



Universidad  
de La Laguna

---

# Modelos de Colas Aplicación al Servicio de Emergencias 112

*Queueing Models  
An Application to the 112 Emergency Service*

Jesica Rodríguez Hernández

*Trabajo de Fin de Grado*

Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa

Facultad de Matemáticas

Universidad de La Laguna

---

La Laguna, 12 de septiembre de 2014

Dr. D. **Joaquín Sicilia Rodríguez**, con N.I.F. 42.033.231-H, Catedrático de Universidad adscrito al Departamento de Matemáticas, Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de La Laguna

## **C E R T I F I C A**

Que la presente memoria titulada:

*“Modelos de Colas. Aplicación al Servicio de Emergencias 112.”*

ha sido realizada bajo su dirección por Dña. **Jesica Rodríguez Hernández**, con N.I.F. 51.148.855-Y.

Y para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente y a los efectos oportunos firman la presente en La Laguna a 12 de septiembre de 2014

## Agradecimientos

A mi familia y amigos,  
por todo el apoyo recibido durante esta dura etapa.

A D. Joaquín Sicilia,  
tutor de este trabajo, por su ayuda en el desarrollo del mismo.

Y por último a los responsables del Centro Coordinador  
de Emergencias y Seguridad 1-1-2 por suministrarnos los datos de este trabajo  
y en particular, a D. Carlos B. Rosa Remedios, por su gran ayuda y colaboración.

## Resumen

*El objetivo de este trabajo es aplicar la Teoría de Colas al estudio del sistema de atención de llamadas del Servicio de Emergencia 1-1-2 mantenido por el Gobierno de Canarias.*

*Usando los conceptos y la metodología que nos brinda dicha teoría, primero caracterizamos el modelo de línea de espera que mejor se ajusta al servicio de emergencia, para posteriormente desarrollar y determinar algunos indicadores y medidas de eficiencia del sistema telefónico de atención a los usuarios.*

*Finalmente seleccionaremos un conjunto de fechas señalas en las que se encuentran festivos conocidos y algún periodo seleccionado al azar, para analizar la evolución del sistema en distintos momentos de tiempo.*

**Palabras clave:** Teoría de colas, modelos de colas poissonianas, indicadores de eficiencia, tasa de llegada, tasa de salida y número de canales o servicio.

### **Abstract**

The objective of this memory is to apply the Queueing Theory to study the Call Center 1-1-2 that takes care of the emergency services, and which is supported by the Government of Canary Islands.

Using the concepts and methodology that gives us the theory, first we characterize the waiting line model that best fits the emergency service, and then develop and identify some indicators and efficiency measures of the system.

Finally, to analyze the evolution of the system during different time periods, we select a set of special dates related to holidays and some randomly selected periods.

***Keywords:*** *Queueing Theory, Poisson Queueing models, efficiency indicators, arrival rate, service rate and number of service channels.*

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Motivación y Objetivos . . . . .	2
1.2. Servicio de Emergencia 112 . . . . .	3
1.2.1. Funcionamiento del Sistema . . . . .	3
<b>2. Fundamentos de la Teoría de Colas</b>	<b>6</b>
2.1. Conceptos básicos de los Sistemas de Colas . . . . .	7
2.2. Elementos que describen un Sistema de Colas . . . . .	8
2.3. Otras características para configurar un Sistema . . . . .	9
<b>3. Procesos poissonianos</b>	<b>11</b>
3.1. Proceso de Poisson . . . . .	11
3.2. Proceso de Nacimiento y Muerte . . . . .	13
<b>4. Modelos de colas de Poisson</b>	<b>15</b>
4.1. Sistema Monocanal con Población Ilimitada . . . . .	15
4.1.1. Obtención de las Probabilidades . . . . .	15
4.1.2. Indicadores o Medidas de Eficiencia del Sistema de Colas . . . . .	17
4.2. Sistema Multicanal con Población Ilimitada . . . . .	19
4.2.1. Obtención de las Probabilidades . . . . .	19
4.2.2. Indicadores o Medidas de Eficiencia del Sistema . . . . .	21
<b>5. Manipulación de los datos y obtención de resultados</b>	<b>24</b>
5.1. Descripción de los datos . . . . .	24
5.2. Manipulación de los Datos . . . . .	25
5.3. Resultados obtenidos . . . . .	26
<b>6. Conclusiones</b>	<b>39</b>
<b>A. Apéndice</b>	<b>41</b>
A.1. Fórmulas de Little . . . . .	41
A.2. Distribución de Erlang . . . . .	42
A.3. Gráficas de la tasa de llamadas . . . . .	42
A.3.1. Carnavales . . . . .	42

A.3.2. Semana santa . . . . .	43
A.3.3. Semana 8 - 16 abril . . . . .	44
A.3.4. Mes de agosto . . . . .	44
A.3.5. Mes de octubre . . . . .	45
A.4. Indicadores de eficiencia . . . . .	46
A.4.1. Semana de Carnaval . . . . .	46
A.4.2. Semana Santa . . . . .	48
A.4.3. Semana del 8 al 14 de abril . . . . .	49
A.4.4. Mes de agosto . . . . .	51
A.4.5. Mes de octubre . . . . .	56

**Bibliografía**

# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo se presentan los objetivos del trabajo que se desarrolla en esta memoria y posteriormente se describe el Centro Coordinador de Emergencias y Seguridad 1-1-2 y su funcionamiento.

### 1.1. Motivación y Objetivos

Las razones que motivaron la realización del presente proyecto fueron estudiar y analizar aplicaciones de la Teoría de Colas a problemas de la vida cotidiana y así, poder aplicar los conocimientos adquiridos sobre esta materia en la asignatura Modelos de Investigación Operativa, a un caso real, donde se pueda analizar de forma objetiva el funcionamiento del sistema de colas planteado.

Gracias a la buena voluntad de los responsables del servicio de emergencias 1-1-2 ofrecido por el Gobierno de Canarias, y en particular a D. Luis Santacreu Ríos director del Centro Coordinador de Emergencias y Seguridad y a D. Carlos B. Rosa Remedios, responsable de la Unidad de Tecnología de la Información y Comunicación (UNIDAD TIC), pudimos disponer de los datos anonimizados relacionados con este servicio a lo largo del año 2013 en la provincia de Santa Cruz de Tenerife y así poder realizar el estudio aquí presentado.

El objetivo del trabajo es analizar el funcionamiento de este sistema de emergencias, desde el punto de vista de la gestión del servicio y la atención al cliente. Hemos necesitado usar la hoja de cálculo Excel, para manipular adecuadamente los datos suministrados.

Se estudia el sistema de colas o líneas de espera que se forma cuando los clientes solicitan un servicio de ayuda al 1-1-2. Recogemos la distribución de la tasa de llegada y la tasa de servicio a lo largo de diferentes periodos de tiempo. A partir de ello determinamos distintos indicadores que reflejarán cómo se comporta el sistema de emergencia. Dichas medidas nos pueden ayudar a detectar posibles deficiencias, las cuales puedan ser corregidas para mejorar la efectividad del servicio.

En la siguiente sección describimos las características y funcionamiento del sistema de emergencias 1-1-2, que hemos comentado.

## 1.2. Servicio de Emergencia 112

El Centro Coordinador de Emergencias y Seguridad (CECOES) 1-1-2 es un servicio público que da respuesta a todas las llamadas de emergencia que se producen en las islas. Gestiona los recursos que existen en el Archipiélago en el ámbito de las emergencias y permite que cualquier alerta, ya sea sanitaria, de seguridad, de salvamento, extinción de incendios o rescate, pueda ser gestionada de una forma integral por los responsables correspondientes.

El servicio se crea en 1998 integrando al Archipiélago en el Sistema Europeo de Urgencias y Emergencias, cumpliendo así la Decisión de la Unión Europea 396/1991 por la que se recomendaba a los estados miembros la puesta en marcha de un único número de teléfono, el 1-1-2, para acceder a todos los servicios de urgencia de cada uno de los países comunitarios.

### 1.2.1. Funcionamiento del Sistema

El CECOES 1-1-2 se basa en un esquema general de sistema de información, existiendo entradas al sistema, procesos para la toma de decisiones y respuestas del sistema frente a la demanda recibida y tramitada a través de las informaciones obtenidas.

El CECOES 1-1-2 tiene unas entradas por las que recibe alertas, las cuales sufren un proceso de transformación a través del sistema de clasificación, convirtiéndolas en demandas. A estas demandas se les adjudica una respuesta, concretándose la misma, mediante la coordinación, en un recurso o recursos determinados para realizar la asistencia. Además consta de dos Salas Operativas, una en Santa Cruz de Tenerife y otra en Las Palmas de Gran Canaria, de tal forma que cada una atiende a los ciudadanos de la provincia correspondiente, pudiendo balancear la atención entre salas según la carga de llamadas.

Es en el Área de Recepción de Demandas donde se reciben todas las llamadas de los ciudadanos. Allí se reciben llamadas de diferente índole: llamadas de emergencias, de urgencias, consultas, llamadas para facilitar o solicitar información, etc. El cometido principal de los Operadores de Demanda es localizar el lugar y clasificar cada una de las demandas o de los incidentes que reciban. Ello ha de hacerse de forma rápida, clara y concisa, realizando las preguntas necesarias para conseguir su propósito. La información recabada debe reflejarse en la herramienta informática de gestión de incidentes denominada Hipatia.

Las llamadas recibidas en el Área de Recepción de Demandas pueden tener su origen en cualquier punto del Archipiélago, así que debemos estar preparados y conocer el *modus*

*operandi*, para localizar los incidentes independientemente de cual sea su zona de origen.

Por otro lado, en el flujo de llamadas dentro del CECOES 1-1-2, se pueden distinguir dos vías de acceso principales, como son, la telefonía (medio de entrada de las llamadas de los ciudadanos) y las radiocomunicaciones (utilizado por los recursos intervinientes).

Dentro de la aplicación de gestión telefónica( CTPhone), podemos recibir demandas del ciudadano por tres vías distintas:

1. La primera es con una simple llamada desde cualquier teléfono que se encuentre ubicado dentro de la Comunidad Autónoma, tanto fijos como móviles, en virtud del Decreto 62/1997, por el que se regula la implantación del Servicio de Atención de Urgencias y Emergencias a través del Teléfono Único Europeo de Urgencias 1-1-2.
2. También el Centro dispone de la posibilidad de recepción de alertas a través de una aplicación para terminales móviles con ios y android, denominada *FRESS*. Dicha aplicación está desarrollada por una Fundación con el mismo nombre. Está disponible para su descarga a través de Appstore y Play Store, respectivamente, por medio de la cual, en caso de que el usuario tenga cobertura de datos, se pueden transmitir además del servicio de voz, la posición exacta del alertante, las funcionalidades de CHAT y de envío de imágenes. El usuario tiene la posibilidad de incluir voluntariamente datos específicos de salud, por lo que se incrementan las funcionalidades al transmitir de forma instantánea datos relevantes desde el punto de vista de la atención requerida.
3. Por último, el CECOES 1-1-2, en su preocupación de cobertura de emergencias para colectivos vulnerables, tiene desarrollada una aplicación para la comunicación con alertantes con discapacidad auditiva de cualquier tipo. En este caso se realiza la comunicación a través de un CHAT mediante SMS en ambos sentidos. Para el uso de esta aplicación, el usuario tiene que estar registrado.

En general, el funcionamiento de una llamada entrante cuyo ámbito sea la provincia de Santa Cruz de Tenerife, sería el siguiente: Primero la llamada entra directamente a la sala del 1-1-2 en Santa Cruz de Tenerife. Si la misma no es atendida en 15 segundos, dicha llamada es derivada a la sala del 1-1-2 de Las Palmas de Gran Canaria para ser atendida lo antes posible. Una vez que la llamada está siendo atendida, se recogen una serie de datos para posteriormente saber a qué sector debe derivarse esta llamada para ser atendida la petición correspondiente del ciudadano. La llamada se puede trasladar a distintos sectores dependiendo de la necesidad del usuario. Los posibles sectores son: *el sanitario*, o sea, médicos, ambulancias, etc, *extinción y salvamento*, encargada de incendios y rescate, *seguridad* formada por la Policía Local, Guardia Civil, etc y *la coordinación multisectorial*, es decir, la figura que tiene la visión global de todos los incidentes que afectan a varios sectores.

Una vez que la llamada ha sido atendida se realiza un seguimiento de ésta hasta que se le de una respuesta satisfactoria a la petición del usuario.

Nuestro objetivo será analizar el funcionamiento del Servicio de Emergencias 1-1-2 desde el punto de vista de la Teoría de Colas, es decir, estudiar si el sistema de llamadas telefónicas que solicitan ayuda es atendido con los medios suficientes y si el sistema funciona adecuadamente, de forma que el número de clientes en el sistema, ya sea siendo atendido o esperando serlo, no sea demasiado grande y que los tiempos de espera sean aceptables.

En los siguientes capítulos se expondrán los conceptos teóricos que ayudarán a la formalización del problema desde una metodología matemática.

## Capítulo 2

# Fundamentos de la Teoría de Colas

En general, una cola, o línea de espera, se forma cuando tenemos ciertas unidades o elementos que llegan a una instalación para demandar cierto tipo de servicio. Como generalmente el servicio está ocupado, las unidades deben esperar para ser atendidas y se forma una línea de espera.

Por ejemplo, supongamos que tenemos una caja registradora en algún tipo de tienda. Si la cola que se forma es grande los clientes pueden impacientarse y dejar el establecimiento, causando una pérdida en los beneficios que podrían proporcionar los clientes que se impacientan y abandonan la cola. Para analizar estas situaciones surge la Teoría de Colas, la cual es una teoría matemática descriptiva, que estudia la evolución del sistema de colas creado cuando un conjunto de clientes demandan ciertos servicios llevados a cabo por uno o varios servidores. Esta teoría intenta formular, interpretar y predecir el funcionamiento de las colas, con el propósito de tener un mayor conocimiento de las mismas y realizar los cambios oportunos en éstas, para que sean más eficientes en su funcionamiento.

Debemos reflexionar sobre cuántas veces y cuánto tiempo nos vemos forzados a esperar, y el tiempo que nos retrasan las colas en nuestras actividades cotidianas, para comprender la importancia de hacer que estas colas sean lo más eficientes posible. Desde un punto de vista más práctico, si calculamos aproximadamente el tiempo, por término medio, empleado en esperar en las distintas congestiones que nos encontramos a lo largo de una semana y luego lo extendemos al total de los años de vida, la cantidad de tiempo desperdiciado en líneas de espera es extremadamente grande.

Que las colas sean inevitables y, por lo tanto tengamos que esperar, es consecuencia del incremento de la población, es decir, debido a que hay una gran cantidad de individuos solicitando el mismo servicio se forma la línea de espera. Es lógico pensar que al aumentar la población, deberían aumentar los servicios que se ofrecen en una instalación determinada, pero con frecuencia los costos restringen este tipo de decisiones. Por ejemplo, si queremos evitar las colas producidas por el aumento del tráfico, se deberían ensanchar las calles, algo que dependiendo de la zona puede ser imposible o produciría unos costos demasiado

elevados que no pueden asumirse.

Muchos sistemas de colas implican factores humanos. Al estudiar las causas y remedios de estos sistemas debemos tenerlos en cuenta, puesto que los factores humanos en la mayoría de los casos no se pueden separar del problema en cuestión.

## 2.1. Conceptos básicos de los Sistemas de Colas

En este apartado presentamos los conceptos más importantes de un sistema de colas.

1. **Sistema:** Institución que presta un determinado tipo de servicio.
2. **Usuario/Cliente:** Persona, animal o elemento que se acerca al sistema a demandar un servicio.
3. **Estado del Sistema:** Representación de la situación del sistema en relación con el número de clientes en un momento dado ( $E_n$  representa que hay  $n$  clientes en el sistema).
4. **Canal o Estación del Servicio:** Lugar donde se presta cualquier tipo de servicio que requiera el cliente. Un sistema puede ser:
  - a) *Monocanal* (Sistema en el que solo hay un canal o estación.)
  - b) *Multicanal* (Sistema en el que hay múltiples canales.)

Admitimos que cada canal es atendido por un solo servidor.

5. **Cola o línea de espera:** Conjunto de usuarios que están en el sistema en espera de ser atendidos por una estación de servicio.
6. **Tasa de Llegada:** Número de clientes por unidad de tiempo que se incorporan al sistema para demandar algún tipo de servicio. Se denota por  $\lambda_n$ , si depende del número de clientes  $n$  que hay en el sistema en ese momento. Si no depende de los clientes del sistema lo denotaremos por  $\lambda$ . Por ejemplo, la tasa de llegada podría ser  $\lambda = 3$  personas por minuto.
7. **Tasa de servicio:** Número de usuarios o clientes por unidad de tiempo que pueden ser atendidos por el sistema. A la *tasa de servicio* la denotaremos como  $\mu_n$  si depende del número de clientes  $n$  que hay en el sistema en ese momento, o bien  $\mu$  si no hay dependencia.
8. **Tamaño de la Población:** Representa el número de clientes potenciales que puede tener el sistema de colas. Pueden ser:
  - a) *Infinito:* Se considera que el sistema tiene un número ilimitado de clientes.

b) *Finito*: El sistema de colas tiene una población limitada a  $m$  clientes. Por ejemplo, un medico de familia solo puede atender a los ciudadanos que le correspondan dentro de su localidad.

