

Carla Benítez García

*Teorema de Malus-Dupin y Geometría  
Simpléctica*

Malus-Dupin Theorem and Symplectic Geometry

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Matemáticas  
La Laguna, Mayo de 2023

DIRIGIDO POR

*Juan Carlos Marrero González*  
*Edith Padrón Fernández*

*Juan Carlos Marrero González*  
*Depto. Matemáticas, Estadística e*  
*Investigación Operativa*  
*Universidad de La Laguna*  
*38200 La Laguna, Tenerife*

*Edith Padrón Fernández*  
*Depto. Matemáticas, Estadística e*  
*Investigación Operativa*  
*Universidad de La Laguna*  
*38200 La Laguna, Tenerife*

---

## Agradecimientos

Me gustaría agradecer a mis tutores, Juan Carlos y Edith, por su compromiso y dedicación en el desarrollo de esta memoria y por haberme transmitido su pasión por las matemáticas, en especial, por la geometría.

Carla Benítez García  
La Laguna, 22 de mayo de 2023



---

## Resumen · Abstract

### *Resumen*

---

*El resultado fundamental de esta memoria es el Teorema de Malus-Dupin. Según este teorema, una familia de rayos bi-paramétrica rectangular sigue siendo rectangular después de un número arbitrario de reflexiones o refracciones a través de superficies diferenciables. Iniciaremos la prueba de este resultado demostrando que el espacio de rayos tiene una estructura de variedad diferenciable de dimensión 4 difeomorfo al fibrado cotangente de una esfera de radio 1. Posteriormente, presentamos la demostración original del teorema realizada por Hamilton, tanto para los fenómenos de reflexión como de refracción. En la última parte de la memoria, usando la estructura simpléctica del espacio de rayos de luz (heredada de aquella existente en el fibrado cotangente de la esfera), daremos una prueba moderna diferente del Teorema de Malus-Dupin. Dos ideas son esenciales en esta prueba: i) la interpretación de rectangularidad en términos de subvariedades lagrangianas y ii) el hecho de que las reflexiones y refracciones son simplectomorfismos.*

**Palabras clave:** *Teorema de Malus-Dupin – Familia de rayos bi-paramétrica – Rectangularidad – Reflexión – Refracción – Variedad diferenciable – Fibrado cotangente – Subvariedades lagrangianas – Simplectomorfismos.*

## ***Abstract***

---

*The main result of this memory is Malus-Dupin Theorem. According to this theorem, a rectangular bi-parametric family of rays remains rectangular after an arbitrary number of reflections or refractions through smooth surfaces. In order to prove this result, we start by seeing that the ray space is a smooth manifold of dimension 4 diffeomorphic to the cotangent bundle of a sphere of radius 1. Then, we present Hamilton's original proof of the theorem for both reflection and refraction phenomena. In the last part of the memory, using the symplectic structure on the ray space (which is inherited from the existing one in the cotangent bundle of the sphere), we will give a different modern proof of Malus-Dupin Theorem. Two key points are important in this proof: i) the interpretation of rectangularity in terms of Lagrangian submanifolds and ii) the fact that reflections and refractions are symplectomorphism.*

**Keywords:** *Malus-Dupin Theorem – Bi-parametric family of rays – Rectangularity – Reflection – Refraction – Smooth manifold – Cotangent bundle – Lagrangian submanifolds – Symplectomorphism.*

---

# Contenido

<b>Agradecimientos</b> .....	III
<b>Resumen/Abstract</b> .....	V
<b>Introducción</b> .....	IX
<b>1. El espacio de rayos como variedad diferenciable</b> .....	1
1.1. Espacio de rayos .....	1
1.2. Fibrado cotangente de una variedad .....	2
1.3. La estructura diferenciable del espacio de rayos .....	5
1.4. Reflexiones y refracciones .....	9
<b>2. Teorema de Malus-Dupin. Demostración de W.R. Hamilton</b> ..	11
2.1. Teorema de Malus-Dupin .....	11
2.2. Teorema de Malus-Dupin para la reflexión .....	12
2.2.1. Notaciones y fórmulas para las reflexiones .....	13
2.2.2. Demostración del teorema para las reflexiones .....	16
2.3. Teorema de Malus-Dupin para la refracción .....	18
2.3.1. Notaciones y fórmulas para las refracciones .....	18
2.3.2. Demostración del teorema para las refracciones .....	21
<b>3. Teorema de Malus-Dupin desde la Geometría Simpléctica</b> ....	23
3.1. Álgebra Simpléctica .....	23
3.1.1. Espacios vectoriales simplécticos .....	23
3.1.2. Ortogonalidad en un espacio vectorial simpléctico .....	26
3.2. Geometría Simpléctica .....	29
3.2.1. Variedades simplécticas y fibrado cotangente .....	29
3.2.2. La estructura simpléctica canónica del fibrado cotangente ..	31
3.2.3. Subvariedades lagrangianas .....	35
3.3. Demostración simpléctica del teorema .....	37

<b>Bibliografía</b> .....	49
<b>Poster</b> .....	51



---

## Introducción

La óptica es la rama de la física que se encarga de estudiar las leyes y los fenómenos de la luz. En particular, la óptica geométrica es la disciplina que estudia, usando herramientas geométricas, los cambios de dirección que experimentan los rayos luminosos en los distintos fenómenos de reflexión y refracción (véase [8]).

*El Teorema de Malus-Dupin* es un conocido resultado de óptica geométrica según el cual, si una familia de rayos luminosos que entran en un sistema óptico, formado por sucesivas reflexiones y refracciones, satisface la propiedad de *rectangularidad*, entonces mantiene esa propiedad en cada medio transparente en el que se propaga. Aunque el Teorema lleva el nombre de Malus y Dupin, otros matemáticos como Hamilton, Quetelet y Gergonne realizaron numerosas aportaciones y demostraciones para este resultado (véase [6]). Hacemos una breve reseña biográfica de todos estos protagonistas de la teoría que vamos a desarrollar en esta memoria.

*Étienne Louis Malus de Mitry* (1775-1812) fue un matemático y físico francés que formaba parte del ejército de su país. Fue nombrado director de estudios en la *École Polytechnique* francesa. Sus obras estuvieron centradas por completo en el estudio de la luz. Esto lo involucró en el análisis de las propiedades matemáticas de las familias de rectas orientadas con vistas a su aplicación en óptica. Realizó experimentos para verificar la teoría de *Christian Huygens* sobre la luz y reescribió la teoría en forma analítica. Además, descubrió y estudió los fenómenos de la *polarización de la luz* y de la *birrefringencia* de la luz en cristales (véase [9]).

Malus probó que la familia de rayos emitidos por un punto luminoso, que satisface la propiedad de *rectangularidad*, sigue manteniendo dicha propiedad después de reflejarse o refractarse en una superficie diferenciable. Sin embargo, no sabía si esta propiedad se seguía satisfaciendo para varias reflexiones o refracciones sucesivas.

*Charles François Dupin* (1784-1873) fue un ingeniero naval y matemático francés, particularmente conocido por su trabajo en el ámbito de la geometría. Dupin fue profesor del *Conservatorio de Artes y Oficios de Francia*. Su pensamiento para la época que vivió fue muy avanzado, siendo defensor de una educación para niños y niñas en igualdad. Su nombre está ligado a varios objetos matemáticos como son *los cíclidos de Dupin* o *la indicatriz de Dupin* (véase [10]). Encontró una demostración geométrica muy clara del *Teorema de Malus-Dupin* para las reflexiones. Sin embargo, aunque sabía que el mismo resultado era cierto para las refracciones, no publicó su demostración.

Los matemáticos *Adolphe Quetelet* (1796-1874) y *Joseph Diaz Gergonne* (1771-1859) obtuvieron en 1825 una demostración del *Teorema de Malus-Dupin* tanto para las reflexiones como para las refracciones.

*William Rowan Hamilton* (1805-1865) fue un matemático, físico y astrónomo irlandés. Destacó en los campos de la óptica, la dinámica y el álgebra, donde hizo importantes contribuciones, como *la Teoría de los sistemas de rayos*, *las funciones de Hamilton* y *la Teoría de los cuaterniones* (véase [11]). Hamilton utilizó y amplió los trabajos de Malus sobre las familias de rectas orientadas. En particular, obtuvo de forma independiente una demostración del *Teorema de Malus-Dupin*. Aunque conocía los trabajos previos de Malus, no hay constancia de que conociera los trabajos de Dupin, Quetelet y Gergonne. Las demostraciones de Hamilton requieren de la existencia de puntos regulares sobre el rayo inicial. Sus cálculos son locales y algunos detalles como la regularidad se asumen para poder obtener el resultado.

Hamilton también es el precursor de la reformulación de la mecánica clásica en términos de posiciones y momentos. Usando el lenguaje moderno de la geometría diferencial, la mecánica hamiltoniana se describe en el fibrado cotangente de una variedad (el espacio de configuración), el cual admite una 2-forma canónica que resulta ser no degenerada y cerrada (la 2-forma simpléctica). Esta 2-forma permite definir la dinámica y las ecuaciones de Hamilton que determinan las soluciones del sistema. Algunas referencias para la geometría simpléctica son [1] y [5].

El objetivo de esta memoria es desarrollar una prueba del *Teorema de Malus-Dupin* basada en la geometría simpléctica. La estructura de la memoria es la siguiente. En el capítulo 1 presentaremos los conceptos fundamentales de la óptica geométrica. En particular, definiremos los fenómenos de reflexión y refracción y se enunciarán las leyes por las que estos se rigen. El resultado fundamental de este capítulo es mostrar que el espacio de rayos tiene una estructura de variedad diferenciable de dimensión 4 difeomorfo al fibrado cotangente de una esfera de radio 1. Este difeomorfismo depende de un punto de referencia  $O$  fijado previamente.

En el capítulo 2 definiremos los conceptos de *familia de rayos luminosos*, *punto regular* y *propiedad de rectangularidad*, que serán fundamentales para enunciar el *Teorema de Malus-Dupin*. A continuación, se desarrollará la demostración original del teorema dada por Hamilton, tanto para la reflexión como para la refracción. En el capítulo 3 introduciremos el álgebra y la geometría simpléctica, que nos permitirán interpretar el *Teorema de Malus-Dupin* en estos términos. Así, comenzamos mostrando que el espacio de rayos es una variedad simpléctica derivada de la estructura simpléctica del fibrado cotangente de la esfera a la que es difeomorfa. Es interesante indicar que dicha estructura simpléctica no depende del punto de referencia  $O$  elegido como origen. Posteriormente, veremos cómo la rectangularidad se interpreta en términos de la teoría de subvariedades lagrangianas que previamente introduciremos en el capítulo. Por último, se prueba que tanto la reflexión como la refracción son simplectomorfismos sobre el espacio de rayos. El *Teorema de Malus-Dupin* es, entonces, una consecuencia de un resultado general para subvariedades lagrangianas que establece que la imagen de una subvariedad lagrangiana por medio de un simplectomorfismo es una subvariedad lagrangiana.



## El espacio de rayos como variedad diferenciable

En este capítulo, introduciremos el espacio de rayos de un sistema óptico, le dotaremos de una estructura diferenciable probando que es difeomorfo al fibrado cotangente de una esfera de dimensión 2 y radio 1 y, finalmente, recordaremos los principios por los que se rigen las reflexiones y refracciones.

### 1.1. Espacio de rayos

La óptica geométrica es la rama de la óptica que se encarga de estudiar, mediante herramientas geométricas, los cambios de dirección que experimentan los rayos luminosos en los distintos fenómenos de reflexión y refracción. Téngase en cuenta que los fenómenos luminosos se describen en términos de rayos de luz.

*La reflexión* de un rayo de luz es el cambio de dirección que experimenta el rayo cuando incide sobre una superficie propagándose en el mismo medio que se desplaza inicialmente, sin atravesar la superficie. Mientras que *la refracción* de un rayo de luz es el cambio que experimenta el rayo al incidir con una superficie que separa dos medios de manera que el rayo pasa de propagarse de un medio a otro (véase [12]).

Consideraremos medios con las siguientes propiedades:

- *Homogéneo*: sus características físicas no varían de un punto del medio a otro.
- *Transparente*: deja pasar fácilmente la luz.
- *Isótropo*: sus propiedades físicas son idénticas en todas las direcciones, es decir, que el índice de refracción es constante en todo el medio.

Recordamos que *el índice de refracción de un medio* es la medida que permite conocer cuánto se reduce la velocidad de la luz dentro del medio y se calcula como el cociente de la velocidad de la luz en el vacío,  $c$ , y la velocidad de la luz en el medio,  $v$ ,

$$n = \frac{c}{v}.$$

En la física clásica, el espacio físico en el que vivimos y en el que se propagan los rayos luminosos se describe matemáticamente como el espacio afín tridimensional  $\mathbb{R}^3$  dotado de la métrica estándar. El conjunto de todas las rectas orientadas en  $\mathbb{R}^3$  se denota como  $\mathcal{L}$ . Así, en un medio homogéneo, transparente e isótropo, *un rayo de luz* es una semirrecta orientada. Para un tratamiento matemático de estos procesos de reflexión y refracción será necesario considerar algunas veces la recta orientada completa.

Las superficies donde inciden los rayos las consideraremos superficies diferenciables en  $\mathbb{R}^3$ . En el caso de la refracción esta superficie separa dos medios que en general tienen dos índices de refracción diferentes. De esta forma se define un *sistema óptico* como un conjunto de medios transparentes, homogéneos e isótropos de diversos índices de refracción separados por superficies diferenciables reflectantes o refractantes de forma arbitraria (véase [6]).

En lo que sigue vamos a dotar al espacio de los rayos de una estructura de variedad diferenciable. De hecho, comprobaremos que este espacio es el fibrado cotangente de una esfera 2-dimensional. Antes de probar este resultado recordaremos la construcción del fibrado cotangente de una variedad arbitraria.

