Grafos en Secundaria:

Construyendo Puentes

Trabajo Fin de Máster

Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Especialidad: Matemáticas

Modalidad: Innovación Educativa

Guillermo Herrera Báez

TUTOR: ISRAEL GARCÍA ALONSO

Resumen

Cuando un profesor de matemáticas pretende crear una situación de aprendizaje (SA) que contemple los fundamentos básicos para adquirir las competencias relacionadas con la resolución de problemas, con todo lo que eso conlleva, debe focalizarse en que los problemas planteen una necesidad al estudiante. Además, el alumnado debe sentir que son ellos los que llegan a la solución. Esto hace que el recorrido por el conocimiento se haga de manera más natural y sin perder la motivación.

Así, este trabajo de fin de máster ofrece a los profesores de matemáticas una situación de aprendizaje para llevar al aula, enfocada en la técnica de aprendizaje basado en problemas. El contexto será dado por el modelo matemático que ofrecen los grafos, y el recorrido por el conocimiento necesario, se hará con el objetivo de responder a las cuestiones asociadas a un problema inicial.

Este fin, se consigue a través de una propuesta de innovación educativa en la que, primero justificamos con un análisis bibliográfico, la inclusión de los grafos como un herramienta matemática que debería estar presente en el currículum de secundaria, y a su vez, después de la implementación en el aula, se analizan y evalúan los resultados de la experiencia, de forma que se crea una perspectiva de lo que se produce, cuando utilizamos los grafos como contexto para resolver problemas en alumnos de la ESO.

De toda esta experiencia se concluye que el acto de innovación debería ser una práctica que el profesorado frecuente más a menudo. Ya que incita, en todo momento, a justificar y evaluar la labor educativa de forma eficaz, buscando así, que los alumnos adquieran un aprendizaje significativo.

Abstract

When a mathematics teacher aims to create a learning situation that encompasses the basic foundations for acquiring competencies related to problem-solving, with all that it entails, they must focus on ensuring that the problems present a need to the students. Additionally, the students should feel that they are the ones arriving at the solution. This allows for a more natural progression of knowledge and prevents loss of motivation.

Thus, this master's thesis seeks to provide mathematics teachers with a learning situation to bring into the classroom, focusing on the problem-based learning technique. The context will be provided by the mathematical model offered by graphs, and the journey through the necessary knowledge will be carried out with the objective of addressing the questions associated with an initial problem.

This goal is achieved through a proposal for educational innovation, where we first justify, through a literature analysis, the inclusion of graphs as a mathematical tool that should be present in the secondary curriculum. Subsequently, after implementing it in the classroom, the results of the experience are analyzed and evaluated, creating a perspective on what

occurs when graphs are used as a context for problem-solving among secondary school students.

From this entire experience, it is concluded that the act of innovation should be a practice that teachers engage in more frequently. It constantly encourages justifying and evaluating educational practices, effectively seeking to ensure that students acquire meaningful learning.

ÍNDICE

Capítulo 1. INTRODUCCIÓN.

A lo largo de este Trabajo Fin de Máster (TFM) de Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas en la especialidad de Matemáticas y en la modalidad de Innovación Educativa se presenta una propuesta encaminada a trabajar la resolución de problemas. Cabe decir que tras cursar las materias de este máster y conocer el currículo actual de matemáticas para los distintos niveles de Educación Secundaria y Bachillerato, éste hace bastante hincapié en que los estudiantes se hagan resolutores de problemas.

Cuando se piensa en la asignatura de matemáticas muchas veces se olvida el procedimiento que se aplica a un problema desde que se aparece hasta que se resuelve por completo. Este proceso en general sigue distintas fases. Primero, mientras estamos contemplando alguna situación ficticia o real, surgen algunas dudas, cuestiones que sugieren análisis. Es entonces, donde aparece la formulación de problemas. Cuando el problema está planteado, debemos buscar qué elementos matemáticos nos pueden ayudar a abordarlo. Los elementos seleccionados tienen su propia naturaleza, normalmente, sirven para modelizar: traducir lo que sucede en la realidad al lenguaje matemático. Con estos elementos matemáticos como ayuda, solo falta conocer sus propiedades, para comprobar si son válidos para resolver nuestro problema. Por último y quizás más importante, una vez resuelto el problema hay que dedicar tiempo a reflexionar sobre la solución.

Entender las matemáticas como un proceso que solventa problemas, es algo que convierte al alumno en competente, en lo que al currículum de matemáticas se refiere. Este TFM pretende darle importancia al proceso de resolución de problemas contextualizado en el uso del modelo matemático que ofrecen los grafos.

La estructural del TFM se divide en 5 capítulos:

Capítulo 1: Introducción.

En este capítulo se aborda la motivación de la elección del tema de grafos para conseguir formar a los alumnos como resolutores de problemas contemplando todo el proceso que conlleva.

Capítulo 2: Planteamiento del problema de innovación.

En este caso, se desarrolla el significado de innovar y más en concreto innovar centrándonos en los grafos, como herramienta matemática poco presente en el currículum actual. Se hace un recorrido por ciertas experiencias anteriores que trabajaron con grafos en el aula y se presentan los conocimientos que debe tener un profesor para abordar una propuesta como esta.

Capítulo 3: Propuesta de intervención: Construyendo Puentes.

En este capítulo consta de dos partes. En la primera, se presenta el “Problema inicial” y la secuencia de actividades a la que da pie. Esta secuencia está compuesta por cuatro tareas y sus correspondientes actividades diseñadas para hacer un recorrido por el conocimiento necesario que envuelve al “Problema inicial", pero también habrá actividades en otros contextos. La propuesta se presenta tal y como se deberá entregar al alumnado para ser implementada en el aula. Cada actividad irá acompañada de una descripción de la misma, la ficha para el alumno, la propuesta para su desarrollo en el aula y la fundamentación curricular. Se concluye el capítulo con una segunda parte dedicada a la evaluación de las tareas y actividades propuestas adjuntando las herramientas con las que llevar a cabo la evaluación de los instrumentos de evaluación seleccionados.

Capítulo 4. Evaluación de la propuesta

Se hace un plan de seguimiento y evaluación de la propuesta adjuntando la autoevaluación del profesorado y la encuesta de satisfacción para el alumnado sobre su experiencia.

Capítulo 5. Implementación. Análisis y Propuestas de mejora.

Finalmente, en este capítulo se incluyen algunos resultados de su puesta en práctica en un centro de Educación Secundaria, del que se extrajeron algunas observaciones y conclusiones que darán lugar a señalar algunas propuestas de mejora de la situación de aprendizaje.

Capítulo 2. PLANTEAMIENTO DE LA INNOVACIÓN.

A lo largo de este capítulo se justifica el porqué de esta propuesta. Primero hablaremos de qué características sustentan la innovación educativa, en concreto en el área de las matemáticas. Luego nos centraremos en las evidencias y experiencias a la hora de crear situaciones de aprendizaje con grafos. Y se termina con lo referido al conocimiento necesario de un profesor de matemáticas.

2.1. Innovación educativa en matemáticas.

La innovación educativa en las matemáticas siempre ha sido un aspecto fundamental. Y, además, ha cobrado mayor relevancia en los últimos años, con el objetivo de promover un aprendizaje significativo en los estudiantes. Diversas referencias respaldan la importancia de implementar enfoques novedosos que estimulen la resolución y planteamiento de problemas, la aplicación práctica de los conceptos matemáticos y el pensamiento crítico (Sáenz Castro y Lasa Oyarbide, 2018).

Desde un punto de vista etimológico, innovar proviene del latin *innovatio*, derivado de *novus*, que significa “nuevo” o “novedad”. El prefijo *in* - añade los significados “dentro”, “en el interior”, de modo que *innovatio* podría traducirse como “introducir algo nuevo”. Pero el acto de introducir algo nuevo, no tiene por qué ser referido a lo más reciente. La novedad puede consistir en resignificar algo anterior y conocido, con el objetivo de provocar reflexión teórica sobre las vivencias experiencias e interacciones del aula.

Innovar en la enseñanza en general, y en matemáticas en particular, está muy relacionado con la investigación. La diferencia es que la innovación no pretende alcanzar nuevos conocimientos de generalización asegurada, sino mejorar la actividad matemática en un aula. Aun así, un profesor que trate de innovar, necesita conocimientos análogos a los requeridos por un investigador ya que la manera de proceder presenta semejanzas. Para que realmente estemos hablando de innovación, debemos establecer varias condiciones. Sáez Castro y Lasa Oyarbide (2018) señalan como mínimo las siguientes:

- Modificación justificada. El profesor debe tener claramente determinado una situación problemática que quiere mejorar.
- La modificación introducida debe estar fundamentada en los resultados de la investigación.
- La actuación debe de estar planificada de antemano, tratando de controlar el mayor número posible de variables en el diseño.
- Se debe establecer un mecanismo de evaluación de resultados en función de los objetivos previstos.

Por otro lado, existen diversos factores que pueden obstaculizar los procesos de innovación educativa:

- Predisposición a continuar trabajando tal como se ha hecho toda la vida.

- El individualismo o apego del profesorado al aula como territorio en el nada ni nadie se puede inmiscuir.
- El colectivo docente puede anteponer la defensa de sus intereses particulares, mostrando su poder hegemónico en la toma de decisiones ante el alumnado y sus padres.
- La propia formación del profesorado. En ciertas ocasiones es insuficiente.
- La falta de un clima de confianza y consenso en los equipos docentes.

En definitiva, el profesorado de matemáticas en la secundaria debe conocer los resultados de investigación en didáctica matemática y saber cómo aplicarlos no solo para innovar, sino también para aplicar criterios relevantes en su diaria toma de decisiones sobre aspecto de diseño y desarrollo curricular.

2.2. Enseñanza y grafos.

Para el desarrollo de nuestra innovación hemos centrado la mirada en el conocimiento sobre grafos. Es un contenido sencillo, pero con grandes posibilidades.

Los grafos como elemento matemático surgieron en el siglo XVIII y tienen una amplia aplicación en la vida cotidiana, especialmente en la era digital, donde las redes sociales y los sistemas de información están presentes en nuestra vida diaria. En el ámbito educativo, los grafos se pueden utilizar como una herramienta para la modelización y resolución de problemas, ayudando a desarrollar habilidades de análisis y abstracción.

En el currículum actual, están tímidamente presentes, en el bachillerato.

Tal y como defiende Rosenstein (2018), los planes de estudios de matemáticas escolares deberían tomar en serio la importancia de la matemática discreta y, en particular, el trabajo con grafos, como herramienta valiosa para ayudar a los estudiantes a convertirse en resolutores de problemas con razonamiento efectivos. Al incluir esto en la educación secundaria, fomenta la resolución de problemas no rutinarios y enseña una matemática realista y aplicable a situaciones de la vida real. En este sentido, el Consejo Europeo en 2018 (EU Council, 2018) ya recomendaba la inclusión del trabajo con grafos en la educación secundaria, debido a la creciente necesidad de que los estudiantes adquieran habilidades en el análisis y la visualización de datos en el mundo actual, cada vez más digital.

Experiencias educativas con grafos

En la revisión bibliográfica realizada hemos podido constatar que se han llevado a cabo experiencias educativas en las que se introducen los grafos desde finales del siglo pasado. Las razones para su introducción son muy variadas.

Desde el trabajo de Chartrand y Wall (1972) se sugiere la introducción del trabajo con grafos en secundaria por dos razones principales:

1. Los grafos permiten una visión matemática sobre juegos y puzzles así que fomentan un aprendizaje significativo. Además, la resolución de estos con grafos, promueve nuevas estrategias para abordar problemas.

2. Los conceptos básicos de la Teoría de grafos son sencillos de entender, por lo que no produce rechazo en los estudiantes.

En el artículo presentado por John Niman (1975), se refleja una reafirmación de las conclusiones del trabajo de Chartrand y Wall (1972). A su vez, se sustenta en el *feedback* de los estudiantes. El efecto sobre el alumnado, al trabajar con grafos, es bastante positivo. Ya que, el uso de los grafos en la resolución de problemas y búsqueda de patrones, mejora la autoeficacia de los alumnos, pues los grafos son una herramienta sencilla pero potente.

Por otro lado, Chinn (1983) coloca a los grafos como un elemento matemático para trabajar mediante un método por descubrimiento. Argumenta que la teoría de grafos es un área que nos permite utilizar técnicas no tradicionales de enseñanza. Además, fundamenta la enseñanza de los grafos con ciertos elementos curriculares de la época.

A su vez, Robinson (2006) de nuevo confirma que: Los grafos crean pensamiento crítico en un ambiente amigable. Esto se debe a que los elementos matemáticos son de fácil comprensión, así los alumnos se muestran más activos ante el aprendizaje.

Por último, en el trabajo de Gaio et al. (2020), resaltan la idea de que trabajar los grafos con alumnos de secundaria permite fácilmente la contextualización de los problemas para acercar el conocimiento a los estudiantes. Asimismo, presenta un extracto de diálogo entre alumnos que trabajan en grupo y reflexionan sobre el problema de forma espontánea. De aquí podemos deducir que los grafos son una vía por la que se consigue que el estudiante exprese su manera de reflexionar, y discuta sus razonamientos con sus iguales.

Esta Lista de documentos justificando la implementación de situaciones de aprendizaje en las que intervengan los grafos, nos deja una línea de trabajo en la que estamos seguros de ofrecer oportunidades de aprendizaje efectivas.

2.3. Los grafos como innovación

El análisis bibliográfico nos ha ayudado a conocer experiencias en torno a la enseñanza y el aprendizaje de los grafos en la secundaria. En este sentido, observamos que los grafos pueden ser una herramienta que permite desarrollar estrategias para pensar y abordar problemas de matemáticas. Así, nuestra propuesta se dirigirá a este campo de estudio, de forma que nuestros estudiantes no sólo conozcan los grafos, sino que su utilización les invite a pensar matemáticamente y lograr así el desarrollo de un aprendizaje significativo.

Los grafos pueden ser un elemento matemático que trabaje sobre ciertas carencias muy presentes en alumnos de secundaria:

Hay muchas dificultades que pueden ser observadas en los estudiantes: les resulta difícil proponer razonamientos propios y además en muchas ocasiones no logran *resolver sencillos problemas que pueden presentarse en la vida cotidiana y que tienen relación con la matemática. Probablemente, esta situación esté relacionada con un modelo cultural que busca reproducir el conocimiento más que producirlo* (Braicovich, 2020, p.7).

Por otro lado, ajustar el conocimiento de grafos para cursos de Secundaria, justificando el trabajo sobre ciertas competencias específicas y saberes básicos curriculares, como son los relacionados con la resolución de problemas, la elaboración de conjeturas y el manejo de modelos matemáticos, es una labor que presenta un claro carácter innovador, ya que el trabajo sobre conjeturas y modelos matemáticos, tradicionalmente no está presente en la enseñanza de las matemáticas escolares.

Con todo esto, se presenta una propuesta que tiene el estudiante como protagonista, que persigue potenciar el aprendizaje significativo a través de la resolución de problemas auténticos, conectados con la vida real, establecer metas claras y desafiantes, y crear un ambiente de aprendizaje en el que los estudiantes se sientan seguros para tomar decisiones, explorar ideas y abordar los errores como oportunidades de aprendizaje. Para todo lo anterior, usaremos los grafos como herramienta innovadora con la que resolver problemas y plantear conjeturas que deberán comprobar y argumentar.

2.4 Conocimientos del profesor.

Para construir una propuesta de innovación, Es importante que el rol del profesor vaya más allá de simplemente controlar los contenidos y se enfoque en promover el aprendizaje significativo en los estudiantes atendiendo a varios aspectos, tratando de conseguir comprensión profunda y motivación intrínseca en los alumnos, capacidad de transferir conocimientos a diferentes contextos y desarrollar habilidades de pensamiento crítico. Hay varios modelos que estructuran los conocimientos necesarios de un profesor de matemáticas. Un ejemplo, es el modelo *MTSK* (Muñoz-Catalán et al., 2015) donde se separa el conocimiento en dos grandes dimensiones: conocimiento sólido del contenido y habilidades didácticas.

2.4.1 Modelos de conocimiento del profesor

El modelo MTSK (Mathematics Teacher's Specialized Knowledge) es un enfoque que describe y organiza los diferentes aspectos del conocimiento especializado que los profesores de matemáticas deben poseer para enseñar de manera efectiva.

El modelo destaca la importancia de que los profesores de matemáticas deben combinar a grandes rasgos, un conocimiento sólido del contenido con habilidades didácticas, es decir, una comprensión del proceso de enseñanza-aprendizaje y un entendimiento del contexto educativo. (Figura 1)

Los siguientes subdominios del Modelo describen áreas específicas del conocimiento especializado del profesor de matemáticas:

1. Conocimiento de los temas (KoT): Este subdominio se refiere al conocimiento profundo de los temas y conceptos matemáticos específicos que se enseñan en el currículo. Los profesores deben comprender en detalle los contenidos matemáticos relevantes, incluyendo sus propiedades, relaciones y aplicaciones.

2. Conocimiento de la Estructura de la Matemática (KSM): Este subdominio abarca la comprensión de la estructura lógica y la organización de la disciplina matemática. Los profesores deben tener un conocimiento profundo de los fundamentos, los principios y las conexiones dentro de la matemática, así como una visión de cómo se desarrolla el conocimiento matemático a lo largo del tiempo.

3. Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM): Este subdominio se refiere a la comprensión de cómo los matemáticos profesionales investigan, razonan y resuelven problemas matemáticos. Los profesores deben estar familiarizados con los métodos, las estrategias y los procesos utilizados por los matemáticos en la práctica para desarrollar el pensamiento matemático y la resolución de problemas.

4. Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT): Este subdominio implica el conocimiento de estrategias pedagógicas efectivas para enseñar matemáticas. Los profesores deben comprender cómo seleccionar y secuenciar actividades, plantear preguntas desafiantes, utilizar recursos didácticos adecuados y brindar apoyo a los estudiantes para promover su aprendizaje matemático.

5. Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM): Este subdominio se refiere a la comprensión de cómo los estudiantes aprenden matemáticas. Los profesores deben estar familiarizados con las características del aprendizaje matemático, incluyendo los errores y dificultades comunes, las etapas de desarrollo del pensamiento matemático y las estrategias efectivas para abordar las necesidades de los estudiantes.

6. Conocimiento del Currículum (KSML): Este subdominio implica la comprensión de los saberes básicos y competencias establecidas en el currículo de matemáticas. Los profesores deben estar al tanto de las metas específicas que se espera que los estudiantes alcancen en cada nivel educativo.

Estos subdominios del modelo MTSK resaltan áreas clave del conocimiento especializado que los profesores de matemáticas deben desarrollar para ser eficaces en su enseñanza. Al integrar estos subdominios en su práctica docente, los profesores promueven un aprendizaje matemático sólido y significativo en sus estudiantes.

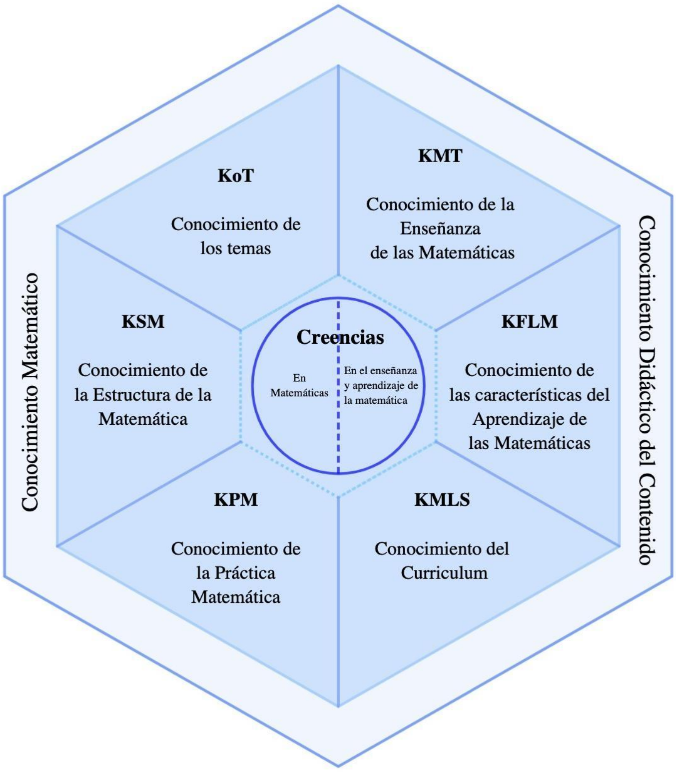


Figura 1. Esquema del MTSK. Fuente: Muñoz-Catalán et al., 2015

2.4.2 Conocimiento del contenido: Los grafos.

En el anterior apartado estructuramos el conocimiento del profesor en dos grandes dimensiones. Seguidamente, abordamos la dimensión relacionada con el conocimiento matemático que debe poseer el profesor. En este caso, en relación con los grafos haremos un recorrido por los principales contenidos relacionados y que, por su naturaleza, son fácilmente trasladables a la enseñanza en educación secundaria.

En cada apartado incorporamos algunos “apuntes didácticos” con los que hacer referencia a oportunidades que ofrecen los contenidos para crear actividades.

Presentamos ahora algunas definiciones que, aunque básicas, son necesarias para trabajar con grafos. Extraídas del manual *Graph and Network Theory* de Henning y van Vuuren (2022).

Concepto de grafo.

Grafo. Un grafo G es un par donde cada elemento es un conjunto que representa vértices y aristas: $G(V, A)$, $V \neq \emptyset$.

Ejemplo: $G_0(V, A) = (\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\})$. Figura 2.

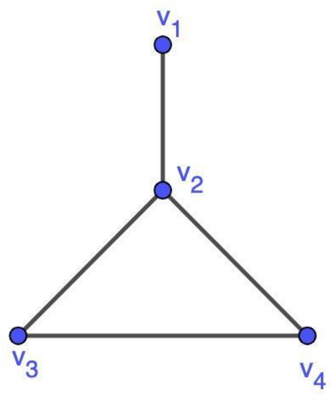


Figura 2. Ejemplo de grafo. Fuente: Elaboración propia

Obsérvese que a priori, en un grafo simple, $v_i v_j \equiv v_j v_i$ donde $i, j \leq |V|$

Grado de un vértice. En un Grafo, definimos el grado asociado a un vértice como la cantidad de aristas conectadas a él y lo denotamos por: $gr(v_i)$.

Ejemplo: En $G_0(V, A)$, $gr(v_2) = 3$, $gr(v_3) = gr(v_4) = 2$, $gr(v_1) = 1$.

Camino Euleriano. Diremos que un grafo admite un camino Euleriano cuando puedes crear una secuencia de todas las aristas de forma sucesiva sin repetir ninguna.

Ejemplo: $G_0(V, A)$ es Euleriano, ya que el camino $\{v_1 v_2 , v_2 v_3 , v_3 v_4 , v_2 v_4\}$ cumple la definición. En cambio, el siguiente grafo, $G_1(V, A)$, no. (Figura 3)

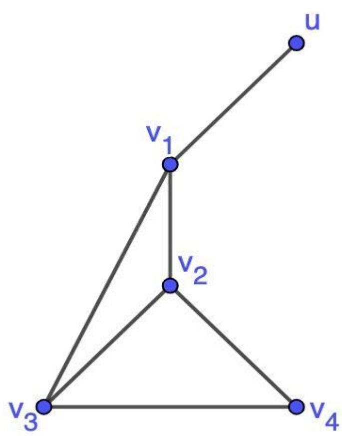


Figura 3. Grafo con camino euleriano. Fuente: Elaboración propia

Obsérvese que la secuencia de aristas para el camino Euleriano no tiene por qué ser única.

Camino Hamiltoniano. Diremos que un grafo admite un camino Hamiltoniano cuando puedes crear una secuencia de todos los vértices de forma sucesiva sin repetir ninguno.

Ejemplo: $G_1(V, A)$ es Hamiltoniano, ya que el camino $\{u, v_1, v_3, v_2, v_4\}$ cumple la definición. En cambio, el siguiente grafo, $G_2(V, A)$, no. (Figura 4)

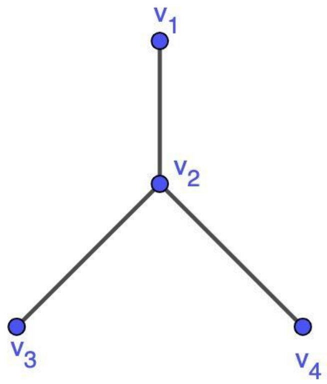


Figura 4. Grafo con camino hamiltoniano. Fuente: Elaboración propia

Obsérvese que la secuencia de vértices para el camino Euleriano no tiene por qué ser única.

Apunte didáctico (1). La no unicidad de los caminos Eulerianos y Hamiltonianos nos permite hacer hincapié en actividades con varias soluciones. Esto es importante para dejar a la vista una característica fundamental de las matemáticas: Los problemas pueden tener más de una solución correcta.

Apunte didáctico (2). El hecho de que no exista equivalencia entre los dos tipos de caminos, nos brinda una oportunidad para crear una actividad que trabaje la lógica matemática y por otro lado la búsqueda e identificación de contraejemplos.

Tipos de grafos.

Grafo Plano. Grafo donde ni ninguna arista se corta.

Grafo Completo. Grafo donde el grado de cada vértice es $|V| - 1$

Árbol. Grafo en el que cualquier par de vértices están conectados por exactamente un camino. (No tiene ciclos)

Bipartito. Grafo donde el conjunto de vértices puede dividirse en dos subconjuntos disjuntos, es decir los vértices de un mismo conjunto no pueden estar conectados entre sí.

Apunte didáctico (3). Tener en cuenta algunos tipos de grafos nos ofrece la posibilidad de trabajar en problemas con diversos contextos.

Algunos teoremas y sus consecuencias.

<u>Teorema del apretón de manos</u>. En un grafo $G(V, A)$, la suma de los grados de los vértices es el doble que la cantidad de aristas.

$$\sum_{v_i \in V} gr(v_i) = 2|A|$$

Demostración. Es inmediata si observamos que cada arista está conectada necesariamente a dos vértices. Así que, cuando sumamos el grado de cada vértice contamos el doble de aristas.

<u>Corolario del teorema del apretón de manos</u>. En un grafo $G(V, A)$, la cantidad de vértices con grado impar es par.

Demostración. Sea $G(V, A)$ un grafo donde, $|A| = m$, $|V| = n$. Si G no tiene vértices de grado impar, la demostración es trivial. Si G tiene $k \geq 1$, $k \in N$, vértices impares. Los denotamos por:

$v_1, v_2, \ldots, v_k$; $gr(v_i)$ impar para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Entonces supongamos en primera instancia que: $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n$ son vértices con grado par. En este caso tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{k} g(v_i) + \sum_{i=k+1}^{n} gr(v_i) = 2m.$$

Como $\sum_{i=k+1}^{n} gr(v_i)$ es par, tenemos que, $\sum_{i=1}^{k} g(v_i) = 2m - \sum_{i=k+1}^{n} gr(v_i)$ es par.

Como sabemos que $gr(v_i)$ impar para todo $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ podemos concluir que

k es par, ya que para que la suma de impares es par hay que sumar una cantidad par

de veces.

Si ahora suponemos que $v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n$ son vértices con grado impar, significa que todos los vértices de G tienen grado impar y volvemos a argumentar de forma análoga que ahora también k debe ser par.

Apunte didáctico (4). Con un buen manejo de lo anterior, podemos crear actividades donde incitamos a crear conjeturas, basadas en el análisis de casos y tratando de generalizar.

<u>Teorema de Euler</u>. Hay varias formulaciones para caracterizar la existencia de Caminos eulerianos en un grafo *conexo*. Nosotros vamos a expresarlo de la siguiente manera:

Un grafo G admite un camino Euleriano si y sólo si la cantidad de vértices de grado impar, es inferior a 2. Y además si G tiene 2 vértices de grado impar, el camino Euleriano, empieza en uno y acaba en el otro.

La demostración no la vamos a comentar aquí, pero se encuentra en Henning y van Vunner, p. 294.

Apunte didáctico (5). Al igual que con los anteriores resultados, podemos crear actividades donde, con un análisis de casos, los estudiantes lleguen a conjeturar el resultado teórico.

Caminos Hamiltonianos. Para garantizar que un grafo admite un camino Hamiltoniano, demos trabajar sobre un grafo completo. En otros casos podemos dar las condiciones necesarias o suficientes pero no ambas (Henning y van Vunner, p. 325)

Apunte didáctico (6). Esta falta de caracterización la podemos aprovechar para hacer actividades basadas en el "ensayo y error" para incentivar la búsqueda de soluciones con perseverancia.

Capítulo 3. PROPUESTA DE INNOVACIÓN.

La propuesta se apoya en la presentación de un problema inicial que contiene varias cuestiones a analizar. Esto da pie a trabajar sobre secuencia de actividades, donde todas ellas tienen su razón de ser y siguen una sucesión natural y ajustada al conocimiento introductorio de los grafos.

El capítulo inicia con la justificación y descripción de la situación que se pretende implementar en el aula, luego se detalla la progresión de actividades y finaliza con la estructura evaluativa de la propuesta.

3.1 Situación de aprendizaje: *Construyendo Puentes.*

Justificación.

Los grafos no son un contenido propio de la Educación Secundaria pues no se recogen en el currículo (Decreto 30/2023), por lo tanto, es algo ajeno a la mayoría de los estudiantes. La primera intención de la propuesta es que conecten con algo que ellos sí conocen, como son los puentes. La analogía que se crea en el "Problema Inicial" (Figura 5) entre grafos y puentes se plantea con el objetivo de crear a partir de los puentes, su *esquema conceptual* sobre grafos.

Nuestro objetivo es que los estudiantes centren sus esfuerzos en resolver los problemas que se plantean y para ello, el desarrollo de la propuesta pasa por actividades de distinta naturaleza. Todas ellas tienen la intención de dar una visión crítica y práctica de los grafos en la resolución y modelización de problemas. Se comenta en la descripción de la situación de aprendizaje naturaleza de estas actividades.

La situación de aprendizaje busca que no se perciba por el estudiante como un tema tradicional, sino un contexto que presenta una necesidad de análisis, donde los grafos serán la herramienta matemática que nos ayude: grafos para resolver problemas. El manejo de los grafos para modelizar y dar respuesta a las cuestiones del "Problema Inicial", tiene como objetivo trabajar el aspecto competencial del currículum actual (Decreto 30/2023).

Partir de un "Problema Inicial" para la propuesta persigue fomentar el aprendizaje situado, donde el estudiante sea el que avance por el conocimiento y se enfrente la mayor parte del tiempo de forma autónoma a las cuestiones y problemas que se les plantea.

Construyendo Puentes.

Imaginemos que queremos ser constructores de puentes. Y el Gobierno de Canarias está planeando construir puentes entre las islas porque los viajes en barco y avión son insuficientes para las necesidades de transporte de mercancías entre las islas. Esto nos lleva a plantearnos unas cuantas cuestiones.

Figura 5. Imagen del Problema Inicial [Problema inicial. Construyendo Puentes]

Descripción de La Situación de Aprendizaje.

Se crea una situación ficticia pero verosímil, donde el estudiante será constructor de puentes en las Islas Canarias. Esto hace que surjan diversas preguntas que el alumno deberá contestar justificadamente. Por lo tanto, se incita a adquirir conocimientos nuevos relacionados con la conectividad de las islas a través de puentes.

El planteamiento del problema dará lugar a una secuencia de actividades estructuradas en cuatro tareas con las que profundizar en el estudio de la herramienta que ayudará a modelizar la situación planteada y facilitará su resolución: los grafos.

La primera, se trabaja a continuación de la presentación del “Problema Inicial” a los estudiantes. Se introduce en la herramienta matemática “grafo” y habrá dos conceptos principales: el propio concepto grafo y sus elementos, y el grado de un vértice.

Durante el desarrollo de la segunda tarea trabajamos sobre el resultado teórico que relaciona la cantidad de aristas con la suma de los grados de los vértices. La intención es que sean los estudiantes los que analicen este patrón y describan la propiedad.

Por otro lado, en la tercera tarea, se trabaja sobre el resultado que justifica la existencia de un recorrido euleriano sobre el grafo. De nuevo será el alumno el que llegue deberá conjeturar la propiedad que se verificar y argumentar sus conclusiones. Haremos referencia, con un relato, a la historia de cómo aparecieron por primera vez los grafos.

La última tarea presenta el concepto de recorrido hamiltoniano y trabaja sobre las diferencias con el euleriano. Además, trata de destacar la importancia de este tipo de recorrido, aunque no exista una caracterización que justifique su existencia sobre un grafo en general.

En la Tabla 1 se muestra la estructura de la situación de aprendizaje con indicación de las tareas y actividades que la conforman.

Nº Tarea	Tarea	Nº Actividad	Actividad
1	**Conectando las islas**	1.1	Primeros pasos
		1.2	La provincia de SC de Tenerife
		1.3	¿Dónde pueden aparecer los grafos?
		1.4	Graduando los grafos
2	**¿Nos vale todo ?**	2.1	Primeras respuestas al Problema Inicial
		2.2	¿Qué está pasando?
		2.3	Otros contextos
3	**Todos los puentes de una**	3.1	¿Cuándo se podrá?
		3.2	Un poco de historia
		3.3	Recorridos sin levantar el lápiz
		3.4	Volvemos al Problema Inicial
		3.5	Un problema Complejo o No tanto
4	**Todas las islas de una**	4.1	Última pregunta del Problema Inicial
		4.2	Clasificando recorridos
		4.3	Ordenando con grafos

Tabla 1. Relación de tareas y actividades. Fuente: elaboración propia.

Fundamentación curricular

El Decreto 30/2023, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Canarias, en su Anexo 4, recoge que una situación de aprendizaje es una concreción del currículo, y en este sentido, debe caracterizarse como una oportunidad de adquirir competencias específicas trabajando tareas o actividades significativas y relevantes. También debe promocionar el aprendizaje activo y autónomo, así como, debe estar presente la vinculación con la realidad y la vida cotidiana. La SA de este trabajo contiene las anteriores características.

En el citado decreto, no se recoge como saber básico el trabajo con grafos en Educación Secundaria, pero ya en el Capítulo 2 dimos justificación al trabajo con grafo para contextualizar problemas, vamos a construir esta situación de aprendizaje que a su vez establece relaciones coherentes entre las Competencias específicas, Criterios de evaluación y Saberes básicos y así mismo, trabaje los grafos.

En este caso en particular, nos hemos centrado en las competencias C1 y C2 que abordan la propia resolución de problemas:

> C1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones.
>
> C2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global.

Pero también se trabaja para construir una situación de aprendizaje que ofrezca oportunidades al estudiante de adquirir las competencias C3 y C4, que se relacionan con la formulación de conjeturas y principios del pensamiento computacional.

> C3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento.
>
> C4. Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz.

Todo esto sustentado con los criterios de evaluación correspondientes y contextualizado en el Sentido Algebraico (IV), contemplando los siguientes saberes básicos asociados:

> 1.1 Patrones: identificación y comprensión, determinando la regla de formación de diversas estructuras en casos sencillos.
>
> 2.1 Modelización de situaciones de la vida cotidiana usando representaciones matemáticas y el lenguaje algebraico.
>
> 2.2 Deducción de conclusiones razonables sobre una situación de la vida cotidiana una vez modelizada
>
> 6.1 Generalización y transferencia de procesos de resolución de problemas a otras situaciones.

Se presenta en la Tabla 2 la organización por tareas a lo largo de la S.A

<table>
<tr><td></td><td colspan="15">Construyendo Puentes</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="4">1. Conectando las islas</td><td colspan="3">2. ¿Nos vale todo?</td><td colspan="5">3. Todos los puentes de una</td><td colspan="3">4. Todas las islas de una</td></tr>
<tr><td>Actividades</td><td>1.1</td><td>1.2</td><td>1.3</td><td>1.4</td><td>2.1</td><td>2.2</td><td>2.3</td><td>3.1</td><td>3.2</td><td>3.3</td><td>3.4</td><td>3.5</td><td>4.1</td><td>4.2</td><td>4.3</td></tr>
<tr><td>Competencias específicas</td><td>C1 C2</td><td>C1 C2 C3</td><td>C1 C2</td><td>C2 C3</td><td>C1 C2</td><td>C1 C2 C3 C4</td><td>C1 C2</td><td>C1 C3</td><td>C1 C2</td><td>C1 C2 C3 C4</td><td>C1 C2</td><td>C1 C2</td><td>C1 C2</td><td>C1 C2</td><td>C1 C2</td></tr>
<tr><td>Criterios de evaluación</td><td>1.1/1.3 2.1</td><td>1.1/1.3 2.1/3.2</td><td>1.1/1.3 2.1</td><td>2.1/3.2</td><td>1.1/1.3 2.1</td><td>1.1/1.3 2.1/3.2 4.1</td><td>1.1/1.3 2.1</td><td>1.1/1.3 3.2</td><td>1.1/1.3 2.1</td><td>1.1/1.3 2.1/3.2 4.1</td><td>1.1/1.3 2.1</td><td>1.1/1.3 2.1</td><td>1.1/1.3 2.1</td><td>1.1/1.3 2.1</td><td>1.1/1.3 2.1</td></tr>
<tr><td>Saberes básicos</td><td>IV. 2.1</td><td>IV. 2.1</td><td>IV. 2.1</td><td>IV. 2.1</td><td>IV. 2.1</td><td>IV. 1.1/2.1 2.3/6.1</td><td>IV. 2.1</td><td>IV. 2.1</td><td>IV. 2.1</td><td>IV. 1.1/2.1 2.3/6.1</td><td>IV. 2.1</td><td>IV. 2.1</td><td>IV. 2.1</td><td>IV. 2.1</td><td>IV. 2.1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Instrumentos de evaluación</td><td colspan="4">Resolución del Ejercicio 3 Actividad 1.4</td><td colspan="3">Resolución de actividad 2.3</td><td colspan="5">Resolución de actividad 3.4</td><td colspan="3">Resolución de actividad 4.3</td></tr>
<tr><td colspan="15">Informe de las respuestas al Problema Inicial y Prueba Escrita.</td></tr>
<tr><td>Metodología</td><td colspan="15">Por Elaboración</td></tr>
<tr><td>Recursos</td><td colspan="15">Dossier del estudiante. Presentación de la actividad 3.2. Material para la actividad 4.3</td></tr>
<tr><td>Espacios</td><td colspan="15">Aula habitual</td></tr>
</table>

Tabla 2. Fundamentación Curricular y Metodológica. Fuente: elaboración propia.

Orientaciones metodológicas

El Decreto 30/2023, en cuanto al currículo de Matemáticas, señala que la metodología debe colocar la resolución de problemas como una pieza clave. Esto conlleva que el profesor utilice un método y una técnica que lo propicie. Es por ello que, nuestra intención es seguir el Método por Elaboración (Tabla 2), utilizando para ello la técnica de Aprendizaje basado en problemas y el análisis de casos.

En este sentido, la estrategia general del trabajo consistirá en que, de forma gradual, se presenten al estudiante las tareas para crear un proceso continuo que abarca los conocimientos sobre grafos.

Todas las tareas tienen actividades que continuamente hacen referencia a las preguntas planteadas a partir del "Problema Inicial". En el desarrollo de situación de aprendizaje se encuentran varios tipos de actividades según su naturaleza y objetivo: hay actividades que pretenden incitar a la reflexión y búsqueda de conclusiones, actividades de análisis para conjeturar resultados teóricos a modo de prácticas expertas, y actividades de aplicación, donde se plantean contextos directamente relacionados con el Problema Inicial, o contextos ajenos a él, pero reales y cercanos a la realidad del estudiante.

En cuanto a la evaluación, será continua y formativa. Se recogerán 6 instrumentos distribuidos por toda la secuencia de actividades, pero también se contempla un informe que contemple las respuestas a las cuestiones y actividades relacionadas con el Problema Inicial y una prueba escrita con el objetivo de comprobar la adquisición de conocimientos. Cada instrumento tendrá asociado una herramienta de evaluación.

En lo referido a la Temporalización, se diseñó la propuesta para implementarla a lo largo de 8 sesiones más la necesaria para la prueba escrita. Se muestra en la Tabla 3 cómo evolucionan las actividades a través de las sesiones.

Sesiones	Actividades
Sesión 1	1.1 1.2
Sesión 2	1.3 1.4
Sesión 3	2.1 2.2 2.3
Sesión 4	3.1 3.2
Sesión 5	3.3
Sesión 6	3.4 3.5
Sesión 7	4.1 4.2
Sesión 8	4.3

Sesión 9	Prueba escrita.

Tabla 3. Secuencia de actividad por sesiones

3.1.1 Tarea 1. Conectando las islas.

Esta primera tarea les va a plantear un contexto de trabajo flexible ya que los grafos modelizan fielmente la conexión entre islas planteadas en el Problema Inicial. Pero también aparecerán en otros contextos. Estableceremos las dos definiciones básicas en teoría de grafos: qué entendemos por grafo y la definición de grado de un vértice.

Esta tarea consta de cuatro actividades (Tabla 4). Son actividades muy introductorias, pero requieren tiempo. En su progresión, al llevarlas al aula, pasaremos por actividades que: inciten al alumno a tomar la iniciativa, incluyan más de una solución o, no admita solución, apliquen sus conocimientos en contextos similares a los planteados, extraigan conclusiones, establezcan definiciones y propongan conjeturas.

Nº Tarea	Tarea	Nº Actividad	Actividad
1	**Conectando las islas**	1.1	Primeros pasos
		1.2	La provincia de SC de Tenerife
		1.3	¿Donde pueden aparecer los grafos?
		1.4	Graduando los grafos

Tabla 4. Actividades de la Tarea 1

Actividad 1.1 Primeros pasos.

Descripción de la actividad

Iniciamos el estudio de los grafos mediante una actividad introductoria, con la que los estudiantes se adentran paulatinamente en esta herramienta matemática: los grafos. Se les facilitará a los estudiantes la ficha (Figura 6) con todas las indicaciones para desarrollar la actividad..

Así mismo, nos servirá para poder hacer abstracción sobre las conexiones y definir posteriormente que entenderemos por un grafo.

Ya que se trata de una actividad de introducción a algo que ellos probablemente no hayan visto, queremos que reciban la actividad como algo ficticio pero cercano y por supuesto fácilmente abordable.

Además, queremos que lleguen a algunas conclusiones básicas como:

-Para cada puente debe haber dos islas.

-Para el número de islas que tenemos, hay un mínimo de puentes ($8 - 1 = 7$) que se necesitan para que ninguna isla quede sin conexión.

