphi(1) = \psi(0)$.Consideramos $L_{\varphi,\alpha} : \alpha \simeq \varphi_{\#}(\alpha)$ una homotopía por nivel a lo largo de φ y $L_{\psi,\varphi_{\#}(\alpha)} : \varphi_{\#}(\alpha) \simeq \psi_{\#}(\varphi_{\#}(\alpha))$ una homotopía por nivel a lo largo de ψ. Luego,

$$G(u, t) = \begin{cases} L_{\varphi,\alpha}(u, 2t) & si\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ L_{\psi,\varphi_{\#}(\alpha)}(u, 2t - 1) & si\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

     es una homotopía $G : \alpha \simeq \psi_{\#}(\varphi_{\#}(\alpha))$ por nivel a lo largo de $\varphi * \psi$. Entonces, por el lema 2.3.3, $(\varphi * \psi)_{\#}(\alpha) \simeq \psi_{\#}(\varphi_{\#}(\alpha))$ rel δI^n. Es decir $T(\varphi * \psi) = T(\psi) * T(\varphi)$. □

Corolario 2.3.1 *Sea X un espacio y φ un camino en X de x_0 a x_1. Entonces, $T(\varphi) : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_1)$ es isomorfismo de grupos para $n \geq 1$.*

Corolario 2.3.2 *Si X es conexo por caminos, para todo $n \geq 1$ y para todo $x_0, x_1 \in X$ se tiene que $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(X, x_1)$.*

Veamos ahora que espacios homotopicamente equivalentes y conexos por caminos tienen grupos de homotopía isomorfos.

Lema 2.3.4 *Sean $f, g : X \to X$ continuas y $F : f \simeq g$ una homotopía. Si $x_0 \in X$, se considera el camino $\varphi = F(x_0, -) : I \to X$, de $f(x_0)$ a $g(x_0)$. Entonces, para cada n el siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X, x_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \pi_n(X, f(x_0)) \arrow[d, "T(\varphi)", "\cong"'] \\ & \pi_n(X, g(x_0)) \end{tikzcd}$$

Demostración. Ver que el diagrama es conmutativo es equivalente a ver que $\varphi_{\#}(f\alpha) \simeq g\alpha$ rel δI^n para todo $[\alpha] \in \pi_n(X, x_0)$.
Consideramos $G : I^n \times I \to X$ la homotopía definida como $G(u,t) = F(\alpha(u), t)$. Entonces, $G : f\alpha \simeq g\alpha$ es una homotopía por nivel a lo largo de φ. Por lema 2.3.3, tenemos que $\varphi_{\#}(f\alpha) \simeq g\alpha$ rel δI^n. □

Definición 2.3.3 *Sea $f : X \to Y$ un aplicación continua. Se dice que f es una equivalencia débil de homotopía, o equivalencia débil, si $\pi_n(f) : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x))$ es biyectivo para todo $n \geq 0$ y todo $x \in X$*

Teorema 2.3.2 *Sea $f : X \to Y$ una aplicación continua. Si f es una equivalencia de homotopía entonces f es una equivalencia débil.*

Demostración. Sea $g : Y \to X$ un inverso homotópico para f, es decir, $fg \simeq 1_Y$, $gf \simeq 1_X$. Consideramos, por una parte, la homotopía $F : gf \simeq 1_X$, y $\varphi = F(x_0, -)$ el camino entre $gf(x_0)$ y x_0. Por el lema anterior, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X, x_0) \arrow[r, "(gf)_*"] \arrow[dr, "(1_X)_*"'] & \pi_n(X, gf(x_0)) \arrow[d, "T(\varphi)", "\cong"'] \\
& \pi_n(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

Como $(1_X)_* = 1$, entonces $(gf)_* = g_* f_*$ es un isomorfismo, luego $f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))$ es inyectivo y $g_* : \pi_n(Y, f(x_0)) \to \pi_n(X, gf(x_0))$ es sobre.
Por otro lado, sea $G : fg \simeq 1_Y$ la homotopía correspondiente y $\psi = G(f(x_0), -)$, camino de $fgf(x_0)$ a $f(x_0)$. Se tiene entonces el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(Y, f(x_0)) \arrow[r, "(fg)_*"] \arrow[dr, "(1_Y)_*"'] & \pi_n(Y, fgf(x_0)) \arrow[d, "T(\varphi)", "\cong"'] \\
& \pi_n(Y, f(x_0))
\end{tikzcd}$$

Razonando de forma similar, $g_* : \pi_n(Y, f(x_0)) \to \pi_n(X, gf(x_0))$ es inyectivo con lo cual es biyectivo. Como $T(\varphi) g_* f_* = 1$, se concluye que $f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))$ es biyectivo. □

Corolario 2.3.3 *Sean X, Y espacios conexos por caminos, del mismo tipo de homotopía. Entonces $\pi_n(X, x) \cong \pi_n(Y, y)$, para todo $x \in, y \in Y, n \geq 0$*

Corolario 2.3.4 *Si X es un espacio contráctil, entonces $\pi_n(X, x) \cong 0$, para todo $x \in X, n \geq 0$.*

Veamos ahora una propiedad muy útil para los espacios recubridores. Sabemos que dada $p : X \to Y$ aplicación recubridora entonces tenemos que $p_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, p(x_0))$ es un monomorfismo. Por lo que la generalización de este resultado es

Teorema 2.3.3 *Sea $p : \tilde{X} \to X$ una aplicación recubridora. Entonces, fijado $\tilde{x_0} \in \tilde{X}$, se tiene $p_* = \pi_n(p) : \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x_0}) \to \pi_n(X, p(\tilde{x_0}))$ es isomorfismo para $n \geq 2$ y monomorfismo para $n = 1$.*

Demostración.

- Veamos que si $n \geq 2$, entonces $\pi_n(p)$ es epimorfismo. En este caso, si $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ y $[f] \in \pi_n(X, x_0)$, tenemos la siguiente situación:
  S^n es conexo y localmente conexo por caminos. Además, como $n \geq 2$, la esfera S^n es simplemente conexa, por lo que $f_*(\pi_1(S^n, s_0)) = f_*(0) = 0 \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Entonces, por el teorema de elevación de aplicaciones arbitrarias a un espacio recubridor Teorema 1.1.4, existe $\tilde{f} : (S^n, s_0) \to \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, elevación de f por p.

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[d, "p"] \\ (S^n, s_0) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

  Así, $[\tilde{f}] \in \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ y $\pi_n(p)([\tilde{f}]) = [p\tilde{f}] = [f]$. Por tanto $\pi_n(p)$ es sobre.
- Veamos ahora que $\pi_n(p)$ es inyectivo para $n \geq 1$. Sean $[f_1], [f_2] \in \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ tales que existe una homotopía $H : pf_1 \simeq pf_2$ rel $\{s_0\}$. Se considera el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "i_0"'] & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ S^n \times I \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] \arrow[r, "H"'] & X \end{tikzcd}$$

  Entonces, por el teorema de elevación de homotopías Teorema 1.1.3, existe $\tilde{H} : S^n \times I \to \tilde{X}$ continua tal que $p\tilde{H} = H$ y $\tilde{H}i_0 = f_1$. El siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[d, "p"] \\ (I, 0) \arrow[ur, "\tilde{H}(s_0,-)", "c_{\tilde{x}_0}"'] \arrow[r, "c_{x_0}"'] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

  Luego $c_{\tilde{x}_0}$ y $\tilde{H}(s_0, -)$ son elevaciones de c_{x_0}. Por la unicidad de elevación de caminos Teorema 1.1.2, tenemos que debe ser $\tilde{H}(s_0, -) = c_{\tilde{x}_0}$, y por tanto $\tilde{H}$

es una homotopía punteada.