## 1.2. Fibrado cotangente de una variedad

En esta sección recordaremos la definición de la estructura diferenciable del fibrado cotangente de una variedad (para más detalles, véase [4]).

Sean  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $m$  y  $x$  un punto de  $M$ . Denotamos por  $C^\infty(x)$  al conjunto

$$C^\infty(x) = \{f : W \longrightarrow \mathbb{R} \mid W \text{ abierto en } M, x \in W \text{ y } f \text{ diferenciable}\}.$$

**Definición 1.1.** *Un vector tangente a  $M$  en  $x$  es una aplicación  $v : C^\infty(x) \longrightarrow \mathbb{R}$  tal que fijada una carta local  $(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^m))$  en  $M$ , con  $x \in U$ , existe una  $m$ -upla de escalares  $(a^1, \dots, a^m)$  satisfaciendo*

$$v(f) = \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i} \Big|_{\varphi(x)}.$$

El espacio tangente a  $M$  en  $x \in M$  es el espacio vectorial

$$T_x M = \{v : C^\infty(x) \longrightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ es vector tangente a } M \text{ en } x\}.$$

Las operaciones del espacio vectorial sobre  $T_x M$  son las inducidas por la suma de funciones reales y el producto por un número real de este tipo de funciones.

Sea  $(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^m))$  una carta en  $M$  tal que  $x \in U$ , definimos para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$  los siguientes vectores tangentes a  $M$  en  $x$

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_x : C^\infty(x) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \frac{\partial}{\partial x^i}|_x (f) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r^i}|_{\varphi(x)},$$

para todo  $f \in C^\infty(x)$ . Estos vectores determinan la base canónica

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}|_x \right\}$$

de  $T_x M$  asociada a la carta  $(U, \varphi)$ .

Sean ahora  $M$  y  $N$  dos variedades diferenciables,  $F : M \longrightarrow N$  una aplicación diferenciable y  $x \in M$ . Entonces,  $F$  induce una aplicación lineal  $T_x F : T_x M \longrightarrow T_{F(x)} N$  entre los correspondientes espacios tangentes, definida por

$$[(T_x F)(v)](h) = v(h \circ F)$$

para todo  $v \in T_x M$  y  $h \in C^\infty(F(x))$ .

El espacio cotangente  $T_x^* M$  en el punto  $x$  de la variedad  $M$  es el espacio vectorial dual de  $T_x M$ , esto es,

$$T_x^* M = \{ \alpha_x : T_x M \longrightarrow \mathbb{R} \mid \alpha_x \text{ es lineal} \}.$$

Si  $(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^m))$  es una carta local en  $M$ ,  $x \in M$  y

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}|_x \right\}$$

es la base canónica de  $T_x M$ , denotamos por

$$\mathcal{B}^* = \{ dx^1|_x, \dots, dx^m|_x \}$$

a la base dual de  $\mathcal{B}$ , esto es,

$$dx^i|_x \left( \frac{\partial}{\partial x^j}|_x \right) = \delta^{ij}.$$

**Definición 1.2.** *El fibrado cotangente de la variedad  $M$  es el conjunto*

$$T^* M = \bigcup_{x \in M} T_x^* M.$$

A la aplicación  $\Pi_M : T^* M \longrightarrow M$ , dada por  $\Pi_M(\alpha_x) = x$ , para todo  $\alpha_x \in T_x^* M$ , se la denomina *proyección cotangente*.

La estructura de variedad diferenciable sobre  $M$  induce una estructura de variedad diferenciable de dimensión  $2m$  sobre el fibrado cotangente  $T^*M$ . En efecto, sea  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha \equiv (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m))\}_{\alpha \in A}$  un atlas de  $M$ . Consideramos

$$\begin{aligned} \overline{U}_\alpha &= \Pi_M^{-1}(U_\alpha) = \{\alpha \in T^*M \mid \Pi_M(\alpha) \in U_\alpha\} \subseteq T^*M \\ \overline{\varphi}_\alpha : \Pi_M^{-1}(U_\alpha) &\longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^{2m} \\ \beta &\longmapsto \overline{\varphi}_\alpha(\beta) = (\varphi_\alpha(\Pi_M(\beta)), \beta(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^1}|_x), \dots, \beta(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^m}|_x)). \end{aligned}$$

Puesto que  $\bigcup_{\alpha \in A} \overline{U}_\alpha = T^*M$ , entonces el conjunto de subconjuntos de  $T^*M$

$$\{\bigcap_{\alpha \in I} \overline{U}_\alpha \mid I \subseteq A \text{ finito}\}$$

es la base de una cierta topología sobre  $T^*M$ . Esta será la topología que consideraremos en  $T^*M$ .

Así,  $\{(\overline{U}_\alpha, \overline{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  es un atlas de  $T^*M$ . Denotamos por  $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m, p_1^\alpha, \dots, p_m^\alpha)$  a las correspondientes coordenadas en  $(\overline{U}_\alpha, \overline{\varphi}_\alpha)$ .

Además, se tiene que la proyección cotangente  $\Pi_M : T^*M \longrightarrow M$  es una submersión sobre. En efecto, considerando las cartas locales  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  y  $(\overline{U}_\alpha, \overline{\varphi}_\alpha)$  en  $M$  y  $T^*M$  respectivamente, se deduce que

$$\widehat{\Pi}_M = \varphi_\alpha \circ \Pi_M \circ \overline{\varphi}_\alpha^{-1} : \begin{array}{ccc} \overline{\varphi}_\alpha(\overline{U}_\alpha) \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \varphi_\alpha(U_\alpha) \\ (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m, p_1^\alpha, \dots, p_m^\alpha) & \longrightarrow & (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m) \end{array}$$

Por tanto,  $\widehat{\Pi}_M$  es diferenciable y tiene rango  $m$ , lo que implica que  $\Pi_M$  es una submersión sobre.

Sea ahora  $F : M \longrightarrow N$  una aplicación diferenciable entre variedades. La aplicación cotangente  $T_x^*F : T_{F(x)}^*N \longrightarrow T_x^*M$  a  $F$  en  $x \in M$  es la aplicación dual de  $T_x F : T_x M \longrightarrow T_{F(x)} N$ .

Un difeomorfismo  $F : M \longrightarrow N$  induce un difeomorfismo  $T^*F : T^*N \longrightarrow T^*M$  entre los correspondientes fibrados cotangentes. De hecho, se tiene que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} T^*N & \xrightarrow{T^*F} & T^*M \\ \Pi_N \downarrow & & \downarrow \Pi_M \\ N & \xleftarrow{F} & M \end{array}$$

es conmutativo.



### 1.3. La estructura diferenciable del espacio de rayos

A continuación, dotaremos al espacio de rayos  $\mathcal{L}$  de una estructura de variedad diferenciable de dimensión cuatro (véase [6]).

Fijamos  $O$  un punto cualquiera de  $\mathbb{R}^3$  y  $C$  un punto de  $\mathbb{R}^3$  diferente de  $O$ .

La estrategia para dotar a  $\mathcal{L}$  de una estructura de variedad diferenciable es trasladar la estructura diferenciable del fibrado cotangente  $T^*S_C^2$  de una esfera  $S_C^2$  de radio 1 y centro  $C$  a  $\mathcal{L}$  a través de una aplicación biyectiva  $\phi_{OC}$  de  $\mathcal{L}$  en  $T^*S_C^2$  que pasamos a definir a continuación.

Para cada recta orientada  $L \in \mathcal{L}$ , denotamos por:

- $m_L$  el punto de  $S_C^2$  tal que  $\vec{u}_L = \overrightarrow{Cm_L}$  es un vector director de  $L$  (respetando la orientación de  $L$ ).
- $\alpha_{m_L}: T_{m_L}S_C^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la forma lineal sobre el espacio tangente  $T_{m_L}S_C^2$  dada por

$$\alpha_{m_L}(\vec{v}) = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{v},$$

para todo  $\vec{v} \in T_{m_L}S_C^2$ , tal que  $P$  es un punto arbitrario de  $L$ . Aquí,  $\cdot$  es el producto escalar entre vectores de  $\mathbb{R}^3$ .

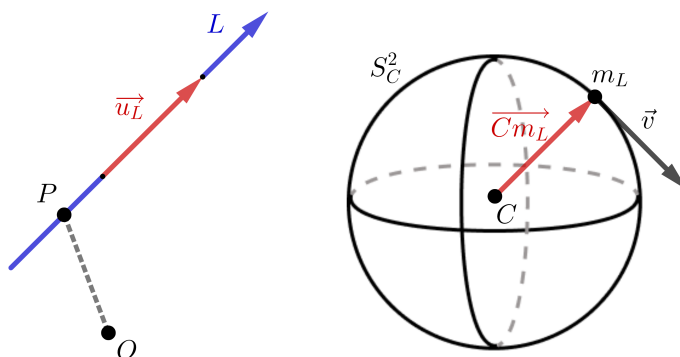


Figura 1.1. Espacio de rayos y esfera  $S_C^2$

**Proposición 1.3.** La aplicación  $\phi_{OC}: \mathcal{L} \rightarrow T^*S_C^2$  dada por

$$\phi_{OC}(L) = (m_L, \alpha_{m_L}) \tag{1.1}$$

está bien definida y es biyectiva.

*Demostración.* En primer lugar, comprobamos que  $\phi_{OC}$  está bien definida, esto es, que  $\alpha_{m_L}$  es una aplicación lineal que no depende del punto  $P \in L$  elegido.

La linealidad de  $\alpha_{m_L}$  se deriva directamente de las propiedades del producto escalar en  $\mathbb{R}^3$ .

Veamos ahora que  $\alpha_{m_L}$  no depende del punto  $P \in L$  elegido. Si tomamos  $P' \in L$  tal que  $P' \neq P$ , debemos probar que

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OP'} \cdot \vec{v}, \quad \forall \vec{v} \in T_{m_L} S_C^2. \quad (1.2)$$

Como tenemos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \vec{v} &= \|\vec{v}\| \cdot \|\overrightarrow{OP}\| \cdot \cos(\overrightarrow{OP}, \vec{v}), \\ \overrightarrow{OP'} \cdot \vec{v} &= \|\vec{v}\| \cdot \|\overrightarrow{OP'}\| \cdot \cos(\overrightarrow{OP'}, \vec{v}), \end{aligned}$$

bastaría comprobar que  $\|\overrightarrow{OP}\| \cdot \cos(\overrightarrow{OP}, \vec{v}) = \|\overrightarrow{OP'}\| \cdot \cos(\overrightarrow{OP'}, \vec{v})$  para concluir el resultado.

Vamos a diferenciar dos casos:

1. Supongamos que  $O \notin L$ . Sea  $h$  la distancia del punto  $O$  al rayo  $L \in \mathcal{L}$ . Entonces se tiene que (véase Fig. 1.2)

$$\cos \gamma = \frac{h}{\|\overrightarrow{OP}\|} \quad y \quad \cos \beta = \frac{h}{\|\overrightarrow{OP'}\|},$$

donde  $\gamma$  y  $\beta$  son los ángulos indicados en la Fig. 1.2.

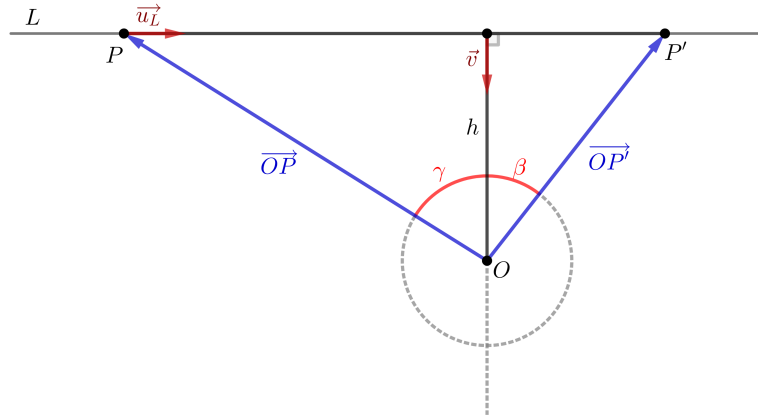


Figura 1.2. Dependencia del punto  $P \in L$

Despejando  $h$  en ambas expresiones e igualando tenemos

$$\cos \gamma \cdot \|\overrightarrow{OP}\| = \cos \beta \cdot \|\overrightarrow{OP'}\| \quad (1.3)$$

Por otro lado, se satisfacen las siguientes relaciones entre los ángulos  $(\overrightarrow{OP}, \vec{v})$ ,  $(\overrightarrow{OP'}, \vec{v})$  y  $\gamma, \beta$ ,

$$(\overrightarrow{OP}, \vec{v}) = \pi - \gamma \quad y \quad (\overrightarrow{OP'}, \vec{v}) = \pi - \beta.$$

En consecuencia, se deduce

$$\begin{aligned} \cos \gamma \cdot \|\overrightarrow{OP}\| &= -\cos(\pi - \gamma) \cdot \|\overrightarrow{OP}\| = -\cos(\overrightarrow{OP}, \vec{v}) \cdot \|\overrightarrow{OP}\|, \\ \cos \beta \cdot \|\overrightarrow{OP'}\| &= -\cos(\pi - \beta) \cdot \|\overrightarrow{OP'}\| = -\cos(\overrightarrow{OP'}, \vec{v}) \cdot \|\overrightarrow{OP'}\|. \end{aligned}$$

Ahora usando la igualdad (1.3) obtenemos

$$\cos(\overrightarrow{OP}, \vec{v}) \cdot \|\overrightarrow{OP}\| = \cos(\overrightarrow{OP'}, \vec{v}) \cdot \|\overrightarrow{OP'}\|.$$

Esto nos permite concluir (1.2).

