

Tesis de Máster

Máster en Modelización e Investigación Matemática. Estadística y
Computación

Teoría de homotopía digital

Karim Omar Jerez Santana

Dirección

José Manuel García Calcines

13 de mayo de 2023

Abstract / Resumen

Abstract

The aim of this master's thesis is to develop an introduction to homotopy theory in digital topology, which is a field that studies and analyzes digital images. The procedure of the project consists of transferring the usual concepts in algebraic topology to this new context. This topic is not new in the scientific literature, but the distinct attempts to establish a full theory have been unsuccessful, because the achieved results are too rigid, without applicability and do not connect very well with non-digital context. Therefore, new and significant advances in this field have been reported. In this sense, the importance of the subdivision of a digital image has been highlighted, which has made it possible to deal with new notions such as digital cofibration, for example. Also, new digital analogs will be established for concepts such as function spaces, path spaces and the fundamental group. In order to achieve this, we introduce some usual properties into this setting such as the homotopy extension property for cofibrations or the homotopy lifting property. Along the thesis, we also present several interesting examples which illustrate all the theoretical results.

Keywords: Digital image - Digital topology - Digital homotopy - Homotopy theory - Function spaces - Path spaces - Cofibration - Lusternik–Schnirelmann category - Fundamental group

Resumen

Este trabajo está dedicado a una introducción al estudio de la teoría de homotopía en la topología digital, área cuyo desarrollo está motivado a entender y analizar las imágenes digitales. El proceder de la memoria consiste en trasladar los conceptos habituales en topología algebraica a este nuevo contexto. Como se comprobará, esta temática no es novedosa en la literatura, pero los resultados conseguidos hasta la fecha son muy rígidos, de poca aplicabilidad y sin coherencia con el ámbito no digital. Por ello, se recogen avances nuevos y significativos en este campo. En este sentido, se ha puesto en relieve la importancia de la subdivisión de una imagen digital, la cual ha permitido lidiar con nociones nuevas como la de cofibración digital, por ejemplo. Asimismo, se establecerán nuevos análogos digitales para conceptos como los espacios de funciones, espacios de caminos y el grupo fundamental. Para ello, se presentarán versiones digitales de distintas propiedades como la propiedad de elevación de homotopías o la propiedad de extensión de las cofibraciones. Durante el estudio se muestran ejemplos que ilustran los resultados teóricos y ciertas problemáticas comentadas.

Palabras clave: Imagen digital - Topología digital - Homotopía digital - Teoría de homotopía - Espacios de funciones - Espacios de caminos - Cofibración - Categoría de Lusternik-Schnirelmann - Grupo fundamental

Introducción

I admit that mathematical science is a good thing. But excessive devotion to it is a bad thing.

Aldous Huxley

En este trabajo, se presenta una introducción a la teoría de homotopía digital recopilando los resultados de tres artículos de investigación [23], [22] y [24]. Esta teoría se enmarca dentro del ámbito de la topología digital. Este campo de estudio comienza su desarrollo en [30], dirigido a profundizar en otras áreas de investigación como el procesamiento de imágenes y la visión y gráficos por computador. En este ámbito, se considera como objeto fundamental de estudio la noción de imagen digital, denominada en la literatura de diferentes formas como: *digitized picture* ([30]), *digital picture* ([19]) o *digital image* ([23]). Este concepto consiste en una abstracción de una imagen real, la cual está compuesta por píxeles u otros componentes en dimensiones superiores. Por este motivo, se han usado distintas definiciones para explicar esta idea. Sin embargo, todas parecen tener como elemento común a un conjunto finito de tuplas enteras sobre el que se define una relación de adyacencia (reflexiva y simétrica).

La introducción de ideas clásicas de topología al ámbito digital no es algo anecdótico, por lo que a continuación se hace una breve revisión bibliográfica de los distintos conceptos topológicos que se han intentado incorporar y atañen a esta memoria. El grupo fundamental aparece por primera vez en [20] y vuelve a aparecer en [21], junto a versiones digitales de la Característica de Euler y el Teorema de la curva de Jordan. No obstante, la construcción de este grupo fundamental no se asemeja a la aproximación clásica, por lo que en [4] se vuelve a redefinir. Para esta nueva definición, se usan nociones de homotopía digital establecidas en [3] basadas en una noción de continuidad digital expuesta en [29], para lo que se define una métrica sobre las imágenes digitales. Con esta nueva construcción, se han estudiado las condiciones bajo las cuales el grupo fundamental de un producto cartesiano de imágenes digitales es isomorfo al producto de los grupos fundamentales de los factores ([10]) y la relación que posee el grupo fundamental con la característica de Euler en ciertas imágenes digitales ([12]). Paralelamente, se han desarrollado distintos métodos para computar grupos de homotopía en dimensiones superiores ([18], [1]) en este ámbito, junto al desarrollo de una versión digital del Teorema de Seifert-van Kampen ([1]). Otro concepto que se ha intentado trasladar a este contexto son los espacios recubridores: se definen en [16] junto a ciertas propiedades de levantamiento; en [6] se establece una versión digital del recubridor universal; en [7] se clasifica el recubridor digital de un espacio a través de las clases de conjugación y [8], [9] se estudian ciertas propiedades. También, se

ha estudiado el tipo de homotopía en este contexto y los distintos invariantes que tiene asociado, recogiendo las principales aportaciones en [5], [15] y [11]. Por último, también se han desarrollado versiones digitales para los conceptos de fibración ([14]) y categoría digital de Lusternik-Schnirelmann ([2]).

Se observa que existe una amplia bibliografía que estudia la temática. Sin embargo, las construcciones que se han realizado son muy rígidas, de poca aplicabilidad, superficiales y no se conectan de manera coherente con el ámbito no digital. Por ejemplo, en [4] se demuestra que la versión digital de la circunferencia es contráctil según una definición de contractibilidad y por lo tanto, su grupo fundamental es el trivial. Por este motivo, Lupton, Oprea y Scoville en [23], [22] y [24] buscan desarrollar una nueva teoría de homotopía digital más consistente y cohesionada con el contexto no digital, que permita incorporar distintos elementos y resultados clásicos de topología. Para ello, se define el concepto de subdivisión de una imagen digital, la cual consiste en una nueva imagen digital que se trata de la original “extendida” y por lo tanto, conserva sus propiedades. Con la introducción de este término, el *modus operandi* usual de los autores en los tres artículos se puede resumir en desarrollar un concepto o resultado de topología no digital, a través de una subdivisión adecuada que se ajuste a las necesidades y luego, retornar a la imagen digital de origen por medio de una aplicación que se denominará la proyección canónica.

A continuación, se describe a grandes rasgos el contenido de cada uno de los tres artículos. El eje principal de la investigación, se desarrolla en [23] donde se establece qué es una imagen digital, cuáles son las posibles subdivisiones que puede tener asociada y las nociones de aplicación digital, homotopía, tipo de homotopía y cofibración digital. También, se efectúa un tratamiento preliminar de la categoría digital de Lusternik-Schnirelmann y una aproximación a la idea de fibración digital. En [22], se construye un funtor de imágenes digitales a grupos que se asemeja a la aproximación clásica. En [24] se establecen resultados cruciales sobre el comportamiento de las aplicaciones digitales con respecto a la subdivisión.

El objetivo final de esta memoria consiste en desarrollar una introducción compacta a la teoría de homotopía digital que permita establecer una relación clara entre el contexto no digital y el digital. Asimismo, aprovechando que estamos trabajando en un contexto finito con tuplas enteras, se intentarán desarrollar métodos computacionales que permitan abstraer las operaciones típicas de una imagen digital.

Este trabajo requiere que el lector tenga conocimientos básicos en topología conjuntista y algebraica. Por lo tanto, cualquier estudiante del Grado en Matemáticas de la ULL que haya tomado las asignaturas de Topología General e Introducción a la Topología Algebraica estará apto para comprender la teoría presentada en este trabajo.

La memoria está estructurada en tres capítulos:

En el primero, se presentan todas las herramientas básicas que serán necesarias para introducir distintos conceptos de la teoría de homotopía digital en los capítulos posteriores. En primera instancia, se introduce qué se conoce por imagen digital, una subdivisión y una aplicación digital. Asimismo, se introduce una noción de producto digital que consistirá en el producto categórico, en la categoría de imágenes digitales (finitas) y aplicaciones digitales. Además, se establecen los conceptos de camino digital, homotopía digital y distintos tipos de homotopías. El capítulo finaliza realizando un estudio pormenorizado de las imágenes digitales con un punto distinguido.

En el segundo, se introducen elementos propios de la teoría de homotopía. En primer

lugar, se define qué se considera por cofibración digital, siendo motivada esta definición por el hecho que un tipo especial de inclusión tenga la propiedad de extender homotopías. Además, servirá para posteriormente presentar las fibraciones digitales de caminos con el fin de deducir que las aplicaciones evaluación en el ámbito digital son fibraciones. Por último, se desarrolla un tratamiento preliminar de la categoría de Lusternik-Schnirelmann en este contexto, aportando una definición de la misma y demostrándose que es un invariante homotópico para las imágenes digitales de dimensión 2.

En el último, se construye el grupo fundamental en el ámbito digital a través de una heurística que recuerda a la aproximación clásica. También, se demuestra que es invariante por subdivisiones y distintos tipos de equivalencia de homotopías. Finalmente, se desarrollan resultados clásicos como la independencia del punto base en el grupo fundamental o que el grupo fundamental del producto es isomorfo al producto de los grupos fundamentales. Adicionalmente, se ha calculado el grupo fundamental para espacios contráctiles y una versión digital de la circunferencia.

La memoria también consta de un apéndice dividido en tres secciones. En la primera, se estudian los lazos y caminos en una versión digital de la circunferencia, desarrollándose la noción de grado de un lazo y demostrándose que es invariante por homotopías. En la segunda, se hace un esbozo de dos resultados sobre la subdivisión de aplicaciones que se usarán para demostrar que el grupo fundamental es invariante por subdivisiones. En la última, se intenta abstraer la categoría de imagen digital por medio de una clase en Python, incorporando las operaciones típicas, o en la jerga computacional métodos, que se realizan en una imagen digital, como por ejemplo, la subdivisión k -ésima o la proyección a través de la aplicación canónica.

A medida que se desarrollaba el trabajo, se han ido incorporando ejemplos que ilustran los resultados teóricos presentados.

Para cerrar esta sección introductoria, se expone por dónde se podría continuar el trabajo realizado. Por un lado, en [26], los autores amplían la categoría de imagen digital a la de espacios de tolerancia para desarrollar una versión digital de la fibración de Hopf. Por lo que, se podría intentar estudiar un concepto similar a la subdivisión en estos espacios y replicar la teoría aquí expuesta en ese nuevo contexto. Por otro lado, en [25] se demuestra que el grupo fundamental expuesto en la memoria, es isomorfo al grupo de aristas del complejo clique de la imagen digital considerada como un grafo. Paralelamente, se desarrolla una versión digital del Teorema de Seifert-van Kampen. Entonces, se podría construir el grupo fundamental de ejemplos clásicos en este nuevo ámbito y estudiar si se mantiene la cohesión en ambos contextos.

Índice de contenidos

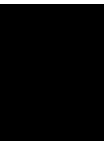
Índice de contenidos	VII
Índice de figuras	VIII
Índice de tablas	IX
1 Fundamentos de topología digital	1
1.1. Nociones básicas	1
1.2. Espacios de funciones	11
1.3. Espacios basados	20
2 Elementos de homotopía digital	29
2.1. Cofibración digital	29
2.2. Fibración digital	44
2.3. Categoría digital de Lusternik-Schnirelmann	50
3 Grupo fundamental en imágenes digitales	55
3.1. Espacios de caminos	55
3.2. El grupo fundamental	63
A Apéndice	73
A.1. Caminos y homotopías en el diamante	73
A.2. Algunos resultados sobre la subdivisión de aplicaciones	76
A.3. Imagen digital en Python	78
Bibliografía	87

Índice de figuras

1.1.	Representación del intervalo digital de longitud 3.	2
1.2.	Representación del Diamante.	3
1.3.	El diamante y sus subdivisiones 2-ésima y 3-ésima, respectivamente.	5
1.4.	El intervalo I_2 y sus subdivisiones 2-ésima y 3-ésima, respectivamente.	5
1.5.	Proyección de $S(I_2, 3) = I_8$ sobre I_2 vía ρ_3	9
1.6.	Proyección de $S(D^1, 2)$ sobre D^1 vía ρ_2	9
1.7.	Proyección parcial de $S(I_2, 3) = I_8$ sobre $S(I_2, 2) = I_5$ vía ρ_3^c	9
1.8.	Representación de E , δE y $\delta E \setminus \{(1, 2, 2)\}$ del Ejemplo 1.11	26
1.9.	$S(X, 3)_6$ junto a los puntos a los que son enviados a través de H_2	27
2.1.	Retracción que se quiere conseguir en el Teorema 2.1.	37
2.2.	Retracción buscada en el Teorema 2.2.	41
2.3.	División del rectángulo $I_{2\mathcal{K}+1} \times I_{\mathcal{K}}$ en el Teorema 2.2.	42
2.4.	Segmentos propuestos para $k = 2$ en el apartado II del Ejemplo 2.4.	52
3.1.	Extensión α'' de α' en la Proposición 3.1.	61
A.1.	Plot obtenido en la simulación del código en el apéndice A.3.	86

Índice de tablas

A.1. Valores de $H(s, t)$ para (s, t) adyacentes a $(u + 1, l + 1)$ en $(I_N \times I_l) \cup \{(0, l + 1), \dots, (u + 1, l + 1)\}$	76
A.2. Valores de $\bar{H}(s, t)$ para (s, t) adyacentes a $(u + 1, l + 1)$ en $(I_N \times I_l) \cup \{(0, l + 1), \dots, (u + 1, l + 1)\}$	76



Fundamentos de topología digital

Este capítulo preliminar tiene como objetivos principales presentar el concepto de imagen digital y establecer algunas definiciones y rudimentos esenciales que serán requeridos para explorar las nociones de topología algebraica en el contexto digital en los capítulos 2 y 3.

Está dividido en tres secciones. En la primera, se introduce el concepto de imagen digital y de subdivisión, consistiendo esta última en una operación que permite “extender” una imagen digital. Asimismo, se presenta una noción digital de continuidad en aplicaciones entre imágenes digitales y una forma de obtener nuevas imágenes digitales, a través del producto cartesiano. En la segunda, se aportan distintas definiciones de homotopía y se demuestran que son equivalentes, constituyendo lo que se conoce como homotopía digital. Además, se define el tipo de homotopía de una imagen digital, así como la contractibilidad. En la tercera y última, se hace un estudio detallado de las imágenes digitales con un punto distinguido, aportando unas nociones más débiles de homotopía y tipo de homotopía, en las que la subdivisión desempeña un rol importante.

Obsérvese que se intenta seguir el orden de construcción de estos conceptos en el plano no digital. Así, en primer lugar se introduce el concepto de imagen digital. Luego, se presenta cómo construir nuevas imágenes digitales a partir de una dada y cómo pueden relacionarse estas entre sí. Finalmente, se plantean las imágenes digitales con un punto distinguido.

Para profundizar más en las nociones y resultados presentados en este capítulo se refiere al lector a [31], [27] y [17].

1.1. Nociones básicas

La presente sección tiene como objetivo introducir la noción de imagen digital, a la par que se exponen diversos ejemplos que ayudan a entender la naturaleza de tales objetos. Asimismo, se prueban diversos resultados que permiten construir imágenes digitales a partir de una dada. En último lugar, se presenta el concepto de subdivisión que como se muestra posteriormente, representa una forma de extender y deformar imágenes digitales.



Figura 1.1: Representación del intervalo digital de longitud 3.

Definición 1.1. Una **imagen digital** X consiste en un subconjunto $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ finito con la siguiente relación de adyacencia. Dados $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in X$, se dice que son adyacentes siempre y cuando

$$|x_i - y_i| \leq 1,$$

para $i \in \{1, \dots, n\}$. Además, se denotará por $x \sim_X y$.

En la literatura matemática hay diferentes versiones de adyacencia en una imagen digital ([29], [30]). Sin embargo, para este trabajo es más conveniente tratar con esta para el desarrollo de la teoría de homotopía digital que se prepara.

Algunos ejemplos clásicos de espacios topológicos tienen su versión digital.

Ejemplo 1.1. Para cada $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se puede definir el **intervalo digital de longitud N**

$$I_N = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid n \leq N\}.$$

Nótese que $I_N \subseteq \mathbb{Z}$ para cada $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En la Figura 1.1 se representa, a modo de ejemplo, el intervalo digital $I_3 = \{0, 1, 2, 3\}$.

Ejemplo 1.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se puede definir la **n -esfera digital**

$$D^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

Nótese que $D^n \subseteq \mathbb{Z}^{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. En la Figura 1.2 se representa $D^1 = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$, conocido en la literatura como el **Diamante**.

Se puede establecer un concepto análogo a la continuidad en aplicaciones entre imágenes digitales, el cual permitirá caracterizar cuándo dos imágenes digitales son esencialmente iguales.

Definición 1.2. Dadas imágenes digitales $X \subseteq \mathbb{Z}^n, Y \subseteq \mathbb{Z}^m$, se dice que una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es **digital** siempre que si $x, x' \in X$ y $x \sim_X x'$, se verifica que

$$f(x) \sim_Y f(x').$$

Si además existe $g : Y \rightarrow X$ aplicación digital tal que

$$g \circ f = id_X \text{ y } f \circ g = id_Y,$$

se dice que f es un **isomorfismo digital** y X e Y son **imágenes digitales isomorfas**.

Proposición 1.1. Si $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ son aplicaciones digitales, entonces $g \circ f$ es aplicación digital.

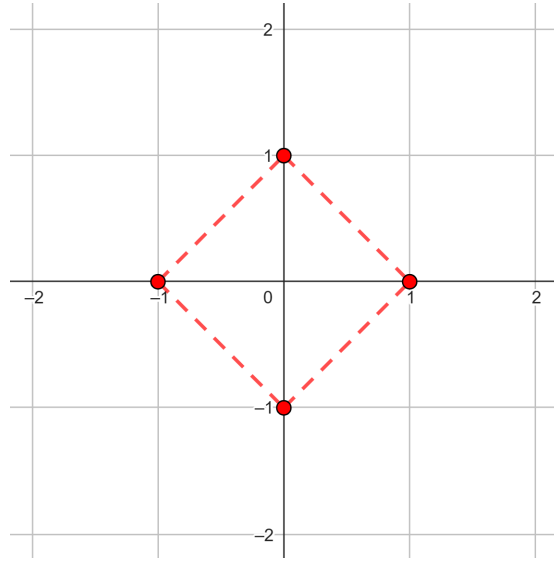


Figura 1.2: Representación del Diamante.

Demostración. Sean $x, x' \in X$ tal que $x \sim_X x'$. Como f es digital, $f(x) \sim_Y f(x')$. Al tener que g es digital,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \sim_Z g(f(x')) = (g \circ f)(x').$$

Se deduce así, que $g \circ f$ es aplicación digital. □

A continuación, se establece que el producto cartesiano de dos imágenes digitales es de nuevo una imagen digital con la relación de adyacencia definida componente a componente.

Definición 1.3. Dadas imágenes digitales $X \subseteq \mathbb{Z}^n$, $Y \subseteq \mathbb{Z}^m$, su **producto digital** consiste en la imagen digital constituida por el producto cartesiano $X \times Y$ con la siguiente relación de adyacencia:

$$(x, y) \sim_{X \times Y} (x', y') \text{ si, y solo si, } x \sim_X x' \text{ y } y \sim_Y y'.$$

Esta definición del producto es precisamente el producto categórico en la categoría de las imágenes digitales finitas y aplicaciones digitales. Esto permite definir aplicaciones digitales que llegan a un producto digital, a partir de aplicaciones digitales que parten de una misma imagen digital.

Ejemplo 1.3. Si X es imagen digital, se tiene la **aplicación diagonal**

$$\Delta : X \rightarrow X \times X$$

dada por $\Delta(x) = (x, x)$ para cada $x \in X$. La aplicación diagonal es claramente digital por lo definido anteriormente.

Ejemplo 1.4. Si I_N es el intervalo de longitud N , se tiene la **aplicación permutación**

$$P : (I_N)^m \times (I_N)^m \rightarrow (I_N \times I_N)^m$$

dada por $P((x_1, \dots, x_m), (t_1, \dots, t_m)) = ((x_1, t_1), \dots, (x_m, t_m))$ para cada $(x_1, \dots, x_m), (t_1, \dots, t_m) \in (I_N)^m$. La aplicación permutación es claramente digital.

Definición 1.4. Dadas aplicaciones digitales $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ para $i \in \{1, \dots, n\}$, se define el **producto de aplicaciones digitales**

$$f_1 \times \dots \times f_n : \prod_{i=1}^n X_i \longrightarrow \prod_{i=1}^n Y_i,$$

como la aplicación definida por $(f_1 \times \dots \times f_n)(x_1, \dots, x_n) := (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))$, para cada $(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^n X_i$.

Lema 1.1. Si $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ es aplicación digital para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, el **producto de aplicaciones digitales** $f_1 \times \dots \times f_n$ es aplicación digital.

Demostración. Sean $(x_1, \dots, x_n), (x'_1, \dots, x'_n) \in \prod_{i=1}^n X_i$ tales que $(x_1, \dots, x_n) \sim_{\prod_{i=1}^n X_i} (x'_1, \dots, x'_n)$. Entonces, $x_i \sim_{X_i} x'_i$. Al tener que f_i es digital para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $f_i(x_i) \sim_{Y_i} f_i(x'_i)$. Con lo cual, finalmente se deduce que

$$(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) \sim_{\prod_{i=1}^n Y_i} (f_1(x'_1), \dots, f_n(x'_n)).$$

Y por tanto, $(f_1 \times \dots \times f_n)(x_1, \dots, x_n) \sim_{\prod_{i=1}^n Y_i} (f_1 \times \dots \times f_n)(x'_1, \dots, x'_n)$. \square

Con las definiciones previas en mente, se presenta lo que se considera subdividir k veces una imagen digital, siendo a rasgos generales una “extensión” de la imagen que aportará gran flexibilidad a la hora de tratar la imagen digital original. Para ello, previamente se necesita establecer cierta notación. Por un lado, sea $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ la función suelo dada por $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$, para cada $x \in \mathbb{R}$. En otras palabras, devuelve el máximo número entero y no superior a x . Por otro lado, se denota por $(\mathbb{Z} \lfloor \frac{1}{k} \rfloor)^n \subseteq \mathbb{R}^n$ al conjunto constituido por aquellos puntos cuyas coordenadas son de la forma z_i/k , para ciertos enteros z_i .

Definición 1.5. Sea $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ una imagen digital. Para cada $k \geq 2$, se define la **pseudo-subdivisión k -ésima** $S'(X, k) \subseteq (\mathbb{Z} \lfloor \frac{1}{k} \rfloor)^n$ como el subconjunto

$$S'(X, k) := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \left(\mathbb{Z} \left\lfloor \frac{1}{k} \right\rfloor \right)^n \mid (\lfloor x_1 \rfloor, \dots, \lfloor x_n \rfloor) \in X \right\}.$$

Nótese que si $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{Z} \lfloor \frac{1}{k} \rfloor)^n$, esto quiere decir que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, existe $z_i \in \mathbb{Z}$ tal que $x_i = \frac{z_i}{k}$.

Definición 1.6. Sea $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ una imagen digital. Para cada $k \geq 1$, se define la **subdivisión k -ésima** $S(X, k) \subseteq \mathbb{Z}^n$ como $S(X, k) = X$ si $k = 1$, o si $k \neq 1$, como la imagen digital

$$S(X, k) := \{(kx_1, \dots, kx_n) \in \mathbb{Z}^n \mid (x_1, \dots, x_n) \in S'(X, k)\}.$$

Asimismo, se define la **k -ésima proyección canónica** como la aplicación

$$\rho_k : S(X, k) \longrightarrow X$$

dada por $\rho_k(kx_1, \dots, kx_n) := (\lfloor x_1 \rfloor, \dots, \lfloor x_n \rfloor)$, para cada $(kx_1, \dots, kx_n) \in S(X, k)$.

Ejemplo 1.5. Por un lado, en la Figura 1.3 se muestra el diamante y sus subdivisiones 2-ésimas y 3-ésimas. Como se verá más adelante cuando se ejemplifiquen las proyecciones, los 4 puntos del diamante generan grupos de puntos en cualquier subdivisión del mismo. Y cualquier punto de cada grupo, viajará al punto del que procede.

Por otro, en la Figura 1.4 se muestra el intervalo I_2 y sus subdivisiones 2-ésimas y 3-ésimas. Nótese que

$$S(I_2, 2) = I_5 = I_{2 \cdot 2 + (2-1)} \text{ y } S(I_2, 3) = I_8 = I_{2 \cdot 3 + (3-1)}.$$

Más adelante, se verá que la subdivisión conforma una manera de elongar cualquier intervalo.

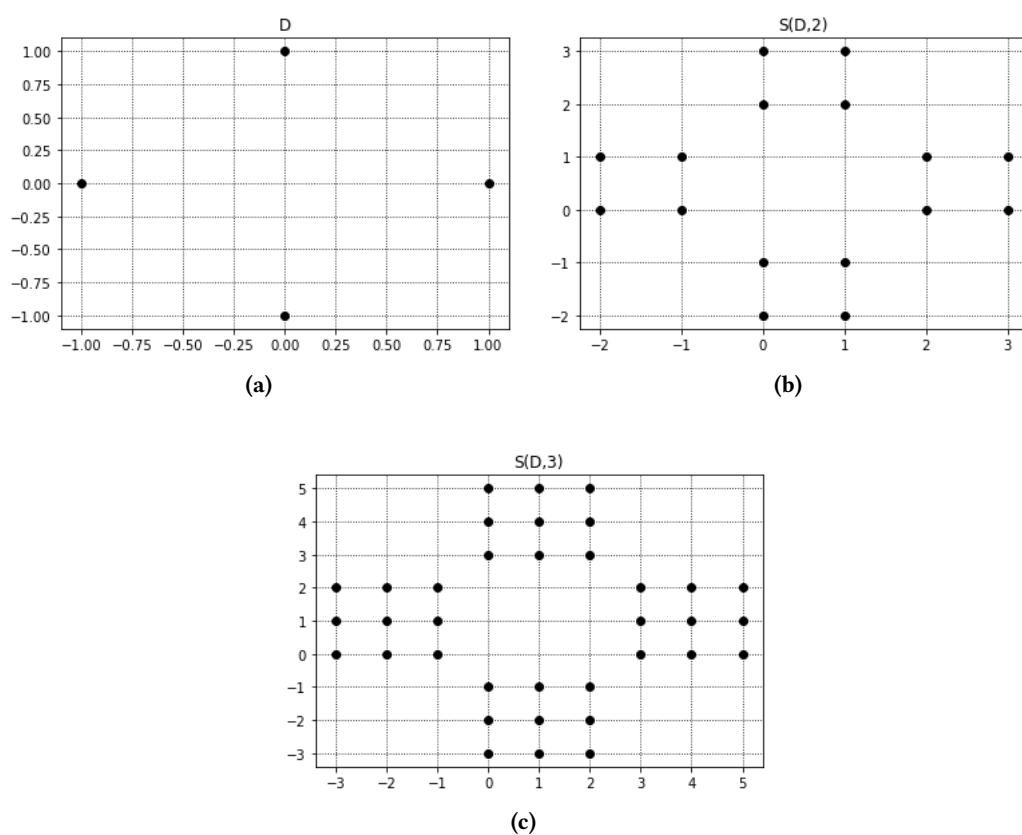


Figura 1.3: El diamante y sus subdivisiones 2-ésima y 3-ésima, respectivamente.

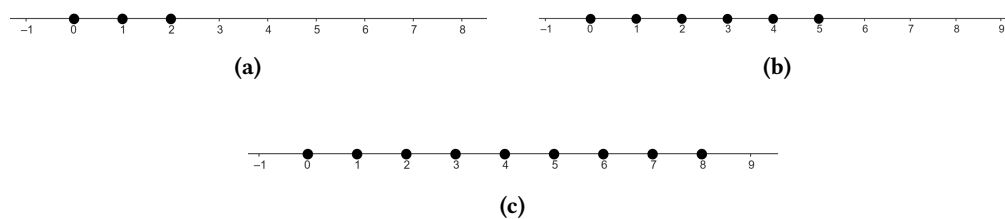


Figura 1.4: El intervalo I_2 y sus subdivisiones 2-ésima y 3-ésima, respectivamente.

Proposición 1.2. Si $k \geq 1$ y $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ es imagen digital, entonces la k -ésima proyección canónica $\rho_k : S(X, k) \rightarrow X$ es una aplicación digital.

Demostración. Si $k = 1$, entonces $\rho_k = id_X$ que es claramente digital.

Suponemos $k \geq 2$. Sean $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$, $y' = (y'_1, \dots, y'_n) \in S(X, k)$, tales que $(x'_1, \dots, x'_n) \sim_{S(X, k)} (y'_1, \dots, y'_n)$. Entonces, $|x'_i - y'_i| \leq 1$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Resta ver que

$$\left| \left\lfloor \frac{x'_i}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y'_i}{k} \right\rfloor \right| \leq 1,$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, pues esto supondría que $\rho_k(x') \sim_X \rho_k(y')$. Sea $i \in \{1, \dots, n\}$ y suponemos que $x'_i \geq y'_i$ (el caso $x'_i \leq y'_i$ se razona de manera análoga). Entonces existe n menor entero que verifica que

$$n \leq \frac{y'_i}{k} \leq \frac{x'_i}{k} \leq n + 2.$$

Por hipótesis, $\left| \frac{x'_i}{k} - \frac{y'_i}{k} \right| \leq \frac{1}{k}$, con lo cual

$$\left(\left\lfloor \frac{x'_i}{k} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{y'_i}{k} \right\rfloor \right) \in \{(n, n + 1), (n, n)\}$$

y se cumpliría lo que queríamos probar. □

La combinación de una subdivisión de una imagen digital y la proyección para retornar a la imagen digital es una heurística habitual a lo largo del desarrollo de la memoria, pues permite en cierta manera deformar las imágenes para conseguir el fin que se persigue en cada caso.

Proposición 1.3. Si $m, l \in \mathbb{Z}$ y $X \subseteq \mathbb{Z}^n$, $Y \subseteq \mathbb{Z}^m$ son imágenes digitales, entonces:

(i) $S(X \times Y, k)$ es una imagen digital isomorfa a $S(X, k) \times S(Y, k)$.

(ii) $S(S(X, k), l) = S(X, kl)$.

Demostración. En primer lugar, probemos (i):

Podemos definir la aplicación $\varphi : S(X \times Y, k) \rightarrow S(X, k) \times S(Y, k)$ dada por $\varphi(x'_1, \dots, x'_n, y'_1, \dots, y'_m) := ((x'_1, \dots, x'_n), (y'_1, \dots, y'_m))$, para cada $(x'_1, \dots, x'_n, y'_1, \dots, y'_m) \in S(X \times Y, k)$. Análogamente, se puede definir la aplicación $\psi : S(X, k) \times S(Y, k) \rightarrow S(X \times Y, k)$ dada por $\varphi((x'_1, \dots, x'_n), (y'_1, \dots, y'_m)) := (x'_1, \dots, x'_n, y'_1, \dots, y'_m)$, para cada $((x'_1, \dots, x'_n), (y'_1, \dots, y'_m)) \in S(X, k) \times S(Y, k)$.

φ y ψ son claramente aplicaciones digitales, $\varphi \circ \psi = id_{S(X, k) \times S(Y, k)}$ y $\psi \circ \varphi = id_{S(X \times Y, k)}$, con lo cual se verifica (i).

Ahora, probemos (ii):

$$\begin{aligned}
 (x'_1, \dots, x'_n) \in S(S(X, k), l) &\iff \left(\left\lfloor \frac{x'_1}{l} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{x'_n}{l} \right\rfloor \right) \in S(X, k) \\
 &\iff \left(\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{x'_1}{l} \right\rfloor}{k} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{x'_1}{l} \right\rfloor}{k} \right\rfloor \right) \in X \\
 &\iff \left(\left\lfloor \frac{x'_1}{kl} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{x'_n}{kl} \right\rfloor \right) \in X \\
 &\iff (x'_1, \dots, x'_n) \in S(X, kl).
 \end{aligned}$$

□

Por la Proposición 1.3, la k -ésima proyección canónica

$$\rho_k : S(X \times Y, k) \longrightarrow X \times Y,$$

puede identificarse como

$$\rho_k = \rho_k \times \rho_k : S(X, k) \times S(Y, k) \longrightarrow X \times Y.$$

Si $x \in X$ donde $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ es una imagen digital, se puede hablar de la **subdivisión k -ésima asociada al punto x** como el subconjunto $S(x, k) \subseteq S(X, k)$ constituido por los puntos $x' \in S(X, k)$ tales que $\rho_k(x') = x$. Este conjunto se puede caracterizar de la manera que se detalla a continuación.

Proposición 1.4. Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ donde $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ es una imagen digital, entonces

$$S(x, k) = \{(kx_1 + r_1, \dots, kx_n + r_n) \in \mathbb{Z}^n \mid 0 \leq r_i \leq k - 1\}.$$

Demostración. Primero veamos que $S(x, k) \subseteq \{(kx_1 + r_1, \dots, kx_n + r_n) \in \mathbb{Z}^n \mid 0 \leq r_i \leq k - 1\}$. Sea $x' = (x'_1, \dots, x'_n) \in S(x, k)$. Por definición,

$$\rho_k(x') = \left(\left\lfloor \frac{x'_1}{k} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{x'_n}{k} \right\rfloor \right) = (x_1, \dots, x_n) = x.$$

Entonces para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \leq \frac{x'_i}{k} < x_i + 1$. O equivalentemente,

$$kx_i \leq x'_i < kx_i + k.$$

Por lo que se concluye que $x' \in \{(kx_1 + r_1, \dots, kx_n + r_n) \in \mathbb{Z}^n \mid 0 \leq r_i \leq k - 1\}$.

La demostración $S(x, k) \supseteq \{(kx_1 + r_1, \dots, kx_n + r_n) \in \mathbb{Z}^n \mid 0 \leq r_i \leq k - 1\}$ es inmediata, pues solo hay que usar el hecho que si $m \in \mathbb{Z}$ y $t \in [0, 1)$, entonces $\lfloor m + t \rfloor = \lfloor m \rfloor$. □

De este modo, si X es imagen digital, entonces

$$S(X, k) = \bigcup_{x \in X} S(x, k). \quad (1.1)$$

Finalmente, para cerrar esta sección introductoria se define una forma alternativa de factorizar la k -ésima proyección canónica a $\rho_k = \rho_m \circ \rho_n$ si $k = mn$.

Definición 1.7. Si $x, k \in \mathbb{Z}$ y $k \geq 3$, entonces se puede definir la aplicación

$$\rho_k^c : S(x, k) \longrightarrow S(x, k - 1),$$

dada por

$$\rho_k^c(kx + j) := \begin{cases} (k - 1)x + j & 0 \leq j \leq \lfloor k/2 \rfloor - 1 \\ (k - 1)x + j - 1 & \lfloor k/2 \rfloor \leq j \leq k - 1 \end{cases}.$$

Nótese que si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$, se puede identificar

$$S(x, k) = S(x_1, k) \times \dots \times S(x_n, k)$$

y

$$S(x, k - 1) = S(x_1, k - 1) \times \dots \times S(x_n, k - 1),$$

puediéndose definir una aplicación $\rho_k^c : S(x, k) \longrightarrow S(x, k - 1)$ como el producto de funciones

$$\rho_k^c = \rho_k^c \times \dots \times \rho_k^c.$$

Proposición 1.5. Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ y $k \geq 3$, entonces la aplicación $\rho_k^c : S(x, k) \longrightarrow S(x, k - 1)$ es digital.

Demostración. Por el Lema 1.1, resta ver que para $i \in \{1, \dots, n\}$ la aplicación $\rho_k^c : S(x_i, k) \longrightarrow S(x_i, k - 1)$ es digital. Sean $i \in \{1, \dots, n\}$ y $x_i^1, x_i^2 \in S(x_i, k)$ tales que $|x_i^1 - x_i^2| \leq 1$.