9. **Intensidad de tráfico**: Lo denotaremos como el cociente entre la tasa de llegada y la tasa de servicio. Esto es  $\varphi \equiv \frac{\text{Tasa de llegada}}{\text{Tasa de servicio}} = \frac{\lambda}{\mu}$

## 2.2. Elementos que describen un Sistema de Colas

Un sistema de colas se caracteriza teniendo en cuenta cuatro partes fundamentales, que veremos a continuación. Con cada una de ellas se asocian una serie de hipótesis alternativas.

1. **Distribución de llegadas**. Las llegadas a una cola se producen como una cierta distribución de frecuencias, sobre la que cabe hacer hipótesis y así distinguir varios tipos.

a) *Llegadas deterministas (D)*. En este tipo de llegadas se conoce el tiempo que transcurre entre las distintas llegadas consecutivas y así determinamos la tasa de llegada  $\lambda$  correspondiente.

b) *Llegadas aleatorias*. En estas llegadas se tendrá que indicar que proceso estocástico o que distribución siguen dichas llegadas. Dentro de las llegadas aleatorias se establecen los siguientes casos:

1) Las llegadas siguen un proceso de Poisson. Se denota por  $M$ .

2) Las llegadas siguen una distribución de Erlang, que es igual a la distribución Gamma de parámetro entero, la cual se explica en el apéndice (ver A.2). Se denota por  $E$ .

3) Las llegadas siguen una distribución general. Se denota por  $G$ .

2. **Distribución de salida o del servicio**. Es la distribución que sigue la tasa de servicio del sistema de colas. Esta distribución como la anterior se divide en:

a) *Salidas deterministas (D)*. Estas requieren conocer el tiempo de servicio que transcurre entre dos salidas consecutivas. Así se determina directamente la tasa de servicio  $\mu$ .

b) *Salidas aleatorias* Estas distribuciones de salida también pueden dividirse como las distribuciones de llegada aleatorias nombradas anteriormente.

La distribución de salida de una cola es muy importante, sobre todo si la salida de una cola constituye la entrada en otra distinta.

3. **Número de canales**. Podemos tratar con sistemas que solo tenga un canal de servicio, o bien con sistemas que disponen de varios canales. En este último caso denotaremos por  $s$  al número de canales. El comportamiento de los clientes también influye en los sistemas de colas. Los clientes pueden *rebelarse*, es decir, los clientes que llegan a una cola pueden decidir no unirse a ésta, por no querer esperar. Se

asumirá en este trabajo que los clientes esperan en la cola hasta ser atendidos.

Además los canales de servicio pueden estar disponibles para cualquier unidad que espera en un sistema de colas, o pueden estarlo solamente para ciertas unidades que esperan. En este último caso, las otras unidades están bloqueadas y tienen que esperar hasta que un canal, que pueda prestarle el servicio, esté disponible. No obstante, asumimos aquí que los servidores atienden a cualquier cliente.

4. **Tamaño de la población.** Como mencionamos anteriormente la población puede o no estar limitada. Si estuviera limitada, denotaremos por  $m$  el tamaño de la población de posibles clientes del sistema.

La regla de prioridad para atender a las unidades o clientes que nosotros usaremos será: **FIFO**  $\equiv$  (*first in, first out*), es decir, primero en entrar primero en salir. No obstante, puede haber otras reglas de prioridad como, por ejemplo, la regla **LIFO**  $\equiv$  (*last in, first out*), es decir, último en entrar primero en salir.

### 2.3. Otras características para configurar un Sistema

Existe una notación general para especificar los modelos de colas que vamos a analizar. La notación sería:  $A/B/C/D$ , donde  $A \equiv$  *Distribución de llegada*,  $B \equiv$  *Distribución de Salida*,  $C \equiv$  *Número de Canales*,  $D \equiv$  *Tamaño de la población*. Esta notación puede ampliarse con otros parámetros si fuera necesario.

A continuación veremos otras características que nos ayudan a configurar un sistema de colas.

1. La línea de espera puede estar o no limitada por necesidades de espacio. Si en la cola no puede haber más de  $k$  elementos esperando tendremos, por ejemplo, el siguiente sistema  $M/M/1/m/k$ , es decir llegadas y salidas con distribución de Poisson, un canal de servicio, población limitada a  $m$  clientes y un lugar de espera donde puede haber a lo sumo  $k$  individuos (esto puede ocurrir en una consulta de médico o en una oficina bancaria). En el presente trabajo no contemplamos limitaciones de espacio.
2. Los clientes pueden acudir a un sistema para solicitar un sólo servicio o varios. En el último caso, se hablaría de una red de colas. Supondremos en este trabajo que los clientes demandarán solo un servicio en el sistema.
3. Los clientes pueden llegar uno a uno o en grupo. En este último caso, hablaríamos de colas en grupo o en masa. Consideraremos en la presente memoria que los clientes llegan individualmente al sistema.

4. Si se permite o no que haya abandono en la cola, es decir, si permitimos la existencia de renegados. Nosotros no contemplaremos esta posibilidad.
5. En el caso de existir varias colas, si se permite o no el intercambio de fila o cola. Asumiremos que los clientes se mantienen en la cola elegida hasta ser atendidos.

En el resto de la memoria nos centraremos en el estudio de los modelos de cola poissonianas, es decir, modelos de colas cuyas entradas y salidas siguen procesos de Poisson y el número de clientes en el sistema se ajusta a un proceso de nacimiento y muerte. Por ello, en el siguiente capítulo expondremos los conceptos teóricos relacionados con los procesos citados.

## Capítulo 3

# Procesos poissonianos

Los procesos que desarrollaremos en este capítulo están relacionados con la distribución de llegadas y de salidas de clientes en un sistema de colas, y siguen ciertas hipótesis que se dan con frecuencia en la práctica. El desarrollo que veremos a continuación examina primero las distintas propiedades del proceso estocástico de Poisson y posteriormente el proceso de nacimiento y muerte.

Comenzaremos comentando que un proceso estocástico o aleatorio es una variable aleatoria que a su vez depende de algún otro factor, como puede ser el tiempo o el lugar geográfico donde se mida esa variable. Generalmente se considera el tiempo como ese nuevo factor.

Así, un proceso estocástico  $x(\omega, t)$  puede expresarse como la función :

$$\begin{aligned} x(\omega, t) : \Omega \times T &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, t) &\longrightarrow x(\omega, t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

siendo  $\Omega = \text{espacio muestral}$  y  $T = \text{espacio temporal}$ .

Si fijamos un valor  $\omega_0 \in \Omega$  del espacio muestral, entonces  $x(\omega_0, t)$  representa una trayectoria del proceso. Si fijamos un instante de tiempo  $t_0$ , entonces  $x(\omega, t_0)$  representa una variable aleatoria del proceso en el instante  $t_0$ .

### 3.1. Proceso de Poisson

Para comenzar vamos a definir la variable,  $\xi(t) =$  número de clientes que llegan al sistema de colas en el periodo  $[0, t]$ . También consideramos la variable más general  $\xi(t)_{[t, t+\Delta t]} =$  número de clientes que llegan al sistema en el periodo  $[t, t + \Delta t]$ .

Vamos a estudiar cómo es la evolución de  $\xi(t)$ . Para ello, necesitamos especificar ciertas hipótesis. Así diremos que  $\xi(t)$  sigue un proceso de Poisson si cumple las siguientes condiciones:

1.  $\xi(t)$  es un proceso estocástico.
2. *Condición de independencia.* El número de clientes que llegan en cualquier intervalo  $[t_0, t_1)$  son independientes a los que llegan en cualquier otro intervalo  $[t_1, t_2)$  o  $[t_2, t_3)$  y así sucesivamente. Es decir hay independencia de llegada de clientes en intervalos disjuntos.
3. *Condición de homogeneidad en el tiempo.* La variable  $\xi(t)_{[t_0, t_0+\Delta t]}$  (Número de clientes que llegan en  $[t_0, t_0 + \Delta t]$ ), no depende del instante  $t_0$ , si no de la amplitud del intervalo  $\Delta t$ .
4. En un periodo infinitesimal  $[t, t + \Delta t]$ , la probabilidad  $p_1(\Delta t)$  de que llegue un cliente al sistema es  $\lambda_n \Delta t$  (siendo  $n$  el número de clientes que hay en el sistema en ese momento)

$$P(\xi(t)_{[t, t+\Delta t]} = 1 \text{ Cliente}) = \lambda_n \Delta t = p_1(\Delta t)$$

5. En un intervalo infinitesimal  $[t, t + \Delta t]$ , la probabilidad  $p_0(\Delta t)$  de que no llegue nadie al sistema es  $1 - \lambda_n \Delta t$ , es decir,  $P(\xi(t)_{[t, t+\Delta t]} = 0 \text{ Clientes}) = 1 - \lambda_n \Delta t = p_0(\Delta t)$

**Nota:** De las hipótesis cuarta y quinta, se deduce que no se permite que en un intervalo infinitesimal  $\Delta t$  hayan dos o más llegadas al sistema, o sea, sólo puede llegar un usuario o ninguno en cada intervalo infinitesimal.

Denotamos por  $p_n(t)$  = probabilidad de que lleguen  $n$  clientes en  $[0, t]$  o la probabilidad de que  $\xi(t) = n$  clientes. Las ecuaciones diferenciales que rigen un proceso de Poisson son:

$$p'_n(t) = -\lambda_n p_n(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t), \forall n > 0$$

$$p'_0(t) = -\lambda_0 p_0(t), n = 0$$

Si suponemos que la tasa de llegada es independiente del número de clientes que hay en el sistema ( $\lambda_n = \lambda$ ), entonces las ecuaciones serían:

$$p'_n(t) = -\lambda p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), \forall n > 0$$

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t), n = 0$$

Resolviendo las ecuaciones diferenciales anteriores obtenemos que las probabilidades  $p_n(t)$ , son las siguientes:

$$p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Puede observarse que el resultado es muy parecido a una distribución de Poisson. Así, si  $x$  es una variable de Poisson tenemos que

$$P(x = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Pero ahora tenemos algo más general, ya que depende del tiempo. Por tanto, en resumen tenemos:

1.  $\xi(t)$  sigue un proceso de Poisson de parámetro  $\lambda t$ .
2.  $p(\xi(t) = n \text{ clientes}) = p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$

### 3.2. Proceso de Nacimiento y Muerte

Una de las primeras aplicaciones de los procesos de Poisson fue la modelización de las llamadas telefónicas recibidas en una centralita. No obstante, como teoría más adecuada para representar los modelos de colas deben considerarse los procesos de nacimiento y muerte, ya que tienen en cuenta a la vez entradas y salidas al sistema. En este proceso, tanto las llegadas como las salidas siguen las hipótesis de los procesos de Poisson.

Las ecuaciones del proceso de nacimiento y muerte se establecen en términos de la probabilidad de un número de clientes en el sistema en el instante  $t$ , y a través de esta probabilidad, se puede obtener la distribución de los tiempos de espera. A continuación vamos a definir las variables:

$$\xi(t) = \text{Número de clientes que llegan al sistema en } [0, t].$$

$$\eta(t) = \text{Número de clientes que salen del sistema en } [0, t].$$

$$N(t) = \xi(t) - \eta(t) = \text{Número de clientes que hay en el sistema en el instante } t.$$

$N(t)$  es un proceso estocástico y además será un proceso de nacimiento y muerte si verifica las siguientes propiedades:

1.  $\xi(t)$  sigue un proceso de Poisson de parámetro  $\lambda_n t$  (Llegadas).
2.  $\eta(t)$  sigue un proceso de Poisson de parámetro  $\mu_n t$  (Salidas).
3. En un intervalo infinitesimal  $\Delta t$ , se permite o una llegada, o una salida, o ninguna de las anteriores. Es decir, no se permite una llegada y una salida en el mismo intervalo infinitesimal.

Llamaremos las probabilidades de los clientes que entran y salen del sistema de la siguiente manera:

$$p_1(\Delta t) = P(\xi(t) = 1 \text{ Cliente en } \Delta t) = \lambda_n \Delta t = \text{probabilidad de que llegue un cliente en } \Delta t.$$

$$p_0(\Delta t) = P(\xi(t) = 0 \text{ Clientes en } \Delta t) = 1 - \lambda_n \Delta t = \text{prob. de que no lleguen clientes en } \Delta t.$$

$$q_1(\Delta t) = P(\eta(t) = 1 \text{ Cliente en } \Delta t) = \mu_n \Delta t = \text{probabilidad de que salga un cliente en } \Delta t.$$

$$q_0(\Delta t) = P(\eta(t) = 0 \text{ Clientes en } \Delta t) = 1 - \mu_n \Delta t = \text{prob. de que no salga nadie en } \Delta t.$$

A continuación vamos a presentar las ecuaciones diferenciales del proceso de nacimiento y muerte. Estas ecuaciones que rigen los sistemas de colas poissonianas, también se denominan ecuaciones de Chapman - Kolmogorov, y son las siguientes:

$$p'_n(t) = -(\lambda_n + \mu_n)p_n(t) + \lambda_{n-1}p_{n-1}(t) + \mu_{n+1}p_{n+1}(t)$$

$$p_0'(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t)$$

**Nota:** La tasa de salida cuando hay 0 clientes en el sistema es cero, es decir,  $\mu_0 = 0$ . Por lo tanto  $p_0'(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t)$ .

Ahora bien, calcular las probabilidades en función del tiempo resulta un cálculo muy complejo, por lo que se suele asumir un régimen estable o constante en el sistema de colas. Se considera que un sistema es de régimen constante si es independiente del tiempo, o sea,  $p_n(t) = p_n$ . En este caso las ecuaciones anteriores se reducen a las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} 0 &= -(\lambda_n + \mu_n)p_n + \lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1} \\ 0 &= -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Las ecuaciones anteriores describen los procesos de nacimiento y muerte y son las que modelizan las probabilidades de los clientes en un sistema de colas, con llegadas y salidas poissonianas en régimen estacionario.

En el siguiente capítulo determinaremos las probabilidades que caracterizan los sistemas de colas poissonianas con población ilimitada, y expondremos los indicadores o medidas de eficiencia de los modelos de colas analizados en este trabajo.

## Capítulo 4

# Modelos de colas de Poisson

En este capítulo analizaremos dos sistemas de colas poissinianas. En primer lugar veremos el modelo cuando disponemos de un canal de servicio y asumimos la existencia de una población ilimitada de usuarios que solicita un servicio en concreto. Determinaremos las probabilidades del número de clientes en el sistema y los indicadores de eficiencia del mismo.

Posteriormente veremos las distintas fórmulas correspondientes al sistema multicanal con población ilimitada, necesarias para observar las características del sistema de colas que estudiamos en este trabajo.

### 4.1. Sistema Monocanal con Población Ilimitada

En esta sección calcularemos las probabilidades necesarias para la obtención del modelo de colas y las medidas de eficiencia de éste.

Tenemos como *datos de entrada* la tasa de llegada ( $\lambda$ ) y la tasa de servicio ( $\mu$ ). Además se considera la intensidad de tráfico  $\varphi = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ , puesto que si ocurriera lo contrario la cola estaría continuamente en crecimiento y se haría infinita.

#### 4.1.1. Obtención de las Probabilidades

Partiremos de las siguientes hipótesis:

1.  $\lambda_n = \lambda, \forall n \geq 0$  (población ilimitada).
2.  $\mu_n = \mu, \forall n > 0$ , porque  $s = 1$ , o sea, sólo hay un servidor. Además  $\mu_0 = 0$ .

**Nota:** Si la población estuviera limitada a  $m$  personas tendríamos  $\lambda_n = (m - n)\lambda$ .

En nuestro caso las ecuaciones que rigen el sistema en estado estacionario o de régimen constante son las expresiones 3.2, que vimos en el capítulo anterior. En este modelo, y considerando régimen estacionario, dichas ecuaciones nos quedan de la forma siguiente.

$$\begin{aligned} 0 &= -(\lambda + \mu)p_n + \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} \\ 0 &= -\lambda p_0 + \mu p_1 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Despejando de la segunda expresión, tenemos  $p_1 = \frac{\lambda}{\mu}p_0 = \varphi p_0$ .

