



**Sección de Matemáticas**  
Universidad de La Laguna

Mirian de la Peña Cabrera Reyes

*Epidemiología en Poblaciones  
Estructuradas por Edades*

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Matemáticas  
La Laguna, Junio de 2022

DIRIGIDO POR

*José Claudio Sabina de Lis*

*José Claudio Sabina de Lis*  
*Departamento de Análisis*  
*Matemático*  
*Universidad de La Laguna*  
*38200 La Laguna, Tenerife*

---

## Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi tutor, José C. Sabina de Lis, por ayudarme y aconsejarme en este proceso y permitirme descubrir nuevos aspectos de las matemáticas, sin él esto no hubiera sido posible.

A mis padres y a mi hermano, por su incondicional apoyo y cariño siempre. Gracias por no permitir que me rindiera y por ayudarme a conseguir mis metas.

A mis amigas por acompañarme durante estos años y hacer esta etapa más bonita.

Por último, agradezco a mi pareja, por todo su apoyo, cariño, paciencia y por permanecer a mi lado en los momentos buenos y malos de esta etapa y darme la fuerza que necesito para seguir luchando.

Mirian de la Peña Cabrera Reyes  
La Laguna, 9 de junio de 2022



---

## Resumen · Abstract

### *Resumen*

---

*La epidemiología se ocupa del estudio de la propagación de una enfermedad infecciosa en el seno de la población. Los modelos SIR (Susceptible, Infeccioso, Recuperado) y SIS son dos casos básicos de estudio en la teoría. En este trabajo se emplea en enfoque de las ‘poblaciones estructuradas por edades’ para analizar la dinámica de una epidemia basada en dichos modelos. Esto nos permite incorporar el factor ‘edad’ no sólo en las tasas de fertilidad  $\nu$  y mortalidad  $\mu$ , sino también en la ‘fuerza de la infección’  $\lambda$  y la tasa de recuperación  $\rho$ .*

**Palabras clave:** *Dinámica de Poblaciones, Epidemiología, Ecuaciones de Primer Orden, Transformada de Laplace, Estabilidad.*

### *Abstract*

---

*The study of the spread of an infectious disease within a population is the objective of epidemiology. The SIR (Susceptible, Infective, Recovered) and SIS models are two reference cases of study in the field. This work employs the approach of ‘populations structured by the age’ to discuss the dynamics of an epidemics according these models. This allows us to take into account the effect of age not only on fertility and mortality rates  $\nu$  and  $\mu$ , but also on the ‘force of infection’  $\lambda$ , as well as on the rate of recovery  $\rho$ .*

**Keywords:** *Population Dynamics, Epidemiology, First Order Equations, Laplace Transform, Stability.*



---

# Contenido

<b>Agradecimientos</b> .....	III
<b>Resumen/Abstract</b> .....	V
<b>Introducción</b> .....	IX
<b>1. Poblaciones estructuradas por edades</b> .....	1
1.1. Deducción de la ecuación .....	1
1.2. Análisis de la solución .....	4
1.3. Ecuación de renovación .....	6
1.4. Existencia y unicidad .....	9
1.5. Comportamiento asintótico .....	11
1.6. Estabilidad de la población .....	15
1.7. Efecto de los flujos migratorios .....	18
<b>2. Epidemiología</b> .....	23
2.1. El modelo SIR .....	24
2.2. El modelo SIS .....	27
2.3. El modelo SIR para poblaciones estructuradas por edades .....	28
2.4. El modelo SIS para poblaciones estructuradas por edades .....	30
2.5. Existencia y unicidad para el modelo SIS .....	31
2.6. Soluciones estacionarias .....	37
2.7. Comportamiento asintótico .....	39
<b>A. Apéndice</b> .....	41
A.1. Lema de Gronwall .....	41
A.2. Transformada de Laplace .....	41
A.2.1. Transformada de Fourier en $L^1$ .....	42
A.2.2. La transformada de Fourier en $L^2$ .....	44
A.2.3. Inversión de la transformada de Laplace .....	46

<b>Bibliografía</b> .....	49
<b>Poster</b> .....	51



---

## Introducción

Esta memoria se ocupa de la epidemiología en el marco de las poblaciones ‘estructuradas por edades’.

La descripción del estado y evolución de una especie animal es el objeto de la dinámica de poblaciones. En el caso de la especie humana este análisis corresponde a la demografía. El interés por contabilizar el número de individuos que conforman la población se remonta a las primeras civilizaciones. De hecho, en el siglo III de nuestra era se compiló en el imperio romano una tabla de mortalidad que seguía en uso a finales del siglo XVII ([7]). Sin embargo no es hasta mediados del XIX, en no poca medida debido a la influencia de Darwin, que surge la preocupación por el destino de otras comunidades biológicas. Su estudio recae en el relativamente moderno campo de la ecología. No está de más señalar que la potencial extinción de un gran número de especies constituye en la actualidad un problema internacional de primer orden.

En dinámica de poblaciones se sigue la pista del número de individuos  $u(t)$  como función del tiempo. Esta magnitud refleja el estado de la especie en ese instante, en la misma medida que la posición espacial y velocidad de un sistema de partículas definen su estado en mecánica clásica. Un modelo de población estructurada por edades es aquel que la describe en términos del número de individuos  $u(a, t)$  con edad  $a$  en el instante  $t$ . La inclusión de la variable edad  $a$ , una contribución reciente debida a A. Lotka en 1907 ([2]), responde al hecho incontestable de que los parámetros dinámicos, la fertilidad y mortalidad, dependen sensiblemente de  $a$ .

Por otra parte la epidemiología es una rama de la medicina que se ocupa de la propagación de enfermedades infecciosas en la población. Como disciplina matemática tiene un origen reciente en los trabajos de R. Ross (1911) sobre la malaria y de W. Kermack y A. McKendrick (1926–27) sobre el debut y desarrollo de algunas epidemias ([2]). Su objetivo es formular modelos que simulen la transmisión de la enfermedad. En condiciones normales la edad ejerce una influencia importante en la propagación, desarrollo y control de muchas enfermedades infecciosas. Las de perfil infantil (sarampión, paperas, rubeola, etc)

se desarrollan en los estratos jóvenes de la población, donde se concentran las campañas de vacunación. Otras, como la tuberculosis o el SIDA tienen especial incidencia sobre la edad adulta. Por otra parte, un aspecto clave en muchas enfermedades es la ‘edad de infección’ que mide el tiempo transcurrido desde el contacto con el patógeno hasta el desarrollo pleno de la enfermedad. La relevancia de esta –así llamada– ‘clase de edad’ fue otra de las contribuciones de Kermack y McKendrick. Los problemas de los que nos ocupamos en este trabajo analizan la inclusión de la edad en modelos epidemiológicos de referencia.

En cuanto al contenido de la memoria, el Capítulo I analiza la dinámica del modelo básico en poblaciones estructuradas, sustentado en las tasas de fertilidad y mortalidad. El punto relevante consiste en la discusión del comportamiento asintótico de las soluciones. Una consecuencia notable es el ‘teorema de la población estable’ de Lotka. Se analiza también la influencia de los términos fuente en las ecuaciones. Representan el efecto de los flujos migratorios y constituyen una herramienta importante para abordar la segunda parte del trabajo.

El Capítulo II trata de epidemiología. Tras presentar los modelos SIR (susceptible, infeccioso, recuperado) y SIS; se introducen sus versiones para una población estructurada por edades. Por razones de espacio sólo nos ocupamos de éste último. Constituye un problema a la vez ‘no lineal’ y ‘no local’ que se aborda con éxito mediante técnicas de monotonía. Se analizan la existencia y unicidad de soluciones, los estados estacionarios y el comportamiento asintótico global de las soluciones. Los modelos SIS describen las enfermedades ‘endémicas’ de las cuales la malaria es el paradigma. Nos dice Ross en 1911 ([8]): “*Malarial fever is perhaps the most important of human diseases. . . Unlike many epidemic diseases it is not transient, but remains for ever in the areas which it has once invaded.*” Ross recibió en 1902 el premio Nobel de medicina por descubrir el mecanismo de transmisión de la enfermedad. A pesar de ser un tratado de medicina, [8] recoge una discusión cualitativa, articulada en términos matemáticos, de sus aspectos epidemiológicos. Añade de hecho en la introducción: “*The diffusion of disease is a theme which requires exact, and indeed mathematical analysis; and the art of controlling it belongs, not only to the medical man, the parasitologist and the entomologist, but even more to the experienced hygienist, the engineer, the administrative officer and the statesman.*”

Las matemáticas requeridas para discutir la dinámica estructurada por edades exceden los contenidos del grado. En su formato continuo involucran ecuaciones en derivadas parciales, ecuaciones de convolución y transformadas integrales. El Anexo recoge la materia necesaria para el desarrollo del trabajo.

## Poblaciones estructuradas por edades

Introducimos el modelo básico que describe la evolución de una especie donde los individuos se distribuyen en clases de edad. Planteamos el problema de contorno y valor inicial de referencia (1.6). Discutimos la existencia, unicidad y comportamiento asintótico. Estudiamos los problemas perturbados.

### 1.1. Deducción de la ecuación

Una descripción extremadamente simple del estado de una especie viene dada por el número de individuos  $u(t)$  en un instante  $t$ . Formular pronósticos sobre la evolución de dicha especie requiere obtener información sobre la derivada  $u'(t)$ . La fertilidad  $\nu$  y mortalidad  $\mu$  son dos magnitudes directamente implicadas en la variación de  $u$ .

Dado un instante  $t$  y una cantidad característica de tiempo  $h$  tenemos el balance:

$$u(t+h) - u(t) = n - m, \quad (1.1)$$

donde  $n$  es el número de nacimientos,  $m$  el de fallecidos durante el intervalo  $[t, t+h]$ . Las cantidades:

$$\frac{m}{u(t)}, \quad \frac{m}{hu(t)}, \quad \mu := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{m}{hu(t)},$$

se denominan la mortalidad media y las tasas de mortalidad media e instantánea, respectivamente. Puede decirse que  $\mu dt$  es la probabilidad de morir en el intervalo  $[t, t+dt]$ . Análogamente,

$$\frac{n}{u(t)}, \quad \frac{n}{hu(t)}, \quad \nu := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{n}{hu(t)},$$

son la fertilidad media y las tasas de fertilidad media e instantánea de la población. En Demografía, los valores de  $\nu$  y  $\mu$  se extraen de los censos.

Una población en régimen de crecimiento Malthusiano es aquella para la que  $\nu$  y  $\mu$  son constantes positivas. Usando la “ley de conservación” (1.1) se llega a que:

$$u' = \alpha u, \quad \alpha = \nu - \mu. \quad (1.2)$$

Cuando  $\alpha < 0$  la población se extingue, sufre una explosión demográfica si  $\alpha > 0$  y permanece constante cuando  $\alpha = 0$  (régimen estable).

Sin embargo, la demografía sugiere que el “factor” edad influye notablemente en la fertilidad y mortalidad. Es por tanto relevante incorporar la edad  $a$  en la descripción de la población. Así  $u(a, t)$  designa el número de individuos con edades en el intervalo  $[a, a + da]$  y en el instante  $t$ . Es decir,

$$\int_{a_1}^{a_2} u(a, t) da,$$

son los individuos en la franja de edad  $a_1 \leq a \leq a_2$  en el instante  $t$ . Se admite que  $u(a, t) = 0$  siempre que  $a \geq a^\dagger > 0$ , luego la población total en el instante  $t$  vale:

$$U(t) = \int_0^{a^\dagger} u(a, t) da.$$

Admitiendo que no hay efectos migratorios un principio de conservación para la población es:

$$U'(t) = B(t) - M(t),$$

donde la *tasa de natalidad*  $B(t)$  mide el número de nuevos individuos por unidad de tiempo y  $M(t)$  el correspondiente número de fallecidos. Las *tasas de fertilidad*  $\nu$  y *mortalidad*  $\mu$  se introducen para cuantificar estos términos. Así,

$$\int_{a_1}^{a_2} \nu(a, t)u(a, t) da, \quad \int_{a_1}^{a_2} \mu(a, t)u(a, t) da,$$

miden, respectivamente, el número de nuevos individuos y el número de fallecidos, por unidad de tiempo, ocurridos en la población dentro de la franja de edad  $a_1 \leq a \leq a_2$ . Llegamos entonces al balance:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_0^{a^\dagger} u(a, t) da \right) = \int_0^{a^\dagger} \nu(a, t)u(a, t) da - \int_0^{a^\dagger} \mu(a, t)u(a, t) da.$$

Por otra parte, para deducir una ecuación diferencial que nos permita analizar  $u$  empleamos un argumento similar al de la dinámica de fluidos. Tomamos un intervalo de edad  $[a, b]$  y lo dejamos “fluir” en el tiempo, a partir de un instante  $t_0$ . Tenemos entonces la ley de conservación:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{a+t}^{b+t} u(a, t_0 + t) da \right) = - \int_{a+t}^{b+t} \mu(a, t_0 + t)u(a, t_0 + t) da, \quad t \geq 0.$$

Expresa que la única pérdida de efectivos en la población se debe a la mortalidad. Para la validez del argumento es importante que se trabaje en un intervalo “móvil”  $[a + t, b + t]$ . Otra manera de escribir la identidad es:

$$\int_{a+t}^{b+t} (u_t(a, t_0+t) + u_a(a, t+t_0)) da = - \int_{a+t}^{b+t} \mu(a, t_0+t)u(a, t_0+t) da, \quad t \geq 0,$$

donde haciendo  $t = 0$  resulta:

$$\int_a^b (u_t(a, t_0) + u_a(a, t_0)) da = - \int_a^b \mu(a, t_0)u(a, t_0) da, \quad t \geq 0.$$

Al ser  $a, b, t_0$  arbitrarios se concluye que:

$$u_t + u_a = -\mu u, \quad t > 0. \quad (1.3)$$

Esta es la ecuación fundamental de la dinámica de poblaciones estructuradas por edades. Está asociada a los nombres de A. Lotka (1922), A. G. McKendrick (1926) y H. Von Foerster (1959).

Resulta asimismo pertinente interpretar  $u(a, t_0)$  como el flujo de individuos que en el instante  $t_0$  supera la edad  $a$ . En efecto, esta cantidad es:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_a^{a+t} u(a, t_0+t) da \right)_{t=t_0} = u(a, t_0).$$

Es decir  $u(a, t_0)$  refleja el número de individuos por unidad de tiempo que pasa la edad  $a$  en  $t = t_0$ . De aquí extraemos dos consecuencias. La primera, que:

$$u(0, t)$$

coincide con el número de recién nacidos por unidad de tiempo, magnitud que se define como la *tasa de natalidad*  $B(t)$ . La segunda, que la población satisface la condición de contorno:

$$u(0, t) = \int_0^{a^\dagger} \nu(a, t)u(a, t) da. \quad (1.4)$$

Otra relación que se deduce de la ecuación (1.3) es:

$$\frac{d}{dt} \left( \int_a^b u(s, t) ds \right) = - \int_a^b \mu(s, t)u(s, t) ds + u(a, t) - u(b, t).$$

Expresa la variación de la población en un intervalo de edad fijo  $[a, b]$  como un balance entre la mortalidad y el flujo a través de los extremos del intervalo.

Para simplificar admitiremos en el resto de la sección que  $\nu$  y  $\mu$  sólo dependen de la edad  $a$ . Una función relevante es:

$$\Pi(a) = e^{-\int_0^a \mu},$$

que representa la probabilidad (por unidad de tiempo) de sobrevivir hasta la edad  $a$ . Nótese ahora que  $\mu(a) da$  define la probabilidad de morir en  $da$  unidades de tiempo tras sobrevivir hasta la edad  $a$ . Es por ello natural imponer que:

$$\Pi(a^\dagger) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{a^\dagger} \mu = +\infty.$$

Asimismo  $\mu\Pi(a) da$  es la probabilidad de llegar a la edad  $a$  y morir inmediatamente después. De hecho, como:

$$\int_0^{a^\dagger} \mu\Pi = 1,$$

entonces  $\mu\Pi$  es una genuina función densidad de probabilidad. Podemos así calcular la esperanza de la variable edad  $a$  para obtener que la vida media es:

$$\int_0^{a^\dagger} a\mu\Pi = \int_0^{a^\dagger} \Pi.$$

Tratando ahora de la fertilidad,  $\nu(a) da$  es el número de descendientes que cabe esperar de un individuo que llega a la edad  $a$ . Si multiplicamos esta cantidad por la probabilidad de llegar a esa edad e integramos, obtenemos que el número:

$$R = \int_0^{a^\dagger} \nu\Pi da, \quad (1.5)$$

que estima el número de descendientes que puede esperarse por individuo (y unidad de tiempo). Se denomina el *número de reproducción*.