Por otro lado, el siguiente diagrama también es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{x_0}) \arrow[d, "p"] \\ (S^n, s_0) \arrow[ur, "\tilde{H}i_1"] \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[r, "pf_2"'] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

De donde $\tilde{H}i_1$ y f_2 son elevaciones de pf_2. Además, como $(pf_2)_*(\pi_1(S^n, s_0)) = p_*((f_2)_*(\pi_1(S^n, s_0)) \subset p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, podemos aplicar de nuevo el teorema 1.1.4, por tanto $\tilde{H}i_1 = f_2$. Es decir, $\tilde{H} : f_1 \simeq f_2$ rel $\{s_0\}$, y por tanto p_* es inyectiva. □

Proposición 2.3.1 *Sean $(X, x_0), (Y, y_0)$ espacios punteados. Entonces, existe para cada $n \geq 1$, un isomorfismo de grupo tal que:*

$$\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)$$

Demostración. Denotamos por $p_X : X \times Y \to X$ y $p_Y : X \times Y \to Y$ a las proyecciones canónicas sobre el primer y segundo factor, respectivamente. Entonces obtenemos los homomorfismos $(p_X)_* : \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_n(X, x_0)$ y $(p_Y)_* : \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_n(Y, y_0)$. Así, definimos

$$\varphi : \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)$$

como $\varphi = ((p_X)_*, (p_Y)_*)$. Es decir, $\varphi([f]) = ((p_X)_*([f]), (p_Y)_*([f])) = ([p_X f], [p_Y f])$, $\forall [f] \in \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0))$.

- Evidentemente, φ es homomorfismo de grupos.
- φ es sobre: Si $[f_1] \in \pi_n(X, x_0)$ y $[f_2] \in \pi_n(Y, y_0)$, sean $f_1 : (S^n, s_0) \to (X, x_0)$ y $f_2 : (S^n, s_0) \to (Y, y_0)$ los correspondientes representantes. Entonces, por la propiedad universal del pullback, existe $f =< f_1, f_2 >: (S^n, s_0) \to (X \times Y, (x_0, y_0))$, única aplicación continua punteada tal que $p_X f = f_1$ y $p_Y f = f_2$. Por tanto, $\varphi([f]) = ([f_1], [f_2])$.
- φ es inyectiva: si $[f], [g] \in \pi_n(X \times Y, (x_0, y_0))$ con $\varphi([f]) = \varphi([g])$, entonces existen homotopías punteadas F $: p_X f \simeq p_X g$ rel $\{s_0\}$ y $G : p_Y f \simeq p_Y g$ rel $\{s_0\}$. Es sencillo comprobar que $H = \langle F, G \rangle : S^n \times I \to X \times Y$ es una homotopía punteada tal que $H : f \simeq g$ rel $\{s_0\}$. □

3

Grupos de homotopía de las esferas

Pese a que el concepto en origen es sencillo, el cálculo de grupos de homotopía de un espacio es en realidad una tarea compleja. Incluso para el caso de la esfera S^2 se desconocen muchos de sus grupos de homotopía, lo cual es indicativo de la dificultad que encierra el tema en el caso general.

Comenzamos el capítulo definiendo el concepto de fibración. Las fibraciones son una herramienta imprescindible para el cálculo de los grupos de homotopía de varios espacios, a través de la sucesión exacta larga de grupos que generan. En el caso concreto de la conocida como fibración de Hopf, esta sucesión se usará para obtener ciertos casos particulares de grupos de homotopía de las esferas.

3.1. Fibraciones

En los cursos de topología es habitual estudiar el problema del levantamiento de funciones continuas en el contexto de los espacios recubridores. El concepto de fibración generaliza el de aplicación recubridora, y será clave para introducir sucesiones exactas de grupos de homotopía.

Definición 3.1.1 *Se dice que una aplicación continua $p : E \to B$ verifica la propiedad de elevación (o levantamiento) de homotopía (PLH) respecto de un espacio X si para toda aplicación continua $f : X \to E$ y toda homotopía $G : IX \to B$ verificando $Gi_0 = pf$ existe una homotopía $F : IX \to E$ tal que $Fi_0 = f$ y $pF = G$, donde i_0 denota la inclusión en la tapa inferior del cilindro.*

Definición 3.1.2 *Se dice que $p : E \to B$ verifica la propiedad de elevación de homotopia absoluta (PLHA) cuando p verifique PLH respecto de cualquier espacio X.*

Definición 3.1.3 *Una aplicación continua $p : E \to B$ se dice fibración (o fibración de Hurewicz) cuando verifica PLHA.*

Si B es un espacio punteado con punto base b_0, el espacio $F = p^{-1}(b_0)$ es denominado fibra de p. La fibra se puede obtener mediante el siguiente pull back:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ \{b_0\} \arrow[r, "c_{b_0}"'] & B \end{tikzcd}$$

Definición 3.1.4 *Una fibración de Serre es una aplicación continua que verifica la propiedap (PHL) respecto a los discos $D^n, \forall n \geq 0$.*

Proposición 3.1.1 *La inducida $\bar{p}$ en un pull back por una fibración p es también una fibración.*

Demostración. Sea $A \times_B E$ el pull back de una aplicación continua $f : A \to B$ y una fibración $p : E \to B$. Si nos ponemos en las hipótesis de PLH para $\bar{p}$, tenemos el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & A \times_B E \arrow[d, "\bar{p}"] \\ X \times I \arrow[r, "H"'] & A \end{tikzcd}$$

Componiendo el anterior cuadrado con el correspondiente al push out $A \times_B E$, se obtiene un nuevo cuadrado conmutativo que permite usar PLH para p :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\bar{f}g"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "fH"'] \arrow[ur, "G'"'] & B \end{tikzcd}$$

Y usando la propiedad universal del pull back $A \times_B E$, se obtiene la homotopía $G = \langle H, G' \rangle$, que es la buscada

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[dr, "G"] \arrow[drr, bend left, "G'"] \arrow[ddr, bend right, "H"'] & & \\ & A \times_B E \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\bar{p}"'] & E \arrow[d, "p"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Corolario 3.1.1 *Las proyecciones $p_1 : X \times Y \to X$ y $p_2 : X \times Y \to Y$ son fibraciones.*

Demostración. Toda aplicación continua cuyo codominio es un espacio unipuntual es fibración, ya que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & X \arrow[d, "j_{*X}"] \\ A \times I \arrow[r, "j_{*A\times I}"] & * \end{tikzcd}$$

donde $j_{*A\times I}, j_{*X}$ denotan las aplicaciones constantes.
Tenemos que $G : A \times I \to X$, definida por $G(a,t) = g(a)$, es una aplicación continua que hace conmutar los dos triángulos $Gi_0 = g$ y $j_{*X}G = j_{*A\times I}$.

