

---

# MEDICIÓN DE LA VELOCIDAD DE LA LUZ

---

REHACIENDO EL EXPERIMENTO DE RÖMER

UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA



EDUARDO ALBERTO MANTERO CASTAÑEDA

SUPERVISADO POR DR. TEODORO ROCA CORTÉS  
DEPARTAMENTO DE ASTROFÍSICA

Facultad de Ciencias ULL, Sección Física  
Alu0100759143@ull.edu.es  
Julio. 2016



*“Extraordinary claims require extraordinary evidence.”*  
Carl Sagan.



# I. Resumen

En la antigüedad, muchas de las propiedades de la luz eran un misterio. En particular, la determinación de la velocidad de la luz lo siguió siendo hasta bien entrado el siglo XVII. Gracias a las observaciones realizadas por Ole Römer (1644-1710) y a su ingenio pudo demostrarse, en 1676, que la luz poseía una velocidad finita, siendo ésta la primera medida de la velocidad de la luz de la historia.

En este trabajo haremos un breve recorrido histórico a través de los distintos experimentos realizados para medir la velocidad de la luz explicando diferentes métodos para lograrlo. Analizaremos las características de Júpiter e Ío ya que son los cuerpos celestes más importantes en este experimento y explicaremos el por qué de su elección. Hablaremos del descubrimiento fortuito del método de Römer que utilizaremos como guía para realizar nuestro experimento. Elaboraremos un planteamiento teórico del problema en donde explicaremos las distintas posiciones que ocupa el planeta Tierra con respecto a Júpiter y al Sol. Tomaremos un criterio para definir qué entendemos como ocultación y qué entendemos como emersión de un cuerpo celeste. Calcularemos cuáles son las distintas aproximaciones que tendremos en cuenta a la hora de obtener una fórmula para el retraso existente en las observaciones. Tomaremos como aproximación que la distancia Tierra-Ío es igual a la distancia Tierra-Júpiter y también que Júpiter se mueve alrededor del Sol atendiendo a su anomalía verdadera. Comentaremos las efemérides que hemos utilizado para nuestros cálculos y por último, obtendremos la ecuación para el intervalo de tiempo transcurrido entre dos observaciones atendiendo a todo lo expuesto anteriormente. Describiremos el montaje experimental en el que hemos utilizado un telescopio y un reloj perfectamente sincronizado con lo que realizaremos las observaciones necesarias para nuestro experimento atendiendo a las dificultades existentes en la toma de datos en astronomía.

Con las medidas obtenidas haremos un ajuste por mínimos cuadrados a la expresión para el intervalo de tiempo entre dos observaciones del cual extraeremos el valor medido para la velocidad de la luz ( $298621.3 \text{ km/s}$  con una incertidumbre de  $0.5\%$ ) y el periodo de Ío ( $1.770465$  días con una incertidumbre de  $0.07\%$ ). Concluiremos diciendo que la luz posee una velocidad finita además de que un mayor número de observaciones mejoraría los resultados y expondremos algunas ideas para el experimento.



## II. Abstract

In ancient times, many of the properties of light were a mystery. In particular, the determination of the speed of light remained so well into the seventeenth century. Thanks to the observations made by Ole Römer (1644-1710) and his wit, it could be demonstrated, in 1676, that light had a finite speed, being this the first measurement of the speed of light in history.

In this paper we will take a historical journey through the various experiments to measure the speed of light citing authors like Galileo Galilei (1564-1642) and H. L. Fizeau (1818-1868) explaining their different methods. We analyse the characteristics of Jupiter and Io as they are the most important celestial bodies in this experiment and explain why of their choice. We will talk about the accidental discovery of the Römer method which will be used as a guide for our experiment. We will develop a theoretical approach to the problem in order to explain the different positions occupied by the planet Earth relative to Jupiter and the Sun. We will take a standard to define what we mean by occultation and emersion of a celestial body. We will consider that the occultation has occurred at the exact moment that we cannot see Io any longer and emersion will take place, by convention, at the exact moment when we can see (albeit very little) this satellite. We will calculate what are the various approaches that we will consider when obtaining a formula for the backlog in the observations. We will take as an approximation that the Earth-Io distance is equal to the distance between the Earth and Jupiter and also Jupiter moves around the Sun according to his true anomaly. We will discuss the ephemeris we used for our calculations and finally, we will get the equation for the interval between two observations in response to all the above time. Once obtained this equation, and with the help of a telescope and a perfectly synchronized clock, we will make various observations necessary for our experiment in regard of the difficulties in data collection.

With the measurements obtained we will make a least squares fit to the expression for the time interval between two observations which we will obtain our value to the speed of light ( $298621.3 \text{ km/s}$  with an uncertainty of 0.5 %) and the period of Io (1.770465 days with an uncertainty of 0.07 %). We will conclude saying that light has a finite speed and in addition that a greater number of observations could improve the results and we will discuss some possible improvements for the experiment.

# Índice general

I.	Resumen . . . . .	I
II.	Abstract . . . . .	II
<b>1.</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1.	Medición de la Velocidad de la Luz . . . . .	2
1.1.1.	Recorrido Histórico . . . . .	2
1.1.2.	Júpiter e Ío . . . . .	3
1.1.3.	El Método de Römer . . . . .	4
1.2.	Objetivo del Trabajo . . . . .	5
<b>2.</b>	<b>Metodología Teórica</b>	<b>7</b>
2.1.	Planteamiento Teórico . . . . .	8
2.2.	Ocultaciones y Emersiones . . . . .	9
2.3.	Determinación de la Velocidad de la Luz . . . . .	10
2.4.	Retraso en las Observaciones . . . . .	13
2.5.	Efemérides . . . . .	14
<b>3.</b>	<b>Procedimiento Experimental y Observaciones</b>	<b>17</b>
3.1.	Equipo Utilizado . . . . .	18
3.2.	Medición del Tiempo y Dificultades en la Toma de Datos . . . . .	19
3.3.	Medidas Realizadas . . . . .	19
<b>4.</b>	<b>Análisis de las Observaciones</b>	<b>23</b>
4.1.	Retraso en las Observaciones . . . . .	24
<b>5.</b>	<b>Resultados y Discusión</b>	<b>27</b>
5.1.	Velocidad de la Luz y Periodo de Ío. . . . .	28
5.1.1.	Ocultaciones . . . . .	28
5.1.2.	Emersiones . . . . .	29
5.2.	Discusión de los Resultados . . . . .	30
5.2.1.	Velocidad de la Luz . . . . .	30
5.2.2.	Periodo de Ío . . . . .	31
5.3.	Incertidumbres . . . . .	32
<b>6.</b>	<b>Conclusiones y Proyectos Futuros</b>	<b>33</b>
6.1.	Conclusiones . . . . .	34
6.2.	Proyectos Futuros . . . . .	34



---

---

# CAPÍTULO 1

---

---

## INTRODUCCIÓN

La luz y sus propiedades han sido y son temas de discusión constante, en particular, la velocidad de la luz fue una propiedad sujeta a grandes conjeturas a lo largo de la historia. En la antigüedad, pensadores como Aristóteles (384-322 a. C.) o Herón de Alejandría (Siglo I d. C.) creían que la velocidad de la luz debería ser infinita, opinión que compartieron otros pensadores más actuales como René Descartes (1596-1650). No fue hasta la época de Johannes Kepler (1571-1630) y Galileo (1564-1642) cuando comenzaron a cuestionarse la infinitud de la velocidad de la luz y se comenzaron a realizar experimentos para intentar calcularla. Actualmente, la velocidad de la luz es un tema zanjado y la aceptamos como una constante universal de valor  $299792458 \text{ m/s}$ [1] en el vacío, simbolizado por la letra  $c$  del latín *celeritas*, además esta constante es independiente del sistema de referencia utilizado.

## INTRODUCTION

The light and its properties have always been topics of constant discussion; in particular, the speed of light was a property subject to great speculation throughout history. In ancient times, philosophers like Aristotle (384-322 BC.) or Hero of Alexandria (first century AD.) believed that the speed of light should be infinite, a thought shared by others more contemporary philosophers like René Descartes (1596-1650). It was not, until the time of Johannes Kepler (1571-1630) and Galileo (1564-1642), when they began to question the infinitude of the speed of light and began to realize experiments to try to calculate it. Currently, the speed of light is a settled issue and we accept it as a universal constant value  $299792458 \text{ m/s}$  [1] in a vacuum, symbolized by the letter  $c$  from Latin *celeritas* also this constant is independent of the reference system used.

## 1.1. Medición de la Velocidad de la Luz

Los intentos por demostrar la finitud de la velocidad de la luz y determinar su valor comienzan en el siglo XVII en los albores de la revolución científica. A lo largo de la historia se han realizado distintos métodos para determinar el valor de  $c$ , la mayor parte de los primeros experimentos fracasaron debido, principalmente, al alto valor de la velocidad de la luz y a los rudimentarios equipos de medida que se utilizaban en esa época y sólo se consiguió medir la velocidad de la luz indirectamente a través de experimentos astronómicos. No fue hasta el siglo XIX cuando se pudo medir la velocidad de la luz de forma directa confirmando así su naturaleza electromagnética.

### 1.1.1. Recorrido Histórico

El primer intento para determinar la velocidad de la luz en 1629 vino de la mano de Isaac Beeckman (1588-1637) el cual propuso un experimento en el que se pudiese observar el flogonazo de un cañón reflejándose en un espejo situado a 1.6 km de este y con ello medir el tiempo que la luz tarda en llegar del cañón al espejo y reflejarse obteniendo así su velocidad. No hay constancia de que este experimento se realizara.

Nueve años más tarde, en 1638, Galileo Galilei (1564-1642) intentó medir la velocidad de la luz utilizando para ello dos faroles equipados con rejillas que podían abrirse y cerrarse a placer. Galileo hizo que un asistente se colocara en lo alto de una colina con uno de los faroles y él en otra colina separados entre sí por más de 1 km. Cuando Galileo abriera su rejilla, el asistente haría lo mismo cuando viese la luz de su maestro y con ello Galileo mediría el tiempo transcurrido para hallar la velocidad de la luz. Aunque no se pudo llegar a ninguna medida, la única conclusión fue que la luz es muy veloz.

La primera medida cuantitativa de la velocidad fue realizada gracias a Ole Römer (1644-1710) estudiando para ello el movimiento de uno de los satélites de Júpiter, Ío. Descubrió que el retraso encontrado en las apariciones de Ío estaba directamente relacionado con el tiempo que tarda la luz en recorrer la distancia Tierra-Júpiter; conociendo dicha distancia, calcular la velocidad de la luz es una tarea trivial.



