



Universidad  
de La Laguna

---

# Control y gestión de proyectos: Aplicación a la construcción de invernaderos

*Control and project management: Application to the construction of  
greenhouses*

David Romero Dorta

*Trabajo de Fin de Grado*

Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa

Facultad de Ciencias, Sección de Matemáticas

Universidad de La Laguna

---

La Laguna, 14 de septiembre de 2016



Dr. D. **Joaquín Sicilia Rogríguez**, con N.I.F. 42033231-H profesor de Universidad adscrito al Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de La Laguna

Dr. D. **David Alcaide Lopez de Pablo**, con N.I.F. 43356377-C profesor de Universidad adscrito al Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de La Laguna

## **C E R T I F I C A N**

Que la presente memoria titulada:

*“Control y gestión de proyectos: Aplicación a la construcción de invernaderos.”*

ha sido realizada bajo su dirección por D. **David Romero Dorta**, con N.I.F. 78639509-W.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos firman la presente en La Laguna a 15 de septiembre de 2016



## Agradecimientos

A D. Joaquin Sicília Rodríguez y D. David Alcaide López de Pablo, que me han proporcionado una ayuda incalculable para la realización de esta memoria.  
A Dña. Bianca Kennedy Gimenez, por su gran apoyo durante este último año.  
A mi familia, amigos y compañeros, que me han acompañado siempre durante este largo camino.



## Resumen

*El objetivo de este trabajo es estudiar el control y la gestión de proyectos, para posteriormente implementarlo en una situación real relacionada con la construcción de invernaderos.*

*Se comienza presentando una introducción histórica sobre las técnicas de programación y control de proyectos. Se describe como se representan las actividades y los sucesos en un grafo y se introduce el método PERT para el control y la gestión de proyectos, definiendo sus tiempos, sus holguras y el calendario de ejecución del proyecto. Posteriormente, se procede a la aplicación práctica de los conceptos teóricos descritos previamente en la construcción de un invernadero, utilizando el método PERT en su desarrollo.*





## **Abstract**

The objective of this study is to study the control and project management, then implement them in a real situation related to the construction of greenhouses.

It begins by presenting a historical introduction to programming techniques and project control. We described as activities and events are represented in a graph and PERT method for control and project management is introduced, defining their times, their clearances and the timetable for implementing the project. Subsequently, we proceed to the practical application of theoretical concepts previously described in the construction of a greenhouse, using the PERT method development.



# Índice general

<b>1. Motivación y objetivos</b>	<b>1</b>
<b>2. Introducción a la gestión de proyectos</b>	<b>3</b>
2.1. Características y ciclo de vida de un proyecto . . . . .	4
2.2. Etapas en el desarrollo de los proyectos . . . . .	4
2.3. Técnicas de gestión de proyectos . . . . .	5
2.4. Fases y actividades o tareas del proyecto . . . . .	6
<b>3. Fundamentos de la programación y control de proyectos</b>	<b>9</b>
3.1. Conceptos básicos del método PERT . . . . .	9
3.2. Realización del grafo PERT . . . . .	13
3.3. Clasificación de vértices del grafo por niveles . . . . .	16
3.4. Establecimiento de tiempos para las actividades . . . . .	18
<b>4. Algoritmo del método PERT</b>	<b>19</b>
4.1. Determinación de los tiempos más tempranos posibles (tiempos early) . . .	19
4.2. Obtención de los tiempos más tardíos permisibles (tiempos last) . . . . .	21
4.3. Método matricial para obtener los tiempos early y last . . . . .	22
4.4. Cálculo de holguras y camino crítico . . . . .	24
4.5. Calendario de ejecución del proyecto . . . . .	27
<b>5. Control y programación de la construcción de invernaderos</b>	<b>31</b>
5.1. Invernadero de Malla o de Plástico . . . . .	31
5.2. Invernadero de Plancha . . . . .	36
5.3. Análisis de los resultados . . . . .	41
<b>6. Conclusiones</b>	<b>43</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>45</b>



# Capítulo 1

## Motivación y objetivos

Me interesaba mucho que mi trabajo de fin de grado (TFG) en Matemáticas fuese un trabajo práctico. Viendo la lista de los proyectos propuestos por la Sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de La Laguna para la elección del TFG, me decanté por realizar un trabajo en Investigación Operativa, dado que es una de las ramas de las matemáticas que tiene más aplicaciones en la vida real. Para ello, me puse en contacto con los profesores D. Joaquin Sicilia Rodríguez y D. David Alcaide López de Pablo, los cuales me sugirieron trabajar en el tema de la Gestión y Control de Proyectos. Dicho tema me resultaba muy interesante ya que, personalmente, al tener una empresa familiar que se dedica al diseño y construcción de invernaderos, podría aplicar en dicha actividad empresarial las técnicas metodológicas recogidas en esta materia.

En consecuencia, el objetivo del proyecto consiste en, aplicar algunos de los conceptos matemáticos que hemos visto a lo largo de las diferentes asignaturas del Grado de Matemáticas en el diseño y construcción de invernaderos. Se verá que en el desarrollo de este TFG, necesitaremos utilizar la Teoría de Grafos y la Programación y Gestión de Proyectos, junto con la ayuda de programas computacionales como el Open Project proporcionado por la Oficina de los Software Libre de la Universidad de La Laguna.



## Capítulo 2

# Introducción a la gestión de proyectos

La Programación y Control de Proyectos, se desarrolló fundamentalmente como metodología de secuenciación de actividades a finales de los años 50 con la aplicación del PERT (Project Evaluation and Review Techniques) al proyecto Polaris, cuando la Marina de los Estados Unidos se enfrentó a los grandes problemas de coordinación y control que surgieron en la realización del proyecto de submarinos armados con proyectiles atómicos.

En este contexto, se considera que un proyecto es la realización de una actividad compleja, susceptible de descomponerse en una serie de tareas interdependientes entre sí en cuanto a su orden de ejecución, se debe tener en cuenta los costos asociados a las actividades tiempos, recursos y costes.

Esta definición implica que la naturaleza de los proyectos puede ser muy diversa, considerándose proyecto tanto a la construcción de un edificio como a la organización de un congreso. Este carácter general de los proyectos es muy importante, pues eleva considerablemente el número de personas que pueden aplicar esta metodología en su vida profesional. Por tanto, los interesados en estas técnicas no se reducen exclusivamente a los responsables de la ejecución de proyectos de ingeniería, sino que se extienden a un núcleo de personas mucho más amplio, entre las que se puede incluir a profesionales tan diversos como a un economista encargado de introducir un nuevo producto en el mercado, o a un profesor encargado de organizar un curso de postgraduados. Este carácter multidisciplinario ha contribuido a incrementar considerablemente la gran popularidad de que gozan hoy en día las técnicas de programación y control de proyectos.

Actualmente, organismos públicos, empresas y profesionales utilizan esta herramienta. La gran difusión de ordenadores personales y una amplia gama de software posibilitan este hecho. Estas aplicaciones o software se conocen como sistemas de gestión de proyectos. Una de las aplicaciones más usadas es el Microsoft Project, que requiere el pago de una licencia, pero hay otras opciones de uso libre como el Open Project, el cual usaremos para el desarrollo de este trabajo.

## 2.1. Características y ciclo de vida de un proyecto

Las principales características de un proyecto se pueden esquematizar de la siguiente manera

- Existe un comienzo y un fin claramente identificable.
- Tiene un objetivo específico.
- Establecimiento de un conjunto de tareas que deben realizarse.
- Descripción de la interdependencia en las tareas que lo constituyen.
- Determinación de costes, recursos y tiempo.
- Utiliza una extensa variedad de recursos técnicos.

Las componentes típicas de un proyecto son el comienzo, las especificaciones, el diseño, planificación y por último la instalación/implementación, puesta en funcionamiento y revisión.

En la primera fase, el comienzo del proyecto, se establecen los términos de referencia, los objetivos, se acuerda el presupuesto y se obtiene la aprobación del proyecto. En la fase de especificación es donde se establecen con detalle los requerimientos y cuando se contacta con los usuarios del producto. En la fase de diseño va tomando forma poco a poco el producto final. Basándose en los requerimientos, los expertos crean una planificación para el problema del proyecto.

Finalmente en la fase de instalación o construcción se realiza la obra, se levanta el edificio o se construye el sistema. Ésta es la fase que se espera con más impaciencia. Una vez que el producto se ha diseñado y construido hay que instalarlo y ponerlo en funcionamiento en las fases de implementación y revisión. Aunque a lo largo de todo el proyecto se va verificando que estamos haciendo lo que se nos ha pedido, es en esta fase donde se logra la aceptación final.

## 2.2. Etapas en el desarrollo de los proyectos

Todo proyecto debe requerir la especificación de las actividades a realizar así como de los recursos disponibles para llevarlas a cabo, el análisis y desarrollo de proyectos consta de tres grandes etapas:

- Planificación y programación.
- Seguimiento y Control de la ejecución.
- Análisis y evaluación de los resultados.



La planificación de un proyecto consiste en definir las actividades y en estimar la duración y los recursos necesarios. Después se realiza la programación determinando el calendario de ejecución del proyecto.

Tan importante como esta primera fase es el seguimiento posterior. Controlar implica comparar la evolución real con la programación inicial, tomando medidas correctivas cuando los hechos difieren de lo previsto.

Es interesante el análisis final y la evaluación de la realización del proyecto, esto es, las diferencias entre previsiones y duraciones reales de las actividades, entre presupuesto y coste real, etc. Esta última fase es crucial debido a que los principales inconvenientes que surgen en la Gestión de Proyectos no son inherentes a las técnicas en sí, sino que provienen de la capacidad y experiencia de los responsables.

### 2.3. Técnicas de gestión de proyectos

Podríamos pensar que no encontraremos un método de gestión aplicable a todos los proyectos si éstos se caracterizan por ser únicos. Sin embargo, a pesar de la gran variedad de proyectos es necesario utilizar un método sistemático. No existe ninguna metodología perfecta para unas circunstancias concretas, pero proporciona unos principios básicos, que bien entendidos, serán una herramienta de ayuda importante para que los proyectos se realicen y finalicen con éxito.

Entre los beneficios de las técnicas de gestión, podemos citar las siguientes:

- Asegura que el producto que resulta del proyecto esté claramente definido y acordado por todas las partes implicadas.
- Permite que los objetivos del proyecto estén claramente definidos e integrados perfectamente dentro de los objetivos empresariales de la organización.
- Facilita que la responsabilidad de cada parte del proyecto esté perfectamente clara, asignada y acordada.
- Fomenta la utilización de buenas técnicas de planificación y anima a hacer estimaciones más precisas.
- Proporciona los medios para un efectivo seguimiento y control del proyecto.
- Da confianza al demostrar un control visible.

En gestión de proyectos los términos de planificación y programación no son sinónimos. Planificar un proyecto consiste en:

- Definir el proyecto, especificando los objetivos, recursos disponibles, tiempo necesario y presupuesto general.
- Dividir el trabajo en fases.
- Dividir las fases en actividades o tareas.

- Establecer las prelacións entre actividades y estimar su duración.
- Asignar recursos a las actividades.

Mientras que la programación de un proyecto consiste en establecer un calendario de ejecución. Por tanto, una buena programación debe tener en cuenta tiempos, recursos y costes.

## 2.4. Fases y actividades o tareas del proyecto

En general suele ser conveniente dividir el proyecto en fases, pues permite descomponerlo en partes claramente identificables. Cada una de estas fases puede dividirse en actividades o tareas a realizar interdependientes entre sí.

Las actividades de un proyecto, deben tener las siguientes características:

- Ser mensurables en términos de tiempo, recursos, esfuerzo y coste.
- Tener un producto final como resultado.
- Tener un comienzo y un fin claro.

La información que necesitamos de cada actividad podemos resumirla como sigue:

- Descripción de la tarea.
- Inputs o condiciones necesarios.
- Requerimientos de recursos con costes.
- Tiempo estimado.