2. Supongamos que  $O \in L$ , entonces

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{v} = 0 \quad y \quad \overrightarrow{OP'} \cdot \vec{v} = 0, \text{ para todo } \vec{v} \in T_{mL}S_C^2,$$

pues  $\overrightarrow{OP}$  y  $\overrightarrow{OP'}$  son proporcionales a  $\vec{u}_L$ . Luego,  $\overrightarrow{OP} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OP'} \cdot \vec{v}$ .

Vamos a probar ahora que  $\phi_{OC}$  es una aplicación biyectiva. En efecto, sea  $(m, \alpha_m) \in T^*S_C^2$ . Buscamos un rayo  $L \in \mathcal{L}$  tal que  $\phi_{OC}(L) = (m, \alpha_m)$ . El rayo  $L$  queda completamente determinado definiendo un punto  $P \in L$  y su vector director  $\vec{u}_L$  (este vector define también la orientación del rayo).

Por un lado, tenemos que  $\vec{u}_L = \vec{Cm}$ . Resta hallar  $P \in L$ .

Sea  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \subseteq \mathbb{R}^3$  una base de  $T_mS_C^2$  con  $\vec{v}_1$  y  $\vec{v}_2$  vectores perpendiculares y unitarios (en una esfera esto siempre es posible), completamos la base ortonormal a una de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{e}\}$ . Consideramos la referencia afín  $\{O; \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{e}\}$ . Entonces,  $P \in \mathbb{R}^3$  tiene coordenadas  $(p_1, p_2, p_3)$ . Así,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \vec{v}_1 &= (p_1, p_2, p_3) \cdot (1, 0, 0) = p_1 = \alpha_m(\vec{v}_1), \\ \overrightarrow{OP} \cdot \vec{v}_2 &= (p_1, p_2, p_3) \cdot (0, 1, 0) = p_2 = \alpha_m(\vec{v}_2). \end{aligned}$$

Nota que hay una recta de puntos  $P$  que satisfacen estas ecuaciones, de manera que podemos tomar cualquiera de ellos.

Definiendo la aplicación  $\tilde{\phi}_{OC} : T^*S_C^2 \rightarrow \mathcal{L}$  tal que  $\tilde{\phi}_{OC}(m, \alpha_m) = L$ , se tiene que  $\tilde{\phi}_{OC}$  es la inversa de  $\phi_{OC}$ . Por tanto, concluimos que  $\phi_{OC}$  es una aplicación biyectiva. □

Usando esta biyección, deducimos el siguiente resultado.

**Corolario 1.4.** *El espacio de rayos  $\mathcal{L}$  tiene una estructura de variedad diferenciable de dimensión 4 tal que  $\phi_{OC} : \mathcal{L} \rightarrow T^*S_C^2$  es un difeomorfismo.*

El siguiente resultado establece que esta estructura diferenciable de  $\mathcal{L}$  no depende del centro  $C$  elegido de la esfera  $S_C^2$ .

**Proposición 1.5.** *Si  $S_C^2$  y  $S_{C'}^2$  son las esferas de radio 1 y centros  $C$  y  $C'$ , respectivamente, entonces existe un difeomorfismo  $F: S_C^2 \rightarrow S_{C'}^2$ , tal que*

$$\phi_{OC} = T^*F \circ \phi_{OC'}.$$

*Demostración.* Definimos  $F: S_C^2 \rightarrow S_{C'}^2$ , la traslación de vector  $\overrightarrow{CC'}$ , esto es,

$$F(m) = m + \overrightarrow{CC'}, \quad \forall m \in S_C^2. \quad (1.4)$$

Nótese que  $m + \overrightarrow{CC'} \in S_{C'}^2$ , ya que  $\overrightarrow{C'(m + \overrightarrow{CC'})} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'm} = \overrightarrow{Cm}$ . Así,  $F$  es un difeomorfismo y, por tanto, la aplicación cotangente  $T^*F: T^*S_C^2 \rightarrow T^*S_{C'}^2$  también lo es.

Además, si  $L \in \mathcal{L}$ ,

$$T^*F \circ \phi_{OC'}(L) = T^*F(m'_L, \alpha_{m'_L}) = (F^{-1}(m'_L), T_{F^{-1}(m'_L)}^*F(\alpha_{m'_L})),$$

tal que  $\overrightarrow{u'_L} = \overrightarrow{C'm'_L}$  es un vector director de  $L$  y  $\alpha_{m'_L}(\vec{v}) = \overrightarrow{O\vec{P}} \cdot \vec{v}$ .

Entonces,

$$\overrightarrow{u'_L} = \overrightarrow{C'm'_L} = \overrightarrow{Cm'_L} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'm'_L} = \overrightarrow{C'F(m'_L)}.$$

Así,  $F(m'_L) = m'_L$ .

Por otro lado, si  $\vec{v} \in T_{F^{-1}(m'_L)}S_C^2$ , usando (1.4), se tiene que

$$\begin{aligned} (T_{F^{-1}(m'_L)}^*F)(\alpha_{m'_L})(\vec{v}) &= \alpha_{m'_L}(T_{F^{-1}(m'_L)}F(\vec{v})) = \overrightarrow{O\vec{P}} \cdot T_{F^{-1}(m'_L)}F(\vec{v}) = \overrightarrow{O\vec{P}} \cdot \vec{v} \\ &= \alpha_{F^{-1}(m'_L)}(\vec{v}) = \alpha_{m'_L}(\vec{v}). \end{aligned}$$

Por tanto, concluimos que  $\phi_{OC} = T^*F \circ \phi_{OC'}$ . □

En lo que sigue, teniendo en cuenta la proposición previa, denotaremos a la aplicación  $\phi_{OC}$  por  $\phi_O$  y a la esfera  $S_C^2$  por  $S^2$ . A continuación, veremos cuál es la dependencia de  $\phi_O$  del punto  $O$  elegido.

**Proposición 1.6.** *Sean  $O$  y  $O'$  dos puntos de  $\mathbb{R}^3$  y  $\phi_O$  y  $\phi_{O'}$  las aplicaciones definidas en (1.1). Entonces existe un difeomorfismo  $\Psi_{O'O}: T^*S^2 \rightarrow T^*S^2$  tal que  $\phi_{O'} = \Psi_{O'O} \circ \phi_O$ . Además,*

$$\Psi_{O'O}(m_L, \alpha_{m_L}) = (m_L, \alpha_{m_L} + df_{O'O}(m_L))$$

con  $f_{O'O}: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable sobre  $S^2$ .

*Demostración.* Si  $L \in \mathcal{L}$ , entonces  $\phi_O(L) = (m_L, \alpha_{m_L})$  y  $\phi_{O'}(L) = (m_L, \alpha'_{m_L})$ , siendo  $\overrightarrow{Cm_L}$  el vector director unitario de  $L$ ,

$$\alpha_{m_L}(\vec{v}) = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{v} \quad \text{y} \quad \alpha'_{m_L}(\vec{v}) = \overrightarrow{O'P} \cdot \vec{v}, \quad \forall \vec{v} \in T_{m_L}S^2.$$

Se tiene que

$$\alpha'_{m_L}(\vec{v}) = \overrightarrow{O'P} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{O'O} \cdot \vec{v} + \overrightarrow{OP} \cdot \vec{v} = \alpha_{m_L}(\vec{v}) + \overrightarrow{O'O} \cdot \vec{v}, \quad \vec{v} \in T_{m_L}S^2.$$

Esto implica que

$$\alpha'_{m_L} = \alpha_{m_L} + df_{O'O}(m_L),$$

donde  $f_{O'O}: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es la función diferenciable dada por

$$f_{O'O}(m) = \overrightarrow{O'O} \cdot \overrightarrow{Cm},$$

para todo  $m \in S^2$ . Nótese que  $df_{O'O}(m)(\vec{v}) = \overrightarrow{O'O} \cdot \vec{v}$ , para todo  $\vec{v} \in T_mS^2$ .

Las aplicaciones  $\phi_O$  y  $\phi_{O'}$  se relacionan entonces de la siguiente manera

$$\phi_{O'} = \Psi_{O'O} \circ \phi_O$$

donde  $\Psi_{O'O}: T^*S^2 \rightarrow T^*S^2$  es el difeomorfismo dado por

$$\Psi_{O'O}(\alpha_{m_L}) = (m_L, \alpha_{m_L} + df_{O'O}(m_L)),$$

para todo  $(m_L, \alpha_{m_L}) \in T^*S^2$ .

□

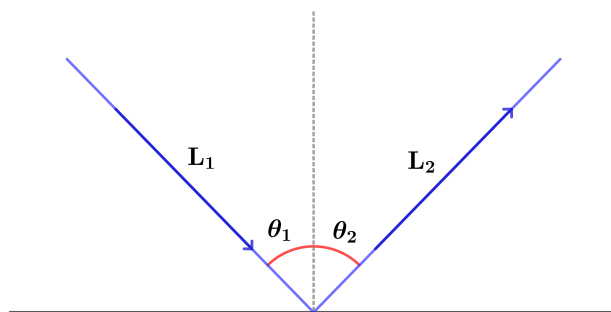
## 1.4. Reflexiones y refracciones

Las reflexiones y las refracciones se describen como transformaciones del espacio de rayos  $\mathcal{L}$ , es decir, aplicaciones diferenciables definidas en un subconjunto abierto  $U$  de  $\mathcal{L}$ , que asocia a cada rayo que choca en la superficie de reflexión o refracción  $L_1$ , el correspondiente rayo reflejado o refractado  $L_2$

$$\begin{aligned} g: U \subseteq \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{L} \\ L_1 &\longmapsto g(L_1) = L_2 \end{aligned}$$

Por un lado, la reflexión se rige por dos principios o leyes de la reflexión que establecen (véase [12] y Fig. 1.3):

1. El rayo incidente  $L_1$ , el reflejado  $L_2$  y la normal a la superficie en el punto de incidencia están en el mismo plano.

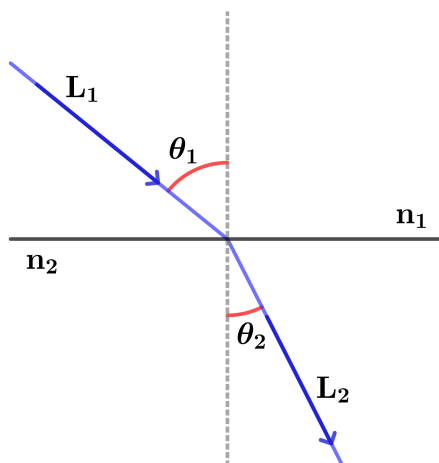


**Figura 1.3.** Representación gráfica de la reflexión

2. El ángulo de incidencia  $\theta_1$  y el ángulo de reflexión  $\theta_2$  son iguales, esto es,  $\theta_1 = \theta_2$ .

Por otro lado, de manera análoga, la refracción se rige por dos principios o leyes de la refracción que establecen (véase [12] y Fig. 1.4):

1. El rayo incidente  $L_1$ , el refractado  $L_2$  y la normal a la superficie en el punto de incidencia están en el mismo plano.
2. El ángulo de incidencia  $\theta_1$ , el ángulo de refracción  $\theta_2$  y los índices de refracción  $n_1$  y  $n_2$  de los medios 1 y 2, respectivamente, se relacionan mediante la fórmula  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ .



**Figura 1.4.** Representación gráfica de la refracción

## Teorema de Malus-Dupin. Demostración de W.R. Hamilton

En este capítulo se introducirá los conceptos y definiciones necesarias para enunciar el Teorema de Malus-Dupin y se presentará la demostración del mismo, realizada por *William Roman Hamilton* [3], tanto para la reflexión como para la refracción (véase también [6]).

### 2.1. Teorema de Malus-Dupin

Para poder enunciar el Teorema de Malus-Dupin es necesario primero introducir las siguientes nociones relacionadas con la rectangularidad de una familia de rayos.

**Definición 2.1.** *Una familia de rayos luminosos que depende de  $n$  parámetros ( $1 \leq n \leq 4$ ) es una subvariedad inmersa  $\mathcal{F}$  (no necesariamente un embebimiento) de dimensión  $n$  de  $\mathcal{L}$ . Se llamará familia de rayos  $n$ -paramétrica.*

Sea  $\mathcal{S}$  una superficie y  $L_0$  un rayo. Diremos que  $\mathcal{S}$  es transversal a  $L_0$  en  $m_0 \in \mathcal{S} \cap L_0$  si

$$\mathbb{R}^3 = T_{m_0}\mathcal{S} \oplus \langle \vec{u}_0 \rangle,$$

donde  $\vec{u}_0$  es un vector director de  $L_0$ .

**Definición 2.2.** *Un punto regular de un rayo luminoso  $L_0$  en una familia de rayos bi-paramétrica  $\mathcal{F}$  es un punto  $m_0 \in L_0$  verificando la siguiente propiedad: para cualquier superficie diferenciable  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ , con  $m_0 \in \mathcal{S}$ , transversal a  $L_0$  en el punto  $m_0$ , existen un entorno abierto  $U \subset \mathcal{F}$  de  $L_0$  en  $\mathcal{F}$  y un entorno abierto  $V \subset \mathcal{S}$  de  $m_0$  en  $\mathcal{S}$ , tales que para todo  $L \in U$ ,  $L$  se interseca con  $V$  en un único punto  $m$  de manera que la aplicación*

$$\begin{aligned} f: U \subset \mathcal{F} &\longrightarrow V \subset \mathcal{S} \\ L &\longmapsto m \end{aligned}$$

es un difeomorfismo de  $U$  en  $V$  (véase Fig. 2.1).

A continuación, introducimos la noción de familia de rayos bi-paramétrica rectangular.

