



**Escuela de Doctorado
y Estudios de Posgrado**
Universidad de La Laguna

Complejidad Topológica

José Fabrizio Pineda Ramos

Trabajo Fin de Máster

Máster en Modelización e Investigación Matemática,
Estadística y Computación

La Laguna, julio de 2022

Dirigido por

Dr. José Manuel García Calcines

Dr. José Manuel García Calcines

*Dpto. de Matemáticas, Estadística e
Investigación Operativa.*

Área de Geometría y Topología

Universidad de La Laguna

38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento a mi tutor, el profesor José Manuel García Calcines, por aceptar dirigir este proyecto, por la paciencia que ha tenido conmigo durante meses y por transmitirme tantos conocimientos a lo largo del Grado y del Máster.

También a aquellas personas que me han acompañado estos últimos años y que se han interesado por mi trayectoria académica:

A Francisco Reyes, a quien he conocido durante el Máster y con el que comparto la fascinación por las matemáticas.

A mis excompañeros del Área de Álgebra: Evelia G^a Barroso, Irene Márquez, Luis Santana, Mariví Reyes, Nacho G^a Marco y Coqui G^a Román; con los que he disfrutado tantos meses la docencia, las reuniones, los seminarios y los cafés. De cada uno he aprendido algo distinto y valioso. La experiencia ha sido inmejorable.

A mis amigos, con los que comparto dramas y éxitos.

A mi familia, que siempre celebra mis logros académicos a pesar de no entender los garabatos que escribo.

José Fabrizio Pineda Ramos
La Laguna, 1 de julio de 2022

“Con el sextante se saca la latitud, la longitud es más complicado...”
Este trabajo está dedicado a la memoria de mi padre,
José Miguel Pineda Moreno,
“Pepe”.



Resumen · Abstract

Resumen

El problema del planificador de movimientos de un sistema mecánico consiste en encontrar un algoritmo que tenga como input un par ordenado de estados del sistema, denominados estado inicial y estado final, y como output un movimiento continuo que comience en el estado inicial y que acabe en el estado final. Para modelizar topológicamente este problema se hace uso del espacio de configuraciones asociado al sistema mecánico. Michael Farber demuestra en 2003 que dar tal algoritmo de forma global y que sea razonablemente robusto solo es posible en espacios de configuraciones muy simples. De este modo, propone considerar un número finito de algoritmos continuos de forma local, originando la denominada complejidad topológica.

Partiendo de la motivación inicial del problema del planificador de movimientos, en este trabajo introduciremos la noción de complejidad topológica de un espacio topológico general. Estudiaremos sus principales características y propiedades, así como su relación con la categoría de Lusternik-Schnirelmann. Además, haremos uso de técnicas de topología algebraica que nos permitirán aproximar o, en algunos casos, determinar la complejidad topológica de muchos espacios. Finalmente, emplearemos los resultados desarrollados a lo largo de la memoria para estudiar la complejidad topológica de una amplia variedad de ejemplos.

Palabras clave: *Complejidad topológica, planificación de movimientos, espacio de configuraciones, fibración, producto cup, algoritmo local, categoría de Lusternik-Schnirelmann, nilpotencia.*

Abstract

The motion planning problem on a mechanic system consists in finding an algorithm which takes, as input, an ordered pair of states of the system called initial state and final state; and, as output, a continuous movement which starts at the initial state and ends at the final state. Spaces of configurations are used in order to modelize topologically this problem on a mechanic system. Michael Farber proofs in 2003 that establishing such algorithm globally and robustly is possible only in a rather simple type of spaces. At a time, Farber proposes to assign paths locally by descomposing the topological space in a finite number of open sets. This number is called topological complexity.

Starting from the initial cause of motion planning problem, in this dissertation we will introduce the notion of topological complexity of a general topological space. We will study its main features and properties as well as its relationship with the Lusternik-Schnirelmann category. Moreover, we will use algebraic topology techniques that will allow us to estimate or, in certain cases, to determine the topological complexity of a several number of spaces. To conclude, the results developed in this dissertation will come into play to discuss a wide class of examples.

Keywords: *Topological complexity, motion planning, configuration spaces, fibration, cup product, local algorithm, Lusternik-Schnirelmann category, nilpotency.*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Nociones topológicas y algebraicas previas	1
1.1. Nociones en teoría de homotopía	1
1.1.1. Homotopía de funciones continuas	1
1.1.2. Fibraciones	5
1.2. Nociones en topología algebraica	9
1.2.1. Homología y cohomología singular	9
1.2.2. El producto cup y el producto tensorial	13
2. Complejidad topológica	17
2.1. El problema de planificación de movimientos	17
2.1.1. Espacios de configuraciones	18
2.1.2. Algoritmos de planificación	21
2.2. Complejidad topológica	23
2.3. La categoría de Lusternik-Schnirelmann	31
2.4. La nilpotencia del ideal de los divisores de cero	40
2.5. Caracterización de Ganea-Schwarz	44
3. Cálculos	53
3.1. Esferas y toros	53
3.2. Espacios proyectivos	58
3.2.1. Casos complejo y cuaterniónico	59
3.2.2. El caso real	60
3.3. Superficies	61

3.4. Grafos finitos y conexos	63
3.5. Variedades simplécticas cerradas y simplemente conexas	65
3.6. El espacio de configuraciones usual	67
3.7. Más ejemplos	68
4. Apéndice	71
4.1. CW-complejos	71
4.2. Conectividad y equivalencias débiles	76
Bibliografía	81

Introducción

La topología es una de las ramas más recientes de la matemática. A pesar de su juventud, ha conseguido posicionarse como una rigurosa disciplina con amplísimas vertientes y aplicaciones, tanto en el ámbito puramente matemático como en el de otras ramas de la ciencia.

Los orígenes de la topología se remontan al siglo XIX, momento en el que el célebre matemático y filósofo Henri Poincaré publica *Analysis Situs* en 1912, donde se encuentra la primera mirada topológica de los conceptos ya conocidos en la época y se desarrolla un estudio sistemático de ciertas propiedades que los espacios conservan al ser sometidos a transformaciones continuas “buenas” a las que denomina, por primera vez, “homeomorfismos”. Además, introduce nuevos conceptos como el grupo fundamental o la homología simplicial. A partir de dicha publicación, la topología se consolida como un nuevo ámbito del conocimiento en el que desarrollar nuevas teorías y buscar conexiones con otras áreas de la matemática.

Durante el siglo XX, conocido por los matemáticos como *el Siglo de la Topología*, un buen número de matemáticos desarrollan los cimientos topológicos sobre los que hoy en día nos encontramos. En sus inicios, destacan la *teoría del grado topológico* que introduce Luitzen Jan Brouwer, la *teoría de puntos críticos* de Marston Morse y el fuerte avance de la *homología simplicial* llevado a cabo por James Alexander II y Solomon Lefschetz.

En particular, la topología algebraica comienza a adquirir relevancia a partir de 1930. En esta década, Eduard Čech y Witold Hurewicz introducen los grupos superiores de homotopía; mientras que Karl Hopf encuentra una fuerte conexión entre tales grupos y la teoría del grado topológico de Brouwer. Por su parte, James W. Alexander y Kurt Reidemeister desarrollan lo que hoy conocemos como la *teoría combinatoria de nudos*.

En la segunda mitad del siglo XX, destacan los trabajos de John Milnor sobre haces fibrados y el nuevo invariante numérico, denominado *categoría*, introducido por Lazar Lusternik y Lev Schnirelmann. Además, el extraordinario proceso de unificación del álgebra y la topología, encabezado por Alexander Grothendieck, impulsó significativamente ambas disciplinas.

Con el avance de la topología, esta fue diferenciándose en tres ramas principales: la *topología general*, que estudia los espacios topológicos desde sus axiomas más fundamentales; la *topología algebraica*, que trata de clasificar espacios topológicos a partir de estructuras algebraicas asociadas de manera conveniente; y la *topología diferencial*, que estudia las propiedades que se conservan ante transformaciones suaves de espacios topológicos con estructura diferenciable.

A lo largo de los años, la topología se desarrolló como una disciplina pura, sin aparente aplicabilidad. Sin embargo, durante las últimas décadas se ha potenciado la vertiente aplicada y han aparecido ramas como la teoría de Morse discreta, la robótica topológica, la homología persistente, la teoría de defectos en medios ordenados o el análisis topológico de datos. Estas nuevas ramas utilizan los resultados teóricos de la topología para avanzar en áreas tan aparentemente alejadas como la robótica, la física del estado sólido, el análisis de datos o la física de sistemas complejos. El presente trabajo se sitúa en la relación entre la topología y la planificación de movimientos robótica.

Supongamos un sistema mecánico, con presumible capacidad para gestionar la información del entorno y con el objetivo de llevar a cabo tareas específicas sin supervisión humana. A la hora de planificar el movimiento del robot, se precisa que este reciba un par ordenado de estados como input (puntos de partida y de destino) y que devuelva, como output, una navegación entre ambos puntos. Esta asignación de movimientos es, en efecto, la planificación motriz del robot, que deberá ejecutar exitosamente.

Por supuesto, toda planificación está sujeta a restricciones. Algunas restricciones son intrínsecas al robot, como el número de componentes o el tamaño del mismo. Sin embargo, muchas veces es necesario imponer más restricciones útiles como la robustez del movimiento; esto es, que el algoritmo resista perturbaciones razonablemente pequeñas en los datos de entrada, asignando caminos razonablemente próximos a los datos de salida.

Con el objetivo de modelizar matemáticamente todas estas ideas, fijado un sistema mecánico S , se considera el espacio X de todos los posibles estados de un sistema robótico, cono-

cido como *espacio de configuraciones* del sistema S , con estructura de espacio topológico. A partir de X , podemos considerar el espacio de funciones $X^{[0,1]}$, conformado por todos los posibles caminos en X y el espacio producto $X \times X$, conformado por todos los posibles pares de estados en X . Entre estos espacios existe una aplicación continua

$$\begin{aligned}\pi : X^{[0,1]} &\rightarrow X \times X, \\ \pi(\alpha) &= (\alpha(0), \alpha(1)),\end{aligned}$$

llamada aplicación bievaluación. Entonces, un algoritmo de planificación motriz se define como una sección s de π , es decir, una aplicación $s : X \times X \rightarrow X^{[0,1]}$, no necesariamente continua, tal que $\pi \circ s = \text{id}_{X \times X}$.

Es deseable que la planificación resista pequeñas perturbaciones en los puntos de entrada, es decir, que la sección s sea continua. No obstante, Michael Farber (Figura 0.1) demuestra en [12] que añadir esta condición conlleva forzosamente que el espacio de configuraciones asociado X sea contráctil. Dada la poca frecuencia con la que un espacio de configuraciones es contráctil, este hecho parece eliminar todas las posibilidades de planificar el movimiento en un sistema mecánico, con algoritmos razonablemente robustos.



Figura 0.1: Michael Farber

Farber evita este problema considerando una descomposición del espacio producto $X \times X$ en un número finito de subespacios abiertos $X \times X = U_0 \cup \dots \cup U_n$ de manera que para cada U_i pueda definirse una sección local continua $s_i : U_i \rightarrow X^{[0,1]}$ con $0 \leq i \leq n$. Farber llama plan motriz local o algoritmo local a cada s_i y complejidad topológica de X al mínimo n tal que esta descomposición existe. Informalmente, podemos decir que la complejidad topológica mide la dificultad del problema de planificar el movimiento en el sistema mecánico estudiado.

Es posible definir este número para cualquier espacio topológico, no es exclusivo de los espacios obtenidos a partir de sistemas mecánicos. Así, dado un espacio topológico X , es posible hablar de su complejidad, la cual denotaremos por $TC(X)$.

La complejidad topológica es un invariante topológico e incluso homotópico, lo que nos lleva a estudiar esta noción desde la teoría de homotopía.

El estudio de la complejidad topológica es una rama muy prolífica de investigación actualmente. A pesar de haberse introducido hace relativamente pocos años, tal y como hemos visto, conecta con otras ramas de manera sorprendente. En las últimas décadas ha habido diversos resultados acerca del cálculo de la complejidad topológica. Cabe destacar el cálculo de la complejidad topológica de las superficies no orientables. En este sentido, Alexander Dranishnikov determina la complejidad topológica de las superficies no orientables de género mayor que 4. Posteriormente, Daniel Cohen y Lucile Vandembroucq completan el resultado con la determinación de la complejidad del caso del género 2, es decir, de la botella de Klein. Todo esto, unido al estudio de la complejidad topológica de las superficies orientables llevado a cabo por Farber [12], completa el cálculo de la complejidad topológica en todas las superficies.

En esta memoria partiremos de la definición de complejidad topológica, veremos sus principales propiedades y trataremos de estimarla mediante técnicas en topología algebraica. Esto nos permitirá determinar la complejidad topológica en una amplia colección de ejemplos.

En el Capítulo 1, estableceremos las nociones preliminares necesarias para el desarrollo de esta memoria. Este capítulo se dividirá en dos partes. En la primera se introducirán los conceptos básicos en teoría de homotopía. Concretamente, consideraremos una topología adecuada para trabajar con funciones continuas, recordaremos las nociones de homotopía de funciones continuas y equivalencia homotópica y veremos la construcción del corchete de homotopía de una pareja de espacios. En la segunda parte, se introducen las herramientas de cohomología que se utilizarán a lo largo de la memoria. Comenzaremos por la construcción de los módulos de cohomología, veremos sus principales propiedades y estableceremos, mediante el producto cup, una estructura algebraica más rica que la existente en homología. Dicha estructura será esencial para el estudio de la complejidad topológica.

En el Capítulo 2, introduciremos el problema del planificador de movimientos, mostraremos algunos espacios de configuraciones notables y definiremos los primeros planificadores

o algoritmos sobre espacios topológicos sencillos. Posteriormente, definiremos la complejidad topológica de un espacio y veremos sus propiedades básicas, entre las que destacan la caracterización de espacios contráctiles, la invariancia homotópica y la subaditividad respecto al producto de espacios.

Presentaremos también otro invariante homotópico que será útil a la hora de aproximar la complejidad topológica: la categoría de Lusternik-Schnirelmann. Introduciremos brevemente esta noción, comprobaremos su invariancia homotópica, observaremos el paralelismo con la complejidad topológica mediante una noción común, denominada *categoría seccional* y veremos que ambos invariantes, complejidad topológica y categoría, coinciden en el contexto de los grupos topológicos. Terminaremos esta sección probando la subaditividad de la categoría respecto del producto de espacios, concluyendo con una acotación de la complejidad topológica en términos de la categoría de Lusternik-Schnirelmann. En la siguiente sección, emplearemos las herramientas en topología algebraica vistas en el Capítulo 1 para establecer una cota inferior algebraica de la complejidad topológica. En concreto, consideremos la nilpotencia del denominado *ideal de los divisores de cero* respecto del producto cup. Esta nueva cota será de gran utilidad a la hora de determinar la complejidad topológica en la práctica totalidad de los ejemplos de la memoria. Concluiremos este capítulo con una caracterización de la complejidad topológica mediante la denominada *n-fibración de Ganea-Schwarz*. Introduciremos sus estructuras previas y demostraremos que la complejidad topológica está perfectamente determinada por la existencia de una sección homotópica de la fibración de Ganea-Schwarz, en un cierto nivel. Finalizaremos estableciendo una aproximación de la complejidad topológica en CW-complejos.

En el Capítulo 3, emplearemos las nociones del Capítulo 1, así como las caracterizaciones del Capítulo 2 para determinar o, en su defecto, aproximar la complejidad topológica de diversos ejemplos teniendo en cuenta sus cohomologías. Entre tales ejemplos se encuentran las esferas y sus productos, los espacios proyectivos (reales, complejos y cuaterniónicos), las superficies, los grafos finitos y conexos, las variedades simplécticas y los espacios de configuraciones usuales.

Concluiremos la memoria con un escueto apéndice final donde se explican las nociones y resultados que se han empleado en gran parte del Capítulo 2 y en el Capítulo 3. Dichos resultados involucran a los CW-complejos y su conectividad.

Nociones topológicas y algebraicas previas

En este primer capítulo haremos un recorrido por las principales nociones y resultados que serán necesarios para abordar el estudio de la complejidad topológica.

Asumimos que el lector está familiarizado con conceptos básicos en topología general como, por ejemplo, los espacios de Hausdorff, la conexidad o la compacidad. También recomendamos conocer, al menos, los primeros conceptos en teoría de homotopía y topología algebraica. No obstante, estos últimos los presentaremos brevemente a continuación. Para más detalles recomendamos la lectura de [9], [17], [18], [24], [27] y [29].

1.1. Nociones en teoría de homotopía

En esta sección introduciremos la homotopía de funciones continuas, que nos permitirá hablar del tipo homotópico de los espacios; y daremos ciertas nociones sobre fibraciones, que serán útiles a la hora de tratar expresiones relacionadas con la complejidad topológica.

1.1.1. Homotopía de funciones continuas

Para comenzar, necesitamos una topología que nos permita trabajar con funciones continuas. Fijados dos espacios topológicos X e Y , podemos considerar el conjunto de todas las aplicaciones continuas de X en Y :

$$\mathcal{C}(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ continua}\}.$$

Definiremos ahora unos abiertos fundamentales que tomaremos convenientemente. Fijado K subespacio compacto de X y U abierto de Y , definimos el conjunto

$$\mathcal{S}(K, U) = \{f \in \mathcal{C}(X, Y) \mid f(K) \subseteq U\}.$$

Se define en $\mathcal{C}(X, Y)$ la topología que tiene como subbase los abiertos de la forma $\mathcal{S}(K, U)$. Esta topología recibe el nombre de *topología compacto-abierta* sobre $\mathcal{C}(X, Y)$ y al espacio topológico resultante lo denotaremos por Y^X . Un abierto en esta topología es, entonces, una unión arbitraria de intersecciones finitas de tipo $\mathcal{S}(K_1, U_1) \cap \cdots \cap \mathcal{S}(K_n, U_n)$.

Esta construcción se comporta bien con respecto a las aplicaciones continuas. Si $f : Y \rightarrow Y'$ es una aplicación continua y X es un espacio topológico, entonces la aplicación $f^X : Y^X \rightarrow (Y')^X$, dada por $f^X(\alpha) = f \circ \alpha$, es continua. Análogamente, si $g : X' \rightarrow X$ es una aplicación continua e Y es espacio topológico, entonces la aplicación $Y^g : Y^X \rightarrow Y^{X'}$, definida como $Y^g(\alpha) = \alpha \circ g$, es continua. Ambas construcciones tienen carácter funtorial.

Existen dos asignaciones naturales que involucran al espacio Y^X cuando X verifica ciertas condiciones topológicas y que serán de utilidad a lo largo de la memoria: la aplicación evaluación y la ley exponencial.

Proposición 1.1. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff y localmente compacto. Entonces la aplicación evaluación*

$$\begin{aligned} \text{ev} : Y^X \times X &\rightarrow Y, \\ (f, x) &\mapsto f(x), \end{aligned}$$

es continua.

El siguiente resultado, denominado Ley Exponencial, establece una biyección natural entre el producto de espacios y la exponencial.

Teorema 1.2 (Ley Exponencial). *Sea Y espacio topológico de Hausdorff y localmente compacto, y sean X y Z espacios topológicos. Entonces existe una biyección natural*

$$\begin{aligned} \Theta : \mathcal{C}(X \times Y, Z) &\rightarrow \mathcal{C}(X, Z^Y), \\ \Theta(f) &= \tilde{f}, \end{aligned}$$

donde $\tilde{f}(x)(y) := f(x, y)$. Se dice que las aplicaciones f y \tilde{f} son adjuntas entre sí. La aplicación inversa viene dada por $\Theta^{-1}(g) = \hat{g}$, siendo $\hat{g}(x, y) := g(x)(y)$.

Las demostraciones de estos resultados no están en el ánimo de este trabajo y pueden encontrarse, por ejemplo, en [9, Teorema 5.3].

La noción de homotopía de aplicaciones continuas será recurrente durante el trabajo, por lo que procedemos a introducirla brevemente: Como es habitual, consideraremos $[0, 1]$ el intervalo unidad cerrado con la topología inducida por la usual de \mathbb{R} .

Sean X e Y espacios topológicos y dos aplicaciones continuas $f, g : X \rightarrow Y$. Se dirá que f es *homótopa* a g , denotado como $f \simeq g$, si existe una aplicación continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ verificando $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$ y para todo $t \in [0, 1]$. Una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ se dice que es *nulhomótopa* si es homótopa a una aplicación constante.

Veamos dos caracterizaciones de nulhomotopías que serán útiles. Si definimos el *cilindro* de X como $X \times [0, 1]$ y el *cono* de X como el espacio cociente $X \times [0, 1]$ sobre el subespacio $X \times \{0\}$:

$$CX = (X \times [0, 1]) / (X \times \{0\}),$$

entonces tenemos una proyección natural $k : X \rightarrow CX$ dada por $k(x) = [x, 1]$ y que es continua. Es inmediato comprobar que f es nulhomótopa si, y solo si, existe una aplicación $F : CX \rightarrow Y$ continua tal que $F \circ k = f$. Es decir, F hace conmutativo al triángulo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow k & \nearrow F \\ & & CX \end{array}$$

Alternativamente, podemos definir el espacio de caminos de Y asociado a un punto distinguido $y_0 \in Y$ como

$$PY := \{ \alpha \in Y^{[0,1]} \mid \alpha(0) = y_0 \}$$

junto con la proyección natural $p : PY \rightarrow Y$ dada por $p(\alpha) := \alpha(1)$. Entonces, si Y es conexo por caminos, f es nulhomótopa si, y solo si, existe $H : X \rightarrow PY$ continua tal que $p \circ H = f$. Es decir, H hace conmutativo al triángulo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow H & \nearrow p \\ & & PY \end{array} \tag{1.1}$$

Es fácil ver que la relación “ser homótopa” es de equivalencia en el conjunto de las aplicaciones continuas entre X e Y . Por ello, tiene sentido construir el conjunto cociente denotado por

$$[X, Y] = \mathcal{C}(X, Y) / \simeq$$

y cuyos elementos se denominan *clases de homotopía* de aplicaciones continuas entre X e Y .

Podemos utilizar la homotopía entre funciones para debilitar la noción de homeomorfismo. Así, dos espacios topológicos X e Y se dirán *homotópicamente equivalentes*, denotado como $X \simeq Y$, cuando existan dos aplicaciones continuas $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$ tales que $g \circ f \simeq \text{id}_X$ y $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. Claramente, todo homeomorfismo es equivalencia de homotopía. En caso de que un espacio topológico sea homotópicamente equivalente a un espacio unipuntual, se dirá que es *contráctil* y es posible ver que la relación “ser homotópicamente equivalente” es reflexiva, simétrica y transitiva. Las propiedades que se transmitan mediante equivalencias de homotopía se llamarán *propiedades homotópicas*.

Presentamos a continuación un conocido lema de carácter técnico que servirá para garantizar la continuidad de ciertas homotopías definidas a trozos:

Lema 1.3 (de Continuidad). *Sea $X = A \cup B$ un espacio topológico con A y B cerrados en X . Si existen aplicaciones continuas $f : A \rightarrow Y$ y $g : B \rightarrow Y$ tales que $f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$, entonces la aplicación $h : X \rightarrow Y$ definida por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ g(x), & x \in B, \end{cases}$$

es continua.

Existe también una versión de este lema para una colección arbitraria de aplicaciones continuas con dominios abiertos. Las demostraciones pueden encontrarse, por ejemplo, en [24, Teorema 18.2 y Teorema 18.3].

Es necesario extender la noción de homotopía y sus derivados a parejas de espacios, ya que estas se ajustarán mejor a las necesidades de la memoria. Llamaremos *pareja de espacios* a un par ordenado (X, A) donde X es un espacio topológico y A es un subespacio topológico distinguido de X . Una aplicación continua de parejas $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ consiste en una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ verificando $f(A) \subseteq B$. Diremos que dos aplicaciones continuas entre parejas de espacios $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ son homótopas, y lo denotaremos por $f \simeq g$, si existe una aplicación continua de parejas $H : (X \times [0, 1], A \times [0, 1]) \rightarrow (Y, B)$ verificando $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$.

Como la relación “ \simeq ” es de equivalencia en el conjunto de funciones continuas entre parejas de espacios, podemos considerar el conjunto cociente

$$[X, A; Y, B] = \mathcal{C}(X, A; Y, B) / \simeq,$$

llamado *corchete de homotopía*, que está conformado por todas las clases de homotopía de funciones continuas $f : X \rightarrow Y$ que llevan A a B . Además, la homotopía de parejas es compatible con la composición de aplicaciones continuas de parejas. Por otro lado, obsérvese que esta noción generaliza a los espacios topológicos sin más que identificar X con la pareja (X, \emptyset) y análogamente con aplicaciones continuas y homotopías.

Un caso especial de pareja de espacios es el de *espacio punteado*. Un espacio punteado consiste en un par (X, x_0) con X espacio topológico y $x_0 \in X$ un punto distinguido. En este caso, una aplicación continua de espacios punteados $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ verifica $f(x_0) = y_0$. La homotopía punteada es análoga a la homotopía usual y el correspondiente corchete de homotopía se denota por $[X, x_0; Y, y_0]$.

1.1.2. Fibraciones

Frecuentemente será necesario recurrir también a la noción de fibración durante la memoria. Una fibración es una aplicación continua que verifica cierta propiedad de elevación:

Definición 1.4. Sean $p : E \rightarrow B$ una aplicación continua, X un espacio topológico y la inyección canónica en la base del cilindro $i_0 : X \rightarrow X \times [0, 1]$, dada por $i_0(x) = (x, 0)$. Diremos que p verifica la Propiedad de Elevación de Homotopías (PEH) con respecto a X si dadas $f : X \rightarrow E$ y $F : X \times [0, 1] \rightarrow B$ aplicaciones continuas tales que $p \circ f = F \circ i_0$, existe $\tilde{F} : X \times [0, 1] \rightarrow E$ continua tal que $\tilde{F} \circ i_0 = f$ y $p \circ \tilde{F} = F$; es decir, si todo cuadrado conmutativo de aplicaciones continuas, como se muestra a continuación, se divide en dos triángulos conmutativos de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & E \\
 i_0 \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\
 X \times [0, 1] & \xrightarrow{F} & B,
 \end{array}$$

Además, se dirá que p es fibración de Hurewicz, o simplemente fibración, si verifica la PEH respecto de todo espacio topológico.

Como ejemplos, se puede comprobar fácilmente que:

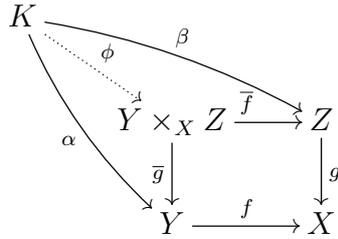
- i) Todo homeomorfismo es fibración.
- ii) Las proyecciones de espacios producto $p_i : E_1 \times E_2 \rightarrow E_i$ son fibraciones para $i \in \{1, 2\}$.
- iii) Si $p : E \rightarrow B$ y $q : B \rightarrow D$ son fibraciones, entonces la composición $q \circ p : E \rightarrow D$ es fibración.
- iv) Sean dos aplicaciones continuas $f : E \rightarrow B$ y $g : D \rightarrow B$. Si f es fibración, entonces la aplicación inducida \bar{f} en el pullback de f y g es fibración.

Recordamos que, dadas $f : Y \rightarrow X$ y $g : Z \rightarrow X$ aplicaciones continuas, se define el pullback de f y g como $Y \times_X Z := \{(y, z) \in Y \times Z \mid f(y) = g(z)\}$ con la topología inducida por el producto $Y \times Z$ junto con un cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 Y \times_X Z & \xrightarrow{\bar{f}} & Z \\
 \bar{g} \downarrow & & \downarrow g \\
 Y & \xrightarrow{f} & X
 \end{array}$$

donde $\bar{f}(x, z) := z$ y $\bar{g}(y, z) := y$. Se dice que \bar{f} y \bar{g} son las inducidas por f y g respectivamente.

Los pullbacks verifican una propiedad universal: Consideremos dos aplicaciones continuas $f : Y \rightarrow X$ y $g : Z \rightarrow X$ y su pullback asociado. Entonces, para todo espacio topológico K y para cualquier par de aplicaciones continuas $\alpha : K \rightarrow Y$ y $\beta : K \rightarrow Z$ tales que $g \circ \beta = f \circ \alpha$, existe una única aplicación continua $\phi : K \rightarrow Y \times_X Z$ tal que $\bar{f} \circ \phi = \beta$ y $\bar{g} \circ \phi = \alpha$. Es decir, el diagrama



es conmutativo.

Una fibración $p : E \rightarrow B$ determina, para cada $b_0 \in B$, un subespacio topológico distinguido $F_{b_0} := p^{-1}(\{b_0\})$ llamado *fibra* de p en b_0 . Como se indica en [29, Corolario 13], si B es conexo por caminos y $E \neq \emptyset$, necesariamente p es sobreyectiva y la fibra no depende del punto $b_0 \in B$ elegido, salvo equivalencia de homotopía.

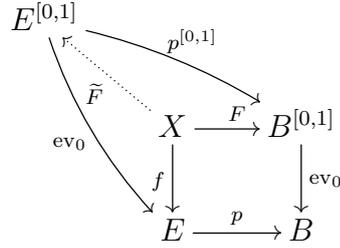
Observación 1.5. Las aplicaciones evaluación $ev_0, ev_1 : X^{[0,1]} \rightarrow X$, definidas por $ev_0(\alpha) = \alpha(0)$ y $ev_1(\alpha) = \alpha(1)$, son fibraciones. Esto se deduce de la Proposición 1.8, de que las proyecciones de espacios producto son fibraciones y de que la composición de fibraciones es fibración.

Veremos a continuación dos caracterizaciones de fibraciones. La primera involucra una propiedad de elevación con respecto a las aplicaciones continuas.

Proposición 1.6. *Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación continua entre espacios topológicos y $ev_0 : B^{[0,1]} \rightarrow B$ la evaluación en $t = 0$. Entonces, p es fibración si y solo si para todo espacio topológico X y para cualquier par de aplicaciones continuas $f : X \rightarrow E$, $F : X \rightarrow B^{[0,1]}$ tales que el cuadrado*

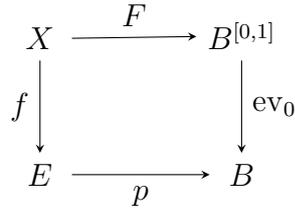
$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{F} & B^{[0,1]} \\
 f \downarrow & & \downarrow ev_0 \\
 E & \xrightarrow{p} & B
 \end{array}$$

es conmutativo, existe $\tilde{F} : X \rightarrow E^{[0,1]}$ tal que $\tilde{F}(x)(0) = f(x)$ y $p \circ \tilde{F}(x) = F(x)$, para todo $x \in X$:

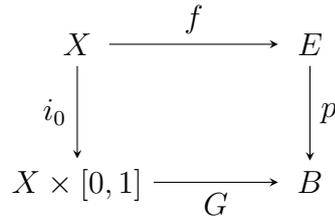


Demostración.