Existe un tipo de tarea, con duración nula, que podríamos llamar fechas clave o hitos de proyecto. Muchas veces se utilizan, entre otras cosas, para proporcionar una medida del progreso del proyecto, comunicarse con la gente que no forma parte del equipo del proyecto, y para hacer hincapié en los resultados.

Una vez que tenemos el proyecto dividido en actividades debemos asignar una duración a las mismas. En general, la asignación de tiempos se hará basándose en datos históricos. Es necesario disponer de una medida de productividad para poder hacer estimaciones.

Es muy importante que todas las personas implicadas en la estimación de la duración de las actividades conozcan los objetivos de tiempo, coste y calidad del proyecto, y qué es lo que debe dar como resultado. Aún admitiendo la gran dificultad de realizar la labor de estimación se pueden dar unos principios generales, los cuales se describen a continuación.

- Fijar el tiempo que se tarda en realizar una actividad como resultado de los recursos implicados y de otras restricciones.

- Las estimaciones no deben contemplar tiempo extra para imprevistos, éstos se deben tener en cuenta a nivel global.
- Las estimaciones deben ser objetivas en la medida de lo posible.
- Las hipótesis y los procedimientos utilizados deben estar documentados.
- No se deben “maquillar” las estimaciones, sino intentar ser lo mas objetivos posibles.
- Siempre es apropiado hacer verificaciones razonables.

El software de gestión de proyectos permite considerar la duración de las actividades en una gran variedad de escalas.

Además de la duración de las actividades necesitamos conocer su orden de ejecución. Definimos las dependencias o prelación cuando determinamos el orden en que deben realizarse las tareas de un proyecto. Las relaciones de precedencia entre actividades se deben generalmente a restricciones de tipo técnico. Estas restricciones de recursos no son de red, no deben tenerse en cuenta en la planificación. Se considerarán en la programación de proyectos, al resolver el problema de nivelación de recursos.

El orden de ejecución de las diferentes actividades del proyecto puede representarse como una red en la que las actividades son los arcos (una actividad-un arco) o bien como una red en la que los nodos son las actividades y los arcos indican las restricciones de dependencia (una actividad-un nodo). La primera forma de representación es la más utilizada.

También podemos contemplar la posibilidad de un retraso, que se considerará como una demora en la actividad sucesora. El retraso podemos expresarlo en las mismas unidades de tiempo que las duraciones (minutos, horas, días, semanas, meses, años) o como un porcentaje de la duración de la actividad predecesora.

Claramente ligado al establecimiento de las duraciones de las actividades están los recursos necesarios para ejecutarlas en el tiempo estimado. Asumimos a lo largo del trabajo que disponemos de los recursos necesarios para la realización de todas las actividades.

En el capítulo siguiente se presentan los fundamentos de la Gestión de Proyectos.



## Capítulo 3

# Fundamentos de la programación y control de proyectos

### 3.1. Conceptos básicos del método PERT

El método PERT comienza con la descomposición del proyecto en una serie de actividades. Una actividad es la ejecución de una tarea, que exige para su realización la utilización de recursos como la mano de obra, maquinaria, materiales, etc.

Una vez que se especifican las actividades, el método PERT establece el concepto de suceso. Un suceso es un acontecimiento, el suceso no consume recursos, sólo indica el principio o el fin de una actividad o de un conjunto de actividades.

Para representar las diferentes actividades y sucesos en que se descompone un proyecto se utiliza una estructura de grafo. Los arcos del grafo representan las actividades y los vértices representan los sucesos. Como podemos ver en la figura 3.1, el vértice 1 indica el suceso inicio de la actividad A, y el vértice 2, el suceso fin de dicha actividad.

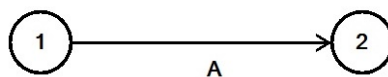


Figura 3.1:

El arco que une los vértices 1 y 2 representa la propia realización de la actividad. Habíamos dicho que un suceso puede representar el principio o el fin de un conjunto de actividades. En la figura 3.2 el vértice 1 representa el comienzo de las actividades A y B, mientras que en la figura 3.3, el vértice 3 representa el suceso fin de las actividades A y B.

Una vez el proyecto esté descompuesto en actividades, la siguiente fase del método PERT consiste en establecer las prelación existentes entre las diferentes actividades. Dichas prelación nos indican el orden en que deben ejecutarse las actividades ya sea por razones de tipo técnico, económico o jurídico. Siempre las diferentes actividades que constituyen un proyecto deben ejecutarse según un cierto orden.

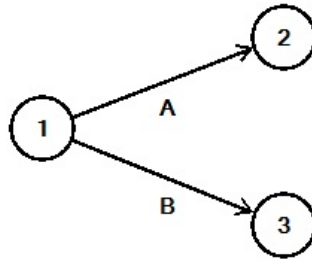


Figura 3.2:

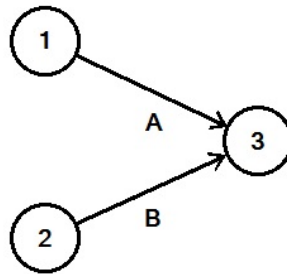


Figura 3.3:

Vamos a describir de qué manera podemos recoger en el grafo las prelacones. Para ello, comenzaremos por el caso más sencillo, que son las prelacones lineales. Estas prelacones se presentan cuando, para comenzar una actividad, previamente es necesario que haya finalizado una única actividad (la precedente). En la figura 3.4, para poder iniciar la actividad B es necesario que haya finalizado la actividad A. Es decir, el vértice 2 representa el suceso fin de la actividad A y, a la vez, el suceso comienzo de la actividad B.

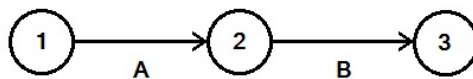


Figura 3.4:

Ahora vamos a estudiar el caso de las prelacones que originan una convergencia. Esto sucede cuando para poder iniciar una cierta actividad, es necesario que se haya finalizado previamente más de una actividad (las precedentes). En la figura 3.5 se deduce que para poder iniciar la actividad C es necesario que se hayan finalizado las actividades A y B. Es decir, el vértice 3 representa el suceso fin de las actividades A y B y, a su vez, el comienzo

de la actividad C.

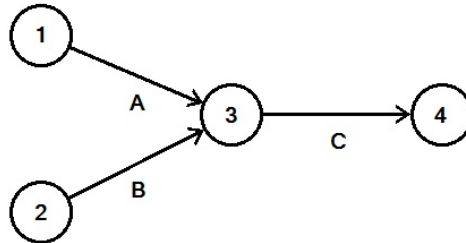


Figura 3.5:

El caso opuesto al anterior se presenta cuando, para poder iniciar un conjunto de actividades, es necesario que se haya finalizado previamente una actividad, véase la figura 3.6.

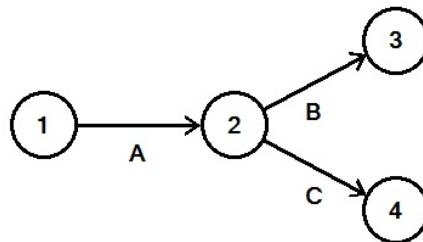


Figura 3.6:

Finalmente, llegamos al caso de las relaciones que origina una convergencia-divergencia. Este caso se presenta cuando, para poder iniciarse un conjunto de actividades, es necesario que se haya finalizado previamente más de una actividad, véase la figura 3.7.

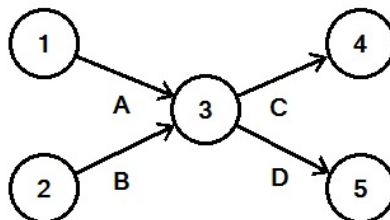


Figura 3.7:

Seguidamente vamos a ver un problema que se plantea en la construcción del grafo

PERT. Supongamos que queremos que un grafo refleje las siguientes prelaaciones: las actividades A y B preceden a la C y la actividad A precede a la D. En principio se podría pensar que el grafo de la figura 3.8 refleja correctamente las prelaaciones anteriores, pero en una observación detallada de dicho grafo nos lleva a la conclusión de que no refleja correctamente dichas prelaaciones, véase que el vértice 3 indica que para poder iniciar la actividad D es necesario que previamente se haya finalizado la actividad B, siendo ésta una prelación no incluida en las prelaaciones presentadas anteriormente.

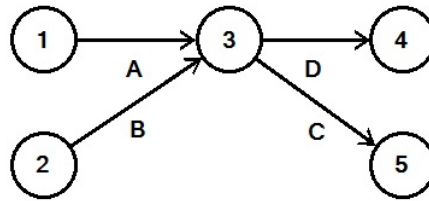


Figura 3.8:

Para resolver este problema, es necesario recurrir a actividades ficticias. Estas actividades no consumen tiempo ni recursos, son únicamente unos enlaces lógicos, que nos permite reflejar formalmente las prelaaciones existentes entre las diferentes actividades que constituyen el proyecto. En la figura 3.9, la actividad representada por el trazo discontinuo es la actividad ficticia. El grafo refleja ahora correctamente las prelaaciones, ya que el vértice 3 representa sólo el fin de la actividad A y el inicio de la D, y el vértice 4, el fin de las actividades A y B y el inicio de la C.

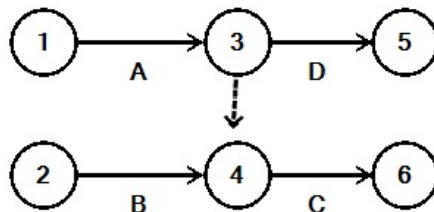


Figura 3.9:

Otro problema que tiene que tenerse en cuenta es el de las actividades en paralelo. Supongamos que queremos que un grafo refleje las siguientes prelaaciones: La actividad A es anterior a las actividades B y C y las actividades B y C son anteriores a la actividad D. En la figura 3.10 se refleja perfectamente las relaciones, siempre y cuando se efectúen manualmente, ya que si dicho proceso de cálculo del método PERT se efectúa por medio de un computador, la máquina no puede distinguir las actividades B y C entre sí, pues



para ella las dos actividades son la misma, dado que todas comienzan en el vértice 2 y finalizan en el vértice 3. Para resolver este problema se puede recurrir a las actividades ficticias, como se muestra en el grafo de la figura 3.11.

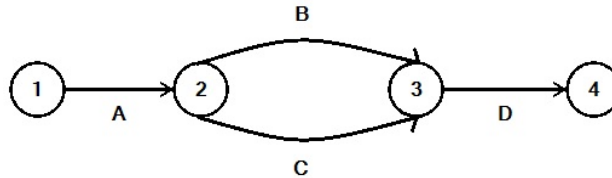


Figura 3.10: Cambiarla

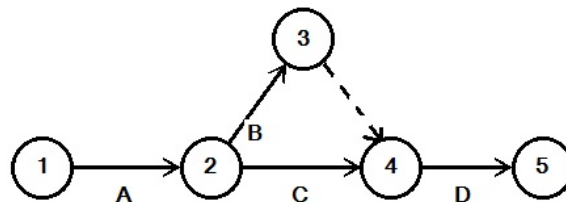


Figura 3.11:

En efecto, de acuerdo con el grafo de la figura 3.11, el computador distinguirá perfectamente las actividades B y C, ya que las dos actividades, aún naciendo en el mismo vértice, mueren en vértices distintos.

### 3.2. Realización del grafo PERT

En este apartado vamos a estudiar la construcción del grafo PERT de un proyecto completo. Primero veamos lo que son el suceso inicio del proyecto y el suceso fin del proyecto. Se entiende por suceso inicio del proyecto aquel que, representando el comienzo de una actividad o más de una actividad, no representa el fin de ninguna actividad. Este suceso viene representado como el único vértice del que salen arcos, pero al que no llegan arcos. Por el contrario, el suceso fin del proyecto es aquel que representando el fin de una o más de una actividad, no representa el comienzo de ninguna actividad. A este suceso se le reconoce como el único vértice al que llegan arcos, pero del que no salen arcos.