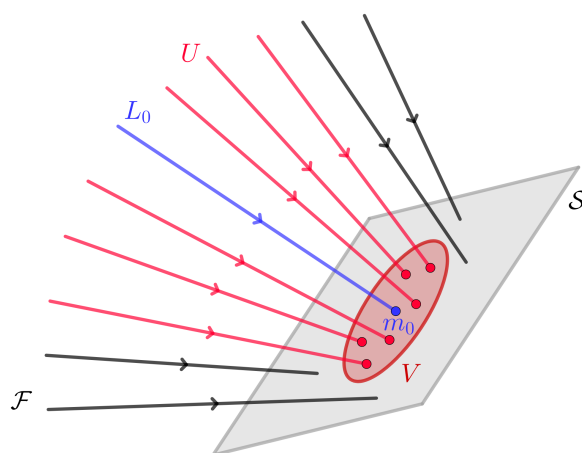


Figura 2.1. Punto regular  $m_0$  en la familia de rayos  $\mathcal{F}$

**Definición 2.3.** Se dice que una familia  $\mathcal{F}$  de rayos bi-paramétrica es rectangular cuando para cada punto regular de cada rayo  $L_0 \in \mathcal{F}$ , existe una superficie diferenciable  $\mathcal{S}$  transversal a  $L_0$  que admite un entorno de  $L_0$ , donde cada rayo  $L$  de este entorno es perpendicular a  $\mathcal{S}$  en el punto de intersección de  $L$  con  $\mathcal{S}$ .

Como se puede inferir de estas definiciones, la regularidad de un punto en un rayo y la rectangularidad de una familia bi-paramétrica son propiedades locales.

Ahora, estamos en condiciones de enunciar el *Teorema de Malus-Dupin*.

**Teorema 2.4 (Teorema de Malus-Dupin).** Una familia de rayos bi-paramétrica rectangular que entra en un sistema óptico con cualquier número de superficies diferenciables reflectantes o refractantes sigue siendo rectangular en cada medio transparente, homogéneo e isótropo en el que se propague.

Una prueba del Teorema de Malus-Dupin fue desarrollada por *William Roman Hamilton* entre 1827 y 1828. En las siguientes secciones, mostraremos las correspondientes demostraciones, tanto para la reflexión como para la refracción.

## 2.2. Teorema de Malus-Dupin para la reflexión

En esta sección se presenta la demostración del Teorema de Malus-Dupin desarrollada por Hamilton para el caso particular de la reflexión. Será necesario fijar ciertas nociones y mostrar previamente algunas fórmulas matemáticas para las reflexiones que facilitarán la prueba.



### 2.2.1. Notaciones y fórmulas para las reflexiones

Consideramos una familia de rayos bi-paramétrica  $\mathcal{F}$  que se reflejan en una superficie diferenciable  $M$  y suponemos que cada rayo de  $\mathcal{F}$  se interseca transversalmente con  $M$ . Establecemos la siguiente notación (véase Fig. 2.2):

- $O$  un punto fijo de  $\mathbb{R}^3$  tomado como el origen.
- $k = (k_1, k_2)$  parámetro en la familia de rayos bi-paramétrica  $\mathcal{F}$  definido en un entorno abierto  $V$  de  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ . Cada  $k$  representa un rayo de  $\mathcal{F}$ .
- $\overrightarrow{L_1(k)}$  el rayo incidente de  $\mathcal{F}$  con parámetro  $k \in V$ .
- $\overrightarrow{u_1(k)}$  el vector director unitario de  $L_1(k)$ , cuyo sentido está determinado por la orientación de  $L_1(k)$ .
- $\overrightarrow{P(k)}$  el punto de intersección de  $L_1(k)$  con la superficie  $M$ .
- $\overrightarrow{n(k)}$  el vector unitario ortogonal a  $M$  en  $P(k)$  dirigido hacia el lado reflectante de la superficie  $M$ .
- $\overrightarrow{L_2(k)}$  el correspondiente rayo reflejado.
- $\overrightarrow{u_2(k)}$  el vector director unitario de  $L_2(k)$ , cuyo sentido está determinado por la orientación de  $L_2(k)$ .
- $M_1(k)$  y  $M_2(k)$  puntos en  $L_1(k)$  y  $L_2(k)$ , respectivamente.

Los puntos  $M_1(k)$  y  $M_2(k)$  los podemos escoger libremente, incluso pueden ser elegidos detrás del espejo  $M$  en las rectas que soportan a los rayos  $L_1(k)$  y  $L_2(k)$ .

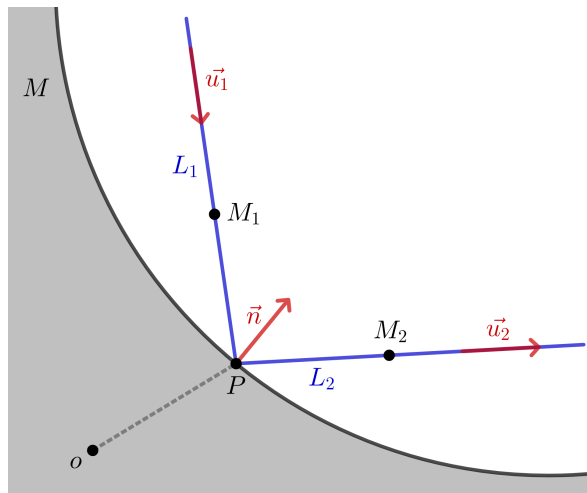


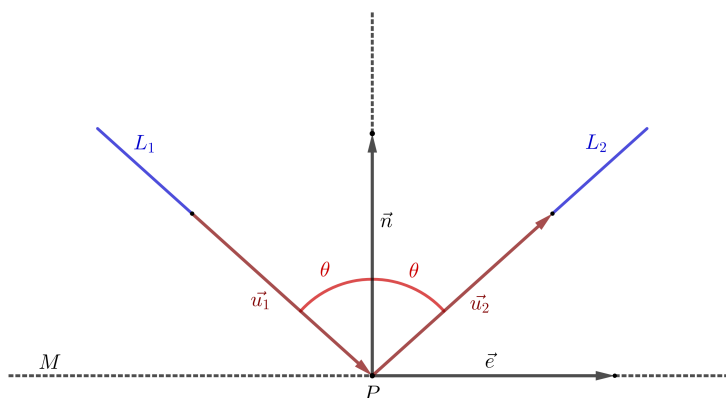
Figura 2.2. Reflexión

Para obtener las fórmulas para las reflexiones previamente será necesario probar el siguiente lema.

**Lema 2.5.** Los vectores  $\overrightarrow{u_1(k)} - \overrightarrow{u_2(k)}$  y  $\overrightarrow{n(k)}$  son paralelos.

*Demostración.* Sabemos por las leyes de la reflexión presentadas en la Sección 1.4 que:

1. Los vectores  $\overrightarrow{u_1(k)}$ ,  $\overrightarrow{u_2(k)}$  y  $\overrightarrow{n(k)}$  son coplanarios.
2. El ángulo de incidencia  $\theta_1(k)$  y de reflexión  $\theta_2(k)$  respecto del vector  $\overrightarrow{n(k)}$  son iguales. Es por ello que los denotaremos por un único  $\theta(k)$  (véase Fig. 2.3).



**Figura 2.3.** Reflexión

Tomamos un sistema de referencia ortonormal  $\{P(k); \overrightarrow{e(k)}, \overrightarrow{n(k)}\}$  del plano determinado por los vectores  $\overrightarrow{n(k)}$  y  $\overrightarrow{u_1(k)}$ , con  $\overrightarrow{e(k)}$  un vector unitario perpendicular a  $\overrightarrow{n(k)}$ . Entonces, los vectores  $\overrightarrow{u_1(k)}$ ,  $\overrightarrow{u_2(k)}$  y  $\overrightarrow{n(k)}$  tienen las siguientes coordenadas respecto de la base  $\{\overrightarrow{e(k)}, \overrightarrow{n(k)}\}$  (véase Fig. 2.3)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{n(k)} &= (0, 1), \\ \overrightarrow{u_1(k)} &= (\sin(\theta(k)), -\cos(\theta(k))), \\ \overrightarrow{u_2(k)} &= (\sin(\theta(k)), \cos(\theta(k))),\end{aligned}\tag{2.1}$$

tal que  $0 \leq \theta(k) < \pi/2$  (nótese que todos los rayos son transversales a  $M$ ).

Además, si  $\theta(k) = 0$  el resultado es obvio. Así, que podemos suponer que  $0 < \theta(k) < \pi/2$ .

Como el vector  $\overrightarrow{n(k)}$  es coplanario con  $\overrightarrow{u_1(k)}$  y  $\overrightarrow{u_2(k)}$ , existen  $A, B \in \mathbb{R}$  tales que

$$\overrightarrow{n(k)} = A\overrightarrow{u_1(k)} + B\overrightarrow{u_2(k)}.$$

De (2.1) deducimos que

$$(0, 1) = A(\sin(\theta(k)), -\cos(\theta(k))) + B(\sin(\theta(k)), \cos(\theta(k))), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Por tanto,

$$\begin{cases} 0 = (A + B) \sin(\theta(k)) \\ 1 = (B - A) \cos(\theta(k)) \end{cases}$$

con solución

$$A = \frac{-1}{2 \cos(\theta(k))} \quad \text{y} \quad B = \frac{1}{2 \cos(\theta(k))}.$$

Concluyendo así que

$$\overrightarrow{n(k)} = \frac{-1}{2 \cos(\theta(k))} (\overrightarrow{u_1(k)} - \overrightarrow{u_2(k)}), \quad (2.2)$$

es decir, los vectores  $\overrightarrow{u_1(k)} - \overrightarrow{u_2(k)}$  y  $\overrightarrow{n(k)}$  son paralelos. □

En lo que sigue y para simplificar, utilizaremos la siguiente notación:

- $\overrightarrow{M_1(k)} \equiv \overrightarrow{OM_1(k)}$ ,  $\overrightarrow{M_2(k)} \equiv \overrightarrow{OM_2(k)}$ ,  $\overrightarrow{P(k)} \equiv \overrightarrow{OP(k)}$ .
- Denotaremos por  $[A(k)B(k)]$  el módulo del vector  $\overrightarrow{A(k)B(k)}$ , que tendrá signo + si la luz se propaga desde  $A(k)$  hasta  $B(k)$  y signo – en caso contrario. Se tiene que

$$\overrightarrow{M_1(k)P(k)} = [M_1(k)P(k)]\overrightarrow{u_1(k)}, \quad \overrightarrow{P(k)M_2(k)} = [P(k)M_2(k)]\overrightarrow{u_2(k)} \quad (2.3)$$

- Si  $F: V \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función que depende de los parámetros  $k = (k_1, k_2)$  entonces  $dF$  denota la matriz jacobiana de  $F$ .

A continuación, aplicando el Lema 2.5, demostraremos el siguiente resultado.

**Proposición 2.6.** *En el proceso de reflexión y con la notación descrita con anterioridad, se tiene la siguiente igualdad*

$$\overrightarrow{u_2(k)} \cdot d\overrightarrow{M_2(k)} - \overrightarrow{u_1(k)} \cdot d\overrightarrow{M_1(k)} = d([M_1(k)P(k)] + [P(k)M_2(k)]). \quad (2.4)$$

*Demostración.* Diferenciando (2.3) se tiene que

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{P(k)} - d\overrightarrow{M_1(k)} &= d[M_1(k)P(k)]\overrightarrow{u_1(k)} + [M_1(k)P(k)]d\overrightarrow{u_1(k)}, \\ d\overrightarrow{M_2(k)} - d\overrightarrow{P(k)} &= d[P(k)M_2(k)]\overrightarrow{u_2(k)} + [P(k)M_2(k)]d\overrightarrow{u_2(k)}. \end{aligned}$$

Multiplicando escalarmente por  $\overrightarrow{u_1(k)}$ , la primera ecuación y por  $\overrightarrow{u_2(k)}$ , la segunda ecuación, deducimos que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dP(k)} \cdot \overrightarrow{u_1(k)} - \overrightarrow{dM_1(k)} \cdot \overrightarrow{u_1(k)} &= d[M_1(k)P(k)], \\ \overrightarrow{dM_2(k)} \cdot \overrightarrow{u_2(k)} - \overrightarrow{dP(k)} \cdot \overrightarrow{u_2(k)} &= d[P(k)M_2(k)]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Hemos usado que los vectores  $\overrightarrow{u_1(k)}$  y  $\overrightarrow{u_2(k)}$  son unitarios y que, por tanto,

$$d(\overrightarrow{u_1(k)} \cdot \overrightarrow{u_1(k)}) = 0,$$

es decir,  $\overrightarrow{u_1(k)} \cdot d\overrightarrow{u_1(k)} = 0$  (análogamente,  $\overrightarrow{u_2(k)} \cdot d\overrightarrow{u_2(k)} = 0$ ).