Sin pérdida de generalidad, por definición podemos suponer existe $j \in \{0, 1, \dots, k - 2\}$ tal que

$$x_i^1 = kx_i + j \text{ y } x_i^2 = kx_i + j + 1,$$

ya que $S(x_i, k) = [kx_i, kx_i + k - 1] \subseteq \mathbb{Z}$. Está claro que si $j + 1 \leq \lfloor k/2 \rfloor - 1$ o $j \geq \lfloor k/2 \rfloor$, se verifica que $|\rho_k^c(x_i^1) - \rho_k^c(x_i^2)| \leq 1$.

Suponemos ahora que $j = \lfloor k/2 \rfloor - 1$. Por definición, $\rho_k^c(x_i^1) = (k - 1)x_i + \lfloor k/2 \rfloor$ y $\rho_k^c(x_i^2) = (k - 1)x_i + \lfloor k/2 \rfloor - 1$.

Entonces, $|\rho_k^c(x_i^1) - \rho_k^c(x_i^2)| = 1$ y se confirmaría que $\rho_k^c : S(x_i, k) \longrightarrow S(x_i, k - 1)$ es digital. \square

Por las definiciones 1.7 y 1.1, si X es imagen digital y $k \geq 3$, se puede definir una aplicación:

$$\rho_k^c : S(X, k) \longrightarrow S(X, k - 1),$$

construyendo sobre cada aplicación individual: $\rho_k^c : S(x, k) \longrightarrow S(x, k - 1)$. Esta aplicación se denominará la **k-ésima proyección parcial**.

Ejemplo 1.6. Por un lado, en las Figuras 1.5 y 1.6 se representan las proyecciones canónicas 3-ésimas y 2-ésimas de $S(I_2, 3) = I_8$ sobre I_2 y de $S(D^1, 2)$ sobre D^1 , respectivamente. Por otro lado, en la Figura 1.7 se representa la 3-ésima proyección parcial de $S(I_2, 3) = I_8$ sobre $S(I_2, 2) = I_5$. En ambos casos, las flechas indican a qué punto se mapean cada grupo de puntos señalado en rojo.

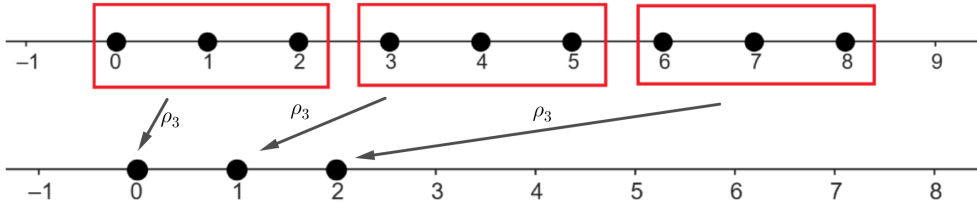


Figura 1.5: Proyección de $S(I_2, 3) = I_8$ sobre I_2 vía ρ_3 .

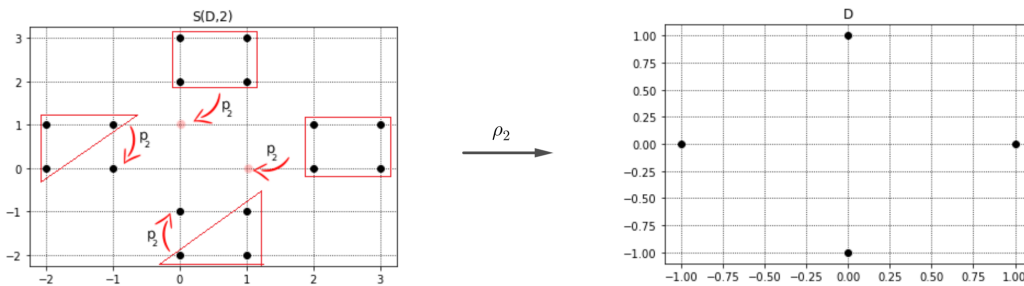


Figura 1.6: Proyección de $S(D^1, 2)$ sobre D^1 vía ρ_2 .

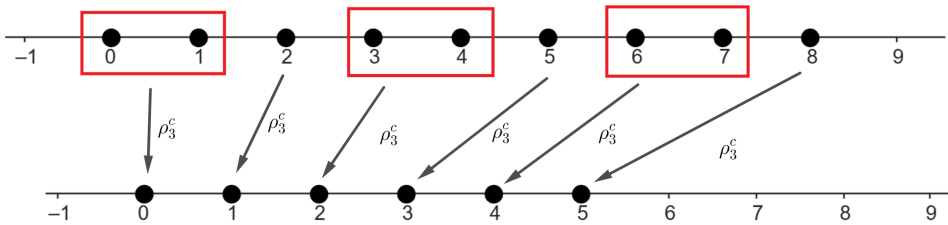


Figura 1.7: Proyección parcial de $S(I_2, 3) = I_8$ sobre $S(I_2, 2) = I_5$ vía ρ_3^c .

Proposición 1.6. Si X es imagen digital y $k \geq 3$, entonces la aplicación

$$\rho_k^c : S(X, k) \longrightarrow S(X, k - 1)$$

es digital.

Demostración. Por la Proposición 1.5, resta ver que para cada $x \in X$ las aplicaciones $\rho_k^c : S(x, k) \longrightarrow S(x, k - 1)$ “pegan” bien, para conseguir una aplicación global digital.

Sean $x = (x_1, \dots, x_n), x' = (x'_1, \dots, x'_n) \in X$ e $(y, y') \in S(x, k) \times S(x', k)$ tales que $x \neq x'$ e $y \sim_{S(X, k)} y'$. Nótese que

$$y = (kx_1 + r_1, \dots, kx_n + r_n) \text{ y } y' = (kx'_1 + r'_1, \dots, kx'_n + r'_n),$$

donde $0 \leq r_i, r'_i \leq k - 1$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Como $p_k : S(X, k) \longrightarrow X$ es una aplicación digital, necesariamente $x \sim_X x'$, ya que $p_k(y) = x$ y $p_k(y') = x'$. Por

definición, restaría ver que para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ $\rho_k^c(kx_i + r_i) \sim \rho_k^c(kx'_i + r'_i)$ en $S(x_i, k-1) \cup S(x'_i, k-1) \subseteq \mathbb{Z}$.

Sea $i \in \{1, \dots, n\}$. Sabemos que existen $s_i, s'_i \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq s_i, s'_i \leq k-2$ tales que $\rho_k^c(kx_i + r_i) = (k-1)x_i + s_i$ y $\rho_k^c(kx'_i + r'_i) = (k-1)x'_i + s'_i$. Entonces,

$$\rho_k^c(kx_i + r_i) - \rho_k^c(kx'_i + r'_i) = (k-1)(x_i - x'_i) + (s_i - s'_i).$$

Hay que demostrar que

$$-1 \leq (k-1)(x_i - x'_i) + (s_i - s'_i) \leq 1. \quad (1.2)$$

Como $x \sim_X x'$, pueden darse tres casos:

- I) $x_i - x'_i = 1$.
- II) $x_i - x'_i = -1$.
- III) $x_i - x'_i = 0$.

En primer lugar, supongamos **I**). Como $y \sim_{S(X,k)} y'$, se tiene que

$$1 \geq kx_i + r_i - (kx'_i + r'_i) = k(x_i - x'_i) + (r_i - r'_i) = k + r_i - r'_i.$$

Entonces, $r'_i \geq k-1 + r_i$. Esto solo puede pasar si $r'_i = k-1$ y por tanto, $r_i = 0$. Por la Definición 1.7, se tiene que $s_i = 0$ y $s'_i = k-2$, con lo cual

$$(k-1)(x_i - x'_i) + (s_i - s'_i) = k-1 - (k-2) = 1$$

y se verifica 1.2.

Ahora, supongamos **II**). Como $y \sim_{S(X,k)} y'$, se tiene que

$$-1 \leq kx_i + r_i - (kx'_i + r'_i) = k(x_i - x'_i) + (r_i - r'_i) = -k + r_i - r'_i.$$

Entonces, $r_i \geq k-1 + r'_i$. Esto solo puede pasar si $r_i = k-1$ y por tanto, $r'_i = 0$. Por la Definición 1.7, se tiene que $s'_i = 0$ y $s_i = k-2$, con lo cual

$$(k-1)(x_i - x'_i) + (s_i - s'_i) = -k + 1 + k - 2 = -1.$$

y se verifica 1.2.

Por último, supongamos **III**). Como $y \sim_{S(X,k)} y'$, se tiene que

$$-1 \leq kx_i + r_i - (kx'_i + r'_i) = k(x_i - x'_i) + (r_i - r'_i) = r_i - r'_i \leq 1.$$

Por un lado, si $\{r_i, r'_i\} \subseteq [0, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1]$ o $\{r_i, r'_i\} \subseteq [\lfloor \frac{k}{2} \rfloor, k-1]$, entonces $r_i - r'_i = s_i - s'_i$ y se verifica 1.2. Por otro lado, si $\{r_i, r'_i\} = \{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$, entonces $s_i = s'_i$ y se verifica 1.2.

Finalmente, como para **I**), **II**) y **III**) se cumple 1.2, se tiene que la aplicación $\rho_k^c : S(X, k) \rightarrow S(X, k-1)$ es digital. \square

Corolario 1.1. Si X es imagen digital y $k \geq 3$, se puede factorizar la proyección $\rho_k : S(X, k) \longrightarrow X$ como

$$\rho_k = \rho_{k-1} \circ \rho_k^c : S(X, k) \longrightarrow S(X, k-1) \longrightarrow X,$$

donde ρ_{k-1} es la $(k-1)$ -ésima proyección canónica de la Definición 1.6 y ρ_k^c la k -ésima proyección parcial.

Demostración. Bastaría ver que para cada $x \in X$, $(\rho_k)_{|S(x,k)} = (\rho_{k-1} \circ \rho_k^c)_{|S(x,k)}$. Por definición, para cada $x \in X$ se tiene que

$$(\rho_k)_{|S(x,k)} = C_x = (\rho_{k-1} \circ \rho_k^c)_{|S(x,k)} : S(x, k) \longrightarrow X,$$

la aplicación constante en x . □

1.2. Espacios de funciones

Una vez introducido el concepto de imagen digital, a través de los isomorfismos se ha conseguido una manera de obtener equivalencias entre imágenes digitales. Sin embargo, al igual que en topología algebraica con los homeomorfismos, se trata de una noción muy restrictiva, la cual se busca debilitar. Por eso, en esta sección se desarrollan los espacios de funciones en el ámbito digital con el objetivo de obtener la idea de equivalencia de homotopía en este campo.

Definición 1.8. Sean X e Y imágenes digitales. El **espacio digital de funciones** consiste en el conjunto

$$D(X, Y) := \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ es aplicación digital}\}$$

con la siguiente relación de adyacencia: dadas $f, g \in D(X, Y)$, se dice que son adyacentes en $D(X, Y)$ si, y solo si,

$$f(x) \sim_Y g(x') \text{ cuando } x \sim_X x'.$$

Además, la relación de adyacencia en $D(X, Y)$ denotará por $f \sim_{D(X,Y)} g$.

Nota 1.1. Se hace notar que si X, Y y Z son imágenes digitales, por definición $D(Y, Z)$ no es una imagen digital. Sin embargo, se pueden encontrar aplicaciones $G : X \longrightarrow D(Y, Z)$ que “preservan la adyacencia”, en el sentido que

$$G(x) \sim_{D(Y,Z)} G(x') \text{ cuando } x \sim_X x'.$$

En este caso, se habla de **aplicaciones pseudo-digitales**. Estas aplicaciones también pueden ser del tipo $D(X, Y) \longrightarrow Z$, o bien $D(X, Y) \longrightarrow D(Z, K)$.

Si X, Y y Z son imágenes digitales se puede establecer una correspondencia biyectiva, llamada **correspondencia exponencial**, entre los conjuntos

$$D(X \times Y, Z) \xrightarrow{\cong} D(X, D(Y, Z))$$

como se especifica a continuación. Se puede identificar una aplicación $F : X \times Y \longrightarrow Z$ con su **adjunto** $\hat{F} : X \longrightarrow D(Y, Z)$ de la siguiente forma:

$$F(x, y) = \hat{F}(x)(y)$$

cuando $(x, y) \in X \times Y$.

Proposición 1.7. Sean X, Y y Z imágenes digitales. Si $F : X \times Y \rightarrow Z$ y $\hat{F} : X \rightarrow D(Y, Z)$ son adjuntos bajo la correspondencia exponencial, entonces F es digital si, y solo si, \hat{F} es pseudo-digital.

Demostración. En primer lugar, supongamos que F es digital y veamos que para cualesquiera $x, x' \in X$ tales que $x \sim_X x'$, se tiene que $\hat{F}(x) \sim_{D(Y, Z)} \hat{F}(x')$. Sean $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$ tales que $x \sim_X x'$ e $y \sim_Y y'$. Por el producto, $(x, y) \sim_{X \times Y} (x', y')$. Como F es digital, se tiene que

$$\hat{F}(x)(y) = F(x, y) \sim_Z F(x', y') = \hat{F}(x')(y').$$

Entonces, $\hat{F}(x) \sim_{D(Y, Z)} \hat{F}(x')$.

Por último, supongamos que \hat{F} es pseudo-digital y veamos que para cualesquiera $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ tales que $(x, y) \sim_{X \times Y} (x', y')$, se tiene que $F(x, y) \sim_Z F(x', y')$. Sean $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ tales que $(x, y) \sim_{X \times Y} (x', y')$. Por definición, $x \sim_X x'$ e $y \sim_Y y'$. Como \hat{F} es pseudo-digital, entonces $\hat{F}(x) \sim_{D(Y, Z)} \hat{F}(x')$ y por lo tanto,

$$F(x, y) = \hat{F}(x)(y) \sim_Z \hat{F}(x')(y') = F(x', y').$$

□

A continuación, se presenta un método para obtener una aplicación “digital” que opere en el espacio de funciones.

Definición 1.9. Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación digital y Z una imagen digital, se definen las **aplicaciones inducidas entre los espacios digitales de funciones**:

- i) $f^* : D(Y, Z) \rightarrow D(X, Z)$, dada por $f^*(g) := g \circ f$.
- ii) $f_* : D(Z, X) \rightarrow D(Z, Y)$, dada por $f_*(g) := f \circ g$.

Lema 1.2. Si $f : X \rightarrow Y$ es una aplicación digital y Z una imagen digital, entonces f^* y f_* son pseudo-digitales.

Demostración. Veamos que f^* es pseudo-digital. Sean $g, h \in D(Y, Z)$ tales que $g \sim_{D(Y, Z)} h$ y tenemos que ver que $f^*(g) \sim_{D(X, Z)} f^*(h)$. Sean $x, x' \in X$ tales que $x \sim_X x'$. Como f es digital, se tiene que $f(x) \sim_Y f(x')$ y por hipótesis,

$$f^*(g)(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \sim_Z h(f(x')) = (h \circ f)(x') = f^*(h)(x').$$

Por lo que finalmente, se deduce que

$$f^*(g) = g \circ f \sim_{D(X, Z)} h \circ f = f^*(h).$$

La demostración que f_* es pseudo-digital es análoga.

□

Existe un tipo especial de espacio de funciones que es el espacio de caminos de una imagen digital. Por su estrecha relación con las homotopías se decide hacer una pequeña introducción en esta sección, pero se tratará con más detalle en el Capítulo 3.

Definición 1.10. Si X es imagen digital y $N \geq 1$, un **camino de longitud N en X** es una aplicación digital

$$\alpha : I_N \longrightarrow X.$$

Definición 1.11. Si X es imagen digital y $N \geq 1$, se define el **espacio digital de caminos de longitud N en X** , y se denota por $P_N X$, al conjunto de todos los caminos de longitud N en X con la relación de adyacencia definida en 1.8, es decir,

$$P_N X := D(I_N, X).$$

Existen diversas formas de prolongar un camino.

Ejemplo 1.7.

i) Si $N \geq M$, se puede definir una aplicación digital $f : I_N \longrightarrow I_M$ dada por

$$f(t) := \begin{cases} t & 0 \leq t \leq M \\ M & M \leq t \leq N \end{cases}$$

De esta manera se tiene una aplicación $f^* : P_M X \longrightarrow P_N X$ pseudo-digital que extiende un camino α de longitud M a su **extensión trivial** $f^*(\alpha)$.

ii) Si I_N es un intervalo y $k \geq 2$, su subdivisión k -ésima genera un intervalo de mayor longitud

$$S(I_N, k) = I_{kN+k-1}$$

y la k -ésima proyección canónica induce una aplicación pseudo-digital

$$(p_k)^* : P_N X \longrightarrow P_{kN+k-1} X.$$

Nótese que extiende un camino α de longitud N a otro de $kN + k - 1$ de una manera distinta a la extensión trivial anteriormente presentada.

Definición 1.12. Sean X una imagen digital, $N \geq 1$ y $t \in \{0, N\}$. Se puede definir dos aplicaciones **evaluación** La primera consiste en $ev_t : P_N X \longrightarrow X$ dada por $ev_t(\alpha) := \alpha(t)$, para cada $\alpha \in P_N X$. La segunda en $\pi : P_N X \longrightarrow X \times X$ dada por $\pi(\alpha) := (\alpha(0), \alpha(N))$, para cada $\alpha \in P_N X$.

Lema 1.3. Sean X una imagen digital, $N \geq 1$ y $t \in \{0, N\}$, las aplicaciones evaluación son pseudo-digitales.

Demostración. En primer lugar veamos la pseudo-digitalidad de ev_0 . Sean $\alpha, \alpha' \in P_N X$ tales que $\alpha \sim_{P_N X} \alpha'$. Por definición,

$$ev_0(\alpha) = \alpha(0) \sim_X \alpha'(0) = ev_0(\alpha').$$

Entonces ev_0 es pseudo-digital. Se puede demostrar que ev_N es pseudo-digital por un procedimiento análogo.

Demostrar que π es pseudo-digital, se sigue del hecho que ev_0 y ev_N lo son y la definición del producto de imágenes digitales. \square

Nota 1.2. Nótese que si X es imagen digital, se puede identificar X con $D(\{0\}, X)$. En el siguiente sentido: se pueden encontrar aplicaciones pseudo-digitales $\varphi : X \rightarrow D(\{0\}, X)$ y $\psi : D(\{0\}, X) \rightarrow X$ tales que $\varphi \circ \psi = id_{D(\{0\}, X)}$ y $\psi \circ \varphi = id_X$. Por un lado, para cada $x \in X$ basta tomar $\varphi(x) : \{0\} \rightarrow X$ como la aplicación definida por $\varphi(x)(0) = x$. Por otro lado, para cada $f \in D(\{0\}, X)$ basta tomar $\psi(f) = f(0)$. Así, si $j : \{0\} \hookrightarrow I_N$ es la inclusión, entonces la aplicación inducida $j^* : P_N X \rightarrow D(\{0\}, X)$ puede identificarse con $ev_0 : P_N X \rightarrow X$.

Ahora, se presentan dos definiciones de homotopías que son equivalentes y constituyen la noción de homotopía en el ámbito digital. Asimismo, se visualiza que cualquier homotopía puede verse como un camino en el respectivo espacio de caminos.

Definición 1.13. Sean X e Y imágenes digitales y $f, g : X \rightarrow Y$ aplicaciones digitales.

i) f y g son **homótopas por la izquierda** si existen $N \geq 1$ y una aplicación digital

$$H : X \times I_N \rightarrow Y$$

verificando que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, N) = g(x)$, para cada $x \in X$. A la aplicación H se le denomina **homotopía por la izquierda** de f a g

ii) f y g son **homótopas por la derecha** si existen $N \geq 1$ y una aplicación digital

$$G : X \rightarrow P_N Y$$

verificando que $f = ev_0 \circ G$ y $g = ev_N \circ G$. A la aplicación G se le denomina **homotopía por la izquierda** de f a g .

Proposición 1.8. Si $f, g : X \rightarrow Y$ son aplicaciones digitales. Entonces, f y g son homótopas por la izquierda si, y solo si, son homótopas por la derecha.

Demostración. En primer lugar, suponemos que $H : X \times I_N \rightarrow Y$ es una homotopía por la izquierda de f a g . Podemos formar su adjunto $\hat{H} : X \rightarrow P_N Y$ dado por $\hat{H}(x)(k) = H(x, k)$ para cada $x \in X$ y $k \in I_N$. Entonces para cada $x \in X$, tenemos

$$(ev_0 \circ \hat{H})(x) = H(x, 0) = f(x) \text{ y } (ev_N \circ \hat{H})(x) = H(x, N) = g(x).$$

La pseudo-digitalidad de \hat{H} se sigue de la Proposición 1.7.

Por último, suponemos que $\hat{H} : X \rightarrow P_N Y$ es una homotopía por la derecha de f a g . Podemos formar su adjunto $H : X \times I_N \rightarrow Y$ dado por $H(x, k) = \hat{H}(x)(k)$ para cada $x \in X$ y $k \in I_N$. Entonces para cada $x \in X$ y $k \in I_N$, tenemos

$$H(x, 0) = \hat{H}(x)(0) = (ev_0 \circ \hat{H})(x) = f(x) \text{ y } H(x, N) = \hat{H}(x)(N) = (ev_N \circ \hat{H})(x) = g(x).$$

La digitalidad de H se sigue de la Proposición 1.7. □

Definición 1.14. Se dice que dos aplicaciones digitales $f, g : X \rightarrow Y$ son **digitalmente homótopas**, y se denota por $f \approx g$, si son homótopas por la izquierda o por la derecha. Anteriormente, se vio que esto implicaba encontrar una homotopía por la izquierda $H : X \times I_N \rightarrow Y$ y por la derecha $G : X \rightarrow P_N Y$. Con lo cual, puede interpretarse como una deformación en N pasos entre f y g .

Se puede extender la definición de camino en una imagen digital a camino en un espacio de funciones.

Definición 1.15. Si X e Y son imágenes digitales y $N \geq 1$, un **camino de longitud N** en $D(X, Y)$ es una aplicación pseudo-digital

$$\alpha : I_N \longrightarrow D(X, Y).$$

Nota 1.3. Si se tiene una homotopía $H : X \times I_N \longrightarrow Y$, entonces se puede formar su adjunto

$$\hat{H} : I_N \longrightarrow D(X, Y)$$

dado por $\hat{H}(t)(x) = H(x, t)$. Es decir, se puede ver una homotopía como un camino en $D(X, Y)$. En este caso a \hat{H} lo denotaremos por α_H .

Lema 1.4. Si $f, g : X \longrightarrow Y$ son aplicaciones digitales, entonces f, g son homótopas en N pasos si, y solo si, existe un camino de longitud N en $D(X, Y)$ que conecta a f con g . En particular, f, g son homótopas en un paso si, y solo si, f y g son adyacentes en $D(X, Y)$.

Demostración. La demostración es fruto de combinar lo observado en la Nota 1.3 y la Proposición 1.7. Veamos el caso $N = 1$. En primer lugar, suponemos que existe homotopía

$$H : X \times I_1 \longrightarrow Y \tag{1.3}$$

tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$. Entonces, como $0 \sim_{I_1} 1$ se tiene que $f = \hat{H}(0) \sim_{D(X, Y)} \hat{H}(1) = g$.

Ahora, supongamos que f y g son adyacentes en $D(X, Y)$. Entonces, podemos definir la homotopía 1.3 y probar que es digital. \square

Para cerrar la sección, se introducirá la idea de equivalencia de homotopía en el ámbito digital, así como un tipo especial de ella que se estudia en topología algebraica: la contractibilidad. También, se ilustra todo lo anterior con algunos ejemplos típicos.

Lema 1.5. Si X e Y son imágenes digitales, “ser homótopo” define una relación de equivalencia en el conjunto de todas las aplicaciones digitales $X \longrightarrow Y$.

Demostración. Veamos, en primer lugar, la propiedad reflexiva. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación digital. Entonces, se puede definir

$$H : X \times I_1 \longrightarrow Y$$

dado por $H(x, t) = f(x)$ para todo $x \in X$ y $t \in \{0, 1\}$. Es evidente que esta aplicación es digital y con lo cual, H es una homotopía de f a f y se demostraría que $f \approx f$.

Para la propiedad simétrica supongamos que $f, g : X \longrightarrow Y$ son dos aplicaciones digitales tales que $f \approx g$. Por definición, existe $H : X \times I_N \longrightarrow Y$ homotopía f a g que verifica $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, N) = g(x)$ para todo $x \in X$. Entonces, se puede definir aplicación $\bar{H} : X \times I_N \longrightarrow Y$ dada por $\bar{H}(x, t) = H(x, N - t)$. Esta aplicación es digital y verifica que

$$\bar{H}(x, 0) = H(x, N) = g(x) \text{ y } \bar{H}(x, N) = H(x, 0) = f(x)$$

para todo $x \in X$. Con lo cual, \bar{H} es una homotopía de g a f y se demostraría que $g \approx f$.

Finalmente, para la propiedad transitiva, supongamos $f, g, h : X \rightarrow Y$ aplicaciones digitales tales que $f \approx g$ y $g \approx h$. Por definición, existen $H_1 : X \times I_N \rightarrow Y$ y $H_2 : X \times I_M \rightarrow Y$ homotopías de f a g y g a h , respectivamente, que verifican

$$H_1(x, 0) = f(x), \quad H_1(x, N) = g(x) = H_2(x, 0) \quad \text{y} \quad H_2(x, M) = h(x)$$

para todo $x \in X$. Entonces, se puede definir la aplicación $H : X \times I_{N+M} \rightarrow Y$ dada por

$$H(x, t) := \begin{cases} H_1(x, t) & 0 \leq t \leq N \\ H_2(x, t - N) & N \leq t \leq N + M \end{cases}.$$

Esta aplicación verifica que

$$H(x, 0) = H_1(x, 0) = f(x) \quad \text{y} \quad H(x, N + M) = H_2(x, M) = h(x)$$

para todo $x \in X$. Veamos que H es digital. En efecto, sean $(x, t), (x', t') \in X \times I_{N+M}$ tales que $(x, t) \sim_{X \times I_{N+M}} (x', t')$. Por definición, se tiene que $x \sim_X x'$ y $t \sim_{I_{N+M}} t'$. Entonces, t y t' difieren como mucho en 1. Es decir,

$$t, t' \in I_N \text{ o } t, t' \in \{N, N + 1, \dots, N + M\}.$$

Si se da el primer caso, entonces H_1 proporciona la digitalidad de H . Si se da el segundo, H_2 la proporciona. Con lo cual, H es una homotopía de f a h y se demostraría que $f \approx h$. \square

Definición 1.16. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación digital. Se dice que f es una **equivalencia de homotopía** si existe $g : Y \rightarrow X$ una aplicación digital tal que $g \circ f \approx id_X$ y $f \circ g \approx id_Y$. Así, se dice que X e Y son **homotópicamente equivalentes** o tienen el **mismo tipo de homotopía**.

Definición 1.17. Una imagen digital es **contráctil** si es homotópicamente equivalente al espacio digital unipuntual.

Proposición 1.9. Si X es una imagen digital, entonces X es contráctil si, y solo si, existen $H : X \times I_N \rightarrow X$ una homotopía y $x_0 \in X$ tal que $H(x, 0) = x$ y $H(x, N) = x_0$, para todo $x \in X$.

Demostración. En primer lugar, supongamos que X es contráctil. Entonces existen $\{m\}$ imagen digital y aplicaciones $f : X \rightarrow \{m\}$ y $g : \{m\} \rightarrow X$ tales que $g \circ f \approx id_X$ y $f \circ g \approx id_{\{m\}}$. Tomamos $x_0 := g(m)$. Entonces, como $g \circ f \approx id_X$, existe $H : X \times I_N \rightarrow X$ homotopía tal que

$$H(x, 0) = id_X(x) = x \quad \text{y} \quad H(x, N) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(m) = x_0$$

para todo $x \in X$. La otra implicación es inmediata pues basta tomar $C_{x_0} : X \rightarrow \{x_0\}$ e $i : \{x_0\} \hookrightarrow X$, la aplicación constante en x_0 e inclusión, respectivamente para demostrar que X es contráctil vía H . \square

Proposición 1.10. Si I_N es un intervalo de longitud N y $m \in I_N$, entonces el intervalo I_N puede contraerse a través de una homotopía que fija a m .

Demostración. Definimos una aplicación $H : I_N \times I_N \longrightarrow I_N$ dada por

$$H(s, t) := \begin{cases} t & 0 \leq s \leq t \\ s & t \leq s \leq m \end{cases},$$

si $(s, t) \in I_m \times I_N$ y por

$$H(s, t) := \begin{cases} s & m \leq s \leq N - t \\ N - t & N - t \leq s \leq N \end{cases},$$

si $(s, t) \in [m, N] \times I_N$.

H verifica que $H(s, 0) = s$ y $H(s, N) = m$, para cada $s \in I_N$. Además, ambas partes coinciden en $\{m\} \times I_N$, teniendo que $H(\{m\} \times I_N) = m$. Por lo que resta ver que ambas partes son digitales en sus conjuntos de definición, para probar que H es la homotopía que buscamos. Empezamos analizando la digitalidad en $I_m \times I_N$.

Sean $(s, t), (s', t') \in I_m \times I_N$ tales que $s \sim_{I_m} s'$ y $t \sim_{I_N} t'$. Entonces puede ocurrir que:

- i) $s \leq t$ y $s' \leq t'$.
- ii) $s \geq t$ y $s' \geq t'$.
- iii) $s \leq t$ y $s' \geq t'$.
- iv) $s \geq t$ y $s' \leq t'$.

En primer lugar, suponemos **i**). Entonces, $H(s, t) = t \sim_{I_N} t' = H(s', t')$. En segundo lugar, suponemos **ii**). Entonces, $H(s, t) = s \sim_{I_N} s' = H(s', t')$. Por último, suponemos **iii**). Entonces, como $s' - 1 \leq s$ y $t' + 1 \geq t$ tenemos que $s' - 1 \leq t$ y $t \leq s' + 1$, respectivamente. O equivalentemente,

$$-1 \leq t - s' \leq 1 \text{ (siii } |t - s'| \leq 1 \text{)}.$$

Con lo cual,

$$H(s, t) = t \sim_{I_N} s' = H(s', t').$$

Por un razonamiento similar al efectuado anteriormente, se puede demostrar **iv**).

Para probar la digitalidad de H en $[m, N] \times I_N$ se procede de manera similar que en $I_m \times I_N$. Se concluye que H es digital y constituye la homotopía buscada. \square

Corolario 1.2. Si $(I_N)^m$ es un cubo y $b = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in (I_N)^m$, entonces el cubo $(I_N)^m$ puede contraerse a través de una homotopía que fija a b .

Demostración. Se puede definir una aplicación $H : (I_N)^m \times I_N \longrightarrow (I_N)^m$ dada por

$$H(x_1, \dots, x_m, t) := (H_1(x_1, t), H_2(x_2, t), \dots, H_m(x_m, t)),$$

para cada $(x_1, \dots, x_m, t) \in (I_N)^m \times I_N$, donde para cada $i \in \{1, \dots, m\}$

$$H_i : I_N \times I_N \longrightarrow I_N$$

es la homotopía de la Proposición 1.2 que fija la coordenada b_i . Si se demuestra que es digital, H es la homotopía buscada. Si P y Δ son las aplicaciones permutación y diagonal, respectivamente, H puede verse como $H = (H_1 \times \dots \times H_m) \circ P \circ (id_{(I_N)^m} \times \Delta)$. Por la Proposición 1.1 y el Lema 1.1, la aplicación H es digital. \square

Proposición 1.11. *Si X e Y son imágenes digitales contráctiles, entonces $X \times Y$ es una imagen digital contráctil.*

Demostración. Como hemos visto, existen $H_1 : X \times I_M \rightarrow X$ y $H_2 : Y \times I_N \rightarrow Y$ homotopías que verifican

$$H_1(x, 0) = x, H_1(x, M) = x_0, H_2(y, 0) = y, H_2(y, N) = y_0$$

para todo $x \in X, y \in Y$.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $N = M$, pues si $N > M$ (análogo si $M > N$), se puede extender la homotopía H_1 a otra $H'_1 : X \times I_N \rightarrow X$ dada por

$$H'_1(x, t) := \begin{cases} H_1(x, t) & 0 \leq t \leq M \\ x_0 & M \leq t \leq N \end{cases}$$

Entonces, podemos definir una aplicación $H : X \times Y \times I_N \rightarrow X \times Y$ dada por

$$H(x, y, t) := (H_1(x, t), H_2(y, t))$$

para todo $x \in X, y \in Y$ y $t \in I_N$. El hecho que H sea digital lo hereda de H_1 y H_2 . Además, $H(x, y, 0) = (H_1(x, 0), H_2(y, 0)) = (x, y)$ y $H(x, y, N) = (x_0, y_0)$, para todo $x \in X, y \in Y$. Se concluye que H es una homotopía y por lo tanto, $X \times Y$ es contráctil. \square

Proposición 1.12. *El diamante $D = D^1$ no es contráctil.*

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo. Suponemos que existe $H : D \times I_N \rightarrow D$ aplicación digital tal que $H(x, 0) = x$, para cada $x \in X$ y $H(D \times I_N) \neq D$. Entonces sea el $t \in I_N$ el primer valor para el cual ocurre

$$H(D \times \{t\}) = D \text{ y } H(D \times \{t+1\}) \neq D.$$

Entonces, $H(x_1, t) = (1, 0)$, $H(x_2, t) = (0, 1)$, $H(x_3, t) = (-1, 0)$, $H(x_4, t) = (0, -1)$, donde $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = D$. Sin pérdida de generalidad, suponemos que $(1, 0) \notin H(D \times \{t+1\})$, pues el resto de casos se lidia de una manera parecida. Al ser H digital y al tener $(0, 1) \not\sim_D (0, -1)$, se deduce que $x_2 \not\sim_D x_4$ y $x_2 \sim_D x_1 \sim_D x_4$. Nuevamente, al ser H digital, $H(x_1, t+1) \sim_D H(x_1, t) = (1, 0)$. Entonces, $H(x_1, t+1) = (0, 1)$ o $H(x_1, t+1) = (0, -1)$. Suponemos que $H(x_1, t+1) = (0, 1)$. Entonces, $(x_4, t) \sim_{D \times I_N} (x_1, t+1)$ implica que $(0, -1) = H(x_4, t) \sim_D H(x_1, t+1) = (0, 1)$ lo que es una contradicción. Suponemos que $H(x_1, t+1) = (0, -1)$. Entonces, $(x_2, t) \sim_{D \times I_N} (x_1, t+1)$ implica que $(0, 1) = H(x_2, t) \sim_D H(x_1, t+1) = (0, -1)$ lo que es una contradicción.

Concluimos que D no es contráctil. \square

Nota 1.4. Nótese que en la definición de homotopía por la izquierda en 1.13, se obliga a que ambos espacios involucrados sean imágenes digitales. Sin embargo, se puede relajar esta definición y cambiar un espacio que sea una imagen digital por otro espacio que tenga una relación de adyacencia definida manteniendo la preservación de adyacencia entre los espacios iniciales y finales. Así, se obtendría lo que se llamaría **pseudo-homotopía por la izquierda**. De esta forma, también se podría obtener la definición de **equivalencia de pseudo-homotopía**, relajando la definición de homotopía de equivalencia a aplicaciones pseudo-digitales cuya composición son pseudo-homótopos por la izquierda a las respectivas identidades.

Ejemplo 1.8. Si X, Y imágenes digitales y $N, M \geq 1$, entonces una aplicación pseudo-digital

$$H : X \times I_M \longrightarrow P_N Y$$

es una pseudo-homotopía por la izquierda desde

$$H(-, 0) : X \longrightarrow P_N Y \text{ hasta } H(-, N) : X \longrightarrow P_N Y.$$

Proposición 1.13. Si X es una imagen digital y $N \geq 1$, entonces la aplicación evaluación $ev_0 : P_N X \longrightarrow X$ es una equivalencia de pseudo-homotopía.