Antes de construir un grafo PERT, tenemos que tener en cuenta que la enumeración de los vértices ha de cumplir la condición  $i < j$ . Es decir, el número del vértice que representa

el suceso comienzo de una cierta actividad debe ser menor que el número del vértice que representa el suceso fin de la actividad.

Construyamos el grafo PERT a modo de ejemplo de un proyecto cuyas actividades y relaciones existentes entre las mismas son:

A precede a B, C y D  
 B precede a E  
 C precede a F  
 D precede a G  
 E precede a H  
 F precede a H  
 G precede a I  
 H precede a I

Para construir este grafo PERT, hay que recoger de una manera sistematizada la información contenida en este conjunto de relaciones. Para ello se puede hacer de dos maneras, ya sea con la matriz de encadenamientos o el cuadro de relaciones. La matriz de encadenamientos (véase el cuadro 3.1), consiste en una matriz cuadrada cuya dimensión es el número de actividades en que se ha descompuesto el proyecto. Cuando un elemento de dicha matriz esté marcado, nos indica que para poder iniciar la actividad que corresponde a la fila que cruza ese elemento es necesario que se haya finalizado previamente la actividad que corresponde a la columna que cruza dicho elemento.

Cuadro 3.1:

	<b>Act. Precedentes</b>								
<b>Act. Sigüientes</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>	<b>E</b>	<b>F</b>	<b>G</b>	<b>H</b>	<b>I</b>
<b>A</b>									
<b>B</b>	X								
<b>C</b>	X								
<b>D</b>	X								
<b>E</b>		X							
<b>F</b>			X						
<b>G</b>				X					
<b>H</b>					X	X			
<b>I</b>							X	X	

Es interesante observar que aquellas filas de la matriz en las que no aparece ninguna marca X nos indican que corresponden a actividades que no tienen ningún precedente. Es decir, aquellas actividades cuyo suceso inicial coincide con el suceso inicio del proyecto, en nuestro caso la actividad A es la que inicia el proyecto. Por otra parte, aquellas columnas de la matriz en las que no aparece ninguna marca X nos indican aquellas actividades que no tienen ninguna actividad siguiente. Es decir, aquellas actividades cuyo suceso final

coincide con el suceso fin del proyecto, en nuestro caso la actividad I es la actividad que finaliza el proyecto.

Ahora vamos a ver el cuadro de prelación (cuadro 3.2), dicho cuadro está formado por dos columnas. En la primera columna están representadas todas las actividades en que se ha descompuesto el proyecto. En la segunda columna figuran las actividades precedentes de su de su homólogo en la primera columna.

Cuadro 3.2:

Actividades	Precedentes
A	-
B	A
C	A
D	A
E	B
F	C
G	D
H	E,F
I	H,G

La actividad o actividades inicio del proyecto se reconocen en el cuadro de prelación por no tener ninguna actividad precedente. La actividad o actividades fin del proyecto se reconocen en el cuadro de prelación por no aparecer en la columna de precedente de dicho cuadro.

A partir de la matriz de encadenamientos o del cuadro de prelación se construye fácilmente el grafo PERT correspondiente, véase la figura 3.12.

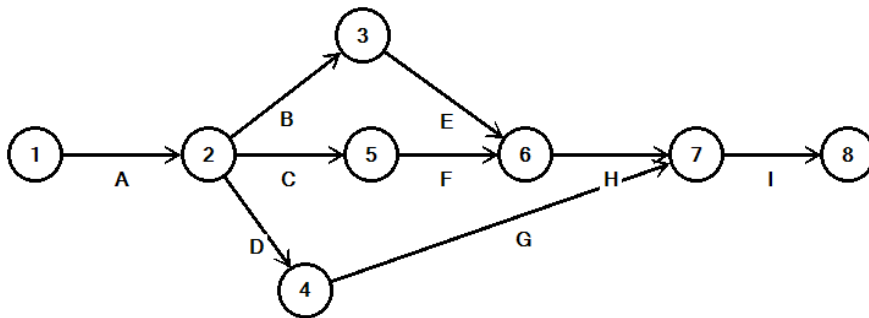


Figura 3.12:

### 3.3. Clasificación de vértices del grafo por niveles

Cuando un proyecto origina un grafo PERT muy complejo puede resultar útil ordenar el grafo en niveles. De esta manera se facilita la comprensión del grafo, así como la posterior fase de realización de cálculos, tanto si se realiza manualmente o por medio de un ordenador. A continuación vamos a ver dos procedimientos que nos permite efectuar la ordenación de un grafo en niveles. En primer lugar, comentaremos un método gráfico que resulta útil para proyectos con pocas actividades. Luego, comentaremos un algoritmo matricial que resulta muy eficaz tanto si realizamos los cálculos de la ordenación en niveles manualmente como si los realizamos en un ordenador.

Vamos a realizar el método gráfico en nuestro ejemplo del grafo PERT de la figura 3.12. En primer lugar, se observa el grafo con el objetivo de encontrar el subconjunto de vértices de los que no nace ningún arco. Este subconjunto, que en nuestro ejemplo está formado por el vértice 8, es el último nivel del grafo. Ahora suprimimos el vértice 8, como los arcos relacionados con él, en nuestro caso la actividad I. En el subgrafo obtenido se repite el mismo procedimiento, buscamos el subconjunto de vértices de los que no nace ningún arco. Este subconjunto, que en nuestro ejemplo está formado por el vértice 7, constituye el penúltimo nivel del grafo. A continuación, eliminaríamos el vértice 7, así como los arcos relacionados a él, obteniendo un nuevo subgrafo. Repitiendo iterativamente obtenemos el grafo ordenado en niveles de la figura 3.13.

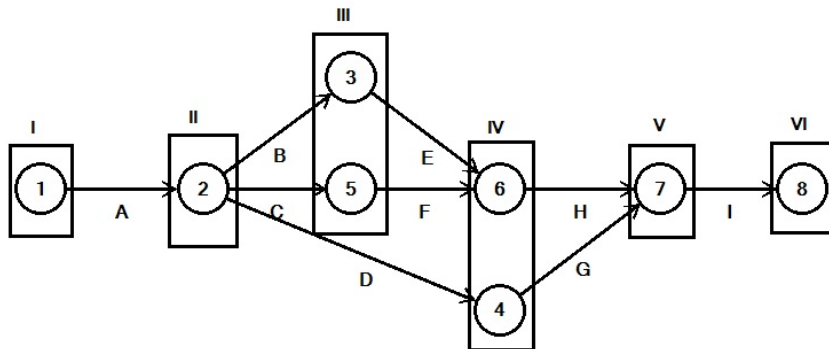


Figura 3.13:

Para exponer el algoritmo matricial que permite ordenar en niveles un grafo, primero tenemos que conocer el concepto de matriz de adyacencia asociada a un grafo. A todo grafo  $G$  de  $n$  vértices se le puede asociar una matriz cuadrada de dimensión  $n$  tal que sus elementos sean 1 ó 0. Un cierto elemento  $a_{ij}$  de la matriz asociada toma el valor 1 cuando existe un arco que une el vértice  $i$  con el vértice  $j$ , y toma el valor cero cuando no existe

un arco que una dichos vértices. Gracias a esta definición, podemos realizar la estructura de la matriz de adyacencia asociada al grafo de la figura 3.12 es la que figura representada en la parte izquierda del cuadro 3.3.

A partir de la matriz anterior vamos a explicar el algoritmo de Demoucron, que nos permitirá ordenar en niveles el grafo. El primer paso del algoritmo, consiste en ampliar la matriz asociada al grafo por medio de un vector columna. Los elementos de este vector son iguales a la suma de los elementos de cada fila de la matriz asociada. De esta forma obtenemos el vector  $V_1$ . Los elementos de  $V_1$  que sean cero, nos indican los vértices que constituyen el último nivel del grafo. En nuestro ejemplo, solo existe un cero, que es en el vértice 8. Por tanto, en este grafo el último nivel está formado únicamente por dicho vértice 8, que se escribe debajo de la columna correspondiente a  $V_1$ .

El segundo paso en la aplicación de este algoritmo consiste en ampliar la matriz asociada al grafo por medio de un nuevo vector columna  $V_2$ . Los elementos de este nuevo vector se obtienen restando a los elementos de  $V_1$ , la suma de los elementos de las columnas correspondientes a los vértices que en dicho vector  $V_1$  tomen el valor cero, teniendo en cuenta que cuando el resultado de la resta sea no positivo se sustituye la cantidad correspondiente por una X, lo cual nos indica que prescindimos de ese vértice. Los elementos de  $V_2$  que sean cero nos indican los vértices que constituyen el penúltimo nivel del grafo. En nuestro ejemplo, en el vector  $V_2$  existe un cero, el correspondiente al vértice 7. Por tanto, en este grafo el penúltimo nivel está formado por el vértice 7, que se escribe debajo de la columna correspondiente a  $V_2$ . Repitiendo iterativamente este proceso obtenemos los demás vectores columna correspondientes a nuestro ejemplo y que figuran reflejados en la parte derecha del cuadro 3.3. Estos vectores nos indican una ordenación en niveles del grafo, que resulta análoga a la que habíamos obtenido por el método gráfico.

Este algoritmo de Demoucron, puede aplicarse con facilidad a grafos de gran dimensión. Además, este algoritmo reúne la ventaja de ser fácil de procesar en un ordenador.

Cuadro 3.3:

<b>i-j</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>V<sub>1</sub></b>	<b>V<sub>2</sub></b>	<b>V<sub>3</sub></b>	<b>V<sub>4</sub></b>	<b>V<sub>5</sub></b>	<b>V<sub>6</sub></b>
<b>1</b>	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0
<b>2</b>	0	0	1	1	1	0	0	0	3	3	3	2	0	X
<b>3</b>	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	X	X
<b>4</b>	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	X	X	X
<b>5</b>	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	X	X
<b>6</b>	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	X	X	X
<b>7</b>	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	X	X	X	X
<b>8</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	X	X	X	X	X
									8	7	6	5	2	1
											4	3		
									VI	V	IV	III	II	I

### 3.4. Establecimiento de tiempos para las actividades

La duración de una actividad no puede fijarse en la mayor parte de los casos con exactitud. Depende de circunstancias aleatorias, ya sean meteorológicas, cortes de energía eléctrica, avería en máquina, etc. El método PERT aborda el problema de carácter aleatorio de las duraciones de las actividades con tres estimaciones de tiempo distintas: la estimación optimista ( $a$ ), la estimación más probable ( $m$ ) y la estimación pesimista ( $b$ ). El significado de estas estimaciones de tiempo es el siguiente:

*La estimación optimista ( $a$ )* representa el tiempo mínimo en el cual se podría ejecutar la actividad si todo fuese excepcionalmente bien, sin producirse ningún tipo de contratiempo durante la fase de ejecución.

*La estimación más probable ( $m$ )*, llamada también estimación modal, representa el tiempo que se emplearía normalmente en ejecutar una actividad. Es decir, el tiempo que se empleará cuando las circunstancias que influyan en la duración de la actividad no sean ni favorables ni desfavorables. Se considera que este tiempo es el que se hubiera producido con más frecuencia si la actividad se hubiese ejecutado un cierto número de veces.

*La estimación pesimista ( $b$ )* representa el tiempo máximo en que podría ejecutarse la actividad si todas las circunstancias que influyen en la duración fuesen desfavorables, produciéndose cualquier tipo de contratiempo. Estos contratiempos se exceptúan casos extremos: incendios, huelgas, etc.

Una vez establecidas las tres estimaciones de tiempo, se calcula el tiempo PERT ( $t_{ij}$ ) de ejecución de la actividad ( $i,j$ ), ponderando las anteriores estimaciones por medio de la fórmula:

$$t_{ij} = \frac{a + 4m + b}{6} \quad (3.1)$$

Es decir, el tiempo PERT es igual a la estimación optimista, más cuatro veces la modal, más la estimación pesimista, dividiendo la suma anterior entre seis.

En el capítulo siguiente expondremos detalladamente el procedimiento que sigue el Método PERT.