Sumando ahora las dos ecuaciones de (2.5) se tiene que

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{u_1(k)} - \overrightarrow{u_2(k)}) \cdot \overrightarrow{dP(k)} &= \overrightarrow{u_1(k)} \cdot \overrightarrow{dM_1(k)} - \overrightarrow{u_2(k)} \cdot \overrightarrow{dM_2(k)} \\ &\quad + d([M_1(k)P(k)] + [P(k)M_2(k)]). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Además, cualquier variación infinitesimal  $\overrightarrow{dP(k)}$  del vector  $\overrightarrow{P(k)}$  es tangente a la superficie  $M$  en el punto  $P(k)$ , por tanto, es ortogonal a  $\overrightarrow{n(k)}$ . Esto implica que  $\overrightarrow{dP(k)} \cdot \overrightarrow{n(k)} = 0$ . En consecuencia, de esta relación y del Lema 2.5, concluimos

$$(\overrightarrow{u_1(k)} - \overrightarrow{u_2(k)}) \cdot \overrightarrow{dP(k)} = 0. \quad (2.7)$$

Finalmente, la igualdad (2.4) se sigue de las ecuaciones (2.6) y (2.7).  $\square$

### 2.2.2. Demostración del teorema para las reflexiones

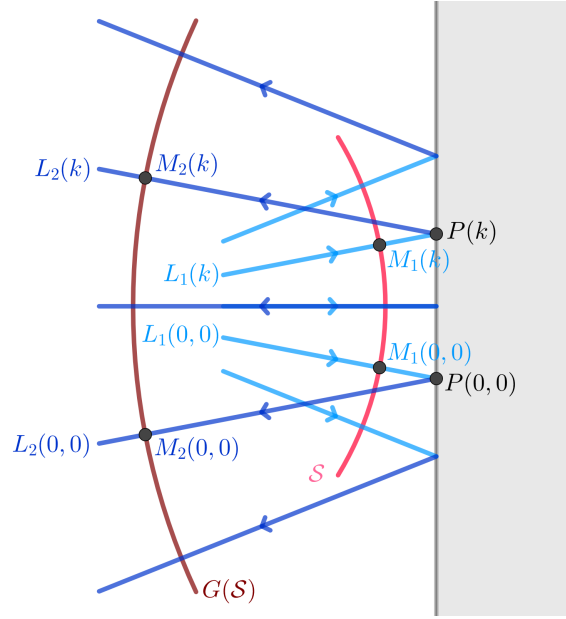
En esta subsección se demuestra el Teorema de Malus-Dupin para el caso particular de la reflexión.

**Teorema 2.7 (Teorema de Malus-Dupin para la reflexión).** *Si una familia de rayos bi-paramétrica rectangular incide transversalmente en una superficie reflectante diferenciable, la correspondiente familia de rayos reflejados también es rectangular.*

*Demostración.* Tomamos un punto regular  $M_1(0, 0)$  sobre el rayo  $L_1(0, 0)$ . Como la familia de rayos incidentes es rectangular, existe una superficie diferenciable  $\mathcal{S}$  que contiene a  $M_1(0, 0)$ , de manera que los rayos  $L_1(k)$  inciden ortogonalmente, para todo  $k$  en un entorno de  $(0, 0)$ .

Como punto  $M_1(k)$  en el rayo incidente  $L_1(k)$ , elegimos el punto en el que el rayo  $L_1(k)$  cruza ortogonalmente a  $\mathcal{S}$ . Tomamos  $M_2(0, 0)$  un punto regular en el rayo reflejado  $L_2(0, 0)$  (véase Fig. 2.4). Denotamos por  $\mathcal{C}$  el número real

$$\mathcal{C} = [M_1(0, 0)P(0, 0)] + [P(0, 0)M_2(0, 0)].$$



**Figura 2.4.** Teorema de Malus-Dupin para la reflexión

Ahora consideramos  $M_2(k)$  el único punto de  $L_2(k)$  tal que

$$[M_1(k)P(k)] + [P(k)M_2(k)] = \mathcal{C}.$$

Se sigue que

$$d([M_1(k)P(k)] + [P(k)M_2(k)]) = 0. \quad (2.8)$$

Por otro lado, como  $M_1(k) \in \mathcal{S}$  y  $L_1(k)$  incide ortogonalmente en  $\mathcal{S}$ , entonces

$$\overrightarrow{u_1(k)} \cdot d\overrightarrow{M_1(k)} = 0. \quad (2.9)$$

Finalmente, aplicando las igualdades (2.8) y (2.9) a la ecuación (2.4), se tiene que

$$\overrightarrow{u_2(k)} \cdot d\overrightarrow{M_2(k)} = 0. \quad (2.10)$$

De esta forma, definimos la aplicación  $G : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$G(M_1(k)) = M_2(k), \quad \forall M_1(k) \in \mathcal{S}.$$

Veamos que  $G$  es inyectiva. Sean  $M_1(k), M_1(k') \in \mathcal{S}$  tales que

$$G(M_1(k)) = G(M_1(k')) = M_2(k) = M_2(k').$$

Como  $M_2(k) = M_2(k')$  está suficientemente cerca a  $M_2(0,0)$  y  $M_2(0,0)$  es un punto regular de los rayos reflejados, se sigue que  $k = k'$  y, por tanto,  $M_1(k) = M_1(k')$ .

En consecuencia, cuando  $k$  varía en un entorno de  $(0, 0)$  los puntos  $M_2(k)$  determinan una superficie diferenciable  $G(\mathcal{S})$  contenida en  $\mathbb{R}^3$ .

Por la ecuación (2.10), los rayos  $L_2(k)$  inciden ortogonalmente en esa nueva superficie. Concluyendo así que la familia de rayos reflectada es rectangular.  $\square$

## 2.3. Teorema de Malus-Dupin para la refracción

A continuación, se presentará la demostración del Teorema de Malus-Dupin realizada por Hamilton para el caso de las refracciones.

Previamente probaremos algunas fórmulas matemáticas para las refracciones, que son análogas a las que hemos obtenido en el caso de la reflexión.

### 2.3.1. Notaciones y fórmulas para las refracciones

Nuevamente, consideramos una familia de rayos bi-paramétrica  $\mathcal{F}$  que se refracta a través de una superficie diferenciable  $M$ . Suponemos que el rayo incidente y el correspondiente rayo refractado son transversales a la superficie de refracción  $M$  en el punto de intersección. En el caso de la refracción usaremos la misma notación de la Subsección 2.2.1 sustituyendo la palabra reflexión por refracción (véase Fig. 2.5).

Adicionalmente, denotamos por  $n_1$  y  $n_2$  los índices de refracción de los dos medios transparentes separados por la superficie diferenciable  $M$ . En lo que sigue supondremos que  $n_1 \neq n_2$ .

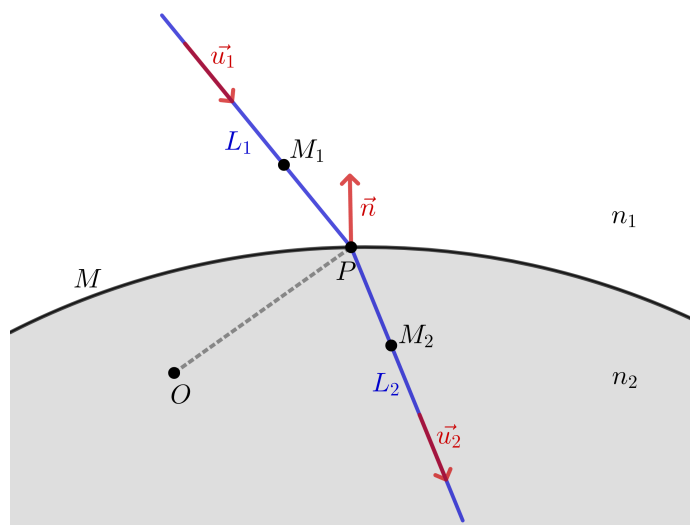


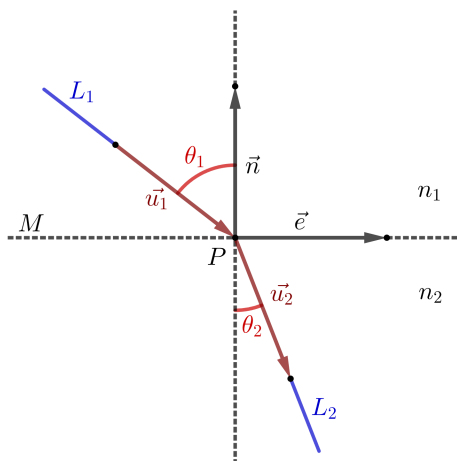
Figura 2.5. Refracción

Probaremos ahora el siguiente Lema, análogo al Lema 2.5 pero para el proceso de refracción.

**Lema 2.8.** *Los vectores  $n_1 \overrightarrow{u_1(k)} - n_2 \overrightarrow{u_2(k)}$  y  $\overrightarrow{n(k)}$  son paralelos.*

*Demostración.* Aplicando las leyes de la refracción presentadas en la Sección 1.4 tenemos que:

1. Los vectores  $\overrightarrow{u_1(k)}$ ,  $\overrightarrow{u_2(k)}$  y  $\overrightarrow{n(k)}$  son coplanarios.
2. El ángulo de incidencia  $\theta_1(k)$  y el ángulo de refracción  $\theta_2(k)$  están relacionados por la fórmula  $n_1 \sin(\theta_1(k)) = n_2 \sin(\theta_2(k))$ .



**Figura 2.6.** Refracción

Tomando un sistema de referencia ortonormal  $\{P(k); \overrightarrow{e(k)}, \overrightarrow{n(k)}\}$  del plano determinado por los vectores  $\overrightarrow{n(k)}$  y  $\overrightarrow{u_1(k)}$ , donde  $\overrightarrow{e(k)}$  es un vector unitario perpendicular a  $\overrightarrow{n(k)}$ . Entonces, respecto de la base  $\{\overrightarrow{e(k)}, \overrightarrow{n(k)}\}$  los vectores  $\overrightarrow{u_1(k)}$ ,  $\overrightarrow{u_2(k)}$  y  $\overrightarrow{n(k)}$  tienen las siguientes coordenadas (véase Fig. 2.6)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n(k)} &= (0, 1), \\ \overrightarrow{u_1(k)} &= (\sin(\theta_1(k)), -\cos(\theta_1(k))), \\ \overrightarrow{u_2(k)} &= (\sin(\theta_2(k)), -\cos(\theta_2(k))), \end{aligned} \tag{2.11}$$

tal que  $0 \leq \theta_1(k), \theta_2(k) < \pi/2$  (nótese que todos los rayos son transversales a  $M$ ). Como el vector  $\overrightarrow{n(k)}$  es coplanario con  $\overrightarrow{u_1(k)}$  y  $\overrightarrow{u_2(k)}$ , existen  $A, B \in \mathbb{R}$  tales que

$$\overrightarrow{n(k)} = A\overrightarrow{u_1(k)} + B\overrightarrow{u_2(k)}.$$

De (2.11) deducimos que

$$(0, 1) = A(\sin(\theta_1(k)), -\cos(\theta_1(k))) + B(\sin(\theta_2(k)), -\cos(\theta_2(k))), \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Por tanto,

$$\begin{cases} 0 = A \sin(\theta_1(k)) + B \sin(\theta_2(k)) \\ 1 = -A \cos(\theta_1(k)) - B \cos(\theta_2(k)) \end{cases}$$

con solución

$$A = \frac{-n_1}{n_1 \cos(\theta_1(k)) - n_2 \cos(\theta_2(k))} \quad \text{y} \quad B = \frac{n_2}{n_1 \cos(\theta_1(k)) - n_2 \cos(\theta_2(k))}.$$

Aquí, hemos usado que  $n_1 \sin(\theta_1(k)) = n_2 \sin(\theta_2(k))$ .

Nótese que  $n_1 \cos(\theta_1(k)) \neq n_2 \cos(\theta_2(k))$ . Ya que, en caso contrario, como  $n_1 \sin(\theta_1(k)) = n_2 \sin(\theta_2(k))$ , concluiríamos que  $\tan(\theta_1(k)) = \tan(\theta_2(k))$ , es decir,  $\theta_1(k) = \theta_2(k)$  y  $n_1 = n_2$  lo cual es una contradicción. Así que,

$$\overrightarrow{n(k)} = \frac{-1}{n_1 \cos(\theta_1(k)) - n_2 \cos(\theta_2(k))} (\overrightarrow{n_1 u_1(k)} - \overrightarrow{n_2 u_2(k)}), \quad (2.12)$$

es decir, los vectores  $\overrightarrow{n_1 u_1(k)} - \overrightarrow{n_2 u_2(k)}$  y  $\overrightarrow{n(k)}$  son paralelos. □

El Lema 2.8 nos permite demostrar el siguiente resultado.

**Proposición 2.9.** *Teniendo en cuenta la notación anterior se tiene la siguiente igualdad*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{n_2 u_2(k)} \cdot d\overrightarrow{M_2(k)} - \overrightarrow{n_1 u_1(k)} \cdot d\overrightarrow{M_1(k)} = & d(n_1[M_1(k)P(k)] \\ & + n_2[P(k)M_2(k)]). \end{aligned} \quad (2.13)$$

*Demostración.* Como en la Sección 2.2.1, para simplificar utilizaremos la siguiente notación:

$$\overrightarrow{M_1(k)} \equiv \overrightarrow{OM_1(k)}, \quad \overrightarrow{M_2(k)} \equiv \overrightarrow{OM_2(k)}, \quad \overrightarrow{P(k)} \equiv \overrightarrow{OP(k)}.$$

En tal caso,

$$\overrightarrow{M_1(k)P(k)} = [M_1(k)P(k)]\overrightarrow{u_1(k)}, \quad \overrightarrow{P(k)M_2(k)} = [P(k)M_2(k)]\overrightarrow{u_2(k)}. \quad (2.14)$$

Diferenciando (2.14) y multiplicando escalarmente por  $\overrightarrow{n_1 u_1(k)}$  la primera ecuación y por  $\overrightarrow{n_2 u_2(k)}$  la segunda, obtenemos

$$\begin{aligned} n_1 d\overrightarrow{P(k)} \cdot \overrightarrow{u_1(k)} - n_1 d\overrightarrow{M_1(k)} \cdot \overrightarrow{u_1(k)} &= n_1 d[M_1(k)P(k)], \\ n_2 d\overrightarrow{M_2(k)} \cdot \overrightarrow{u_2(k)} - n_2 d\overrightarrow{P(k)} \cdot \overrightarrow{u_2(k)} &= n_2 d[P(k)M_2(k)]. \end{aligned} \quad (2.15)$$



Nota que  $\overrightarrow{u_1(k)} \cdot d\overrightarrow{u_1(k)} = 0$  y  $\overrightarrow{u_2(k)} \cdot d\overrightarrow{u_2(k)} = 0$ , ya que los vectores  $\overrightarrow{u_1(k)}$  y  $\overrightarrow{u_2(k)}$  son unitarios.