Figura 1.1: *Retrato de Ole Römer (J.P. Trap, 1868)*

Utilizando medidas directas en tierra, Armand H. L. Fizeau (1818-1896) en 1849 usó un haz de luz reflejado en un espejo a 8 km de distancia. En su camino de ida hacia el espejo, el haz pasaba a través de una rueda dentada cuya velocidad se iba incrementando hasta que la luz que pasa a través de una ranura de la rueda era completamente eclipsada por el diente adyacente. Dadas la velocidad de rotación de la rueda y la distancia entre la rueda y el espejo, Fizeau estimó el valor de la velocidad de la luz en unos 313000  $km/s$  (H. L. Fizeau, 1849)[2]

Aunque a medida que ha avanzado la historia se han desarrollado mejores métodos para determinar la velocidad de la luz y otros experimentos para demostrar que la velocidad de la luz en el vacío es una constante independiente del movimiento relativo entre el emisor y el receptor (Michelson y Morley 1887), los experimentos citados en este apartado tienen su importancia, no por ser los mejores y más precisos sino por ser los primeros en la historia.

### 1.1.2. Júpiter e Ío

Después del Sol, Júpiter es el cuerpo más masivo y voluminoso del Sistema Solar con un diámetro ecuatorial de 142984  $km$ , once veces mayor que el diámetro de la Tierra. Debido a sus dimensiones y a su luminosidad, es uno de los planetas más conocidos por los astrónomos ya que se tiene constancia de él desde la antigüedad.

Con un pequeño telescopio pueden distinguirse al menos cuatro de sus lunas, los cuatro satélites galileanos y sus bandas de nubes, paralelas al ecuador, se ven fácilmente. Gira alrededor del Sol con una órbita casi circular (excentricidad,  $\epsilon = 0.048$ ) y ligeramente inclinada,  $1.3^\circ$  con respecto al plano eclíptico. El año de Júpiter, es decir, el tiempo que tarda Júpiter en dar una vuelta alrededor del Sol, equivale a aproximadamente 12 años terrestres. Júpiter posee el mayor sistema de lunas del Sistema Solar, con 67 satélites descubiertos hasta la fecha[3]. El sistema de satélites jovianos comprende cuatro lunas grandes, las galileanas, y numerosos cuerpos pequeños. Las cuatro lunas galileanas son Ío, Europa, Ganímedes y Calisto. Fueron descubiertas en 1610 por Galileo Galilei.

Ío es la luna galileana más interna de Júpiter. Mide 3643  $km$  de diámetro y es la luna más densa del Sistema Solar, siendo también el cuerpo volcánicamente más activo. Su periodo orbital es de unas 42.5 *horas* y presenta una órbita prácticamente circular con lo que, de acuerdo con la segunda ley de Kepler, posee una gran regularidad en su movimiento.

Todas estas características tanto de Júpiter como de Ío, aunque no tenían un buen conocimiento de la distancia Tierra-Júpiter en la época, hizo que Römer eligiera a Ío como el satélite para comprobar las tablas realizadas por Cassini (Director del Observatorio de París) de los eclipses de los satélites de Júpiter, dándose cuenta más adelante que el retraso existente en las observaciones de las ocultaciones o emersiones no podía ser debido a las leyes de Kepler, ya que estas estaban admitidas y comprobadas experimentalmente, con lo que ese

retraso debería ser causado por otro motivo, por el tiempo que tarda la luz en llegar desde Júpiter a la Tierra.

### 1.1.3. El Método de Römer

El método de Römer para la determinación de la velocidad de la luz fue, como muchos otros hallazgos en la física, descubierto por casualidad mientras investigaba fenómenos de la mecánica celeste, más específicamente, comprobando el periodo de rotación de los satélites de Júpiter.

Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) elaboró las tablas sobre los eclipses de los satélites galileanos más precisas de la época. Se había hecho célebre por las observaciones de los satélites de Júpiter así que, tras 16 años publicó sus efemérides. La precisión de estas efemérides llegaba hasta algunos segundos, mejorando así las tablas publicadas anteriormente por Galileo gracias a los telescopios mejorados fabricados en Roma. En 1669, Cassini fue nombrado director del Observatorio de París, donde junto a él trabajó Ole Römer (1644-1710) como colaborador. Encargó a Römer la comprobación de sus tablas y éste eligió para ello Ío por ser uno de los satélites de Júpiter que poseen un periodo orbital corto.

Para la comprobación de dichas tablas, Römer realizó observaciones, con la precisión máxima permitida por los aparatos de la época, de los momentos de ocultación de Ío empleando telescopios traídos por Cassini. Gracias a esto, Römer era capaz de obtener los tiempos de las observaciones necesarias para comprobar las tablas de Cassini. Al ir realizando observaciones a lo largo del año, es decir, observaciones para distintas posiciones de La Tierra con respecto a Júpiter, se percató de que los momentos de las ocultaciones se iban retrasando con respecto a las tablas de Cassini. Para facilitar los cálculos, hemos visto que el periodo de rotación de Júpiter al rededor del sol es mucho mayor que el periodo de rotación de la Tierra, con lo que podemos considerar que ocupa la misma posición, visto desde La Tierra, durante un año terrestre.

Uno de los motivos de la elección de Ío para la comprobación de dichas tablas era la precisión de sus movimientos debido a las leyes de Kepler y como éstas no podían ser erróneas debido a que ya estaban comprobadas, sólo se podía sospechar de la exactitud de las observaciones que fue lo que Cassini hizo. En cambio, Römer llegó a la conclusión que las observaciones se retrasaban debido al tiempo que la luz tarda en llegar de Júpiter a la Tierra. Sus conclusiones fueron escritas en un trabajo publicado en el “Philosophical Transactions” (O. Römer, 1676) y al ser opuestas a la opinión de Cassini se generó una rivalidad entre ellos por la cual hizo que Römer decidiera volver a Dinamarca.

Finalmente, en el trabajo publicado por Römer nunca se llegó a calcular la velocidad de la luz pero si se emplean los datos obtenidos en sus tablas y la distancia entre la Tierra y Júpiter que se manejaba en ese momento se obtiene una velocidad de unos 215000 *km/s*.

Aunque es un valor muy alejado del valor de velocidad de la luz conocido actualmente vemos que es una aproximación aceptable para la época.

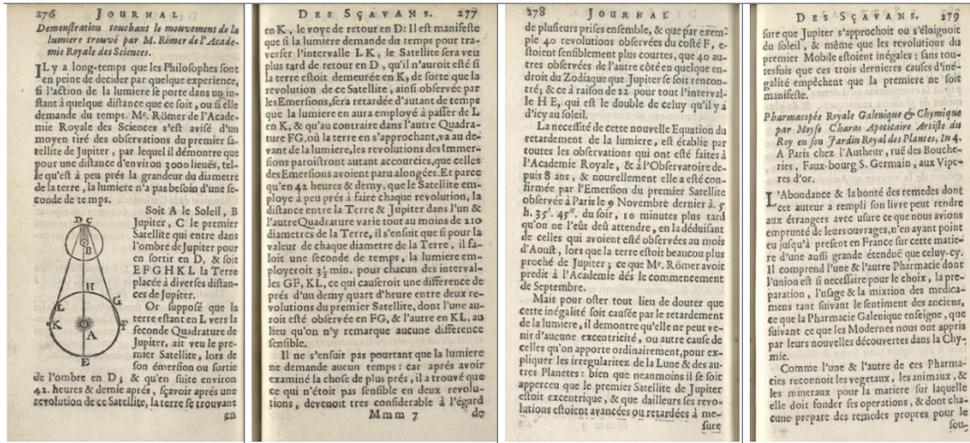


Figura 1.2: Publicación original del trabajo de investigación de Römer (O. Römer, 1676)

## 1.2. Objetivo del Trabajo

El objetivo principal de este trabajo es realizar una medición de la velocidad de la luz. Para ello, pretende rehacer el experimento de Römer intentando seguir su método aunque mejorando los aparatos de medida utilizando dispositivos actuales. Con esto se intentará conseguir una mejor aproximación al valor de la velocidad de la luz calculado por él. Además, también obtendremos el periodo de Ío siguiendo el mismo procedimiento.



---

---

## CAPÍTULO 2

---

---

# METODOLOGÍA TEÓRICA

El planteamiento teórico para la obtención de la velocidad de la luz que utilizaremos es muy parecido al mismo que creó Römer en el siglo XVII. En este apartado, atendiendo al esquema que realizó Römer, nos haremos una idea de las posiciones que ocupan los planetas a lo largo del año y veremos como afecta el movimiento de la Tierra al retraso producido en las observaciones de las ocultaciones de Ío. Se explicará lo que entendemos por ocultación y emersión de un cuerpo celeste y veremos la importancia que tiene esta definición a la hora de la toma de datos. Analizaremos algunos parámetros físicos de los planetas que intervienen en este experimento y cuáles son las aproximaciones que podemos tener en cuenta en los cálculos. Finalmente obtendremos la fórmula para el retraso existente en las observaciones y comentaremos algunas características importantes de las efemérides.

# THEORETICAL METHODOLOGY

The theoretical approach for obtaining the speed of light that we will propose is very similar to the process designed by Römer in the seventeenth century. In this section, considering the scheme made by Römer we can have an idea of the positions of the planets through the year and how affects the movement of the Earth to the delay in the observations of the occultations of Io in the shadow of Jupiter. It will be explained what we mean by occultation and emersion of a celestial body and we will see the importance of this definition for data collection. We discuss some physical parameters of the planets involved in this experiment and what approximations we can take into account in the calculations. Finally we will derive the formulae for the delay existing in the observations and we will discuss some important features of the ephemeris.

## 2.1. Planteamiento Teórico

Para la obtención de la velocidad de la luz, siguiendo el mismo esquema que el elaborado por Römer (O. Römer, 1676)[4], tenemos que el punto  $A$  representa al Sol, el punto  $B$  a Júpiter y el punto  $C$  a su primer satélite (Ío) que se mueve en dirección a la sombra de Júpiter y después aparecerá otra vez de la sombra en el punto  $D$ , mientras que  $E, F, G, H, L$  y  $K$  denotan la localización de la Tierra en diferentes puntos de la órbita alrededor del Sol.