En consecuencia, teniendo en cuenta que el producto $X \times Y$ coincide con el pull back $X \times_* Y$ y por la proposición 3.1.1 se concluye el resultado. □

Proposición 3.1.2 *Si denotamos por (PX, c_{x_0}) el espacio de caminos punteados de un espacio punteado (X, x_0), la aplicación $e_1 : PX \to X$ es una fibración con fibra ΩX.*

Demostración. Consideremos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & PX \arrow[d, "e_1"] \\ Y \times I \arrow[r, "G"] & X \end{tikzcd}$$

Definimos $H : Y \times I \times I \to X$ por:

$$H(y,t,s) = \begin{cases} f(y)(s(t+1)), & 0 \le s \le \frac{1}{t+1} \\ G(y, s(t+1)-1), & \frac{1}{t+1} \le s \le 1 \end{cases}$$

Continua por lema 1.1.1. Por la proposición 1.2.1 tenemos que $\tilde{H} : Y \times I \to X^I$ definida por $\widetilde{H}(y,t)(s) = H(y,t,s)$ es también continua. Además $\widetilde{H}(y,t)(0) = H(y,t,0) = f(y)(0) = x_0$, de donde $\widetilde{H}(Y \times I) \subset PX$ y $\widetilde{H} : Y \times I \to PX$ es continua y cumple que $e_1\widetilde{H} = G$ y $\widetilde{H}i_0 = f$. Además, tenemos que

$$e_1^{-1}(\{x_0\}) = \{\omega \in PX/\omega(1) = x_0\} = \left\{\omega \in X^I/\omega(0) = \omega(1) = x_0\right\} = \Omega X$$

3.2. Sucesiones exactas

En primer lugar daremos la noción de sucesión exacta en la categoría Top_* y a través de una fibración podremos construir sucesiones exactas de espacios topológicos que bajo ciertas condiciones, darán lugar a sucesiones exactas de grupos de homotopía.

Definición 3.2.1 *Una sucesión* $(A, a_0) \xrightarrow{f} (B, b_0) \xrightarrow{g} (C, c_0)$ *en* Set_**, se dice exacta cuando* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$*, donde* $\mathrm{Ker}(g) = g^{-1}(\{c_0\})$.

Nota 3.2.1 *Si* A, B, C *son grupos, con neutros los puntos base, y* f, g *son homomorfismos, entonces esta noción de exactitud coincide con la usual de grupos.*

Se dice que una sucesión larga

$$\ldots \to (A_{k-1}, a_{k-1}) \xrightarrow{f_{k-1}} (A_k, a_k) \xrightarrow{f_k} (A_{k+1}, a_{k+1}) \to \ldots$$

en Set_*, es exacta cuando $\mathrm{Im}\,(f_{i-1}) = \mathrm{Ker}\,(f_i)$ para todo i.

Definición 3.2.2 *Una sucesión* $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$ *en* Top_* *se dice exacta si la sucesión de conjuntos punteados*

$$[W, w_0; X, x_0] \xrightarrow{f_*} [W, w_0; Y, y_0] \xrightarrow{g_*} [W, w_0; Z, z_0]$$

es exacta, para todo espacio punteado (W, w_0).

Definición 3.2.3 *Sea* $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *continua punteada. Se define la fibra homotópica de* f, P_f*, mediante el pull back en* Top_**:*

$$\begin{tikzcd}
(P_f, *) \arrow[r, "p_{PY}"] \arrow[d, "f_1"'] & (PY, c_{y_0}) \arrow[d, "e_1"] \\
(X, x_0) \arrow[r, "f"] & (Y, y_0)
\end{tikzcd}$$

Donde, $P_f = \{(x, \omega) \in X \times PY / f(x) = \omega(1)\}$*, siendo el punto base* $* = (x_0, c_{y_0})$*. Las inducidas en el pull back son las proyecciones en las respectivas componentes.*

Proposición 3.2.1 *Sea* $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *una aplicación continua punteada. Si* $g : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ *es también continua punteada entonces* $fg \simeq 0$ *si y sólo si existe* $F : (Z, z_0) \to (P_f, *)$ *en* Top_**, tal que* $f_1 F = g$.

Demostración. Supongamos que $fg \simeq 0$. Entonces existe $H : (Z, z_0) \to (PY, c_{y_0})$ tal que $fg = e_1 H$. Entonces, existe $F =< g, H >: (Z, z_0) \to (P_f, *)$, que viene dada por $F(z) = (g(z), H(z))$. Evidentemente, $f_1 F = g$.

Recíprocamente, sea $F : (Z, z_0) \to (P_f, *)$ tal que $f_1 F = g$. Se define $H = p_{PY} F : Z \to PY$. Entonces $e_1 H = e_1 p_{PY} F = f f_1 F = fg$. □

Proposición 3.2.2 *Si* $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *en* Top_**, entonces la siguiente sucesión es exacta:*

$$(P_f, *) \xrightarrow{f_1} (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0)$$

Demostración. Veamos que la sucesión

$$[W, w_0; P_f, *] \xrightarrow{(f_1)_*} [W, w_0; X, x_0] \xrightarrow{f_*} [W, w_0; Y_0, y_0]$$

es exacta para cualquier espacio punteado (W, w_0).

- $\ker(f_*) \subset \operatorname{im}((f_1)_*)$: Si $[h] \in \ker(f_*)$ entonces $fh \simeq 0$. Por proposición 3.2.1 existe $F : (W, w_0) \to (P_f, *)$ tal que $f_1 F = h$. Así, $(f_1)_*([F]) = [f_1 F] = [h]$.
- $\operatorname{im}((f_1)_*) \subset \ker(f_*)$: Como $ff_1 = e_1 p_{PY}$, por la proposición 1.3.3 se tiene que $ff_1 \simeq 0$. Se sigue que $(ff_1)_* = f_*(f_1)_* = c_*$ □

Corolario 3.2.1 *Si $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ es continua punteada, la siguiente sucesión es exacta en Top_*:*

$$\ldots \to (P_{f_2,*}) \xrightarrow{f_3} (P_{f_1,*}) \xrightarrow{f_2} (P_{f,*}) \xrightarrow{f_1} (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0)$$

Veremos que es posible expresar esta sucesión en Top_* sólo considerando X, Y, P_f y sus espacios de lazos.

Lema 3.2.1 *Sea $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ en Top_* Entonces la aplicación $v : (\Omega Y, c_{so}) \to (P_{f_1}, *)$, definida como $v(\beta) = (x_0, \beta, c_{x_0})$, es una equivalencia de homotopía punteada.*

Demostración. Se da a continuación una idea de la demostración. Se definen $m : (P_{f_1}, *) \to (\Omega Y, c_{y_0})$ por $m(x, \beta, \alpha) = \beta * (\overline{f\alpha})$, y $H : \Omega Y \times I \to \Omega Y$ como

$$H(\beta, t)(s) = \begin{cases} \beta\left(\frac{2s}{t+1}\right), & 0 \leq s \leq \frac{t+1}{2} \\ y_0, & \frac{t+1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Se comprueba fácilmente que $H : mv \simeq id$ rel $\{c_{y_0}\}$. Finalmente, se define $K : P_{f_1} \times I \to P_{f_1}$ como $K(x, \beta, \alpha, t) = (\alpha(t), \gamma(\beta, \alpha, t), \alpha_t)$, donde $\alpha_t(s) = \alpha(ts)$ y

$$\gamma(\beta, \alpha, t)(s) = \begin{cases} \beta(s(2-t)), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2-t} \\ f\alpha(s(t-2)+2), & \frac{1}{2-t} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Por el lema de continuidad y la ley exponencial, γ es continua, y se comprueba que $K : vm \simeq \mathrm{id}\ \mathrm{rel}\{*\}$. □

Nota 3.2.2 *Si en el lema anterior se sustituye la aplicación f por $f_1 : P_f \to X$, se obtiene una equivalencia de homotopía punteada $(\Omega X, c_{x_0}) \xrightarrow{v'} (P_{f_2}, *)$.*

Proposición 3.2.3 *Si $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ es una aplicación continua y punteada, la siguiente sucesión es exacta en Top_*:*

$$(\Omega X, c_{x_0}) \xrightarrow{\Omega f} (\Omega Y, c_{y_0}) \xrightarrow{\rho} (P_f, *) \xrightarrow{f_1} (X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0)$$

donde $\rho = f_2 v : (\Omega Y, c_{y_0}) \to (P_f, *)$.