Vamos a calcular las probabilidades  $p_n$ . Para esto, en primer lugar veamos que ocurre cuando  $n = 1$ . De la primera ecuación de 4.1 obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} 0 &= -(\lambda + \mu)p_1 + \lambda p_0 + \mu p_2 \Rightarrow \mu p_2 = (\lambda + \mu)p_1 - \lambda p_0 \Rightarrow p_2 = \frac{\lambda + \mu}{\mu}p_1 - \frac{\lambda}{\mu}p_0 \Rightarrow \\ p_2 &= \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\lambda}{\mu} p_0 - \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 + \frac{\lambda}{\mu} p_0 - \frac{\lambda}{\mu} p_0 \Rightarrow p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 = \varphi^2 p_0 \end{aligned}$$

Ahora haremos lo mismo para  $n = 2$ . Así tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= -(\lambda + \mu)p_2 + \lambda p_1 + \mu p_3 \Rightarrow \mu p_3 = (\lambda + \mu)p_2 - \lambda p_1 \Rightarrow p_3 = \frac{\lambda + \mu}{\mu}p_2 - \frac{\lambda}{\mu}p_1 \Rightarrow \\ p_3 &= \frac{\lambda + \mu}{\mu} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 - \frac{\lambda}{\mu} \left(\frac{\lambda}{\mu} p_0\right) \Rightarrow p_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 \Rightarrow \\ p_3 &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0 = \varphi^3 p_0 \end{aligned}$$

Luego si seguimos operando de la misma manera llegaremos a la siguiente expresión:

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = \varphi^n p_0, \forall n$$

Como sabemos que  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$  tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n p_0 = 1 \Rightarrow p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n}$$

La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n$  es una serie geométrica y entonces es igual a  $\frac{1}{1-\varphi}$ , ya que  $\varphi < 1$ .

Sustituyendo el valor de dicha serie en la expresión anterior se obtiene lo siguiente:

$$p_0 = \frac{1}{\frac{1}{1-\varphi}} = 1 - \varphi$$

Como tenemos  $p_0$  en función de  $\varphi$ , entonces la probabilidad  $p_n$  de que haya  $n$  clientes en el sistema es:

$$p_n = \varphi^n p_0 = \varphi^n (1 - \varphi), \forall n \geq 1$$

### 4.1.2. Indicadores o Medidas de Eficiencia del Sistema de Colas

En este apartado calcularemos los indicadores o las medidas que describen el funcionamiento del sistema de colas.

#### 1. *Número medio de clientes en el sistema*

Este indicador se calcula de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 \bar{n} = E[N] &= \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\varphi^n(1-\varphi) = \\
 &= (1-\varphi) \sum_{n=0}^{\infty} n\varphi^n = (1-\varphi) [\varphi + 2\varphi^2 + 3\varphi^3 + 4\varphi^4 + \dots] = \\
 &= (1-\varphi) \begin{pmatrix} \varphi + & \varphi^2 + & \varphi^3 + & \varphi^4 + & \dots \\ & \varphi^2 + & \varphi^3 + & \varphi^4 + & \dots \\ & & \varphi^3 + & \varphi^4 + & \dots \\ & & & \varphi^4 + & \dots \\ & & & & \dots \end{pmatrix} = \\
 &= (1-\varphi) \left[ \frac{\varphi}{1-\varphi} + \frac{\varphi^2}{1-\varphi} + \frac{\varphi^3}{1-\varphi} + \frac{\varphi^4}{1-\varphi} + \dots \right] \Rightarrow \\
 &\quad \Rightarrow \bar{n} = \frac{\varphi}{1-\varphi}
 \end{aligned}$$

**Nota:** Hemos utilizado que cada fila es el sumatorio de una progresión geométrica de razón  $\varphi$ .

#### 2. *Número medio de clientes en cola*

Sea la variable aleatoria  $Q =$  Número de clientes en cola. Denotamos por  $\bar{v}$  al número medio de clientes en cola ( $\bar{v} = E[Q]$ ).

Antes de comenzar debemos especificar que si tenemos cero clientes en cola, implica que, o bien, hay cero personas o una persona en el sistema ( $p_0 + p_1$ ), si hay una persona en cola quiere decir que hay dos personas en el sistema ( $p_2$ ), y así continuará sucesivamente.

El número medio de clientes en cola será:

$$\bar{v} = \sum_{n+1}^{\infty} np_{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)p_n = \sum_{n=2}^{\infty} np_n - \sum_{n=2}^{\infty} p_n = \bar{n} - p_1 - (1 - p_0 - p_1) =$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{n} - (1 - p_0) = \bar{n} - (1 - (1 - \varphi)) = \bar{n} - \varphi = \frac{\varphi}{1 - \varphi} - \varphi \Rightarrow \\
&\Rightarrow \bar{v} = E[Q] = \frac{\varphi^2}{1 - \varphi}
\end{aligned}$$

### 3. *Tiempo medio de permanencia en el sistema*

Vamos a denotar a este tiempo medio en el sistema como  $t_s$  y lo calcularemos usando la *primer fórmula de Little* (ver Apéndice A.1), esto es, a partir de la expresión  $t_s = \frac{E[N]}{\lambda}$ , para lo que necesitaremos la siguiente nota.

**Nota:** La tasa media de llegada es:

$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda p_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} p_n.$$

Como  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ , tenemos que  $\bar{\lambda} = \lambda$ . Por lo tanto,

$$t_s = \frac{E[N]}{\bar{\lambda}} = \frac{\frac{\varphi}{1-\varphi}}{\lambda} = \frac{\varphi}{\lambda(1-\varphi)} = \frac{\lambda}{\lambda(\mu-\lambda)} \Rightarrow t_s = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

### 4. *Tiempo medio de permanencia en cola*

Denotaremos a este tiempo como  $t_c$  y para su cálculo utilizaremos la *segunda fórmula de Little* (Ver A.1).

$$t_c = \frac{E[Q]}{\bar{\lambda}} = \frac{\frac{\varphi^2}{1-\varphi}}{\lambda} = \frac{\varphi^2}{\lambda(1-\varphi)} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}{\lambda\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{\lambda^2}{\lambda\mu^2\frac{(\mu-\lambda)}{\mu}} \Rightarrow t_c = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

### 5. *Tiempo medio de permanencia en el servicio*

Lo denotamos como  $\varepsilon = t_s - t_c$ . Por lo tanto, tenemos que el tiempo medio en el servicio será:

$$\varepsilon = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1}{\mu-\lambda} \left[1 - \frac{\lambda}{\mu}\right] \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{\mu}$$

Esto es lo esperado puesto que las salidas siguen un proceso de Poisson, entonces el tiempo entre salidas debe ser igual al tiempo de servicio.

## 4.2. Sistema Multicanal con Población Ilimitada

En esta sección vamos a calcular las probabilidades y las medidas de eficiencia necesarias para el modelo Multicanal con población ilimitada, basándonos en el proceso seguido en el modelo anterior.

Para este modelo necesitamos conocer los datos de la tasa de llegada  $\lambda$ , la tasa de servicio  $\mu$  y el número de canales  $s$ . También se considera que la intensidad de tráfico es  $\varphi = \frac{\lambda}{\mu} < s$ , para asegurarnos que la cola no aumenta y se vuelva infinita.

### 4.2.1. Obtención de las Probabilidades

Para el cálculo de las probabilidades partiremos de las siguientes hipótesis:

1.  $\lambda_n = \lambda$  (población ilimitada).

Además, la tasa de llegada en este modelo cumple  $\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda p_n = \lambda$ .

$$2. \mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{si } 1 \leq n \leq s \\ s\mu & \text{si } n \geq s \end{cases} \quad (\text{Hay } s \text{ servidores para atender a los clientes})$$

Las ecuaciones diferenciales de Chapman - Kolmogorov que vamos a utilizar son:

$$\begin{aligned} p'_n(t) &= -(\lambda_n + \mu_n) p_n(t) + \mu_{n+1} p_{n+1}(t) + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) \\ p'_0(t) &= -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Recordemos que consideramos un régimen permanente, es decir,  $p_n(t) = p_n$  y por lo tanto tenemos que  $p'_n(t) = 0$  y  $p'_0(t) = 0$ . Así las ecuaciones en régimen estacionario son:

$$\begin{aligned} 0 &= -(\lambda_n + \mu_n) p_n + \mu_{n+1} p_{n+1} + \lambda_{n-1} p_{n-1} \\ 0 &= -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 \end{aligned} \quad (4.3)$$

A continuación vamos a estudiar los dos casos que se pueden dar.

1. Si  $n = 0$

Despejaremos de la segunda ecuación de 4.3 la probabilidad  $p_1$ . Así tendremos

$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda p_0}{\mu} \Rightarrow p_1 = \varphi p_0$$

2. Si  $n \neq 0$

Este caso debemos a su vez subdividirlo en dos apartados :

a)  $1 \leq n < s$

La primera ecuación de 4.3 queda de la siguiente forma:

$$-(\lambda + n\mu)p_n + (n+1)\mu p_{n+1} + \lambda p_{n-1} = 0$$

En primer lugar, tomemos  $n = 1$  y veamos que expresión obtenemos de  $p_2$ .

$$\begin{aligned} -(\lambda + \mu)p_1 + 2\mu p_2 + \lambda p_0 = 0 &\Rightarrow 2\mu p_2 = -\lambda p_0 + (\lambda + \mu)\frac{\lambda}{\mu}p_0 \Rightarrow p_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2}p_0 \\ &\Rightarrow p_2 = \frac{1}{2}\varphi^2 p_0 \end{aligned}$$

Ahora vamos a realizar las mismas operaciones para  $n = 2$ .

$$\begin{aligned} -(\lambda + 2\mu)p_2 + 3\mu p_3 + \lambda p_1 = 0 &\Rightarrow 3\mu p_3 = -\lambda p_1 + (\lambda + 2\mu)p_2 \Rightarrow \\ 3\mu p_3 = -\lambda\frac{\lambda}{\mu}p_0 + (\lambda + 2\mu)\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 &\Rightarrow \\ p_3 = -\frac{\lambda^2}{3\mu^2}p_0 + \frac{(\lambda + 2\mu)\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0}{3\mu} &\Rightarrow p_3 = \varphi^2 p_0 \left(\frac{1}{6}\varphi\right) \\ &\Rightarrow p_3 = \varphi^3 p_0 \frac{1}{3!} \end{aligned}$$

Si continuamos de la misma forma, en general tendremos que:

$$p_n = \frac{\varphi^n p_0}{n!}, \text{ con } 1 \leq n \leq s$$

b)  $n \geq s$

En este caso, de la primera ecuación de 4.3 se obtiene:

$$-(\lambda + s\mu)p_n + s\mu p_{n+1} + \lambda p_{n-1} = 0$$

Procedemos como en el caso anterior, considerando  $n = s$

$$\begin{aligned} -(\lambda + s\mu)p_s + s\mu p_{s+1} + \lambda p_{s-1} = 0 &\Rightarrow \\ -(\lambda + s\mu)\frac{1}{s!}\varphi^s p_0 + s\mu p_{s+1} + \lambda\frac{1}{(s-1)!}\varphi^{s-1}p_0 = 0 &\Rightarrow \\ s\mu p_{s+1} = (\lambda + s\mu)\frac{\varphi^s}{s!}p_0 - \frac{\lambda}{(s-1)!}\varphi^{s-1}p_0 &\Rightarrow p_{s+1} = \frac{\varphi^{s+1}}{s s!}p_0 \end{aligned}$$

Si hacemos lo mismo para  $n = s + 1$ , obtenemos que  $p_{s+2} = \frac{\varphi^{s+2}}{s^2 s!}p_0$ . Así, en general, para este caso se tiene que:

$$p_n = \frac{\varphi^n}{s^{n-s} s!}p_0$$

Para continuar vamos a calcular la probabilidad de que no haya nadie en el sistema, es decir,  $p_0$ . Sabemos que  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ , luego

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} p_n &= p_0 + \sum_{n=1}^s p_n + \sum_{n=s+1}^{\infty} p_n = p_0 + \varphi p_0 + \frac{\varphi^2}{2!} + \dots + \frac{\varphi^s}{s!} p_0 + \dots + \frac{\varphi^{s+1}}{s s!} p_0 + \dots = \\ &= p_0 \left[ 1 + \varphi + \frac{\varphi^2}{2!} + \dots + \frac{\varphi^{s-1}}{(s-1)!} + \frac{\varphi^s}{s!} + \frac{\varphi^s}{s!} \left( \frac{\varphi}{s} + \frac{\varphi^2}{s^2} + \dots \right) \right] = \\ &= p_0 \left[ \sum_{r=0}^{s-1} \frac{\varphi^r}{r!} + \frac{\varphi^s}{s!} \left( 1 + \frac{\varphi}{s} + \frac{\varphi^2}{s^2} + \dots \right) \right] = p_0 \left[ \sum_{r=0}^{s-1} \frac{\varphi^r}{r!} + \frac{\varphi^s}{s!} \left( \frac{1}{1 - \frac{\varphi}{s}} \right) \right] \\ &\Rightarrow p_0 = \frac{1}{\sum_{r=0}^{s-1} \frac{\varphi^r}{r!} + \frac{\varphi^s}{s!} \left( \frac{1}{1 - \frac{\varphi}{s}} \right)} \end{aligned}$$

**Nota:** Hemos supuesto que  $\frac{\varphi}{s} < 1 \Leftrightarrow \varphi < s \Leftrightarrow \lambda_n < s\mu_n$ , si esto no es cierto la cola se haría infinita.

Resumiendo lo anterior, tenemos que las probabilidades son:

1. Probabilidad de que no haya nadie en el sistema.

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{r=0}^{s-1} \frac{\varphi^r}{r!} + \frac{\varphi^s}{s!} \left( \frac{s}{s-\varphi} \right)}$$

2. Probabilidad de que haya  $n$  clientes en el sistema.

$$p_n = \begin{cases} \frac{\varphi^n p_0}{n!} & \text{si } 1 \leq n \leq s \\ \frac{\varphi^n p_0}{s^{n-s} s!} & \text{si } n \geq s \end{cases}$$

#### 4.2.2. Indicadores o Medidas de Eficiencia del Sistema

En esta sección calcularemos las distintas medidas de eficiencia basándonos en las operaciones realizadas en el apartado anterior.

1. **Número medio de elementos en cola**

El número medio de clientes en cola se denota por  $\bar{v} = E[Q]$  y procedemos a su cálculo:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \sum_{n=1}^{\infty} n p_{s+n} = \sum_{s+1}^{\infty} (n-s) p_n = 1p_{s+1} + 2p_{s+2} + \dots + r p_{s+r} + \dots = \\ &= \frac{\varphi^{s+1}}{s s!} p_0 + \frac{2\varphi^{s+2}}{s^2 s!} p_0 + \frac{3\varphi^{s+3}}{s^3 s!} + \dots = \frac{\varphi^s}{s!} p_0 \left[ \frac{\varphi}{s} + 2 \left( \frac{\varphi}{s} \right)^2 + 3 \left( \frac{\varphi}{s} \right)^3 + \dots \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\varphi^s}{s!} p_0 \left[ \frac{\varphi}{1 - \frac{\varphi}{s}} + \frac{\left(\frac{\varphi}{s}\right)^2}{1 - \frac{\varphi}{s}} + \dots \right] = \frac{\varphi^s}{s!} p_0 \frac{\varphi}{\left(1 - \frac{\varphi}{s}\right)^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \bar{v} = \frac{\varphi^{s+1} p_0}{s s! \left(\frac{s-\varphi}{s}\right)^2} = \frac{\lambda \mu \varphi^s p_0}{(s-1)! (s\mu - \lambda^2)}
\end{aligned}$$

## 2. Número medio de canales no ocupados

Denotaremos por  $\rho$  al número medio de canales libres o no ocupados. Se tiene:

$$\begin{aligned}
\rho &= \sum_{n=0}^s (s-n) p_n = s [p_0 + p_1 + p_2 + \dots] - \sum_{n=0}^s n p_n = s \left[ p_0 + \varphi p_0 + \frac{\varphi^2}{2!} p_0 + \dots + \frac{\varphi^s}{s!} p_0 \right] - \\
&\quad - [p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots + s p_s] = s p_0 \left[ 1 + \varphi + \dots + \frac{\varphi^s}{s!} \right] - \\
&\quad - \varphi p_0 \left[ 1 + \varphi + \frac{\varphi^2}{2!} + \dots + \frac{\varphi^{s-1}}{(s-1)!} \right] = \\
&= \left[ (s-\varphi) \left[ 1 + \varphi + \dots + \frac{\varphi^{s-1}}{(s-1)!} \right] + s \frac{\varphi^s}{s!} \right] p_0 = \\
&= (s-\varphi) \left[ \sum_{r=0}^{s-1} \frac{\varphi^r}{r!} + \frac{\varphi^s}{s!} \frac{s}{s-\varphi} \right] \frac{1}{\sum_{r=0}^{s-1} \frac{\varphi^r}{r!} + \frac{\varphi^s}{s!} \frac{1}{1-\frac{\varphi}{s}}} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \rho = s - \varphi
\end{aligned}$$