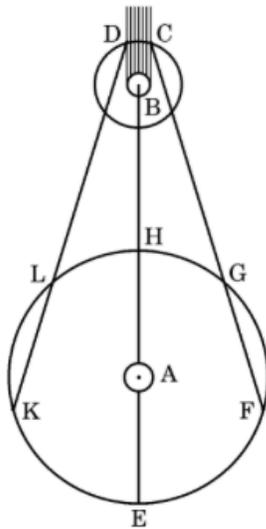


Figura 2.1: Esquema realizado por Römer de distintas posiciones de la Tierra con respecto a Júpiter

Supongamos que un observador en la Tierra, que se encuentra en el punto  $L$  observa el primer satélite de Júpiter en el momento en el que emerge de la sombra por el punto  $D$ . Entonces, aproximadamente 42.5 horas después, es decir, un periodo completo de Ío, la Tierra habrá llegado al punto  $K$  y se podrá observar al satélite saliendo de nuevo por el punto  $D$  con un retraso relativo a la Tierra mayor que cuando se encontraba en el punto  $L$ . Así pues, las vueltas que da el satélite alrededor de Júpiter medidas por este observador justo cuando sale de la sombra de dicho planeta, deberían estar retrasadas un tiempo igual al tiempo que tarda la luz en viajar del punto  $L$  al punto  $K$ . En el otro caso, cuando la Tierra se está acercando a Júpiter (puntos  $F$  y  $G$ ), se va moviendo en dirección hacia donde viene la luz con lo que el tiempo que tarda Ío en recorrer una órbita, visto de acuerdo a cuando el satélite entra en la sombra del planeta, debería ser mas corto del mismo modo que cuando la Tierra se alejaba de Júpiter el tiempo era más largo.

En un periodo de 42.5 horas, este satélite da aproximadamente una vuelta completa alrededor del planeta, la distancia entre la Tierra y Júpiter cambia y si consideramos la velocidad de traslación de la Tierra constante, tanto en los puntos en los que la Tierra se acerca a Júpiter como en los puntos en los que la Tierra se aleja, ésta habrá recorrido aproximadamente la misma distancia; al menos unas 210 veces el diámetro de la Tierra. Por lo tanto, supongamos que estamos en la época de Römer y desconocemos por completo cuál es el valor de la velocidad de la luz pero sabemos que va más rápido que el sonido, podemos suponer entonces (siguiendo a Römer) que, como aproximación, la luz tarda en recorrer el diámetro de la tierra 1 segundo, tardaría entonces en recorrer cada intervalo  $FG$  y  $KL$  en aproximadamente 3 minutos y medio. Esto nos debería conducir a una desviación de, aproximadamente, media hora entre dos revoluciones de este satélite observadas desde  $FG$  y  $KL$  respectivamente. Aunque de forma práctica nunca se llegó a encontrar una diferencia tan sustancial en las observaciones.

Este hecho, sin embargo, no quiere decir que la luz no requiera ningún tiempo en viajar sino que la aproximación que utilizamos se nos quedó muy corta con respecto a su valor real. En su estudio de este fenómeno, Römer determinó que una desviación de esa magnitud, inaccesible cuando sólo se tenían en cuenta dos revoluciones, se volvía muy sustancial cuando se tomaban en cuenta muchas revoluciones seguidas. Por ejemplo, después de 40 revoluciones observadas desde el lado  $F$  el retraso debería ser sustancialmente más corto que después de 40 revoluciones observadas desde el lado opuesto. Este efecto es independiente de cualquier posición en la que Júpiter se sitúe con respecto al Zodiaco.

Este efecto fue verificado con posterioridad, con la emersión de Ío de la sombra de Júpiter observado en la mañana del 9 de Noviembre de 1676 a las  $5^h35^m45^s$  en París, que ocurrió 10 *minutos* después del tiempo estimado en base a las observaciones realizadas en Agosto del mismo año, cuando la Tierra estaba mucho más cercana a Júpiter. Para eliminar todas las dudas de que esta desigualdad se origina por el retraso de la luz, demostró que este efecto no puede ser debido a ninguna excentricidad o cualquier otra fuente que se suelen emplear para la explicación de estas irregularidades en el movimiento planetario. Römer estaba completamente seguro que el primer satélite de Júpiter es excéntrico y su cambio de velocidad por el movimiento de Júpiter con respecto al Sol no afecta a los retrasos.

## 2.2. Ocultaciones y Emerciones

Como hemos visto, para el caso de la determinación de la velocidad de la luz atendiendo al procedimiento de Römer, es importante conocer lo que definimos como una ocultación y una emersión ya que estas son nuestra referencia a la hora de poner en marcha nuestros cronómetros para apuntar la hora exacta a la que tuvo lugar dicho fenómeno. Con lo que elaboraremos un convenio, a seguir durante todo el experimento, para determinar exactamente lo que nombramos como ocultación y emersión.

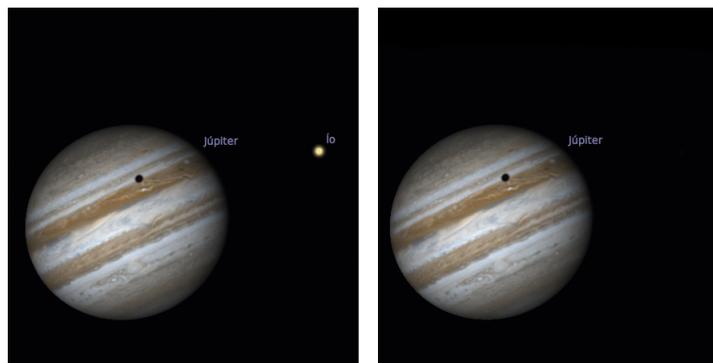


Figura 2.2: Representación visual de una ocultación de Ío, inmediatamente antes (izquierda) y después (derecha) de la ocultación aunque esto no es un proceso instantáneo. La sombra que se observa en Júpiter es la proyectada por otro de sus satélites, Ganímedes. (Imagen tomada del software Stellarium.)

Comenzando con las ocultaciones sabemos que, por definición, una ocultación es un fenómeno astronómico que ocurre cuando un objeto celeste es escondido por otro objeto que se sitúa entre éste y el observador. Para el caso que nos interesa, sabemos que tanto Júpiter como sus lunas brillan debido a que reflejan parte de la luz procedente del Sol, por lo tanto, Júpiter proyecta una gran sombra y cuando una de sus lunas entra dentro de la sombra de Júpiter deja de recibir luz del Sol y deja de brillar, con lo que desaparece de la vista de un observador situado en la Tierra; esto es lo que consideraremos como una ocultación. El problema reside en que una ocultación de Ío no es un proceso instantáneo. A pesar de su pequeño tamaño, el flujo que observamos de este satélite va disminuyendo poco a poco a medida que penetra en la sombra de Júpiter hasta que se deja de ver completamente; este proceso puede llegar a tardar alrededor de 3 *minutos* con lo que se puede introducir un error muy grande en la medida. Para intentar reducir al mínimo posible el error cometido, fijaremos que la ocultación ocurre en el momento en el que, a través del ocular de nuestro telescopio, Ío ha desaparecido completamente. En todas las observaciones de ocultaciones usaremos el mismo ocular y el mismo telescopio para reducir al mínimo la incertidumbre en la medida del tiempo en el que ocurre este fenómeno.

La emersión de un cuerpo celeste es la reaparición de dicho cuerpo después de un eclipse o una ocultación. Para el caso que nos importa sería la reaparición de Ío del cono de sombra que proyecta Júpiter. Al igual que antes, esto tampoco es un proceso instantáneo y es un poco más complicado de observar ya que para el caso de las ocultaciones vemos en todo momento a Ío antes de que se empiece a introducir dentro del cono de sombra de Júpiter. Por el contrario, en el caso de las emersiones, Ío se encuentra ya dentro de la sombra que proyecta el planeta, con lo que con nuestro telescopio no somos capaces de verlo hasta el momento exacto que empieza a abandonar la sombra con lo que para las mediciones de las emersiones hay que estar mucho más atento y preparado que para el caso de las ocultaciones. Nuestro convenio para el caso de las emersiones es tomar como momento exacto de la emersión el punto en el cual comenzamos a ver a Ío donde su brillo será mínimo pero suficiente para poder verlo a través del ocular. Al igual que antes, siempre se utilizará el mismo telescopio y el mismo ocular para reducir al mínimo los errores introducidos a la hora de determinar la emersión.

### 2.3. Determinación de la Velocidad de la Luz

Idealmente, para la determinación de la velocidad de la luz podríamos utilizar los tiempos observados de todas las ocultaciones y todas las emersiones que se producen a lo largo de un año Terrestre. Esto es prácticamente imposible ya que muchas de esas ocultaciones o emersiones se producen cuando es de día y Júpiter es invisible a través de nuestro telescopio y además, aquellas que se producen por la noche pueden no llegar a observarse debido a las malas condiciones climáticas y atmosféricas con lo que realizar una observación exitosa requiere de paciencia y tiempo.

Podríamos calcular la velocidad de la luz atendiendo sólo a las emersiones o sólo a las ocultaciones, en nuestro caso, poseemos datos tanto de una como de otra con lo que calcularemos la velocidad de la luz para los dos casos. Las observaciones que hemos realizado datan de finales del 2015 y principios del 2016 cuando la Tierra se encontraba en aproximación a Júpiter, con lo que tenemos datos de las ocultaciones de Ío y también tenemos datos de mediados del 2016, cuando la Tierra se encontraba en recesión con respecto a Júpiter, que sería los datos pertenecientes a las emersiones de Ío.