Sumando ahora las dos ecuaciones de (2.15) se deduce

$$\begin{aligned} (n_1\overrightarrow{u_1(k)} - n_2\overrightarrow{u_2(k)}) \cdot d\overrightarrow{P(k)} = & n_1\overrightarrow{u_1(k)} \cdot d\overrightarrow{M_1(k)} - n_2\overrightarrow{u_2(k)} \cdot d\overrightarrow{M_2(k)} \\ & + d(n_1[M_1(k)P(k)] + n_2[P(k)M_2(k)]). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Además, cualquier variación infinitesimal  $d\overrightarrow{P(k)}$  del vector  $\overrightarrow{P(k)}$  es tangente a la superficie  $M$  en el punto  $P(k)$ , por tanto, es ortogonal a  $\overrightarrow{n(k)}$ . De esta forma tenemos que  $d\overrightarrow{P(k)} \cdot \overrightarrow{n(k)} = 0$ . En consecuencia, de esta relación y del Lema 2.8, obtenemos

$$(n_1\overrightarrow{u_1(k)} - n_2\overrightarrow{u_2(k)}) \cdot d\overrightarrow{P(k)} = 0. \quad (2.17)$$

Así, la igualdad (2.13) se sigue de las ecuaciones (2.16) y (2.17).  $\square$

### 2.3.2. Demostración del teorema para las refracciones

En esta subsección demostraremos el Teorema de Malus-Dupin para la refracción, de manera análoga a la prueba realizada para la reflexión en la Subsección 2.2.2.

**Teorema 2.10 (Teorema de Malus-Dupin para la refracción).** *Si una familia de rayos bi-paramétrica rectangular contenidos en un medio transparente con índice de refracción  $n_1$  se refracta, a través de una superficie diferenciable, en otro medio transparente con índice de refracción  $n_2$ , tal que  $n_1 \neq n_2$ , entonces la correspondiente familia de rayos refractados también es rectangular.*

*Demostración.* Tomamos un punto regular  $M_1(0,0)$  sobre el rayo  $L_1(0,0)$ . La rectangularidad de la familia de rayos incidente y la regularidad del punto  $M_1(0,0)$ , implican que existe una superficie diferenciable  $\mathcal{Y}$  que contiene a  $M_1(0,0)$ , de manera que, para todo  $k$  en un entorno de  $(0,0)$ , los rayos  $L_1(k)$  inciden ortogonalmente sobre la superficie  $\mathcal{Y}$ .

Como punto  $M_1(k)$  en el rayo incidente  $L_1(k)$  elegimos el punto en el que el rayo  $L_1(k)$  cruza ortogonalmente a  $\mathcal{Y}$ . Tomamos  $M_2(0,0)$  un punto regular en el rayo refractado  $L_2(0,0)$  (véase Fig. 2.7). Denotamos por  $\mathcal{C}$  el número real

$$\mathcal{C} = n_1[M_1(0,0)P(0,0)] + n_2[P(0,0)M_2(0,0)].$$

Sea  $M_2(k)$  un punto del rayo refractado  $L_2(k)$  de manera que

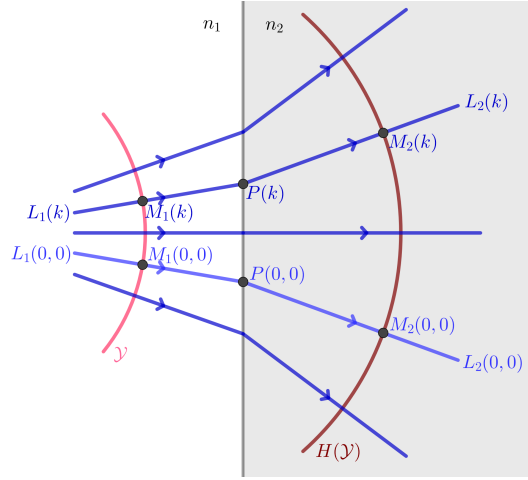


Figura 2.7. Teorema de Malus-Dupin para la refracción

$$n_1[M_1(k)P(k)] + n_2[P(k)M_2(k)] = \mathcal{C}.$$

Se sigue que

$$d(n_1[M_1(k)P(k)] + n_2[P(k)M_2(k)]) = 0. \quad (2.18)$$

Por otro lado, como  $M_1(k) \in \mathcal{Y}$  y  $L_1(k)$  incide ortogonalmente en  $\mathcal{Y}$ , entonces

$$\overrightarrow{u_1(k)} \cdot \overrightarrow{dM_1(k)} = 0. \quad (2.19)$$

Finalmente, aplicando las igualdades (2.18) y (2.19) a la ecuación (2.13) se tiene que

$$n_2 \overrightarrow{u_2(k)} \cdot \overrightarrow{dM_2(k)} = 0 \quad \text{y, por tanto,} \quad \overrightarrow{u_2(k)} \cdot \overrightarrow{dM_2(k)} = 0. \quad (2.20)$$

De esta forma, definimos la aplicación  $H : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$H(M_1(k)) = M_2(k), \quad \forall M_1(k) \in \mathcal{Y}.$$

De la regularidad de  $M_2(k)$  deducimos que  $H$  es inyectiva. Esto implica que cuando  $k$  varía en un entorno de  $(0, 0)$ , los puntos  $M_2(k)$  forman una superficie diferenciable  $H(\mathcal{Y})$  contenida en  $\mathbb{R}^3$ .

Por la ecuación (2.20), los rayos  $L_2(k)$  inciden ortogonalmente en esta nueva superficie. Concluimos así que la familia de rayos refractada es rectangular.  $\square$

## Teorema de Malus-Dupin desde la Geometría Simpléctica

El objetivo fundamental de este último capítulo es interpretar el Teorema de Malus-Dupin en términos de la geometría simpléctica y subvariedades lagrangianas (véase [6]). Previamente introduciremos las herramientas necesarias del álgebra y la geometría simpléctica para desarrollar esta interpretación (para más detalles, véase [5]).

### 3.1. Álgebra Simpléctica

En esta sección definiremos los espacios vectoriales simplécticos e introduciremos la noción de ortogonalidad en estos espacios.

#### 3.1.1. Espacios vectoriales simplécticos

Sea  $V$  un espacio vectorial real de dimensión  $m$  y  $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  una 2-forma sobre  $V$ , esto es,  $\omega$  es una forma  $\mathbb{R}$ -bilineal y antisimétrica sobre  $V$ .

Consideramos la aplicación lineal  $b_\omega : V \rightarrow V^*$  dada, para todo  $x \in V$ , por

$$\begin{aligned} b_\omega(x) : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto b_\omega(x)(y) = \omega(x, y). \end{aligned}$$

El rango de  $\omega$  se define como la dimensión del subespacio  $b_\omega(V)$  y se denota como  $\text{rang } \omega$ . De esta manera, se dice que  $\omega$  es no degenerada si  $\omega$  es de rango máximo, esto es,  $\text{rang } \omega = m$ . Nota que  $\omega$  es no degenerada, si y sólo si,  $b_\omega$  es un isomorfismo lineal.

**Proposición 3.1.** *Sea  $\omega$  una 2-forma sobre un espacio vectorial  $V$  de dimensión  $m$ . Entonces existe un entero par  $2s \leq m$  y una base  $\{u_1, \dots, u_m\}$  de  $V$  tal que:*

- (a)  $\omega(u_i, u_{s+i}) = -\omega(u_{s+i}, u_i) = 1$ , para  $1 \leq i \leq s$ .
- (b)  $\omega(u_j, u_k) = 0$  para otros valores de  $j$  y  $k$ .

*Demostración.* Si  $\omega = 0$ , el resultado se cumple tomando  $s = 0$  y cualquier base de  $V$ . En particular, esto ocurre cuando la dimensión de  $V$  es 1. Por tanto, supongamos que  $\omega \neq 0$ .

A continuación, realizaremos la prueba por inducción sobre la dimensión de  $V$  para  $\dim V \geq 2$ .

1. Supongamos que  $\dim V = 2$ . Sea  $u_1 \in V$  tal que  $u_1 \neq 0$ . Como  $\omega \neq 0$ , podemos elegir  $u_2 \in V$  tal que

$$\omega(u_1, u_2) = -\omega(u_2, u_1) = 1.$$

Así,  $\{u_1, u_2\}$  es una base de  $V$ , ya que si  $\{u_1, u_2\}$  fuera un sistema dependiente, entonces existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $u_2 = \lambda u_1$ , es decir,

$$\omega(u_1, u_2) = \lambda \omega(u_1, u_1) = 0.$$

En consecuencia, el resultado queda probado tomando  $s = 1$ .

2. Suponemos el resultado cierto para  $\dim V < m$  y probaremos que se cumple para  $\dim V = m \geq 2$ . Elegimos  $u_1, u_{s+1} \in V$  tales que

$$\omega(u_1, u_{s+1}) = -\omega(u_{s+1}, u_1) = 1.$$

Sea  $F = \langle u_1, u_{s+1} \rangle$  el subespacio de  $V$  generado por  $u_1$  y  $u_{s+1}$ . Como  $u_1$  y  $u_{s+1}$  son independientes, se tiene que  $\dim F = 2$ . Consideramos el subespacio  $W$  de  $V$  dado por

$$W = \{u \in V \mid \omega(u, u_1) = \omega(u, u_{s+1}) = 0\}.$$

Demostremos que

$$V = F \oplus W. \tag{3.1}$$

- Por un lado, veremos que  $F \cap W = \{0\}$ . En efecto, si  $u \in F \cap W$ , entonces  $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_{s+1}$ . Además,

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(u, u_1) = -\lambda_2, \\ 0 &= \omega(u, u_{s+1}) = \lambda_1. \end{aligned}$$

Por tanto,  $u = 0$ .

- Por otro lado, veamos que  $\dim V = \dim W + \dim F$ . Consideramos la aplicación lineal  $T: V \rightarrow F^*$  dada por

$$T = i_F^* \circ \flat_\omega$$

donde  $i_F: F \rightarrow V$  es la inclusión e  $i_F^*: V^* \rightarrow F^*$  es la aplicación dual a  $i_F$ . Entonces,

$$T(u) = \flat_\omega(u)|_F: F \rightarrow \mathbb{R}, \quad \forall u \in V.$$

Se tiene que,

$$\begin{aligned} \text{Ker}(T) &= \{u \in V \mid \flat_\omega(u)|_F = 0\} = \\ &= \{u \in V \mid \omega(u, u_1) = \omega(u, u_{s+1}) = 0\} = W. \end{aligned}$$

Además, la aplicación  $T$  es sobreyectiva. Basta considerar para cada  $\alpha \in F^*$ , el vector  $u = \alpha(u_{s+1})u_1 - \alpha(u_1)u_{s+1} \in V$ . Se prueba de manera simple que  $\flat_\omega(u)|_F = \alpha$ . Aplicando ahora el Primer Teorema de Isomorfía a la aplicación  $T$  tenemos

$$\dim V = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(T(V)) = \dim W + \dim F = \dim W + 2.$$

De (3.1) y de la hipótesis de inducción aplicada a  $W$ , se sigue que existe una base  $\{u_2, \dots, u_s, u_{s+2}, \dots, u_{2s}, u_{2s+1}, \dots, u_m\}$  de  $W$  tal que

$$\begin{aligned} \omega(u_i, u_{s+i}) &= -\omega(u_{s+i}, u_i) = 1, \text{ para } 2 \leq i \leq s, \\ \omega(u_j, u_k) &= 0, \text{ para otros valores de } j, k. \end{aligned}$$

Entonces,  $\{u_1, \dots, u_s, u_{s+1}, \dots, u_{2s}, u_{2s+1}, \dots, u_m\}$  es la base de  $V$  buscada. □

Ahora, podemos introducir la siguiente definición.

**Definición 3.2.** Una estructura simpléctica sobre un espacio vectorial real  $V$  de dimensión finita es una 2-forma  $\omega$  sobre  $V$  no degenerada. En tal caso  $(V, \omega)$  se dice que es un espacio vectorial simpléctico.

La existencia de una estructura simpléctica sobre un espacio vectorial  $V$  implica restricciones sobre su dimensión, como prueba el siguiente resultado.

**Proposición 3.3.** Si  $(V, \omega)$  es un espacio vectorial simpléctico, entonces la dimensión de  $V$  es par.

*Demostración.* Si  $(V, \omega)$  es un espacio vectorial simpléctico de dimensión  $m$ , entonces  $\omega$  es no degenerada, esto es,  $\text{rang } \omega = m$ . Luego, para concluir la demostración es suficiente ver que el rango de una 2-forma  $\omega$  sobre  $V$  es un número par.

Sea  $\{u_1, \dots, u_s, u_{s+1}, \dots, u_{2s}, u_{2s+1}, \dots, u_m\}$  una base de  $V$  como en la Proposición 3.1. Consideramos la base dual  $\{u_1^*, \dots, u_s^*, u_{s+1}^*, \dots, u_{2s}^*, u_{2s+1}^*, \dots, u_m^*\}$  de  $V^*$ . Se tiene que la matriz asociada a la aplicación lineal  $\flat_\omega: V \rightarrow V^*$ , respecto de las bases  $\{u_i\}$  y  $\{u_i^*\}$  es

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Así,  $\dim (\text{Im } \flat_\omega) = \text{rang } \omega = 2s$ .

□

**Definición 3.4.** Sean  $(V_1, \omega_1)$  y  $(V_2, \omega_2)$  dos espacios vectoriales simplécticos y  $h: V_1 \rightarrow V_2$  una aplicación lineal. Decimos que  $h$  es simpléctica si

$$\omega_2(h(u_1), h(v_1)) = \omega_1(u_1, v_1), \quad \forall u_1, v_1 \in V_1.$$

Un isomorfismo simpléctico es una aplicación lineal  $h: V_1 \rightarrow V_2$  simpléctica y biyectiva. Si  $V_1 = V_2$  se dice que  $h$  es un automorfismo simpléctico.

### 3.1.2. Ortogonalidad en un espacio vectorial simpléctico

Sea  $(V, \omega)$  un espacio vectorial simpléctico de dimensión  $2n$ , introducimos a continuación la noción de ortogonalidad simpléctica.

**Definición 3.5.** Dos elementos  $x, y \in V$  se dicen ortogonales si  $\omega(x, y) = 0$ . Dos subespacios  $W$  y  $W'$  se dicen ortogonales si todo  $x \in W$  es ortogonal a todo  $y \in W'$ . Sea  $W$  un subespacio de  $V$ . El ortogonal de  $W$  es el subespacio de  $V$  dado por

$$\text{orth}_\omega W = \{x \in V \mid \omega(x, y) = 0, \forall y \in W\}.$$

Denotamos por  $W^0$  al anulador de  $W$ , esto es,

$$W^0 = \{\varphi \in V^* \mid \varphi(x) = 0, \forall x \in W\}.$$

Nota que

$$\dim W + \dim W^0 = 2n \tag{3.2}$$

A continuación, mostraremos algunas propiedades que relacionan  $W^0$  y  $\text{orth}_\omega W$ .

**Proposición 3.6.** Sean  $(V, \omega)$  un espacio vectorial simpléctico de dimensión  $2n$  y  $W$  un subespacio vectorial de  $V$ . Entonces:

- (a)  $\flat_\omega(\text{orth}_\omega W) = W^0$ .
- (b)  $\dim W + \dim (\text{orth}_\omega W) = 2n$ .
- (c)  $\text{orth}_\omega(\text{orth}_\omega W) = W$ .
- (d)  $\flat_\omega(W) = (\text{orth}_\omega W)^0$ .

*Demostración.* Puesto que  $\omega$  es una forma simpléctica,  $\flat_\omega$  es un isomorfismo lineal.

- (a) Si  $\varphi \in \mathfrak{b}_\omega(\text{orth}_\omega W)$ , entonces existe  $x \in \text{orth}_\omega W$  tal que  $\varphi = \mathfrak{b}_\omega(x)$ . Así,  $\varphi(y) = \mathfrak{b}_\omega(x)(y) = \omega(x, y)$ , para todo  $y \in W$ . Como  $x \in \text{orth}_\omega W$ , se tiene que

$$0 = \omega(x, y) = \varphi(y), \quad \forall y \in W.$$

Por tanto, concluimos que  $\varphi \in W^0$ . Esto es,  $\mathfrak{b}_\omega(\text{orth}_\omega W) \subseteq W^0$ .

Para probar el otro contenido, consideramos  $\varphi \in W^0$ . Entonces  $\varphi \in V^*$  y  $\varphi(y) = 0$ , para todo  $y \in W$ . Como  $\mathfrak{b}_\omega$  es un isomorfismo, existe  $x \in V$  tal que  $\mathfrak{b}_\omega(x) = \varphi$ . Luego,

$$\varphi(y) = \mathfrak{b}_\omega(x)(y) = \omega(x, y) = 0, \quad \forall y \in W.$$

Entonces,  $x \in \text{orth}_\omega W$ . Concluimos así que  $\varphi \in \mathfrak{b}_\omega(\text{orth}_\omega W)$ .

- (b) Por la biyectividad de  $\mathfrak{b}_\omega$  y por (a), se tiene que

$$\dim(\text{orth}_\omega W) = \dim(W^0).$$

Aplicando la igualdad (3.2), deducimos que

$$\dim W + \dim(\text{orth}_\omega W) = 2n.$$

- (c) En primer lugar, veamos que  $W \subseteq \text{orth}_\omega(\text{orth}_\omega W)$ . Si  $x \in W$ , entonces

$$\omega(x, y) = 0, \quad \forall y \in \text{orth}_\omega W.$$

Luego,  $x \in \text{orth}_\omega(\text{orth}_\omega W)$ . Por otro lado, de (b) tenemos que

$$\dim W + \dim(\text{orth}_\omega W) = 2n \tag{3.3}$$

Aplicando dicha igualdad al subespacio  $\text{orth}_\omega W$ , se deduce que

$$\dim(\text{orth}_\omega W) + \dim(\text{orth}_\omega(\text{orth}_\omega W)) = 2n \tag{3.4}$$

Combinando las igualdades (3.3) y (3.4) obtenemos,

$$\dim W = \dim(\text{orth}_\omega(\text{orth}_\omega W)).$$

Por tanto,  $\text{orth}_\omega(\text{orth}_\omega W) = W$ .

- (d) Si  $\varphi \in \mathfrak{b}_\omega(W)$  entonces, existe  $x \in W$  tal que  $\varphi = \mathfrak{b}_\omega(x)$ . Luego,

$$\varphi(y) = \mathfrak{b}_\omega(x)(y) = \omega(x, y) = 0, \quad \forall y \in \text{orth}_\omega W.$$

Así,  $\varphi \in (\text{orth}_\omega W)^0$ . Concluimos entonces que  $\mathfrak{b}_\omega(W) \subseteq (\text{orth}_\omega W)^0$ .

Para mostrar el otro contenido consideramos  $\varphi \in (\text{orth}_\omega W)^0$ . Entonces,  $\varphi \in V^*$  y, para todo  $y \in \text{orth}_\omega W$ ,  $\varphi(y) = 0$ . Como  $\mathfrak{b}_\omega$  es un isomorfismo, entonces existe  $x \in V$  tal que  $\mathfrak{b}_\omega(x) = \varphi$ . Por tanto,

$$0 = \varphi(y) = \mathfrak{b}_\omega(x)(y) = \omega(x, y), \quad \forall y \in \text{orth}_\omega W.$$

Entonces,  $x \in \text{orth}_\omega(\text{orth}_\omega W) = W$ . Así, se tiene que,  $\varphi = \mathfrak{b}_\omega(x)$  con  $x \in W$ , es decir,  $\varphi \in \mathfrak{b}_\omega(W)$ .

□

Sea  $W$  un subespacio de un espacio vectorial simpléctico  $(V, \omega)$ . Denotamos por  $\omega_W: W \times W \rightarrow \mathbb{R}$  a la restricción de  $\omega$  a  $W \times W$ .

**Definición 3.7.** *Un subespacio vectorial  $W$  de  $V$  se dice:*

- *Isótropo si  $\omega_W = 0$ , es decir, si  $W \subset \text{orth}_\omega W$ .*
- *Coisótropo si  $\omega_{\text{orth}_\omega W} = 0$ , es decir, si  $\text{orth}_\omega W \subset W$ .*
- *Lagrangiano si  $W$  es isótropo y coisótropo, es decir, si  $W = \text{orth}_\omega W$ .*
- *Simpléctico si  $\omega_W$  define una estructura simpléctica en  $W$ , es decir, si*

$$W \cap \text{orth}_\omega W = \{0\}.$$

El siguiente resultado relaciona los subespacios isótropos (resp. coisótropos) con los subespacios lagrangianos.

**Proposición 3.8.** *Sea  $(V, \omega)$  un espacio vectorial simpléctico de dimensión  $2n$ .*

- (a) *La dimensión de un subespacio isótropo (resp. coisótropo) es menor o igual que  $n$  (resp. mayor o igual que  $n$ ).*
- (b) *Un subespacio isótropo (resp. coisótropo) es lagrangiano, si y sólo si, es de dimensión  $n$ .*

*Demostración.* Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $2n$  y  $W$  un subespacio vectorial de  $V$ .

- (a) Si  $W$  es isótropo, entonces  $W \subseteq \text{orth}_\omega W$ . Luego,  $\dim W \leq \dim (\text{orth}_\omega W)$ . Aplicando ahora el apartado (b) de la Proposición 3.6, se tiene que

$$\dim W \leq 2n - \dim W.$$

En consecuencia,  $\dim W \leq n$ .

Análogamente, si  $W$  es coisótropo, se prueba que  $\dim W \geq n$ .

- (b) Sea  $W$  un subespacio isótropo (resp. coisótropo) de  $V$ . Si  $W$  es lagrangiano, entonces  $W = \text{orth}_\omega W$ . Por tanto,

$$\dim W = \dim (\text{orth}_\omega W).$$

Luego, aplicando nuevamente el apartado (b) de la Proposición 3.6, se tiene que  $\dim W = n$ .

Recíprocamente, si  $\dim W = n$ , entonces, por el apartado (b) de la Proposición 3.6,  $\dim (\text{orth}_\omega W) = n$ . Además, como  $W$  es isótropo (resp. coisótropo), se tiene que  $W \subseteq \text{orth}_\omega W$  (resp.  $\text{orth}_\omega W \subseteq W$ ). En consecuencia,  $W = \text{orth}_\omega W$ , esto es,  $W$  es lagrangiano.

□



Veamos a continuación algunos ejemplos de subespacios vectoriales lagrangianos, isótropos y coisótropos.

*Ejemplo 3.9.* Sea  $V$  un espacio vectorial simpléctico de dimensión  $2n$  y  $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$  una base de  $V$  tal que

$$\begin{aligned}\omega(e_i, e_{n+i}) &= -\omega(e_{n+i}, e_i) = 1, \quad \forall 1 \leq i \leq n, \\ \omega(e_j, e_k) &= 0, \quad \text{para otros valores de } j \text{ y } k.\end{aligned}$$

1. Los subespacios vectoriales generados por  $\{e_1, \dots, e_n\}$  y  $\{e_{n+1}, \dots, e_{2n}\}$ , respectivamente, son lagrangianos.
2. Para todo número entero  $p$  tal que  $n \leq p \leq 2n$ , el subespacio vectorial generado por  $\{e_1, \dots, e_p\}$  es coisótropo.
3. Para todo número entero  $q$  tal que  $1 \leq q \leq n$ , el subespacio vectorial generado por  $\{e_1, \dots, e_q\}$  es isótropo.

## 3.2. Geometría Simpléctica

En esta sección introduciremos las herramientas de la geometría simpléctica necesarias para nuestro propósito de dar una versión del Teorema de Malus-Dupin desde la geometría simpléctica.

### 3.2.1. Variedades simplécticas y fibrado cotangente

Sea  $S$  una variedad diferenciable y  $\omega$  una 2-forma sobre  $S$ .

**Definición 3.10.** *El rango de la 2-forma  $\omega$  en un punto  $x \in S$  es el rango de la 2-forma  $\omega_x: T_x S \times T_x S \rightarrow \mathbb{R}$ . Decimos que  $\omega$  es no degenerada si para cada punto  $x \in S$ ,  $\omega_x$  es no degenerada. Una forma casi simpléctica sobre una variedad  $S$  es una 2-forma  $\omega$  no degenerada. Al par  $(S, \omega)$  se le denomina variedad casi simpléctica.*

En consecuencia, si  $\omega$  es una forma casi simpléctica sobre  $S$ , entonces la dimensión de  $S$  es par. Además, si  $\dim S = 2n$ , se tiene que

$$\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega$$

es una forma de volumen sobre  $S$ , esto es, es una  $2n$ -forma que no se anula en ningún punto.

Para cada punto  $x \in S$ , consideramos la aplicación  $b_\omega: TS \rightarrow T^*S$  dada por

$$b_\omega(u_x)(v_x) = \omega_x(u_x, v_x), \quad \forall u_x, v_x \in T_x S.$$

Esta aplicación es un morfismo de fibrados vectoriales sobre la identidad de  $S$ , esto es,  $b_{\omega_x}|_{T_x S}: T_x S \longrightarrow T_x^* S$  es una aplicación lineal. En particular, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} TS & \xrightarrow{b_\omega} & T^*S \\ \tau_S \downarrow & & \swarrow \Pi_S \\ S & & \end{array}$$

donde  $\tau_S$  y  $\Pi_S$  son las proyecciones tangente y cotangente, respectivamente.

En efecto, veamos que,  $b_\omega$  es diferenciable. Sea  $(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^m))$  una carta local en  $S$  tal que en  $U$

$$\omega = \sum_{i,j=1}^m \frac{1}{2} \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j \quad \text{con} \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji},$$

siendo  $\omega_{ij}: U \longrightarrow \mathbb{R}$  aplicaciones diferenciables para todo  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ . De hecho,

$$\omega_{ij} = \omega \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right).$$

Consideramos las cartas en  $TS$  y  $T^*S$

$$(\tau_s^{-1}(U), \bar{\varphi} \equiv (x^1, \dots, x^m, v^1, \dots, v^m)) \text{ y } (\Pi_s^{-1}(U), \underline{\varphi} \equiv (x^1, \dots, x^m, p_1, \dots, p_m)),$$

respectivamente, deducidas de la carta  $(U, \varphi \equiv (x^1, \dots, x^m))$  en  $S$ . Así, la expresión local de  $b_\omega$  es

$$\underline{\varphi} \circ b_\omega \circ \bar{\varphi}^{-1}: \quad \bar{\varphi}(\tau_s^{-1}(U)) \subseteq \mathbb{R}^{2m} \quad \longrightarrow \quad \underline{\varphi}(\Pi_s^{-1}(U)) \subseteq \mathbb{R}^{2m} [5pt] \\ (x^1, \dots, x^m, v^1, \dots, v^m) \longmapsto (x^1, \dots, x^m, u_1, \dots, u_m)$$

con

$$u_j = \sum_{i=1}^m v^i \omega_{ij}(\varphi^{-1}(x^1, \dots, x^m)).$$

Entonces, se concluye que  $b_\omega$  es diferenciable. □

De hecho, si tiene la siguiente correspondencia entre  $\omega$  y  $b_\omega$ .