## 3. Número medio de clientes en el sistema

El número medio de clientes en el sistema  $\bar{n}$  es:

$$\begin{aligned}
\bar{n} &= \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=0}^s n p_n + \sum_{n=s+1}^{\infty} n p_n = \sum_{n=0}^s (n+s-s) p_n + \sum_{n=s+1}^{\infty} [(n-s)+s] p_n = \\
&\quad - \sum_{n=0}^s (s-n) p_n + s \sum_{n=0}^s p_n + \sum_{s+1}^{\infty} (n-s) p_n + s \sum_{n=s+1}^{\infty} p_n = -\rho + s + \bar{v} = -s + \varphi + s + \bar{v} = \bar{v} + \varphi \Rightarrow \\
&\Rightarrow \bar{n} = \frac{\varphi^{s+1} p_0}{s s! \left(\frac{s-\varphi}{s}\right)^2} + \varphi = \frac{\lambda \mu \varphi^s p_0}{(s-1)! (s\mu - \lambda^2)} + \varphi
\end{aligned}$$

## 4. Tiempo medio de espera en cola

Aplicando la *segunda fórmula de Little* (Ver A.1) tenemos que:

$$\begin{aligned}
t_c &= \frac{\bar{n}}{\lambda} = \frac{\bar{n}}{\lambda} = \frac{\frac{\lambda \mu \varphi^s p_0}{(s-1)! (s\mu - \lambda^2)}}{\lambda} \Rightarrow \\
&\Rightarrow t_c = \frac{\mu \varphi^s p_0}{(s-1)! (s\mu - \lambda)^2}
\end{aligned}$$

### 5. *Tiempo medio de permanencia en el sistema*

Aplicando la *primera fórmula de Little* (Ver A.1) obtenemos el tiempo medio de permanencia en el sistema.

$$t_s = \frac{\bar{n}}{\lambda} = \frac{\frac{\lambda\mu\varphi^s p_0}{(s-1)!(s\mu-\lambda^2)} + \varphi}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_s = \frac{\varphi^s p_0}{\mu s! \left(\frac{s-\varphi}{s}\right)^2} + \frac{1}{\mu} = \frac{\mu\varphi^s p_0}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2} + \frac{1}{\mu}$$

### 6. *Tiempo medio en el servicio*

El tiempo medio en el servicio, se obtiene de la diferencia del tiempo medio de permanencia en el sistema, con el tiempo medio de espera en cola. Así tenemos que:

$$\varepsilon = t_s - t_f = \frac{\mu\varphi^s p_0}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2} + \frac{1}{\mu} - \frac{\mu\varphi^s p_0}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{\mu}$$

### 7. *Probabilidad de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar*

Una persona que llegue al sistema tiene que esperar si el número de clientes que hay, en ese momento, es mayor o igual que el número de servidores. Así, tenemos que:

$$p(n \geq s) = \sum_{n=s}^{\infty} p_n = p_s + p_{s+1} + p_{s+2} + \dots = \sum_{n=s}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{s! s^{n-s}} p_0 = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s p_0 + \frac{1}{s!s} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+1} p_0 +$$

$$+ \frac{1}{s!s^2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+2} p_0 + \dots = \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s p_0 \left[ 1 + \frac{\lambda}{s\mu} + \frac{1}{s^2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \dots \right] = \frac{1}{s} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s p_0 \left[ \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{s\mu}} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(n \geq s) = \frac{\varphi^s p_0}{s! \left(\frac{s-\varphi}{s}\right)} = \frac{s\mu\varphi^s p_0}{s!(s\mu-\lambda)}$$

Una vez expuestos los principales indicadores o medidas de eficiencia de los sistemas de colas poissonianas, analizaremos en el próximo capítulo los resultados obtenidos al aplicar dichos indicadores en la evaluación del funcionamiento del Sistema de Emergencias 1-1-2 objeto de este trabajo.

## Capítulo 5

# Manipulación de los datos y obtención de resultados

En este capítulo, describiremos los datos del servicio de atención de llamadas que nos ha suministrado el Centro Coordinador de Emergencias y Seguridad 1-1-2, junto con el horario de los empleados y sus tiempos de descanso.

Más tarde comentaremos cómo hemos calculado la tasa de llegadas y la tasa de servicio para aplicar el modelo que expusimos en el capítulo anterior, y así calcular los distintos indicadores de eficiencia.

Finalmente, expodremoos algunos resultados sobre el sistema telefónico de atención de llamadas en fechas concretas, para ver cómo evoluciona y transcurre el servicio a lo largo del año 2013. Además se recogen y comentan los indicadores y las medidas de eficiencia en diferentes periodos de tiempo.

### 5.1. Descripción de los datos

En nuestro trabajo nos hemos centrado en analizar el desarrollo del sistema de colas, que surge en un primer momento cuando los clientes llaman al servicio de emergencia, antes de que la llamada sea derivada a otra sección por los empleados del servicio de atención al cliente. Esta fase la denominaremos *servicio de petición de ayuda*, y este servicio se realiza en la sala de demandas.

Se nos han facilitado datos de las llamadas recibidas en la provincia de Santa Cruz de Tenerife en el año 2013. En estos datos tenemos un código de identificación del recepcionista que atendió la llamada, que denotaremos por ID, la fecha en la que se realizó la llamada, junto con la hora de entrada de ésta y la duración en segundos de la misma.

Por otro lado también conocemos el horario de los empleados y su tiempo de descanso, que describimos a continuación. La jornada laboral de los empleados se ajusta a tres

turnos:

Horario de mañana	7 : 00 a 15 : 00
Horario de tarde	15 : 00 a 23 : 00
Horario de noche	23 : 00 a 7 : 00

Además, de lunes a jueves, hay refuerzo de personal de 18:00 a 00:00, y los viernes, sábados y vísperas de festivos de 18:00 a 03:00.

A cada turno le corresponde un número de operadores, servidores o canales de servicio, pudiendo éstos modificarse según las circunstancias de la sala. Los canales de servicio son 5 en el turno de mañana y en el turno de tarde, y 3 operadores en el turno de noche. En los dos últimos turnos habrá que sumarle el refuerzo correspondiente, pero nosotros nos limitaremos a obtener este número de los datos suministrados en cada periodo de tiempo que vayamos a estudiar, es decir, tendremos en cuenta el turno de mañana, el de tarde y el de noche.

Por otro lado, el tiempo de ausencia de los operadores de demandas, es de 40 minutos para el turno de mañana y el de tarde, y los operadores del turno de noche tienen 50 minutos. A parte de todo esto, los operadores tienen un tiempo “extra” por incidencias y supervisión que, obviamente, son gestiones relacionadas con el trabajo fuera del periodo de descanso y finalmente disponen del tiempo necesario para el aseo, que será el que cada uno necesita. Por lo tanto, en nuestro estudio hemos considerado que las jornadas laborales son de siete horas en lugar de ocho, es decir, que los operadores en media se toman en conjunto una hora de descanso.

## 5.2. Manipulación de los Datos

Para trabajar con estos datos hemos usado la hoja de cálculo Excel. Hemos codificado adecuadamente los datos para poder clasificar las llamadas por día y, a su vez, separarlas según el horario de las tres jornadas laborales que componen cada día.

Posteriormente recopilamos las llamadas que atiende cada ID en su correspondiente jornada laboral. Una vez obtenido esto, sumamos todas las llamadas recibidas en una franja horaria y así obtener el valor de la tasa de llegada  $\lambda$ . Ahora necesitamos conocer la tasa de salida  $\mu$ , para lo que sumaremos la duración de cada llamada que haya respondido un ID en una franja horaria determinada. Así obtenemos el tiempo necesario para atender las llamadas que ha respondido el ID correspondiente.

Tras hacer esto con todos los ID en los días y horarios correspondientes, intentamos determinar cuántas llamadas podrá atender cada ID en su jornada laboral, reduciendo esta en una hora, para descontar el total de sus tiempos de descanso. De este modo, tras hacer la media de las llamadas que podrían atender los ID que trabajan en una misma franja horaria, obtenemos el número de clientes  $\mu$  que se puede atender en dicho periodo.

Finalmente, contando los ID que han trabajado en la jornada laboral que corresponde, conoceremos el número de servidores o canales  $s$ , usados en esa jornada.

Por lo tanto, de esta forma hemos calculado, tras distintas operaciones con la hoja de calculo Excel, los valores de  $\lambda$ ,  $\mu$  y  $s$  por jornada laboral de cada día del año 2013 en la provincia de Santa Cruz de Tenerife.

Cabe mencionar que para el cálculo de  $\mu$ , se han desechado algunas llamadas recibidas en el cambio de turno ya que nos producían datos erróneos por la variación de la media, puesto que han sido atendidas por empleados en un turno que no les corresponde (seguramente por llegar unos minutos antes de la hora exacta de su turno). Dicha cantidad de llamadas es insignificante en comparación con el total.

### 5.3. Resultados obtenidos

En este apartado vamos a analizar algunos periodos de tiempo señalados, en los que se encuentran fiestas conocidas como por ejemplo navidades o carnavales. También estudiaremos el sistema de colas en otras fechas que no contienen festivos.

Cabe mencionar que denotaremos los turnos de la siguiente forma:

1. Turno de mañana 7:00 - 15:00  $\equiv$  TM.
2. Turno de tarde 15:00 - 23:00  $\equiv$  TT.
3. Turno de noche 23:00 - 7:00  $\equiv$  TN.

En primer lugar veamos qué ocurre en la semana de carnavales, que en el año 2013 fue del 11 al 17 de febrero, aunque también tendremos en cuenta el fin de semana anterior. En la gráfica de la figura 5.1 se recoge la tasa de llegada a lo largo de los diez días (8-17 febrero), mostrando la media de dicho valor de las tres jornadas laborales de cada día.

Podemos observar en la figura 5.1, que el día con más llamadas es el primer viernes y también, son los cuatro primeros días, los que tienen una gran afluencia de llamadas. Luego baja la cantidad de las mismas durante el martes 12 (quizás por celebrarse el coso de carnaval), aumenta durante los días siguientes y se mantiene hasta el viernes en el que disminuye. Posteriormente el sábado 16 aumenta y el domingo 17 vuelve a disminuir (se celebra el Carnaval de día).

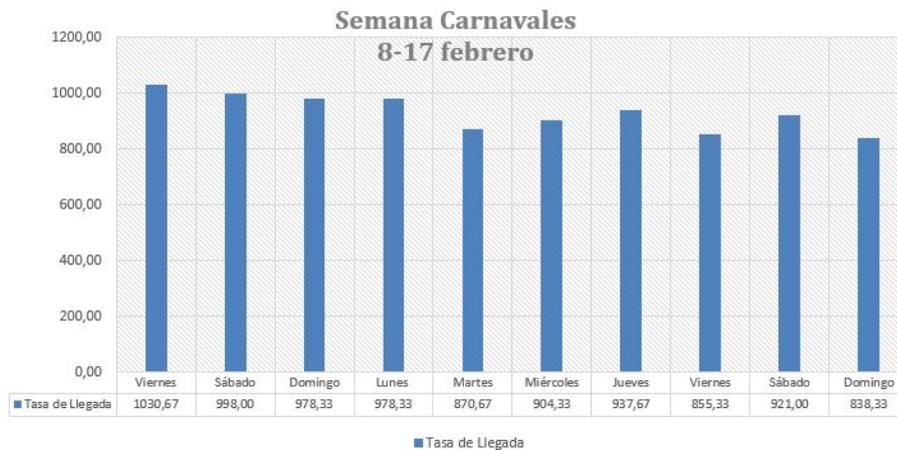


Figura 5.1: Tasa de Llegadas por día en carnavales 2013

En el apéndice se incluye la gráfica A.1 la cual muestra de la tasa de llegada de forma más detallada, en la que se recogen las llamadas recibidas por cada jornada laboral. En dicha gráfica A.1 observamos que la mayoría de las llamadas se realizan en los turnos de mañana y tarde, bajando la cantidad de éstas considerablemente por la noche.

El primer día podemos observar que casi la totalidad de las llamadas se produce en el turno de tarde, cuando comienzan las festividades de este periodo, y por la noche las llamadas se reducen al mínimo. Además en los días siguientes la diferencia de llamadas entre el turno de mañana y el turno de tarde es muy pequeña. Sin embargo, continúa habiendo un gran salto entre éstos y el turno de noche.

Para concluir con esta semana vamos a observar los distintos valores de las medidas de eficiencia que deducimos en la sección 4.2.2. En el apéndice se recogen en diferentes tablas dichas medidas. Vemos en las tablas A.1, A.2 y A.3 que la intensidad de tráfico durante los dos primeros turnos es mayor que en el turno de noche, aunque en todos los casos es mucho menor que el número de canales correspondiente en cada caso. El número de canales no ocupados es bastante grande lo que justifica que no haya tiempo de espera en cola. Podemos observar que es prácticamente cero a lo largo de los distintos días.

Por otro lado, la probabilidad de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar, es casi inexistente, por lo que en estas fechas la sala de demandas tuvo los suficientes servidores y pudo responder a todas las peticiones de los usuarios sin producir esperas en éstos. Es decir ha tenido un comportamiento muy eficiente en cuanto a la atención de los usuarios del servicio.

A continuación, vamos a comentar la evolución de la tasa de llegadas durante la semana santa. Dicha semana en el año 2013 se celebró del 25 al 31 de marzo.



Figura 5.2: Tasa de Llegadas en Semana Santa 2013

En la imagen 5.2 podemos ver que la cantidad de llamadas es similar en los días de esta semana, y está en torno a las 900 llamadas, a excepción del domingo donde dichas llamadas disminuyen a las 645, algo que contradice la idea preconcebida que se tiene de estas fechas, es decir, que el domingo es el día de vuelta de las vacaciones y habrán más incidentes y contratiempos.

En el apéndice se recoge una gráfica más detallada de las llamadas, en la que se muestran las mismas distribuciones por jornadas laborales (figura A.2). En dicha gráfica se produce el mismo comportamiento que en la semana de carnavales, la mayoría de las llamadas se producen en los dos primeros turnos, y baja en el turno de noche. El número de llamadas es menor en este periodo nocturno que durante el resto. Por lo general, los dos primeros periodos superan las 900 llamadas en casi todos los días. Antes de continuar cabe mencionar que en el día 31 no consta el último turno, porque hemos considerado que este pertenece al mes siguiente.

Una vez analizadas estas gráficas veamos los indicadores de eficiencia calculados para los días de la Semana Santa. En el apéndice se recogen los cuadros que contienen estos indicadores. En las tablas A.4 y A.5 volvemos a observar que la intensidad de tráfico está en torno a 1 en los dos primeros turnos y próxima a 0,5 en el turno de noche. Por otro lado vemos que el tiempo medio de espera en cola vuelve a ser próximo a cero, puesto que la intensidad de tráfico es bastante inferior al número de canales, y por esto la prob. de que una persona llegue al sistema y tenga que esperar es casi nula.

Ahora para comparar las semanas anteriores con una semana en la que no hubiese festividad, hemos seleccionado al azar otra semana que no contenga ningún festivo. Así, podemos observar el comportamiento de las llamadas en estas circunstancias. La semana aleatoriamente seleccionada fue la del 8 al 16 de abril.

En primer lugar veamos la gráfica de la tasa de llegada generada por la media de los tres turnos por día, la cual se muestra en la figura 5.3. Observando la gráfica, lo primero que destaca de este periodo es que el número de llamadas que se produjeron cada día es menor que en las semanas comentadas anteriormente. Esto es lógico porque en periodos con días festivos o fechas señaladas de vacaciones, el número de incidencias crece. En este caso nos encontramos con una media de aproximadamente 774 llamadas por día.

Por otro lado, el aumento de las llamadas se produce durante el viernes y el sábado, para volver a disminuir el domingo.



Figura 5.3: Tasa de Llegadas en la Semana del 8 al 16 de abril de 2013

En la figura A.3 del apéndice podemos observar una gráfica más detallada de las llamadas distribuidas por jornada laboral a lo largo de esta semana. Observemos que en esta gráfica se produce el mismo patrón de las semanas anteriores. En el turno de noche las llamadas disminuyen algo más que en los casos anteriores y el mayor número de llamadas sigue produciéndose en los turnos de mañana y tarde.

Además los días en los que más llamadas se recibieron fueron el lunes y el viernes, siguiéndolos de cerca el jueves y el sábado. Por lo tanto se producen más llamadas al principio del fin de semana y al inicio de la semana laboral.

Finalmente, analicemos las medidas de eficiencia para este caso. Dichas medidas se muestran en unas tablas recogidas en el apéndice. Observando las tablas A.6 y A.7 se deduce que la intensidad de tráfico vuelve a estar en torno a 1 en los dos primeros turnos y a 0'5 en el último. No hay tiempo de permanencia en cola y el número de canales no ocupados sigue siendo bastante grande.

Una vez analizados estos tres periodos vamos a ver otros periodos festivos. En primer lugar, veamos las fiestas de Navidad, en las cuales cogemos también el día posterior, es decir, el día 26 para analizar el comportamiento que se produce en estas fechas.

En la imagen de la figura 5.4, vemos que en los dos primeros turnos del día 24 la cantidad de llamadas es casi la misma, y luego disminuye por la noche.

En el día 25 si hay diferencia entre el turno de mañana y el de tarde, aumentando notablemente este último. Luego decrece en el último turno. No obstante, es el turno de noche donde más llamadas se recibieron durante el periodo que estamos tratando.