## 1.2. Análisis de la solución

Nos ocupamos del estudio del problema de valor inicial y de contorno:

$$\begin{cases} u_t + u_a + \mu(a)u = 0, & 0 < a < a^\dagger, \quad t > 0, \\ u(0, t) = \int_0^{a^\dagger} \nu(a)u(a, t) da, & t > 0, \\ u(a, 0) = u_0(a), & 0 \leq a < a^\dagger. \end{cases} \quad (1.6)$$

Combina la ecuación (1.3), la condición de contorno (1.4) junto con la configuración inicial  $u_0$  de la población. Se trata entonces de obtener un pronóstico sobre la evolución de  $u$ .

Las tasas de fecundidad y mortalidad así como el dato inicial deben cumplir los siguientes requisitos que denotamos **(H1)**.

- i)  $\nu \in C[0, a^\dagger]^+$ ,  $\mu \in C[0, a^\dagger]^+$ ,  $\nu \not\equiv 0$ .  
 ii)

$$\int_0^{a^\dagger} \mu = \infty. \quad (1.7)$$

- iii)  $u_0 \in C[0, a^\dagger]^+$ ,  $u_0 \not\equiv 0$ .

Con el superíndice “+” se indica que las funciones son no negativas. Para uso posterior denotamos:

$$\nu^+ = \max_{[0, a^\dagger]} \nu.$$

*Observación 1.1.* La condición (1.7) sugiere que  $\mu$  experimenta una singularidad en el punto  $a = a^\dagger$ . Por ejemplo,  $\mu$  no puede estar acotada cerca de  $a^\dagger$ .

Denotaremos  $Q = (0, a^\dagger) \times \mathbb{R}^+$  el dominio de las variables  $(a, t)$ , asimismo  $Q^+ = (0, a^\dagger) \times \mathbb{R}^+ \cap \{t > a\}$  mientras  $Q^-$  es la parte de  $Q$  donde  $t < a$ .

**Teorema 1.2.** *Toda solución  $u \in C^1(Q)$  que es continua en  $\partial Q \setminus \{a = a^\dagger\}$  se expresa de la forma:*

$$u(a, t) = \begin{cases} \Pi(a) \frac{u_0(a-t)}{\Pi(a-t)}, & t \leq a < a^\dagger, \\ \Pi(a) B(t-a), & t > a, \end{cases} \quad (1.8)$$

donde  $\Pi(a) = e^{-\int_0^a \mu}$  y  $B(t) = u(0, t)$ .

*Demostración.* En  $Q^-$  podemos representar  $v(a) = u(a, a-s)$ ,  $s \leq a < a^\dagger$ , donde  $0 \leq s < a^\dagger$  es un parámetro. La identidad (1.8) es consecuencia de que  $v$  satisface:

$$v' + \mu(a)v = 0, \quad s < a < a^\dagger, \quad v(s) = u_0(s).$$

La correspondiente relación en  $Q^+$  se deduce usando  $v(a) = u(a, a+s)$  y la condición  $v(0) = B(s)$ .  $\square$

*Observación 1.3.* La dosis de regularidad requerida para la representación (1.8) es considerablemente menor que la enunciada. De hecho, si  $u_t + u_a$  se reemplaza por la derivada a lo largo de las rectas características  $t = a + k$  basta con que  $u$  sea absolutamente continua sobre las mismas, partiendo de un punto de inicial sobre los ejes. Se entiende en este caso que la ecuación se satisface en casi todo punto de las características.

Como se ha dicho,  $B(t)$  es el número de nacimientos por unidad de tiempo, mientras  $\Pi(a)$  es la probabilidad de sobrevivir hasta la edad  $a$ . La condición (1.7) significa que ningún individuo sobrepasa la edad  $a = a^\dagger$ . En efecto, de (1.8) se deduce que:

$$\lim_{a \rightarrow a^\dagger} u(a, t) = 0, \quad \forall t > 0. \quad (1.9)$$

### 1.3. Ecuación de renovación

En el Teorema 1.2 se obtiene una representación de la solución de (1.6) que sin embargo no está determinada hasta que se calcule  $B$ . Usando la condición de contorno en (1.6) junto con (1.8) la tasa de natalidad  $B(t)$  debe satisfacer:

$$B(t) = \begin{cases} \int_0^t \nu(a)\Pi(a)B(t-a) da + \int_t^{a^\dagger} \nu(a)\Pi(a)\frac{u_0(a-t)}{\Pi(a-t)} da, & t < a^\dagger, \\ \int_0^{a^\dagger} \nu(a)\Pi(a)B(t-a) da, & t > a^\dagger. \end{cases} \quad (1.10)$$

El término:

$$F(t) := \int_t^{a^\dagger} \nu(a)\Pi(a)\frac{u_0(a-t)}{\Pi(a-t)} da \leq \nu^+ \{\text{máx } u_0\}(a^\dagger - t), \quad t < a^\dagger.$$

Luego  $\lim_{t \rightarrow a^\dagger -} F(t) = 0$  mientras  $F(0) = \int_0^{a^\dagger} \nu(a)u_0(a) da$ .

Complementamos las condiciones (H1) con la siguiente que denotamos (H2):

iv)  $\nu(0) = \nu(a^\dagger) = 0$ ,  $u_0(a^\dagger) = 0$ .

La primera significa que las clases fértiles de la población están confinadas en el rango de edad  $[0, a^\dagger]$ . La segunda, que no hay población inicial con edad  $a = a^\dagger$ .

*Observación 1.4.* Para facilitar el cálculo de  $B$  extendemos las funciones  $\nu$ ,  $u_0$  y  $\Pi$  a  $\overline{\mathbb{R}^+}$  asignándoles el valor 0 para  $a \geq a^\dagger$ .

De acuerdo con la observación podemos escribir  $F$  como sigue:

$$F(t) = \int_t^\infty \nu(a)\Pi(a)\frac{u_0(a-t)}{\Pi(a-t)} da = \int_0^\infty \nu(a+t)\Pi(a+t)\frac{u_0(a)}{\Pi(a)} da,$$

en donde se entiende que  $u_0/\Pi = 0$  para  $a \geq a^\dagger$ . Obtenemos así que  $F \in C(\overline{\mathbb{R}^+})$  siendo  $F(t) = 0$  para  $t \geq a^\dagger$ , es decir una función continua en  $\overline{\mathbb{R}^+}$  cuyo soporte está contenido en  $[0, a^\dagger]$ . La relación (1.10) adopta entonces la forma:

$$B(t) = \int_0^t \nu(a)\Pi(a)B(t-a) da + F(t), \quad t > 0, \quad (1.11)$$

que admite la expresión equivalente  $B(t) = K * B(t) + F(t)$ , donde  $K(a) = \nu(a)\Pi(a)$  y:

$$K * B(t) = \int_0^t K(a)B(t-a) da = \int_0^t K(t-a)B(a) da,$$

es la convolución de las funciones  $K$  y  $B$ .



**Definición 1.5.** La relación (1.11) se denomina la ecuación de renovación.

La ecuación de renovación (1.11) es una ecuación integral de Volterra cuyo núcleo  $K(a) = \nu(a)\Pi(a)$  se llama la *función de maternidad*. Representa la probabilidad de llegar a la edad  $a$  y reproducirse.

Por consiguiente la existencia de solución para el problema (1.6) depende de que seamos capaces de resolver (1.11).

**Teorema 1.6.** Admitamos las condiciones (H1) y (H2). Entonces la ecuación de renovación (1.11) posee una única solución  $B \in C(\overline{\mathbb{R}^+})$ . Más aún,  $B$  satisface la estimación:

$$|B(t)| \leq \nu^+ \|u_0\|_1 e^{\nu^+ t}, \quad t > 0, \quad (1.12)$$

donde  $\|u_0\|_1$  es la norma de  $u_0$  en  $L^1[0, a^\dagger]$ .

*Demostración.* El Lema de Gronwall (Anexo, Sección A.1) y la estimación:

$$|B(t)| \leq \max_{\mathbb{R}^+} |F| + \int_0^t |K(t-a)| |B(a)| da \leq \max_{\mathbb{R}^+} |F| + \nu^+ \int_0^t |B(a)| da,$$

implican que toda solución  $B \in C(\overline{\mathbb{R}^+})$  de (1.11) satisface:

$$|B(t)| \leq \max_{\mathbb{R}^+} |F| e^{\nu^+ t}, \quad t > 0. \quad (1.13)$$

La estimación (1.12) se sigue de:

$$\max_{\mathbb{R}^+} |F| = \max_{\mathbb{R}^+} F \leq \nu^+ \|u_0\|_1.$$

La unicidad de solución se deduce asimismo de la estimación (1.13) observando que la diferencia  $B_1 - B_2$  de dos posibles soluciones cumple (1.11) con  $F = 0$ .

La existencia la tratamos por separado en el siguiente teorema. □

**Teorema 1.7.** Sean  $K, f \in C(\overline{\mathbb{R}^+})$  funciones dadas. Entonces la ecuación:

$$u(t) = K * u(t) + f(t), \quad (1.14)$$

admite una única solución  $u \in C(\overline{\mathbb{R}^+})$ . Además, para cada  $b > 0$  se tiene que:

$$\|u\|_{\infty, b} \leq \|f\|_{\infty, b} e^{\|K\|_{\infty, b} t}, \quad t > 0,$$

donde  $\|h\|_{\infty, b} = \max_{t \in [0, b]} h(t)$ . Más aún, la solución se representa en la forma:

$$u(t) = R * f(t) + f(t), \quad (1.15)$$

donde:

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} K * \overset{n}{\dots} * K, \quad (1.16)$$

es el núcleo resolvente.

*Demostración.* Basta resolver (1.14) en el espacio  $X = (C[0, b], \|\cdot\|_{\infty, b})$  para cada  $b > 0$ . En efecto, como la solución  $u_1$  en el intervalo  $[0, b + 1]$  coincide con la solución  $u$  en el intervalo  $[0, b]$ , ésta puede extenderse paulatinamente hasta cubrir  $\mathbb{R}^+$ . La unicidad se deduce del Lema de Gronwall.

En el espacio  $X$  consideramos el operador:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : X &\longrightarrow X \\ u &\longmapsto \mathcal{T}u = K * u + f. \end{aligned}$$

Con  $u_0 = 0$  formamos la sucesión recurrente  $u_n = \mathcal{T}u_{n-1}$ . Como el operador es continuo en  $X$  basta probar la existencia del límite:

$$u = \lim u_n,$$

pues tal  $u$  va a resolver la ecuación. A tal fin resulta que:

$$u_n = f + \sum_{k=1}^{n-1} K * \dots * K * f.$$

Asimismo:

$$|K * \dots * K * f(t)| \leq \frac{(\|K\|_{\infty} t)^n}{n!} \|f\|_{\infty}, \quad t \in [0, b],$$

luego:

$$\|K * \dots * K * f\|_{\infty} \leq \frac{(\|K\|_{\infty} b)^n}{n!} \|f\|_{\infty}.$$

Entonces la serie:

$$u = f + \sum_{n=1}^{\infty} K * \dots * K * f$$

converge absolutamente en  $X$  y define la solución de (1.14). Por otro lado:

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} K * \dots * K,$$

constituye un elemento de  $X$  que permite expresar la solución en la forma (1.16).  $\square$

*Observación 1.8.* La ecuación de Volterra (1.14) puede resolverse en el contexto más general del espacio  $L^p(\mathbb{R}^+)$  ([5]).

El siguiente resultado establece una estimación exponencial del crecimiento de la *población total*

$$U(t) = \int_0^{a^\dagger} u(a, t) da,$$

para una especie gobernada por el problema (1.6). Esta es una magnitud relevante y algunos modelos más complicados hacen depender la mortalidad y fecundidad de la población total  $U$ . Al pertenecer a la categoría de los “problemas no locales”, tales modelos son más difíciles de tratar ([4]).

**Teorema 1.9.** *Sea  $u(a, t)$  una solución del problema (1.6) en las condiciones del Teorema 1.2. Entonces:*

$$\|u(\cdot, t)\|_1 \leq \|u_0\|_1 e^{\nu^+ t}, \quad t > 0. \quad (1.17)$$

*Demostración.* Para  $t \geq a^\dagger$ ,

$$\|u(\cdot, t)\|_1 = \int_0^{a^\dagger} \Pi(a) B(t-a) da \leq \nu^+ \|u_0\|_1 \int_0^{a^\dagger} e^{\nu^+(t-a)} da \leq \|u_0\|_1 e^{\nu^+ t}.$$

Si  $t < a^\dagger$ :

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_1 &= \int_0^t \Pi(a) B(t-a) da + \int_t^{a^\dagger} \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-t)} u_0(a-t) da \\ &\leq \|u_0\|_1 (e^{\nu^+ t} - 1) + \|u_0\|_1 = \|u_0\|_1 e^{\nu^+ t}. \end{aligned}$$

□

## 1.4. Existencia y unicidad

Vamos a establecer ahora la existencia y unicidad de soluciones del problema (1.6). Necesitaremos unas pocas condiciones más que denotamos **(H3)**:

- v)  $u_0 \in C^1[0, a^\dagger]$ ,  $\nu \in C^1[0, a^\dagger]$ .
- vi) Existe una constante  $C > 0$  tal que  $u_0(a) \leq C\Pi(a)$ ,  $0 \leq a \leq a^\dagger$ .
- vii)  $u_0(0) = \int_0^{a^\dagger} \nu(a)u_0(a) da$ .

La condición vi) armoniza el comportamiento de  $u(a, t)$  en  $t > 0$  con el de  $u(a, t)$  en  $t = 0$ . Para  $t > 0$  la solución cumple vi) con una constante  $C$  que depende de  $t$ . La relación vi), que es de tipo técnica, conlleva la continuidad de la solución (1.8) en la diagonal  $t = a$ .

**Lema 1.10.** *Bajo las condiciones (H1), (H2) y (H3) tanto  $F$  como la solución  $B$  de la ecuación de renovación (1.11) son funciones de clase  $C^1$  en  $\overline{\mathbb{R}^+}$ .*

*Demostración.* Probamos que la función  $F$ :

$$F(t) = \int_0^\infty K(a+t) \frac{u_0(a)}{\Pi(a)} da,$$

es  $C^1$  con derivada  $g(t) = \int_0^\infty K'(a+t) \frac{u_0(a)}{\Pi(a)} da$ . El punto delicado es que la derivada:

$$K' = \begin{cases} \nu' \Pi - \nu \mu \Pi, & 0 < a < a^\dagger, \\ 0 & a > a^\dagger, \end{cases}$$

no está definida en  $a = a^\dagger$  debido a la singularidad de  $\mu$  en  $a^\dagger$  (Observación 1.1). Sin embargo  $K'$  es integrable porque el término conflictivo  $\mu \Pi$  lo es:

$$\int_0^{a^\dagger} \mu \Pi da = 1.$$

Como  $K$  es continua con *derivada integrable* se puede probar ([3]) la existencia de una sucesión de funciones  $K_n \in C_0^1(\mathbb{R}^+)$  (de clase  $C^1$  y soporte compacto) tales que  $K_n \rightarrow K$  y  $K'_n \rightarrow K'$  en  $L^1(\mathbb{R}^+)$ . Llamando:

$$F_n(t) = \int_0^\infty K_n(a+t) \frac{u_0(a)}{\Pi(a)} da,$$

y teniendo en cuenta que:

$$F'_n(t) = \int_0^\infty K'_n(a+t) \frac{u_0(a)}{\Pi(a)} da,$$

se concluye por comprobación directa que  $F_n \rightarrow F$  y  $F'_n \rightarrow g$  uniformemente en  $\overline{\mathbb{R}^+}$ . Esto implica que  $F$  es  $C^1$  con derivada  $F' = g$ .