Demostración. Obsérvese que $\rho(\beta) = (x_0, \beta)$, para todo $\beta \in \Omega Y$. Tenemos que el siguiente diagrama conmuta homotópicamente:

$$\begin{tikzcd}
(P_{f_2}, *) \arrow[r, "f_3"] & (P_{f_1}, *) \arrow[r, "f_2"] & (P_f, *) \\
(\Omega X, c_{x_0}) \arrow[r, "\Omega f"] \arrow[u, "v'u", "\cong"'] & (\Omega Y, c_{y_0}) \arrow[r, "p"] \arrow[u, "\cong", "v"'] & (P_f, *) \arrow[u, "\cong", "1_{P_f}"']
\end{tikzcd}$$

donde $u : \Omega X \to \Omega X$ es el inverso homotópico del H-grupo ΩX, definido por $u(\alpha) = \bar{\alpha}$ tal que $u^2 = 1$, por lo que u es un isomorfismo en Top_*, con inverso $u^{-1} = u$.
El cuadrado de la derecha del diagrama conmuta trivialmente. Además $v\Omega f \simeq_F f_3 v'u$ rel $\{c_{x_0}\}$, donde $F : \Omega X \times I \to P_f$ definido por $F(\alpha, t) = (\alpha(1-t), f\alpha_{1-t}, (\bar{\alpha})_t)$, con $\alpha_t(s) = \alpha(st)$ Finalmente, la exactitud en la fila inferior es deducida de la exactitud de la fila superior. □

Lema 3.2.2 *Si la sucesión* $(X, x_0) \stackrel{f}{\to} (Y, y_0) \stackrel{f'}{\to} (Z, z_0)$ *es exacta, entonces también lo es*

$$(\Omega X, c_{x_0}) \stackrel{\Omega f}{\to} (\Omega Y, c_{y_0}) \stackrel{\Omega f'}{\to} (\Omega Z, c_{z_0})$$

Demostración. Dado un espacio punteado (W, w_0), la conmutatividad del siguiente diagrama y la exactitud de la fila superior implica el resultado:

$$\begin{tikzcd}
{[\Sigma W, *; X, x_0]} \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\cong"'] & {[\Sigma W, *; Y, y_0]} \arrow[r, "f'_*"] \arrow[d, "\cong"] & {[\Sigma W, *; Z, z_0]} \arrow[d, "\cong"] \\
{[W, w_0; \Omega X, c_{x_0}]} \arrow[r, "(\Omega f)_*"] & {[W, w_0; \Omega Y, c_{y_0}]} \arrow[r, "(\Omega f')_*"] & {[W, w_0; \Omega Z, c_{z_0}]}
\end{tikzcd}$$

□

Corolario 3.2.2 *Si* $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *es continua y punteada, entonces la siguiente sucesión es exacta en* Top_* *:*

$$\cdots \stackrel{\Omega^2 f}{\to} \left(\Omega^2 Y, *\right) \stackrel{\Omega\rho}{\to} (\Omega P_f, *) \stackrel{\Omega f_1}{\to} (\Omega X, c_{x_0}) \stackrel{\Omega f}{\to} (\Omega Y, c_{y_0}) \stackrel{\rho}{\to} (P_f, *) \stackrel{f_1}{\to} (X, x_0) \stackrel{f}{\to} (Y, y_0)$$

A esta sucesión se le denomina sucesión exacta de Puppe asociada a f*.*

A continuación veremos que toda fibración origina una sucesión exacta de grupos de homotopía.

Lema 3.2.3 *Si* $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ *es una fibración, entonces la fibra* $F = p^{-1}(\{b_0\})$ *y la fibra homotópica* $P_p = \{(x, \omega) \in E \times PB / p(x) = \omega(1)\}$ *tienen el mismo tipo de homotopía.*

Demostración. Observamos que $F = p^{-1}(\{b_0\}) \subset E$. Considerando las aplicaciones $i : F \to E$ la inclusión y $\omega_0 : F \to PB$ el camino constante en b_0 en el pull back de la fibra homotópica P_p, se obtiene la aplicación continua y punteada $\lambda : F \to P_p$ definida por $\lambda(x) = (x, \omega_0)$. Vamos a buscar un inverso homotópico para λ. Definimos $G : P_p \times I$ por $G(x, \omega, t) = \omega(1-t)$, que es continua. Consideramos el cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} P_p \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ P_p \times I \arrow[r, "G"] \arrow[ur, "\tilde{G}"] & B \end{tikzcd}$$

Como p es fibración, existe una elevación $\tilde{G} : P_p \times I \to E$. En particular, $p\tilde{G}(x, \omega, 1) = G(x, \omega, 1) = w(0) = b_0$. Se define la inversa homotópica $\gamma = \tilde{G}_{i_1}$. Se tiene que $\tilde{G}(\lambda \times id) : 1 \simeq \gamma\lambda$, y además se define la aplicación $H' : P_p \times I \to P_p$ como $H'(x, \omega, t) = (\tilde{G}(x, \omega, t), J(x, \omega, t))$, donde $J(x, \omega, t)(s) = \omega(s(1-t))$. Finalmente, $H' : id \simeq \lambda\gamma$. $\square$

Teorema 3.2.1 *Para toda fibración $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ con fibra F existe una sucesión exacta:*

$$\ldots \pi_1(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\delta} \pi_0(F, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B, b_0)$$

donde $i : F \to E$ es la inclusión

Demostración. Como $\lambda : F \to P_p$, definida en la demostración del lema 3.2.3, es una equivalencia de homotopía, se tiene que

$$\lambda_* : \pi_n(F, e_0) = [(S^n, s_0), (F, e_0)] \to \pi_n(P_p, *) = [(S^n, s_0), (P_p, *)]$$

es un isomorfismo para todo $n \geq 0$. Consideramos ahora la sucesión exacta de Puppe Corolario 3.2.2 asociada a la fibración p :

$$\ldots \xrightarrow{\Omega\rho} \Omega P_p \xrightarrow{\Omega p_1} \Omega E \xrightarrow{\Omega p} \Omega B \xrightarrow{\rho} P_p \xrightarrow{p_1} E \xrightarrow{p} B$$

Aplicamos el funtor $[S^0, s_0, -] : hTop_* \to Set_*$, generando grupos de homotopía, y como la fibra F y la fibra homotópica P_p tienen el mismo tipo de homotopia, se obtiene la sucesión del enunciado del teorema, con $\delta = (\lambda_*)^{-1} \rho_* \Upsilon$. La exactitud se prueba teniendo en cuenta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} {[S^0, s_0; \Omega^n B, \omega_0]} \arrow[r, "(\Omega^{n-1}p)_*"'] & {[S^0, s_0; \Omega^{n-1} P_p, *]} \arrow[r, "(\Omega^{n-1}p_1)_*"'] & {[S^0, s_0; \Omega^{n-1} E, \omega_0]} \\ {[S^{n-1}, s_0; \Omega B, \omega_0]} \arrow[r, "p_*"'] \arrow[u, "\cong"', "\Upsilon^{n-1}"] & {[S^{n-1}, s_0; P_p, (e_0, \omega_0)]} \arrow[r, "(p_1)_*"'] \arrow[u, "\cong"', "\Upsilon^{n-1}"] & {[S^{n-1}, s_0; E, e_0]} \arrow[u, "\cong"', "\Upsilon^{n-1}"] \\ {[S^n, s_0; B, b_0]} \arrow[r, "\delta"'] \arrow[u, "\cong"', "\Upsilon"] & {[S^{n-1}, s_0; F, e_0]} \arrow[r, "i_*"'] \arrow[u, "\cong"', "\lambda_*"] & {[S^{n-1}, s_0; E, e_0]} \arrow[u, "\cong"', "1"] \end{tikzcd}$$

$\square$

3.3. CW-complejos

Un CW complejo es un espacio Hausdorff construido pegando celdas sucesivamente en distintas dimensiones. Todo poliedro es un caso particular de CW complejo; además, en la mayoría de los casos, se puede obtener el CW complejo con un número menor de celdas que de símplices.