Y finalmente, en el día 26 se producen más llamadas en el turno de mañana que en el día anterior. En el de tarde también vuelve a recibir más llamadas, aunque la diferencia con el día 25 es muy pequeña (aprox. 20 llamadas). El turno de noche, por el contrario es el que menos llamadas ha recibido.

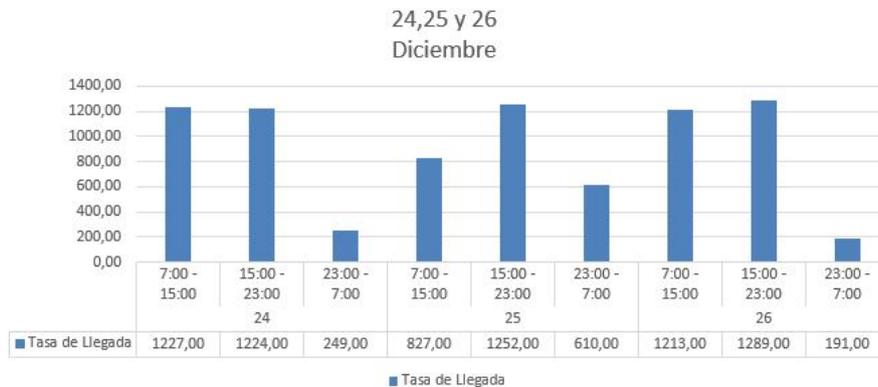


Figura 5.4: Tasa de Llegada en navidades de 2013 (24,25 y 26 de diciembre)

Veamos ahora las medidas de eficiencia obtenidas durante los días de las navidades en el cuadro 5.1. Podemos ver en la tabla que el tiempo medio de espera en cola es inexistente y que el número medio de clientes en cola es prácticamente nulo. Así, a pesar de las fiestas, se mantiene el comportamiento de los periodos anteriores, por lo que el grado de atención de incidencias del sistema sigue siendo muy eficiente.

Días	24			25			26		
	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN
Horario									
Intensidad de trafico	1,64	1,616	0,429	1	1,563	1,165	1,492	1,529	0,373
Tasa de llegada	1227	1224	249	827	1252	610	1213	1289	191
Tasa de servicio	748	757,5	580,5	826,667	801	523,75	813	843,167	512,667
Nº de Canales (S)	5	7	3	5	6	4	5	6	3
Número medio de elementos en cola	0,003	0	0,002	0,001	0	0,008	0,002	0	0,001
Número medio de canales no ocupados	3,36	5,384	2,571	4	4,437	2,835	3,508	4,471	2,627
Número medio de clientes en el sistema	1,654	1,616	0,43	1,001	1,565	1,175	1,499	1,53	0,373
Tiempo medio de espera en cola o fila	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tiempo medio de permanencia en el sistema	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Tiempo medio en el servicio	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Probabilidad de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar	0,009	0	0,001	0	0,001	0,007	0,005	0,001	0

Cuadro 5.1: Indicadores del 24 al 26 de diciembre

Analicemos ahora el día 30 de diciembre y el día 31 de fin de año, viendo la gráfica de la tasa de llegada mostrada en la figura 5.5 .

En primer lugar, se observa en la imagen 5.5 que con una diferencia pequeña, el día 30 tiene más llamadas recibidas tanto en el periodo de mañana como en el de tarde, En el turno de noche las llamadas disminuyen bastante, recibiendo sólo 191. Tengamos en cuenta que el turno de noche del día 31 no lo analizaremos porque pertenece al mes siguiente, es decir, al mes de enero.



Figura 5.5: Tasa de Llegada en fin de año de 2013 (30 y 31 de diciembre)

Una vez analizada la gráfica anterior, veamos las medidas de eficiencia obtenidas durante este periodo de fin de año que se encuentra en la tabla 5.2. En dicha tabla se observa que el número medio de elementos en el sistema es casi nulo y que el tiempo de permanencia en el sistema es despreciable. Todo ello es debido a que se dispone de un número suficientemente amplio de servidores en cada turno.

Días	30			31		
	TM	TT	TN	TM	TT	TN
Intensidad de trafico	1,492	1,529	0,373	1,58	1,379	1,165
Tasa de llegada	1213	1289	191	1160	1228	610
Tasa de servicio	813	843,167	512,667	734,167	890,333	523,75
Nº de Canales (S)	5	6	3	6	6	4
Número medio de elementos en cola	0,003	0	0,001	0	0	0,008
Número medio de canales no ocupados	3,508	4,471	2,627	4,42	4,621	2,835
Número medio de clientes en el sistema	1,5	1,531	0,373	1,582	1,38	1,176
Tiempo medio de espera en cola o fila	0	0	0	0	0	0
Tiempo medio de permanencia en el sistema	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Tiempo medio en el servicio	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Probabilidad de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar	0,006	0,001	0	0,002	0,001	0,008

Cuadro 5.2: Indicadores del 30 y 31 de diciembre

Ahora veamos el comportamiento de la tasa de llegada durante los primeros días del año 2013. Dicha tasa se muestra en la figura 5.6. En el primer día del año, el número de llamadas durante los tres turnos se mantienen bastante próximos entre si, con una gran cantidad de llamadas entrantes. Sin embargo, a pesar de las ideas que podamos tener de esta fecha, en concreto el número de llamadas del día posterior es mucho mayor que en los dos primeros turnos. Este último día sigue la distribución de los anteriores periodos que hemos analizado, disminuyendo notablemente el turno de noche.

Para concluir con estas fechas veamos las medidas de eficiencia de este periodo. Dichas medidas se recogen en el cuadro 5.3. En dicho cuadro puede observarse que, el tiempo medio de espera en cola es inexistente, y la probabilidad de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar es casi nula.

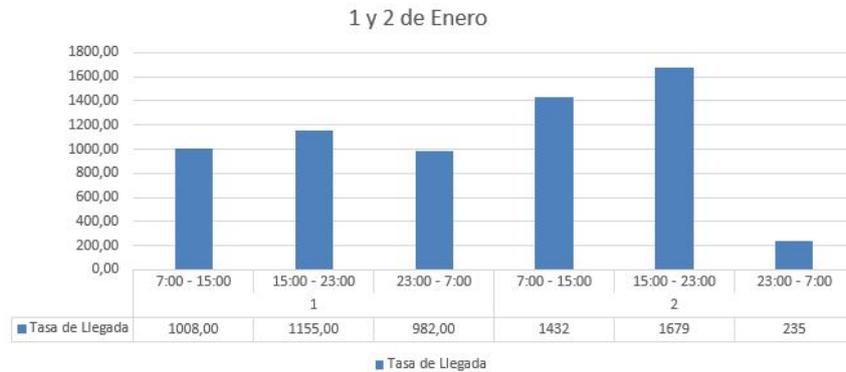


Figura 5.6: Tasa de Llegada al inicio del año 2013 (1 y 2 de enero)

Días	1			2		
	TM	TT	TN	TM	TT	TN
Intensidad de trafico	1,445	1,355	1,896	1,393	1,668	0,337
Tasa de llegada	1008	1155	982	1432	1679	235
Tasa de servicio	697,8	852,167	518	1028	1006,833	697,333
Nº de Canales (S)	5	6	4	5	6	3
Número medio de elementos en cola	0,002	0	0,045	0,002	0	0,001
Número medio de canales no ocupados	3,555	4,645	2,104	3,607	4,332	2,663
Número medio de clientes en el sistema	1,452	1,356	2,059	1,399	1,671	0,337
Tiempo medio de espera en cola o fila	0	0	0	0	0	0
Tiempo medio de permanencia en el sistema	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,001
Tiempo medio en el servicio	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,001
Probabilidad de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar	0,005	0,001	0,086	0,004	0,003	0

Cuadro 5.3: Indicadores durante el 1 y 2 de enero

Analicemos, a continuación, la época de Reyes del año 2013. La distribución de la tasa de llegadas se recoge en la gráfica 5.7. Observamos en dicha gráfica que el día de mayor afluencia es el 5 de enero, en concreto en el turno de tarde, posiblemente porque es cuando se realiza la cabalgata de Reyes y en torno a esa celebración pueden producirse muchas incidencias. También ese día los comercios permanecen abiertos con un horario más amplio que el habitual y hay más gente para comprar los regalos de reyes.

En el día 6 de enero las llamadas disminuyen respecto al día anterior. Ello podría estar causado porque las familias están en sus casas. En estos dos días 5 y 6 se produce el

comportamiento de los periodos anteriores, o sea, hay diferencia entre los distintos turnos y especialmente con el turno de noche que decrece mucho. Por otro lado, el día 7 de enero durante los dos primeros turnos, se recibe casi el mismo número de llamadas que el día anterior, para volver a disminuir considerablemente dicho número en el turno de noche. A diferencia de los periodos anteriores, en el día posterior al día de Reyes las llamadas, en lugar de aumentar, disminuyen ya que es lunes y comienza la jornada laboral.



Figura 5.7: Tasa de Llegada en Reyes de 2013 (5,6 y 7 de enero)

Días	5			6			7		
	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN
Intensidad de trafico	1,12	1,855	0,6	0,9	1,414	0,742	1,119	1,162	0,364
Tasa de llegada	994	1621	323	955	1225	372	957	1024	256
Tasa de servicio	887,4	873,857	538,25	1060,833	866,333	501,25	855,6	881,571	704,25
Nº de Canales (S)	5	7	4	6	6	4	5	7	4
Número medio de elementos en cola	0,001	0	0,001	0	0	0,002	0,001	0	0
Número medio de canales no ocupados	3,88	5,145	3,4	5,1	4,586	3,258	3,881	5,838	3,636
Número medio de clientes en el sistema	1,122	1,857	0,6	0,9	1,415	0,743	1,12	1,162	0,364
Tiempo medio de espera en cola o fila	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tiempo medio de permanencia en el sistema	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,001
Tiempo medio en el servicio	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,001
Probabilidad de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar	0,001	0,002	0	0	0,001	0,001	0,001	0	0

Cuadro 5.4: Indicadores del 5 al 7 de enero

Una vez visto esto, las medidas de eficiencia se recogen en la tabla 5.4. Observando los datos de la citada tabla 5.4, se deduce que el tiempo medio de permanencia en el sistema es muy pequeño, que el número medio de canales no ocupados es elevado y el tiempo

medio en el servicio es despreciable.

Por último, para terminar este capítulo vamos a analizar dos meses completos. En primer lugar el mes de agosto, mes en el que la mayoría de la población se va de vacaciones y un mes tomado al azar, teniendo en cuenta que tuviese el menor número de festivos posible, en nuestro caso hemos seleccionado el mes de octubre.

Recordemos que el último día de cada mes sólo tiene dos turnos, puesto que hemos considerado que el turno de noche pertenece al mes siguiente, así que la tasa media de llegadas va a darnos un número mayor del real, puesto que esta media suele disminuir por el número de llamadas recibidas en el turno de noche. Por lo tanto este último día no lo tendremos en cuenta.

En primer lugar, en la figura 5.8 se muestra una imagen del mes completo tomando la media diaria de las distintas tasas de llegada de los tres turnos. En la figura 5.8 vemos que las llamadas siguen aproximadamente una misma distribución, en torno a las 900 llamadas por término medio mas o menos, luego baja un poco, después se mantiene y vuelve a aumentar. Además, se observa que la tasa de llegada va aumentando los últimos días del mes.

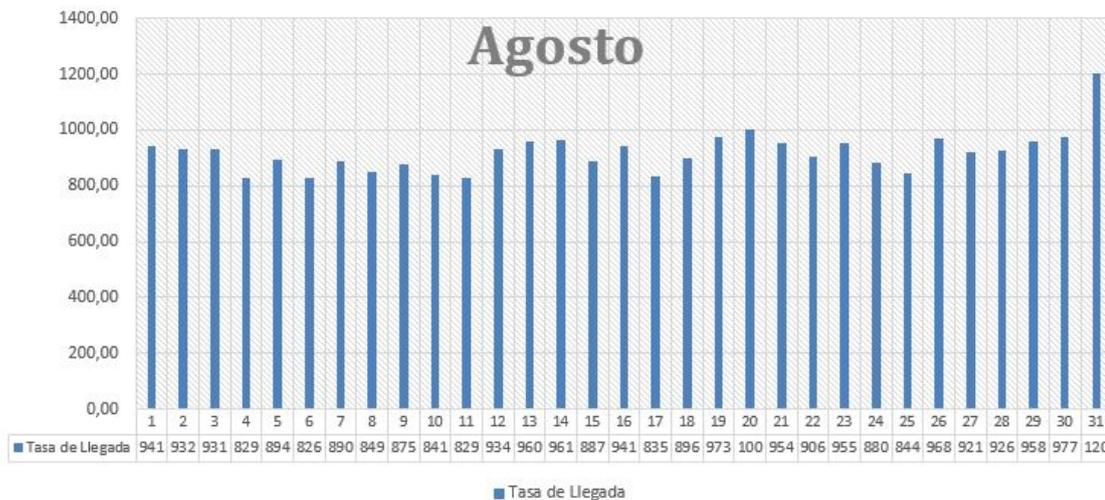


Figura 5.8: Tasa de Llegada en agosto de 2013

A continuación veamos como se distribuyen las cantidades de llamadas que se recibieron en el turno de mañana. En la gráfica 5.9 se recogen dichas llamadas. Vemos en dicha figura 5.9 que se producen algunos picos, y teniendo en cuenta que este mes comenzó en el jueves día 1, podemos concluir que los días de mayor afluencia son los lunes, disminuyendo los sábados y domingos de forma notable.

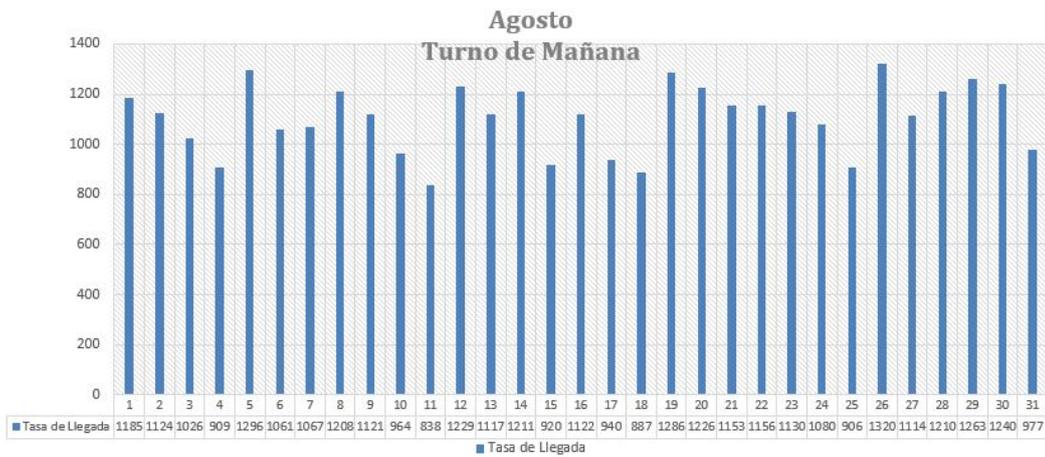


Figura 5.9: Tasa de Llegada en agosto de 2013 en el turno de mañana

Para continuar veamos lo que ocurre en el turno de tarde. En la gráfica de la figura A.4 recogida en el apéndice, se distribuye la tasa de llegadas en este turno a lo largo del mes. En este caso la tasa de llegada comienza con valores bastante grandes y disminuye el domingo, aunque no hay tanta diferencia como en el turno anterior. Se producen más irregularidades, por ejemplo al principio hay subidas y bajadas a lo largo de la semana. En este caso no hay un patrón claro.

Posteriormente veamos el turno de noche en la figura A.5 del apéndice. En la distribución de las llegadas de dicha figura vemos que en este turno vuelve a suceder algo parecido a lo largo del mes, aunque el número de llamadas es mucho menor que en los casos anteriores. Se observa que el mayor número de llamadas se realizan los domingos y que el menor número de llamadas se presenta al principio de la semana (lunes y martes). La tasa de llegada va aumentando hasta el domingo, día en el que se produce un aumento considerable de llamadas, y vuelve a bajar significativamente el lunes, para comenzar a subir nuevamente y así continúa sucesivamente.

Finalmente para terminar con este mes, vamos a ver las distintas medidas de eficiencia a lo largo de este periodo. En el apéndice hemos incluido diversos cuadros que contienen las medidas o indicadores correspondientes a este mes. En las tablas A.8, A.9, A.10, A.11, A.12 y A.13 podemos apreciar que el tiempo medio de espera en cola es despreciable, al igual que la probabilidad de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar. Además el número medio de canales no ocupados es elevado.

Ahora realizaremos el análisis en el mes de octubre. En primer lugar veamos la distribución de la media de llegadas entre las tres jornadas laborales.

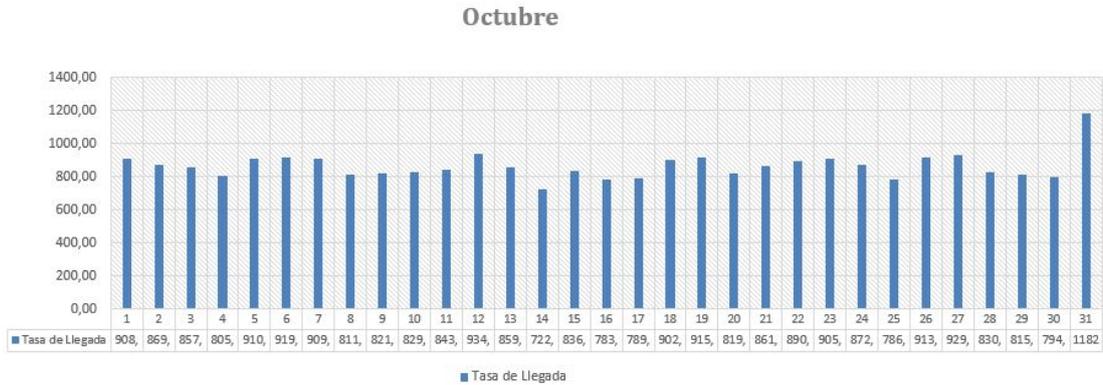


Figura 5.10: Tasa de Llegada en octubre de 2013

Tengamos en cuenta que el mes de octubre en el año 2013 comenzó en un martes. La tasa media de llegadas diarias, que se muestra en la figura 5.10, está en torno a las 800 llamadas, salvo el día 31. En este caso la media es mayor porque no se contabiliza el periodo nocturno, ya que éste está incorporado al siguiente mes. En este mes los días de mayor afluencia son los sábados, y esto puede estar causado porque al no estar de vacaciones, los usuarios cuando más salen a divertirse son los fines de semana.

Una vez visto esto, veamos la gráfica de la figura 5.11 para la tasa de llegada en el turno de mañana. En esta podemos apreciar que, cuando hay más llamadas son principalmente los lunes y los sábados. La evolución de las llamadas no sigue siempre un mismo patrón. A partir del lunes el número de llamadas va disminuyendo, para luego subir y bajar sin un patrón fijo, teniendo, en general el punto más alto en el sábado.



Figura 5.11: Tasa de Llegada en octubre de 2013 en el turno de mañana

Continuamos analizando la tasa de llegada a lo largo del turno de tarde, tal como se muestra en la figura A.6 del apéndice. Observamos que este turno recibe más llamadas que el anterior. No obstante, a simple vista, no podemos determinar un patrón de llegadas en los días transcurridos. Los días que más llamadas se recibieron son el martes 22 en primer lugar, luego el martes 1, el sábado 5 y el domingo 6. Esto podría deberse a algún tipo de accidente puntual de carretera, o por incidencias del tiempo, etc. Por otro lado, los demás días se comportan de forma similar, manteniendo con ligeras diferencias unas 1200 llamadas diarias, salvo el día 14, donde las llamadas recibidas no llegaron a 1000.

Posteriormente veamos la figura A.7 recogida en el apéndice y que corresponde al comportamiento de la tasa de llegada durante el turno de noche. A simple vista vemos que sigue una misma pauta, el número de llamadas se mantienen a un nivel parecido, hasta que llega el sábado y el domingo de cada semana, que las llamadas aumentan considerablemente.

Para finalizar veamos las medidas de eficiencia de este periodo. En el apéndice se recogen las tablas de dichas medidas. En las tablas A.14, A.15, A.16, A.17, A.18 y A.19 podemos apreciar que el número medio de canales no ocupados es bastante grande. La intensidad de tráfico se encuentra en torno a  $1'5$  en los turnos de mañana y tarde, mientras que en el turno de noche se encuentra alrededor de  $0'5$ . Además el tiempo medio de permanencia en cola y la prob. de que una persona que llegue al sistema y tenga que esperar son despreciables.

## Capítulo 6

# Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado el funcionamiento del Centro Coordinador de Emergencias y Seguridad 1-1-2, concretamente se ha analizado el servicio de petición de ayuda que se ofrece a los ciudadanos. Este análisis se ha realizado teniendo en cuenta el sistema de colas que se plantea en la recepción y tramitación de llamadas. Usando los conceptos y fundamentos de la Teoría de Colas, el sistema de emergencias citado ha podido modelarse como un sistema de colas poissonianas con población ilimitada y múltiples canales de servicio. En este caso se considera que cada trabajador del centro de emergencias que trabaja en la sala de demandas, representa una estación o canal de servicio, desde la cual se atiende a los usuarios que notifican sus incidencias.

Teniendo en cuenta que los servidores tienen tres posibles turnos de trabajo, se determinan las tasas de llegada en cada turno, así como las tasas de servicio o número de usuarios atendidos por los servidores. Se estudia el comportamiento de estas medidas en diferentes periodos de tiempo durante el año 2013, prestando especial atención a periodos señalados.

Por otro lado, para cada uno de estos periodos se determinan los indicadores o medidas de eficiencia del sistema de colas, las cuales nos dan información sobre el funcionamiento del sistema y si los servidores son suficientes para atender la demanda del servicio.

Como conclusión de los resultados obtenidos, se deduce que estos indicadores o medidas reflejan un rápido funcionamiento del sistema de emergencia y una atención inmediata a los usuarios, tal y como queda reflejado en el hecho de que el tiempo medio de permanencia en cola de las llamadas es insignificante y el número medio de clientes en cola es despreciable, debido a que hay suficientes servidores para responder rápidamente a las llamadas recibidas.

Se observa que el número medio de canales no ocupados es muy elevado en relación con el número de servidores disponibles en cada turno. Ello permite tener cierto margen, de forma que siempre haya algunos servidores libres para atender a los posibles usuarios

extraordinarios, que demanden un servicio ante cualquier tipo de emergencia que surja de imprevisto. Todo ello viene motivado por el hecho de que el sistema que estamos tratando es un servicio de emergencia y debe estar preparado para responder rápidamente ante cualquier eventualidad.

Como posibles trabajos futuros nos planteamos las siguientes líneas de actuación:

1. Una primera línea de continuación del análisis desarrollado en esta memoria, sería estudiar si es adecuado reorganizar los servidores asignados a cada turno de trabajo. En tal sentido, sería interesante realizar un estudio más minucioso de la tasa de llegada y tasa de servicio por horas en lugar de jornadas laborales. Así quizás se podría detectar las franjas horarias con mayor demanda de incidencias dentro de cada turno y asignar los servidores adecuados a cada caso. De esta forma podríamos conseguir una nueva redistribución de turnos de trabajo o jornada laboral dependiendo de la frecuencia de las llamadas.
2. Otra futura línea de trabajo, podría ser realizar un estudio sobre la eficiencia y productividad del sistema, centrándonos en el análisis de los costos relacionados con el funcionamiento del sistema. En tal sentido, se podría estudiar el funcionamiento del sistema de forma que se intente minimizar costes, asumiendo que las medidas de eficiencia deben cubrir unos mínimos establecidos.
3. Finalmente, se debería ampliar el análisis que hemos desarrollado en la sala de demandas a todo el sistema, es decir, estudiar el sistema de colas en una segunda etapa, cuando la llamada es derivada a un sector específico para resolver la petición del usuario. Así, se podría estudiar el funcionamiento de los diferentes sectores a los que van dirigidos las llamadas, y analizar el tiempo de respuesta requerido para iniciar la resolución de las peticiones de los usuarios.

# Apéndice A

## Appendice

### A.1. Fórmulas de Little

En primer lugar vamos a definir las variables que vamos a utilizar. Así, consideremos que  $\xi(t)$  es el número de llegadas en el periodo  $(0, t)$  y  $\eta(t)$  es el número de salidas en el periodo  $(0, t)$ .

Además,  $N(t) = \xi(t) - \eta(t)$  será el número de clientes en el sistema en el instante  $t$ .

Denotemos por  $\gamma(t) = \int_0^t N(t)dt$  al tiempo total que los clientes han pasado en el sistema en el periodo  $(0, t)$ . Este valor coincide también con el número total de clientes en el sistema durante el intervalo  $[0, t]$ .

Sea  $\lambda_t = \frac{\xi(t)}{t}$  la tasa media de llegada durante  $(0, t)$ . Puede observarse que  $T_t = \frac{\gamma(t)}{\xi(t)}$  representa el tiempo medio por cliente en el sistema durante el periodo  $(0, t)$ . Además, se tiene que  $\bar{N}_t = \frac{\gamma(t)}{t}$  es el número medio de clientes en el sistema en el periodo  $(0, t)$ .

Por otro lado si definimos  $M(t) =$  número de clientes en cola en el instante  $t$ , se tiene que  $\Delta(t) = \int_0^t M(t)dt$  es el tiempo total que los clientes han pasado en cola en el periodo  $[0, t]$ . Ese valor coincide también con el número total de clientes en cola durante el intervalo  $[0, t]$ .

Si llamamos  $W_t = \frac{\Delta(t)}{\xi(t)}$  = tiempo medio por cliente en cola durante el periodo  $[0, t]$ , tenemos que  $\bar{Q}_t = \frac{\Delta(t)}{t}$  es el número medio de clientes en cola en el periodo  $(0, t)$ .

Teniendo en cuenta lo anterior, se obtienen los siguientes resultados:

$$\bar{N}_t = \lambda_t T_t \quad \text{y} \quad \bar{Q}_t = \lambda_t W_t$$

Suponiendo una estabilidad en el sistema, de forma que:

$$\bar{N} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{N}_t ; \bar{\lambda} = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t ; T = \lim_{t \rightarrow \infty} T_t ; \bar{Q} = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{Q}_t ; W = \lim_{t \rightarrow \infty} W_t$$

obtenemos las fórmulas de Little ( Ver bibliografía [2])

$$\bar{N} = \bar{\lambda}T \quad \text{y} \quad \bar{Q} = \bar{\lambda}W$$

## A.2. Distribución de Erlang

La distribución de Erlang, es una distribución de probabilidad continua con dos parámetros  $k$  y  $\lambda$ , cuya función de densidad para valores  $x > 0$  es la siguiente:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} \quad \text{para } x, \lambda \geq 0$$

Esta distribución de Erlang es equivalente a la distribución Gamma con el parámetro  $k = 1, 2, \dots$  (valores enteros) y  $\lambda = \frac{1}{\theta}$ . Para  $k = 1$ , coincide con la distribución exponencial.

La distribución de Erlang se utiliza para describir el tiempo de espera hasta el suceso número  $k$  en un proceso de Poisson.

Esta función recibe su nombre del matemático e ingeniero danés Agner Krarup Erlang que la introdujo en 1909.

## A.3. Gráficas de la tasa de llamadas

En esta sección se recogen varias figuras donde se muestra la tasa de llegadas de las llamadas realizadas al sistema de emergencias 1-1-2 en distintos periodos de tiempo durante el año 2013.

### A.3.1. Carnavales

Se muestra en la figura A.1 la tasa de llegada por jornada laboral en los carnavales del 2013.

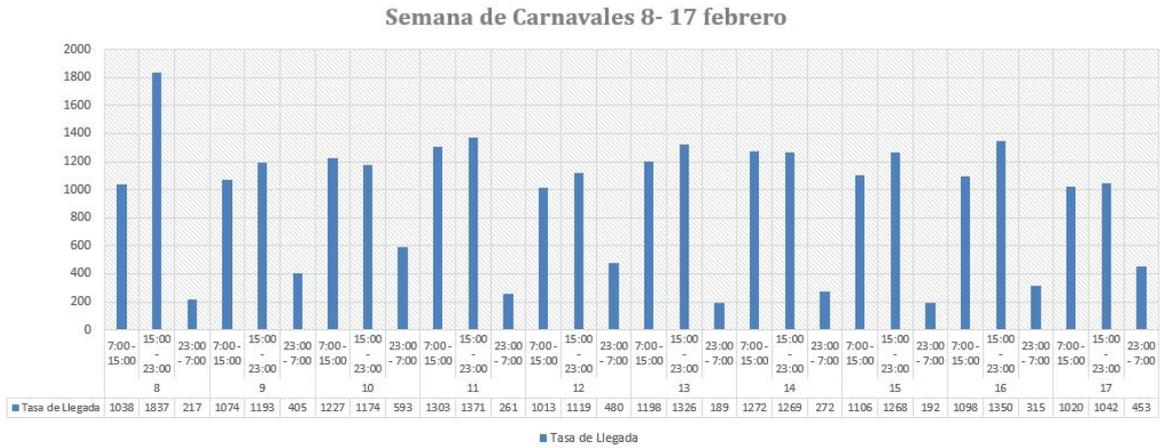


Figura A.1: Tasa de Llegadas por jornada laboral en carnavales 2013

### A.3.2. Semana Santa

La figura A.2 muestra la tasa de llegada por jornada laboral durante todos los días de la Semana Santa de 2013.

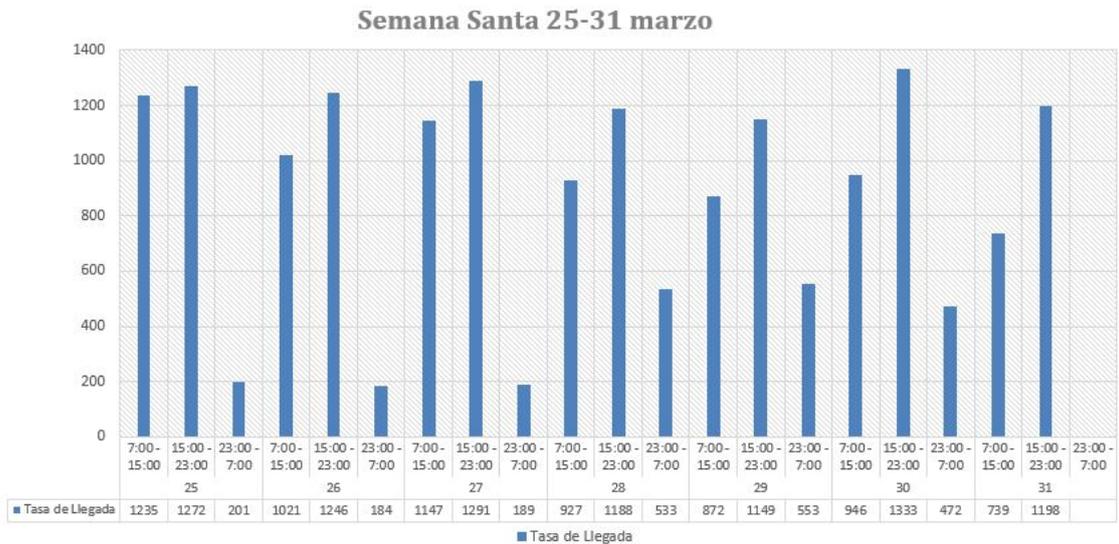


Figura A.2: Tasa de Llegada por jornada laboral en Semana Santa 2013

### A.3.3. Semana 8 - 16 abril

Se muestra en la figura A.3 la tasa de llegada por jornada laboral en el periodo del 8 al 16 de abril.

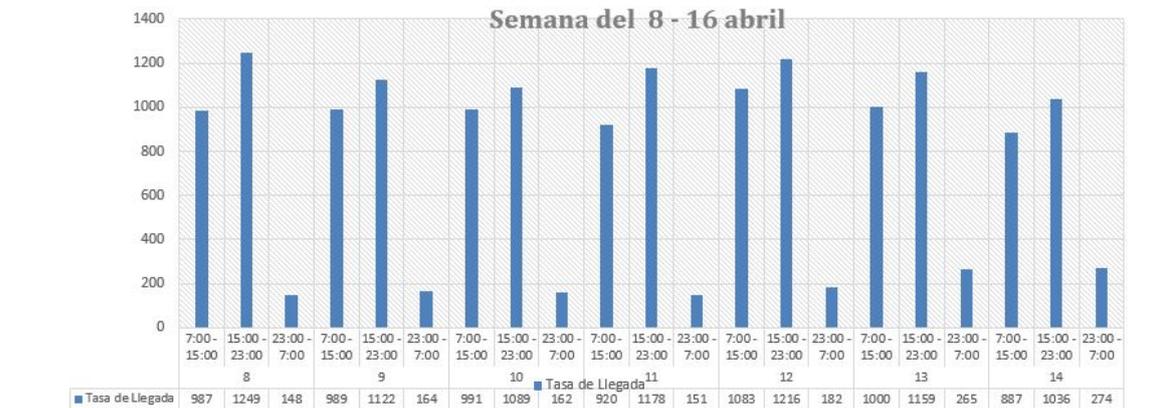


Figura A.3: Tasa de Llegada por jornada laboral en la semana del 8 al 16 de abril de 2013

### A.3.4. Mes de agosto

Las figuras A.4 y A.5 muestran la distribución de la tasa de llegada en agosto de 2013 durante los turnos de tarde y de noche respectivamente.