Supongamos que p es una fibración y sea el diagrama conmutativo



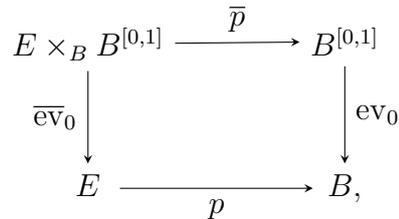
Entonces, por el Teorema 1.2, tenemos la aplicación adjunta $G = \Theta^{-1}(F)$ con diagrama conmutativo:



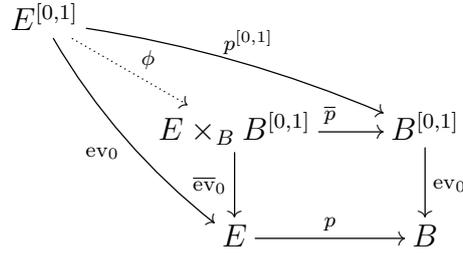
Así, existe la aplicación continua $\tilde{G} : X \times [0, 1] \rightarrow E$ tal que $\tilde{G} \circ i_0 = f$ y $p \circ \tilde{G} = G$. Si definimos ahora $\tilde{F} = \Theta(\tilde{G}) : X \rightarrow E^{[0,1]}$ la aplicación adjunta de \tilde{G} por el Teorema 1.2, entonces es inmediato comprobar que \tilde{F} verifica las condiciones requeridas.

Análogamente, haciendo uso del Teorema 1.2, se demuestra el recíproco. ■

Veamos a continuación una última caracterización de fibraciones en términos del pullback entre sus espacios participantes. Para ello, debemos notar lo siguiente: dado $p : E \rightarrow B$ una fibración, podemos considerar el pullback



donde $E \times_B B^{[0,1]} = \{(e, \alpha) \in E \times B^{[0,1]} \mid p(e) = \alpha(0)\}$. Como $p \circ \text{ev}_0 = \text{ev}_0 \circ p^{[0,1]}$, entonces existe un único $\phi : E^{[0,1]} \rightarrow E \times_B B^{[0,1]}$ tal que $\bar{p} \circ \phi = p^{[0,1]}$ y $\bar{\text{ev}}_0 \circ \phi = \text{ev}_0$; es decir, el diagrama



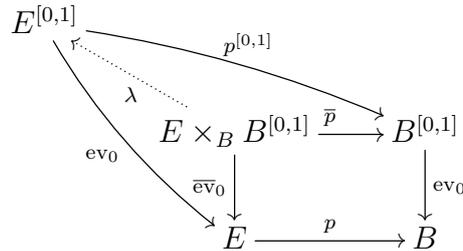
es conmutativo. Nótese que ϕ viene definido por

$$\begin{aligned}
 \phi = (ev_0, p^{[0,1]}) : E^{[0,1]} &\rightarrow E \times_B B^{[0,1]}, \\
 \alpha &\mapsto (\alpha(0), p \circ \alpha).
 \end{aligned}$$

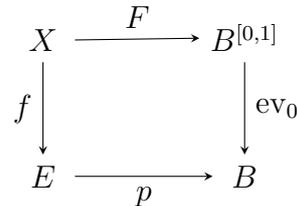
Proposición 1.7. *Sea $p : E \rightarrow B$ una aplicación continua. Entonces p es fibración si, y solo si, existe una aplicación continua $\lambda : E \times_B B^{[0,1]} \rightarrow E^{[0,1]}$ tal que $\phi \circ \lambda = id$.*

Demostración.

Supongamos que $p : E \rightarrow B$ es una fibración. Entonces tenemos el diagrama



Haciendo uso de la propiedad universal del pullback tenemos que existe $\phi : E^{[0,1]} \rightarrow E \times_B B^{[0,1]}$ tal que $\phi \circ \lambda = id$. Recíprocamente, supongamos que existe una aplicación $\lambda : E \times_B B^{[0,1]} \rightarrow E^{[0,1]}$ continua tal que $\phi \circ \lambda = id$ y consideramos el diagrama conmutativo



Entonces podemos tomar la única aplicación continua $\psi : X \rightarrow E \times_B B^{[0,1]}$ que verifica $\bar{ev}_0 \circ \psi = f$ y $\bar{p} \circ \psi = F$. Tomando ahora $\tilde{F} := \lambda \circ \psi : X \rightarrow E^{[0,1]}$, es claro que cumple que $p^{[0,1]} \circ \tilde{F}$ y $ev_0 \circ \tilde{F} = f$. ■

Concluiremos esta sección demostrando que si X es un espacio topológico, la aplicación bievaluación, que a cada camino en X asigna el par ordenado conformado por el punto inicial y el punto final del camino, es fibración.

Proposición 1.8. *Si X es un espacio topológico, entonces la aplicación bivaluación $\pi : X^{[0,1]} \rightarrow X \times X$, dada por $\pi(\alpha) = (\alpha(0), \alpha(1))$, es una fibración.*

Demostración.

Sea Y un espacio topológico y sean $f : Y \rightarrow X^{[0,1]}$ y $F : Y \times [0, 1] \rightarrow X \times X$ aplicaciones continuas de manera que $\pi \circ f = F \circ i_0$. Es posible construir la elevación $\tilde{F} : Y \times [0, 1] \rightarrow X^{[0,1]}$ dada por

$$\tilde{F}(y, t)(s) = \begin{cases} F_1(y, t - 3s), & 0 \leq s \leq \frac{t}{3}, \\ f(y) \left(\frac{3s - t}{3 - 2t} \right), & \frac{t}{3} \leq s \leq 1 - \frac{t}{3}, \\ F_2(y, 3s - 3 + t), & 1 - \frac{t}{3} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

para todo $y \in Y$ y para cualesquiera $t, s \in [0, 1]$. La continuidad de \tilde{F} está garantizada por el Teorema 1.2 y el Lema 1.3. Es fácil comprobar que $\tilde{F} \circ i_0 = f$ y $\pi \circ \tilde{F} = F$. ■

1.2. Nociones en topología algebraica

El principal objetivo de la topología algebraica es clasificar espacios topológicos utilizando estructuras algebraicas asociadas de manera que estas permanezcan invariantes ante transformaciones continuas entre los espacios. La topología algebraica encuentra en el álgebra homológica una gran variedad de estructuras útiles para este cometido.

En esta sección estudiaremos los módulos de homología y cohomología singular sobre un anillo prefijado, que informan, *grosso modo*, sobre el número de agujeros que presenta un espacio, así como una operación entre módulos de cohomología que será de utilidad a la hora de aproximar la complejidad topológica. A lo largo de la memoria supondremos que el lector está familiarizado con la teoría de módulos. Se refiere al lector a [3] para ver un estudio sistemático de estas estructuras algebraicas.

1.2.1. Homología y cohomología singular

Fijado un espacio topológico X y un anillo conmutativo y unitario R , podemos asociar a X , para cada $n \geq 0$, un módulo con coeficientes en R de manera que verifique determinadas condiciones de regularidad. En este apartado, partiremos del símplice estándar que podremos asociar a un espacio topológico X ; esto generará una sucesión de R -módulos con estructura de complejo de cadenas, a partir de la cual podremos construir un complejo de cocadenas.

Si X es un espacio topológico y $q \geq 0$, se define el q -símplice estándar como la envolvente convexa de los puntos $\{e_0, e_1, \dots, e_q\} \subset \mathbb{R}^{q+1}$, donde $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_1 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $e_q = (0, 0, \dots, 0, 1)$. Este tiene la expresión siguiente:

$$\Delta_q := \left\{ (t_0, t_1, \dots, t_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid \sum_{i=0}^q t_i = 1, t_i \geq 0 \right\}.$$

Se llama q -símplice singular de X a cualquier aplicación continua $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$. Consideramos el i -ésimo operador cara ($0 \leq i \leq q-1$)

$$\begin{aligned} d_i^q : \Delta_{q-1} &\rightarrow \Delta_q, \\ d_i^q(t_0, \dots, t_{q-1}) &:= (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_{q-1}). \end{aligned}$$

Denotando por $\Delta_q(X)$ al conjunto de todos los q -símplices singulares de X y considerando sumas formales finitas y con coeficientes en R entre ellos, podemos generar, para cada $q \geq 0$, el R -módulo libre generado por todos los q -símplices singulares, denominado R -módulo de q -cadenas singulares de X :

$$S_q(X; R) := \left\{ \sum_{\sigma \in \Delta_q(X)} \lambda_\sigma \sigma \mid \lambda_\sigma \in R, \lambda_\sigma = 0 \text{ salvo en un número finito de } \sigma \in \Delta_q(X) \right\}.$$

Podemos considerar también el R -homomorfismo de conexión $\partial_q : S_q(X; R) \rightarrow S_{q-1}(X; R)$, definido para q -símplices singulares como $\partial_q(\sigma) := \sum_{i=0}^q (-1)^i (\sigma \circ d_i^q)$ y extendido por linealidad a toda q -cadena singular. Dado que la composición de dos operadores borde consecutivos es el homomorfismo nulo, se tiene que $S(X; R) = \{S_q(X; R)\}_{q=0}^\infty$ es un complejo de cadenas singulares con operador borde ∂_q ,

$$\dots \xrightarrow{\partial_{q+2}} S_{q+1}(X; R) \xrightarrow{\partial_{q+1}} S_q(X; R) \xrightarrow{\partial_q} S_{q-1}(X; R) \xrightarrow{\partial_{q-1}} \dots$$

Nótese que $S_q(X; R) = 0$ para todo $q < 0$ al ser R -módulo libre sobre el conjunto vacío \emptyset . Si denotamos $Z_q(X; R) := \text{Ker}(\partial_q)$, denominado *módulo de q -ciclos* y $B_q(X; R) := \text{Im}(\partial_{q+1})$, denominado *módulo de q -bordes*, podemos definir el q -ésimo R -módulo de homología singular de X como $H_q(X; R) := \text{Ker}(\partial_q) / \text{Im}(\partial_{q+1})$. Además, si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua, entonces para cada $q \geq 0$, se induce un homomorfismo de R -módulos $S_q(f) : S_q(X; R) \rightarrow S_q(Y; R)$ dado por $S_q(f)(\sigma) := f \circ \sigma$ para todo q -símplice singular σ y extendido por linealidad a toda q -cadena singular. Tal homomorfismo conmuta con el operador borde, es decir, el cuadrado

$$\begin{array}{ccc}
 S_q(X; R) & \xrightarrow{S_q(f)} & S_q(Y; R) \\
 \partial_q \downarrow & & \downarrow \partial_q \\
 S^{q-1}(X; R) & \xrightarrow{S_{q-1}(f)} & S^{q-1}(Y; R)
 \end{array}$$

es conmutativo para todo $q \geq 0$; por tanto, se tiene un homomorfismo de complejos de cadenas, el cual induce naturalmente un homomorfismo de R -módulos $H_q(f) : H_q(X; R) \rightarrow H_q(Y; R)$, para cada $q \geq 0$. Esta construcción es funtorial.

Introducimos ahora la cohomología como construcción dual a la homología. Consideramos ahora el conjunto

$$S^q(X; R) := \text{Hom}_R(S_q(X; R), R), \quad (1.2)$$

conocido como el R -módulo de las q -cocadenas singulares de X , donde los elementos $c : S_q(X) \rightarrow R$ son homomorfismos de R -módulos. Este conjunto tiene estructura de R -módulo, donde $(c + c')(x) := c(x) + c'(x)$ y $(\lambda \cdot c)(x) := \lambda \cdot c(x)$. Además, $S(X, R) = \{S^q(X)\}_{q=0}^{\infty}$ en un complejo de q -cocadenas sobre R con operador coborde definido en cada $q \geq 0$ como

$$\begin{aligned}
 \delta^q : S^q(X; R) &\rightarrow S^{q+1}(X; R), \\
 \delta^q(c) &= c \circ \partial_{q+1}.
 \end{aligned}$$

Denotamos $Z^q(X; R) := \text{Ker}(\delta^q)$ al *módulo de los q -cociclos* y $B^q(X; R) := \text{Im}(\delta^{q-1})$ al *módulo de los q -cobordes* y se define el q -ésimo R -módulo de cohomología singular de X como $H^q(X; R) := \text{Ker}(\delta^q) / \text{Im}(\delta^{q-1})$.

Toda aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ induce, para cada $q \geq 0$ y de manera contravariante, un homomorfismo de R -módulos $S^q(f) : S^q(Y; R) \rightarrow S^q(X; R)$, definido por $S^q(f)(c) := c \circ S_q(f)$. Es decir, que para todo $q \geq 0$, el cuadrado

$$\begin{array}{ccc}
 S^q(Y; R) & \xrightarrow{S^q(f)} & S^q(X; R) \\
 \delta^q \downarrow & & \downarrow \delta^q \\
 S^{q+1}(Y; R) & \xrightarrow{S^{q+1}(f)} & S^{q+1}(X; R)
 \end{array}$$

es conmutativo. Teniendo en cuenta esto, para todo $q \geq 0$, se induce $H^q(f) : H^q(Y, R) \rightarrow H^q(X, R)$ homomorfismo entre los R -módulos de cohomología.

Para extender todas estas nociones a parejas de espacios podemos definir el complejo de cocadenas singular asociado a un subespacio topológico de X . Es claro que si A es

subespacio de X , entonces $S_q(A)$ es R -submódulo de $S_q(X)$, luego podemos considerar el R -módulo cociente entre ambos y definir

$$S^q(X, A; R) := \text{Hom}_R(S_q(X)/S_q(A), R)$$

con operador coborde inducido $\delta^q : S^q(X, A; R) \rightarrow S^{q+1}(X, A; R)$. Denotamos $Z^q(X, A; R) := \text{Ker}(\delta^q)$ y $B^q(X, A; R) := \text{Im}(\delta^{q-1})$ y se define la cohomología de X relativa al subespacio A con coeficientes en R como

$$H^q(X, A; R) := Z^q(X, A; R)/B^q(X, A; R).$$

Además, toda aplicación continua entre parejas de espacios $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ induce, para cada $q \geq 0$, un homomorfismo de R -módulos

$$H^q(f) : H^q(Y, B; R) \rightarrow H^q(X, A; R).$$

Veamos ahora algunas propiedades de la cohomología singular recogidas en un teorema.

Teorema 1.9 (Axiomas de Eilenberg-Steenrod). Sean (X, A) , (Y, B) y (Z, C) parejas de espacios topológicos, sean $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ y $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ aplicaciones continuas de parejas y sea $q \geq 0$, se tienen

i) [**Contrafunctor**] La cohomología es un funtor contravariante, es decir $H^q(\text{id}_{(X,A)}) = \text{id}_{H^q(X,A)}$ y $H^q(g \circ f) = H^q(f) \circ H^q(g)$, para f y g componibles.

ii) [**Invariancia**] Las cohomologías de aplicaciones continuas homótopas son idénticas. Es decir, dadas $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ con $f \simeq g$, entonces $H^q(f) = H^q(g)$.

iii) [**Exactitud**] Si denotamos $i : A \hookrightarrow X$ y $j : (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$, para cada $q \geq 0$ existe un homomorfismo de R -módulos $\delta^q : H^q(A; R) \rightarrow H^{q+1}(X, A; R)$ llamado homomorfismo de conexión tal que la sucesión de R -módulos

$$0 \rightarrow H^0(X, A; R) \xrightarrow{H^0(j)} H^0(X; R) \xrightarrow{H^0(i)} H^0(A; R) \xrightarrow{\delta^0} H^1(X, A; R) \xrightarrow{H^1(j)} \dots$$

es exacta. Además, el homomorfismo de conexión es una transformación natural, es decir, dada $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ una aplicación continua de parejas, entonces el siguiente cuadrado es conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} H^q(B; R) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(Y, B; R) \\ H^q(f|_A) \downarrow & & \downarrow H^q(f) \\ H^q(A; R) & \xrightarrow{\delta} & H^{q+1}(X, A; R). \end{array}$$

iv) [**Escisión**] Sean (X, A) una pareja de espacios y $U \subseteq A$ un subespacio topológico de A . Si la clausura de U está contenida en el interior de A , entonces la inclusión $i : (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$ induce $H^q(i) : H^q(X, A; R) \rightarrow H^q(X \setminus U, A \setminus U; R)$ isomorfismo de R -módulos, para cada $q \geq 0$.

v) [**Dimensión**] Sea P un espacio topológico unipuntual. Entonces

$$H^q(P; R) = \begin{cases} R, & q = 0, \\ 0, & q > 0. \end{cases}$$

La demostración de estas propiedades puede encontrarse, por ejemplo, en [17, Nota 21.9].

1.2.2. El producto cup y el producto tensorial

Ahora que conocemos la estructura algebraica inicial con la que vamos a trabajar, así como sus propiedades básicas, podemos definir una operación que enriquecerá dicha estructura y que será crucial en el posterior estudio de la complejidad topológica.

Definición 1.10. Sea R un anillo conmutativo y unitario y sean $c \in S^p(X; R)$ y $d \in S^q(X; R)$. Se define el producto cup entre c y d para cada $(p+q)$ -símplice singular σ como

$$\begin{aligned} \smile : S^p(X; R) \times S^q(X; R) &\rightarrow S^{p+q}(X; R), \\ (c \smile d)(\sigma) &:= c(\sigma \circ \lambda_p) \cdot d(\sigma \circ \tau_q) \end{aligned}$$

donde $\lambda_p : \Delta_p \rightarrow \Delta_{p+q}$ definida como $\lambda_p(t_0, \dots, t_p) := (t_0, \dots, t_p, 0, 0, \dots, 0)$ y $\tau_q : \Delta_q \rightarrow \Delta_{p+q}$ definida como $\tau_q(t_0, \dots, t_q) := (0, \dots, 0, t_0, t_1, \dots, t_q)$. Esta noción se extiende por linealidad a toda $(p+q)$ -cocadena singular.

El producto cup de cocadenas induce un producto cup en las clases de cohomología si tenemos en cuenta la siguiente fórmula, cuya demostración puede verse en [18, Lema 3.6].

Lema 1.11. Dados $c \in S^p(X; R)$ y $d \in S^q(X; R)$, se tiene que

$$\delta(c \smile d) = \delta(c) \smile d + (-1)^p c \smile \delta(d)$$

Conociendo este hecho, como acabamos de indicar, es posible inducir el producto cup en cohomología, que denotamos igualmente por:

$$\begin{aligned} \smile : H^p(X; R) \times H^q(X; R) &\rightarrow H^{p+q}(X; R), \\ [c] \smile [d] &:= [c \smile d], \end{aligned}$$

el cual es asociativo y distributivo pues hereda estas propiedades del producto cup en cocadenas.

A continuación, introducimos brevemente las graduaciones de anillos:

Un anillo $(A, +, \cdot)$ (no necesariamente conmutativo) se dice que está *graduado* si el grupo abeliano $(A, +)$ se descompone en suma directa de subgrupos abelianos $A = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} A_p$ verificando $A_p \cdot A_q \subseteq A_{p+q}$. Un elemento $x \in A$ se dice que es *homogéneo de grado* p si existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $x \in A_p$ y denotamos $|x| = p$. Análogamente, una R -álgebra \mathcal{A} se dice que está *graduada* si se descompone en suma directa de R -submódulos $\mathcal{A} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} A_p$ verificando $A_p \cdot A_q \subseteq A_{p+q}$ para cualesquiera $p, q \in \mathbb{Z}$. Diremos que un anillo A es *gradualmente conmutativo* si para cualesquiera $x, y \in A$ homogéneos, se tiene que $x \cdot y = (-1)^{|x||y|} y \cdot x$. Como ejemplos, tenemos que los anillos de polinomios $\mathbb{Z}[x]$ y $\mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$ son anillos graduados. Nótese que los elementos de A son sumas finitas $\sum_p x_p$ con $x_p \in A_p$. Si $f : A \rightarrow B$ es un homomorfismo de anillos, diremos que f es *homomorfismo de anillos graduados* si los anillos A y B son graduados y $f(A_p) \subseteq B_p$ para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Consideramos $H^\bullet(X; R) = \bigoplus_{p \geq 0} H^p(X; R)$, suma directa de grupos abelianos. Los elementos de $H^\bullet(X; R)$ son sumas finitas $\sum_i \alpha_i$ con $\alpha_i \in H^i(X; R)$ y se define el producto:

$$\left(\sum_i \alpha_i \right) \cdot \left(\sum_j \beta_j \right) := \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j.$$

Esto confiere a $H^\bullet(X; R)$ una estructura de anillo graduado, siendo la unidad la clase de cohomología de la 0-cocadena $1 : C_0(X) \rightarrow R$, definida por $\sigma \mapsto 1 \in R$. Teniendo en cuenta la operación externa por elementos de R , este anillo graduado puede considerarse como una R -álgebra graduada. Además, $H^\bullet(X; R)$ es gradualmente conmutativo (véase [18]).

Estudiaremos ahora los homomorfismos entre R -álgebras de cohomología singular inducidos por aplicaciones continuas: Si $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua, sabemos que f induce un homomorfismo de complejos de cocadenas. Es posible entonces considerar un homomorfismo de R -álgebras de cohomología en sentido contravariante,

$$f^* : H^\bullet(Y; R) \rightarrow H^\bullet(X; R). \quad (1.3)$$

En efecto, se tiene que f^* es homomorfismo de R -módulos y, para cada $p \geq 0$, $f^*(H^p(Y; R)) \subseteq H^p(X; R)$. Además, f^* conserva el producto cup, esto es, para cualesquiera $\alpha, \beta \in H^\bullet(Y; R)$, se verifica $f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta)$. Basta verlo para elementos homogéneos $\alpha = [c] \in H^p(Y; R)$ y $\beta = [d] \in H^q(Y; R)$ para luego extender la operación linealmente. Como se indica en [18, Pág. 209], el producto cup da lugar a los productos cup relativos

$$H^p(X; R) \times H^q(X, A; R) \rightarrow H^{p+q}(X, A; R), \quad H^p(X, A; R) \times H^q(X; R) \rightarrow H^{p+q}(X, A; R),$$

así como $H^p(X, A; R) \times H^q(X, A; R) \rightarrow H^{p+q}(X, A; R)$; pues si c o d se anulan en cadenas que están en A , entonces $c \smile d$ también se anula en A . En general, dados X un espacio

topológico y U, V abiertos en X , se tiene un producto cup

$$\smile : H^p(X, U; R) \times H^q(X, V; R) \rightarrow H^{p+q}(X, U \cup V; R).$$

Además, si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación continua, con $f(U) \subseteq V$ y $f(U') \subseteq V'$, entonces $f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta) \in H^{p+q}(X, U \cup U'; R)$ para cualquier $\alpha \in H^p(Y, V; R)$ y cualquier $\beta \in H^q(Y, V'; R)$.

Será necesario trabajar también con productos tensoriales. Introducimos por tanto el producto tensorial y su relación con la R -álgebra graduada de cohomología. Si es R un anillo conmutativo y unitario, M y N son R -módulos, denotaremos a su *producto tensorial* por $M \otimes_R N$. Si M y N son R -álgebras graduadas, en particular son R -módulos, por lo que podemos considerar su producto tensorial $M \otimes_R N$, que también es un R -módulo. Las graduaciones de M y N inducen una graduación natural $(M \otimes_R N)_n := \bigoplus_{p+q=n} (M_p \otimes_R N_q)$ que confiere una estructura de R -álgebra graduada en $M \otimes_R N$ con operación inducida por

$$(\alpha \otimes \beta) \cdot (\alpha' \otimes \beta') := (-1)^{|\beta||\alpha'|} (\alpha \cdot \alpha') \otimes (\beta \cdot \beta'), \quad (1.4)$$

para α, α', β y β' elementos homogéneos. En particular, aplicando el producto tensorial a la R -álgebra graduada de cohomología $H^\bullet(X; R)$, se tiene que $H^\bullet(X; R) \otimes_R H^\bullet(X; R)$ es una R -álgebra graduada y es posible redefinir el producto cup como un homomorfismo

$$\begin{aligned} \smile : H^\bullet(X; R) \otimes_R H^\bullet(X; R) &\rightarrow H^\bullet(X; R), \\ \smile (\alpha \otimes \beta) &:= \alpha \smile \beta, \end{aligned} \quad (1.5)$$

definido para elementos homogéneos y que se extiende por linealidad. Se tiene también un producto cup externo o *producto cruz*

$$\begin{aligned} \times : H^\bullet(X; R) \times H^\bullet(Y; R) &\rightarrow H^\bullet(X \times Y; R), \\ \alpha \times \beta &:= p_1^*(\alpha) \smile p_2^*(\beta), \end{aligned}$$

siendo $p_1 : X \times Y \rightarrow X$ y $p_2 : X \times Y \rightarrow Y$ la proyecciones canónicas. Es claro que \times es R -bilineal e induce un homomorfismo de R -álgebras graduadas

$$\begin{aligned} \times : H^\bullet(X; R) \otimes_R H^\bullet(Y; R) &\rightarrow H^\bullet(X \times Y; R), \\ \alpha \otimes \beta &\rightarrow \times^*(\alpha \otimes \beta) = \alpha \times \beta. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Se tiene además, el siguiente triángulo conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} H^\bullet(X; R) \otimes_R H^\bullet(X; R) & \xrightarrow{\times} & H^\bullet(X \times X; R) \\ & \searrow \smile & \swarrow \Delta^* \\ & & H^\bullet(X; R). \end{array} \quad (1.7)$$

siendo $\Delta : X \rightarrow X \times X$ la aplicación diagonal, definida por $\Delta(x) = (x, x)$.

Complejidad topológica

Este capítulo es el núcleo de la memoria. En él introduciremos el problema del planificador de movimientos, daremos las primeras definiciones y las primeras propiedades relativas a la complejidad topológica y trataremos de estimarla mediante diversas técnicas.

2.1. El problema de planificación de movimientos

La motivación de este trabajo es la planificación de movimientos en sistemas mecánicos. Un sistema mecánico consiste en un conjunto de componentes, dispositivos o elementos que tienen como función específica transmitir el movimiento desde las fuentes que lo generan, transformando distintos tipos de energía.

Supongamos que queremos dotar a un sistema mecánico de capacidad para gestionar el movimiento, de manera que este pueda realizar tareas relativamente complejas con condiciones prefijadas. Una planificación del movimiento en un sistema mecánico consiste en un algoritmo que tiene como entrada un par ordenado de estados (estado inicial - estado final) y como salida un movimiento continuo desde el estado inicial hasta el estado final. Como adelantamos en la Introducción, dado un sistema mecánico S , es posible considerar el conjunto X conformado por todos los posibles estados o configuraciones del mismo. Este conjunto puede dotarse de estructura de espacio topológico e incluso de variedad diferenciable en muchos casos, sin embargo, en este trabajo nos bastará con la primera. Entre un

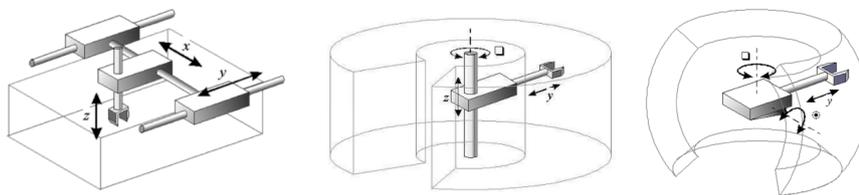


Figura 2.1: Sistemas mecánicos y sus respectivos espacios de configuraciones. Imágenes extraídas de [udesantiagovirtual](http://udesantiagovirtual.cl).

sistema mecánico S y su espacio de configuraciones X existe un diccionario en el cual sus

elementos se corresponden como sigue:

Sistema mecánico	\leftrightarrow	Espacio de configuraciones
Estados del sistema S	\leftrightarrow	Puntos del espacio X
Movimientos continuos del sistema S	\leftrightarrow	Caminos en el espacio X

De este modo, un movimiento continuo desde un estado A a otro B se corresponde con un camino en X desde el punto asociado al estado A hasta el punto asociado al estado B .

2.1.1. Espacios de configuraciones

Los espacios de configuraciones pueden ser muy variados. A continuación, veremos algunos espacios de configuraciones obtenidos a partir de sistemas mecánicos sencillos.

i) Un ejemplo sencillo de espacio de configuraciones es el que describe un robot que se desplaza por una isla desierta sin obstáculos. Es posible identificar la isla con un subespacio sin agujeros X de \mathbb{R}^2 .

ii) Consideramos S un brazo robótico formado por n barras B_1, \dots, B_n con origen en B_1 fijo y B_i conectada con B_{i+1} con un codo flexible. Si suponemos que la primera barra está fijada a la horizontal, entonces el espacio de configuraciones asociado al brazo está determinado por los ángulos que formen las barras entre sí. En caso de que el brazo robótico se mueva en el plano, el espacio de configuraciones asociado será $X = S^1 \times \dots \times S^1$. Si el sistema se mueve en el espacio tridimensional, el espacio de configuraciones será $X = S^2 \times \dots \times S^2$.



Figura 2.2: Un brazo robótico que se mueve en el plano. Un dron tiene una posición rotacional por cada posición espacial.

iii) Supongamos que un dron se desplaza por el espacio tridimensional y que dispone de una cámara que puede rotar libremente sobre sí misma. Para obtener su espacio de configuraciones, debemos considerar que el dron tiene múltiples posiciones rotacionales para una misma posición espacial. De modo que su espacio de configuraciones es $X = \mathbb{R}^3 \times \text{SO}(3)$, donde $\text{SO}(3) = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = I, \det(A) = 1\}$ es el grupo ortogonal especial.

iv) Pensemos en un número finito de partículas que se mueven libremente sin colisionar por el espacio euclídeo tridimensional \mathbb{R}^3 . El espacio de configuraciones de este sistema se conoce como *espacio de configuraciones usual* (ver Figura 2.3).

$$F(\mathbb{R}^3, k) = \{((x_1, y_1, z_1), \dots, (x_k, y_k, z_k)) \in (\mathbb{R}^3)^k \mid (x_i, y_i, z_i) \neq (x_j, y_j, z_j), i \neq j\},$$

Este espacio puede generalizarse para cualquier espacio topológico Y : Si $k \geq 1$, se define

$$F(Y, k) = \{(y_1, \dots, y_k) \in Y^k \mid y_i \neq y_j, i \neq j\},$$

el espacio de configuraciones de n partículas desplazándose en Y sin colisionar.