En esta sección se introducirá el concepto de CW-complejo y se enunciará algunas de sus propiedades básicas, las demostraciones de estas se pueden encontrar en [1, sección 1.5]. Además se verá que la esfera S^n es un ejemplo de CW-complejo, crucial para poder aplicar en la siguiente sección el teorema de Hurewicz.

Definición 3.3.1 *Un CW complejo X es un espacio Hausdorff junto con una sucesión de subespacios de X, llamados esqueletos, cuya unión es X :*

$$X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \cdots \subseteq X^n \subseteq X^{n-1} \subseteq \cdots$$

verificando dos condiciones:

1. *El n-esqueleto X^n se define inductivamente de la siguiente manera: Sea X^0 una unión discreta de puntos no vacía, llamados vértices. Suponemos la existencia de X^{n-1}, obtenemos el espacio X^n de la siguiente forma:*
   Sean las aplicaciones $i : \coprod_{\beta\in B} S^{n-1}_\beta \to \coprod_{\beta\in B} E^n_\beta$ la inclusión de la unión disjunta de esferas en la unión disjunta de discos y $\phi_\beta : S^{n-1}_\beta \to X^{n-1}$, donde B es un conjunto de indices, y donde $S^{n-1}_\beta = S^{n-1}$ y $E^n_\beta = E^n$. Luego, la aplicación pegamiento $\phi : \coprod_{\beta\in B} S^{n-1}_\beta \to X^{n-1}$. Se obtiene el diagrama push out:

$$\begin{tikzcd} \coprod_{\beta\in B} S^{n-1}_\beta \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "i"'] & X^{n-1} \arrow[d, "j_{n-1}"] \\ \coprod_{\beta\in B} E^n_\beta \arrow[r, "\bar{\phi}"'] & X^{n-1} \cup \coprod_{\beta\in B} E^n_\beta \end{tikzcd}$$

   y se define $X^n = X^{n-1} \cup_\phi \coprod_{\beta\in B} E^n_\beta$. También se denota la aplicación de pares $\Phi^n_\beta : \left(E^n_\beta, S^{n-1}_\beta\right) \to (X^n, X^{n-1})$, llamada aplicación característica, que es la composición de la inclusión $E^n_\beta \to \coprod_{\beta\in B} E^n_\beta$ y la aplicación cociente $\coprod_{\beta\in B} E^n_\beta \to X^{n-1} \cup_\phi \coprod_{\beta\in B} E^n_\beta$. El subconjunto $\Phi^n_\beta\left(E^n_\beta\right) \subseteq X^n \subseteq X$ se denomina n-celda cerrada o n-celda y se denota por $\bar{e}^n_\beta$, y a la imagen $\Phi_\beta\left(E^n_\beta - S^{n-1}_\beta\right)$, denotada por e^n_β, se le llama n - celda abierta. Nótese que $j : X^{n-1} \to j\left(X^{n-1}\right)$ es un homeomorfismo, es decir, $X^{n-1} \cong j\left(X^{n-1}\right) \subset X^n$, de este modo se puede interpretar que $X^{n-1} \subset X^n$.
2. *El CW complejo $X = \bigcup_i X^i$ se le dota de la topología débil con respecto a la familia $\left\{e^n_\beta\right\}$ de todas las n-celdas. Por tanto, $U \subseteq X$ es abierto (respectivamente, cerrado) si y sólo si $U \cap \bar{e}^n_\beta$ es abierto (respectivamente, cerrado) en $\bar{e}^n_\beta$, para cada celda cerrada $\bar{e}^n_\beta$.*

A continuación se enuncia algunas propiedades básicas de los CW-complejos

Proposición 3.3.1 *Sea X un CW-complejo. Entonces,*

- *X es unión disjunta de todas sus celdas abiertas.*
- *Si C es un subconjunto compacto de X, entonces C está contenido en una unión finita de celdas abiertas.*
- *Si Y es un CW-complejo, entonces $X \times Y$ es CW-complejo.*

Veamos ahora algunos ejemplos de CW-complejos:

Ejemplo 3.3.1 *Un CW complejo 1-dimensional es un grafo no orientado. En X^0 se tienen los vértices, y a través de $\phi : \bigcup_{\beta \in B} S^0_\beta \to X^0$ se consigue trazar segmentos entre los vértices como uno desee.*

Ejemplo 3.3.2 *La esfera S^n es un CW complejo donde se toma un vértice y una única n-celda, es decir, S^n es el push out de los morfismos $E^n \leftarrow S^{n-1} \longrightarrow \{*\}$*

Ejemplo 3.3.3 *Otra posible estructura de CW-complejo sobre la esfera S^n es la obtenida inductivamente por el siguiente push out, tomando $X^0 = \{*\}$*

$$\begin{tikzcd}
S_2^{n-1} \coprod S_1^{n-1} \arrow[r, "1 \coprod 1"] \arrow[d, "i"'] & X^{n-1} = S^{n-1} \arrow[d] \\
E_1^n \coprod E_2^n \arrow[r] & X^n = S^n
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 3.3.4 *Una estructura de CW-complejo para el toro $S^1 \times S^1$ puede ser la siguiente: Se toma una 0-celda $X^0 = \{*\}$ y se toman dos 1-celdas con aplicación de pegamiento constante, para obtener X^1 como el wedge de dos circunferencias, y una única 2-celda, con aplicación de pegamiento $\phi(S^1) \to X^1$ definida de la siguiente manera: se divide S^1 en cuatro partes separadas por los ángulos: $0, \pi/2, \pi, (3\pi)/2$ y se rellena X^1 en el orden $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}^{-1}, \vec{b}^{-1}$. El resultado es $X^2 \cong S^1 \times S^1$.*

3.4. Grupos de las esferas

En esta sección utilizaremos algunos de los resultados anteriores para abordar uno de los objetivos de este trabajo, los grupos de homotopía de esferas. Toda esfera de cualquier dimensión es conexa por caminos, por lo que dados dos enteros positivos n, k los grupos $\pi_k(S^n, s)$ y $\pi_k(S^n, \hat{s})$ son isomorfos para todo $s, \hat{s} \in S^n$. Es por esto que para simplificar la notación de ahora en adelante escribiremos $\pi_k(S^n)$ para referirnos al k-ésimo grupo de homotopía de S^n.

Para empezar con el estudio de los grupos de homotopía en esferas trataremos primero el caso sencillo $\pi_k(S^n)$ para $k \leq n$, apoyándonos en algunos resultados vistos anteriormente.

Definición 3.4.1 *Sea* (X, x_0) *un espacio punteado. Se dice que* X *es* n*-conexo si* $\pi_r(X, x_0) = 0 \ \forall r \in \{1, 2 \ldots, n\}$.