Demostración. Veamos que la aplicación $C : X \longrightarrow P_N X$ definida por

$$C(x) := C_x : I_N \longrightarrow X$$

el camino constante en x , para cada $x \in X$, es el inverso pseudo-homotópico de ev_0 .

Por un lado, está claro que $ev_0 \circ C = id_X$. Por otro lado, $C \circ ev_0 : P_N X \longrightarrow X \longrightarrow P_N X$ verifica que

$$(C \circ ev_0)(\alpha) = C(ev_0(\alpha)) = C(\alpha(0)) = C_{\alpha(0)}$$

para cada $\alpha \in P_N X$. Es decir, buscamos “contraer” cada camino a su punto inicial. Podemos definir la aplicación $H : P_N X \times I_N \longrightarrow P_N X$ dada por

$$H(\alpha, s)(t) := \begin{cases} \alpha(t) & 0 \leq t \leq N - s \\ \alpha(N - s) & N - s \leq t \leq N \end{cases},$$

para cada $\alpha \in P_N X, t, s \in I_N$. Esta aplicación verifica $H(\alpha, 0) = \alpha$ y $H(\alpha, N) = C_{\alpha(0)}$. De este modo, resta ver que es pseudo-digital para probar lo que queríamos.

Sean $\alpha, \alpha' \in P_N X$ y $s, s' \in I_N$ tales que $\alpha \sim_{P_N X} \alpha'$ y $s \sim_{I_N} s'$. Hay que ver que $H(\alpha, s) \sim_{P_N X} H(\alpha', s')$. Es decir, si $t \sim_{I_N} t'$, entonces $H(\alpha, s)(t) \sim_X H(\alpha', s')(t')$. Obsérvese que $|(s + t) - (s' + t')| \leq 2$. Entonces, puede ocurrir:

- i) $s + t, s' + t' \in \{0, \dots, N\}$.
- ii) $s + t, s' + t' \in \{N, \dots, 2N\}$.
- iii) $s + t, s' + t' \in \{N - 1, N + 1\}$.

En primer lugar, suponemos **i**). Entonces,

$$H(\alpha, s)(t) = \alpha(t) \sim_X \alpha'(t') = H(\alpha', s')(t').$$

Ahora, suponemos **ii**). Entonces,

$$H(\alpha, s)(t) = \alpha(N - s) \sim_X \alpha'(N - s') = H(\alpha', s')(t').$$

Por último, suponemos **iii**) y $s + t = N - 1$ y $s' + t' = N + 1$. Lo cual lleva a $t' = t + 1$ y $s' = s + 1$. Entonces, $N - s' = t' - 1 = t$ con lo cual

$$H(\alpha, s)(t) = \alpha(t) \sim_X \alpha'(t) = \alpha'(N - s') = H(\alpha', s')(t').$$

El caso $s + t = N + 1$ y $s' + t' = N - 1$ se demuestra de manera análoga.

En definitiva, como los tres casos verifican lo que queríamos ver, se cumple que H es pseudo-digital y por tanto, es una homotopía por la izquierda. \square

1.3. Espacios basados

En esta sección se introducen las imágenes digitales con un punto distinguido. Para ello, se replican algunas definiciones y propiedades obtenidas a lo largo del capítulo, con el fin de obtener una serie de resultados que permitirán obtener ejemplos de “fibraciones digitales” en el Capítulo 2 y construir el grupo fundamental en una imagen digital en el Capítulo 3.

Definición 1.18. Una **imagen digital basada** o **b-imagen digital** consiste en un par (X, x_0) donde X es una imagen digital y x_0 es un punto de X que se denominará como **punto base**.

Ejemplo 1.9. En un intervalo digital de longitud N , se seleccionará siempre a $0 \in I_N$ como punto base.

Para evitar una recarga en la notación y facilitar la legibilidad, se denota por X a una imagen digital basada (X, x_0) , teniendo en cuenta que existe un punto x_0 como punto base.

Si X es una imagen digital basada, se tiene que establecer un convenio sobre cuál será el punto base en cualquier subdivisión $S(X, k)$ para $k \geq 2$. En efecto, suponemos que $x_0 = (x_1, \dots, x_n)$ es el punto base de X y $\bar{x}_0 \in S(\bar{x}_0, k) \subseteq S(X, k)$ consistirá en el punto base de $S(X, k)$ que se define de la siguiente manera:

$$\bar{x}_0 := \begin{cases} (2kx_1 + k - 1, \dots, 2kx_n + k - 1) & \text{en } S(X, 2k) \\ ((2k + 1)x_1 + k, \dots, (2k + 1)x_n + k) & \text{en } S(X, 2k + 1) \end{cases}$$

En otras palabras, en una subdivisión impar \bar{x}_0 es el punto central de $S(x_0, 2k + 1)$ que es un retículo cúbico en \mathbb{Z}^n . En cambio, en una subdivisión par \bar{x}_0 es la esquina del clique central de $S(x_0, 2k)$.

A continuación, se estudia cómo pueden relacionarse entre sí las imágenes digitales basadas, ya sea a través de correspondencias o construyendo nuevas haciendo uso del producto cartesiano.

Definición 1.19. Una **aplicación digital basada** o **b-aplicación digital** consiste en una aplicación digital $f : X \longrightarrow Y$ entre imágenes digitales basadas tal que $f(x_0) = y_0$. Además un **isomorfismo digital basado** o **b-isomorfismo digital** es un isomorfismo digital que es basado (envía el punto base inicial al punto base final).

Si X, Y son imágenes digitales basadas con puntos base x_0 e y_0 , respectivamente, se denota por

$$D_*(X, Y) := \{f : X \longrightarrow Y \mid f \text{ aplicación digital y } f(x_0) = y_0\}$$

al espacio de funciones basado que se corresponde al conjunto de todas las aplicaciones basadas de X a Y . Así, si $j : A \hookrightarrow X$ es una inclusión de imágenes digitales basadas, se tiene una aplicación inducida

$$j^* : D_*(X, Y) \longrightarrow D_*(A, Y)$$

entre los espacios de funciones basados, que es igual a la definida en el caso no basado.

Ejemplo 1.10. Dados un intervalo I_M con el punto base $0 \in I_M$ y X una imagen digital con punto base x_0 , sea $\mathcal{P}_N X$ el conjunto de todos los caminos basados en X , es decir,

$$\mathcal{P}_N X := \{\alpha \in P_N X \mid \alpha(0) = x_0\}.$$

En este caso, se puede definir $ev_N : \mathcal{P}_N X \longrightarrow X$ la aplicación dada por

$$ev_N(\gamma) := \gamma(N)$$

para cada $\gamma \in \mathcal{P}_N X$.

Nota 1.5. Si $j : \{0, N\} \longrightarrow I_N$ es la inclusión basada, entonces para cualquier imagen digital basada X se puede identificar $ev_N : \mathcal{P}_N X \longrightarrow X$ con $j^* : D_*(I_N, X) \longrightarrow D_*(\{0, N\}, X)$.

Bajo el convenio anteriormente establecido, si X es imagen digital basada, entonces para cada $k \geq 1$ las proyecciones k -ésimas canónicas y parciales son aplicaciones digitales basadas y se verifica que $\rho_k^c(\bar{x}_0) = \bar{x}_0$, $\rho_k(\bar{x}_0) = x_0$.

Definición 1.20. El **producto digital basado** de dos imágenes digitales basadas consiste en el producto digital junto al par constituido por los respectivos puntos base.

Prácticamente la totalidad de resultados presentados a lo largo del capítulo, se pueden replicar a este nuevo tipo de espacios, ya que sean basados o no, no influyen en la veracidad de los mismos. No obstante, se enfatiza en aquellos que permitirán introducir nuevas ideas y nociones que se usarán más adelante. Con este fin, se presentan a continuación las nociones de homotopía, equivalencia de homotopía y contractibilidad en este tipo de espacios distinguidos.

Definición 1.21. Sean $f, g : X \longrightarrow Y$ aplicaciones digitales basadas. Se dice que f y g son **b-homótopas** si existe $H : X \times I_N \longrightarrow Y$ homotopía digital entre f y g tal que $H(x_0, t) = y_0$ para todo $t \in I_N$. Se hará uso de la misma notación que en el caso no basado.

Lema 1.6. Sean $f, f' : X \subseteq \mathbb{Z}^m \rightarrow Y \subseteq \mathbb{Z}^n$ y $g, g' : Y \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow Z \subseteq \mathbb{Z}^p$ aplicaciones digitales basadas. Si f, f' y g, g' son b -homótopas, respectivamente, entonces $g \circ f, g' \circ f' : X \rightarrow Z$ son b -homótopas.

Demostración. Sean $H_1 : X \times I_N \rightarrow Y$ y $H_2 : Y \times I_M \rightarrow Z$ las b -homotopías entre f y f' y g y g' , respectivamente. Definimos $H : X \times I_{N+M} \rightarrow Z$ dada por

$$H(x, t) := \begin{cases} (g \circ H_1)(x, t) & 0 \leq t \leq N \\ (H_2 \circ (f' \times T))(x, t) & N \leq t \leq N + M \end{cases}.$$

donde $T : [N, N+M] \rightarrow I_M$ es la traslación (aplicación digital) definida por $T(t) = t - N$ para cada $t \in [N, N+M]$.

Al tener que la composición y el producto de aplicaciones digitales basadas constituyen aplicaciones digitales basadas, se deduce que cada miembro de H es una aplicación digital que además coinciden en $X \times \{N\}$. Con lo cual H es una aplicación digital. Asimismo,

$$H(x, 0) = (g \circ f)(x) \text{ y } H(x, N + M) = (g' \circ f')(x).$$

Finalmente,

$$H(x_0, t) = \begin{cases} (g \circ H_1)(x_0, t) = g(y_0) = z_0 & 0 \leq t \leq N \\ H_2(f'(x_0), T(t)) = G(y_0, T(t)) = z_0 & N \leq t \leq N + M \end{cases}$$

Por lo que se deduce que H es una b -homotopía entre $g \circ f$ y $g' \circ f'$. □

Definición 1.22. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación digital basada. Se dice que f es una **b -equivalencia de homotopía** si existe $g : Y \rightarrow X$ aplicación digital basada tal que

$$g \circ f \approx id_X \text{ (} b\text{-homotopía)} \text{ y } f \circ g \approx id_Y \text{ (} b\text{-homotopía)}.$$

Así, se dicen que X e Y son **b -homotópicamente equivalentes** o tienen el **mismo tipo de b -homotopía**.

Definición 1.23. Una imagen digital basada X es **b -contráctil** si es b -homotópicamente equivalente a una imagen digital unipuntual.

Se puede caracterizar la b -contractibilidad en una imagen digital basada.

Proposición 1.14. Sea X una imagen digital basada. Entonces X es b -contráctil si, y solo si, existe b -homotopía de la aplicación identidad en X a la aplicación constante de X en $x_0 \in X$.

Demostración. Razonamiento totalmente análogo al hecho en la Proposición 1.9. □

Sin embargo, esta visión de homotopía de equivalencia es muy rígida (ver Ejemplo 1.11) y haciendo uso de ella, se fallaría en demostrar que ciertos espacios contráctiles en la topología algebraica lo son en topología digital. Por lo anterior, se presentan unas nuevas nociones de homotopía, equivalencia de homotopía y contractibilidad.

Definición 1.24. Sean $X \subseteq \mathbb{Z}^m$ e $Y \subseteq \mathbb{Z}^n$ imágenes digitales basadas. Se dice que $f : S(X, k) \rightarrow Y$ y $g : S(X, l) \rightarrow Y$ son **sb-homótopas** si para algún k', l' tal que $kk' = ll' = m$, se tiene una b -homotopía

$$f \circ \rho_{k'} \approx g \circ \rho_{l'} : S(X, m) \rightarrow Y.$$

En particular, las aplicaciones digitales basadas $f, g : X \rightarrow Y$ son sb -homótopas si existe una b -homotopía $f \circ \rho_k \approx g \circ \rho_k : S(X, k) \rightarrow Y$ para algún $\rho_k : S(X, k) \rightarrow X$.

Proposición 1.15. Si $X \subseteq \mathbb{Z}^m$ e $Y \subseteq \mathbb{Z}^n$ son imágenes digitales basadas, “ser sb -homótopo” define una relación de equivalencia en el conjunto de todas las aplicaciones digitales basadas de una que parten subdivisión de X a Y .

Demostración. La demostración es muy similar a la del Lema 1.5. Por ello, nos centraremos en demostrar la propiedad transitiva que requiere cierto trabajo adicional. Sean $f : S(X, k) \rightarrow Y, g : S(X, l) \rightarrow Y$ y $h : S(X, m) \rightarrow Y$ aplicaciones digitales basadas tales que $f \circ \rho_{k'} \approx g \circ \rho_{l'}$ y $g \circ \rho_{l''} \approx h \circ \rho_{m'}$ donde $kk' = ll'$ y $mm' = ll''$. Por definición, existen

$$H_1 : S(X, kk') \times I_N = S(X, ll') \times I_N \rightarrow Y \text{ y } H_2 : S(X, ll'') \times I_M = S(X, mm') \times I_M \rightarrow Y$$

homotopías basadas de $f \circ \rho_{k'}$ a $g \circ \rho_{l'}$ y $g \circ \rho_{l''}$ a $h \circ \rho_{m'}$. Podemos construir

$$H'_1 = H_1 \circ (\rho_{ll'} \times id_{I_N}) : S(X, ll'l'') \times I_N = S(X, kk'l'') \times I_N \rightarrow Y$$

y

$$H'_2 = H_2 \circ (\rho_{ll''} \times id_{I_M}) : S(X, ll'l'') \times I_M = S(X, mm'l'') \times I_M \rightarrow Y$$

que son homotopías basadas de $f \circ \rho_{k'} \circ \rho_{l''}$ a $g \circ \rho_{l'} \circ \rho_{l''}$ y $g \circ \rho_{l''} \circ \rho_{l'}$ a $h \circ \rho_{m'} \circ \rho_{l'}$, respectivamente. Entonces, se puede definir la aplicación

$$H : S(X, kk'l'') \times I_{N+M} = S(X, mm'l'') \times I_{N+M} \rightarrow Y$$

dada por

$$H(x, t) := \begin{cases} H'_1(x, t) & 0 \leq t \leq N \\ H'_2(x, t - N) & N \leq t \leq N + M \end{cases}.$$

Por la prueba de los lemas 1.6 y 1.5 se comprueba de manera sencilla que H constituye una homotopía basada de $f \circ \rho_{k'} \circ \rho_{l''}$ a $h \circ \rho_{m'} \circ \rho_{l'}$. Con lo cual, f y h son sb -homótopas. \square

Definición 1.25. Sean $X \subseteq \mathbb{Z}^m$ e $Y \subseteq \mathbb{Z}^n$ imágenes digitales basadas y $k, l \geq 1$. Se supone que se tiene lo siguiente:

a) Aplicaciones digitales basadas $f : S(X, k) \rightarrow Y$ y $g : S(Y, l) \rightarrow X$.

b) Aplicaciones digitales basadas F y G haciendo que conmuten los diagramas:

$$\begin{array}{ccc} S(X, kl) & \xrightarrow{F} & S(Y, l) & & S(Y, kl) & \xrightarrow{G} & S(X, k) \\ \downarrow \rho_l & & \downarrow \rho_l & & \downarrow \rho_k & & \downarrow \rho_k \\ S(X, k) & \xrightarrow{f} & Y & & S(Y, l) & \xrightarrow{g} & X \end{array}.$$

c) $f \circ G : S(Y, kl) \longrightarrow Y$ *sb-homotopa a* $id_Y : Y \longrightarrow Y$ y $g \circ F : S(X, kl) \longrightarrow X$ *sb-homotopa a* $id_X : X \longrightarrow X$.

Entonces, se dice que X e Y son **sb-homotópicamente equivalentes** o tienen el **mismo tipo de sb-homotopía**, F cubre a f y G cubre a g .

Definición 1.26. Una imagen digital basada $X \subseteq \mathbb{Z}^m$ es **sb-contráctil** si es sb-homotópicamente equivalente a un punto $\{y_0\} \subseteq \mathbb{Z}^n$.

Finalmente, se cierra el capítulo aportando una caracterización de sb-contractibilidad, que permitirá construir algunos grupos fundamentales en el Capítulo 3 y un ejemplo que expone la rigidez de la definición de b-contractibilidad frente a sb-contractibilidad.

Proposición 1.16. Sea $X \subseteq \mathbb{Z}^m$ una imagen digital basada con punto base $x_0 \in X$. Son equivalentes:

a) X es sb-contráctil.

b) Para algún $K \geq 1$, tenemos una b-homotopía

$$\rho_K \approx C_{x_0} : S(X, K) \longrightarrow X$$

de la k -ésima proyección canónica a la aplicación constante en x_0 .

Demostración. En primer lugar, veamos que a) implica b). Suponemos que X es sb-homotópicamente equivalente a un punto $\{y_0 = (y_1, \dots, y_n)\} \subseteq \mathbb{Z}^n$. Por un lado, De la Definición 1.25, tenemos que existen aplicaciones digitales basadas

$$S(X, kl) \xrightarrow{F} S(\{y_0\}, l) \xrightarrow{g} X$$

para algún k, l con $g \circ F$ sb-homotopa a la identidad $id_X : X \longrightarrow X$. Es decir, podemos encontrar una b-homotopía

$$g \circ F \circ \rho_m \approx \rho_K : S(X, K) \longrightarrow X$$

donde $K = mkl$. Por otro lado, $S(\{y_0\}, l)$ es b-contráctil, ya que es un cubo en \mathbb{Z}^n . En efecto, supongamos que $T : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ es la traslación del cubo estándar $(I_l)^n$ a $S(\{y_0\}, l)$, es decir, $T(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + ly_1, \dots, x_n + ly_n)$ para cada $(x_1, \dots, x_n) \in (I_l)^n$. Obsérvese que las aplicaciones T, T^{-1} son digitales y recordemos que demostramos que el cubo estándar era b-contráctil en el Corolario 1.2. Si $\bar{y}_0 \in S(\{y_0\}, l)$ es el punto base que hemos establecido por convenio y $b_0 = T^{-1}(\bar{y}_0)$ el punto base en $(I_l)^n$, entonces la composición

$$S(\{y_0\}, l) \times I_l \xrightarrow{T^{-1} \times id_{I_l}} (I_l)^n \times I_l \xrightarrow{H} (I_l)^n \xrightarrow{T} S(\{y_0\}, l)$$

es una b-homotopía de $id : S(\{y_0\}, l) \longrightarrow S(\{y_0\}, l)$ a $C_{\bar{y}_0} : S(\{y_0\}, l) \longrightarrow S(\{y_0\}, l)$ la aplicación constante en \bar{y}_0 , ya que H es la homotopía del Corolario 1.2. Como ser “b-homótopo” es relación de equivalencia y por el Lema 1.6, se tiene que

$$\begin{aligned} \rho_K &\approx g \circ F \circ \rho_m \\ &\approx g \circ id_{S(\{y_0\}, l)} \circ F \circ \rho_m \\ &\approx g \circ C_{\bar{y}_0} \circ F \circ \rho_m = C_{x_0} : S(X, K) \longrightarrow X. \end{aligned}$$

Ahora, veamos que **b)** implica **a)**. Dado el K y la b -homotopía podemos tomar $Y = \{x_0\}$, $k = 1$ y $l = K$. Entonces, $f : X \rightarrow Y = \{x_0\}$ y $g : S(Y, K) = S(\{x_0\}, K) \rightarrow X$ son la aplicación constante en $x_0 \in X$. Como recubridores de f y g , podemos tomar $F : S(X, K) \rightarrow S(Y, K) = S(\{x_0\}, K)$ la aplicación constante en $\bar{x}_0 \in S(\{x_0\}, K)$ y $G = g$, ya que $\rho_k = id_X$. Entonces, tenemos los diagramas de 1.25 de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} S(X, K) & \xrightarrow{F} & S(\{x_0\}, K) & S(\{x_0\}, K) & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow \rho_K & & \downarrow \rho_K & \downarrow id_{S(\{x_0\}, K)} & & \downarrow id_X \\ X & \xrightarrow{f} & \{x_0\} & S(\{x_0\}, K) & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

Asimismo, tenemos que $f \circ G = f \circ g = \rho_K$ que es sb -homótopa a $id_{\{x_0\}}$ y $g \circ F$ que es b -homótopa a ρ_K y por lo tanto, sb -homótopa a id_X . Finalmente, ya tendríamos todos los requisitos necesarios para la Definición 1.25. \square

Ejemplo 1.11. Sea $E = I_2 \times I_4 \times I_2 \subseteq \mathbb{Z}^3$, se define su **frontera**

$$\begin{aligned} \delta E &= \{(x_1, x_2, x_3) \in E \mid x_1 \in \{0, 2\}\} \\ &\cup \{(x_1, x_2, x_3) \in E \mid x_2 \in \{0, 4\}\} \\ &\cup \{(x_1, x_2, x_3) \in E \mid x_3 \in \{0, 2\}\} \end{aligned}$$

y el conjunto $X = \delta E \setminus \{(1, 2, 2)\}$. Para una representación gráfica de estos conjuntos véase la Figura 1.8. Obsérvese que E puede verse como una versión digital de un 3-bola cerrada, δE como una versión digital de una 2-esfera y X como una 2-esfera sin el polo norte. En la topología tradicional, X sería contráctil, pero se verá que no lo es con la versión digital que se ha definido. Sin embargo, sí sería sb -contráctil.

Suponemos que $H : X \times I_N \rightarrow X$ es una homotopía que comienza en la identidad id_X . Sea $t \in I_N$ tal que $H(x, t) = x$ para $x \in \{(1, 1, 2), (2, 2, 2), (1, 3, 2), (0, 2, 2)\}$ el conjunto de puntos que rodean el agujero de la cara superior. En el siguiente paso de la homotopía, necesariamente

$$H((1, 1, 2), t+1) \sim_X H(x, t) = x$$

para cada $x \in \{(1, 1, 2), (2, 2, 2), (0, 2, 2)\}$. Solo existiría un punto que verifique tal propiedad y consiste en $H((1, 1, 2), t+1) = (1, 1, 2)$. Se deduce así que cualquier homotopía empezando en la identidad debe permanecer estacionaria en cada uno de los cuatro puntos rodeando el agujero, pues podemos repetir este razonamiento para cada uno de los puntos del conjunto propuesto anteriormente. Con lo cual, X no es b -contráctil.

Sin embargo, X es sb -contráctil. En efecto, demostraremos que existe b -homotopía

$$\rho_3 \approx \mathcal{C}_{x_0} : S(X, 3) \rightarrow X.$$

En primer lugar, describiremos una b -homotopía que permitirá que las caras superiores de $S(X, 3)$ se deformen a los lados de X . Nótese que por cada punto $(x_1, x_2, 2) \in X$, la subdivisión $S(X, 3)$ contendrá un cubo $3 \times 3 \times 3$ con 27 puntos. Estos puntos tendrán coordenadas de la forma (x'_1, x'_2, z) para $z = 6, 7, 8$.

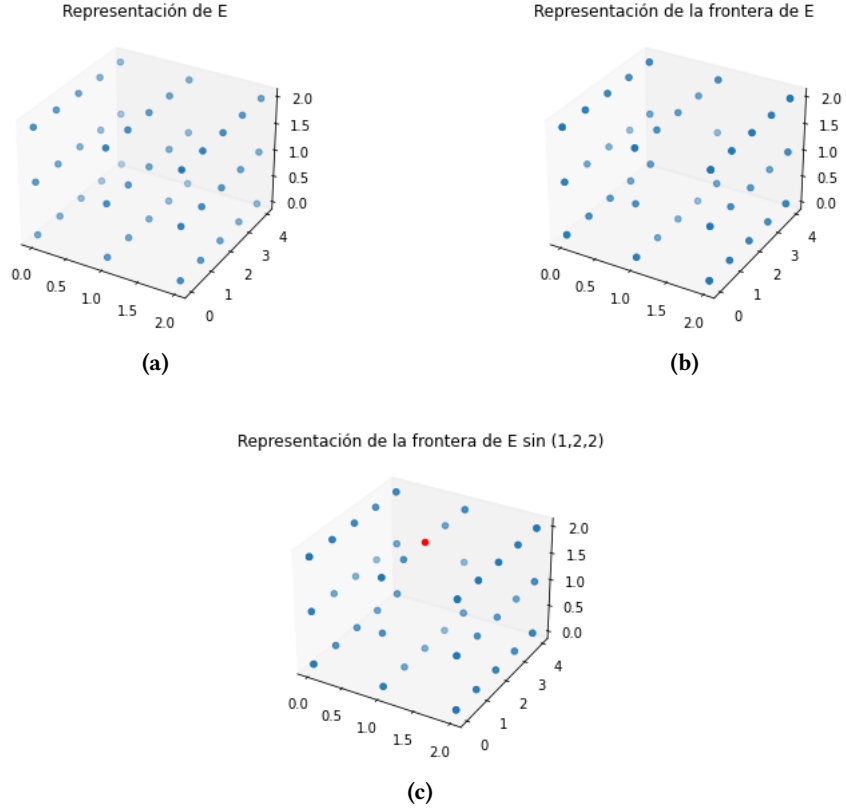


Figura 1.8: Representación de E , δE y $\delta E \setminus \{(1, 2, 2)\}$ del Ejemplo 1.11

Así, el primer paso consistirá en comprimir estas nuevas capas superiores a una sola usando la siguiente b -homotopía

$$H_1 : S(X, 3) \times I_2 \longrightarrow S(X, 3)$$

que comienza en la identidad $id_{S(X,3)}$ y es estacionaria en todos los puntos de $S(X, 3)$ salvo los que tengan por última coordenada un 7 u 8. Para esos puntos, se tiene que $H_1((x'_1, x'_2, z), 1) = (x'_1, x'_2, 7)$ y $H_1((x'_1, x'_2, z), 2) = (x'_1, x'_2, 6)$.

Ahora, trabajaremos con el subconjunto de $S(X, 3)$ de aquellos puntos cuya tercera coordenada es igual a 6. Denotamos a este subconjunto por $S(X, 3)_6$ representado en la Figura 1.9 con una serie de anotaciones que explicaremos a continuación. El efecto de $\rho_3 : S(X, 3) \longrightarrow X$ consiste en mapear cada cuadrado 3×3 de 9 puntos al punto de X señalado. Sin embargo, hay dos cuadrados 3×3 que se desean mapear de manera distinta. Son los puntos correspondientes a $S((1, 1, 2), 3)$ y $S((1, 3, 2), 3)$. Para ello, usaremos una b -homotopía $H_2 : S(X, 3)_6 \times I_1 \longrightarrow X$ que comienza en ρ_3 restringida a $S(X, 3)_6$, es estacionaria en $S(X, 3)_6 - (S((1, 1, 2), 3) \cup S((1, 3, 2), 3))$ y en los puntos del subconjunto $S((1, 3, 2), 3) \cup S((1, 1, 2), 3)$ se envían a los señalados.

Combinando H_1 y H_2 obtenemos una b -homotopía $H : S(X, 3) \times I_3 \longrightarrow X$ dada por

$$H(x', t) := \begin{cases} (\rho_3 \circ H_1)(x', t) & t = 0, 1, 2 \\ H_2(H_1(x', 2), t - 2) & t = 2, 3 \end{cases}$$

para cada $x' \in S(X, 3)$ y $t \in I_3$. Con H una b -homotopía que permite que la cara superior de $S(X, 3)$ se deforme a los lados de X y su cara inferior. Desde aquí, podemos continuar deformando la aplicación desde las caras laterales de X hacia su base y de aquí, hacia un punto. Se deduce que X sería b -contráctil.

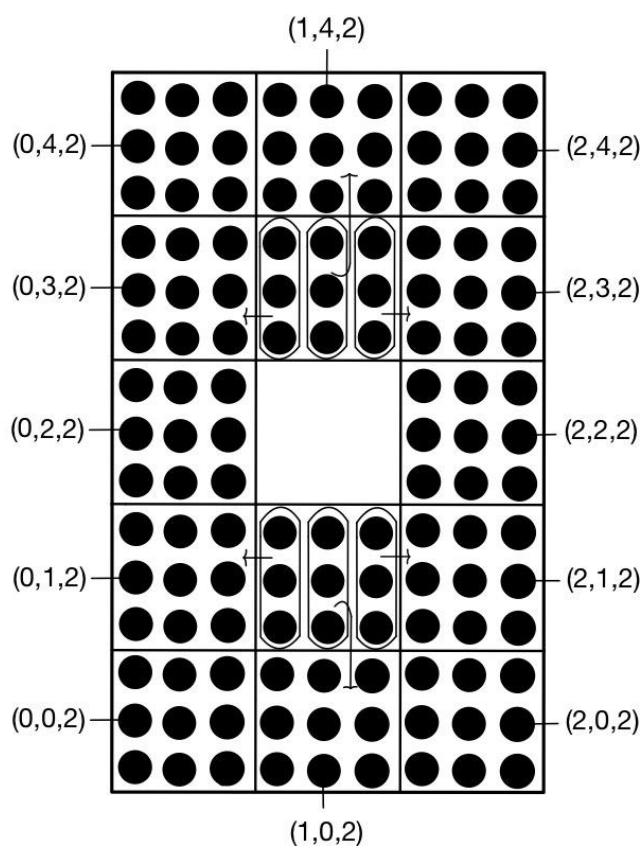


Figura 1.9: $S(X, 3)_6$ junto a los puntos a los que son enviados a través de H_2 .

La combinación de la subdivisión en una imagen digital y su proyección, otorga gran flexibilidad a la hora de deformar una aplicación.

Elementos de homotopía digital

Tras introducir la noción de imagen digital en el Capítulo 1, el presente capítulo tiene por objetivo construir algunos conceptos típicos de topología algebraica, en particular de la teoría de homotopía, en el plano digital.

Al igual que el anterior capítulo, se encuentra dividido en tres secciones. En primer lugar, se introduce la idea de cofibración digital, cuya definición se basa en que la inclusión del punto 0 en cualquier intervalo sea una cofibración, en el sentido que exista una aplicación que genere dos triángulos conmutativos en un diagrama. Luego, ante la gran dificultad de encontrar una definición de fibración digital, se aportará una propiedad de elevación de homotopías motivada por el hecho que las aplicaciones evaluación la tengan, teniendo así una fibración de caminos. Finalmente, se realiza un tratamiento preliminar de la categoría de Lusternik-Schnirelmann en topología digital, adaptando el recubrimiento por abiertos contráctiles y probando que es un invariante homotópico para las imágenes digitales en dos dimensiones.

Si el lector desea ahondar más en las ideas y conclusiones expuestas en este capítulo, se remite a [31], [28], [17] y [13].

2.1. Cofibración digital

El objetivo principal de esta sección es definir qué consiste una cofibración en topología digital y presentar algunos ejemplos. En topología algebraica, una aplicación continua $j : A \rightarrow X$ es una cofibración cuando para cualquier espacio topológico Y , si se tiene el siguiente diagrama conmutativo de aplicaciones continuas

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{H} & Y^I \\ j \downarrow & & \downarrow ev_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

se puede encontrar una aplicación $\tilde{H} : X \rightarrow Y^I$ continua tal que

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{H} & Y^I \\ j \downarrow & \nearrow \bar{H} & \downarrow ev_0 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

el diagrama es conmutativo. En otras palabras, la homotopía $H : A \rightarrow Y^I$ se extiende a una homotopía $\bar{H} : X \rightarrow Y^I$.

Si se intenta replicar esta definición con imágenes digitales, muchas inclusiones no cumplirían esta definición, como se demuestra en el Ejemplo 2.1.

Ejemplo 2.1. Consideramos $A = \{0\}$, $X = I_2$, $Y = I_3$ y j la inclusión. Asimismo, definimos las aplicaciones $f : X \rightarrow Y$ y $H : A \rightarrow P_1Y$ dadas por

$$f(k) = k + 1, \quad H(0)(l) = 1 - l$$

para cada $k \in I_2$ y $l \in I_1$, que son claramente digitales. Así, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \xrightarrow{H} & P_1I_3 \\ j \downarrow & & \downarrow ev_0 \\ I_2 & \xrightarrow{f} & I_3 \end{array}$$

Suponemos que existe $\bar{H} : I_2 \rightarrow P_1I_3$ pseudo-digital tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \xrightarrow{H} & P_1I_3 \\ j \downarrow & \nearrow \bar{H} & \downarrow ev_0 \\ I_2 & \xrightarrow{f} & I_3 \end{array}$$

Así, su adjunto $\hat{H} : I_2 \times I_1 \rightarrow I_3$ verifica que

$$\hat{H}(k, 0) = \bar{H}(k)(0) = f(k) = k + 1 \quad \text{y} \quad \hat{H}(0, l) = \bar{H}(0)(l) = 1 - l,$$

para cada $k \in I_2$ y $l \in I_1$. Como $(1, 1) \sim_{I_2 \times I_1} (0, 1)$ y $(1, 1) \sim_{I_2 \times I_1} (2, 0)$ se tiene que

$$\hat{H}(1, 1) \sim_{I_3} \hat{H}(0, 1) = 0 \quad \text{y} \quad \hat{H}(1, 1) \sim_{I_3} \hat{H}(2, 0) = 3.$$

Lo que es absurdo, pues no podemos encontrar elemento en I_3 que sea adyacente a 0 y a 3.

La definición que se aportará de **cofibración digital** está motivada por el deseo que una inclusión cualquiera $\{0\} \hookrightarrow I_M$, lo sea. Antes de presentarla, se comentarán algunos detalles que deben ser tenidos en cuenta.

En primer lugar, es sencillo de ver que dada una **inclusión de imágenes digitales** $j : A \hookrightarrow X \subseteq \mathbb{Z}^n$ y $k \geq 1$, se puede encontrar una inclusión de subdivisiones

$$S(j, k) : S(A, k) \hookrightarrow S(X, k)$$

tal que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 S(A, k) & \xrightarrow{S(j, k)} & S(X, k) \\
 \rho_k \downarrow & & \downarrow \rho_k \\
 A & \xrightarrow{j} & X
 \end{array}$$

conmuta. Así, si $a' \in S(A, k)$, entonces se puede encontrar $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ tal que

$$a' = (ka_1 + t_1, \dots, ka_n + t_n)$$

donde $(t_1, \dots, t_n) \in (I_{k-1})^n$. De esta manera, $S(j, k)$ puede ser definida como

$$S(j, k)(a') = S(j, k)(ka_1 + t_1, \dots, ka_n + t_n) = k \cdot j(a_1, \dots, a_n) + (t_1, \dots, t_n),$$

donde $j(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_n)$. Nótese que \cdot y $+$, representan el producto de un escalar por un vector y la suma elemento a elemento, respectivamente.

Ahora, se supone que se tiene un cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{H} & P_N Y \\
 j \downarrow & & \downarrow ev_0 \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array} \quad (2.1)$$

donde $j : A \hookrightarrow X$ es una inclusión de imágenes digitales, $N \geq 0$, f aplicación digital y H pseudo-digital. Entonces para cada $k, l \geq 1$, se puede extender el diagrama anterior de la forma

$$\begin{array}{ccccccc}
 S(A, k) & \xrightarrow{\rho_k} & A & \xrightarrow{H} & P_N Y & \xrightarrow{(p_l)^*} & D(S(I_N, l), Y) = P_{lN+l-1} Y \\
 S(j, k) \downarrow & & \downarrow j & & \downarrow ev_0 & \swarrow ev_0 & \\
 S(X, k) & \xrightarrow{\rho_k} & X & \xrightarrow{f} & Y & &
 \end{array} \quad (2.2)$$

Nótese que $(p_l)^*$ es la aplicación inducida de $p_l : S(I_N, l) = I_{lN+l-1} \longrightarrow I_N$. Es decir,

$$(p_l)^* : D(I_N, Y) = P_N Y \longrightarrow D(I_{lN+l-1}, Y) = P_{lN+l-1} Y.$$

Es directo comprobar la conmutatividad de todos los subdiagramas de 2.2, ya que esta se hereda de la conmutatividad del diagrama 2.1 y de la naturaleza de cada aplicación implicada.