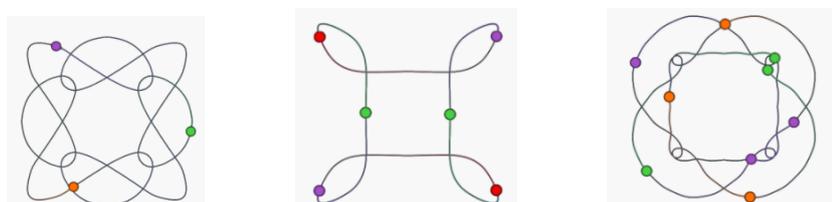


Figura 2.3: Órbitas espaciales del problema de los n -cuerpos. Casos 3-cuerpos, 6-cuerpos y 9-cuerpos simétricos. Imágenes extraídas de universo.math.

v) Consideramos una barra rígida con libertad para rotar en el espacio alrededor de su punto medio fijo donde sus extremos son indistinguibles. Notamos que los extremos de la barra describen los puntos en una 2-esfera, pero una posición y su inversa determinan el mismo estado del sistema, por lo que el espacio de configuraciones es el plano proyectivo real (ver Figura 2.4).

$$X = \mathbb{RP}^2 := S^2 / \sim,$$

donde $x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ o } x = -y$.

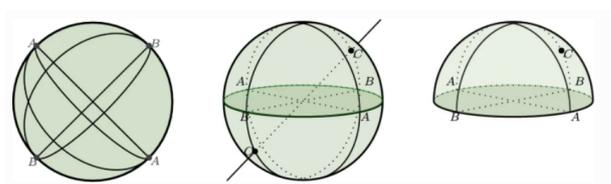


Figura 2.4: El espacio proyectivo real es el cociente de una 2-esfera identificando los puntos antipodales. Imágenes extraídas de Springer.

vi) Un coche en movimiento que se desplaza en el plano. Fijado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, necesitamos el ángulo ϕ que mide el giro respecto del eje OX del eje delantero. Además, necesitamos el ángulo ψ respecto del eje OY . El espacio de configuraciones es $X = \mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1$.

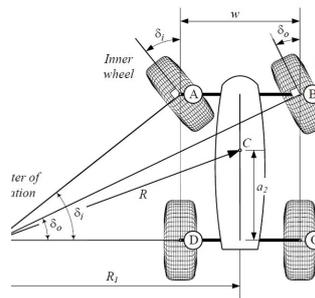


Figura 2.5: Ángulos de rotación de un coche que se mueve por el plano.

vii) El Problema del Pianista:

Supongamos que un pianista quiere extraer su piano sin masa de una habitación (ver Figura 2.6). Para hacerlo debe sortear un número (admitamos finito) de obstáculos. Si H es la región de la habitación que alberga n obstáculos, denotamos por O_i la región ocupada por el obstáculo i con $1 \leq i \leq n$. Entonces, el espacio de configuraciones del pianista es

$$X = H \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n O_i \right).$$

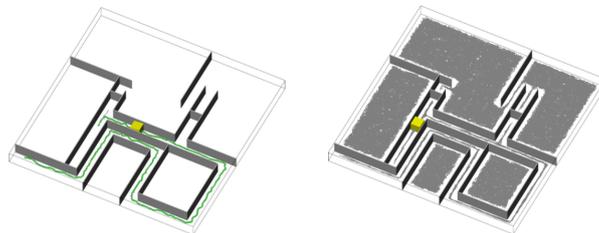


Figura 2.6: El espacio de configuraciones dependerá del área de los obstáculos y de su posición en la habitación. Imágenes extraídas de [researchgate](https://www.researchgate.net).

Este problema se puede plantear en las dos dimensiones del plano o de otras superficies así como en el espacio tridimensional u otras variedades.

Hemos podido ver en los ejemplos que los espacios de configuraciones pueden ser de tipos muy diferentes, algunos pueden presentar estructura de grupo, pueden ser conexos o disconexos y tener o no tener agujeros. De este modo, el problema de gestionar el movimiento de un sistema mecánico dependerá, fundamentalmente, del tipo topológico e incluso, como veremos, del tipo homotópico que presenten sus espacios de configuración asociados.

2.1.2. Algoritmos de planificación

Como hemos comentado, para planificar adecuadamente el movimiento de un sistema mecánico S , debemos determinar un algoritmo que reciba como input un par ordenado de estados del sistema (estado inicial y estado final) y devuelva como output un movimiento del sistema desde el estado inicial al estado final (véase Figura 2.7).

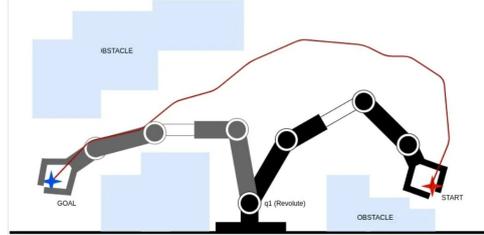


Figura 2.7: Un brazo robótico lleva un objeto del estado A al estado B mediante un movimiento continuo.

Aplicando el diccionario que indicamos al inicio del capítulo, el espacio de configuraciones X asociado a S es un espacio topológico y se pueden identificar los estados del sistema con puntos del espacio X , mientras que las transiciones o movimientos continuos de un estado a otro se identifican con los caminos en X , que son los elementos del espacio $X^{[0,1]}$ con la topología compacto-abierta. Entre estos espacios existe una aplicación distinguida que será fundamental para la memoria llamada *aplicación bievaluación*

$$\begin{aligned} \pi : X^{[0,1]} &\rightarrow X \times X, \\ \alpha &\mapsto \pi(\alpha) := (\alpha(0), \alpha(1)), \end{aligned} \quad (2.1)$$

que a cada camino en X asigna el par ordenado conformado por el origen y el extremo del camino. Como hemos señalado en el Capítulo 1, la aplicación bievaluación es continua de forma natural.

Dado que nuestro objetivo es asociar caminos a pares ordenados de puntos, para ello bastará dar una aplicación $s : X \times X \rightarrow X^{[0,1]}$, no necesariamente continua, que reciba un par de puntos en el espacio $X \times X$ y devuelva un camino en $X^{[0,1]}$, de manera que s sea sección de la bievaluación $\pi : X^{[0,1]} \rightarrow X \times X$, es decir, $\pi \circ s = \text{id}_{X \times X}$.

Aunque la sección $s : X \times X \rightarrow X^{[0,1]}$ puede no ser continua, es deseable que lo sea, puesto que la continuidad garantizaría que la sección (algoritmo) resista perturbaciones razonablemente pequeñas en el par de puntos input (véase Figura 2.8), es decir, que el algoritmo del planificador de movimientos sea robusto.

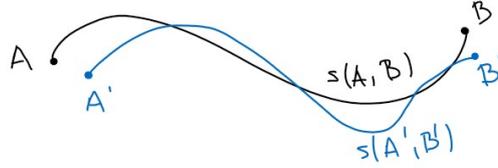


Figura 2.8: Si (A', B') es una pequeña perturbación de (A, B) , entonces el camino $s(A', B')$ es razonablemente próximo al camino $s(A, B)$.

Ahora que el problema de planificación de movimientos está reformulado topológicamente, lo trataremos exclusivamente desde este punto de vista. Comenzaremos por definir un algoritmo global en un espacio topológico arbitrario.

Definición 2.1. Llamaremos sección global o algoritmo global de la aplicación bievaluación π a una aplicación $s : X \times X \rightarrow X^{[0,1]}$ (no necesariamente continua) tal que $\pi \circ s = \text{id}_{X \times X}$, es decir, $\pi(s(x, y)) = (x, y)$ para todo $(x, y) \in X \times X$.

Veamos algunos ejemplos de algoritmos globales continuos.

i) En un espacio $X \subset \mathbb{R}^n$ convexo, un algoritmo continuo y global $s : X \times X \rightarrow X^{[0,1]}$ sería

$$s(x, y)(t) = (1 - t)x + ty.$$

ii) Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio estelar respecto de un punto distinguido $x_0 \in X$, es decir, que para cualquier $x \in X$, los segmentos con extremos x_0 y x están contenidos en X . Entonces un algoritmo continuo y global en X sería $s : X \times X \rightarrow X^{[0,1]}$ definido por

$$s(x, y)(t) = \begin{cases} (1 - 2t)x + 2tx_0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (2 - 2t)x_0 + (2t - 1)y, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Como hemos visto en el apartado 2.1.1, los espacios de configuraciones son variados desde el punto de vista topológico, por lo que es deseable definir algoritmos sobre espacios topológicos no contráctiles. El siguiente resultado, establecido por Farber en [12], elimina *a priori*, esta posibilidad.

Teorema 2.2. Sea X un espacio topológico conexo por caminos. Entonces X tiene un algoritmo global continuo $s : X \times X \rightarrow X^{[0,1]}$ si, y solo si, X es contráctil.

Demostración.

Supongamos que existe $s : X \times X \rightarrow X^{[0,1]}$ una sección continua tal que $\pi \circ s = \text{id}_{X \times X}$. Fijado $x_0 \in X$, es posible establecer la homotopía $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ definida por $H(x, t) = s(x, x_0)(t)$ verificando $H(x, 0) = s(x, x_0)(0) = x$ y $H(x, 1) = s(x, x_0)(1) = x_0$. Por lo tanto, la identidad es nulhomótopa en X y se tiene que X es contráctil. Recíprocamente,

supongamos que X es contráctil, es decir, la identidad es nulhomótopa en X . Por lo tanto, existe una homotopía $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = x_0$ para todo $x \in X$ siendo x_0 cierto punto de X . Definimos el algoritmo $s : X \times X \rightarrow X^{[0,1]}$, dado por

$$s(x, y)(t) = \begin{cases} H(x, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ H(y, 2 - 2t), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La continuidad de s está garantizada por el Teorema 1.2 y el Lema 1.3 y es claro que $\pi \circ s = \text{id}_{X \times X}$. ■

Este hecho motiva que Farber considere algoritmos locales continuos definidos sobre abiertos del espacio $X \times X$, que planifican el movimiento localmente. Esto dio origen a la noción de complejidad topológica.

2.2. Complejidad topológica

Dado un espacio topológico X , se pretende asociar caminos a pares de puntos del espacio de forma continua. Farber demuestra en el Teorema 2.2 que tratar de llevar a cabo esta tarea de forma global solo será posible cuando a que X sea contráctil. Por ello, propone asociar caminos de forma continua localmente, descomponiendo el espacio producto $X \times X$ en un número finito de abiertos U_0, \dots, U_n , cada uno con una respectiva sección continua local $s_i : U_i \rightarrow X^{[0,1]}$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. El número mínimo (menos uno) de estos abiertos con el que puede recubrirse $X \times X$ recibe el nombre de complejidad topológica de X y es la noción sobre la que girará toda la memoria.

Definición 2.3. *Se define la complejidad topológica de un espacio X , y la denotaremos por $\text{TC}(X)$, como el menor entero no negativo n para el cual es posible recubrir $X \times X$ con una familia de $n + 1$ abiertos $\{U_i\}_{i=0}^n$ tal que para cada U_i existe una sección local continua $s_i : U_i \rightarrow X^{[0,1]}$ de $\pi : X^{[0,1]} \rightarrow X \times X$, es decir, el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xleftarrow{\text{inc}_{U_i}} & X \times X \\ & \searrow s_i & \nearrow \pi \\ & & X^{[0,1]} \end{array}$$

es conmutativo para todo $0 \leq i \leq n$. Si no existe tal n diremos que la complejidad topológica de X es infinita y lo denotaremos por $\text{TC}(X) = \infty$.

Comencemos estudiando la complejidad topológica de espacios sencillos. Como ya hemos avanzado, los espacios más simples desde el punto de vista de la complejidad topológica son los espacios contráctiles.

Proposición 2.4. *Si X es un espacio topológico, entonces $\text{TC}(X) = 0$ si, y solo si, X es contráctil.*

La demostración es consecuencia inmediata del Teorema 2.2.

Como ejemplos, tenemos que los subespacios convexos (y en general, los estelares) de \mathbb{R}^n tienen complejidad topológica nula.

Estudiaremos a continuación un primer espacio con complejidad topológica no nula: la circunferencia, que denotamos, como es habitual, por S^1 .

Proposición 2.5. $\text{TC}(S^1) = 1$.

Demostración.

Como S^1 no es contráctil, necesariamente $\text{TC}(S^1) \geq 1$. Veamos ahora que $\text{TC}(S^1) \leq 1$: Definimos los abiertos

$$U_0 := \{(x, y) \in S^1 \times S^1 \mid x \neq -y\}, \quad U_1 := \{(x, y) \in S^1 \times S^1 \mid x \neq y\}$$

con algoritmos locales respectivos $s_0 : U_0 \rightarrow (S^1)^{[0,1]}$ y $s_1 : U_1 \rightarrow (S^1)^{[0,1]}$ dados por $s_0(x, y)$ el camino en S^1 de longitud mínima que conecta x con y (velocidad constante) y $s_1(x, y)$ el camino en S^1 que conecta x con y en sentido antihorario (velocidad constante). Evidentemente, los abiertos recubren $S^1 \times S^1$ y s_0, s_1 son continuas. Se tiene entonces que $\text{TC}(S^1) \leq 1$. Como sabemos que $\text{TC}(S^1) \geq 1$, necesariamente $\text{TC}(S^1) = 1$. ■

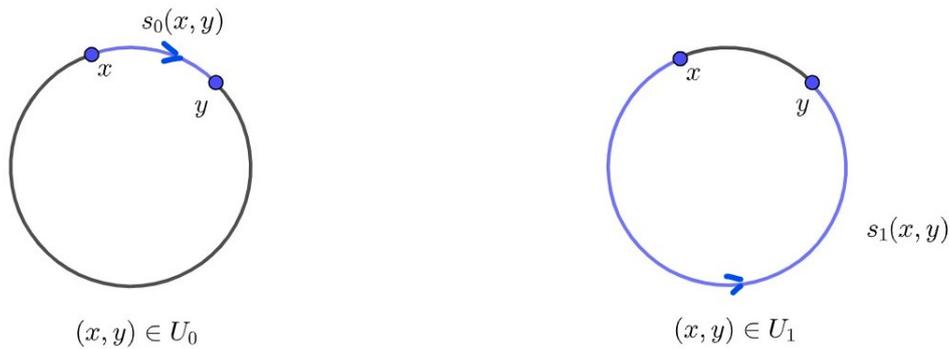


Figura 2.9: Planificador de movimientos para S^1 .

La complejidad topológica de un espacio es un invariante homotópico. En el próximo resultado, usaremos el subíndice π_X en la fibración bivaluación con el fin de indicar que estamos trabajando con el espacio topológico X . Usaremos esta notación durante la memoria cuando sea preciso.

Teorema 2.6. *Si dos espacios topológicos X e Y son homotópicamente equivalentes, entonces $\text{TC}(X) = \text{TC}(Y)$.*

Demostración.

Supongamos que $f : X \rightarrow Y$ una equivalencia de homotopía con inverso homotópico $g : Y \rightarrow X$ y veamos en primer lugar que $\text{TC}(Y) \leq \text{TC}(X)$:

Si $\text{TC}(X) = \infty$, la demostración acaba. Si $\text{TC}(X) = n < \infty$, tenemos que $X \times X$ se puede recubrir con una familia $\{U_i\}_{i=0}^n$ de abiertos tal que para cada abierto U_i está definido un algoritmo local $s_i : U_i \rightarrow X^{[0,1]}$ de $\pi_X : X^{[0,1]} \rightarrow X \times X$.

El objetivo es encontrar una familia $\{V_j\}_{j=0}^m$ que recubra $Y \times Y$ tal que para cada abierto V_j esté definido un algoritmo local de $\pi_Y : Y^{[0,1]} \rightarrow Y \times Y$. Sin pérdida de generalidad, construiremos un abierto V de $Y \times Y$ con algoritmo local $\sigma : V \rightarrow Y^{[0,1]}$ a partir de un abierto U de $X \times X$ con algoritmo local $s : U \rightarrow X^{[0,1]}$. Si definimos $V := (g \times g)^{-1}(U)$, entonces V es abierto en $Y \times Y$ puesto que es la antiimagen del abierto U mediante la aplicación continua $g \times g$. Como f y g son inversos homotópicos, fijamos una homotopía $H : \text{id}_Y \simeq f \circ g$. Esta homotopía nos permite definir el algoritmo $\sigma : V \rightarrow Y^{[0,1]}$ dado por

$$\sigma(y_1, y_2)(t) = \begin{cases} H(y_1, 3t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \\ f(s(g(y_1), g(y_2))(3t - 1)), & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}, \\ H(y_2, 3 - 3t), & \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Nótese que σ es continua como consecuencia del Teorema 1.2 y del Lema 1.3. Además, σ es algoritmo local definido en V sobre $\pi_Y : Y^{[0,1]} \rightarrow Y \times Y$. Hemos obtenido un abierto V con las condiciones deseadas. Generalizando tendríamos, para cada $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, un abierto $V_i = (g \times g)^{-1}(U_i)$ con algoritmo local $s_i : V_i \rightarrow Y \times Y$ continuo. Es fácil comprobar que $\{V_i\}_{i=0}^n$ recubre $Y \times Y$, con lo que

$$\text{TC}(Y) \leq n = \text{TC}(X).$$

Con un razonamiento análogo, intercambiando f por g , obtendríamos que $\text{TC}(X) \leq \text{TC}(Y)$, concluyendo que $\text{TC}(X) = \text{TC}(Y)$. ■

A continuación, utilizaremos las nociones introducidas en el Capítulo 1 para dar una generalización de la complejidad topológica. En primer lugar, definiremos la categoría seccional de una fibración para, posteriormente, extenderla al contexto general de aplicaciones continuas.

Definición 2.7. *Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración. Se define la categoría seccional de p , denotada por $\text{secat}(p)$, como el menor entero no negativo n tal que B admite un recubrimiento*

de $n + 1$ abiertos $\{U_i\}_{i=0}^n$ verificando que, para cada U_i existe una sección local continua de p ; esto es, una aplicación $s_i : U_i \rightarrow E$ continua tal que el triángulo

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{\text{inc}_i} & B \\ & \searrow s_i & \nearrow p \\ & & E \end{array}$$

es conmutativo, para cada $0 \leq i \leq n$.

Esta noción fue introducida y desarrollada por A. Schwarz en [28] y se denomina también *género de Schwarz*.

Para poder extender la noción de categoría seccional al contexto general de aplicaciones continuas, debemos relajar la condición de conmutatividad, sustituyéndola por conmutatividad homotópica. Con este objetivo presentamos el siguiente lema, que establece que todo triángulo homotópicamente conmutativo a partir de una fibración puede “corregirse” hasta obtener un triángulo estrictamente conmutativo.

Lema 2.8. Sean $p : E \rightarrow B$ una fibración y $f : X \rightarrow E$, $u : X \rightarrow B$ aplicaciones continuas. Si $p \circ f \simeq u$, entonces existe una aplicación continua $f' : X \rightarrow E$ verificando $f \simeq f'$ y $p \circ f' = u$.

Demostración.

Sea una homotopía $F : p \circ f \simeq u$, es decir $F : X \times [0, 1] \rightarrow B$ una aplicación continua verificando $F(x, 0) = p(f(x))$ y $F(x, 1) = u(x)$. Como p es fibración, entonces se tiene el siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \\ i_0 \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \downarrow p \\ X \times [0, 1] & \xrightarrow{F} & B, \end{array}$$

con lo que existe $\tilde{F} : X \times [0, 1] \rightarrow E$ haciendo conmutativos los triángulos. Podemos definir la aplicación $f' : X \rightarrow E$ dada por $f'(x) := \tilde{F}(x, 1)$. Evidentemente, $\tilde{F} : f \simeq f'$. Además, $(p \circ f')(x) = p(f'(x)) = p(\tilde{F}(x, 1)) = F(x, 1) = u(x)$ para todo $x \in X$. ■

En particular, toda sección local homotópica de una fibración es homótopa a alguna sección local estricta.

Corolario 2.9. Sean $p : E \rightarrow B$ una fibración y $A \subset B$. Entonces existe una sección local homotópica sobre A de p si, y solo si, existe una sección local estricta sobre A de p .

De la Proposición 1.8, tenemos que la aplicación bievaluación $\pi : X^{[0,1]} \rightarrow X \times X$ es fibración. Se deduce inmediatamente que

$$\text{TC}(X) = \text{secat}(\pi : X^{[0,1]} \rightarrow X \times X).$$

Procedemos a extender la noción de categoría seccional a una aplicación continua cualquiera:

Definición 2.10. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua. Se define la categoría seccional de f , denotada por $\text{secat}(f)$, como el menor entero no negativo n verificando que existe un recubrimiento $\{U_i\}_{i=0}^n$ de $n + 1$ abiertos de Y tal que para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ existe $s_i : U_i \rightarrow X$ sección local homotópica de f , es decir, el triángulo

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{\text{inc}_{U_i}} & Y \\ & \searrow s_i & \nearrow p \\ & E & \end{array}$$

es homotópicamente conmutativo para $0 \leq i \leq n$. De no existir tal n diremos que la categoría seccional de f es infinita y se usará la notación $\text{secat}(f) = \infty$.

Observación 2.11. Nótese que, si f es fibración, entonces esta definición coincide con la noción original de categoría seccional de una fibración. Además, si $f \simeq f'$, entonces $\text{secat}(f) = \text{secat}(f')$.

A continuación, determinaremos la relación entre la complejidad topológica de un espacio y la categoría seccional de cierta aplicación continua asociada a dicho espacio. Para ello presentamos dos resultados de carácter técnico.

Proposición 2.12. Sean $\alpha : X \rightarrow X'$ una aplicación continua y un triángulo homotópicamente conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X' \\ & \searrow f & \nearrow f' \\ & Y & \end{array}$$

Entonces, $\text{secat}(f') \leq \text{secat}(f)$.

Demostración.

Si $\text{secat}(f) = \infty$, entonces la demostración acaba. Si $\text{secat}(f) = n < \infty$, entonces se tiene que $Y = \bigcup_{i=0}^n U_i$ con U_i abierto en Y para todo $i \in \{0, \dots, n\}$; además existe una sección $s_i : U_i \rightarrow X$ continua de manera que $f \circ s_i \simeq \text{inc}_{U_i} : U_i \rightarrow Y$. Ahora, es posible definir $s'_i := \alpha \circ s_i : U_i \rightarrow X'$ y restaría ver que $f' \circ s'_i \simeq \text{inc}_{U_i}$. En efecto, $f' \circ s'_i = f' \circ \alpha \circ s_i \simeq f \circ s_i \simeq \text{inc}_{U_i}$. Se concluye que $\text{secat}(f') \leq n$ ■

Proposición 2.13. Sean $\alpha : X \rightarrow X'$ y $\beta : Y \rightarrow Y'$ equivalencias de homotopía y sea el cuadrado homotópicamente conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xrightarrow{\beta} & Y' \end{array}$$

Entonces, $\text{secat}(f) = \text{secat}(f')$.

Demostración.

Distinguiamos tres posibles casos:

i) Si $\beta = \text{id}_Y$, entonces $Y = Y'$ y se tendría el diagrama de la Proposición 2.12, por lo que $\text{secat}(f') \leq \text{secat}(f)$. Tomando un inverso homotópico de α , se tendría de nuevo un diagrama similar al de la Proposición 2.12 intercambiando X con X' , por lo que $\text{secat}(f) \leq \text{secat}(f')$. Se concluye que $\text{secat}(f) = \text{secat}(f')$.

ii) Si $\alpha = \text{id}_X$, entonces $X = X'$ y el diagrama

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ f \swarrow & & \searrow f' \\ Y & \xrightarrow{\beta} & Y' \end{array}$$

es homotópicamente conmutativo. Veamos en primer lugar que $\text{secat}(f) \leq \text{secat}(f')$.

Si $\text{secat}(f') = \infty$, entonces este caso es trivial. Si $\text{secat}(f') = n < \infty$, entonces se tiene que $Y' = \bigcup_{i=0}^n U_i$ con $s_i : U_i \rightarrow X$ sección continua tal que $f' \circ s_i \simeq \text{inc}_{U_i}$. Construimos entonces los conjuntos $V_i = \beta^{-1}(U_i)$ abiertos en Y . Es claro que $Y = \bigcup_{i=0}^n V_i$. Se tiene entonces el cuadrado estrictamente conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} V_i & \xrightarrow{\text{inc}_{V_i}} & Y \\ \beta|_{V_i} \downarrow & & \downarrow \beta \\ U_i & \xrightarrow{\text{inc}_{U_i}} & Y' \end{array}$$

Tomando ahora $\sigma_i := s_i \circ (\beta|_{V_i}) : V_i \rightarrow X$, veremos que existe una homotopía $f \circ \sigma_i \simeq \text{inc}_{V_i}$. En efecto: $\beta \circ (f \circ \sigma_i) = (\beta \circ f) \circ (s_i \circ (\beta|_{V_i})) \simeq f' \circ s_i \circ (\beta|_{V_i}) \simeq \text{inc}_{U_i} \circ (\beta|_{V_i}) = \beta \circ \text{inc}_{V_i}$. Componiendo por la izquierda con un inverso homotópico de β , se tiene que $f \circ \sigma_i \simeq \text{inc}_{V_i}$ y se concluye que $\text{secat}(f) \leq n = \text{secat}(f')$. Como β es una equivalencia de homotopía, podemos razonar análogamente con su inverso homotópico para tener un triángulo similar y concluiríamos que $\text{secat}(f') \leq \text{secat}(f)$.

iii) Por último, el caso general, utilizando los apartados i) y ii) anteriores:

$$\text{secat}(f) = \text{secat}(\beta \circ f) = \text{secat}(f' \circ \alpha) = \text{secat}(f'). \quad \blacksquare$$

Vistos ambos resultados, estamos en condiciones de dar una definición alternativa de la complejidad topológica. En efecto, dado X un espacio topológico, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{C_X} & X^{[0,1]} \\ & \searrow \Delta_X & \swarrow \pi \\ & X \times X & \end{array}$$

siendo $C_X : X \rightarrow X^{[0,1]}$ la aplicación que lleva a cada punto el camino constante en ese punto y $\Delta_X : X \rightarrow X \times X$ la aplicación diagonal, definida por $\Delta_X(x) = (x, x)$. Es conocido que C_X es equivalencia de homotopía (un inverso homotópico es $ev_0 : X^{[0,1]} \rightarrow X$, la evaluación en $t = 0$).

Concluimos de la Proposición 2.13 el siguiente resultado:

Corolario 2.14. $TC(X) = \text{secat}(\Delta_X)$.

Demostraremos ahora que la complejidad topológica es subaditiva respecto del producto de espacios, es decir que dados dos espacios topológicos X e Y , se tiene, bajo ciertas condiciones topológicas, que $TC(X \times Y) \leq TC(X) + TC(Y)$. Para alcanzar tal objetivo, recordemos algunas nociones necesarias para definir una partición de la unidad.

i) Si X es un espacio topológico y $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ es una familia arbitraria de subconjuntos de X , se dice que \mathcal{A} es *localmente finita* si para todo $x \in X$ existe U entorno abierto de x que interseca solo a un número finito de elementos de \mathcal{A} .

ii) Un espacio topológico X se dirá que es *paracompacto* si todo recubrimiento abierto de X tiene un refinamiento abierto y localmente finito que recubre a X .

iii) Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real, su *soporte* $\text{sop}(f)$ es la clausura del conjunto de valores para los que la función no se anula.

iv) Dados X un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de X , una *partición de la unidad subordinada a \mathcal{U}* es una colección de aplicaciones reales continuas $\mathcal{F} = \{f_i : X \rightarrow \mathbb{R}\}_{i \in I}$ verificando:

- Para cada $x \in X$ y para cada $i \in I$, se tiene que $0 \leq f_i(x) \leq 1$.
- Para cada $i \in I$, se tiene que $\text{sop}(f_i) \subset U_i$.
- La familia $\{\text{sop}(f_i)\}_{i \in I}$ es localmente finita.
- Para cada $x \in X$ se tiene que $\sum_{i \in I} f_i(x) = 1$.

Se tiene el siguiente resultado que asegura la existencia de particiones de la unidad en espacios de Hausdorff y paracompactos. La demostración puede encontrarse, por ejemplo, en [24, Teorema 41.7].

Teorema 2.15. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff y paracompacto. Entonces, para todo $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ recubrimiento abierto de X , existe una partición de la unidad subordinada a \mathcal{U} .*

Con todo esto, podemos acotar la complejidad topológica de un espacio producto mediante la suma de las complejidades topológicas de sus factores. Hacemos notar que todo espacio metrizable es de Hausdorff y paracompacto [24, Teorema 41.4 y Ej. 2 Pág. 317].

Proposición 2.16. *Sean X e Y espacios topológicos metrizables. Entonces,*

$$\text{TC}(X \times Y) \leq \text{TC}(X) + \text{TC}(Y).$$

Demostración.

Si $\text{TC}(X) = \infty$ o $\text{TC}(Y) = \infty$, entonces la demostración acaba. Si $\text{TC}(X) = n < \infty$ y $\text{TC}(Y) = m < \infty$, entonces se tiene que $X \times X = \bigcup_{i=0}^n U_i$ con U_i abierto y con algoritmo local $s_i : U_i \rightarrow X^{[0,1]}$. También $Y \times Y = \bigcup_{j=0}^m V_j$ con V_j abierto y con algoritmo local $\sigma_j : V_j \rightarrow Y^{[0,1]}$, para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ y para cada $j \in \{0, \dots, m\}$. Buscamos un recubrimiento de $(X \times Y)^2$ con algoritmos locales continuos.