## Capítulo 4

# Algoritmo del método PERT

### 4.1. Determinación de los tiempos más tempranos posibles (tiempos early)

Una vez construido el grafo que refleja las relaciones existentes entre las diferentes actividades en que se ha descompuesto el proyecto, y después de haber asignado los tiempos de ejecución a las actividades, se puede pasar a la siguiente fase de un estudio PERT. Esta es una fase puramente algorítmica, es decir, consiste simplemente en un proceso de cálculo. Este es un proceso que comienza con el cálculo de los tiempos *early* y *last* de cada suceso. Vamos a apoyarnos en un ejemplo para explicar el procedimiento del cálculo de estos tiempos. Consideremos que cierto proyecto debe realizar seis actividades A, B, C, D, E y F. Las relaciones existentes entre las actividades son:

A precede a D  
B precede a C y D  
C precede a E y F  
D precede a G  
E precede a H  
F precede a H

En el cuadro 4.1 se recoge los tiempos de ejecución de las actividades calculadas siguiendo la fórmula (3.1) del capítulo anterior.

Cuadro 4.1:

Duración en días	A	B	C	D	E	F	G	H
<b>Optimista</b>	1	4	2	1	4	5	0	2
<b>Más probable</b>	2	7	8	2	7	8	3	2
<b>Pesimista</b>	9	10	14	9	16	17	6	2
<b>Tiempo PERT</b>	3	7	8	3	8	9	3	2

De los datos anteriores realizamos la correspondiente tabla de prelaciones, la cual se muestra en el cuadro 4.2.

Cuadro 4.2:

Actividades	Precedentes
A	-
B	-
C	B
D	A,B
E	C
F	C
G	D
H	E,F

A partir de este cuadro de prelaciones podemos construir el correspondiente grafo PERT, que está representado en la figura 4.1. Sobre cada arco se coloca una letra que designa a la actividad correspondiente, así como el tiempo PERT asociado a cada una de ellas. Sobre este grafo vamos a proceder al cálculo de los tiempos *early* y *last*.

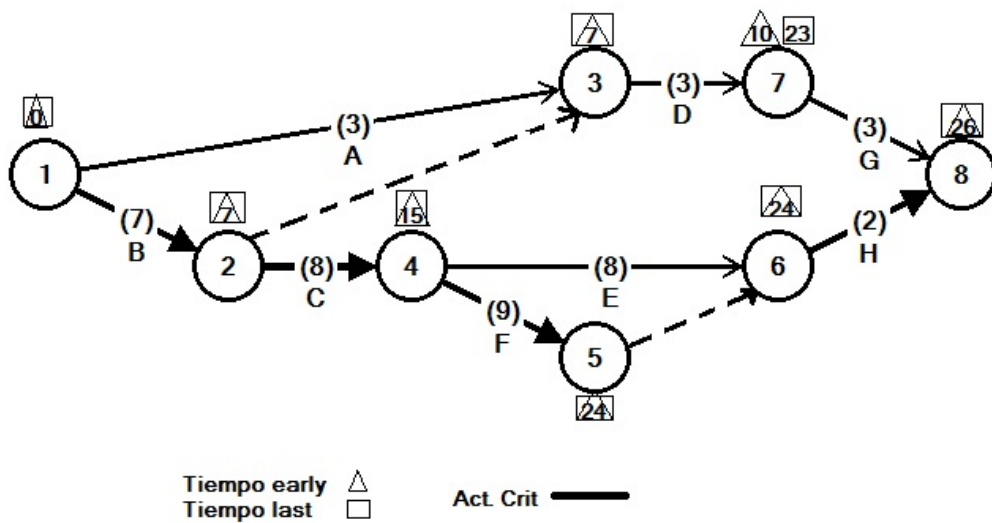


Figura 4.1:

Comenzaremos con los tiempos *early*. El tiempo *early* de un suceso  $j$  trata de medir el tiempo mínimo necesario para llegar a ese suceso, es decir, lo más pronto que se puede llegar a él. El procedimiento de cálculo es iterativo, se efectúa de izquierda a derecha del



grafo, comenzando por el suceso inicio del proyecto al que se le asigna un tiempo *early* de 0. Para distinguirse con el tiempo *last*, este tiempo *early* se inscribe en un triángulo.

Una vez tenemos el tiempo *early* del suceso inicial, se calculan los tiempos *early* de los sucesos en los que finalizan actividades que nacen en el suceso inicio del proyecto. En nuestro ejemplo, tenemos que calcular los tiempos *early* de los sucesos que vienen representados por los vértices 2 y 3. Como es obvio, el tiempo representado por el vértice 2 es igual a 7, mientras que para el vértice 3 es 7 en vez de 3 como se podría pensar en un principio, ya que el suceso señalado con el vértice 3 representa la finalización de las actividades A y B. Así, es necesario que se terminen las actividades A y B para poder comenzar la actividad D, y a los 3 días de haber comenzado el proyecto aún se estaría ejecutando la actividad B. Por tanto, el tiempo *early* del suceso representado por el vértice 3 tiene que ser igual a 7 días ya que es el tiempo mínimo para poder finalizar las actividades A y B y poder comenzar así la actividad D.

El método que hemos empleado para calcular el tiempo *early* del suceso representado por el vértice 3 puede generalizarse, de manera que nos sirva para el resto de vértices del proyecto. En efecto, el tiempo *early* de un cierto suceso  $j$ , que se representará por  $t_j$ , será igual a:

$$t_j = \max t_i + t_{ij}, \forall i \quad (4.1)$$

donde  $t_{ij}$  es la duración de la actividad que comienza en el suceso representado por el vértice  $i$  y finaliza en el suceso representado por el vértice  $j$ .

Es decir, el tiempo *early* de un cierto suceso  $j$  se calcula sumando los tiempos *early* de los sucesos en los que nacen actividades que finalizan en dicho suceso  $j$ , y eligiendo entre todas, la suma la mayor. Por ejemplo, el tiempo *early* del suceso representado por el vértice 6 es igual a:

$$t_6 = \max 15 + 8 = 23, 24 + 0 = 24 = 24$$

Aplicando iterativamente la fórmula (4.1) a los demás sucesos de nuestro proyecto, obtenemos los restantes tiempos *early* reflejados en la figura 4.1.

El tiempo *early* del suceso fin del proyecto tiene una importancia especial, ya que nos indica el tiempo mínimo necesario para poder finalizar el proyecto. Este tiempo mínimo se denominará duración del proyecto, que será el objetivo a cumplir por los encargados del control del proyecto.

## 4.2. Obtención de los tiempos más tardíos permisibles (tiempos *last*)

Una vez se hayan calculado los tiempos *early*, la siguiente fase algorítmica del método PERT es la de calcular los tiempos *last*. El tiempo *last* de un cierto suceso  $i$  trata de medir lo más tarde que podemos llegar a ese suceso de manera que la duración del proyecto no

se retrase en ninguna unidad de tiempo. Mientras que el proceso iterativo del tiempo *early* iba de izquierda a derecha, el del tiempo *last* va de derecha a izquierda del grafo y se comienza en el suceso fin del proyecto, al que se le asigna un tiempo *last* igual al tiempo *early* previamente calculado. Para distinguirlos, los tiempos *last* se inscriben en un cuadrado.

Una vez se tiene el tiempo *last* del suceso final, se calculan los tiempos *last* de los sucesos en los que nacen actividades que finalizan en el suceso fin del proyecto. En nuestro caso, tenemos que calcular los tiempos *last* de los sucesos representados por los vértices 6 y 7. Podemos ver que el tiempo *last* del vértice 7 es igual a 23, mientras que el tiempo *last* del vértice 6 es 24, al igual que el del vértice 5 ya que están unidos por un arco que representa una actividad ficticia.

El cálculo del tiempo *last* del suceso siguiente, es decir, el vértice 4, es más complicado ya que de ese vértice salen dos arcos. Se podría pensar que el tiempo *last* de dicho vértice es 16, ya que si sumamos esa cantidad a los días necesarios para ejecutar la actividad E podríamos estar en el suceso correspondiente del vértice 6 en su tiempo *last*. Pero tenemos que tener en cuenta, que el suceso representado por el vértice 4 además de representar el inicio de la actividad E, también representa el inicio de la actividad F. Por tanto, si el tiempo *last* fuera de 16, esto implicaría un retraso de la actividad de un día en la finalización del proyecto, pues no estaríamos en el suceso representado por el vértice 6 antes de los 26 días. Por lo tanto, se puede deducir que el tiempo *last* del vértice 4 es 15.

Este razonamiento se puede generalizar para obtener una fórmula que nos permita calcular los tiempos *last* de cualquier suceso del proyecto. Luego, el tiempo *last* de un suceso  $i$ , que representamos por  $t_i^*$ , será igual a:

$$t_i^* = \min t_j^* - t_{ij}, \forall j \quad (4.2)$$

Es decir, el tiempo *last* de un cierto suceso  $i$  se calcula restando a los tiempos *last* de los sucesos en los que finalizan actividades que nacen en dicho suceso  $i$  la duración de dichas actividades, y eligiendo la menor. En nuestro ejemplo, el tiempo *last* del suceso representado por el vértice 3 es igual a:

$$t_3^* = \min 23 - 3 = 20, 7 - 0 = 7 = 7$$

Aplicando iterativamente la fórmula (4.2) a los demás sucesos del proyecto, se obtienen los restantes tiempos *last* reflejados en el grafo de la figura 4.1.

### 4.3. Método matricial para obtener los tiempos *early* y *last*

El cálculo de tiempos *early* y *last* que hemos descrito en los apartados 4.1 y 4.2 de este capítulo es sencillo y fácil de aplicar si el grafo no es muy grande. Pero en grafos PERT con numerosas actividades, el procedimiento anterior puede volverse engorroso. Zadarenko (1968) ha propuesto un método matricial del cálculo de tiempos *last* y *early* que resulta

muy sencillo además de poder efectuarse con facilidad los cálculos de manera manual. También es muy sencilla su programación.

Vamos a explicar el método Zadarenko, aplicándolo a nuestro ejemplo. Primero, construimos una matriz cuadrada cuya dimensión es igual al número de vértices que posee el grafo, ocho en nuestro caso. Los elementos de esta matriz indican los tiempos PERT de las actividades que nacen en el vértice que corresponde a la fila que cruza ese elemento y finaliza en el vértice que corresponde a la columna que cruza dicho elemento.

La matriz correspondiente está representada en el cuadro 4.3. Para calcular los tiempos *early* se comienza por agregar una columna adicional en la parte izquierda de la matriz, en la que se irán escribiendo los valores de los tiempos *early*. El primer elemento de esa columna es cero, ya que es el valor del tiempo *early* del suceso inicio del proyecto. Para calcular los tiempos *early* de los demás sucesos se hace lo siguiente: se suman los elementos de la columna que corresponde al suceso cuyo tiempo *early* estamos calculando a los elementos de la columna adicional que representen sucesos en los que comienzan actividades que finalizan en el suceso del que estamos calculando su tiempo *early*. De todas las sumas obtenidas, la mayor nos indicará el tiempo *early* buscado. Así, en nuestro ejemplo, para calcular el tiempo *early* del suceso correspondiente al vértice 3 sumaremos los elementos (3,0) de esa columna a los dos primeros elementos (0,7) de la columna adicional. Como la mayor suma es 7, el tiempo *early* del vértice 3 es 7. Iterando de la misma manera completamos el resto de tiempos *early* del grafo PERT. Estos tiempos *early* están representados en las columnas (4) y (5) del cuadro 4.4.