Definición 2.1. Se dice que una inclusión de imágenes digitales $j : A \hookrightarrow X \subseteq Z^n$ es una **cofibración digital** si dado un diagrama de la forma 2.1 podemos encontrar $k \geq 1, l \geq 2$ y una aplicación pseudo-digital $\bar{H} : S(X, k) \longrightarrow P_{lN+l-1} Y$ en el diagrama 2.2, haciendo conmutativo el siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc}
 S(A, k) & \xrightarrow{\rho_k} & A & \xrightarrow{H} & P_N Y & \xrightarrow{(p_l)^*} & D(S(I_N, l), Y) = P_{lN+l-1} Y \\
 S(j, k) \downarrow & & \downarrow j & & \downarrow ev_0 & \swarrow ev_0 & \\
 S(X, k) & \xrightarrow{\rho_k} & X & \xrightarrow{f} & Y & &
 \end{array} \quad (2.3)$$

En otras palabras, $\bar{H} \circ S(j, k) = (p_l)^* \circ H \circ \rho_k$ y $ev_0 \circ \bar{H} = f \circ \rho_k$.

A continuación, se muestra la versión digital de un conocido pushout en topología y por qué no se puede usar de la misma manera en el ámbito digital.

Sea $A \subseteq X$ un subespacio topológico cerrado e $i_0 : A \hookrightarrow A \times I$, $i_0 : X \hookrightarrow (A \times I) \cup (X \times \{0\})$ las inclusiones tales que $i_0(a) = (a, 0)$ y $i_0(x) = (x, 0)$, para cada $a \in A$, $x \in X$. Entonces, es sabido que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_0} & A \times I \\ j \downarrow & & \downarrow j \times id \\ X & \xrightarrow{i_0} & (A \times I) \cup (X \times \{0\}) \end{array}$$

es un pushout. Es decir, dadas $H : A \times I \rightarrow Y$ y $f : X \rightarrow Y$ aplicaciones continuas tales que $H|_{A \times I} \circ i_0 = f \circ j : A \rightarrow Y$, existe una única aplicación continua $\phi : (A \times I) \cup (X \times \{0\}) \rightarrow Y$ haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_0} & A \times I \\ j \downarrow & & \downarrow j \times id \\ X & \xrightarrow{i_0} & (A \times I) \cup (X \times \{0\}) \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{H} \\ \xrightarrow{\phi} \\ \xrightarrow{f} \end{array} Y$$

La única candidata posible es aquella dada por

$$\phi(x, t) = \begin{cases} f(x) & (x, t) \in X \times \{0\} \\ H(x, t) & (x, t) \in A \times I \end{cases}$$

que al ser A cerrado se demuestra fácilmente que es continua.

Ahora, en el Ejemplo 2.2 se demuestra por qué hay que refinar esta definición antes de extenderla al plano digital, ya que fallaría en algunos casos.

Ejemplo 2.2. Sean D el diamante y $\alpha, \beta : I_1 \rightarrow D$ caminos dados por

$$\alpha(0) = (1, 0), \alpha(1) = (0, 1), \beta(0) = (1, 0) \text{ y } \beta(1) = (0, -1).$$

Si $j : \{0\} \hookrightarrow I_1$ es la inclusión y $H : \{0\} \times I_1 \rightarrow D$ dado por $H(0, k) = \alpha(k)$ para $k \in I_1$, entonces se tiene un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \xrightarrow{i_0} & \{0\} \times I_1 \\ j \downarrow & & \downarrow H \\ I_1 & \xrightarrow{\beta} & D \end{array}$$

Suponemos que existe ϕ haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \{0\} & \xrightarrow{i_0} & \{0\} \times I_1 \\
 j \downarrow & & j \times id_{I_1} \downarrow \\
 I_1 & \xrightarrow{i_0} & (\{0\} \times I_1) \cup (I_1 \times \{0\}) \\
 & & \searrow \phi \\
 & & D
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \curvearrowright H \\
 \curvearrowright \beta
 \end{array}$$

Entonces, se verifica que $(0, -1) = \beta(1) = \phi(1, 0) \sim_D \phi(0, 1) = H(0, 1) = \alpha(1) = (0, 1)$, ya que $(1, 0) \sim_{Z^2} (0, 1)$, lo que es absurdo.

Se presenta una aproximación del pushout anterior en el plano digital.

Lema 2.1. Sean $j : A \hookrightarrow X \subseteq Z^n$ e $i_0 : A \hookrightarrow A \times I_N$, la inclusión de imágenes digitales trivial y la inclusión de A en $A \times I_N$ ($i_0(a) = (a, 0)$, para cada $a \in A$), respectivamente. Si $f : X \rightarrow Y$, $H : A \times I_N \rightarrow Y$ son aplicaciones digitales y se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i_0} & A \times I_N \\
 j \downarrow & & \downarrow H \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

entonces para cada $l \geq 2$ existe una única ϕ aplicación digital haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i_0} & A \times S(I_N, l) \\
 j \downarrow & & \text{incl.} \downarrow \\
 X & \xrightarrow{i_0} & (A \times S(I_N, l)) \cup (X \times \{0\}) \\
 & & \searrow \phi \\
 & & Y
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \curvearrowright H \circ (id_A \times \rho_l) \\
 \curvearrowright f
 \end{array}$$

Demostración. El único candidato posible consiste en la aplicación

$$\phi : (A \times S(I_N, l)) \cup (X \times \{0\}) \rightarrow Y$$

dada por

$$\phi(x, t) := \begin{cases} f(x) & (x, t) \in X \times \{0\} \\ (H \circ (id_A \times \rho_l))(x, t) & (x, t) \in A \times S(I_N, l) \end{cases}$$

Resta ver que es digital. El único conflicto posible de digitalidad se encuentra cuando tenemos dos puntos adyacentes donde uno pertenece $A \times S(I_N, l) \setminus i_0(A)$ y el otro a $X \times \{0\} \setminus i_0(A)$. Sean $(a, i') \in A \times S(I_N, l) - i_0(A)$ y $(x, 0) \in X \times \{0\} - i_0(A)$ tales que

$$(a, i') \sim_{Z^{n+1}} (x, 0).$$

Entonces, necesariamente $a \sim_X x$ e $i' = 1$. Se deduce que

$$\phi(a, i') = \phi(a, 1) = (H \circ (id_A \times \rho_l))(a, 1) = H(a, 0) = f(a) \sim_Y f(x) = \phi(x, 0).$$

Y por tanto, ϕ es digital. □

Asimismo, en topología, si $j : A \hookrightarrow X$ es una inclusión de un subespacio cerrado, entonces j es cofibración si, y solo si, $(A \times I) \cup (X \times \{0\})$ es un retracto de $X \times I$. Motivados por esta idea, se obtiene la siguiente caracterización.

Proposición 2.1. *Sea $j : A \hookrightarrow X \subseteq Z^n$ una inclusión de imágenes digitales. Son equivalentes:*

a) j es cofibración digital.

b) Para cada I_N , existen subdivisiones $S(X, k)$ y $S(I_N, l)$ con $l \geq 2$ y

$$R : S(X, k) \times S(I_N, l) \longrightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times S(I_N, l))$$

aplicación digital tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (S(X, k) \times \{0\}) \cup (S(A, k) \times S(I_N, l)) & \xleftarrow{\text{incl.}} & S(X, k) \times S(I_N, l) \\ & \searrow_{\rho_k \times \rho_m} & \downarrow R \\ & & (X \times \{0\}) \cup (A \times S(I_N, l)) \end{array} \quad (2.4)$$

conmuta para una subdivisión $S(I_N, l) \cong S(S(I_N, l), m)$ de $S(I_N, l)$. Nótese que incl es aquella aplicación tal que

$$\text{incl}|_{S(A, k) \times S(I_N, l)} = S(j, k) \times id_{S(I_N, l)} \quad \text{e} \quad \text{incl}|_{S(X, k) \times \{0\}} = id_{S(X, k) \times \{0\}} \times i,$$

donde $i : \{0\} \hookrightarrow S(I_N, l)$ indica la inclusión trivial.

Demostración. En primer lugar, veamos que **a**) implica **b**). Sean I_N y $l \geq 2$. Escribimos el adjunto de la inclusión $A \times S(I_N, l) \hookrightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times S(I_N, l))$ como

$$H : A \longrightarrow P_M((X \times \{0\}) \cup (A \times (S(I_N, l))))$$

donde $M = Nl + l - 1$. Así, $H(a)(t') = (a, t')$, para cada $a \in A$ y $t' \in S(I_N, l) = I_M$. De esta manera, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{H} & P_M((X \times \{0\}) \cup (A \times (S(I_N, l)))) \\ j \downarrow & & \downarrow \text{ev}_0 \\ X & \xrightarrow{i_0} & (X \times \{0\}) \cup (A \times S(I_N, l)) \end{array}$$

Por la Definición 2.1, podemos encontrar subdivisiones $S(X, k)$, $S(I_M, m) = I_{mM+m-1}$ y \bar{H} tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 S(A, k) & \xrightarrow{\rho_k} & A & \xrightarrow{H} & P_M((X \times \{0\}) \cup (A \times (S(I_N, l)))) & \xrightarrow{(p_m)^*} & P_{mM+m-1}((X \times \{0\}) \cup (A \times (S(I_N, l)))) \\
 S(j, k) \downarrow & & \downarrow j & & \downarrow \bar{H} & \dashrightarrow & \downarrow ev_0 \\
 S(X, k) & \xrightarrow{\rho_k} & X & \xrightarrow{i_0} & (X \times \{0\}) \cup (A \times (S(I_N, l))) & & \xleftarrow{ev_0}
 \end{array}
 \tag{2.5}$$

Al adjunto de \bar{H} lo llamamos

$$R : S(X, k) \times S(I_M, m) \longrightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times S(I_N, l)).$$

Así $R(x', t'') = \bar{H}(x')(t'')$, para $x' \in S(X, k)$, $t'' \in S(I_M, m)$ y es digital. Resta ver que se verifica el diagrama 2.5.

Si $(a', t'') \in S(A, k) \times S(S(I_N, l), m) = S(A, k) \times S(I_N, lm)$, tenemos que

$$R \circ incl(a', t'') = \bar{H}(S(j, k)(a'))(t'') = H(\rho_k(a'))(\rho_m(t'')) = (\rho_k(a'), \rho_m(t'')) = (\rho_k \times \rho_m)(a', t'').$$

Si $(x', 0) \in S(X, k) \times \{0\}$, entonces

$$R \circ incl(x', 0) = \bar{H}(x')(0) = i_0 \circ \rho_k(x') = (\rho_k(x'), 0) = (\rho_k \times \rho_m)(x', 0).$$

Finalmente, se deduce que el diagrama conmuta. Ahora, veamos que **b**) implica **a**). Suponemos que tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{H} & P_N Y \\
 j \downarrow & & \downarrow ev_0 \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

Consideramos el adjunto de H , $\hat{H} : A \times I_N \longrightarrow Y$, dado por $\hat{H}(a, t) = H(a)(t)$. Además la aplicación f , podemos identificarla con la aplicación $f : X \times \{0\} \longrightarrow Y$ dada por $f(x, 0) = f(x)$ y que coincide con \hat{H} en $A \times \{0\}$. Entonces, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{i_0} & A \times I_N \\
 j \downarrow & & \downarrow \hat{H} \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

y por el Lema 2.1, para cada $l \geq 2$, existe ϕ aplicación digital haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xleftarrow{i_0} & A \times S(I_N, l) \\
 j \downarrow & & \text{incl.} \downarrow \\
 X & \xleftarrow{i_0} & (A \times S(I_N, l)) \cup (X \times \{0\}) \\
 & \searrow f & \swarrow \phi \\
 & & Y
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \curvearrowright \hat{H} \circ (id_A \times \rho_l) \\
 \curvearrowright
 \end{array}$$

Asimismo, por hipótesis, podemos encontrar subdivisiones $S(X, k)$ y $S(I_N, l)$ con $l \geq 2$ y $R : S(X, k) \times S(I_N, lm) \rightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times S(I_N, l))$ que verifica 2.4. Ahora, definimos

$$\mathcal{H} := \phi \circ R : S(X, k) \times S(I_N, lm) \rightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times S(I_N, l)) \rightarrow Y.$$

Tomando el adjunto $\hat{\mathcal{H}}$ de \mathcal{H} (claramente pseudo-digital), comprobemos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 S(A, k) & \xrightarrow{\rho_k} & A & \xrightarrow{H} & P_N Y & \xrightarrow{(p_{lm})^*} & D(S(I_N, lm), Y) \\
 S(j, k) \downarrow & & \downarrow j & \hat{\mathcal{H}} \swarrow & \downarrow \text{ev}_0 & \nearrow \text{ev}_0 & \\
 S(X, k) & \xrightarrow{\rho_k} & X & \xrightarrow{f} & Y & &
 \end{array}$$

y por tanto, $\hat{\mathcal{H}} = \bar{H}$. En primer lugar, comprobemos el triángulo superior. Si $(a', t'') \in S(A, k) \times S(I_N, lm)$,

$$\begin{aligned}
 (\hat{\mathcal{H}} \circ S(j, k))(a')(t'') &= (\phi \circ R)(S(j, k)(a'), t'') = (\phi \circ R \circ (S(j, k) \times id_{S(I_N, lm)}))(a', t'') \\
 &= (\phi \circ (\rho_k \times \rho_m))(a', t'') = \phi(\rho_k(a'), \rho_m(t'')) \\
 &= (\hat{H} \circ (id_A \times \rho_l))(\rho_k(a'), \rho_m(t'')) \\
 &= H(\rho_k(a'))(\rho_{lm}(t'')) = ((\rho_{lm})^* \circ H \circ \rho_k)(a')(t'').
 \end{aligned}$$

Ahora, comprobemos el triángulo inferior. Si $(x', 0) \in S(X, k) \times \{0\}$, entonces

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{H}}(x')(0) &= (\phi \circ R)(x', 0) = (\phi \circ R \circ (id_{S(X, k) \times \{0\}} \times i))(x', 0) \\
 &= (\phi \circ (\rho_k \times \rho_m))(x', 0) = \phi(\rho_k(x'), 0) = f \circ \rho_k(x').
 \end{aligned}$$

Finalmente, se deduce que el diagrama conmuta. \square

Esta caracterización permite demostrar el principal resultado del capítulo.

Teorema 2.1. Si $j : \{0\} \hookrightarrow I_M$ es la inclusión, entonces es una cofibración digital.

Demostración. Por la Proposición 2.1, para cada I_N basta encontrar subdivisiones $S(I_M, k)$ y $S(I_N, l)$ con $l \geq 2$ y R “retracción” de $\phi : (I_M \times \{0\}) \cup (\{0\} \times S(I_N, l)) \rightarrow I_M \times I_N$ tal que $R : S(I_M, k) \times S(I_N, lm) \rightarrow (I_M \times \{0\}) \cup (\{0\} \times S(I_N, l))$ y verifique 2.4.

Podemos considerar $k = l = m = 2$ y construir

$$R : \underset{(I_{2M+1})}{S(I_M, 2)} \times \underset{(I_{4N+3})}{S(I_N, 4)} \longrightarrow \underset{(I_{2N+1})}{(I_M \times \{0\}) \cup (\{0\} \times S(I_N, 2))}.$$

Visualmente queremos retraer un rectángulo a sus aristas inferior y lateral izquierda, tal y como se representa en la Figura 2.1. Así que efectuaremos los siguientes pasos:

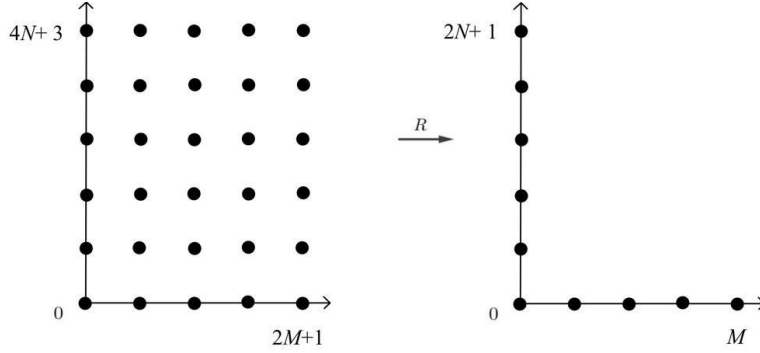


Figura 2.1: Retracción que se quiere conseguir en el Teorema 2.1.

1. Retraer $I_{2M+1} \times I_{4N+3}$ sobre $(\{0, 1\} \times I_{4N+3}) \cup (I_{2M+1} \times \{0\})$.
2. Con las proyecciones canónicas $\rho_2 \times \rho_2$ pasar de $(\{0, 1\} \times I_{4N+3}) \cup (I_{2M+1} \times \{0\})$ a $(I_M \times \{0\}) \cup (\{0\} \times I_{2N+1})$.

En primer lugar, definimos una correspondencia

$$\varphi : I_{2M+1} \times I_{4N+3} \longrightarrow (\{0, 1\} \times I_{4N+3}) \cup (I_{2M+1} \times \{0\})$$

dada por

$$\varphi(p, q) := \begin{cases} (p, q) & p \leq 1 \\ (1, q - (p - 1)) & p \geq 1 \text{ y } q \geq p - 1 \\ (p - q, 0) & p \geq 1 \text{ y } q \leq p - 1 \end{cases}$$

Veamos que está bien definida. Para ello, hay que ver que las subcorrespondencias “pegan” bien y para cada $(p, q) \in I_{2M+1} \times I_{4N+3}$, $\varphi(p, q) \in (\{0, 1\} \times I_{4N+3}) \cup (I_{2M+1} \times \{0\})$.

Sea $(p, q) \in I_{2M+1} \times I_{4N+3}$. En primer lugar, veamos que las subcorrespondencias coinciden en las respectivas intersecciones:

- i) Si $p = 1$ y $q \geq p - 1$. En este caso, $(p, q) = (1, q) = (1, q - (p - 1))$.
- ii) Si $p = 1$ y $q \leq p - 1$. En este caso, $q = 0$ y por lo tanto, $(p, q) = (p - q, 0)$.
- iii) $p \geq 1$ y $q = p - 1$. En este caso, $(1, q - (p - 1)) = (1, 0) = (p - q, 0)$.

Ahora, que $\varphi(p, q) \in (\{0, 1\} \times I_{4N+3}) \cup (I_{2M+1} \times \{0\})$. Puede ocurrir:

i) $p \leq 1$. En este caso,

$$\varphi(p, q) = (p, q) \in \{0, 1\} \times I_{4N+3} \subseteq (\{0, 1\} \times I_{4N+3}) \cup (I_{2M+1} \times \{0\}).$$

ii) $p \geq 1$ y $q \geq p - 1$. En este caso,

$$\varphi(p, q) = (1, q - (p - 1)) \in \{0, 1\} \times I_{4N+3} \subseteq (\{0, 1\} \times I_{4N+3}) \cup (I_{2M+1} \times \{0\}).$$

iii) $p \geq 1$ y $q \leq p - 1$. En este caso,

$$\varphi(p, q) = (p - q, 0) \in I_{2M+1} \times \{0\} \subseteq (\{0, 1\} \times I_{4N+3}) \cup (I_{2M+1} \times \{0\}).$$

Entonces, φ está bien definida. Una vez definida φ , definimos

$$R = (\rho_2 \times \rho_2) \circ \varphi : I_{2M+1} \times I_{4N+3} \longrightarrow (\{0, 1\} \times I_{4N+3}) \cup (I_{2M+1} \times \{0\}) \longrightarrow (\{0\} \times S(I_N, 2)) \cup (I_M \times \{0\})$$

dada por

$$R(p, q) := \begin{cases} (0, \rho_2(q)) & p \leq 1 \\ (0, \rho_2(q - p + 1)) & p \geq 1 \text{ y } q \geq p - 1 \\ (\rho_2(p - q), 0) & p \geq 1 \text{ y } q \leq p - 1 \end{cases}$$

donde

$$\rho_2 : I_{4N+3} \longrightarrow S(I_N, 2) \text{ y } \rho_2 : S(I_M, 2) \longrightarrow I_M$$

son las proyecciones canónicas y por lo tanto, $\rho_2(2i) = i$ y $\rho_2(2i + 1) = i$ para cada $i \geq 0$.

Veamos que R es digital. Para facilitar la legibilidad, denotamos

$$S := S(I_M, 2) \times S(I_N, 4) \text{ y } A := (\{0\} \times S(I_N, 2)) \cup (I_M \times \{0\}).$$

Sean $(a, b), (x, y) \in S$ tales que $(a, b) \sim_S (x, y)$. De lo que se deduce que,

$$(x, y) \in \{a, a \pm 1\} \times \{b, b \pm 1\}$$

y así,

$$b - a - 2 \leq y - x \leq b - a + 2. \quad (2.6)$$

Veamos que $R(a, b) \sim_A R(x, y)$. Puede ocurrir uno de los siguientes casos: $b - a \geq 1$, $-1 \leq b - a \leq 0$ y $b - a \leq -2$.

Primeramente, suponemos que $b - a \geq 1$. Puede ocurrir que:

i) $a \geq 2$, lo que implica que $x \geq 1$. Por la Propiedad 2.6,

$$(b - a + 1) - 2 \leq y - x + 1 \leq (b - a + 1) + 2.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \rho_2((b - a + 1) - 2) \leq \rho_2(y - x + 1) \leq \rho_2((b - a + 1) + 2) \text{ sii } \left\lfloor \frac{b - a + 1}{2} - 1 \right\rfloor \leq \rho_2(y - x + 1) \leq \left\lfloor \frac{b - a + 1}{2} + 1 \right\rfloor \\ \text{sii } \left\lfloor \frac{b - a + 1}{2} \right\rfloor - 1 \leq \rho_2(y - x + 1) \leq \left\lfloor \frac{b - a + 1}{2} \right\rfloor + 1 \\ \text{sii } \rho(b - a + 1) - 1 \leq \rho_2(y - x + 1) \leq \rho(b - a + 1) + 1 \end{aligned}$$

Por ello, $R(a, b) = (0, \rho_2(b - a + 1)) \sim_A (0, \rho_2(y - x + 1)) = R(x, y)$.

ii) $a \leq 1$, lo que implica que $x \in \{0, 1, 2\}$. Como $(a, b) \sim_S (x, y)$,

$$b - 2 \leq y - 1 \leq b$$

Y por tanto, $b - 2 \leq y - 1 \leq y \leq b + 2$. Con lo cual, se tiene que

$$\rho_2(b) - 1 \leq \rho_2(y - 1) \leq \rho_2(y) \leq \rho_2(b) + 1.$$

Nótese que

$$R(a, b) = (0, \rho_2(b)) \text{ y } R(x, y) = \begin{cases} (0, \rho_2(y - x + 1)) & a = 1 \text{ y } x = 2 \\ (0, \rho_2(y)) & x \leq 1 \end{cases},$$

por lo que $R(a, b) \sim_A R(x, y)$.

Ahora, suponemos que $-1 \leq b - a \leq 0$. En este caso, $R(a, b) = (0, 0)$. Puede ocurrir que:

i) $y - x \geq b - a$, lo que implica que $-1 \leq y - x \leq 2$. Los posibles valores de $R(x, y)$ son:

$$\left\{ \underset{(0,0)}{(0, \rho_2(0))}, \underset{(0,0)}{(0, \rho_2(1))}, \underset{(0,1)}{(0, \rho_2(2))}, \underset{(0,1)}{(0, \rho_2(3))}, \underset{(0,0)}{(\rho_2(1), 0)} \right\}.$$

Todos estos valores son adyacentes a $R(a, b) = (0, 0)$.

ii) $y - x < b - a$, lo que implica que $-3 \leq y - x \leq -1$. Los posibles valores de $R(x, y)$ son:

$$\left\{ \underset{(0,0)}{(\rho_2(0), 0)}, \underset{(0,0)}{(\rho_2(1), 0)}, \underset{(1,0)}{(\rho_2(2), 0)}, \underset{(1,0)}{(\rho_2(3), 0)} \right\}.$$

Todos estos valores son adyacentes a $R(a, b) = (0, 0)$.

Por último, suponemos que $b - a \leq -2$. Puede ocurrir que:

i) $b - a \leq -3$ o $b - a = -2$ y $(x, y) \neq (a - 1, b + 1)$, lo que implicaría que $y - x \leq -1$. Como $(a - b) + 2 \geq x - y \geq (a - b) - 2$. Entonces,

$$\rho_2(a - b) + 1 \geq \rho_2(x - y) \geq \rho_2(a - b) - 1.$$

Por ello, $R(a, b) = (\rho_2(a - b), 0) \sim_A (\rho_2(x - y), 0) = R(x, y)$.

ii) $b - a = -2$ y $(x, y) = (a - 1, b + 1)$. Entonces,

$$R(a, b) = (\rho_2(2), 0) = (1, 0) \sim_A (0, 0) = (0, \rho_2(1)) = (0, \rho_2(y - x + 1)) = R(x, y).$$

Resta comprobar que R verifica el diagrama 2.4.

Por un lado, si $(a, b) \in \{0, 1\} \times I_{4N+3}$ se tiene que $\text{incl}(a, b) \in \{(0, b), (1, b)\}$ y por lo tanto, $(R \circ \text{incl})(a, b) = (0, \rho_2(b)) = (\rho_2(a), \rho_2(b)) = (\rho_2 \times \rho_2)(a, b)$.

Por otro lado, si $(a, b) \in I_{2M+1} \times \{0\}$ se tiene que $(a, b) = (a, 0)$. Puede ocurrir que:

i) $a \leq 1$ lo que implicaría que

$$(R \circ \text{incl})(a, b) = (R \circ \text{incl})(a, 0) = R(a, 0) = (0, 0) = (\rho_2(a), \rho_2(b)) = (\rho_2 \times \rho_2)(a, b).$$

ii) $a \geq 1$ lo que implicaría que

$$(R \circ \text{incl})(a, b) = R(\text{incl}(a, 0)) = R(a, 0) = (\rho_2(a), 0) = (\rho_2(a), \rho_2(b)) = (\rho_2 \times \rho_2)(a, b).$$

Por lo que R verifica el diagrama 2.4. \square

Lema 2.2. Si $j : A \hookrightarrow X$ es una cofibración digital, entonces para cualquier imagen digital Z , la inclusión $\text{id}_Z \times j : Z \times A \hookrightarrow Z \times X$ también es una cofibración digital.

Demostración. Por la Proposición 2.1, para cada I_N queremos encontrar $S(Z, k) \times S(X, k)$, $S(I_N, l)$ y R “retracción” de $\phi(S(Z, k) \times S(X, k) \cong S(Z \times X, k))$

$$R : S(Z, k) \times S(X, k) \times S(I_N, lm) \longrightarrow (Z \times X \times \{0\}) \cup (Z \times A \times S(I_N, l))$$

haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} (S(Z, k) \times S(X, k) \times \{0\}) \cup (S(Z, k) \times S(A, k) \times S(I_N, lm)) & \xleftarrow{\text{incl.}} & S(Z, k) \times S(X, k) \times S(I_N, lm) \\ & \searrow_{\rho_k \times \rho_m} & \downarrow R \\ & & (Z \times X \times \{0\}) \cup (Z \times A \times S(I_N, l)) \end{array} \quad (2.7)$$

donde $\text{incl}|_{S(Z, k) \times S(X, k) \times \{0\}} = \text{id}_{S(Z, k)} \times \text{id}_{S(X, k)} \times i$ e $\text{incl}|_{S(Z, k) \times S(A, k) \times S(I_N, lm)} = S(\text{id}_{S(Z, k)}, k) \times S(\text{id}_{S(A, k)}, k) \times \text{id}_{S(I_N, lm)}$.

Sea I_N , por la Proposición 2.1 existen subdivisiones $S(X, k)$ y $S(I_N, l)$ con $l \geq 2$ y

$$R' : S(X, k) \times S(I_N, lm) \longrightarrow (X \times \{0\}) \cup (A \times S(I_N, l))$$

aplicación digital tal que el diagrama 2.5 es conmutativo (sustituyendo R por R'). Así, tomando

$$R := \rho_k \times R' : S(Z, k) \times S(X, k) \times S(I_N, lm) \longrightarrow (Z \times X \times \{0\}) \cup (Z \times A \times S(I_N, l)),$$

llegamos a la conclusión que es la “retracción” de $\text{id}_Z \times j$ buscada y por ello, es cofibración digital. \square

Ejemplo 2.3. Por el Lema 2.2 y por el Teorema 2.1, se tiene que para cada n, M la inclusión

$$j : I_M^{n-1} \longrightarrow I_M^n$$

de imágenes digitales (una cara del n -cubo) es una cofibración digital.

Finalmente, se establece otro ejemplo básico de cofibración, el cual como se verá en la siguiente sección, conducen a ejemplos importantes de lo que podrían ser las **fibraciones digitales**.

Teorema 2.2. Si $j : \{0, M\} \hookrightarrow I_M$ es una inclusión de imágenes digitales, entonces es cofibración digital.

Demostración. Aplicaremos la Proposición 2.1 nuevamente. Es decir, para cada I_N podemos encontrar subdivisiones $S(I_M, k) = I_{Mk+k-1}$ y $S(I_N, l) = I_{Nl+l-1}$ y R retracción de ϕ tal que

$$R : S(I_M, k) \times S(I_N, lm) \longrightarrow (I_M \times \{0\}) \cup (\{0, M\} \times S(I_N, l))$$

con $l \geq 2$.

Podemos considerar $l = m = 2$ y por ende, queremos encontrar

$$R : I_{kM+k-1} \times I_{4N+3} \longrightarrow (I_M \times \{0\}) \cup (\{0, M\} \times I_{2N+1})$$

retracción de ϕ . O lo que es lo mismo, queremos retraer un rectángulo a sus aristas laterales e inferior como se visualiza en la Figura 2.2. Consideramos un rectángulo $I_{4\mathcal{K}+3} \times I_{\mathcal{K}}$ para algún $\mathcal{K} \geq 1$. Procedemos a definir una correspondencia

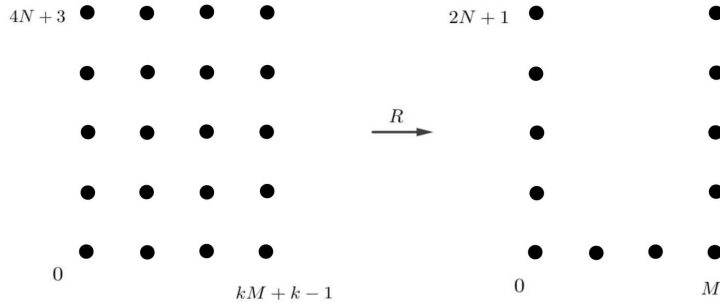


Figura 2.2: Retracción buscada en el Teorema 2.2.

$$R_{\mathcal{K}} : I_{4\mathcal{K}+3} \times I_{\mathcal{K}} \longrightarrow (I_{2\mathcal{K}+1} \times \{0\}) \cup (\{0, 2\mathcal{K}+1\} \times I_{\rho_2(\mathcal{K})})$$

y demostraremos que es aplicación digital. Dividimos el rectángulo $I_{4\mathcal{K}+3} \times I_{\mathcal{K}}$ en

$$I_{4\mathcal{K}+3} \times I_{\mathcal{K}} = (I_{2\mathcal{K}+1} \times I_{\mathcal{K}}) \cup ([2\mathcal{K}+2, 4\mathcal{K}+3] \cap \mathbb{Z} \times I_{\mathcal{K}}).$$

Describiremos $R_{\mathcal{K}}$ en el lado izquierdo del rectángulo y comprobaremos que es digital ahí. Por simetría, podríamos extender la definición a todo el rectángulo y concluiríamos que es digital en $I_{4\mathcal{K}+3} \times I_{\mathcal{K}}$. Dividimos el rectángulo $I_{2\mathcal{K}+1} \times I_{\mathcal{K}}$ en

$$I_{2\mathcal{K}+1} \times I_{\mathcal{K}} = T_1 \cup T_2 \cup \{(2k+1, j) \mid 0 \leq j \leq k\}$$

donde

$$T_1 = \{(i, j) \in I_{2\mathcal{K}+1} \times I_{\mathcal{K}} \mid 0 \leq j \leq \mathcal{K}, 0 \leq i \leq 2\mathcal{K} - j\}$$

y

$$T_2 = \{(i, j) \in I_{2\mathcal{K}+1} \times I_{\mathcal{K}} \mid 1 \leq j \leq \mathcal{K}, 2\mathcal{K} - j < i \leq 2\mathcal{K}\}.$$

En la Figura 2.3, se aprecia la división realizada en el rectángulo.

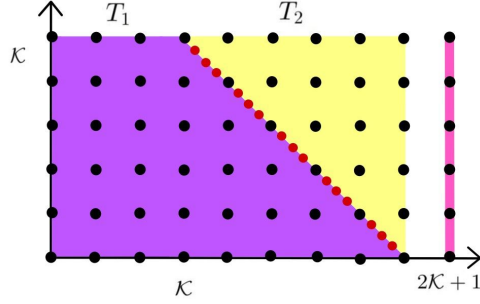


Figura 2.3: División del rectángulo $I_{2\mathcal{K}+1} \times I_{\mathcal{K}}$ en el Teorema 2.2.

Procedemos a definir $R_{\mathcal{K}}$ en el rectángulo. En primer lugar, definimos $R_{\mathcal{K}}$ en T_1 así:

$$R_{\mathcal{K}}(i, j) := \begin{cases} (0, \rho_2(j)) & i \leq 1 \\ (0, \rho_2(j - i + 1)) & 1 \leq i \leq j + 1 \\ (\rho_2(i - j), 0) & j + 1 \leq i \leq 2\mathcal{K} - j \end{cases} .$$

Ahora, definimos $R_{\mathcal{K}}$ en el intervalo $\{(2k + 1, j) \mid 0 \leq j \leq k\}$ definimos

$$R_{\mathcal{K}}(2\mathcal{K} + 1, j) := (\rho_2(2\mathcal{K} + 1), 0) = (\mathcal{K}, 0)$$

para cada $j \in \{0, \dots, \mathcal{K}\}$. Finalmente, definimos $R_{\mathcal{K}}$ en T_2 así:

$$R_{\mathcal{K}}(i, j) := (i - \mathcal{K}, 0)$$

para cada $i \in \{j + 1, \dots, 2\mathcal{K}\}$. Procedemos a demostrar que $R_{\mathcal{K}}$ es aplicación digital. Denotamos por

$$C := (I_{2\mathcal{K}+1} \times \{0\}) \cup (\{0, 2\mathcal{K} + 1\} \times I_{\rho_2(\mathcal{K})}).$$

Sean $(a, b), (x, y) \in I_{2\mathcal{K}+1} \times I_{\mathcal{K}}$ tales que $(a, b) \sim_{I_{2\mathcal{K}+1} \times I_{\mathcal{K}}} (x, y)$ y queremos ver que $R_{\mathcal{K}}(a, b) \sim_C R_{\mathcal{K}}(x, y)$.