Nota 3.4.1 X *es 0-conexo si y sólo si* X *es conexo por caminos.*

Teorema 3.4.1 *(de Hurewicz). Si* X *es un CW-complejo (n-1)-conexo entonces el homomorfismo de Hurewicz* $h_X : \pi_q(X) \to H_q(X)$ *es isomorfismo para* $2 \leq q \leq n$ *y epimorfismo para* $q = n + 1$. *Para* $q = 1$ *se tiene un isomorfimo*

$$\pi_1(X)/\left[\pi_1(X), \pi_1(X)\right] \to H_1(X)$$

donde $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ *es el conmutador de* $\pi_1(X)$.

Sabemos que $(\mathbb{R}, \exp)$, recubridor universal de la esfera S^1, es contráctil. Aplicando el teorema 2.3.3 se concluye que:

$$\pi_n\left(S^1\right) = \mathbb{Z} \text{ si } n = 1 \qquad\qquad \pi_n\left(S^1\right) = 0 \text{ si } \neq 1$$

Para el siguiente lema haremos uso de algunos resultados de homología simpicial.

Lema 3.4.1 *Si* $k < n$ *entonces* $\pi_k(S^n) = 0$.

Demostración. Sea $[\alpha] \in \pi_k(S^n, s_0) = \left[S^k, s_0; S^n, s_0\right]$. Si consideramos que K y L son triangulaciones de S^k y S^n, respectivamente, es decir, $|K| = S^k, |L| = S^n$, entonces existe una aproximación simplicial $\alpha' : K^{(r)} \to L$, desde una subdivisión baricéntrica de K, tal que α' es homótopa a α como aplicación $S^k = |K| \to S^n = |L|$. [7, Teoremas 16.1 y Teorema 19.4]. Al ser simplicial, no puede llevar símplices de dimensión k en símplices de dimensión mayor, luego $\alpha' : S^k \to S^n$ no puede ser sobre. Sea $p \in S^n$ tal que $p \notin \alpha'\left(S^k\right)$. Entonces $\alpha'\left(S^k\right) \subset S^n - \{p\}$. Pero $S^n - \{p\}$ es contráctil. Luego $\alpha'\left(S^k\right)$ es contráctil en S^n, es decir, $\alpha' \simeq$ cte. Se concluye que $[\alpha] = [\alpha'] = [\text{ cte. }]$, y en consecuencia $\pi_k(S^n, s_0) = 0$. □

Corolario 3.4.1 *La esfera* S^n *es n - 1-conexa.*

Corolario 3.4.2 *Para todo entero* q *entre 1 y* n *se tiene que*

$$\pi_q(S^n) \cong H_q(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \ q = n \\ 0, \ 1 \leq q < n \end{cases}$$

La conjetura de Poincaré es quizá uno de los problemas más famosos de clasificación topológica, además de ser el único problema del milenio que ha sido resuelto hasta la actualidad. En 1904, Poincaré realizó la siguiente conjetura:

Toda variedad topológica M *tridimensional, cerrada y simplemente conexa es necesariamente homeomorfa a la esfera* S^3.

El planteamiento de este resultado surge a raíz de la siguiente caracterización de S^2 : la esfera S^2 es la única variedad cerrada bidimensional con grupo fundamental trivial. Teniendo en cuenta que la esfera S^3 también posee grupo fundamental trivial, tenía sentido plantearse la misma pregunta para dimensión 3. La prueba de esta conjetura es relativamente reciente, y fue dada por Grigori Perelman en el año 2003. En vista de que existen n-variedades cerradas y simplemente conexas con $n > 3$ que no son homeomorfas a la esfera S^n, en dimensiones superiores no podemos enunciar el análogo de dicha conjetura. Por ejemplo, sea $X = S^2 \times S^2$ una variedad de dimensión 4, compacta y conexa, luego es cerrada. Por el corolario anterior, el grupo fundamental

$$\pi_1(X) = \pi_1\left(S^2 \times S^2\right) \cong \pi_1\left(S^2\right) \times \pi_1\left(S^2\right) = 0 \times 0 = 0,$$

luego X es simplemente conexa. Sin embargo, X no es homeomorfa a la esfera S^4, pues poseen grupos de homotopía de orden 2 distintos

$$\pi_2\left(S^4\right) = 0 \quad , \quad \pi_2(X) = \pi_2\left(S^2 \times S^2\right) \cong \pi_2\left(S^2\right) \times \pi_2\left(S^2\right) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

La conjetura de Poincaré generalizada establece que toda variedad topológica M de dimensión n cerrada y homotópicamente equivalente a la esfera S^n es homeomorfa a dicha esfera. En 1961 Smale probó que la conjetura es cierta para variedades de dimensión n con $n > 4$, y en 1982 Freedman probó la conjetura para $n = 4$. Los autores citados recibieron la Medalla Fields: Smale en 1966, Freedman en 1986 y Perelman en 2006.

A continuación se introducirá el concepto de fibrado localmente trivial, además de enunciar algunos teorema clásicos, de los cuales se omitirán sus demostraciones ya que excederían el propósito de esta memoria.

Definición 3.4.2 *Un fibrado localmente trivial con fibra F, es una aplicación continua $p : E \to B$ tal que existe un recubrimiento abierto de $B, \mathcal{V}$, y homeomorfismos $\varphi_V : V \times F \to p^{-1}(V), V \in \mathcal{V}$, con $p\varphi_V(v,x) = v, \forall (v,x) \in V \times F$.*

Proposición 3.4.1 *Toda fibrado localmente trivial es una fibración de Serre. [2, Teorema 4.1, pág 65]*

Proposición 3.4.2 *En los espacios de CW-complejos la fibración de Serre y la fibración de Hurewicz son conceptos equivalentes. [1, Proposición 3.3.5]*

Teorema 3.4.2 *(de la suspensión de Freudenthal [1, pág 181]). Si X es un espacio $(n-1)$-conexo, con $n \geq 2$, entonces existe un homomorfismo F*

$$F : \pi_r(X) \to \pi_{r+1}(\Sigma X)$$

tal que F es un isomorfismo para $r < 2n - 1$ y un epimorfismo para $r = 2n - 1$.

Al comienzo de este capítulo comentamos algunos resultados básicos sobre los grupos de homotopía $\pi_k(S^n)$. En el caso $k \leq n$, como hemos mencionado anteriormente, todos estos grupos son conocidos. Sin embargo cuando $k > n$ esto no ocurre, y solo se ha llegado a conocer una cantidad finita de ellos. En este último caso se llegó pensar que los grupos de homotopía son triviales, como ocurre con los grupos de homología, pero gracias a Heinz Hopf se supo que esto no es así, ya que en 1935 demostró que el grupo $\pi_3(S^2)$ no es trivial definiendo una aplicación

$$h : S^3 \to S^2$$

que no es nulhomótopa. Dicha aplicación recibe el nombre de fibración de Hopf, y está definida de modo que cada punto de S^2 proviene de una circunferencia específica de S^3. En primer lugar, identificamos el espacio euclideo $\mathbb{R}^4$ con el plano complejo $\mathbb{C}^2$. Con esta identificación podemos redefinir la esfera como

$$S^3 = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\right\}.$$

Por otro lado, podemos identificar S^2 como la recta proyectiva $\mathbb{C}P^1$ [1, pág 96, Lema 3.4.4], es decir, el par de números complejos $[z_1, z_2]$ no nulos simultáneamente, con la relación de equivalencia, $[z_1, z_2] \sim [w_1, w_2]$ si y solo si $[z_1, z_2] = [\lambda w_1, \lambda w_2]$ con $\lambda \neq 0$. Luego la fibración de Hopf se define como

$$h(z_1, z_2) = [z_1, z_2]$$

Evidentemente es continua, además de que su imagen está contenida en S^2. Antes de probar que h es fibración, veamos que está bien definida. Para ello consideramos las esferas S^2 y S^3. Veamos ahora que efectivamente es un fibrado localmente trivial. Para ello, identificamos S^1 con el conjunto de números complejos de módulo 1, es decir, podemos redefinir la circunferencia como