Para calcular los tiempos *last*, se comienza por agregar una fila adicional en la parte inferior de la matriz, en la que se irán escribiendo los valores de los tiempos *last*. El primer elemento de esa fila (contando por la derecha) es 26, ya que éste es el valor del suceso fin del proyecto, que coincide con su tiempo *early*. Para calcular los tiempos *last* de los demás

Cuadro 4.3: Matriz de Zadarenko

$t_i$	$i-j$	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	—	7	3					
7	2		—	0	8				
7	3			—				3	
15	4				—	9	8		
24	5					—	0		
24	6						—		2
10	7							—	3
26	8								—
	$t_i^*$	0	7	7	15	24	24	23	26

sucesos se opera de la siguiente manera: se restan los elementos de la fila que corresponde al suceso cuyo tiempo *last* estamos calculando a los elementos de la fila adicional, que representan sucesos en los que finaliza la actividad que comienza en el suceso del que estamos calculando su tiempo *last*. De todas las diferencias obtenidas, la menor nos indi-

cará el tiempo *last* buscado. En nuestro ejemplo, para calcular el tiempo *last* del suceso correspondiente al vértice 4, restaremos los elementos (9,8) de la fila de la matriz a los elementos (24,24) de la línea adicional. Como de las dos diferencias la menor es 15, el tiempo *last* del suceso relacionado al vértice 4 será 15. Operando de esta forma se completa la fila adicional de tiempos *last*. Estos tiempos *last* están representados en las columnas (6) y (7) del cuadro 4.4.

#### 4.4. Cálculo de holguras y camino crítico

Bien es cierto, que la información que nos proporciona los tiempos *early* y *last* no es demasiado importante, con excepción del tiempo *early* o *last* del final del proyecto, pues, como hemos dicho con anterioridad, ese tiempo representa la duración del proyecto, siendo esta duración el objetivo a lograr por parte del responsable del proyecto. Ahora bien, la verdadera importancia de los tiempos *early* y *last* es que constituyen la base para el cálculo de las holguras, que son la pieza fundamental en todo el proceso de análisis del método PERT.

Comenzaremos por el concepto de holgura de suceso. *La holgura de un cierto suceso  $i$* , que representaremos por  $H_i$  se define como la diferencia entre los tiempos *last* y *early* de dicho suceso, es decir:

$$H_i = t_i^* - t_i \quad (4.3)$$

La holgura de un suceso nos indica el número de unidades de tiempo que puede retrasarse la realización del mismo, de manera que la duración del proyecto (medida por el tiempo *early* del suceso fin del proyecto) no experimente ningún retraso. En nuestro ejemplo, la holgura del suceso 3 es cero ( $7 - 7 = 0$ ). Es decir, el suceso fin de la actividad C y comienzo de las actividades E y F no puede experimentar ningún retraso respecto al tiempo calculado de siete días, pues ese retraso influiría en la duración prevista del proyecto. Por el contrario, la holgura del suceso 7 es de trece días ( $23 - 10 = 13$ ). Es decir, el suceso fin de la actividad D y comienzo de la actividad G puede retrasarse un máximo de trece días con respecto al tiempo calculado de diez días, sin que por ello la duración del proyecto experimente ningún retraso. Aplicando la fórmula (4.3) a los demás sucesos del proyecto obtenemos las holguras correspondientes. Dichas holguras están representadas en las columnas (8) y (9) del cuadro 4.4.

A continuación, vamos a definir el concepto de *holgura total de una actividad  $(i, j)$* , que representaremos por  $H_{ij}^T$ . Se define dicha holgura como el tiempo que resulta de restar al tiempo *last* del suceso final el tiempo *early* del suceso inicial y la duración de la actividad, es decir:

$$H_{ij}^T = t_j^* - t_i - t_{ij} \quad (4.4)$$

La holgura total de una actividad nos indica el número de unidades de tiempo en que puede retrasarse la realización de la actividad con respecto al tiempo PERT previsto, de manera que la duración del proyecto no experimente ningún retraso. En nuestro ejemplo, la holgura total de la actividad F es cero ( $24 - 15 - 9 = 0$ ). Es decir, la realización de la actividad F no puede retrasarse con respecto al tiempo PERT previsto de nueve días, pues ese retraso incidiría en la duración prevista del proyecto. Por otro lado, la holgura de la actividad E es de un día ( $24 - 15 - 8 = 1$ ). Es decir, la realización de la actividad E puede permitirse un día de demora respecto al tiempo PERT previsto de 8 días, sin que esta demora repercuta en la duración prevista del proyecto. Aplicando la fórmula (4.4) a las demás actividades del proyecto obtenemos las holguras correspondientes. Dichas holguras están representadas en la columna (10) del cuadro 4.4.

Cuadro 4.4:

Act.	Desig.	Dur.	$t_i$	$t_j$	$t_i^*$	$t_j^*$	$H_i$	$H_j$	$H_{ij}^T$	$H_{ij}^L$	$H_{ij}^I$	Cam. Crít.
1-2	B	7	0	7	0	7	0	0	0	0	0	CC
1-3	A	3	0	7	0	7	0	0	4	4	4	
2-4	C	8	7	15	7	15	0	0	0	0	0	CC
3-7	D	3	7	10	7	23	0	13	13	0	0	
4-5	F	9	15	24	15	24	0	0	0	0	0	CC
4-6	E	8	15	24	15	24	0	0	1	1	1	
6-8	H	2	24	26	24	26	0	0	0	0	0	CC
7-8	G	3	10	26	23	26	13	0	13	13	0	

Es muy importante tener en cuenta que si una actividad consume la totalidad o parte de su holgura total, este hecho puede producir una disminución en la holgura total de la actividad siguiente. En nuestro ejemplo, las holguras totales de las actividades D y G valen trece en ambos casos. Sin embargo, si la actividad D consumiera la totalidad de su holgura, la correspondiente holgura de la actividad H pasaría a ser de cero, pues el tiempo *early* del suceso inicio de dicha actividad se habría convertido en 23. De igual forma si la actividad D consumiera seis días de su holgura total, la holgura correspondiente de la actividad G descendería a siete días, pues el tiempo *early* del suceso inicio de dicha actividad pasaría a ser de 17 días.

Aquellas actividades cuya holgura total es cero se denominan *actividades críticas*. Uniendo todas las actividades críticas se forma un camino que va desde el vértice que representa el suceso inicial del proyecto al vértice que representa el vértice final del proyecto. Dicho camino recibe el nombre de *camino crítico* y resulta esencial para efectuar el control del proyecto. Dicho esto, el responsable deberá extremar la vigilancia de estas actividades críticas, pues un retraso en alguna de dichas actividades causaría un retraso en la finalización del proyecto. El camino crítico de nuestro ejemplo está formado por las siguientes actividades: B, C, F y H. Para poder identificar este camino crítico en el grafo, lo representaremos con una doble línea. En la columna (13) del cuadro 4.4 se han marcado con el signo CC las actividades críticas.

Hay que tener en cuenta, que no se deben desatender el resto de actividades ya que un retraso considerable en alguna de éstas podría convertirla en actividad crítica y en su consecuencia, cambiaría la estructura del camino crítico del grafo. Si, en nuestro ejemplo, la actividad E se demora dos días con respecto al tiempo PERT previsto de ocho días, pasará a ser una actividad crítica, dejando de serlo la actividad F. Este cambio del camino crítico produciría un retraso de un día en el tiempo previsto para finalizar el proyecto.

Para que una actividad sea crítica es necesario que la holgura de los sucesos inicio y fin de la actividad sea cero. Ahora bien, esta condición, aunque necesaria, no es suficiente. Así, la actividad E no es crítica (tiene una holgura total de un día), aunque la holgura de sus sucesos inicial y final son cero. Por otra parte, en un grafo PERT puede haber más de un camino crítico. Véase en nuestro ejemplo, si la actividad E en vez de tener un tiempo de ocho días tuviese un tiempo de nueve días, esta actividad pasaría a ser crítica, por lo que tendríamos un nuevo camino crítico, dicho camino crítico estaría formado por las actividades: B, C, E y H.

Es interesante tener en cuenta que el camino crítico no es otra cosa que el camino de longitud generalizada máxima que va desde el vértice que representa el suceso inicio del proyecto al vértice que representa el suceso fin del proyecto. Por tanto, para calcular el camino crítico de un grafo podremos aplicar los algoritmos de teoría de grafos que permiten calcular el camino de máxima longitud de un grafo.

Una vez comprendidos los conceptos de holgura, ahora vamos a estudiar los conceptos de *holgura libre* y *holgura independiente* de una actividad. Estos conceptos no son específicos del método PERT, sino que pertenecen al método Critical Path Method (CPM), aunque con el nombre de flotantes libres e independientes. No obstante, pese a no ser propias del método PERT, proporcionan una información complementaria muy útil, por lo que las incorporaremos a la fase de análisis del método PERT.

Comenzaremos por el concepto de holgura libre de una actividad. La *holgura libre* de una cierta actividad  $(i, j)$ , que representaremos por  $H_{ij}^L$ , se define como el tiempo que resulta de restar al tiempo *early* del suceso final el tiempo *early* del suceso inicial y la duración de la actividad, es decir:

$$H_{ij}^L = t_j - t_i - t_{ij} \quad (4.5)$$

La holgura libre de una actividad nos indica la cantidad de holgura disponible después de haber realizado la actividad, si todas las actividades del proyecto comenzaron en sus tiempos “early”. Esto es, la holgura libre representa la parte de la holgura total que puede ser consumida sin perjudicar a las actividades siguientes. En nuestro ejemplo, la holgura libre de la actividad A es de 4 días ( $7 - 0 - 3 = 4$ ) frente a una holgura total de cuatro días. Esto quiere decir que podemos consumir los cuatro días, pudiendo, comenzar las actividades siguientes, C y D, en sus tiempos “early”. Por el contrario, la holgura libre de la actividad D es cero ( $10 - 7 - 3 = 0$ ) frente a una holgura total de 13 días. Esto quiere decir que de los trece días de holgura total no se puede consumir ningún día, si queremos que la actividad siguiente, la actividad G, comience en su tiempo “early”.

Aplicando la fórmula (4.5) a las demás actividades del proyecto obtenemos las holguras correspondientes. Dichas holguras se representan en el cuadro 4.4 en la columna (11).

De la observación de las fórmulas (4.4) y (4.5) se deduce que la holgura libre de una cierta actividad será siempre menor o igual que su holgura total. Para que ambas holguras sean iguales, es condición necesaria y suficiente que la holgura del suceso fin de la actividad sea cero, pues en tal caso los tiempos *early* y *last* del suceso fin de la actividad coinciden ( $t_j = t_j^*$ ), por lo que las fórmulas (4.4) y (4.5) se hacen iguales.

Finalmente, vamos a establecer el concepto de holgura independiente de una actividad. La *holgura independiente* de una cierta actividad  $(i, j)$ , que representaremos por  $H_{ij}^I$ , se define como el tiempo que resulta de restar al tiempo *early* del suceso final el tiempo *last* del suceso inicial y la duración de la actividad, es decir:

$$H_{ij}^I = t_j - t_i^* - t_{ij} \quad (4.6)$$

La holgura independiente de una actividad, nos indica la cantidad de holgura disponible después de haber realizado la actividad, si todas las actividades del proyecto han comenzado en sus tiempos *last*. Esta holgura es escasa y a veces negativa. En nuestro ejemplo, la holgura independiente de la actividad E es 1 ( $24 - 15 - 8 = 1$ ). Aplicando esta fórmula (4.6) a las actividades en que está descompuesto el proyecto que estamos estudiando obtenemos las holguras correspondientes. Estas holguras están representadas en la columna (12) del cuadro 4.4.

De la observación de las fórmulas (4.5) y (4.6) se deduce que la holgura independiente de una cierta actividad será siempre menor o igual que su holgura libre. Para que ambas sean iguales, es condición necesaria y suficiente que la holgura del suceso inicio de la actividad sea cero, pues en tal caso los tiempos *early* y *last* del suceso inicio de la actividad coinciden ( $t_i = t_i^*$ ), por lo que las fórmulas (4.5) y (4.6) se hacen iguales. Por tanto, la condición es que las holguras del suceso inicio y del suceso fin de una actividad sean nulas.