Puede ocurrir que:

- i) $a + b \leq 2\mathcal{K} - 2$, por lo que $(a, b) \in T_1$. Además, $x + y \leq a + b + 2 \leq 2\mathcal{K}$ y por lo tanto, $(x, y) \in T_1$. Por lo que como vimos en el Teorema 2.1,

$$R_{\mathcal{K}}(a, b) \sim_C R_{\mathcal{K}}(x, y).$$

- ii) $a + b \geq 2\mathcal{K} + 2$ y $a \leq 2\mathcal{K} - 1$. Por un lado, se deduce que $b \geq 2$, $1 \leq b \leq \mathcal{K}$ y $a > 2\mathcal{K} - b$, por lo que $(a, b) \in T_2$. Por otro, $y \geq 1$, $x \leq 2\mathcal{K}$ y $x \geq 2\mathcal{K} - y$. De esta manera, si $x > 2\mathcal{K} - y$ se tiene que $(x, y) \in T_2$ y por lo tanto,

$$R_{\mathcal{K}}(x, y) = (x - \mathcal{K}, 0) \sim_C (a - \mathcal{K}, 0) = R_{\mathcal{K}}(a, b).$$

En cambio, si $x = 2\mathcal{K} - y$, se tiene que $(x, y) \in T_1$ y por lo tanto,

$$R_{\mathcal{K}}(x, y) = (\rho_2(x-y), 0) = (\rho_2(2x-2\mathcal{K}), 0) = (x-\mathcal{K}, 0) \sim_C (a-\mathcal{K}, 0) = R_{\mathcal{K}}(a, b).$$

iii) $a + b \geq 2\mathcal{K} + 2$ y $a = 2\mathcal{K}$, por lo que

$$R_{\mathcal{K}}(a + 1, b) = R_{\mathcal{K}}(a + 1, b \pm 1) = (a + 1 - \mathcal{K}, 0) \sim_C (a - \mathcal{K}, 0) = R_{\mathcal{K}}(a, b).$$

Esto junto a lo demostrado en los casos anteriores, implica que $R_{\mathcal{K}}(a, b) \sim_C R_{\mathcal{K}}(x, y)$.

iv) $a + b \geq 2\mathcal{K} + 2$ y $a = 2\mathcal{K} + 1$, entonces

$$R_{\mathcal{K}}(a, b) = (\mathcal{K}, 0) = R_{\mathcal{K}}(a, b \pm 1) = R_{\mathcal{K}}(a + 1, b \pm 1) = (2\mathcal{K} - \mathcal{K}, 0).$$

Esto junto a lo demostrado en el caso anterior, implica que $R_{\mathcal{K}}(a, b) \sim_C R_{\mathcal{K}}(x, y)$.

v) $2\mathcal{K} - 1 \leq a + b \leq 2\mathcal{K} + 1$. Suponemos que $a + b = 2\mathcal{K}$, por lo que $(a, b) \in T_1$. Ahora bien, $a \in [\mathcal{K}, 2\mathcal{K}]$. Veamos que ocurre cuando $a \in [\mathcal{K} + 1, 2\mathcal{K} - 1]$, pues los casos $a = \mathcal{K}$ y $a = 2\mathcal{K}$ son análogos.

Por un lado, si $(x, y) \in T_1$, $R_{\mathcal{K}}$ preserva la adyacencia como ya vimos. Por otro lado, si $(x, y) \notin T_1$, entonces $(x, y) \in \{(a, b + 1), (a + 1, b), (a + 1, b + 1)\}$ y por ende, $R_{\mathcal{K}}(x, y) \in \{(a - \mathcal{K}, 0), (a + 1 - \mathcal{K}, 0)\}$. Además, $R_{\mathcal{K}}(a, b) = (a - \mathcal{K}, 0)$ por lo que $R_{\mathcal{K}}(a, b) \sim_C R_{\mathcal{K}}(x, y)$.

vi) Los casos $a + b = 2\mathcal{K} - 1$ y $a + b = 2\mathcal{K} + 1$ se demuestran de una manera análoga a todos los anteriores.

Se concluye que $R_{\mathcal{K}}(a, b) \sim_C R_{\mathcal{K}}(x, y)$ y por lo tanto, $R_{\mathcal{K}}$ es digital.

Procedemos a extender $R_{\mathcal{K}}$ a $[2\mathcal{K} + 2, 4\mathcal{K} + 3] \times I_{\mathcal{K}}$. La imagen de un punto de este rectángulo se obtiene de la manera que se detalla a continuación. Aplicamos $R_{\mathcal{K}}$ sobre el punto que resulta de reflejar este punto sobre la línea vertical $y = 2\mathcal{K} + 1,5$ y reflejamos el resultado sobre la línea vertical $y = \rho_2(\mathcal{K}) + 0,5$. Como las reflexiones preservan adyacencia, hemos obtenido así una aplicación digital

$$R_{\mathcal{K}} : I_{4\mathcal{K}+3} \times I_{\mathcal{K}} \longrightarrow (I_{2\mathcal{K}+1} \times \{0\}) \cup (\{0, 2\mathcal{K} + 1\} \times I_{\rho_2(\mathcal{K})}).$$

Ahora, queremos restringir esta aplicación sobre cualquier rectángulo que sea igual de ancho, pero no muy alto. Así si $\mathcal{K}' \leq \mathcal{K}$, restringiendo sobre el anterior $R_{\mathcal{K}}$, tenemos una aplicación digital:

$$R_{\mathcal{K}} : I_{4\mathcal{K}+3} \times I_{\mathcal{K}'} \longrightarrow (I_{2\mathcal{K}+1} \times \{0\}) \cup (\{0, 2\mathcal{K} + 1\} \times I_{\rho_2(\mathcal{K}')}).$$

Tomando en particular $\mathcal{K}' = 4N + 3 \leq \mathcal{K}$ para algún N , tenemos una aplicación digital

$$R_{\mathcal{K}} : \begin{matrix} I_{4\mathcal{K}+3} & \times & I_{4N+3} & \longrightarrow & (I_{2\mathcal{K}+1} \times \{0\}) \cup (\{0, 2\mathcal{K} + 1\} \times I_{\rho_2(4N+3)}) \\ S(I_{2\mathcal{K}+1}, 2) & & S(I_N, 2) & & S(I_N, 2) \end{matrix}$$

Por como hemos definido $R_{\mathcal{K}}$, se tiene que:

$$R_{\mathcal{K}} = \rho_2 \times id_{\{0\}} = \rho_2 \times \rho_2 : S(I_{2\mathcal{K}+1}, 2) \times \{0\} \longrightarrow I_{2\mathcal{K}+1} \times \{0\}$$

$$R_{\mathcal{K}} = \rho_2 \times \rho_2 : \{0, 1\} \times S(I_N, 4) \longrightarrow \{0\} \times S(I_N, 2)$$

$$R_{\mathcal{K}} = \rho_2 \times \rho_2 : \{4\mathcal{K} + 2, 4\mathcal{K} + 3\} \times S(I_N, 4) \longrightarrow \{2\mathcal{K} + 1\} \times S(I_N, 2).$$

O lo que es lo mismo, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 (S(I_{2\mathcal{K}+1}, 2) \times \{0\}) \cup (S(\{0, 2\mathcal{K} + 1\}, 2) \times S(I_N, 4)) & \xleftarrow{\text{incl.}} & S(I_{2\mathcal{K}+1}, 2) \times S(I_N, 4) \\
 & \searrow_{\rho_2 \times \rho_2} & \downarrow_{R_{\mathcal{K}}} \\
 & & (I_{2\mathcal{K}+1} \times \{0\}) \cup (\{0, 2\mathcal{K} + 1\} \times S(I_N, 2))
 \end{array}$$

Por último, para demostrar nuestro propósito inicial resta encontrar el \mathcal{K} , verificando todo lo expuesto. Suponemos que nos dan I_M, I_N . Obsérvese que para cada $p \geq 2$, se tiene que $S(I_M, 2^p) = S(S(I_M, 2^{p-2}), 4) = I_{4\mathcal{K}+3}$ con $\mathcal{K} = M2^{p-2} + 2^{p-2} - 1$. Elegimos el p más pequeño que $4N + 3 \leq M2^{p-2} + 2^{p-2} - 1$ y por toda la discusión anterior, obtendríamos que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 (S(I_M, 2^p) \times \{0\}) \cup (S(\{0, 2\mathcal{K} + 1\}, 2) \times S(I_N, 4)) & \xleftarrow{\text{incl.}} & S(I_M, 2^p) \times S(I_N, 4) \\
 & \searrow_{\rho_{2^p} \times \rho_2} & \downarrow_{\rho_{2^p-1} \circ R_{\mathcal{K}}} \\
 & & (I_M \times \{0\}) \cup (\{0, M\} \times S(I_N, 2))
 \end{array}$$

Con lo que se deduce que $\rho_{2^p-1} \circ R_{\mathcal{K}}$ es la “retracción” buscada.

□

2.2. Fibración digital

En topología algebraica, una fibración consiste en una aplicación continua $p : E \rightarrow B$ que posee la propiedad de levantar homotopías, es decir, para cualquier Z, f y H haciendo el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 Z \times \{0\} & \xrightarrow{f} & E \\
 \text{id}_Z \times i \downarrow & & \downarrow p \\
 Z \times I & \xrightarrow{H} & B
 \end{array}$$

donde $i : \{0\} \hookrightarrow I$ es la inclusión, se puede encontrar $\bar{H} : Z \times I \rightarrow E$ haciendo que conmute el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 Z \times \{0\} & \xrightarrow{f} & E \\
 \text{id}_Z \times i \downarrow & \nearrow \bar{H} & \downarrow p \\
 Z \times I & \xrightarrow{H} & B
 \end{array}$$

Gracias al siguiente resultado bien conocido en la teoría de homotopía clásica (ver, por ejemplo, [31]), las cofibraciones proporcionan una amplia gama de fibraciones.

Teorema 2.3. *Sea $j : A \hookrightarrow X$ una inclusión de un subespacio cerrado. Si j es cofibración, entonces para cualquier Y , la aplicación inducida entre los espacios de funciones $j^* : Y^X \rightarrow Y^A$ es una fibración.*

Este resultado se suele usar para deducir que las aplicaciones evaluación en el ámbito digital $X^I \rightarrow X$ son fibraciones. En esta sección, no se aportará ninguna definición de **fibración digital**, sino que guiados por el Teorema 2.3 se aportará una propiedad de elevación de homotopías adaptada al ámbito digital. Se comienza por una versión digital de este teorema.

Teorema 2.4. Sean Z, Y imágenes digitales y $j : A \hookrightarrow X$ una inclusión de imágenes digitales tal que

$$\begin{array}{ccc} Z \times \{0\} & \xrightarrow{f} & D(X, Y) \\ id_Z \times i \downarrow & & \downarrow j^* \\ Z \times I_M & \xrightarrow{H} & D(A, Y) \end{array}$$

Si j es cofibración, existen subdivisiones $S(-, k)$, $S(I_M, l)$ y $\bar{H} : S(Z, k) \times S(I_M, l) \rightarrow D(S(X, k), Y)$ aplicación pseudo-digital haciendo conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} S(Z, k) \times \{0\} & \xrightarrow{\rho_k \times id_{\{0\}}} & Z \times \{0\} & \xrightarrow{f} & D(X, Y) & \xrightarrow{(\rho_k)^*} & D(S(X, k), Y) \\ id_{S(Z, k)} \times i \downarrow & & \downarrow id_Z \times i & \xrightarrow{\bar{H}} & \downarrow j^* & \dashrightarrow & \downarrow (S(j))^* \\ S(Z, k) \times S(I_M, l) & \xrightarrow{\rho_k \times \rho_l} & Z \times I_M & \xrightarrow{H} & D(A, Y) & \xrightarrow{(\rho_k)^*} & D(S(A, k), Y) \end{array} \quad (2.8)$$

Demostración. Tomamos los adjuntos de f y H ,

$$\hat{f} : Z \times X \times \{0\} \rightarrow Y \quad \text{y} \quad \hat{H} : Z \times A \times I_M \rightarrow Y.$$

Tomamos adjuntos nuevamente y obtenemos

$$f' : Z \times X \rightarrow D(\{0\}, Y) \quad \text{y} \quad H' : Z \times A \rightarrow D(I_M, Y).$$

Por la Proposición 1.7 f' y H' son pseudo-digitales y

$$f'(z, x)(0) = f(z, 0)(x) \quad \text{y} \quad H'(z, a)(t) = H(z, t)(a),$$

para $a \in A$, $x \in X$, $z \in Z$ y $t \in I_M$. Con lo cual, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} Z \times A & \xrightarrow{H'} & D(I_M, Y) \\ id_Z \times j \downarrow & & \downarrow i^* \\ Z \times X & \xrightarrow{f'} & D(\{0\}, Y) \end{array}$$

Como vimos en la Nota 1.2, la aplicación i^* se puede identificar con la aplicación $ev_0 : P_M Y \rightarrow Y$. Asimismo, $id_Z \times j$ es una cofibración digital por el Lema 2.2. Entonces, por la Definición 2.1 existen subdivisiones $S(Z \times X, k) \cong S(Z, k) \times S(X, k)$, $S(I_M, l)$ y $\bar{H}' : S(Z, k) \times S(X, k) \rightarrow D(S(I_M, l), Y)$ haciendo el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 S(Z, k) \times S(A, k) & \xrightarrow{\rho_k \times \rho_k} & Z \times A & \xrightarrow{H'} & P_M Y & \xrightarrow{(p_l)^*} & D(S(I_M, l), Y) = P_{lM+l-1} Y \\
 \downarrow id_{S(Z, k)} \times S(j, k) & & \downarrow id_Z \times j & \dashrightarrow \bar{H}' & \downarrow \bar{e}v_0 & \dashrightarrow & \swarrow ev_0 \\
 S(Z, k) \times S(X, k) & \xrightarrow{\rho_k \times \rho_k} & Z \times X & \xrightarrow{f'} & D(\{0\}, Y) & &
 \end{array}
 \tag{2.9}$$

Aplicando adjunción dos veces, obtenemos una aplicación pseudo-digital

$$\bar{H} : S(Z, k) \times S(I_M, l) \longrightarrow D(S(X, k), Y)$$

dada por

$$\bar{H}(z', t')(x') := \bar{H}'(z', x')(t')$$

para $z' \in S(Z, k)$, $x' \in S(X, k)$ y $t' \in S(I_M, l)$.

Veamos que se verifica el diagrama 2.8. Comenzamos por el triángulo inferior derecho. Si $z' \in S(Z, k)$, $a' \in S(A, k)$ y $t' \in S(I_M, l)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 (S(j, k))^* \circ \bar{H}(z', t')(a') &= \bar{H}(z', t')(S(j, k)(a')) \\
 &= \bar{H}'(z', S(j, k)(a'))(t') \\
 &= (\rho_l)^* \circ H' \circ (\rho_k \times \rho_k)(z', a')(t') \text{ por (2.9)} \\
 &= H'(\rho_k(z'), \rho_k(a'))(\rho_l(t')) \\
 &= H(\rho_k(z'), \rho_l(t'))(\rho_k(a')) \\
 &= (\rho_k)^* \circ H \circ (\rho_k \times \rho_l)(z', t')(a').
 \end{aligned}$$

Continuamos por el triángulo superior izquierdo. Si $z' \in S(Z, k)$, $x' \in S(X, k)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \bar{H} \circ (id_{S(Z, k)} \times i)(z', 0)(x') &= \bar{H}(z', 0)(x') \\
 &= \bar{H}'(z', x')(0) \\
 &= f'(\rho_k(z'), \rho_k(x'))(0) \text{ por (2.9)} \\
 &= f(\rho_k(z'), 0)(\rho_k(x')) \\
 &= (\rho_k)^* \circ f \circ (\rho_k \times i)(z', 0)(x').
 \end{aligned}$$

Por lo anterior, se deduce que

$$(S(j, k))^* \circ \bar{H} = (\rho_k)^* \circ H \circ (\rho_k \times \rho_l) \text{ y } \bar{H} \circ (id_{S(Z, k)} \times i) = (\rho_k)^* \circ f \circ (\rho_k \times i)$$

con lo cual se verifica el diagrama 2.8. \square

De este resultado, se puede deducir que la aplicación evaluación $ev_0 : P_N Y \longrightarrow Y$ “posee” una propiedad de elevar homotopías, lo que la calificaría como una fibración de caminos.

Corolario 2.1. *Si Y es imagen digital y se tiene un diagrama*

$$\begin{array}{ccc} Z \times \{0\} & \xrightarrow{f} & P_N Y \\ id_Z \times i \downarrow & & \downarrow j^* \\ Z \times I_M & \xrightarrow{H} & Y \end{array}$$

entonces existen subdivisiones $S(Z, k)$, $S(I_N, k) = I_{kN+k-1}$, $S(I_M, l) = I_{lM+l-1}$ y $\bar{H} : S(Z, k) \times S(I_M, l) \rightarrow P_{kN+k-1} Y$ aplicación pseudo-digital haciendo conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} S(Z, k) \times \{0\} & \xrightarrow{\rho_k \times id_{\{0\}}} & Z \times \{0\} & \xrightarrow{f} & P_N Y & \xrightarrow{(\rho_k)^*} & P_{kN+k-1} Y \\ id_{S(Z, k)} \times i \downarrow & & \downarrow id_Z \times i & \xrightarrow{\bar{H}} & \downarrow ev_0 & & \downarrow ev_0 \\ S(Z, k) \times S(I_M, l) & \xrightarrow{\rho_k \times \rho_l} & Z \times I_M & \xrightarrow{H} & Y & \xlongequal{\quad} & Y \end{array} \quad (2.10)$$

Demostración. Combinando los Teoremas 2.1 y 2.4 tenemos que existe $\bar{H} : S(Z, k) \times S(I_M, l) \rightarrow D(S(I_N, k), Y)$ aplicación haciendo conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} S(Z, k) \times \{0\} & \xrightarrow{\rho_k \times id_{\{0\}}} & Z \times \{0\} & \xrightarrow{f} & P_N Y & \xrightarrow{(\rho_k)^*} & P_{kN+k-1} Y \\ id_{S(Z, k)} \times i \downarrow & & \downarrow id_Z \times i & \xrightarrow{\bar{H}} & \downarrow ev_0 & & \downarrow (S(j))^* \\ S(Z, k) \times S(I_M, l) & \xrightarrow{\rho_k \times \rho_l} & Z \times I_M & \xrightarrow{H} & Y & \xrightarrow{(\rho_k)^*} & D(S(\{0\}, k), Y) \end{array}$$

Nótese que $S(\{0\}, k) = I_{k-1}$ y la inclusión $i : \{0\} \rightarrow I_{k-1}$ satisface

$$\rho_k \circ i = id_{\{0\}} : \{0\} \rightarrow S(\{0\}, k) \rightarrow \{0\}$$

donde $\rho_k : S(\{0\}, k) \rightarrow \{0\}$. Añadiendo esto a la parte derecha del diagrama, tenemos:

$$\begin{array}{ccccc} S(Z, k) \times \{0\} & \xrightarrow{\rho_k \times id_{\{0\}}} & Z \times \{0\} & \xrightarrow{f} & P_N Y & \xrightarrow{(\rho_k)^*} & P_{kN+k-1} Y \\ id_{S(Z, k)} \times i \downarrow & & \downarrow id_Z \times i & \xrightarrow{\bar{H}} & \downarrow ev_0 & & \downarrow i^* \circ (S(j))^* \\ S(Z, k) \times S(I_M, l) & \xrightarrow{\rho_k \times \rho_l} & Z \times I_M & \xrightarrow{H} & Y & \xrightarrow{i^* \circ (\rho_k)^* = id_Y} & Y \end{array}$$

Obsérvese que $i^* \circ (S(j))^* = (S(j) \circ i)^* \circ i = S(j, k) \circ i : \{0\} \rightarrow S(\{0\}, k) = I_{k-1} \rightarrow S(I_N, k) = I_{kN+k-1}$, entonces $i^* \circ (S(j, k))^*$ se puede identificar con ev_0 y se cumpliría lo que queríamos ver. \square

Lo mismo ocurre con la aplicación evaluación $\pi : P_N X \rightarrow X \times X$ de la Definición 1.12, la cual se puede identificar con $j^* : D(I_N, Y) \rightarrow D(\{0, N\}, Y)$ donde $j : \{0, N\} \rightarrow I_N$ es la cofibración del Teorema 2.2. Solo habría que requerir que $N \geq 2$, pues no tiene que haber adyacencia entre 0 y N para que se cumplan las propiedades.

Corolario 2.2. Si Y es imagen digital y se tiene un diagrama

$$\begin{array}{ccc} Z \times \{0\} & \xrightarrow{f} & P_N Y \\ id_Z \times i \downarrow & & \downarrow \pi \\ Z \times I_M & \xrightarrow{H} & Y \times Y \end{array}$$

con $N \geq 2$, entonces existen subdivisiones $S(Z, k)$, $S(I_N, k) = I_{kN+k-1}$, $S(I_M, l) = I_{lM+l-1}$ y $\bar{H} : S(Z, k) \times S(I_M, l) \rightarrow P_{kN+k-1} Y$ aplicación pseudo-digital haciendo conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} S(Z, k) \times \{0\} & \xrightarrow{\rho_k \times id_{\{0\}}} & Z \times \{0\} & \xrightarrow{f} & P_N Y & \xrightarrow{(\rho_k)^*} & P_{kN+k-1} Y \\ id_{S(Z,k)} \times i \downarrow & & \downarrow id_Z \times i & \xrightarrow{\bar{H}} & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ S(Z, k) \times S(I_M, l) & \xrightarrow{\rho_k \times \rho_l} & Z \times I_M & \xrightarrow{H} & Y \times Y & \xlongequal{\quad} & Y \times Y \end{array} \quad (2.11)$$

Demostración. Combinando los Teoremas 2.2 y 2.3 tenemos que existe $\bar{H} : S(Z, k) \times S(I_M, l) \rightarrow D(S(I_N, k), Y)$ aplicación haciendo conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} S(Z, k) \times \{0\} & \xrightarrow{\rho_k \times id_{\{0\}}} & Z \times \{0\} & \xrightarrow{f} & P_N Y & \xrightarrow{(\rho_k)^*} & P_{kN+k-1} Y \\ id_{S(Z,k)} \times i \downarrow & & \downarrow id_Z \times i & \xrightarrow{\bar{H}} & \downarrow \pi & & \downarrow (S(j))^* \\ S(Z, k) \times S(I_M, l) & \xrightarrow{\rho_k \times \rho_l} & Z \times I_M & \xrightarrow{H} & Y \times Y & \xrightarrow{(\rho_k)^*} & D(S(\{0, N\}, k), Y) \end{array}$$

Nótese que $i : \{0, N\} \rightarrow S(\{0, N\}, k)$, donde $i(0) = 0$ y $i(N) = kN + k - 1$, satisface

$$\rho_k \circ i = id_{\{0, N\}} : \{0, N\} \rightarrow S(\{0, N\}, k) \rightarrow \{0, N\}$$

donde $\rho_k : S(\{0, N\}, k) \rightarrow \{0, N\}$. Además, $j^* : D(I_N, Y) \rightarrow D(\{0, N\}, Y)$ lo identificamos con $\pi : P_N Y \rightarrow Y \times Y$ usando la cofibración $j : \{0, N\} \rightarrow I_N$. Añadiendo esto al diagrama, tenemos:

$$\begin{array}{ccccc} S(Z, k) \times \{0\} & \xrightarrow{\rho_k \times id_{\{0\}}} & Z \times \{0\} & \xrightarrow{f} & P_N Y & \xrightarrow{(\rho_k)^*} & P_{kN+k-1} Y \\ id_{S(Z,k)} \times i \downarrow & & \downarrow id_Z \times i & \xrightarrow{\bar{H}} & \downarrow \pi & & \downarrow i^* \circ (S(j))^* \\ S(Z, k) \times S(I_M, l) & \xrightarrow{\rho_k \times \rho_l} & Z \times I_M & \xrightarrow{H} & Y \times Y & \xrightarrow{i^* \circ (\rho_k)^* = id_{Y \times Y}} & Y \times Y \end{array}$$

Obsérvese que $i^* \circ (S(j))^* = (S(j) \circ i)^*$ y $S(j, k) \circ i : \{0, N\} \rightarrow S(\{0, N\}, k) = I_{k-1} \cup \{kN, kN+1, \dots, kN+k-1\} \rightarrow S(I_N, k) = I_{kN+k-1}$, donde $(S(j, k) \circ i)(0) = 0$ y $(S(j, k) \circ i)(N) = kN + k - 1$. Finalmente, podemos identificar $i^* \circ (S(j))^*$ con la aplicación π y se cumpliría lo que queríamos ver. \square

Finalmente, se cierra la sección probando que los respectivos análogos en los espacios basados también son “fibraciones”.

Teorema 2.5. Sean $j : A \hookrightarrow X$ una inclusión de imágenes digitales basadas y Z, Y imágenes digitales basadas. Si se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 Z \times \{0\} & \xrightarrow{f} & D_*(X, Y) \\
 id_Z \times i \downarrow & & \downarrow j^* \\
 Z \times I_M & \xrightarrow{H} & D_*(A, Y)
 \end{array}$$

y j es cofibración (no como aplicación basada), entonces existen subdivisiones $S(-, k)$, $S(I_M, l)$ y $\bar{H} : S(Z, k) \times S(I_M, l) \rightarrow D_*(S(X, k), Y)$ aplicación pseudo-digital haciendo conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 S(Z, k) \times \{0\} & \xrightarrow{\rho_k \times id_{\{0\}}} & Z \times \{0\} & \xrightarrow{f} & D_*(X, Y) & \xrightarrow{(\rho_k)^*} & D_*(S(X, k), Y) \\
 id_{S(Z, k)} \times i \downarrow & & \downarrow id_Z \times i & \xrightarrow{\bar{H}} & \downarrow j^* & & \downarrow (S(j))^* \\
 S(Z, k) \times S(I_M, l) & \xrightarrow{\rho_k \times \rho_l} & Z \times I_M & \xrightarrow{H} & D_*(A, Y) & \xrightarrow{(\rho_k)^*} & D_*(S(A, k), Y)
 \end{array}$$

Demostración. Mediante las inclusiones

$$\begin{array}{ccc}
 D_*(X, Y) & \xrightarrow{incl.} & D(X, Y) \\
 j^* \downarrow & & \downarrow j^* \\
 D_*(A, Y) & \xrightarrow{incl.} & D(A, Y)
 \end{array}$$

tenemos el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc}
 Z \times \{0\} & \xrightarrow{f} & D(X, Y) \\
 id_Z \times i \downarrow & & \downarrow j^* \\
 Z \times I_M & \xrightarrow{H} & D(A, Y)
 \end{array}$$

Como en el Teorema 2.4, podemos encontrar $\bar{H} : S(Z, k) \times S(I_M, l) \rightarrow D(S(X, k), Y)$ que verifique 2.8. En este diagrama, podemos reemplazar $D(X, Y)$ y $D(A, Y)$ por $D_*(X, Y)$ y $D_*(A, Y)$, respectivamente, ya que f y H tienen que tener imagen en los espacios basados. Además, al ser $\rho_k : S(A, k) \rightarrow A$ una aplicación basada, podemos reemplazar $D(S(A, k), Y)$ por $D_*(S(A, k), Y)$. Finalmente, la imagen de $\bar{H} \circ (S(j))^*$ está contenida en $D_*(S(A, k), Y)$ y por lo tanto, la imagen de \bar{H} está contenida en $D_*(S(X, k), Y)$, consiguiendo así el diagrama conmutativo que queríamos. \square

Corolario 2.3. Si Y es imagen digital basada y se tiene un diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 Z \times \{0\} & \xrightarrow{f} & \mathcal{P}_N Y \\
 id_Z \times i \downarrow & & \downarrow ev_N \\
 Z \times I_M & \xrightarrow{H} & Y
 \end{array}$$

con $N \geq 2$, entonces existen subdivisiones $S(Z, k)$, $S(I_N, k) = I_{kN+k-1}$, $S(I_M, l) = I_{lM+l-1}$ y $\bar{H} : S(Z, k) \times S(I_M, l) \rightarrow P_{kN+k-1}Y$ aplicación pseudo-digital haciendo conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 S(Z, k) \times \{0\} & \xrightarrow{\rho_k \times id_{\{0\}}} & Z \times \{0\} & \xrightarrow{f} & \mathcal{P}_N Y & \xrightarrow{(\rho_k)^*} & \mathcal{P}_{kN+k-1} Y \\
 \downarrow id_{S(Z,k)} \times i & & \downarrow id_Z \times i & \dashrightarrow & \downarrow ev_N & & \downarrow ev_{kN+k-1} \\
 S(Z, k) \times S(I_M, l) & \xrightarrow{\rho_k \times \rho_l} & Z \times I_M & \xrightarrow{H} & Y & \xlongequal{\quad} & Y
 \end{array} \quad (2.12)$$

Demostración. Haremos un razonamiento similar a la demostración del Corolario 2.2. Usaremos la misma cofibración $j : \{0, N\} \rightarrow I_N$. Tomamos puntos base y nótese que podemos identificar las aplicaciones $ev_N : \mathcal{P}_N Y$ y $j^* : D_*(I_N, Y) \rightarrow D_*(\{0, N\}, Y)$. Combinamos los Teoremas 2.5 y 2.2 y obtenemos un diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 S(Z, k) \times \{0\} & \xrightarrow{\rho_k \times id_{\{0\}}} & Z \times \{0\} & \xrightarrow{f} & \mathcal{P}_N Y & \xrightarrow{(\rho_k)^*} & \mathcal{P}_{kN+k-1} Y \\
 \downarrow id_{S(Z,k)} \times i & & \downarrow id_Z \times i & \dashrightarrow & \downarrow ev_N & & \downarrow (S(j))^* \\
 S(Z, k) \times S(I_M, l) & \xrightarrow{\rho_k \times \rho_l} & Z \times I_M & \xrightarrow{H} & Y & \xrightarrow{(\rho_k)^*} & D_*(S(\{0, N\}, k), Y)
 \end{array}$$

Componiendo abajo a la derecha por $i^* : D_*(S(\{0, N\}, k), Y) \rightarrow D_*(\{0, N\}, Y) = Y$ donde $i : \{0, N\} \rightarrow S(\{0, N\}, k)$ obtendríamos lo que queríamos ver. \square

2.3. Categoría digital de Lusternik-Schnirelmann

En esta sección se aportará una versión digital de la categoría de Lusternik-Schnirelmann. En topología, la **categoría de Lusternik-Schnirelmann** de un espacio topológico X , denotada usualmente por $cat(X)$, es un invariante homotópico que consiste en un número entero no negativo que es el resultado de restarle uno al mínimo número de conjuntos abiertos contráctiles con los que se puede recubrir X . Sin embargo, se probará que es un invariante homotópico para las imágenes digitales en dos dimensiones, pues para dimensiones superiores aún no se ha podido generalizar.

Se comienza exponiendo cómo serán estos abiertos en el ámbito digital.

Definición 2.2. Sea $j : U \hookrightarrow X$ una inclusión de imágenes digitales.

Por un lado, se dice que U es **categórico** en X si para algún $x_0 \in X$ y N , existe $H : U \times I_N \rightarrow X$ una homotopía donde $H(u, 0) = j(u) = u$ y $H(u, N) = x_0$ para cada $u \in U$.

Por otro lado, se dice que U es **s-categórico** en X si para algún $x_0 \in X$, N y subdivisión $S(U, k)$ de U , existe $H : S(U, k) \times I_N \rightarrow X$ una homotopía donde $H(u', 0) = (j \circ \rho_k)(u') = \rho_k(u')$ y $H(u', N) = x_0$ para cada $u' \in S(U, k)$.

De esta manera, ya se reúnen las condiciones para poder aportar una versión digital de la categoría-L.S. y ver algunos ejemplos.

Definición 2.3. La **categoría digital** de X , denotado por $d-cat(X)$, consiste en el menor $n \geq 0$, para el cual existe un recubrimiento de X por $n + 1$ subconjuntos que son s-categóricos en X . Nótese que al tener que X es finito, $d-cat(X) < \infty$.

Esta definición permite caracterizar a las imágenes digitales contráctiles. Nótese que podemos relajar la caracterización de los espacios sb-contráctiles, presentada en la sección 1.3 para espacios basados, y obtener así la definición de imágenes digitales **s-contráctiles**.

Proposición 2.2. *Sea X una imagen digital.*

X es s-contráctil si, y solo si, $d\text{-cat}(X) = 0$.

Demostración. Se sigue directamente de la Definición 2.3. □

Ejemplo 2.4.

- i) Si X es contráctil, entonces X es s-contráctil y por lo tanto, $d\text{-cat}(X) = 0$.
- ii) Si D es el diamante, entonces $d\text{-cat}(D) = 1$. Procedemos a probarlo. Nótese que si $p \in D$, entonces $D = (D \setminus \{p\}) \cup \{p\}$. Ambos conjuntos son contráctiles ($D \setminus \{p\}$ podríamos identificarlo con I_2), por lo que concluiríamos que $d\text{-cat}(D) \leq 1$. Ahora, veamos que D no es s-contráctil, pues así $d\text{-cat}(D) \geq 1$ y tendríamos que $d\text{-cat}(D) = 1$.

Procedemos por reducción al absurdo y suponemos que tenemos una homotopía

$$H : S(D, k) \times I_N \longrightarrow D$$

donde $H(x, 0) = \rho_k(x)$ y $H(x, N) = x_0$. Asimismo, tenemos cuatro segmentos (ver Figura 2.4):

$$\begin{aligned} & \{(k, t) \mid t \in \{0, \dots, k-1\}\} \cup \{(k-1-s, k) \mid s \in \{0, \dots, k-1\}\} \\ & \cup \{(-1, k-1-t) \mid s \in \{0, \dots, k-1\}\} \\ & \cup \{(s, -1) \mid s \in \{0, \dots, k-1\}\} \subseteq S(D, k), \end{aligned}$$

los cuales conforman un lazo (camino cuyo punto inicial y final coinciden, como ya veremos más adelante) $\alpha : I_{4k} \longrightarrow S(D, k)$ de longitud $4k$ en $S(D, k)$.

Así, $\rho_k \circ \alpha$ es un lazo en D y la composición

$$H \circ (\alpha \times id_{I_N}) : I_{4k} \times I_N \longrightarrow S(D, k) \times I_N \longrightarrow D$$

sería una homotopía que empieza en $\rho_k \circ \alpha$ y termina en un lazo constante. Sin embargo, el índice de $\rho_k \circ \alpha$ no es 0 (ver A.1), por lo que llegamos a un absurdo.

Se puede probar una caracterización sobre las imágenes digitales s-catóricas que permiten aportar una definición alternativa de categoría digital.

Proposición 2.3. *Sea $j : U \hookrightarrow X$ una inclusión de imágenes digitales. Son equivalentes:*

- a) *U es s-catórico en X .*
- b) *Existen $S(U, k)$, N y $\sigma : S(U, k) \longrightarrow \mathcal{P}_N X$ pseudo-digital haciendo conmutativo el diagrama:*

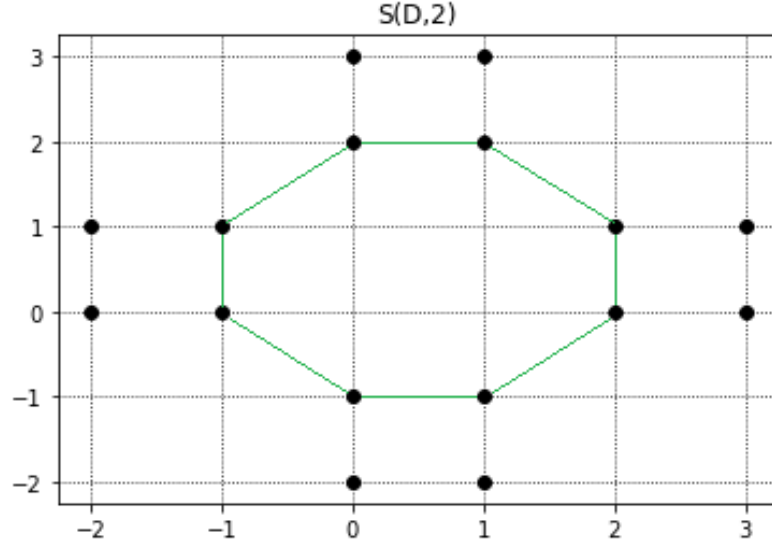


Figura 2.4: Segmentos propuestos para $k = 2$ en el apartado **ii** del Ejemplo 2.4.

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathcal{P}_N X \\
 & \nearrow \sigma & \downarrow ev_N \\
 S(U, k) & \xrightarrow{j \circ \rho_k} & X
 \end{array}$$

Demostración. En primer lugar, veamos que **a**) implica **b**). Sea $H : S(U, L) \times I_M \rightarrow X$ una homotopía que contrae $S(U, L)$ a x_0 . Entonces, podemos formar el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 S(U, L) \times \{0\} & \xrightarrow{f} & \mathcal{P}_N X \\
 id_{S(U, L)} \times i \downarrow & & \downarrow ev_N \\
 S(U, L) \times I_M & \xrightarrow{H} & X
 \end{array}$$

De esta manera, para cada $u' \in S(U, L)$, tenemos que

$$f(u', 0) = \mathcal{C}_{x_0} : I_N \rightarrow X$$

el camino constante en x_0 . Ahora, sea un $N \geq 2$ cualquiera. Por el Corolario 2.3, existen subdivisiones $S(S(U, L), K) = S(U, k)$, $S(I_N, K) = I_R$ y $S(I_M, l) = I_{lM+l-1}$ y $\bar{H} : S(U, k) \times I_{lM+l-1} \rightarrow \mathcal{P}_N X$ donde $l = LK$ y $R = NK + K - 1$, haciendo conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 S(U, k) \times \{0\} & \xrightarrow{\rho_k \times id_{\{0\}}} & S(U, L) \times \{0\} & \xrightarrow{f} & \mathcal{P}_N X & \xrightarrow{(\rho_k)^*} & \mathcal{P}_R X \\
 id_{S(U, k)} \times i \downarrow & & \downarrow id_Z \times i & \nearrow \bar{H} & \downarrow ev_N & & \downarrow ev_R \\
 S(U, k) \times S(I_M, l) & \xrightarrow{\rho_k \times \rho_l} & S(U, L) \times I_M & \xrightarrow{H} & X & \xlongequal{\quad} & X
 \end{array}$$

Definimos $\sigma : S(U, k) \longrightarrow \mathcal{P}_R X$ dado por $\sigma(u') = \bar{H}(u', lM + l - 1)$ para cada $u' \in S(U, k)$, la cual es claramente una aplicación pseudo-digital. Entonces, se verifica que

$$(ev_R \circ \sigma)(u') = (H \circ (\rho_K \times \rho_l))(u', lM + l - 1) = H(\rho_K(u'), M) = (i \circ \rho_L \circ \rho_K)(u') = (i \circ \rho_k)(u'),$$

que es lo que queríamos demostrar.

Por último, veamos que **b)** implica **a)**. Dado $\sigma : S(U, k) \longrightarrow D_*(I_N, X)$ como en el diagrama, podemos definir una homotopía $H : S(U, k) \times I_N \longrightarrow X$ dada por $H(u', t) = \sigma(u')(t)$. Esta aplicación es continua por la Proposición 1.7 y es sencillo de comprobar que para cada $u' \in S(U, k)$, $H(u', 0) = \sigma(u')(0) = x_0$ y $H(u', N) = (ev_N \circ \sigma)(u') = (i \circ \rho_k)(u')$. \square

Corolario 2.4. Si X es imagen digital, entonces $d\text{-cat}(X) = n$ donde $n \geq 0$ es el menor n tal que $X = \bigcup_{i=0}^n U_i$ donde para cada $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, existe una subdivisión $S(U_i, k_i)$, N_i y $\sigma_i : S(U_i, k_i) \longrightarrow \mathcal{P}_{N_i} X$ haciendo conmutativo el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{P}_{N_i} X \\ & \nearrow \sigma_i & \downarrow ev_{N_i} \\ S(U_i, k_i) & \xrightarrow{j \circ \rho_k} & X \end{array}$$

Demostración. Se deduce de la Proposición 2.3 y la Definición 2.3. \square

Finalmente, para cerrar la sección se prueba que la categoría digital es un invariante homotópico para las imágenes digitales de dimensión 2, es decir, contenidas en \mathbb{Z}^2 .

Teorema 2.6. Sean $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ una imagen digital y $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ aplicaciones digitales. Si $H : X \times I_M \longrightarrow X$ es una homotopía entre id_X y $g \circ f$, entonces $d\text{-cat}(X) \leq d\text{-cat}(Y)$.

Demostración. En primer lugar, suponemos $U \subseteq Y$ s -categórico en Y y probemos que $f^{-1}(U)$ es s -categórico en X . Sea $C : S(U, k) \times I_N \longrightarrow Y$ la homotopía tal que $C(u', 0) = \rho(u')$ y $C(u', N) = y_0$ para algún $y_0 \in Y$. Definimos $V = f^{-1}(U) \subseteq X$. Como $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ tenemos una aplicación digital (véase [24], Proposición 5.7.) $\hat{f} : S(V, k + 1) \longrightarrow S(U, k)$ con

$$f \circ \rho_{k+1} = \rho_k \circ \hat{f} : S(V, k + 1) \longrightarrow X.$$

Ahora definimos una correspondencia $G : S(V, k + 1) \times I_{M+N} \longrightarrow X$ por

$$G(v', t) := \begin{cases} H(\rho_{k+1}(v'), t) & 0 \leq t \leq M \\ g(C(\hat{f}(v'), t - M)) & M \leq t \leq M + N \end{cases}$$

Claramente se tiene que $G(v', 0) = \rho_{k+1}(v')$ y $G(v', M + N) = g(y_0)$, para cada $v' \in S(V, k + 1)$ y es aplicación digital.

Ahora, si $\{U_0, \dots, U_n\}$ es un recubrimiento s -categórico de Y , entonces

$$\{f^{-1}(U_0), \dots, f^{-1}(U_n)\}$$

es un recubrimiento s -categórico de X con lo cual $d\text{-cat}(X) \leq d\text{-cat}(Y)$. \square

Corolario 2.5. Si $X, Y \subseteq \mathbb{Z}^2$ son imágenes digitales y son homotópicamente equivalentes, entonces $d\text{-cat}(X) = d\text{-cat}(Y)$.

Demostración. Esto es consecuencia del Teorema 2.6 y de la Definición 1.16. □

Grupo fundamental en imágenes digitales

En este capítulo final, se define el grupo fundamental para las imágenes digitales. Se ha dividido en dos secciones. En la primera, se presentan todos los rudimentos necesarios para definir una operación interna en una imagen digital que verifique las propiedades de grupo. *Grosso modo* se presenta qué es un lazo, un camino inverso, la concatenación de caminos, la homotopía relativa a los extremos y diversas propiedades relacionadas con todo lo anterior. En la segunda, se construye el grupo fundamental, a través de la homotopía débil definida en la Sección 1.3 y se prueba que es un invariante homotópico en el sentido habitual y por subdivisión. Asimismo, se demuestra que es independiente del punto base y se comporta bien con el producto cartesiano, es decir, el grupo fundamental de un producto de imágenes digitales es isomorfo al producto cartesiano de los grupos fundamentales de los factores.

Para una mayor comprensión de las ideas y conclusiones expuestas en este capítulo, se recomienda al lector que consulte [31] y [27].

3.1. Espacios de caminos

En esta sección, se replica el proceder básico que se realiza en topología a la hora de construir un grupo fundamental: presentar una relación de equivalencia, definir cuál será la operación interna, el elemento neutro e inverso. Para ello, se hará uso de la mayoría de resultados presentados en el Capítulo 1, pero para unas imágenes digitales determinadas.

Definición 3.1. Sea X una imagen digital basada con $X \subseteq \mathbb{Z}^n$. Un **camino basado de longitud N** consiste en un camino $\alpha : I_N \rightarrow X$ tal que $\alpha(0) = x_0$. Además, se dice que es un **lazo** si $\alpha(0) = \alpha(N) = x_0$.

Nota 3.1. Si se tiene un lazo basado de longitud N $\alpha : I_N \rightarrow X$, para cualquier $k \geq 1$ se tiene $\alpha \circ \rho_k : S(I_N, k) = I_{kN+k-1} \rightarrow I_N \rightarrow X$ un lazo basado de longitud $kN + k - 1$, ya que

$$(\alpha \circ \rho_k)(0) = \alpha(\rho_k(0)) = \alpha(0) = x_0 = \alpha(N) = \alpha(\rho_k(kN+k-1)) = (\alpha \circ \rho_k)(kN+k-1).$$

Definición 3.2. Sea $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ una imagen digital basada. Se dice que dos lazos $\alpha, \beta : I_M \rightarrow X$ son **b-homótopos como lazos basados** si existe una b-homotopía $H : I_M \times I_N \rightarrow X$ tal que $H(s, 0) = \alpha(s)$, $H(s, N) = \beta(s)$ y $H(0, t) = H(M, t) = x_0$, para cada $s \in I_M$, $t \in I_N$.

Se generaliza esta definición para caminos (no necesariamente basados) en una imagen digital.

Definición 3.3. Sean $\alpha, \beta : I_M \rightarrow X$ caminos en X imagen digital (no basada necesariamente) tales que $\alpha(0) = \beta(0)$ y $\alpha(M) = \beta(M)$. Decimos que $\alpha, \beta : I_M \rightarrow X$ son **homótopos relativos a los extremos** si existe una homotopía $H : I_M \times I_N \rightarrow X$ tal que $H(s, 0) = \alpha(s)$, $H(s, N) = \beta(s)$, $H(0, t) = \alpha(0) = \beta(0)$ y $H(M, t) = \alpha(M) = \beta(M)$, para cada $s \in I_M$, $t \in I_N$.

A continuación, se presenta la relación de equivalencia que permitirá establecer distintas agrupaciones de lazos sobre cualquier imagen digital y construir así una extensión del grupo fundamental al plano digital.

Definición 3.4. Sea $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ una imagen digital basada. Dos lazos $\alpha : I_M \rightarrow X$ y $\beta : I_N \rightarrow X$ se dice que son **sb-homótopos como lazos basados** si para algún $k, l \geq 1$ tales que $k(M+1) = l(N+1)$, se tiene que

$$\alpha \circ \rho_k : S(I_M, k) \rightarrow I_M \rightarrow X \quad \text{y} \quad \beta \circ \rho_l : S(I_N, l) \rightarrow I_N \rightarrow X$$

son b-homótopos como lazos basados.

Lema 3.1. Si $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ una imagen digital basada, entonces “ser sb-homótopo como lazo basado” define una relación de equivalencia en el conjunto de todos los lazos basados en X .

Demostración. La demostración es un caso especial de la Proposición 1.15. Las propiedades reflexivas y simétricas son sencillas de comprobar, así que nos centraremos en la transitiva. Resta ver que los extremos se mantienen fijos a lo largo de la homotopía. Sean $\alpha : I_L \rightarrow X$, $\beta : I_M \rightarrow X$ y $\gamma : I_N \rightarrow X$ lazos basados tales que $\alpha \circ \rho_l \approx \beta \circ \rho_m$ y $\beta \circ \rho_\mu \approx \gamma \circ \rho_\nu$ como b-homotopías donde $l(L+1) = m(M+1)$ y $\mu(M+1) = \nu(N+1)$. Por definición, existen

$$H_1 : S(I_L, l) \times I_S = S(I_M, m) \times I_S \rightarrow X \quad \text{y} \quad H_2 : S(I_M, \mu) \times I_T = S(I_N, \nu) \times I_T \rightarrow X$$

homotopías basadas de $\alpha \circ \rho_l$ a $\beta \circ \rho_m$ y $\beta \circ \rho_\mu$ a $\gamma \circ \rho_\nu$, respectivamente.

Podemos construir

$$H'_1 := H_1 \circ (\rho_\mu \times id_{I_S}) : S(I_L, l\mu) \times I_S = S(I_M, m\mu) \times I_S \rightarrow X$$

y

$$H'_2 := H_2 \circ (\rho_m \times id_{I_T}) : S(I_M, \mu m) \times I_T = S(I_N, \nu m) \times I_T \rightarrow X$$

que son homotopías basadas de $\alpha \circ \rho_l \circ \rho_\mu$ a $\beta \circ \rho_m \circ \rho_\mu$ y $\beta \circ \rho_\mu \circ \rho_m$ a $\gamma \circ \rho_\nu \circ \rho_m$, respectivamente. Entonces, se construye la homotopía basada de $\alpha \circ \rho_{l\mu}$ a $\gamma \circ \rho_{\nu m}$

$$H : S(I_L, l\mu) \times I_{S+T} = S(I_N, \nu m) \times I_{S+T} \rightarrow X$$

dada por

$$H(s, t) := \begin{cases} H'_1(s, t) & 0 \leq t \leq S \\ H'_2(s, t - N) & N \leq t \leq S + T \end{cases},$$

la cual verifica que $H(0, t) = H(l\mu L + l\mu - 1, t) = H(m\nu N + m\nu - 1, t) = x_0$, para cada $t \in I_{S+T}$. \square

Se denota por $[\alpha]$ a la clase equivalencia de lazos basados representados por un lazo basado $\alpha : I_N \rightarrow X$ bajo la relación de equivalencia anterior. Nótese que para cualquier k , se tiene que $[\alpha] = [\alpha \circ \rho_k]$ donde $\rho_k : S(I_N, k) \rightarrow I_N$ es cualquier proyección canónica.

Ahora, se presenta una operación entre caminos mediante la cual se podrá definir el producto en el grupo.

Definición 3.5. Sean $\alpha : I_M \rightarrow X$ y $\beta : I_N \rightarrow X$ dos caminos en X que satisfacen $\alpha(M) \sim_X \beta(0)$. La **concatenación** de α con β es el camino en X

$$\alpha \cdot \beta : I_{M+N+1} \rightarrow X$$

de longitud $M + N + 1$ definido por

$$(\alpha \cdot \beta)(t) := \begin{cases} \alpha(t) & 0 \leq t \leq M \\ \beta(t - (M + 1)) & M + 1 \leq t \leq M + N + 1 \end{cases}.$$

Nota 3.2. Si $\alpha(M) = \beta(0)$ en la Definición 3.5, esto significa que pausamos en el punto una unidad de tiempo antes de continuar recorriendo el resto de la concatenación.

Lema 3.2. Sea $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ una imagen digital basada.

- Si $\alpha, \alpha' : I_M \rightarrow X$ y $\beta, \beta' : I_N \rightarrow X$ son homótopos relativos a los extremos, respectivamente y $\alpha(M) = \alpha'(M) \sim_X \beta(0) = \beta'(0)$, entonces $\alpha \cdot \beta, \alpha' \cdot \beta' : I_{M+N+1} \rightarrow X$ son homótopos relativos a los extremos.
- Si $\alpha, \alpha' : I_M \rightarrow X$ y $\beta, \beta' : I_N \rightarrow X$ son b -homótopos como lazos basados, respectivamente, entonces $\alpha \cdot \beta, \alpha' \cdot \beta' : I_{M+N+1} \rightarrow X$ son b -homótopos como lazos basados.
- Si $\alpha : I_M \rightarrow Y$ y $\beta : I_N \rightarrow Y$ son lazos basados y $k \geq 1$, entonces se tiene la siguiente igualdad entre lazos basados

$$(\alpha \cdot \beta) \circ \rho_k = (\alpha \circ \rho_k) \cdot (\beta \circ \rho_k) : I_{k(M+N+1)+k-1} \rightarrow X.$$

Demostración. Veamos a). Sean $H_1 : I_M \times I_R \rightarrow X$ y $H_2 : I_N \times I_T \rightarrow X$ homotopías relativas a los extremos de α a α' y β a β' , respectivamente. Suponemos sin pérdida de generalidad que $R = T$, pues si $R < T$ (análogo $R > T$), podemos elongar H_1 (H_2) de la siguiente forma:

$$H'_1(s, t) := \begin{cases} H_1(s, t) & 0 \leq t \leq R \\ H_1(s, R) & R + 1 \leq t \leq T \end{cases},$$

que es claramente una homotopía relativa a los extremos de α a α' .

Definimos una aplicación $H : I_{M+N+1} \times I_T \longrightarrow X$ donde

$$H(s, t) := \begin{cases} H_1(s, t) & 0 \leq s \leq M \\ H_2(s - (M + 1), t) & M + 1 \leq s \leq M + N + 1 \end{cases}.$$

Veamos que es digital. Para ello, sean $(s, t) \sim_{I_{M+N+1} \times I_T} (s', t')$. Si $\{s, s'\} \subseteq [0, M]$ o $\{s, s'\} \subseteq [M, M + N + 1]$, H es digital por H_1 y H_2 , respectivamente. Suponemos que $\{s, s'\} \subseteq [M, M + 1]$. Como H_1 y H_2 son homotopías relativas a los extremos

$$H(M, t) = H_1(M, t) = \alpha(M) \sim_X \beta(0) = H_2(0, t) = H(M + 1, t)$$

para todo $t \in I_T$. Luego, es digital y por definición claramente es una homotopía de $\alpha \cdot \beta$ a $\alpha' \cdot \beta'$. Además, es una homotopía relativa a los extremos, ya que

$$H(0, t) = H_1(0, t) = \alpha(0) = \alpha'(0) \quad \text{y} \quad H(M + N + 1, t) = H_2(N, t) = \beta(N) = \beta'(N)$$

para todo $t \in I_T$.

El caso **b)** es igual a **a)**, pero tratando los caminos como lazos basados.

Por último veamos **c)**. Nótese que $\alpha \circ \rho_k : I_{kM+k-1} \longrightarrow X$ y $\beta \circ \rho_k : I_{kN+k-1} \longrightarrow X$, por lo que

$$(\alpha \circ \rho_k) \cdot (\beta \circ \rho_k) : I_{(kM+k-1)+(kN+k-1)+1} \longrightarrow X$$

dado por

$$(\alpha \circ \rho_k) \cdot (\beta \circ \rho_k)(t) = \begin{cases} (\alpha \circ \rho_k)(t) & 0 \leq t \leq kM + k - 1 \\ (\beta \circ \rho_k)(t - (kM + k)) & kM + k \leq t \leq (kM + k - 1) + (kN + k - 1) + 1 \end{cases}$$

Se tiene que $(kM + k - 1) + (kN + k - 1) + 1 = k(M + N + 1) + (k - 1)$, $kM + k \leq t \leq k(M + N + 1) + (k - 1)$ y $(\beta \circ \rho_k)(t - (kM + k)) = \beta(\rho_k(t) - (M + 1))$ y así el producto coincidiría con $(\alpha \cdot \beta) \circ \rho_k$. □

Seguidamente, se presenta lo que se considera la extensión trivial de un camino, la cual se usará para argumentar algunos resultados de manera concisa, pues posee ciertas propiedades interesantes.

Definición 3.6. Sea $\alpha : I_M \longrightarrow X$ un camino. Una extensión trivial de α es cualquier camino $\alpha' : I_{M'} \longrightarrow X$ de la siguiente forma

$$\alpha'(s) = \begin{cases} \alpha(0) & 0 \leq s \leq t_0 \\ \alpha(1) & t_0 + 1 \leq s \leq t_0 + 1 + t_1 \\ \alpha(2) & t_0 + t_1 + 2 \leq s \leq t_0 + t_1 + 2 + t_2 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha(M) & \sum_{i=0}^{M-1} t_i + M \leq s \leq \sum_{i=0}^M t_i + M \end{cases},$$

donde para cada $i \in \{0, \dots, M\}$, $t_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Su longitud será $M' := \sum_{i=0}^M t_i + M$.

Nota 3.3. Si en la Definición 3.6 se elige $t_i = 0$ para cada $i \in \{0, \dots, M\}$, se obtiene el camino original α . Asimismo, este camino α' puede verse como una reparametrización de α donde el valor $\alpha(i)$ se repite un extra de t_i veces, produciendo una concatenación de $M + 1$ caminos constantes $\alpha' = \alpha_0 \cdot \dots \cdot \alpha_m$, donde $\alpha_i : I_{t_i} \rightarrow X$ camino constante en $\alpha(i)$. Finalmente, cabe reseñar que por la definición, si α' es extensión de α y α'' de α' , entonces α'' es extensión trivial de α .

Lema 3.3. Sea $\alpha : I_M \rightarrow X$ un camino en X . Si para cada $i \in I_M$, se define $\beta_i : I_{M+1} \rightarrow X$ la extensión trivial de α dada por

$$\beta_i(s) := \begin{cases} \alpha(s) & 0 \leq s \leq i \\ \alpha(s-1) & i+1 \leq s \leq M+1 \end{cases}$$

para cada $s \in I_M$, entonces existe una homotopía relativa a los extremos $\beta_i \approx \alpha \cdot \mathcal{C}_0 : I_{M+1} \rightarrow X$, donde $\mathcal{C}_0 : I_0 \rightarrow X$ es el camino constante en $\alpha(M)$ de longitud 0.

Demostración. Si $M = 0$, entonces $\alpha = \mathcal{C}_0$ y $\alpha \cdot \mathcal{C}_0 = \beta_0 : I_1 \rightarrow X$. Suponemos $M > 0$. Definiremos una homotopía $H : I_{M+1} \times I_M \rightarrow X$ relativa a los extremos que vaya desde β_0 a $\alpha \cdot \mathcal{C}_0$ que pase a través de todos los β_i , dada por

$$H(s, t) := \begin{cases} \alpha(s) & 0 \leq s \leq t \\ \alpha(s-1) & t+1 \leq s \leq M+1 \end{cases}$$

para cada $(s, t) \in I_{M+1} \times I_M$. Para ir desde β_i a $\alpha \cdot \mathcal{C}_0$, restringiríamos el inicio a $t = i$ para todo $i \in \{0, \dots, M\}$. Claramente H es homotopía relativa a los extremos. En efecto,

$$H(0, t) = \alpha(0) \quad \text{y} \quad H(M+1, t) = \alpha(M),$$

para cada $t \in I_M$, además de ser digital. Efectivamente, sean $(s, t) \sim (s', t') \in I_{M+1} \times I_M$. Podemos asumir que $t' = t$ o $t' = t + 1$. En el primer caso,

$$H(s, t) = \beta_t(s) \sim_X \beta_{t'}(s') = H(s', t'),$$

ya que β_t es digital. En el segundo, puede ocurrir que:

- a) $\{s, s'\} \subseteq [0, t]$. Como α es digital, $H(s, t) = \alpha(s) \sim_X \alpha(s') = H(s', t+1)$.
- b) $\{s, s'\} \subseteq [t, t+2]$. Entonces,

$$\{H(s, t), H(s', t+1)\} \subseteq \{\beta_t(s), \beta_{t+1}(s') \mid s, s' \in [t, t+2]\} = \{\alpha(t), \alpha(t+1)\}$$

y por la digitalidad de α , $H(s, t) \sim_X H(s', t+1)$.

- c) $\{s, s'\} \subseteq [t+2, M+1]$. Como α es digital,

$$H(s, t) = \alpha(s-1) \sim_X \alpha(s'-1) = H(s', t+1).$$

En definitiva, $H(s, t) \sim_X H(s', t')$ y por tanto, H es digital.

□

Lema 3.4. Sea $\alpha : I_M \rightarrow X$ un camino en X . Si $\alpha' : I_{M'} \rightarrow X$ es una extensión trivial de α con al menos un t_i positivo, entonces existe una homotopía relativa a los extremos $\alpha' \approx \alpha \cdot \mathcal{C}_T : I_{M'} \rightarrow X$, donde $\mathcal{C}_T : I_T \rightarrow X$ es el camino constante en $\alpha(M)$ de longitud $T = \sum_{i=0}^M t_i - 1$.

Demostración. Procedemos por inducción. Queremos ver que para todo $T \geq 0$, $\alpha' \approx \alpha \cdot \mathcal{C}_T : I_{M'} \rightarrow X$. El caso $T = 0$ lo probamos en el Lema 3.3. Suponemos cierto para $T - 1 \geq 0$ y veamos que ocurre con T . Suponemos que n es el primer índice para el cual $t_n > 0$. Entonces α' es una extensión trivial de $\alpha'' : I_{M'-1} \rightarrow X$ dada por

$$\alpha''(s) = \begin{cases} \alpha'(s) & 0 \leq s \leq \sum_{i=0}^n t_i - 1 \\ \alpha'(s+1) & \sum_{i=0}^n t_i \leq s \leq \sum_{i=0}^M t_i \end{cases},$$

para cada $s \in I_{M'-1}$. Por hipótesis de inducción, tenemos que $\alpha'' \approx \alpha \cdot \mathcal{C}_{T-1} : I_{M'-1} \rightarrow X$. Por a) del Lema 3.2, se tiene que $\alpha'' \cdot \mathcal{C}_0 \approx \alpha \cdot \mathcal{C}_{T-1} \cdot \mathcal{C}_0 = \alpha \cdot \mathcal{C}_T : I_{M'} \rightarrow X$. Asimismo, por el Lema 3.3 y por la construcción de α'' , se tiene que

$$\alpha' \approx \alpha'' \cdot \mathcal{C}_0 : I_{M'} \rightarrow X$$

y como “ser homótopo relativo a los extremos” es relación de equivalencia, entonces se verifica que $\alpha' \approx \alpha \cdot \mathcal{C}_T : I_{M'} \rightarrow X$. \square

Corolario 3.1. Sean $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ una imagen digital basada y $\alpha \approx \beta : I_M \rightarrow X$ lazos basados b -homótopos. Si $\alpha', \beta' : I_{M'} \rightarrow X$ (con $M' > 0$) son extensiones triviales de α y β , respectivamente, entonces α' y β' son b -homótopos como lazos basados.

Demostración. Por el Lema 3.4, se tienen las siguientes b -homotopías de lazos basados

$$\alpha' \approx \alpha \cdot \mathcal{C}_T : I_{M'} \rightarrow X \quad \text{y} \quad \beta' \approx \beta \cdot \mathcal{C}_T : I_{M'} \rightarrow X.$$

Por el apartado b) del Lema 3.2, se tiene otra b -homotopía de lazos basados

$$\alpha \cdot \mathcal{C}_T \approx \beta \cdot \mathcal{C}_T : I_{M'} \rightarrow X.$$

Se sigue por transitividad que $\alpha' \approx \alpha \cdot \mathcal{C}_T \approx \beta \cdot \mathcal{C}_T \approx \beta' : I_{M'} \rightarrow X$. \square

Lema 3.5. Sea $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ cualquier imagen digital basada. Si $\alpha : I_M \rightarrow X$ lazo basado y $k \geq 2$, entonces se tienen las siguientes b -homotopías de lazos basados $\alpha \circ \rho_k \approx (\alpha \circ \rho_{k-1}) \cdot \mathcal{C}_M : I_{kM+k-1} \rightarrow X$ y $\alpha \circ \rho_k \approx \mathcal{C}_M \cdot (\alpha \circ \rho_{k-1}) : I_{kM+k-1} \rightarrow X$.

Demostración. Nótese que $\alpha \circ \rho_k$ y $(\alpha \circ \rho_{k-1}) \cdot \mathcal{C}_M$ son extensiones triviales de α , entonces por el Corolario 3.1 ya estaría probado. \square

El siguiente resultado postula que se pueden establecer clases de equivalencia usando extensiones triviales, en vez de la aproximación por sb -homotopías.

Proposición 3.1. Sean $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ una imagen digital basada, $\alpha : I_M \rightarrow X$ y $\beta : I_N \rightarrow X$ dos lazos basados. Son equivalentes:

- a) α y β son *sb-homótopos* como lazos basados.
- b) Existen extensiones triviales $\alpha' : I_{M'} \rightarrow X$ de α y $\beta' : I_{M'} \rightarrow X$ de β , de longitud común $M' \geq \max\{M, N\}$ con α' y β' *b-homótopos*.

Demostración. Veamos que a) implica b). Esta implicación es inmediata, pues las composiciones $\alpha \circ \rho_k$ y $\beta \circ \rho_l$ con $k(M+1) = l(N+1)$ son extensiones triviales de α y β , respectivamente.

Veamos que b) implica a). Intentamos conseguir una extensión trivial α'' de α' que sea de la forma $\alpha'' = \alpha \circ \rho_k$. Para ello, cada intervalo de longitud t_i vinculado a la repetición del valor $\alpha(i)$ con $i \in \{0, \dots, M\}$ queremos extenderlo a uno de longitud $k-1$ tal y como se muestra en la Figura 3.1. Entonces, definimos

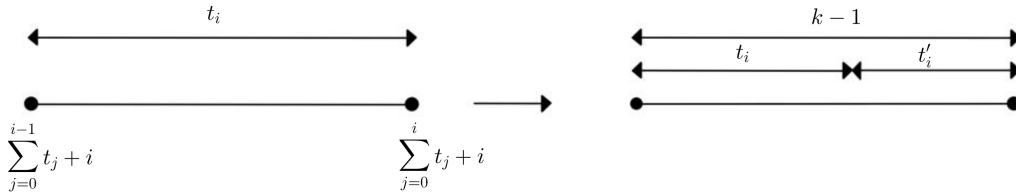


Figura 3.1: Extensión α'' de α' en la Proposición 3.1.

$$k := 1 + \max\{t_i \mid 0 \leq i \leq M\}, \quad t'_i + t_i = k - 1.$$

y α'' extensión trivial de α' dada por

$$\alpha''(s) := \begin{cases} \alpha'(s) & 0 \leq s \leq t_0 \\ \alpha'(t_0) & t_0 \leq s \leq t_0 + t'_0 = k - 1 \\ \alpha'(s - t'_0) & k \leq s \leq k + t_1 \\ \alpha'(t_0 + t_1 + 1) & k + t_1 \leq s \leq k + t_1 + t'_1 = 2k - 1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha'(s - \sum_{i=0}^{M-1} t'_i) & Mk \leq s \leq Mk + t_M \\ \alpha'(M') & Mk + t_M \leq s \leq Mk + t_M + t'_M = Mk + k - 1 \end{cases}$$

para cada $s \in Mk + k - 1$ donde $M' = \sum_{i=0}^M t_i + M$. Por la construcción, podemos reescribir α'' como

$$\alpha''(s) = \begin{cases} \alpha(0) & 0 \leq s \leq k - 1 \\ \alpha(1) & k \leq s \leq 2k - 1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha(M) & Mk \leq s \leq Mk + k - 1 \end{cases}$$

donde $s \in I_{Mk+k-1}$. O en otras palabras, $\alpha'' = \alpha \circ \rho_k : I_{Mk+k-1} \rightarrow X$. Podríamos hacer un proceso análogo y obtener $\beta'' = \beta \circ \rho_l : I_{lN+l-1} \rightarrow X$ extensión trivial de β' . Ahora bien, podemos encontrar m, n tal que $km(M+1) = ln(N+1)$ y por tanto,

$\alpha''' = \alpha \circ \rho_{km}$ y $\beta''' = \beta \circ \rho_{ln}$ son extensiones triviales de α' y β' de misma longitud. Al ser α' y β' b-homótopos, por el Corolario 3.1 tendríamos lo que queríamos ver, ya que se deduce que α y β son sb-homótopos. \square

Corolario 3.2. *Sea $\alpha : I_M \rightarrow X$ un lazo basado en una imagen digital basada $X \subseteq \mathbb{Z}^n$. Si $\alpha' : I_{M'} \rightarrow X$ es cualquier extensión trivial de α , entonces α' y α son sb-homótopos ($[\alpha'] = [\alpha]$).*

Demostración. Caso b) implica a) de la Proposición 3.1) con α' desempeñando el rol de $\beta = \beta'$. \square

La siguiente proposición permite definir una operación interna en el conjunto formado por todas las clases de equivalencia definidas por la relación “ser sb-homótopo” en el conjunto de los lazos basados en un punto. Así si $\alpha : I_M \rightarrow X$ y $\beta : I_N \rightarrow X$ son dos lazos basados en x_0 , entonces

$$[\alpha \cdot \beta] := [\alpha] \cdot [\beta]. \quad (3.1)$$

Proposición 3.2. *Sean $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ una imagen digital basada y $\alpha : I_M \rightarrow X$, $\alpha' : I_{M'} \rightarrow X$, $\beta : I_N \rightarrow X$, $\beta' : I_{N'} \rightarrow X$ lazos basados. Si $[\alpha] = [\alpha']$ y $[\beta] = [\beta']$, entonces $[\alpha \cdot \beta] = [\alpha' \cdot \beta']$.*

Demostración. Como $[\alpha] = [\alpha']$ y $[\beta] = [\beta']$, tenemos las siguientes b-homotopías $\alpha \circ \rho_k \approx \alpha' \circ \rho_{k'}$ y $\beta \circ \rho_l \approx \beta' \circ \rho_{l'}$ para ciertos k, k', l, l' . Por el apartado b) del Lema 3.2 se tiene que $[(\alpha \circ \rho_k) \cdot (\beta \circ \rho_l)] = [(\alpha' \circ \rho_{k'}) \cdot (\beta' \circ \rho_{l'})]$. Además, obsérvese que la concatenación $(\alpha \circ \rho_k) \cdot (\beta \circ \rho_l)$ es una extensión trivial de $\alpha \cdot \beta$ y por el Corolario 3.2, tenemos que $[\alpha \cdot \beta] = [(\alpha \circ \rho_k) \cdot (\beta \circ \rho_l)]$. De igual manera, $[\alpha' \cdot \beta'] = [(\alpha' \circ \rho_{k'}) \cdot (\beta' \circ \rho_{l'})]$. Recopilando todo lo anterior, se tiene que

$$[\alpha \cdot \beta] = [(\alpha \circ \rho_k) \cdot (\beta \circ \rho_l)] = [(\alpha' \circ \rho_{k'}) \cdot (\beta' \circ \rho_{l'})] = [\alpha' \cdot \beta'].$$

\square

Por último, para cerrar la sección se presenta el inverso de un camino que se extenderá al inverso de una clase en el grupo. Asimismo, se explica el porqué se puede deformar la concatenación de un camino y su inverso a un punto.

Definición 3.7. *Sea $\gamma : I_M \rightarrow X$ un camino. Se denota por $\bar{\gamma} : I_M \rightarrow X$ al camino inverso dado por $\bar{\gamma}(t) := \gamma(M - t)$ para cada $t \in I_M$.*

Nota 3.4. *Si α es un lazo basado en X , entonces $\bar{\alpha}$ también lo es.*

Lema 3.6. *Si $\alpha : I_M \rightarrow X$ es un camino en X , entonces las concatenaciones de caminos $\alpha \cdot \bar{\alpha}, \bar{\alpha} \cdot \alpha : I_{2M+1} \rightarrow X$ son lazos en X basados en $\alpha(0)$ y $\alpha(M)$, respectivamente. Además, se tienen dos homotopías relativas a los extremos $\alpha \cdot \bar{\alpha} \approx C_{2M+1}^{\alpha(0)} : I_{2M+1} \rightarrow X$ y $\bar{\alpha} \cdot \alpha \approx C_{2M+1}^{\alpha(M)} : I_{2M+1} \rightarrow X$.*

Demostración. Probemos que $\alpha \cdot \bar{\alpha} \approx C_{2M+1}^{\alpha(0)} : I_{2M+1} \rightarrow X$ para cada $M \geq 0$. Procederemos por inducción. Si $M = 0$, entonces $\alpha : I_0 \rightarrow X$ y está claro que

$$\alpha \cdot \bar{\alpha} = \bar{\alpha} \cdot \alpha = C_1^{\alpha(0)} : I_1 \rightarrow X.$$

Suponemos cierto hasta M y veámoslo para $M + 1$. Para ello, sea $\alpha : I_{M+1} \rightarrow X$ un camino de longitud $M + 1$ y definimos un camino $\gamma : I_M \rightarrow X$ tal que $\gamma = \alpha|_{I_M}$. Así, podemos escribir $\alpha = \gamma \cdot \mathcal{C}_0^{\alpha(M+1)}$. También, definimos $\alpha' = \gamma \cdot \mathcal{C}_0^{\alpha(M)}$ y una correspondencia $H : I_{2M+3} \times I_1 \rightarrow X$ dada por

$$H(s, t) := \begin{cases} (\alpha \cdot \bar{\alpha})(s) & t = 0 \\ (\alpha' \cdot \bar{\alpha}')(s) & t = 1 \end{cases}$$

para cada $(s, t) \in I_{2M+3} \times I_1$. Usando un argumento similar al usado en la prueba del Lema 3.3, tenemos una aplicación digital. Además, se comprueba sencillamente que es una homotopía relativa a los extremos desde $\alpha \cdot \bar{\alpha}$ a $\alpha' \cdot \bar{\alpha}'$. Ya que

$$\alpha \cdot \bar{\alpha}' = \left(\gamma \cdot \mathcal{C}_0^{\alpha(M)} \right) \cdot \left(\overline{\gamma \cdot \mathcal{C}_0^{\alpha(M)}} \right) = \gamma \cdot \mathcal{C}_0^{\alpha(M)} \cdot \mathcal{C}_0^{\alpha(M)} \cdot \bar{\gamma}.$$

Se sigue entonces que $\alpha \cdot \bar{\alpha}'$ es extensión trivial de $\gamma \cdot \bar{\gamma}$. Entonces, por el Lema 3.4 tenemos una homotopía relativa a los extremos $\alpha \cdot \bar{\alpha}' \approx \gamma \cdot \bar{\gamma} \cdot \mathcal{C}_1^{\alpha(0)}$. Además, por la hipótesis de inducción podemos conseguir una homotopía relativa a los extremos $\gamma \cdot \bar{\gamma} \approx \mathcal{C}_{2M+1}^{\gamma(0)} = \mathcal{C}_{2M+1}^{\alpha(0)}$. Asimismo, por la parte a) del Lema 3.2 se tiene que $\gamma \cdot \bar{\gamma} \cdot \mathcal{C}_1^{\alpha(0)} \approx \mathcal{C}_{2M+1}^{\alpha(0)} \cdot \mathcal{C}_1^{\alpha(0)} = \mathcal{C}_{2M+3}^{\alpha(0)}$. Recopilando lo que tenemos

$$\alpha \cdot \bar{\alpha} \approx \alpha' \cdot \bar{\alpha}' \approx \gamma \cdot \bar{\gamma} \cdot \mathcal{C}_1^{\alpha(0)} \approx \mathcal{C}_{2M+3}^{\alpha(0)}.$$

Por transitividad tendríamos lo que queríamos probar.