Figura A.4: Tasa de Llegada en agosto de 2013 durante el turno de tarde

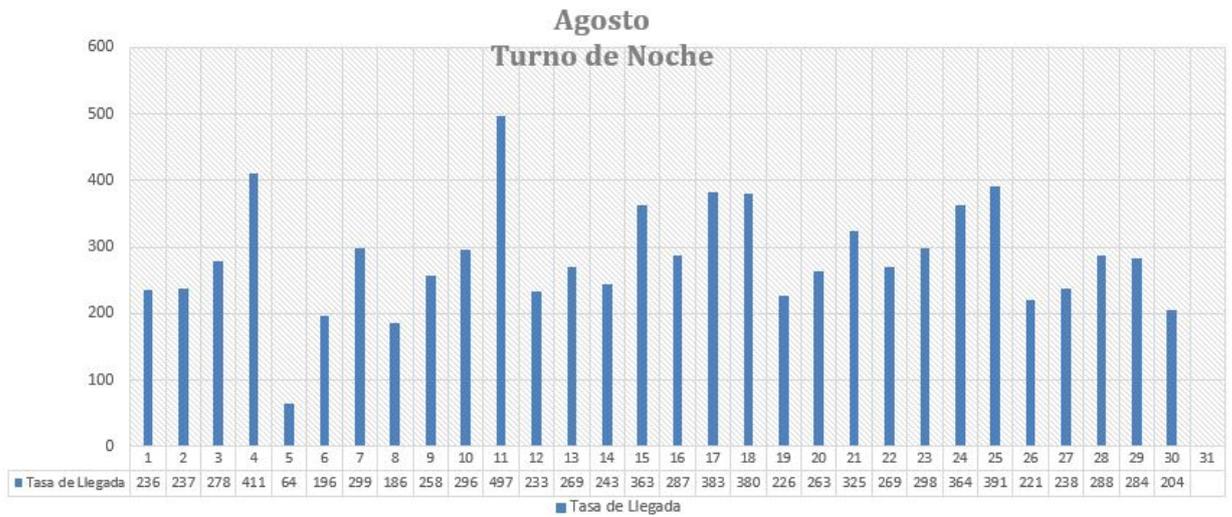


Figura A.5: Tasa de Llegada en agosto de 2013 durante el turno de noche

### A.3.5. Mes de octubre

Las figuras A.6 y A.7 muestran la distribución de la tasa de llegada en octubre de 2013 durante lo turnos de tarde y de noche.

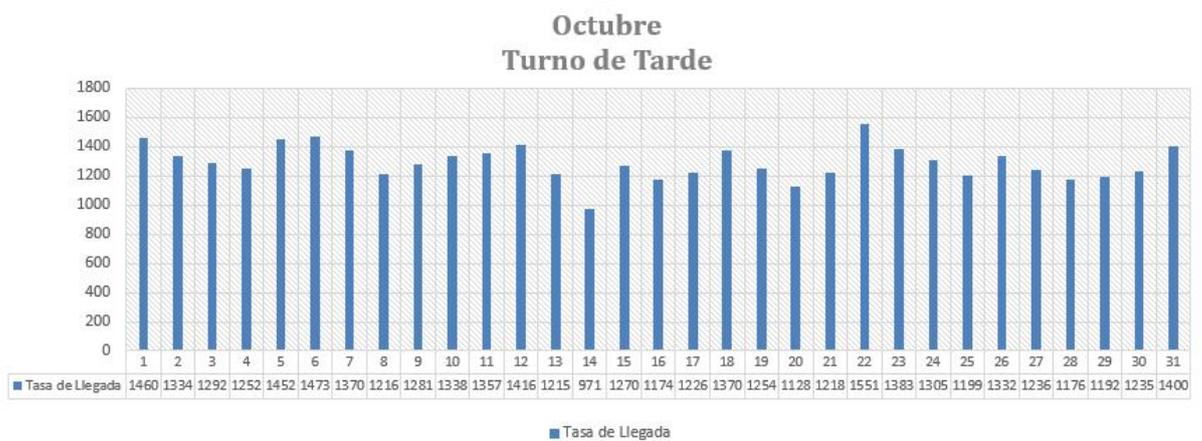


Figura A.6: Tasa de Llegada en octubre de 2013 en el turno de tarde

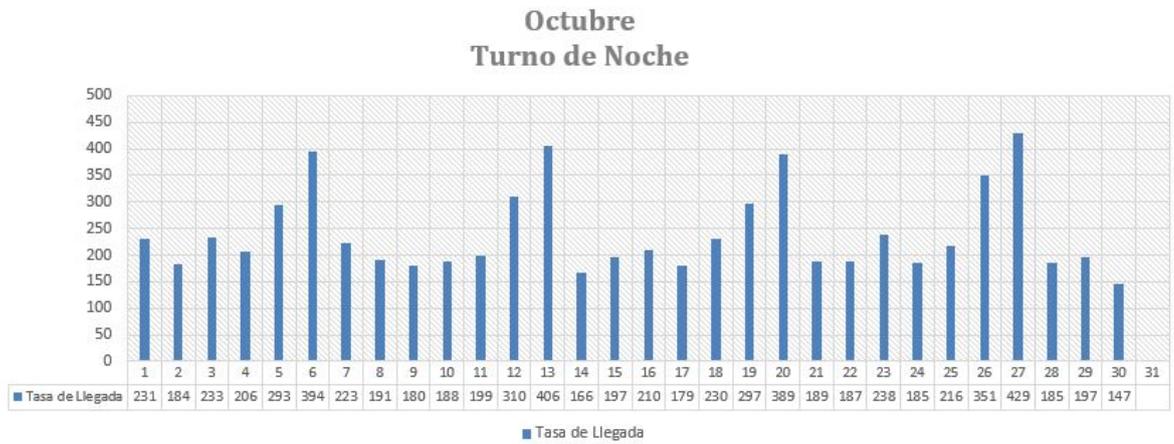


Figura A.7: Tasa de Llegada en octubre de 2013 durante el turno de noche

## A.4. Indicadores de eficiencia

En este apartado, se recogen varias tablas donde se muestran los indicadores de eficiencia para distintos periodos de tiempo, obtenidos a partir de los datos del sistema de atención al cliente.

### A.4.1. Semana de Carnaval

Los indicadores de los días pertenecientes a la Semana de Carnaval se recogen en los cuadros A.1, A.2 y A.3.

Días	8			9			10			11		
	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN
Intensidad de tráfico	1,497	1,352	0,41	1,35	1,35	0,703	0,847	1,299	1,141	1,391	1,647	0,515
Tasa de llegada	1038	1837	217	1074	1193	405	1227	1174	593	1303	1371	261
Tasa de servicio	693,2	1358,7	529	795,4	883,5	575,75	1448,333	904	519,5	936,6	832,333	507
Nº de Canales (S)	5	10	3	5	6	4	6	6	4	5	6	3
Número medio de elementos en cola	0,003	0	0,002	0,002	0	0,001	0	0	0,008	0,002	0	0,004
Número medio de canales no ocupados	3,503	8,648	2,59	3,65	4,65	3,297	5,153	4,701	2,859	3,609	4,353	2,485
Número medio de clientes en el sistema	1,506	1,352	0,411	1,355	1,351	0,704	0,847	1,299	1,151	1,396	1,65	0,517
Tiempo medio de espera en cola o fila	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tiempo medio de permanencia en el sistema	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Tiempo medio en el servicio	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Probabilidad de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar	0,006	0	0,001	0,003	0,001	0,001	0	0	0,007	0,004	0,002	0,002

Cuadro A.1: Indicadores de eficiencia del 8 al 11 de febrero (Carnaval)

Días	12			13			14		
	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN
Intensidad de tráfico	1,382	1,369	1,11	1,503	1,353	0,369	1,353	1,259	0,557
Tasa de llegada	1013	1119	480	1198	1326	189	1272	1269	272
Tasa de servicio	733	817,667	432,25	796,833	980	512	940	1007,857	488,333
Nº de Canales (S)	5	6	4	6	6	3	6	7	3
Número medio de elementos en cola	0,002	0	0,007	0	0	0,001	0	0	0,005
Número medio de canales no ocupados	3,618	4,631	2,89	4,497	4,647	2,631	4,647	5,741	2,443
Número medio de clientes en el sistema	1,387	1,369	1,119	1,505	1,354	0,37	1,354	1,259	0,56
Tiempo medio de espera en cola o fila	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tiempo medio de permanencia en el sistema	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Tiempo medio en el servicio	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Probabilidad de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar	0,004	0,001	0,006	0,001	0,001	0	0,001	0	0,002

Cuadro A.2: Indicadores del 12 al 14 de febrero (Carnaval)

Días	15			16			17		
	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN
Intensidad de tráfico	1,048	1,528	0,272	1,307	1,459	0,554	1,228	1,265	0,817
Tasa de llegada	1106	1268	192	1098	1350	315	1020	1042	453
Tasa de servicio	1054,857	830	705,667	840	925,333	568,75	830,4	823,429	554,25
Nº de Canales (S)	7	6	3	5	6	4	5	7	4
Número medio de elementos en cola	0	0	0,001	0,002	0	0,001	0,001	0	0,002
Número medio de canales no ocupados	5,952	4,472	2,728	3,693	4,541	3,446	3,772	5,735	3,183
Número medio de clientes en el sistema	1,048	1,53	0,272	1,311	1,46	0,554	1,231	1,266	0,819
Tiempo medio de espera en cola o fila	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tiempo medio de permanencia en el sistema	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Tiempo medio en el servicio	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Probabilidad de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar	0	0,001	0	0,003	0,001	0	0,002	0	0,001

Cuadro A.3: Indicadores del 15 al 17 de febrero (Carnaval)

#### A.4.2. Semana Santa

En este apartado veremos los indicadores de eficiencia obtenidos en el periodo de Semana Santa. Dichos indicadores se muestran en las tablas A.4 y A.5.

Días	25			26			27		
	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN
Intensidad de tráfico	1,152	1,392	0,426	1,12	1,328	0,377	1,31	1,63	0,33
Tasa de llegada	1235	1272	201	1021	1246	184	1147	1291	189
Tasa de servicio	1071,6	913,5	472,333	911,833	938	488,333	875,6	791,833	573
Nº de Canales (S)	5	6	3	6	6	3	5	6	3
Número medio de elementos en cola	0,001	0	0,002	0	0	0,001	0,002	0,001	0,001
Número medio de canales no ocupados	3,848	4,608	2,574	4,88	4,672	2,623	3,69	4,37	2,67
Número medio de clientes en el sistema	1,155	1,394	0,426	1,12	1,329	0,377	1,315	1,634	0,33
Tiempo medio de espera en cola o fila	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tiempo medio de permanencia en el sistema	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Tiempo medio en el servicio	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Probabilidad de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar	0,002	0,001	0,001	0	0,001	0	0,004	0,003	0

Cuadro A.4: Indicadores del 25 al 27 marzo (S.Santa)

Días	28			29			30			31		
	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN
Horario	1,125	1,404	0,57	1,037	1,568	0,446	1,315	1,561	0,567	1,083	1,379	-
Intensidad de trafico	927	1188	533	872	1149	553	946	1333	472	739	1198	-
Tasa de llegada	823,8	846,333	935	841	733	1239,5	719,167	853,667	833	682,4	868,5	-
Nº de Canales (S)	5	6	4	5	6	4	6	6	4	5	6	-
Número medio de elementos en cola	0,001	0	0,001	0,001	0	0	0	0	0,001	0,001	0	-
Número medio de canales no ocupados	3,875	4,596	3,43	3,963	4,432	3,554	4,685	4,439	3,433	3,917	4,621	-
Número medio de clientes en el sistema	1,127	1,405	0,57	1,038	1,571	0,446	1,316	1,564	0,567	1,084	1,381	-
Tiempo medio de espera en cola o fila	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-
Tiempo medio de permanencia en el sistema	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	-
Tiempo medio en el servicio	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	-
Probabilidad de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar	0,001	0,001	0	0,001	0,002	0	0,001	0,002	0	0,001	0,001	-

Cuadro A.5: Indicadores del 28 al 29 marzo (S.Santa)

#### A.4.3. Semana del 8 al 14 de abril

Observemos las medidas de eficiencia en el periodo del 8 al 14 de abril. Estas medidas se muestran en los cuadros A.6 y A.7

Días	8			9			10		
	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN
Horario	1,246	1,353	0,268	1,33	1,229	0,283	1,284	1,253	0,329
Intensidad de trafico	987	1249	148	989	1122	164	991	1089	162
Tasa de llegada	792,2	923,167	552,333	743,4	913,167	580	772	868,833	492,667
Nº de Canales (S)	5	6	3	5	6	3	5	6	3
Número medio de elementos en cola	0,002	0	0,001	0,002	0	0,001	0,002	0	0,001
Número medio de canales no ocupados	3,754	4,647	2,732	3,67	4,771	2,717	3,716	4,747	2,671
Número medio de clientes en el sistema	1,249	1,354	0,268	1,335	1,229	0,283	1,288	1,254	0,329
Tiempo medio de espera en cola o fila	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tiempo medio de permanencia en el sistema	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Tiempo medio en el servicio	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Probabilidad de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar	0,002	0,001	0	0,004	0	0	0,003	0	0

Cuadro A.6: Indicadores del 8 al 10 de abril

Días	11			12			13			14		
	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN
Horario	1,25	1,4	0,3	1,37	1,6	0,39	1,27	1,38	0,6	1,09	1,1	0,66
Intensidad de tráfico	920	1178	151	1083	1216	182	1000	1159	265	887	1036	274
Tasa de llegada	737,6	836,17	509	793,4	761,7	467,3	786,7	841,5	466,5	814	943,7	413,25
Nº de Canales (S)	5	6	3	5	6	3	6	6	4	5	6	4
Número medio de elementos en cola	0,002	0	0,001	0,002	0	0,002	0	0	0,001	0,001	0	0,001
Número medio de canales no ocupados	3,75	4,59	2,7	3,6	4,4	2,6	4,73	4,6	3,4	3,91	4,9	3,3
Número medio de clientes en el sistema	1,25	1,41	0,297	1,37	1,6	0,39	1,27	1,38	0,6	1,1	1,1	0,66
Tiempo medio de espera en cola o fila	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tiempo medio de permanencia en el sistema	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Tiempo medio en el servicio	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Probabilidad de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar	0,002	0,001	0	0,004	0,002	0,001	0	0,001	0	0,001	0	0,001

Cuadro A.7: Indicadores del 11 al 14 de abril

## A.4.4. Mes de agosto

Los indicadores o medidas de eficiencia del sistema de colas correspondientes al mes de agosto se resumen en los cuadros A.8 - A.13.