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Luego tomamos los punto $x = [1, 0]$ y $y = [0, 1]$ de la esfera S^2 y consideramos los abiertos $U = S^2 \setminus \{x\}$ y $V = S^2 \setminus \{y\}$. Por lo que U y V forman un recubrimiento finito por abiertos de S^2. Además todo punto de U se puede representar como el par $[z, 1]$ con $z \in \mathbb{C}$. Por lo que podemos definir la aplicación,

$$\varphi_U([z, 1], \lambda) = \left(\frac{\lambda z}{\sqrt{z\overline{z} + 1}}, \frac{\lambda}{\sqrt{z\overline{z} + 1}}\right)$$

con $[z, 1] \in U$ y $\lambda \in S^1$. Además, se verifica que φ_U es un homeomorfismo de $U \times S^1$ en $h^{-1}(U)$ y $h\varphi_U(u, d) = u$ para todo $u \in U$ y $d \in S^1$. De manera análoga se prueba con el abierto V tomando,

$$\varphi_V([1, z], \lambda) = \left(\frac{\lambda}{\sqrt{z\overline{z} + 1}}, \frac{\lambda z}{\sqrt{z\overline{z} + 1}}\right)$$

Por lo que tenemos que h es un fibrado localmente trivial. Aplicando las proposiciones 3.4.1 y 3.4.2 tenemos que h es una fibración de Hurewicz.

Cabe destacar que dados dos puntos $(z_1, z_2), (w_1, w_2) \in S^3$ se cumple que si $h(z_1, z_2) = h(w_1, w_2)$, entonces $(z_1, z_2) = \lambda (w_1, w_2)$, donde $|\lambda|^2 = 1, \lambda \in \mathbb{C}$. La idea intuitiva de la implicación que tiene este hecho en el cálculo de las fibras de h es la que comentábamos anteriormente, cada punto de la esfera S^2 proviene de una única circunferencia de S^3, es por eso que puntos de una misma circunferencia tienen la misma imagen. Así,

$$h(z_1, z_2) = h(\lambda (w_1, w_2)) = h(\lambda w_1, \lambda w_2) = [\lambda w_1, \lambda w_2] = [w_1, w_2] = h(w_1, w_2)$$

En el siguiente enlace se muestra una animación para GeoGebra que desarrollé en la 3-esfera como una colección de circunferencias (las fibras) sobre puntos que describen una cierta trayectoria en el espacio base S^2.

https://www.geogebra.org/m/gtbs3u8f

Si construimos la sucesión exacta de homotopía de esta fibración obtenemos

$$\ldots \pi_3\left(S^1\right) \to \pi_3\left(S^3\right) \to \pi_3\left(S^2\right) \to \pi_2\left(S^1\right) \to \pi_2\left(S^3\right) \to \ldots$$

y teniendo en cuenta que $\pi_i(S^1) = 0$ para todo $i \geq 1$, obtenemos, para $i > 2$, fragmentos exactos del tipo

$$0 \to \pi_i\left(S^3\right) \to \pi_i\left(S^2\right) \to 0$$

Lo cual significa que $\pi_i(S^3) \cong \pi_i(S^2)\, \forall i > 2$.

Corolario 3.4.3 *El grupo de homotopía $\pi_3(S^2)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$*

Además, existen dos fibrados más en los que la fibra, espacio base y espacio total son esferas. Junto con el ya mencionado, forman lo que se conoce como fibraciones de Hopf:

$$S^1 \hookrightarrow S^3 \longrightarrow S^2 \qquad S^3 \hookrightarrow S^7 \longrightarrow S^4 \qquad S^7 \hookrightarrow S^{15} \longrightarrow S^8$$

Por lo que podemos dividir los grupos de homotopía de las esferas $\pi_k(S^n)$ en tres grandes bloques:

- Caso $k < n$: los grupos de homotopía son todos triviales.
- Caso $k = n$: los grupos de homotopía son todos isomorfos a $\mathbb{Z}$.
- Caso $k > n$: En este último se encuentran los resultados más complicados de calcular. Entre ellos $\pi_3(\mathbb{S}^2)$, que como hemos visto, se pudo obtener a través de la fibración de Hopf que este grupo no era trivial.

A pesar de la complejidad que presenta el caso $k > n$ en general, se han podido hallar resultados parciales importantes, como el siguiente, conocido como teorema de finitud de Serre [8].

Si k es distinto de $2n - 1$, entonces $\pi_k(S^n)$ es finito salvo cuando k=n, o cuando n par y $k = 2n - 1$. En este último caso, $\pi_k(S^n)$ es suma directa de $\mathbb{Z}$ con un grupo finito (véase por ejemplo $\pi_7(S^4)$ en la tabla 3.1).

El Teorema de suspensión de Freudenthal permite vincular esferas de dimensiones distintas. La tabla 3.1 que aparece a continuación refleja este hecho. Todos los grupos $\pi_k(\mathbb{S}^n)$ que se encuentran justo por debajo de la línea negra irregular son constantes a lo largo de las diagonales, y esto se debe a que todos ellos cumplen la relación $k < 2n - 1$, y por tanto $\pi_k(\mathbb{S}^n) \cong \pi_{k+1}(\mathbb{S}^{n+1})$. Estos grupos reciben el nombre de grupos de homotopía estables.

	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7	π_8
S^0	0	0	0	0	0	0	0	0
S^1	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0
S^2	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
S^3	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
S^4	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2^2$
S^5	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$
S^6	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
S^7	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$
S^8	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$

Tabla 3.1. Imagen de Wikipedia: Grupos de homotopía de las esferas

En concreto, se define el grupo de homotopía estable de orden k de la esfera S^n como $\pi_{n+k}(S^n)$, para $n > k+1$. Los grupos estables presentan características estructurales adicionales en relación con los inestables, y juegan un papel relevante en la clasificación de estructuras diferenciables en las esferas de dimensión superior a 4 [4].

Actualmente se han podido calcular los grupos de homotopía estables para valores de k menores de 62, y se ha podido obtener información bastante exhaustiva de la estructura de los mismos para $62 \leq k \leq 90$. La complejidad que surge al estudiar estos grupos ha requerido del uso de técnicas como teoría de homotopía motívica o la sucesión espectral de Adams. Abordar estos desarrollos con detalle excede del objetivo de esta memoria, aunque sin duda puede servir de motivación para seguir profundizando en el estudio y comprensión de los grupos de homotopía de las esferas. Como referencia para este estudio citamos el libro de Ravenel [9] así como el trabajo de Isaksen, Wang y Xu [3].

Bibliografía

[1] ARKOWITZ, Martin. *Introduction to Homotopy Theory.* New York : Springer Verlag, 2011.

[2] HU, Sze-Tsen. *Homotopy Theory.* Academic Press-New York and London 1959

[3] ISASKEN, Daniel C. ; WANG, Guozhen; XU, Zhouli. *Stable homotopy groups of spheres.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA 117, No. 40, 24757-24763 (2020).