## 4.5. Calendario de ejecución del proyecto

El proceso realizado en los apartados anteriores, ofrecen al responsable del proyecto una información de gran utilidad. Por otra parte, de esta información se puede deducir fácilmente un calendario de ejecución del proyecto, que va a constituir la pieza básica para efectuar el control del mismo. En este calendario se establecen cuatro fechas para cada una de las actividades: fecha de comienzo más temprana, fecha de comienzo más tardía, fecha de finalización más temprana y fecha de finalización más tardía. Seguidamente vamos a definir cada una de estas fechas.

La *fecha de comienzo más temprana* de una cierta actividad  $(i, j)$ , que representaremos por  $\Delta_{ij}$ , nos indica lo más pronto que puede comenzarse la actividad  $(i, j)$ . Obviamente, dicha fecha será igual a la dada por el tiempo *early* del suceso inicio de la actividad, es decir:

$$\Delta_{ij} = t_i \quad (4.7)$$

La *fecha de comienzo más tardía* de una cierta actividad  $(i, j)$ , que representaremos por  $\Delta_{ij}^*$ , nos indica lo más tarde que puede comenzarse la actividad  $(i, j)$ , de manera que la duración prevista del proyecto no se retrase en ninguna unidad de tiempo. Dicha fecha será igual a la dada por la suma del tiempo *early* del suceso inicial y la holgura total de la actividad:

$$\Delta_{ij}^* = t_i + H_{ij}^T \quad (4.8)$$

Teniendo en cuenta la fórmula de la holgura total de una actividad, dada por (4.4), la expresión (4.8) se convierte en:

$$\Delta_{ij}^* = t_j^* - t_{ij} \quad (4.9)$$

La *fecha de finalización más temprana* de una cierta actividad  $(i, j)$ , que representaremos por  $\nabla_{ij}$ , nos indica lo antes que puede finalizarse la ejecución de la actividad  $(i, j)$ . Dicha fecha será igual a la dada por la suma del tiempo *early* del suceso inicial y el tiempo PERT previsto para esa actividad:

$$\nabla_{ij} = t_i + t_{ij} \quad (4.10)$$

La *fecha de finalización más tardía* de una cierta actividad  $(i, j)$ , que representaremos por  $\nabla_{ij}^*$ , nos indica la fecha tope en que puede finalizarse la actividad  $(i, j)$ , de manera que la duración prevista del proyecto no se retrase en ninguna unidad de tiempo. Obviamente, dicha fecha será igual a la dada por el tiempo *last* del suceso final de la actividad, es decir:

$$\nabla_{ij}^* = t_j^* \quad (4.11)$$

Las fechas de comienzo más temprana y más tardía para una actividad crítica coinciden. En efecto, al ser la actividad crítica, su holgura total es cero, por lo que las fórmulas (4.7) y (4.8) o (4.7) y (4.9) coinciden. Así mismo, las fechas de finalización más temprana y más tardía para una actividad crítica también coinciden, ya que al ser la holgura total de la actividad cero, esto implica que  $t_j^* = t_i + t_{ij}$ , por lo que las fórmulas (4.10) y (4.11) también coinciden. Por otra parte, la diferencia de tiempo existente entre las fechas de comienzo más tardía y más temprana es exactamente igual a la diferencia de tiempo existente entre



las fechas de finalización más tardía y más temprana ( $\Delta_{ij}^* - \Delta_{ij} = \nabla_{ij}^* - \nabla_{ij}$ ). Además, dicha diferencia coincide con el valor de la holgura total de la actividad.

A partir de las fórmulas anteriores se puede establecer fácilmente un calendario de ejecución del proyecto. Así, vamos a calcular, las cuatro fechas correspondientes a la actividad E (la que nace en el suceso representado por el vértice 4 y finaliza en el suceso representado por el vértice 6). En este proyecto se toma como fecha de inicio el día 1 de agosto de 2016, no considerándose laborables los domingos. Las cuatro fechas para la actividad E se obtendrán aplicando las fórmulas anteriores, de esta manera obtenemos:

$$\begin{aligned}\Delta_{46} &= 15 \text{ (22 de agosto)} \\ \Delta_{46}^* &= 15 + 1 = 16 \text{ (23 de agosto)} \\ \nabla_{46} &= 15 + 8 = 23 \text{ (31 de agosto)} \\ \nabla_{46}^* &= 24 \text{ (1 Septiembre)}\end{aligned}$$

Las fechas anteriores se llevan al diagrama-calendario de la figura 4.2. Repitiendo el proceso con las demás actividades en que está descompuesto el proyecto, obtenemos el resto de fechas de nuestro calendario, hay que tener en cuenta que el diagrama-calendario está sacado con el software libre Open Project, donde las barras completas corresponden con el camino crítico y las barras discontinuas son las actividades no críticas, aunque en este diagrama-calendario solo se representan la fecha de comienzo más temprana  $\Delta_{ij}$  y la fecha de finalización más tempranas  $\nabla_{ij}$  de la actividad  $(i, j)$  que no sean actividades críticas

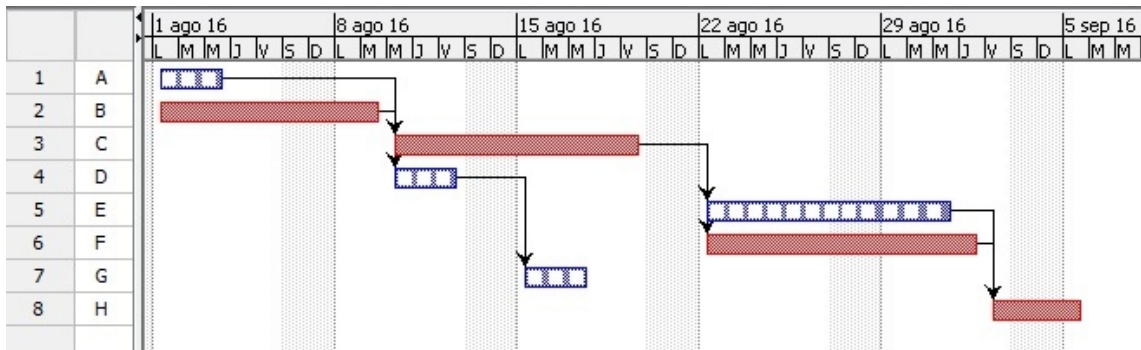


Figura 4.2:

De este diagrama se deduce fácilmente el calendario de ejecución del proyecto que está representado en el cuadro 4.5.

Cuadro 4.5: Calendario de ejecución del proyecto

<b>Actividades</b>	<b>Fecha de comienzo</b>	<b>Fecha de finalización</b>
A	1 - 5 agosto	4 - 10 agosto
B	1 agosto	10 agosto
C	10 agosto	22 agosto
D	10 agosto - 29 agosto	15 agosto - 1 septiembre
E	22 - 23 agosto	1 - 2 septiembre
F	22 agosto	2 septiembre
G	1 - 2 septiembre	5 - 6 septiembre
H	2 septiembre	6 septiembre

## Capítulo 5

# Control y programación de la construcción de invernaderos

Una vez que hemos visto todo el procedimiento del método PERT para la programación y gestión de cualquier proyecto, vamos a ponerlo en práctica en un caso real. Para ello vamos a describir como aplicar el método PERT en la construcción de invernaderos. Para el desarrollo de esta aplicación consideraremos dos tipos de invernaderos: el invernadero de malla o de plástico y el invernadero de plancha.

### 5.1. Invernadero de Malla o de Plástico

Para dar comienzo con el procedimiento del método PERT, lo primero es definir cuáles son nuestras actividades a realizar (Cuadro 5.1).

Cuadro 5.1:

A	Medir terreno
B	Calcular material y mano de obra
C	Traer material
D	Perforación del terreno para anclaje y tubos
E	Hormigonado de anclaje y tubos
F	Levantamiento de estructura
G	Colocación de hilo y grapas
H	Colocación de la cubierta de malla o de plástico
I	Fabricación de la puerta
J	Colocación de la puerta

Una vez tenemos las tareas a desarrollar, pasamos a realizar un cuadro (Cuadro 5.2) donde se ven reflejados las actividades y sus correspondientes tiempos de ejecución.

Cuadro 5.2:

Duración en días	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Optimista	1	1	1	2	1	4	3	2	1	1
Más probable	1	1	2	4	2	6	4	3	1	1
Pesimista	1	1	3	6	3	8	5	4	1	1
Tiempo PERT	1	1	2	4	2	6	4	3	1	1

En dicho cuadro se muestran los tiempos de ejecución como hemos descrito en el capítulo 3, donde tenemos el tiempo más optimista, el tiempo más probable, el tiempo más pesimista y el tiempo PERT.

Dicho tiempo PERT se calcula para la actividad  $(i, j)$  con la fórmula:

$$t_{ij} = \frac{a+4m+b}{6}$$

donde  $a$  es el tiempo optimista,  $m$  es el tiempo más probable y  $b$  es el tiempo pesimista. En el cuadro 5.1, podemos observar que la actividad D tiene un tiempo PERT de 4 días ( $\frac{2+4*4+6}{6}$ ). Siguiendo el mismo procedimiento se calcula el resto de los tiempos PERT.

Una vez calculamos todos los tiempos PERT, tenemos que saber cuáles son las prelaaciones entre las diferentes actividades que constituyen el proyecto. Dichas precedencias se describen a continuación:

A precede a B  
 B precede a C y D  
 C precede a E  
 D precede a E  
 E precede a F  
 F precede a G  
 G precede a H  
 I precede a J  
 H precede a J

De estos datos podemos deducir inmediatamente el cuadro de prelaaciones (Cuadro 5.3)

A partir del cuadro de prelaaciones construimos el correspondiente grafo PERT, que está representado en la figura 5.1.

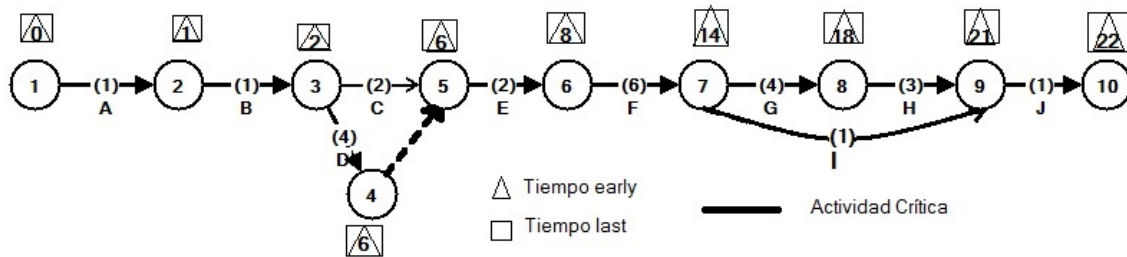
La matriz de Zaderenko que nos permite calcular los tiempos *early* y *last* de los diferentes sucesos viene representada en el cuadro 5.4. Como podemos observar, en nuestro ejemplo, los tiempos last y los tiempos early coinciden.

Conocidos los tiempos *early* y *last* de cada suceso, calculamos, por aplicación de las fórmulas correspondientes, las diferentes holguras, dichas holguras se representan en el cuadro 5.5. Calculemos primero la holgura de un suceso,  $H_i$ , recordemos que se definía de la siguiente manera:

Cuadro 5.3:

Actividades	Precedentes
A	-
B	A
C	B
D	B
E	C,D
F	E
G	F
H	G
I	F
J	H,I

Figura 5.1:



$$H_i = t_i^* - t_i$$

Como los tiempos early y last coinciden, todas las holguras de los sucesos son cero. Una vez hemos visto las holguras de los sucesos, centrémonos ahora en la holgura total de las actividades, recordemos que se calculaba mediante la siguiente fórmula:

$$H_{ij}^T = t_j^* - t_i - t_{ij}$$

Podemos observar, que las únicas holguras totales que no son cero, son las holguras totales de las actividades C e I, que nos dan una holgura total de 2 ( $6 - 2 - 2 = 2$ ) y 6 ( $21 - 14 - 1 = 6$ ) días, respectivamente. Esto quiere decir, que la actividad C se puede demorar en dos días con respecto al tiempo PERT previsto de 2 días, sin que esta demora repercuta en la duración de la construcción del invernadero. Lo mismo sucede con la actividad I, esta podría retrasarse con un máximo de 6 días sin que esto repercuta en la duración del proyecto.