El movimiento de la Tierra y Júpiter alrededor del Sol (ver Figura 2.3) lo podemos aproximar a órbitas circulares dado que la excentricidad de la Tierra ( $\epsilon = 0.017$ ) y la de Júpiter ( $\epsilon = 0.048$ ) son muy próximas a cero con lo que podríamos decir que sus radios permanecerán constantes alrededor de toda su trayectoria. Sabemos que el radio orbital de la tierra es de  $R_T = 1.0 UA$  y su periodo orbital, es decir, el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta alrededor del Sol es de  $P_T = 365.26$  días. En el caso de Júpiter, tenemos que el radio orbital es de  $R_J = 5.203 UA$  y su periodo es de  $P_J = 11.86$  años. Situando nuestro sistema de referencia en el Sol, la posición de la Tierra en un instante  $t$  cualquiera vendrá dada por el vector  $\vec{x}_T = (R_T \cos \theta_T, R_T \sin \theta_T)$ , y la posición de Júpiter por el vector  $\vec{x}_J = (R_J \cos \theta_J, R_J \sin \theta_J)$ . La distancia entre los dos planetas la podemos calcular atendiendo a la figura 2.3 por la ecuación:

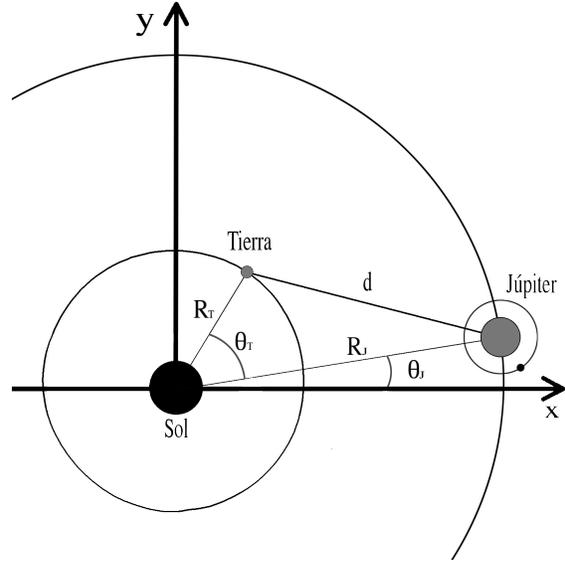


Figura 2.3: Esquema del movimiento de la Tierra y Júpiter alrededor del Sol

$$d = \sqrt{(R_J \sin \theta_J - R_T \sin \theta_T)^2 + (R_J \cos \theta_J - R_T \cos \theta_T)^2} \quad (2.1)$$

Como vemos en la ecuación 2.1, si suponemos que en  $t = 0$  la distancia entre los dos planetas es mínima, es decir,  $\theta_T = \theta_J = 0$  tenemos que la distancia  $d = R_J - R_T = 5.203 - 1.0 = 4.203 UA$ . A partir de ahí, los dos planetas irán moviéndose alrededor del Sol y la distancia entre la Tierra y Júpiter irá aumentando hasta que medio año después, la Tierra se encontrará en la posición  $\theta_T = \pi$  y Júpiter, debido a su menor velocidad angular, se encontrará en el punto  $\theta_J = \frac{2\pi t}{P_J} = \pi/11.86 = 0.264 rad$ . Con esto datos y utilizando la ecuación 2.1 podemos calcular la distancia existente entre la Tierra y Júpiter en el instante  $t = 0.5$  años. Obtenemos entonces que la distancia será  $d = 6.174 UA$  que si la comparamos con la misma distancia a la que se encontrarían los planetas pero considerando que, durante el medio año que se mueve la Tierra, Júpiter permanece en el mismo sitio ( $d = 5.023 + 1.0 = 6.203$ ) obtenemos

que hay una diferencia de 0.029 UA. En primera aproximación podríamos considerar que Júpiter no se mueve pero, como nuestro objetivo es mejorar el valor de la velocidad que se obtuvo con los datos de Römer, consideraremos en nuestros cálculos que Júpiter también se desplaza atendiendo a su anomalía verdadera.

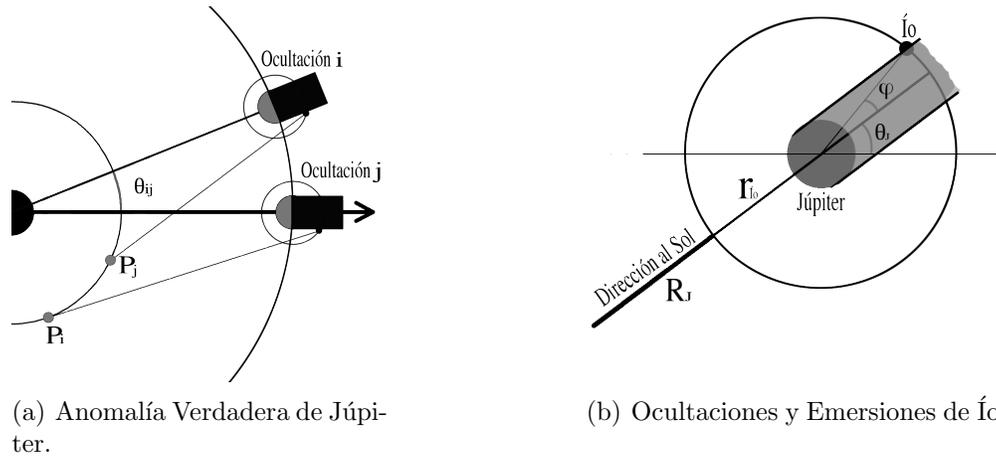


Figura 2.4: Distintos esquemas que muestran el movimiento de Júpiter e Ío. (a) Se muestra el efecto del movimiento de Júpiter alrededor del Sol en el retraso de las ocultaciones donde  $\theta_{ij}$  representa la anomalía verdadera de Júpiter. (b) Esquema del movimiento de rotación de Ío alrededor de Júpiter con su sombra.

La anomalía verdadera ( $\theta_{ij}$ ) (Figura 2.4) es un parámetro que nos sirve para identificar la posición de un cuerpo celeste a lo largo de su órbita. Si la anomalía verdadera vale  $0^\circ$ , el cuerpo celeste, en este caso Júpiter, se encontrará en el periapsis, el punto de la órbita donde el planeta se encuentra a menos distancia con respecto al Sol, en cambio, si la anomalía verdadera vale  $180^\circ$  se encontrará en el punto más lejano, el apoapsis. Al utilizar la anomalía verdadera en los cálculos del retraso en las observaciones estamos teniendo en cuenta la forma elíptica de la órbita joviana y por ende, los distintos cambios en la velocidad de rotación del planeta debidos a la segunda ley de Kepler.

Atendiendo ahora al caso del sistema Júpiter-Ío tenemos que dicho satélite describe una órbita circular (excentricidad casi nula  $\epsilon = 0.004$ ) de radio  $r_{Io} = 421600 \text{ km}$  situado en el mismo plano en el cual orbita Júpiter alrededor del Sol. La sombra proyectada por Júpiter tendrá un radio igual al radio de dicho planeta despreciando todos los efectos de penumbra debido a la gran distancia que separa a Júpiter del Sol. Según la Figura 2.4 podemos calcular el ángulo  $\varphi$  como  $\tan(\varphi) = R_J/r_{Io}$  y con ello calcular el tiempo durante el cuál Ío se encuentra dentro de la sombra producida por Júpiter conociendo para ello el periodo de Ío, la expresión viene dada por  $t = \frac{P_{Io}}{2\pi} 2\phi$ . Como Ío no es un cuerpo puntual, tiene un radio ecuatorial de

aproximadamente  $1820 \text{ km}$ , al introducirse en la sombra de Júpiter lo hace de manera gradual y no instantánea. Podemos hacer una aproximación al tiempo que tarda Ío en introducirse completamente en la sombra de Júpiter conociendo su velocidad orbital  $v_{Io} = 17342.2 \text{ m/s}$  tenemos que el tiempo que tarda en introducirse será  $t = \frac{2r_{io}}{v_{Io}} = 3.5 \text{ minutos}$  con lo que en las observaciones, Ío, irá desvaneciéndose lentamente hasta desaparecer en la sombra. Es por eso por que lo elegimos el momento en el que desaparece totalmente para no tener tanto error en la medida.

Otra aproximación que tendremos en cuenta es que dado que la distancia que separa Júpiter de la Tierra ( $R_{T-J} \approx 9.236 \cdot 10^{11} \text{ km}$ ) es mucho mayor que la distancia entre Júpiter e Ío ( $r_{Io} = 4.216 \cdot 10^5 \text{ km}$ ) podemos aproximar que el recorrido que hace la luz desde Ío a la Tierra es el mismo que el que hace desde Júpiter hasta la Tierra ya que estaremos cometiendo entonces un error de  $0.00004\%$  en la medida de la distancia, un valor que muy probablemente será inferior a nuestros errores observacionales, con ello no nos tendremos que preocupar de en qué posición se encuentra Ío con respecto a Júpiter en el momento de la ocultación para calcular su distancia.

## 2.4. Retraso en las Observaciones

En la sección 2.3 calculamos, de forma cuantitativa, las distintas aproximaciones y hechos que se dan en los movimientos que realizan tanto Júpiter e Ío como la Tierra. Ahora, utilizando esos resultados, calcularemos el tiempo que transcurre entre dos ocultamientos o dos emersiones para notar con ello el retraso existente en las observaciones.

Como hemos dicho, una ocultación o emersión de Ío y su observación a través de nuestro ocular no son sucesos simultáneos ni instantáneos. Debido a la velocidad finita de la luz y la distancia que separa Júpiter de la Tierra encontraremos un retraso entre ellos. Como hemos visto, la distancia existente entre Júpiter y la Tierra nunca permanece constante ya que ambos se desplazan alrededor del Sol con lo que el retraso existente en las ocultaciones o apariciones variará a medida que pasa el tiempo. Nuestra intención es entonces comparar estos cambios existentes en los intervalos de tiempo entre las ocultaciones con un tiempo estándar, el de nuestro cronómetro, para obtener así el retraso debido únicamente a la velocidad de la luz.

Si consideramos que el tiempo entre dos ocultaciones viene dado por  $\tau_{ij} = t_j - t_i$  donde  $t_i$  es el instante en el que se observa la ocultación  $i$ -ésima y  $t_j$  el instante en el que se observa la ocultación  $j$ -ésima y además,  $d_{ij} = d_j - d_i$  es la distancia existente entre la Tierra y Júpiter en el instante  $t_j$  y  $t_i$  respectivamente, podemos escribir que el intervalo de tiempo entre dos ocultaciones será:

$$\tau_{ij} = \frac{d_{ij}}{c} + \left( n_{ij} + \frac{\theta_{ij}}{2\pi} \right) T \implies t_j - t_i = \frac{d_j - d_i}{c} + \left( n_{ij} + \frac{\theta_{ij}}{2\pi} \right) T \quad (2.2)$$

Donde  $c$  será la velocidad de la luz en el vacío;  $T$  es el periodo sidéreo de Ío, es decir, el tiempo que tarda Ío en dar una vuelta completa alrededor Júpiter tomando como referencia una estrella fija;  $n_{ij}$  es el número de vueltas que ha dado Ío entre el tiempo  $t_i$  y  $t_j$  y la anomalía verdadera,  $\theta_{ij}$ , es el ángulo orbital que ha barrido Júpiter entre las dos ocultaciones, es decir, la diferencia entre la anomalía verdadera en  $t_i$  y  $t_j$ ; este ángulo será igual al ángulo que haya rotado la sombra de Júpiter entre las dos observaciones.

La ecuación 2.2 consta de dos partes. La primera parte tiene en cuenta el tiempo que tarda la luz en recorrer la distancia Tierra-Júpiter y la segunda parte no solo tiene en cuenta el tiempo que tarda Ío en recorrer el número de órbitas que ha realizado entre las dos observaciones sino que también tiene en cuenta la rotación que se produce en el cono de sombra de Júpiter debido a la traslación del mismo que retrasaría las ocultaciones. Además este último término también tiene en cuenta la verdadera forma de la órbita joviana y las variaciones en la velocidad que de traslación que se produce por ello.

Como podemos ver, puesto que  $d_j$ ,  $d_i$ ,  $\theta_{ij}$  e incluso  $n_{ij}$  pueden ser obtenidos o calculados a través de las efemérides en nuestro caso, los únicos parámetros que nos queda por determinar en la ecuación 2.2 serían  $c^{-1}$  y  $T$ , los cuales tienen un comportamiento lineal con  $\tau_{ij}$ , es decir, con las medidas de los tiempos de las ocultaciones o emersiones observadas desde la Tierra. Por lo tanto,  $c$  y  $T$  se podrían obtener mediante un ajuste por mínimos cuadrados.

## 2.5. Efemérides

Una efemérides astronómica proporciona datos sobre fenómenos astronómicos de interés para los astrónomos, tales como eclipses, desapariciones planetarias previas a un eclipse, tiempo sidéreo, posiciones de los nodos real y medio, las fases de la Luna, y a veces incluso la posición o posiciones de cuerpos celestes menores. Algunas efemérides añaden generalmente la declinación, la ascensión recta, las horas de salida y puesta del astro, su altura máxima y otros. Las efemérides científicas contienen frecuentemente datos útiles adicionales sobre la luna, planeta, asteroide o cometa más allá de las puras coordenadas en el cielo, como pueden ser la elongación, brillo, distancia, velocidad, diámetro aparente, ángulo fase, hora de salida, tránsito o puesta.

Las efemérides astronómicas son parte importante en este experimento ya que muchos de los datos para calcular la velocidad de la luz los extraeremos de ellas, como por ejemplo la distancia Tierra-Júpiter en cada observación, la anomalía verdadera de Júpiter y el número de órbitas sidéreas que ha realizado Ío. Será importante entonces calcular o encontrar una buena efeméride para reducir al mínimo el error que podemos cometer en estos datos, y con ello reducir también el error cometido en el cálculo para la velocidad de la luz. Con

esto en mente, siguiendo el artículo “Emulando a Römer: medida de la velocidad de la luz cronometrando los eclipses de Ío” de I. Martí-Vidal y otros. 2010[5], utilizaremos las mismas efemérides que ellos ya que están listas para usar directamente y han sido calculadas con el software *HORIZONS* (Giorgini et al. 1996)[6] del Jet Propulsion Laboratory (JPL). Este software produce unas efemérides de alta precisión para los objetos del sistema solar (ver Tabla 2.1). Consideraremos que los datos obtenidos de dicha efeméride carecen de error aunque sabemos que eso es prácticamente imposible pero no disponemos de información para cuantificar dicho error aunque, aún así, el error cometido es muy pequeño y no afectaría tanto a las observaciones como los errores cometidos a la hora de la medición del tiempo de ocultación o emersión.

En esas efemérides sólo se muestra la información que es necesaria para los cálculos que vayamos a realizar ya que los datos que aparecen son una recopilación, reestructuración y reformateado de las distintas salidas que produce el software *HORIZONS* del Jet Propulsion Laboratory. En las efemérides se muestran la fecha en la que tiene lugar el suceso, la hora en UT+1 (tendremos que tener en cuenta el cambio de horarios puesto que las observaciones se realizaron desde Canarias), la distancia a la que se encuentra Júpiter de la Tierra, el seno de la anomalía verdadera y el tipo de suceso que observaremos. Debemos tener en cuenta que la anomalía verdadera siempre retrasa el momento de la ocultación o la emersión con lo que tenemos que tomar el valor absoluto de la anomalía verdadera dada en las efemérides utilizadas.

<b>Fecha</b> ( <i>dd/mm/aa</i> )	<b>Hora Estimada</b> ( <i>UT + 1, hh : mm</i> )	<b>Distancia</b> ( $10^6$ ) <i>km</i>	<b>Anom. Ver.</b> ( <i>seno</i> )	<b>Suceso</b> ( <i>tipo</i> )
25/ 02/2016	13 : 22	667.02476	0.2423885	Eclipse
27/ 02/2016	07 : 51	666.08869	0.2401179	Eclipse
29/ 02/2016	02 : 19	665.29635	0.2378470	Eclipse
01/ 03/2016	20 : 48	664.64825	0.2355740	Eclipse
03/ 03/2016	15 : 16	663.78936	0.2310255	Eclipse
07/ 03/2016	04 : 13	663.58025	0.2287500	Eclipse
09/ 03/2016	00 : 59	663.51954	0.2263500	Reapar
10/ 03/2016	19 : 27	663.61335	0.2240722	Reapar
12/ 03/2016	13 : 56	663.85429	0.2217924	Reapar
14/ 03/2016	08 : 24	664.24157	0.2195124	Reapar
16/ 03/2016	02 : 53	664.77433	0.2172304	Reapar
17/ 03/2016	21 : 22	665.45097	0.2149473	Reapar

Tabla 2.1: *Ejemplo de los datos que se muestran en la efeméride utilizada. (I. Martí-Vidal y otros. 2010)*



---

---

## CAPÍTULO 3

---

---

# PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL Y OBSERVACIONES

El procedimiento utilizado para la realización de este experimento se ha intentado que fuese lo más parecido al procedimiento utilizado por Römer en el siglo XVII mejorando sólo los instrumentos de medida y los conocimientos existentes de las distancias en el Sistema Solar. Con esto, conseguimos comprobar si es posible mejorar la velocidad de la luz obtenida por Römer utilizando su método. En este capítulo haremos un repaso del equipo experimental necesario y utilizado para la realización de nuestro trabajo, comentaremos sus características y los motivos de su utilización. Además, matizaremos la importancia de realizar una buena medición del tiempo en el que se produjeron las observaciones y comentaremos los distintos problemas o dificultades existente en la toma de los datos. Por último, expondremos las medidas que realizamos para el caso de las ocultaciones y emersiones con las que trabajaremos más adelante.

## EXPERIMENTAL PROCEDURE

The procedure used for the realization of this experiment it has been tried to be as similar to the procedure used by Römer in the seventeenth century as possible only improving the measurement instruments and the knowledge of the distances in the solar system. With this, we tried to check if we could improve speed of light measurement obtained by Römer using his method. In this chapter we review the experimental equipment needed and used to carry out our work, discuss its characteristics and the reasons for their use. In addition, we will emphasize the importance of making a good measurement of time in which the observations were performed and we discuss various problems or difficulties in the data collection. Finally, we will discuss the measures that we have made in the case of occultations and emersions of Io that we will analyse later.

### 3.1. Equipo Utilizado

Para la realización de este experimento se han utilizado principalmente tres cosas: un telescopio, un reloj y unas efemérides. La importancia de la buena elección de estos tres objetos es enorme ya que, principalmente, estos son nuestros instrumentos de medida y la buena o la mala calidad de los mismos y su buen o mal uso afectarán, de forma directa, a la calidad de los datos que obtendremos de ellos.

Se ha utilizado un telescopio *Celestron Advanced VX8* que es un telescopio de tipo Schmidt-Cassegrain. Este telescopio posee una apertura de 203 mm con un tratamiento en los espejos que permite una mejor transmisión de la luz y una distancia focal de 2032 mm lo que nos da una razón focal de f/10, además, posee también una montura ecuatorial computerizada lo que facilita el seguimiento de Júpiter a lo largo de la noche.



Figura 3.1: *Telescopio Schmidt-Cassegrain utilizado para la realización de este experimento.*

La elección de este telescopio se ha realizado debido a que es un telescopio que sirve tanto para observación planetaria como para la observación del cielo profundo. Gracias a su diseño este telescopio corrige la aberración esférica y no posee aberración cromática con lo que nos será muy útil para observar las ocultaciones de Ío. En todas las observaciones hemos utilizado el mismo ocular: un Plössl *VIXEN* de 15mm de distancia focal y 50° de campo aparente. Utilizando la fórmula para calcular los aumentos tenemos que  $A = \frac{F_{Tele}(mm)}{F_{Ocu}(mm)} = 135$ . Durante todas las medidas se ha hecho uso del mismo ocular y telescopio.

El reloj utilizado para la medición del tiempo ha sido una aplicación del móvil llamada “Reloj Atómico” que está perfectamente sincronizada con el reloj atómico del Real Observatorio de la Armada de San Fernando (Cádiz). Este reloj nos permite medir con precisión hasta segundos. Hay que tener en cuenta que lo que nos interesa de verdad son las medidas del intervalo de tiempo entre ocultaciones, que puede ser de varias semanas he incluso meses (como es en nuestro caso); en todo este intervalo de tiempo nuestro reloj no puede atrasarse o adelantarse ya que ello produciría errores sistemáticos evitables. De ahí la importancia de la sincronización con ese reloj atómico comentado anteriormente. Hemos comprobado además que el reloj está también sincronizado con el reloj de un GPS y con el reloj de la emisora RNE.

Las horas que aparecen en la tabla de efemérides vienen dadas en Tiempo Universal Coordinado UTC, con origen en el meridiano cero, el meridiano de Greenwich, por lo que tendremos que sumar o restar las horas correspondientes al huso horario desde el que hemos realizado la observación, en nuestro caso, desde La Orotava ( $28^{\circ}22'52.6''\text{N}$ ,  $16^{\circ}31'56.3''\text{W}$ ), (Tenerife, Canarias). Tenemos que durante el invierno la hora local coincide con el UTC y en verano tendremos una hora de adelanto. Sabiendo esto podremos corregir las horas proporcionadas por las efemérides para no llegar demasiado tarde o demasiado temprano a las observaciones. Por último, las efemérides utilizadas fueron las proporcionadas por I. Martí-Vidal y otros.[5]

## 3.2. Medición del Tiempo y Dificultades en la Toma de Datos

Como ya hemos visto, la medición del tiempo en el que se producen las ocultaciones y las emersiones va a ser la medida determinante en este experimento. Tenemos que tener extremo cuidado en datar cuando se produce, según nuestro criterio, las ocultaciones o las emersiones de Ío. Recordemos que habíamos elegido la total desaparición de la Ío como momento de la ocultación y el momento justo cuando Ío comienza a verse para las emersiones.

El problema reside en que las condiciones de observación varían de una noche a otra. Aunque todo lo que podemos controlar nosotros lo hemos intentado controlar, es decir, siempre se realizaron las observaciones con el mismo telescopio, con el mismo ocular para conseguir los mismos aumentos y desde el mismo lugar, hay otros factores que nos afectan y no podemos modificar, como por ejemplo las distintas masas de aire existentes entre las distintas observaciones, las distintas condiciones atmosféricas y las distintas horas a las que se producían los acontecimientos. Todo esto hace que la luz que nos llega de Ío varíe en intensidad con lo que la estimación del tiempo de ocultación o emersión puede verse afectado en unos segundos lo que nos introducirá errores observacionales. Podemos hacer una aproximación de dichos errores que, combinados, pudieron habernos causado retrasos en nuestras mediciones pero tenemos que tener en cuenta que el mero hecho que Ío no desaparezca instantáneamente en la sombra de Júpiter ya nos da una incertidumbre no despreciable. A pesar de todo, estos errores los podemos tratar como errores sistemáticos. Aún así, cuando realizamos el ajuste por mínimos cuadrados, tenemos varias observaciones y están lo suficientemente espaciadas, nuestro ajuste será lo suficientemente bueno como para obtener una velocidad de la luz razonable teniendo en cuenta el método realizado.

## 3.3. Medidas Realizadas

Comenzando con las medidas realizadas para las ocultaciones de Ío en la sombra de Júpiter hemos realizado varias medidas espaciadas en el tiempo para tener una mejor aproximación

en los resultados. Téngase en cuenta que el parámetro que determina la ecuación 2.2 es el intervalo de tiempo entre ocultaciones/emersiones. Las fechas y momentos exactos de las ocultaciones medias están expuestas en la Tabla 3.1 donde también se indican el número de órbitas que ha dado Ío correspondiente a esa fecha, siendo la órbita 0 el momento en el cual comenzamos nuestras mediciones para las ocultaciones.

<b>Año</b>	<b>Fecha</b>	<b>Ocultación</b>	<b>Órbita</b>
2015	13 Diciembre	04 29 00	0
2015	20 Diciembre	06 22 17	4
2015	29 Diciembre	02 43 46	9
2016	13 Febrero	03 01 10	35

Tabla 3.1: *Momentos en los que se observó la total ocultación (eclipse) de Ío por la sombra de Júpiter. Los tiempos vienen dados en horas, minutos y segundos de tiempo universal (UT)*

Como vemos en la Tabla 3.1, las fechas corresponden con los momentos de ocultación de Ío. Aunque son relativamente pocas las medidas tomadas para las ocultaciones, principalmente debido a las malas condiciones meteorológicas presente por esas fechas y al comienzo de los exámenes en enero, vemos que en los datos tenemos observaciones que se encuentran cercanas entre sí y una de ellas está bastante alejadas con respecto a la demás.

Para el caso de las emersiones, comienzan Marzo del año 2016 donde hemos obtenido también el mismo número de medias que para el caso de las ocultaciones. En la tabla 3.2 se muestran los tiempos obtenidos para las emersiones de Ío justo cuando aparece por la sombra de Júpiter.

<b>Año</b>	<b>Fecha</b>	<b>Ocultación</b>	<b>Órbita</b>
2016	24 Marzo	22 13 59	0
2016	09 Abril	20 31 09	9
2016	16 Abril	22 26 07	13
2016	10 Julio	21 24 07	61

Tabla 3.2: *Momentos en los que se observó la emersión (reaparición) de Ío por la sombra de Júpiter. Los tiempos vienen dados en horas, minutos y segundos de tiempo universal (UT)*

Las observaciones realizadas para las emersiones están un poco más espaciadas que las realizadas en el caso anterior y, como comentamos antes, también se ha realizado una ob-

servación lo suficientemente alejada como para poder tener varios puntos convenientemente separados de la recta de ajuste. Tenemos que tener en cuenta que los tiempos que se exponen en ambas Tablas están dados en UT. Para el caso de las emersiones hay un cambio entre el UT y el tiempo local ya que en Canarias se pasa al horario de verano (UT+1) con lo que tenemos que tener esto en cuenta en las 3 últimas observaciones realizadas. En la Tabla 3.2 ya se encuentran los tiempos corregidos.



---

---

## CAPÍTULO 4

---

---

# ANÁLISIS DE LAS OBSERVACIONES

Las observaciones realizadas para este experimento abarcan un amplio periodo de tiempo siendo las primeras observaciones, para las ocultaciones, realizadas a finales del año 2015 y la última de las observaciones de las ocultaciones realizada en Febrero del año 2016. A partir de Marzo del 2016 comienzan las primeras observaciones que se realizaron para el caso de las emersiones llegando hasta el mes de Julio de dicho año. En este apartado elaboraremos los cálculos necesarios para poder realizar un ajuste por mínimos cuadrados de la ecuación 2.2 a dichas observaciones partiendo de la ecuación que calculamos anteriormente para el retraso en las mismas. Además, también se comentarán algunas incertidumbres que tenemos que tener en cuenta y se realizará el cálculo matemático para la determinación cuantitativa de las mismas.

# ANALYSIS OF OBSERVATIONS

Observations for this experiment span a long period of time being the first observations, for occultations, performed in late 2015 and the last occultation observations made in February 2016. In March 2016 start the first observations that were made for the case of emersions reaching the month of July of that year. This section will elaborate calculations necessary to perform least-squares fit of equation 2.2 to the observations based on the above equation to calculate the delay in the observations. In addition, we are going to discuss some uncertainties we have to take into account and will be made the mathematical calculation for the quantitative determination of those uncertainties.

## 4.1. Retraso en las Observaciones

Partiendo de la ecuación 2.2 para el retraso en las observaciones tenemos que:

$$\tau_{ij} = \frac{d_{ij}}{c} + \left( n_{ij} + \frac{\theta_{ij}}{2\pi} \right) T \implies t_j - t_i = \frac{d_j - d_i}{c} + \left( n_{ij} + \frac{\theta_{ij}}{2\pi} \right) T \quad (4.1)$$

Con la cual, de forma experimental, podremos ajustar esta expresión por mínimos cuadrados para realizar el cálculo para la velocidad de la luz y el periodo de Ío. En nuestro caso, los datos experimentales serían el tiempo entre dos ocultaciones de Ío ( $\tau_{ij}$ ), y el número de vueltas que ha dado en este intervalo ( $n_{ij}$ ). Ajustaremos a una recta utilizando el método de ajuste por mínimos cuadrados tomando  $d_{ij}$  y  $\theta_{ij}$  de las efemérides. Para ello, usaremos un ajuste a una recta del tipo  $y = ax + b$  donde  $a$  será la pendiente de la recta que coincidirá, atendiendo a la ecuación 2.2, con el periodo de Ío ( $x = n + \frac{\theta}{2\pi}$ ) y la ordenada en el origen será proporcional a la velocidad de la luz. Para realizar el ajuste por mínimos cuadrados sabemos que las desviaciones “ $e$ ” de la recta de ajuste con respecto a cada dato experimental, vendrán dadas por la ecuación:

$$e_i = y_i - (ax_i + b) \quad \text{donde} \quad (i = 1, \dots, m) \quad (4.2)$$

donde  $m$  representa el número de puntos que tenemos para ajustar, es decir, el número de datos que obtenemos del experimento. En nuestro caso  $y$  el tiempo transcurrido entre dos observaciones y  $x$  el número de vueltas que ha dado Ío en ese tiempo.

Sea  $E(a, b)$  la suma cuadrática de cada una de esas desviaciones, es decir:

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^m (y_i - ax_i - b)^2 \quad (4.3)$$

Los valores que minimizan la suma cuadrática de las desviaciones  $E(a, b)$  son aquellos para los que se cumple:

$$\frac{\partial E}{\partial T} = 0 \quad \frac{\partial E}{\partial c} = 0 \quad (4.4)$$

Realizando las derivadas y simplificando obtenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial T} &= \left( \sum_{i,j} \tau_{ij}^{obs} \left( n_{ij} + \frac{\theta_{ij}}{2\pi} \right) - \frac{1}{c} \sum_{ij} d_{ij} \left( n_{ij} + \frac{\theta_{ij}}{2\pi} \right) - T \sum_{ij} \left( n_{ij} + \frac{\theta_{ij}}{2\pi} \right)^2 \right) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial c} &= \left( \sum_{ij} \tau_{ij}^{obs} d_{ij} - \frac{1}{c} \sum_{ij} d_{ij}^2 - T \sum_{ij} d_{ij} \left( n_{ij} + \frac{\theta_{ij}}{2\pi} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Si realizamos los siguientes cambios para simplificar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{ij} \tau_{ij}^{obs} \left( n_{ij} + \frac{\theta_{ij}}{2\pi} \right) & B &= \sum_{ij} d_{ij} \left( n_{ij} + \frac{\theta_{ij}}{2\pi} \right) & C &= \sum_{ij} \left( n_{ij} + \frac{\theta_{ij}}{2\pi} \right)^2 \\ D &= \sum_{ij} \tau_{ij}^{obs} d_{ij} & E &= \sum_{ij} d_{ij}^2 & F &= \sum_{ij} d_{ij} \left( n_{ij} + \frac{\theta_{ij}}{2\pi} \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

nos queda un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} A - \frac{1}{c}B - TC = 0 &\implies B\frac{1}{c} + CT = A \\ D - \frac{1}{c}E - TF = 0 &\implies E\frac{1}{c} + FT = D \end{aligned} \quad (4.7)$$

Donde puede verse claramente que  $F = B$ , con lo que si resolvemos el sistema de ecuaciones nos queda que para el caso de la velocidad de la luz tenemos que:

$$\frac{1}{c} = \frac{\begin{vmatrix} A & C \\ D & B \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{AB - CD}{B^2 - EC} \implies c = \frac{B^2 - EC}{AB - CD} \quad (4.8)$$

Además, también podemos obtener el periodo de Ío del ajuste y lo calcularemos para compararlo con el periodo real y así tener una idea de la efectividad de este procedimiento. Para el caso del periodo tenemos:

$$T = \frac{\begin{vmatrix} B & A \\ E & D \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{BD - EA}{B^2 - EC} \quad (4.9)$$

Donde en ambos casos se ha utilizado que  $\Delta$  es el determinante que viene dado por:

$$\Delta = \begin{vmatrix} B & C \\ E & B \end{vmatrix} = B^2 - EC \quad (4.10)$$

Para la realización de estos cálculos hemos realizado un programa con el lenguaje informático *Python* que, una vez introducidos los datos necesarios de los distintos términos, nos calculará la velocidad de la luz y el periodo de Ío. Además, podemos obtener una estimación de los errores en este proceso sin más que tener en cuenta que la varianza viene dada por:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{m-2} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 = \frac{E(a, b)}{m-2} \quad (4.11)$$

y sabiendo que  $\sigma_y^2$  es la suma cuadrática de las desviaciones en unidades del número de grados de libertad, es decir, el número de medidas menos 2. Si aplicamos propagación de errores, podemos obtener tanto la incertidumbre cometida en la determinación de la pendiente de la recta (periodo de Ío,  $T$ ) como la incertidumbre cometida en la ordenada en el origen (velocidad de la luz,  $c$ ).

$$\sigma_T^2 = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial T}{\partial y_j} \sigma_y \right)^2 \quad \sigma_c^2 = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial c}{\partial y_j} \sigma_y \right)^2 \quad (4.12)$$

Operando en la ecuación 4.12 y utilizando las relaciones obtenidas anteriormente (ver la

ecuación 4.6) podemos obtener:

$$\epsilon(c) = \sigma_c^2 = c^2 \sqrt{\frac{C}{EC - B^2} \sigma_y^2} \quad (4.13)$$

Y para el caso del error en el periodo de  $\dot{I}$ o tenemos que:

$$\epsilon(T) = \sigma_T^2 = \sqrt{\frac{E}{EC - B^2} \sigma_y^2} \quad (4.14)$$

Estos errores serán los que utilicemos cuando exponamos nuestros resultados.

---

---

## CAPÍTULO 5

---

---

# RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este capítulo haremos un análisis de los resultados obtenidos aplicando las ecuaciones calculadas en los apartados anteriores a las medidas observacionales tomadas. Primero, expondremos los resultados obtenidos para la velocidad de la luz utilizando las medidas de las ocultaciones y con las mismas medidas también calcularemos el periodo de Ío. Seguidamente haremos lo mismo con las medidas obtenidas para las emersiones calculando también la velocidad de la luz y el periodo de Ío para este caso. Haremos un comentario de los errores existentes en el experimento y seguidamente, realizaremos la discusión de los valores encontrados para la velocidad de la luz y el periodo de Ío tanto en las ocultaciones como en las emersiones. Compararemos esos valores con los valores expuestos en otras publicaciones del mismo tema y también con la velocidad de la luz aceptada en la actualidad. Finalmente, lo compararemos con el valor obtenido utilizando los datos de Römer y discutiremos el por qué de la mejora en los resultados.

# RESULTS AND DISCUSSION

In this chapter we will make an analysis of the results obtained by applying the equations calculated in previous paragraphs to the observational measurements. First, we will present the results using the occultations and with the same measures we will also calculate the period of Io. Then we do the same with the measures obtained for emersions also calculating the speed of light and the period of Io. We will do a review of existing errors in the experiment and then, we will make the discussion of the values found for the speed of light and the period of Io for occultations and emersions. We compare these values with the values reported in other publications on the same subject and with the speed of light accepted today. Finally, we compare it with the value obtained using data from Römer and discuss the reason for the improved results.

## 5.1. Velocidad de la Luz y Periodo de Ío.

### 5.1.1. Ocultaciones

Para el caso de las ocultaciones, tenemos que las fechas en las que realizamos las observaciones vienen dadas en la Tabla 3.1. Si representamos los intervalos de tiempo medidos entre las ocultaciones de Ío en función del número de órbitas sidéreas que ha realizado en ese intervalo obtenemos la gráfica siguiente.

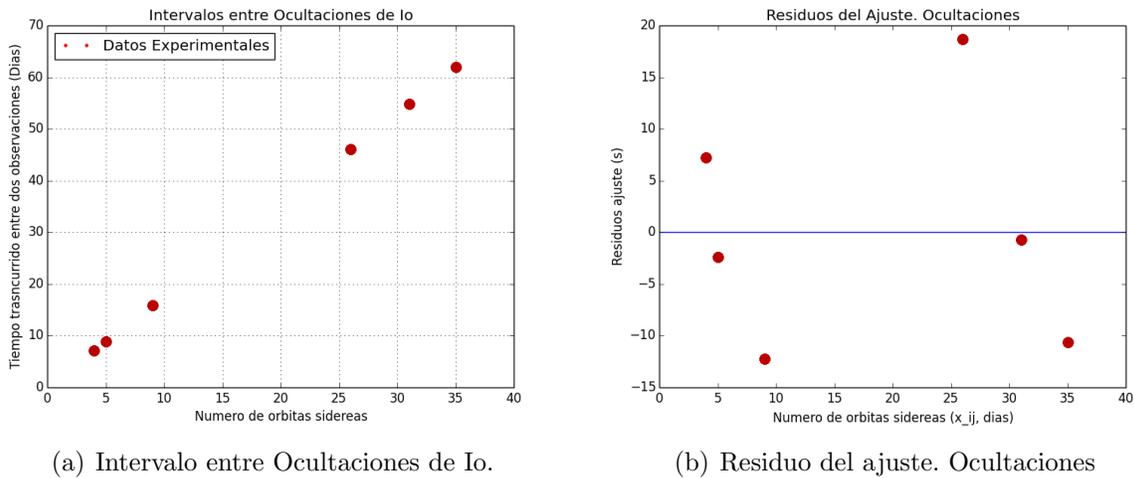


Figura 5.1: Gráficas obtenidas para los datos de las ocultaciones. (a) Se muestran los intervalos medidos entre ocultaciones de Ío, en el eje  $y$  se representan los intervalos  $\tau_{ij}$  como función del número de órbitas sidéreas barridas por Ío ( $n_{ij}$ ) en ese intervalo de tiempo. (b) Residuos del ajuste del modelo.

Como vemos en la Figura 5.1 se representan los intervalos de tiempo transcurridos entre dos ocultaciones cualesquiera observadas, es decir, para todos los pares posibles de ocultaciones que hemos medido. Al aplicar la fórmula para calcular la velocidad de la luz por el método de mínimos cuadrados obtenemos que:

$$c = \frac{B^2 - EC}{AB - CD} \implies c = 2.976943 \cdot 10^5 \text{ km/s} \quad (5.1)$$

Y la incertidumbre en el cálculo de la velocidad de la luz viene dado por:

$$\epsilon(c) = c^2 \sqrt{\frac{C}{EC - B^2} \sigma_y^2} = 2.727579 \cdot 10^4 \text{ km/s} \quad (5.2)$$

Para el caso del periodo de Ío tenemos que:

$$T_{Io} = \frac{BD - EA}{B^2 - EC} = 1.770481 \text{ dias} \quad (5.3)$$

Y el error cometido en el cálculo del periodo de Ío viene dado por:

$$\epsilon(T) = \sqrt{\frac{E}{EC - B^2} \sigma_y^2} = 0.000012 \text{ dias} \quad (5.4)$$

Finalmente, como resumen, podemos concluir que con el método aquí descrito hemos obtenido un valor para la velocidad de la luz y para el periodo de Ío, en las ocultaciones, de:

$$\begin{aligned} c &= (2.98 \pm 0.27) \cdot 10^5 \text{ km/s} \\ T &= 1.770481 \pm 0.000012 \text{ dias} \\ \sigma_y^2 &= 4.95 \cdot 10^{-9} \end{aligned} \quad (5.5)$$

### 5.1.2. Emerciones

Para el caso de las emergencias, tenemos que las fechas en las que realizamos las observaciones vienen dadas en la tabla 3.2. Si representamos los intervalos de tiempo medidos entre las emergencias de Ío en función del número de orbitas sidéreas que ha realizado en ese intervalo obtenemos la grafica siguiente.

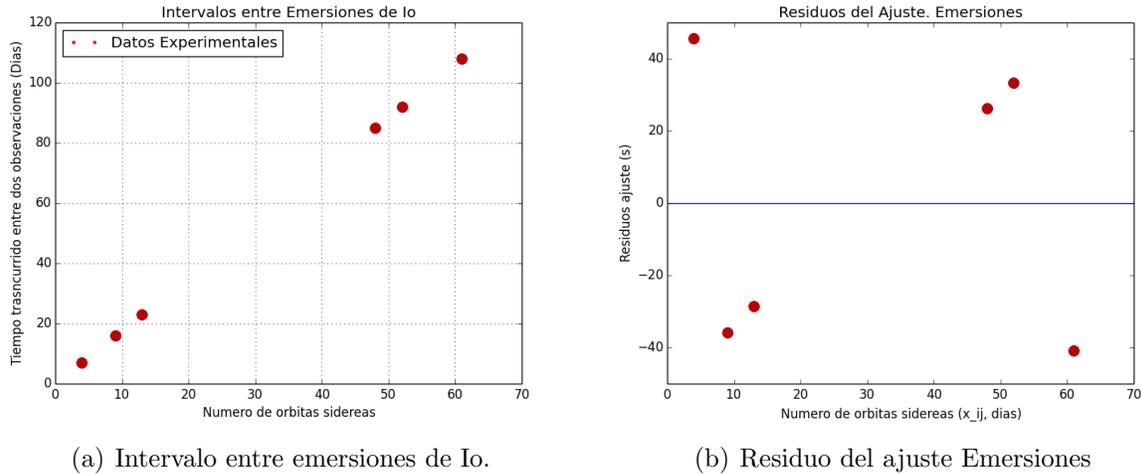


Figura 5.2: Gráficas obtenidas para los datos de las emergencias. (a) Se muestran los intervalos medidos entre emergencias de Ío, en el eje y se representan los intervalos  $\tau_{ij}$  como función del número de órbitas sidéreas barridas por Ío ( $n_{ij}$ ) en ese intervalo de tiempo. (b) Residuos del ajuste del modelo.

Como vemos en la figura 5.2 se representan los intervalos de tiempo transcurridos entre dos emersiones cualesquiera observadas, es decir, para todos los pares posibles de emersiones que hemos medido. Al aplicar la fórmula para calcular la velocidad de la luz por el método de mínimos cuadrados obtenemos que:

$$c = \frac{B^2 - EC}{AB - CD} \implies c = 2.995482 \cdot 10^5 \text{ km/s} \quad (5.6)$$

Y el error cometido en el cálculo de la velocidad de la luz viene dado por:

$$\epsilon(c) = c^2 \sqrt{\frac{C}{EC - B^2} \sigma_y^2} = 5.079433 \cdot 10^4 \text{ km/s} \quad (5.7)$$

Para el caso del Periodo de Ío tenemos que:

$$T_{Io} = \frac{BD - EA}{B^2 - EC} = 1.770449 \text{ dias} \quad (5.8)$$

Y el error cometido en el cálculo del periodo de Ío viene dado por:

$$\epsilon(T) = \sqrt{\frac{E}{EC - B^2} \sigma_y^2} = 0.000024 \text{ dias} \quad (5.9)$$

Finalmente, como resumen, podemos concluir que con el método aquí descrito hemos obtenido un valor para la velocidad de la luz, el periodo de Ío y  $\sigma_y^2$ , en las emersiones, de:

$$\begin{aligned} c &= (2.99 \pm 0.51) \cdot 10^5 \text{ km/s} \\ T &= 1.770449 \pm 0.000024 \text{ dias} \\ \sigma_y^2 &= 1.49 \cdot 10^{-7} \end{aligned} \quad (5.10)$$

## 5.2. Discusión de los Resultados

### 5.2.1. Velocidad de la Luz

Hemos obtenido un resultado con una precisión del 9% y del 16% en el caso de las ocultaciones y en el de las emersiones, respectivamente. Nuestro objetivo principal en este trabajo era calcular la velocidad de la luz rehaciendo el experimento de Römer, como podemos ver en los resultados 5.5 y 5.10 los resultados obtenidos son cercanos al valor aceptado para la velocidad de la luz, que es de 299792458 m/s (NIST, 2014)[1] y mucho mejores que el valor obtenido por Römer en su época de aproximadamente 220000 km/s (Cohen, I.B. 1940)[7]

Las mejoras en los resultados de la velocidad de la luz con respecto a la calculada por Römer residen básicamente en la modernización de los equipos utilizados. La utilización de un mejor telescopio y, principalmente, de un mejor reloj han sido los que han dado esta mejoría a los datos. Aunque también hemos utilizado un método esencialmente similar al utilizado por Römer, pero a la hora de tratar y analizar los datos, también lo hemos modernizado utilizando el método de mínimos cuadrados.

Römer realizó en total cuatro medidas de ocultaciones y emersiones de Ío para dar su resultado (James H. Shea, 1998)[8]. Nosotros hemos realizado cuatro medidas para las ocultaciones y cuatro medidas para las emersiones con lo que podemos concluir que al tener más datos de las observaciones obtenemos una mejor aproximación del valor de la velocidad de la luz, aunque sabemos que principalmente, el resultado de Römer se aleja del valor conocido para la velocidad de la luz debido al problema que tenía en la precisión de la medición del tiempo y no tanto por el número de observaciones realizadas aunque esto último queda bastante claro que también afecta a la precisión de la medida.

Comparando los resultados de las ocultaciones con los resultados obtenidos para la velocidad de la luz de las emersiones, vemos que estos últimos tienen una mejor exactitud y precisión con respecto a los primeros. Esta mejoría creemos que es debida al hecho de tener las observaciones más espaciadas en el tiempo. Esto definirá mejor el ajuste a la recta utilizado por el método de mínimos cuadrados. Esta mejora también puede ser debida a la mayor facilidad existente para detectar el momento preciso en el que se producen las emersiones que para el caso de las ocultaciones ya que, desde un punto de vista personal, me resulta más fácil detectar cuándo se ve el reflejo de la luz del Sol producido por Ío que determinar cuando esta luz se va apagando poco a poco. Aunque este método de no muy efectivo para calcular la velocidad de la luz de manera más precisa, hemos demostrado con este trabajo que es un método bastante bueno para encontrar un valor aproximado aceptable. Seguramente con más observaciones el valor de la incertidumbre se reduciría más.

En el artículo publicado por I. Martí-Vidal y otros (2010)[5] se obtiene un valor para la velocidad de la luz de  $(2.85 \pm 0.09) \cdot 10^8 \text{ m/s}$  que si lo comparamos con nuestro valor vemos que el nuestro es más aproximado para el caso de las ocultaciones aunque ellos tienen dos ocultaciones más. En nuestros cálculos obtenemos una incertidumbre mayor para esa medida. Lo mismo pasa si lo comparamos con el valor obtenido para las emersiones, vemos que el nuestro es más exacto al valor aceptado expuesto anteriormente. Aunque este método no es muy efectivo para calcular la velocidad de la luz de manera exacta, hemos demostrado con este trabajo que es un método bastante bueno para encontrar un valor aproximado aceptable.

### 5.2.2. Periodo de Ío

Aunque nuestro objetivo principal era calcular la velocidad de la luz, vemos que de la ecuación 2.2 podemos extraer también el periodo de Ío con lo que realizaremos también un cálculo para el periodo de dicho satélite mediante nuestras observaciones. Atendiendo a los resultados obtenidos, podemos ver que son bastante buenos teniendo en cuenta el método empleado. Hemos obtenido un valor del periodo de Ío muy preciso para el caso de las ocultaciones con un error muy pequeño. Para el caso de las emersiones, vemos que el periodo difiere un poco con respecto al calculado anteriormente para las ocultaciones pero es comparable teniendo en cuenta las incertidumbres cometidas.

### 5.3. Incertidumbres

En la realización de cualquier experimento, se cometen una serie de errores, algunos errores son sistemáticos, es decir, es un error que se produce de igual modo en todas las mediciones que realicemos. Ya habíamos comentado anteriormente que en este experimento se producen una serie de errores sistemáticos, el error de este tipo más importante lo cometemos a la hora de determinar el tiempo de las ocultaciones o de las emersiones debido, principalmente, a la dificultad para definir y datar cualquiera de los dos eventos. En este experimento, como lo que consideraremos será una diferencia entre los tiempos existentes en dos ocultaciones o dos emersiones, al ser el error cometido en el tiempo un error sistemático siempre estaremos cometiendo aproximadamente el mismo error en todas las medidas con lo que al realizar la diferencia los errores se eliminarán en primer orden y por eso esperamos que sean inferiores a los de tipo aleatorio.

Si queremos obtener una reducción en las incertidumbres podríamos utilizar un sensor *CCD* para captar el momento exacto en el que se producen todas las emersiones y ocultaciones ya que este es el punto más débil del experimento. Nosotros hemos utilizado nuestro ojo como detector de ese momento, pero esto es algo bastante subjetivo ya que nuestra sensibilidad a la luz puede variar por cualquier motivo, por ello, tendríamos una menor incertidumbre utilizando siempre el mismo sensor electrónico ya que nos permite controlar la sensibilidad a la luz pudiendo mantenerla así constante en todo el experimento.

---

---

## CAPÍTULO 6

---

---

# CONCLUSIONES Y PROYECTOS FUTUROS

Tras analizar todos los datos experimentales obtenidos en los capítulos anteriores y calcular los distintos parámetros que nos interesaban, en este capítulo final, expondremos las conclusiones que podemos extraer de los datos analizados así como también, en la sección de proyectos futuros, analizaremos las posibles mejoras que podamos realizar al experimento para obtener mejores resultados tanto para la velocidad de la luz como para el periodo de Ío.

# CONCLUSIONS AND FUTURE PROJECTS

After analysing all the experimental data obtained in the previous chapters and calculated the parameters that we are interested, in this final chapter, we will discuss the conclusions that we can draw from the data analysed and in the section of future projects, we will discuss any possible improvements we can make to the experiment for have better results for the speed of light and for the period of Io.

## 6.1. Conclusiones

Atendiendo a los resultados obtenidos en este experimento podemos extraer las siguientes conclusiones:

- La luz posee una velocidad finita de  $298621 \text{ km/s}$  con una incertidumbre de un 0.5 %, siendo este valor la media entre la velocidades obtenidas para las ocultaciones y para las emersiones.
- El periodo de Ío es de 1.770465 días con una incertidumbre de un 0.07 %, siendo este valor la media entre el periodo obtenido para las ocultaciones y para las emersiones.
- El método de Römer es un método efectivo para obtener una aproximación al valor de la velocidad de la luz.
- Un mayor número de observaciones espaciadas produce mejores resultados en el sentido de que disminuye la incertidumbre.

## 6.2. Proyectos Futuros

Con la intención de obtener mejores resultados mediante la realización de este experimento, proponemos las siguientes mejoras a realizar en proyectos futuros:

- Observar un mayor número de ocultaciones y emersiones. Para ello podría tenerse a varias personas, todas con relojes sincronizados a un mismo reloj atómico, observando desde distintos puntos de La Tierra con el fin de reducir las incidencias climáticas y horarias.
- Utilización de un sensor CCD para una mejor definición (más objetiva) de las ocultaciones y emersiones.
- Realización de una misma observación por varios telescopios para obtener una media del tiempo en el que se ha producido cualquiera de los dos eventos.
- Realizar el experimento tanto con un reloj atómico como con un cronómetro perfectamente sincronizado para comprobar que no hay ningún retraso o adelanto entre ellos.

---

---

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] NIST, “Fundamental physical constants,” *NIST Constants, Units, and Uncertainty*, 2014.
- [2] H. L. Fizeau, “Sur une experience relative a la vitesse de propogation de la lumiere,” *Comptes Rendus*, 1849.
- [3] S. S. Sheppard, “The gigant planet satellite and moon page,” *Carniege Institution for Science*, March 2015.
- [4] O. Römer, “Démonstration touchant le mouvement de la lumière trouvé par m. roemer de l’académie des sciences,” *Journal des Sçavans*, 1676.
- [5] C. C.-M. I. Martí-Vidal, S. Jiménez-Monferrer, “Emulando a römer: medida de la velocidad de la luz cronometrando los eclipses de ío,” *Revista Española de Física*, 2010.
- [6] A. C. J.D. Giorgini, D.K. Yeomans, “Bulletin of the american astronomical society,” 1996.
- [7] I. Choen, “Roemer and the first determination of the velocity of light (1676),” 1942.
- [8] J. H. Shea, “Ole rømer, the speed of light, the apparent period of io, the doppler effect, and the dynamics of earth and jupiter,” *American Association of Physics Teachers.*, 1998.