[4] KERVAIRE, Michel A. ; MILNOR, John W. *Groups of homotopy spheres. I.* Ann. Math. 77, 504–537 (1963)

[5] KLINE, Morris. *El pensamiento mátematico de la Antiguüedad a nuestros días III.* Alianza editorial, 1992

[6] KOSNIOWSKI, Czes. *Topología Algebraica.* Reverté, D.L., 1985

[7] MUNKRES, James R. *Elements of Algebraic Topology.* Addison Wesley 1984

[8] SERRE, Jean-Pierre *Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens.* Ann. Math. 58, 258–294 (1953)

[9] RAVENEL, Douglas. C. *Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres.* Pure and Applied Mathematics, 121. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1986

[10] WILLARD, Stephen. *General Topology.* Addison-Wesley, 1970.

Higher Homotopy Groups

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Jorge de la Paz Abreu
Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0101241692@ull.edu.es

Abstract

Henri Poincaré defined the fundamental group in 1895 in his paper "Analysis situs" which lately started an impressive development of algebraic topology in the XX century. In this memory I intended to introduce an extension of the previous notion given by Cech and Hurewicz between 1931 and 1935, the higher homotopy groups, proving relevant properties of them.

1. Homotopy Gorup

Definition

Let be (X,x_0) a based topological space and n $\geq$ 1. Then the n-th homotopy group at x_0 is the set of homotopy classes,

$$\pi_n(X, x_0) = [S^n, s_0; X, x_0]$$

or equivalently we have the following definitions:

$$\pi_n(X, x_0) = [I^n, \delta I^n; X, x_0] \qquad \pi_n(X, x_0) = [S^0, s_0; \Omega^n X, c_{x_0}]$$

where δI^n denote the the boundary of I^n and Ω the loop space functor.

Properties

- $\pi_0(X, x_0)$ can be identified with the set of all path components of X, with the component containing x_0 as the basepoint.
- $\pi_n(X, x_0)$ is conmutaive for $n > 1$.
- $\pi_n(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(Y, y_0)$ for $n \geq 1$
- Let be $X \simeq Y$ then $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(Y, y_0)$ for $n \geq 1$
- If X is contractible then $\pi_n(X, x_0) = 0$ for $n \geq 1$
- $\pi_i(S^n, s_0) = \begin{cases} \mathbb{Z} \; if \; i = n \\ 0 \; if \; i < n \end{cases}$

2. Poincaré conjecture

In its original form, the Poincaré conjecture states that every simply connected closed three-manifold is homeomorphic to the three-sphere . The above results allow us to prove that this conjecture is false in dimension 4. Let be the four-manifold $S^2 \times S^2$. Furthermore, it is simply connected:

$$\pi_1(S^2 \times S^2) \cong \pi_1(S^2) \times \pi_1(S^2) = 0 \times 0 = 0,$$

However, it cannot be homeomorphic to S^4 because

$$\pi_2(S^4) = 0 \text{ and } \pi_2(S^2 \times S^2) \cong \pi_2(S^2) \times \pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

3. Hopf fibration

In 1931, Heinz Hopf described a continuous mapping from S^3 to S^2 in which each point of S^2 comes from a different circumference (the fiber) of S^3.This fiber bundle structure is denoted:

$$S^1 \hookrightarrow S^3 \to S^2$$

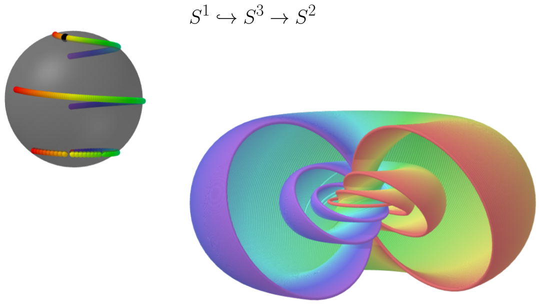

Figure 1: *Hopf fibration*

A consequence of this is the following exact sequence:

$$\ldots \pi_3\left(S^1\right) \to \pi_3\left(S^3\right) \to \pi_3\left(S^2\right) \to \pi_2\left(S^1\right) \to \pi_2\left(S^3\right) \to \ldots$$

Then, we have that:

$$\pi_n(S^3) \cong \pi_n(S^2), \, n > 2$$

So that

$$\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$$

In particular, the Hopf fibration belongs to a family of three fiber bundles in which the total space, base space, and fiber space are all spheres:

$$S^1 \hookrightarrow S^3 \longrightarrow S^2 \qquad S^3 \hookrightarrow S^7 \longrightarrow S^4 \qquad S^7 \hookrightarrow S^{15} \longrightarrow S^8$$

4. Homotopy groups of spheres

As a consequence of the Freudenthal suspension theorem, the homotopy groups $\pi_{n+k}(S^n)$ are independent of n for $n \geq k+2$. These are called the stable homotopy groups of spheres and have been computed for values of k up to 61.

	π_1	π_2	π_3	π_4	π_5	π_6	π_7	π_8	π_9	π_{10}	π_{11}	π_{12}	π_{13}	π_{14}
S^0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S^1	Z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S^2	0	Z	Z	Z_2	Z_2	Z_{12}	Z_2	Z_2	Z_3	Z_{15}	Z_2	Z_2^2	$Z_{12}\times Z_2$	$Z_{84}\times Z_2^2$
S^3	0	0	Z	Z_2	Z_2	Z_{12}	Z_2	Z_2	Z_3	Z_{15}	Z_2	Z_2^2	$Z_{12}\times Z_2$	$Z_{84}\times Z_2^2$
S^4	0	0	0	Z	Z_2	Z_2	$Z\times Z_{12}$	Z_2^2	Z_2^2	$Z_{24}\times Z_3$	Z_{15}	Z_2	Z_2^3	$Z_{120}\times Z_{12}\times Z_2$
S^5	0	0	0	0	Z	Z_2	Z_2	Z_{24}	Z_2	Z_2	Z_2	Z_{30}	Z_2	Z_2^3
S^6	0	0	0	0	0	Z	Z_2	Z_2	Z_{24}	0	Z	Z_2	Z_{60}	$Z_{24}\times Z_2$
S^7	0	0	0	0	0	0	Z	Z_2	Z_2	Z_{24}	0	0	Z_2	Z_{120}

Table 1: *Wikipedia: Homotopy groups of spheres*

The first two rows of this table are straightforward. The homotopy groups $\pi_i(S^0)$ of the 0-dimensional sphere are trivial for $i > 0$. Similarly, the homotopy groups $\pi_i(S^1)$ of the 1-sphere are trivial for $i > 1$. Beyond these two rows, the higher homotopy groups $(i > n)$ appear to be chaotic, but in fact there are many patterns, some obvious and some very subtle.
Recent developments [3] based on motivic homotopy theory and the Adams spectral sequence describe a computational method to calculate the stable homotopy groups. This yields a streamlined computation of the first 61 stable homotopy groups and gives information about the stable homotopy groups in dimensions 62 through 90.

References

[1] ARKOWITZ, Martin. *Introduction to Homotopy Theory*. New York : Springer Verlag, 2011.

[2] HU, Sze-Tsen *Homotopy Theory*. Academic Press-New York and London 1959

[3] ISASKEN, Daniel C. ; WANG, Guozhen; XU, Zhouli. *Stable homotopy groups of spheres.* Proc. Natl. Acad. Sci. USA 117, No. 40, 24757-24763 (2020).

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna