Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Christian Díaz Bautista

Semigrupos de operadores en espacios de Banach

Semigroups of operators in Banach spaces

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, mayo de 2023

DIRIGIDO POR
Lourdes Rodríguez Mesa

Lourdes Rodríguez Mesa
Departamento Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Resumen · Abstract

Resumen

En esta memoria realizamos un estudio teórico de los semigrupos de operadores lineales y acotados en espacios de Banach, abordando principalmente el análisis de los semigrupos fuertemente continuos. Consideramos primero aspectos generales de los espacios de Banach y de los operadores lineales y continuos, profundizando en el análisis de la resolvente de un operador. Introducimos y tratamos las características fundamentales de los semigrupos uniformemente continuos y los semigrupos C_0, estableciendo la relación con su generador infinitesimal y la resolvente de éste. Además, probamos el Teorema de Hille-Yosida para semigrupos C_0 contractivos, así como para semigrupos C_0 generales, y analizamos algunas de sus consecuencias. Por último, presentamos algunos ejemplos concretos que incluyen semigrupos multiplicativos, de traslación y de difusión e ilustramos las aplicaciones de la teoría con la desigualdad de Landau-Kallman-Rota y el problema de Cauchy abstracto.

Palabras clave: *Espacio de Banach – Generador infinitesimal – Resolvente de un operador – Semigrupos C_0 – Semigrupos contractivos – Semigrupos uniformemente continuos – Teorema de Hille-Yosida.*

Abstract

In this report we carry out a theoretical study of the semigroups of linear and bounded operators in Banach spaces, mainly addressing the analysis of strongly continuous semigroups. We first consider general aspects of Banach spaces and linear and continuous operators, delving into the analysis of the resolvent of an operator. We introduce and treat the fundamental characteristics of the uniformly continuous semigroups and the C_0 semigroups, establishing the relationship with their infinitesimal generator and its resolvent. In addition, we prove the Hille-Yosida Theorem for contractive C_0 semigroups, as well as for general C_0 semigroups, and discuss some of its consequences. Finally, we present some concrete examples that include multiplicative, translation, and diffusion semigroups and illustrate the applications of the theory with the Landau-Kallman-Rota inequality and the abstract Cauchy problem.

Keywords: *Banach space– Infinitesimal generator – Resolvent of an operator – C_0 semigroups – Contractive semigroups – Uniformly continuous operator – Hille-Yosida Theorem.*

Contenido

Introducción

La teoría de semigrupos de operadores lineales en espacios de Banach se ha convertido en una herramienta fundamental en muchas áreas del análisis matemático moderno. Esta teoría surgió a partir del estudio abstracto de los modelos matemáticos que explican el comportamiento de gran cantidad de fenómenos naturales y fue pionera en proporcionar herramientas del análisis funcional al estudio de las ecuaciones diferenciales.

Es difícil concretar el momento en el que comenzó el estudio de los semigrupos de operadores, pues aunque el concepto fue formulado y designado en 1904, un trabajo anterior de 1887 escrito por el matemático Giuseppe Peano ya revelaba algunas ideas propias de la teoría. No obstante, podemos decir que es a partir de los años 30 del siglo XX cuando los investigadores comenzaron a profundizar en el análisis de los semigrupos, al darse cuenta de que podía aplicarse la teoría de manera directa a las ecuaciones en derivadas parciales, los procesos de Markov y la teoría ergódica. La publicación en 1948 de la obra de Einar Hille supuso un impulso al desarrollo de la teoría, contribuyendo en gran medida a él los trabajos del matemático Ralph Phillips. Juntos ampliaron y mejoraron el libro original de Hille lo que derivó en la monografía [9] que se convirtió en una obra de referencia primordial. El trabajo de numerosas escuelas ayudó de manera sustancial al avance en este campo como puede atestiguarse en las obras de Davies [2], Goldstein [6] y Pazy [13]. Hoy en día la teoría se caracteriza por la aplicación no solo a las ecuaciones en derivadas parciales o procesos estocásticos sino también a las ecuaciones integro-diferenciales, o a la teoría de aproximación, entre otros.

El objetivo principal de esta memoria es el desarrollo teórico de los conceptos más importantes relativos a los semigrupos de operadores, en particular, a los semigrupos fuertemente continuos. El estudio realizado permite también abordar algunas cuestiones concretas donde la teoría es aplicada. Hemos dividido el trabajo en tres capítulos. En el primero de ellos recogemos una serie de conceptos y resultados propios del análisis funcional que constituyen los elementos básicos de la teoría y que son necesarios para el estudio en los capítulos posteriores. Indicamos que actualmente el Grado de Matemáticas tiene una asignatura optativa de seis créditos ubicada en cuarto curso, Análisis Funcional, donde se imparten algunos de los conceptos recogidos en este primer capítulo. Sin embargo, hemos determinado incluir una parte con estos elementos porque, por un lado, de esta manera se facilita la lectura del trabajo y por otro, porque, al no cursar la asignatura optativa de Análisis Funcional, el estudio de esta materia ha formado parte de la tarea realizada para la elaboración de esta memoria.

En concreto, en este primer capítulo introducimos los conceptos de espacio normado y espacio de Banach y consideramos algunas de sus propiedades. Asimismo, presentamos los espacios de Lebesgue como ejemplos de espacios de Banach relevantes. En una segunda sección abordamos el estudio de los elementos centrales de la teoría, los operadores lineales acotados en espacios de Banach. Establecemos primero bajo qué condiciones una familia de operadores lineales y acotados entre espacios normados es un espacio de Banach y mostramos la equivalencia entre las nociones de continuidad y acotación. Introducimos luego el concepto de operador cerrado, damos una caracterización en términos de su grafo y demostramos uno de los teoremas importantes en el análisis funcional: el Teorema del grafo cerrado. En la última sección analizamos el operador resolvente, elemento clave en el estudio de los semigrupos. Presentamos algunas de sus propiedades de las que destacamos aquellas que nos permiten obtener semigrupos contractivos a partir de semigrupos uniformemente continuos, y aquellos que involucran a los conocidos como aproximantes de Yosida.

El segundo capítulo constituye el núcleo central del trabajo. En él se definen los semigrupos uniformemente continuos y los fuertemente continuos. Después de mostrar algunas propiedades generales, se introduce el concepto de generador infinitesimal del semigrupo y se establece la relación con el mismo, diferenciando el estudio según los casos de continuidad fuerte o uniforme. El resultado principal de este capítulo es, sin duda, el Teorema de Hille-Yosida. Éste puede verse como una generalización de los resultados clásicos de existencia y unicidad de soluciones de problemas de ecuaciones diferenciales de valor inicial cuando se plantean en un marco funcional abstracto. Se presenta primero una versión para semigrupos contractivos, para después tratar el caso general. Terminamos el capítulo probando algunos resultados relacionados con el Teorema de Hille-Yosida, sobre el operador resolvente y las aproximaciones de Yosida.

En el último capítulo ilustramos la teoría estudiada con algunos ejemplos y aplicaciones particulares. Por un lado, examinamos tres semigrupos concretos, cada uno de los cuales corresponde a un tipo específico de semigrupo: los semigrupos multiplicativos, los semigrupos de traslación y los semigrupos de difusión. Y finalizamos el trabajo analizando dos aplicaciones de la teoría. Por un lado, la generalización al contexto de los semigrupos de la conocida como desigualdad de Landau, de la que se deduce la misma de manera sencilla, y por otro, la conexión entre los semigrupos C_0 y el problema de Cauchy abstracto.

Para el estudio y la elaboración de este trabajo hemos consultado diversos textos y artículos que recogemos en el apartado de la bibliografía. Destacamos principalmente las obras de Engel y Nagel [4], Goldstein [6] y Pazy [13] que se tomaron como base para el desarrollo del trabajo. A lo largo de la memoria aparecen también las referencias que hemos considerado para tratar algunas cuestiones concretas. Asimismo indicamos que el libro de Vera y Alegría [17] ha sido el elegido para estudiar los fundamentos y herramientas del Análisis Funcional que hemos necesitado.

1

Operadores lineales en espacios de Banach

En este capítulo analizamos una serie de resultados y propiedades que se encuadran en el contexto del análisis funcional y que servirán para el desarrollo de la teoría en el resto de la memoria.

1.1. Espacios de Banach

Recordamos en primer lugar la noción de espacio métrico.

Definición 1.1. *Un espacio métrico es un par* (X,d)*, donde* X *es un conjunto no vacío y* $d\colon X\times X\to\mathbb{R}$ *una aplicación, llamada distancia o métrica, tal que para todo* $x,y,z\in X$*, se cumple:*

(a) $d(x,y)\geq 0$.
(b) $d(x,y)=0$ *si y sólo si,* $x=y$ *(separación).*
(c) $d(x,y)=d(y,x)$ *(simetría).*
(d) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ *(desigualdad triangular).*

Sea (X,d) un espacio métrico. Si $x\in X$ y $r>0$, denotamos por $B(x,r)$ a la bola abierta de centro x y radio r que viene dada por $B(x,r)=\{y\in X\colon d(x,y)<r\}$. Asimismo, se definen la bola cerrada $\overline{B}(x,r)=\{y\in X\colon d(x,y)\leq r\}$ y la esfera $S(x,r)=\{y\in X\colon d(x,y)=r\}$.

Podemos considerar entonces una topología en X tomando la familia de las bolas abiertas como una base de la misma. Y además, introducir los conceptos de sucesión convergente y sucesión de Cauchy como sigue.

Definición 1.2. *Sean* (X,d) *un espacio métrico,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* X *y* $x\in X$.

(i) Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge a* x*, y se escribe* $x_n\to x$*, cuando para todo* $r>0$ *existe* $N\in\mathbb{N}$ *tal que* $x_n\in B(x,r)$*, para todo* $n>N$.

(ii) Decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy cuando para todo* $\varepsilon>0$*, existe* $N\in\mathbb{N}$ *tal que* $d(x_n,x_m)<\varepsilon$*, para todo* $n,m>N$.

Se puede comprobar fácilmente que toda sucesión convergente en un espacio métrico es de Cauchy. Sin embargo, el recíproco no es cierto en general, lo que lleva a la definición de completitud, propiedad que verifican por ejemplo, los espacios $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, cuando se considera la distancia euclídea.

Definición 1.3 (Fréchet, 1906). *Un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente.*

Con respecto a la completitud, una propiedad importante es la siguiente caracterización de los subconjuntos de un espacio métrico completo que también verifican la propiedad de completitud.

Proposición 1.4. *Un subconjunto M de un espacio métrico completo X es completo si y sólo si M es cerrado en X.*

Demostración. Sea M un subconjunto completo de un espacio métrico completo. Entonces, para todo $x \in \overline{M}$, existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$, tal que $x_n \to x$. Pero, como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces es de Cauchy en M. Por tanto, converge en M, lo que prueba que $x \in M$.

Recíprocamente, sea M un subconjunto cerrado en X y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en M. Como X es completo, $x_n \to x$ para cierto $x \in X$. Entonces, $x \in \overline{M}$, luego usando que M es cerrado en X se deduce que $x \in M$. $\square$

Cuando el espacio X tiene estructura de espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, cobran especial interés las métricas d que verifican las condiciones:

(a) *Invarianza por traslaciones*: $d(x+a, y+a) = d(x, y)$, para $x, y, a \in X$.
(b) *Homogeneidad*: $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$, para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.

La importancia este tipo de métricas reside en que basta conocer el valor de $d(x, 0)$, para todo $x \in X$, para obtener la distancia entre dos puntos cualesquiera del espacio, ya que $d(x, y) = d(x - y, 0)$, $x, y \in X$. Este hecho sugiere la definición de norma de un vector $x \in X$ mediante $\|x\| = d(x, 0)$. Y de aquí, considerar la noción axiomática de espacio normado.

Salvo que se especifique lo contrario, en lo que sigue se considerará X un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Definición 1.5. *Sea X un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Una norma sobre X es una aplicación $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades:*

(a) No degeneración: si $x \in X$ verifica $\|x\| = 0$, entonces $x = 0$.
(b) Homogeneidad por homotecias: $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.
(c) Desigualdad triangular: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $x, y \in X$.

Observamos, en virtud de *(b)*, que $\|0\| = 0$ y que $\|-x\| = \|x\|$. Por tanto, si $\|\cdot\|$ es una norma en X, entonces $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$. Además, usando la desigualdad triangular, se deduce que $\|x\| \geq 0$, $x \in X$, es decir, $\|\cdot\| : X \longrightarrow [0, \infty)$.

Es fácil ver que dado cualquier espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ podemos encontrar una métrica asociada a la norma que le da a X estructura de espacio métrico. Basta definir la métrica $d(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in X$. Sin embargo, en general, el recíproco no es cierto, es decir, existen espacios métricos (X, d) para los que es imposible encontrar una norma asociada a d en el sentido anterior. Por ejemplo, si consideramos la métrica discreta d_{dis} sobre un espacio vectorial $X \neq \{0\}$ y $\|\cdot\|$ es una norma tal que $d_{\text{dis}}(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in X$, entonces, cuando $x \in X \setminus \{0\}$, tenemos, por un lado, que $\|2x\| = d(2x, 0) = 1$ y por otro, $\|2x\| = 2\|x\| = 2d(x, 0) = 2$.

No obstante, las condiciones comentadas anteriormente de invarianza por traslaciones y “homogeneidad" para la métrica aseguran la existencia de una norma asociada a ella, como indicamos en la siguiente proposición, cuya demostración es simple.

Proposición 1.6. *Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, la aplicación definida por $d(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in X$, es una métrica sobre X que satisface:*

(a) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$, $x, y, z \in X$.
(b) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot d(x, y)$, $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Recíprocamente, si X es un espacio vectorial y (X, d) es un espacio métrico verificando (a) y (b), entonces la aplicación $\|\cdot\|$ definida por $\|x\| = d(x, 0)$, $x \in X$, es una norma para X.

Teniendo en cuenta esta relación entre los espacios normados y métricos y la noción de completitud dada para espacios métricos, podemos introducir este concepto también en espacios normados, lo que da lugar a los conocidos espacios de Banach.

Definición 1.7. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Se dice que X es un espacio de Banach cuando (X, d) es completo con la métrica $d(x, y) = \|x - y\|$, $x, y \in X$.*

Es bien conocido que el espacio $\mathbb{R}^n$ dotado con la norma euclídea es un espacio de Banach. Es más, cualquier otra norma que consideremos sobre $\mathbb{R}^n$, es equivalente a la euclídea. Recordamos que dos normas $\|\cdot\|_a$ y $\|\cdot\|_b$ en un espacio X son equivalentes cuando existe $c > 1$ tal que

$$\frac{1}{c}\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq c\|x\|_a, \quad x \in X.$$

Esta propiedad de equivalencia de las normas se verifica para cualquier espacio vectorial de dimensión finita. De hecho, para estos espacios vectoriales se pueden obtener algunas otras particularidades como, por ejemplo, su completitud respecto a cualquier norma. Estas características se pueden derivar del resultado que recogemos a continuación.

Lema 1.8. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $\{e_i\}_{i=1}^N \subset X$ una familia finita linealmente independiente. Existe $c > 0$ tal que para todo $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{K}$ se verifica que $\|\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_N e_N\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_N|)$.*

Demostración. Asumimos que $|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_N|>0$ (en otro caso la desigualdad es trivial). Basta comprobar entonces que para cierta $c>0$ se tiene que

$$\|\beta_1 e_1+\cdots+\beta_N e_N\|\geq c,$$

para cualquier colección $\beta_1,\ldots,\beta_N\in\mathbb{K}$ que verifique $\sum_{i=1}^N|\beta_i|=1$.
Supongamos por el contrario que para todo $m\in\mathbb{N}$, existe $\{\beta_i^{(m)}\}_{i=1}^N\subset\mathbb{K}$ tal que

$$\sum_{i=1}^N|\beta_i^{(m)}|=1 \quad \text{y} \quad \Big\|\sum_{i=1}^N\beta_i^{(m)}e_i\Big\|\leq\frac{1}{m}.$$

Consideramos la sucesión $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$, donde $y_m=\sum_{i=1}^N\beta_i^{(m)}e_i$. Es claro que $y_m\to 0$ cuando $m\to\infty$.

Por otro lado, ya que $|\beta_i^{(m)}|\leq 1$, $i=1,\ldots,N$ y $m\in\mathbb{N}$, se tiene que, para cada $i=1,\ldots,N$, $(\beta_i^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada. Entonces, cuando $i=1$, podemos encontrar una subsucesión $(\beta_1^{(1,m)})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(\beta_1^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ que es convergente, pongamos a β_1. Consideramos ahora la subsucesión de $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$, que denotamos por $(y_{1,m})_{m\in\mathbb{N}}$, constituida por aquellos elementos de la sucesión que tienen como coeficiente en e_1 los valores de $(\beta_1^{(1,m)})_{m\in\mathbb{N}}$.

Partiendo ahora de la sucesión $(y_{1,m})_{m\in\mathbb{N}}$ repetimos el argumento con la sucesión de los coeficientes correspondientes a e_2. Seguimos el procedimiento, que es finito, para conseguir una subsucesión $(y_{N,m})_{m\in\mathbb{N}}$ de $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$y_{N,m}=\sum_{i=1}^N\beta_i^{(N,m)}e_i, \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^N|\beta_i^{(N,m)}|=1, \quad m\in\mathbb{N},$$

y para cada $i=1,\ldots,N$, $\beta_i^{(N,m)}\longrightarrow\beta_i$, cuando $m\to\infty$, para ciertos $\beta_1,\ldots,\beta_N$, que cumplen $\sum_{i=1}^N|\beta_i|=1$. Si definimos $y=\beta_1e_1+\cdots+\beta_Ne_N$, entonces se sigue que $y_{N,m}\to y$, cuando $m\to\infty$.

Por unicidad del límite obtenemos que $y=0$, pero esto es absurdo pues $\sum_{i=1}^N|\beta_i|=1$ y $\{e_i\}_{i=1}^N$ es una familia de vectores linealmente independientes. □

Proposición 1.9. *Todo subespacio Y de X de dimensión finita es completo. En particular, si X es de dimensión finita es completo.*

Demostración. Sean $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy y $\{e_i\}_{i=1}^N$ una base de Y. Escribimos, para cada $m\in\mathbb{N}$, $y_m=\sum_{i=1}^N\alpha_i^{(m)}e_i$.

Dado $\varepsilon>0$, sabemos que existe $m_0\in\mathbb{N}$ tal que $\|y_m-y_k\|<\varepsilon$, $m,k\geq m_0$, y haciendo uso del Lema 1.8, encontramos $c>0$ de manera que

$$c\sum_{i=1}^N|\alpha_i^{(m)}-\alpha_i^{(k)}|\leq\|y_m-y_k\|<\varepsilon, \quad m,k\geq m_0.$$

Así, para cada $i=1,\ldots,N$, la sucesión $(\alpha_i^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$ y, por tanto, convergente a cierto α_i. Se sigue que el vector $y=\sum_{i=1}^N\alpha_ie_i\in Y$, y $\|y_m-y\|\longrightarrow 0$, cuando $m\to\infty$. □

Otros espacios de Banach relevantes en análisis son los espacios de Lebesgue. Dados un espacio de medida (Ω,μ) y $1\le p\le\infty$ se define el espacio $L^p(\Omega,\mu)$ como la clase de las funciones $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ medibles tales que $\|f\|_p<\infty$, siendo

$$\|f\|_p=\left(\int_\Omega |f|^p\,d\mu\right)^{1/p},\quad 1\le p<\infty,$$

y

$$\|f\|_\infty=\operatorname{esssup}_\Omega |f|=\inf\Big\{\alpha\in\mathbb{R}\colon\ \mu\big(\{x\in\Omega:|f(x)|>\alpha\}\big)=0\Big\}.$$

Observación 1.10. Es fácil comprobar que $\|\cdot\|_p$ es una seminorma (verifica las propiedades de homogeneidad y desigualdad triangular en la Definición 1.5). Y en ciertos casos, como en los espacios $\ell^p=L^p(\mathbb{N},\mu)$ donde μ representa la medida de contar, $\|\cdot\|_p$ es una norma. Pero, en general, esto no es así. Una forma de conseguir una norma a partir de $\|\cdot\|_p$ consiste en considerar que dos funciones son equivalentes cuando son iguales en casi todo punto respecto a μ. El espacio cociente que se obtiene a partir de esta relación de equivalencia se sigue denotando por $L^p(\Omega,\mu)$ y es un espacio normado cuando consideramos la norma $\|[f]\|_p=\|f\|_p$, donde f es un representante de la clase de equivalencia $[f]$.

Un hecho importante es que el espacio de Lebesgue $(L^p(\Omega,\mu),\|\cdot\|_p)$, $1\le p\le\infty$, es un espacio de Banach (ver, por ejemplo, [14, Theorem 3.11]).

Terminamos esta sección presentando la siguiente desigualdad de la que haremos uso en el estudio del semigrupo del calor clásico. Cuando $\Omega=\mathbb{R}^n$ y μ es la medida de Lebesgue, escribimos $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p\le\infty$, para denotar al correspondiente espacio de Lebesgue.

Lema 1.11 (Desigualdad integral de Minkowski). *Sean* $1\le p\le\infty$ *y* $f\in L^p(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. *Si* $\int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot,y)\,dy\in L^p(\mathbb{R}^n)$ *entonces se tiene que*

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot,y)\,dy\right\|_p\le\int_{\mathbb{R}^n}\|f(\cdot,y)\|_p\,dy.$$

Demostración. Cuando $p=\infty$, el resultado se obtiene de las propiedades de la integral de Lebesgue, y si $p=1$, basta aplicar el Teorema de Fubini ([14, Theorem 8.8]). Consideramos ahora $1<p<\infty$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f\ge 0$. Denotamos por H la función dada por $H(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dy$, $x\in\mathbb{R}^n$, y que, por hipótesis está en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Aplicando el Teorema de Fubini y la desigualdad de Hölder ([14, Theorem 3.5]), se sigue que

$$\begin{aligned}\|H\|_p^p&=\int_{\mathbb{R}^n}|H(x)|^{p-1}H(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|H(x)|^{p-1}f(x,y)\,dx\right)dy\\&\le\|H\|_p^{p/p'}\int_{\mathbb{R}^n}\|f(\cdot,y)\|_p\,dy,\end{aligned}$$

de donde se deduce la desigualdad enunciada. □

1.2. Operadores lineales acotados

Como ya hemos mencionado los objetos centrales de este trabajo son los semigrupos de operadores lineales acotados en espacios de Banach. Dedicamos esta sección a analizar algunos aspectos fundamentales relativos a este tipo de operadores.
En esta sección consideramos $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados. Decimos que $T\colon X \to Y$ es un *operador lineal* cuando $T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2)$, $x_1, x_2 \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Se denomina *funcional lineal* cuando $Y = \mathbb{K}$.
Un operador lineal $T\colon X \to Y$ es un *operador acotado* cuando para cierta $c > 0$ se verifica que $\|Tx\|_Y \le c\|x\|_X$, para todo $x \in X$.

Observación 1.12. Señalamos que esta noción para la acotación es diferente al concepto usual de función acotada, y que no resulta adecuado en el contexto de las aplicaciones lineales. Nótese que si T es lineal y $T(X)$ es un conjunto acotado en Y, entonces $T \equiv 0$. Basta tener en cuenta que en el caso de que exista $c > 0$ de manera que $\|Tx\|_Y \le c$, $x \in X$, entonces, para cada $\lambda \in \mathbb{K}$, $\|T(\lambda x)\|_Y \le c$, $x \in$X, esto es, $\|Tx\| \le c|\lambda|^{-1}$, $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$. Tomando $\lambda \to \infty$, se deduce que $Tx = 0$, $x \in X$.

Denotamos por $L(X, Y)$ al conjunto de los operadores lineales y acotados de X en Y. Cuando $X = Y$ escribimos simplemente $L(X)$. Para $T \in L(X, Y)$ se define la *norma de T* mediante cualquiera de las siguientes formas equivalentes:

$$\|T\|_{L(X,Y)} = \sup_{\|x\|_X \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Tx\|_Y = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Tx\|_Y.$$

Con las operaciones naturales de suma y producto por escalares, $L(X, Y)$ es claramente un espacio vectorial. Veamos que cuando Y es de Banach, entonces $(L(X, Y), \|\cdot\|_{L(X,Y)})$ también lo es.

Teorema 1.13. *Sean X, Y espacios normados, siendo Y un espacio de Banach. Se tiene que $L(X, Y)$ con la norma $\|\cdot\|_{L(X,Y)}$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Es fácil comprobar que $\|\cdot\|_{L(X,Y)}$ es una norma para $L(X, Y)$. Veamos que $L(X, Y)$ es completo. Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L(X, Y)$.

Fijamos $x \in X$ arbitrario. Se tiene que $\{T_n x\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en Y. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que para cierto, $N \in \mathbb{N}$, $\|T_n - T_m\|_{L(X,Y)} < \varepsilon$, $n, m \ge N$ (nótese que N es independiente de x). Entonces,

$$\|T_n x - T_m x\|_Y \le \|T_n - T_m\|_{L(X,Y)} \|x\|_X < \varepsilon \|x\|_X, \; n, m \ge N. \tag{1.1}$$

Ya que Y es completo, existe $y_x \in Y$ tal que $T_n x \to y_x$, cuando $n \to \infty$, en Y.

Podemos definir entonces el operador $T\colon X \to Y$ mediante $Tx = y_x$, $x \in X$. Teniendo en cuenta que $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de operadores lineales, es evidente que T es lineal. Para establecer que es acotado, consideramos $\varepsilon = 1$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que

$\|T_n - T_m\|_{L(X,Y)} < 1$, $n, m \geq N$. En particular, $\|T_n - T_N\|_{L(X,Y)} < 1$, $n \geq N$. Además, T_N es acotado, por lo que existe $C_N > 0$ tal que $\|T_N x\|_Y < C_N \|x\|_X$, $x \in X$.
Por otro lado, dado $x \in X$, elegimos $n_x \in \mathbb{N}$, $n_x \geq N$, de modo que $\|Tx - T_{n_x}x\|_Y < 1$. Y así, usando (1.1) se deduce que

$$\|Tx\|_Y \leq \|Tx - T_{n_x}x\|_Y + \|T_{n_x}x - T_N x\|_Y + \|T_N x\|_Y \leq 2 + C_N, \quad x \in X, \|x\|_X \leq 1,$$

y, por tanto, $\|T\|_{L(X,Y)} \leq 2 + C_N$.

Por último, veamos que $T_n \to T$, cuando $n \to \infty$, en $L(X,Y)$. Sea $\varepsilon > 0$. Tomando $N \in \mathbb{N}$ como en (1.1) y para cada $x \in X$, $n_x \in \mathbb{N}$, $n_x \geq N$, tal que $\|Tx - T_{n_x}x\|_Y < \varepsilon$, podemos escribir

$$\|T_n - T\|_{L(X,Y)} \leq \sup_{\|x\|_X \leq 1} (\|T_n x - T_{n_x}x\|_Y + \|T_{n_x}x - Tx\|_Y) < 2\varepsilon, \quad n \geq N.$$

Así, $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y, por tanto, $L(X,Y)$ es un espacio de Banach. □

Observación 1.14. Si X es un espacio de Banach de dimensión finita, entonces cualquier operador $T\colon X \to Y$ lineal es acotado. Basta observar que si $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de X, en virtud del Lema 1.8, se tiene que, para cada $x \in X$, siendo $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, con $(\alpha_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{K}$, se verifica

$$\|Tx\|_Y \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \|Te_i\|_Y \leq \underbrace{\max_{i=1,\dots,n} \|Te_i\|_Y}_{C} \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq Cc\|x\|_X.$$

Un resultado fundamental es la siguiente relación entre los conceptos de continuidad y acotación.

Teorema 1.15. *Sean X, Y espacios normados y $T\colon X \to Y$ lineal. Son equivalentes:*

(a) T es uniformemente continuo.
(b) T es continuo.
(c) T es continuo en 0.
(d) T acotado.
(e) Para todo subconjunto $A \subset X$ acotado se tiene que $T(A)$ es acotado en Y.

Demostración. Es claro que *(a)* ⇒ *(b)* ⇒ *(c)*. Veamos que *(c)* implica *(d)*. Supongamos que T es continuo en 0 y que T es un operador no acotado. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in X$, $x_k \neq 0$, tal que $\|Tx_k\|_Y > k\|x_k\|_X$.

Sea $0 < \varepsilon < 1$. Como T es un operador continuo en 0, existe $\delta > 0$ tal que $\|Tx\|_Y < \varepsilon < 1$, cuando $\|x\|_X < \delta$. Elegimos $k_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $k_0^{-1} < \delta$ y consideramos $x = \frac{x_{k_0}}{k_0\|x_{k_0}\|_X}$. Es claro que $\|x\|_X = k_0^{-1} < \delta$. Por tanto, $\|Tx\|_Y < 1$, esto es, $\|Tx_{k_0}\|_Y < k_0\|x_{k_0}\|_X$, lo que contradice nuestra hipótesis sobre $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Asumamos ahora que se cumple *(d)*. Sean $A \subset X$ un conjunto acotado y $M > 0$ tal que $\|x\|_X \leq M$, $x \in A$. Como T es acotado, se tiene que $\|Tx\|_Y \leq \|T\|_{L(X,Y)}\|x\|_X$,

$x \in X$. Por tanto, $\|Tx\|_Y \leq M\|T\|_{L(X,Y)}$, $x \in A$, lo que implica que $T(A)$ es un conjunto acotado en Y.

Por último, veamos que *(e)* implica *(a)*. Sean $\varepsilon > 0$ y $A = \overline{B_X(0,1)} \subset X$. Como A es acotado, se sigue, por hipótesis, que $T(A)$ es un conjunto acotado en Y. Luego, existe $M > 0$ tal que $\|Tx\|_Y \leq M$, $x \in A$.

Consideramos $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{M}$. Para cualesquiera $x_1, x_2 \in X$ tales que $\|x_1 - x_2\|_X < \delta$ se tiene que $\frac{x_1 - x_2}{\delta} \in A$, por lo que $\|T\left(\frac{x_1-x_2}{\delta}\right)\|_Y \leq M$. La linealidad de T permite concluir que $\|Tx_1 - Tx_2\|_Y \leq \delta M < \varepsilon$. Se prueba así que T es uniformemente continuo. □

Otro resultado relevante es la caracterización de la existencia de operador inverso acotado que recogemos a continuación.

Teorema 1.16. *Sean X, Y espacios normados y $T\colon X \to Y$ un operador lineal. Una condición necesaria y suficiente para que exista $T^{-1}\colon T(X) \to X$ y sea acotado es que para cierta $c > 0$ se verifique que $c\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y$, $x \in X$.*

Demostración. Supongamos primero que para alguna $c > 0$ se cumple que $c\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y$, $x \in X$. Para que exista T^{-1}, T ha de ser un operador inyectivo. Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $Tx_1 = Tx_2$. La linealidad de T y la hipótesis considerada implican que $c\|x_1 - x_2\|_X \leq \|Tx_1 - Tx_2\|_Y = 0$. Luego, $x_1 = x_2$ y se sigue que T es inyectivo.
Que T^{-1} es lineal se sigue trivialmente. Y con respecto a la acotación del operador inverso, basta observar que para cada $y \in T(X)$, existe un único $x \in X$ tal que $x = T^{-1}y$, y que $c\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y$, por lo que $\|T^{-1}y\|_X \leq c^{-1}\|y\|_Y$, $y \in Y$.

Asumimos ahora que existe T^{-1} y que es un operador acotado. Existe entonces $M > 0$ tal que $\|T^{-1}y\|_X \leq M\|y\|_Y$, $y \in T(X)$. Luego, para cada $x \in X$, $\|T^{-1}Tx\|_X \leq M\|Tx\|_Y$, de donde se sigue la propiedad con $c = M^{-1}$. □

Una clase particular de operadores es la constituida por los operadores cerrados. Sean X, Y espacios normados. Un operador $T\colon D(T) \subset X \to Y$ lineal se dice que es *cerrado* cuando se cumple la siguiente propiedad: si $x \in X$, $y \in Y$ y $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset D(T)$ verifican que $x_n \to x$ y $Tx_n \to y$, entonces $x \in D(T)$, y $Tx = y$.

Los operadores cerrados se pueden describir en términos de su grafo. Recordamos que el *grafo de un operador* $T : D(T) \subset X \longrightarrow Y$ es el conjunto en $X \times Y$ dado por

$$G(T) = \{(x, Tx)\colon x \in D(T)\}.$$

Se tiene la siguiente caracterización.

Proposición 1.17. *Sea $T\colon D(T) \subset X \to Y$ un operador lineal entre dos espacios normados X e Y. Entonces, T es cerrado si y sólo si el grafo de T es un conjunto cerrado en $X \times Y$.*

Demostración. Supongamos que T es cerrado y $(x, y) \in \overline{G(T)}$. Existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$ tal que $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$, cuando $n \to \infty$. Usando que T es cerrado, se deduce que $x \in D(T)$ y $Tx = y$, esto es, $(x, y) \in G(T)$.

Recíprocamente, sean $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $D(T)$, $x \in X$, $y \in Y$ verificando que $x_n \to x$ y $Tx_n \to y$. Como $G(T)$ es un conjunto cerrado en $X \times Y$ se sigue que $(x, y) \in G(T)$, por lo que $x \in D(T)$ y $Tx = y$, es decir, T es cerrado. □

Terminamos este apartado con uno de los teoremas fundamentales del análisis funcional, el Teorema del grafo cerrado, que establece la relación entre los operadores cerrados y los continuos.

Señalamos primero que si $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ son espacios de Banach, entonces $X \times Y$ es un espacio de Banach con la norma definida mediante $\|(x, y)\|_{X\times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$, $x \in X$, $y \in Y$.

Teorema 1.18 (Grafo cerrado). *Sea $T\colon D(T) \subseteq X \to Y$ un operador lineal entre dos espacios de Banach X e Y, siendo $D(T)$ un conjunto cerrado en X, entonces T es cerrado si y sólo si T es acotado.*

Demostración. En virtud del Teorema 1.15, si T es acotado se tiene que T es continuo. Por tanto, se deduce trivialmente, al ser $D(T)$ un conjunto cerrado, que T es un operador cerrado.

Por otro lado, supongamos que $G(T)$ es cerrado en $X \times Y$, siendo $D(T)$ cerrado en X. De la Proposición 1.4 se sigue que $(D(T), \|\cdot\|_X)$ y $(G(T), \|\cdot\|_{X\times Y})$ son espacios de Banach. Consideramos el operador $\mathscr{H}\colon G(T) \to D(T)$ definido como $\mathscr{H}(x, Tx) = x$, $x \in D(T)$. Claramente es lineal y también acotado, pues $\|\mathscr{H}(x, Tx)\|_X = \|x\|_X \le \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x, Tx)\|_{X\times Y}$, $x \in D(T)$. Además, $\mathscr{H}$ es biyectivo siendo $\mathscr{H}^{-1}x = (x, Tx)$, $x \in D(T)$.

Aplicando el Teorema de la aplicación abierta (ver [1, Theorem II.5 and Corollary II.6]) se deduce que $\mathscr{H}^{-1}$ es continuo y, por tanto, acotado. En consecuencia, para cierto $C > 0$ se tiene que $\|Tx\|_Y \le \|x\|_X + \|Tx\|_Y = \|(x, Tx)\|_{X\times Y} \le C\|x\|_X$, $x \in D(T)$, obteniendo así que T es acotado. □

El cálculo diferencial e integral clásico se ha extendido al contexto de los operadores, y ha resultado ser una herramienta muy útil en diferentes disciplinas, tanto desde el punto de vista teórico como en las aplicaciones[1]. El cálculo funcional es apropiado, por ejemplo, para el cálculo de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales que modelan problemas importantes en la ciencia y la tecnología.

En el contexto de esta memoria nos interesa el cálculo diferencial para funciones definidas en intervalos de $\mathbb{R}$ y con valores en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Una función $f : (a, b) \longrightarrow X$ será diferenciable en $t \in (a, b)$ si existe el límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} =: f'(t).$$

en X, esto es, existe $f'(t) \in X$ de manera que $\left\| \frac{f(t+h)-f(t)}{h} - f'(t) \right\| \longrightarrow 0$, $h \to 0$.

[1] En [7] y en [15, Chap. 5] se recoge un análisis del cálculo diferencial e integral en espacios de Banach.

En cuanto al cálculo integral para funciones Banach-valuadas aparecen diversas extensiones en consonancia con las diferentes nociones de integral para las funciones real-valuadas (ver, por ejemplo, el estudio en [7]). En nuestro trabajo, basta considerar el concepto de funciones Banach-valuadas que son integrables en el sentido de Riemann. Sean $[a,b]$ un intervalo acotado en $\mathbb{R}$, X un espacio de Banach y $f:[a,b]\longrightarrow X$. Dada una partición $P=\{a=t_0,t_1,\dots,t_{n-1},b=t_n\}$ de $[a,b]$ se define la suma de Riemann $S(P,f)=\sum_{i=1}^n f(t_i^*)(t_i-t_{i-1})$, siendo $t_i^*\in[t_{i-1},t_i]$. Nótese que $S(P,f)\in X$. Diremos que f es Riemann-integrable en $[a,b]$ cuando existe el límite en X de $S(P,f)$, cuando $\|P\|\to 0$. Y en ese caso, el valor de dicho límite lo denotamos por $\int_a^b f(t)dt$.

Se verifica que si $f:[a,b]\longrightarrow X$ es continua, entonces es Riemann-integrable. También se tiene que si X,Y son espacios de Banach, $f:[a,b]\longrightarrow X$ es Riemann-integrable y $T\in L(X,Y)$, entonces $T\circ f:[a,b]\longrightarrow Y$ es Riemann-integrable en $[a,b]$ y se tiene que $\int_a^b (T\circ f)(t)dt=T(\int_a^b f(t)dt)$.

1.3. Resolvente de un operador

Esta última sección se dedica a abordar los principales aspectos sobre la resolvente de un operador que se necesitan para el análisis del Teorema de Hille-Yosida del capítulo 2.

Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio normado y $A\colon D(A)\subset X\to X$ un operador lineal. Decimos que $\lambda\in\mathbb{C}$ está en la *resolvente de* A, y escribimos $\lambda\in\rho(A)$, cuando $\lambda I-A$ es inyectivo, $\mathrm{Rec}(\lambda I-A)$ es denso en X y $(\lambda I-A)^{-1}\colon \mathrm{Rec}(\lambda I-A)\to D(A)$ es un operador continuo. Cuando $\lambda\notin\rho(A)$ se dice que λ pertenece al *espectro de* A.

Si $\lambda\in\rho(A)$, definimos el *operador resolvente* como $R(\lambda,A)=(\lambda I-A)^{-1}$.

Proposición 1.19. *Sean X un espacio de Banach, $A\colon D(A)\to X$ un operador lineal y $\lambda\in\rho(A)$. Si A es cerrado, entonces* $\mathrm{Rec}(\lambda I-A)=X$. *En este caso, $R(\lambda,A)\in L(X)$.*

Demostración. Sea $x\in X$. Dado que $\mathrm{Rec}(\lambda I-A)$ es denso en X, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset \mathrm{Rec}(\lambda I-A)$ tal que $x_n\to x$, cuando $n\to\infty$. Además, para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $z_n\in D(A)$ tal que $(\lambda I-A)z_n=x_n$, esto es, $z_n=R(\lambda,A)x_n$.

Por hipótesis, $R(\lambda,A)$ es un operador continuo, y como $(x_n)_{n=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en X, también lo es la sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset D(A)$. Luego, la completitud de X implica que existe $z\in X$ tal que $z_n\to z$.

Teniendo en cuenta ahora que A es cerrado y, por tanto también $\lambda I-A$, y que $z_n\longrightarrow z$ y $(\lambda I-A)z_n\longrightarrow x$, se concluye que $z\in D(A)$ y $x=(\lambda I-A)z$. Así, $x\in\mathrm{Rec}(\lambda I-A)$ y queda establecido que $\mathrm{Rec}(\lambda I-A)=X$. □

Las siguientes propiedades para el operador resolvente resultan muy útiles.

Proposición 1.20. *Sean X un espacio normado, $A\colon D(A)\subset X\to X$ un operador lineal y $\lambda,\mu\in\rho(A)$. Se tiene:*

(a) $AR(\lambda, A)x = R(\lambda, A)Ax$, $x \in D(A)$.
(b) Ecuación de la resolvente: $R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A)$.
(c) $R(\lambda, A)R(\mu, A) = R(\mu, A)R(\lambda, A)$.

Demostración. La propiedad en *(a)* se obtiene fácilmente teniendo en cuenta que $R(\lambda, A)(\lambda I - A) = I_A$ y $(\lambda I - A)R(\lambda, A) = I_X$, donde I_A y I_X representan a los operadores identidad en A y en X, respectivamente.
Para probar *(b)* escribimos $R(\lambda, A) = R(\lambda, A)(\mu I - A)R(\mu, A) = R(\lambda, A)[(\mu-\lambda)I + (\lambda I - A)]R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A) + R(\mu, A)$.

Es evidente, a partir de *(b)*, que *(c)* se verifica. □

Proposición 1.21. *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach,* $A\colon D(A) \subset X \to X$ *lineal y* $\lambda_0 \in \rho(A)$. *Si* $\lambda \in \mathbb{C}$ *verifica* $|\lambda - \lambda_0| \|R(\lambda_0, A)\|_{L(X)} < 1$, *entonces,* $\lambda \in \rho(A)$ *y*

$$R(\lambda, A) = \sum_{k=0}^{\infty} R(\lambda_0, A)^{k+1}(\lambda_0 - \lambda)^k.$$

Observación 1.22. Aquí y en lo que sigue las series de operadores (resp., de vectores en X) se entienden como límite en $\|\cdot\|_{L(X)}$ (resp., en X) de las sumas parciales.

Demostración. Observamos primero que si $\|R(\lambda_0, A)\|_{L(X)} = 0$, entonces $X = \{0\}$, pues $R(\lambda_0, A)$ es un operador biyectivo de X en $D(A)$. Y este caso es trivial. Asumamos entonces que $\|R(\lambda_0, A)\|_{L(X)} \neq 0$ y sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda - \lambda_0| \|R(\lambda_0, A)\|_{L(X)} < 1$.

Definimos el operador S_λ mediante

$$S_\lambda x = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k R(\lambda_0, A)^{k+1} x, \quad x \in X.$$

Se tiene que S_λ es un operador bien definido que pertenece a $L(X)$, pues $R(\lambda_0, A) \in L(X)$ y $|\lambda - \lambda_0| \|R(\lambda_0, A)\|_{L(X)} < 1$. De hecho se tiene que

$$\|S_\lambda\|_{L(X)} \leq \|R(\lambda_0, A)\|_{L(X)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(|\lambda_0 - \lambda| \|R(\lambda_0, A)\|_{L(X)}\right)^k.$$

Podemos comprobar además que S_λ coincide con el operador resolvente de A. Basta ver que

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)S_\lambda x &= ((\lambda - \lambda_0)I + \lambda_0 I - A)S_\lambda x \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k R(\lambda_0, A)^k x + \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k R(\lambda_0, A)^k x = x, \quad x \in X.\end{aligned}$$

Y análogamente, $S_\lambda(\lambda I - A)x = x$, $x \in D(A)$. Luego, $\lambda \in \rho(A)$ y $S_\lambda = R(\lambda, A)$. □

Observación 1.23. Señalamos que de este resultado se deduce que si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ es un operador lineal, entonces el conjunto resolvente $\rho(A)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{C}$. Suponiendo $\rho(A) \neq \emptyset$ y $X \neq \{0\}$ (de lo contrario, es evidente), se observa que dado $\lambda_0 \in \rho(A)$, según la Proposición 1.21, la bola $B(\lambda_0, r)$ de radio $r = \|R(\lambda_0, A)\|_{L(X)}^{-1}$ está contenida en $\rho(A)$.

Recogemos a continuación una propiedad que utilizaremos en el capítulo 2 para obtener semigrupos contractivos a partir de semigrupos uniformemente acotados.

Proposición 1.24. *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y* $A\colon D(A) \subset X \to X$ *un operador lineal. Si* $(0,\infty) \subset \rho(A)$ *y existe* $M \geq 1$ *tal que*

$$\|\lambda^n R(\lambda, A)^n\|_{L(X,\|\cdot\|)} \leq M, \quad \lambda > 0,\, n \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

entonces podemos encontrar una norma $|\cdot|$ *en* X *equivalente a* $\|\cdot\|$ *que verifica* $|\lambda R(\lambda, A)|_{L(X,|\cdot|)} \leq 1$, $\lambda > 0$.

Demostración. Para cada $\mu > 0$ definimos $\|\cdot\|_\mu$ mediante

$$\|x\|_\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \|\mu^n R(\mu, A)^n x\|, \quad x \in X.$$

Se tiene que $\|\cdot\|_\mu$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|$. En efecto, que es norma en X se deduce fácilmente de las propiedades del supremo y de que $\|\cdot\|$ es una norma en X. Y usando (1.2) se sigue que

$$\|x\| = \|\mu^0 R(\mu, A)^0 x\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \|\mu^n R(\mu, A)^n x\| = \|x\|_\mu \leq M\|x\|.$$

Por otro lado, para cada $\mu > 0$,

$$\|\mu R(\mu, A)x\|_\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \|\mu^{n+1} R(\mu, A)^{n+1} x\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \|\mu^n R(\mu, A)^n x\| = \|x\|_\mu,\; x \in X,$$

lo que implica que $\|\mu R(\mu, A)\|_{L(X,\|\cdot\|_\mu)} \leq 1$, $\mu > 0$.
Veamos que también se satisface que $\|\lambda R(\lambda, A)\|_{L(X,\|\cdot\|_\mu)} \leq 1$, cuando $0 < \lambda < \mu$. Sea $0 < \lambda < \mu$. Si $x \in X$ y $z = R(\lambda, A)x$, de la Proposición 1.20 *(b), (c)* se sigue que

$$z = R(\mu, A)x + (\mu - \lambda)R(\mu, A)R(\lambda, A)x = R(\mu, A)x + (\mu - \lambda)R(\mu, A)z.$$

Luego, ya que $\|\mu R(\mu, A)\|_{L(X,\|\cdot\|_\mu)} \leq 1$, obtenemos

$$\|z\|_\mu \leq \|R(\mu, A)x\|_\mu + (\mu - \lambda)\|R(\mu, A)z\|_\mu \leq \frac{\|x\|_\mu}{\mu} + \frac{(\mu - \lambda)}{\mu}\|z\|_\mu,$$

y, por tanto, $\lambda\|z\|_\mu \leq \|x\|_\mu$, esto es, $\lambda\|R(\lambda, A)x\|_\mu \leq \|x\|_\mu$, $x \in X$, y concluimos que $\|\lambda R(\lambda, A)\|_{L(X,\|\cdot\|_\mu)} \leq 1$, cuando $0 < \lambda < \mu$.

Buscamos ahora una norma que satisfaga las propiedades de la proposición. Nótese que para $\|\cdot\|_\mu$ solo hemos podido garantizar la equivalencia con $\|\cdot\|$ y que $\|\lambda R(\lambda, A)\|_{L(X,\|\cdot\|_\mu)} \leq 1$, $0 < \lambda \leq \mu$.
Pero se tiene que, para cada $x \in X$, $\|x\|_\mu$, $\mu > 0$, es creciente como función de μ. Y además está acotada superiormente por $M\|x\|$. Basta observar que si $0 < \mu_1 < \mu_2$, entonces $\|\mu_1 R(\mu_1, A)\|_{L(X,\|\cdot\|_{\mu_2})} \leq 1$ y podemos escribir, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\mu_1^n R(\mu_1,A)^n x\| \le \|\mu_1^n R(\mu_1,A)^n x\|_{\mu_2} = \|\mu_1 R(\mu_1,A)(\mu_1^{n-1} R(\mu_1,A)^{n-1} x)\|_{\mu_2}$$
$$\le \|\mu_1^{n-1} R(\mu_1,A)^{n-1} x\|_{\mu_2} \le \cdots \le \|x\|_{\mu_2}.$$

Tomando supremo sobre $n \in \mathbb{N}_0$ se obtiene que $\|x\|_{\mu_1} \le \|x\|_{\mu_2} \le M\|x\|$.

Podemos definir

$$|x| = \lim_{\mu\to\infty} \|x\|_\mu = \sup_{\mu>0} \|x\|_\mu, \quad x \in X.$$

Fácilmente, ya que $\|\cdot\|_\mu$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|$, se deduce que también $|\cdot|$ es una norma en X equivalente a $\|\cdot\|$. Además, como $\|\lambda R(\lambda,A)\|_{L(X,\|\cdot\|_\mu)} \le 1$, $0 < \lambda \le \mu$, podemos tomar límite cuando $\mu \to \infty$ y concluir que para todo $\lambda > 0$, $|\lambda R(\lambda,A)x| \le |x|$, $x \in X$, esto es, $|\lambda R(\lambda,A)|_{L(X,|\cdot|)} \le 1$, $\lambda > 0$. □

Como veremos, en el estudio del Teorema de Hille-Yosida aparecen los conocidos como aproximantes de Yosida. Sea X un espacio de Banach y $A\colon D(A) \to X$ un operador lineal tal que $(0,\infty) \subset \rho(A)$. La familia de *aproximantes de Yosida de* A, $\{A_\lambda\}_{\lambda>0}$, está constituida por los operadores en $L(X)$ definidos mediante

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda,A) = \lambda^2 R(\lambda,A) - \lambda I, \quad \lambda > 0. \tag{1.3}$$

El término “aproximantes" se justifica por el siguiente resultado.

Proposición 1.25. *Sean* $(X,\|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y* $A\colon D(A) \subseteq X \to X$ *lineal tal que:*

(i) A *es cerrado y* $D(A)$ *es denso en* X.

(ii) $(0,\infty) \subset \rho(A)$, *y* $\|\lambda R(\lambda,A)\|_{L(X)} \le 1$, $\lambda > 0$.

Entonces,

(a) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda,A)x = x,\ x \in X$.

(b) $\lim\limits_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax,\ x \in D(A)$.

Demostración. *(a)* Cuando $x \in D(A)$ se puede escribir

$$\lambda R(\lambda,A)x - x = \lambda R(\lambda,A)x - R(\lambda,A)(\lambda I - A)x = R(\lambda,A)Ax.$$

Luego, de *(ii)* se sigue que $\|\lambda R(\lambda,A)x - x\| \le \frac{1}{\lambda}\|Ax\|$, $\lambda > 0$, estableciendo así que $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda,A)x = x,\ x \in D(A)$.

En general, si $x \in X$, como $D(A)$ es denso en X, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $y \in D(A)$ tal que $\|x - y\| < \varepsilon$. Teniendo en cuenta que $\|\lambda R(\lambda,A)\|_{L(X)} \le 1$, sigue que:

$$\|\lambda R(\lambda,A)x - x\| = \|\lambda R(\lambda,A)(x-y)\| + \|\lambda R(\lambda,A)y - y\| + \|x-y\|$$
$$\le (\|\lambda R(\lambda,A)\|_{L(X)} + 1)\|x-y\| + \|\lambda R(\lambda,A)y - y\| < 2\varepsilon + \|\lambda R(\lambda,A)y - y\|.$$

Y como $y \in D(A)$, en virtud de lo que habíamos probado podemos concluir que $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda,A)x = x$.

La propiedad *(b)* es inmediata a partir de *(a)* y de la Proposición 1.20 *(a)*. □

Terminamos este capítulo con la siguiente propiedad para los aproximantes de Yosida que usaremos en la prueba de la versión contractiva del Teorema de Hille-Yosida.

Observación 1.26. Indicamos que si X es un espacio de Banach y $B \in L(X)$, se define el operador e^B mediante la fórmula clásica para la función exponencial, es decir, $e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$, donde como hemos comentado antes, entendemos la serie como límite en $L(X)$ de las sumas parciales. Observamos que $e^B \in L(X)$ y $\|e^B\|_{L(X)} \leq e^{\|B\|_{L(X)}}$. También se tiene que $e^A \circ e^B = e^B \circ e^A = e^{A+B}$, cuando A y B conmutan. Además, no es difícil ver que la función $t \to e^{tB}$ es diferenciable en el sentido indicado al final de la sección anterior, siendo $\frac{d}{dt} e^{tB} = e^{tB} B = B e^{tB}$.

Proposición 1.27. *Sean X un espacio de Banach y $A\colon D(A) \subseteq X \to X$ lineal tal que:*

(i) A es cerrado y $D(A)$ es denso en X.

(ii) $(0,\infty) \subset \rho(A)$, y $\|\lambda R(\lambda, A)\|_{L(X)} \leq 1$, $\lambda > 0$.

Entonces, para cada $x \in X$ existe $\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda} x$*, y es uniforme en $t \in [0,T]$, $T > 0$.*

Demostración. Es claro, por (1.3) y las condiciones en *(ii)*, que $A_\lambda \in L(X)$, que $\|A_\lambda\|_{L(X)} \leq 2\lambda$, $\lambda > 0$, y que además,

$$\left\|e^{A_\lambda t}\right\|_{L(X)} = e^{-t\lambda} \left\|e^{t\lambda^2 R(\lambda,A)}\right\|_{L(X)} \leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2 \|R(\lambda,A)\|_{L(X)}} \leq 1. \tag{1.4}$$

Fijamos ahora $\lambda, \mu > 0$. En virtud de la Proposición 1.20 *(c)* se tiene que los operadores A_λ y A_μ conmutan y, en consecuencia, también A_λ, A_μ, $e^{A_\lambda t}$ y $e^{A_\mu t}$ conmutan entre sí. Luego, haciendo uso del cálculo diferencial e integral en el contexto de operadores, para cada $t > 0$, podemos escribir

$$\begin{aligned}
e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x &= \int_0^t \frac{d}{ds}(e^{(t-s)A_\mu} e^{sA_\lambda} x) ds \\
&= \int_0^t \Big[\frac{d}{ds}(e^{(t-s)A_\mu})(e^{sA_\lambda} x) + e^{(t-s)A_\mu} \frac{d}{ds}(e^{sA_\lambda} x)\Big] ds \\
&= \int_0^t \Big[-A_\mu e^{(t-s)A_\mu} e^{sA_\lambda} x + e^{(t-s)A_\mu} e^{sA_\lambda} A_\lambda x\Big] ds \\
&= \int_0^t e^{(t-s)A_\mu} e^{sA_\lambda} (A_\lambda x - A_\mu x) ds, \quad x \in X.
\end{aligned}$$

Usando (1.4), se sigue que, para cada $t \geq 0$, $\|e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x\| \leq t \|A_\lambda x - A_\mu x\|$, $x \in X$. Teniendo en cuenta entonces la Proposición 1.25 *(b)* podemos asegurar la existencia de $\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda} x$, cuando $x \in D(A)$. Observamos también que la convergencia es uniforme para $t \in [0,T]$, $T > 0$. Si $x \in X$, la densidad de $D(A)$ nos dice que dado $\varepsilon > 0$ existe $y \in D(A)$ tal que $\|x - y\| < \varepsilon$. Y entonces,

$$\|e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x\| \leq \|(e^{tA_\lambda} - e^{tA_\mu})(x - y)\| + \|e^{tA_\lambda} y - e^{tA_\mu} y\| < 2\varepsilon + \|e^{tA_\lambda} y - e^{tA_\mu} y\|,$$

de donde se sigue que para $x \in X$ existe $\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda} x$ y es uniforme en $t \in [0,T]$, $T > 0$. □

2

Semigrupo de Operadores

Este es el capítulo principal de la memoria. En él analizamos los conceptos y propiedades más importantes en relación a los semigrupos de operadores lineales y acotados en espacios de Banach. En concreto, nos ocupamos de los semigrupos fuertemente continuos y los uniformemente continuos. Trataremos primero algunas características generales, introducimos el concepto de generador infinitesimal de un semigrupo y analizamos su relación con el semigrupo. El resultado central es el Teorema de Hille-Yosida que caracteriza los semigrupos fuertemente continuos en términos del generador infinitesimal, estableciendo además una conexión con la resolvente de dicho generador.

Comenzamos introduciendo los conceptos básicos de la teoría.

Definición 2.1. *Sean* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y* $\{T_t\}_{t\geq 0} \subset L(X)$. *Decimos que la familia* $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *es un semigrupo de operadores si verifica las siguientes condiciones:*

(a) $T_0 = I$, *siendo* I *el operador identidad.*
(b) $T_t T_s = T_{t+s}$, $t, s \geq 0$ *(propiedad de semigrupo).*

Un semigrupo se dice que es uniformemente continuo en X *si* $\lim_{t\to 0^+} T_t = I$, *donde el límite se entiende en el espacio* $(L(X), \|\cdot\|_{L(X)})$.

El semigrupo es C_0 *ó fuertemente continuo en* X *si, para cada* $x \in X$, *se tiene que* $\lim_{t\to 0^+} T_t x = x$. *Aquí se considera la convergencia en* $(X, \|\cdot\|)$.

Señalamos que los términos “uniforme" y “fuertemente" son adecuados a la vista de la Proposición 2.5 que abordaremos después.

Observación 2.2. Ya que $\|T_t x - x\|_X \leq \|T_t - I\|_{L(X)} \|x\|_X$, $x \in X$, es claro que todo semigrupo uniformemente continuo es también C_0.

A partir de ahora, y siempre que no sea necesario especificar, usaremos el símbolo $\|\cdot\|$ tanto para la norma en X como la correspondiente en $L(X)$. Por el contexto quedará claro en cada momento la norma considerada.

Nuestro primer resultado da una acotación para la norma de los operadores de un semigrupo C_0. En virtud de la Observación 2.2, también es válida para los semigrupos uniformemente continuos. No obstante, para estos últimos podemos tomar $M = 1$, como se recoge en la Proposición 2.11.

Teorema 2.3. *Sea* $\{T_t\}_{t\geq 0} \subset L(X)$ *un semigrupo* C_0*. Existen constantes* $M \geq 1$ *y* $w \in \mathbb{R}$ *tales que* $\|T_t\| \leq Me^{wt}$*,* $t \geq 0$*.*

Demostración. Observamos en primer lugar que $\|T_0\| = \|I\| = 1$, por lo que M ha de satisfacer $M \geq 1$.

Afirmamos que podemos encontrar $M \geq 1$ y $r > 0$ tales que $\|T_t\| \leq M$, cuando $t \in [0, r]$. Supongamos por el contrario que esto no es cierto. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n > 0$ tal que $0 < t_n < \frac{1}{n}$, y $\|T_{t_n}\| > n$. Hemos encontrado así una sucesión $(T_{t_n})_{n\in\mathbb{N}} \subset L(X)$ de manera que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_{t_n}\| = \infty$. Entonces por el Teorema de Banach-Steinhauss ([1, Theorem II.1]) existe $x_0 \in X$ tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_{t_n} x_0\| = \infty$. Sin embargo, esto contradice el hecho de que $\lim_{t\to 0^+} T_t x_0 = x_0$, pues esto implica que $(T_{t_n} x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en X.

Sea ahora $t \in [0, \infty)$. Consideramos $M \geq 1$ y $r > 0$ tales que $\|T_s\| \leq M$, $s \in [0, r]$. Si $t \leq r$, $\|T_t\| \leq M$. Sea $t > r$. Elegimos $n \in \mathbb{N}$ y $\gamma \in [0, r)$ de modo que $t = nr + \gamma$. Entonces, de la propiedad de semigrupo y considerando $w = \frac{\ln M}{r} \geq 0$, se obtiene que

$$\|T_t\| = \|T_{nr+\gamma}\| = \|T_r \circ \overset{(n}{\cdots} \circ T_r \circ T_\gamma\| \leq \|T_r\|^n \|T_\gamma\| \leq M^{\frac{t-\gamma}{r}} M \leq M M^{\frac{t}{r}} \leq Me^{wt}.$$

Hemos llegado así a que $\|T_t\| \leq Me^{wt}$, $t \geq 0$. □

Observación 2.4. Cuando $w = 0$ se dice que el semigrupo es *uniformemente acotado*, y si además, $M = 1$, entonces decimos que el semigrupo *es contractivo.*

Proposición 2.5. *Sean* X *un espacio de Banach y* $\{T_t\}_{t\geq 0} \subset L(X)$ *un semigrupo uniformemente continuo. La aplicación* $t \mapsto T_t$ *es continua de* $[0, \infty)$ *en* $L(X)$*. Análogamente, si* $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *es un semigrupo* C_0*, entonces, para cada* $x \in X$*, la aplicación* $t \mapsto T_t x$ *es continua de* $[0, \infty)$ *en* X*.*

Demostración. Demostraremos la propiedad para los semigrupos uniformemente continuos. El caso C_0 se prueba de la misma forma. Nótese también que en $t_0 = 0$ la función es continua por definición.

Fijamos $t_0 \in (0, \infty)$. Veamos que la aplicación $t \to T_t$ es continua en t_0 por la derecha. Usando la propiedad de semigrupo, para cada $s \geq t_0$ podemos escribir $\|T_{t_0} - T_s\| = \|T_{t_0}(I - T_{s-t_0})\| \leq \|T_{t_0}\| \|I - T_{s-t_0}\|$. Y ya que $\{T_t\}_{\geq 0}$ es un semigrupo uniformemente continuo se deduce que $\|T_{t_0} - T_s\| \to 0$, cuando $s \to t_0^+$.

Por otro lado haciendo uso del Teorema 2.3 elegimos $M \geq 1$ y $w \geq 0$ tales que $\|T_s\| \leq Me^{ws} \leq Me^{wt_0}$, $s \in [0, t_0]$. Entonces, procediendo como antes, llegamos a que $\|T_{t_0} - T_s\| \leq \|T_s\| \|T_{t_0 - s} - I\| \leq Me^{wt_0} \|T_{t_0 - s} - I\|$, $0 \leq s \leq t_0$. De nuevo por ser $\{T_t\}_{\geq 0}$ un semigrupo uniformemente continuo en X, se obtiene $\|T_{t_0} - T_s\| \to 0$, cuando $s \to t_0^-$. □

Terminamos este apartado con la siguiente propiedad para semigrupos C_0 que usaremos en la siguiente sección.

Proposición 2.6. *Sean $\{T_s\}_{s\geq 0}$ y $\{S_s\}_{s\geq 0}$ dos semigrupos fuertemente continuos en un espacio de Banach X y $D \subset X$ un subespacio invariante por $\{S_t\}_{t\geq 0}$ (esto es, $S_t(D) \subset D$, $t \geq 0$). Supongamos que las aplicaciones $t \longrightarrow T_t x$ y $t \longrightarrow S_t x$ son diferenciables en el intervalo (a,b), para cada $x \in D$. Entonces la aplicación $F(s) = T_s S_s x$, $s \in (a,b)$, es también diferenciable para todo $x \in D$ y*

$$\frac{d}{ds}F(s_0) = T_{s_0}\Big(\frac{d}{ds}(S_s x)(s_0)\Big) + \frac{d}{ds}\Big(T_s(S_{s_0}x)\Big)(s_0),\ s_0 \in (a,b).$$

Demostración. Sean $x \in D$ y $s_0 \in (a,b)$. Para h suficientemente pequeño (que asegure que $s_0 + h \in (a,b)$) podemos escribir

$$\frac{F(s_0+h)-F(s_0)}{h} = T_{s_0+h}\Big(\frac{S_{s_0+h}x - S_{s_0}x}{h}\Big) + \frac{T_{s_0+h}-T_{s_0}}{h}(S_{s_0}x) = L_1(h,x) + L_2(h,x).$$

Ya que $t \longrightarrow T_t z$ es diferenciable en s_0, para todo $z \in D$, y $S_{s_0}x \in D$, se tiene que

$$\lim_{h\to 0} L_2(h,x) = \frac{d}{ds}\Big(T_s(S_{s_0}x)\Big)(s_0).$$

Por otra parte, si denotamos por $S'_{s_0}x = \frac{d}{ds}(S_s x)(s_0)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\big\|L_1(h,x) - T_{s_0}(S'_{s_0}x)\big\| &= \big\|L_1(h,x) - T_{s_0}(S'_{s_0}x) \pm T_{s_0+h}(S'_{s_0}x)\big\| \\ &\leq \|T_{s_0+h}\| \left\|\frac{S_{s_0+h}x - S_{s_0}x}{h} - S'_{s_0}x\right\| + \|T_{s_0+h}(S'_{s_0}x) - T_{s_0}(S'_{s_0}x)\|,\end{aligned}$$

cuando h es suficientemente pequeño. La continuidad de $t \longrightarrow T_t x$ y la diferenciabilidad de $t \longrightarrow S_t x$ en s_0, así como el Teorema 2.3, permiten concluir que

$$\lim_{h\to 0} L_1(h,x) = T_{s_0}\Big(\frac{d}{ds}(S_s x)(s_0)\Big).$$

□

2.1. Generador infinitesimal de un semigrupo

Como ya hemos comentado los semigrupos constituyen una herramienta potente en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales. Este valor se basa en la relación con cierto operador que analizamos en esta sección.

Definición 2.7. *Sean X un espacio de Banach y $\{T_t\}_{t\geq 0} \subset L(X)$ un semigrupo de operadores C_0. Se llama generador infinitesimal del semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ al operador lineal $A\colon D(A) \subset X \to X$, definido por*

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{T_t x - x}{t},$$

para cada x en su dominio $D(A) = \big\{x \in X\colon$ existe $\lim_{t\to 0^+} \frac{T_t x - x}{t}\big\}$.

El dominio de A, que es un subespacio vectorial de X, es una parte esencial en la definición del generador A, por lo que lo correcto sería usar siempre la notación $(A, D(A))$. No obstante, por comodidad escribiremos A y asumimos implícitamente que su dominio es el dado por $D(A)$. Hacemos notar que aunque A es un operador lineal, en general, no tiene por qué ser un operador acotado.

2.1.1. Semigrupos uniformemente continuos

En esta subsección establecemos que el generador infinitesimal A de un semigrupo uniformemente continuo es un operador acotado. De hecho estos semigrupos se describen como operadores exponenciales de la forma $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$.

Teorema 2.8. *Sea X un espacio de Banach. Se tiene que:*
(a) Si $A \in L(X)$, entonces $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo uniformemente continuo en X.
(b) Sean $\{T_t\}_{t\geq 0} \subset L(X)$ un semigrupo uniformemente continuo en X y A su generador infinitesimal. Entonces, $A \in L(X)$.

Demostración. *(a)* Ya comentamos en la Observación 1.26 que si $A \in L(X)$, entonces $e^{tA} \in L(X)$ y además $\|e^{tA}\| \leq e^{t\|A\|}$. Veamos la justificación de estos hechos con un poco más de detalle. Sea $t \geq 0$. El operador e^{tA} se define por

$$e^{tA}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k x}{k!}, \quad x \in X.$$

Para cada $x \in X$, la sucesión $(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k A^k x}{k!})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en X, pues A es un operador acotado y

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \frac{t^k A^k x}{k!} \right\| \leq \sum_{k=n}^{m} \frac{t^k \|A\|^k \|x\|}{k!}, \quad n, m \in \mathbb{N},\ n \leq m.$$

La completitud de X asegura la existencia de $e^{tA}x$. Además, $\|e^{tA}x\| \leq e^{t\|A\|}\|x\|$, $x \in X$. Nótese que de la misma forma se tiene que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ es convergente en $L(X)$, esto es, uniformemente convergente en X.

Por otro lado, $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ satisface las propiedades de semigrupo. Es evidente que $T_0 = I$. Además, la convergencia uniforme de la serie nos permite escribir, para cada $t, s \geq 0$,

$$\begin{aligned} e^{tA}e^{sA} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} A^m \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} A^n \right) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^m s^n}{m!n!} A^{m+n} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{r=m}^{\infty} \frac{r!\, t^m s^{r-m}}{m!(r-m)!} \frac{A^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{r} \binom{r}{m} t^m s^{r-m} \right) \frac{A^r}{r!} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} (t+s)^r \frac{A^r}{r!} = e^{(t+s)A}. \end{aligned}$$

De nuevo, usando que A es acotado, se deduce que $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo uniformemente continuo, pues, para cada $t \geq 0$,

$$\|e^{At} - I\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \|A\|^n \leq t\|A\| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \|A\|^n \right) = t\|A\| e^{t\|A\|},$$

lo que implica que $\|e^{At}-I\| \longrightarrow 0$, cuando $t \to 0^+$.

También la acotación de A conduce a que A es el generador infinitesimal del semigrupo. Basta observar que

$$\left\| \frac{e^{tA}-I}{t} - A \right\| = \left\| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} A^n \right\| \leq t\|A\|^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(t\|A\|)^{n-2}}{(n-2)!} = t\|A\|^2 e^{t\|A\|}, \ t>0.$$

(b) En este apartado nuestro objetivo es probar que $A \in L(X)$. Para ello vamos a establecer que, para cierto $\rho > 0$,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T_t - I}{t} = (T_\rho - I)\left(\int_0^\rho T_s ds\right)^{-1},$$

siendo $\int_0^\rho T_s ds$ un operador biyectivo con inverso en $L(X)$. Y así se deduce que $A \in L(X)$. En virtud de la Proposición 2.5, las integrales se pueden entender en el sentido Riemann que comentamos al final de la sección 1.2.

Así, para cada $\rho > 0$ podemos escribir $I = \frac{1}{\rho}\int_0^\rho I ds$ y se tiene que

$$\left\| \frac{1}{\rho}\int_0^\rho T_s ds - I \right\| = \left\| \frac{1}{\rho}\int_0^\rho (T_s - I) ds \right\| \leq \frac{1}{\rho}\int_0^\rho \|T_s - I\| ds.$$

Como $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo uniformemente continuo, podemos elegir $t_0 > 0$ de manera que $\|T_t - I\| < \frac{1}{2}$, $t \in (0, t_0)$. Luego, tomando $\rho = t_0$ se deduce que $\|\frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} T_s ds - I\| < \frac{1}{2}$. El Teorema 1.16 asegura entonces la existencia del operador inverso de $\int_0^{t_0} T_s ds$, siendo además un operador lineal y acotado. Para concluir la prueba debemos ver que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T_t - I}{t} \int_0^{t_0} T_s ds = T_{t_0} - I.$$

De nuevo el cálculo integral nos permite escribir

$$\frac{T_t - I}{t}\int_0^{t_0} T_s ds = \frac{1}{t}\int_0^{t_0} T_{t+s} ds - \frac{1}{t}\int_0^{t_0} T_s ds = \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t_0+t} T_s ds - \frac{1}{t}\int_0^{t} T_s ds, \quad t>0.$$

No es difícil ver que puesto que $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo uniformemente continuo se tiene que $\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_\rho^{\rho+t} T_s ds = T_\rho$, $\rho \geq 0$. Entonces, se concluye que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T_t - I}{t}\int_0^{t_0} T_s ds = T_{t_0} - T_0 = T_{t_0} - I.$$

□

A la vista de este teorema si $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo uniformemente continuo en X, entonces su generador infinitesimal $A \in L(X)$. Pero entonces, A también es el generador infinitesimal del semigrupo uniformemente continuo $\{e^{At}\}_{t\geq 0}$. De manera natural cabe preguntarse si ambos semigrupos son o no iguales. La respuesta es afirmativa, como puede observarse a continuación.

Teorema 2.9. *Sean X un espacio de Banach y $\{T_t\}_{t\geq 0}$ y $\{S_t\}_{t\geq 0}$ dos semigrupos uniformemente continuos en X con el mismo generador infinitesimal. Entonces, se tiene que $T_t = S_t$, $t \geq 0$.*

Demostración. Fijamos un $t_0 > 0$ arbitrario. De la Proposición 2.5 y la continuidad de la norma en $L(X)$, se sigue que las aplicaciones $t \mapsto \|T_t\|$ y $t \mapsto \|S_t\|$, son continuas de $[0,\infty)$ en $[0,\infty)$. Entonces, ambas aplicaciones están acotadas en $[0, t_0]$ y podemos encontrar $C_0 > 0$ tal que

$$\sup_{t,s\in[0,t_0]} \|T_t\|\|S_s\| \leq C_0. \tag{2.1}$$

Por otro lado, si A es el generador infinitesimal de los dos semigrupos, teniendo en cuenta que se verifica

$$\frac{1}{t}\|T_t - S_t\| \leq \left\|\frac{T_t - I}{t} - A\right\| + \left\|\frac{S_t - I}{t} - A\right\|, \quad t > 0,$$

dado $\varepsilon > 0$ podemos elegir $0 < \delta < t_0$ de manera que

$$\frac{1}{t}\|T_t - S_t\| < \frac{\varepsilon}{t_0 C_0}, \quad 0 < t < \delta. \tag{2.2}$$

Sea $t \in [0, t_0]$. Elegimos $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $t < n\delta$. De esta manera, si $\alpha = t/n$, usando (2.1), (2.2) y la propiedad de semigrupo se deduce que

$$\begin{aligned}\|T_t - S_t\| = \|T_{n\alpha} - S_{n\alpha}\| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \|T_{(n-k)\alpha}S_{k\alpha} - T_{(n-k-1)\alpha}S_{(k+1)\alpha}\| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \|T_{(n-k-1)\alpha}(T_\alpha - S_\alpha)S_{k\alpha}\| \leq \|T_\alpha - S_\alpha\| \sum_{k=0}^{n-1} \|T_{(n-k-1)\alpha}\|\|S_{k\alpha}\| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Luego, tomando $\varepsilon \to 0$, se obtiene que $\|T_t - S_t\| = 0$. De esta forma, $T_t = S_t$, $t \in [0, t_0]$. De la arbitrariedad de t_0 se obtiene que $T_t = S_t$, $t \geq 0$. □

Como consecuencia de los Teoremas 2.8 y 2.9 se deduce la siguiente caracterización de los semigrupos uniformemente continuos en función de su generador infinitesimal.

Corolario 2.10. *Sean X un espacio de Banach y $\zeta = \{T_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo uniformemente continuo en X con generador infinitesimal A. Entonces, $A \in L(X)$ y $\zeta = \{e^{At}\}_{t\geq 0}$.*

Proposición 2.11. *Sean X un espacio de Banach y $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo uniformemente continuo en X. Entonces se tiene que:*

(a) Existe $w \geq 0$ tal que $\|T_t\| \leq e^{wt}$, $t \geq 0$.
(b) La aplicación $t \mapsto T_t$ es diferenciable y se verifica que $\frac{d}{dt}T_t = AT_t = T_tA$, donde A es el generador infinitesimal del semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$.

Demostración. El Corolario 2.10 nos dice que $T_t = e^{At}$, $t \geq 0$, siendo $A \in L(X)$ el generador infinitesimal del semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$. Por tanto, $\|T_t\| \leq e^{t\|A\|}$, $t \geq 0$, y obtenemos *(a)* con $w = \|A\|$.
Probamos ahora *(b)*. Si $t = 0$, se tiene por definición de A que $\frac{d}{dt}T_{t\,|t=0} = A$. Fijamos entonces $t > 0$. Debemos ver que existe $\lim_{h\to 0}\frac{T_{t+h}-T_t}{h}$ en $L(X)$, y que el valor de este límite es T_tA. Nótese que como $T_t = e^{tA}$, se puede asegurar que $AT_t = T_tA$.

Usando la propiedad de semigrupo y el apartado *(a)* se tiene,

$$\left\|\frac{T_{t+h}-T_t}{h} - T_tA\right\| \leq \|T_t\|\left\|\frac{T_h-I}{h} - A\right\| \leq e^{wt}\left\|\frac{T_h-I}{h} - A\right\|, \quad h > 0,$$

y, cuando $0 < h < t$,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{T_t-T_{t-h}}{h} - T_tA\right\| &\leq \|T_{t-h}\|\left\|\frac{T_h-I}{h} - A\right\| + \|T_{t-h}A - T_tA\| \\ &\leq e^{w(t-h)}\left\|\frac{T_h-I}{h} - A\right\| + \|T_{t-h}A - T_tA\|.\end{aligned}$$

Luego, para terminar la prueba basta tener en cuenta que A es el generador infinitesimal del semigrupo y que la aplicación $s \longrightarrow T_s$ es continua (Proposición 2.5).

□

2.1.2. Semigrupos fuertemente continuos

Tratamos ahora los semigrupos C_0. En este caso, el generador infinitesimal A es, en general, un operador no acotado, que está definido, como veremos en un subespacio denso de X. Además, para recuperar el semigrupo a partir de su generador vamos a necesitar un tercer objeto, la resolvente de A, cuestión que analizaremos en la segunda sección de este capítulo.

Comenzamos con el siguiente resultado donde se pone de manifiesto que la continuidad fuerte del semigrupo implica cierta propiedad de diferenciabilidad para las *aplicaciones órbitas*, $\xi_x : t \longrightarrow T_tx$, $x \in X$.

Proposición 2.12. *Sean X un espacio de Banach, $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo C_0 en X, y $A\colon D(A) \subset X \to X$ su generador infinitesimal. Entonces, se cumple:*
(a) Para $x \in D(A)$, se tiene que $T_tx \in D(A)$[1]*, y $\frac{d}{dt}T_tx = T_tAx = AT_tx$.*
(b) Para $x \in X$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T_sx\,ds = T_tx,\ t \geq 0.$$

(c) Para $x \in X$ y $t \geq 0$ se tiene que $\int_0^t T_sx\,ds \in D(A)$ y

$$A\left(\int_0^t T_sx\,ds\right) = T_tx - x.$$

(d) Para $x \in D(A)$,

$$T_tx - T_sx = \int_s^t T_uAx\,du,\ t, s \geq 0.$$

[1] Esto nos dice que $D(A)$ es $\{T_t\}_{t\geq 0}$-invariante.

Demostración. Repitiendo el argumento en la demostración de la Proposición 2.11 *(b)*, usando en este caso la acotación dada en el Teorema 2.3 y que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T_h x - x}{h} = Ax, \quad x \in D(A),$$

se puede demostrar la propiedad en *(a)*.
Sean $x_0 \in X$ y $t_0 \geq 0$. Puesto que la aplicación $t \longrightarrow T_t x_0$ es continua, se tiene que es integrable en sentido Riemann como función X-valuada. Además, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\| T_s x_0 - T_{t_0} x_0 \| < \varepsilon$, cuando $s \in (t_0, t_0 + \delta)$. Por tanto, para $0 < h < \delta$ podemos escribir

$$\left\| \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} T_s x_0 \, ds - T_{t_0} x_0 \right\| \leq \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} \| T_s x_0 - T_{t_0} x_0 \| \, ds < \varepsilon,$$

de donde se obtiene *(b)*.
La propiedad en *(c)* quedará probada cuando veamos que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T_h - I}{h} \left(\int_0^{t_0} T_s x_0 \, ds \right) = T_{t_0} x_0 - x_0. \tag{2.3}$$

De nuevo usando el cálculo integral y la propiedad de semigrupo se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{T_h - I}{h} \left(\int_0^{t_0} T_s x_0 \, ds \right) &= \frac{1}{h} \int_0^{t_0} T_{h+s} x_0 \, ds - \frac{1}{h} \int_0^{t_0} T_s x_0 \, ds \\
&= \frac{1}{h} \int_h^{t_0} T_s x_0 \, ds + \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} T_s x_0 \, ds - \frac{1}{h} \int_0^{t_0} T_s x_0 \, ds \\
&= \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} T_s x_0 \, ds - \frac{1}{h} \int_0^{h} T_s x_0 \, ds.
\end{aligned}$$

Como el límite cuando $h \to 0^+$ del último término es $T_{t_0} x_0 - x_0$, (2.3) queda establecido.

Por último, teniendo en cuenta que $T_t x - T_s x = \int_s^t \frac{d}{du} T_u x \, du$, $x \in X$, $s, t \geq 0$, de la propiedad *(a)* se sigue inmediatamente *(d)*. □

Uno de los objetivos en nuestro estudio es encontrar una caracterización para los semigrupos C_0. Veamos en primer lugar la siguiente condición que es necesaria para estos semigrupos.

Proposición 2.13. *Sean X un espacio de Banach, $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo C_0 en X y A su generador infinitesimal. Entonces, A es un operador cerrado con dominio, $D(A)$, denso en X.*

Demostración. Que $D(A)$ es denso en X, se sigue de la Proposición 2.12 *(b), (c)*, pues para cada $x \in X$, se tiene que $x_n \longrightarrow x$, siendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ la sucesión dada por

$$x_n = n\int_0^{1/n} T_s x\, ds, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Veamos que A es un operador cerrado en X. Sean $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$, $x, y \in X$ tales que $x_n \to x$, y $Ax_n \to y$, cuando $n \to \infty$. Ya que, para cada $t \geq 0$, T_t es un operador continuo, se tiene que $T_t x_n \to T_t x$ y $T_t A x_n \longrightarrow T_t y$, cuando $n \to \infty$.

Más aún, esta convergencia es uniforme en $t \in [0, T]$, para cualquier $T > 0$. Basta tener en cuenta que si $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y $z \in X$ entonces por el Teorema 2.3 $\|T_t z_n - T_t z\| \leq \|T_t\|\|z_n - z\| \leq Me^{wT}\|z_n - z\|$, $t \in [0, T]$.

Haciendo uso entonces de la Proposición 2.12 *(d)*, para cada $t \in (0, 1)$ y $x \in D(A)$ se tiene que

$$\frac{T_t x - x}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{T_t x_n - x_n}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t T_s A x_n\, ds = \frac{1}{t}\int_0^t T_s y\, ds.$$

Aplicando la propiedad *(b)* de la Proposición 2.12 se deduce que $x \in D(A)$ y $Ax = y$, y, por tanto, queda demostrado que A es un operador cerrado. □

Se puede refinar un poco el resultado anterior como indicamos a continuación. Se trata de la existencia de un subespacio de $D(A)$ que sigue siendo denso en X[2].

Proposición 2.14. *Sean* $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *un semigrupo* C_0 *en un espacio de Banach* X *y* $A\colon D(A) \subset X \to X$ *su generador infinitesimal. Entonces,* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(A^n)$ *es denso en* X.

Demostración. Aquí, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $D(A^n) = \{x \in D(A^{n-1}) : A^{n-1}x \in D(A)\}$. Entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(A^n)$ es un subespacio de $D(A)$. Para establecer que es denso en X, vamos a probar que existe un subconjunto $Y \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(A^n)$ denso en X.
Para cada $x \in X$ y $\varphi \in C_c^{\infty}(0, \infty)$ (funciones de clase C^{∞} y soporte compacto en $(0, \infty)$), definimos el elemento de X,

$$x_\varphi = \int_0^{\infty} \varphi(s) T_s x\, ds.$$

Nótese que en virtud del Teorema 2.3, $\|x_\varphi\| \leq \int_{\mathrm{sop}\varphi} |\varphi(s)|\|T_s\|\|x\|\, ds < C\|x\|$.
Consideramos el subespacio vectorial generado por estos vectores

$$Y = \langle\{x_\varphi \colon x \in X,\ \varphi \in C_c^{\infty}(0, \infty)\}\rangle.$$

Comprobamos primero que $Y \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(A^n))$. Sean $x \in X$ y $\varphi \in C_c^{\infty}(0, \infty)$ con soporte en $(a, b) \subset (0, \infty)$. Afirmamos que $x_\varphi \in D(A)$ y que $Ax_\varphi = x_{-\varphi'}$. En efecto, considerando la extensión de φ al intervalo $(-\infty, 0]$ como $\varphi(z) = 0$ (nótese que ya que φ tiene soporte compacto en $(0, \infty)$, esta extensión sigue siendo de clase C^{∞}) para cada $h > 0$, podemos escribir

$$\frac{T_h x_\varphi - x_\varphi}{h} = \frac{1}{h}\left(T_h \int_0^{\infty} \varphi(s) T_s x\, ds - \int_0^{\infty} \varphi(s) T_s x\, ds\right)$$

[2] Este subespacio es un ejemplo de un "núcleo" para A, es decir, un subespacio denso en $D(A)$ con la *norma del grafo* $\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|$, $x \in D(A)$ (ver Proposición 3.7).

$$= \frac{1}{h}\left(\int_0^\infty \varphi(s)T_{s+h}x\,ds - \int_0^\infty \varphi(s)T_s x\,ds\right) = \int_a^{b+h} \frac{\varphi(s-h)-\varphi(s)}{h} T_s x\,ds.$$

Ya que $\lim_{h\to 0^+} \frac{\varphi(s-h)-\varphi(s)}{h} = -\varphi'(s)$ uniformemente en $[a,b+1]$, dado $\varepsilon>0$, podemos tomar $0<h_0<1$ tal que

$$\sup_{s\in[a,b+1]}\left|\frac{\varphi(s-h)-\varphi(s)}{h}+\varphi'(s)\right|<\varepsilon,\quad 0<h<h_0.$$

Por tanto, para todo $0<h<h_0$, usando de nuevo el Teorema 2.3, llegamos a que

$$\left\|\frac{T_h x_\varphi - x_\varphi}{h} - x_{-\varphi'}\right\| \le M\varepsilon\|x\|\int_a^{b+1} e^{ws}\,ds \le C\varepsilon.$$

De esta forma, $x_\varphi \in D(A)$ y $Ax_\varphi = x_{-\varphi'}$. Aplicando inducción, se obtiene que $x_\varphi \in D(A^n)$ y $A^n x_\varphi = x_{(-1)^n\varphi^{(n}}$, siendo $\varphi^{(n)} \in C_c^\infty(0,\infty)$, $n\in\mathbb{N}$. Concluimos que $Y\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D(A^n)$.

Para terminar la demostración, veamos que Y es denso en X. Supongamos que no lo es. Como consecuencia del teorema de Hanh-Banach (ver [1, Corolario I.8]), existe un funcional F lineal y continuo en X que es no nulo y tal que $F(y)=0$, $y\in Y$. En particular, para cada $x\in X$ y $\varphi\in C_c^\infty(0,\infty)$ se verifica que $F(x_\varphi)=0$. Por tanto, dado $x\in X$, para toda función $\varphi\in C_c^\infty(0,\infty)$ se cumple que

$$\int_0^\infty \varphi(s)F(T_s x)\,ds = 0,$$

lo que implica que $F(T_s x)=0$, para cada $s\ge 0$. En particular, $F(x)=0$, $x\in X$, es decir, F es el funcional nulo y llegamos a un absurdo. Así, Y es denso en X. □

Al igual que sucede con los semigrupos uniformemente continuos, si dos semigrupos C_0 tienen el mismo generador infinitesimal entonces son iguales.

Proposición 2.15. *Sean $\{T_t\}_{t\ge 0}$ y $\{S_t\}_{t\ge 0}$ dos semigrupos C_0 en X con el mismo generador infinitesimal. Entonces, $T_t = S_t$, para todo $t\ge 0$.*

Demostración. Es claro que $T_0 = S_0$. Consideramos entonces $t>0$ y supongamos primero que $x\in D(A)$.

Sea F la función definida en $[0,t]$ por $F(s) = T_{t-s}(S_s x)$, $s\in[0,t]$. Las Proposiciones 2.6 y 2.12 *(a)* nos permiten escribir $F'(s) = -T_{t-s}(AS_s x) + T_{t-s}(AS_s x) = 0$, $s\in(0,t)$. Ya que F es continua en $[0,t]$, se concluye que F es constante y, por tanto, $F(0)=F(t)$, esto es, $T_t x = S_t x$.

Fijamos ahora $x\in X$. Como $D(A)$ es denso en X (Proposición 2.13) podemos tomar una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset D(A)$ tal que $x_n\to x$ en X, $n\to\infty$. Sabemos que $T_t x_n = S_t x_n$, $n\in\mathbb{N}$. La continuidad de los operadores T_t y S_t aseguran entonces que $T_t x = S_t x$. □

2.2. Teorema de Hille-Yosida

Dedicamos este apartado al problema central de esta memoria: caracterizar aquellos operadores lineales que son generadores infinitesimales de semigrupos fuertemente continuos, y describir cómo se genera el semigrupo.

Vimos en la Proposición 2.13 que si un semigrupo es C_0 entonces necesariamente su generador infinitesimal es un operador cerrado con dominio denso. Por otro lado, un semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ uniformemente continuo queda totalmente descrito a partir de su generador infinitesimal A, que es un operador acotado, mediante $T_t = e^{tA}$, $t \geq 0$.

Si A no es acotado cabe pensar entonces en tratar de encontrar una sucesión de operadores acotados $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, esperar que exista el límite de e^{tA_n} cuando $n \to \infty$, y que éste sea un semigrupo fuertemente continuo. Esta fue una idea de Yosida que permitió encontrar condiciones suficientes para que un operador lineal cerrado sea el generador de un semigrupo C_0. Estas condiciones fueron establecidas independientemente por Hille y Yosida en 1948 y se recogen en el conocido como Teorema de Hille-Yosida.

Ya que las técnicas de prueba para semigrupos contractivos es más sencilla, y los casos generales pueden deducirse de éste, presentamos en primer lugar la versión del Teorema de Hille-Yosida para semigrupos contractivos.

Teorema 2.16 (Hille-Yosida, semigrupos contractivos). *Sean X un espacio de Banach y $A\colon D(A) \subset X \to X$ un operador lineal. Se tiene que A genera un semigrupo C_0 contractivo si y sólo si:*

(a) A es cerrado y $D(A)$ es denso en X.

(b) $(0,\infty) \subset \rho(A)$, y $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1$, para cada $\lambda > 0$.

Demostración. Supongamos primero que A genera un semigrupo C_0, $\{T_t\}_{t\geq 0}$, contractivo. Ya vimos en la Proposición 2.13 que A es entonces cerrado y $D(A)$ es denso en X. Probemos entonces la condición *(b)*.

Fijamos $\lambda > 0$. Definimos el operador

$$S_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s x\, ds = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-\lambda s} T_s x\, ds, \quad x \in X.$$

Este operador está bien definido como integral impropia en el sentido Riemann. De hecho, como $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo contractivo se cumple

$$\|S_\lambda x\| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda s} \|T_s\| \|x\| ds \leq \frac{\|x\|}{\lambda}, \quad x \in X,$$

y se tiene que $\|\lambda S_\lambda\| \leq 1$.

El objetivo ahora es probar que este operador coincide con la resolvente de A. Para ello, veamos primero que A conmuta con S_λ. Sea $x \in D(A)$. Por la Proposición 2.12 *(a)* se tiene que

$$S_\lambda(Ax) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s(Ax)ds = \int_0^\infty A(e^{-\lambda s} T_s x)ds.$$

Por otro lado, la integrabilidad Riemann nos permite escribir

$$\begin{aligned}\int_0^\infty A(e^{-\lambda s} T_s x)ds &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b A(e^{-s\lambda} T_s x)ds = \lim_{b\to\infty} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{b}{n} \sum_{i=1}^n A(e^{-\lambda b\frac{i}{n}} T_{b\frac{i}{n}} x) \right) \\ &= \lim_{b\to\infty} \lim_{n\to\infty} \left[A\left(\frac{b}{n} \sum_{i=1}^n e^{-\lambda b\frac{i}{n}} T_{b\frac{i}{n}} x \right) \right].\end{aligned}$$

Sea $b > 0$. Denotamos por $z_n = \frac{b}{n}\sum_{i=1}^n e^{-\lambda b\frac{i}{n}} T_{b\frac{i}{n}} x$, $n \in \mathbb{N}$. De nuevo por la Proposición 2.12 *(a)* se verifica que $z_n \in D(A)$, y además, $z_n \longrightarrow y_b = \int_0^b e^{-\lambda s} T_s x ds$, $Az_n \longrightarrow \int_0^b A(e^{-\lambda s} T_s x)ds$, $n \to \infty$. Como A es cerrado, se cumple,

$$y_b \in D(A) \quad \text{y} \quad Ay_b = \int_0^b A(e^{-\lambda s} T_s x)ds.$$

Por otro lado, tomando una sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ estrictamente creciente en $(0,\infty)$ se tiene que

$$y_{b_n} \longrightarrow \int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s x ds \quad \text{y} \quad Ay_{b_n} \longrightarrow \int_0^\infty A(e^{-\lambda s} T_s x)ds.$$

Aplicando de nuevo que A es un operador cerrado concluimos que $\int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s x ds = S_\lambda x \in D(A)$ y $A(S_\lambda x) = \int_0^\infty A(e^{-\lambda s} T_s x)ds$. Por tanto, $A(S_\lambda x) = S_\lambda(Ax)$, $x \in D(A)$.

Para probar que $S_\lambda = R(\lambda, A)$, debemos ver que $(\lambda I - A)S_\lambda = I_X$ y $S_\lambda(\lambda I - A) = I_{D(A)}$. Teniendo en cuenta que $T_t \in L(X)$, $t \geq 0$, y usando la propiedad de semigrupo podemos escribir

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} \frac{T_h(S_\lambda x) - S_\lambda x}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} T_h\left(\int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s x ds \right) - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s x ds \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s} T_{h+s} x ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s x ds \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(u-h)} T_u x du - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s x ds \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda s} T_s x ds - \frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda s} T_s x ds \\ &= \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s x ds - x, \quad x \in X.\end{aligned}$$

En la última igualdad hemos usado que $\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda s} T_s x ds = x$, lo que se puede establecer procediendo como en la prueba de la Proposición 2.12 *(b)*.

Por tanto, $AS_\lambda x = \lambda S_\lambda x - x$, $x \in X$, esto es, $(\lambda I - A)S_\lambda x = x$, $x \in X$. Por otra parte, como S_λ y A conmutan se cumple que $S_\lambda(\lambda I - A)x = (\lambda I - A)S_\lambda x$, $x \in D(A)$.

Continuamos ahora con la segunda parte de la prueba donde establecemos que *(a)* y *(b)* son condiciones suficientes para que A genere un semigrupo C_0 contractivo.

Sea $\{A_\lambda = \lambda AR(\lambda, A)\}_{\lambda>0}$ la familia de aproximantes de Yosida de A (ver (1.3)). Para cada $\lambda > 0$ se tiene que $A_\lambda \in L(X)$ y, en virtud del Teorema 2.8 *(a)*, $\{e^{tA_\lambda}\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo uniformemente continuo, que además es contractivo ((1.4)). Asimismo, la Proposición 1.27 nos dice que el límite $\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x$ existe para todo $x \in X$ y además es uniforme en $t \in [0, T]$, $T > 0$. Definimos entonces, para cada $t \geq 0$,

$$T_t x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x, \quad x \in X.$$

Que $\{T_t\}_{t\geq 0} \subset L(X)$ se sigue fácilmente de que $e^{tA_\lambda} \in L(X)$, $\lambda > 0$. Más aún, ya que $\{e^{tA_\lambda}\}_{t\geq 0}$ es contractivo y, para cada $t \geq 0$, $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe $\lambda_0 > 0$ de manera que $\|T_t x - e^{tA_{\lambda_0}}x\| < \varepsilon$, se tiene que $\|T_t x\| < \varepsilon + \|e^{tA_{\lambda_0}}x\| \leq \varepsilon + \|x\|$, y así, $\|T_t\| \leq 1$, $t \geq 0$. Asimismo, para cada $t \geq 0$ se verifica que $\|T_t x - x\| < \varepsilon + \|e^{tA_{\lambda_0}}x - x\|$, $x \in X$, de donde se deduce que $\lim_{t\to 0^+} T_t x = x$, $x \in X$.

Es claro que $T_0 = I$. Por otra parte, para cada $s, t \geq 0$, y $\lambda > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}\|T_t(T_s x) - e^{tA_\lambda}(e^{sA_\lambda}x)\| &\leq \|(T_t - e^{tA_\lambda})T_s x\| + \|e^{tA_\lambda}(T_s x - e^{sA_\lambda}x)\| \\ &\leq \|(T_t - e^{tA_\lambda})T_s x\| + \|T_s x - e^{sA_\lambda}x\|, \quad x \in X.\end{aligned}$$

Por tanto, para cada $s, t \geq 0$, $T_t T_s x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}e^{sA_\lambda}x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{(t+s)A_\lambda}x = T_{t+s}x$, $x \in X$. Hemos comprobado así que $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo C_0 contractivo.

Para terminar supongamos que $B : D(B) \longrightarrow X$ es el generador infinitesimal de $\{T_t\}_{t\geq 0}$. Veamos que $A = B$.
Observamos primero que puesto que $T_s x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{sA_\lambda}x$, $x \in X$, uniformemente en $s \in [0, T]$, $T > 0$, se sigue que, para cada $t > 0$, $\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda}x\,ds = \int_0^t T_s x\,ds$, $x \in X$.

Sea $x \in D(A)$. Haciendo uso de la Proposición 2.11 *(b)* tenemos que

$$e^{tA_\lambda}x - x = \int_0^t \frac{d}{ds}\left(e^{sA_\lambda}x\right)ds = \int_0^t e^{sA_\lambda}(A_\lambda x - Ax)\,ds + \int_0^t e^{sA_\lambda}Ax\,ds, \; t > 0.$$

Teniendo en cuenta la contractividad de $\{e^{sA_\lambda}\}_{s\geq 0}$ y la Proposición 1.25 *(b)*, si tomamos límite cuando $\lambda \to \infty$ y consideramos $t \in [0, 1]$, obtenemos que

$$T_t x - x = \int_0^t T_s(Ax)\,ds, \quad t \in [0, 1].$$

Luego, de la Proposición 2.12 *(b)*,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{T_t x - x}{t} = T_0(Ax) = Ax, \quad x \in D(A).$$

De esta forma, se establece que $D(A) \subseteq D(B)$ y $Bx = Ax$, $x \in D(A)$. Por otra parte, ya que B es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 contractivo, por lo establecido en la primera parte de la demostración se sigue que $(0, \infty) \subseteq \rho(B)$. En particular, $1 \in \rho(B)$ y por tanto, $(I - B)$ es un operador inyectivo. Sean $y \in D(B)$ y $x = R(\lambda, A)(I - B)y$. Observamos que $x \in D(A)$ (pues $\mathrm{Rec}(R(\lambda, A)) = D(A)$), y que $(I - A)x = (I - B)y$. Pero $Ax = Bx$, por lo que $(I - B)x = (I - B)y$, y se sigue entonces que $x = y$, y por tanto, $y \in D(A)$. Señalamos finalmente que de acuerdo con la Proposición 2.15 el semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ que hemos definido es único. □

Como fue mencionado, la técnica para probar el Teorema de Hille-Yosida para semigrupos C_0 generales consiste en reducir el problema al caso contractivo y aplicar entonces el Teorema 2.16. Los dos resultados que presentamos a continuación siguen esa línea.

Proposición 2.17. *Sea X un espacio de Banach. Supongamos que $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo C_0 en X tal que $\|T_t\| \leq e^{wt}$, $t \geq 0$, para cierto $w \in \mathbb{R}$. Entonces, la familia $\{S_t\}_{t\geq 0}$ donde $S_t = e^{-wt}T_t$, $t \geq 0$, es un semigrupo C_0 contractivo en X. Además, si A es el generador infinitesimal de $\{T_t\}_{t\geq 0}$, entonces $B = A - wI$ es el generador de $\{S_t\}_{t\geq 0}$. Más aún, $\lambda \in \rho(A)$ si y sólo si $\lambda - w \in \rho(B)$.*

Demostración. De las propiedades del semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ se sigue fácilmente que $\{S_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de operadores en $L(X)$. Por otro lado, para $t \in (0,1)$, aplicando el Teorema del valor medio se obtiene que

$$\|S_t x - x\| \leq e^{-wt}\|T_t x - x\| + |e^{-wt} - 1|\|x\| \leq e^{|w|}(\|T_t x - x\| + t|w|\|x\|),\ x \in X,$$

de donde se sigue que $\{S_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo C_0. Asimismo, $\|S_t\| \leq e^{-wt}\|T_t\| \leq e^{-wt}e^{wt} = 1,\ t \geq 0$, esto es, $\{S_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo contractivo.

Comprobamos ahora que $B = A - wI$ es el generador infinitesimal del semigrupo $\{S_t\}_{t\geq 0}$, siendo $D(B) = D(A)$. Para ello basta observar que

$$\frac{S_h x - x}{h} = \frac{e^{-wh}T_h x - x}{h} = e^{-wh}\frac{T_h x - x}{h} + \frac{e^{-wh} - 1}{h}x, \quad x \in X, h > 0.$$

Luego, ya que $\lim_{h\to 0^+} e^{-wh} = 1$ y $\lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-wh}-1}{h} = -w$, se sigue que $x \in D(B)$ si y sólo si $x \in D(A)$, y $Bx = Ax - wx$, para $x \in D(B) = D(A)$, esto es, $B = A - wI$. Esta relación nos dice que $\lambda I - A = (\lambda - w)I - B$, por lo que $\lambda \in \rho(A)$ si y sólo si $\lambda - w \in \rho(B)$. □

Proposición 2.18. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo C_0 de operadores en $L(X, \|\cdot\|)$ tal que $\|T_t\|_{L(X,\|\cdot\|)} \leq M$, $t \geq 0$, para cierta $M \geq 1$. Entonces, existe una norma $|\cdot|$ en X equivalente a $\|\cdot\|$ tal que $|T_t|_{L(X,|\cdot|)} \leq 1$, $t \geq 0$.*

Demostración. Definimos $|\cdot|$ mediante $|x| = \sup_{t\geq 0}\|T_t x\|$, $x \in X$. Esta aplicación define claramente una norma en X. Asimismo,

$$\|x\| = \|T_0 x\| \leq \sup_{t\geq 0}\|T_t x\| = |x| \leq \sup_{t\geq 0}\|T_t\|_{L(X,\|\cdot\|)}\|x\| \leq M\|x\|, \quad x \in X,$$

es decir, ambas normas son equivalentes. Por otra parte, usando la propiedad de semigrupo, para cada $t \geq 0$ se tiene que

$$|T_t x| = \sup_{s\geq 0} \|T_s T_t x\| = \sup_{s\geq 0} \|T_{t+s} x\| \leq \sup_{s\geq 0} \|T_s x\| = |x|.$$

esto es, $|T_t|_{L(X,|\cdot|)} \leq 1$, $t \geq 0$. □

Observación 2.19. La equivalencia de las normas $\|\cdot\|$ y $|\cdot|$ de la proposición anterior asegura que la familia $\{T_t\}_{t\geq 0}$ considerada en $L(X,|\cdot|)$ también es un semigrupo C_0 y con el mismo generador infinitesimal. Basta observar que las propiedades de semigrupo son propiedades algebraicas, así que no dependen de la norma. Con respecto a la condición C_0 y al límite que define al generador infinitesimal, aunque sí involucran a las normas, al ser éstas equivalentes se tiene que son independientes de la norma considerada. Como hemos visto, la contractividad, sin embargo, es una propiedad implícita a la norma.

Ya nos encontramos en condiciones de establecer el Teorema de Hille-Yosida para semigrupos C_0 generales.

Teorema 2.20 (Teorema Hille-Yosida, versión general). *Sean $(X,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $A\colon D(A) \subset X \to X$ un operador lineal. Entonces A genera un semigrupo C_0 en X, $\{T_t\}_{t\geq 0}$, tal que $\|T_t\| \leq Me^{wt}$, $t \geq 0$, para ciertas constantes $M \geq 1$ y $w \geq 0$ si y sólo si:*

(a) $D(A)$ es denso en X y A es cerrado.

(b) $(w,\infty) \subset \rho(A)$ y $\|(\lambda - w)^n R(\lambda, A)^n\| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$, $\lambda > w$.

Demostración. En primer lugar, supongamos que $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo C_0 generado por A tal que $\|T_t\| \leq Me^{wt}$, $t \geq 0$.

Definimos $S_t = e^{-wt} T_t$, $t \geq 0$. Procediendo como en la prueba de la Proposición 2.17 se sigue que $\{S_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo C_0 en X tal que $\|S_t\| \leq M$, $t \geq 0$, y que $B = A - wI$ es su generador infinitesimal.

En virtud de la Proposición 2.18 y de la Observación 2.19 existe una norma $|\cdot|$ en X equivalente a $\|\cdot\|$ de manera que $\{S_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo C_0 contractivo respecto a ella, esto es, $|S_t| \leq 1$, $t \geq 0$, y su generador infinitesimal sigue siendo B. Como vimos en la prueba de dicha proposición, podemos considerar la norma dada por

$$|x| = \sup_{t\geq 0} \|S_t x\|, \quad x \in X,$$

que satisface, $\|x\| \leq |x| \leq M\|x\|$, $x \in X$.

Por el Teorema de Hille-Yosida contractivo (Teorema 2.16) se sigue, por un lado, que B es cerrado y $D(B)$ es denso en $(X,|\cdot|)$. La equivalencia de las normas nos dice que también B es cerrado y $D(B)$ es denso en $(X,\|\cdot\|)$. Y puesto que $A = B + wI$ queda establecido *(a)*.

Por otro lado, también según el Teorema 2.16, $(0,\infty) \subset \rho(B)$ y $|\mu R(\mu,B)| \leq 1$, $\mu > 0$. Como las normas son equivalentes, se sigue que $\mu \in \rho(B)$ si y sólo si $R(\mu,B) \in L(X,\|\cdot\|)$, y por tanto, si y sólo si $R(\mu + w, A) \in L(X,\|\cdot\|)$. Luego, $(0,\infty) \subset \rho(B)$ si y sólo si $(w,\infty) \subset \rho(A)$. Además, para cada $\mu > 0$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\mu^n R(\mu,B)^n x\| \leq |\mu^n R(\mu,B)^n x| \leq |\mu R(\mu,B)|^n |x| \leq |x| \leq M\|x\|, \quad x \in X,$$

de donde se sigue que, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $\lambda > w$, $\|(\lambda - w)^n R(\lambda, A)^n\| \leq M$.

Supogamos ahora que se verifican las condiciones *(a)* y *(b)* del teorema. Consideramos el operador $B = A - wI$. De *(a)* se sigue que B es un operador cerrado y $D(B)$ es denso en $(X, \|\cdot\|)$. Y por *(b)* se obtiene que $(0, \infty) \subset \rho(B)$ y $\|\mu^n R(\mu, B)^n\| \leq M$, $n \in \mathbb{N}$ y $\mu > 0$.
Usando ahora la Proposición 1.24 (ver también su prueba), se tiene que la norma $|||\cdot|||$ en X definida por

$$|||x||| = \lim_{\mu \to \infty} \|x\|_\mu = \sup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \|\mu^n R(\mu, B)^n x\|, \quad x \in X,$$

verifica que $\|x\| \leq |||x||| \leq M\|x\|$, $x \in X$, y $|||\mu R(\mu, B)||| \leq 1$, para $\mu > 0$.

Como ambas normas son equivalentes, B también es cerrado y $D(B)$ es denso en $(X, |||\cdot|||)$. Luego, podemos aplicar el Teorema 2.16 para inferir que B genera un semigrupo C_0 en $(X, |||\cdot|||)$, $\{S_t\}_{t \geq 0}$, que es contractivo. Como ambas normas son equivalentes se tiene que $\{S_t\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo C_0 en $(X, \|\cdot\|)$ (Observación 2.19). Además, como $\{S_t\}_{t \geq 0}$ es contractivo respecto a la norma $|||\cdot|||$, se sigue que $\|S_t x\| \leq |||S_t x||| \leq |||x||| \leq M\|x\|$, $x \in X$, esto es $\|S_t\| \leq M$, $t \geq 0$.

Entonces, definiendo $\{T_t = e^{wt} S_t\}_{t \geq 0}$, y procediendo como en la Proposición 2.17, de las propiedades del semigrupo $\{S_t\}_{t \geq 0}$ se deduce que $\{T_t = e^{wt} S_t\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo C_0 generado por A, y además, $\|T_t\| = \|e^{wt} S_t\| \leq M e^{wt}$, $t \geq 0$, lo que concluye la prueba. □

2.3. Propiedades vinculadas al Teorema de Hille-Yosida

En el enunciado del Teorema de Hille-Yosida se pone de manifiesto la relación entre tres de los objetos importantes en la teoría: el semigrupo, su generador infinitesimal y el operador resolvente del generador. Las pruebas del teorema también permiten extraer algunas características interesantes de estos objetos. Esta sección está dedicada a mostrar algunas de estas propiedades.

Veamos primero el siguiente resultado de aproximación.

Proposición 2.21. *Sean X un espacio de Banach, $\{T_t\}_{t \geq 0}$ un semigrupo C_0 en X tal que $\|T_t\| \leq M e^{wt}$, $t \geq 0$, para ciertas $M \geq 1$ y $w \in \mathbb{R}$, y $A \colon D(A) \to X$ su generador infinitesimal. Entonces, para cada $x \in X$,*

$$T_t x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{t A_\lambda} x, \ \textit{uniformemente en } [0, T], \ T > 0, \tag{2.4}$$

donde $\{A_\lambda = \lambda A R(\lambda, A)\}_{\lambda > w}$ es la familia de los aproximantes de Yosida de A.

Demostración. Asumamos en primer lugar que el semigrupo es contractivo. El Teorema 2.16 asegura entonces que A es cerrado, $D(A)$ es denso en X, que $(0, \infty) \subset \rho(A)$ y $\|\lambda R(A, \lambda)\| \leq 1$, $\lambda > 0$. Con estas condiciones, y de acuerdo a la prueba del

Teorema 2.16, el semigrupo $\{S_t\}_{t\geq 0}$ definido por $S_t x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x$, $x \in X$, es un semigrupo C_0 contractivo con generador infinitesimal A. También se probó que el límite que lo define es uniforme en $[0,T]$, $T>0$. Luego, en virtud de la Proposición 2.15 se sigue (2.4), para el caso de semigrupos contractivos.

Consideramos ahora el caso general, esto es, suponemos que el semigrupo verifica $\|T_t\| \leq Me^{wt}$, $t \geq 0$, siendo $M \geq 1$ y $w \in \mathbb{R}$.

Observamos que si $w \leq 0$, entonces $\|T_t\| \leq M$ y por la Proposición 2.18 (ver también Observación 2.19) podemos encontrar una norma $|\cdot|$ en X que es equivalente a la norma original $\|\cdot\|$ en X y para la cual el semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es C_0 y contractivo. Luego, considerando el semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ en $(X, |\cdot|)$, se obtiene que, para cada $x \in X$, $T_t x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x$, uniformemente en $[0,T]$, $T>0$, entendiendo el límite respecto a la norma $|\cdot|$. Ya que las normas $|\cdot|$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes, se tiene que (2.4) se verifica cuando consideramos el límite con respecto a la norma $\|\cdot\|$.

Sea ahora $w>0$. Consideramos $\{S_t\}_{t\geq 0}$ definido por $S_t = e^{-wt}T_t$, $t \geq 0$. Como vimos en la prueba del Teorema 2.20, $\{S_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo C_0 en X tal que $\|S_t\| \leq M$, $t \geq 0$, siendo $B = A - wI$ su generador infinitesimal. Entonces, para cada $x \in X$, $S_t x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tB_\lambda}x$, uniformemente en $[0,T]$, $T>0$, y, por tanto, $T_t x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{t(B_\lambda + wI)}x$, uniformemente en $[0,T]$, $T>0$.
Se puede ver, usando cálculos directos, que $B_\lambda + wI = A_{\lambda+w} + H(\lambda)$, donde $H(\lambda) = (w^2 I - 2wA)R(\lambda+w, A) = 2wI - w(2\lambda+w)R(\lambda+w, A)$, $\lambda>0$. Entonces,

$$T_t x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{t(A_{\lambda+w}+H(\lambda))}x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{t(A_\lambda + H(\lambda-w))}x, \quad x \in X, \tag{2.5}$$

uniformemente en $[0,T]$, $T>0$. Puesto que $H(\lambda-w)$ y A_λ conmutan podemos escribir, para cada $x \in X$, $t \geq 0$ y $\lambda > w$,

$$\begin{aligned}\|e^{tA_\lambda}x - T_t x\| &\leq \|e^{tA_\lambda}\|\|x - e^{tH(\lambda-w)}x\| + \|e^{t(A_\lambda+H(\lambda-w))}x - T_t x\| \\ &\leq t\|e^{tA_\lambda}\|e^{t\|H(\lambda-w)\|}\|H(\lambda-w)x\| + \|e^{t(A_\lambda+H_w(\lambda-w))}x - T_t x\|. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Teniendo en cuenta el Teorema 2.20 y que $A_\lambda = -\lambda I + \lambda^2 R(\lambda, A)$, $\lambda > w$, se tiene que para $\lambda > 2w$,

$$\begin{aligned}\|e^{tA_\lambda}\| &= e^{-\lambda t}\|e^{\lambda^2 R(\lambda,A)t}\| \leq e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2n}t^n\|R(\lambda,A)^n\|}{n!} \leq Me^{-\lambda t}e^{\frac{\lambda^2 t}{\lambda-w}} \\ &= Me^{\frac{w\lambda t}{\lambda-w}} \leq Me^{2wt} \leq Me^{2wT},\ 0 \leq t \leq T,\ T>0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Por otro lado, de las expresiones dadas para $H(\lambda)$ se deduce, usando de nuevo el Teorema 2.20, que $\|H(\lambda)\| \leq 2w + 2Mw + Mw^2\lambda^{-1} \leq 2w + 3Mw$, cuando $\lambda > w$, y también que si $x \in D(A)$, entonces $\|H(\lambda)x\| \leq M\lambda^{-1}(w^2\|x\| + 2w\|Ax\|)$. Esta última desigualdad nos dice que $\|H(\lambda)x\| \longrightarrow 0$, cuando $\lambda \to \infty$, para $x \in D(A)$. La densidad de $D(A)$ permite concluir que también se tiene la convergencia a 0, para

$x \in X$. Teniendo en cuenta estas estimaciones junto con (2.5) y (2.7), si tomamos límite cuando $\lambda \to \infty$ en (2.6) obtenemos que $T_t x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x$, $x \in X$, uniformemente en $[0, T]$, $T > 0$. □

Finalizamos mostrando algunas propiedades del operador resolvente asociado a un semigrupo C_0.

Proposición 2.22. *Sean X un espacio de Banach y $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo C_0 en X verificando que $\|T_t\| \leq Me^{wt}$, con $M \geq 1$, $w \in \mathbb{R}$. Entonces, se tiene:*

(a) $\{\lambda \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}\lambda > w\} \subset \rho(A)$.

(b) Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}\lambda > w$, *se verifica* $\|(\mathrm{Re}\lambda - w)R(\lambda, A)\| \leq M$.

(c) Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}\lambda > w$ *y $n \in \mathbb{N}$, se cumple*

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(-t)^n T_t x\, dt, \quad x \in X.$$

(d) Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}\lambda > w$ *y $n \in \mathbb{N}$, se tiene*

$$R(\lambda, A)^n x = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{n-1} T_t x\, dt, \quad x \in X.$$

Demostración. Para probar estas propiedades basta definir, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, con $\mathrm{Re}\,\lambda > w$, el operador $S_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s x\, ds$, $x \in X$. Siguiendo el mismo procedimiento que en la prueba del Teorema 2.16 se puede probar que S_λ, $\mathrm{Re}\,\lambda > w$, es un operador en $L(X)$, tal que $\|(\mathrm{Re}\,\lambda - w)S_\lambda\| \leq M$ y que de hecho, $S_\lambda = R(\lambda, A)$, cuando $\mathrm{Re}\,\lambda > w$. Así *(a)* y *(b)* quedan probados.

Usando de nuevo que $R(\lambda, A) = S_\lambda$, $\mathrm{Re}\,\lambda > w$, para establecer (*c*) basta ver que $\int_0^\infty \|te^{-\lambda t} T_t x\|\, dt < \infty$, $x \in X$, y luego aplicar inducción. Y es claro, de las condiciones del semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ que $\int_0^\infty \|te^{-\lambda t} T_t x\|\, dt \leq M\|x\| \int_0^\infty te^{-(\mathrm{Re}\,\lambda - w)t}\, dt < \infty$, cuando $\mathrm{Re}\,\lambda > w$.

Por último, haciendo uso de la ecuación de la resolvente (Proposición 1.20 *(b)*) se sigue que

$$\frac{d}{d\lambda}R(\lambda, A)x = \lim_{\mu\to\lambda} \frac{R(\mu, A)x - R(\lambda, A)x}{\mu - \lambda} = -\lim_{\mu\to\lambda} R(\mu, A)R(\lambda, A)x = -R(\lambda, A)^2 x,$$

para todo $x \in X$ y $\lambda \in \rho(A)$. Procediendo entonces por inducción se obtiene que

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}R(\lambda, A)x = (-1)^n n! R(\lambda, A)^{n+1} x, \quad x \in X, \lambda \in \rho(A),$$

y usando *(c)* se puede establecer la propiedad en *(d)*. □

3

Algunos ejemplos y aplicaciones

En este último capítulo recogemos algunas aplicaciones de la teoría que hemos analizado en los capítulos precedentes, y tratamos algunos aspectos de los mencionados para semigrupos particulares.

3.1. Algunos ejemplos

Dedicamos esta primera sección a examinar tres ejemplos concretos de semigrupos, cada uno de los cuales se incluye dentro de algunos de los tipos de semigrupos básicos en la teoría.

3.1.1. Semigrupos multiplicativos

Estos semigrupos están generados por operadores de multiplicación, y suelen resultar muy útiles a la hora de ilustrar un resultado o refutar una conjetura sobre semigrupos.

Supongamos que para cada $t \geq 0$, $m_t : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función continua y acotada, de manera que $m_0(s) = 1$, $s \in \Omega$, y $m_{t+s} = m_t m_s$. Consideramos $C_0(\Omega)$ el conjunto de las funciones continuas en Ω que se anulan en el infinito, con la norma $\|f\|_\infty = \sup_{s\in\Omega} |f(s)|$, $f \in C_0(\Omega)$.

Si $X \subseteq C_0(\Omega)$ es un espacio de Banach se define el *semigrupo multiplicativo* en X, $\{T_t\}_{t\geq 0}$ mediante $T_t f = m_t f$, $f \in X$. Los semigrupos multiplicativos C_0 se pueden describir en términos de una función $q : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ continua tal que $\sup_{s\in\Omega} \operatorname{Re} q(s) < \infty$, mediante $T_t^q f = e^{tq} f$, $f \in X$ ([4, Proposition I.3.6]) (nótese que la familia $\{m_t = e^{tq}\}_{t\geq 0}$, cumple las condiciones anteriores). Comentamos también que este semigrupo es uniformemente continuo si y sólo si q es una función acotada ([4, Proposition I.3.4]).

Veamos un ejemplo particular. Sea $X = (\ell^2, \|\cdot\|_2)$ el espacio de Banach de las sucesiones $x = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $\|x\|_2 = (\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2)^{1/2} < \infty$. Para cada $t \geq 0$ definimos $T_t(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (e^{-nt} a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nótese que $T_t = T_t^q$, para $q(n) = -n$, $n \in \mathbb{N}$.

Es claro que T_t, $t \geq 0$, está bien definido pues $|e^{-nt}a_n| \leq |a_n|$, $n \in \mathbb{N}$, y por tanto $T_t(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, cuando $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. También es obvio que $\{T_t\}_{t\geq 0}$ cumple las propiedades de semigrupo y que es contractivo.

Para ver que es fuertemente continuo, fijamos $x = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $\sum_{n_0+1}^{\infty} |a_n|^2 < \varepsilon^2$. Por otro lado, como para cada $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{t\to 0}(e^{-nt} - 1) = 0$, podemos elegir $\delta > 0$ tal que $|e^{-nt} - 1| < \varepsilon$, cuando $0 < t < \delta$ y $n = 1, ..., n_0$. De esta manera , cuando $0 < t < \delta$,

$$\| T_t x - x\|_2 \leq \Big(\sum_{n=1}^{n_0} |e^{-nt} - 1|^2 |a_n|^2 + 4 \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n|^2\Big)^{1/2} \leq C\varepsilon.$$

Comprobamos ahora que el generador infinitesimal del semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es el operador $A\colon D(A) \subset X \to X$ definido por $A(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-na_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A)$ con

$$D(A) = \big\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X\colon (-na_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X\big\}.$$

Para ello tenemos en cuenta la siguiente propiedad que establecemos en la siguiente observación.

Observación 3.1. Sean X un espacio normado, y $A : D(A) \to X$ y $B : D(B) \to X$ dos operadores lineales tales que $D(B) \subseteq D(A)$ y $A_{|D(B)} = B$. Si $1 \in \rho(A) \cap \rho(B)$, entonces $D(A) = D(B)$ y, en consecuencia, $A = B$. Para probar esta afirmación, basta observar que si $x \in D(A)$, entonces $R(1, B)(I - A)x = z \in D(B)$. Luego, $(I - A)x = (I - B)z$. Dado que $A_{|D(B)} = B$ se sigue que $(I - A)x = (I - A)z$, y entonces, como $I - A$ es inyectivo se ha de cumplir que $x = z$. Se concluye así que $x \in D(B)$.

Sea B el operador definido en $D(B) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X\colon (-na_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X\}$ mediante $B((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (-na_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Afirmamos que si $x \in D(B)$, entonces $x \in D(A)$ y $Ax = Bx$. En efecto, sea $x = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A)$ tal que $\sum_{n\in\mathbb{N}} n^2|a_n|^2 < \infty$. Ya que la función $f(z) = \frac{1-e^{-z}}{z}$, $z \in (0,\infty)$, $f(0) = 1$, es acotada en $[0,\infty)$ (de hecho, $|f(z)| \leq 1$, $z \in [0,\infty)$), y que $\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{-nt}-1}{t} = -n$, $n \in \mathbb{N}$, procediendo como antes, dado $\varepsilon > 0$, existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\delta > 0$ tal que

$$\left\| \frac{T_t x - x}{t} - Bx \right\|_2 \leq \left(\sum_{n=1}^{n_0} \left| \frac{e^{-nt} - 1}{t} + n \right|^2 |a_n|^2 + 4 \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |na_n|^2 \right)^{1/2} \leq C\varepsilon, \quad 0 < t < \delta.$$

Ya que el semigrupo es C_0 y contractivo, el Teorema de Hille-Yosida asegura que $(0,\infty) \subseteq \rho(A)$. En particular $1 \in \rho(A)$. Nótese que también $1 \in \rho(B)$. Por tanto, $D(A) = D(B)$ y $A = B$.

Por otro lado, de acuerdo con la Proposición 2.12*(a)* y ya que el semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es C_0, sabemos que cuando $x \in D(A)$, $\frac{d}{dt} T_t x = T_t Ax = AT_t x$, $t \geq 0$, siendo $Ax = \frac{d}{dt} T_t x_{|t=0}$, $x \in D(A)$. Nótese que también para $x \in X$, la aplicación $t \longrightarrow T_t x$, $x \in X$, es diferenciable para $t > 0$.

Veamos para este caso particular que $\|\frac{d}{dt}T_t\|_2 \leq (te)^{-1}$, $t > 0$. Sea $x = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en ℓ^2. Argumentando como antes, se obtiene que $\frac{d}{dt}T_t x = (-ne^{-nt}a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cuando $t > 0$. Nótese que el hecho de que $t > 0$ permite llegar a esta conclusión solo bajo la hipótesis de que $x \in \ell^2$, pues la sucesión $(-ne^{-nt}a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pertenece a ℓ^2, para todo $t > 0$ y $x \in \ell^2$.

Por otro lado, como la función $f(z) = ze^{-zt}$, $z \in [0,\infty)$, tiene un máximo en $z_0 = t^{-1}$ y $f(z_0) = (t\mathrm{e})^{-1}$, si $x = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, se tiene que

$$\left\|\frac{d}{dt}T_t x\right\|_2 = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} |ne^{-nt}|^2|a_n|^2\Big)^{1/2} \leq \frac{\|x\|}{te},\ t > 0,$$

esto es, $\|\frac{d}{dt}T_t\|_2 \leq (te)^{-1}$, $t > 0$.

3.1.2. Semigrupos de traslación

Otra clase importante de semigrupos se obtienen por traslación a la derecha o a la izquierda de funciones definidas en $\mathbb{R}$. En el ejemplo que vamos a tratar consideramos el semigrupo de traslaciones a la izquierda en el espacio de las funciones uniformemente continuas y acotadas en $\mathbb{R}$.

Sea X el espacio de Banach constituido por las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotadas y uniformemente continuas en $\mathbb{R}$, con la norma del supremo, $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$.

Para cada $t \geq 0$ definimos $T_t f(x) = f(x+t)$, $x \in \mathbb{R}$, para $f \in X$. Se comprueba fácilmente que $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de operadores lineales y acotados en X que es contractivo. Más aún, $\|T_t\| = 1$.

Que es fuertemente continuo sigue de la propiedad de continuidad uniforme para las funciones en X. En efecto, sea $f \in X$. Como f es uniformemente continua, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$, para $|y - x| < \delta$. Luego, tomando $0 < t < \delta$, se tiene que $\|T_t f - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x+t) - f(x)| < \varepsilon$, y por tanto, $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo C_0 en X.

Calculamos ahora el generador infinitesimal de este semigrupo usando de nuevo la propiedad en la Observación 3.1.

Sea A el generador infinitesimal del semigrupo de traslación definido. Una función f está en $D(A)$ cuando $f \in X$ y existe el límite $\lim_{h\to 0^+} \frac{T_h f - f}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(\cdot+h) - f}{h}$ respecto a la norma del supremo.

Consideramos el operador B definido en $D(B) = \{f \in X : \text{ existe } f' \text{ y } f' \in X\}$ mediante $Bf = f'$. Afirmamos que $D(A) = D(B)$ y que $A = B$. Para probar este enunciado veamos que estamos en las condiciones de la Observación 3.1. En primer lugar nótese que $1 \in \rho(A)$ pues $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo C_0 contractivo y por tanto, en virtud del Teorema de Hille-Yosida (Teorema 2.16 *(b)*), $(0,\infty) \subseteq \rho(A)$.

Por otro lado, $1 \in \rho(B)$. En efecto, $I - B$ es inyectivo (si $f \in X$ y $(I - B)f = 0$, entonces $f = f'$, esto es, $f(x) = f(0)e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Pero como f es acotada se ha de cumplir que $f(0) = 0$. Luego $f = 0$). Además, con cálculos directos se puede comprobar que $(I - B)R(1,B) = I_X$ y $R(1,B)(I - B) = I_{D(B)}$, siendo, para cada $f \in X$,

$$R(1,B)f(s) = e^s \int_s^\infty e^{-u} f(u)du, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Tenemos, por tanto, que $1 \in \rho(A) \cap \rho(B)$, $D(B) \subseteq D(A)$ y $A_{|D(B)} = B$. Se concluye que $A = B$ y $D(A) = D(B)$, esto es, $D(A) = \{f \in X :$ existe f' y $f' \in X\}$, y $Af = f'$, $f \in D(A)$.

Para terminar señalamos que $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda > 0\}$. En efecto, ya que $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo C_0 contractivo, sabemos por la Proposición 2.22 que $\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda > 0\} \subseteq \rho(A)$. Veamos que si $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$, entonces $\lambda I - A$ no es inyectivo, y así se obtiene la igualdad que queremos. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$. Se tiene que $(\lambda I - A)f = 0$ si y solo si $\lambda f = f'$, lo que equivale a que $f(x) = f(0)e^{\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}$. Pero $|f(x)| = |f(0)|e^{\mathrm{Re}\,\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}$, y siendo $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$, $f \in X$. Luego, podemos encontrar funciones $f \in X$ no nulas de manera que $(\lambda I - A)f = 0$. Por tanto, $\lambda \notin \rho(A)$.

3.1.3. Semigrupos de difusión. Semigrupo del calor clásico

Nuestro último ejemplo pertenece a los semigrupos denominados de difusión, que son generados por operadores de la forma

$$L = \sum_{j,k=1}^n \sigma_{j,k}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

donde $\sigma_{j,k}$ y b_j son funciones continuas en $\mathbb{R}^n$ y la matriz $(\sigma_{j,k})_{j,k=1}^n$ es simétrica y no negativa.

El modelo para este tipo de operadores es el Laplaciano, $\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$. Este operador genera el semigrupo del calor clásico, que fue, sin duda, una de las principales fuentes en el desarrollo de la teoría de semigrupos.

Analizamos en esta sección el semigrupo del calor en X en dos contextos: $X = C_0(\mathbb{R}^n)$ y $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Recordamos que una función f pertenece a la clase $C_0(\mathbb{R}^n)$ si es continua y $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. Sobre $C_0(\mathbb{R}^n)$ consideramos la norma del supremo. Asimismo, el espacio de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, está constituido por las clases de equivalencia[1] de las funciones complejas medibles (Lebesgue) que son p-integrables en $\mathbb{R}^n$ y $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ es el espacio de las funciones medibles esencialmente acotadas. El espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_p$ definida por

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

y $\|f\|_\infty = \mathrm{esssup}_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|$ ([14, Theorem 3.11]).

En nuestro estudio haremos uso del conocido espacio de Schwartz, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Una función $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ pertenece a $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ si es de rápido decrecimiento, esto es, cuando para cualesquiera $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ y $m \in \mathbb{N}$, se verifica que

[1] Dos funciones son equivalentes si son iguales en casi todo punto.

$$\|f\|_{m,\alpha} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}(1+|x|)^m |D^\alpha f(x)| < \infty.$$

Aquí $D^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}$. Observamos que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$. Sobre el espacio de Schwartz se puede considerar la topología generada por la familia $\{\|\cdot\|_{m,\alpha}\}_{m\in\mathbb{N},\,\alpha\in\mathbb{N}^n}$ ([5, Proposition 8.2]), una topología más fina que la inducida por $L^p(\mathbb{R}^n)$. Por otra parte, se verifica que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, respecto a la norma $\|\cdot\|_p$, y denso en $C_0(\mathbb{R}^n)$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ (ver, por ejemplo, [5, Theorem 8.17]).

El semigrupo que vamos a analizar es un semigrupo de convolución pues se define como $T_0 = I$ y $T_t f = W_t * f$, $t > 0$, donde W_t es el núcleo del calor dado por

$$W_t(z) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|z|^2}{4t}}, \quad z \in \mathbb{R}^n.$$

Aquí, $*$ representa la convolución clásica. Sean f, g dos funciones medibles, definimos la función $f * g$ como

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy,$$

para aquellos $x \in \mathbb{R}^n$ tales que la integral existe. En el caso de que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, se tiene que $(f * g)(x)$ existe para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ y además, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y se satisface la desigualdad de Young, $\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$ ([5, §8.7]).

Otro elemento fundamental en nuestro análisis es la transformación de Fourier. Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, se define su transformada de Fourier, $\mathscr{F}(f)$, mediante

$$\mathscr{F}(f)(\eta) = \widehat{f}(\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x,\eta\rangle}\,dx, \quad \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Recogemos a continuación algunas propiedades fundamentales relativas a la transformación de Fourier que necesitamos en esta sección. Un estudio más profundo se puede encontrar en [5, Capítulo 8].

En lo que sigue, si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ y $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces z^α y $|\alpha|$ vienen dados por $z^\alpha = z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}$ y $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

Proposición 3.2. *([5, Theorem 8.22]) Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

(a) $\mathscr{F}(f) \in C_0(\mathbb{R}^n)$ (Lema de Riemann-Lebesgue).

(b) Sea $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| = k$, con $k \in \mathbb{N}$. Si $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $D^\beta f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, para $|\beta| \le k$, y $D^\beta f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, cuando $|\beta| \le k-1$, entonces $\mathscr{F}(D^\alpha f)(\eta) = (2\pi i \eta)^\alpha \widehat{f}(\eta)$, $\eta \in \mathbb{R}^d$.

(c) Si $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \le k$, entonces $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y $D^\alpha \widehat{f} = \mathscr{F}((-2\pi i x)^\alpha f)$.

(d) $\mathscr{F}(f * g) = \widehat{f}\widehat{g}$.

Probamos ahora algunas características importantes del núcleo del calor.

Proposición 3.3. *La familia $\{W_t\}_{t>0}$ verifica las siguientes propiedades:*

(a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} W_t(z)dz = 1$, $t > 0$.
(b) $W_{t+s} = W_t * W_s$, $t, s > 0$ *(Chapman-Kolmogorov).*
(c) $\partial_t W_t = \Delta W_t$, $t > 0$.
(d) $\mathscr{F}(W_t)(\eta) = e^{-4\pi^2 t|\eta|^2}$, $\eta \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. *(a)* Sea $t > 0$. Teniendo en cuenta que $W_t(z) = (4\pi t)^{-n/2} \prod_{k=1}^n e^{-z_k^2/(4t)}$, $z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} W_t(z)dz = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \Big(\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-r^2}{4t}} dr \Big)^n = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \Big(2\sqrt{t} \int_0^\infty e^{-u} u^{-1/2} du \Big)^n = 1.$$

Fijamos ahora $t, s > 0$. La prueba de *(b)* se basa en la siguiente igualdad, que puede justificarse de manera directa:

$$\frac{|x-y|^2}{4t} + \frac{|y|^2}{4s} = \frac{|x|^2}{4(t+s)} + \frac{t+s}{4ts} \Big| y - \frac{s}{t+s} x \Big|^2, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Podemos escribir entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} W_t(x-y) W_s(y) dy &= \frac{1}{(4\pi)^n (ts)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4(t+s)}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{t+s}{4ts}|y - \frac{s}{t+s}x|^2} dy \\ &= \frac{1}{(4\pi)^n (ts)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4(t+s)}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{t+s}{4ts}|z|^2} dz \\ &= \frac{1}{(4\pi)^n (ts)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4(t+s)}} \left(\frac{4\pi ts}{t+s} \right)^{n/2} = W_{t+s}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

La igualdad en *(c)* nos dice que W_t es solución de la ecuación del calor homogénea $\partial_t u(x,t) = \Delta u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Además satisface $\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)dx = 1$, $t > 0$, y es invariante respecto a ciertas dilataciones, en concreto, que $u(x,t) = \lambda^{n/2} u(\sqrt{\lambda}x, \lambda t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, t > 0$.

Teniendo en cuenta estas condiciones y tomando $\lambda = t^{-1}$, se sigue que $u(x,t)$ ha de ser de la forma $u(x,t) = t^{-n/2} v(\frac{x}{\sqrt{t}})$ para cierta función $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica la ecuación $2\Delta v(y) + \langle y, \nabla v(y) \rangle + nv(y) = 0$.

Buscamos entonces soluciones radiales de esta ecuación, es decir, funciones de la forma $v(y) = w(|y|)$, $y \in \mathbb{R}^n$, para alguna función $w \colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Entonces, w ha de satisfacer la ecuación diferencial $nw(r) + rw'(r) + 2w''(r) + 2\frac{n-1}{r} w'(r) = 0$. Multiplicando por r^{n-1}, esta ecuación se transforma en $(r^n w + 2r^{n-1} w')' = 0$, esto es, $2w'(r) = -rw(r)$, cuya solución viene dada por $w(r) = be^{-r^2/4}$, $r \in (0,\infty)$, para cierta constante b. Teniendo en cuenta la condición $\int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)dx = 1$, se obtiene que $b = (4\pi t)^{-n/2}$ y de esta forma, $u(x,t) = W_t(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$, es la solución buscada (llamada la *solución fundamental de la ecuación del calor* o *núcleo de Gauss*).

Finalmente, establecemos la propiedad *(d)*. Sean $t > 0$ y $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n) \in \mathbb{R}^n$. Observamos que $\mathscr{F}(W_t)(\eta) = (4\pi t)^{-n/2} \prod_{k=1}^n \mathscr{F}_1(e^{u^2/(4t)})(\eta_k)$, donde $\mathscr{F}_1$ representa la transformación de Fourier 1-dimensional.

Consideramos la función gaussiana $g(u) = e^{-\frac{u^2}{4t}}$, $u \in \mathbb{R}$, y denotamos por G su transformada de Fourier, esto es,

$$G(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(u) e^{-2\pi i \xi u} du, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Es directo ver que $2tg'(u) = -ug(u)$, $u \in \mathbb{R}$. Aplicando la transformación de Fourier y usando las propiedades de la Proposición 3.2 *(b)* y *(c)* se obtiene que G verifica la ecuación diferencial $G'(\xi) = -8\pi^2 t\xi G(\xi)$. De esta forma, $G(\xi) = G(0)e^{-4\pi^2 t\xi^2}$, $\xi \in \mathbb{R}$, siendo

$$G(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{4t}} du = \sqrt{4\pi t}.$$

Entonces, $G(\xi) = \sqrt{4\pi t} e^{-4\pi^2 t\xi^2}$, $\xi \in \mathbb{R}$, y por tanto, $\mathscr{F}(W_t)(\eta) = e^{-4\pi^2 t|\eta|^2}$, $\eta \in \mathbb{R}^n$. □

A continuación vamos a mostrar que $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo C_0 en cada uno de los espacios X que mencionamos al comienzo. Primero debemos verificar que $T_t \in L(X)$, $t \geq 0$. Es claro que son operadores lineales. Veamos que son acotados en X.

Proposición 3.4. *Supongamos que $(X, \|\cdot\|)$ es alguno de los espacios de Banach $(C_0(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ ó bien $(L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < \infty$. Para cada $t \geq 0$, $T_t \in L(X)$.*

Demostración. Es claro para $t = 0$. Para cada $t > 0$, señalamos en primer lugar que T_t está bien definido, pues por la Proposición 3.3 *(a)* se tiene que $|T_t f(x)| \leq \|f\|_\infty$, $x \in \mathbb{R}^n$, cuando f pertenece a $C_0(\mathbb{R}^n)$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, en virtud de la desigualdad de Hölder se sigue que $|T_t f(x)| \leq \|f\|_p \|W_t\|_{p'}$, $x \in \mathbb{R}^n$, siendo p' el exponente conjugado de p. En el caso de que $p = 1$ es claro que $|T_t f(x)| \leq \|f\|_1 \|W_t\|_\infty$, $x \in \mathbb{R}^n$. Dado que $\|W_t\|_q < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, se concluye que $|T_t f(x)| < \infty$, $x \in \mathbb{R}^n$, para cualquier función $f \in X$.

Fijamos $t > 0$. Veamos ahora que $T_t \in L(X)$.
Supongamos primero que $X = L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Como antes, ya que $\|W_t\|_1 = 1$, en virtud de la desigualdad de Young ([5, §8.7]) podemos asegurar que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces $T_t f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $\|T_t f\|_p \leq \|W_t\|_1 \|f\|_p = \|f\|_p$.
Consideramos ahora $X = (C_0(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$. Es claro que $\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Entonces, basta demostrar que $T_t(C_0(\mathbb{R}^n)) \subseteq C_0(\mathbb{R}^n)$.

Nótese que $C_0(\mathbb{R}^n)$ es un subespacio de la clase constituida por las funciones uniformemente continuas y acotadas en $\mathbb{R}^n$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$, $|x| \geq R$. Por otro lado, como f es continua en $\mathbb{R}$, se tiene que f es uniformemente continua en $K = \overline{B(0,R)}$. Entonces, podemos encontrar $\delta_\varepsilon > 0$ de manera que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ cuando $x, y \in K$ y $|x - y| < \delta_\varepsilon$. Deducimos que, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$, tales que $|x - y| < \delta_\epsilon$ se tiene que $|f(x) - f(y)| < 3\varepsilon$, pues, si $x, y \in K$ es claro y si $x, y \notin K$ entonces $|f(x) - f(y)| < 2\epsilon$. Cuando $x \in K$, $y \notin K$, tomamos $z \in \mathbb{R}^n$ tal que $|z| = R$ y $\max\{|x - z|, |z - y|\} < \delta_\epsilon$, entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| < 3\epsilon.$$

También se tiene que $T_t f$, $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$. Basta tener en cuenta la propiedad *(a)* de la Proposición 3.3, que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$, y que

$$|T_t f(x) - T_t f(y)| \le \int_{\mathbb{R}^n} W_t(z)|f(x-z) - f(y-z)|dz, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Veamos para terminar que $\lim_{|x|\to\infty} T_t f(x) = 0$. Sea $\varepsilon > 0$ y $R > 0$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$, $|x| \ge R$. Entonces, usando de nuevo la Proposición 3.3 *(a)*, llegamos a que

$$\begin{aligned} |T_t f(x)| &\le \int_{|z|<R} W_t(x-z)|f(z)|dz + \int_{|z|\ge R} W_t(x-z)|f(z)|dz \\ &\le \int_{|z|<R} W_t(x-z)|f(z)|dz + \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Observamos ahora que si $|x| \ge 2R$ y $|z| < R$ entonces $|x-z| \ge |x| - R > 0$, y así, cuando $|x| \ge 2R$ obtenemos la estimación

$$\int_{|z|<R} W_t(x-z)|f(z)|dz \le \frac{\|f\|_\infty |B(0,R)|}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{(|x|-R)^2}{4t}}.$$

Por tanto, podemos elegir $M \ge 2R$ suficientemente grande de manera que $\int_{|z|<R} W_t(x-z)|f(z)|dz < \varepsilon$, cuando $|x| > M$. Y así, $|T_t f(x)| < 2\varepsilon$, cuando $|x| > M$.

□

Observación 3.5. Señalamos que $(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p)$, $1 \le p < \infty$, no es un espacio de Banach, aunque dado que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$, se cumple que $\|T_t f\|_p \le \|f\|_p$, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$. También podemos ver que la clase de Schwartz es invariante por $\{T_t\}_{t\ge0}$, esto es, $T_t(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)) \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.
Sean $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $m \in \mathbb{N}$ y $t > 0$. Puesto que $D^\alpha(W_t * f)(x) = (W_t * D^\alpha f)(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ ([5, Proposition 8.10]), y $D^\alpha f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, se tiene que

$$\begin{aligned} (1+|x|)^m |D^\alpha(W_t * f)(x)| &\le \int_{\mathbb{R}^n} W_t(y)(1+|y|+|x-y|)^m |(D^\alpha f)(x-y)|dy \\ &\le C \int_{\mathbb{R}^n} W_t(y)(|y|^m + 1)dy = C_{m,\alpha,t} < \infty, \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

para cierta $C_{m,\alpha,t}$ que no depende de $x \in \mathbb{R}^n$. Luego, $\|W_t * f\|_{m,\alpha} < \infty$, por lo que $W_t * f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

□

Hemos probado que si $X = C_0(\mathbb{R}^n)$ ó $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, entonces $\{T_t\}_{t\ge0} \subset L(X)$ y $\|T_t\|_{L(X)} \le 1$, $t \ge 0$. Por definición $T_0 = I$ y, haciendo uso del Teorema de Fubini y de la propiedad *(b)* de la Proposición 3.3 se obtiene que, para cada $t, s > 0$,

$$\begin{aligned} T_t(T_s f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} W_t(x-y) W_s(y-z) f(z) dz dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} W_t(x-z-u) W_s(u) du f(z) dz \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} W_{t+s}(x-z)f(z)dz = T_{t+s}f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Esto implica que $\{T_t\}_{t\geq 0}$ verifica las propiedades de semigrupo.

El último paso será demostrar que $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo C_0 en X. Lo hacemos en la siguiente proposición.

Proposición 3.6. $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *es un semigrupo fuertemente continuo y contractivo en* X *cuando* $X = (C_0(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ *o bien,* $X = (L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Ya hemos visto que $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo contractivo en X. Así que solo queda probar que es C_0.

Consideramos primero $X = (C_0(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$. Sea $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Como vimos anteriormente, f es entonces uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$, cuando $|x-y| < \delta$. Usando que $\int_{\mathbb{R}^n} W_t(z)dz = 1$, $t > 0$, se sigue que

$$\begin{aligned}
|T_t f(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} W_t(x-y)(f(y)-f(x))dy \right| \\
&\leq \varepsilon \int_{|y-x|<\delta} W_t(x-y)dy + 2\|f\|_\infty \int_{|x-y|>\delta} W_t(x-y)dy \\
&\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \int_{|z|>\delta} \frac{e^{-\frac{|z|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} dz, \quad t > 0.
\end{aligned}$$

Aplicando el cambio de variables a coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} \int_{|z|>\delta} e^{-\frac{|z|^2}{4t}} dz = \frac{w_{n-1}}{t^{\frac{n}{2}}} \int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{n-1} dr = 2^{n-1} w_{n-1} \int_{\frac{\delta^2}{4t}}^\infty e^{-u} u^{\frac{n}{2}-1} du.$$

Aquí, w_{n-1} representa el área de superficie de la esfera n-dimensional que viene dada por

$$w_{n-1} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \overset{(n-2)}{\cdots} \int_0^\pi \prod_{k=1}^{n-2} (\operatorname{sen}\phi_k)^{n-k-1} d\phi_1 \dots d\phi_{n-2} d\theta = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(n/2)}.$$

Teniendo en cuenta que $\int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{n}{2}-1} du = \Gamma(n/2) < \infty$, podemos elegir $t_0 > 0$, de manera que

$$\int_{\frac{\delta^2}{4t}}^\infty e^{-u} u^{\frac{n}{2}-1} du < \varepsilon, \quad 0 < t < t_0.$$

Luego, $\|T_t f - f\|_\infty < c\varepsilon$, para $t \in (0, t_0)$, con $c > 0$ independiente de ε, y se concluye que $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo.

Analizamos ahora la propiedad para $X = (L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < \infty$. Fijamos $1 \leq p < \infty$ y consideramos $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Usando de nuevo la propiedad *(a)* de la Proposición 3.3 podemos escribir para cada $x \in \mathbb{R}^n$,

$$
\begin{aligned}
|T_t f(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} W_t(y)(f(x-y) - f(x))\,dy \right| \\
&\leq \int_{|y|\leq\sigma} W_t(y)|f(x-y) - f(x)|\,dy + \int_{|y|>\sigma} W_t(y)|f(x-y) - f(x)|\,dy,
\end{aligned}
$$

donde $\sigma > 0$ es un valor que será elegido después de manera adecuada. Aplicando las propiedades de la norma y la desigualdad integral de Minkowski (Lema 1.11),

$$
\begin{aligned}
\|T_t f - f\|_p &\leq \int_{|y|\leq\sigma} W_t(y) \left\| f(\cdot - y) - f \right\|_p dy + \int_{|y|>\sigma} W_t(y) \left\| f(\cdot - y) - f \right\|_p dy \\
&\leq \int_{|y|\leq\sigma} W_t(y) \left\| f(\cdot - y) - f \right\|_p dy + 2\|f\|_p \int_{|y|>\sigma} W_t(y)\,dy, \quad \sigma > 0. \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

Sea $\varepsilon > 0$. Nuestro objetivo es elegir $\sigma > 0$ adecuado para que $\|T_t f - f\|_p < \varepsilon$, cuando $t \in (0, t_0)$, para cierto $t_0 > 0$.
Afirmamos que existe $\delta > 0$ tal que $\left\| f(\cdot - y) - f \right\|_p \leq c\varepsilon$ cuando $|y| < \delta$, para cierta constante $c > 0$ independiente de ε. Para probar este hecho, tenemos en cuenta primero que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Podemos escoger una función $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - g\|_p < \varepsilon$ y se tiene que

$$
\begin{aligned}
\|f(\cdot - y) - f\|_p &\leq \|f(\cdot - y) - g(\cdot - y)\|_p + \|g(\cdot - y) - g\|_p + \|f - g\|_p \\
&< 2\varepsilon + \|g(\cdot - y) - g\|_p, \quad y \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}
$$

Por tanto, basta demostrar nuestra afirmación para las funciones en $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Supongamos que $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y que su soporte está contenido en $B(0, r)$, para cierto $r > 0$. Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, $|y| \leq 1$, consideramos la función $h_y(x) = g(x-y) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Observamos que h_y tiene soporte en $B(0, r+1)$, y que

$$
|h_y(x)| \leq H(x) = 2\|g\|_\infty \mathscr{X}_{B(0,r+1)}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,
$$

para cualquier $y \in \mathbb{R}^n$, $|y| \leq 1$. Nótese que $H \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Además, como g es continua en $\mathbb{R}^n$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $h_y(x) \longrightarrow 0$, cuando $|y| \to 0$. De esta forma, para cualquier sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $B(0,1)$ tal que $|y_n| \longrightarrow 0$, $n \to \infty$, tenemos, en virtud del Teorema de la convergencia dominada, que

$$
\lim_{n\to\infty} \int_{B(0,r+1)} |g(x - y_n) - g(x)|^p\,dx = \int_{B(0,r+1)} \lim_{n\to\infty} |h_{y_n}(x)|^p\,dx = 0.
$$

Podemos entonces elegir $\delta > 0$ tal que $\|g(\cdot - y) - g\|_p < \varepsilon$, $|y| < \delta$, y nuestra afirmación queda probada.

Tomando entonces $\sigma = \delta$ en (3.1) y haciendo el cambio de variable a coordenadas esféricas en la segunda integral se sigue que

$$\|T_t f - f\|_p \le C\left(\varepsilon + \frac{1}{t^{n/2}}\int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{n-1}dr\right) = C\left(\varepsilon + \int_{\delta^2/(4t)}^\infty e^{-u}u^{\frac{n}{2}-1}du\right), \quad t>0.$$

Como antes, podemos tomar $t_0 > 0$ de manera $\|T_t f - f\|_p < \varepsilon$, para todo $t \in (0, t_0)$. Y así queda probado que $\{T_t\}_{t\ge0}$ es un semigrupo fuertemente continuo en $(L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p)$. $\square$

Hemos establecido que $\{T_t\}_{t\ge0}$, siendo $T_0 = I$ y $T_t f = W_t * f$, con $f \in X$ y $X = (C_0(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$, ó $X = (L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p)$, $1 \le p < \infty$, es un semigrupo de operadores lineales y acotados en X fuertemente continuo y contractivo. Según el Teorema de Hille-Yosida (Teorema 2.16) así como las propiedades en la Proposición 2.22, si A es el generador infinitesimal del semigrupo $\{T_t\}_{t\ge0}$, entonces $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subseteq \rho(A)$ y $\|\operatorname{Re}\lambda R(\lambda, A)\| \le 1$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, donde $\|\cdot\|$ representa la norma $\|\cdot\|_p$, $1 \le p \le \infty$, según el contexto considerado.

Además, por la Proposición 2.21, se cumple que

$$T_t f = \lim_{\lambda\to\infty} e^{t\lambda AR(\lambda,A)} f, \quad f \in X,$$

entendiendo este límite en la norma $\|\cdot\|$ del espacio X correspondiente, siendo uniforme en $[0, T]$, para cualquier $T > 0$.

Para finalizar esta sección veamos qué podemos decir del generador infinitesimal del semigrupo del calor estudiado. Como antes, representamos por $(X, \|\cdot\|)$ cualquiera de los espacios $(C_0(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ ó $(L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p)$, $1 \le p < \infty$. Sea $(A, D(A))$ el generador infinitesimal del semigrupo del calor $\{T_t\}_{t\ge0}$ en X. Sabemos que

$$Af = \lim_{t\to0^+} \frac{W_t * f - f}{t}, \quad f \in D(A),$$

donde entendemos el límite en la norma $\|\cdot\|$ del espacio X, siendo $D(A)$ el subespacio de las funciones en X para las que existe este límite.

Veamos que si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces $f \in D(A)$ y $Af = \Delta f$, donde Δ es el operador laplaciano, $\Delta = \sum_{k=1}^n \partial_{x_k}^2$. Haremos uso de la transformación de Fourier, pues $\mathscr{F}$ es un isomorfismo de la clase de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo cuando consideramos la topología generada por la familia $\{\|\cdot\|_{m,\alpha}\}_{m\in\mathbb{N},\alpha\in\mathbb{N}^n}$ ([5, Corollary 8.28]).

Sea $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Teniendo en cuenta las propiedades en la Proposición 3.2 *(d)* y la Proposición 3.3 *(d)* se sigue que, para todo $t \ge 0$, $\mathscr{F}(T_t f)(\eta) = \widehat{T}_t \widehat{f}$, donde

$$(\widehat{T}_t F)(\eta) = e^{-4\pi^2 t|\eta|^2} F(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}^n,$$

para cada $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Nótese que de acuerdo con la sección 3.1.1, $\{\widehat{T}_t\}_{t\ge0}$ se trata de un semigrupo multiplicativo en X, asociado a la función $q(\eta) = -4\pi^2|\eta|^2$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, que es continua y verifica $\sup_{\eta\in\mathbb{R}^n} \operatorname{Re} q(\eta) = 0$.

Vamos a demostrar que, para cada $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, se tiene que

$$\lim_{t\to0^+} \frac{\hat{T}_t F(\eta) - F(\eta)}{t} = -4\pi^2|\eta|^2 F(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}^n, \tag{3.2}$$

en la topología de la clase $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, esto es, dado $\varepsilon > 0$, existe $t_0 > 0$ de manera que, para todo $m \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \mathbb{N}^n$,

$$\left\| \Big(\frac{1 - e^{-4\pi^2 t|\eta|^2}}{t} - 4\pi^2 |\eta|^2 \Big) F \right\|_{m,\alpha} < \varepsilon, \quad t \in (0, t_0).$$

Es más, puesto que $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, basta probar que dado $\varepsilon > 0$, existe $t_0 > 0$ tal que para cualquier $\alpha \in \mathbb{N}^n$, existe $m_\alpha \in \mathbb{N}$ de manera que, para $\eta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$|D_\eta^\alpha G_t(\eta)| \le C\varepsilon (1 + |\eta|)^{m_\alpha}, \quad t \in (0, t_0), \tag{3.3}$$

con C independiente de ε y η. Aquí, para $t > 0$, $G_t(\eta) = \frac{1 - e^{-4\pi^2 t|\eta|^2}}{t} - 4\pi^2 |\eta|^2$, $\eta \in \mathbb{R}^n$. Observamos que, en virtud de la expresión de G_t, $t > 0$, el problema se reduce a establecer la estimación (3.3) en el caso unidimensional.

Sea $t > 0$. Ya que[2] $|G_t(\eta)| \le C t \eta^2$, $\eta \in \mathbb{R}$, siendo $C > 0$ independiente de t y η, la estimación (3.3) se tiene para $\alpha = 0$. Asimismo, cálculos directos conducen a que

$$|G_t'(\eta)| + |G_t''(\eta)| \le C\big((1 + |\eta|)(1 - e^{-4\pi^2 t\eta^2}) + t\eta^2\big) \le C t (1 + |\eta|)^3, \quad \eta \in \mathbb{R}.$$

Cuando $k \ge 3$, $\frac{d^k}{d\eta^k} G_t(\eta) = \frac{1}{t} \frac{d^k}{d\eta^k}(e^{-4\pi^2 t\eta^2})$ y usando la fórmula de Faà di Bruno ([10]) se tiene que, para ciertas constantes $a_{k,m}$, $m \in \mathbb{N}$, $0 \le m \le k/2$,

$$\frac{d^k}{d\eta^k} G_t(\eta) = \sum_{\substack{0 \le m \le k/2 \\ m \in \mathbb{N}}} a_{k,m} \eta^{k-2m} t^{k-m-1} e^{-4\pi^2 t\eta^2}, \quad \eta \in \mathbb{R}.$$

Entonces $|\frac{d^k}{d\eta^k} G_t(\eta)| \le C t (1 + |\eta|)^k$, para $\eta \in \mathbb{R}$ y $t \in (0, 1)$, cuando $k \ge 3$. De esta forma queda establecida la estimación (3.3), y por tanto también la propiedad (3.2). Teniendo en cuenta entonces que la transformación de Fourier es un isomorfismo en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, y usando de nuevo las propiedades en la Proposiciones 3.2 y 3.3 se obtiene que

$$Af = \lim_{t \to 0^+} \frac{W_t * f - f}{t} = \Delta f, \quad f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n),$$

en la topología de la clase de Schwartz, y así, también respecto a la norma $\|\cdot\|_p$.

Hemos obtenido una expresión para el generador infinitesimal A para un subespacio denso en X, en concreto $A = \Delta$ en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Como ocurre en muchos ejemplos, identificar completamente el dominio $D(A)$ puede no resultar fácil. Para tratar por ejemplo el caso $X = L^p(\mathbb{R}^n)$ debemos introducir el concepto de derivada distribucional, lo que no entra dentro de los objetivos de esta memoria. Sin embargo, en estas situaciones, podemos considerar la noción de *núcleo* que distingue entre “pequeños" y “grandes" subespacios de $D(A)$.

[2] La función $g_a(x) = (ax - 1 + e^{-ax})/(ax^2)$, $x \in (0, \infty)$, $(a > 0)$, es una función decreciente en $(0, \infty)$ tal que $\lim_{x \to 0^+} g_a(x) = a/2$ y $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$.

Decimos que un subespacio D de $D(A)$ es un *núcleo* para A si D es denso en $D(A)$ con respecto a la norma del grafo, $\|x\|_A = \|x\| + \|Ax\|$.

En nuestro caso, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es un núcleo para el generador infinitesimal A de los semigrupos $(C_0(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ y $(L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p)$, $1 \le p < \infty$. Este hecho se deduce del siguiente resultado general.

Proposición 3.7. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $(A, D(A))$ el generador infinitesimal de un semigrupo $\{T_t\}_{t\ge 0}$ fuertemente continuo. Supongamos que D es un subespacio de $D(A)$ que es $\|\cdot\|$-denso en X e invariante por el semigrupo $\{T_t\}_{t\ge 0}$. Entonces D es un núcleo para A.*

Demostración. Sea $x \in D(A)$. Veamos que existe una sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ de manera que

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n - x\| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \|Az_n - Ax\| = 0.$$

Como D es denso en X, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ tal que $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ la aplicación $t \to T_t x_n$ es continua respecto a la norma del grafo. Basta tener en cuenta que es continua respecto a $\|\cdot\|$ y que, por la Proposición 2.12 *(a)*, dado que $x_n \in D(A)$, se verifica $AT_t x_n = T_t A x_n$. Entonces, para cada $t > 0$, la integral $\int_0^t T_s x_n ds$, $n \in \mathbb{N}$, se define en sentido Riemann, y de esta forma, es un elemento en la clausura de D, respecto a la norma del grafo.

Por otro lado, se tiene que

$$\lim_{t\to 0^+} \left\| \frac{1}{t}\int_0^t T_s x ds - x \right\|_A = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{t}\int_0^t T_s x_n ds - \frac{1}{t}\int_0^t T_s x ds \right\|_A = 0,\ t > 0.$$

Para el primer límite es suficiente considerar la Proposición 2.12 *(b)* y *(c)* y que $x \in D(A)$, y para el segundo, además, que $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$.

Así, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $t_0 > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que

$$\left\| \frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} T_s x_n ds - x \right\|_A < \varepsilon,\ n \ge n_0.$$

Ya que $\frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} T_s x_n ds \in \overline{D}^{\|\cdot\|_A}$, se concluye que también $x \in \overline{D}^{\|\cdot\|_A}$. □

En virtud de este resultado, y puesto que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $(C_0(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ y en $(L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p)$, $1 \le p < \infty$, e invariante por el semigrupo (ver Observación 3.5), se deduce que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ es un núcleo para el generador infinitesimal A.

3.2. Algunas aplicaciones

En esta última sección analizamos dos cuestiones que ilustran la potencia de la teoría de semigrupos para abordar algunos problemas.

3.2.1. Desigualdad de Landau-Kallman-Rota

En 1913 Landau probó la siguiente desigualdad para funciones $f \in C([0,\infty))$, dos veces diferenciables,

$$\|f'\|_\infty^2 \leq 4\|f\|_\infty \|f''\|_\infty,$$

que encierra la idea de que si una función y su segunda derivada son “pequeñas”, entonces la derivada primera es “pequeña”. Dos décadas más tarde Hardy, Landau y Littlewood extendieron esta desigualdad al considerar $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p < \infty$. De forma precisa, encontraron que si $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función dos veces diferenciable y $f, f'' \in L^p((0,\infty))$, entonces $f' \in L^p((0,\infty))$ y

$$\|f'\|_p^2 \leq c_p \|f\|_p \|f''\|_p,$$

donde la mejor constante c_p verifica $c_p \leq 4$ y siendo $c_2 = 4$. En 1939, Kolmogorov generalizó la desigualdad de Landau para funciones definidas en $\mathbb{R}$, mostrando que, dado $m \in \mathbb{N}$, si f es una función m veces diferenciable, entonces, si $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k < n$,

$$\|f^{(k)}\|_\infty^m \leq C(m,k)\|f\|_\infty^{m-k} \|f^{(m)}\|_\infty^k.$$

Kolmogorov también determinó las mejores contantes $C(m,k)$ en términos de las constantes de Favard,

$$a_m = \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^j}{2j+1}\right)^{m+1}, \text{ siendo } C(m,k) = a_{m-k}a_m^{-1+k/m}.$$

En 1970 los matemáticos Kallman y Rota ([11]) encontraron la raíz de la desigualdad de Landau y la generalizaron ampliamente al contexto de los semigrupos contractivos. Como veremos, la desigualdad de Landau se deduce entonces fácilmente de la propiedad de Kallman y Rota.

Consideramos el resultado de Kallman y Rota para semigrupos uniformemente acotados. Otras extensiones y propiedades en semigrupos C_0 bajo diferentes restricciones se pueden encontrar por ejemplo en los trabajos [3], [8] y [12].

Proposición 3.8. *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un semigrupo C_0 en X, tal que $\|T_t\| \leq M$, $t \geq 0$, para cierta $M \geq 1$, y A su generador infinitesimal. Se verifica*

$$\|Ax\|^2 \leq 4M^2\|x\|\|A^2x\|, \quad x \in D(A^2). \tag{3.4}$$

Demostración. Sea $x \in D(A^2)$, esto es, $x \in D(A)$ y $Ax \in D(A)$. Podemos suponer $x \neq 0$, pues en caso contrario la desigualdad es trivial. De la Proposición 2.12 *(a)*, *(d)* se obtiene que

$$T_t x - x = tAx + \int_0^t (t-s)T_s A^2 x\,ds, \quad t > 0.$$

Luego, despejando y tomando normas se sigue que

$$\begin{aligned}
\|Ax\| &\leq \frac{1}{t}\left(\|T_t\|\|x\| + \|x\| + \int_0^t (t-s)\|T_s\|\|A^2x\|ds\right) \\
&\leq \frac{1}{t}\left(M\|x\| + \|x\| + M\|A^2x\|\int_0^t (t-s)ds\right) \\
&\leq \frac{2M\|x\|}{t} + \frac{tM\|A^2x\|}{2}, \quad t > 0.
\end{aligned}$$

Si $\|A^2x\| = 0$, entonces se tiene que $\|Ax\| \leq \frac{2M\|x\|}{t}$, $t > 0$, y por tanto $\|Ax\| = 0$ y se cumple (3.4). Si $\|A^2x\| \neq 0$, basta tomar $t = \frac{2\sqrt{\|x\|}}{\sqrt{\|A^2x\|}}$, en la desigualdad anterior y también se deduce (3.4). Nótese que este valor de t es el que minimiza la última expresión en la cadena de desigualdades anterior. □

Veamos que la desigualdad de Landau se puede obtener como caso particular de este resultado. Consideramos el espacio X constituido por las funciones definidas en $\mathbb{R}$ que son uniformemente continuas y acotadas, y dotado con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Sea $\{T_t\}_{t\geq 0}$ la familia de operadores en $L(X)$ definidos como $T_tf(x) = f(x+t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$. En la sección 3.1.2 vimos que $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo y contractivo en X, y que su generador infinitesimal A tiene dominio $D(A) = \{f \in X : \text{existe } f' \text{ y } f' \in X\}$ y viene dado por $Af = f'$, $f \in D(A)$. Por tanto, de la Proposición 3.8 se infiere que si $f \in X$ verifica que $f'' \in X$, entonces

$$\|f'\|_\infty^2 \leq 4\|f\|_\infty\|f''\|_\infty.$$

Si consideramos el semigrupo de traslación en $X = L^p((0,\infty))$, $1 \leq p < \infty$, se obtiene la desigualdad de Hardy-Landau-Littlewood mencionada anteriormente. Asimismo, podemos conseguir otras desigualdades de este tipo con otro semigrupos contractivos. Por ejemplo, si $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es el semigrupo del calor clásico que tratamos en la sección 3.1.3 y $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ es tal que $\Delta^2 f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\|\Delta f\|_\infty \leq 4\|f\|_\infty\|\Delta^2 f\|_\infty.$$

De la misma forma, si f y $\Delta f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$, entonces $\|\Delta f\|_p \leq 4\|f\|_p\|\Delta^2 f\|_p$.

Observación 3.9. En este tipo de desigualdades obtener la mejor constante es una de las cuestiones que también interesa a los investigadores. La constante 4 que se ha conseguido en las desigualdades anteriores no es, en general, la mejor cota. Por ejemplo, Korepa observó (ver [8]) que se tiene la desigualdad anterior con $\frac{4}{3}$ en lugar de 4, para $1 \leq p < \infty$, esto es, $\|f''\|_p^2 \leq \frac{4}{3}\|f\|_p\|f^{(4)}\|_p$.

3.2.2. Ecuación de Cauchy abstracta

La teoría de semigrupos y, en particular el Teorema de Hille-Yosida, constituyen una potente herramienta para abordar ciertos problemas del campo de las ecuaciones en derivadas parciales, proporcionando un método eficaz y elegante para probar la existencia y unicidad de soluciones en problemas que son difíciles de tratar con los procedimientos clásicos. Para ilustrar este aspecto de los semigrupos analizamos el problema de Cauchy abstracto.

Sean X un espacio de Banach y $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ un operador lineal. Dado $x \in X$, el *problema de Cauchy abstracto con valor inicial* x (ACP) consiste en encontrar una solución $u : [0,\infty) \longrightarrow X$ al problema

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}u(t) = Au(t), \quad t > 0, \\ &u(0) = x. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Que u sea solución de este problema significa que la aplicación $t \longrightarrow u(t)$, es continuamente diferenciable, que $u(t) \in D(A)$, $t \geq 0$, y que se verifica (3.5).

Diremos que el problema está *bien planteado* cuando $\rho(A) \neq \emptyset$ y, para cada $x \in D(A)$ existe una única solución del problema (3.5). Veamos que estar bien planteado supone, además de existencia y unicidad, una dependencia continua con el dato inicial.

Teorema 3.10. *Sean X un espacio de Banach y $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow X$ un operador lineal cerrado. El problema (ACP) está bien planteado si, y solo si, A es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 en X.*

Demostración. Supongamos primero que A genera un semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ que es C_0 en X. Entonces, por el Teorema de Hille-Yosida (Teorema 2.20) y la Proposición 2.12 *(a)* se tiene que $\rho(A) \neq \emptyset$ y, para cada $x \in D(A)$, $T_t x \in D(A)$, $t \geq 0$, la aplicación $t \to T_t x$ es diferenciable y

$$\frac{d}{dt}T_t x = T_t Ax = AT_t x. \tag{3.6}$$

Entonces, $u(t) = T_t x$, $t \geq 0$ es solución del problema (ACP). Veamos que es única, y de esta forma podemos concluir que el problema está bien planteado.
Supongamos que v es otra solución de la ecuación (ACP). Para cada $0 \leq s \leq t < \infty$ se tiene que $v(s) \in D(A)$ y, en virtud de (3.6),

$$\frac{d}{ds}T_{t-s}v(s) = -\Big(\frac{d}{du}T_u\Big)_{|u=t-s}v(s) + T_{t-s}\frac{d}{ds}v(s) = -T_{t-s}Av(s) + T_{t-s}Av(s) = 0.$$

Entonces, $T_{t-s}v(s)$ es independiente de s. Considerando $s = 0$ y $s = t$ se obtiene que $T_t v(0) = T_0 v(t)$, $t \geq 0$, esto es, $T_t x = v(t)$ y se infiere que $v = u$.

Asumimos ahora que el problema (ACP) está bien planteado. Nuestro objetivo es encontrar un semigrupo C_0 en X cuyo generador sea A. Para ello, probamos en primer lugar que para todo $x \in X$ existe una única *solución débil de (ACP) con valor inicial* x, es decir, existe una única aplicación $v : [0,\infty) \longrightarrow X$ continua tal que, para cada $t \geq 0$,

$$\int_0^t v(s)ds \in D(A) \quad \text{y} \quad v(t) = x + A\Big(\int_0^t v(s)ds\Big). \tag{3.7}$$

Sea $x \in X$. Ya que $\rho(A) \neq \emptyset$, elegimos $\lambda_0 \in \rho(A)$ y consideramos $y = R(\lambda_0, A)x \in D(A)$. Por hipótesis, existe una única solución de (ACP) con valor inicial y que denotamos por u_y. Definimos $v(t) = (\lambda I - A)u_y(t)$, $t \geq 0$. Veamos que v es la aplicación que estamos buscando.
Es fácil ver que v es una solución débil con valor inicial x. Nótese que

$$\int_0^t v(s)ds = \lambda \int_0^t u_y(s)ds - \int_0^t \frac{d}{ds} u_y(s)ds = \lambda \int_0^t u_y(s)ds - u_y(t) + y.$$

Luego, $\int_0^t v(s)ds \in D(A)$ y, al ser A cerrado,

$$A\Big(\int_0^t v(s)ds\Big) = \lambda \int_0^t Au_y(s)ds - Au_y(t) + Ay = (\lambda I - A)(u_y(t) - y) = v(t) - x.$$

Para establecer que v es única, supongamos que w es otra solución débil con valor inicial x. Entonces, $u(t) - w(t) = A(\int_0^t (u(s) - w(s))ds)$, $t \geq 0$ y $u(0) = w(0)$. Luego $V(t) = \int_0^t (v(s) - w(s))ds$, $t \geq 0$, es una solución del problema (ACP)con valor inicial 0. La unicidad de soluciones del problema (ACP) conduce a que $V = 0$, y por tanto, $v = w$. Queda establecida así la propiedad (3.7).
Observamos que de (3.7) se sigue que $D(A)$ es denso en X. En efecto, si $x \in X$, podemos tomar v como en (3.7) y $x_n = n\int_0^{1/n} v(s)ds$, $n \in \mathbb{N}$. De esta forma, se cumple que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ y $x_n \longrightarrow v(0) = x$, cuando $n \to \infty$.

Por otro lado afirmamos que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ y u_n, $n \in \mathbb{N}$, representa la única solución del problema (ACP) con valor inicial x_n, entonces si $x_n \longrightarrow 0$, $n \to \infty$, se tiene que $u_n \longrightarrow 0$, $n \to \infty$, uniformemente en $[0, T]$, para $T > 0$.
Para probar este hecho fijamos $T > 0$ y definimos el operador $L : X \longrightarrow C([0, T], X)$ mediante $Lx = v$, $x \in X$, siendo v la única solución débil con valor inicial x. Aquí, $C([0, T], X)$ representa el espacio de las funciones continuas definidas en $[0, T]$ y con valores en X, dotado de la norma del supremo.
Señalamos que la unicidad de soluciones débiles implica la linealidad de L. Veamos que además es un operador cerrado. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, $x \in X$ y $v \in C([0, T], X)$ tales que $x_n \longrightarrow x$ en X y $v_n = Lx_n \longrightarrow v$ en $C([0, T], X)$, cuando $n \to \infty$.
Como v_n, $n \in \mathbb{N}$, es la solución débil con valor inicial x_n, se tiene que $\int_0^t v_n(s)ds$, $t \geq 0$, es un elemento de $D(A)$. Además, ya que $v_n \longrightarrow v$, cuando $n \to \infty$, uniformemente en $[0, T]$, para cada $t \in [0, T]$ se tiene que $\int_0^t v_n(s)ds \longrightarrow \int_0^t v(s)ds$, cuando $n \to \infty$. Nótese que

$$\Big\| \int_0^t (v_n(s) - v(s))ds \Big\| \leq t\|v_n - v\|_{C([0,T],X)}, \quad n \in \mathbb{N}, t \in [0, T].$$

Sea $t \in [0, T]$. La sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$, donde $z_n = \int_0^t v_n(s)ds$, $n \in \mathbb{N}$, satisface

$$\begin{aligned} z_n &\longrightarrow z = \int_0^t v(s)ds \\ Az_n &= v_n(t) - x_n \longrightarrow v(t) - x. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que A es cerrado concluimos que

$$\int_0^t v(s)ds \in D(A) \quad \text{y} \quad A\Big(\int_0^t v(s)ds\Big) = v(t) - x.$$

Extendemos ahora la función v a (T,∞). Para ello, denotamos por w la única solución débil con valor inicial $v(T)$ y definimos $\widetilde{v}(t) = v(t)$, $t \in [0,T]$, y $\widetilde{v}(t) = w(t-t_0)$, $t > T$. De esta forma, $\widetilde{v}$ es una función continua tal que $Lx = v$, siendo $\widetilde{v} = v$, $t \in [0,T]$. Se infiere entonces que L es cerrado, y en virtud del Teorema del grafo cerrado (Teorema 1.18) se tiene que L es acotado. Por tanto, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ y u_n, $n \in \mathbb{N}$, denota la única solución del problema (ACP) con valor inicial x_n, entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{3.8}$$

Definimos ahora $T_0 = I$, y para cada $t > 0$, el operador $S_t x = u_x(t)$, $x \in D(A)$, siendo u_x la única solución del problema (ACP) con valor inicial x. Nótese que $S_t : D(A) \longrightarrow D(A)$, $t \geq 0$.

Sea $t > 0$. Ya que se cumple (3.8), se tiene que el operador S_t es lineal y continuo. Y puesto que $D(A)$ es denso en X, S_t admite una extensión $T_t \in L(X)$ tal que $T_t x = u_x(t)$, $x \in D(A)$. La unicidad de soluciones implica que $S_{t+s}x = S_t S_s x$, $x \in D(A)$, $t,s \geq 0$, y por extensión también se tiene la propiedad de semigrupo para $\{T_t\}_{t\geq 0}$.

Para demostrar que $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo C_0 basta probar que $\lim_{t\to 0^+} T_t x = x$, $x \in D(A)$, y que $\sup_{t\in[0,1]} \|T_t\| < \infty$, pues $D(A)$ es denso en X. Ya que para cada $x \in D(A)$, $T_t x = u_x(t)$, $t \geq 0$, $u_x(0) = x$ y la aplicación $t \longrightarrow u_x(t)$ es continua, se obtiene que $\lim_{t\to 0^+} T_t x = x$, $x \in D(A)$.

Por otro lado supongamos que $\sup_{t\in[0,1]} \|T_t\| = \infty$, esto es, existe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ tal que $t_n \downarrow 0$, y $\|T_{t_n}\| \longrightarrow \infty$, cuando $n \to \infty$. Podemos entonces elegir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $x_n \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, y $\|T_{t_n} x_n\| = \|u_{x_n}(t_n)\| \geq 1$. Y esto contradice el hecho de que $u_{x_n} \longrightarrow 0$, cuando $n \to \infty$, uniformemente en $[0,1]$. Se concluye entonces que $\lim_{t\to 0^+} T_t x = x$, $x \in X$.

Para finalizar, veamos que A genera al semigrupo. Sea $(B, D(B))$ el generador infinitesimal de $\{T_t\}_{t\geq 0}$. Es claro que $D(A) \subseteq D(B)$ y que $Bx = u_x'(0) = Ax$, $x \in D(A)$. Además, $T_t x = u_x(t) \in D(A)$, $x \in D(A)$, esto es, $D(A)$ es invariante por el semigrupo. Ya que $D(A)$ es denso en X, se sigue que $D(A)$ es denso en $D(B)$ respecto a la norma del grafo $\|x\|_G = \|x\| + \|Bx\|$, $x \in D(B)$ (ver Proposición 3.7)).

Entonces, si $x \in D(B)$, podemos encontrar $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $x_n \longrightarrow x$ y $Bx_n = Ax_n \longrightarrow Bx$. Como A es cerrado se concluye que $x \in D(A)$ y $Bx = Ax$. Luego $A = B$.

□

Bibliografía

[1] BRÉZIS, H., *Análisis Funcional*, Alianza Editorial, Madrid, 1983.

[2] DAVIES, E.B., *One parameter semigroups*, Academic Press, London, 1980.

[3] DITZIAN, Z., Some remarks on inequalities of Landau and Kolmogorov. *Aequationes Mathematicae*, 12 (1975), 145-151.

[4] ENGEL, K-J. y NAGEL, R., *A short course on operators semigroups*. Springer-Verlag, New York, 2006.

[5] FOLLAND, G.B., *Real Analysis: modern techniques and their applications*, 2nd Edition, John Wiley& Sons, Inc., New York, 1999.

[6] GOLDSTEIN, J.A., *Semigroups of linear operators and applications*, Oxford University Press, Oxford, 1985.

[7] GORDON, R.A., *Integration and differentiation in a Banach space*, Thesis (Ph.D.), University of Illinois, 1987.

[8] HILLE, E., On the Landau-Kallman-Rota inequality. *J. Approximation Theory*, 6 (1972), 117-122.

[9] HILLE, E. y PHILLIPS, R., *Functional analysis and semigroups*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 31, Providence, 1957.

[10] JOHNSON, W.P., The curious history of Faà di Bruno's formula. *Amer. Math. Monthly*, 109 (3) (2002), 217-234.

[11] KALLMAN, R.R. y ROTA, G., On the inequality $\|f'\|^2 \leq 4\|f\| \cdot \|f''\|$. *Inequalities*, 2 (1970), 187-192.

[12] NICULESCU, C.P. y BUŞE, C., The Hardy-Landau-Littlewood inequalities with less smoothness. *J. Inequal. in Pure and Appl. Math* , 4 (2003), Article 51, 8 pp.

[13] PAZY, A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.

[14] RUDIN, W., *Real and complex analysis*, Third Edition, McGraw-Hill, New York, 1987.

[15] SIDDIQI, A.H., *Applied functional analysis: numerical methods, wavelet methods and image processing*, Marcel Dekker, New York, 2004.

[16] TAIRA, K., *Functional analytic techniques for diffusion processes*. Springer-Verlag, Singapore, 2022.

[17] VERA, A. y ALEGRÍA, P., *Un curso de análisis funcional: teoría y problemas: espacios normandos y de Banach, producto interior y espacios de Hilbert, teoría espectral en espacios normandos, teoría espectral en espacios de Hilbert*. AVL, 1997.

Semigroups of operators in Banach spaces

Christian Díaz Bautista
Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0101322162@ull.edu.es

Abstract

In this report we carry out a theoretical study of the semigroups of linear and bounded operators in Banach spaces, mainly addressing the analysis of strongly continuous semigroups. We first consider general aspects of Banach spaces and linear and continuous operators, delving into the analysis of the resolvent of an operator.
We introduce and treat the fundamental characteristics of the uniformly continuous semigroups and the C_0 semigroups, establishing the relationship with their infinitesimal generator and its resolvent. In addition, we prove the Hille-Yosida Theorem for contractive C_0 semigroups, as well as for general C_0 semigroups, and discuss some of its consequences.
Finally, we present some concrete examples that include multiplicative, translation, and diffusion semigroups and illustrate the applications of the theory with the Landau-Kallman-Rota inequality and the abstract Cauchy problem.

1. Introduction

The theory of semigroups of linear operators in Banach spaces has become a fundamental tool in many areas of modern mathematical analysis. This theory arose from the abstract study of mathematical models that explain the behavior of a large number of natural phenomena and was a pioneer in providing functional analysis tools to the study of differential equations. It was from the 30s of the XX century when researchers began to delve into the analysis of semigroups, realizing that the theory could be applied directly to partial differential equations, Markov processes, and ergodic theory. The publication in 1948 of Einar Hille's work was a boost to the development of the theory, largely contributed by the works of mathematician Ralph Phillips. Nowadays, the theory is characterized by its application not only to partial differential equations or stochastic processes but also to integro-differential equations or approximation theory, among others.

2. Linear operators in Banach spaces

We present the fundamental elements of the theory that are necessary for the development of the next chapter. Specifically, the concepts of normed space and Banach space are introduced, their main properties are addressed and Lebesgue spaces are provided as examples of relevant Banach spaces. We also present the concept of a closed operator, give a characterization in terms of its graph, and prove one of the important theorems in functional analysis the Closed Graph Theorem which is stated as follows.

Closed Graph Theorem Let X and Y be Banach spaces and let $T\colon D(T) \subseteq X \to Y$ be a linear operator defined on a closed subspace $D(T) \subseteq X$. Then, T is a closed operator if and only if T is a bounded operator.

3. Semigroup of Operators

This chapter is devoted to the study of semigroups of operators and the Hille-Yosida Theorem. First we treat the most important concepts and properties related to semigroups of bounded linear operators in Banach spaces.
After showing some general properties, we present some general characteristics, introduce the concept of infinitesimal generator of a semigroup, and analyze its relationship with the semigroup. We present and prove the central result of this chapter, the Hille-Yosida Theorem for contractive C_0 semigroups, which characterizes contractive strongly continuous semigroups in terms of the infinitesimal generator and establishes a connection with the resolvent of the generator, that we formulate in the following terms.

Hille-Yosida Theorem Let X be a Banach space and let $A\colon D(A) \subset X \to X$ be a linear operator. Then, A generates a contractive C_0 semigroup if and only if:

(a) A is a closed operator and $D(A)$ is dense in X.

(b) $(0, \infty) \subset \rho(A)$ and $\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq 1$, for every $\lambda > 0$.

Lastly, we generalize this theorem to general C_0 semigroups. The Hille-Yosida Theorem can be seen as a generalization of the classical results of existence and uniqueness of solutions to initial value problems of differential equations when formulated in an abstract functional framework.

4. Some examples and applications

In this chapter we illustrated the theory studied with some examples and particular applications. On one hand, we examined three specific semigroups, each of which corresponds to a specific type of semigroup: multiplicative semigroups, translation semigroups, and diffusion semigroups.
We finished the work by analyzing two applications of the theory. On one hand, the generalization to the context of semigroups of the well-known Landau inequality, from which it is deduced in a simple way, and on the other hand, the connection between C_0 semigroups and the abstract Cauchy problem.

References

[1] BRÉZIS, H., *Análisis Funcional*, Alianza Editorial, Madrid, 1983.

[2] DAVIES, E.B., *One parameter semigroups*, Academic Press, London, 1980.

[3] ENGEL, K-J. y NAGEL, R., *A short course on operators semigroups.* Springer-Verlag, New York, 2006.

[4] GOLDSTEIN, J.A., *Semigroups of linear operators and applications*, Oxford University Press, Oxford, 1985.

[5] HILLE, E., On the Landau-Kallman-Rota inequality. *J. Approximation Theory*, 6 (1972), 117-122.

[6] HILLE, E. y PHILLIPS, R., *Functional analysis and semigroups*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 31, Providence, 1957.

[7] KALLMAN, R.R. y ROTA, G., On the inequality $\|f'\|^2 \leq 4\|f\| \cdot \|f''\|$. *Inequalities,* 2 (1970), 187-192.

[8] PAZY, A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer-Verlag, New York, 1983.

[9] TAIRA, K., *Functional analytic techniques for diffusion processes.* Springer-Verlag, Singapore, 2022.