-Los puentes no tienen porqué estar construidos en línea recta. *Puede mostrarse una imagen de "El puente curvo de Kylesku" en Escocia.*

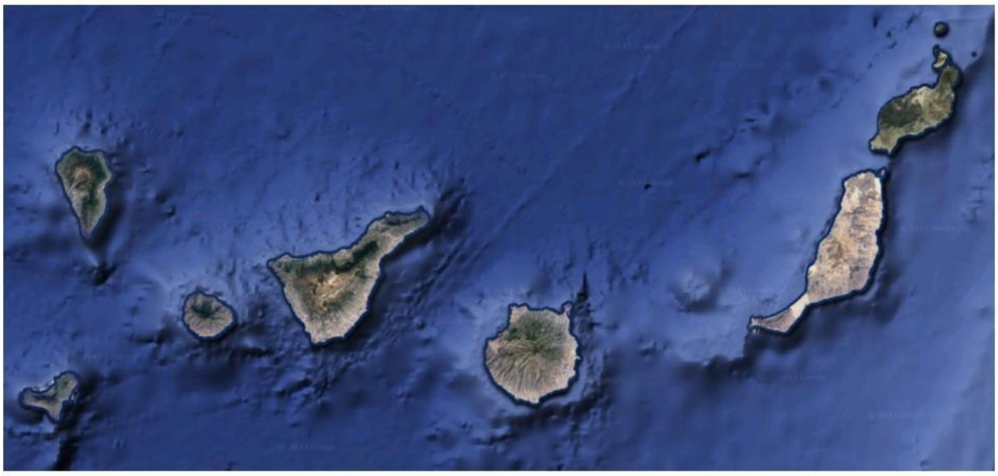
-Dependiendo de la configuración de puentes que elijamos podremos o no podremos hacer cierto tipo de recorrido sobre ellos.

Estas conclusiones las sacaremos a medida que vayan desarrollando la actividad, y se recogerán en un espacio dedicado para ello.

Figura 6. Ficha del alumno. Fuente: elaboración propia

Actividad 1.1 PRIMEROS PASOS.

1.Construye 10 puentes para conectar las islas como mejor te convenga en la siguiente imagen.



Trata de elegir una isla donde empezar un recorrido, que pasa por todos los puentes y vuelve a las isla de inicio.

[Actividad 1.1 PRIMEROS PASOS]

Desarrollo de la actividad

Después de presentar el "Problema inicial", se repartirá a los alumnos la ficha y leeremos en voz alta hasta el ejercicio 3. Indicaremos que las conclusiones y la definición las trabajaremos y añadiremos entre todos cuando terminen los 3 ejercicios.

Esta primera actividad busca que sean ellos los que construyan los grafos y capten la analogía entre puentes y grafos. Así que trataremos de guiarlos solo en lo indispensable.

A la hora de sacar las conclusiones se tomará una metodología más guiada, ya que el objetivo es que todos tengan al menos las conclusiones que indicamos en la descripción de la actividad.

Al acabar el ejercicio 3 se les dirá: *Lo que acaban de construir es un Grafo.* Procedemos entonces a establecer una definición informal, cercana a:

"Un grafo es un diagrama matemático que nos sirve para modelizar (representar) situaciones en las que se relacionan elementos (cosas)"

A su vez, se indicarán qué elementos forman un grafo: *Vértices y Aristas.*

Se acabará la actividad sacando la similitud de un grafo con un polígono, pero también características que los diferencien:

"Todo polígono es un grafo, pero no todo grafo es un polígono"

Fundamentación curricular

Saberes básicos	**S. IV**. 2.1: <u>Modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante representaciones matemáticas</u> y lenguaje algebraico, haciendo uso de distintos tipos de funciones.
Competencias específicas	C1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones. C2. <u>Analizar las soluciones de un problema</u> usando diferentes técnicas y herramientas, <u>evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático</u> y su repercusión global. *(Subrayado)*
Criterios de evaluación	1.1, 1.3 y 2.1
Respecto a la evaluación	Producto
Temporalización	15-20 min
Recursos	Ficha del alumno.

Tabla 5. Fundamentación curricular de la Actividad 1.1

Actividad 1.2. La provincia de SC de Tenerife

Descripción de la actividad

Después de establecer que un grafo nos permite representar las conexiones entre elementos a través de un diagrama, vamos a trabajar sobre conexiones que requieren ciertas limitaciones (Figura 7). El contexto seguirá siendo las islas y los puentes. Pero las limitaciones impuestas, en un caso, sí permitirán construir el grafo y en otro, no. El objetivo es que saquen la conclusión de que, según las limitaciones impuestas, el grafo podrá construirse o no.

Figura 7. Ficha del alumno. Fuente: elaboración propia

Actividad 1.2 La provincia de SC de Tenerife

1. Tenemos cuatro islas: Tenerife, La Gomera, La Palma y El Hierro. Y queremos construir puentes de forma que se cumplan las dos condiciones siguientes:

- Cada isla está conectada con las otras 3.
- Los puentes no se pueden cortar entre sí.

Construye grafos que representen esta situación.

2. Añadimos la isla de Gran Canaria y ahora queremos que:

- Cada isla está conectada con las otras 4.
- Los puentes no se pueden cortar entre sí.

Actividad 1.2 La provincia de SC de Tenerife

Desarrollo de la actividad

En el momento en el que se entrega la ficha de la actividad, les indicamos que el trabajo será autónomo. Queremos que detecten la imposibilidad de completar el segundo ejercicio por ellos mismos. Cuando eso pase les pediremos que lo redacten a modo de respuesta a las últimas preguntas.

La labor del profesor será ir mirando por las mesas por si hay alguna cuestión que aclarar. A la hora de sacar conclusiones podremos incluir alguna pregunta a modo de pista como: *"¿Qué ha pasado cuando introducimos un vértice más y seguimos pidiendo que todas las islas estén conectadas con las demás?"*

Los estudiantes pueden razonar de la siguiente manera: *"Podemos hacer que un puente pase por debajo del otro"*, y en ese caso los puentes no se corten si no se cruzan. Nosotros no lo interpretaremos como erróneo, pero les indicaremos que los puentes deben estar a la misma altura (*Sobre el mismo plano*). Nuestra argumentación puede ser algo como: "*Si permitimos que los puentes pasen uno por encima del otro, si hay un accidente en uno, puede causar daños en el otro. Y queremos correr los menos riesgos posibles*"

Fundamentación curricular

Saberes básicos	**S. IV**. 2.1: Modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante representaciones matemáticas y lenguaje algebraico, haciendo uso de distintos tipos de funciones.
Competencias específicas	C1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones. *(Subrayado)* C2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global. *(Subrayado)* *C3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento. (Subrayado)*
Criterios de evaluación	1.1, 1.3, 2.1 y 3.2
Respecto a la evaluación	Producto
Temporalización	20 min
Recursos	Ficha del alumno.

Tabla 6. Fundamentación curricular de la Actividad 1.2

Actividad 1.3 ¿Dónde pueden aparecer los grafos?

Descripción de la Actividad

Al terminar la Actividad 1.2, el concepto de grafos ya no será ajeno a los estudiantes. Es momento de variar los contextos (Figura 8) y poner ejemplos de situaciones, donde los grafos nos ayudan a abordarlas, aportando una visión gráfica. Además, es una buena oportunidad para que ellos generen situaciones basadas en los ejemplos. El objetivo es que acaben pensando que los grafos aparecen en diversas situaciones y son versátiles a la hora analizarlas.

Figura 8. Ficha del Alumno. Fuente: Elaboración propia

Actividad 1.3 ¿Dónde aparecen los grafos?

Situación 1. Estamos en un laboratorio y observamos que, una célula se duplica cada 5 min. ¿Cuántas células habrá a los 15 min? ¿ Y a los 17 min ?

Trata de representar en un grafo la Situación 1.

Situación 2. Nos vamos de viaje y nos hacemos una maleta con 3 pantalones y 4 camisas, ¿cuántas formas distintas tenemos de vestirnos?

Trata de representar en un grafo la Situación 2.

Actividad 1.3 ¿Donde aparecen los grafos?

Desarrollo de la Actividad

Al terminar la Actividad 1.2 preguntaremos a la clase "*¿Los grafos solo sirven para representar puentes entre las islas?*", buscando que ellos nos den ejemplos. Una vez los tengamos pensando en contextos donde aparecen los grafos, es probable que algún estudiante nos dé un ejemplo. Analizaremos con ellos quiénes serían los vértices y quienes las aristas y les indicaremos que se reserven el resto de los ejemplos para comentar después de terminar la actividad.

Si los vemos muy atascados, para la primera situación le podemos dar pistas como: *Piensa en las raíces de un Árbol*... Para la segunda: *Piensa en los ejercicios de: Une con flechas las siguientes columnas...*

Si vemos que a alguno le cuesta crear una nueva situación, dejaremos que se ayuden entre ellos, para que modifiquen o generalicen las ideas de otros compañeros.

Fundamentación curricular

Saberes básicos	**S. IV**. 2.1: Modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante representaciones matemáticas y lenguaje algebraico, haciendo uso de distintos tipos de funciones.
Competencias específicas	C1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones. *(Subrayado)* C2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global. *(Subrayado)*
Criterios de evaluación	1.1, 1.3 y 2.1
Respecto a la evaluación	Producto
Temporalización	20-25 min
Recursos	Ficha del alumno.

Tabla 7. Fundamentación curricular Actividad 1.3

Actividad 1.4 Graduando los grafos

Descripción de la Actividad

Esta actividad está pensada para introducir uno de los conceptos más importante de la teoría de grafos: Grado de un vértice (Figura 9). Otra vez, volveremos a presentar alguna situación donde el estudiante tendrá que representar grafos con condiciones que impiden su construcción. Pero por otro lado también habrá ejemplos que acepten más de una construcción. El objetivo es que sean capaces de construir grafos a partir de condiciones sobre sus vértices y el grado de los mismos.

Volveremos a utilizar el grafo que inicialmente fue elaborado por ellos en la Actividad 1.1 para que apliquen la definición de grado de un vértice. Le haremos cuestionarse la relación entre los grados de los vértices y la posibilidad de hacer un recorrido Euleriano.

En la parte final de la actividad se pretende que los estudiantes concluyan lo siguiente:

-Es posible construir el grafo de distintas formas, cumpliendo las condiciones.

- Bajo ciertas condiciones es imposible construir el grafo.

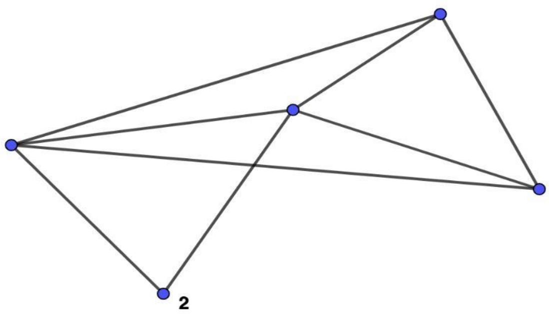
Figura 9. Ficha del Alumno. Fuente: Elaboración propia

Actividad 1.4 Graduando los grafos.

Definición del grado de un vértice.

Definimos el grado de un vértice como la cantidad de aristas conectadas a ese vértice.

1. Coloca el grado de cada vértice en el siguiente grafo.



2. Coloca el grado de cada vértice en el grafo creado por ti en el ejercicio 3 de la Actividad 1.1.

[Actividad 1.4 Graduando los grafos.]

Desarrollo de la Actividad.

Al terminar la anterior actividad, les diremos a la clase que vamos a introducir un concepto importante: *A partir de ahora este concepto nos ayudará mucho a analizar grafos y responder las preguntas del Problema Inicial*. Como el concepto es muy sencillo de entender, le entregamos la ficha y leeremos directamente en voz alta la definición del grado de un vértice para que luego el estudiante proceda a trabajar sobre el concepto de manera autónoma.

A la hora de sacar conclusiones es importante que no solo indiquen qué apartados pudieron o no pudieron hacer, sino también, si hay más de una forma de hacerlo. Se busca que se cuestionen: *¿se podrá construir el grafo si cambiamos el número de vértices?*

Fundamentación curricular

Saberes básicos	**S. IV**. 2.1: Modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante representaciones matemáticas y lenguaje algebraico, haciendo uso de distintos tipos de funciones.
Competencias específicas	C2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global. *(Subrayado)* C3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento.
Criterios de evaluación	2.1 y 3.2
Respecto a la evaluación	Instrumento. Herramienta: Lista de control
Temporalización	20-25 min
Recursos	Ficha del alumno.

Tabla 8. Fundamentación curricular Actividad 1.4

3.1.2 Tarea 2: ¿Nos vale todo?

Esta tarea tratará de abordar las preguntas del Problema Inicial relacionadas con las condiciones de conectividad entre las Islas. Constará de 3 actividades (Tabla 9) donde primero, presentamos el problema y se observará según la situación, cuando se ve afectado el propio proceso de resolución. Esto nos llevará a preguntarnos las razones que hay detrás. Para ello, abordaremos un análisis del patrón que relaciona, los grados de los vértices con las aristas. Cuando comprendamos su comportamiento, trabajaremos en otros contextos donde este patrón de comportamiento en los grafos, nos será útil.

La justificación matemática viene a través del resultado teórico que nos establece que: *La suma de los grados de los vértices de un grafo, es el doble de la cantidad de aristas.* Para que el alumno llegue a esta conclusión se trabaja con un análisis sistemático sobre el número de vértices, que no nos demostrará la propiedad, pero sí nos dará evidencias para que conjeturen.

Nº Tarea	Tarea	Nº Actividad	Actividad
2	**¿Nos vale todo?**	2.1	Primeras respuestas al Problema Inicial
		2.2	¿Qué está pasando?
		2.3	Otros contextos

Tabla 9. Actividades de la Tarea 2

Actividad 2.1 Primeras respuesta al Problema Inicial

Descripción de la Actividad

La actividad plantea dos situaciones relacionadas con la conectividad entre las islas, según el Problema Inicial (Figura 10). La primera situación si que se podrá representar con un grafo ya que el número de islas es par (8), de hecho hay más de una forma de hacerlo. En cambio, en la otra situación, conseguir un grafo conexo será imposible, ya que descartamos La Graciosa y cumplir ahora con los requisitos de conectividad, es inviable.

Con esto, queremos que nuevamente vean que, según las condiciones que nos imponga la situación, podremos o no modelizar con un grafo, dicha situación.

Figura 10. Ficha del alumno. Fuente: Elaboración propia

Actividad 2.1 Primeras Respuestas al Problema Inicial.

1. ¿Podríamos plantear un diseño de puentes donde cada isla está conectada exactamente con otras 3 islas? Si la respuesta es sí, represéntalo con un grafo. Si la respuesta es no, trata de explicar el porqué. ¿ Hay más de una forma de hacerlo ? ¿ Cuáles ?

2. Y si nuestro interés es solo conectar 7 islas, porque la graciosa creemos que con el barco es suficiente, ¿podríamos establecer un diseño que conecte cada isla exactamente con otras 3? Si la respuesta es sí, represéntalo con un grafo. Si la respuesta es no, trata de explicar el porqué. ¿Hay más de una forma de hacerlo ? ¿Cuáles ?

Actividad 2.1 Primeras Respuestas al Problema Inicial.

Desarrollo de la Actividad

Es importante que recordemos a los estudiantes que la resolución de esta actividad nos acercará a responder de manera justificada una cuestión del Problema Inicial. Y que los grafos son una buena herramienta para analizar dicha cuestión.

Al abordar la primera pregunta de la actividad, los alumnos pueden encontrar dificultades a la hora de construir el grafo. Aunque sea una situación factible, hay opciones de conectividad que llevarían al estudiante a una configuración de aristas (puentes) que no respete las condiciones de la situación. Llegados a este punto, es un buen momento para trabajar la perseverancia e indicarles que, aunque con un primer intento no se pueda, no significa que no haya posibilidades para completar lo que el problema nos pide.

Como hay más de un grafo que respeta la condiciones, cuando los estudiantes lleven más de 10 min pensando sobre la resolución, podemos proporcionarles una configuración "rebuscada" e indicarles que consigan otra más sencilla (ver Ejemplo Actividad 2.1 .jpg).

En la segunda parte dejaremos otros 10 min para que lo intenten, pero esta vez no recurriremos a la perseverancia, sino lanzaremos la siguiente pregunta: *¿Es posible que al tener solo 7 islas que conectar en vez de 8, no sea posible construir exactamente 3 puentes para cada isla?* Los alumnos responderán, sí o no, muy probablemente sin ningún criterio, así que, terminaremos la actividad con el comentario: *Con la siguiente actividad no solo responderemos la pregunta, sino que también le daremos un porqué.*

Fundamentación curricular

Saberes básicos	**S. IV**. 2.1: Modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante representaciones matemáticas y lenguaje algebraico, haciendo uso de distintos tipos de funciones.
Competencias específicas	C1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones. *(Subrayado)* C2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global. *(Subrayado)*
Criterios de evaluación	1.1, 1.3 y 2.1
Respecto a la evaluación	Producto

Temporalización	25 min
Recursos	Ficha del alumno.

Tabla 10. Fundamentación curricular Actividad 2.1

Actividad 2.2 ¿Qué está pasando?

Descripción de la Actividad

Con un análisis de casos, propio de las prácticas expertas de un matemático, esta actividad pretende dar respuesta a: *¿Por qué en el segundo ejercicio de la actividad anterior no conseguimos ningún diseño?* Este análisis lo haremos aumentando el número de vértices y haciendo una comparación entre el recuento de: *Cantidad de aristas y Suma de los grados*: (Figura 11).

La conclusión a la que lleguemos tendrá una consecuencia muy útil a la hora de analizar la conectividad que nos pide el Problema Inicial: *Cuando la suma de los grados de los vértices no es par, el grafo no puede ser conexo.* Para ellos: “No podremos satisfacer los requisitos de conectividad”

Una vez obtengamos, el patrón y sus consecuencias, reflexionaremos sobre lo que ocurrió en la Actividad 2.1.

De cara a atender la diversidad, si vemos que hay alumnos avanzados, podemos indicarles, que escriban con lenguaje algebraico lo que hemos concluido con el análisis sistemático.

Figura 11. Ficha del Alumno Fuente: Elaboración propia.

Actividad 2.2 ¿ Qué está pasando?

¿Por qué en el segundo ejercicio de la actividad anterior no conseguimos ningún diseño?

1. Vamos paso a paso. Rellena la tabla.

Nº de vértices	Grafos	Comparación numérica.
		Cantidad de aristas: Suma de los grados:
		Cantidad de aristas: Suma de los grados:
		Cantidad de aristas: Suma de los grados:

Actividad 2.2 ¿Qué está pasando?

Desarrollo de la actividad

Le entregaremos la ficha diciendo que es una actividad propia de un matemático: *Hemos encontrado una situación que no entendemos muy bien porque pasa, así que nos disponemos a analizar y tratar de sacar algo en claro. Esto es lo que los matemáticos llamamos, hacer matemáticas.*

Cuando ya tengan rellena la tabla, es probable que ellos mismos se den cuenta del patrón, aun así, queremos que den una respuesta explícita a la pregunta 2: *A medida que vamos aumentando el número de vértices, ¿que ocurre con la relación numérica entre cantidad de aristas y suma de los grados?*

Por otro lado, para obtener las consecuencias en el ejercicio 3: *Consecuencias de esa relación*, le lanzamos la siguiente pregunta: *¿Qué pasa, si la suma de los grados de los vértices no es par?* Queremos que concluyan algo como: *No podemos hacer el grafo que nos piden.*

Para terminar, volveremos a la Actividad 2.1 y le pedimos que comprueben la propiedad en ejercicio 1 y que expliquen porque no se pudo satisfacer los requisitos del ejercicio 2.

Fundamentación curricular

Saberes básicos	**S. IV.** 1.1, 2.1, 2.3, 6.1: Patrones, modelo matemático y pensamiento computacional
Competencias específicas	C1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones. (Subrayado) C2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global. (Subrayado) C3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento. (Subrayado) C4. Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando, modificando y creando algoritmos para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz. (Subrayado)
Criterios de evaluación	1.1, 1.3, 2.1, 3.2 y 4.1
Respecto a la evaluación	Producto
Temporalización	25 min
Recursos	Ficha del alumno.

Tabla 11. Fundamentación curricular Actividad 2.2

Actividad 2.3 Otros contextos

Descripción de la actividad

Trabajamos con problemas que requieren el mismo razonamiento que las anteriores actividades, pero en otro contexto: *Relaciones entre personas*. (Figura 12) Es una actividad de aplicación. Está pensada para que ellos trabajen en casa, pero se puede trabajar perfectamente en clase. El objetivo es asegurarnos de que entendieron los conceptos y los razonamientos.

Figura 12. Ficha del Alumno. Fuente: Elaboración propia

Actividad 2.3 Aplicamos a otros contextos (Tarea)

1.En una habitación hay 5 personas, ¿es posible que cada una conozca exactamente a otra persona? ¿ Y si hubiera 9 ? Cuando sea posible, dibuja el grafo que representa la situación. Si no es posible, explica por qué.

Actividad 2.3 Otros contextos

Desarrollo de la Actividad

El estudiante a estas alturas debe comprender la propiedad trabajada anteriormente, así que será momento de dejar que modelice y resuelva los problemas de forma autónoma.

Si se trabaja en clase, la postura del profesor será similar a la de una prueba escrita. Cuando entreguen revisaremos la resolución y daremos por concluida la tarea.

Tanto si los alumnos trabajan en casa o en la clase, se deberá detectar si la resolución del alumno refleja el entendimiento de la actividad. Si no es así, se deberá comentar los aspectos que hay que comprender.

Fundamentación curricular

Saberes básicos	**S. IV**. 2.1: Modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante representaciones matemáticas y lenguaje algebraico, haciendo uso de distintos tipos de funciones.
Competencias específicas	C1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones. *(Subrayado)* C2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global. *(Subrayado)*
Criterios de evaluación	1.1, 1.3 y 2.1
Respecto a la evaluación	Instrumento. Herramienta: Lista de control
Temporalización	20 min
Recursos	Ficha del alumno.

Tabla 12. Fundamentación curricular Actividad 2.3

3.1.3 Tarea 3. Todos los puentes de una.

Seguimos profundizando en el estudio de los grafos y en dar respuesta a nuestro planteamiento inicial. En esta tarea se tratará de abordar las preguntas relacionadas con los viajes que recorren todos los puentes presentes en el Problema Inicial. Consta de cinco actividades (Tabla 13) donde, primero se deja claro, que no todos los grafos permiten recorrer todas las aristas sin repetir ninguna. Luego aprenderán sobre la historia del surgimiento de los grafos. Y, por otro lado, trataremos de hacer un análisis sistemático de casos más exhaustivo para vislumbrar cuando este tipo de recorridos es posible. También hay una actividad que está pensada para aquellos que tengan facilidades o vayan a un ritmo de trabajo mayor.

Para dar una respuesta explícita a las preguntas del Problema Inicial, trabajarán una actividad donde diseñarán configuraciones de puentes, que permiten recorrerlos todos sin repetir ninguno.

La justificación matemática viene a través del resultado teórico que nos establece que: *Un grafo admite un recorrido Euleriano si y sólo si la cantidad de vértices de grado impar no es mayor de dos.* En el transcurso de las actividades daremos oportunidades a que creen sus conjeturas.

Nº Tarea	Tarea	Nº Actividad	Actividad
3	Todos los puentes de una	3.1	¿Cuándo se podrá?
		3.2	Un poco de historia
		3.3	Recorridos sin levantar el lápiz
		3.4	Volvemos al Problema Inicial
		3.5	Un problema Complejo o No tanto

Tabla 13. Actividades de la tarea 3.

Actividad 3.1 ¿Cuándo se podrá?

Descripción de la Actividad.

Esta actividad rescatará, otra vez, su primer modelo de un grafo (*Actividad 1.1 ejercicio 3*). Haremos modificaciones sobre él, de forma que, se dejará constancia cuando la modificación permite un recorrido Euleriano y cuando no (Figura 13).

El primer objetivo es explicitar que, cuando añadimos una arista, dos vértices van a cambiar su grado. Y esto, a veces permitirá un camino Euleriano y otras veces no. Dependiendo de los ejemplos particulares de los alumnos será más sencillo poder ofrecer alguna conjetura.

Para llevar a cabo este análisis de modificaciones, en la ficha de la actividad se dejarán algunas indicaciones. Así mismo, se les facilitará una tabla donde se recogerá la información de cada modificación.

El objetivo general es que perciban lo tedioso que puede ser comprobar si existe el camino euleriano cada vez que modificamos las aristas. Esto le dará más valor al momento en el que se deduzca la propiedad que asegura directamente la existencia de dichos caminos.

Figura 13. Ficha del Alumno. Fuente: Elaboración propia

Actividad 3.1 ¿Cuándo se podrá?

1. Vuelve a recrear tu diseño del ejercicio 3 Actividad 1.1 . Usa las cuatro primeras letras de la isla para identificar el vértice. **Usa lápiz** para escribir el grado de los vértices.

Añade 1 arista (puente) a tu gusto, corrige los grados de los vértices después de la modificación y vuelve a tratar de recorrer todas las aristas sin repetir ninguna. **Usa otro color para las modificaciones.**

Repite este procedimiento 3 veces. Y escribe una lista de los grados de cada vértice en cada modificación.

Lista de grados de los vértices en las Modificaciones.	¿Se pudo?
Ejemplo: Palma: 3, Hier: 2, Gome: 5, Tene: 4, Gran: 2, Fuer: 2, Lanz: 3, Grac: 3	No
1ª Mod:	
2ª Mod:	
3ª Mod:	

¿Alguna conjetura?

Actividad 3.1 ¿Cuándo se podrá?

Desarrollo de la Actividad

Cuando le entreguemos la ficha, deberán tener a mano lo que realizaron en la *Actividad 1.1,* para utilizar el grafo que construyeron.

Es importante leer en voz alta las indicaciones que contiene la actividad para que quede claro cuál es el procedimiento. Luego dejaremos que trabajen de forma autónoma.

Para que respondan a la pregunta de las conjeturas, podemos ayudar con otras: *¿Será que el grafo debe de tener todos los vértices de grado 2? ¿Será que el grafo debe tener todos los vértices de grado impar?...* Con estas preguntas y sus propias conjeturas podrán generar ejemplos que sean coherentes y permitan el camino Euleriano, acercándonos de esta forma, a la propiedad matemática. O podrán crear contraejemplos, y sacar en claro que configuraciones de grados de vértices no permiten el recorrido.

Un aspecto a tener en cuenta es que, al pedir que añadan tres aristas más a las que ya tenían, su grafo puede acabar engorroso. Ya que en la *Actividad 1.1,* no pedimos ningún requisito para su construcción. Si detectamos algún grafo muy complejo, le proporcionamos uno estándar. Lo dibujaremos en la pizarra o utilizamos un ejemplo de un estudiante.

Fundamentación curricular

Saberes básicos	**S. IV**. 2.1: Modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante representaciones matemáticas y lenguaje algebraico, haciendo uso de distintos tipos de funciones.
Competencias específicas	C1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones. *(Subrayado)* C3. Formular y comprobar conjeturas sencillas o plantear problemas de forma autónoma, reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento. (Subrayado)
Criterios de evaluación	1.1, 1.3 y 3.2
Respecto a la evaluación	Producto
Temporalización	25 min
Recursos	Ficha del alumno.

Tabla 14. Fundamentación curricular Actividad 3.1

Actividad 3.2 Un poco de historia

Descripción de la Actividad

Esta actividad tiene como objetivo que ellos tomen conciencia de que el problema de los recorridos eulerianos, tiene su historia (Figura 14). En la primera parte de la actividad, le contaremos un breve relato de la historia con apoyo de una presentación.

La historia termina con una pregunta: *¿se podrá ahora hacer el gran paseo de Kaliningrado?* Ellos le darán respuesta en la ficha de esta actividad. Se acabará sacando algunas conclusiones.

- En la antigua ciudad de Kaliningrado no se podía hacer el recorrido, pero ahora sí que se puede.

- Hay 2 posibilidades para el recorrido. Hay que empezar y terminar en vértices de grado impar.
- Haciendo la modificación se sigue pudiendo hacer el recorrido/ Haciendo la modificación no se puede.

Estas conclusiones son útiles para empezar a pensar en la justificación matemática de la existencia de los recorridos Eulerianos.

Figura 14. Ficha del Alumno Fuente: Elaboración propia

Actividad 3.2 Un poco de historia

1.Construye en el recuadro izquierdo el grafo que representa la unión por puentes de la ciudad actual de Kaliningrado. Trata de recorrer todas las aristas (puentes) sin repetir ninguna. ¿Se pudo? ¿Hay más de un recorrido posible? Responde a estas preguntas en las conclusiones.

Actividad 3.2 Un poco de historia

Desarrollo de la Actividad

Empezamos contando el relato leyéndolo, para hacer notar que no es una historia improvisada. Tendremos las diapositivas puestas en el proyector, para que visualicen los puentes y por si surgen dudas sobre el relato al terminar.

Entregaremos la ficha informándoles que será para responder a la pregunta del final de la historia: *¿se podrá ahora hacer el gran paseo de Kaliningrado?*.

En la primera parte, el objetivo es que ellos modelicen de forma autónoma. Pero si les cuesta demasiado, podemos darles alguna pista, como indicarles cuáles serían los vértices identificando las regiones de la ciudad.

En la segunda parte de la actividad, al hacer la modificación y añadir 2 aristas, puede pasar que algún estudiante modelice el grafo de la antigua ciudad de Kaliningrado o simplemente obtengan alguna configuración que no admite recorrido Euleriano. Si esto ocurre compararemos con otro alumno para que analicen los grados de los vértices y puedan sacar alguna conclusión o conjetura.

Nota. La probabilidad de que hagan una modificación que no admite recorrido Euleriano, se puede calcular y es baja (2/36 =1/13). Estas cuestiones pueden ser abordadas en grupos de bachillerato.

Fundamentación curricular

Saberes básicos	**S. IV**. 2.1: Modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante representaciones matemáticas y

	lenguaje algebraico, haciendo uso de distintos tipos de funciones.
Competencias específicas	C1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones. C2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global. *(Subrayado)*
Criterios de evaluación	1.1, 1.3 y 2.1
Respecto a la evaluación	Producto
Temporalización	25 min
Recursos	Ficha del alumno. Surgimiento de los grafos Presentacion_Un poco de histoia.pdf

Tabla 15. Fundamentación curricular Actividad 3.2

Actividad 3.3 Recorridos sin levantar el lápiz

Descripción de la Actividad

Al igual que en la Actividad 2.2, con un análisis de casos, propio de las prácticas expertas de un matemático, esta actividad pretende dar respuesta a: *¿Cuándo podremos hacer un recorrido por todas las aristas sin repetir ninguna?* Este análisis lo haremos sobre ejemplos variados de grafos proporcionados por el profesor (Figura 15). El procedimiento para analizar será contabilizar y organizar en una tabla la cantidad de vértices con grado impar, y comparar si fue posible realizar todo el recorrido sobre el grafo.

Responder a la anterior pregunta será necesario a hora de diseñar la configuración de puentes que nos pide el Problema Inicial.

Cuando tengamos la respuesta, reflexionaremos sacando una conclusión importante: *Si hay dos vértices de grado impar, el recorrido empieza en uno de ellos y termina en el otro.* Para finalizar, comprobaremos que la propiedad se cumple para el grafo de Kaliningrado (*Actividad 3.2)*

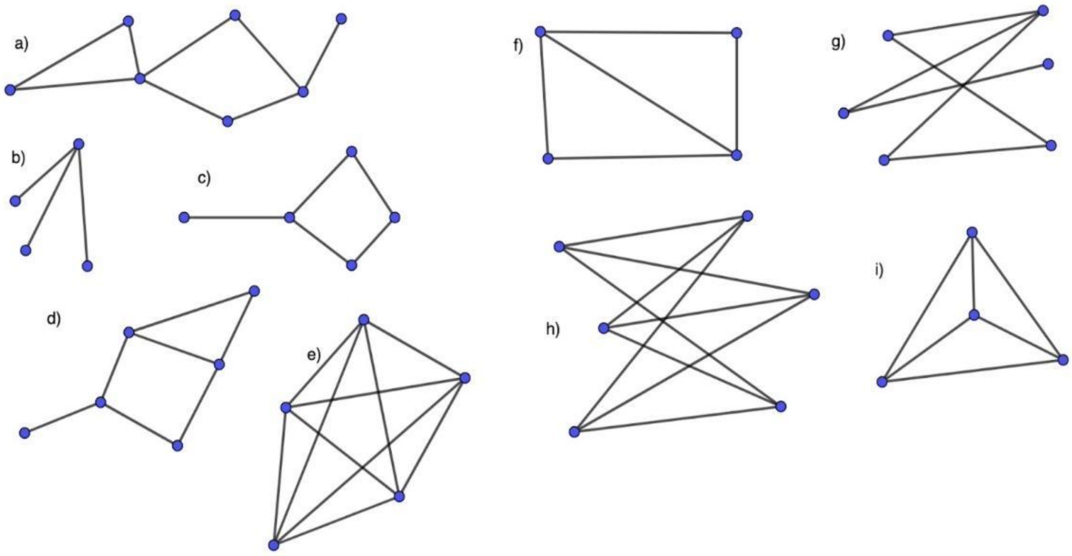
De cara a atender a la diversidad, esta actividad tendrá un ejercicio para aquellos que lleven un ritmo más alto.

Figura 15. Ficha del alumno. Fuente: Elaboración propia

Actividad 3.3 Recorridos sin levantar el Lápiz

1.En cada ejemplo coloca sobre cada vértice su grado. Luego trata de recorrer cada arista sin repetir ninguna. Marca el inicio y el final del recorrido. Compara si quieres con los compañeros.

Si crees que el recorrido es imposible, modifica el grafo añadiendo aristas para que sea posible. Después de la modificación corrige el grado de los vértices. (**Utiliza lápiz para la modificación**)



Actividad 3.3 Recorridos sin levantar el Lápiz

Desarrollo de la Actividad

Al entregar la ficha de esta actividad, le diremos que vamos a proceder, otra vez, como haría un matemático: *Tenemos que buscar un patrón de comportamiento y lo que vamos hacer es coger varios ejemplos diferentes y analizarlos para ver si podemos sacar alguna conclusión*.

La primera parte de la actividad les pedirá que trabajen con *ensayo y error*. Es probable que los alumnos ya hayan hecho ejercicios de este tipo a lo largo de su escolarización, así que también le vamos a pedir que, en los ejemplos que no se puede hacer el recorrido, modifiquen el grafo *(al igual que en la Actividad 3.1 y 3.2) ,*

Si la clase puede dividirse en grupos de 4, de forma que cada grupo esté equilibrado respecto a: *hábito de trabajo y esfuerzo*, esta primera parte, puede trabajarse con la técnica de trabajo cooperativo: *1-2-4*.

Trabajar de forma cooperativa puede ayudar a los alumnos que suelen abandonar rápido el trabajo, ya que podrán apoyarse en un compañero que sí lo consigue el recorrido.

Además, trabajando en grupo se fomenta que generen opiniones entre ellos para dar respuesta a la siguiente pregunta: *¿cuál crees que es la razón que explica que en algunos ejemplos podamos hacer el recorrido completo sin repetir aristas y en otros ejemplos no podamos ?*

En la segunda parte se recogerán los datos del primer ejercicio. Este trabajo si deben hacerlo de forma autónoma.

Y por último la parte de reflexión y conclusiones. Se puede trabajar individualmente o por parejas.

Nuestra labor en todo el proceso será la de ir pasando por las mesas de trabajo comprobando que el análisis de casos se haga de forma correcta. Y cuando llegue el momento de la conclusión, habrá que comentarlo con toda la clase para hacer explícito que el resultado teórico nos ayudará con el Problema Inicial.

Fundamentación curricular

Saberes básicos	**S. IV.** 1.1, 2.1, 2.3, 6.1: Patrones, modelo matemático y pensamiento computacional
Competencias específicas	C1. <u>Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas,</u> aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones. (Subrayado) C2. <u>Analizar las soluciones de un problema</u> usando diferentes técnicas y herramientas, <u>evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático</u> y su repercusión global. (Subrayado) C3. <u>Formular y comprobar conjeturas sencillas</u> o plantear problemas de forma autónoma, <u>reconociendo el valor del razonamiento y la argumentación, para generar nuevo conocimiento</u>. (Subrayado) C4. <u>Utilizar los principios del pensamiento computacional organizando datos, descomponiendo en partes, reconociendo patrones, interpretando,</u> modificando y creando algoritmos <u>para modelizar situaciones y resolver problemas de forma eficaz</u>. (Subrayado)
Criterios de evaluación	1.1, 1.3, 2.1, 3.2 y 4.1
Respecto a la evaluación	Producto

Temporalización	55 min
Recursos	Ficha del alumno.

Tabla 16. Fundamentación curricular Actividad 3.3

Actividad 3.4 Volvemos al Problema Inicial

Descripción de la Actividad

Esta es una actividad de aplicación. Ya tienen los conocimientos para responder de manera precisa y justificada a: *¿Es posible construir puentes entre las 8 islas de forma que nos permita hacer un viaje que los atraviese a todos pero solo pasando una vez por cada uno? ¿Cómo?* (Figura 16).

El objetivo es que trabajen la creatividad junto con las condiciones de la actividad .

Figura 16. Ficha del Alumno. Fuente: Elaboración propia

Actividad 3.4 Volvemos al Problema Inicial

1. ¿ Es posible construir puentes entre las 8 islas (mínimo de 7 puentes) de forma que nos permita hacer un viaje que los atraviese a todos pero solo pasando una vez por cada uno ? Haz **dos** diseños distintos.

Actividad 3.4 Volvemos al Problema Inicial

Desarrollo de la actividad

Entregaremos la ficha diciendo: *Ahora les toca a ustedes presentar diseños de grafos que representan a los puentes y que además permiten hacer el recorrido completo sin repetir ninguno*. Hasta que lo terminen intentaremos intervenir lo menos posible. Luego comentaremos con toda la clase algunos diseños para que tengan conciencia de que hay más de una opción.

Fundamentación curricular

Saberes básicos	**S. IV**. 2.1: Modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante representaciones matemáticas y lenguaje algebraico, haciendo uso de distintos tipos de funciones.
Competencias específicas	C1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones. C2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas

	obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global. *(Subrayado)*
Criterios de evaluación	1.1, 1.3 y 2.1
Respecto a la evaluación	Instrumento. Herramienta: Lista de control
Temporalización	25 min
Recursos	Ficha del alumno.

Tabla 17. Fundamentación curricular Actividad 3.4

Actividad 3.5 Un problema Complejo o No tanto

Descripción de la Actividad.

Esta es una actividad pensada, en un principio, para atender a la diversidad del ritmo de trabajo que hay en el aula. Plantea un problema contextualizado fuera del tema del Problema Inicial, en el que hay que modelizar y aplicar los conocimientos sobre recorridos Eulerianos, más concretamente: *Cuando hay 2 vértices de grado impar, se admite recorrido Euleriano y además el recorrido empieza en uno de esos vértices y acaba en el otro* (Figura 17).

Figura 17. Ficha del alumno. Fuente: Elaboración propia.

Actividad 3.5 Un problema Complejo o no tanto

Un padre y una madre querían alquilar una finca para ir el verano con toda su familia. Entonces fueron con el dueño de la finca a revisarla. Al llegar, el padre y el dueño se fueron a la cocina para comprobar que todo funcionaba correctamente. Y la madre se fue a dar un paseo hasta que llegó a una habitación que le llamó la atención. Allí vio un plano de la finca y se quedó sorprendida por la cantidad de puertas que había. **Trató de cruzar cada una, una sola vez**. Curiosamente después de un buen rato, llegó a la cocina. Ella contó lo que había hecho al dueño de la finca. Y él dijo, usted vio el plano del dormitorio 2 ¿verdad?.

La pregunta es : ¿cómo lo supo? Si en todas las habitaciones hay un plano de la finca.

Actividad 3.5 Un problema Complejo o no tanto

Desarrollo de la Actividad

Se le entregará a las personas que muestren un avance más rápido por la actividades, mientras los demás siguen con la Actividad 3.4.

Si el grupo completo adquiere los conocimientos con facilidad, será una actividad que se trabaje como una más, entre todos. A los estudiantes que les cueste encontrar un proceso de resolución, se les darán las siguientes indicaciones como ayuda:

-Construye el grafo que representa el plano de la vivienda: Vértices (Habitaciones), Aristas (Cruzar la puerta) .

-Traduce la pregunta a la siguiente: ¿Cuándo un recorrido que atraviesa todas las puertas sin repetir ninguna, sabes exactamente dónde empieza y dónde acaba?

Fundamentación curricular

Saberes básicos	**S. IV**. 2.1: Modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante representaciones matemáticas y lenguaje algebraico, haciendo uso de distintos tipos de funciones.
Competencias específicas	C1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones. *(Subrayado)* C2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global. *(Subrayado)*
Criterios de evaluación	1.1, 1.3 y 2.1
Respecto a la evaluación	Producto
Temporalización	25 min
Recursos	Ficha del alumno.

Tabla 18. Fundamentación curricular Actividad 3.5

3.1.4 Tarea 4. Todas las islas de una.

Esta tarea tratará de abordar la última pregunta del Problema Inicial, relacionada con los viajes que recorren todas las islas sin repetir ninguna. Constará de 3 actividades (Tabla 19) donde, primero le daremos motivos a los estudiantes para realizar recorridos de esta naturaleza. Luego dejaremos bien determinados y diferenciados los dos tipos de recorridos que hemos trabajado: Eulerianos y Hamiltonianos. Los clasificaremos, para detectar la falta de equivalencia entre ellos y terminaremos con una actividad de ordenación de listas cumpliendo ciertas condiciones.

Para dar una respuesta explícita a la pregunta del proyecto trataremos con un problema abierto. La falta de resultados teóricos, que nos caractericen a los recorridos hamiltonianos, hace que no podamos conjeturar ningún patrón general, pero sí sacar algunas conclusiones a lo largo de la tarea.

Nº Tarea	Tarea	Nº Actividad	Actividad
4	**Todas las islas de una**	4.1	Última pregunta del Problema Inicial
		4.2	Clasificando recorridos
		4.3	Ordenando con grafos

Tabla 19. Actividades de la Tarea 4

Actividad 4.1 Última pregunta del Problema Inicial

Descripción de Actividad

Rescataremos otra vez su primer diseño del grafo en Actividad 1.1, para que comprueben si admite que se recorran todos los vértices (Islas) sin repetir ninguna.

Habrá dos opciones según el grafo que hayan construido al principio (Figura 18). El objetivo es que aprecien que no todos los grafos admiten este tipo de recorrido. Por otro lado, también es muy importante que a través de una situación que plantea un problema de transporte de mercancías entre las islas, consideren la importancia de tener un recorrido que pase por todas sin repetir ninguna. Creando así, un contexto relacionado a una necesidad real, donde los grafos nos pueden ayudar a analizar y comprender.

La otra parte de la actividad consistirá en que ellos redacten otra situación donde sea importante tener un recorrido hamiltoniano.

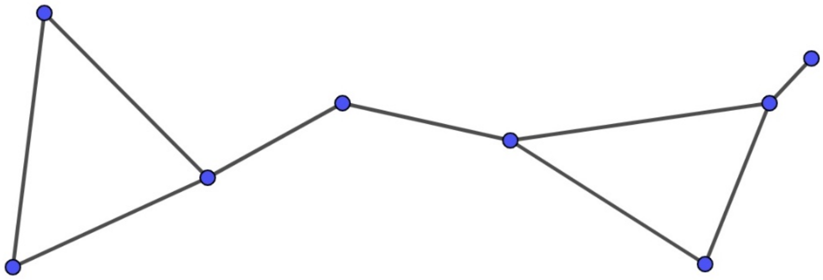
Figura 18. Ficha del alumno Fuente: Elaboración propia

Actividad 4.1 Última pregunta del Problema Inicial (A)

1. Vamos a fijarnos en las islas:

Sobre tu diseño en el ejercicio 3 de la Actividad 1.1, ¿es posible hacer un viaje que pase por todas las islas sin repetir ninguna ? Si la respuesta es sí, escribe la lista de las islas en orden para describir el viaje. Si la respuesta es no pasa al siguiente ejercicio.

2. Sobre este diseño, ¿es posible hacer un viaje que pase por todas las islas sin repetir ninguna? ¿Cuál? ¿Hay más de una opción ? ¿ Cuáles?



Actividad 4.1 Última pregunta del Problema Inicial

Desarrollo de la Actividad

Para la primera parte es necesario que sepamos de antemano si el grafo que construyeron en la *Actividad 1.1* admite un recorrido hamiltoniano. Esto decantará qué opción le vamos a entregar: Si el grafo del alumno admite un recorrido hamiltoniano se entrega la opción (B) si no, se entrega la opción (A). Deberemos también tener preparada la *Actividad 1.1* para que ellos mismos comprueben sobre su diseño.

Al igual que en la *Actividad 3.1*, si el grafo que construyó el estudiante es muy engorroso le entregaremos la opción (A) y le pediremos que trabaje sobre uno estándar que le proporcionaremos nosotros.

La otra parte de la actividad dejaremos que sean ellos los que comprendan la situación planteada y creen una. Si los estudiantes no consiguen expresar ninguna situación en la que convenga tener un recorrido Hamiltoniano en un grafo, podemos ofrecerles alguna pista para que a partir de ella desarrollen una situación: *Imaginemos que somos dueños de una agencia de Alquiler de Caravanas…*

Fundamentación curricular

Saberes básicos	**S. IV**. 2.1: <u>Modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante representaciones matemáticas</u> y lenguaje algebraico, haciendo uso de distintos tipos de funciones.
Competencias específicas	C1. <u>Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas,</u> aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones. *(Subrayado)* C2. <u>Analizar las soluciones de un problema</u> usando diferentes técnicas y herramientas, <u>evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático</u> y su repercusión global. *(Subrayado)*
Criterios de evaluación	1.1, 1.3 y 2.1
Respecto a la evaluación	Producto
Temporalización	20 min
Recursos	Ficha del alumno.

Tabla 20. Fundamentación curricular Actividad 4.1

Actividad 4.2 Clasificando Recorridos

Descripción de la Actividad

Los estudiantes ya deben manejar los dos tipos de recorridos y hasta ahora nos referíamos a ellos según si nos interesaban las aristas o los vértices. Es momento de establecer los nombres y definiciones correspondientes (Figura 19). A continuación, trabajamos sobre ejemplos para llegar a la conclusión de que no hay equivalencia entre un recorrido Hamiltoniano y Euleriano. Para ello, procedemos a organizarlos en una tabla.

Luego introduciremos lo que en matemáticas se conoce como, *problema abierto*. Esto nos llevará otra vez, a responder la pregunta: *Después de hacer el diseño de los puentes, ¿es posible hacer un viaje que pase por todas las islas sin repetir ninguna? ¿Cómo?*

El objetivo es que esta vez ellos respondan algo parecido a: “*A priori no lo sabemos, así que habrá que hacerlo con cuidado*”.

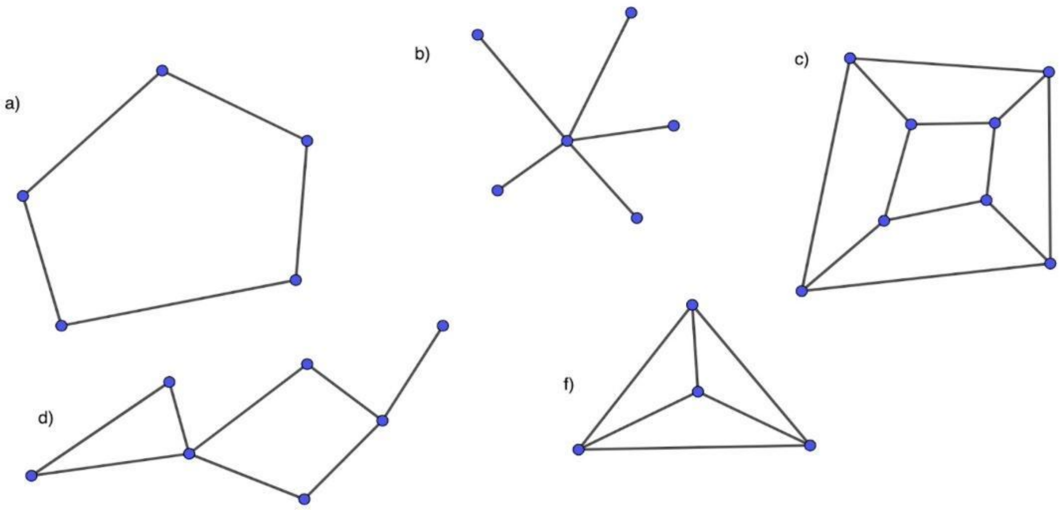
Figura 19. Ficha del Alumno Fuente: Elaboración propia

Actividad 4.2 Clasificando recorridos

Según nuestro interés tenemos dos tipos de recorridos:

*"**Recorrido Euleriano** cuando recorremos todas las Aristas sin repetir ninguna y **Recorrido Hamiltoniano** cuando recorremos todos los Vértices sin repetir ninguno."*

1. Trata de realizar sobre cada grafo un recorrido Hamiltoniano y uno Euleriano. ¿Será el mismo recorrido? ¿Siempre podremos hacer los dos tipos recorridos ?



Actividad 4.2 Clasificando recorridos

Desarrollo de la Actividad

Organizar los grafos en la tabla puede presentar dificultades entre los estudiantes. Para aclarar las dudas haremos un ejemplo en la pizarra que no sea ninguno de lo que presenta el ejercicio.

Por otro lado, si en el momento de sacar conclusiones presentan también dificultades, podemos preguntar a la clase: *Según la información que nos proporciona tener los ejemplos organizados en la tabla, ¿podemos asegurar que si un grafo es Euleriano, será hamiltoniano? ¿Y al revés?*

Sobre el *Apunte Teórico* referido al problema abierto: *Dado un grafo cualquiera, asegurar si admite un recorrido Hamiltoniano, es un problema abierto. Es decir, los matemáticos no han encontrado una manera de saber, sin probar todos los recorridos* *posibles, cuando hay un recorrido que pase por todos los vértices sin repetir ninguno. Para grafos con pocos vértices y aristas, es sencillo. Pero con muchos vértices, la complejidad es enorme.* Es importante comunicarles a los estudiantes que; gracias a que hay problemas con estas características, las matemáticas siguen avanzando y evolucionando. (Si *vemos que esta idea les engancha, podemos contarle la historia del último teorema de Fermat o la conjetura de Collatz*)

Fundamentación curricular

Saberes básicos	**S. IV**. 2.1: Modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante representaciones matemáticas y lenguaje algebraico, haciendo uso de distintos tipos de funciones.
Competencias específicas	C1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones. *(Subrayado)* C2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global. *(Subrayado)*
Criterios de evaluación	1.1, 1.3 y 2.1
Respecto a la evaluación	Producto
Temporalización	30 min
Recursos	Ficha del alumno.

Tabla 21. Fundamentación Curricular Actividad 4.2

Actividad 4.3 Ordenando con Grafos.

Descripción de la actividad

Esta es una actividad de aplicación, está fuera del eje temático del Problema Inicial. Está planteada bajo un contexto sencillo: Ordenar listas de colores. Pero al pedir condiciones a la ordenación, les plantea un reto que se puede abordar con grafos, buscando recorridos Hamiltonianos. Cuando el reto sea completado se les modificará las condiciones para que la situación siga manteniendo a los estudiantes pensando en el problema. (Figura 21)

La actividad puede ser implementada en grupos pequeños: 3-4 Alumnos. Pero también se puede llevar al aula para realizarla de forma individual.

Requiere de un material que representará los elementos de la lista a ordenar. En este caso, colores. (Figura 20)

La evolución de la actividad acabará cambiando los colores, por los nombres de los estudiantes.

El objetivo es proporcionarle una actividad que necesite grafos y los mantenga pensando en el problema y sus modificaciones.

Figuras 20 y 21. Material y Ficha del Alumno. Fuente: Elaboración propia

Figura 20. Materiales para la Actividad.

Actividad 4.3 Ordenando con Grafos.

1. Tenemos 6 colores:

Rojo, Malva, Verde, Ámbar, Burdeos, Cian.

Y el objetivo es ordenar la lista de colores cumpliendo dos condiciones:

1. Empezar por el Rojo.
2. Los colores consecutivos de la lista deben cumplir lo siguiente:
   -Tienen que tener al menos una letra en común.
   -No pueden tener la misma cantidad de letras.

¿Pueden los grafos ayudarnos a ordenar la lista? ¿Qué tipo de grafo estamos buscando? ¿Por qué? ¿Cuántas ordenaciones distintas hay?

2. Intenta ahora ordenar cambiando la condición 1. Empieza con otro color. ¿En qué colores se puede empezar?

3. Añade el color Amarillo a la lista y vuelve a ordenar con las concidiones iniciales. ¿Cuántas ordenaciones distintas hay? ¿ Qué conclusión sacas ?

Quita el Amarillo y añade el Negro a la lista.Vuelve a ordenar con las concidiones iniciales. ¿Cuántas ordenaciones distintas hay? ¿ Qué conclusión sacas ?

4. Prueba ahora con los nombres de tus compañeros de clase.

Figura 21. Ficha de la actividad
Actividad 4.3 Ordenando con Grafos.

Desarrollo de la Actividad

Desde que se entregue la ficha les indicaremos a los alumnos que cuando lleguen al ejercicio 3 nos deben avisar para entregarles las tarjetas de color amarillo y luego negro. Queremos observar si todo el trabajo previo se refleja en trabajo autónomo, así que vamos tener una labor plenamente de guía. Evitaremos responder preguntas sobre las conclusiones a las que deben llegar. Es importante observar si construyen bien el grafo auxiliar para la ordenación. Si no es así, si daremos alguna indicación. La intención principal es que nuestra actitud sea como la de un profesor durante una prueba escrita.

También les informaremos desde el principio que deben recoger las respuestas a las preguntas y los grafos que utilicen, en un folio aparte, si fuera necesario.

Fundamentación curricular

Saberes básicos	**S. IV**. 2.1: Modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante representaciones matemáticas y lenguaje algebraico, haciendo uso de distintos tipos de funciones.
Competencias específicas	C1. Interpretar, modelizar y resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas, aplicando diferentes estrategias y formas de razonamiento, para explorar distintas maneras de proceder y obtener posibles soluciones. *(Subrayado)* C2. Analizar las soluciones de un problema usando diferentes técnicas y herramientas, evaluando las respuestas obtenidas, para verificar su validez e idoneidad desde un punto de vista matemático y su repercusión global. *(Subrayado)*
Criterios de evaluación	1.1, 1.3 y 2.1
Respecto a la evaluación	Instrumento. Herramienta: Lista de control
Temporalización	55 min
Recursos	Ficha del alumno. Cartas de colores (Figura 20).

Tabla 22. Fundamentación curricular Actividad 4.3

3.2 Evaluación del alumnado

La evaluación de las actividades que el alumnado realiza (Decreto 30/2023) , es un proceso que por un lado, facilita la información necesaria para comprobar el grado de adquisición de las competencias y objetivos de la Propuesta. Y por otro lado, también informa al profesorado sobre el proceso de enseñanza y cómo llevar a cabo los ajustes necesarios para mejorar el aprendizaje de los estudiantes. Así mismo, un motivo clave es la responsabilidad y transparencia: La evaluación ayuda a garantizar la rendición de cuentas tanto a nivel individual como institucional. Proporciona información sobre el rendimiento de los estudiantes, lo cual es importante para los padres, los estudiantes, los docentes y las autoridades educativas. La evaluación también ayuda a identificar las fortalezas y debilidades del sistema educativo en general.

Para esta propuesta de innovación, de todos los productos generados por los estudiantes se han seleccionado diferentes instrumentos de evaluación que permitan mostrar sus aprendizajes, como pueden ser informes, resolución de actividades y pruebas escritas. Los criterios de evaluación que indica el curriculum serán los referentes.

La evaluación será un proceso continuo. En este caso vamos a diferenciar tres momentos a lo largo de la SA. Un primer momento lo constituyen las resoluciones de las actividades hechas en las sesiones presenciales o las resueltas en casa por los estudiantes, en caso de que hubiera alguna. Tener un seguimiento después de cada sesión sobre el trabajo del estudiante, ofrece una información acerca de su proceso de aprendizaje con posibilidad de mejorar el proceso de enseñanza con el fin de una adecuada adquisición de conocimientos por parte del alumno. Ya que recibirá retroalimentación frecuentemente. El segundo momento tendrá parte en la síntesis de información y razonamientos que responden a las cuestiones del Problema Inicial a modo de informe. Y el último momento será la resolución de una prueba escrita, que en este caso pondrá el foco en la adquisición de las competencias C1, C2 y C4, todas ellas trabajadas a lo largo de la situación de aprendizaje.

Instrumentos de evaluación

A continuación, se constituye la lista con los instrumentos de evaluación seleccionados. Se han elegido estos, porque se consideran actividades que reúnen información suficiente para argumentar la evaluación a través de los criterios correspondientes.

- Resolución del ejercicio 3 Actividad 1.4
- Resolución de actividad 2.3
- Resolución de actividad 3.4
- Resolución de actividad 4.3
- Informe de las respuestas al Problema Inicial.
- Prueba escrita. (Figura 22)

Esto da pie a la construcción de la Tabla 23, donde se establece la relación de los criterios de evaluación y los instrumentos seleccionados.

Criterios	Indicadores	Instrumentos				
		Resolución de Ej3, act 1.4	**Resolución de actividad 2.3**	**Resolución de actividad 3.4**	**Resolución de actividad 4.3**	**Prueba Escrita**
1.1. Interpretar problemas matemáticos, identificando los datos y el objetivo, definiendo la relación que existe entre ellos y representando la información mediante herramientas manuales o digitales, compartiendo ideas y enjuiciando con crítica razonada las de las demás personas y los diferentes enfoques del mismo problema con el fin de comprender el enunciado y explorar distintas maneras de proceder.	Interpretar problemas		X	X	X	X
	Identificando los datos y el objetivo		X	X	X	X
	Definiendo la relación que existe entre los datos	X	X	X	X	X
1.3. Obtener todas las soluciones matemáticas de un problema, mostrando perseverancia en su búsqueda, autoconfianza y activando los conocimientos necesarios para resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas	Obtener todas las soluciones matemáticas de un problem				X	
	Mostrando perseverancia en su búsqued	X			X	
	Activando los conocimientos necesarios	X		X	X	X
2.1. Seleccionar las soluciones óptimas de un problema comprobando, analizando e interpretando, con actitud crítica, dichas soluciones, reflexionando sobre su validez y sobre su aplicación en diferentes contextos, valorando tanto la corrección matemática	Seleccionar las soluciones de un problema	X	X	X	X	X
	Reflexionando sobre su validez		X	X	X	X

como sus implicaciones desde diferentes perspectivas para obtener conclusiones relevantes y elaborar respuestas a las preguntas planteadas.	Elaborar respuestas a las preguntas planteadas.		X	X	X	X
4.1. Descomponer un problema en partes más simples organizando los datos y reconociendo patrones para facilitar su interpretación y su tratamiento computación	Descomponer un problema en partes más simples organizando los datos					X
	Reconociendo patrones para facilitar su interpretación		X	X	X	X

Tabla 23. Relación entre criterios e instrumentos de evaluación.

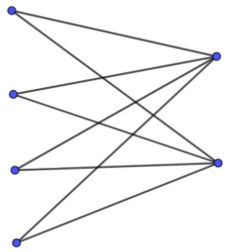
Prueba sobre Grafos. Grupo ______ .

Nombre:____

A por todas. ¡Mucho ánimo!

1. Define con tus propias palabras qué es un grafo e indica sus partes.

2. Redacta una situación que se represente con el siguiente grafo:



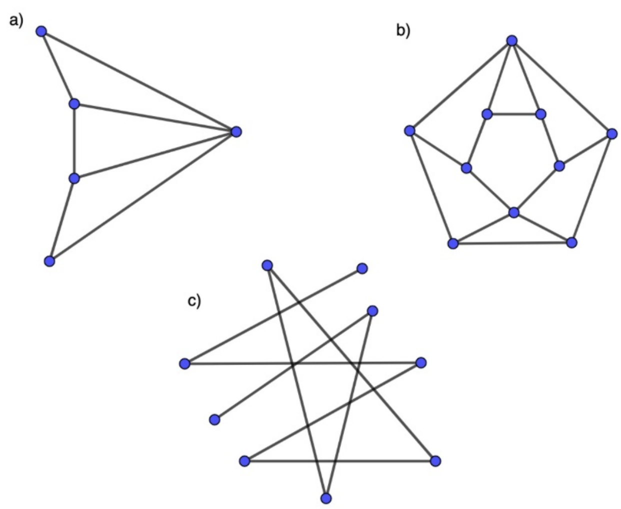
3. En un grafo, la suma de los grados de cada vértice es igual a ____________________

   Según la anterior afirmación, en una habitación con 7 personas ¿ es posible que cada persona conozca exactamente a otras 5 personas ? ¿ Por qué ? ¿ Y exactamente a 4 ? .

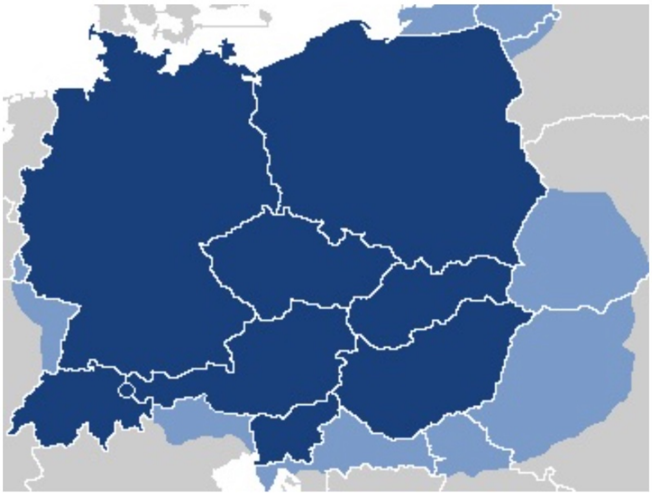
4. Construye grafos con las siguientes condiciones.
   a) Más de 2 vértices con todos los vértices de distinto grado.
   b) 7 vértices donde 5 vértices tienen grado 2 y 2 vértices tienen grado 3.
   c) 5 vértices donde cada vértice tiene grado 3.

   En los casos que sea posible, dar más de un diseño.

5. En cada apartado, si es posible realizar un camino Euleriano sobre el grafo, marca sobre él quién es el vértice de inicio y final. Si **no** es posible, explica por qué.



6. Estamos interesados en hacer un análisis de fronteras en Europa, investigando qué fronteras presentan más problemas a la hora de cruzarlas con un coche. Representa con un grafo las conexiones de países que comparten frontera en el siguiente mapa. *(Europa central)*



¿Se podría cruzar cada frontera, pasando por el control correspondiente con el coche, sin repetir ninguna? Explica tu respuesta e indica qué tipo de recorrido responde a la pregunta.

7. En una casa, el nuevo modelo de *aspiradora robot*, hace el recorrido de la imagen. ¿Puedes afirmar que la aspiradora está programada para cruzar todos las puertas sin repetir ninguna ? Si la respuesta es SÍ, explica por qué. Si la respuesta es NO, explica por qué y representa, con un grafo, el recorrido que debería hacer para que pase por todas las habitaciones sin repetir ninguna.

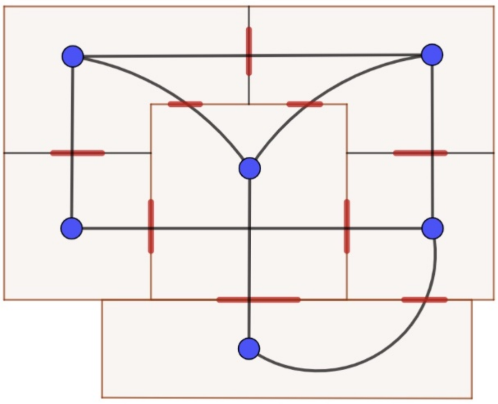


Figura 22. Prueba Escrita.

Herramientas de evaluación

Con el fin de extraer información de cada uno de los instrumentos propuestos, se usará una herramienta de evaluación para cada uno. En este caso, listas de control o rúbricas.

Para la resolución de las actividades usaremos una tabla de control donde se refleja la adquisición de competencias durante el desarrollo de la propuesta. (Tablas 23, 24, 25 y 26)

Con el objetivo de seguir una evaluación formativa, proporcionaremos a los alumnos la propia rúbrica que evaluará el informe (Tabla 27), esto dejará claro a qué aspectos deben prestar atención. Aunque no es el objetivo de la S.A, la presentacion del informe nos servirá para evaluar la competencia C8: *Comunicar de forma individual y cole ctiva conceptos, procedimientos y argumentos matemáticos, usando lenguaje oral, escrito o gráfico, utilizando la terminología matemática apropiada, para dar significado y coherencia a las ideas matemáticas.*.

Por otro lado, la prueba escrita nos dejará evidencias sobre qué conocimiento arraigó en el estudiante. Se utilizará una rúbrica (Tabla 28) basada en los criterios asociados a C1, C2 y C4 .

Para acabar y dar coherencia a los instrumentos y criterios de evaluación se crea una tabla que los relaciona a modo de herramienta de evaluación (Tabla 29). El objetivo es hacer un seguimiento de cómo se evalúan los criterios de evaluación a través de los instrumentos seleccionados.

A continuación se muestran las Herramientas de evaluación.

Indicador	**Si**	**Parcial mente**	**No**
Construye los grafos pedidos.			
Comprueba la construcción con la colocación del grado de cada vértice.			
Muestra ensayo y error en construcciones complejas o imposibles.			
Presenta más de una construcción en los casos posibles.			

Tabla 24. Lista de Control Ejercicio 3 Actividad 1.4

Indicador	**Si**	**Parcial mente**	**No**
Construye grafos que traten de representar las situaciones.			
Comprueba la construcción con la colocación del grado			

de cada vértice.			
Justifica cuando es imposible la construcción.			
Es capaz de trabajar sobre las modificaciones presentando razonamiento.			

Tabla 25. Lista de Control Actividad 2.3

Indicador	**Si**	**Parcialmente**	**No**
Construye los grafos pedidos.			
Deja evidencias de los recorridos que se les piden.			
Explica y justifica en que se basó para proponer su.			

Tabla 26. Lista de Control Actividad 3.4

Indicadores Individuales.	**Si**	**Parcialmente**	**No**
Utiliza grafos para modelizar la ordenación.			
Identifica el tipo de recorrido que se debe hacer.			
Trata de buscar más de una solución posible.			
Razona conclusiones a través de los grafos construidos.			
Indicadores Grupales.			
Comunica al grupo las ideas que tiene.			
Trata de participar. No deja que otro haga toda la actividad.			
Utiliza terminología matemática para expresarse con los compañeros.			

Tabla 27. Lista de control actividad 4.3

Aspectos	Excelente	Bien	Suficiente	Insuficiente
Estructura	El informe cuenta con todos los aspectos de la estructura: -Título ilustrativo. -Introducción (objeto de la investigación). Cuerpo (Diseños y justificación). -Conclusión (conclusión argumentada y propuestas).	El informe cuenta con todos los aspectos de la estructura pero falla en aspectos como el título (no ilustrativo) o la introducción (no señala el objeto), el cuerpo (crace de justificación).	El informe carece de algún aspecto importante de la estructura (título, introducción, cuerpo y conclusión) o bien, en uno de los apartados no se desarrollan los aspectos requeridos.	El informe carece de estructura y/o su contenido no se ajusta a la estructura requerida.
Redacción	No hay errores de gramática, ortografía o puntuación.	Casi no hay errores de gramática, ortografía o puntuación.	Unos pocos errores de gramática, ortografía o puntuación.	Muchos errores de gramática, ortografía o puntuación.
Calidad de Información	La información presentada es rigurosa en el lenguaje matemático. Además es abundante y se halla argumentada a lo largo de todo el informe. Se responde a todas las preguntas planteadas: qué, para qué, por qué, cómo, cuales...	La información presentada es rigurosa en el lenguaje matemático Además es abundante y se halla argumentada a lo largo de todo el informe. Falla al no responder a una de las preguntas.	La información presentada es rigurosa en el lenguaje matemático. Es suficiente pero hay algún razonamiento sin argumentar. Falla al no responder a una de las preguntas.	La información presentada no es rigurosa en el lenguaje matemático. Además no es suficiente o bien no se halla bien argumentada a lo largo de todo el informe. No responde a varias de las preguntas planteadas.

Tabla 28. Rúbrica para el Informe del Problema Inicial

<table>
<tr><th>Criterios</th><th>Insuficiente</th><th>Suficiente</th><th>Bien</th><th>Muy bien</th></tr>
<tr><td>Interpretar problemas matemáticos, identificando los datos y el objetivo, definiendo la relación que existe entre ellos y representando la información mediante herramientas manuales o digitales, compartiendo ideas y enjuiciando con crítica razonada las de las demás personas y los diferentes enfoques del mismo problema con el fin de comprender el enunciado y explorar distintas maneras de proceder.</td><td>No es capaz de identificar los datos ni el objetivo en ningún ejercicio</td><td>Es capaz de identificar los datos en 2 problemas pero no la relación</td><td>Identifica los datos el objetivo y la relación entre ellos pero no representa de forma correcta en los 3 problemas</td><td>Identifica los datos el objetivo y la relación entre ellos y lo representa de forma correcta
en los 3 problemas</td></tr>
<tr><td>1.3. Obtener todas las soluciones matemáticas de un problema, mostrando perseverancia en su búsqueda, autoconfianza y activando los conocimientos necesarios para resolver problemas de la vida cotidiana y propios de las matemáticas.</td><td>Proporciona una solución en menos de 3 ejercicios</td><td>Proporciona una solución en más de 3 ejercicios</td><td>Proporciona dos soluciones
cuando sea posible</td><td>Proporciona dos soluciones cuando sea posible dejando evidencias de porque ambas son solución</td></tr>
<tr><td>2.1. Seleccionar las soluciones óptimas de un problema comprobando, analizando e interpretando, con actitud crítica, dichas soluciones, reflexionando sobre su validez y sobre su aplicación en diferentes contextos, valorando tanto la corrección matemática como sus implicaciones desde diferentes perspectivas para obtener conclusiones relevantes y elaborar respuestas a las preguntas planteadas.</td><td>Obtiene la solución en 2 o menos problemas</td><td>Obtiene la solución y elabora las respuesta en 3 problemas</td><td colspan="2">Obtiene la solución, elabora las respuesta y las justifica proporcionando un razonamiento correcto en todos los problemas</td></tr>
<tr><td>4.1. Descomponer un problema en partes más simples organizando los datos y reconociendo patrones para facilitar su interpretación y su tratamiento computacion</td><td colspan="2">No Plantea la resolución separando el proceso en pasos para usar los patrones</td><td colspan="2">Plantea la resolución separando el proceso en pasos para usar los patrones</td></tr>
</table>

Tabla 29. Rúbrica para la Prueba Escrita

Capítulo 4. EVALUACIÓN DE LA PROPUESTA

La evaluación de las propuestas de innovación en educación es esencial para garantizar que se implementen soluciones efectivas que mejoren el aprendizaje. Para llevar a cabo esta evaluación hemos seleccionado una encuesta de satisfacción del alumnado, que puede ser entregada al final de la propuesta, y una autoevaluación del profesorado, con el fin de hacer retrospectiva y modificar algún aspecto relevante. La intención de mejorar la experiencia del alumnado y la implementación del profesor debe ser siempre una característica de la innovación educativa.

4.1 Encuesta de Satisfacción.

La finalidad de esta encuesta de satisfacción (Tabla 30) es obtener información valiosa sobre la experiencia de los estudiantes en relación con las actividades sobre grafos que se llevaron a cabo. Los aspectos que se evaluaron incluyen la comprensión del tema, la facilidad o dificultad de las matemáticas implicadas, la duración de la secuencia de actividades, el nivel de compromiso, el interés que generó la actividad y la posibilidad de realizar más actividades de este tipo. Además, la encuesta también permite a los estudiantes expresar sus opiniones sobre lo que le gustó y no gustó de la actividad. Con esta información, se puede obtener una visión más clara de cómo se desarrolló la actividad y cómo se puede mejorar en el futuro para lograr una experiencia más satisfactoria para los estudiantes.

	Muy de acuerdo	Bastante de acuerdo	Poco de acuerdo	Nada de acuerdo
El tema sobre grafos me pareció interesante				
Sabía lo que tenía que hacer porque entendí el enunciado				
Las matemáticas me resultaron sencillas				
Se me hizo largo la secuencia de actividades				
Me gustaría hacer más actividades de este estilo.				
Lo que más me gustó de esta actividad fue...				
Lo que menos me gustó de esta actividad fue...				

Tabla 30. Encuesta de satisfacción

4.2 Autoevaluación para el profesor.

La autoevaluación (Tabla 31) es una herramienta valiosa para cualquier profesor que busca mejorar su práctica docente y optimizar la experiencia de aprendizaje de sus estudiantes. Después de impartir una situación de aprendizaje o incluso durante la situación, es importante que el profesor se tome tiempo para hacer una autoevaluación reflexiva sobre su desempeño. Esto le permitirá identificar sus fortalezas y debilidades en la enseñanza, así como las áreas que requieren mejoras o cambios en futuras situaciones de aprendizaje. La autoevaluación también permite al profesor hacer una evaluación crítica de los resultados del aprendizaje de los estudiantes y ajustar su enfoque pedagógico para lograr un mayor impacto en la comprensión y el desempeño de los estudiantes. Además, la autoevaluación puede ayudar a los profesores a desarrollar un sentido de responsabilidad y compromiso hacia su práctica docente, motivando a buscar nuevas estrategias y enfoques que conduzcan a un aprendizaje más efectivo.

Lista de control	**Mucho**	**Bastante**	**Poco**	**Nada**	**Observaciones**
El tema resultó motivador					
El alumno conocía el contexto.					
Las actividades planteadas estaban claras y las preguntas eran adecuadas					
Aumentó la participación del alumnado					
Aumentó el rendimiento					
Se favoreció la relación entre el profesorado y alumnado					
Se atendió a la diversidad de forma eficaz					
La temporalización fue adecuada					

Tabla 31. Autoevaluación para el profesor.

Capítulo 5. IMPLEMENTACIÓN, ANÁLISIS Y PROPUESTAS DE MEJORA

5.1 Implementación

La propuesta de innovación fue implementada casi en su totalidad en el “IES Tegueste” dentro de la materia: Prácticas en centros del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Estas prácticas tuvieron lugar desde el 20 de abril hasta el 11 de mayo de 2023.

Es el único centro del municipio de Tegueste, al noreste de la isla de Tenerife y contiene a 795 alumnos repartidos entre el propio municipio, pueblos cercanos y barrios del Municipio de San Cristóbal de La Laguna como Valle de Guerra, Tejina, Bajamar y Punta del Hidalgo. La secuencia de actividades se implementó en el curso de Matemáticas Aplicadas 4º ESO. La tutora del centro era la jefa de estudios y solo impartía clases en este grupo.

El grupo de Matemáticas Aplicadas 4º ESO, presentaba unas características especiales. Solo contaba con 5 alumnos y su rendimiento era medio-bajo comparado con el resto de grupos del nivel de 4º ESO. Estás características hicieron que la implementación fuera más sencilla a la hora de atender individualmente a los alumnos aunque también se presentaron dificultades a la hora de conseguir trabajo autónomo por parte de los estudiantes.

A continuación, se detallan ciertos aspectos de la implementación como: la organización, las actividades, las dificultades encontradas durante el desarrollo de la propuesta y la evaluación de la misma.

5.1.1 Sobre la organización

La experiencia tuvo lugar con el alumnado del nivel de 4º aunque puede ser implementada en otros niveles de la ESO al ser un conocimiento completamente nuevo y ofrecer una profundidad de contenidos adaptable a todos los niveles de secundaria. Se programó para 8 sesiones. Pero habiendo implementado 8 sesiones no se completó toda la secuencia de actividades. El motivo posiblemente se debe a la introducción de un concepto nuevo, impartido por alguien sin experiencia docente. Esto hace que el ritmo de trabajo no sea lo suficientemente alto. Por otro lado, también se tuvo que detener el avance en las actividades para aclarar y recordar lo trabajado en sesiones anteriores.

5.1.2 Sobre las actividades

Como se indicó anteriormente, la propuesta fue llevada al aula casi en su totalidad. En la Tabla 32 se muestran las actividades que se pudieron implementar.

Nº Tarea	Tarea	Nº Actividad	Actividad	Implementadas
1	**Conectando las islas**	1.1	Primeros pasos	X
		1.2	La provincia de SC de Tenerife	X
		1.3	¿Donde pueden aparecer los grafos?	X
		1.4	Graduando los grafos	X
2	**¿Nos vale todo?**	2.1	Primeras respuestas al Problema Inicial	X
		2.2	¿Qué está pasando?	X
		2.3	Otros contextos	X
3	**Todos los puentes de una**	3.1	¿Cuándo se podrá?	X
		3.2	Un poco de historia	X
		3.3	Recorridos sin levantar el lápiz	X
		3.4	Volvemos al Problema Inicial	X
		3.5	Un problema Complejo o No tanto	
4	**Todas las islas de una**	4.1	Última pregunta del Problema Inicial	
		4.2	Clasificando recorridos	
		4.3	Ordenando con grafos	

Tabla 32. Actividades implementadas

Las actividades resueltas de los alumnos se recogían en las propias fichas, organizadas para contener toda la información necesaria para su resolución. En este sentido, la estrategia general del trabajo consistía en que, de forma gradual, se presentaban al estudiante las tareas y era el profesor el que guardaba las actividades después de cada clase en un carpeta individualizada a modo de dossier. Eso evitaba la pérdida del material. Y nos daba la posibilidad de evaluar el trabajo hecho por los alumnos de cara a la siguiente sesión.

Ahora se procede a mostrar y comentar algunas de las actividades realizadas por los estudiantes, en concreto las actividades que se consideran instrumentos de evaluación en las tareas uno, dos y tres.

Resolución del ejercicio 3 de la actividad 1.4

En esta actividad, el objetivo es que sean capaces de construir grafos a partir de condiciones sobre sus vértices y el grado de los mismos. Al observar la resolución del alumno (Figura 23) se concluye que la introducción del concepto de grafo fue buena. El alumno consigue representar los grafos e indicar cuándo no era posible su representación. Incluso hace uso de la colocación del grado de cada vértice cuando el grafo es más complejo para ayudarse a completar la construcción.

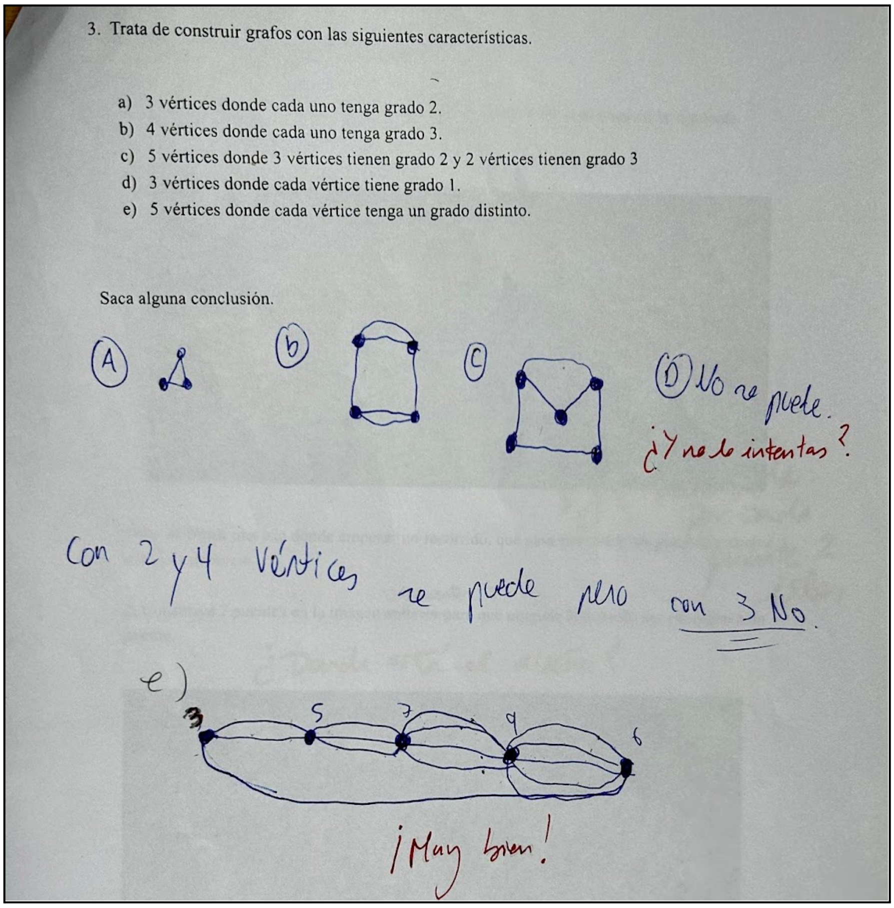
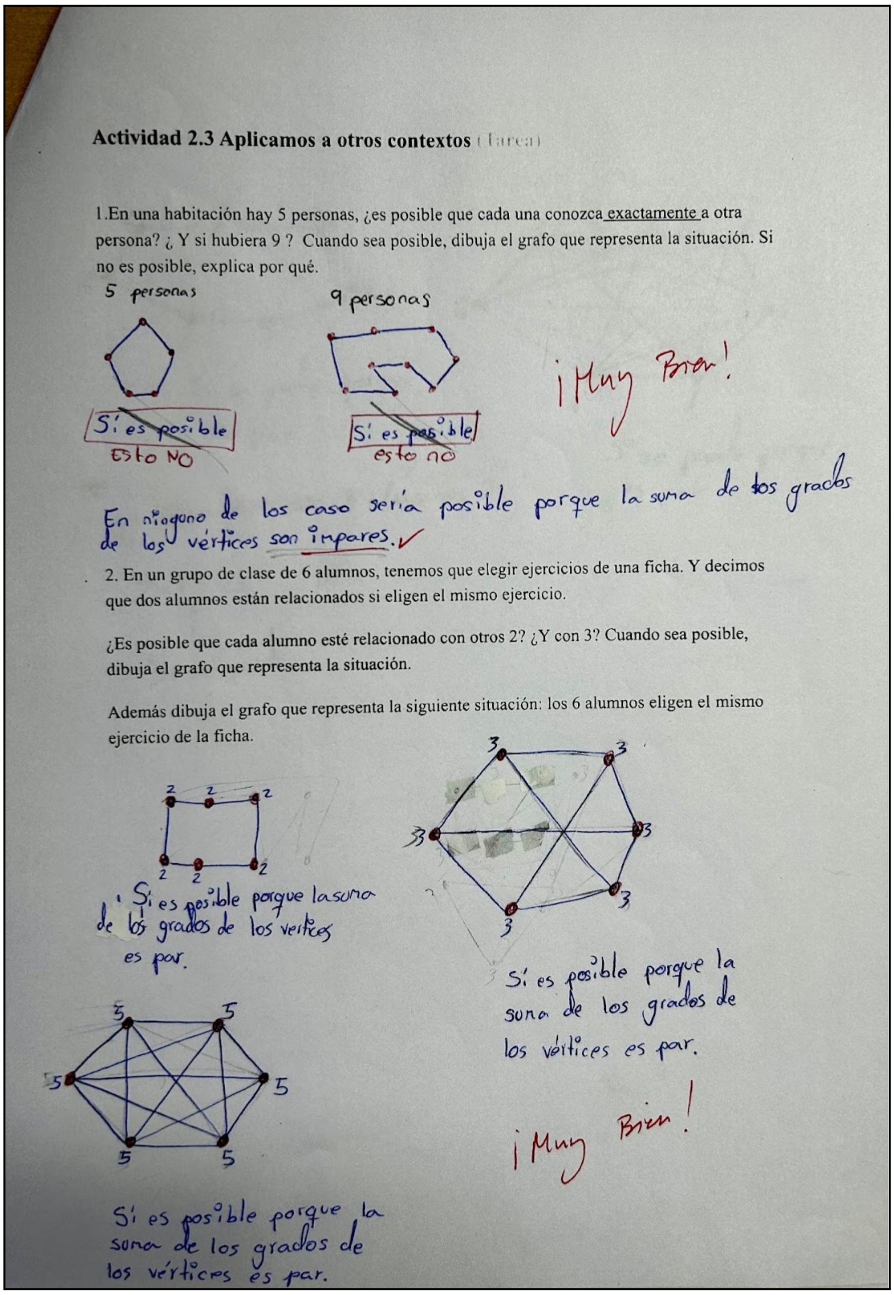


Figura 23. Resolución de la Actividad 1.4

Resolución de la actividad 2.3

A la hora de aplicar algunas propiedades de los grafos, (Figura 24 y 25) se puede observar que, efectivamente, el alumno es capaz de entender el enunciado y aplicar las propiedades necesarias. A su vez, redacta la justificación sobre la conectividad del ejercicio. Así mismo, es capaz de autocorregirse.

Cuando se sugiere que modifiquen las condiciones del enunciado (pasan a representar la situación para 7 alumnos) El estudiante comprende la generalización del grafo. Eso es un aspecto importante a la hora de aplicar propiedades. Aunque ya no justifica con precisión las propiedades sobre conectividad, deja evidencias de que las está aplicando.



Actividad 2.3 Aplicamos a otros contextos (Tarea)

1.En una habitación hay 5 personas, ¿es posible que cada una conozca exactamente a otra persona? ¿ Y si hubiera 9 ? Cuando sea posible, dibuja el grafo que representa la situación. Si no es posible, explica por qué.

5 personas

9 personas

~~Sí es posible~~ esto NO

~~Sí es posible~~ esto no

¡Muy Bien!

En ninguno de los caso sería posible porque la suma de los grados de los vértices son impares.

2. En un grupo de clase de 6 alumnos, tenemos que elegir ejercicios de una ficha. Y decimos que dos alumnos están relacionados si eligen el mismo ejercicio.

¿Es posible que cada alumno esté relacionado con otros 2? ¿Y con 3? Cuando sea posible, dibuja el grafo que representa la situación.

Además dibuja el grafo que representa la siguiente situación: los 6 alumnos eligen el mismo ejercicio de la ficha.

Sí es posible porque la suma de los grados de los vértices es par.

Sí es posible porque la suma de los grados de los vértices es par.

¡Muy Bien!

Sí es posible porque la suma de los grados de los vértices es par.

Figura 24. Primera parte de la resolución de la Actividad 2.3

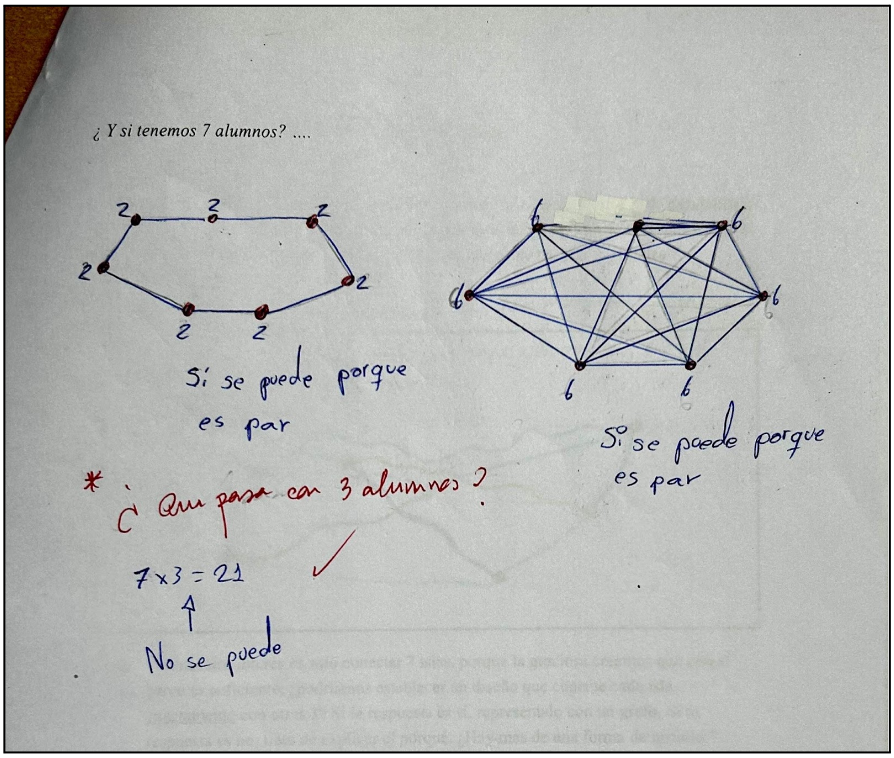
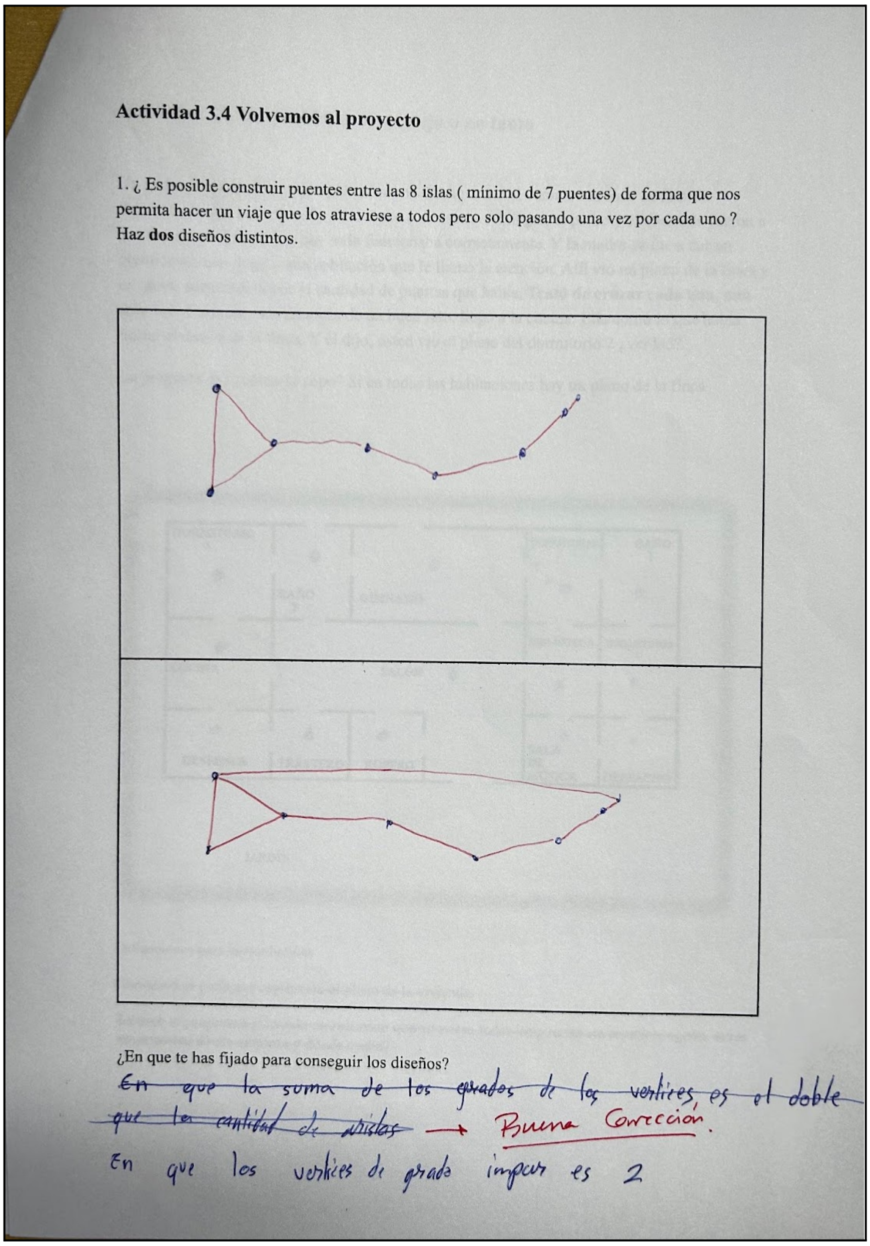


Figura 25. Segunda parte de la resolución de la Actividad 2.3

Resolución Actividad 3.4

Esta actividad pretende que el alumno no solo diseñe grafos que admitan un recorrido euleriano sino que también indique en que se fijó para el diseño (Figura 26). Es interesante observar que primero confunde la propiedad que justifica a sus grafos, pero es capaz de corregirlo. Aunque le falta precisión a la hora de expresarlo.



Actividad 3.4 Volvemos al proyecto

1. ¿ Es posible construir puentes entre las 8 islas (mínimo de 7 puentes) de forma que nos permita hacer un viaje que los atraviese a todos pero solo pasando una vez por cada uno ? Haz **dos** diseños distintos.

¿En que te has fijado para conseguir los diseños?

~~En que la suma de los grados de los vertices es el doble que la cantidad de aristas~~ → Buena Corrección.

En que los vertices de grado impar es 2

Figura 26. Resolución de la Actividad 2.3

5.1.3 Dificultades encontradas

Durante la implementación de las actividades se detectaron varios tipos de dificultades. Unas relacionadas con el perfil del alumnado, otras con las habilidades de modelización que exigen los grafos y por último, relacionadas con la comprensión y clasificación de las propiedades teóricas que se manejan en la secuencia de actividades.

Con respecto al desarrollo de las tareas, se encontró una dificultad generalizada en los estudiantes, relacionada con la falta de predisposición a leer indicaciones de forma autónoma, razonar y proceder a la resolución de actividades. Eso provocó que se invirtiera mucho tiempo en comprensión lectora y en repetición de razonamientos que a priori podrían considerarse simples, como cuando se indicaba: “Si una cantidad es el doble de otra, significa que la primera cantidad representa un número par”. Además, en los momentos en los que el alumno debe formular su propia situación, como por ejemplo en la Actividad 1.3 (¿Dónde pueden aparecer los grafos?), se dejan a la vista las carencias y dificultades en la creatividad de los estudiantes. A todo esto, hay que sumarle la poca predisposición al trabajo autónomo.

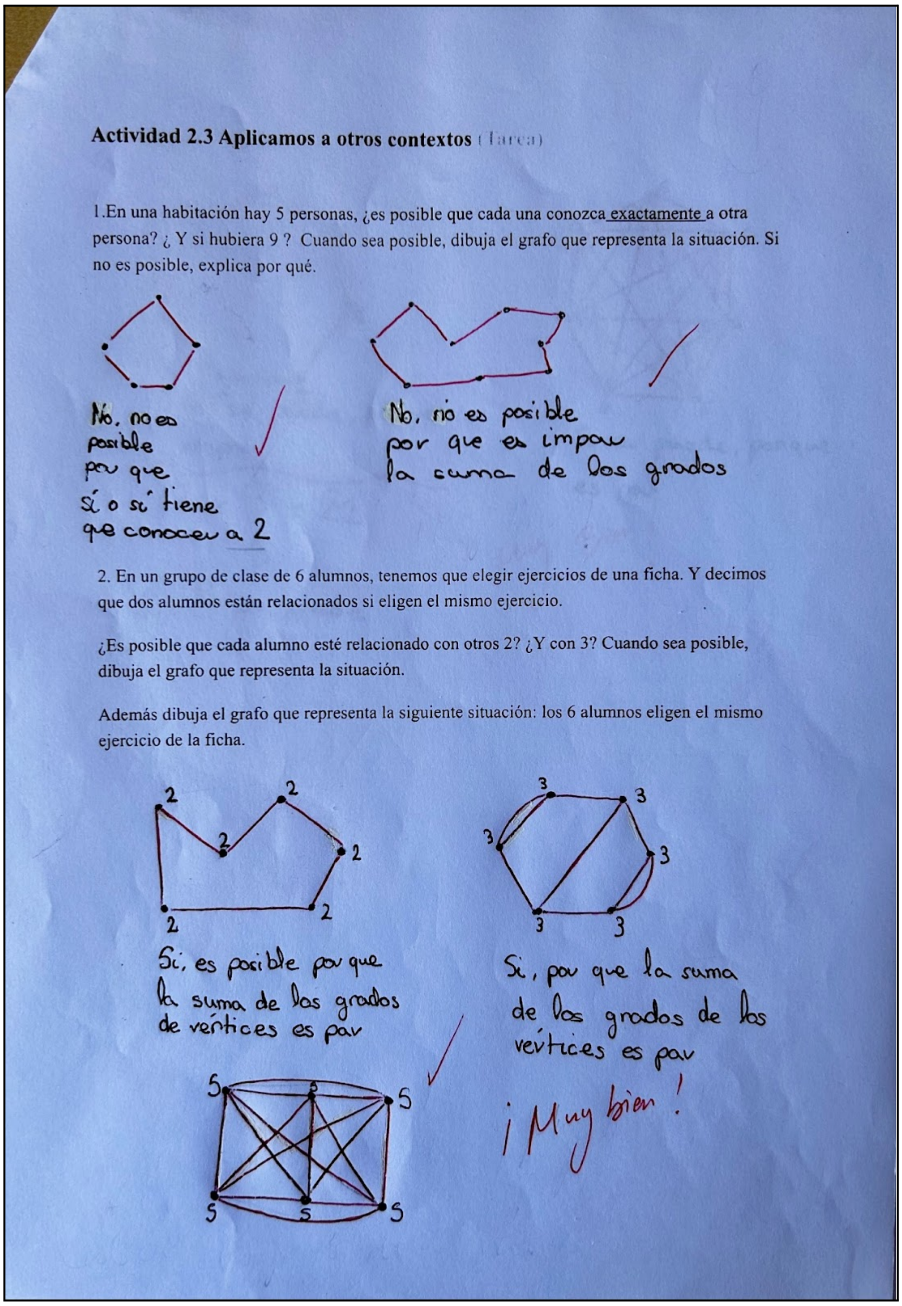
En relación con los grafos, la mayor dificultad se presentaba en las actividades donde era necesaria una modelización previa. Entender a través del enunciado cómo construir el grafo requería, normalmente, demasiada ayuda por parte del profesor. Por ejemplo, en la Actividad 2.3 (Un poco de historia), costó que el alumnado modelizara correctamente los grafos, no por la falta de entendimiento del concepto o entendimiento del objetivo de la actividad, sino por la transformación de un mapa a un grafo.

Por otro lado, cuando ya el desarrollo de la propuesta implicaba manejar más de un resultado teórico, el estudiante no era capaz de diferenciar los contextos o problemas en lo que interviene cada uno: Por ejemplo, en la Actividad 3.1 (¿Cuándo se podrá?) argumentaban: “como la suma de los grados de los vértices es par se puede hacer el recorrido de todas las aristas sin repetir ninguna”. Esto derivó en invertir tiempo en crear un resumen para diferenciar las dos propiedades (Se contempla en el apartado: 5.2 Propuestas de mejora, propuesta 4).

Aun así, dando perspectiva y valorando el perfil de los alumnos, la propuesta se desarrolló sin muchas complicaciones.

5.1.4 Sobre la evaluación

Al no poder terminar la implementación de la propuesta, no podemos sacar todas las conclusiones necesarias sobre la adquisición de competencias en el alumnado. Además, es obvio que el nivel competencial del alumno también se ve influenciado por un factor humano, en lo referido al profesor que la imparte. Esto último es complicado de medir, pero aun así podemos evaluar un ejemplo de actividad que se considera instrumento de evaluación (Figura 27 y 28), y aplicarle su herramienta correspondiente (Tabla 33).



Actividad 2.3 Aplicamos a otros contextos (Tarea)

1.En una habitación hay 5 personas, ¿es posible que cada una conozca exactamente a otra persona? ¿ Y si hubiera 9 ? Cuando sea posible, dibuja el grafo que representa la situación. Si no es posible, explica por qué.

No, no es posible por que sí o sí tiene que conocer a 2

No, no es posible por que es impar la suma de los grados

2. En un grupo de clase de 6 alumnos, tenemos que elegir ejercicios de una ficha. Y decimos que dos alumnos están relacionados si eligen el mismo ejercicio.

¿Es posible que cada alumno esté relacionado con otros 2? ¿Y con 3? Cuando sea posible, dibuja el grafo que representa la situación.

Además dibuja el grafo que representa la siguiente situación: los 6 alumnos eligen el mismo ejercicio de la ficha.

2 2 2 2 2 2

Sí, es posible por que la suma de los grados de vértices es par

3 3 3 3 3 3

Sí, por que la suma de los grados de los vértices es par

5 5 5 5 5 5

¡Muy bien!

Figura 27. Primera parte de la resolución de la Actividad 2.3

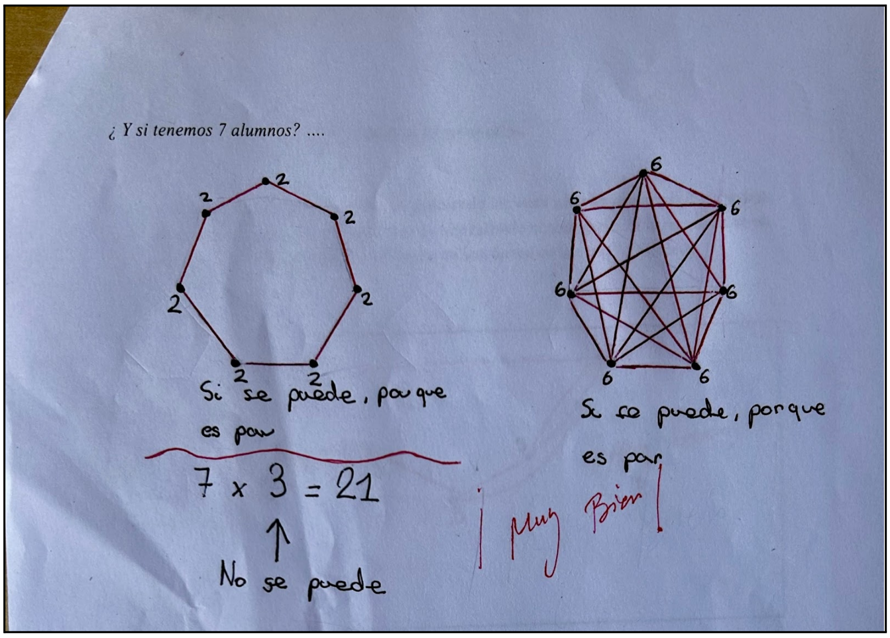
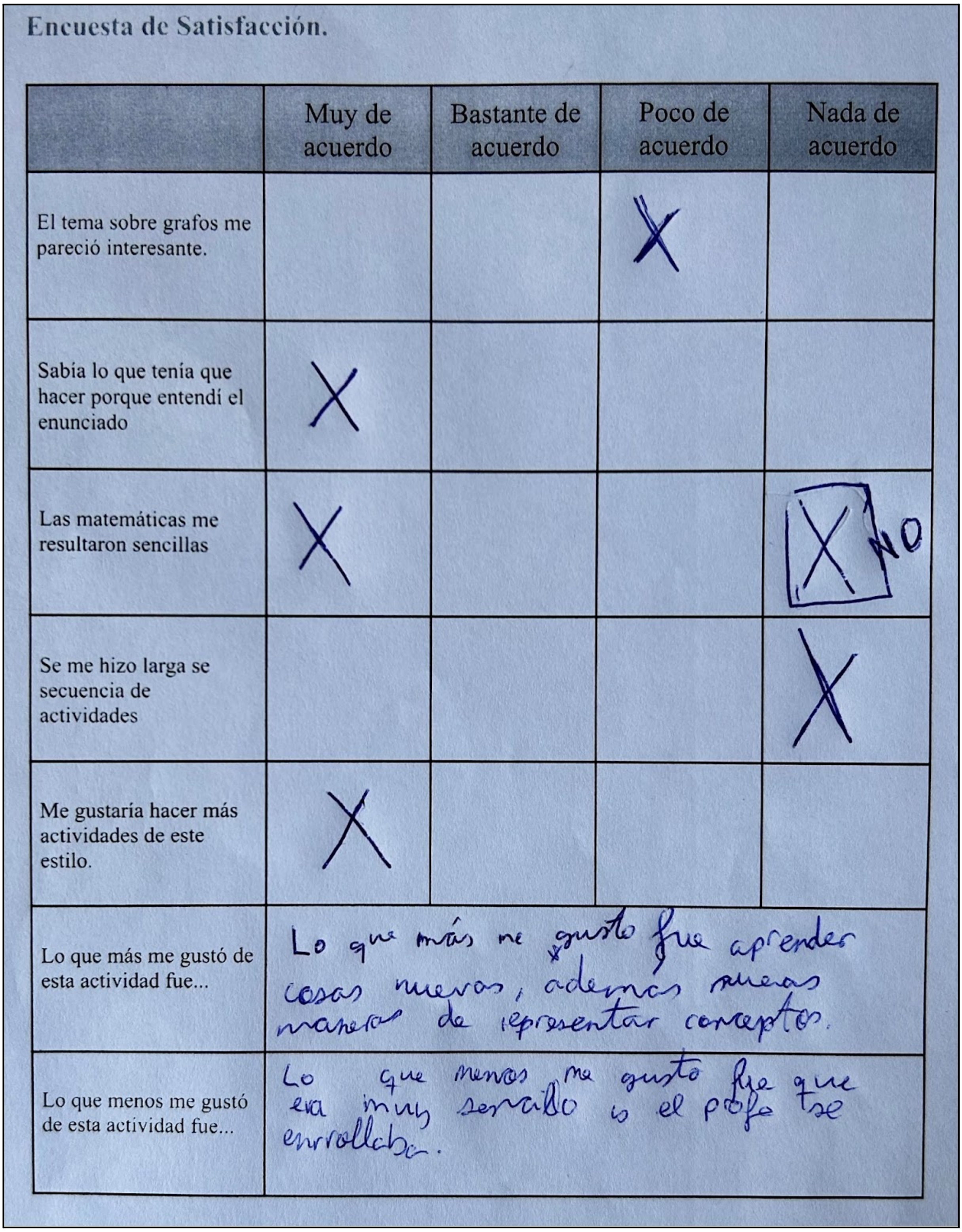


Figura 28. Segunda parte de la resolución de la Actividad 2.3

Indicador	**Si**	**Parcial mente**	**No**
Construye grafos que traten de representar las situaciones.	X		
Comprueba la construcción con la colocación del grado de cada vértice.	X		
Justifica cuando es imposible la construcción.		X	
Es capaz de trabajar sobre las modificaciones presentando razonamiento.	X		