Para probar que $\bar{\alpha} \cdot \alpha \approx \mathcal{C}_{2M+1}^{\alpha(M)} : I_{2M+1} \rightarrow X$, el razonamiento sería similar al realizado. \square

3.2. El grupo fundamental

En esta sección final, el objetivo principal consiste en construir el grupo fundamental, probar que es invariante por subdivisiones y por los distintos tipos de homotopía presentados. Asimismo, se presentarán algunos ejemplos típicos de grupos fundamentales en este plano.

Si X es una imagen digital basada, se denota por $\pi_1(X, x_0)$ al conjunto formado por todas las clases de equivalencia definidas por la relación “ser sb-homótopo” en el conjunto de los lazos basados en x_0 .

Teorema 3.1. *Si $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ una imagen digital basada, entonces $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ es un grupo donde \cdot es la operación definida en 3.1.*

Demostración. En primer lugar, es sencillo comprobar que \cdot es asociativo, ya que la concatenación de caminos lo es. Además, $(\pi_1(X, x_0), \cdot)$ contiene un elemento neutro. En efecto, si \mathcal{C}_M y \mathcal{C}_N son los lazos constantes basados en x_0 de longitud M y N , respectivamente, se tiene que son sb-homótopos ($\mathcal{C}_M \circ \rho_{N+1} = \mathcal{C}_N \circ \rho_{M+1}$) y por tanto, $[\mathcal{C}_M] = [\mathcal{C}_N]$. Entonces, denotando por $e \in \pi_1(X, x_0)$ a la clase formada por todos los lazos constantes basados en x_0 , por el Lema 3.1, se tiene que

$$[\alpha] \cdot e = [\alpha \cdot \mathcal{C}_M] = [\alpha \circ \rho_2] = [\alpha].$$

De igual manera, $e \cdot [\alpha] = [\alpha]$.

Finalmente, todo elemento de $\pi_1(X, x_0)$ tiene su inverso en $\pi_1(X, x_0)$. Efectivamente, si $\alpha, \bar{\alpha} : I_M \rightarrow X$ son un lazo basado y su inverso, respectivamente, por el Lema 3.6 se tiene que

$$[\alpha] \cdot [\bar{\alpha}] = [\alpha \cdot \bar{\alpha}] = [\mathcal{C}_{2M+1}] = e = [\mathcal{C}_{2M+1}] = [\bar{\alpha} \cdot \alpha] = [\bar{\alpha}] \cdot [\alpha].$$

□

Al igual que en topología, existen los homomorfismos inducidos. En efecto, sea $f : X \subseteq \mathbb{Z}^m \rightarrow Y \subseteq \mathbb{Z}^n$ una aplicación digital basada y $\alpha : I_M \rightarrow X$ un lazo basado en X . Claramente, la composición $f \circ \alpha : I_M \rightarrow Y$ es un lazo basado en Y . Además, si $\alpha' : I_N \rightarrow X$ es otro lazo basado tal que $[\alpha] = [\alpha']$, se tiene una b-homotopía $H : I_{kM+k-1} \times I_T \rightarrow X$ desde $\alpha \circ \rho_k$ a $\alpha' \circ \rho_l$ donde $k(M+1) = l(N+1)$. Por lo que $f \circ H : I_{kM+k-1} \times I_T \rightarrow Y$ es una b-homotopía desde $f \circ \alpha \circ \rho_k$ a $f \circ \alpha' \circ \rho_l$ y por ende, $[f \circ \alpha] = [f \circ \alpha'] \in \pi_1(Y, y_0)$. De esta manera, se puede definir una aplicación

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0) \quad (3.2)$$

dada por $f_*([\alpha]) := [f \circ \alpha]$ para cada $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$. Este homomorfismo inducido cumple una serie de propiedades, mediante las cuales se puede construir el grupo fundamental de las imágenes digitales contráctiles.

Lema 3.7. Si $f : X \subseteq \mathbb{Z}^m \rightarrow Y \subseteq \mathbb{Z}^n$ y $g : Y \subseteq \mathbb{Z}^n \rightarrow Z \subseteq \mathbb{Z}^o$ son aplicaciones digitales basadas, entonces:

a) (3.2) es un homomorfismo de grupos.

b) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

c) $f_* = g_*$ cuando f y g son b-homótopas.

d) $(id_X)_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$.

Demostración. En primer lugar, a) es cierto, ya que

$$f_*([\alpha \cdot \beta]) = [f \circ (\alpha \cdot \beta)] = [(f \circ \alpha) \cdot (f \circ \beta)] = [f \circ \alpha] \cdot [f \circ \beta] = f_*([\alpha]) \cdot f_*([\beta]),$$

para cada $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$.

Asimismo, b) se cumple, ya que si $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, entonces

$$(g \circ f)_*([\alpha]) = [(g \circ f) \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)] = g_*([f \circ \alpha]) = g_*(f_*([\alpha])).$$

Veamos c). Supongamos que tenemos una b-homotopía $H : X \times I_N \rightarrow X$ desde f a g . Así, para cada lazo basado $\alpha : I_M \rightarrow X$ tenemos que la composición $H \circ (\alpha \times id_{I_N}) : I_M \times I_N \rightarrow X$ es una b-homotopía de lazos basados desde $f \circ \alpha$ a $g \circ \alpha$ y por lo tanto,

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha] = [g \circ \alpha] = g_*([\alpha]).$$

Por último, d) se cumple aplicando simplemente la definición de homomorfismo inducido. □

Corolario 3.3. Si X imagen digital basada b -contráctil, entonces $\pi_1(X, x_0) \cong \{e\}$, donde $\{e\}$ es el grupo trivial.

Demostración. Por la Caracterización 1.14, se tiene que $id_X \approx \mathcal{C}_{x_0}$. Por las Propiedades c) y d) del Lema 3.7, se tiene que $(\mathcal{C}_{x_0})_* = (id_X)_* = id_{\pi_1(X, x_0)}$. Se deduce así que

$$e = (\mathcal{C}_{x_0})_*([\alpha]) = id_{\pi_1(X, x_0)}([\alpha]) = [\alpha]$$

para cada $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ y tendríamos lo que queríamos probar. \square

Ejemplo 3.1. Por los Corolarios 1.2 y 3.3, tendríamos que si $(I_N)^m$ es un cubo, entonces $\pi_1((I_N)^m, 0) \approx \{e\}$ donde $0 = (0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^m$.

Al igual que en topología algebraica, el grupo fundamental es independiente del punto base (si existe un camino que los une) y el grupo fundamental de cualquier producto de imágenes digitales consiste en el producto de los grupos.

Teorema 3.2. Sea X una imagen digital basada. Si $\alpha : I_N \rightarrow X$ es un camino tal que $\alpha(0) = x_0$ y $\alpha(N) = x'_0$, entonces se tiene un isomorfismo de grupos fundamentales

$$\phi : \pi_1(X, x'_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

dado por $\phi([\gamma']) := [\alpha \cdot \gamma' \cdot \bar{\alpha}]$, para cada $\gamma' \in \pi_1(X, x'_0)$.

Demostración. En primer lugar, veamos que ϕ está bien definida. Para ello, sean $[\gamma'], [\beta'] \in \pi_1(X, x'_0)$ tales que $[\gamma'] = [\beta']$. Entonces, en X podemos encontrar una b -homotopía de lazos basados $\gamma' \circ \rho_k \approx \beta' \circ \rho_l$ para ciertos k, l . Luego,

$$\begin{aligned} \phi([\gamma']) &= [(\alpha \cdot \gamma' \cdot \bar{\alpha}) \circ \rho_k] \\ &= [(\alpha \circ \rho_k) \cdot (\gamma' \circ \rho_k) \cdot (\bar{\alpha} \circ \rho_k)] \quad \text{(a) del Lema 3.2.} \\ &= [(\alpha \circ \rho_k) \cdot (\beta' \circ \rho_l) \cdot (\bar{\alpha} \circ \rho_k)] \quad \text{(c) del Lema 3.2.} \\ &= [\alpha \cdot \beta' \cdot \bar{\alpha}] \quad ((\alpha \circ \rho_k) \cdot (\beta' \circ \rho_l) \cdot (\bar{\alpha} \circ \rho_k) \text{ extensión trivial de } \alpha \cdot \beta' \cdot \bar{\alpha}) \\ &= \phi([\beta']). \end{aligned}$$

Ahora, veamos que es homomorfismo de grupos. Sean $[\gamma'], [\beta'] \in \pi_1(X, x'_0)$. Como vimos en la prueba del Teorema 3.1, tenemos que

$$[\gamma'] \cdot [\beta'] = [\gamma'] \cdot e \cdot [\beta'] = [\gamma'] \cdot [\bar{\alpha} \cdot \alpha] \cdot [\beta'] = [\gamma' \cdot (\bar{\alpha} \cdot \alpha) \cdot \beta'] \in \pi_1(X, x'_0).$$

Así,

$$\begin{aligned} \phi([\gamma'] \cdot [\beta']) &= \phi([\gamma' \cdot (\bar{\alpha} \cdot \alpha) \cdot \beta']) \\ &= [\alpha \cdot \gamma' \cdot \bar{\alpha} \cdot \alpha \cdot \beta' \cdot \bar{\alpha}] \\ &= [(\alpha \cdot \gamma' \cdot \bar{\alpha}) \cdot (\alpha \cdot \beta' \cdot \bar{\alpha})] \\ &= [\alpha \cdot \gamma' \cdot \bar{\alpha}] \cdot [\alpha \cdot \beta' \cdot \bar{\alpha}] \\ &= \phi([\gamma']) \cdot \phi([\beta']). \end{aligned}$$

Por último, veamos que ϕ es biyectiva. Para ello, definimos una aplicación

$$\psi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x'_0)$$

dada por $\psi([\gamma]) := [\bar{\alpha} \cdot \gamma \cdot \alpha]$, para cada $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$ y probemos que $\phi \circ \psi = id_{\pi_1(X, x_0)}$ y $\psi \circ \phi = id_{\pi_1(X, x'_0)}$. Sea $[\gamma'] \in \pi_1(X, x'_0)$. Se tiene que

$$\begin{aligned} (\psi \circ \phi)([\gamma']) &= \psi(\phi([\gamma'])) \\ &= \psi([\alpha \cdot \gamma' \cdot \bar{\alpha}]) \\ &= [\bar{\alpha} \cdot (\alpha \cdot \gamma' \cdot \bar{\alpha}) \cdot \alpha] \\ &= [(\bar{\alpha} \cdot \alpha) \cdot \gamma' \cdot (\bar{\alpha} \cdot \alpha)] \\ &= [\bar{\alpha} \cdot \alpha] \cdot [\gamma'] \cdot [\bar{\alpha} \cdot \alpha] = e \cdot [\gamma'] \cdot e = [\gamma'] = id_{\pi_1(X, x'_0)}([\gamma']). \end{aligned}$$

De manera análoga, se demuestra que $\phi \circ \psi = id_{\pi_1(X, x_0)}$. \square

Teorema 3.3. Sean X, Y imágenes digitales basadas y $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$, $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ las respectivas proyecciones sobre las componentes. Si se define una correspondencia

$$\phi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0),$$

dada por $\phi([\alpha]) := ((\rho_1)_*([\alpha]), (\rho_2)_*([\alpha]))$ para cada $[\alpha] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$, entonces ϕ es isomorfismo de grupos.

Demostración. Nótese que ϕ está bien definida y es homomorfismo, ya que $(p_1)_*$ y $(p_2)_*$ lo son. Resta ver que ϕ es sobreyectiva e inyectiva.

Veamos que ϕ es sobreyectiva: supongamos $([\alpha], [\beta]) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ donde los representantes son $\alpha : I_M \longrightarrow X$ y $\beta : I_N \longrightarrow Y$ dos lazos basados. Denotamos por $(\alpha, \mathcal{C}_M) : I_M \longrightarrow X \times Y \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ y $(\mathcal{C}_N, \beta) : I_N \longrightarrow X \times Y \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ a los lazos basados dados por $(\alpha, \mathcal{C}_M)(s) = (\alpha(s), \mathcal{C}_M(s)) = (\alpha(s), y_0)$ y $(\mathcal{C}_N, \beta)(t) = (\mathcal{C}_N(t), \beta(t)) = (x_0, \beta(t))$, para cada $s \in I_M, t \in I_N$. Luego,

$$\phi([\alpha, \mathcal{C}_M] \cdot [\mathcal{C}_N, \beta]) = \phi([\alpha, \mathcal{C}_M]) \cdot \phi([\mathcal{C}_N, \beta]) = ([\alpha], e) \cdot (e, [\beta]) = ([\alpha], [\beta]).$$

Veamos que ϕ es inyectiva: para ello, resta ver que si $[\alpha] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ y $\phi([\alpha]) = (e, e) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$, entonces $[\alpha] = e \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$. Si $\phi([\alpha]) = (e, e)$, entonces $p_1 \circ \alpha$ y $p_2 \circ \alpha$ son sb-homótopos a lazos constantes. Concretamente, existen $H_1 : I_{kM+k-1} \times I_T \longrightarrow X$ y $H_2 : I_{lM+l-1} \times I_S \longrightarrow Y$ b-homotopías de lazos basados $p_1 \circ \alpha \circ \rho_k \approx \mathcal{C}_{kM+k-1}$ y $p_2 \circ \alpha \circ \rho_l \approx \mathcal{C}_{lM+l-1}$, respectivamente. Entonces, tenemos $H_1 \circ (\rho_l \times id_{I_T}) : I_{klM+kl-1} \times I_T \longrightarrow X$ y $H_2 \circ (\rho_k \times id_{I_S}) : I_{klM+kl-1} \times I_S \longrightarrow Y$ b-homotopías $p_1 \circ \alpha \circ \rho_{kl} \approx \mathcal{C}_{kM+k-1} \circ \rho_l = \mathcal{C}_{klM+kl-1}$ y $p_2 \circ \alpha \circ \rho_{kl} \approx \mathcal{C}_{lM+l-1} \circ \rho_k = \mathcal{C}_{klM+kl-1}$, respectivamente. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $S = T$, ya que si no, podemos efectuar un razonamiento análogo al realizado en la parte a) del Lema 3.2 y obtener homotopías de misma longitud. Por lo tanto, tenemos una b-homotopía de lazos basados

$$(H_1 \circ (\rho_l \times id_{I_T}), H_2 \circ (\rho_k \times id_{I_T})) : I_{klM+kl-1} \times I_T \longrightarrow X \times Y$$

desde $(p_1 \circ \alpha \circ \rho_{kl}, p_2 \circ \alpha \circ \rho_{kl}) : I_{klM+kl-1} \longrightarrow X \times Y$ a $\mathcal{C}_{klM+kl-1} = (\mathcal{C}_{lM+l-1}, \mathcal{C}_{kM+k-1}) : I_{klM+kl-1} \longrightarrow X \times Y$, entonces $[\alpha] = e \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$.

Como ϕ es homomorfismo, inyectiva y sobreyectiva, entonces ϕ es isomorfismo de grupos. \square

Por ser composición de aplicaciones digitales basadas, ρ es una aplicación digital basada. Asimismo, por las construcciones efectuadas se verifica el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
 I_{3M+2} & \xrightarrow{\hat{\alpha}} & S(X, 6k) & & \\
 \downarrow \rho_3 & & \downarrow \rho_3 & \searrow \rho_{6k}^c & \\
 & & & & S(X, 6k-1) \\
 I_M & \xrightarrow{\alpha} & S(X, 2k) & \swarrow \rho & \\
 & & \downarrow \rho_{2k} & & \\
 & & X & &
 \end{array}$$

Por el diagrama superior, se tiene que

$$[\alpha] = [\alpha \circ \rho_3] = [\rho \circ \rho_{6k}^c \circ \hat{\alpha}] = \rho_*([\rho_{6k}^c \circ \hat{\alpha}]) \in \pi_1(S(X, 2k), \bar{x}_0).$$

De esta manera, si $(\rho_{6k-1})_* : \pi_1(S(X, 6k-1), \bar{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ es inyectivo y $(\rho_{2k})_*([\alpha]) = e$, se puede escribir

$$(\rho_{6k-1})_*([\rho_{6k}^c \circ \hat{\alpha}]) = (\rho_{2k})_* \circ \rho_*([\rho_{6k}^c \circ \hat{\alpha}]) = (\rho_{2k})_*([\alpha]) = e,$$

ya que $\rho_{6k-1} = \rho_{2k} \circ \rho : S(X, 6k-1) \rightarrow S(X, 2k) \rightarrow X$. Por lo tanto, al ser $(\rho_{6k-1})_*$ es inyectivo tendríamos que $[\rho_{6k}^c \circ \hat{\alpha}] = e \in \pi_1(S(X, 6k-1), \bar{x}_0)$ y así, $p_*(e) = [\alpha] = e$. Se deduce que la inyectividad de $(\rho_{2k})_*$ se sigue de la de $(\rho_{6k-1})_*$. Por lo que restaría probar la inyectividad para k impar, solamente.

Sea $\alpha : I_M \rightarrow S(X, 2k+1)$ lazo basado representando $[\alpha] \in \pi_1(S(X, 2k+1), \bar{x}_0)$ tal que $(\rho_{2k+1})_*([\alpha]) = [\rho_{2k+1} \circ \alpha] = e$. Entonces, tenemos una b-homotopía de lazos basados $\rho_{2k+1} \circ \alpha \circ \rho_{k'} \approx \mathcal{C}_K$ donde $\mathcal{C}_K : I_K \rightarrow X$ es la aplicación constante en x_0 y $K = k'M + k' - 1$ para algún k' . Por el Teorema A.1, podemos conseguir $\rho_{2k+1} \widehat{\rho_{2k+1} \circ \alpha \circ \rho_{k'}}$ recubridor de $\rho_{2k+1} \circ \alpha \circ \rho_{k'} : I_K \rightarrow X$. De esta manera, por el corolario A.4 en [22] (con α reemplazado por $\alpha \circ \rho_{k'}$) tendríamos que el triángulo superior izquierdo del siguiente diagrama conmuta en b-homotopías:

$$\begin{array}{ccc}
 S(I_K, 2k+1) & \xrightarrow{\widehat{\rho_{2k+1} \circ \alpha \circ \rho_{k'}}} & S(X, 2k+1) \\
 \rho_{2k+1} \downarrow & \nearrow & \downarrow \rho_{2k+1} \\
 I_K & \xrightarrow{\alpha \circ \rho_{k'}} & X \\
 & \searrow \rho_{2k+1} \circ \alpha \circ \rho_{k'} &
 \end{array}$$

Por el Teorema A.2, tenemos una b-homotopía de lazos basados $\rho_{2k+1} \widehat{\rho_{2k+1} \circ \alpha \circ \rho_{k'}} \approx \mathcal{C}_{(2k+1)K+2k} : I_{(2k+1)K+2k} \rightarrow S(X, 2k+1)$ y podríamos escribir que

$$[\alpha] = [\alpha \circ \rho_{k'}(2k+1)] = [\alpha \circ \rho_{k'} \circ \rho_{2k+1}] = [\rho_{2k+1} \widehat{\rho_{2k+1} \circ \alpha \circ \rho_{k'}}] = e.$$

Se deduciría que $(\rho_{2k+1})_*$ es inyectivo.

Hemos demostrado que para cada $k \geq 1$, $(\rho_k)_*$ es un homomorfismo inyectivo y sobreyectivo, entonces es un isomorfismo de grupos. \square

Corolario 3.4. Si $\rho_k^c : S(X, k) \longrightarrow S(X, k - 1)$ es una proyección parcial, entonces induce un isomorfismo $(\rho_k^c)_* : \pi_1(S(X, k), \bar{x}_0) \longrightarrow \pi_1(S(X, k - 1), \bar{x}_0)$ entre los grupos fundamentales.

Demostración. Recordemos que ρ_k^c es un factor de $\rho_k : S(X, k) \longrightarrow X$, ya que

$$\rho_k = \rho_{k-1} \circ \rho_k^c : S(X, k) \longrightarrow S(X, k - 1) \longrightarrow X$$

Nótese que por el Teorema 3.4, $(\rho_k)_*$ y $(\rho_{k-1})_*$ son isomorfismos y por el apartado b) del Lema 3.7, $(\rho_k)_* = (\rho_{k-1})_* \circ (\rho_k^c)_*$. Entonces,

$$(\rho_k^c)_* = (\rho_{k-1})_*^{-1} \circ (\rho_k)_*$$

es un isomorfismo. □

Como la noción de b-homotopía de equivalencia es muy rígida (ver Ejemplo 1.11), se prueba que el grupo fundamental permanece también invariante para una noción más débil, la sb-homotopía de equivalencia.

Teorema 3.5. Sean $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{Z}^m$ imágenes digitales basadas. Si $f : S(X, k) \longrightarrow Y$ y $g : S(X, l) \longrightarrow Y$ son sb-homótopas, entonces:

- a) $f_* = g_* : \pi_1(S(X, k), \bar{x}_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ cuando $k = l$.
- b) $f_* = g_* \circ \rho_* : \pi_1(S(X, k), \bar{x}_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ cuando $k > l$, siendo $\rho : S(X, k) \longrightarrow S(X, l)$ una proyección parcial.
- c) $f_* \circ \rho_* = g_* \pi_1(S(X, l), \bar{x}_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ cuando $k < l$, siendo $\rho : S(X, l) \longrightarrow S(X, k)$ una proyección parcial.

Demostración. En primer lugar, probemos a). De la Definición 1.24, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} S(X, m) & \xrightarrow{\rho_{l'}} & S(X, l) \\ \rho_{k'} \downarrow & & \downarrow g \\ S(X, k) & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

que conmuta en b-homotopías con $m = kk' = ll'$. Si $k = l$, entonces $k' = l'$ y tenemos que $f_* \circ (\rho_{k'})_* = g_* \circ (\rho_{k'})_*$ donde $\rho_{k'}$ es isomorfismo (Teorema 3.4). Finalmente, cancelando obtendríamos que $f_* = g_*$.

Ahora, veamos b). Si $k > l$, podemos usar las proyecciones parciales para escribir $\rho_{l'} = \rho \circ \rho_{k'} : S(X, m) \longrightarrow S(X, k) \longrightarrow S(X, l)$ donde

$$\rho = \rho_{l+1}^c \circ \dots \circ \rho_k^c : S(X, k) \longrightarrow S(X, k - 1) \longrightarrow \dots \longrightarrow S(X, l).$$

Así, tendríamos un diagrama que conmuta en b-homotopías

$$\begin{array}{ccc}
 S(X, m) & \xrightarrow{\rho_{k'}} & S(X, k) \\
 \downarrow \rho_{k'} & & \downarrow \rho \\
 & & S(X, l) \\
 & & \downarrow g \\
 S(X, k) & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

Como en a), se deduce que $f_* = g_* \circ \rho_*$. Al tener que $(\rho_{l'})_* = \rho_* \circ (\rho_{k'})_*$ siendo $(\rho_{l'})_*$, $(\rho_{k'})_*$ isomorfismos (teorema 3.4), también ρ_* lo es, al igual que los homomorfismos inducidos por las proyecciones parciales que lo componen.

Finalmente, c) es análogo a b). □

Teorema 3.6. Sean $X \subseteq \mathbb{Z}^m$ e $Y \subseteq \mathbb{Z}^n$ imágenes digitales basadas. Si X e Y son sb-homotópicamente equivalentes, entonces los grupos fundamentales son isomorfos.

Demostración. Haremos uso de la Definición 1.25 y sus elementos. Tenemos aplicaciones $f : S(X, k) \rightarrow Y$ y $g : S(Y, l) \rightarrow X$ las cuales para algún k, l satisfacen $f \circ G = \rho_{kl}$ y $g \circ F = \rho_{kl}$. Por ello, $f_* \circ G_* = (\rho_{kl})_*$ y $g_* \circ F_* = (\rho_{kl})_*$. Como $(\rho_{kl})_*$ es isomorfismo, entonces f_* es sobreyectiva y F_* es inyectiva. Asimismo, se tiene que $\rho_l \circ F = f \circ \rho_l$ y por lo tanto, $(\rho_l)_* \circ F_* = f_* \circ (\rho_l)_*$. Se deduce así que F_* es inyectiva cuando f_* lo es y por lo tanto, f_* induce un isomorfismo de grupos. Se concluye que

$$f_* \circ ((\rho_k)_*)^{-1} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(S(X, k), \bar{x}_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$$

es un isomorfismo de grupos, al ser composición de isomorfismos. □

Corolario 3.5. Si X es sb-contráctil, entonces $\pi_1(X, x_0) \cong \{e\}$.

Demostración. Se sigue del Teorema 3.6 y la Definición 1.26. □

Se cierra el capítulo y la memoria calculando el grupo fundamental de la circunferencia digital, es decir, el diamante.

Teorema 3.7. Si D es el diamante, entonces $\pi_1(D, (1, 0)) \cong \mathbb{Z}$.

Demostración. Tomamos como punto base en D a $(1, 0) \in D$. Definimos una correspondencia $w : \pi_1(D, (1, 0)) \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $w([\alpha]) := w(\alpha)$ (el grado o índice, ver Corolario A.1) para cada $[\alpha] \in \pi_1(D, (1, 0))$. Procedemos a demostrar que es un isomorfismo de grupos.

En primer lugar, w está bien definida. En efecto, sean $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(D, (1, 0))$ tales que $[\alpha] = [\beta]$. Los representantes son lazos basados $\alpha : I_M \rightarrow D$ y $\beta : I_N \rightarrow D$ para los cuales existen m, n y b-homotopía tal que $\alpha \circ \rho_m \approx \beta \circ \rho_n : I_{mM+m-1} = I_{nN+n-1} \rightarrow D$. Si $\bar{\alpha} : I_M \rightarrow [-L, L]$ es la única elevación de α (ver Lema A.1) que comienza en $0 \in [-L, L] \subseteq \mathbb{Z}$, entonces $\bar{\alpha} \circ \rho_m : I_{mM+m-1} \rightarrow [-L, L]$ es la única elevación de $\alpha \circ \rho_m$

que comienza en $0 \in \mathbb{Z}$. De esta manera,

$$\begin{aligned} w(\alpha) &= \frac{\bar{\alpha}(M) - \bar{\alpha}(0)}{4} \\ &= \frac{(\bar{\alpha} \circ \rho_m)(mM + m - 1) - (\bar{\alpha} \circ \rho_m)(0)}{4} \\ &= w(\alpha \circ \rho_m) \end{aligned}$$

Por un argumento similar, $w(\beta) = w(\beta \circ \rho_n)$. Por la Proposición A.1, se tendría que

$$w(\alpha) = w(\alpha \circ \rho_m) = w(\beta \circ \rho_n) = w(\beta).$$

Ahora, probemos que w es homomorfismo. Sean $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(D, (1, 0))$ tales que $[\alpha] = [\beta]$. Los representantes son lazos basados $\alpha : I_M \rightarrow D$ y $\beta : I_N \rightarrow D$ para los cuales existen $\bar{\alpha} : I_M \rightarrow \mathbb{Z}$ y $\bar{\beta} : I_N \rightarrow \mathbb{Z}$, elevación de α y β , respectivamente, donde la primera comienza en 0 y la segunda en $\bar{\alpha}(M)$. Entonces, la concatenación $\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$ es la elevación de $\alpha \cdot \beta$. De esta manera,

$$\begin{aligned} w([\alpha] \cdot [\beta]) &= w([\alpha \cdot \beta]) = \frac{(\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta})(M + N + 1) - (\bar{\alpha} \cdot \bar{\beta})(0)}{4} \\ &= \frac{\bar{\beta}(N) - \bar{\alpha}(0)}{4} \\ &= \frac{(\bar{\beta}(N) - \bar{\beta}(0)) + (\bar{\alpha}(M) - \bar{\alpha}(0))}{4} \\ &= \frac{\bar{\alpha}(M) - \bar{\alpha}(0)}{4} + \frac{\bar{\beta}(N) - \bar{\beta}(0)}{4} \\ &= w(\alpha) + w(\beta) \end{aligned}$$

Asimismo, w es sobreyectiva, ya que si $n \in \mathbb{Z}$, tomamos el lazo basado $\alpha_n : I_n \rightarrow D$ dado por $\alpha_n(t) := e^{2t\pi i}$, cuya elevación $\bar{\alpha} : I_n \rightarrow \mathbb{Z}$ está dada por $\bar{\alpha}(t) = 4t$ para cada $t \in I_n$. De esta manera,

$$w(\alpha_n) = \frac{\bar{\alpha}(n) - \bar{\alpha}(0)}{4} = \frac{4n}{4} = n.$$

Finalmente, w es inyectiva. Efectivamente, sean $[\alpha] \in \pi_1(D, (1, 0))$ tal que $\alpha : I_M \rightarrow D$ es un lazo basado, $w([\alpha]) = 0$ y $\bar{\alpha} : I_M \rightarrow [-L, L]$ es la única elevación de α que comienza en 0. Como $w([\alpha]) = \frac{\bar{\alpha}(M) - \bar{\alpha}(0)}{4} = \frac{\bar{\alpha}(M)}{4} = 0$, entonces $\bar{\alpha}(M) = 0$ y por lo tanto, $\bar{\alpha}$ es un lazo basado en $[-L, L]$. Podemos contraer $[-L, L]$ a $\{0\}$ a través de la homotopía $H : [-L, L] \times I_M \rightarrow [-L, L]$ dada por

$$H(s, t) := \begin{cases} -L + t & -L \leq s \leq -L + t \\ s & -L + t \leq s \leq L - t \\ L - t & L - t \leq s \leq L \end{cases},$$

para cada $(s, t) \in [-L, L] \times I_M$. Nótese que $H(s, 0) = s$, $H(s, M) = 0$ y $H(0, t) = 0$ para cada $s \in [-L, L]$, $t \in I_M$. Se demuestra que H es digital a través de un razonamiento análogo al de la prueba del Lema 1.2. Ahora, definiendo

$$\mathcal{H} := \rho \circ H \circ (\bar{\alpha} \times id_{I_M}) : [-L, L] \times I_M \rightarrow [-L, L]$$

tenemos una homotopía digital que verifica que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(s, 0) &= (\rho \circ H)(\bar{\alpha}(s), 0) = (\rho \circ \bar{\alpha})(s) = \alpha(s), \\ \mathcal{H}(s, M) &= (\rho \circ H)(\bar{\alpha}(s), M) = \rho(0) = (1, 0), \\ \mathcal{H}(0, t) &= (\rho \circ H)(\bar{\alpha}(0), t) = (\rho \circ H)(0, t) = \rho(0) = (1, 0), \\ \mathcal{H}(L, t) &= (\rho \circ H)(\bar{\alpha}(L), t) = (\rho \circ H)(0, t) = \rho(0) = (1, 0),\end{aligned}$$

para cada $s \in [-L, L]$, $t \in I_M$. Luego, \mathcal{H} es una b-homotopía $\alpha \approx \mathcal{C}_M : I_M \rightarrow D$, entonces $[\alpha] = e \in \pi_1(D, (1, 0))$. Se deduce así que w es inyectiva.

Se concluye que w es isomorfismo al ser homomorfismo inyectivo y sobreyectivo.

□

Apéndice

A.1. Caminos y homotopías en el diamante

En este apartado, se presentan algunos resultados los cuales se especializan sobre los caminos y lazos en el diamante D , normalmente considerado la versión digital de la circunferencia, que se usarán en los capítulos 2 y 3. En topología, siempre se ha considerado a la aplicación $\rho : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $\rho(t) = e^{2\pi ti}$, como la aplicación recubridora estándar. Considerando a los puntos de D como puntos sobre el plano complejo,

$$D = \{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\} = \{e^{\frac{k\pi i}{2}} \mid k = 0, 1, 2, 3\}$$

se puede definir la versión digital $\rho : \mathbb{Z} \rightarrow D$ dada por $\rho(n) = e^{\frac{n\pi i}{2}}$ y restringirla a cualquier intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{Z}$ para obtener una aplicación digital.

Se comienza aportando una versión digital de la propiedad de elevación de caminos.

Lema A.1. *Si se tiene el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \xrightarrow{f} & [-M, M] \\ \downarrow i & \nearrow \bar{\alpha} & \downarrow \rho \\ I_N & \xrightarrow{\alpha} & D \end{array}$$

y M tal que $[f(0) - N, f(0) + N] \subseteq [-M, M]$, entonces existe un único camino digital $\bar{\alpha} : I_N \rightarrow [-M, M]$ de longitud N que levanta α a través de ρ y comienza en $f(0) \in \rho^{-1}(\alpha(0))$.

Demostración. Construiremos $\bar{\alpha}$ inductivamente, demostrando al mismo tiempo que es único. Definimos $\bar{\alpha}(0) = f(0)$. Suponemos que para $k \in \{0, \dots, N-1\}$ hemos definido $\bar{\alpha}(s)$ para $s \in I_k$ tal que $(\rho \circ \bar{\alpha})(s) = \alpha(s)$. Además si $\alpha' : I_k \rightarrow \mathbb{Z}$ es otro camino de longitud k que comienza en $f(0)$ y levanta $\alpha|_{I_k}$, entonces $\alpha'(s) = \bar{\alpha}(s)$ para $s \in I_k$.

Nótese que si $\alpha(k) = e^{\frac{r\pi i}{2}}$ con $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, entonces $\bar{\alpha}(k) = 4q + r$ para algún $q \in \mathbb{Z}$. Además, la digitalidad de $\bar{\alpha}|_{I_k}$ implica que $-M < f(0) - k \leq 4q + r \leq f(0) + k < M$,

entonces tenemos espacio para extender $\bar{\alpha}$. Como se tendría que verificar que $\alpha(k+1) \sim_D \bar{\alpha}(k)$, donde $\alpha(k+1) = e^{\frac{(r+\epsilon)\pi i}{2}}$ con $\epsilon \in \{\pm 1, 0\}$, podemos extender $\bar{\alpha}$ a

$$\bar{\alpha}(k+1) = 4q + r + \epsilon.$$

Entonces, se tendría que $\bar{\alpha}(k+1) \sim_{[-M, M]} \bar{\alpha}(k)$ y por lo tanto, $\bar{\alpha}|_{I_{k+1}} : I_{k+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ es digital y levanta $\alpha|_{I_{k+1}}$. Además, si $\alpha' : I_{k+1} \rightarrow \mathbb{Z}$ es otro camino de longitud $k+1$ que comienza en $f(0)$ y eleva $\alpha|_{I_{k+1}}$, entonces por hipótesis de inducción de unicidad $\bar{\alpha}(k) = \alpha'(k)$. Por lo que tendríamos que $\alpha'(k+1) \sim_{[-M, M]} \alpha'(k) = \bar{\alpha}(k) = 4q + r$ y por un razonamiento similar al realizado anteriormente, tenemos que $\alpha'(k+1) = 4Q + r + \epsilon$ con $\epsilon \in \{\pm 1, 0\}$. Entonces, necesariamente $q = Q$ y $\alpha'(k+1) = \bar{\alpha}(k+1)$.