Por último, aunque no pertenezcan en sí al método PERT pero sí que nos aportan información útil por eso las añadimos, vamos a calcular la holgura libre y la holgura

Cuadro 5.4: Matriz de Zaderenko

$t_i$	i—j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	—	1								
1	2		—	1							
2	3			—	4	2					
6	4				—	0					
6	5					—	2				
8	6						—	6			
14	7							—	4	1	
18	8								—	3	
21	9									—	1
22	10										—
	$t_i^*$	0	1	2	6	6	8	14	18	21	22

independiente. Las fórmulas correspondientes para poder calcular dichas holguras son las siguientes:

$$H_{ij}^L = t_j - t_i - t_{ij}$$

$$H_{ij}^I = t_j - t_i^* - t_{ij}$$

Por tanto, podemos observar que como nuestros tiempos early y last coinciden, las fórmulas coinciden y tendremos el mismo valor para las holguras libres y las holguras independientes. Además podemos deducir, que son iguales a las holguras totales de las actividades. Por tanto, vemos que las actividades C e I tienen unas holguras libres e independientes iguales a 2 y a 6, respectivamente.

Además, como hemos visto anteriormente, y el camino crítico se forma con todas aquellas actividades cuya holgura total sea cero, estas actividades se denominan actividades críticas. Por tanto, en nuestro proyecto de construcción de un invernadero de malla o plástico, el camino crítico viene dado por las siguientes actividades: A, B, D, E, F, G, H y J (ver cuadro 5.5).

Ahora vamos a realizar el calendario de ejecución del proyecto, para ello se calculan los tiempos  $\Delta_{ij}$ ,  $\Delta_{ij}^*$ ,  $\nabla_{ij}$  y  $\nabla_{ij}^*$  de cada una de las actividades y a partir de estas fórmulas se puede establecer dicho calendario. Así, vamos a calcular los tiempos correspondientes a la actividad C. En este proyecto se toma como fecha de inicio el día 1 de agosto de 2016, no considerándose laborales los sábados y domingos. Las cuatro fechas para la actividad C se obtendrán aplicando las fórmulas anteriores. Así, obtenemos:

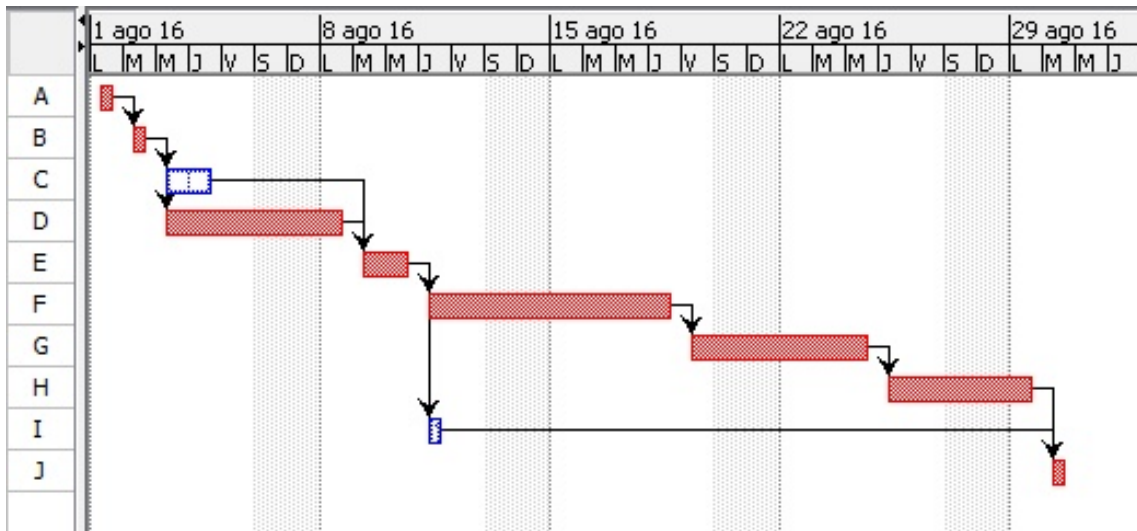
$$\begin{aligned}\Delta_{35} &= 2 \text{ (3 de agosto)} \\ \Delta_{35}^* &= 2 + 2 = 4 \text{ (5 de agosto)} \\ \nabla_{35} &= 2 + 2 = 4 \text{ (5 de agosto)} \\ \nabla_{35}^* &= 6 \text{ (9 agosto)}\end{aligned}$$

Cuadro 5.5:

Act.	Desig.	Dur.	$t_i$	$t_j$	$t_i^*$	$t_j^*$	$H_i$	$H_j$	$H_{ij}^T$	$H_{ij}^L$	$H_{ij}^I$	Cam. Crít.
1-2	A	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	CC
2-3	B	1	1	2	1	2	0	0	0	0	0	CC
3-4	D	4	2	6	2	6	0	0	0	0	0	CC
3-5	C	2	2	6	2	6	0	0	2	2	2	
5-6	E	2	6	8	6	8	0	0	0	0	0	CC
6-7	F	6	8	14	8	14	0	0	0	0	0	CC
7-8	G	4	14	18	14	18	0	0	0	0	0	CC
7-9	I	1	14	21	14	21	0	0	6	6	6	
8-9	H	3	18	21	18	21	0	0	0	0	0	CC
9-10	J	1	21	22	21	22	0	0	0	0	0	CC

Estas fechas, se llevan al diagrama-calendario de la figura 5.2. Repitiendo este mismo proceso, obtenemos el resto de las fechas de cada una de las actividades. Hay que tener en cuenta que en este diagrama-calendario, las barras completas representan el camino crítico, mientras que las barras discontinuas representan el resto de actividades donde no hay camino crítico.

Figura 5.2:



De este diagrama- calendario, se deduce facilmente el calendario de ejecución del proyecto representado en el cuadro 5.6.

Cuadro 5.6: Calendario de ejecución del proyecto

Actividades	Fecha de comienzo	Fecha de finalización
A	1 agosto	2 agosto
B	2 agosto	3 agosto
C	3 - 5 agosto	5 - 9 agosto
D	2 agosto	9 agosto
E	9 agosto	11 agosto
F	11 agosto	19 agosto
G	19 agosto	25 agosto
H	25 agosto	30 agosto
I	19 - 29 agosto	22 - 30 agosto
J	30 agosto	31 agosto

## 5.2. Invernadero de Plancha

Para dar comienzo con el procedimiento del método PERT, antes tenemos que definir cuáles son nuestras actividades a realizar, ver cuadro 5.7.

Cuadro 5.7:

A	Medir terreno
B	Calcular material y mano de obra
C	Traer material
D	Perforación del terreno para tubos
E	Hormigonado de tubos
F	Levantamiento de estructura
G	Colocación del cuadradillo
H	Colocación de tubos soldados al cuadradillo
I	Colocación de plancha de policarbonato
J	Colocación de malla para la ventana
K	Fabricación de los canales
L	Fabricación de la ventana
M	Fabricación de la puerta
N	Colocación de la ventana
O	Colocación de la puerta

Una vez tenemos las tareas detalladas, pasamos a realizar un cuadro (Cuadro 5.8) donde se ven reflejados las actividades y sus correspondientes tiempos de ejecución.

En dicho cuadro se muestran los tiempos de ejecución como hemos explicado en el



Cuadro 5.8:

Duración en días	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
<b>Optimista</b>	1	1	1	2	1	4	1	4	5	1	1	1	1	1	1
<b>Más probable</b>	1	1	2	4	2	6	1	6	7	2	2	2	2	1	1
<b>Pesimista</b>	1	1	3	6	3	8	1	8	9	3	3	3	3	1	1
<b>Tiempo PERT</b>	1	1	2	4	2	6	1	6	7	2	2	2	2	1	1

capítulo 4, donde tenemos el tiempo más optimista, el tiempo más probable, el tiempo más pesimista y el tiempo PERT.

Dicho tiempo PERT para la actividad  $(i, j)$ , se calcula con la fórmula:

$$t_{ij} = \frac{a+4m+b}{6}$$

Donde  $a$  es el tiempo optimista,  $m$  es el tiempo más probable y  $b$  es el tiempo pesimista. Por tanto, en el cuadro 5.8 podemos observar que la actividad I tiene un tiempo PERT de 7 días ( $\frac{5+28+9}{6}$ ), siguiendo el mismo procedimiento se calcula el resto de los tiempos PERT.

Una vez tenemos todos los tiempos PERT, tenemos que saber cuáles son las precedencias entre las diferentes actividades que constituyen el proyecto:

A precede a B  
 B precede a C y D  
 C precede a E  
 D precede a E  
 E precede a F  
 F precede a G, L y M  
 G precede a H  
 H precede a I  
 I precede a J  
 J precede a K  
 K, L, M preceden a N  
 K, L, M preceden a O

De estos datos podemos deducir inmediatamente el cuadro de prelación, véase el cuadro 5.9.

A partir del cuadro de prelación construimos el correspondiente grafo PERT, que está representado en la figura 5.3.

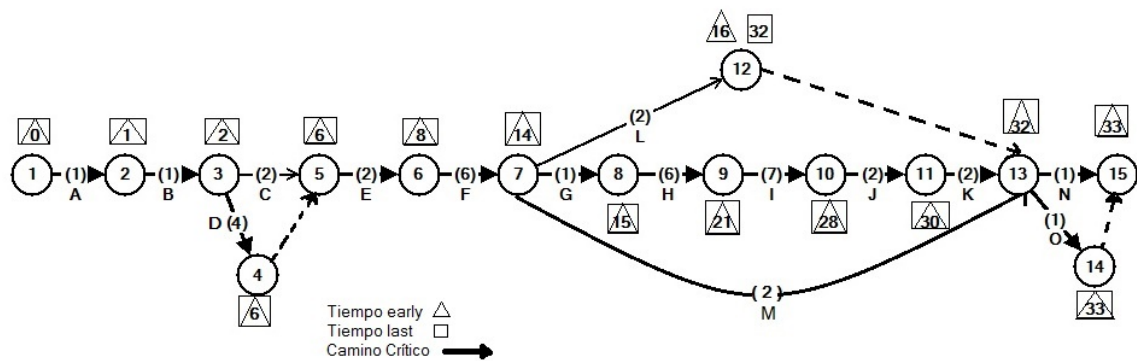
La matriz de Zaderenko que nos permite calcular los tiempos early y last de los diferentes sucesos viene representada en el cuadro 5.10. Como podemos observar, en nuestro ejemplo, los tiempos last y los tiempos early coinciden.

Conocidos los tiempos early y last de cada suceso, calculamos, por aplicación de las fórmulas correspondientes, las diferentes holguras. Dichas holguras se representarán en

Cuadro 5.9:

Actividades	Precedentes
A	-
B	A
C	B
D	B
E	C,D
F	E
G	F
H	G
I	F
J	I
K	J
L	F
M	F
N	K,L,M
O	K,L,M

Figura 5.3:



el cuadro 5.11. Calculemos ahora la holgura de cualquier suceso,  $H_i$ . Recordemos que se definía de la siguiente manera:

$$H_i = t_i^* - t_i$$

Como resultado, nos da que todas las holguras de los sucesos son iguales a cero.

Cuadro 5.10: Matriz de Zaderenko

$t_i$	i—j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	—	1													
1	2		—	1												
2	3			—	4	2										
6	4				—	0										
6	5					—	2									
8	6						—	6								
14	7							—	1				2	2		
15	8								—	6						
21	9									—	7					
28	10										—	2				
30	11											—		2		
16	12												—	0		
32	13													—	1	1
33	14														—	0
33	15															—
	$t_i^*$	0	1	2	6	6	8	14	15	21	28	30	32	32	33	33

Una vez hemos visto las holguras de los sucesos, centrémonos ahora en la holgura total de las actividades, recordemos que se calculaba mediante la siguiente fórmula:

$$H_{ij}^T = t_j^* - t_i - t_{ij}$$

Podemos observar, que las únicas holguras totales que no son cero, son las holguras totales de las actividades L y M, las cuales dan una holgura total de 16 ( $32 - 14 - 2 = 16$ ) días cada actividad. Esto quiere decir, que las actividades L y M se pueden demorar en dieciséis días con respecto al tiempo PERT previsto de 2 días, sin que esta demora repercute en la duración de la construcción del invernadero.

Por último, vamos a calcular la holgura libre y la holgura independiente. Las fórmulas correspondientes para poder calcular dichas holguras son las siguientes:

$$H_{ij}^L = t_j - t_i - t_{ij}$$

$$H_{ij}^I = t_j - t_i^* - t_{ij}$$

Por tanto, podemos observar que como nuestros tiempos early y last coinciden, las fórmulas coinciden y tendremos el mismo valor para las holguras libres y las holguras independientes. Por tanto, vemos que la actividad M tiene una holgura libre e independiente igual 16.

Además, como hemos visto anteriormente, el camino crítico se forma con todas aquellas actividades cuya holgura total sea cero. Estas actividades se conocen como actividades críticas. Por tanto, en nuestro proyecto de construcción de un invernadero de plancha tenemos dos caminos críticos (ver cuadro 5.11), el primer camino crítico viene dado por las siguientes actividades: A, B, D, E, F, G, H, I, J, K y N, mientras que el segundo camino crítico viene formado por las actividades siguientes: A, B, D, E, F, G, H, I, J, K y O.

Cuadro 5.11:

Act.	Desig.	Dur.	$t_i$	$t_j$	$t_i^*$	$t_j^*$	$H_i$	$H_j$	$H_{ij}^T$	$H_{ij}^L$	$H_{ij}^I$	Cam. Crít.
1-2	A	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	CC
2-3	B	1	1	2	1	2	0	0	0	0	0	CC
3-4	D	4	2	6	2	6	0	0	0	0	0	CC
3-5	C	2	2	6	2	6	0	0	2	2	2	
5-6	E	2	6	8	6	8	0	0	0	0	0	CC
6-7	F	6	8	14	8	14	0	0	0	0	0	CC
7-8	G	1	14	15	14	15	0	0	0	0	0	CC
7-12	L	2	14	16	14	32	0	16	16	0	0	
7-13	M	2	14	32	14	32	0	0	16	16	16	
8-9	H	6	15	21	15	21	0	0	0	0	0	CC
9-10	I	7	21	28	21	28	0	0	0	0	0	CC
10-11	J	2	28	30	28	30	0	0	0	0	0	CC
11-13	K	2	30	32	30	32	0	0	0	0	0	CC
13-14	O	1	32	33	32	33	0	0	0	0	0	CC
13-15	N	1	32	33	32	33	0	0	0	0	0	CC

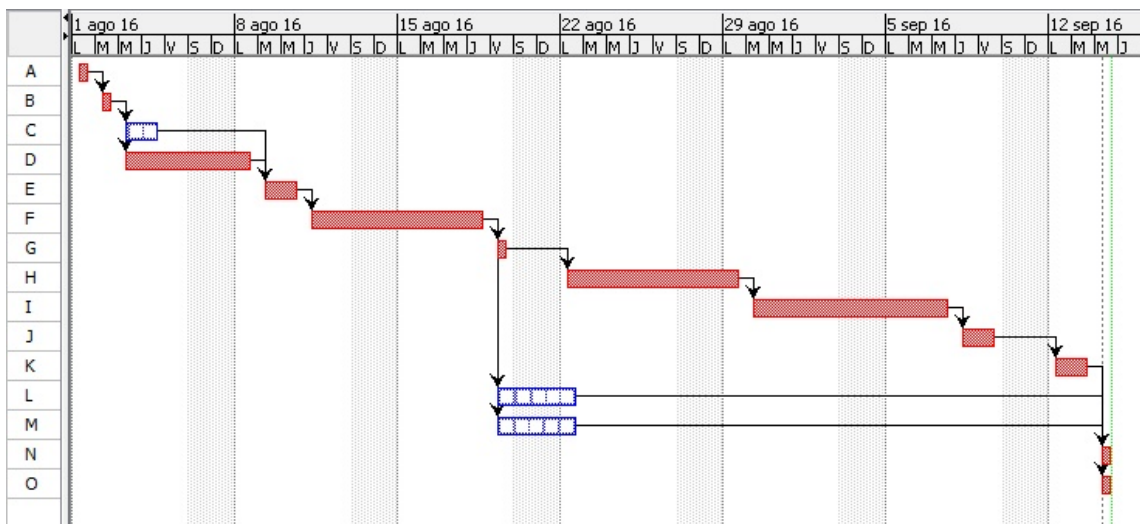
Ahora vamos a realizar el calendario de ejecución del proyecto. Para ello se calculan primero los tiempos  $\Delta_{ij}$ ,  $\Delta_{ij}^*$ ,  $\nabla_{ij}$  y  $\nabla_{ij}^*$  de cada una de las actividades y a partir de estas fórmulas se puede establecer dicho calendario. Así vamos a calcular los tiempos correspondientes a la actividad E. En este proyecto se toma como fecha de inicio el día 1 de agosto de 2016, no considerándose laborales los sábados y domingos. Las cuatro fechas para la actividad E se obtendrán aplicando las fórmulas anteriores, de esta manera obtenemos:

$$\begin{aligned}\Delta_{56} &= 6 \text{ (9 de agosto)} \\ \Delta_{56}^* &= 2 + 2 = 6 \text{ (9 de agosto)} \\ \nabla_{56} &= 2 + 2 = 8 \text{ (11 de agosto)} \\ \nabla_{56}^* &= 8 \text{ (11 agosto)}\end{aligned}$$

Estas fechas, se llevan al diagrama-calendario de la figura 5.4. Repitiendo este mismo proceso, obtenemos el resto de las fechas de cada una de las actividades. Hay que tener en cuenta que en este diagrama-calendario, las barras completas representan el camino

crítico, mientras que las barras discontinuas representan el resto de actividades donde no hay camino crítico.

Figura 5.4:



De este diagrama (Figura 5.4), se deduce fácilmente el calendario de ejecución del proyecto representado en el cuadro 5.12.

### 5.3. Análisis de los resultados

Una vez aplicada la metodología PERT a nuestro ejemplo de la construcción de invernaderos, hemos visto cómo podemos estimar los tiempos de cada una de las actividades a realizar del proyecto. También hemos visto cómo se pueden realizar varias actividades en paralelo o dejar algunas actividades para una posterior realización sin que influya en el tiempo final de la construcción del invernadero.

Dicho modelo PERT, nos permite centrarnos en las actividades que necesitan una mayor atención para evitar demoras ya que si nos retrasamos en la ejecución de esa actividad, nos retrasaríamos en la ejecución del proyecto. Una alternativa que nos ofrece este modelo es la contratación del personal necesario para la ejecución del proyecto, sin que este personal sea inferior ni superior al necesario para realizar todo el proyecto con un tiempo establecido. Las mejoras que nos aporta el modelo son las relaciones entre las ejecuciones de las actividades y delegación de dichas actividades para que el proyecto no sufra ningún contratiempo, además de una visión mejorada del control de la ejecución del proyecto.

Gracias a este modelo, se pueden mejorar muchos aspectos de la construcción de invernaderos, teniendo un control del tiempo de ejecución de las actividades como del proyecto en sí, gracias al calendario de ejecución sin tener que establecer fechas una vez terminada cada actividad. Además, nos permite poder realizar varias actividades al mismo tiempo sin

Cuadro 5.12: Calendario de ejecución del proyecto

Actividades	Fecha de comienzo	Fecha de finalización
A	1 agosto	2 agosto
B	2 agosto	3 agosto
C	3 - 5 agosto	5 - 9 agosto
D	2 agosto	9 agosto
E	9 agosto	11 agosto
F	11 agosto	19 agosto
G	19 agosto	22 agosto
H	22 agosto	30 agosto
I	30 agosto	7 septiembre
J	7 septiembre	9 septiembre
K	9 septiembre	13 septiembre
L	19 - 23 agosto	9 - 13 septiembre
M	19 - 23 agosto	9 - 13 septiembre
N	13 septiembre	14 septiembre
O	13 septiembre	14 septiembre

tener que extender el tiempo de finalización del proyecto. Antes de dicho modelo, todas las actividades se realizaban al terminar la anterior, no se hacían actividades conjuntamente para adelantar el proceso.

Por otra parte, gracias al Open Project, esto resulta mucho más sencillo de realizar ya que no se tienen que hacer muchos cálculos para la ejecución del calendario del proyecto y así tener un control fijo sobre cada una de las actividades.

## Capítulo 6

# Conclusiones

Con este trabajo de fin de grado, nuestro objetivo era aplicar técnicas y métodos matemáticos en el estudio y análisis de la planificación de las actividades a realizar en la construcción de invernaderos.

La metodología PERT, nos ha ayudado a detectar aquellas actividades críticas que requieren un seguimiento exhaustivo para que las mismas se ejecuten en los tiempos previstos. Cualquier demora que sufra una de estas actividades supone retrasar la finalización del proyecto, con la consiguiente pérdida económica y de prestigio de la compañía o empresa que construye los invernaderos.

Como conclusión, hemos visto que partiendo del objetivo de buscar la forma más eficiente de planificar la realización de un proyecto, en nuestro caso la construcción de invernaderos, hemos sido capaces de plantear dicho proyecto y aplicar nuestros conocimientos del grado, particularmente en Estadística e Investigación Operativa, para plantear un modelo que resuelva el problema de forma rápida y eficiente.

Con este modelo, hemos comprobado que gracias a una gestión adecuada y el control de las actividades del proyecto, se puede ahorrar tiempo y costo en la construcción de un invernadero, mientras que antes no se tenía ningún control a la hora de realizar dicha construcción.

Así de esta forma, hemos detectado cómo podemos distribuir los recursos humanos y materiales de manera más eficiente asignando los suficientes recursos a las actividades críticas para finalizar la construcción de los invernaderos en el plazo de tiempo mínimo posible.

Como posible trabajo futuro podría ser incorporar en la planificación del proyecto los costos de realizar las actividades. Así, cuando consideramos estos costos de ejecución de dichas actividades conjuntamente con la distribución temporal de las mismas tendremos que analizar sus actividades críticas, la duración del proyecto y el coste del mismo. Entraremos por tanto, en el estudio del Método PERT con costes asociados, donde se pueden obtener diferentes alternativas en la duración del proyecto con sus costes correspondientes, presentado las mismas a los responsables empresariales para que ellos decidan que solución es más conveniente para su empresa.





# Bibliografía

- [1] MELVIN SILVERMAN, *A Short Course for Professionals*, first edition, Project Management, 1976.
- [2] MILLER, R.W., *Aplicación del método PERT*, Edición del Castillo, 1970.
- [3] CARLOS ROMERO LÓPEZ, *Técnicas de programación y gestión de proyectos*, octava edición, Pirámide, 2006.
- [4] C. MAROTO ÁLVAREZ, J. ALCARAZ SORIA y R. RUIZ GARCÍA, *Investigación operativa: Modelos y técnicas de Optimización*, Editorial U.P. Valencia, 2002.
- [5] J. VELASCO SÁNCHEZ y J.A. CAMPINS MASRIERA, *Gestión de proyectos en la empresa: Planificación, programación y control*, primera edición, Pirámide, 2013.
- [6] MIGUEL ALBERTO CAMPUSANO, *Planeación de Proyectos*, primera edición, Kybele Consulting, 2013.
- [7] ZADERENKO, S.G, *Sistemas de programación por camino crítico*, Librería Mitre, 1968.