Como X e Y son metrizables, entonces $X \times X$ e $Y \times Y$ también son metrizables y, en consecuencia, son de Hausdorff y paracompactos. En virtud del Teorema 2.15, podemos tomar $\{f_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}\}_{i=0}^n$ y $\{g_j : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}\}_{j=0}^m$ particiones de la unidad subordinadas a $\{U_i\}_{i=0}^n$ y a $\{V_j\}_{j=0}^m$ respectivamente. Tomamos entonces un subconjunto no vacío en cada conjunto de índices, $S \subseteq \{0, \dots, n\}$ y $T \subseteq \{0, \dots, m\}$, y definimos el conjunto

$$W(S, T) = \{((x, y), (\bar{x}, \bar{y})) \in (X \times Y)^2 \mid f_i(x, \bar{x}) \cdot g_j(y, \bar{y}) > f_{i'}(x, \bar{x}) \cdot g_{j'}(y, \bar{y})\},$$

para todo $(i, j) \in S \times T$ y para todo $(i', j') \notin S \times T$. No es difícil comprobar que se verifican las siguientes propiedades:

i) $W(S, T)$ es abierto en $(X \times Y)^2$, ya que es antiimagen de la aplicación continua

$$\begin{aligned} (X \times Y)^2 &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (x, y, \bar{x}, \bar{y}) &\mapsto f_i(x, \bar{x}) \cdot g_j(y, \bar{y}) - f_{i'}(x, \bar{x}) \cdot g_{j'}(y, \bar{y}). \end{aligned}$$

ii) El operador W es disjunto cuando no hay relación de inclusión entre $S \times T$ y $S' \times T'$, es decir que si $S \times T \not\subseteq S' \times T'$ y $S' \times T' \not\subseteq S \times T$, entonces $W(S, T) \cap W(S', T') = \emptyset$.

iii) Para cualesquiera $(i, j) \in S \times T$, $((x, y), (\bar{x}, \bar{y})) \in W(S, T)$, se tiene que $(x, \bar{x}) \in U_i$ y $(y, \bar{y}) \in V_j$ ya que si $((x, y), (\bar{x}, \bar{y})) \in W(S, T)$, entonces $(x, \bar{x}) \in \text{sop}(f_i)$ y $(y, \bar{y}) \in \text{sop}(g_j)$.

iv) Para cualquier par de subconjuntos no vacíos de índices $S \subseteq \{0, \dots, n\}$, $T \subseteq \{0, \dots, m\}$, el operador $\partial_{S, T} : W(S, T) \rightarrow (X \times Y)^{[0,1]} = X^{[0,1]} \times Y^{[0,1]}$ dado por $\partial_{S, T}((x, y), (\bar{x}, \bar{y})) :=$

$(s_i(x, \bar{x}), \sigma_j(y, \bar{y}))$ está bien definido.

v) $\{W(S, T)\}_{S, T}$ es recubrimiento de $(X \times Y)^2$. Fijado $((x, y), (\bar{x}, \bar{y})) \in (X \times Y)^2$, tomamos

$$S = \left\{ i \in \{0, \dots, n\} \mid f_i(x, \bar{x}) = \max_{0 \leq k \leq n} f_k(x, \bar{x}) \right\},$$

$$T = \left\{ j \in \{0, \dots, m\} \mid g_j(x, \bar{x}) = \max_{0 \leq l \leq m} g_l(y, \bar{y}) \right\},$$

y entonces $((x, y), (\bar{x}, \bar{y})) \in W(S, T)$. Denotando genéricamente por $\#Z$ al cardinal de un conjunto Z , tenemos que si $2 \leq k \leq n + m + 2$, definimos $W_k = \bigcup_{(\#S) + (\#T) = k} W(S, T)$ y tenemos que $\{W_k\}_{k=2}^{n+m+2}$ es recubrimiento abierto de $(X \times Y)^2$.

Fijado k , se tiene que W_k es unión disjunta de $W(S, T)$ y tenemos, para cada $2 \leq k \leq n + m + 2$, una sección local

$$\lambda_k : W_k \subset (X \times Y)^2 \rightarrow (X \times Y)^{[0,1]},$$

$$\lambda_k|_{W(S, T)} = \partial_{S, T}.$$

Si $(\#S) + (\#T) = k = (\#S') + (\#T')$, entonces necesariamente $W(S, T) = W(S', T')$ o bien $W(S, T) \cap W(S', T') = \emptyset$.

Concluimos entonces que $\text{TC}(X \times Y) \leq n + m = \text{TC}(X) + \text{TC}(Y)$. ■

2.3. La categoría de Lusternik-Schnirelmann

La complejidad topológica está estrechamente ligada con otro invariante homotópico: la categoría de Lusternik-Schnirelmann. L. Lusternik y L. Schnirelmann [19] demostraron que, dada M una variedad diferenciable cerrada (es decir, compacta y sin borde), se tiene la desigualdad

$$1 + \text{cat}(M) \leq \text{crit}(M).$$

donde $\text{crit}(M)$ denota el número mínimo de puntos críticos para cualquier aplicación diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sobre M . Este resultado establece la acotación de un parámetro diferencial (el número de puntos críticos), por medio de un parámetro homotópico (la categoría). La categoría de Lusternik-Schnirelmann se generalizó rápidamente al contexto de los espacios topológicos (consultar [14]). Hoy en día es un tema de estudio e investigación importante en teoría de homotopía, teoría de puntos críticos y sistemas dinámicos. Para definir esta noción, comenzaremos por establecer qué es un subespacio categórico:

Definición 2.17. *Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$ subespacio de X . Diremos que A es categórico en X si la inclusión $\text{inc} : A \hookrightarrow X$ es nulhomótopa.*

Con esto podemos definir la categoría de Lusternik-Schnirelmann.

Definición 2.18. *Se define la categoría de Lusternik-Schnirelmann de un espacio topológico X (o, simplemente, categoría de X), denotado por $\text{cat}(X)$, como el menor entero no negativo n tal que existe un recubrimiento de $n+1$ abiertos categóricos en X . De no existir tal n diremos que la categoría de X es infinita y la denotaremos por $\text{cat}(X) = \infty$.*

Al igual que en el caso de la complejidad topológica, la categoría nula también caracteriza a los espacios contráctiles. Es decir, un espacio topológico X es contráctil si, y solo si, $\text{cat}(X) = 0$. Esto se deduce inmediatamente del hecho de que todo espacio contráctil está caracterizado por la nulhomotopía de su aplicación identidad.

Presentamos el primer ejemplo no trivial: la categoría de la n -esfera.

Proposición 2.19. *Si $n \geq 1$, entonces $\text{cat}(S^n) = 1$.*

Demostración.

En primer lugar tenemos que S^n no es contráctil, por lo tanto $\text{cat}(S^n) \geq 1$. Por otro lado, consideramos $U_1 := S^n \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$ y $U_2 := S^n \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\}$ abiertos en S^n . Estos abiertos son contráctiles por ser homeomorfos a \mathbb{R}^n vía la proyección estereográfica y, en consecuencia, son categóricos en S^n . Además, los abiertos recubren S^n y por lo tanto $\text{cat}(S^n) \leq 1$. ■

La categoría de Lusternik-Schnirelmann es un invariante homotópico. Para ver esto necesitamos un resultado previo.

Proposición 2.20. *Sean X e Y espacios topológicos tales que existen aplicaciones continuas $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$ con $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. Entonces, $\text{cat}(Y) \leq \text{cat}(X)$.*

Demostración.

Si $\text{cat}(X) = \infty$, entonces la demostración acaba. Si $\text{cat}(X) = n < \infty$, entonces $X = \bigcup_{i=0}^n U_i$ con U_i abierto y categórico en X para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. Si definimos $V_i := g^{-1}(U_i)$, este conjunto será abierto en Y por la continuidad de g . Es inmediato comprobar que $\{V_i\}_{i=0}^n$ recubre a $g^{-1}(X)$. Veamos ahora que para cada $i \in \{0, \dots, n\}$, se tiene que V_i es categórico en Y . En efecto, como U_i es categórico en X , sabemos que existe una homotopía $H_i : U_i \times [0, 1] \rightarrow X$ verificando $H_i(x, 0) = x$ y $H_i(x, 1) = x_i$, para todo $x \in U_i$ y para cierto punto $x_i \in X$. Consideramos $F : \text{id}_Y \simeq f \circ g$ y construimos ahora la homotopía $G_i : V_i \times [0, 1] \rightarrow Y$ dada por:

$$G_i(y, t) = \begin{cases} F(y, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f(H_i(g(y), 2t - 1)), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La continuidad de G_i está garantizada por el Lema 1.3. Por último, es claro que $G_i(y, 0) = y$ y $G_i(y, 1) = f(x_i)$. Concluimos que V_i es categórico en Y . ■

Con esto, establecemos la invariancia homotópica de la categoría.

Corolario 2.21. *Dos espacios homotópicamente equivalentes tienen la misma categoría.*

Presentamos a continuación un lema técnico que nos permitirá controlar las nulhomotopías mediante un punto distinguido prefijado.

Lema 2.22. *Sean X espacio topológico conexo por caminos y $x_0 \in X$ fijo. Si $A \subset X$, entonces A es categórico en X si, y solo si, la inclusión $i : A \hookrightarrow X$ es homótopa a la aplicación constante en x_0 .*

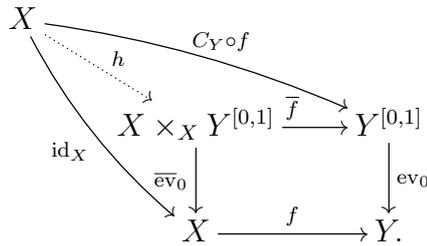
Demostración.

Supongamos que A es categórico en X . Entonces existen $y_0 \in X$ y $F : A \times [0, 1] \rightarrow X$ homotopía verificando $F(a, 0) = a$ y $F(a, 1) = y_0$. Como X es conexo por caminos, sabemos que existe $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ camino en X verificando $\alpha(0) = y_0$ y $\alpha(1) = x_0$. Definimos ahora $G : A \times [0, 1] \rightarrow X$ como

$$G(a, t) = \begin{cases} F(a, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \alpha(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

cuya continuidad está garantizada por el Lema 1.3 y verifica $G(a, 0) = a$ y $G(a, 1) = x_0$. Concluimos que la inclusión i es nulhomótopa. El recíproco es trivial. ■

Al igual que la complejidad topológica, la categoría de Lusternik-Schnirelmann puede verse como un caso particular de categoría seccional de una determinada fibración. Para ver esto, debemos saber que, en general, toda aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ se puede factorizar por una equivalencia de homotopía seguida de una fibración. En efecto, consideremos el pullback de una aplicación $f : X \rightarrow Y$ con la evaluación en el cero,



Se induce una única aplicación continua $h : X \rightarrow X \times_Y Y^{[0,1]}$ tal que $\bar{ev}_0 \circ h = \text{id}_X$ y $\bar{f} \circ h = C_Y \circ f$; es decir $h(x) = (x, C_{f(x)})$ para cada $x \in X$. Por otro lado, tomando la aplicación continua $p : X \times_Y Y^{[0,1]} \rightarrow Y$ como la composición $p := ev_1 \circ \bar{f}$, es decir, $p(x, \alpha) = \alpha(1)$. Entonces h es equivalencia de homotopía, p es fibración y $f = p \circ h$. Para más detalles ver, por ejemplo, [29, Teorema 9, Pág. 99].

En particular, fijado un punto $x_0 \in X$, podemos realizar la construcción anterior con respecto a la aplicación constante $\{*\} \rightarrow X$ en el punto x_0 y obtenemos una factorización

$$\begin{array}{ccc} \{*\} & \xrightarrow{C_{x_0}} & X \\ & \searrow \cong & \nearrow p \\ & & PX \end{array}$$

siendo $PX = \{\alpha \in X^{[0,1]} \mid \alpha(0) = x_0\}$, que es contráctil y p la fibración $p : PX \rightarrow X$ dada por $p(\alpha) := \alpha(1)$. Esta fibración se conoce como *fibración de caminos*.

Presentamos así, la relación entre categoría y categoría seccional:

Proposición 2.23. *Sean X un espacio topológico conexo por caminos. Entonces,*

$$\text{cat}(X) = \text{secat}(\{*\} \rightarrow X) = \text{secat}(p : PX \rightarrow X).$$

Demostración.

Si X es conexo por caminos, en virtud del Lema 2.22, un subespacio $A \subseteq X$ es categórico si y solo si la inclusión $\text{inc} : A \hookrightarrow X$ es homótopa a la aplicación constante C_{x_0} o, equivalentemente, como se indica en (1.1), existe una aplicación $s : A \rightarrow PX$ continua tal que $p \circ s = \text{inc}$, es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\text{inc}} & X \\ & \searrow s & \nearrow p \\ & & PA \end{array}$$

Como p es fibración, tenemos que $\text{cat}(X) = \text{secat}(p) = \text{secat}(\{*\} \rightarrow X)$. ■

A continuación, estableceremos el dominio de la complejidad topológica sobre la categoría, lo que supone una primera cota inferior para la complejidad topológica.

Proposición 2.24. *Sea X un espacio topológico conexo por caminos. Entonces,*

$$\text{cat}(X) \leq \text{TC}(X).$$

Demostración.

Si $\text{TC}(X) = \infty$, entonces la demostración acaba. Si $\text{TC}(X) = n < \infty$, entonces $X \times X = \bigcup_{i=0}^n U_i$ con U_i abierto y con s_i algoritmo local de U_i para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. Fijamos $x_0 \in X$ y definimos el conjunto $V_i^{x_0} := \{x \in X \mid (x, x_0) \in U_i\}$, que es abierto en X puesto que es preimagen de U_i mediante la función continua $j_{x_0} : X \rightarrow X \times X$

definida por $j_{x_0}(x) = (x, x_0)$. Es claro que $X = \bigcup_{i=0}^n V_i$. Veamos que si $V_i^{x_0}$ es no vacío, entonces es categórico en X . En efecto, definimos una homotopía $H : V_i^{x_0} \times [0, 1] \rightarrow X$ dada por $H(x, t) = s_i(x, x_0)(t)$ que está bien definida, es continua por el Teorema 1.2 y verifica $H(x, 0) = s_i(x, x_0)(0) = x$ y $H(x, 1) = s_i(x, x_0)(1) = x_0$. Tenemos entonces que $\text{cat}(X) \leq n = \text{TC}(X)$. ■

Veamos ahora un caso relevante en el que se alcanza la igualdad: los grupos topológicos. Recordemos que un grupo topológico es un grupo algebraico que tiene estructura de espacio topológico, con ley de composición interna e inversión continuas.

Proposición 2.25. *Si G un grupo topológico conexo por caminos, entonces*

$$\text{TC}(G) = \text{cat}(G).$$

Demostración.

Veremos que $\text{cat}(G) \geq \text{TC}(G)$. Supongamos que \cdot es la operación y e es el elemento neutro de G , y que tenemos $U \subseteq G$ con U abierto categórico en G . Como G es conexo por caminos, existe, por el Lema 2.22, una homotopía $H : U \times [0, 1] \rightarrow G$ verificando $H(x, 0) = x$ y $H(x, 1) = e$. Definimos ahora el conjunto

$$V := \{(x, y) \in G \times G \mid x \cdot y^{-1} \in U\},$$

que es abierto en $G \times G$ por ser preimagen de U mediante la aplicación continua $\Phi : G \times G \rightarrow G$ definida como $\Phi(x, y) = x \cdot y^{-1}$.

Construimos la sección local sobre V haciendo uso de la ley de composición interna en G . Se tiene que la aplicación $s : V \rightarrow G^{[0,1]}$ dada por $s(x, y)(t) = H(x \cdot y^{-1}, y) \cdot y$, que está bien definida, es continua por ser composición de aplicaciones continuas y verifica $s(x, y)(0) = H(x \cdot y^{-1}, 0) \cdot y = (x \cdot y^{-1}) \cdot y = x$ y $s(x, y)(1) = H(x \cdot y^{-1}, 1) \cdot y = e \cdot y = y$. Luego, s es algoritmo local definido en V . Con este razonamiento para recubrimientos abiertos llegamos a que $\text{cat}(G) \geq \text{TC}(G)$ y, en virtud de la Proposición 2.24, se concluye que $\text{cat}(G) = \text{TC}(G)$. ■

Un grupo topológico se dice que es *de Lie* si tiene estructura de variedad diferenciable con ley de composición interna e inversión diferenciables. Este tipo de grupos, al ser variedades, son localmente conexos por caminos y por lo tanto, las nociones de conexidad y conexidad por caminos son equivalentes en este contexto. Por consiguiente, tenemos un corolario.

Corolario 2.26. *Si G es un grupo de Lie conexo, entonces $\text{TC}(G) = \text{cat}(G)$.*

Veamos ahora que, al igual que la complejidad topológica, la categoría es subaditiva con respecto al producto de espacios. Para ello, debemos recordar las nociones de normalidad

y normalidad completa.

Recordemos que un espacio topológico X es *normal* si para cualesquiera dos subespacios cerrados disjuntos existen dos abiertos disjuntos tales que cada cerrado está contenido en su respectivo abierto. La normalidad es una propiedad topológica (consultar [24, Pág. 199]) pero no hereditaria. Se dice que X es *completamente normal* si todo subespacio de X es normal. Los CW-complejos y los espacios metrizablees son espacios completamente normales (ver [9, Teoremas 5.1 y 5.2]).

Además, para conseguir la acotación, necesitamos la noción de sucesión categórica y dos lemas técnicos:

Definición 2.27. *Sea X un espacio topológico. Se llama sucesión categórica de longitud $k + 1$ a una colección O_0, \dots, O_{k+1} de abiertos de X verificando*

- i) $O_0 = \emptyset, O_{k+1} = X,$
- ii) $O_{i+1} \setminus O_i \subseteq U_{i+1}$ con U_{i+1} abierto categórico en X para cada $i \in \{0, \dots, k\}.$

Lema 2.28. *Sea X un espacio topológico. Entonces $\text{cat}(X) \leq k$ si, y solo si, X admite una sucesión categórica de longitud $k + 1.$*

Demostración.

Si X presenta una sucesión categórica $\{O_i\}_{i=0}^{k+1}$, entonces para cada $i \in \{0, \dots, k\}$ se tiene $O_{i+1} \setminus O_i \subseteq U_{i+1}$ con U_{i+1} abierto categórico en X . Como $\{O_{i+1} \setminus O_i\}_{i=0}^k$ recubre X , entonces $\{U_i\}_{i=1}^{k+1}$ también recubre X y U_i es categórico para todo $i \in \{1, \dots, k + 1\}$ y concluimos que $\text{cat}(X) \leq k$. Recíprocamente, si $\text{cat}(X) \leq k$, entonces $X = \bigcup_{i=1}^{k+1} U_i$ con U_i abierto y categórico en X para todo $i \in \{1, \dots, k + 1\}$. Si definimos la sucesión $O_0 = \emptyset, O_m = \bigcup_{i=1}^m U_i, 1 \leq m \leq k + 1$ es claro que O_i es abierto en X y que $O_{i+1} \setminus O_i \subseteq U_{i+1}$ para todo $i \in \{0, \dots, k\}$ por construcción. ■

Lema 2.29. *Sea X un espacio topológico conexo por caminos y sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de abiertos categóricos en X y disjuntos dos a dos. Entonces, la unión $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ es categórica en $X.$*

Demostración.

Como A_i es abierto y categórico para cada $i \in I$, entonces existe una homotopía $F_i : A_i \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $F_i(a, 0) = a$ y $F_i(a, 1) = x_0$ para cada $i \in I$ con $x_0 \in X$ fijo. Basta definir la homotopía $F : A \times [0, 1] \rightarrow X$ por restricción al abierto $A_i \times [0, 1]$ de manera que $F|_{A_i \times [0, 1]} = F_i$. La continuidad de F estaría garantizada por el Lema 1.3 para abiertos. ■

Estamos en condiciones de acotar la categoría de los espacios producto.

Teorema 2.30. Sean X e Y espacios topológicos tales que $X \times Y$ es completamente normal. Entonces,

$$\text{cat}(X \times Y) \leq \text{cat}(X) + \text{cat}(Y).$$

Demostración.

Si $\text{cat}(X) = \infty$, o bien $\text{cat}(Y) = \infty$, entonces la demostración acaba.

Supongamos que $\text{cat}(X) = n < \infty$ y $\text{cat}(Y) = m < \infty$. En virtud de la Proposición 2.28, podemos tomar sucesiones categóricas respectivas de X e Y ,

$$O \equiv O_0 \subseteq O_1 \subseteq \cdots \subseteq O_{n+1}, \quad P \equiv P_0 \subseteq P_1 \subseteq \cdots \subseteq P_{m+1}$$

que verifican $O_{i+1} \setminus O_i \subseteq U_{i+1}$ con U_i abierto categórico en X para todo $i \in \{0, \dots, n\}$ y $P_{j+1} \setminus P_j \subseteq V_{j+1}$ con V_j abierto categórico en Y para todo $j \in \{0, \dots, m\}$.

Buscamos una sucesión categórica de longitud finita $\{Q_r\}_{r=0}^k$ para $X \times Y$. Si definimos $Q_1 = O_1 \times P_1$, $Q_2 = (O_1 \times P_2) \cup (O_2 \times P_1)$, $Q_3 = (O_1 \times P_3) \cup (O_2 \times P_2) \cup (O_3 \times P_1)$, \dots y recursivamente,

$$Q_r = \bigcup_{j=1}^r (O_j \times P_{r+1-j}),$$

se tiene la sucesión $\emptyset = Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq \cdots \subseteq Q_{n+m+1} = X \times Y$.

Observación 2.31. En esta sucesión, $O_i = \emptyset$ si $i \geq n + 2$ y $P_j = \emptyset$ si $j \geq m + 2$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $r = j \geq i$. Es fácil ver que

$$Q_{j+1} \setminus Q_j = \bigcup_{k=1}^{j+1} ((O_k \setminus O_{k-1}) \times (P_{j+2-k} \setminus P_{j+1-k})).$$

Como $(O_k \setminus O_{k-1}) \times (P_{j+2-k} \setminus P_{j+1-k}) \subseteq U_k \times V_{j+2-k}$ abierto y categórico en $X \times Y$, restaría ver que su unión $\bigcup_{k=1}^{j+1} (U_k \times V_{j+2-k})$ es abierta y categórica en $X \times Y$. Dado que $j + 2 - k$ decrece con el incremento de k y las sucesiones O y P están anidadas, entonces, necesariamente

$$\begin{aligned} ((O_k \setminus O_{k-1}) \times (P_{j+2-k} \setminus P_{j+1-k})) \cap ((O_l \setminus O_{l-1}) \times (P_{j+2-l} \setminus P_{j+1-l}))^c &= \emptyset, \\ ((O_k \setminus O_{k-1}) \times (P_{j+2-k} \setminus P_{j+1-k}))^c \cap ((O_l \setminus O_{l-1}) \times (P_{j+2-l} \setminus P_{j+1-l})) &= \emptyset, \end{aligned}$$

para cualquier $k \neq l$. Ahora, como $X \times Y$ es completamente normal, todo subespacio de $X \times Y$ es normal, luego existe A_k entorno abierto de $(O_k \setminus O_{k-1}) \times (P_{j+2-k} \setminus P_{j+1-k})$ y existe B_l entorno abierto $(O_l \setminus O_{l-1}) \times (P_{j+2-l} \setminus P_{j+1-l})$ verificando $A_k \cap B_l = \emptyset$. Entonces $A_k \cap (U_k \times V_{j+2-k})$ es un entorno abierto y categórico de $(O_k \setminus O_{k-1}) \times (P_{j+2-k} \setminus P_{j+1-k})$, mientras que $B_l \cap (U_l \times V_{j+2-l})$ es un entorno abierto y categórico de $(O_l \setminus O_{l-1}) \times (P_{j+2-l} \setminus P_{j+1-l})$

para cualquier $k \neq l$.

Es claro que $(A_k \cap (U_k \times V_{j+2-k})) \cap (B_l \cap (U_l \times V_{j+2-l})) = \emptyset$, por lo que, aplicando el Lema 2.29, se tiene que la unión $(A_k \cap (U_k \times V_{j+2-k})) \cup (B_l \cap (U_l \times V_{j+2-l}))$ también es categórica. Con esto, la unión

$$((O_k \setminus O_{k-1}) \times (P_{j+2-k} \setminus P_{j+1-k})) \cup ((O_l \setminus O_{l-1}) \times (P_{j+2-l} \setminus P_{j+1-l}))$$

está contenida en un abierto categórico. Repitiendo el proceso, es fácil ver que $Q_{j+1} \setminus Q_j$ está contenido en un abierto categórico para todo $j \in \{0, \dots, m\}$, por lo que la sucesión $Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq \dots \subseteq Q_{n+m+1}$ es categórica en $X \times Y$ y aplicando de nuevo el Lema 2.28, concluimos que $\text{cat}(X \times Y) \leq n + m = \text{cat}(X) + \text{cat}(Y)$. ■

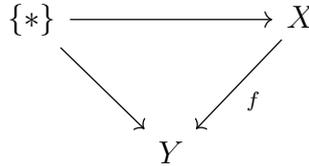
Observación 2.32. Como todo espacio metrizable es completamente normal, se tiene en particular que $\text{cat}(X \times Y) \leq \text{cat}(X) + \text{cat}(Y)$ para X e Y espacios metrizables.

Este resultado aportará dos cotas (superior e inferior) para la complejidad topológica de un espacio. Necesitamos un lema previo.

Lema 2.33. *Sea $f : X \rightarrow Y$ continua con Y conexo por caminos. Entonces, $\text{secat}(f) \leq \text{cat}(Y)$. Si además X es contráctil, entonces $\text{secat}(f) = \text{cat}(Y)$.*

Demostración.

El triángulo



es homotópicamente conmutativo ya que Y es conexo por caminos. Luego, por la Proposición 2.12, se tiene que $\text{secat}(f) \leq \text{secat}(\{*\} \rightarrow Y) = \text{cat}(Y)$. Además, si X es contráctil, se tiene que $\{*\} \rightarrow X$ es equivalencia de homotopía y se concluye, por la Proposición 2.13, que $\text{secat}(f) = \text{cat}(Y)$. ■

Con este resultado, deducimos que

$$\text{TC}(X) = \text{secat}(\pi : X^{[0,1]} \rightarrow X \times X) \leq \text{cat}(X \times X)$$

y aplicando la Proposición 2.24, tenemos que $\text{cat}(X) \leq \text{TC}(X) \leq \text{cat}(X \times X)$. En caso de ser $X \times X$ completamente normal, en virtud del Teorema 2.30, quedaría

$$\text{cat}(X) \leq \text{TC}(X) \leq 2 \text{cat}(X).$$

Así, podemos establecer dos cotas (una superior y otra inferior) de la complejidad topológica bajo la condición de normalidad completa del producto.

Corolario 2.34. *Sea X un espacio topológico conexo por caminos tal que $X \times X$ es completamente normal. Entonces, $\text{cat}(X) \leq \text{TC}(X) \leq 2 \text{cat}(X)$.*

Concluimos que conocer la categoría de un espacio, nos aporta dos cotas que controlan la complejidad topológica del mismo.

Finalizamos este capítulo estudiando otra relación entre la complejidad topológica y las fibraciones.

Teorema 2.35. *Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración con B conexo por caminos y sea $F = p^{-1}(\{b_0\})$ la fibra de p sobre el punto $b_0 \in B$. Entonces*

$$\text{TC}(E) \leq (\text{cat}(B \times B) + 1) \cdot (\text{TC}(F) + 1) - 1.$$

Demostración.

Si $\text{cat}(B \times B) = \infty$ o bien $\text{TC}(F) = \infty$, entonces la demostración acaba. Supongamos pues que $\text{cat}(B \times B) = k < \infty$ y $\text{TC}(F) = l < \infty$.

Como $\text{cat}(B \times B) = k$, entonces $B \times B = \bigcup_{i=0}^k U_i$ con U_i abierto categórico en $B \times B$ y dado que B es conexo por caminos, por la Proposición 2.22, para cada $i \in \{0, \dots, k\}$ existe una homotopía $H_i : U_i \times [0, 1] \rightarrow B \times B$ verificando $H_i(x, y, 0) = (x, y)$ y $H_i(x, y, 1) = (b_0, b_0)$ para cualquier $(x, y) \in U_i$. De modo que definiendo $\widehat{H}_i : U_i \rightarrow (B \times B)^{[0,1]}$ dada por

$$\widehat{H}_i(x, y)(t) := H_i(x, y, t) = (f_1(x, y)(t), f_2(x, y)(t))$$

para ciertas aplicaciones continuas $f_1, f_2 : U_i \rightarrow B^{[0,1]}$ tales que $f_1(x, y)(0) = x$, $f_1(x, y)(1) = b_0$, $f_2(x, y)(0) = y$ y $f_2(x, y)(1) = b_0$. Dado que $p : E \rightarrow B$ es fibración, entonces por la Proposición 1.7, podemos tomar la aplicación continua $\lambda : E \times_B B^{[0,1]} \rightarrow E^{[0,1]}$ que verifica $\lambda(e, \alpha)(0) = e$ y $p \circ \lambda(e, \alpha) = \alpha$. Considerando ahora $p \times p : E \times E \rightarrow B \times B$, definimos

$$t_i : (p \times p)^{-1}(U_i) \rightarrow F \times F,$$

$$t_i(e, e') = (\lambda(e, f_1(p(e), p(e')))(1), \lambda(e', f_2(p(e), p(e')))(1)),$$

que está bien definida y es continua. Es claro que $\{(p \times p)^{-1}(U_i)\}_{i=0}^k$ recubre a $E \times E$. Ahora, como $\text{TC}(F) = l$, se tiene que $F \times F = \bigcup_{j=0}^l V_j$ con V_j abierto en $F \times F$ y con sección local $z_j : V_j \rightarrow F^{[0,1]}$. Además, fijado $i \in \{0, \dots, k\}$, la familia $\{t_i^{-1}(V_j)\}_{j=0}^l$ recubre a $(p \times p)^{-1}(U_i)$, por lo tanto, $\{t_i^{-1}(V_j)\}_{\substack{0 \leq i \leq k \\ 0 \leq j \leq l}}$ recubre a $E \times E$. Si llamamos

$$A_1(e, e') := \lambda(e, f_1(p(e), p(e'))) \text{ y } A_2(e, e') := \lambda(e', f_2(p(e), p(e'))),$$

podemos definir las secciones locales $\sigma_{ij} : t_i^{-1}(V_j) \rightarrow E^{[0,1]}$ como

$$\sigma_{ij}(e, e') = (A_1(e, e') * z_j(A_1(e, e')(1), A_2(e, e')(1))) * \overline{A_2}(e, e'),$$

donde $*$ es la multiplicación usual de caminos y $\overline{A_2}(e, e')$ es el camino inverso de $A_2(e, e')$. Se concluye que $\text{TC}(E) + 1 \leq (k + 1)(l + 1) = (\text{cat}(B \times B) + 1) \cdot (\text{TC}(F) + 1)$. \blacksquare

2.4. La nilpotencia del ideal de los divisores de cero

A la hora de acotar la complejidad topológica de un espacio, encontrar una cota superior es factible con teoría de homotopía: basta encontrar un número de abiertos con las secciones locales continuas deseadas. Sin embargo, con la definición dada por recubrimientos abiertos, encontrar una cota inferior es mucho más complicado.

Es necesario buscar otro tipo de técnicas para determinar una cota inferior de la complejidad topológica. Dichas técnicas entran en el ámbito de la topología algebraica y, para definir las, utilizaremos ciertas nociones de teoría de cohomología.

Dado que ya hemos introducido el producto cup y sus propiedades en el Capítulo 1, estamos en condiciones de abordar la acotación inferior de la complejidad topológica de un espacio. Comenzaremos introduciendo la noción de nilpotencia de un anillo para luego aplicarla convenientemente en el R -álgebra graduada de cohomología.

Definición 2.36. *Sea A un anillo (no necesariamente graduado). Se llama índice de nilpotencia de A y denotamos $\text{nil } A$, al menor entero positivo n tal que cualquier producto de longitud $n + 1$ es nulo. De no existir tal n , diremos que el índice de nilpotencia de A es infinito y lo denotamos por $\text{nil } A = \infty$.*

Veamos dónde es conveniente aplicar esta noción para obtener cotas de la complejidad topológica.

Sean R un anillo y $f : E \rightarrow B$ una aplicación continua. Consideramos el homomorfismo inducido de R -álgebras

$$f^* : H^\bullet(B; R) \rightarrow H^\bullet(E; R)$$

con estructura definida en la ecuación (1.3). Tenemos que $\text{Ker}(f^*)$ es un ideal bilátero en $H^\bullet(B; R)$. En particular, dicho núcleo es un subanillo de $H^\bullet(B; R)$, por lo que es posible hablar de su nilpotencia $\text{nil } \text{Ker}(f^*)$.

Necesitamos el siguiente lema:

Lema 2.37. *Sean R un anillo, X un espacio topológico y $U_i \subseteq X$ abierto para cada $i \in \{0, 1, \dots, m\}$. Si consideramos las inclusión i -ésima $q_i : (X, \emptyset) \rightarrow (X, U_i)$ y la inclusión $q : (X, \emptyset) \rightarrow (X, \bigcup_{i=0}^m U_i)$, entonces*

$$q^*(\alpha_0 \smile \alpha_1 \smile \dots \smile \alpha_m) = q_0^*(\alpha_0) \smile q_1^*(\alpha_1) \smile \dots \smile q_m^*(\alpha_m)$$

donde $\alpha_i \in H^\bullet(X, U_i; R)$ y $\alpha_0 \smile \dots \smile \alpha_m \in H^\bullet(X, \bigcup_{i=0}^m U_i; R)$.

Demostración.

Si $m = 1$, consideramos el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{q} & (X, U_0 \cup U_1) \\
 \Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \\
 X \times X & \xrightarrow{q_0 \times q_1} & (X, U_0) \times (X, U_1)
 \end{array} \tag{2.2}$$

donde $\Delta(x) = (x, x)$ y $(X, U_0) \times (X, U_1) = (X \times U_0) \cup (X \times U_1)$. Aplicando cohomología y teniendo en cuenta la ecuación (1.7) generalizada en parejas para el producto cup, el resultado se sigue inductivamente. ■

Teorema 2.38. Sean R un anillo conmutativo y unitario y $f : E \rightarrow B$ una aplicación continua. Entonces,

$$\text{nil Ker}(f^*) \leq \text{secat}(f).$$

Demostración.

Si $\text{secat}(f) = \infty$, la demostración acaba. Si $\text{secat}(f) = n < \infty$, entonces $B = \bigcup_{i=0}^n U_i$ con U_i abierto y el triángulo

$$\begin{array}{ccc}
 U_i & \xleftarrow{\text{inc}_{U_i}} & B \\
 s_i \searrow & & \nearrow f \\
 & E, &
 \end{array} \tag{2.3}$$

homotópicamente conmutativo para cada $i \in \{0, \dots, n\}$. Tomemos $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \text{Ker}(f^*)$ y veamos que $\alpha_0 \smile \dots \smile \alpha_n = 0$. Consideramos el par (B, U_i) , la i -ésima inclusión canónica $q : (B, \emptyset) \rightarrow (B, U_i)$ y un $\alpha_i \in \text{Ker}(f^*) \subseteq H^\bullet(B; R)$ arbitrario, que se puede ver, sin pérdida de generalidad, como elemento homogéneo de grado m_i , es decir, $\alpha_i \in H^{m_i}(B; R)$ con $m_i \geq 0$. Consideramos también la sucesión exacta en cohomología asociada a la pareja (U, B_i) , indicada en el tercer apartado del Teorema 1.9,

$$\dots \rightarrow H^{m_i}(B, U_i; R) \xrightarrow{q_i^*} H^{m_i}(B; R) \xrightarrow{\text{inc}_i^*} H^{m_i}(U_i; R) \rightarrow \dots$$

Del triángulo (2.3), se tiene que $\text{inc}_{U_i} \simeq f \circ s_i$ y como consecuencia de la invariancia homotópica indicada en el apartado ii) del Teorema 1.9, se tiene que $(\text{inc}_i)^* = (f \circ s_i)^* = s_i^* \circ f^*$. Aplicando la inducida por la i -ésima inclusión, $(\text{inc}_i)^*(\alpha_i) = s_i^*(f^*(\alpha_i)) = s_i^*(0) = 0$. Luego, por el apartado iii) del Teorema 1.9, existe $\bar{\alpha}_i \in H^{m_i}(B, U_i; R)$ verificando que $q_i^*(\bar{\alpha}_i) = \alpha_i$. Por lo tanto, aplicando el Lema 2.37,

$$\alpha_0 \smile \dots \smile \alpha_n = q_0^*(\bar{\alpha}_0) \smile \dots \smile q_n^*(\bar{\alpha}_n) = q^*(\bar{\alpha}_0 \smile \dots \smile \bar{\alpha}_n) = q^*(0) = 0.$$

La penúltima igualdad se obtiene dado que, para cada $p \geq 0$,

$$\bar{\alpha}_0 \smile \dots \smile \bar{\alpha}_n \in H^{\sum_{i=0}^n m_i}(B, \bigcup_{i=0}^n U_i; R) = H^{\sum_{i=0}^n m_i}(B, B; R) = \{0\}. \quad \blacksquare$$

Como consecuencia inmediata, tenemos el dominio de la categoría sobre la nilpotencia de la cohomología reducida.

Observación 2.39. Recordemos que dada la aplicación continua $\{*\} \rightarrow X$ y su homomorfismo de anillos asociado $H^\bullet(X; R) \rightarrow H^\bullet(\{*\}; R)$, se define la *cohomología reducida* de X con coeficientes en R como

$$\tilde{H}^\bullet(X; R) := \text{Ker}(H^\bullet(X; R) \rightarrow H^\bullet(\{*\}; R)),$$

y dado que $H^0(\{*\}; R) = R$ y $H^p(\{*\}; R) = 0$ para todo $p \neq 0$, entonces

$$\tilde{H}^p(X; R) = \begin{cases} \text{Ker}(H^0(X; R) \rightarrow R), & p = 0, \\ H^p(X; R), & p > 0. \end{cases}$$

En general, $H^0(X; R) \cong \prod_i R$ con i copias de R como componentes conexas por caminos presente X . En particular, si X es conexo por caminos, se tiene que

$$\tilde{H}^p(X; R) = \begin{cases} 0, & p = 0, \\ H^p(X; R), & p > 0. \end{cases}$$

Corolario 2.40. *Sea X un espacio topológico conexo por caminos y R un anillo conmutativo y unitario. Entonces, $\text{nil } \tilde{H}^\bullet(X; R) \leq \text{cat}(X)$.*

Demostración.

Sabemos que si X es conexo por caminos, entonces, por la Proposición 2.23, $\text{cat}(X) = \text{secat}(\{*\} \rightarrow X)$. Aplicando el Teorema 2.38, tenemos que

$$\text{nil } \text{Ker}(H^\bullet(X; R) \rightarrow H^\bullet(\{*\}, R)) \leq \text{secat}(\{*\} \rightarrow X) = \text{cat}(X).$$

Es decir, $\text{nil } \tilde{H}^\bullet(X; R) \leq \text{cat}(X)$. ■

Tenemos una primera acotación inferior de la complejidad topológica a partir de su cohomología.

Corolario 2.41. *Sean X un espacio topológico conexo por caminos y R un anillo conmutativo y unitario. Entonces, $\text{nil } \text{Ker}(\Delta^*) \leq \text{TC}(X)$, siendo $\Delta : X \rightarrow X \times X$ la aplicación diagonal de X .*

La demostración es consecuencia inmediata del Corolario 2.14 y del Teorema 2.38.

Veamos una forma alternativa de trabajar con esta cota inferior.

Definición 2.42. *La homología $H_\bullet(X; R) = \bigoplus_{p \geq 0} H_p(X; R)$ se dice que es de tipo finito si $H_p(X; R)$ está finitamente generado para todo $p \geq 0$.*

Esta condición no es muy restrictiva. Por ejemplo, usando homología celular [18, Pág. 137], no es difícil probar que todo CW-complejo (ver Apéndice) con un número finito de celdas en cada dimensión verifica esta condición para cualquier anillo R . La siguiente proposición es un resultado técnico que permitirá facilitar la cota del Corolario 2.41.

Proposición 2.43 (Teorema de Künneth para Cohomología). *Sea K un cuerpo conmutativo y sean X e Y espacios topológicos con $H_\bullet(X; K)$ o bien $H_\bullet(Y; K)$ de tipo finito. Entonces, el producto cruz*

$$\begin{aligned} \times : H^\bullet(X; K) \otimes_K H^\bullet(Y; K) &\rightarrow H^\bullet(X \times Y; K), \\ a \otimes b &\rightarrow a \times b = p_1^*(a) \smile p_2^*(b) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de K -álgebras graduadas.

La demostración de este resultado puede consultarse en [17, Proposición 29.11].

Con esto, procedemos a establecer uno de los principales resultados de la memoria.

Corolario 2.44. *Sean K un cuerpo conmutativo y X un espacio topológico tal que $H_\bullet(X; K)$ es de tipo finito. Entonces,*

$$\text{nil Ker}(\smile) \leq \text{TC}(X),$$

siendo $\smile : H^\bullet(X; K) \otimes_K H^\bullet(X; K) \rightarrow H^\bullet(X; K)$, el homomorfismo de K -álgebras graduadas dado por el producto cup.

El núcleo $I_K = \text{Ker}(\smile)$ se conoce como *ideal de los divisores de cero* de $H^\bullet(X; K)$.

Demostración.

Sabemos por (1.7) que el triángulo

$$\begin{array}{ccc} H^\bullet(X; K) \otimes_K H^\bullet(X; K) & \xrightarrow{\quad \times \quad} & H^\bullet(X \times X; K) \\ & \searrow \smile & \swarrow \Delta^* \\ & H^\bullet(X; K) & \end{array}$$

es conmutativo, siendo el producto cruz un isomorfismo de K -álgebras graduadas por la Proposición 2.43 anterior. Por tanto, $\text{nil Ker}(\Delta^*) = \text{nil Ker}(\smile)$. El resultado se sigue entonces del Corolario 2.41. ■

Utilizaremos esta cota inferior en el Capítulo 3 para calcular la complejidad topológica de los diferentes ejemplos que calculemos.

2.5. Caracterización de Ganea-Schwarz

En esta sección caracterizaremos la complejidad topológica por medio de una fibración distinguida: la fibración de Ganea-Schwarz. Esta caracterización evita el uso de recubrimientos abiertos. Necesitamos definir previamente el *join* de un número finito de espacios topológicos.

Dada una familia finita de espacios topológicos $\{X_i\}_{i=0}^n$, podemos considerar el espacio producto $\left(\prod_{i=0}^n X_i\right) \times \Delta_n$ con Δ_n el n -símplice estándar. En este espacio se establece la siguiente relación de equivalencia

$$(x_0, x_1, \dots, x_n, t_0, t_1, \dots, t_n) \sim (x'_0, x'_1, \dots, x'_n, t'_0, t'_1, \dots, t'_n)$$

si, y solo si, $t_i = t'_i$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$, o bien $x_i = x'_i$ para todo $i \in \{0, \dots, n\}$ tal que $t_i \neq 0$. Denotaremos por $t_0x_0 + \dots + t_nx_n$ a la clase de $(x_0, x_1, \dots, x_n, t_0, t_1, \dots, t_n)$. Si en la expresión $t_0x_0 + t_1x_1 + \dots + t_nx_n$ hay algún $t_i = 0$, se elimina el sumando i -ésimo. Denotaremos al espacio cociente por $X_0 * X_1 * \dots * X_n$. Se tienen la i -ésimas aplicaciones canónicas:

$$\begin{aligned} \sigma_i : X_0 * X_1 * \dots * X_n &\rightarrow [0, 1], & \rho_i : \sigma_i^{-1}((0, 1]) &\rightarrow X_i, \\ \sigma_i(t_0x_0 + \dots + t_nx_n) &= t_i. & \rho_i(t_0x_0 + \dots + t_nx_n) &= x_i. \end{aligned}$$

Definición 2.45. *Se define el join de un número finito de espacios topológicos X_0, \dots, X_n como el espacio topológico $X_0 * X_1 * \dots * X_n$ con la topología inicial respecto de las aplicaciones $\{\sigma_i\}_{i=0}^n$ y $\{\rho_i\}_{i=0}^n$, denominada topología fuerte de Milnor.*

Una subbase de la topología fuerte de Milnor viene dada por los conjuntos de la forma:

$$\begin{aligned} \{t_0x_0 + \dots + t_nx_n \in X_0 * X_1 * \dots * X_n \mid a < t_i < b, a, b \in \mathbb{R}, a < b\}, \\ \{t_0x_0 + \dots + t_nx_n \in X_0 * X_1 * \dots * X_n \mid t_i \neq 0, x_i \in U \text{ abierto en } X_i\}. \end{aligned}$$

Así, si Z es un espacio topológico y $f : Z \rightarrow X_0 * X_1 * \dots * X_n$ una aplicación, entonces f es continua si y solo si para todo $i \in \{0, \dots, n\}$, las aplicaciones $\sigma_i \circ f : Z \rightarrow [0, 1]$ y $\rho_i \circ f : f^{-1}(\sigma_i^{-1}((0, 1])) \rightarrow X_i$ son continuas.

Como es habitual en topología, los embebimientos de espacios topológicos pueden identificarse con inclusiones. Esto es, dado un embebimiento $f : X \rightarrow Y$ es decir, un homeomorfismo $f : X \rightarrow f(X)$, podremos considerar $X \subseteq Y$. De este modo, dados X_0, \dots, X_n espacios topológicos, es sencillo comprobar que cada X_j se puede ver como un subespacio cerrado del join $e_j : X_j \rightarrow X_0 * X_1 * \dots * X_n$ definida como $e_j(x) = 1 \cdot x$. Se tienen además las siguientes propiedades:

$$i) e_j(X_j) = \sigma_j^{-1}(\{1\}), \quad ii) (X_0 * X_1) * X_2 \cong X_0 * (X_1 * X_2), \quad iii) X_0 * X_1 \cong X_1 * X_0.$$

Es posible generalizar el join a una familia finita de aplicaciones continuas con el mismo codominio:

Definición 2.46. Sea $\{f_i : X_i \rightarrow Y\}_{i=0}^n$ una familia finita de aplicaciones continuas sobre Y . Se define el join fibrado de f_0, \dots, f_n como

$$X_0 *_Y \cdots *_Y X_n := \{t_0 x_0 + \cdots + t_n x_n \in X_0 * \cdots * X_n \mid f_i(x_i) = f_j(x_j), t_i \neq 0 \neq t_j\}$$

para cualesquiera $i, j \in \{0, \dots, n\}$.

Nótese que $X_0 *_Y \cdots *_Y X_n$ tiene la topología inducida por la de $X_0 * X_1 * \cdots * X_n$. Además, se induce naturalmente una aplicación continua llamada *suma de Whitney generalizada* o *suma de Milnor*, dada por

$$\begin{aligned} f_0 *_Y f_1 *_Y \cdots *_Y f_n : X_0 *_Y \cdots *_Y X_n &\rightarrow Y, \\ t_0 x_0 + \cdots + t_n x_n &\mapsto f_i(x_i), \end{aligned}$$

donde $i \in \{0, \dots, n\}$ es tal que $t_i \neq 0$. También existen inclusiones o embebimientos cerrados $X_j \hookrightarrow X_0 *_Y \cdots *_Y X_n$.

Las sumas de Whitney preservan fibraciones y sus fibras. Veámoslo con un lema:

Lema 2.47. Si $p : E \rightarrow B$, $p' : E' \rightarrow B$ fibraciones, entonces la suma de Whitney $p *_B p' : E *_B E' \rightarrow B$ también es fibración. Además, si $b_0 \in B$, $F = p^{-1}(\{b_0\})$ es la fibra de p y $F' = p'^{-1}(\{b_0\})$ es la fibra de p' , entonces la fibra de $p *_B p'$ es $F *_B F'$.

Demostración.

Si $p : E \rightarrow B$ y $p' : E' \rightarrow B$ son fibraciones, entonces, en virtud de la Proposición 1.7, existen aplicaciones continuas $\lambda : E \times_B B^{[0,1]} \rightarrow E^{[0,1]}$ y $\lambda' : E' \times_B B^{[0,1]} \rightarrow (E')^{[0,1]}$ tales que $(\text{ev}_0, p^{[0,1]}) \circ \lambda = \text{id}$ y $(\text{ev}_0, p'^{[0,1]}) \circ \lambda' = \text{id}$. Entonces es posible considerar la aplicación $\lambda'' : (E *_B E') \times_B B^{[0,1]} \rightarrow (E *_B E')^{[0,1]}$, la cual viene dada por

$$\lambda''(t_0 e_0 + t_1 e_1, \gamma)(s) = \begin{cases} t_0 \lambda(e_0, \gamma)(s), & t_1 = 0, \\ t_1 \lambda'(e_1, \gamma)(s), & t_0 = 0, \\ t_0 \lambda(e_0, \gamma)(s) + t_1 \lambda'(e_1, \gamma)(s), & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Una simple comprobación demuestra la buena definición y la continuidad de λ'' , así como que es sección de $(\text{ev}_0, (p *_B p')^{[0,1]})$. El resultado se sigue de nuevo por la Proposición 1.7. La demostración de la segunda parte es consecuencia inmediata del Lema 2.47 y de la definición de $p *_B p'$. ■

Observación 2.48. Nótese que, inductivamente, esta construcción se puede definir de forma natural para un número finito de fibraciones con la misma base $\{p_i : E_i \rightarrow B\}_{i=0}^n$. En este sentido, se tiene que la suma de Whitney generalizada

$$p_0 *_B \cdots *_B p_n : E_0 *_B \cdots *_B E_n \rightarrow B$$

es fibración y su fibra en $b_0 \in B$ es el espacio $F = F_0 * \cdots * F_n$ con $F_i = p_i^{-1}(\{b_0\})$ la fibra de p_i con $i \in \{0, \dots, n\}$.

Dada una fibración $p : E \rightarrow B$, denotaremos

$$*_B^n E := E *_B \dots^{(n+1)} *_B E$$

siendo $*_B^0 E = E$, Por otro lado, usaremos la notación $j_p^n := p *_B \cdots *_B p : *_B^n E \rightarrow B$ para la correspondiente suma de Whitney iterada, siendo $j_p^0 = p$.

Definición 2.49. Si $p : E \rightarrow B$ es una fibración, entonces para cada $n \geq 0$, la fibración $j_p^n : *_B^n E \rightarrow B$ se denomina *n-fibración de Ganea-Schwarz*.

La categoría seccional de una fibración de Ganea-Schwarz se puede caracterizar mediante fibraciones de Ganea-Schwarz. Necesitamos tres resultados de carácter técnico:

Lema 2.50. Sean $n \geq 0$ y $p : E \rightarrow B$ una fibración. Dado el pullback

$$\begin{array}{ccc} (*_B^n E) \times_B E & \xrightarrow{\bar{j}_p^n} & E \\ \bar{p}_n \downarrow & & \downarrow p \\ *_B^n E & \xrightarrow{j_p^n} & B, \end{array}$$

se tiene $\text{secat}(\bar{p}_n) \leq n$.

Demostración.

Por inducción sobre n : Para $n = 0$, se tiene que $j_p^0 = p : E \rightarrow B$ con pullback

$$\begin{array}{ccc} E \times_B E & \xrightarrow{\bar{p}} & E \\ \bar{p}_0 \downarrow & & \downarrow p \\ E & \xrightarrow{p} & B. \end{array}$$

La aplicación inducida \bar{p}_0 viene definida como $\bar{p}_0(e, e') = e$. Si definimos $\sigma : E \rightarrow E \times_B E$ como $\sigma(e) = (e, e)$, se tiene trivialmente que $\bar{p}_0 \circ \sigma = \text{id}$, es decir, $\text{secat}(\bar{p}_0) = 0$.

Ahora supongamos $n \geq 1$ y $\text{secat}(\bar{p}_{n-1}) \leq n - 1$. Claramente, los espacios E y $*_B^{n-1} E$ son subespacios cerrados de $*_B^n E = (*_B^{n-1} E) *_B E$. Si definimos

$$U_0 := (*_B^n E) \setminus (*_B^{n-1} E),$$

que es abierto de $*_B^n E$, y consideramos las aplicaciones canónicas

$$\begin{aligned} \pi &: (*_B^n E) \setminus (*_B^{n-1} E) \rightarrow E, \\ \tilde{\pi} &: (*_B^n E) \setminus E \rightarrow *_B^{n-1} E, \end{aligned}$$

se tiene que $(j_p^n)|_{U_0} = p \circ \pi : U_0 \rightarrow B$ y $(j_p^n)|_{(*_B^n E) \setminus E} = j_{n-1}^p \circ \tilde{\pi}$.

Por la propiedad universal del pullback, existe $\sigma_0 : U_0 \rightarrow (*_B^n E) \times_B E$ sección local de \bar{p}_n , como se observa en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} U_0 & \xrightarrow{\pi} & E \\ \text{inc} \searrow & \sigma_0 \dashrightarrow & \downarrow p \\ & (*_B^n E) \times_B E & \xrightarrow{j_p^n} E \\ & \bar{p}_n \downarrow & \downarrow p \\ & *_B^n E & \xrightarrow{j_p^n} B. \end{array}$$

Aplicando ahora la hipótesis de inducción, tenemos que $\text{secat}(\bar{p}_{n-1}) \leq n - 1$, por lo que $*_B^{n-1} E = \bigcup_{i=1}^n V_i$, con V_i abierto en $*_B^{n-1} E$ y con $s_i : V_i \rightarrow (*_B^{n-1} E) \times_B E$ sección local de \bar{p}_{n-1} para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Ahora, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, definimos $U_i := (\tilde{\pi})^{-1}(V_i)$, que es abierto en $(*_B^n E) \setminus E$ y por tanto abierto en $*_B^n E = \bigcup_{i=1}^n U_i$. Falta ver que U_i tiene sección local continua para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Pero esta sección se induce del pullback

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{j_p^{n-1} \circ s_i \circ (\tilde{\pi}|_{U_i})} & E \\ \downarrow & \sigma_i \dashrightarrow & \downarrow p \\ & (*_B^n E) \times_B E & \xrightarrow{j_p^n} E \\ & \bar{p}_n \downarrow & \downarrow p \\ (*_B^n E) \setminus E & \hookrightarrow & *_B^n E \xrightarrow{j_p^n} B. \end{array}$$

Se concluye que $\text{secat}(\bar{p}_n) \leq n$. ■

El siguiente lema también nos será de utilidad:

Lema 2.51. *Sean X un espacio topológico normal y $\{U_i\}_{i=0}^k$ un recubrimiento abierto y finito de X . Entonces, para cada $i \in \{0, \dots, k\}$ existen V_i y W_i abiertos de X tales que $\overline{V_i} \subseteq W_i \subseteq \overline{W_i} \subseteq U_i$ y además $\{V_i\}_{i=0}^k$ recubre a X .*

La demostración puede encontrarse en [24, Lema 41.6].

Otro resultado auxiliar que usaremos es que un espacio topológico de Hausdorff X , es normal si, y solo si para cualesquiera dos cerrados disjuntos $F_1, F_2 \subseteq X$ existe una aplicación continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(F_1) = \{0\}$ y $f(F_2) = \{1\}$. La demostración puede verse, por ejemplo, en [24, Teorema 33.1]. Este resultado se conoce también como Lema de Urysohn.

Estamos en condiciones de probar el Teorema de Schwarz, que caracteriza la categoría seccional según la existencia de una sección de la fibración de Ganea-Schwarz.

Teorema 2.52 (de Schwarz). *Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración donde B es un espacio topológico normal y de Hausdorff. Entonces, $\text{secat}(p) \leq n$ si, y solo si, la n -fibración de Ganea-Schwarz $j_p^n : \ast_B^n E \rightarrow B$ admite una sección homotópica.*

Demostración.

Supongamos que j_p^n tiene una sección homotópica. Como $j_p^n : \ast_B^n E \rightarrow B$ es fibración, entonces existe $s : B \rightarrow \ast_B^n E$ continua tal que $j_p^n \circ s = \text{id}_B$. Consideramos el pullback

$$\begin{array}{ccc} \left(\ast_B^n E\right) \times_B E & \xrightarrow{\overline{j}_p^n} & E \\ \overline{p}_n \downarrow & & \downarrow p \\ \ast_B^n E & \xrightarrow{j_p^n} & B. \end{array}$$

Aplicando el Lema 2.50, se tiene que $\text{secat}(\overline{p}_n) \leq n$, luego $\ast_B^n E = \bigcup_{i=0}^n U_i$ donde U_i es abierto con $\sigma_i : U_i \rightarrow \left(\ast_B^n E\right) \times_B E$ sección local de \overline{p}_n para todo $i \in \{0, \dots, n\}$. Definimos $V_i := s^{-1}(U_i)$, que es abierto en B por la continuidad de s . Definimos también $s'_i = \overline{j}_n^p \circ \sigma_i \circ (s|_{V_i}) : V_i \rightarrow E$ y es claro que $p(s'_i(v_i)) = v_i$ para cualquier $v_i \in V_i$. Concluimos que $\text{secat}(p) \leq n$. Recíprocamente, supongamos ahora que $\text{secat}(p) \leq n$. Veamos, por inducción con respecto a $m \in \{0, \dots, n\}$, que existe un recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i=0}^{n-m}$ de B tal que j_p^m tiene una sección en U_0 y p tiene una sección en U_i , para $1 \leq i \leq n - m$. Si $m = 0$, tal recubrimiento existe pues $j_p^0 = p$ y $\text{secat}(p) \leq n$. Supongamos cierta la propiedad para $0 \leq m < n$. Tenemos entonces que existe $\{U_i\}_{i=0}^{n-m}$ recubrimiento abierto de B , $\sigma_0 : U_0 \rightarrow \ast_B^m E$ sección local de j_p^m y $\sigma_i : U_i \rightarrow E$ sección local de p para cualquier

$i \in \{1, \dots, n - m\}$. Como B es normal, en virtud del Lema 2.51, podemos considerar V_i y W_i abiertos en B de manera que $\overline{V}_i \subseteq W_i \subseteq \overline{W}_i \subseteq U_i$ con $\{V_i\}_{i=0}^{n-m}$ recubrimiento de B . Definimos los conjuntos

$$A_0 := \overline{V}_0 \cap (B \setminus W_1), \quad A_1 := \overline{V}_1 \cap (B \setminus W_0), \quad A_2 := \overline{W}_0 \cap \overline{W}_1 \cap (\overline{V}_0 \cup \overline{V}_1),$$

que son cerrados en B por construcción. Además, $A_0 \cup A_1 \cup A_2 = \overline{V}_0 \cup \overline{V}_1$ y $A_0 \cap A_1 = \emptyset$. Luego, por el Lema de Urysohn, se tiene que existe una aplicación continua $f : B \rightarrow [0, 1]$ verificando $f(A_0) = \{0\}$ y $f(A_1) = \{1\}$. Definimos ahora $\sigma : \overline{V}_0 \cup \overline{V}_1 \rightarrow \ast_B^{m+1} E$ como

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_0(x), & x \in A_0, \\ \sigma_1(x), & x \in A_1, \\ (1 - f(x))\sigma_0(x) + f(x)\sigma_1(x), & x \in A_2. \end{cases}$$

La continuidad de σ está garantizada por el Lema 1.3. Además, σ es una sección local de j_p^{m+1} sobre $\overline{V}_0 \cup \overline{V}_1$. Tomamos $\{O_i\}_{i=0}^{n-m-1}$ recubrimiento abierto de B de manera que $O_0 = V_0 \cup V_1$ y $O_i = U_{i+1}$ y σ es sección local de j_p^{m+1} sobre O_0 . Por hipótesis, p tiene una sección local sobre U_i para $1 \leq i \leq n - m - 1$, lo cual concluye la inducción.

Cuando $m = n$, entonces j_p^n tiene una sección local sobre $U_0 = B$, es decir, tal sección es global. ■

Dado X un espacio topológico conexo por caminos y un punto $x_0 \in X$; si consideramos la fibración de caminos $p : PX \rightarrow X$ definida por $p(\alpha) = \alpha(1)$, hemos comprobado que se verifica $\text{cat}(X) = \text{secat}(p : PX \rightarrow X)$. Calculando el n -join del espacio de caminos PX , obtenemos

$$G_n(X) := PX *_X \dots^{(n+1)} *_X PX,$$

conocido como el n -espacio de Ganea. Asimismo, aplicando n sumas de Milnor a la fibración de caminos, tenemos la aplicación

$$p_n := p *_X \dots^{(n+1)} *_X p : G_n(X) \rightarrow X,$$

que se conoce como n -fibración de Ganea.

Conseguimos una nueva caracterización de la categoría de Lusternik-Schnirelmann.

Corolario 2.53. *Sea X un espacio topológico normal, de Hausdorff y conexo por caminos. Entonces, $\text{cat}(X) \leq n$ si, y solo si, la n -fibración de Ganea $p_n : G_n(X) \rightarrow X$ admite una sección homotópica.*

Concluimos esta sección con una nueva caracterización de la complejidad topológica. Si X es un espacio topológico conexo por caminos, recordamos por la fórmula (2.1) que

$\text{TC}(X) = \text{secat}(\pi)$ donde $\pi : X^{[0,1]} \rightarrow X \times X$ es la aplicación bievaluación. Podemos considerar la n -suma de Milnor $Q_n(x) = X^{[0,1]} *_{X \times X} \cdots *_{X \times X} X^{[0,1]}$, con su respectiva n -fibración $q_n = \pi *_{X \times X} \cdots *_{X \times X} \pi : Q_n(X) \rightarrow X \times X$. Con esto, tenemos un corolario.

Corolario 2.54. *Sea X un espacio topológico conexo por caminos tal que $X \times X$ es normal y de Hausdorff. Entonces, $\text{TC}(X) \leq n$ si, y solo si, la fibración $q_n : Q_n \rightarrow X \times X$ admite una sección homotópica.*

A continuación haremos uso de la caracterización de Ganea-Schwarz para obtener cotas de la complejidad topológica de un CW-complejo, atendiendo a su definición detallada en el Apéndice de la memoria y a las nociones de n -conexidad y n -equivalencias, también desarrolladas en el mismo. Como consecuencia del Lema 4.7, tenemos un criterio para determinar la conectividad de la fibración de Ganea-Schwarz.

Lema 2.55. *Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración y s -equivalencia ($s \geq 0$). Entonces, para cada $n \geq 0$, se tiene que $j_p^n : *_{B}^n E \rightarrow B$ es una $[(n+1)(s+1) - 1]$ -equivalencia.*

Demostración.

Fijado $b \in B$ arbitrario, consideramos $F_b = p^{-1}(\{b\})$ la fibra de p sobre b , que es $(s-1)$ -conexa en virtud del Lema 4.7 del Apéndice. Así, teniendo en cuenta el apartado *ii*) de la Proposición 4.6, la fibra de j_p^n en b , que es el join $(j_p^n)^{-1}(\{b\}) = F_b * \dots^{(n+1)} * F_b$, es $[(n+1)(s+1) - 2]$ -conexa. De nuevo, por el Lema 4.7, concluimos que j_p^n es una $[(n+1)(s+1) - 1]$ -equivalencia. ■

Con esto, estamos en condiciones de acotar la categoría seccional de ciertas fibraciones. Hacemos notar que todo CW-complejo es un espacio normal y de Hausdorff [21, Definición 7.3.1 y Ej. Pág. 204].

Teorema 2.56 (de Schwarz). *Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración y s -equivalencia ($s \geq 0$) y B un CW-complejo de dimensión finita. Entonces,*

$$\text{secat}(p) < \frac{\dim(B) + 1}{s + 1}.$$

Demostración.

En virtud del Lema 2.55 anterior, tenemos que j_p^n es una $[(n+1)(s+1)]$ -equivalencia para cada $n \geq 0$. Por otro lado, consideramos la aplicación inducida en los corchetes de homotopía, precomponiendo por la izquierda con j_p^n , $(j_p^n)_* : [B, *_{B}^n E] \rightarrow [B, B]$. Denotemos por $k = \dim(B)$. Si elegimos n tal que $n+1 \geq \frac{k+1}{s+1}$, entonces se tiene que $\dim(B) = k \leq (n+1)(s+1) - 1$ y, por la Proposición 4.8 del Apéndice, se deduce que $(j_p^n)_*$ es sobre. Esto implica la existencia de $s : B \rightarrow *_{B}^n E$ continua tal que $j_p^n \circ s \simeq \text{id}_B$, es decir, $\text{secat}(p) \leq n$. En particular, tomando n tal que $n+1 = \frac{k+1}{s+1}$, se tiene $\text{secat}(p) \leq n < n+1 = \frac{k+1}{s+1}$. ■

Observación 2.57. En las condiciones del teorema anterior se tiene que $\text{secat}(p) \leq \frac{\dim(B)}{s+1}$.

Corolario 2.58. *Si X es un CW-complejo de dimensión finita, localmente compacto y s -conexo ($s \geq 0$), entonces*

$$\text{TC}(X) \leq \frac{2 \dim(X)}{s+1}.$$

Demostración.

Consideramos la aplicación bievaluación $\pi : X^{[0,1]} \rightarrow X \times X$ y $x_0 \in X$. Por la Proposición 1.8, sabemos que π es fibración y su fibra es $F := \pi^{-1}(\{(x_0, x_0)\}) = \Omega(X, x_0)$ espacio $(s-1)$ -conexo por la Proposición 4.6, con lo que, por el Lema 4.7, π es una s -equivalencia. Aplicando el Corolario 2.14 y el Teorema 2.56, se tiene que

$$\text{TC}(X) = \text{secat}(\pi : X^{[0,1]} \rightarrow X \times X) < \frac{\dim(X \times X) + 1}{s+1} = \frac{2 \dim(X) + 1}{s+1}$$

y concluimos que $\text{TC}(X) \leq \frac{2 \dim(X)}{s+1}$. Nótese que $X \times X$ es CW-complejo al ser X localmente compacto (ver Apéndice). Además, $\dim(X \times X) = 2 \dim(X)$. ■

Se tiene también una cota superior para la categoría de Lusternik-Schnirelmann.

Corolario 2.59. *Sea X un CW-complejo de dimensión finita y s -conexo ($s \geq 0$). Entonces,*

$$\text{cat}(X) \leq \frac{\dim(X)}{s+1}.$$

Demostración.

Como X es s -conexo, tenemos que el espacio de lazos $\Omega(X, x_0)$ es $(s-1)$ -conexo, para todo $x_0 \in X$. Como $\Omega(X, x_0)$ es la fibra de $p : PX \rightarrow X$ sobre x , se deduce que, por el Lema 4.7, que $p : PX \rightarrow X$ es una s -equivalencia. Aplicando de nuevo el Teorema 2.56, tenemos que

$$\text{cat}(X) = \text{secat}(p) < \frac{\dim(X) + 1}{s}.$$

Por tanto, $\text{cat}(X) = \text{secat}(p) \leq \frac{\dim(X)}{s+1}$. ■

Cálculos

En este capítulo procederemos a determinar, o en su defecto, aproximar la complejidad topológica de una amplia colección de espacios topológicos.

En los ejemplos mostrados a continuación, será relativamente sencillo hallar una cota superior de la complejidad topológica. Para acotarla inferiormente, emplearemos las cotas de naturaleza cohomológica mostradas en el Capítulo 2: consideraremos el álgebra graduada de cohomología respecto de un cuerpo conveniente para estimar la nilpotencia del producto cup. En algunos ejemplos, dicha cota coincidirá con la cota superior previamente establecida, por lo que, en estos casos, determinaremos por completo la complejidad topológica.

3.1. Esferas y toros

Comenzaremos estudiando la complejidad topológica de las n -esfera. Como veremos, dependerá de la paridad de n . Posteriormente estudiaremos la complejidad topológica del producto de esferas.

En el Capítulo 2 calculamos la categoría de la n -esfera $\text{cat}(S^n) = 1$, por lo que, del Corolario 2.16 se deduce que

$$1 \leq \text{TC}(S^n) \leq 2.$$

Como acabamos de comentar, en el caso de las n -esferas, la paridad de n será crucial a la hora de determinar la complejidad topológica. Esto se debe a un conocido resultado de topología diferencial sobre campos de vectores sobre esferas. Recordamos que un campo de vectores tangente sobre S^n consiste en una aplicación continua $F : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $F(x)$ y x son ortogonales para todo $x \in S^n$; en otras palabras, el producto escalar euclídeo $x \cdot F(x) = 0$ es nulo para todo $x \in S^n$. Diremos que F es no nulo si además $F(x) \neq 0$ para todo $x \in S^n$.

Teorema 3.1 (de la Bola Peluda). *Existe un campo de vectores tangente no nulo sobre la esfera S^n si, y solo si, n es impar.*

Como consecuencia, si $F : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ es un campo de vectores tangente sobre S^n con n un número par, entonces existe $x_0 \in S^n$ tal que $F(x_0) = 0$. Además, en este caso, siempre es posible construir un campo de vectores tangentes de manera que se anule en un único punto $x_0 \in S^n$. La demostración de este teorema clásico puede encontrarse, por ejemplo, en el artículo [10].

Proposición 3.2. *Si n es impar, entonces $\text{TC}(S^n) = 1$.*

Demostración.

Sean n un número natural impar y $F : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ un campo de vectores tangente no nulo sobre S^n . Como S^n no es contráctil, entonces $\text{TC}(S^n) \geq 1$. Definimos los abiertos

$$U_0 := \{(x, y) \in S^n \times S^n \mid x \neq -y\}, \quad U_1 := \{(x, y) \in S^n \times S^n \mid x \neq y\},$$

que recubren $S^n \times S^n$. Para el primer abierto definimos $s_0 : U_0 \rightarrow (S^n)^{[0,1]}$, siendo $s_0(x, y)$ el camino a velocidad constante que recorre el arco más corto que une x con y . Para el segundo definimos $s_1 : U_1 \rightarrow (S^n)^{[0,1]}$ como el camino multiplicación $s_1(x, y) = s_0(x, -y) * \alpha(y)$, siendo $\alpha(y) : I \rightarrow S^n$ el camino en S^n dado por

$$\alpha(y)(t) = -\cos(\pi t)y + \sin(\pi t) \frac{F(y)}{\|F(y)\|}$$

que, en efecto, es continuo y verifica $\alpha(y)(0) = -y$, $\alpha(y)(1) = y$. Por lo tanto, $\text{TC}(S^n) \leq 1$ y concluimos que $\text{TC}(S^n) = 1$. ■

Veamos ahora el caso en el que n es par:

Proposición 3.3. *Si n es par, entonces $\text{TC}(S^n) = 2$.*

Demostración.

Sea n un número natural par. Veamos en primer lugar que $\text{TC}(S^n) \leq 2$. Consideremos $F : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ un campo de vectores tangente a S^n . Sabemos que es posible elegir F de modo que se anule en un único punto $x_0 \in S^n$. Tomamos los abiertos

$$U_0 := \{(x, y) \in S^n \times S^n \mid x \neq -y\}, \quad U_1 := \{(x, y) \in S^n \times S^n \mid x \neq y, y \neq x_0\}$$

y se definen los algoritmos locales s_0 y s_1 como en el caso n impar. Definimos ahora un tercer abierto

$$U_2 := (S^n \setminus \{\tilde{x}_0\}) \times (S^n \setminus \{\tilde{x}_0\})$$

donde $\tilde{x}_0 \in S^n$ se ha elegido de forma que $x_0 \neq \tilde{x}_0 \neq -x_0$. Se define $s_2 : U_2 \rightarrow (S^n)^{[0,1]}$ como una aplicación constante. Observamos que, al ser U_2 contráctil, $\text{inc}_{U_2} : U_2 \hookrightarrow S^n \times S^n$ es nulhomótopa y, por tanto, el siguiente diagrama es homotópicamente conmutativo

$$\begin{array}{ccc} U_2 & \xrightarrow{\text{inc}_{U_i}} & S^n \times S^n \\ & \searrow C_p & \nearrow \pi \\ & & (S^n)^{[0,1]}, \end{array}$$

donde C_p denota a una aplicación constante. Así, como $\{U_0, U_1, U_2\}$ recubre a $S^n \times S^n$, tenemos que $\text{TC}(S^n) \leq 2$. Veamos ahora que $\text{TC}(S^n) \geq 2$ haciendo uso del Corolario 2.44. Tal y como se indica en [18], la cohomología de las esferas sobre un anillo arbitrario R es

$$H^p(S^n; R) = \begin{cases} R, & p \in \{0, n\}, \\ 0, & p \notin \{0, n\}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Consideramos entonces $1 \in H^0(S^n; \mathbb{Q})$ y $\alpha \in H^n(S^n, \mathbb{Q})$ los generadores del \mathbb{Q} -álgebra graduada $H^\bullet(S^n, \mathbb{Q})$. En este caso, se tiene que $\alpha \smile \alpha \in H^{2n}(S^n, \mathbb{Q}) \cong 0$. Recordemos el producto cup como homomorfismo de \mathbb{Q} -álgebras graduadas

$$\begin{aligned} \smile : H^\bullet(S^n; \mathbb{Q}) \otimes H^\bullet(S^n; \mathbb{Q}) &\rightarrow H^\bullet(S^n; \mathbb{Q}), \\ \smile (x \otimes y) &= x \smile y, \end{aligned}$$

donde el producto de la \mathbb{Q} -álgebra graduada tensorial $H^\bullet(S^n; \mathbb{Q}) \otimes H^\bullet(S^n; \mathbb{Q})$ viene dado por $(x \otimes y)(x' \otimes y') = (-1)^{|y||x'|}(x \smile x') \otimes (y \smile y')$. Por abuso de lenguaje, el producto cup \smile también lo podremos denotar por un punto \cdot . Con esta notación, α^2 será $\alpha \smile \alpha$. Haremos uso de esta notación simplificada en posteriores cálculos.

Tomando como divisor de cero a $A := \alpha \otimes 1 - 1 \otimes \alpha \in \text{Ker}(\smile)$, se tiene que

$$A^2 = \alpha^2 \otimes 1 - \alpha \otimes \alpha - \alpha \otimes \alpha + 1 \otimes \alpha^2 = -2(\alpha \otimes \alpha) \neq 0.$$

Por lo tanto, $A \in \text{Ker}(\smile)$ con $A^2 \neq 0$, lo que nos lleva a que $\text{nil Ker}(\smile) \geq 2$ y entonces, por el Corolario 2.44, $\text{TC}(S^n) \geq 2$. Concluimos que $\text{TC}(S^n) = 2$. \blacksquare

Con esto, tenemos determinada la complejidad topológica de la n -esfera, lo cual queda resumido en el siguiente resultado:

Corolario 3.4. *Si $n \geq 1$, entonces $\text{TC}(S^n) = \begin{cases} 1, & n \text{ impar}, \\ 2, & n \text{ par}. \end{cases}$*

A continuación estudiaremos la complejidad topológica de productos de esferas de la misma dimensión.

Proposición 3.5. Sea $\mathbb{T}^k := S^n \times \dots^{(k)} \times S^n$. Entonces,

$$\mathrm{TC}(\mathbb{T}^k) = \begin{cases} k, & n \text{ impar}, \\ 2k, & n \text{ par}. \end{cases}$$

Demostración.

De la Proposición 2.16, se deduce que $\mathrm{TC}(\mathbb{T}^k) = \mathrm{TC}(S^n \times \dots^{(k)} \times S^n) \leq k \mathrm{TC}(S^n)$.

Luego, por lo visto anteriormente, tenemos

$$\mathrm{TC}(\mathbb{T}^k) \leq \begin{cases} k, & n \text{ impar}, \\ 2k, & n \text{ par}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Para ver la otra desigualdad, consideramos la evidente versión generalizada de la Proposición 2.43: Dado K un cuerpo conmutativo, se tiene que el producto cruz

$$\begin{aligned} \times : \bigotimes_{i=1}^n H^\bullet(X_i; K) &\rightarrow H^\bullet\left(\prod_{i=1}^n X_i; K\right), \\ \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_n &\mapsto \alpha_1 \times \dots \times \alpha_n := p_1^*(\alpha_1) \smile \dots \smile p_n^*(\alpha_n) \end{aligned} \quad (3.3)$$

es isomorfismo si algún $H_\bullet(X_{i_0}; K)$ es de tipo finito, siendo $p_j : \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow X_j$ la proyección j -ésima. En el caso del \mathbb{T}^k , consideramos el isomorfismo de Künneth

$$\begin{aligned} \times : \bigotimes_{i=1}^k H^\bullet(S^n; \mathbb{Q}) &\rightarrow H^\bullet(S^n \times \dots^{(k)} \times S^n; \mathbb{Q}), \\ \alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_k &\mapsto \alpha_1 \times \dots \times \alpha_k := p_1^*(\alpha_1) \smile \dots \smile p_k^*(\alpha_k) \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde $p_i : \mathbb{T}^k = S^n \times \dots \times S^n \rightarrow S^n$ denota la i -ésima proyección canónica con $i \in \{1, \dots, k\}$. Tomando el generador $\alpha \in H^n(S^n; \mathbb{Q})$, consideramos $a_i = p_i^*(\alpha) \in H^n(\mathbb{T}^k; \mathbb{Q})$. Entonces se tiene que $a_i^2 = a_i \smile a_i = p_i^*(\alpha) \smile p_i^*(\alpha) = p_i^*(\alpha \smile \alpha) = p_i^*(0) = 0$ y además $b := a_1 \smile \dots \smile a_k = p_1^*(\alpha) \smile \dots \smile p_k^*(\alpha) \in H^{kn}(\mathbb{T}^k) \cong \mathbb{Q}$ es la clase fundamental.

Teniendo en cuenta el producto cup como homomorfismo de \mathbb{Q} -álgebras graduadas:

$$\begin{aligned} \smile : H^\bullet(\mathbb{T}^k; \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H^\bullet(\mathbb{T}^k; \mathbb{Q}) &\rightarrow H^\bullet(\mathbb{T}^k; \mathbb{Q}), \\ (\alpha \otimes \beta) \cdot (\alpha' \otimes \beta') &= (-1)^{|\beta||\alpha'|} (\alpha \smile \alpha') \otimes (\beta \smile \beta'), \end{aligned}$$

tenemos, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, el divisor de cero $A_i = a_i \otimes 1 - 1 \otimes a_i \in \mathrm{Ker}(\smile)$. No es difícil comprobar que $\prod_{i=1}^k A_i \neq 0$, por lo que haciendo uso del Corolario 2.44, tenemos que $\mathrm{TC}(\mathbb{T}^k) \geq k$, independientemente de la paridad de n .

Si n es impar, gracias a (3.2) concluimos que $\mathrm{TC}(\mathbb{T}^k) = k$. Supongamos ahora que n es par. Entonces, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, tenemos

$$A_i^2 = (a_i \otimes 1 - 1 \otimes a_i)^2 = a_i^2 \otimes 1 - a_i \otimes a_i - a_i \otimes a_i + 1 \otimes a_i^2 = -2(a_i \otimes a_i) \neq 0,$$

luego

$$\prod_{i=1}^k A_i^2 = \prod_{i=1}^k (a_i \otimes 1 - 1 \otimes a_i)^2 = \prod_{i=1}^k (-2a_i \otimes a_i) = (-2)^k \prod_{i=1}^k (a_i \otimes a_i) = (-2)^k (b \otimes b) \neq 0.$$

Por lo tanto, $\text{TC}(\mathbb{T}^k) \geq 2k$ y de (3.2) concluimos que $\text{TC}(\mathbb{T}^k) = 2k$. \blacksquare

Estudiaremos ahora la complejidad topológica de productos de esferas con distinta paridad de dimensiones.

Proposición 3.6. *Si m es un número impar y n es un número par, entonces*

$$\text{TC}(S^m \times S^n) = 3.$$

Demostración.

Por la Proposición 2.16, $\text{TC}(S^m \times S^n) \leq \text{TC}(S^m) + \text{TC}(S^n) = 1 + 2 = 3$. Veamos ahora que $\text{TC}(S^m \times S^n) \geq 3$. Aplicando la Proposición 2.43, tenemos un isomorfismo de \mathbb{Q} -álgebras graduadas.

$$\begin{aligned} \times : H^\bullet(S^m; \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H^\bullet(S^n; \mathbb{Q}) &\rightarrow H^\bullet(S^m \times S^n; \mathbb{Q}), \\ \alpha \otimes \beta &\mapsto \alpha \times \beta := p_1^*(\alpha) \smile p_2^*(\beta) \end{aligned}$$

donde $p_1 : S^m \times S^n \rightarrow S^m$ y $p_2 : S^m \times S^n \rightarrow S^n$ son las proyecciones canónicas. Tomamos los generadores $\alpha \in H^m(S^m; \mathbb{Q})$ y $\beta \in H^n(S^n; \mathbb{Q})$ respectivos. Si definimos $a := p_1^*(\alpha)$ y $b := p_2^*(\alpha)$ generadores de $H^\bullet(S^m \times S^n; \mathbb{Q})$, se tiene que

$$a \smile b = p_1^*(\alpha) \smile p_2^*(\beta) = \times(\alpha \otimes \beta)$$

es la clase fundamental de $H^{m+n}(S^m \times S^n; \mathbb{Q})$. Además,

$$\begin{aligned} a^2 &= p_1^*(\alpha) \smile p_1^*(\alpha) = p_1^*(\alpha^2) = p_1^*(0) = 0, \\ b^2 &= p_2^*(\beta) \smile p_2^*(\beta) = p_2^*(\beta^2) = p_2^*(0) = 0. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el producto cup (1.5) y tomando como divisores de cero $A := a \otimes 1 - 1 \otimes a$ y $B := b \otimes 1 - 1 \otimes b \in \text{Ker}(\smile)$, tenemos

$$A \cdot B^2 = -2(a \otimes 1 - 1 \otimes a)(b \otimes b) = -2[(a \smile b) \otimes b - b \otimes (a \smile b)] \neq 0.$$

Por lo tanto, por el Corolario 2.44, $\text{TC}(S^m \times S^n) \geq 3$ y concluimos que $\text{TC}(S^m \times S^n) = 3$. \blacksquare

Observación 3.7. En general, se puede comprobar que $\text{TC}(S^{n_1} \times \dots \times S^{n_k}) = \sum_{i=1}^k \text{TC}(S^{n_i})$.

3.2. Espacios proyectivos

En esta sección nos centraremos en el cálculo de la complejidad topológica de los espacios proyectivos reales, complejos y cuaterniónicos. Veremos que en los dos últimos casos es posible determinar por completo la complejidad topológica. Además, analizaremos la problemática del caso real: a día de hoy no ha sido posible determinar la complejidad topológica de todos los espacios proyectivos reales. Esto no es de extrañar, pues el cálculo de $\text{TC}(\mathbb{R}P^n)$ es equivalente al antiguo problema (aún no resuelto) de inmersión euclídea de estos espacios.

Comenzamos introduciendo el n -espacio proyectivo de modo general. Sea K el cuerpo real (\mathbb{R}), complejo (\mathbb{C}) o cuaterniónico (\mathbb{H}). Se define el n -ésimo espacio proyectivo sobre K como

$$KP^n = (K^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim,$$

donde “ \sim ” denota la relación de equivalencia en $K^{n+1} \setminus \{0\}$ definida a continuación: Dados $x, y \in K^{n+1} \setminus \{0\}$, se tiene que x está relacionado con y si y solo si existe $\lambda \in K \setminus \{0\}$ tal que $y = \lambda x$. Una primera aproximación al cálculo de la complejidad topológica de estos espacios es mediante la categoría de Lusternik-Schnirelmann.

Obsérvese que $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{H}P^n$ son CW-complejos finitos y conexos de dimensión n , $2n$, $4n$ respectivamente (ver Proposición 4.5 del Apéndice). Además, es conocido que el grupo fundamental de $\mathbb{R}P^n$ es \mathbb{Z}_2 , por lo que $\mathbb{R}P^n$ es 0-conexo. Por otro lado, $\mathbb{C}P^n$ es 1-conexo (simplemente conexo) y $\mathbb{H}P^n$ es 3-conexo (ver 4.6).

Proposición 3.8. *Si $n \geq 1$, entonces $\text{cat}(\mathbb{R}P^n) = \text{cat}(\mathbb{C}P^n) = \text{cat}(\mathbb{H}P^n) = n$.*

Demostración.

Aplicando el Corolario 2.59, se tiene que

$$\text{cat}(\mathbb{R}P^n) \leq \frac{n}{1} = n, \quad \text{cat}(\mathbb{C}P^n) \leq \frac{2n}{2} = n, \quad \text{cat}(\mathbb{H}P^n) \leq \frac{4n}{4} = n.$$

Por otro lado, en virtud del Corolario 2.40, tenemos que $\text{nil } \tilde{H}^\bullet(X, R) \leq \text{cat}(X)$. Aplicando esto a cada caso tenemos lo siguiente:

i) $H^\bullet(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^{n+1})$ con $|\alpha| = 1$. Tomando el generador $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$, se tiene que $\alpha^n \neq 0$ y $\text{cat}(\mathbb{R}P^n) = n$.

ii) $H^\bullet(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$ con $|\alpha| = 2$. Tomando el generador $\alpha \in H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Q})$, se tiene que $\alpha^n \neq 0$ y por lo tanto $\text{cat}(\mathbb{C}P^n) = n$.

iii) $H^\bullet(\mathbb{H}P^n; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$ con $|\alpha| = 4$. Tomando el generador $\alpha \in H^4(\mathbb{H}P^n; \mathbb{Q})$, se tiene que $\alpha^n \neq 0$ y por lo tanto $\text{cat}(\mathbb{H}P^n) = n$. ■

Los anillos de cohomología correspondientes se deducen en [18].

Observación 3.9. La acotación superior puede obtenerse también con abiertos categóricos. Para el caso real: Tomamos $[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{R}P^n$ tal que $(x_0, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$ y para cada $i \in \{0, \dots, n\}$, consideramos $U_i := \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \neq 0\}$. Es sencillo comprobar que este conjunto es abierto en $\mathbb{R}P^n$ y que $\mathbb{R}P^n = \bigcup_{i=0}^n U_i$. Además, U_i es categórico en $\mathbb{R}P^n$ con la homotopía $H_i : U_i \times I \rightarrow \mathbb{R}P^n$ definida para cada $i \in \{0, \dots, n\}$ por

$$H_i([x_0, \dots, x_n], t) := [(1-t)x_0 + tx_i, \dots, (1-t)x_{i-1} + tx_i, x_i, (1-t)x_{i+1} + tx_i, \dots, (1-t)x_n + tx_i].$$

Razonando análogamente para \mathbb{C} y para \mathbb{H} , se tiene que $\text{cat}(\mathbb{C}P^n) \leq n$ y $\text{cat}(\mathbb{H}P^n) \leq n$.

Corolario 3.10. *Si $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ o \mathbb{H} , entonces*

$$n \leq \text{TC}(KP^n) \leq 2n.$$

Observación 3.11. Hacemos notar que la cota $\text{TC}(KP^n) \leq 2n$ también se puede obtener mediante el Corolario 2.58, teniendo en cuenta que KP^n es un CW-complejo compacto, $\dim(\mathbb{R}P^n) = n$, $\dim(\mathbb{C}P^n) = 2n$, $\dim(\mathbb{H}P^n) = 4n$. Además, $\mathbb{R}P^n$ es 0-conexo, $\mathbb{C}P^n$ es 1-conexo y $\mathbb{H}P^n$ es 3-conexo.

3.2.1. Casos complejo y cuaterniónico

Determinamos a continuación la complejidad topológica de los espacios proyectivos complejo y cuaterniónico.

Proposición 3.12. *Si $n \geq 0$, entonces*

$$\text{TC}(\mathbb{C}P^n) = \text{TC}(\mathbb{H}P^n) = 2n.$$

Demostración.

Por el Corolario 3.10, sabemos que la complejidad topológica de estos espacios está acotada superiormente por $2n$. Veamos que también está acotada inferiormente por este número y habremos acabado. Para el caso complejo, atendiendo a [18, Teorema 3.19], podemos hacer uso de un isomorfismo de \mathbb{Q} -álgebras graduadas

$$H^\bullet(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$$

con $|\alpha| = 2$. Se consideran los generadores $1 \in H^0(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Q})$ y $\alpha \in H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Q})$ y tomamos $A = \alpha \otimes 1 - 1 \otimes \alpha \in \text{Ker}(\smile)$. Teniendo en cuenta que $|\alpha| = 2$ es par y la fórmula 1.5, en nuestro caso $H^\bullet(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Q}) \otimes H^\bullet(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Q})$, es sencillo comprobar que para cada $k \geq 1$ se tiene la expresión binomial

$$A^k = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} \alpha^{k-i} \otimes \alpha^i$$

donde usamos la notación $\alpha^0 := 1 \in H^0(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Q})$. En particular,

$$A^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \binom{2n}{i} \alpha^{2n-i} \otimes \alpha^i = (-1)^n \binom{2n}{n} \alpha^n \otimes \alpha^n \neq 0,$$

siendo $A^{2n+1} = 0$. Nótese que $\alpha^m = 0$ si $m \geq n + 1$. De este modo, $\text{TC}(\mathbb{C}P^n) \geq 2n$ y se concluye que $\text{TC}(\mathbb{C}P^n) = 2n$. El caso cuaterniónico es idéntico pero con cohomología $H^\bullet(\mathbb{H}P^n; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$ donde $|\alpha| = 4$ (ver [18]). ■

3.2.2. El caso real

Hemos estudiado la complejidad topológica del n -espacio proyectivo complejo y cuaterniónico. En el caso real, tenemos las acotaciones gracias al Corolario 2.34. En efecto,

$$n = \text{cat}(\mathbb{R}P^n) \leq \text{TC}(\mathbb{R}P^n) \leq 2 \text{cat}(\mathbb{R}P^n) = 2n.$$

El cálculo de $\text{TC}(\mathbb{R}P^n)$ es todavía un problema abierto, aunque existe un resultado parcial que conecta la complejidad topológica con la topología diferencial.

Un problema clásico en topología diferencial es la clasificación de inmersiones de una variedad diferenciable en otra. Se sabe que es posible establecer una inmersión entre cualquier variedad diferenciable de dimensión finita y el espacio euclídeo \mathbb{R}^k para un k lo suficientemente grande. Sin embargo, fijada una inmersión $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^k$, la determinación del k mínimo es un problema abierto a día de hoy conocido como el *problema de inmersión euclídea*.

A continuación mostramos un teorema que establece una cota para la inmersión euclídea en variedades diferenciables finito-dimensionales cuya demostración puede encontrarse en [32].

Teorema 3.13 (Teorema de inmersión fuerte de Whitney). *Si $n \geq 2$, toda n -variedad diferenciable admite una inmersión (diferenciable) en \mathbb{R}^{2n-1} .*

Este teorema garantiza la existencia de una inmersión, pero no informa sobre si el número $2n - 1$ es mínimo verificando tal propiedad.

En el caso de los espacios proyectivos reales, aún se desconoce la mínima dimensión de inmersión; sin embargo, Michael Farber, Sergey Tabachnikov y Sérguey Yuzvinsky [13] demuestran que el problema de determinar la complejidad topológica de $\mathbb{R}P^n$ es equivalente al problema de encontrar el mínimo k tal que existe la inmersión $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^k$:

Teorema 3.14 (Farber, Tabachnikov, Yuzvinski). *Sea $n \geq 1$. Si $n = 1, 3$ o 7 , entonces $\text{TC}(\mathbb{RP}^n) = n$. En otro caso, $\text{TC}(\mathbb{RP}^n)$ es el menor k verificando que existe una inmersión de \mathbb{RP}^n en \mathbb{R}^k .*

Veremos a continuación bajo qué condiciones se puede determinar $\text{TC}(\mathbb{RP}^n)$.

Proposición 3.15. *Si existe una inmersión $i : \mathbb{RP}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^k$, entonces $\text{TC}(\mathbb{RP}^n) \leq k$.*

La demostración, que involucra técnicas en topología diferencial, puede encontrarse en la referencia [13, Teorema 22].

Combinando este resultado con el hecho de que \mathbb{RP}^n admite una inmersión, al ser variedad diferenciable, en \mathbb{R}^{2n-1} y para $n \geq 2$ tenemos:

Corolario 3.16. *Si $n \geq 1$, entonces $\text{TC}(\mathbb{RP}^n) \leq 2n - 1$.*

La igualdad puede alcanzarse en algunos casos, como se ve a continuación:

Lema 3.17. *Si $n \geq 2^{r-1}$, entonces $\text{TC}(\mathbb{RP}^n) \geq 2^r - 1$.*

Demostración.

Tomamos $\alpha \in H^1(\mathbb{RP}^n; \mathbb{Z}_2)$ y $A = \alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha \in \text{Ker}(\smile)$. La expresión binomial de la clase $A^{2^r-1} = (\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \alpha)^{2^r-1}$ contiene el término

$$\binom{2^r-1}{n} \alpha^{2^r-1-n} \otimes \alpha^n \neq 0.$$

Nótese que los coeficientes binomiales $\binom{2^r-1}{i}$ con impares para todo $0 \leq i \leq 2^r - 1$. Así, tenemos que $A^{2^r-1} \neq 0$ y $\text{TC}(\mathbb{RP}^n) \geq 2^r - 1$. ■

Corolario 3.18. *Si $n = 2^r$ para algún $r \geq 0$, entonces $\text{TC}(\mathbb{RP}^n) = 2n - 1$.*

Demostración.

Por el Teorema 3.13, tenemos que $\text{TC}(\mathbb{RP}^n) \leq 2n - 1$. Por el Lema 3.17, se tiene que $\text{TC}(\mathbb{RP}^n) \geq 2^{r+1} - 1 = 2n - 1$. ■

En particular, $\text{TC}(\mathbb{RP}^2) = 3$, $\text{TC}(\mathbb{RP}^4) = 7$, $\text{TC}(\mathbb{RP}^8) = 15$, $\text{TC}(\mathbb{RP}^{16}) = 33$.

Para saber más sobre el problema de inmersión euclídea, consultar [2] y [13].

3.3. Superficies

Procedemos a estudiar la complejidad topológica de las superficies. En esta memoria entenderemos por superficie a toda 2-variedad cerrada (compacta y sin borde) y conexa. A continuación comenzaremos enunciando el conocido *teorema de clasificación de superficies*, cuya demostración puede verse, por ejemplo, en [16, Teorema 6.3].

Teorema 3.19. *Toda superficie es homeomorfa a una y solo una de las siguientes superficies,*

i) *La esfera S^2 (superficie orientable de género cero).*

ii) *La suma conexa de un número finito de toros $\mathbb{T} \# \dots \# \mathbb{T}$ con $g \geq 1$ (superficie orientable de género g).*

iii) *La suma conexa de un número finito de planos proyectivos reales $\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$ (superficie no orientable de género h).*

Para determinar la complejidad topológica de las superficies orientables, necesitamos conocer su cohomología [18]:

Lema 3.20. *Sean $p \geq 0$ y Σ_g una superficie orientable de género $g \geq 2$. Entonces,*

$$H^p(\Sigma_g, \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q}, & p \in \{0, 2\}, \\ \mathbb{Q}^{2g}, & p = 1, \\ 0, & p \notin \{0, 1, 2\}. \end{cases}$$

Además, si denotamos por $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$ a los generadores de $H^1(\Sigma_g, \mathbb{Q})$ y γ al generador de $H^2(\Sigma_g, \mathbb{Q})$, entonces para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, \dots, g\}$ se cumplen las relaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_i \smile \alpha_j &= \beta_i \smile \beta_j = 0, \\ \alpha_i \smile \beta_j &= \begin{cases} \gamma, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

Con esto, estamos en condiciones de mostrar el resultado que determina la complejidad topológica de este tipo de superficies:

Proposición 3.21. *Sea Σ_g una superficie orientable de género g . Entonces,*

$$\text{TC}(\Sigma_g) = \begin{cases} 2, & 0 \leq g \leq 1, \\ 4, & g \geq 2. \end{cases}$$

Demostración.

Si $g = 0$, entonces $\Sigma_0 \cong S^2$ y por el Corolario 3.4, $\text{TC}(\Sigma_0) = 2$. Si $g = 1$, entonces $\Sigma_1 \cong \mathbb{T} \cong S^1 \times S^1$ y por la Proposición 3.5, $\text{TC}(\mathbb{T}) = 2$. Veamos ahora el caso $g \geq 2$. Al ser Σ_g un CW-complejo de dimensión 2 (ver Apéndice), en virtud del Corolario 2.58, $\text{TC}(\Sigma_g) \leq 2 \dim(\Sigma_g) = 4$. Veamos ahora con cohomología que $\text{TC}(\Sigma_g) \geq 4$. Consideramos el producto $\text{cup } \smile : H^\bullet(\Sigma_g; \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H^\bullet(\Sigma_g; \mathbb{Q}) \rightarrow H^\bullet(\Sigma_g; \mathbb{Q})$ y recordemos la fórmula $(\alpha \otimes \beta) \cdot (\alpha' \otimes \beta') = (-1)^{|\beta||\alpha'|} (\alpha \smile \alpha') \otimes (\beta \smile \beta')$.

Consideramos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in H^1(\Sigma_g; \mathbb{Q})$ junto con los divisores de cero de $\text{Ker}(\smile)$:

$$A_1 := \alpha_1 \otimes 1 - 1 \otimes \alpha_1, \quad B_1 := \beta_1 \otimes 1 - 1 \otimes \beta_1,$$

$$A_2 := \alpha_2 \otimes 1 - 1 \otimes \alpha_2, \quad B_2 := \beta_2 \otimes 1 - 1 \otimes \beta_2.$$

Se verifica $A_1 \cdot B_1 \cdot A_2 \cdot B_2 = \prod_{i=1}^2 (\alpha_i \otimes 1 - 1 \otimes \alpha_i) \cdot (\beta_i \otimes 1 - 1 \otimes \beta_i) = 2(\gamma \otimes \gamma) \neq 0$.

Luego, $\text{TC}(\Sigma_g) \geq 4$ y concluimos que $\text{TC}(\Sigma_g) = 4$. ■

Atendiendo de nuevo al Teorema 3.19, las superficies no orientables son suma conexa de un número finito de planos proyectivos reales. Llamamos N_h a la superficie no orientable de género h .

En 2017, Alexander Dranishnikov demuestra en [8] que $\text{TC}(N_h) = 4$ para $h \geq 4$. Más adelante, Daniel Cohen y Lucile Vandembroucq completan la prueba demostrando en [7] que $\text{TC}(N_h) = 4$ para $h \geq 2$, completando así el cálculo de la complejidad topológica de las superficies. En dicha demostración se emplearon técnicas de topología algebraica que se escapan de los objetivos de esta memoria. Podemos resumir en un único teorema la complejidad topológica de toda superficie:

Teorema 3.22. Sean Σ_g la superficie orientable de género $g \geq 0$ y N_h la superficie no orientable de género $h \geq 1$. Entonces,

$$\text{TC}(\Sigma_g) = \begin{cases} 2, & 0 \leq g \leq 1, \\ 4, & g \geq 2, \end{cases} \quad \text{TC}(N_h) = \begin{cases} 3, & h = 1, \\ 4, & h \geq 2. \end{cases}$$

3.4. Grafos finitos y conexos

Los grafos no orientados son los CW-complejos de dimensión 1. Son objetos esenciales en topología y suponen una valiosa herramienta en diversas disciplinas como la geometría computacional, el análisis de datos, la química o la investigación operativa. En esta sección determinaremos la complejidad topológica de los grafos finitos y conexos.

En un grafo, las 0-celdas se llaman *vértices*, estos pueden estar conectados entre sí mediante las 1-celdas, que se denominan *aristas*. Denotamos por V al conjunto de vértices, E al conjunto de aristas y $G = (V, E)$ al grafo. Un grafo es finito si tiene un número finito de vértices y de aristas, y diremos que es conexo si cualquier par de vértices están conectados mediante una sucesión finita de aristas. El *número de Betti* de un grafo finito G , denotado por $b(G)$, es el rango del grupo abeliano finitamente generado $H_1(G)$, es decir, de la 1-homología singular de G con coeficientes enteros. Es conocido en teoría de grafos que si un grafo finito G tiene v vértices, e aristas y c componentes conexas, entonces $b(G) = e - v + c$. En particular, si G es finito y conexo, se tiene que $b(G) = e - v + 1$.

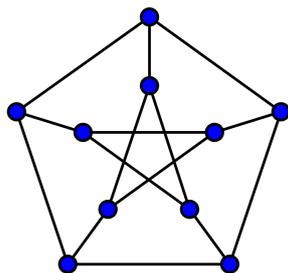


Figura 3.1: Ejemplo de grafo finito y conexo con número de Betti $b(G) = 6$.

Un *árbol* es un grafo que no presenta ciclos y que, por lo tanto, es contráctil. Un grafo $H = (W, F)$ es *subgrafo* de $G = (V, E)$ si $W \subseteq V$ y $F \subseteq E$. A partir de un grafo G , siempre podemos considerar el grafo cociente G/H por algún subgrafo H . Si un grafo G es finito y conexo, existe siempre un árbol T que pasa por todos los vértices (maximal) y que es un subgrafo de G . Como T es contráctil, se puede ver que el cociente G/T conserva el tipo de homotopía de G . En definitiva, todo grafo finito y conexo G es homotópicamente equivalente a una n -rosa, siendo $n = b(G)$ (obsérvese la Figura 3.2). A continuación,

$$G \simeq R_n = \bigvee_{i=1}^n S_i^1$$

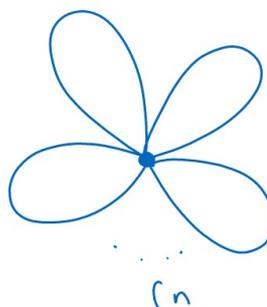


Figura 3.2: Una n -rosa es una colección de n circunferencias tangentes en un punto.

determinaremos la complejidad topológica de los grafos finitos y conexos según su número de Betti:

- i)* Si $b(G) = 0$, entonces G es contráctil y, por lo tanto, $\text{TC}(G) = 0$.
- ii)* Si $b(G) = 1$, entonces G es homotópicamente equivalente a la circunferencia S^1 y, en virtud de la Proposición 2.5, $\text{TC}(G) = 1$.
- iii)* Si $b(G) \geq 2$, entonces, como G es homotópicamente equivalente a una n -rosa, tenemos que $\text{TC}(G) = \text{TC}(\bigvee_{i=1}^n S_i^1)$, siendo $n = b(G)$.

Veamos que, en este último caso, $\text{TC}(G) = 2$. En primer lugar, como $\text{cat}(G) = 1$, en virtud del Corolario 2.34, $1 \leq \text{TC}(G) \leq 2$. Utilizamos cohomología con coeficientes racionales

para demostrar $\text{TC}(G) \geq 2$. Como se indica en [18], la \mathbb{Q} -cohomología de este espacio es

$$H^\bullet \left(\bigvee_{i=1}^n S_i^1; \mathbb{Q} \right) \cong \mathbb{Q}[\alpha_1, \dots, \alpha_n] / (\alpha_i \alpha_j).$$

con $|\alpha_i| = 1$. Como $n \geq 2$, podemos considerar α_1 y α_2 generadores distintos.

$$\begin{aligned} \smile : H^\bullet \left(\bigvee_{i=1}^n S_i^1; \mathbb{Q} \right) \otimes H^\bullet \left(\bigvee_{i=1}^n S_i^1; \mathbb{Q} \right) &\rightarrow H^\bullet \left(\bigvee_{i=1}^n S_i^1; \mathbb{Q} \right), \\ (\alpha_i \otimes \alpha_j) \cdot (\beta_i \otimes \beta_j) &:= (-1)^{|\alpha_j||\beta_i|} (\alpha_i \smile \beta_i) \otimes (\alpha_j \smile \beta_j) \end{aligned}$$

Si definimos $A_i := \alpha_i \otimes 1 - 1 \otimes \alpha_i \in \text{Ker}(\smile)$, $i \in \{1, 2\}$, entonces tenemos

$$A_1 \cdot A_2 = (\alpha_1 \otimes 1 - 1 \otimes \alpha_1) \cdot (\alpha_2 \otimes 1 - 1 \otimes \alpha_2) = -\alpha_1 \otimes \alpha_2 + \alpha_2 \otimes \alpha_1 \neq 0.$$

Por lo tanto, $\text{TC}(G) \geq 2$ en este caso. Así, $\text{TC}(G) = 2$ ■.

Resumimos en un único resultado:

Proposición 3.23. *Sea G un grafo finito y conexo. Entonces,*

$$\text{TC}(G) = \begin{cases} 0, & b(G) = 0, \\ 1, & b(G) = 1, \\ 2, & b(G) \geq 2. \end{cases}$$

3.5. Variedades simplécticas cerradas y simplemente conexas

Una variedad simpléctica es una variedad diferenciable M dotada de una 2-forma diferencial no degenerada y cerrada ω que se conoce como *forma simpléctica*.

Dada una variedad diferenciable M , si consideramos $\Omega^p(M)$ el espacio vectorial sobre \mathbb{R} de todas las p -formas diferenciales definidas sobre M , se tiene que la derivada exterior induce una cadena de aplicaciones lineales entre \mathbb{R} -espacios vectoriales.

$$\dots \xrightarrow{d^{p-2}} \Omega^{p-1}(M) \xrightarrow{d^{p-1}} \Omega^p(M) \xrightarrow{d^p} \Omega^{p+1}(M) \xrightarrow{d^{p+1}} \dots$$

que verifica $(d^p \circ d^{p-1})(\omega) = 0$ para todo $\omega \in \Omega^p(M)$ y para todo $p \geq 1$. Además, si $\omega \in \Omega^p(M)$ y $\eta \in \Omega^q(M)$, entonces $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta$. Una p -forma se dice que es *cerrada* si $d\omega = 0$ y se dice que es *exacta* si existe una $(p-1)$ -forma η tal que $\omega = d\eta$. Se define p -cohomología de De Rham de M como el \mathbb{R} -espacio vectorial

$$H_\Omega^p(M) := \text{Ker}(d^p) / \text{Im}(d^{p-1})$$

Es posible extender el producto exterior \wedge a nivel de cohomología

$$\begin{aligned}\wedge : H_{\Omega}^p(M) \times H_{\Omega}^q(M) &\rightarrow H_{\Omega}^{p+q}(M), \\ [\omega] \wedge [\omega'] &:= [\omega \wedge \omega']\end{aligned}$$

dotando $H_{\Omega}^{\bullet}(M)$ de estructura de \mathbb{R} -álgebra graduada y conmutativa. Esta \mathbb{R} -álgebra graduada está relacionada con la definida por la cohomología singular con coeficientes reales junto con el producto cup, según se deduce del siguiente resultado. La primera parte de la demostración puede verse en [4, Pág. 261], la segunda en [30, Teorema 5.45].

Teorema 3.24. *Sea M una variedad diferenciable, compacta y orientable. Entonces los \mathbb{R} -espacios vectoriales de cohomología de De Rham son isomorfos a los \mathbb{R} -espacios vectoriales de cohomología singular con coeficientes en \mathbb{R} . Es decir, para todo $p \geq 0$, $H_{\Omega}^p(M) \cong H^p(M; \mathbb{R})$. Además, las \mathbb{R} -álgebras graduadas correspondientes también son isomorfas, es decir, $H_{\Omega}^{\bullet}(M) \cong H^{\bullet}(M; \mathbb{R})$.*

A continuación, haciendo uso del Teorema 3.24, determinaremos la complejidad topológica de las variedades simplécticas, cerradas y simplemente conexas. La variedades simplécticas siempre tienen dimensión par y son orientables.

Proposición 3.25. *Sea M una $2n$ -variedad simpléctica, cerrada y simplemente conexa. Entonces, $\text{TC}(M) = \dim(M) = 2n$.*

Demostración.

Por la Proposición 4.2 del Apéndice, necesariamente M es homotópicamente equivalente a un CW-complejo X finito con $\dim(X) = 2n$. En virtud del Teorema 2.6 y del Corolario 2.58, se tiene que

$$\text{TC}(M) = \text{TC}(X) \leq \frac{2(2n)}{2} = 2n.$$

Como X es un CW-complejo finito, entonces $H_{\bullet}(X, \mathbb{R})$ es de tipo finito y, por la Proposición 2.43, se tiene $\text{nil Ker}(\smile) \leq \text{TC}(X)$. Sea $\omega \in \Omega^2(M)$ la 2-forma simpléctica asociada a la variedad M . Tomamos su clase de cohomología $u = [\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$. Es claro que $|u| = 2$, porque $u \in H^2(M, \mathbb{R})$.

Estimamos la nilpotencia de $\text{Ker}(\smile)$: Si $U := 1 \otimes u - u \otimes 1 \in \text{Ker}(\smile)$, entonces $u^n \in H^{2n}(M, \mathbb{R})$, se tiene que $u^n \neq 0$ y

$$U^{2n} = (1 \otimes u - u \otimes 1)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i \binom{2n}{i} u^i \otimes u^{2n-i} = (-1)^n \binom{2n}{n} u^n \otimes u^n \neq 0.$$

Obsérvese que $u^m = 0$ para $m \geq 2n + 1$. El término central no se anula porque u^n es generador de $H^{2n}(M, \mathbb{R})$. Luego, $\text{TC}(M) \geq 2n$ y concluimos que $\text{TC}(M) = 2n = \dim(M)$. ■

3.6. El espacio de configuraciones usual

En esta sección determinaremos la complejidad topológica de un sistema formado por k partículas moviéndose libremente en el espacio tridimensional sin colisionar. Si X es un espacio topológico, podemos considerar el espacio de configuraciones ordenadas en X de k elementos, es decir,

$$F(X, k) = \{(x_1, \dots, x_k) \in X^k \mid x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\} \subset X^k$$

Fijado $k \geq 2$, analizamos, en primer lugar, $\text{TC}(F(\mathbb{R}^n), k)$ para $n \geq 3$. Veremos que la complejidad topológica de este espacio no depende de la dimensión n . Las demostraciones de las afirmaciones que haremos a continuación pueden encontrarse en [26] y [11]:

Si $n \geq 3$, se tiene que $F(\mathbb{R}^n, k) \simeq X$ con X un CW-complejo finito con $k - 1$ celdas, cada una con dimensión $q(n - 1)$ para cada $q \in \{0, \dots, k - 1\}$ y $\dim(X) = (k - 1)(n - 1)$. En particular, X es $(n - 2)$ -conexo puesto que $X^{(n-2)} = \{*\}$ (ver Apéndice 4.5). Se tiene, por el Corolario 2.58, que

$$\text{TC}(F(\mathbb{R}^n, k)) \leq \frac{2(k - 1)(n - 1)}{n - 1} = 2k - 2. \tag{3.5}$$

Para acotar inferiormente la complejidad topológica, utilizaremos cohomología con coeficientes reales. Esta teoría está ampliamente desarrollada en [5], [1] y [6].

Teorema 3.26. *Si $k \geq 1$, entonces $\text{TC}(F(\mathbb{R}^3, k)) = 2k - 2$.*

Demostración.

Claramente, si $k = 1$ entonces $\text{TC}(F(\mathbb{R}^3, 1)) = \text{TC}(\mathbb{R}^3) = 0$ al ser \mathbb{R}^3 contráctil y se tiene el resultado. Supongamos que $k \geq 2$. Necesitamos hacer uso de la cohomología $H^\bullet(F(\mathbb{R}^3, k); \mathbb{R})$. Como se indica en [1], sus generadores son ω_{ij} para cualesquiera $i, j \in \{1, \dots, k\}$ con grado $|\omega_{ij}| = 3$ con las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= -\omega_{ji}, \quad i, j \in \{1, \dots, k\}, \\ \omega_{ij}^2 &= 0, \quad \text{para cualesquiera } i, j \in \{1, \dots, k\}, \\ \omega_{rs}\omega_{st} + \omega_{st}\omega_{tr} + \omega_{tr}\omega_{rs} &= 0, \quad \text{para cualesquiera } r, s, t \in \{1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

Además, por la tercera relación, $\omega_{i_1j_1} \cdot \omega_{i_2j_2} \cdot \dots \cdot \omega_{i_pj_p} \neq 0$ si, y solo si, el subgrafo del grafo plano con conjunto de vértices $\{1, \dots, n\}$ y aristas (i_n, j_n) no tiene ciclos. Si tomamos el divisor de cero $\Omega_{ij} := \omega_{ij} \otimes 1 - 1 \otimes \omega_{ij} \in \text{Ker}(\smile)$, tenemos que

- i) $\Omega_{ij}^2 = (\omega_{ij} \otimes 1 - 1 \otimes \omega_{ij})^2 = -2\omega_{ij} \otimes \omega_{ij}$ y
- ii) $\prod_{j=2}^k \Omega_{1j}^2 = \prod_{j=2}^k (-2)(\omega_{1i} \otimes \omega_{1i}) = (-2)^{k-1}(\omega_{12} \cdot \dots \cdot \omega_{1k}) \otimes (\omega_{12} \cdot \dots \cdot \omega_{1k}) \neq 0$.

Por lo tanto, $\text{TC}(F(\mathbb{R}^3, k)) \geq 2k - 2$ y, en virtud de (3.5), concluimos el resultado. ■

Observación 3.27. Haciendo un razonamiento análogo, se puede demostrar que de $\text{TC}(F(\mathbb{R}^n, k)) = 2k - 2$ para todo $n \geq 3$ impar y $k \geq 1$.

3.7. Más ejemplos

El cálculo de la complejidad topológica de grupos de Lie, coincide con el cálculo de su categoría de Lusternik-Schnirelmann y es, actualmente, una línea de investigación en topología algebraica. Veamos un ejemplo en el que es posible realizar este cálculo.

El grupo ortogonal especial de orden 4

$$\mathrm{SO}(4) = \{A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^t = A^t \cdot A = I_4, \det(A) = 1\},$$

donde I_4 es la matriz identidad de orden 4, es un grupo de Lie conexo y compacto. Además, $\mathrm{SO}(4)$ es difeomorfo a $\mathbb{R}P^3 \times S^3$ (consultar [18, Pág. 294]), de modo que, en virtud del Corolario 2.26 y del Corolario 2.32, tenemos

$$\mathrm{TC}(\mathrm{SO}(4)) = \mathrm{cat}(\mathrm{SO}(4)) = \mathrm{cat}(\mathbb{R}P^3 \times S^3) \leq \mathrm{cat}(\mathbb{R}P^3) + \mathrm{cat}(S^3) = 3 + 1 = 4, \quad (3.6)$$

con lo que queda acotada superiormente su complejidad topológica. Para determinar la cota inferior utilizaremos la cohomología con coeficientes en \mathbb{Z}_2 .

Fijado el anillo conmutativo y unitario \mathbb{Z}_2 , en virtud del Corolario 2.40, se tiene que

$$\mathrm{nil}(\tilde{H}^\bullet(\mathbb{R}P^3 \times S^3; \mathbb{Z}_2)) \leq \mathrm{cat}(\mathbb{R}P^3 \times S^3).$$

Por la Proposición 2.43,

$$\begin{aligned} \times : H^\bullet(\mathbb{R}P^3; \mathbb{Z}_2) \otimes H^\bullet(S^3; \mathbb{Z}_2) &\rightarrow H^\bullet(\mathbb{R}P^3 \times S^3; \mathbb{Z}_2), \\ \alpha \otimes \beta &\mapsto a \times \beta = p_1^*(\alpha) \smile p_2^*(\beta) \end{aligned}$$

es un isomorfismo, siendo $p_1 : \mathbb{R}P^3 \times S^3 \rightarrow \mathbb{R}P^3$, $p_2 : \mathbb{R}P^3 \times S^3 \rightarrow S^3$ las proyecciones canónicas. Tomamos los generadores $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^3; \mathbb{Z})$ y $\beta \in H^3(S^3; \mathbb{Z}_2)$ respectivos

$$\begin{aligned} H^\bullet(\mathbb{R}P^3; \mathbb{Z}_2) &\cong \mathbb{Z}_2[\alpha]/(\alpha^4) \text{ con } |\alpha| = 1, \\ H^\bullet(S^3; \mathbb{Z}_2) &\cong \mathbb{Z}_2[\beta]/(\beta^2) \text{ con } |\beta| = 3 \end{aligned}$$

Si $a = p_1^*(\alpha) \in H^1(\mathbb{R}P^3 \times S^3; \mathbb{Z}_2)$ y $b = p_2^*(\beta) \in H^3(\mathbb{R}P^3 \times S^3; \mathbb{Z}_2)$, se tiene que $a, b \in \tilde{H}^\bullet(\mathbb{R}P^3 \times S^3; \mathbb{Z}_2)$. Operando:

$$a^3 \smile b = p_1^*(\alpha)^3 \smile p_2^*(\beta) = p_1^*(\alpha^3) \smile p_2^*(\beta) = \alpha^3 \times \beta = \times(\alpha^3 \otimes \beta) \neq 0.$$

Entonces $\mathrm{cat}(\mathbb{R}P^3 \times S^3) \geq 4$ y en virtud de (3.6) se tiene que $\mathrm{cat}(\mathbb{R}P^3 \times S^3) = 4$. Aplicando la Proposición 2.25 concluimos que $\mathrm{TC}(\mathrm{SO}(4)) = \mathrm{cat}(\mathbb{R}P^3 \times S^3) = 4$.

Para finalizar, veamos que para enteros $n, m \geq 1$, se tiene que

$$\text{TC}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n \times S^m) = \begin{cases} 2n + 1, & m \text{ impar}, \\ 2n + 2, & m \text{ par}. \end{cases}$$

Acotamos superiormente aplicando la Proposición 2.16:

$$\text{TC}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n \times S^m) \leq \text{TC}(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) + \text{TC}(S^m) = \begin{cases} 2n + 1, & m \text{ impar}, \\ 2n + 2, & m \text{ par}. \end{cases}$$

Fijado el cuerpo de los racionales y aplicando la Proposición 2.43,

$$\begin{aligned} \times : H^\bullet(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Q}) \otimes H^\bullet(S^m; \mathbb{Q}) &\rightarrow H^\bullet(\mathbb{C}\mathbb{P}^n \times S^m; \mathbb{Q}), \\ \alpha \otimes \beta &\mapsto a \times \beta = p_1^*(\alpha) \smile p_2^*(\beta) \end{aligned}$$

es un isomorfismo donde $p_1 : \mathbb{C}\mathbb{P}^n \times S^m \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$, $p_2 : \mathbb{C}\mathbb{P}^n \times S^m \rightarrow S^m$ son las proyecciones canónicas. Teniendo en cuenta las cohomologías de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ y de S^m y tomamos los generadores $\alpha \in H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Q})$ y $\beta \in H^m(S^m; \mathbb{Q})$. Si $a = p_1^*(\alpha) \in H^1(\mathbb{C}\mathbb{P}^n \times S^m; \mathbb{Z}_2)$ y $b = p_2^*(\beta) \in H^m(\mathbb{C}\mathbb{P}^n \times S^m; \mathbb{Z}_2)$ respectivamente, consideramos los divisores de cero $A := a \otimes 1 - 1 \otimes a$ y $B := b \otimes 1 - 1 \otimes b$, apoyándonos en la demostración de la Proposición 3.12, tenemos: Si m es impar:

$$a^{2n} \cdot b = a^{2n} \smile b = p_1^*(\alpha)^{2n} \smile p_2^*(\beta) = p_1^*(\alpha^{2n}) \smile p_2^*(\beta) = \alpha^{2n} \times \beta = \times(\alpha^{2n} \otimes \beta) \neq 0.$$

y por lo tanto,

$$A^{2n} \cdot B = \left((-1)^n \binom{2n}{n} a^n \otimes a^n \right) \cdot (b \otimes 1 - 1 \otimes b) = (-1)^{n+1} \binom{2n}{n} (\pm a^n b \otimes a^n + a^n \otimes a^n b) \neq 0.$$

Si m es par:

$$a^{2n} \smile b^2 = p_1^*(\alpha)^{2n} \smile p_2^*(\beta)^2 = p_1^*(\alpha^{2n}) \smile p_2^*(\beta^2) = \alpha^{2n} \times \beta^2 = \times(\alpha^{2n} \otimes \beta^2) \neq 0.$$

y por lo tanto,

$$A^{2n} \cdot B^2 = \left((-1)^n \binom{2n}{n} a^n \otimes a^n \right) \cdot (-2(b \otimes b)) = 2(-1)^{n+1} \binom{2n}{n} (a^n b \otimes a^n b) \neq 0.$$

Concluimos el resultado. ■

Observación 3.28. Este resultado nos permite obtener un espacio topológico X de cualquier complejidad topológica. Por ejemplo, si buscamos un espacio X tal que $\text{TC}(X) = 27$, tomamos $m = 1$ y notamos que $27 = 13 \cdot 2 + 1 = \text{TC}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{13} \times S^1) = 13$, luego $X = \mathbb{C}\mathbb{P}^{13} \times S^1$.

Apéndice

Este capítulo auxiliar está dedicado a presentar brevemente varias nociones y resultados relacionados con los CW-complejos, la conectividad de espacios y aplicaciones continuas y su relación con las fibraciones. Tales nociones y resultados se han usado en gran parte del Capítulo 2 y en el Capítulo 3 de cálculos, por lo que hemos creído conveniente incorporarlos en un apéndice.

4.1. CW-complejos

Los CW-complejos son los espacios topológicos naturales en teoría de homotopía. Es preciso conocer los fundamentos de este tipo de espacios. En esta sección veremos su definición y propiedades básicas que hemos empleado en la memoria. Para más detalles sobre CW-complejos en teoría de homotopía referimos al lector a [17], [18], [21], [22], entre otros. Comenzamos con algunas nociones previas:

Dada $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia arbitraria de espacios topológicos, recordemos que el espacio *unión disjunta* se define como

$$\bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha := \bigcup_{\alpha \in A} (X_\alpha \times \{\alpha\})$$

con la topología final inducida por los embebimientos del tipo $j_\alpha : X_\alpha \rightarrow \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ y $j_\alpha(x) = (x, \alpha)$. De este modo, un subconjunto $A \subset \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ es abierto si y solo si $j_\alpha^{-1}(A)$ es abierto en X_α para todo $\alpha \in A$. Además, si Y es espacio topológico y $f_\alpha : X_\alpha \rightarrow Y$ es continua, entonces existe una única aplicación $f : \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow Y$ continua tal que $f \circ j_\alpha = f_\alpha = f|_{X_\alpha}$. Como $X_\alpha \cong X_\alpha \times \{\alpha\}$ son homeomorfos, se identificarán estos espacios. Así, podremos considerar $X_\alpha \subset \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ como subespacios para todo $\alpha \in A$.

Por otro lado, dadas $f : X \rightarrow Y$ y $g : X \rightarrow Z$ aplicaciones continuas, consideramos su pushout como el cuadrado conmutativo siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{g} & Z \\
f \downarrow & & \downarrow \bar{f} \\
Y & \xrightarrow{\bar{g}} & Y \cup_X Z,
\end{array}$$

siendo $Y \cup_X Z := (Y \sqcup Z)/\sim$, donde \sim es la relación de equivalencia generada por las relaciones elementales $f(x) \sim g(x)$ con $x \in X$. Además, existen la proyección canónica en el cociente $\pi : Y \sqcup Z \rightarrow Y \cup_X Z$ y las restricciones naturales $\bar{g} = \pi|_Y : Y \rightarrow Y \cup_X Z$ y $\bar{f} = \pi|_Z : Z \rightarrow Y \cup_X Z$. Es fácil comprobar que dado $A \subseteq Y \cup_X Z$, se tiene que A es abierto (respectivamente cerrado) en $Y \cup_X Z$ si, y solo si, $\bar{g}^{-1}(A)$ es abierto (respectivamente cerrado) en Y y $\bar{f}^{-1}(A)$ es abierto (respectivamente cerrado) en Z .

El pushout es la construcción dual del pullback en el sentido de Eckmann-Hilton. En este sentido se verifica la siguiente propiedad universal: Para todo espacio topológico K y para cualquier par de aplicaciones continuas $\alpha : Y \rightarrow K$ y $\beta : Z \rightarrow K$ tales que $\alpha \circ f = \beta \circ g$, existe una única $\phi : Y \cup_X Z \rightarrow K$ aplicación continua tal que $\phi \circ \bar{g} = \alpha$ y $\phi \circ \bar{f} = \beta$.

Un tipo especial de pushout es el denominado *espacio de adjunción*, ver [17, Pág. 114].

Consideremos pares (X, C) *con collar*, es decir, X es un espacio de Hausdorff y C es cerrado en X tales que:

- i) Todo punto de $X \setminus C$ se puede separar de C por abiertos disjuntos.
- ii) Existe un entorno abierto U de C en X tal que C es retracto por deformación fuerte de U y $C \neq U$.

Para (X, C) verificando esta condición, se define el espacio de adjunción de X vía f como el pushout

$$\begin{array}{ccc}
C & \xrightarrow{f} & Y \\
\downarrow \text{inc} & & \downarrow \bar{\text{inc}} \\
X & \xrightarrow{\bar{f}} & X \cup_f Y.
\end{array}$$

La aplicación f se llama *aplicación de pegado* y \bar{f} *aplicación característica*.

Se tiene la proyección canónica $\pi : X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$. Además, las aplicaciones $\bar{f}|_{X \setminus C} : X \setminus C \rightarrow \bar{f}(X \setminus C)$ y $\bar{\text{inc}} : Y \rightarrow \bar{\text{inc}}(Y)$ son homeomorfismos con $\bar{f}(X \setminus C)$ abierto en $X \cup_f Y$ y con $\bar{\text{inc}}(Y)$ cerrado en $X \cup_f Y$. Obsérvese que Y puede considerarse un subespacio de $X \cup_f Y$.

Como (D^n, S^{n-1}) es un par con collar [17], dada una aplicación continua $f : S^{n-1} \rightarrow Y$, llamamos *espacio de adjunción con n -celda vía f* al pushout

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \xrightarrow{\bar{f}} & D^n \cup_f Y. \end{array}$$

La aplicación de parejas de espacios $\bar{f} : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (D^n \cup_f Y, Y)$ es continua, $\bar{f}|_{S^{n-1}} = f$ y $\bar{f}|_{D^n \setminus S^{n-1}} : D^n \setminus S^{n-1} \rightarrow (D^n \cup_f Y) \setminus Y$ es homeomorfismo. Similarmente, si $\{\phi_\alpha : S^{n-1} \rightarrow Y\}_{\alpha \in A}$ es una familia arbitraria de aplicaciones de pegado, es posible adjuntar una colección de n -celdas simultáneamente mediante un pushout

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\alpha \in A} S_\alpha^{n-1} & \xrightarrow{(\phi_\alpha)_{\alpha \in A}} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{\alpha \in A} D_\alpha^n & \xrightarrow{(\bar{\phi}_\alpha)_{\alpha \in A}} & X. \end{array} \tag{4.1}$$

donde S_α^{n-1} es una copia de la $(n-1)$ -esfera y D_α^n es una copia del n -disco, para cada $\alpha \in A$. Se llama *CW-complejo* a un espacio topológico X provisto de una estructura celular, es decir, una cadena de subespacios topológicos $\{X^{(n)}\}_{n \geq -1}$

$$\emptyset = X^{(-1)} \subseteq X^{(0)} \subseteq \dots \subseteq X^{(n)} \subseteq \dots \subseteq X,$$

tal que

i) $X^{(n)}$ se obtiene de $X^{(n-1)}$ adjuntando una colección (posiblemente vacía) de n -celdas. Es decir, para cada $n \geq 0$, se tiene un pushout de la forma

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{\alpha \in A_n} S_\alpha^{n-1} & \xrightarrow{(\phi_\alpha)_{\alpha \in A_n}} & X^{(n-1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{\alpha \in A_n} D_\alpha^n & \xrightarrow{(\bar{\phi}_\alpha)_{\alpha \in A_n}} & X^{(n)}. \end{array} \tag{4.2}$$

Obsérvese que, por convenio, estamos considerando $S^{-1} = \emptyset$, $D^0 = *$, por lo que $X^{(0)}$ es un espacio discreto. Sus elementos son las 0-celdas.

ii) $X = \bigcup_{n=0}^\infty X^{(n)}$ con la *topología débil* respecto de $\{X^{(n)}\}_{n \geq 0}$.

Observación 4.1. Un conjunto A es, por definición, abierto en X con la topología débil respecto de $\{X^{(n)}\}_{n \geq 0}$ si, y solo si, $A \cap X^{(n)}$ es abierto en $X^{(n)}$ para todo $n \geq 0$.

Una n -celda es un conjunto de la forma $e_\alpha^n = \phi_\alpha(D_\alpha^n \setminus S_\alpha^{n-1})$. La colección de todas las celdas en un CW-complejo forma una partición de X . La *dimensión* del CW-complejo será el menor n verificando $X^{(n)} = X$. De no existir tal n diremos que la dimensión del complejo es infinita. Nótese que si la dimensión de un CW-complejo es finita, entonces la condición *ii)* se deduce de *i)*. Se dice que un CW-complejo es *finito* si tiene un número finito de celdas. Obviamente, todo CW-complejo finito tiene dimensión finita. Además, un CW-complejo es finito si, y solo si, es compacto [21, Proposición 7.3.9]. Si un CW-complejo X tiene un número finito de n -celdas para cada $n \geq 0$, entonces, usando homología celular [18, Teorema 2.35], se tiene que la homología singular $H_\bullet(X; R)$ es de tipo finito en el sentido de la Definición 2.42. En particular, si X es finito, $H_\bullet(X; R)$ es de tipo finito.

Presentamos algunos ejemplos de CW-complejos:

- i)* Los CW-complejos de dimensión 1 son los grafos (no orientados)
- ii)* La esfera S^n es un CW-complejo de dimensión n donde se toma una única 0-celda $X^{(0)} = \{*\}$ y una única n -celda. Así, tenemos el pushout

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{f} & X^{(n-1)} = \{*\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \xrightarrow{\bar{f}} & S^n. \end{array}$$

Tenemos que $X^{(k)} = \{*\}$, $0 \leq k \leq n - 1$ y $X^{(n)} = S^n$

- iii)* La botella de Klein es un CW-complejo de dimensión 2, con una única 0-celda, dos 1-celdas y una 2-celda,



Figura 4.1: $X^{(0)} = \{x_0\}$, $X^{(1)} = a \cup b$ (figura ocho), $X^{(2)} = X^{(1)} \cup_f D^2$.

siendo la aplicación de pegado f la identificación de la región cuadrada (homeomorfa al 2-disco) según se describe en la Figura 4.1.

En general, haciendo uso de un argumento similar y teniendo en cuenta de que toda superficie es, salvo homeomorfismo, el espacio cociente de una región poligonal identificando

adecuadamente sus lados (véase, por ejemplo, [20, Pág.16]), se tiene que toda superficie es un CW-complejo de dimensión 2.

iv) Dado K un complejo simplicial, su realización geométrica $|K|$ es un CW-complejo donde cada n -celda de $|K|$ se corresponde con un n -símplice abierto de K .

v) Toda variedad diferenciable admite una estructura simplicial. En particular, admite una estructura de CW-complejo (ver [25] y [31, Teorema 12A, Pág. 124]).

El ejemplo *vi)* lo enunciaremos como una Proposición.

Proposición 4.2. *Toda n -variedad topológica compacta es homotópicamente equivalente a un CW-complejo finito de dimensión n .*

Una demostración clara de este conocido hecho (aunque sin demostración oficial en la literatura hasta ahora) puede encontrarse en el documento [15], del ArXiv.

vii) Los espacios proyectivos $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$ y $\mathbb{H}P^n$ son CW-complejos de dimensión n , $2n$ y $4n$ respectivamente. En concreto, $\mathbb{R}P^n$ se obtiene de $\mathbb{R}P^{n-1}$ adjuntando una n -celda,

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}P^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \mathbb{R}P^n. \end{array}$$

Aquí, la aplicación característica $\bar{\pi} : D^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ es el cociente cuando en el borde de D^n (es decir, en S^{n-1}) se identifica cada punto con su antipodal. Tenemos así la estructura celular

$$* = \mathbb{R}P^0 \subset \mathbb{R}P^1 \subset \dots \subset \mathbb{R}P^{n-1} \subset \mathbb{R}P^n$$

Análogamente, $\mathbb{C}P^n$ se obtiene de $\mathbb{C}P^{n-1}$ adjuntando un $2n$ -celda y $\mathbb{H}P^n$ se obtiene de $\mathbb{H}P^{n-1}$ adjuntando una $4n$ -celda.

Los CW-complejos son espacios de Hausdorff, normales y localmente contráctiles (cada punto tiene una base de entornos contráctiles). En particular, dichas estructuras son localmente conexas por caminos, esto es, en cada punto tienen al menos una base de entornos conexos por caminos, lo que tiene como consecuencia que, en el contexto de CW-complejos, las nociones de conexidad y conexidad por caminos coinciden.

Dados CW-complejos X e Y , entonces el espacio producto $X \times Y$ es un CW-complejo si se da alguna de las siguientes condiciones:

- i)* X , o bien Y , es localmente compacto.
- ii)* X e Y tienen un número contable de celdas.

En este caso, $\dim(X \times Y) = \dim(X) + \dim(Y)$, ver [21, Teorema 7.3.16].

4.2. Conectividad y equivalencias débiles

Para definir la conectividad de un espacio o de una aplicación continua, debemos presentar brevemente los grupos superiores de homotopía y ver sus principales propiedades. Para más detalles sobre grupos de homotopía y conectividad, consultar [18], [22], [27], [29].

Las clases de homotopía de lazos basados en un punto en un espacio X determinan el grupo fundamental $\pi_1(X, x)$ introducido por Poincaré. Esta estructura algebraica está asociada a X de tal manera que captura algunas de sus propiedades topológicas y homotópicas. Este grupo fue generalizado por Hurewicz y Čech, quienes contruyeron los n -grupos de homotopía de forma que para $n = 1$, se tiene el grupo fundamental como caso particular.

Si $n \geq 1$ y consideramos como punto base en la n -esfera S^n el punto $s_n = (1, 0, \dots, 0)$, se define el n -grupo de homotopía de un espacio topológico X basado en un punto $x_0 \in X$ como el corchete de homotopía punteado

$$\pi_n(X, x_0) := [S^n, s_n; X, x_0]$$

En este grupo, el elemento neutro viene dado por la clase de homotopía punteada de la aplicación constante en x_0 . Por otro lado, dados $[\alpha], [\beta] \in \pi_n(X, x_0)$, el producto $[\alpha] \cdot [\beta]$ es la clase de homotopía de la aplicación inducida $S^n \xrightarrow{\nabla} S^n \vee S^n \xrightarrow{(\alpha, \beta)} X$, tal y como se observa en la Figura 4.2.

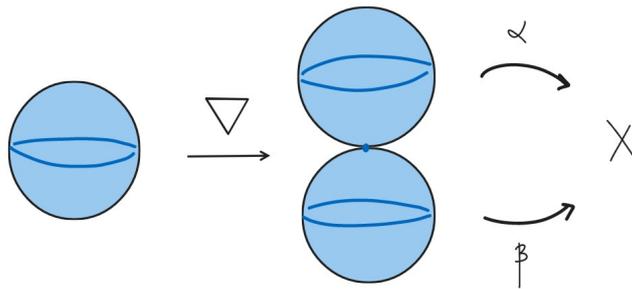


Figura 4.2: Esquema del producto en el grupo $\pi_n(X, x_0)$.

En general, $S^n \vee S^n$ es el espacio formado por dos n -esferas tangentes en un punto y $\nabla : S^n \rightarrow S^n \vee S^n$ es la aplicación continua que lleva el hemisferio norte a la primera esfera, el hemisferio sur a la segunda y el ecuador al punto de tangencia. Se puede ver como la aplicación cociente al colapsar, en la n -esfera, todos los puntos del ecuador a un

punto.

Dada una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$, se induce un homomorfismo de grupos para cada $x_0 \in X$,

$$\begin{aligned}\pi_n(f) : \pi_n(X, x_0) &\rightarrow \pi_n(Y, f(x_0)), \\ [\alpha] &\mapsto \pi_n(f)(\alpha) := [f \circ \alpha].\end{aligned}$$

Esta construcción tiene carácter funtorial, es decir, $\pi_n(g \circ f) = \pi_n(g) \circ \pi_n(f)$ (cuando tenga sentido la composición $g \circ f$) y $\pi_n(\text{id}_X) = \text{id}_{\pi_n(X, x_0)}$ para cada $n \geq 1$. Al igual que sucede con el grupo fundamental, si existe un camino Φ en X desde un punto x_0 hasta otro punto x_1 , entonces se induce un isomorfismo de cambio de punto base $T(\Phi) : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(X, x_1)$. En particular, si X es conexo por caminos, se tiene que $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(X, x_1)$ cualesquiera que sean los puntos $x_0, x_1 \in X$.

Por otro lado, se demuestra también que si $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia de homotopía, entonces $\pi_n(f) : \pi_n(X, x) \rightarrow \pi_n(Y, f(x))$ es isomorfismo de grupos para cualquier punto base $x \in X$ y $n \geq 1$. Existe una versión diferenciada para $n = 0$. Se puede definir

$$\pi_0(X, x) := [S^0, s_0; X, x],$$

donde $S^0 = \{-1, 1\}$ denota la 0-esfera con $s_0 = 1$. Este conjunto punteado no tiene estructura de grupo. Además, es sencillo comprobar que, como conjunto, es biyectivo al corchete de homotopía no punteado $\pi_0(X) := [*, X]$ (con $*$ espacio unipuntual), el cual coincide con el conjunto de las componentes conexas por caminos del espacio X . Similarmente, dada $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua, podemos definir funtorialmente, la aplicación punteada $\pi_0(f) : \pi_0(X, x) \rightarrow \pi_0(Y, f(x))$, o bien, la correspondiente aplicación punteada $\pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$, llevando la componente conexa por caminos de cada punto a la componente conexa por caminos de la imagen del punto.

Definición 4.3. *Se dice que una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ es n -equivalencia si para todo $x \in X$ y para todo $q \geq 0$, cada homomorfismo inducido*

$$\pi_q(f) : \pi_q(X, x) \rightarrow \pi_q(Y, f(x))$$

es

i) biyectivo cuando $q < n$ y

ii) sobreyectivo cuando $q = n$.

Diremos también que f es equivalencia débil de homotopía (o ∞ -equivalencia) si f es n -equivalencia para todo $n \geq 0$.

Como acabamos de comentar en otros términos, toda equivalencia de homotopía es equivalencia débil. El recíproco es cierto cuando X e Y son CW-complejos. Dicho resultado se conoce como Teorema de Whitehead, cuyo enunciado exponemos en el Teorema 4.9.

Definición 4.4. *Se dirá que un espacio topológico X es:*

- i) (-1)-conexo, si $X \neq \emptyset$.*
- ii) 0-conexo, si $X \neq \emptyset$ y $\pi_0(X) = \{*\}$, es decir, X es conexo por caminos.*
- iii) n -conexo ($n \geq 1$) si 0-conexo y $\pi_q(X, x) \cong 0$ para todo $1 \leq q \leq n$ y todo (equivalentemente, algún) $x \in X$.*

Para CW-complejos, se tiene una relación muy interesante con la n -conexidad.

Proposición 4.5. *Sea X un CW-complejo. Si $n \geq 0$, entonces son equivalentes:*

- i) X es n -conexo.*
- ii) X es homotópicamente equivalente a un CW-complejo Y tal que $Y^{(n)} = \{*\}$.*

Veamos algunos ejemplos recogidos en la siguiente proposición:

Proposición 4.6. *Sean X e Y espacios topológicos.*

- i) La n -esfera S^n es $(n - 1)$ -conexa (y no n -conexa) para $n \geq 1$.*
- ii) Si X es n -conexo e Y es m -conexo, entonces el join $X * Y$ es $(n + m + 2)$ -conexo.*
- iii) Si X es un espacio topológico n -conexo y $x_0 \in X$, entonces, el espacio de lazos $\Omega(X, x_0) = \{\alpha \in X^{[0,1]} \mid \alpha(0) = x_0 = \alpha(1)\}$ es $(n - 1)$ -conexo.*
- iv) $\mathbb{R}P^n$ es 0-conexo, $\mathbb{C}P^n$ es 1-conexo y $\mathbb{H}P^n$ es 3-conexo.*

Para ver *i)* y *iii)*, puede consultarse [29]. Para *ii)*, consultar [23]. Para *iv)*, se hace uso de la Proposición 4.5, teniendo en cuenta la estructura celular de estos espacios proyectivos.

Sean ahora $p : E \rightarrow B$ una fibración, $b_0 \in B$ y $F = p^{-1}(\{b_0\})$ la fibra de B en b_0 . Denotamos por $i : F \hookrightarrow E$ a la inclusión de la fibra en E . Dado $e_0 \in F$, entonces los grupos de homotopía conforman una sucesión exacta de homotopía (véase, por ejemplo, [22, Pág. 66]):

$$\cdots \rightarrow \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{\pi_n(i)} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{\pi_n(p)} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, e_0) \rightarrow \cdots \xrightarrow{\pi_0(p)} \pi_0(B, b_0).$$

Nótese que, para $n = 0$, los conjuntos no tienen estructura de grupo. Sin embargo, es posible definir un “núcleo” para este caso: Si $(X, x_0) \xrightarrow{f} (Y, y_0) \xrightarrow{g} (Z, z_0)$, se define $\text{Ker}(g) = g^{-1}(z_0)$ y se puede definir así la “exactitud”.

En el caso de las fibraciones, las nociones de n -equivalencia y n -conexidad confluyen en el siguiente lema, cuya demostración hemos creído conveniente incorporar:

Lema 4.7. Sean $p : E \rightarrow B$ una fibración y $n \geq 0$. Entonces, p es n -equivalencia si y solo si la fibra $F_b = p^{-1}(\{b\})$ es $(n - 1)$ -conexa, para todo $b \in B$.

Demostración.

Procedemos por inducción sobre n . Si p es una 0-equivalencia, entonces se tiene que la aplicación $\pi_0(p) : \pi_0(E) \rightarrow \pi_0(B)$, dada por $[x] \rightarrow [p(x)]$ es sobreyectiva. Para ver que F_b es (-1) -conexa, tenemos que demostrar que $F_b \neq \emptyset$. En efecto, dados $b \in B$ y $[e] \in \pi_0(E)$, entonces $\pi_0(p)([e]) = [b]$, luego $[p(e)] = [b]$ y se tiene que existe un camino $\alpha : [0, 1] \rightarrow B$ tal que $\alpha(0) = p(e)$ y $\alpha(1) = b$. Tomando la elevación de α respecto de p sobre un espacio unipuntual, $\tilde{\alpha} : \{*\} \times I \rightarrow E$, se tiene que $p(\tilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = b \in B$. Concluimos que $\tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}(\{b\}) = F_b \neq \emptyset$. Recíprocamente, si $F_b \neq \emptyset$ para cualquier $b \in B$, entonces la fibración $p : E \rightarrow B$ es sobreyectiva y concluimos que la aplicación inducida $\pi_0(p) : \pi_0(E) \rightarrow \pi_0(B)$ es sobreyectiva.

Si p es 1-equivalencia, entonces $\pi_0(p) : \pi_0(E) \rightarrow \pi_0(B)$ es aplicación biyectiva y $\pi_1(p) : \pi_1(E, e) \rightarrow \pi_1(B, p(e))$ es epimorfismo para todo $e \in E$. Tenemos que ver que F_b es conexo por caminos. Dado $b \in B$, tenemos por hipótesis que $F_b \neq \emptyset$, y si $e \in F_b$, entonces la sucesión

$$\pi_1(E, e) \xrightarrow{\pi_1(p)} \pi_1(B, b) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F_b, e) \xrightarrow{\pi_0(i)} \pi_0(E, e) \xrightarrow{\pi_0(p)} \pi_0(B, b)$$

es exacta, con $\pi_1(p)$ epimorfismo y $\pi_0(p)$ isomorfismo. Como $\partial^{-1}([e]) = \pi_1(B, b)$, se tiene que $\partial = C_{[e]}$ es la aplicación constante en $[e]$. De la exactitud obtenemos

$$\partial(\pi_1(B, b)) = \{[e]\} = \pi_0(i)^{-1}(\{[e]\}) = \pi_0(F_b, e).$$

Por otra parte, $\text{Im}(\pi_0(i)) = \pi_0(p)^{-1}(\{b\}) = \{[e]\}$. Luego, necesariamente $\pi_0(i) = C_{[e]}$ y concluimos que F_b es conexo por caminos. Recíprocamente, supongamos que F_b es 0-conexo para todo $b \in B$. Si $F_b \neq \emptyset$ y conexo por caminos para todo $b \in B$, entonces la fibración $p : E \rightarrow B$ es sobreyectiva y, por tanto, también es 0-equivalencia. En particular, la aplicación inducida $\pi_0(p)$ es sobreyectiva. Tenemos entonces la sucesión exacta

$$\pi_1(E, e) \xrightarrow{\pi_1(p)} \pi_1(B, b) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F_b, e) = \{[e]\} \xrightarrow{\pi_0(i)} \pi_0(E, e) \xrightarrow{\pi_0(p)} \pi_0(B, b).$$

De la exactitud se tiene que $\pi_1(B, b) = \text{Ker}(\partial) = \text{Im}(\pi_1(p))$ por lo que $\pi_1(p)$ es sobreyectiva. Falta ver que $\pi_0(p)$ es inyectiva. Tomamos dos elementos arbitrarios $[e_1]$ y $[e_2] \in \pi_0(E)$ tales que $[p(e_1)] = [p(e_2)]$. Existe entonces $\alpha : [0, 1] \rightarrow B$ camino en B tal que $\alpha(0) = p(e_1)$ y $\alpha(1) = p(e_2)$. Tomando la elevación de α respecto de p sobre un espacio unipuntual, $\tilde{\alpha} : \{*\} \times I \rightarrow E$, se tiene que $p(\tilde{\alpha}(0)) = \alpha(0) = p(e_1)$ y $p(\tilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = p(e_2)$. Se sigue que $\tilde{\alpha}(0) = e_1$ y $\tilde{\alpha}(1) = e_2$ y concluimos que $[e_1] = [e_2]$. Evidentemente, $\partial = C_{[e]}$ e $\text{Im}(\partial) = \text{Ker}(\pi_0(\text{inc}))$.

Supongamos el resultado cierto para $n - 1$ y veamos que se verifica para n . Si p es una n -equivalencia, entonces $\pi_0(p) : \pi_0(E) \rightarrow \pi_0(B)$ es aplicación biyectiva y $\pi_m(p) : \pi_m(E, e) \rightarrow \pi_m(B, p(e))$ es isomorfismo para todo $e \in E$ y para todo $1 \leq m \leq n$. Dado $b \in B$, si $e \in F_b$, entonces, por hipótesis de inducción, se tiene que F_b es $(n-2)$ -conexo, luego $\pi_q(F_b, e) \cong \{1\}$ para todo $1 \leq q \leq n - 2$. Gracias a la exactitud de la sucesión asociada a p , se tiene que

$$\pi_{n-1}(F_b, e) \cong \text{Im}(\pi_{n-1}(i)) = \text{Ker}(\pi_{n-1}(p)) = 0,$$

con lo que F_b es $(n - 1)$ -conexo. Recíprocamente, supongamos que F_b es $(n - 1)$ -conexo. Entonces, se tiene que $\pi_q(F_b, e) \cong 0$ para todo $1 \leq q \leq n - 1$. En particular, F_b es $(n - 2)$ -conexo y por la hipótesis de inducción, se deduce que p es una $(n - 1)$ -equivalencia. Resta ver p es una n -equivalencia: Sea $b \in B$; si $e \in F_b$, entonces de la sucesión exacta asociada a p , se tiene que $\pi_{n-1}(F_b, e) \cong 0$,

$$\{1\} = \text{Im}(\pi_{n-1}(i)) = \text{Ker}(\pi_{n-1}(p)).$$

Luego, el epimorfismo $\pi_{n-1}(p)$ es también inyectivo y, por lo tanto, isomorfismo. Por último, como F_b es $(n - 1)$ -conexo y la sucesión es exacta, se tiene que

$$\partial^{-1}(\pi_{n-1}(F_b, e)) = \pi_n(B, b) = \text{Ker}(\partial) = \text{Im}(\pi_n(p)),$$

es decir, $\pi_n(p)$ es sobreyectiva y concluimos que p es n -equivalencia. ■

Finalmente, el siguiente resultado es muy útil [22, Pág. 75]:

Proposición 4.8. *Sean P un CW-complejo y $f : X \rightarrow Y$ una n -equivalencia (con n posiblemente infinito). Si se considera la aplicación inducida en los corchetes de homotopía al componer f por la izquierda $f_* : [P, X] \rightarrow [P, Y]$, dada por $[\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$, entonces, se tiene que*

- i) f_* es biyectiva si $\dim(P) \leq n - 1$,
- ii) f_* es sobreyectiva si $\dim(P) \leq n$.

Con esto tenemos que, en el contexto de CW-complejos, las nociones de equivalencia y equivalencia débil coinciden.

Teorema 4.9 (de Whitehead). *Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua entre CW-complejos. Entonces f es equivalencia débil si, y solo si, f es equivalencia de homotopía.*

La prueba es consecuencia inmediata del resultado anterior. Es claro que, en general, toda equivalencia homotópica es equivalencia débil de homotopía. Recíprocamente, si $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia débil entre CW complejos, por la Proposición 4.8, se tiene que $f_* : [Y, X] \rightarrow [Y, Y]$ es sobreyectiva. De modo que existe $[g] \in [Y, X]$ verificando que $f_*([g]) = [\text{id}_Y]$ y, consecuentemente, $[f \circ g] = [\text{id}_Y]$, con lo que $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. Por otro lado, como $f_* : [X, X] \rightarrow [X, Y]$ es inyectiva por la Proposición 4.8 y $f_*([g \circ f]) = [f] = f_*([\text{id}_X])$, necesariamente, $g \circ f \simeq \text{id}_X$.

Bibliografía

- [1] Arnold, V. I. (1969). The cohomology ring of the colored braid group. *In Vladimir I. Arnold-Collected Works* (pp. 183-186). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [2] Bausum, D. R. (1975). *Embeddings and immersions of manifolds in Euclidean space*. Transactions of the American Mathematical Society, 213, 263-303.
- [3] Blyth, T. S. (2018). *Module theory: an approach to linear algebra*. University of St Andrews.
- [4] Bredon, G. E. (2013). *Topology and geometry* (Vol. 139). Springer Science and Business Media.
- [5] Cohen, F. (1973). Cohomology of braid spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 79(4), 763-766.
- [6] Cohen, F. R., Lada, T. J., May, P. J. (2007). *The homology of iterated loop spaces* (Vol. 533). Springer.
- [7] Cohen, D. C., Vandembroucq, L. (2017). Topological complexity of the Klein bottle. *Journal of Applied and Computational Topology*, 1(2), 199-213.
- [8] Dranishnikov, A. (2017). *On topological complexity of non-orientable surfaces*. *Topology and its Applications* 232, 61-69.
- [9] Dugundji, J. (1966). *Topology* (Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics) by James Dugundji (1966-05-03). (1871).
- [10] Eisenberg, M., Guy, R. (1979). A proof of the hairy ball theorem. *The American Mathematical Monthly*, 86(7), 571-574.
- [11] Fadell, E. R., Husseini, S. Y. (2000). *Geometry and topology of configuration spaces*. Springer Science and Business Media.
- [12] Farber, M. (2003). Topological complexity of motion planning. *Discrete and Computational Geometry*, 29(2), 211-221.
- [13] Farber, M., Tabachnikov, S., Yuzvinsky, S. (2003). *Topological robotics: motion planning in projective spaces*. *International Mathematics Research Notices*, 2003(34), 1853-1870.

- [14] Fox, R. H. (1941). *On the Lusternik-Schnirelmann category. Annals of Mathematics*, 333-370.
- [15] Friedl, S., Nagel, M., Orson, P., Powell, M. (2019). A survey of the foundations of four-manifold theory in the topological category. *arXiv preprint arXiv:1910.07372*.
- [16] Gallier, J. H., Xu, D. (2015) *A guide to the classification theorem for compact surfaces* Berlin: Springer.
- [17] Greenberg, M. J., Harper, J. R. (2018). *Algebraic topology: a first course*. CRC Press.
- [18] Hatcher, A. (2005). *Algebraic topology*
- [19] Lusternik, L., Schnirelmann, L. (1934). *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*.
- [20] Massey, W. S. (1967). (Vol. 56). *Algebraic topology: an introduction* New York: Springer.
- [21] Maunder, C. R. F. (1996). *Algebraic topology*. Courier Corporation.
- [22] May, J. P. (1999). *A concise course in algebraic topology*. University of Chicago press.
- [23] Milnor, J. (1956). Construction of universal bundles, II. *Annals of Mathematics*, 430-436.
- [24] Munkres, J. R. (2000). *Topology*.
- [25] Munkres, J. R. (2016). *Elementary Differential Topology. (AM-54), Volume 54*. Princeton University Press.
- [26] Roth, F. (2008). On the category of Euclidean configuration spaces and associated fibrations. *Groups, homotopy and configuration spaces*, 13,447-461.
- [27] Rotman, J. J. (2013). *An introduction to algebraic topology* (Vol. 119). Springer Science and Business Media.
- [28] Švarc, A. S. (1966). The genus of a fiber space. *Amer. Math. Soc. Transl. Ser.*, 2(55), 49140.
- [29] Spanier, E. H. (1989). *Algebraic topology*. Springer Science and Business Media.
- [30] Warner, Frank W. (1983). *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. New York: Springer.
- [31] Whitney, H. (2015). *Geometric integration theory*. Princeton university press.
- [32] Whitney, H. (1944). The singularities of a smooth n -manifold in $(2n-1)$ -space. *Annals of Mathematics*, 247-293.