Días	1			2			3			4			5		
Horario	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN
Intensidad de tráfico	1,6	1,6	0,4	1,5	1,7	0,38	1,12	1,7	0,56	1,13	1,2	0,9	1,49	1,64	0,15
Tasa de llegada	1185	1404	236	1124	1435	237	1026	1491	278	909	1167	411	1296	1323	64
Tasa de servicio	766,4	864,5	567	743,8	841,17	617	915,8	873,7	498,75	807	977,1	454	871,6	807	421
Nº de Canales (S)	5	6	3	5	6	3	6	7	4	6	7	4	5	7	3
Número medio de elementos en cola	0,003	0	0,002	0,003	0	0,002	0	0	0,001	0	0	0,003	0,002	0	0
Número medio de canales no ocupados	3,45	4,38	2,58	3,49	4,29	2,62	4,88	5,29	3,44	4,87	5,8	3,09	3,51	5,36	2,85
Número medio de clientes en el sistema	1,56	1,63	0,417	1,52	1,71	0,39	1,12	1,7	0,56	1,13	1,194	0,9	1,5	1,6	0,15
Tiempo medio de espera en cola o fila	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tiempo medio de permanencia en el sistema	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Tiempo medio en el servicio	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Prob. de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar	0,007	0,002	0,001	0,006	0,003	0,001	0	0,001	0	0	0	0,002	0,006	0	0

Cuadro A.8: Indicadores del 1 al 5 de agosto

Días	6			7			8			9			10		
Horario	TM	TT	TN												
Intensidad de tráfico	1,38	1,37	0,32	1,29	1,53	0,48	1,3	1,3	0,45	1,3	1,67	0,41	1,09	1,79	0,6
Tasa de llegada	1061	1221	196	1067	1305	299	1208	1155	186	1121	1247	258	964	1264	296
Tasa de servicio	770,8	893,6	623	827,2	851,8	623,3	928,3	869,5	413,7	838,4	748,8	625,7	883,7	705,2	488,3
Nº de Canales (S)	5	7	3	5	6	3	6	6	3	5	6	3	6	6	4
Nº medio de elementos en cola	0,002	0	0,001	0,001	0	0,003	0	0	0,003	0,002	0	0,002	0	0,001	0,001
N medio de canales no ocupados	3,62	5,63	2,69	3,7	4,47	2,5	4,7	4,7	2,6	3,7	4,4	2,6	4,9	4,2	3,4
Nº medio de clientes en el sistema	1,381	1,367	0,315	1,293	1,534	0,481	1,302	1,329	0,451	1,341	1,669	0,413	1,091	1,798	0,607
Tiempo medio de espera en cola o fila	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tiempo medio de permanencia en el sistema	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Tiempo medio en el servicio	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Prob. de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar	0,003	0	0	0,002	0,001	0,001	0	0	0,001	0,003	0,002	0,001	0	0,004	0

Cuadro A.9: Indicadores del 6 al 10 de agosto

Días	11			12			13			14			15		
Horario	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN
Intensidad de tráfico	1,09	1,68	1,03	1,35	1,6	0,6	1,3	1,6	0,5	1,7	1,8	0,4	1,3	1,78	0,67
Tasa de llegada	838	1153	497	1229	1340	233	1117	1495	269	1211	1431	243	920	1380	363
Tasa de servicio	764,6	686	479	912	818,2	383	880,2	927,3	504,7	728,2	801,17	549,7	723,4	774	543,3
Nº de Canales (S)	5	6	4	5	6	3	5	6	3	5	6	3	5	6	4
Nº medio de elementos en cola	0,001	0	0,005	0,002	0	0,007	0,001	0	0,005	0,004	0,001	0,002	0,001	0,001	0,001
Nº medio de canales no ocupados	3,9	4,3	2,9	3,6	4,4	2,4	3,71	4,4	2,5	3,3	4,2	2,6	3,7	4,2	3,3
Nº medio de clientes en el sistema	1,097	1,684	1,043	1,352	1,641	0,613	1,272	1,615	0,535	1,679	1,792	0,443	1,275	1,789	0,669
Tiempo medio de espera en cola o fila	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tiempo medio de permanencia en el sistema	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,003	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Tiempo medio en el servicio	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,003	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Prob. de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar	0,001	0,003	0,004	0,003	0,002	0,003	0,002	0,002	0,002	0,011	0,004	0,001	0,002	0,004	0

Cuadro A.10: Indices del 11 al 15 de agosto

Días	16			17			18			19			20		
Horario	TM	TT	TN	TM	TT	TN									
Intensidad de tráfico	1,61	1,67	0,47	1,4	1,67	0,68	1,3	1,7	0,7	1,5	1,6	0,4	1,4	1,4	0,5
Tasa de llegada	1122	1416	287	940	1184	383	887	1423	380	1286	1407	226	1226	1513	263
Tasa de servicio	695,2	846,8	608,3	678,8	707,3	562,5	681,8	847	532	863,8	889,3	639,7	851,6	1072,1	547
Nº de Canales (S)	6	6	3	6	6	4	5	6	4	5	6	3	5	7	3
Nº medio de elementos en cola	0	0	0,003	0	0	0,001	0,001	0	0,001	0,002	0	0,001	0,002	0	0,003
Nº medio de canales no ocupados	4,39	4,3	2,5	4,6	4,3	3,3	3,7	4,32	3,29	3,5	4,42	2,65	3,56	5,59	2,5
Nº medio de clientes en el sistema	1,617	1,68	0,473	1,39	1,7	0,68	1,304	1,7	0,7	1,5	1,58	0,35	1,45	1,41	0,48
Tiempo medio de espera en cola o fila	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tiempo medio de permanencia en el sistema	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Tiempo medio en el servicio	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Proba. de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar	0,002	0,002	0,001	0,001	0,002	0	0,002	0,003	0,001	0,006	0,002	0	0,005	0	0,001

Cuadro A.11: Indicadores del 16 al 20 de agosto

Días	21			22			23			24			25		
Horario	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN
Intensidad de tráfico	1,38	1,3	0,5	1,5	1,5	0,6	1,4	1,6	0,6	1,2	1,3	0,7	1,1	1,4	0,9
Tasa de llegada	1153	1385	325	1156	1293	269	1130	1438	298	1080	1197	364	906	1237	391
Tasa de servicio	888,2	1046	597	790,4	882,83	467,3	792,4	896,17	526,67	895	916	516,5	818,2	864,8	426,5
Nº de Canales (S)	5	6	3	5	6	3	5	6	3	6	6	4	5	6	4
Nº medio de elementos en cola	0,001	0	0,005	0,002	0	0,006	0,002	0	0,006	0	0	0,001	0,001	0	0,003
Nº medio de canales no ocupados	3,7	4,7	2,5	3,5	4,5	2,4	3,6	4,4	2,4	4,8	4,7	3,2	3,9	4,6	3,1
Nº medio de clientes en el sistema	1,3	1,3	0,55	1,47	1,47	0,58	1,43	1,6	0,57	1,2	1,3	0,7	1,1	1,43	0,92
Tiempo medio de espera en cola o fila	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tiempo medio de permanencia en el sistema	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Tiempo medio en el servicio	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Prob. de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar	0,002	0	0,002	0,005	0,001	0,003	0,004	0,002	0,003	0	0	0,001	0,001	0,001	0,002

Cuadro A.12: Indicadores del 21 al 25

Días	26			27			28			29			30		
Horario	TM	TT	TN	TM	TT	TN									
Intensidad de tráfico	1,3	1,4	0,323	1,4	1,7	0,39	1,	1,5	0,5	1,2	1,51	0,49	1,2	1,8	0,4
Tasa de llegada	1320	1365	221	1114	1413	238	1210	1281	288	1263	1329	284	1240	1489	204
Tasa de servicio	992,4	990,5	684	782,4	828,5	613	843,6	884,3	634,3	1073	880,3	579	1025,6	852,3	562,7
Nº de Canales (S)	5	6	3	5	6	3	5	6	3	6	6	3	5	6	3
Nº medio de elementos en cola	0,002	0	0,001	0,002	0	0,002	0,002	0	0,003	0	0	0,003	0,001	0,001	0,001
Nº medio de canales no ocupados	3,67	4,6	2,7	3,58	4,3	2,6	3,6	4,55	2,55	4,8	4,49	2,5	3,79	4,25	2,64
Nº medio de clientes en el sistema	1,334	1,38	0,32	1,43	1,71	0,39	1,44	1,45	0,46	1,18	1,5	0,49	1,21	1,75	0,36
Tiempo medio de espera en cola o fila	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tiempo medio de permanencia en el sistema	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Tiempo medio en el servicio	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Probab. de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar	0,003	0,001	0	0,004	0,003	0,001	0,004	0,001	0,001	0	0,001	0,001	0,002	0,003	0

Cuadro A.13: Indicadores del 26 al 30 de agosto

#### A.4.5. Mes de octubre

En este apartado presentamos los indicadores a lo largo del mes de octubre. Se agrupan en periodos de cinco días consecutivos y se muestra en los cuadros A.14 - A.19.

Días	1			2			3			4			5		
Horario	TM	TT	TN	TM	TT	TN									
Intensidad de tráfico	1,4	1,66	0,37	1,37	1,7	0,4	1,5	1,8	0,4	1,4	1,4	0,4	1,3	1,6	0,6
Tasa de llegada	1035	1460	231	1090	1334	184	1047	1292	233	958	1252	206	985	1452	293
Tasa de servicio	762	877,8	613,7	795,2	784	453	713,8	733,4	548	689	886,8	554,3	734	892,2	490,3
Nº de Canales (S)	5	6	3	5	6	3	5	6	3	5	6	3	5	6	4
Nº medio de elementos en cola	0,002	0,001	0,002	0,002	0,001	0,002	0,003	0,001	0,002	0,002	0	0,002	0,002	0	0,001
Nº medio de canales no ocupados	3,64	4,34	2,62	3,63	4,298	2,59	3,53	4,24	2,58	3,61	4,59	2,63	3,66	4,373;	3,4
Nº medio de clientes en el sistema	1,36	1,67	0,38	1,38	1,7	0,4	1,48	1,77	0,43	1,396	1,41	0,37	1,347	1,63	0,598
Tiempo medio de espera en cola o fila	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tiempo medio de permanencia en el sistema	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Tiempo medio en el servicio	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Prob. de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar	0,004	0,003	0,001	0,004	0,003	0,001	0,006	0,004	0,001	0,004	0,001	0	0,003	0,002	0

Cuadro A.14: Indicadores del 1 al 5 de octubre

Días	6			7			8			9			10		
Horario	TM	TT	TN												
Intensidad de tráfico	1,16	1,7	0,7	1,5	1,5	0,44	1,4	1,5	0,47	1,2	1,6	0,35	1,48	1,6	0,4
Tasa de llegada	890	1473	394	1135	1370	223	1027	1216	191	1002	1281	180	963	1338	188
Tasa de servicio	763,4	854,7	558,8	764,4	931,3	507,3	717	799,3	406,7	873,4	819,7	508,7	649,6	854	485,7
Nº de Canales (S)	5	6	4	5	6	3	5	6	3	5	6	3	5	7	3
Nº medio de elementos en cola	0,001	0,001	0,002	0,003	0	0,003	0,002	0	0,003	0,001	0	0,001	0,003	0	0,002
Nº medio de canales no ocupados	3,834	4,277	3,295	3,515	4,529	2,56	3,568	4,479	2,53	3,853	4,437	2,646	3,518	5,433	2,613
Nº medio de clientes en el sistema	1,168	1,729	0,71	1,49	1,47	0,44	1,44	1,52	0,47	1,149	1,565	0,354	1,49	1,57	0,39
Tiempo medio de espera en cola o fila	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tiempo medio de permanencia en el sistema	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,002	0,001	0,002
Tiempo medio en el servicio	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,002	0,001	0,002
Prob. de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar	0,001	0,004	0,001	0,006	0,001	0,001	0,005	0,001	0,001	0,001	0,002	0	0,006	0	0,001

Cuadro A.15: Indicadores del 6 al 10 de octubre

Días	11			12			13			14			15		
Horario	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN
Intensidad de tráfico	1,5	1,7	0,47	1,28	1,68	0,65	1,2	1,3	0,88	1,37	1,18	0,3	1,3	1,6	0,3
Tasa de llegada	973	1357	199	1078	1416	310	958	1215	406	1030	971	166	1042	1270	197
Tasa de servicio	662,6	800,8	420	840,2	845,3	473,75	790,8	902,3	463,75	751	821,8	576,3	802,6	793,8	644,7
Nº de Canales (S)	5	6	3	5	6	4	5	6	4	5	6	3	5	6	3
Nº medio de elementos en cola	0,003	0,001	0,003	0,002	0,001	0,001	0,001	0	0,003	0,002	0	0,001	0,002	0	0,001
Nº medio de canales no ocupados	3,53	4,31	2,53	3,72	4,33	3,35	3,79	4,65	3,13	3,63	4,82	2,71	3,7	4,4	2,69
Nº medio de clientes en el sistema	1,48	1,7	0,48	1,29	1,68	0,66	1,21	1,35	0,88	1,38	1,18	0,288	1,302	1,603	0,306
Tiempo medio de espera en cola o fila	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tiempo medio de permanencia en el sistema	0,002	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Tiempo medio en el servicio	0,002	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Prob. de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar	0,006	0,003	0,001	0,003	0,003	0	0,002	0,001	0,002	0,004	0	0	0,003	0,002	0

Cuadro A.16: Indicadores del 11 al 15 de octubre

Días	16			17			18			19			20		
Horario	TM	TT	TN												
Intensidad de tráfico	1,3	1,48	0,4	1,38	1,44	0,36	1,39	1,69	0,5	1,3	1,6	0,6	1,3	1,3	0,7
Tasa de llegada	966	1174	210	963	1226	179	1108	1370	230	1195	1254	297	940	1128	389
Tasa de servicio	724,2	793	531	695,8	853	493,7	800	812,5	447,7	922,4	779,3	487,8	713,4	898,7	542,3
Nº de Canales (S)	5	6	3	5	6	3	5	6	3	5	6	4	5	6	4
Nº medio de elementos en cola	0,002	0	0,002	0,002	0	0,001	0,002	0,001	0,004	0,002	0	0,001	0,002	0	0,002
Nº medio de canales no ocupados	3,7	4,5	2,6	3,6	4,56	2,6	3,6	4,3	2,49	3,7	4,39	3,39	3,68	4,75	3,3
Nº medio de clientes en el sistema	1,34	1,48	0,396	1,39	1,44	0,36	1,39	1,69	0,52	1,299	1,61	0,609	1,32	1,26	0,72
Tiempo medio de espera en cola o fila	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tiempo medio de permanencia en el sistema	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Tiempo medio en el servicio	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Prob. de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar	0,003	0,001	0,001	0,004	0,001	0	0,004	0,003	0,002	0,003	0,002	0	0,003	0	0,001

Cuadro A.17: Indicadores del 16 al 20 de octubre

Días	21			22			23			24			25		
Horario	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN
Intensidad de tráfico	1,6	1,29	0,49	1,28	1,5	0,37	1,4	1,498	0,349	1,1	1,75	0,35	1,35	1,6	0,5
Tasa de llegada	1176	1218	189	933	1551	187	1095	1383	238	1128	1305	185	944	1199	216
Tasa de servicio	722,6	942,7	389	730	1026,5	504,25	764,8	923,1	681,3	1015,5	745,2	530,7	699	744,7	404,3
Nº de Canales (S)	5	6	3	5	6	4	5	7	3	6	5	3	4	6	3
Nº medio de elementos en cola	0,004	0	0,004	0,002	0	0	0,002	0	0,001	0	0,005	0,001	0,015	0	0,005
Nº medio de canales no ocupados	3,37	4,7	2,51	3,72	4,49	3,63	3,57	5,5	2,65	4,89	3,25	2,65	2,65	4,39	2,47
Nº medio de clientes en el sistema	1,64	1,29	0,49	1,28	1,51	0,37	1,439	1,498	0,35	1,11	1,78	0,35	1,38	1,61	0,54
Tiempo medio de espera en cola o fila	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tiempo medio de permanencia en el sistema	0,001	0,001	0,003	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Tiempo medio en el servicio	0,001	0,001	0,003	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Prob. de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar	0,011	0	0,001	0,003	0,001	0	0,005	0	0	0	0,017	0	0,018	0,002	0,002

Cuadro A.18: Indicadores del 21 al 25 de octubre

Días	26			27			28			29			30		
Horario	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN	TM	TT	TN
Intensidad de tráfico	1,45	1,8	0,77	1,16	1,37	1,04	1,3	1,48	0,29	1,3	1,35	0,43	1,27	1,29	0,25
Tasa de llegada	1058	1332	351	1123	1236	429	1130	1176	185	1057	1192	197	1001	1235	147
Tasa de servicio	728,8	731,6	455	971,25	901,5	412,75	880	796,3	635,3	807,4	884,5	458,7	790,8	961	591,7
Nº de Canales (S)	5	5	4	4	6	4	5	6	3	5	6	3	5	5	3
Nº medio de elementos en cola	0,003	0,006	0,002	0,009	0	0,006	0,002	0	0,001	0,002	0	0,002	0,002	0,002	0
Nº medio de canales no ocupados	3,55	3,18	3,23	2,84	4,63	2,96	3,72	4,52	2,7	3,69	4,65	2,57	3,73	3,715	2,75
Nº medio de clientes en el sistema	1,46	1,86	0,77	1,17	1,37	1,05	1,29	1,48	0,29	1,31	1,35	0,43	1,27	1,29	0,25
Tiempo medio de espera en cola o fila	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tiempo medio de permanencia en el sistema	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Tiempo medio en el servicio	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0,002
Prob. de que una persona que llegue al sistema tenga que esperar	0,006	0,022	0,001	0,008	0,001	0,005	0,003	0,001	0	0,003	0,001	0,001	0,002	0,003	0

Cuadro A.19: Indicadores del 26 al 30 de octubre

# Bibliografía

- [1] Leonard Kleinrock. *Queueing Systems*, volume 1 y 2. Wiley Interscience, 1976.
- [2] J.D.C Littel. A Proof of the Queueing Formula  $L = \lambda W$ . *Operations Research*, 9:383–387, 1961.
- [3] T. L. Saaty. *Elementos de la Teoría de Colas*. Aguilar, 1967.
- [4] H.A. Taha. *Investigación de Operaciones*. Prentice Hall, 1998.
- [5] Kamlesh Mathur y Daniel Solow. *Investigación de Operaciones*. Prentice Hall, 1996.
- [6] Ferderik S. Hillier y Gerard J. Lieberman. *Introducción a la Investigación de Operaciones*. MC Graw Hill, 1997.

# Queueing Models

## An Application to the 112 Emergency Service

Jesica Rodríguez Hernández

Trabajo Fin de Grado  
Facultad de Matemáticas

112  
CANARIAS

### 1. Introduction

Motivation and objectives of this study are presented and then the operation of the 1-1-2 emergency system.

### 2. Fundamentals of Queueing Theory

The basics that make a queuing system are collected.

### 3. Poissonian processes

The characteristics of Poisson processes and birth and death are discussed.

### 4. Poisson queuing models

Queueing models used to derive efficiency measures are developed.

### 5. Data manipulation and Getting Results

The procedure was performed to obtain the results, and the characteristics of the data is explained, and the various results are presented.

### 6. Conclusions.

Obtained conclusions and possible future work are presented.