Con la misma estrategia y recordando que  $\nu(0) = 0$  se prueba que:

$$\left( \int_0^t K(t-a)B(a) da \right)' = \int_0^t K'(t-a)B(a) da.$$

Basta con aproximar las integrales implicadas por:

$$\int_0^t K_n(t-a)B(a) da \quad \& \quad \int_0^t K'_n(t-a)B(a) da,$$

respectivamente. A resultas de ello se sigue que  $B$  es  $C^1$ . □

**Teorema 1.11.** *Supongamos que los datos  $\nu, \mu, u_0$  satisfacen las condiciones (Hi),  $i = 1, 2, 3$ , entonces el problema (1.6) admite una única solución que viene expresada por (1.8) donde  $B$  es la única solución de la ecuación de renovación (1.11).*

*Demostración.* Para probar la unicidad consideramos la diferencia  $v = u_1 - u_2$  de dos posibles soluciones que satisfacen (1.6) con  $u_0 = 0$ . La correspondiente ecuación de renovación (1.11) tiene el término  $F = 0$  luego  $B = 0$ . Así  $v = 0$  en  $Q^+ = \{(a, t) : t > a\}$  mientras  $u_0 = 0$  significa que  $v = 0$  en  $Q^-$ , luego  $v = u_1 - u_2 = 0$ . Por otro lado que la función  $u$  dada en (1.8) resuelve (1.6) es consecuencia de su expresión sobre rectas de la forma  $t = a + k$ .  $\square$

Existen condiciones sobre los datos  $\nu$  y  $u_0$  bajo las que la especie se extingue en tiempo finito. En efecto  $F = 0$  bajo las hipótesis que siguen, por tanto  $u = 0$  en  $Q^+$ .

**Proposición 1.12 (Condiciones triviales).** *Supongamos que existe  $c > 0$  tal que  $\nu = 0$  para  $a \geq c$  mientras  $u_0 = 0$  si  $a \leq c$ . Entonces la solución  $B$  de (1.11) es idénticamente cero y por tanto  $u = 0$  en  $Q^+$ .*

**Definición 1.13.** *Los datos  $\nu, u_0$  se denominan triviales si se hallan en las condiciones de la Proposición 1.12.*

Cuando  $\nu$  y  $u_0$  son triviales la población se extingue por envejecimiento. En efecto, los efectivos iniciales  $u_0$  no son fértiles.

## 1.5. Comportamiento asintótico

Vamos a estudiar el comportamiento de la tasa de natalidad  $B(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Supondremos que  $\nu$  y  $u_0$  son no triviales por lo que  $F$  y  $B$  son funciones no nulas en la ecuación de renovación (1.11). Tomando la transformada de Laplace en la misma (véase el Apéndice) y despejando  $\widehat{B}$  obtenemos:

$$\widehat{B} = \widehat{F} + \frac{\widehat{F}\widehat{K}}{1 - \widehat{K}}. \quad (1.18)$$

Como  $F$  y  $K$  tienen soporte en  $[0, a^\dagger]$  entonces  $\widehat{F}$  y  $\widehat{K}$  son funciones enteras (tienen abscisa de convergencia  $\omega = -\infty$ ). El segundo miembro de (1.18) define una función meromorfa cuyos polos son las raíces de la *ecuación característica* (o de Lotka [2]):

$$\widehat{K}(z) = 1. \quad (1.19)$$

**Teorema 1.14.** *Admitiendo (H1) y (H2) se cumplen las siguientes propiedades.*

- i) La ecuación característica (1.19) sólo admite una única raíz real  $z = \alpha^*$ . Más aún  $\text{signo}(\alpha^*) = \text{signo}(\widehat{K}(0) - 1)$ .*
- ii) Si  $z$  es una raíz  $z \neq \alpha^*$  entonces  $\Re z < \alpha^*$ .*
- iii) En cada banda  $-\infty < a \leq \Re z \leq b < \infty$  existen a lo más un número finito de raíces.*

*Demostración.* La función:

$$\widehat{K}(t) = \int_0^\infty e^{-tx} K(x) dx, \quad t \in \mathbb{R},$$

es continua, decreciente,  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \widehat{K}(t) = \infty$  y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \widehat{K}(t) = 0$ . Esto prueba i).

Asimismo, como  $\widehat{K}(z) \rightarrow 0$  si  $z \rightarrow \infty$  en  $\Re z \geq c$  (Proposición A.7), las raíces  $z$  de (1.19) yacen en un conjunto acotado si  $a \leq \Re z \leq b$ . De ahí se sigue inmediatamente la propiedad iii).

En cuanto a ii) sea  $z = \alpha + i\beta$  una raíz compleja de (1.19). Entonces:

$$1 = \left| \int_0^{a^\dagger} e^{-\alpha x} \cos \beta x K(x) dx \right| \leq \int_0^{a^\dagger} e^{-\alpha x} |\cos \beta x| K(x) dx < \int_0^{a^\dagger} e^{-\alpha x} K(x) dx.$$

Por tanto  $\alpha < \alpha^*$ . □

*Observación 1.15.* La función entera  $\widehat{K}$  no es un polinomio pues  $(-1)^n \widehat{K}^{(n)}(0) = \int_0^{a^\dagger} a^n K(a) da > 0$  para todo  $n$ . Por consiguiente la ecuación característica ‘debería’ admitir una infinidad de raíces  $\lambda_n$  con  $\Re \lambda_n \rightarrow -\infty$ .

La raíz principal (o dominante)  $\alpha^*$  de la ecuación característica juega un papel crucial tanto en el comportamiento asintótico de  $B(t)$  como en el de la solución  $u$  de (1.6).

**Teorema 1.16.** *Supongamos que se cumplen las condiciones (H1), (H2) y que los datos son no triviales. Si  $\delta < \alpha^*$  es tal que  $z = \alpha^*$  es la única raíz de la ecuación característica en la banda  $\delta \leq \Re z \leq \alpha^*$  entonces:*

$$B(t) = c_0 e^{\alpha^* t} + e^{\delta t} H_0(t), \quad (1.20)$$

donde  $H_0 \in C(\mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^+)$  y  $c_0 = -\widehat{F}(\alpha^*)/\widehat{K}'(\alpha^*)$ .

*Observación 1.17.* El Teorema 1.14–iii) nos asegura que existe todo un intervalo  $(a, \alpha^*)$  donde podemos elegir arbitrariamente el número  $\delta$ .

*Demostración (del Teorema 1.16).* Comenzamos afirmando la existencia de una función continua  $H \in C(\mathbb{R}^+)$  tal que:

$$\widehat{H}(z) = \frac{\widehat{F}(z)\widehat{K}(z)}{1 - \widehat{K}(z)}. \quad (1.21)$$

Derivamos la demostración al Lema 1.19 y Proposición 1.18. En base al Teorema A.25 concluimos que:

$$B(t) = F(t) + H(t), \quad t > 0,$$

en donde se ha usado la continuidad de todas las funciones implicadas.

**Proposición 1.18.** Sea  $G(z)$  una función holomorfa en  $\Re z > \omega_0$ . Supongamos además que:

i)  $\lim_{z \rightarrow \infty} G(z) = 0$  en  $\Re z \geq \sigma$  para cierto  $\sigma > \omega_0$ .

ii)  $\int_{\mathbb{R}} |G(x + iy)| dy < \infty$  para todo  $x \geq \sigma$ .

Entonces la función:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re z = \sigma} e^{zx} G(z) dz, \quad (1.22)$$

es  $\mathcal{L}$ -transformable y su transformada de Laplace cumple  $\hat{g}(z) = G(z)$  para  $\Re z > \sigma$ .

**Lema 1.19.** Existe una función  $H \in C(\mathbb{R}^+)$  tal que se cumple la identidad (1.21).

*Demostración.* Comprobamos que se dan las condiciones de la Proposición 1.18. Para  $\sigma \in \mathbb{R}$  sabemos de la Proposición A.7 que:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \hat{F}(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \hat{K}(z) = 0, \quad \Re z \geq \sigma.$$

Asimismo, como  $F, K \in L^2(\mathbb{R})$  resulta de la identidad de Parseval que  $\hat{F}(x - iy)\hat{K}(x + iy) \in L^1(\mathbb{R})$  como función de  $y$ , para cualquier  $x \in \mathbb{R}$ . Además, si no hay ceros de la ecuación característica en la recta  $\Re z = x$  se tiene que

$$\frac{1}{1 - \hat{K}(x + iy)} \in L^\infty(\mathbb{R}),$$

como función de  $y$ . Por tanto:

$$\frac{\hat{F}(x + iy)\hat{K}(x + iy)}{1 - \hat{K}(x + iy)} \in L^1(\mathbb{R}),$$

como función de  $y$ , siempre que no existan raíces de la ecuación característica en  $\Re z = x$ . Podemos entonces concluir que:

$$H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re z = \sigma} e^{zt} \frac{\hat{F}(z)\hat{K}(z)}{1 - \hat{K}(z)} dz, \quad (1.23)$$

para cualquier  $\sigma > \alpha^*$  (la forma de  $H$  no depende de la elección de  $\sigma$ ).  $\square$

*Demostración (Proposición 1.18).* Se tiene que:

$$|g(x)| \leq \frac{1}{2\pi} e^{\sigma x} \int_{\Re z = \sigma} |G(x + iy)| dy \leq C e^{\sigma x}.$$

Además, el teorema de la convergencia dominada implica la continuidad de  $g$  en  $\mathbb{R}^+$ . De ahí,  $g$  es transformable, con abscisa de convergencia  $\omega \leq \sigma$ .

Fijamos ahora  $z_0$  con  $\Re z_0 > \sigma$  y calculamos  $\hat{g}(z_0)$ :

$$\begin{aligned}\hat{g}(z_0) &= \int_0^\infty e^{-z_0 x} g(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-z_0 x} \int_{\Re z = \sigma} e^{zx} G(z) dz dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re z = \sigma} G(z) \int_0^\infty e^{(z-z_0)x} dx dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re z = \sigma} \frac{G(z)}{z_0 - z} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - iR}^{\sigma + iR} \frac{G(z)}{z_0 - z} dz.\end{aligned}$$

Consideramos ahora la curva cerrada y orientada negativamente  $C_R^-$ , formada por el segmento de extremos  $\sigma \pm iR$  y el arco de circunferencia  $\Gamma_R$  de centro  $\sigma$  y radio  $R$  que va de  $\sigma - iR$  a  $\sigma + iR$  por el semiplano  $\Re z \geq \sigma$ . Entonces:

$$G(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^-} \frac{G(z)}{z_0 - z} dz,$$

identidad que se deduce de la fórmula de Cauchy. Por otro lado, la hipótesis i) sobre  $G$  implica:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R^-} \frac{G(z)}{z_0 - z} dz = 0.$$

Podemos por tanto concluir que  $\hat{g}(z_0) = G(z_0)$ .  $\square$

*Demostración (del Teorema 1.16, continuación).* Consideramos  $\delta < \alpha^*$  como en el enunciado y fijamos  $\sigma > \alpha^*$ . Entonces:

$$H(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re z = \sigma} e^{zt} \frac{\hat{F}(z)\hat{K}(z)}{1 - \hat{K}(z)} dz.$$

Definimos el rectángulo  $C_R^+$  con vértices:

$$A = \sigma - iR, \quad B = \sigma + iR, \quad C = \delta + iR, \quad D = \delta - iR,$$

recorrido en sentido positivo. Del teorema de los residuos y el Lema A.27 se tiene que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^+} e^{zt} \frac{\hat{F}(z)\hat{K}(z)}{1 - \hat{K}(z)} dz = c_0 e^{\alpha^* t},$$

para todo  $R > 0$ . Por otro lado:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R^+} e^{zt} \frac{\hat{F}(z)\hat{K}(z)}{1 - \hat{K}(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \left( \int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A \right) e^{zt} \frac{\hat{F}(z)\hat{K}(z)}{1 - \hat{K}(z)} dz.$$



$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Se tiene que:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_2 = \lim_{R \rightarrow \infty} I_4 = 0.$$

Así:

$$\begin{aligned} H(t) &= \lim_{R \rightarrow \infty} I_1 = c_0 e^{\alpha^* t} + \lim_{R \rightarrow \infty} I_4 = c_0 e^{\alpha^* t} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re z = \delta} e^{zt} \frac{\widehat{F}(z) \widehat{K}(z)}{1 - \widehat{K}(z)} dz. \\ &= c_0 e^{\alpha^* t} + \frac{e^{\delta t}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{iyt} \frac{\widehat{F}(\delta + iy) \widehat{K}(\delta + iy)}{1 - \widehat{K}(\delta + iy)} dy = c_0 e^{\alpha^* t} + e^{\delta t} H_0(t). \end{aligned}$$

□

*Observación 1.20.* Si se elige  $\delta < \alpha^*$  tal que hay exactamente  $\lambda_0 = \alpha^*$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  raíces de la ecuación característica en la banda  $\delta < \Re z < \sigma$  y ninguna en los lados  $\Re z = \delta, \sigma$  entonces:

$$H(t) = \sum_{k=0}^n \operatorname{Res} \left( e^{zt} \frac{\widehat{K} \widehat{F}}{1 - \widehat{K}} \right)_{|z=\lambda_k} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re z = \delta} e^{zt} \frac{\widehat{F}(z) \widehat{K}(z)}{1 - \widehat{K}(z)} dz.$$

Lo residuos se calculan recurriendo al Lema A.27 del Apéndice.

## 1.6. Estabilidad de la población

El siguiente resultado se atribuye a A. Lotka (1911).

**Teorema 1.21.** *Supongamos que  $\nu, \mu$  y  $u_0$  satisfacen (H), que  $\alpha^*$  es la raíz real de la ecuación (1.19) mientras  $\delta < \alpha^*$  se elige en las condiciones del Teorema 1.16. Entonces toda solución  $u(a, t)$  del problema (1.6) satisface:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\alpha^* t} u(a, t) = c_0 e^{-\alpha^* a} \Pi(a), \quad (1.24)$$

siendo el límite uniforme en  $[0, a^\dagger]$ . En particular,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{-\alpha^* t} u(a, t) - c_0 e^{-\alpha^* a} \Pi(a)\|_{L^1[0, a^\dagger]} = 0.$$

La constante  $c_0$  depende de los datos en la forma señalada en el Teorema 1.16.

*Demostración.* Para  $t > a^\dagger$  suficientemente grande se tiene que:

$$u(a, t) = \Pi(a)(c_0 e^{\alpha^*(t-a)} + e^{\delta(t-a)} H_0(t-a)),$$

luego,

$$e^{-\alpha^*(t-a)}u(a, t) = c_0\Pi(a) + e^{-(\alpha^*-\delta)(t-a)}H_0(t-a)\Pi(a),$$

es decir:

$$e^{-\alpha^*t}u(a, t) = c_0e^{-\alpha^*a}\Pi(a) + e^{-\alpha^*a}e^{-(\alpha^*-\delta)(t-a)}H_0(t-a)\Pi(a).$$

Nótese que el último término tiende a cero uniformemente (y exponencialmente) en  $[0, a^\dagger]$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

□

Obsérvese que una forma más precisa de expresar (1.24) es:

$$u(a, t) = c_0e^{-\alpha^*a}\Pi(a)e^{\alpha^*t} + O(e^\delta t), \quad t \rightarrow \infty, \quad (1.25)$$

donde el último término significa que la función está acotada por un múltiplo de  $e^\delta t$  para  $t \in \mathbb{R}^+$  (la parte  $e^{\alpha^*a}$  está acotada en el intervalo  $[0, a^\dagger]$ ).

Luego la población se extingue exponencialmente si  $\alpha^* < 0$ . Esto ocurre si el número de reproducción (1.5):

$$\mathcal{R} = \int_0^{a^\dagger} K(a) da < 1.$$

Obsérvese que  $\mathcal{R}$  representa el número medio estimado de descendientes de cada individuo de la población. Cuando este número es inferior a la unidad aquélla es incapaz de renovarse. Por contra la población crece exponencialmente si  $\alpha^* > 0$  ( $\mathcal{R} > 1$ ), mientras permanece acotada si  $\alpha^* = 0$  y  $\mathcal{R} = 1$ . Se tiene de hecho algo más preciso:

$$u(a, t) \rightarrow c_0\Pi(a), \quad t \rightarrow \infty, \quad (1.26)$$

donde la constante  $c_0$  incluye la información del dato inicial. En éste último caso decimos que la población está en *régimen estable*. Este será el ámbito natural de nuestro estudio cuando estudiemos epidemiología. La relación (1.26) expresa que en el escenario estable todas las soluciones del problema convergen a un perfil *estacionario*. En efecto,

$$u^*(a) = c_0\Pi(a),$$

es solución estacionaria del problema (1.6), es decir, una solución que no depende del tiempo:

$$\begin{cases} u' + \mu(a)u = 0, \\ u(0) = \int_0^{a^\dagger} \nu(a)u(a) da. \end{cases}$$

Estudiamos más adelante esta clase de soluciones en un marco más general (véase el Teorema 1.27).

Tratamos ahora de poblaciones (soluciones) con *estructura estable*. Toda solución  $u(a, t)$  de (1.6) representa el comportamiento a lo largo del tiempo de una especie. La población total viene dada por:

$$U(t) = \int_0^{a^\dagger} u(a, t) da.$$

El cociente:

$$v(a, t) = \frac{u(a, t)}{U(t)},$$

se llama el ‘perfil de edad’. Se dice que  $u(a, t)$  tiene una estructura estable si las cantidades:

$$\int_{a_1}^{a_2} v(a, t) da = \frac{\int_{a_1}^{a_2} u(a, t) da}{U(t)}, \quad 0 \leq a_1 < a_2 \leq a^\dagger,$$

permanecen constantes a lo largo del tiempo. Para estas soluciones la proporción de individuos en las clases de edad  $a_1 \leq a \leq a_2$  se conserva.

Un caso importante de soluciones de estructura estable corresponde a las de variables separadas:

$$u(a, t) = A(a)T(t). \quad (1.27)$$

Esto nos lleva al problema de determinar si (1.6) admite esta clase de soluciones. Substituyendo en la ecuación:

$$\frac{T'}{T} = - \left( \frac{A'}{A} + \mu \right) = \lambda,$$

donde  $\lambda$  es un autovalor del problema:

$$\begin{cases} -(A' + \mu(a)A) = \lambda A, \\ A(0) = \int_0^{a^\dagger} \nu(a)A(a) da. \end{cases}$$

Las autofunciones son:

$$A = e^{-\lambda_n a} \Pi(a),$$

donde los autovalores  $\lambda = \lambda_n$  son las raíces de la ecuación característica:

$$\widehat{K}(\lambda) = 1.$$

El autovalor principal es evidentemente  $\lambda_0 = \alpha^*$ .

Por consiguiente, todas las soluciones de la forma (1.27) son múltiplo de alguna de las de la familia:

$$u_n(a, t) = e^{-\lambda_n t} e^{-\lambda_n a} \Pi(a).$$

El siguiente resultado establece que cualquier solución de (1.6) exhibe asintóticamente una estructura estable.

**Teorema 1.22.** *Sea  $u(a, t)$  una solución del problema (1.6) el cual suponemos bajo las hipótesis (H). Admitiendo que las condiciones no son triviales se satisface:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{a_1}^{a_2} u(a, t) da}{U(t)} = \frac{\int_{a_1}^{a_2} e^{-\alpha^* a} \Pi(a) da}{\int_0^{a^\dagger} e^{-\alpha^* a} \Pi(a) da}. \quad (1.28)$$

*Demostración.* Consecuencia directa del Teorema 1.21. □

La relación (1.28) es más flexible que el comportamiento asintótico directo dado por el signo de  $\alpha^*$ . Refleja que la población mantiene unas fracciones de edad estables sin detrimento de que decaiga a cero o explote en el infinito.

## 1.7. Efecto de los flujos migratorios

Una población envejecida o bien con las clases fértiles sometidas a estrés puede llegar a exhibir un número de reproducción  $\mathcal{R}$  muy próximo o por debajo de la unidad. Esto la condena a desaparecer. Puede sin embargo recuperarse si se beneficia del efecto “inmigración”, si ésta refuerza el tramo de edad con capacidad de procrear.

El estudio matemático de este problema requiere incluir “términos fuente” en la ecuación. Es decir, tratar con el problema:

$$\begin{cases} u_t + u_a + \mu(a)u = G(a, t), & 0 < a < a^\dagger, \quad t > 0, \\ u(0, t) = \int_0^{a^\dagger} \nu(a)u(a, t) dt, & t > 0, \\ u(a, 0) = u_0(a), & 0 \leq a < a^\dagger. \end{cases} \quad (1.29)$$

El segundo miembro  $G$  que suponemos no negativo por razones biológicas, se interpreta como la densidad del número de inmigrantes por unidad de tiempo.

**Teorema 1.23.** *Supongamos que los datos  $\nu$ ,  $\mu$ ,  $u_0$  cumplen las condiciones (H) mientras*

$$G, G_t \in C(\bar{Q}) \cap L^\infty(Q).$$

*Entonces el problema (1.29) admite una única solución  $u \in L^\infty(Q)$  que se expresa en la forma:*

$$u(a, t) = \int_0^{a \wedge t} \frac{\Pi(a)}{\Pi(a - \sigma)} G(a - \sigma, t - \sigma) d\sigma + \begin{cases} \Pi(a) \frac{u_0(a - t)}{\Pi(a - t)} & a \geq t \\ \Pi(a) B(t - a) & t > a, \end{cases} \quad (1.30)$$

donde  $a \wedge t = \min\{a, t\}$  y  $B$  es la solución de la ecuación de convolución:

$$B(t) = K * B(t) + H(t), \quad (1.31)$$

siendo:

$$H(t) = \int_t^\infty K(a) \frac{u_0(a-t)}{\Pi(a-t)} da + \int_0^t \int_\sigma^\infty K(a) \frac{G(a-\sigma, t-\sigma)}{\Pi(a-\sigma)} da d\sigma. \quad (1.32)$$

*Demostración.* Por linealidad, basta resolver (1.29) en el caso donde  $u_0 = 0$ . La solución (1.30) se obtendrá sumando a la solución del problema (1.6) la de este caso particular.

Empezamos trabajando en  $Q^- = \{a > t\}$ . La función  $v(a) = u(a, a-s)$ , cumple:

$$v' = -\mu(a)v + G(a, a-s), \quad a \geq s, \quad v(s) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$u(a, t) = \int_0^t \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-\sigma)} G(a-\sigma, t-\sigma) d\sigma.$$

En el sector  $Q^+ = \{t > a\}$ ,  $v(a) = u(a, a+s)$  satisface:

$$v' = -\mu(a)v + G(a, a+s), \quad a \geq 0, \quad v(0) = B(s), \quad B(s) = u(0, s).$$

Así,

$$v(a) = \Pi(a)B(s) + \int_0^a \frac{\Pi(a)}{\Pi(\sigma)} G(\sigma, \sigma+s) d\sigma \quad \Rightarrow$$

$$u(a, t) = \Pi(a)B(t-a) + \int_0^a \frac{\Pi(a)}{\Pi(\sigma)} G(\sigma, \sigma+t-a) d\sigma \quad \Rightarrow$$

$$u(a, t) = \Pi(a)B(t-a) + \int_0^a \frac{\Pi(a)}{\Pi(a-\sigma)} G(a-\sigma, t-\sigma) d\sigma.$$

Para ajustar la condición de contorno la función  $B$  debe cumplir la ecuación:

$$\begin{aligned} B(t) &= K * B(t) + \\ &\int_0^t K(a) \int_0^a \frac{G(a-\sigma, t-\sigma)}{\Pi(a-\sigma)} d\sigma da + \int_t^\infty K(a) \int_0^t \frac{G(a-\sigma, t-\sigma)}{\Pi(a-\sigma)} d\sigma da \\ &= K * B(t) + \int_0^t \int_\sigma^t K(a) \frac{G(a-\sigma, t-\sigma)}{\Pi(a-\sigma)} da d\sigma \\ &\quad + \int_0^t \int_t^\infty K(a) \frac{G(a-\sigma, t-\sigma)}{\Pi(a-\sigma)} da d\sigma. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Es decir  $B(t) = K * B(t) + h_1(t)$  donde:

$$h_1(t) = \int_0^t \int_\sigma^\infty K(a) \frac{G(a-\sigma, t-\sigma)}{\Pi(a-\sigma)} da d\sigma.$$

Para  $t \geq a^\dagger$ :

$$h_1(t) = \int_0^{a^\dagger} \int_\sigma^{a^\dagger} K(a) \frac{G(a - \sigma, t - \sigma)}{\Pi(a - \sigma)} da d\sigma,$$

así  $h_1 \in C(\mathbb{R}^+)$  y está acotada:

$$|h_1(t)| \leq \|G\|_{\infty, Q} \int_0^{a^\dagger} a\nu(a) da.$$

De acuerdo a lo discutido en la Sección 1.3 la ecuación de renovación admite una única solución  $B$  que permite resolver (1.29). Por otro lado,  $u \in L^\infty(Q)$  pues la integral en (1.30) está acotada por  $a^\dagger \|G\|_\infty$  si  $t \geq a$ .  $\square$

Todo lo que se necesita para dar sentido a la representación (1.30) de la solución  $u(a, t)$  es que  $G \in C(\overline{Q})$  no siendo necesarias las condiciones más fuertes de la existencia de  $G_t$  y acotación de  $G$  y  $G_t$  en  $Q$ . De la prueba del teorema se deduce que bajo la hipótesis más débil  $G \in C(\overline{Q})$  la función  $u$  cumple la ecuación en el sentido:

$$Du + \mu(a)u = G(a, t), \quad Du(a, t) = \frac{d}{ds}(u(a + s, t + s))|_{s=0}. \quad (1.34)$$

Es decir, el grupo  $u_t + u_a$  se sustituye por la derivada de  $u$  en direcciones paralelas a la recta  $t = a$ . Es por ello que se introduce la siguiente definición.

**Definición 1.24.** Se dice que  $u \in C(\overline{Q})$  es una solución (generalizada) del problema (1.29) si  $u$  satisface la ecuación en el sentido direccional (1.34).

*Observación 1.25.* Cuando  $u_0 = 0$  la función  $H$  en (2.31) admite la representación alternativa (cámbiese el orden de la integración):

$$H(t) = \int_0^\infty \int_0^{a \wedge t} K(a) \frac{G(a - \sigma, t - \sigma)}{\Pi(a - \sigma)} d\sigma da. \quad (1.35)$$

*Observación 1.26.* Para uso posterior introducimos el operador solución del problema (1.29):

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : C[0, a^\dagger] &\longrightarrow C[0, a^\dagger] \times C(\overline{Q}) \\ (u_0, G) &\longmapsto u = \mathcal{S}(u_0, G)(a, t), \end{aligned}$$

que refleja la dependencia (lineal) de la solución  $u$  con respecto a los datos  $u_0$  y  $G$ .

Abordamos ahora el problema propuesto al principio de la sección. Suponemos que  $\alpha^* < 0$  y la población está en curso de extinguirse. Se trata de saber si la apertura de “corredor” inmigratorio con flujo  $G(a, t)$  permite revitalizarla. Analizamos el problema usando un término fuente independiente de  $t$ :

$$G(a, t) = g(a), \quad a \in [0, a^\dagger].$$

El análisis requiere estudiar con detalle el problema estacionario:

$$\begin{cases} u'(a) + \mu(a)u(a) = g(a), & 0 < a < a^\dagger, \\ u(0) = \int_0^{a^\dagger} \nu(a)u(a) da. \end{cases} \quad (1.36)$$

**Teorema 1.27 (Alternativa de Fredholm).** *Se cumple la siguiente alternativa:*

i) *El problema (1.36) admite una solución  $\forall g \in C[0, a^\dagger]$  si y sólo si*

$$\alpha^* \neq 0.$$

*En este caso la solución es única.*

ii) *Si  $\alpha^* = 0$  el problema (1.36) no admite solución salvo que  $g \in C[0, a^\dagger]$  satisfaga la condición de compatibilidad:*

$$\int_0^{a^\dagger} \nu(a) \int_0^a \frac{\Pi(a)}{\Pi(\sigma)} g(\sigma) d\sigma da = 0, \quad (1.37)$$

*existiendo entonces infinitas soluciones. Más aún, la solución es única si imponemos la condición de normalización  $u(0) = 0$ .*

*Demostración.* La solución de la ecuación es:

$$u = \Pi(a)u_0 + \phi(a),$$

siendo:

$$\phi(a) = \int_0^a \frac{\Pi(a)}{\Pi(\sigma)} g(\sigma) d\sigma.$$

Al imponer la condición de contorno:

$$u_0 = \widehat{K}(0)u_0 + \int_0^{a^\dagger} \nu\phi.$$

En esta ecuación se puede despejar  $u_0$  siempre que  $\alpha^* \neq 0$ . De hecho, si fuese  $\alpha^* = 0$  la existencia de solución lleva necesariamente a que:

$$\int_0^{a^\dagger} \nu\phi = 0.$$

Luego en este caso sólo tendremos solución para una clase muy reducida de  $g$ 's. Esto prueba el teorema.  $\square$

*Observación 1.28.* En la práctica nos interesan las soluciones asociadas a datos  $g \geq 0$ . Éstas son por supuesto no negativas. Cuando  $\alpha^* = 0$  y  $g \geq 0$ , (1.37) sólo se cumple si  $\nu\phi = 0$ . Esto sucede únicamente si existe  $0 < c < a^\dagger$  tal que  $\text{sop } \nu \subset [0, c]$  mientras  $\text{sop } g \subset [c, a^\dagger]$  y los inmigrantes son demasiado mayores para reproducirse. Cuando esto ocurre se dice que los datos  $\nu$  y  $g$  son “triviales”.

El siguiente resultado viene a decir que una inmigración no trivial, por ínfima que sea, evita la extinción de una especie que, en condiciones de aislamiento, desaparecería.

**Teorema 1.29.** *Supongamos que  $\alpha^* < 0$  y que los datos  $\nu$  y  $g \in C[0, a^\dagger]^+$  son no triviales. Entonces, la solución del problema:*

$$\begin{cases} u_t + u_a + \mu(a)u = g(a), & 0 < a < a^\dagger, \quad t > 0, \\ u(0, t) = \int_0^{a^\dagger} \nu(a)u(a, t) dt, & t > 0, \\ u(a, 0) = u_0(a), & 0 \leq a < a^\dagger, \end{cases} \quad (1.38)$$

satisface,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(a, t) = u^*(a),$$

donde  $u^*$  es la única solución del problema (1.36).

*Demostración.* Si definimos la perturbación:

$$z(a, t) = u(a, t) - u^*(a),$$

entonces  $z$  satisface el problema (1.6) pero con dato inicial  $u_0 - g$ . Como  $\alpha^* < 0$  entonces:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(a, t) = 0,$$

que es lo que se deseaba demostrar.  $\square$



## Epidemiología

En epidemiología se estudia la propagación de enfermedades contagiosas. Siguiendo las ideas de W. O. Kermack y A. G. McKendrick ([2]) los modelos que describimos se basan en fragmentar la población en tres clases relevantes  $S, I, R$  de individuos. La clase  $S$  de los susceptibles la integran personas sanas, capaces de contraer la enfermedad. Al contagiarse pasan a engrosar la clase  $I$  de los infecciosos quienes transmiten la enfermedad a la clase  $S$ . Finalmente, y transcurrido un tiempo característico, los sujetos enfermos se recuperan y pasan a engrosar la clase  $R$  que aglutina los pacientes recuperados (o inmunizados). Ya no transmiten la enfermedad y no son fuente de posibles brotes ( $R$  podría muy bien comprender a los fallecidos). Este perfil de enfermedades conforma la clase  $SIR$  y confieren inmunidad a quienes la padecen (por ejemplo, el sarampión o la varicela).

Otro tipo de enfermedades contagiosas, las de tipo  $SIS$ , no confieren inmunidad. Tras padecerla los individuos de la clase  $I$  vuelven a engrosar el sector  $S$  de los susceptibles y podrían ser objeto de futuras infecciones (la gripe común es un ejemplo).

Los modelos que vamos a describir conciernen a poblaciones cuya dinámica global no es alterada por la epidemia. En particular, el número total  $N$  de elementos permanece constante durante el proceso<sup>1</sup>. Esto significa que la escala de tiempos de la enfermedad –el tiempo de ‘recuperación’ del infectado– es considerablemente menor que el tiempo característico de crecimiento de la población.

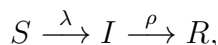
Una conclusión que se desprende del análisis de todos los modelos es que el brote de la epidemia requiere que un parámetro característico  $\mathcal{R}_0$  supere la unidad. Por debajo de ese valor crítico aquélla no es viable.

---

<sup>1</sup> Pandemias como la ‘peste negra’ del siglo XIV o la ‘gripe española’ de 1918 no pertenecerían a este grupo.

## 2.1. El modelo SIR

Un esquema de las enfermedades de tipo  $SIR$  es como sigue:



donde  $\lambda$  es la tasa de infección y  $\rho$  la tasa de recuperación. El término  $\lambda$ , denominado la “fuerza de la infección” (la tasa de contagio), entra en las ecuaciones en la forma:

$$\frac{S'}{S} = -\lambda,$$

y debería tener en cuenta el número de encuentros con personas infecciosas. Una primera aproximación para  $\lambda$  es:

$$\lambda = aI.$$

En este caso  $S' = -aSI$  y el producto da cuenta del número de encuentros. Una expresión más comprometida para  $\lambda$  es:

$$\lambda = c\theta \frac{I}{N},$$

donde  $c$  es el número promedio de interacciones entre individuos (por unidad de tiempo e individuo)<sup>2</sup>,  $\theta$  es la probabilidad de contraer la enfermedad tras un contacto con un enfermo. Así  $\theta \frac{S}{N}$  (probabilidad de encontrar un susceptible y contagiarlo) mide los nuevos enfermos tras un contacto con un infeccioso. Si en el intervalo  $[t, t + dt]$  hay  $cI dt$  interacciones totales con  $I$  individuos resulta una cantidad:

$$-dS = cI\theta \frac{S}{N} dt$$

de enfermos nuevos en dicho intervalo.

Las ecuaciones para  $I$  y  $R$  son:

$$I' = aSI - \rho I, \quad R' = \rho I.$$

La primera afirma que todos los susceptibles infectados pasan automáticamente a la clase  $I$  mientras los infectados la abandonan tras un tiempo de recuperación  $\frac{1}{\rho}$ , pasando a la clase  $R$  de acuerdo con la segunda ecuación.

El problema de valor inicial que describe el comportamiento de la epidemia es:

$$\begin{cases} S' = -aSI, & S(0) = S_0, & R' = \rho I, & R(0) = 0, \\ I' = aSI - \rho I, & I(0) = I_0, & & \end{cases}$$

<sup>2</sup> Aquí se adopta una visión ‘molecular’ de la población.

donde se observa que  $S(t) + I(t) + R(t) = N = \text{constante}$ . El estudio del sistema se reduce al de las dos primeras ecuaciones. Con eso y con todo, éste no es integrable elementalmente.

Se habla de debut ('outbreak') de la epidemia cuando:

$$I'(0) = I(0)(aS(0) - \rho) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad S(0) > \frac{\rho}{a}. \quad (2.1)$$

En ese caso  $I(t)$  crece inicialmente hasta que  $S(t)$ , que siempre es decreciente, decae al valor  $S = \frac{\rho}{a}$ . A partir de ese instante  $I(t)$  decrece y  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ . A su vez  $S(t)$  decae hasta un valor  $S_\infty$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , valor que resuelve la ecuación:

$$\frac{a}{\rho}(N - S_\infty) + \ln\left(\frac{S_\infty}{S_0}\right) = 0.$$

Si por contra  $S(0) < \rho/a$ , el número de infecciosos decae desde el momento inicial hasta tender a cero en el infinito. Pueden verse los detalles en [9].

Revisando la condición (2.1) se deduce que hace falta una fracción umbral  $\frac{S_0}{N}$  de susceptibles:

$$\frac{S_0}{N} > \frac{\rho}{aN} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{R}_0 \frac{S_0}{N} > 1, \quad \mathcal{R}_0 := \frac{aN}{\rho}, \quad (2.2)$$

para que se inicie la epidemia. Obviamente, una condición necesaria es que:

$$\mathcal{R}_0 > 1,$$

siendo  $\mathcal{R}_0$  el número de reproducción básico. Para interpretar  $\mathcal{R}_0$ , que es una cantidad adimensional, valoramos el efecto de un contagioso  $I_0 = 1$  en la población total  $N$ . Como  $S_0 = N - 1$ :

$$-S'(0) = a(N - 1) \approx aN,$$

si  $N \gg 1$ . Así, inicialmente un contagiado produce  $aN$  contagios nuevos por unidad de tiempo. Teniendo en cuenta que el tiempo de duración de la enfermedad es  $1/\rho$ , un sólo enfermo da lugar a  $\mathcal{R}_0 = aN/\rho$  contagios secundarios que es el significado estándar que se atribuye a  $\mathcal{R}_0$ .

*Observación 2.1.* Una 'campana de vacunación' consiste en trasvasar  $V$  susceptibles (los vacunados) a la clase  $R$  de forma que:

$$\frac{S_0 - V}{N} < \frac{1}{\mathcal{R}_0}.$$

De esta forma se controla la epidemia. Lo que es más importante: se alcanza el objetivo sin necesidad de vacunar a toda la población. En la misma línea de razonamiento, R. Ross demostró matemáticamente en 1911 que para controlar la malaria bastaba con mantener la población del mosquito *anopheles* (el 'vector' de la enfermedad) por debajo de una cantidad umbral ([2]). En esto radica el valor cualitativo de los modelos.

El modelo analizado es todavía compatible con un crecimiento Malthusiano (1.2):

$$N' = \alpha N, \quad (2.3)$$

de la población total  $N$ , donde  $\alpha = \nu - \mu$  y  $\mu$  representa la mortalidad natural de la misma. Una posibilidad es:

$$\begin{cases} S' = \nu N - aSI - \mu S \\ I' = aSI - \rho I - \mu I \\ R' = \rho I - \mu R. \end{cases}$$

En este caso se observa que no hay nacimientos en las clases  $I, R$ , es decir ni la enfermedad ni la inmunidad se transmiten a la descendencia. La totalidad de nuevos individuos es susceptible. Por otro lado, si  $\alpha \neq 0$  la población total  $N$  está sometida a un comportamiento drástico que arrastra al de la epidemia (extinguirse si  $\alpha < 0$ , expandirse exponencialmente si  $\alpha > 0$ ). Luego es natural suponer que  $N$  está en equilibrio y por tanto que  $\nu = \mu$ . En este supuesto las ecuaciones a estudiar son:

$$\begin{cases} S' = \mu(N - S) - aSI \\ I' = aSI - (\rho + \mu)I \\ R' = \rho I - \mu R, \end{cases} \quad S + I + R = N = \text{constante}. \quad (2.4)$$

Como  $R$  se deduce de  $I$  por integración bastan las dos primeras ecuaciones para describir el comportamiento del sistema. Viene éste dictado por las soluciones de equilibrio y el parámetro:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{aN}{\rho + \mu}.$$

Si  $\mathcal{R}_0 < 1$  el único equilibrio no negativo es  $(S^*, I^*) = (N, 0)$ . Es un nodo estable y toda solución no negativa satisface:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t), I(t)) = (N, 0).$$

Esto significa que la epidemia se extingue a largo plazo.

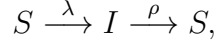
Para  $\mathcal{R}_0 > 1$  además de  $(N, 0)$  existe otro punto de equilibrio dado por  $S_1^* = N/\mathcal{R}_0$ ,  $I_1^* = \mu a^{-1}(\mathcal{R}_0 - 1)$ . Ahora  $(N, 0)$  es inestable (un punto de silla) mientras que  $(S_1^*, I_1^*)$  constituye un nodo estable. Más aún, todas las soluciones positivas cumplen:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t), I(t)) = (S_1^*, I_1^*).$$

Así, la epidemia se estabiliza en un cuadro permanente de casos  $I_1^*$ .

## 2.2. El modelo SIS

Como se ha visto, las enfermedades SIR acaban colapsando cuando la fracción  $S_0/N$  de susceptibles baja de la cantidad umbral  $\mathcal{R}_0^{-1} = \rho/aN$ . Por contra, en las de tipo *SIS* los enfermos vuelven a ser susceptibles tras pasar la infección. El esquema es:



y no hay clase  $R$  de elementos inmunizados. Bajo la premisa de que la población total  $N$  permanece constante las ecuaciones son:

$$\begin{cases} S' = -aSI + \rho I \\ I' = aSI - \rho I, \end{cases} \quad (2.5)$$

donde como se ve  $(S + I)' = 0$ . La dinámica de infectados sigue la ecuación:

$$I' = a(N - I)I - \rho I.$$

Usando las variables adimensionales  $u = I/N$ ,  $\tau = \rho t$ , para el número de infectados y el tiempo (donde el valor característico  $1/\rho$  es la unidad) la ecuación toma la forma:

$$\frac{du}{d\tau} = \mathcal{R}_0 u \left( \frac{\mathcal{R}_0 - 1}{\mathcal{R}_0} - u \right), \quad \mathcal{R}_0 = \frac{aN}{\rho}.$$

Esta es la ecuación logística, bien conocida en dinámica de poblaciones, cuya dinámica es elemental. Si  $\mathcal{R}_0 \leq 1$  todas las soluciones no negativas se anulan asintóticamente. Por contra si  $\mathcal{R}_0 > 1$  la población mantiene una configuración estable de infectados dada por:

$$u^* = \frac{\mathcal{R}_0 - 1}{\mathcal{R}_0}.$$

La enfermedad adopta entonces un perfil endémico (permanente) en la población. Merece la pena resaltar un aspecto que nos encontraremos más adelante (véanse las Observaciones 2.12 y 2.13). A saber: que la epidemia se consolida de forma permanente ( $u^* > 0$ ) si o bien el número total  $N$  o bien la intensidad de contactos  $a$  son altos.

Por otro lado, el modelo SIS es compatible con una dinámica Malthusiana (2.3) de la población total en supuestos similares a los de la sección anterior. Así las ecuaciones:

$$\begin{cases} S' = \nu N - aSI + \rho I - \mu S \\ I' = aSI - \rho I - \mu I, \end{cases} \quad (2.6)$$

describen cómo se comporta la epidemia cuando la enfermedad no se transmite a la descendencia. Si, como en el caso anterior, se admite que  $N$  tiene un perfil

estable, es decir que se mantiene constante y por consiguiente  $\mu = \nu$ , la forma de las ecuaciones es:

$$\begin{cases} S' = -aSI + (\rho + \mu)I \\ I' = aSI - (\rho + \mu)I. \end{cases}$$

Son exactamente (2.5) donde ahora el grupo  $\rho + \mu$  reemplaza al antiguo  $\rho$  y  $\mathcal{R}'_0 = aN/\mu + \rho$  hace las veces de  $\mathcal{R}_0$ .

### 2.3. El modelo SIR para poblaciones estructuradas por edades

El marco donde vamos a estudiar ahora la propagación de enfermedades es el de una población estructurada por edades  $u(a, t)$ . Tanto la intensidad del contagio  $\lambda$  como la tasa de recuperación  $\rho$  van a depender de la edad. Como hipótesis de trabajo se supone que dicha población está en régimen Malthusiano estable, es decir que  $\alpha^* = 0$  (Sección 1.6). Con más precisión que permanece en estado de equilibrio y por ello:

$$u(a, t) = u^*(a), \quad \forall t > 0, \quad (2.7)$$

donde  $u^*(a)$  resuelve el problema (1.36) con  $g(a) = 0$ . Al ser  $\alpha^* = 0$  y cumplirse la condición de compatibilidad (1.37), existe una infinidad de soluciones estacionarias que se representan en la forma:

$$u^*(a) = c_0 \Pi(a), \quad c_0 \in \mathbb{R}^+. \quad (2.8)$$

El factor  $c_0$  es proporcional a la población total  $N$  a través de la relación:

$$N = \int_0^{a^\dagger} u^*(a) da = c_0 \int_0^{a^\dagger} \Pi(a) da.$$

A los efectos de formular el primero de nuestros modelos, la población se fragmenta en las clases  $S$ ,  $I$ ,  $R$  referidas en la Sección 2.1, cuyas densidades nombramos  $s$ ,  $i$  y  $r$ . Por tanto:

$$u(a, t) = s(a, t) + i(a, t) + r(a, t). \quad (2.9)$$

La tasa de recuperación vendrá representada por una función no negativa  $\rho(a)$ . Sin embargo, la tasa de contagio  $\lambda$  debe reflejar tanto el número de encuentros (el término  $SI$  en las Secciones 2.1 y 2.2) como la influencia de la edad en la propagación de la enfermedad. Por ejemplo, enfermedades del perfil del sarampión o las paperas sólo se transmiten entre los primeros tramos de edad y muy raramente de jóvenes a adultos. Las de transmisión sexual son sin embargo

propias de individuos maduros. La forma que adoptamos para  $\lambda$  es como sigue [6]:

$$\lambda = k_1(a) \int_0^{a^\dagger} k_2(\alpha) i(\alpha, t) d\alpha, \quad (2.10)$$

donde el núcleo  $k_1(a)k_2(\alpha)$  –la tasa de contactos infecciosos– mide cómo se propaga el contagio a la clase  $a$  como fruto del contacto con individuos infectados en las diversas clases de edad  $\alpha$  (infectividad ‘inter cohortes’).

Consideramos asimismo el trasvase de la enfermedad de padres a hijos (transmisión vertical). Como valoración principal observamos que hijos infecciosos o inmunes sólo pueden proceder de padres de las clases  $I$  y  $R$  respectivamente. Sin embargo las tres clases pueden dar lugar a descendencia susceptible. Se propone por tanto la siguiente expresión para las tasas de natalidad:

$$\begin{cases} s(0, t) = \int_0^{a^\dagger} (\nu(a)s + (1 - q_1)\nu(a)i + (1 - q_2)r) da, \\ i(0, t) = \int_0^{a^\dagger} q_1\nu(a)i da, \\ r(0, t) = \int_0^{a^\dagger} q_2\nu(a)r da, \end{cases} \quad (2.11)$$

donde los factores  $q_i \in [0, 1]$  son las fracciones de nacidos en las clases  $I$  y  $R$  procedentes de padres en dichas clases.

Las ecuaciones en derivadas parciales que deben satisfacer las densidades son:

$$\begin{cases} s_t + s_a + \mu(a)s = -\lambda s, \\ i_t + i_a + \mu(a)i = \lambda s - \rho(a)i, \\ r_t + r_a + \mu(a)r = \rho(a)i. \end{cases} \quad (2.12)$$

Deben ser complementadas con las condiciones iniciales:

$$s(a, 0) = s_0(a), \quad i(a, 0) = i_0(a), \quad r(a, 0) = 0, \quad (2.13)$$

donde  $s_0$  e  $i_0$  son funciones no negativas que cumplen la condición:

$$s_0(a) + i_0(a) = u^*(a).$$

A los efectos de la continuidad de las posibles soluciones deben satisfacerse las condiciones de compatibilidad:

$$\begin{cases} s_0(0) = \int_0^{a^\dagger} (\nu s_0 + (1 - q_1)\nu i_0) da, \\ i_0(0) = \int_0^{a^\dagger} q_1\nu i_0 da. \end{cases} \quad (2.14)$$

El modelo SIR para poblaciones estructuradas por edades consiste en resolver las ecuaciones (2.12) sometidas a las condiciones de contorno (2.11) y condiciones iniciales (2.13). Se trata de un problema de dificultad considerable por dos

razones. La primera es su carácter no lineal debido a la presencia del grupo  $\lambda s$  en las ecuaciones. La segunda, que este mismo término hace que el problema sea de tipo *no local*. De hecho, las propias condiciones de contorno que hemos venido tratando son de esta naturaleza.

Debido a la relación (2.9) y a la forma de las ecuaciones las variables  $s$  e  $i$  pueden desacoplarse de  $r$ . Un caso especial del modelo SIR ocurre cuando no hay transmisión vertical en la clase  $R$ , es decir  $q_2 = 0$ . En ese caso  $r(0, t) = 0$  y las condiciones de contorno son:

$$\begin{cases} s(0, t) = \int_0^{a^\dagger} \nu(a)(u^*(a) - q_1 i(a, t)) da, \\ i(0, t) = \int_0^{a^\dagger} q_1 \nu(a) i(a, t) da. \end{cases} \quad (2.15)$$

Obsérvese que la primera de las ecuaciones equivale en realidad a:

$$s(0, t) + i(0, t) = u^*(0), \quad (2.16)$$

por lo que las dos ecuaciones (2.15) pueden substituirse por la segunda. Así, todo el problema puede expresarse en la forma:

$$\begin{cases} s_t + s_a + \mu(a)s = -\lambda s, & i(0, t) = \int_0^{a^\dagger} q_1 \nu(a) i(a, t) da, \\ i_t + i_a + \mu(a)i = \lambda s - \rho(a)i, & i(a, 0) = i_0(a), \end{cases}$$

en donde  $s(a, 0) = u^*(a) - i_0(a)$  y  $s(0, t) = u^*(0) - i(0, t)$ .

## 2.4. El modelo SIS para poblaciones estructuradas por edades

Se introduce en forma similar. Designamos por  $s$  e  $i$  las densidades de susceptibles e infecciosos mientras la población total permanece en estado estacionario. De esta forma,

$$s(a, t) + i(a, t) = u^*(a), \quad \forall t > 0, \quad (2.17)$$

siendo  $u^*(a)$  una solución estacionaria de (1.6) y  $\alpha^* = 0$ . Las tasas de recuperación  $\rho(a)$  y de infección  $\lambda$ , que tiene la forma (2.10), están constituidas por funciones  $\rho$ ,  $k_1$  y  $k_2$  en  $C[0, a^\dagger]^+$ .

Las densidades  $s$ ,  $i$  satisfacen las ecuaciones:

$$\begin{cases} s_t + s_a + \mu(a)s = -\lambda s + \rho(a)i, \\ i_t + i_a + \mu(a)i = \lambda s - \rho(a)i. \end{cases} \quad (2.18)$$

Suponemos asimismo que una fracción  $q \in [0, 1]$  de la descendencia de padres en la clase  $I$  posee la enfermedad. Más precisamente que:



$$i(0, t) = \int_0^{a^\dagger} q\nu(a)i(a, t) da. \quad (2.19)$$

Al admitir (2.17) la tasa de natalidad de la clase  $S$  viene dada por:

$$s(0, t) = u^*(0) - q \int_0^{a^\dagger} \nu(a)i(a, t) da. \quad (2.20)$$

Por otro lado, las condiciones iniciales  $s(a, 0) = s_0(a)$ ,  $i(a, 0) = i_0(a)$  deben cumplir

$$s_0(a) + i_0(a) = u^*(a), \quad 0 \leq a \leq a^\dagger, \quad (2.21)$$

y a los efectos de continuidad de la solución, también la condición de compatibilidad:

$$i_0(0) = \int_0^{a^\dagger} q\nu i_0 da. \quad (2.22)$$

De esta forma todo el modelo SIS se reduce a estudiar:

$$\begin{cases} i_t + i_a + \mu i = \lambda(u^*(a) - i) - \rho i, \\ i(0, t) = \int_0^{a^\dagger} q\nu(a)i(a, t) da, \\ i(a, 0) = i_0(a), \end{cases} \quad (2.23)$$

en donde  $0 \leq i_0(a) \leq u^*(a)$  y la tasa de infección  $\lambda$  viene expresada por (2.10). Al estudio de este problema dedicamos las próximas secciones.

## 2.5. Existencia y unicidad para el modelo SIS

Al tratar con el problema (2.23) resulta conveniente introducir la nueva función incógnita  $v$ :

$$v(a, t) = \frac{i(a, t)}{u^*(a)}. \quad (2.24)$$

Ello nos lleva a una versión sustancialmente simplificada de dicho problema, a saber:

$$\begin{cases} v_t + v_a = \Lambda(1 - v) - \rho v, & 0 < a < a^\dagger, t > 0, \\ v(0, t) = \int_0^{a^\dagger} q\nu(a)\Pi(a)v(a, t) da, & t > 0, \\ v(a, 0) = v_0(a), & a \in [0, a^\dagger], \end{cases} \quad (2.25)$$

en donde  $v_0 \in C^1[0, a^\dagger]$  cumple:

$$0 \leq v_0(a) \leq 1, \quad (2.26)$$

junto con la condición de compatibilidad,

$$v_0(0) = q \int_0^{a^\dagger} \nu(a) \Pi(a) v_0(a) da.$$

Obsérvese que la constante de normalización  $c_0$  en (2.8) se canceló en ambos miembros.

La tasa de infección  $\Lambda$  tiene la forma:

$$\Lambda = k_1(a) \int_0^{a^\dagger} k_2(s) u^*(s) v(s, t) ds.$$

En virtud del cambio (2.24) y la restricción  $0 \leq i(a, t) \leq u^*(a)$  nos limitaremos a estudiar las soluciones  $v$  que cumplen la restricción:

$$0 \leq v(a, t) \leq 1.$$

Antes de abordar la existencia de soluciones hemos de preparar la ecuación en (2.25). Para ello introducimos un término extra que dota al segundo miembro de propiedades adecuadas de monotonía:

$$v_t + v_a + cv = \Lambda(1 - v) + (c - \rho)v, \quad (2.27)$$

donde  $c > 0$  es una constante que elegiremos adecuadamente.

Vamos a buscar las soluciones de (2.25) en el espacio  $X = C(\overline{Q}) \cap L^\infty(Q)$  que metrizamos con la norma  $\|\cdot\|_\infty$ . Observaremos el segundo miembro de (2.27) como el operador (no lineal)  $\mathcal{G} : X \rightarrow X$  definido por:

$$\mathcal{G}(v) = \Lambda(v)(1 - v) + (c - \rho)v.$$

Como elemento de  $X$ ,  $\mathcal{G}(v)$  es la función de  $(a, t) \in \overline{Q}$ :

$$\mathcal{G}(v)(a, t) = k_1(a) \int_0^{a^\dagger} k_2(s) u^*(s) v(s, t) ds (1 - v(a)) + (c - \rho(a))v(a),$$

donde se destaca que la integral actúa sobre la función  $v(\cdot, t)$ . Se observa asimismo que  $\mathcal{G}$  tiene pleno sentido actuando sobre funciones  $v \in C[0, a^\dagger]$  que sólo dependen de  $a$ .

Se tiene el siguiente resultado de representación. Empleamos en el enunciado el operador solución  $\mathcal{S}$  introducido en la Sección 1.7.

**Teorema 2.2.** *Supongamos que las funciones  $\nu, \mu, \rho, v_0, k_j, j = 1, 2$  son funciones en  $C[0, a^\dagger]^+$  mientras  $v$  que cumple  $v, v_t \in X$  es una solución del problema (2.23). Entonces  $v$  se puede representar en la forma:*

$$v = \mathcal{S}(v_0, G), \quad \text{donde } G(a, t) = \mathcal{G}(v)(a, t). \quad (2.28)$$

Más precisamente:

$$v(a, t) = \int_0^{a \wedge t} e^{-c\sigma} \mathcal{G}(v)(a - \sigma, t - \sigma) d\sigma + e^{-c(a \wedge t)} \begin{cases} v_0(a - t) & a \geq t \\ B(t - a) & t > a, \end{cases} \quad (2.29)$$

donde,

$$B(t) = (e^{-ca} K_q) * B(t) + \mathcal{H}(v, v_0)(t), \quad K_q(a) = q\nu(a)\Pi(a), \quad (2.30)$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(v, v_0)(t) &= \int_t^\infty e^{-ct} K_q(a) v_0(a - t) da \\ &\quad + \int_0^t \int_\sigma^\infty e^{-c\sigma} K_q(a) \mathcal{G}(v)(a - \sigma, t - \sigma) da d\sigma. \end{aligned} \quad (2.31)$$

*Demostración.* Consecuencia directa del Teorema 1.23. Nótese que en el problema (2.25) se usa la versión equivalente (2.27) de la ecuación.  $\square$

*Observación 2.3.* Empleando el núcleo resolvente  $R_q$  de la ecuación (2.30) (Teorema 1.7) podemos expresar  $B$  en términos de  $v$  en la forma:

$$B(t) = R_q * \mathcal{H}(v, v_0)(t) + \mathcal{H}(v, v_0)(t). \quad (2.32)$$

Representaremos el primer miembro como el operador  $\mathcal{B}(v, v_0)(t)$  cuando sea preciso resaltar esta dependencia. Usando esta notación en (2.29) se refleja más claramente el carácter de ecuación de punto fijo de (2.25):

$$v(a, t) = \int_0^{a \wedge t} e^{-c\sigma} \mathcal{G}(v)(a - \sigma, t - \sigma) d\sigma + e^{-c(a \wedge t)} \begin{cases} v_0(a - t) & a \geq t \\ \mathcal{B}(v, v_0)(t - a) & t > a. \end{cases} \quad (2.33)$$

Por su mayor flexibilidad a los efectos de las demostraciones trabajaremos en el resto de la sección con soluciones *generalizadas* de (2.25). De acuerdo con la Definición 2.25, las soluciones generalizadas son funciones  $v \in X$  que satisfacen la ecuación de punto fijo (2.33). Esto significa que el grupo  $v_t + v_a$  se interpreta como la derivada direccional (1.34).

**Teorema 2.4.** *Bajo las hipótesis del Teorema 2.2 el problema (2.25) admite una única solución  $v \in X$  en el intervalo  $0 \leq v \leq 1$ .*

**Lema 2.5.** *Supongamos que  $c$  cumple:*

$$\|\rho\|_\infty + \|k_1\|_\infty \int_0^{a^\dagger} k_2 u^* da \leq c. \quad (2.34)$$

*Entonces el operador  $\mathcal{G} : X \rightarrow X$  satisface las siguientes propiedades.*

- i) Es creciente en el intervalo  $[0, 1]_X := \{v \in X : 0 \leq v \leq 1\}$ .  
 ii) Es Lipschitziano sobre conjuntos acotados  $A \subset X$ .  
 iii) Como operador  $\mathcal{G} : C[0, a^\dagger] \rightarrow C[0, a^\dagger]$  también es Lipschitziano sobre conjuntos acotados de  $C[0, a^\dagger]$ .

*Demostración.* Suponemos que  $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$  y se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(u_1) &\leq k_1 \int_0^{a^\dagger} k_2 u^* u_2 \, da (1 - u_1) + (c - \rho) u_1 \leq (c - \rho - k_1 \int_0^{a^\dagger} k_2 u^* u_2 \, da) u_1 \\ &+ k_1 \int_0^{a^\dagger} k_2 u^* u_2 \, da \leq (c - \rho - k_1 \int_0^{a^\dagger} k_2 u^* u_2 \, da) u_2 + k_1 \int_0^{a^\dagger} k_2 u^* u_2 \, da = \mathcal{G}(u_2). \end{aligned}$$

Para las afirmaciones restantes basta tener en cuenta que  $\Lambda$  es lineal en  $u$  y que el producto de funcionales Lipschitzianos es Lipschitziano sobre conjuntos acotados.  $\square$

**Lema 2.6.** El operador  $\mathcal{B} : X \times C[0, a^\dagger] \rightarrow C(\overline{\mathbb{R}^+})$  satisface:

- i)  $\mathcal{B} : [0, 1]_X \times [0, 1]_{C[0, a^\dagger]} \rightarrow [0, 1]_{C(\overline{\mathbb{R}^+)}$ .  
 ii)  $\mathcal{B}(v, v_0)$  es creciente separadamente en  $v \in [0, 1]_X$  y  $v_0 \in C[0, a^\dagger]$ .

*Demostración.* El crecimiento respecto de  $v_0$  se sigue de la identidad (2.32), de la positividad de  $K_q$  y de la expresión de (2.31). Análogamente, el crecimiento en  $v$  se deduce de estas observaciones y del crecimiento de  $\mathcal{G}$  con respecto de  $v$  (Lema 2.5).

Con respecto a i) es inmediato que  $\mathcal{B}(v, v_0) \geq 0$  si  $v \geq 0$  y  $v_0 \geq 0$ . Comprobamos que  $B = \mathcal{B}(v, v_0) \leq 1$ . Recordamos que  $B = \lim B_n$  donde

$$B_{n+1} = e^{-ca} K_q * B_n + \mathcal{H}(v, v_0), \quad B_0 = 0.$$

Probamos i) por inducción:  $B_n \in [0, 1]_X$  implica  $B_{n+1} \in [0, 1]_X$ . En efecto, como  $\mathcal{G}(1) \leq c$ ,

$$\begin{aligned} B_{n+1} &\leq \int_0^t e^{-ca} K_q(a) \, da + e^{-ct} \int_t^\infty K_q(a) \, da \\ &\quad + \int_0^t c e^{-c\sigma} \int_\sigma^\infty K_q(a) \, da \, d\sigma \leq q \leq 1. \end{aligned}$$

$\square$

*Demostración (Del Teorema 2.4).* Para probar la existencia de solución buscamos  $v \in X$  que satisfaga:

$$v = \mathcal{S}(v_0, \mathcal{G}(v)) =: \mathcal{T}(v),$$

donde  $v_0 \in C[0, a^\dagger]^+$  es una función fijada que cumple  $0 \leq v_0(a) \leq 1$ . Construimos por recurrencia la sucesión  $v^{(n)}$ :

$$v^{(n+1)} = \mathcal{T}(v^{(n)}), \quad v^{(0)} = 0.$$

En otros términos,  $v = v^{(n+1)}$  es la solución de:

$$\begin{cases} v_t + v_a + cv = \Lambda(1 - v^{(n)}) + (c - \rho)v^{(n)}, & 0 < a < a^\dagger, t > 0, \\ v(0, t) = \int_0^{a^\dagger} q\nu(a)\Pi(a)v(a, t) da, & t > 0, \\ v(a, 0) = v_0(a), & a \in [0, a^\dagger]. \end{cases}$$

La sucesión  $v^{(n)}$  satisface:

$$0 \leq v^{(n)}(a, t) \leq 1.$$

En efecto, por inducción, si  $v^{(n)} \leq 1$  entonces  $\mathcal{B}(v^{(n)}, v_0) \leq 1$ , luego:

$$v^{(n+1)}(a, t) \leq \int_0^{a \wedge t} ce^{-cs} d\sigma + e^{-c(a \wedge t)} = 1.$$

Asimismo  $v^{(n)}$  es creciente pues como  $\mathcal{T}$  es creciente en  $v$  entonces:

$$v^{(n-1)} \leq v^{(n)} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T}(v^{(n-1)}) = v^{(n)} \leq \mathcal{T}(v^{(n)}) = v^{(n+1)},$$

y evidentemente  $v^{(0)} = 0 \leq v^{(1)}$ . Por tanto existe el límite puntual:

$$v(a, t) = \lim v^{(n)}(a, t) \leq 1, \quad \forall (a, t) \in Q.$$

El teorema de la convergencia monótona y la estimación  $\mathcal{T}(v^{(n)}) \leq \mathcal{T}(1) \leq 1$ , nos permiten intercambiar el límite con las integral que define  $\mathcal{T}$  y:

$$v = \lim v^{(n+1)} = \lim \mathcal{T}(v^{(n)}) = \mathcal{T}(v).$$

Es decir  $v \in X$  y constituye un punto fijo de  $\mathcal{T}$ .

Afrontamos a continuación la unicidad. Sean  $v$  y  $\tilde{v}$  dos posibles soluciones de (2.25). La diferencia  $v - \tilde{v}$  satisface:

$$v - \tilde{v} = \mathcal{T}(v) - \mathcal{T}(\tilde{v}),$$

identidad que equivale a:

$$\begin{aligned} v(a, t) - \tilde{v}(a, t) &= \int_0^{a \wedge t} e^{-c\sigma} (\mathcal{G}(v) - \mathcal{G}(\tilde{v}))(a - \sigma, t - \sigma) d\sigma \\ &\quad + e^{-c(a \wedge t)} \begin{cases} 0 & a \geq t \\ (\mathcal{B}(v, v_0) - \mathcal{B}(\tilde{v}, v_0))(t - a) & t > a. \end{cases} \end{aligned}$$

Recordamos ahora que (Lema 2.5):

$$\|\mathcal{G}(v)(\cdot, t) - \mathcal{G}(\tilde{v})(\cdot, t)\|_{\infty, [0, a^\dagger]} \leq L \|v(\cdot, t) - \tilde{v}(\cdot, t)\|_{\infty, [0, a^\dagger]} =: L z(t).$$

Así:

$$\begin{aligned} |v(a, t) - \tilde{v}(a, t)| &\leq L \int_0^{a \wedge t} e^{-c\sigma} z(t - \sigma) d\sigma \\ &\quad + \chi_{Q^+}(a, t) e^{-c(a \wedge t)} |\mathcal{B}(v, v_0)(t - a) - \mathcal{B}(\tilde{v}, v_0)(t - a)|, \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde  $\chi_{Q^+}$  es la función característica de  $Q^+$ . Observamos ahora que:

$$\mathcal{B}(v, v_0) - \mathcal{B}(\tilde{v}, v_0) = (e^{-ca} K_q) * (\mathcal{B}(v, v_0) - \mathcal{B}(\tilde{v}, v_0))(t) + \mathcal{H}(v, v_0) - \mathcal{H}(\tilde{v}, v_0).$$

De ahí:

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}(v, v_0) - \mathcal{B}(\tilde{v}, v_0)|(t) &\leq q\nu^+ \int_0^t |\mathcal{B}(v, v_0) - \mathcal{B}(\tilde{v}, v_0)|(\sigma) d\sigma \\ &\quad + L \int_0^t e^{-c\sigma} \int_\sigma^\infty K_q(a) z(t - \sigma) da d\sigma. \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-c\sigma} \int_\sigma^\infty K_q(a) z(t - \sigma) da d\sigma &\leq \int_0^t z(t - \sigma) \int_\sigma^{a^\dagger} K_q(a) da d\sigma \\ &\leq q \int_0^t z(t - \sigma) d\sigma \leq \int_0^t z(\sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

luego:

$$|\mathcal{B}(v, v_0) - \mathcal{B}(\tilde{v}, v_0)|(t) \leq q\nu^+ \int_0^t |\mathcal{B}(v, v_0) - \mathcal{B}(\tilde{v}, v_0)|(\sigma) d\sigma + L \int_0^t z(\sigma) d\sigma.$$

Del Lema de Gronwall (ver Anexo) se deduce que:

$$|\mathcal{B}(v, v_0) - \mathcal{B}(\tilde{v}, v_0)|(t) \leq L e^{q\nu^+ t} \int_0^t z(\sigma) d\sigma.$$

Se sigue entonces de (2.35) que:

$$\begin{aligned} |v(a, t) - \tilde{v}(a, t)| &\leq L \int_0^{a \wedge t} e^{-c\sigma} z(t - \sigma) d\sigma + L \chi_{Q^+} e^{q\nu^+(t-a)} \int_0^{t-a} z(\sigma) d\sigma \\ &\leq L \int_0^t z(t - \sigma) d\sigma + L e^{q\nu^+ t} \int_0^t z(\sigma) d\sigma \leq 2L e^{q\nu^+ t} \int_0^t z(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Tomando supremos para  $a \in [0, a^\dagger]$  en el primer miembro de la primera desigualdad:

$$z(t) \leq 2L e^{q\nu^+ t} \int_0^t z(\sigma) d\sigma.$$

Por tanto (Lema de Gronwall)  $z = 0$ . □

**Corolario 2.7 (Principio de Comparación).** Sean  $v, \tilde{v}$  soluciones de (2.25) correspondientes a datos  $v_0, \tilde{v}_0 \in [0, 1]_X$ . Entonces:

$$v_0 \leq \tilde{v}_0 \quad \Rightarrow \quad v \leq \tilde{v}.$$

**Corolario 2.8 (Propiedad de semigrupo).** Denotemos la solución de (2.25) como  $v(t, v_0)$  y sean  $s, t \geq 0$ . Entonces:

$$v(t + s, v_0) = v(t, v(s, v_0)).$$

## 2.6. Soluciones estacionarias

En el escenario simplificado (2.5) y (2.6) de enfermedades SIS la infección se extingue si  $\mathcal{R}_0 < 1$  mientras se estabiliza en torno a un valor positivo  $I^*$  cuando  $\mathcal{R}_0 > 1$ .

Estudiamos ahora cómo se manifiesta este fenómeno en el modelo más complejo (2.23). Partimos de la versión normalizada (2.25) para analizar las soluciones estacionarias:

$$\begin{cases} v_a = \Lambda(1 - v) - \rho v, & 0 < a < a^\dagger, \\ v(0) = \int_0^{a^\dagger} K_q(a)v(a) da, \end{cases} \quad (2.36)$$

que busquemos en el rango  $0 \leq v \leq 1$ . Como ocurre en los problemas de autovalores,  $v = 0$  (el régimen “libre” de enfermedad) es una solución trivial del problema no importa cómo sea  $\Lambda$ . Luego se trata de encontrar soluciones no triviales.

En nuestro estudio consideramos primeramente la ecuación auxiliar:

$$v_a = \lambda k_1(a)(1 - v) - \rho(a)v, \quad 0 < a < a^\dagger, \quad (2.37)$$

donde  $v_0 = v(0)$  y  $\lambda$  son parámetros. Así, una solución  $v = v(a, v_0, \lambda)$  de la (2.37) define una solución de (2.36) si y sólo si se cumplen las ecuaciones:

$$\begin{cases} \lambda = \int_0^{a^\dagger} k_2(a)u^*(a)v(a, v_0, \lambda) da, \\ v_0 = \int_0^{a^\dagger} K_q(a)v(a, v_0, \lambda) da. \end{cases} \quad (2.38)$$

La existencia consiste en la discusión de un sistema de dos ecuaciones en las incógnitas  $(v_0, \lambda)$ . En efecto, la solución general de (2.37) es:

$$v = R(a)e^{-\lambda \int_0^a k_1} v_0 + \lambda \int_0^a \frac{R(a)}{R(s)} e^{-\lambda \int_s^a k_1} k_1(s) ds =: R(a)e^{-\lambda \int_0^a k_1} v_0 + \lambda \phi(a, \lambda),$$

donde  $R(a) = e^{-\int_0^a \rho}$ . Las ecuaciones (2.38) se transforman en:

$$\lambda = E(\lambda)v_0 + \lambda E_0(\lambda), \quad v_0 = L(\lambda)v_0 + \lambda L_0(\lambda), \quad (2.39)$$

donde:

$$E(\lambda) = \int_0^{a^\dagger} k_2(a)u^*(a)R(a)e^{-\lambda \int_0^a k_1} da, \quad E_0(\lambda) = \int_0^{a^\dagger} k_2(a)u^*(a)\phi(a, \lambda) da,$$

$$L(\lambda) = \int_0^{a^\dagger} K_q(a)R(a)e^{-\lambda \int_0^a k_1} da, \quad L_0(\lambda) = \int_0^{a^\dagger} K_q(a)\phi(a, \lambda) da.$$

**Lema 2.9.** *Supongamos que  $q > 0$ . Entonces la función  $L(\lambda) > 0$  mientras:*

$$\lambda L_0(\lambda) < 1 - L(\lambda),$$

para todo  $\lambda \geq 0$ .

*Demostración.* En efecto:

$$L(\lambda) < \int_0^{a^\dagger} K_q(a)e^{-\lambda \int_0^a k_1} da, \quad \lambda \phi \leq 1 - e^{-\lambda \int_0^a k_1} \quad \Rightarrow$$

$$\lambda L_0(\lambda) + L(\lambda) < \int_0^{a^\dagger} K_q(a)(1 - e^{-\lambda \int_0^a k_1}) + \int_0^{a^\dagger} K_q(a)e^{-\lambda \int_0^a k_1} = q \leq 1.$$

□

*Observación 2.10.*

- a) Si  $q = 0$  no hay transmisión vertical y  $L = L_0 = 0$ . De la segunda ecuación de (2.39) resulta  $v_0 = 0$ . La solución estacionaria es  $v^*(a) = \lambda^* \phi(a, \lambda^*)$  siempre que  $\lambda^*$  cumplan  $E_0(\lambda) = 1$  (Teorema 2.11).
- b) Si  $q \neq 0$ ,  $L_0(\lambda) = 0 \forall \lambda > 0$  si  $\nu \phi(\cdot, \lambda) = 0$ . Esto sólo puede ocurrir si los datos  $\nu$  y  $k_1$  son triviales:  $\exists c > 0$  tal que  $\text{sop } \nu \subset [0, c]$  y  $\text{sop } k_1 \subset [c, a^\dagger]$ . De nuevo  $v_0 = 0$  y la solución estacionaria es  $v^*(a) = \lambda^* \phi(a, \lambda^*)$  donde  $E_0(\lambda^*) = 1$ .
- c) Si estamos en alguno de los casos a) ó b) se deduce del Lema 2.9 que  $0 \leq v^*(a) \leq 1$ . En caso contrario  $0 < v_0 < 1$  y de dicha desigualdad también tenemos que  $0 < v^*(a) < 1$ .

**Teorema 2.11.**

- a) Si  $q > 0$  y los datos son no triviales una condición necesaria y suficiente para que (2.25) admita una solución estacionaria no trivial  $v^*(a)$  es:

$$\frac{E(0)L_0(0)}{1 - L(0)} + E_0(0) > 1. \quad (2.40)$$

- b) Si  $q = 0$  ó  $q \neq 0$  pero los datos son triviales, (2.25) admite una solución estacionaria no trivial  $v^*(a)$  si y sólo si:

$$E_0(0) > 1. \quad (2.41)$$

Dicha solución es única en ambos casos.



*Demostración.* Si  $q \neq 0$  despejando  $v_0$  en la segunda ecuación de (2.39) y substituyendo en la primera obtenemos:

$$\frac{E(\lambda)L_0(\lambda)}{1-L(\lambda)} + E_0(\lambda) = 1. \quad (2.42)$$

Notamos ahora que las funciones  $E$ ,  $E_0$ ,  $L$  y  $L_0$  son decrecientes y tienen límite cero en el infinito. Por consiguiente la ecuación admite una única solución si y sólo si se cumple (2.42). El caso b) se razona de la misma manera.  $\square$

*Observación 2.12.* El modelo SIS definido por (2.23) se sustenta sobre la premisa de que la población se encuentra en estado estacionario:

$$u^*(a) = N \frac{\Pi(a)}{\int_0^{a^+} \Pi(s) ds},$$

donde el parámetro  $N$  representa la población total. El primer miembro de (2.42) es múltiplo de  $N$  y por tanto equivale a la condición umbral:

$$N > N^*. \quad (2.43)$$

Cuando los otros datos se mantienen fijados, tendremos un régimen endémico de nuestra población, es decir una configuración estacionaria de infecciosos:

$$i^*(a) = u^*(a)v^*(a),$$

siempre que la población total  $N$  sea superior a una cantidad crítica  $N^*$ .

*Observación 2.13.* Si la función  $k_2$  que mide la intensidad del contagio inter cohortes, crece proporcionalmente a un parámetro  $k_2(a) = \theta \tilde{k}_2(a)$ ,  $\theta > 0$ , entonces (2.42) equivale a  $\theta > \theta^*$ . Luego una gran interacción entre los diferentes tramos de edad genera un perfil estacionario  $v^*(a)$ . Una condición similar puede formularse para el factor  $k_1(a)$  de infección de individuos con edad  $a$ .

La condición (2.40) se puede expresar como:

$$\mathcal{R}_0 := E(0)L_0(0) + L(0) + E_0(0)(1 - L(0)) > 1. \quad (2.44)$$

La existencia de equilibrios no triviales del problema (2.25) tiene entonces lugar sólo si  $\mathcal{R}_0 > 1$ .

## 2.7. Comportamiento asintótico

El siguiente resultado afirma que el modelo SIS estructurado por edades exhibe la misma respuesta asintótica que su contrapartida homogénea (2.5). Antes de enunciarlo señalamos que cuando los datos  $v_0$ ,  $\nu$  y  $k_2$  satisfacen:

$$q\nu(a+t)v_0(a) = k_2(a+t)v_0(a) = 0, \quad \forall 0 \leq a \leq a^\dagger, \quad t \geq 0, \quad (2.45)$$

entonces la solución  $v(a, t)$  de (2.25) se anula en  $Q^+$ . Las condiciones (2.45) equivalen a que los soportes de  $\nu$  y  $k_2$  se sitúan en  $t \leq c$  mientras que el de  $v_0$  está en  $t \geq 0$ . Significan que el contingente inicial  $v_0$  de la población carece de las capacidades de reproducirse y contagiar. Por eso la epidemia se extingue para  $t \geq a^\dagger$  ([6]).

El valor de  $\mathcal{R}_0$  que figura en el enunciado designa el número de reproducción introducido en (2.44) mientras se admite que  $v_0$ ,  $\nu$  y  $k_2$  no cumplen (2.45).

**Teorema 2.14.** *Bajo las condiciones de la Sección 2.5, sea  $v(t, v_0)$  la solución del problema (2.25) correspondiente al dato  $v_0 \in C[0, a^\dagger] \setminus \{0\}$ ,  $0 \leq v_0 \leq 1$ .*

a) *Si  $\mathcal{R}_0 \leq 1$  entonces:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t, v_0) = 0,$$

*uniformemente en  $[0, a^\dagger]$ .*

b) *Si por contra  $\mathcal{R}_0 > 1$  entonces:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t, v_0) = v^*(a),$$

*uniformemente en  $[0, a^\dagger]$ , siendo  $v^*(a)$  la única solución estacionaria no trivial de dicho problema.*

*Observación 2.15.* La demostración se omite por razones de espacio.

# A

---

## Apéndice

### A.1. Lema de Gronwall

**Lema A.1.** Sean  $z, h \in C[a, b]$ ,  $h \geq 0$ , tales que:

$$z(t) \leq z_0 + \int_a^t h(s)z(s) ds, \quad t \in [a, b].$$

Entonces:

$$z(t) \leq z_0 e^{\int_a^t h}, \quad t \in [a, b].$$

La conclusión también es cierta si reemplazamos  $z_0$  por una función  $C^1$  y creciente  $\varphi(t)$ .

### A.2. Transformada de Laplace

**Proposición A.2.** Sea  $f$  una función medible en  $\mathbb{R}^+$  y supongamos que existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que:

$$e^{-cx} f \in L^1(\mathbb{R}^+), \quad (\text{A.1})$$

entonces:

$$e^{-zx} f \in L^1(\mathbb{R}^+), \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \Re z \geq c.$$

*Observación A.3.* La hipótesis (A.1) implica que  $f \in L^1(0, b)$  para todo  $b > 0$ .

**Definición A.4.** Si  $f$  está en las condiciones de la proposición y cumple (A.1) se dice que es  $L$  transformable. La función:

$$F(z) = \int_0^\infty e^{-zx} f dx,$$

se llama la transformada de Laplace de  $f$ . Está definida en  $H_\omega = \{\Re z > \omega\}$  donde  $\omega$  (= la abscisa de convergencia de  $f$ ) es el ínfimo de los  $c$  tales que se satisfice (A.1).

Se usan también las notaciones:

$$F(z) = \mathcal{L}(f)(z) = \hat{f}(z).$$

**Teorema A.5.** *La función  $F$  es holomorfa en  $H_\omega$  y*

$$F^{(n)}(z) = (-1)^n \int_0^\infty x^n e^{-zx} f \, dx, \quad \forall z \in H_\omega.$$

Dadas  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^+)$  su producto de convolución se define como:

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-t)g(t) \, dt = \int_0^x f(t)g(x-t) \, dt.$$

Se comprueba que la definición tiene sentido y que  $f * g \in L^1(\mathbb{R}^+)$ .

**Teorema A.6.** *Sean  $f, g$  funciones  $L$  transformables. Entonces:*

$$\mathcal{L}(f * g)(z) = \mathcal{L}(f)(z)\mathcal{L}(g)(z).$$

Describimos el comportamiento asintótico de la transformada de Laplace.

**Proposición A.7.** *Sea  $f$  una función  $L$  transformable y  $c > \omega$ . Entonces:*

$$\lim_{z \rightarrow \infty, \Re z \geq c} F(z) = 0.$$

Algunas propiedades de la transformada de Laplace se deducen de la transformada de Fourier que ahora introducimos.

### A.2.1. Transformada de Fourier en $L^1$

Como extensión de la noción de serie de Fourier, la transformada de Fourier tiene como objetivo representar en forma integral una función definida en todo  $\mathbb{R}$ . En el caso de las series de Fourier la función a representar sólo lo está en un intervalo finito.

**Definición A.8.** *Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  su transformada de Fourier  $\mathcal{F}(f)$  se define como:*

$$\mathcal{F}(f)(y) = \hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{iyx} f(x) \, dx.$$

Que la definición es correcta es consecuencia de lo siguiente.

**Lema A.9 (Lema de Riemann–Lebesgue).** *Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{F}(f)$  está bien definida. Más aún  $\mathcal{F}(f) \in C(\mathbb{R})$  y*

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f)(y) = 0.$$

*Demostración.* La convergencia a cero en el infinito se deduce de que:

$$\mathcal{F}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos(yx) dx + i \int_{\mathbb{R}} f(x) \operatorname{sen}(yx) dx \rightarrow 0,$$

cuando  $|y| \rightarrow \infty$  en virtud del Lema de Riemann–Lebesgue clásico ([1]) de las series de Fourier.  $\square$

**Teorema A.10.** Si  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  entonces  $\mathcal{F}(f * g)(y) = \hat{f}(y)\hat{g}(y)$ .

Una cuestión importante es la de la invertibilidad de la transformada de Fourier de la cual se deduce la correspondiente propiedad para la transformada de Laplace.

**Definición A.11.** Dada  $g \in L^1(\mathbb{R})$  se define:

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} g(y) dy.$$

La notación está bien justificada porque se tiene lo siguiente.

**Teorema A.12 (Inversión en  $L^1$ ).** Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  es tal que  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  entonces:

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}), \tag{A.2}$$

donde la igualdad se cumple en casi todo punto.

*Observación A.13.* Si  $f \in L^1(\mathbb{R})$  no se tiene necesariamente que  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ . Por ejemplo:

$$f = \chi_{[-1,1]} \Rightarrow \hat{f}(y) = 2 \frac{\operatorname{sen} y}{y} \notin L^1(\mathbb{R}).$$

La propiedad requiere una cierta dosis de regularidad en  $f$ . Por ejemplo:

$$f = \chi_{[-1,1]}(x)(1 - |x|) \Rightarrow \hat{f}(y) = 2 \frac{1 - \cos y}{y^2} \in L^1(\mathbb{R}).$$

Obsérvese que el Teorema A.12 implica que  $f$  en (A.2) coincide en casi todo punto con una función continua. Luego ésta no puede ser continua a trozos.

**Lema A.14.** Sea  $f \in C(\mathbb{R})$  de clase  $C^1$  a trozos. Si  $f' \in L^1(\mathbb{R})$  junto con

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} f = 0,$$

entonces:

$$\mathcal{F}(f')(y) = -iy\mathcal{F}(f)(y).$$

*Demostración.* Integrando por partes:

$$\int_{-R}^R e^{iyx} f'(x) dx = e^{iyx} f(x) \Big|_{-R}^R - iy \int_{-R}^R e^{iyx} f(x) dx, \quad (\text{A.3})$$

de donde se deduce la identidad.  $\square$

Usando el lema y lo que desarrollamos más abajo se prueba lo siguiente.

**Proposición A.15.** *Si  $f$  satisface las condiciones del Lema A.14 y además  $f' \in L^2(\mathbb{R})$  entonces  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ .*

Enunciamos ahora una mejora sustancial del Teorema A.12. Remitimos a [1, Chap. 7] para una prueba.

**Teorema A.16.** *Sean  $f \in L^1(\mathbb{R})$  y  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Supongamos que para algún  $\delta > 0$ :*

$$\frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm)}{t} \in L^1(0, \delta),$$

en donde se admite la existencia de los límites laterales  $f(x_0 \pm)$ . Entonces:

$$\frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R e^{-ix_0 y} \hat{f}(y) dy.$$

*Observación A.17.*

a) Muchas veces se escribe:

$$\frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_0 y} \hat{f}(y) dy.$$

Las iniciales se leen “valor principal” y con frecuencia se omiten. Si  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  el valor principal coincide con el de la integral.

b) La hipótesis del teorema se cumple si por ejemplo  $f$  es derivable en  $x_0$ .

### A.2.2. La transformada de Fourier en $L^2$

La transformada de Fourier se define en el espacio  $L^2(\mathbb{R})$  mediante un proceso menos transparente pues  $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$ . Por ello, dar sentido a  $\mathcal{F}$  en  $L^2(\mathbb{R})$  necesita aclaraciones.

Obsérvese que si  $f \in L^2(\mathbb{R})$  y para  $R > 0$  denotamos  $f_R = \chi_{[-R,R]} f$  entonces  $f_R \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  y:

$$f_R \rightarrow f, \quad R \rightarrow \infty,$$

en  $L^2(\mathbb{R})$ . Se demuestra el siguiente resultado ([10, Cap. X]).

**Teorema A.18.** Dadas  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  entonces las sucesiones de funciones  $\mathcal{F}(f_R), \mathcal{F}^{-1}(g_R)$  convergen en el espacio  $L^2(\mathbb{R})$  cuando  $R \rightarrow \infty$ .

*Observación A.19.*

- a) Como  $\mathcal{F}^{-1}(g)(y) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(g)(-y)$  resulta que la convergencia de  $\mathcal{F}^{-1}(g_R)$  es consecuencia de la de  $\mathcal{F}(g_R)$ .
- b) Si  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$  el límite  $f_R \rightarrow f$  tiene lugar en  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ . Esto implica que  $\hat{f}_R \rightarrow \hat{f}$  uniformemente en  $\mathbb{R}$  y  $\mathcal{F}f = \hat{f}$  donde en el primer miembro la transformada de Fourier se entiende en el sentido de  $L^2$ . Las dos definiciones coinciden entonces sobre  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ .

Los límites referidos en el teorema dan lugar a la transformada de Fourier en  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Definición A.20.** Dadas  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  se definen la transformada de Fourier  $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$  de  $f$  y la transformada de Fourier inversa  $\mathcal{F}^{-1}(g)$  de  $g$  como:

$$\mathcal{F}(f) = \lim_{R \rightarrow \infty} \mathcal{F}(f_R), \quad \mathcal{F}^{-1}(g) = \lim_{R \rightarrow \infty} \mathcal{F}^{-1}(g_R), \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}).$$

El Teorema A.18 afirma que:

$$\hat{f}(y) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{ixy} f(x) dx.$$

donde el límite ha de entenderse en  $L^2(\mathbb{R})$ . Sin embargo y para una amplia clase de ejemplos el límite es válido en casi todo punto  $y \in \mathbb{R}$ . En ese caso ponemos:

$$\hat{f}(y) = \text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(x) dx.$$

Las mismas observaciones se aplican a la transformada inversa  $\mathcal{F}^{-1}$ .

*Demostración (Prueba de la Proposición A.15).* Tenemos:

$$\hat{f} = \frac{1}{iy} \mathcal{F}(f') \in L^2(\{|y| \geq \varepsilon\}),$$

para  $\varepsilon > 0$  lo que prueba el resultado. □

La transformada de Fourier define, módulo una constante, una isometría en  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Teorema A.21 (Identidades de Parseval).** Sean  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ . Entonces:

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f} \overline{\hat{g}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f \overline{g}, \quad \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |f|^2.$$

**Teorema A.22 (Inversión en  $L^2$ ).** Si  $f \in L^2(\mathbb{R})$  entonces:

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)).$$

### A.2.3. Inversión de la transformada de Laplace

Sea  $f$  medible en  $\mathbb{R}^+$  con abscisa de convergencia  $\omega < \infty$ . Tomando  $a > \omega$  se tiene que:

$$F(a - iy) = \mathcal{F}(f_a)(y), \quad f_a(x) = e^{-ax} \tilde{f}(x) \in L^1(\mathbb{R}),$$

y  $\tilde{f}$  es la extensión por cero de  $f$  a  $\mathbb{R}$ . Del Teorema A.16 se deduce el siguiente. Admitimos que  $f$  está en las condiciones precedentes mientras se advierte que las integrales del enunciado se entienden en el sentido del valor principal.

#### Teorema A.23.

a) Para  $x < 0$  se tiene que:

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re z = a} e^{xz} F(z) dz.$$

b) Si  $x > 0$  y  $f$  cumple en  $x$  las hipótesis del Teorema A.16 entonces:

$$\frac{1}{2} \{f(x+) + f(x-)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re z = a} e^{xz} F(z) dz.$$

c) Si existe  $f(0+)$  y  $(f(t) - f(0+))/t \in L^1(0, \delta)$  para cierto  $\delta > 0$  entonces:

$$f(0+) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re z = a} F(z) dz.$$

Nos proponemos probar ahora el principio de unicidad que bajo la hipótesis  $\mathcal{L}(f_1) = \mathcal{L}(f_2)$  afirma que  $f_1 = f_2$  para casi todo punto.

**Lema A.24.** Sean  $f$  medible en  $\mathbb{R}^+$ , con abscisa de convergencia  $\omega < \infty$  y  $g(x) = \int_0^x f$ . Entonces

$$\hat{g}(z) = \frac{\hat{f}(z)}{z}, \quad \Re z > \max\{\omega, 0\}.$$

*Demostración.* Usando el teorema de Fubini se comprueba que:

$$e^{-cx} g \in L^1(\mathbb{R}), \quad \forall c > \max\{\omega, 0\}.$$

Usamos ahora que  $g$  es derivable para casi todo punto e integración por partes para escribir:

$$\int_0^x e^{-zt} g(t) dt = -\frac{e^{-zt}}{z} g(t) \Big|_0^x + \frac{1}{z} \int_0^x e^{-zt} f(t) dt,$$

siempre que  $z \neq 0$ . Notamos a continuación que si  $c > \max\{\omega, 0\}$  (como arriba, es importante la positividad de  $c$ ):



$$e^{-cx}g(x) = \int_0^x e^{-c(x-s)}e^{-cs}f(s) ds,$$

luego:

$$|e^{-cx}g(x)| \leq \int_0^x e^{-cs}|f(s)| ds = O(1), \quad x \rightarrow \infty.$$

Por tanto el término integrado en la expresión superior es  $o(1)$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Esto lleva a la conclusión.  $\square$

**Teorema A.25 (Inyectividad de  $\mathcal{L}$ ).** Sean  $f_i$ ,  $i = 1, 2$ , funciones tales que  $F_1 = F_2$ . Entonces  $f_1 = f_2$  para casi todo punto.

*Observación A.26.* Debido a la holomorfía, la identidad  $F_1 = F_2$  sólo tiene que satisfacerse en principio sobre una parte pequeña de  $\mathbb{C}$  como un segmento de recta.

*Demostración.* Del teorema de inversión aplicado en  $\Re z = \sigma$  y  $\sigma$  suficientemente grande concluimos que  $g_1 = g_2$  para casi todo punto, donde  $g_i = \int_0^x f_i$ . Hemos usado aquí que las funciones  $g_i$  son absolutamente integrables. De ahí se sigue el resultado.

Enunciamos ahora un lema auxiliar de utilidad para la Sección 1.5.

**Lema A.27.** Si  $F$  es una función compleja con un polo de orden  $m$  en  $z = z_0$ :

$$F(z) = \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z - z_0)^k} + F_1(z),$$

donde  $F_1$  es holomorfa cerca de  $z_0$  entonces para  $x$  real,  $e^{zx}F$  tiene un polo del mismo orden en  $z_0$  con residuo:

$$\text{Res} (e^{zx}F)|_{z=z_0} = e^{z_0x} \sum_{k=1}^m c_k \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}.$$



---

## Bibliografía

- [1] Apostol T. M., *Mathematical analysis*. 2nd edition. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts, 1974.
- [2] Bacaër N., *A short history of mathematical population dynamics*. Springer-Verlag, London, 2011.
- [3] Brezis H., *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer, New York, 2011.
- [4] Chipot, M. On the equations of age-dependent population dynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1983, vol. 82, no. 1, 13–25.
- [5] Gripenberg G., Londen S., Staffans O., *Volterra integral and functional equations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [6] Iannelli M., Milner F., *The basic approach to age-structured population dynamics. Models, methods and numerics*. Lect. Notes on Math. Modelling in the Life Sciences. Springer, Dordrecht, 2017.
- [7] Impagliazzo J., *Deterministic Aspects of Mathematical Demography*. Springer, Berlin, 1985.
- [8] Ross R., *The prevention of malaria*. John Murray, London, 1911.  
<https://archive.org/details/b21351508/page/n1/mode/2up>
- [9] Sabina de Lis J., *Ecuaciones Diferenciales II*. Notas del curso, 2018.
- [10] Weimberger H. F., *Ecuaciones en Derivadas Parciales (con métodos de variable compleja y transformadas integrales)*. Reverté. Barcelona, 1970.



# Epidemiología en Poblaciones Estructuradas por Edades

Mirian de la Peña Cabrera Reyes

Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas

Universidad de La Laguna

alu0101267326@ull.edu.es

## Abstract

The spread of an infectious disease within a population is the objective of epidemiology. In this work, classical SIR (Susceptible, Infective, Recovered) and SIS models are analyzed under the approach of populations structured by the age. To this proposal it is assumed that the pathogen acts on a population growing in a stable Malthusian regime.

## 1. Chapter I

A population structured by the age is characterized by a density function  $u(a, t)$  which measures the number of individuals with age  $0 \leq a \leq a^\dagger$  at time  $t$ . The behavior of such an isolated population  $u(a, t)$  is governed by the Lotka, McKendrick, Von Foerster equation,

$$u_t + u_a + \mu(a)u = 0, \quad 0 < a < a^\dagger, t > 0, \quad (1)$$

which is the equivalent of Malthus equation for populations structured by the age. It is complemented with the boundary and initial conditions,

$$u(0, t) = \int_0^{a^\dagger} \nu(a)u(a, t) da, \quad u|_{t=0} = u_0. \quad (2)$$

Mortality rate  $\mu(a)$  is supposed to satisfy  $\int_0^{a^\dagger} \mu(a) da = 0$ .

A first result states that the future evolution of the population is completely determined by the solution  $u(a, t)$  to the problem (1)–(2). Such a solution is expressed in terms of the birth rate  $B(t) = u(0, t)$  which solves the so-called renewal equation,

$$B(t) = K * B(t) + F(t), \quad K(a) = \nu(a)\Pi(a),$$

where  $\Pi(a) = e^{-\int_0^a \mu} da$ ,  $K$  is the so-called maternity function and  $F$  is a suitable integral of  $u_0$ .

The main result of the chapter asserts that,

$$e^{-\alpha^* t} u(a, t) = c_0 e^{\alpha^* a} \Pi(a) + O(e^{\delta t}), \quad \text{as } t \rightarrow \infty, \quad (3)$$

where  $\delta < \alpha^*$  and  $z = \alpha^*$  solves the Lotka equation,

$$\int_0^{a^\dagger} e^{-za} K(a) da = 1.$$

Important estimate (3) allows us to discuss the asymptotic behavior of the population. Namely,  $u(a, t)$  either extinguishes, blows up or remains stable as  $t \rightarrow \infty$ , if the reproduction number  $\mathcal{R} := \int_0^{a^\dagger} K(a) da$  is less, greater or equal than unity. Our study concludes with the analysis of the ‘migration’ effects by means of the equation,

$$u_t + u_a + \mu(a)u = G(a, t).$$

We also address the asymptotic behavior of its solutions.

## 2. Chapter II

MODELS SIR and SIS are first introduced in a no depending on age population. The coupling between the disease and the underlying dynamics is analyzed as well as the existence of

‘threshold’ values characterizing the onset of endemic states of the epidemics.

In a second step these models are discussed in the framework of populations structured by the age. In the SIR case, density is represented as  $u(a, t) = s(a, t) + i(a, t) + r(a, t)$ ,  $s$ ,  $i$  and  $r$  being, respectively, the densities of classes  $S$ ,  $I$  and  $R$ . They obey the equations,

$$\begin{cases} s_t + s_a + \mu s = -\lambda s, \\ i_t + i_a + \mu i = \lambda s - \rho i, \\ r_t + r_a + \mu r = \rho i, \end{cases}$$

where  $\rho(a)$  is the recovery rate while the ‘nonlocal’ term,

$$\lambda = k_1(a) \int_0^{a^\dagger} k_2(s)i(s, t) ds,$$

accounts for the contagion intensity. It measures the cross encounters between susceptible and infected at different ages. Transmission of the disease from parents to newborns is incorporated in the boundary conditions,

$$\begin{aligned} s(0, t) &= \int_0^{a^\dagger} \nu(s + (1 - q_1)i + (1 - q_2)r) da, \\ i(0, t) &= q_1 \int_0^{a^\dagger} \nu i da, \quad r(0, t) = q_2 \int_0^{a^\dagger} \nu r da. \end{aligned}$$

However, in the SIS model there are no recovered individuals so that only classes  $S$  and  $I$  are involved. Density  $u(a, t) = s(a, t) + i(a, t)$  where  $s$  and  $i$  solve,

$$\begin{cases} s_t + s_a + \mu s = -\lambda s + \rho i, \\ i_t + i_a + \mu i = \lambda s - \rho i, \end{cases} \quad (4)$$

together with the boundary conditions,

$$s(0, t) = \int_0^{a^\dagger} \nu(s + (1 - q)i) da, \quad i(0, t) = q \int_0^{a^\dagger} \nu i da. \quad (5)$$

Main features of the chapter concern the SIS model where it is assumed that the population stays at an equilibrium state  $u^*(a)$ . A first important result asserts that (4), (5) complemented with initial data possesses a unique solution  $(s, i)$ . A second group of results show the existence of a threshold value  $\mathcal{R}_0$  which discriminates when the epidemics goes down to extinction, or on the contrary, evolves to a globally stable ‘endemic’ state.

## References

- [1] Apostol T. M. *Mathematical analysis*. 2nd edition. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts, 1974.
- [2] Chipot, M. On the equations of age-dependent population dynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1983, vol. 82, no. 1, 13–25.
- [3] Iannelli M. Milner F. *The basic approach to age-structured population dynamics. Models, methods and numerics*. Lect. Notes on Math. Modelling in the Life Sciences. Springer, Dordrecht, 2017.
- [4] Weimberger H. F., *Ecuaciones en Derivadas Parciales (con métodos de variable compleja y transformadas integrales)*. Reverté. Barcelona, 1970.