Tabla 33. Aplicación de Lista de Control Actividad 2.3

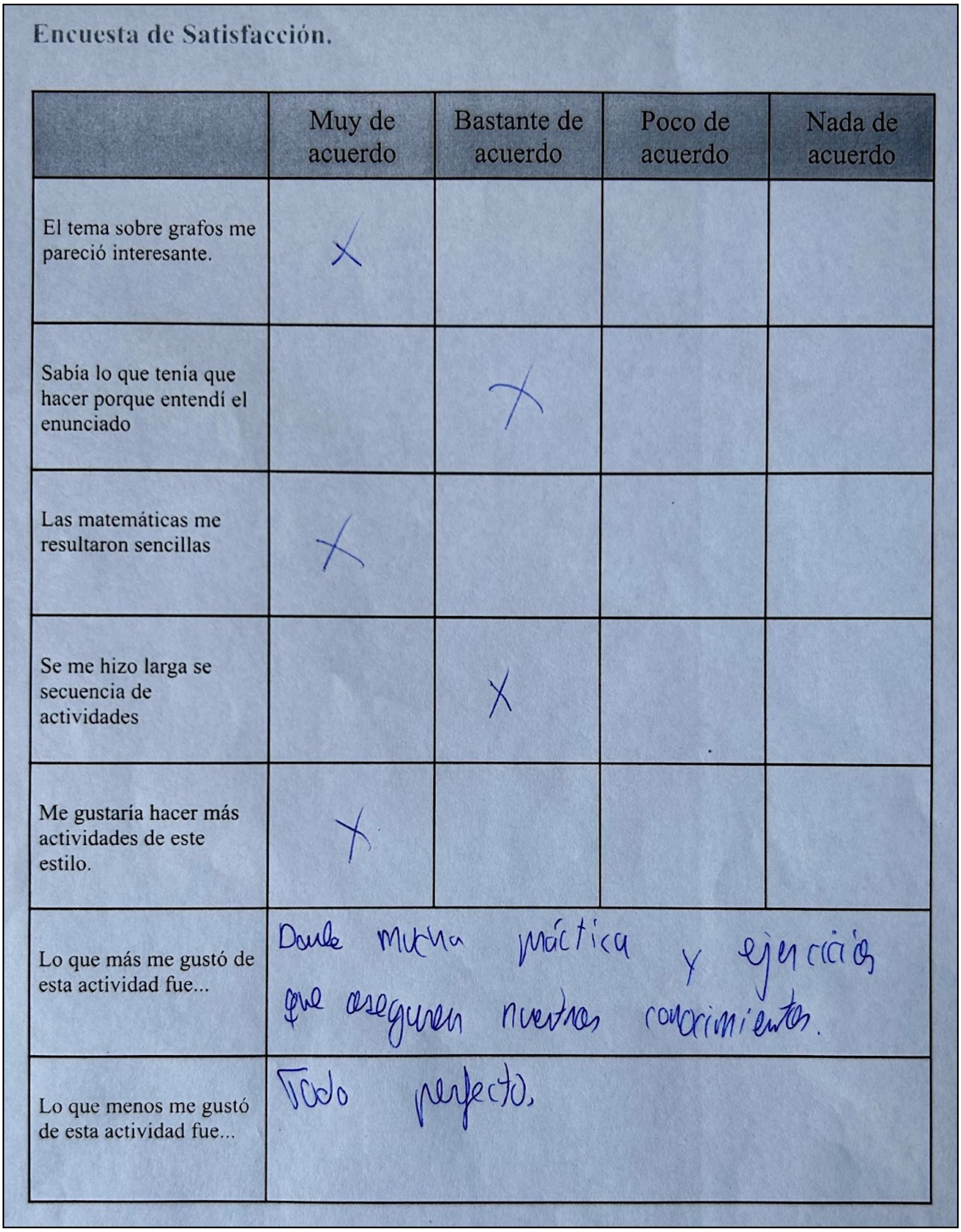
En cambio sí se pudo completar la encuesta de satisfacción. Esto permite, como ya se nombró, obtener información valiosa sobre la experiencia de los estudiantes en relación con las actividades sobre grafos que se llevaron a cabo. A continuación se muestran tres ejemplos de los resultados de la encuesta (Figuras 29, 30 y 31) .



Encuesta de Satisfacción.

	Muy de acuerdo	Bastante de acuerdo	Poco de acuerdo	Nada de acuerdo
El tema sobre grafos me pareció interesante.			X	
Sabia lo que tenía que hacer porque entendí el enunciado	X			
Las matemáticas me resultaron sencillas	X			X NO
Se me hizo larga se secuencia de actividades				X
Me gustaría hacer más actividades de este estilo.	X			
Lo que más me gustó de esta actividad fue...	Lo que más me gustó fue aprender cosas nuevas, además nuevas maneras de representar conceptos.			
Lo que menos me gustó de esta actividad fue...	Lo que menos me gustó fue que era muy sencillo y el profe se enrollaba.			

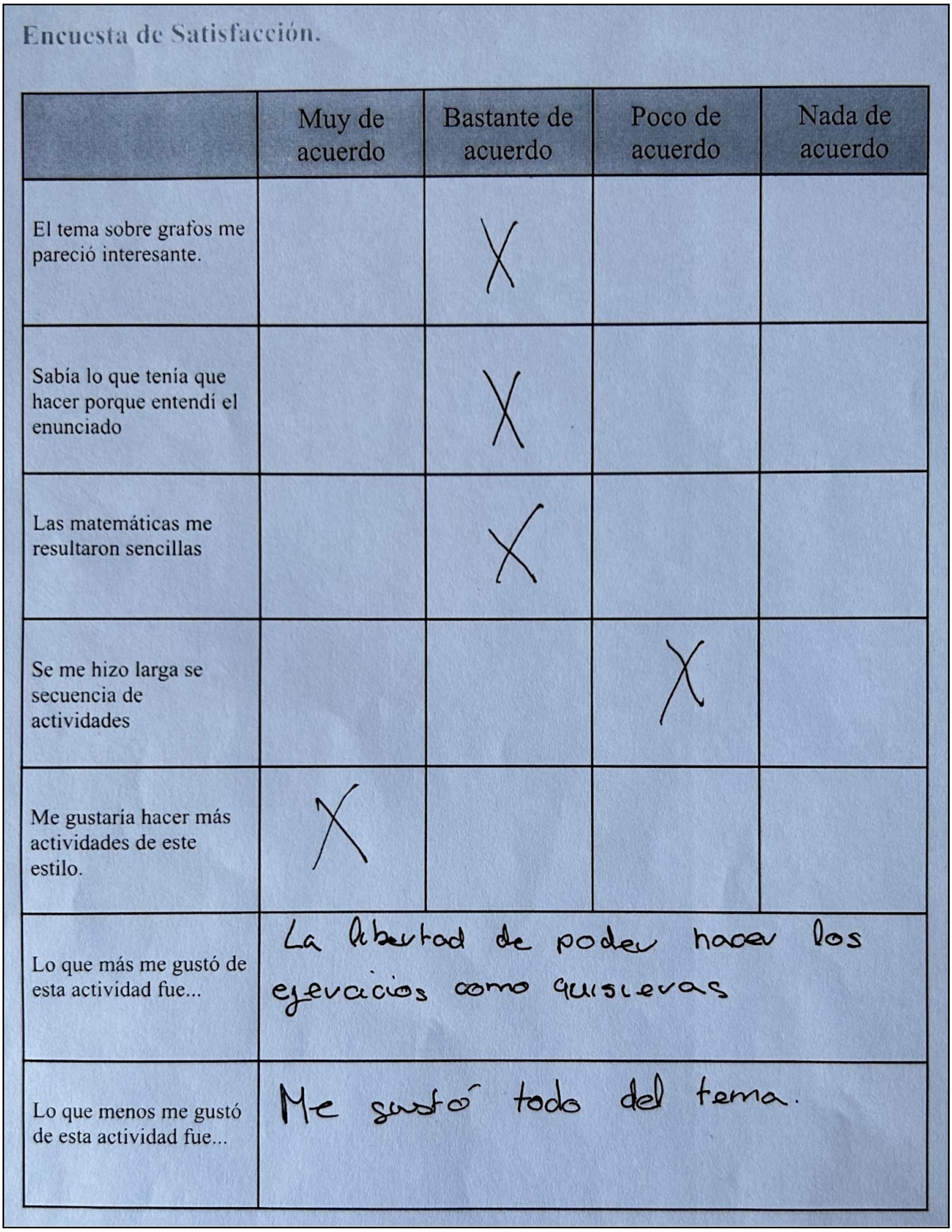
Figura 29. Encuesta de satisfacción del alumnado.



Encuesta de Satisfacción.

	Muy de acuerdo	Bastante de acuerdo	Poco de acuerdo	Nada de acuerdo
El tema sobre grafos me pareció interesante.	X			
Sabía lo que tenía que hacer porque entendí el enunciado		X		
Las matemáticas me resultaron sencillas	X			
Se me hizo larga se secuencia de actividades		X		
Me gustaría hacer más actividades de este estilo.	X			
Lo que más me gustó de esta actividad fue...	Darle mucha práctica y ejercicios que aseguren nuestros conocimientos.			
Lo que menos me gustó de esta actividad fue...	Todo perfecto.			

Figura 30. Encuesta de satisfacción del alumnado.



Encuesta de Satisfacción.

	Muy de acuerdo	Bastante de acuerdo	Poco de acuerdo	Nada de acuerdo
El tema sobre grafos me pareció interesante.		X		
Sabía lo que tenía que hacer porque entendí el enunciado		X		
Las matemáticas me resultaron sencillas		X		
Se me hizo larga se secuencia de actividades			X	
Me gustaría hacer más actividades de este estilo.	X			
Lo que más me gustó de esta actividad fue...	La libertad de poder hacer los ejercicios como quisieras			
Lo que menos me gustó de esta actividad fue...	Me gustó todo del tema.			

Figura 31. Encuesta de satisfacción del alumnado.

De los resultados obtenidos cabe destacar que todos los alumnos mostraron interés por hacer más actividades similares. Aunque sea un grupo de solo 5 estudiantes, se puede concluir que la implementación de una propuesta basada en grafos, es una buena idea para trabajar la resolución de problemas.

Una reflexión que puede tener cabida en este punto, es la relacionada con la atención a la diversidad. La SA presenta una secuencia de Tareas lo más continua posible con la intención de que el conocimiento arraigue en todos los alumnos, pero también hay que considerar el otro extremo de la diversidad. Puede haber alumnos que consideren los contenidos demasiados sencillos como un aspecto negativo (Figura 29), en este caso, solo uno de cinco, pero si la clase es de veinticinco y hay cinco que desconectan de las actividades porque las encuentran sencillas, debe ser labor del profesor tener actividades que atiendan a estos alumnos. Será considerado una propuesta de mejora (propuesta 7).

Los estudiantes destacan aspectos positivos como: aprender cosas nuevas, nuevas formas de representar conceptos, presencia de ejercicios que aseguran sus nuevos conocimientos e incluso libertad para poder resolver de la manera que más les guste. Todos estos aspectos son logros de una secuencia de actividades que buscaba hacer matemáticas usando grafos. Estas evidencias incitan, aún más, a instaurar los grafos como un tema a tratar en los cursos de secundaria.

5.2 Propuestas de mejora

Identificar aspectos a mejorar nos ofrece perspectiva sobre futuras implementaciones de la propuesta. Según la experiencia en el aula, se proponen las siguientes mejoras, algunas relacionadas con la organización y otras directamente con aspectos de alguna actividad:

1. Actividad 1.1: Cambiar la imagen por una que permita representar sobre ella las aristas del grafo más claramente. En la imagen utilizada, debido a que era oscura, no quedaban fácilmente marcadas las aristas de los grafos y generaba confusión en el alumnado.

2. Las actividades donde el alumno debe formular o redactar situaciones propias (Actividades 1.3 y 4.1), se deben proponer cuando hayamos practicado ese tipo de ejercicios previamente.

3. Actividad 3.3: Se deben mejorar los ejemplos de grafos propuestos, de forma que favorezcan la deducción de la propiedad relacionada con los recorridos eulerianos. A su vez, proponer la modificación de los ejemplos en los que no se puede recorrer todo el grafo, antes de rellenar la tabla que recoge a la cantidad de vértices de grado impar, dificulta razonar para proponer conjeturas. La propuesta de mejora consistiría en diseñar la actividad para que, primero se rellene la tabla con los ejemplos en los que se pudo o no se pudo hacer el recorrido euleriano, y luego proponer las modificaciones pertinentes.

4. Para suplir las dudas y las confusiones relacionadas con las distintas propiedades de los grafos ya comentadas en el apartado 5.1.3, se sugiere crear una actividad específica que las diferencie. En este caso se optó por hacer un resumen teórico en el que aparecieran las propiedades y sus consecuencias (Figura 32).

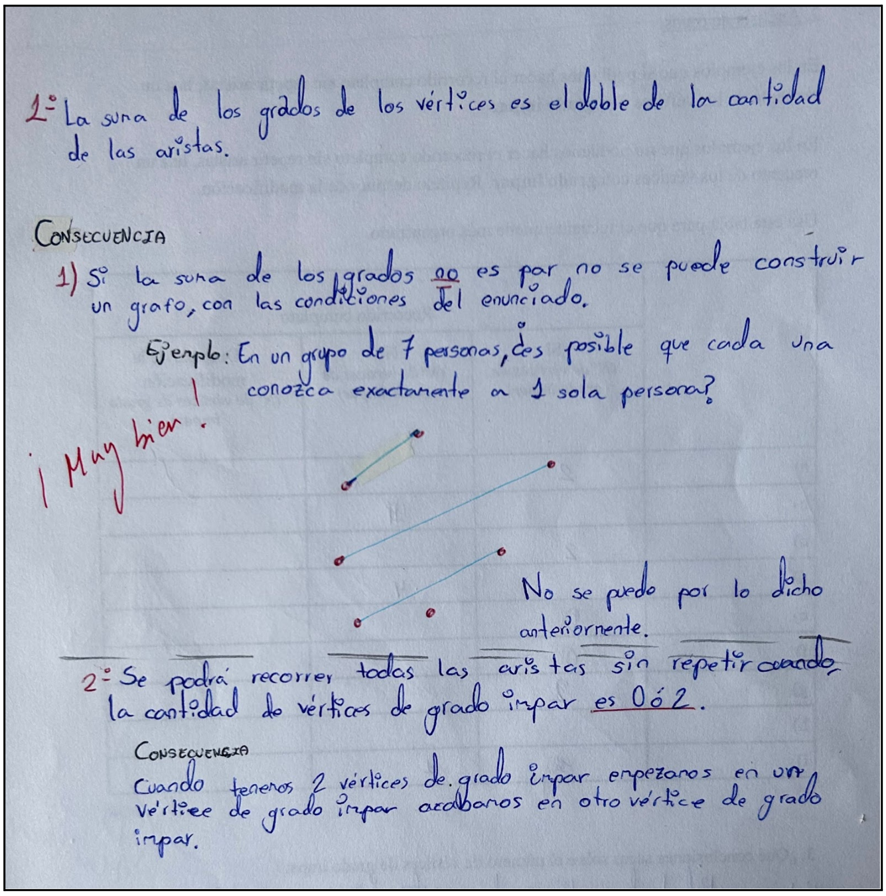


Figura 32. Resumen de propiedades teóricas.

5. Con respecto a los instrumentos de evaluación, ya que durante toda la situación de aprendizaje se hace seguimiento de las actividades tras cada sesión implementada, parece recomendable considerar más actividades como instrumento. Sobre todo, aquellas en las que el alumno debe deducir alguna de las propiedades sobre los grafos (Actividad 2.2 y 3.3). Esto enriquecería la información que se capta de los alumnos a través de los instrumentos de evaluación.

6. Por otro lado, en el proceso de evaluación, al rellenar las listas de control, podría suponer una mejora, si estructuramos la toma de información en una tabla que contenga a todos los alumnos del grupo como en la Tabla 34.

Alumnos	Indicadores			
	Construye grafos que traten de representar las situaciones.	Comprueba la construcción con la colocación del grado de cada vértice	Justifica cuando es imposible la construcción.	Es capaz de trabajar sobre las modificaciones presentando razonamiento.
Alu 01				
Alu 02				

Alu 03				
……..				

Tabla 34 . Propuesta de mejora para las Listas de control.

7. Tal y como se reflexiona sobre la encuesta de satisfacción, de cara a futuras implementaciones se deberían crear más actividades que contemplen la capacidad de algunos alumnos que están por encima de la media del grupo. Se pueden preparar problemas que serán entregados en caso que detectemos a estudiantes con estas características. Se adjunta algún ejemplo:

Hubo una vez un rey que tenía cinco hijos. En su testamento el rey estableció que después de su muerte, sus hijos deberían dividir el reino en cinco regiones de manera que cada región tuviera frontera común con cada una de las otras cuatro regiones. Representa con un grafo la situación y concluye cómo se distribuyen las tierras del rey entre sus hijos.

Probar que en una reunión de 6 personas siempre habrá tres personas que se conocen entre sí o tres que no se conocen.

5.3 Valoración final

Este trabajo deja constancia sobre la viabilidad de implementar una situación de aprendizaje relacionada con los grafos, ya que el actual currículum admite en buena medida, las actividades que impliquen modelos matemáticos.

Desde la inexperiencia propia, de un alumno de Máster, que no ha trabajado en un instituto, creo que lo más importante de una situación de aprendizaje es que sea realista, y en términos de la asignatura de matemáticas, lo que debe ofrecer es una visión adaptada al nivel del alumno, sobre cómo se hacen matemáticas.

Cuando propiciamos que el grupo descubra alguna propiedad matemática o entienda el comportamiento de un nuevo elemento matemático, como pueden ser los grafos, les aparece un “brillo” en los ojos. Posiblemente relacionado con su autoeficacia. Es hacia allí, a donde tenemos que remar, porque en esos momentos los estudiantes están haciendo matemáticas.

Mi experiencia al desarrollar este trabajo me hizo reflexionar sobre cómo debo enseñar matemáticas. Mi manera de verlo está muy relacionada con la forma en la que veo intrínsecamente las propias matemáticas.

Se que la emoción espontánea de enfrentar un problema y dedicar esfuerzo a resolverlo, no es algo que todos los estudiantes tienen, y tampoco es mi intención que eso ocurra. Pero sí pienso que debemos de ser los profesores los que demos el primer paso y manifestemos, tanto en la creación de actividades, como en la propia práctica educativa, la manera en la que el proceso de resolución de problemas, nos hace personas más capaces. He querido que quede impregnado en este trabajo, el hecho de que muchas veces nos enfrentamos a problemas que llevan a calles sin salida. Y en esos momentos no debemos abandonar, al contrario, debe aparecer inmediatamente la pregunta: *¿Qué está pasando?* Ya que esto nos lleva a plantear un análisis de la situación, creando un camino hacia lo que puede ser una propiedad. Un patrón. Es decir, convertir el fracaso en éxito.

Entender bien algo, casi siempre consiste en poder cambiar la perspectiva. Los grafos en esta propuesta tratan de cumplir esa labor. Ser herramientas que permitan el cambio de perspectiva. Otra forma de decir: modelizar.

Con mayor o menor éxito esta propuesta de innovación, como ya se dice en la introducción, ofrece oportunidades a los estudiantes de que vean las matemáticas como un proceso: Ante un situación, hay algo que no comprendemos. Lo analizamos, vemos si podemos sacar algo en claro y planteamos nuestra conjetura.

Para mi, conseguir que estas ideas calen en los alumnos, hace que todo el tiempo invertido valga la pena.

Referencias bibliográficas

Braicovich, T. C. (2020). Grafos y su enseñanza. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 103*, pp. 7-11.

Chartrand, G. y Wall, C. E. (1972). Graph Theory and the High School Student. *School Science and Mathematicas. 80*(6), 479-485.

Chinn, P. Z. (1993). Discovery-method teaching in graph theory. *Annals of Discrete Mathematics*, 55, pp. 375-384.

European Union Council (2018). Council Recommendation of 22 may 2018 on key competences for lifelong learning (Text with EEA relevance). *Official Journal of the European Union C189*, 1-13. Extraído el 16 de mayo de 2023 de: https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01)&rid=7

Gaio, A., Branchetti, L. & Capone, R. (2020). Learning Math Outdoors: Graph Theory using Maps. In M. Ludwig, S. Jablonski, A. Caldeira, & A. Moura (Eds.), *Research on Outdoor STEM Education in the digiTal Age. Proceedings of the ROSETA Online Conference in June 2020* (pp.95-102). Münster: WTM. https://doi.org/10.37626/GA9783959871440.0.12

Gobierno de Canarias (2023). Decreto 30/2023 de 16 de marzo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Canarias. *Boletín Oficial de Canarias, 58*, de 23 de marzo, pp. 15322-17274.

Henning, M. A, van Vuuren, J. H (2022). *Graph and Network Theory: An Applied Approach using Mathematica* (Vol. 193). Editorial Springer.

Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. A. y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la RSME*, 18(3), 589-605.

Niman, J. (1975). Graph Theory in the Elementary School. *Educational Studies in Mathematics, 6*(3), pp. 351-373.

Robinson, L. A. (2006). *Graph Theory for the Middle School.* Tesis doctoral. East Tennessee State University, Tennessee. https://dc.etsu.edu/etd/2226

Rosenstein, J. G. (2018). The Absence of Discrete Mathematics in Primary and Secondary Education in the United States… and Whay tah Is Counterproductive. In E.W. Hart And J. Sandefar (eds.), *Teaching and Learning Discrete Mathematics Worldwide: Curriculum and Research* (pp. 21-40) Springer.

Sáenz Castro, C. y Lasa Oyarbide, A. (2018). *Iniciación a la investigación y la innovación en educación matemática*. Editorial Síntesis.