Continuando por inducción tendríamos la elevación construida, la cual efectivamente verifica las propiedades expuestas. \square

En topología, el índice (o grado) es fundamental. Podemos obtener una noción digital de este objeto.

Corolario A.1. *Para cada lazo en D , es decir, para cualquier camino digital $\alpha : I_N \rightarrow D$ con $\alpha(0) = \alpha(N)$, existe un entero $w(\alpha)$ (**número índice**) bien definido dado por*

$$w(\alpha) := \frac{\bar{\alpha}(N) - \bar{\alpha}(0)}{4},$$

donde $\bar{\alpha}$ es la única elevación de α garantizada por el lema A.1 para cualquier punto inicial $\bar{\alpha}(0)$.

Demostración. Hay que ver que si $\bar{\alpha}$ y α' son elevaciones de α que comienzan en n_0 y m_0 , respectivamente, $\bar{\alpha}(N) - \bar{\alpha}(0) = \alpha'(N) - \alpha'(0) = 4k$ para algún k . Como $\bar{\alpha}$ y α' son elevaciones de α , $\rho(\bar{\alpha}(N)) = \rho(\bar{\alpha}(0))$ y $\rho(\alpha'(N)) = \rho(\alpha'(0))$. Por lo tanto, $\bar{\alpha}(N) - \bar{\alpha}(0) = 4r$ y $\alpha'(N) - \alpha'(0) = 4k$, para algún k, r . Asimismo, se tiene que

$$\rho(n_0) = \rho(\bar{\alpha}(0)) = \alpha(0) = \rho(\alpha'(0)) = \rho(m_0).$$

Entonces, m_0 y n_0 difieren en un múltiplo de 4. De esta manera, podemos definir una elevación $\hat{\alpha}$ de α tal que para cada $s \in I_N$, se tiene que $\hat{\alpha}(s) = \bar{\alpha}(s) + m_0 - n_0$. Al comenzar en m_0 , por unicidad se tiene que $\hat{\alpha} = \alpha'$ y se concluiría así que $\bar{\alpha}(N) - \bar{\alpha}(0) = \alpha'(N) - \alpha'(0)$. \square

Asimismo, algunas aplicaciones en topología tienen la propiedad de elevar homotopías. En particular, la aplicación recubridora en los espacios recubridores la posee. La ρ que se ha definido al principio de la sección posee una característica similar en el plano digital, tal y como se enuncia a continuación.

Lema A.2. *Si se tiene el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} I_N \times \{0\} & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & [-L, L] \\ \downarrow i & \nearrow \bar{H} & \downarrow \rho \\ I_N \times I_M & \xrightarrow{H} & D \end{array}$$

donde $H : I_N \times I_M \longrightarrow D$ es una homotopía de caminos digitales de longitud N en D que comienza en $H(s, 0) = \alpha(s)$; $\bar{\alpha} : I_N \longrightarrow [-L, L]$ la única elevación de α a través de ρ para un punto inicial dado $\bar{\alpha}(0)$ y L suficientemente largo de tal modo que $[\bar{\alpha}(0) - (N + M), \bar{\alpha}(0) + (N + M)] \subseteq [-L, L]$. Entonces, existe una única $\bar{H} : I_N \times I_M \longrightarrow [-L, L]$ homotopía digital que levanta H a través de ρ y comienza en $\bar{\alpha}$.

Demostración. Construiremos \bar{H} inductivamente, demostrando al mismo tiempo que es única. Definimos $\bar{H}(s, 0) = \bar{\alpha}(s)$ para $s \in I_N$. Si $H' : I_N \times I_M \longrightarrow [-L, L]$ es otra elevación de H , debe verificar que $H'(s, 0) = \bar{\alpha}(s)$ para cada $s \in I_N$.

Suponemos que hemos construido $\bar{H} : I_N \times I_l \longrightarrow [-L, L]$ para $0 \leq l \leq M - 1$ elevación de H , tal que $\bar{H}(s, 0) = \bar{\alpha}(s)$ para $s \in I_N$ y es la única que verifica estas propiedades en $I_N \times I_l$. Seguimos construyendo \bar{H} en $(s, l + 1)$ para $s \in I_N$. Comenzamos por $\bar{H}(0, l + 1)$. Nótese que $\bar{H}(0, t)$ es la única elevación del camino $H(0, t)$ para $t \in I_l$, entonces $\bar{H}(0, l + 1)$ debe definirse de tal forma que extienda esta elevación única de caminos, lo que determina su valor y por lo tanto, $\bar{H}(0, l + 1) \sim_{[-L, L]} \bar{H}(0, l)$. Obsérvese que si H' eleva a H en $I_N \times I_l$, necesariamente $H'(0, l + 1) = \bar{H}(0, l + 1)$ por unicidad de elevación de caminos. Suponemos que $H(0, l + 1) = e^{\frac{ri\pi}{2}}$ para $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, entonces $\bar{H}(0, l + 1) = 4n + r$ para algún n . Al tener que $(0, l + 1)$, $(0, l)$ y $(1, l)$ son adyacentes dos a dos en $I_N \times I_M$, se tiene que

$$H(0, l) = e^{\frac{(r+\epsilon(0,-1))i\pi}{2}} \quad \text{y} \quad H(1, l) = e^{\frac{(r+\epsilon(1,-1))i\pi}{2}}$$

para $\epsilon(0, -1), \epsilon(1, -1) \in \{\pm 1, 0\}$ que satisfacen las desigualdades

$$|\epsilon(0, -1)| \leq 1, \quad |\epsilon(1, -1)| \leq 1, \quad |\epsilon(0, -1) - \epsilon(1, -1)| \leq 1.$$

Se sigue que $\bar{H}(0, l) = 4m + r + \epsilon(0, -1)$ y $\bar{H}(1, l) = 4p + r + \epsilon(1, -1)$ para algún m, p . Necesariamente, se tendría que verificar que $\bar{H}(0, l + 1) \sim_{[-L, L]} \bar{H}(0, l) \sim_{[-L, L]} \bar{H}(1, l)$, entonces $n = m = p$ y se verificaría que es digital.

Recopilando lo que hemos construido en el párrafo anterior, hemos extendido \bar{H} a $(I_N \times I_l) \cup \{(0, l + 1)\}$, demostrando que es única y digital. Ahora, efectuaremos una inducción secundaria suponiendo que hemos extendido \bar{H} a $(I_N \times I_l) \cup \{(0, l + 1), \dots, (u, l + 1)\}$ para algún u que verifique que $0 \leq u \leq N - 1$ de tal forma que es digital y es la única elevación de H en $(I_N \times I_l) \cup \{(0, l + 1), \dots, (u, l + 1)\}$, ya que el caso base $u = 0$ está probado en el párrafo anterior. Entonces, procedemos a definir $\bar{H}(u + 1, l + 1)$. Tómese en cuenta que la definición en este punto, estará determinada por el hecho que $\bar{H}(s, l + 1)$ es la única elevación de caminos de $H(s, l + 1)$ para $s \in I_{u+1}$. Entonces $\bar{H}(u + 1, l + 1)$ debe definirse de tal forma que extienda esta elevación única de caminos, lo que determina su valor y por lo tanto, $\bar{H}(u + 1, l + 1) \sim_{[-L, L]} \bar{H}(u, l + 1)$. Adviértase que si H' eleva a H en $I_N \times I_l$, necesariamente $H'(s, l + 1) = \bar{H}(s, l + 1)$ para $s \in I_{u+1}$ por unicidad de elevación de caminos, ya que $H'(0, l + 1) = \bar{H}(0, l + 1)$. Suponemos que $H(u + 1, l + 1) = e^{\frac{ri\pi}{2}}$ para $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, entonces $\bar{H}(u + 1, l + 1) = 4n + r$ para algún n . Al tener puntos en $(I_N \times I_l) \cup \{(0, l + 1), \dots, (u + 1, l + 1)\}$ adyacentes a $(u + 1, l + 1)$ tenemos valores de H (ver tabla A.1) para los cuales se tiene que

$$\epsilon(i, j) \in \{\pm 1, 0\} \quad \text{y} \quad |\epsilon(i, j) - \epsilon(i', j')| \leq 1$$

A. APÉNDICE

	$s = u$	$s = u + 1$	$s = u + 2$
$t = l + 1$	$e^{\frac{(r+\epsilon(-1,0))i\pi}{2}}$	$e^{\frac{r+i\pi}{2}}$	
$t = l$	$e^{\frac{(r+\epsilon(-1,-1))i\pi}{2}}$	$e^{\frac{(r+\epsilon(0,-1))i\pi}{2}}$	$e^{\frac{(r+\epsilon(1,-1))i\pi}{2}}$

Tabla A.1: Valores de $H(s, t)$ para (s, t) adyacentes a $(u+1, l+1)$ en $(I_N \times I_l) \cup \{(0, l+1), \dots, (u+1, l+1)\}$.

	$s = u$	$s = u + 1$	$s = u + 2$
$t = l + 1$	$4n_{(-1,0)} + r + \epsilon(-1, 0)$	$4n + r$	
$t = l$	$4n_{(-1,-1)} + r + \epsilon(-1, -1)$	$4n_{(0,-1)} + r + \epsilon(0, -1)$	$4n_{(1,-1)} + r + \epsilon(1, -1)$

Tabla A.2: Valores de $\bar{H}(s, t)$ para (s, t) adyacentes a $(u+1, l+1)$ en $(I_N \times I_l) \cup \{(0, l+1), \dots, (u+1, l+1)\}$.

siempre que $(i, j) \sim_{\mathbb{Z}^2} (i', j')$. Se sigue que por los valores de \bar{H} (ver tabla A.2) y ser digital en $(I_N \times I_l) \cup \{(0, l+1), \dots, (u, l+1)\}$, necesariamente, se tendría que verificar que $n_{(i,j)} = n$ y se seguiría que es digital en \bar{H} en $(I_N \times I_l) \cup \{(0, l+1), \dots, (u+1, l+1)\}$.

Por lo anterior, los pasos inductivos que queríamos probar se verifican. Por inducción H se eleva a un \bar{H} en $I_N \times I_M$ que verifica las propiedades presentadas. \square

Finalmente, se concluye esta sección presentando un resultado que permite distinguir cuando un lazo en el diamante es homótopo a uno constante a través del número índice.

Proposición A.1. *Si dos lazos en el diamante son homótopos, entonces poseen el mismo número índice. En particular, ningún lazo con número índice no nulo es homótopo a un lazo constante.*

Demostración. Sean $\alpha, \beta : I_N \rightarrow D$ lazos en el diamante tal que existe una homotopía digital $H : I_N \times I_M \rightarrow D$ de α a β . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $M = 1$, ya que en caso contrario, podemos ver la homotopía como una sucesión de 1-homotopías: $\alpha \approx \alpha_1 \approx \dots \approx \alpha_M = \beta$ donde para cada $i = 1, \dots, M$, se tiene que $\alpha_i(s) = H(s, i)$. Por el lema A.2, H se eleva a una homotopía digital $\bar{H} : I_N \times I_1 \rightarrow [-L, L]$ de $\bar{\alpha}$ a $\bar{\beta}$. Entonces, se verifica que

$$\bar{\alpha}(0) = \bar{H}(0, 0) \sim_{[-L, L]} \bar{H}(0, 1) = \bar{\beta}(0)$$

y por lo tanto, $\bar{\beta}(0) = \bar{\alpha}(0) + \epsilon_0$ con $\epsilon_0 \in \{\pm 1, 0\}$. Por un razonamiento similar, $\bar{\beta}(N) = \bar{\alpha}(N) + \epsilon_N$ con $\epsilon_N \in \{\pm 1, 0\}$. Entonces, se tiene que

$$w(\beta) = w(\alpha) + \frac{\epsilon_N - \epsilon_0}{4}.$$

Como el número índice es un entero y $|\epsilon_N - \epsilon_0| \leq 2$, tenemos que $w(\beta) = w(\alpha)$.

En particular un lazo constante en D se levanta a un camino digital constante, entonces el número índice es nulo. \square

A.2. Algunos resultados sobre la subdivisión de aplicaciones

En este apartado del apéndice, se realizará un esbozo de las pruebas de dos resultados que se usan en el Teorema 3.4. Por un lado, el primero consiste en la combinación del

Teorema 4.1 y el apartado C) del Corolario 6.2 en [24]. Por otro lado, el segundo resulta de combinar este mismo corolario con el Teorema 5.7 del mismo artículo. Se hará uso de las notaciones y convenios establecidos en la sección 1.3.

Teorema A.1. *Sea $\alpha : I_N \rightarrow X \subseteq \mathbb{Z}^n$ un camino basado de longitud N . Si $K = 2k+1 \geq 3$ es un número impar, entonces existe $\hat{\alpha} : S(I_N, 2k+1) = I_{N(2k+1)+2k} \rightarrow S(X, 2k+1)$ camino basado que hace que el siguiente diagrama conmute:*

$$\begin{array}{ccc} S(I_N, 2k+1) & \xrightarrow{\hat{\alpha}} & S(X, 2k+1) \\ \rho_{2k+1} \downarrow & & \downarrow \rho_{2k+1} \\ I_N & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

A $\hat{\alpha}$ se le denomina **recubridor** de α . Además si α es un lazo basado con $\alpha(0) = \alpha(N) = x_0$, entonces el recubridor $\hat{\alpha}$ es un lazo basado que verifica que $\hat{\alpha}(0) = \hat{\alpha}((2k+1)N + 2k) = \bar{x}_0$.

Demostración. Recordemos que para cada $i \in I_N \subseteq \mathbb{Z}$, tenemos que $\bar{i} = (2k+1)i + k \in S(i, 2k+1)$. Así, el recubrimiento puede ser descrito como:

$$\hat{\alpha}(j) = \begin{cases} \overline{\alpha(0)} & 0 \leq j < k \\ \overline{\hat{\alpha}(\bar{i} + t) = \overline{\alpha(i)} + t[\alpha(i+1) - \alpha(i)]} & 0 \leq i \leq N, 0 \leq t \leq 2k, \\ \overline{\alpha(N)} & \bar{N} \leq j \leq \bar{N} + 2k \end{cases}$$

para cada $j \in S(I_N, 2k+1)$. Nótese que en esta descripción hemos usado la suma vectorial y la multiplicación por un escalar. De esta manera, si $\alpha(i) = (x_1, \dots, x_n)$ y $\alpha(i+1) = (x'_1, \dots, x'_n)$, entonces

$$\hat{\alpha}(\bar{i} + t) = ((2k+1)x_1 + k + t[x'_1 - x_1], \dots, (2k+1)x_n + k + t[x'_n - x_n])$$

para cada $0 \leq t \leq 2k$. Por la forma en la que hemos construido $\hat{\alpha}$, tenemos que $\hat{\alpha}(\bar{i}) = \overline{\alpha(i)}$. En particular, si α es un lazo basado, tenemos que $\hat{\alpha}(\bar{0}) = \hat{\alpha}(\bar{N}) = \overline{x_0}$. Asimismo, por construcción $\hat{\alpha}(j) = \overline{\alpha(0)}$, para cada $0 \leq j \leq \bar{0} = k$ y $\hat{\alpha}(j) = \overline{\alpha(N)}$, para cada $(2k+1)N + k = \bar{N} \leq j \leq (2k+1)N + 2k$. Nótese que 0 es el punto base $S(I_N, 2k+1)$ y \bar{x}_0 es un punto base de $S(X, 2k+1)$. Recopilando todo lo anterior, se tendría la conmutatividad del diagrama. \square

Teorema A.2. *Sea $H : I_M \times I_N \rightarrow X \subseteq \mathbb{Z}^n$ una aplicación digital basada. Si $k \geq 1$, entonces existe $\hat{H} : S(I_M, 2k+1) \times S(I_N, 2k+1) \rightarrow S(X, 2k+1)$ aplicación digital basada que hace que el siguiente diagrama conmute:*

$$\begin{array}{ccc} S(I_M, 2k+1) \times S(I_N, 2k+1) & \xrightarrow{\hat{H}} & S(X, 2k+1) \\ \rho_{2k+1} \times \rho_{2k+1} = \rho_{2k+1} \downarrow & & \downarrow \rho_{2k+1} \\ I_M \times I_N & \xrightarrow{H} & X \end{array}$$

Si H es una b -homotopía de lazos basados desde $\alpha : I_M \rightarrow X$ a $\beta : I_M \rightarrow X$, entonces \hat{H} es una b -homotopía de lazos basados desde $\hat{\alpha} : I_{(2k+1)M+2k} \rightarrow S(X, 2k+1)$ a $\hat{\beta} : I_{(2k+1)M+2k} \rightarrow S(X, 2k+1)$, los recubridores de α y β definidos en A.1, respectivamente.

Demostración. Se define una homotopía recubridora \hat{H} en las aristas de $S(I_M, 2k + 1) \times S(I_N, 2k + 1)$ usando los recubridores de los caminos en X obtenidos restringiendo H a las aristas de $I_M \times I_N$ y se verificaría el diagrama. En particular, se verificaría que

$$\hat{H}(s, 0) = \hat{\alpha}(s) \quad \text{y} \quad \hat{H}(s, (2k + 1)N + 2k) = \hat{\beta}(s),$$

para cada $s \in I_{(2k+1)M+2k}$.

Además, si H es una b-homotopía de lazos basados, se tendría que $H(0, t) = x_0 = H(N, t)$ para cada $t \in I_N$. Como para la aplicación digital constante $\mathcal{C}_N : I_N \rightarrow X$ en x_0 su recubridor es de nuevo una aplicación digital constante $\hat{\mathcal{C}}_N = \mathcal{C}_{(2k+1)N+2k} : I_{(2k+1)N+2k} \rightarrow S(X, 2k + 1)$ en \bar{x}_0 , se tendría por la construcción de la homotopía recubridora \hat{H} que $\hat{H}(0, t) = \bar{x}_0 = \hat{H}((2k + 1)M + 2k, t)$ para cada $t \in I_{(2k+1)M+2k}$. Se deduce así que \hat{H} es una b-homotopía de lazos basados. □

A.3. Imagen digital en Python

Se ha creado una clase en Python que representa una imagen digital. Esta clase incluye operaciones típicas que se realizan en este ámbito como: encontrar los elementos adyacentes a cada elemento de una imagen digital, hacer subdivisiones k-ésimas, el producto digital de dos imágenes digitales, representar imágenes digitales (solo disponible para dimensiones inferior a 3) y proyectar canónicamente o parcialmente los elementos de una imagen digital. También, permite crear imágenes digitales típicas como el intervalo digital de longitud N o la n-esfera digital. En el código, se efectúa una simulación de las funcionalidades de la clase (para la imagen obtenida véase la figura A.1). Paralelamente, se comenta cada funcionalidad dentro del código.

```

1  #HEADER
2  __author__ = "Karim Omar Jerez Santana"
3  __credits__ = ['Gregory Lupton', 'John Oprea', 'Nicholas A. Scoville']
4
5  #NEEDED LIBS
6  import matplotlib.pyplot as plt
7  import numpy as np
8  import re
9  import itertools
10 from math import floor
11
12 #CLASSES
13 class digital_image():
14     """
15     Class which represents a digital image.
16     It contains some methods which are
17     usual operations in these objects.
18
19     Parameters:
20         elements: List of tuples.
21                 List of elements represented by
22                 a tuple.
23         defined_digital_image: string.
24                 String with pattern: I{number}
25                 (digital interval of length number)

```

```

26         or D{number} (n-sphere digital version).
27
28     Attributes:
29         elements: Dict.
30             Dictionary which the key is an
31             element from the digital image
32             given and its value is a list
33             with correspondant adjacent
34             elements (tuples).
35
36     """
37     def __init__(
38         self,
39         elements,
40         defined_digital_image
41     ):
42
43         self.elements = {}
44
45         if elements == None and defined_digital_image == None:
46             print('Generic digital image has been created')
47
48         elif bool(re.search("[D][0-9]*", defined_digital_image)) == True
49 and elements == None:
50             n = int(defined_digital_image[1:])
51             elements = __class__.generate_digital_sphere(n)
52         elif bool(re.search("[I][0-9]*", defined_digital_image)) == True
53 and elements == None:
54             n = int(defined_digital_image[1:])
55             elements = __class__.generate_interval(n)
56         else:
57             print('Elements have been read successfully!')
58
59         if elements != None or defined_digital_image != None:
60
61             for element in elements:
62                 self.elements[element] = []
63
64             self.adj_elements_find()
65
66     @staticmethod
67     def generate_interval(n):
68         """
69         Static method which generates
70         a list of 1-tuples which represents
71         digital interval of length n.
72
73         Parameters:
74             n: int.
75                 Length of interval.
76
77         Returns:
78             elements: List of tuples.
79                 List of 1-tuples which represents
80                 elements from digital interval
81                 of length n.
82
83         """

```

```
82     elements = [tuple([i]) for i in range(n+1)]
83     return elements
84 @staticmethod
85 def generate_digital_sphere(n):
86     """
87     Static method which generates
88     a list of (n+1)-tuples which
89     represents the n digital sphere.
90
91     Parameters:
92         n: int.
93         Sphere dimension.
94
95     Returns:
96         elements: List of tuples.
97         List of (n+1)-tuples which represents
98         elements from n digital sphere.
99
100    """
101    zero_element = [0]*(n+1)
102    elements = []
103    for i in range(len(zero_element)):
104        positive_element = zero_element.copy()
105        positive_element[i] = 1
106        elements.append(tuple(positive_element))
107        negative_element = zero_element.copy()
108        negative_element[i] = -1
109        elements.append(tuple(negative_element))
110    return elements
111 @staticmethod
112 def distance_btwn_numbers_less_one(number_1, number_2):
113     """
114     Static method which checks if distance
115     between numbers is less than one.
116
117     Parameters:
118         number_1: int.
119         number_2: int.
120
121     Returns:
122         Boolean.
123
124     """
125     if abs(number_2-number_1) <=1:
126         return True
127     else:
128         return False
129
130 @staticmethod
131 def adj_checker(element_1, element_2):
132     """
133     Static method which checks two elements
134     are adjacent.
135
136     Parameters:
137         element_1: tuple.
138         element_2: tuple.
139
```

```

140     Returns:
141         Boolean.
142
143     """
144     if type(element_1) == 'int' and type(element_2) == 'int':
145         return distance_btwn_numbers_less_one(number_1, number_2)
146     else:
147
148         tuple_len = len(element_1)
149         element_insp = 0
150         while element_insp <= tuple_len - 1:
151             check = __class__.distance_btwn_numbers_less_one(
152                 element_1[element_insp],
153                 element_2[element_insp]
154             )
155
156             if check == False:
157                 return False
158             element_insp += 1
159         return True
160
161     def adj_elements_find(self):
162         """
163         Method which fills elements attribute.
164
165         Parameters:
166             None.
167         Returns:
168             None.
169         """
170         elements_as_list = list(self.elements)
171         for element_1 in elements_as_list:
172             for element_2 in elements_as_list:
173                 if element_1 == element_2:
174                     continue
175                 else:
176                     adj_check = __class__.adj_checker(element_1,
177 element_2)
178                     if adj_check == True:
179                         self.elements[element_1].append(element_2)
180
181     @staticmethod
182     def subdivision(k, elements):
183         """
184         Method which finds k subdivision
185         of a digital image.
186
187         Parameters:
188             k: int.
189                 Subdivision number.
190             elements: list of tuples.
191                 Elements which are going
192                 to be subdivided.
193
194         Returns:
195             subdivision_elements: List
196             of tuples.
197                 Elements from subdivision.

```

```

197     """
198     subdivision_elements = []
199     for element in elements:
200         new_elements_gen = []
201         for sub_element in element:
202             poss_sub_element = []
203             for n in range(k):
204                 poss_sub_element.append(k*sub_element+n)
205                 new_elements_gen.append(poss_sub_element)
206             cp = itertools.product(*new_elements_gen)
207             for new_element in cp:
208                 subdivision_elements.append(new_element)
209     return subdivision_elements
210
211     @staticmethod
212     def partial_projection_number(k, number):
213         """
214         Static method which makes partial
215         projection on number.
216
217         Parameters:
218             k: int.
219                 Initial subdivision which
220                 is considered.
221             number: int.
222                 Number to project.
223
224         Returns:
225             new_number: int.
226                 maps of original number
227                 through partial projection.
228         """
229         x = number//k
230         j = number % k
231         if j >= 0 and floor(k/2)-1 >= j:
232             new_number = (k-1)*x+j
233         if j >= floor(k/2) and j <= k-1:
234             new_number = (k-1)*x+j-1
235         return new_number
236
237     @staticmethod
238     def project_element(
239         k,
240         element,
241         projection_type
242     ):
243         """
244         Static method which projects
245         an element.
246
247         Parameters:
248             k: int.
249                 Initial subdivision which
250                 is considered.
251             element: tuple.
252                 Element to map.
253             projection_type: str.
254                 Type of projection selected.

```

```

255         It can be canonical or partial.
256
257     Returns:
258         new_element: tuple.
259         maps of original element
260         through selected projection.
261     """
262     new_element = []
263     for number in element:
264         if projection_type == 'canonical':
265             new_number = floor(number/k)
266         elif projection_type == 'partial':
267             new_number = __class__.partial_projection_number(k,
268 number)
269         new_element.append(new_number)
270     return tuple(new_element)
271
272 @staticmethod
273 def project_image(
274     k,
275     elements,
276     projection_type
277 ):
278     """
279     Static method which projects
280     a digital image.
281
282     Parameters:
283     k: int.
284         Initial subdivision which
285         is considered.
286     elements: List of tuples.
287         Elements to map.
288     projection_type: str.
289         Type of projection selected.
290         It can be canonical or partial.
291
292     Returns:
293     new_elements: List of tuples.
294     projections of original elements.
295     """
296     new_elements = []
297     for element in elements:
298         if projection_type in ['canonical', 'partial']:
299             new_element = tuple(__class__.project_element(
300 k,
301 element,
302 projection_type
303 ))
304         else:
305             print('This projection type is not contemplated.')
306             return None
307         if new_element not in new_elements:
308             new_elements.append(new_element)
309     return new_elements
310
311 @staticmethod
312 def image_product(

```

```
312         elements_image_1 ,
313         elements_image_2
314     ):
315     """
316     Static method which calculates digital
317     product.
318
319     Parameters:
320         elements_image_1 : List of tuples.
321         List of elements.
322         elements_image_2 : List of tuples.
323         List of elements.
324
325     Returns:
326         new_elements: List of tuples.
327         List of elements which is the
328         product.
329
330     """
331     new_elements = []
332     for element in itertools.product(*[elements_image_1 ,
elements_image_2]):
333         new_element = []
334         for n in range(2):
335             for coordinate in element[n]:
336                 new_element.append(coordinate)
337             new_elements.append(tuple(new_element))
338     return new_elements
339
340
341 @staticmethod
342 def plot_digital_image (elements):
343     """
344     Static method which plots a digital
345     image.
346
347     Parameters:
348         elements : List of tuples.
349         List of elements which are going
350         to be plotted.
351
352     Returns:
353         None.
354
355     """
356     dimension = len(elements[0])
357     if dimension == 1:
358         new_elements = []
359         for element in elements:
360             new_elements.append((element[0],0))
361     __class__.plot_digital_image(new_elements)
362     elif dimension == 2:
363         x,y = zip(*elements)
364         fig = plt.figure()
365         ax = fig.gca()
366         ax.scatter(x, y)
367         plt.title('Digital image plot.')
368     elif dimension == 3:
```



```

369         x,y,z = zip(*elements)
370         fig = plt.figure()
371         ax = fig.gca(projection='3d')
372         ax.scatter(x, y, z)
373         plt.title('Digital image plot.')
374     else:
375         print('A plot cannot be done in higher dimensions than 3')
376
377
378
379 if __name__ == '__main__':
380
381     #We declare our digital images examples
382     I4 = digital_image(None, 'I4')
383     I3 = digital_image(None, 'I3')
384     #We extract elements of I3 and I4
385     I3_elements = list(I3.elements.keys())
386     I4_elements = list(I4.elements.keys())
387     #We show dictionary of adjacent elements in I3
388     print(I3.elements)
389     """
390     Output: {(0,): [(1,)], (1,): [(0,), (2,)], (2,): [(1,), (3,)], (3,):
391     [(2,)]}
392     """
393     #We calculate the third subdivision of I3 i.e. I11
394     print(I3.subdivision(3, I3_elements))
395     """
396     Output: [(0,), (1,), (2,), (3,), (4,), (5,), (6,), (7,), (8,), (9,),
397     (10,), (11,)]
398     """
399     #We calculate partial projection of previous i.e. I7
400     print(I3.project_image(
401         3,
402         I3.subdivision(3, I3_elements),
403         'partial'
404     ))
405     """
406     Output: [(0,), (1,), (2,), (3,), (4,), (5,), (6,), (7,)]
407     """
408     #We calculate canonical projection of previous i.e. I3
409     print(I3.project_image(
410         3,
411         I3.subdivision(3, I3_elements),
412         'canonical'
413     ))
414     """
415     Output: [(0,), (1,), (2,), (3,)]
416     """
417     #We calculate I4 x I3 and plot it
418     d = digital_image(None, None)
419     product = d.image_product(
420         I4_elements,
421         I3_elements
422     )
423     print(product)
424     """
425     Output:
426     [(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0),

```

A. APÉNDICE

```
425 (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1),  
426 (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2),  
427 (3, 3), (4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3)]  
428 ""  
429 d.plot_digital_image(product)
```

Esta clase se puede importar fácilmente escribiendo en el preámbulo del código:

```
1 pip install topology-digital-operations  
2 from topology_digital_operations import digital_image
```

Es decir, se encuentra en *PyPI*, el repositorio oficial en el lenguaje de programación Python.

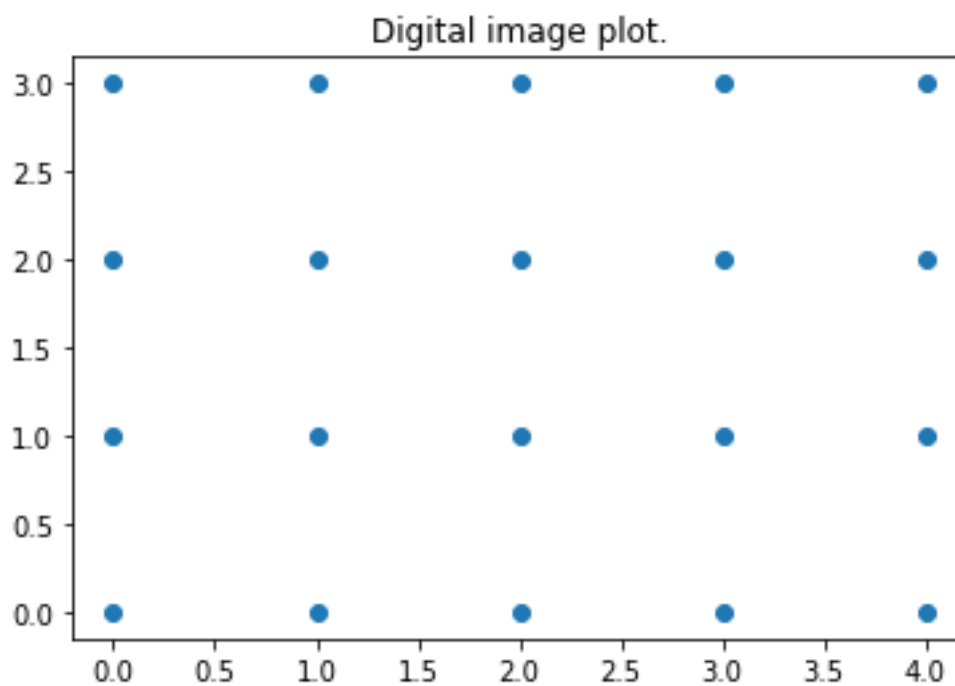


Figura A.1: Plot obtenido en la simulación del código en el apéndice A.3.

Bibliografía

- [1] R. Ayala, E. Domínguez, A.R. Francés, and A. Quintero. Homotopy in digital spaces. *Discrete Applied Mathematics*, 125(1):3–24, 2003. 9th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI 2000).
- [2] A. Borat and T. Vergili. Digital Lusternik–Schnirelmann category. *Turkish Journal of Mathematics*, 42:1845–1852, 07 2018.
- [3] L. Boxer. Digitally continuous functions. *Pattern Recognition Letters*, 15(8):833–839, 1994.
- [4] L. Boxer. A classical construction for the digital fundamental group. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 10:51–62, 2004.
- [5] L. Boxer. Properties of digital homotopy. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 22:19–26, 01 2005.
- [6] L. Boxer. Digital products, wedges, and covering spaces. *J. Math. Imaging Vis.*, 25(2):159–171, sep 2006.
- [7] L. Boxer and I. Karaca. The classification of digital covering spaces. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 32:23–29, 2008.
- [8] L. Boxer and I. Karaca. Some properties of digital covering spaces. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 37:17–26, 05 2010.
- [9] L. Boxer and I. Karaca. Actions of automorphism groups in a digital covering space. *Journal of Pure and Applied Mathematics: Advances and Applications*, 8:41–59, 01 2012.
- [10] L. Boxer and I. Karaca. Fundamental groups for digital products. *Adv. Appl. Math*, 11(4):161–179, 2012.
- [11] L. Boxer and P. Staecker. Homotopy relations for digital images. *Note di Matematica*, 37:99–126, 12 2017.
- [12] Staecker P.C. Boxer, L. Fundamental groups and Euler characteristics of sphere-like digital images. *Appl. Gen. Topol*, 17(2):139–158, 2016.
- [13] O. Cornea. *Lusternik-Schnirelmann Category*. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 2003.
- [14] Ö. Ege and I. Karaca. Digital fibrations. *Proceedings of the National Academy of Sciences, India - Section A*, 87, 09 2016.
- [15] J. Haarmann, M. Murphy, C. Peters, and P. Staecker. Homotopy equivalence in finite digital images. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 53, 04 2015.
- [16] S. Han. Digital coverings and their applications. *J. Appl. Math. Computing*, 18:487–495, 01 2005.
- [17] A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002.
- [18] I. Karaca, T. Meric, and T. Vergili. Computing higher dimensional digital homotopy groups. *Applied Mathematics Information Sciences*, 8, 09 2014.

BIBLIOGRAFÍA

- [19] T. Y. Kong and A. Rosenfeld. Digital topology: Introduction and survey. *Comput. Vision Graph. Image Process.*, 48(3):357–393, dec 1989.
- [20] T.Y. Kong. A digital fundamental group. *Computers Graphics*, 13(2):159–166, 1989.
- [21] T.Y. Kong, A.W. Roscoe, and A. Rosenfeld. Concepts of digital topology. *Topology and its Applications*, 46(3):219–262, 1992.
- [22] G. Lupton, J. Oprea, and N.A Scoville. A fundamental group for digital images. *Journal of applied and computational topology*, (5):249–311, 2021.
- [23] G. Lupton, J. Oprea, and N.A Scoville. Homotopy theory in digital topology. *Discrete Computational Geometry*, (67):112–165, 2022.
- [24] G. Lupton, J. Oprea, and N.A Scoville. Subdivision of maps of digital images. *Discrete Computational Geometry*, (67):698–742, 2022.
- [25] G. Lupton and N. Scoville. Digital fundamental groups and edge groups of clique complexes. *Journal of Applied and Computational Topology*, 6:1–30, 07 2022.
- [26] Greg Lupton, John Oprea, and Nicholas A. Scoville. The digital hopf construction. *Topology and its Applications*, 326:108405, 2023.
- [27] W.S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1991.
- [28] J.P. May. *A Concise Course in Algebraic Topology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, 1999.
- [29] A. Rosenfeld. ‘continuous’ functions on digital pictures. *Pattern Recognition Letters*, 4(3):177–184, 1986.
- [30] A. Rosenfeld and J.L. Pfaltz. Sequential operations in digital picture processing. *J. ACM*, 13:471–494, 1966.
- [31] E.H. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill series in higher mathematics. Springer, 1989.