**Proposición 3.11.** *Para una 2-forma  $\omega$  sobre  $S$ , las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (a)  $\omega$  es una 2-forma casi simpléctica sobre  $S$ .
- (b)  $b_\omega: TS \longrightarrow T^*S$  es un isomorfismo de fibrados vectoriales, esto es,  $b_\omega|_{T_x S} = b_{\omega_x}: T_x S \longrightarrow T_x^* S$  es un isomorfismo lineal, para todo  $x \in S$ .

*Demostración.* Sabemos que  $\omega$  es una forma casi simpléctica sobre  $S$ , si y sólo si, para todo  $x \in S$ ,  $\omega_x$  es no degenerada; equivalentemente,  $\omega_x$  es de rango máximo para todo  $x \in S$ , o lo que es lo mismo,  $b_{\omega_x}: T_x S \rightarrow T_x^* S$  es un isomorfismo lineal para todo  $x \in S$ . □

Ahora, podemos introducir las siguientes definiciones.

**Definición 3.12.** Una forma casi simpléctica  $\omega$  sobre una variedad  $S$  se dice simpléctica si es cerrada, es decir, si  $d\omega = 0$ . En tal caso, se dice que  $(S, \omega)$  es una variedad simpléctica.

**Definición 3.13.** Sean  $(S, \omega)$  y  $(S', \omega')$  variedades simplécticas de dimensiones  $2n$  y  $2n'$ , respectivamente. Una aplicación diferenciable  $h: S \rightarrow S'$  se dice que es simpléctica si  $h^*\omega' = \omega$ , es decir,

$$\omega'_{h(x)}(T_x h(u_x), T_x h(v_x)) = \omega_x(u_x, v_x), \quad \forall x \in S \text{ y } \forall u_x, v_x \in T_x S.$$

Además, si  $h: S \rightarrow S'$  es una transformación simpléctica biyectiva (en tal caso  $n = n'$ ), decimos que  $h$  es un difeomorfismo simpléctico o un symplectomorfismo. En las condiciones anteriores, si  $S = S'$  y  $\omega = \omega'$ , decimos que  $h$  es una transformación canónica de  $(S, \omega)$ .

### 3.2.2. La estructura simpléctica canónica del fibrado cotangente

Sea  $Q$  una variedad diferenciable,  $T^*Q$  su fibrado cotangente y  $\Pi_Q: T^*Q \rightarrow Q$  la proyección canónica. Definimos la 1-forma  $\lambda_Q: T^*Q \rightarrow T^*(T^*Q)$  como sigue

$$\lambda_Q(\alpha)(v_\alpha) = \alpha(T_\alpha \Pi_Q(v_\alpha)), \quad \alpha \in T^*Q \text{ y } v_\alpha \in T_\alpha(T^*Q). \quad (3.5)$$

Veamos que  $\lambda_Q$  es diferenciable. Sea  $(U, \varphi \equiv (q^1, \dots, q^n))$  una carta local en  $Q$  y

$$(\Pi_Q^{-1}(U), \underline{\varphi} \equiv (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n))$$

la correspondiente carta inducida en  $T^*Q$ . Calculemos las componentes de  $\lambda_Q$ ,

$$\lambda_Q = \sum_{i=1}^n ((\lambda_Q)_i dq^i + (\lambda_Q)^i dp_i),$$

con

$$(\lambda_Q)_i = \lambda_Q \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \right) \quad \text{y} \quad (\lambda_Q)^i = \lambda_Q \left( \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$$

funciones sobre  $\Pi_Q^{-1}(U)$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Ahora, se tiene que la expresión local de la proyección tangente es

$$\begin{aligned} \varphi \circ \Pi_Q \circ \underline{\varphi}^{-1} : \quad \underline{\varphi}(\Pi_Q^{-1}(U)) \subseteq \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \\ (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) &\longmapsto (q^1, \dots, q^n) \end{aligned}$$

Así, para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  y para todo  $\alpha \in \Pi_Q^{-1}(U)$ ,

$$T_\alpha \Pi_Q \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_\alpha \right) = \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\Pi_Q(\alpha)} \quad \text{y} \quad T_\alpha \Pi_Q \left( \frac{\partial}{\partial p_i} \Big|_\alpha \right) = 0.$$

De esta forma, si  $\alpha \in \Pi_Q^{-1}(U)$  y  $\underline{\varphi}(\alpha) = (q^1(\alpha), \dots, q^n(\alpha), p_1(\alpha), \dots, p_n(\alpha))$ , entonces, para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\begin{aligned} (\lambda_Q)(\alpha) \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_\alpha \right) &= \alpha \left( T_\alpha \Pi_Q \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_\alpha \right) \right) = \alpha \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \Big|_{\Pi_Q(\alpha)} \right) = p_i(\alpha), \\ (\lambda_Q)(\alpha) \left( \frac{\partial}{\partial p_i} \Big|_\alpha \right) &= \alpha \left( T_\alpha \Pi_Q \left( \frac{\partial}{\partial p_i} \Big|_\alpha \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Es decir,

$$(\lambda_Q)_i = p_i \quad \text{y} \quad (\lambda_Q)^i = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Luego, la expresión local de  $\lambda_Q$  es

$$\lambda_{Q|_{\Pi_Q^{-1}(U)}} = \sum_{i=1}^n p_i dq^i. \quad (3.6)$$

Por tanto, efectivamente  $\lambda_Q$  es una 1-forma diferenciable.

**Definición 3.14.** A la 1-forma  $\lambda_Q$  se la denomina la 1-forma de Liouville de  $T^*Q$ .

El siguiente resultado caracteriza a la 1-forma de Liouville.

Si  $\beta: Q \longrightarrow T^*Q$  es una 1-forma sobre  $Q$  entonces podemos considerar la aplicación inducida  $\beta^*: \Omega^1(T^*Q) \longrightarrow \Omega^1(Q)$  entre 1-formas de  $T^*Q$  y  $Q$ .

**Proposición 3.15.** La 1-forma de Liouville  $\lambda_Q$  es la única 1-forma sobre  $T^*Q$  tal que  $\beta^* \lambda_Q = \beta$ , para cualquier 1-forma  $\beta$  sobre  $Q$ .

*Demostración.* Sea  $\beta$  una 1-forma sobre  $Q$  y  $(U, \varphi \equiv (q^1, \dots, q^n))$  una carta local en  $Q$  tal que

$$\beta = \sum_{i=1}^n \beta_i dq^i.$$

Entonces, si  $(\Pi_Q^{-1}(U), \underline{\varphi} \equiv (q^1, \dots, q^n, \beta_1(q), \dots, \beta_n(q)))$  es la carta inducida en  $T^*Q$ , tenemos que

$$\beta_i = p_i \circ \beta, \quad q^i = q^i \circ \beta, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad (3.7)$$

esto es,  $(\varphi \circ \beta \circ \varphi^{-1})(q^1, \dots, q^n) = (q^1, \dots, q^n, \beta_1(q), \dots, \beta_n(q))$ .

Así, por (3.6) y (3.7), se deduce que en  $U$

$$\beta^*(\lambda_Q) = \beta^* \left( \sum_{i=1}^n p_i dq^i \right) = \sum_{i=1}^n (p_i \circ \beta) d(q^i \circ \beta) = \sum_{i=1}^n \beta_i dq^i = \beta.$$

Para finalizar la demostración comprobamos que  $\lambda_Q$  es única.

Sea ahora  $\lambda$  una 1-forma sobre  $T^*Q$  tal que  $\beta^*\lambda = \beta$ , para cualquier 1-forma  $\beta$  sobre  $Q$ . Veamos que  $\lambda_Q = \lambda$ . Supongamos que en  $\Pi_Q^{-1}(U)$ , con  $U$  un entorno de  $q_0 \in Q$ ,

$$\lambda = \sum_{i=1}^n (a_i dq^i + b^i dp_i). \quad (3.8)$$

Entonces, en  $U$

$$\begin{aligned} \beta^*\lambda &= \sum_{i=1}^n ((a_i \circ \beta) d(q^i \circ \beta) + (b^i \circ \beta) d(p_i \circ \beta)) = \\ &= \sum_{i=1}^n ((a_i \circ \beta) dq^i + (b^i \circ \beta) d\beta_i) = \\ &= \sum_{j=1}^n \left( a_j \circ \beta + \sum_{i=1}^n (b^i \circ \beta) \frac{\partial \beta_i}{\partial q^j} \right) dq^j = \beta. \end{aligned}$$

De esta forma, se tiene que

$$\beta_j = p_j \circ \beta = a_j \circ \beta + \sum_{i=1}^n (b^i \circ \beta) \frac{\partial \beta_i}{\partial q^j}, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.9)$$

Ahora, probaremos que, para cualquier  $q \in Q$ ,

$$p_j(\gamma) = a_j(\gamma), \quad b^j(\gamma) = 0, \quad \forall \gamma \in T_q^*U. \quad (3.10)$$

En tal caso, sustituyendo en (3.8) concluimos que

$$\lambda = \sum_{i=1}^n p_i dq^i = \lambda_Q$$

y el resultado queda probado.

Sea  $\gamma \in T_q^*U$ . Supongamos que

$$\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i dq^i|_q, \text{ con } \gamma_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Consideramos  $\beta$  una 1-forma sobre  $Q$  tal que en  $U$ ,

$$\beta = \sum_{i=1}^n \gamma_i dq^i.$$

De (3.9) se sigue que en  $U$ ,  $p_j \circ \beta = a_j \circ \beta$ , para todo  $j \in \{1, \dots, n\}$ . En particular,

$$p_j(\gamma) = p_j(\beta_q) = a_j(\beta_q) = a_j(\gamma), \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Así, hemos probado que

$$a_j = p_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.11)$$

Ahora, aplicando (3.11) a (3.9) se tiene que

$$\sum_{i=1}^n b^i(\beta_q) \frac{\partial \beta_i}{\partial q^j}|_q = 0, \quad (3.12)$$

para  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\beta_q \in T_q^*Q$  y  $q \in U$ . Consideramos entonces una 1-forma  $\beta$  sobre  $Q$  tal que en  $U$  tiene la expresión

$$\beta = \sum_{i=1}^n (q^i + (\gamma_i - q_0^i)) dq^i,$$

donde  $(q_0^1, \dots, q_0^n)$  son las coordenadas de  $q_0$  respecto de la carta  $(U, \varphi \equiv (q^1, \dots, q^n))$ . Luego, de (3.12), deducimos que

$$\sum_{i=1}^n b^i(\gamma) \delta_{ij} = 0, \quad \text{esto es, } b^j(\gamma) = 0, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Hemos demostrado (3.10) y con ello la proposición. □

El siguiente resultado permite construir una estructura simpléctica sobre  $T^*Q$  a partir de la 1-forma de Liouville.

**Proposición 3.16.** *Sea  $Q$  una variedad diferenciable. Entonces, la 2-forma  $\omega_Q = -d\lambda_Q$  define una estructura simpléctica sobre  $T^*Q$ . Además, si  $(U, \varphi \equiv (q^1, \dots, q^n))$  es una carta local de  $Q$  entonces la expresión local de  $\omega_Q$  es*

$$\omega_Q = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp^i,$$

donde  $(\Pi_Q^{-1}(U), \underline{\varphi} \equiv (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n))$  es la correspondiente carta local en  $T^*Q$ .

*Demostración.* Se tiene que  $\omega_Q$  es cerrada, ya que  $d\omega_Q = -d^2\lambda_Q = 0$ . Por tanto, para probar la proposición basta ver que  $\omega_Q$  es no degenerada.

Por (3.6) tenemos que la expresión local de  $\lambda_Q$  respecto de la carta local  $(\Pi_Q^{-1}(U), \underline{\varphi} \equiv (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n))$  de  $T^*Q$  es

$$\lambda_Q = \sum_{i=1}^n p_i dq^i.$$

Por tanto, en  $\Pi_Q^{-1}(U)$  se tiene

$$\omega_Q = -d\lambda_Q = -d \sum_{i=1}^n p_i dq^i = - \sum_{i=1}^n d(p_i dq^i) = - \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq^i = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp^i.$$

Así, en  $\Pi_Q^{-1}(U)$

$$\omega_Q^n = \omega_Q \wedge \dots \wedge \omega_Q = k(dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n \wedge dp_1 \wedge \dots \wedge dp_n), \quad \text{con } k \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

En consecuencia,  $\omega_Q$  es una 2-forma no degenerada. □

**Definición 3.17.** La 2-forma  $\omega_Q$  se denomina la estructura simpléctica canónica del fibrado cotangente  $T^*Q$ .

### 3.2.3. Subvariedades lagrangianas

Introducimos en primer lugar el concepto de inmersión lagrangiana. Supongamos que  $(S, \omega)$  es una variedad simpléctica y que  $M$  es una variedad diferenciable.

**Definición 3.18.** Sea  $f: M \rightarrow S$  una aplicación diferenciable y  $x \in M$ . Se dice que  $f$  es una inmersión lagrangiana (resp. isotropa, coisótropa, simpléctica) en  $x$  si  $f$  es una inmersión en  $x$ , es decir, si  $T_x f: T_x M \rightarrow T_{f(x)} S$  es inyectiva, y si  $T_x f(T_x M)$  es un subespacio lagrangiano (resp. isotropo, coisótropo, simpléctico) del espacio vectorial simpléctico  $(T_{f(x)} S, \omega_{f(x)})$ . Se dice que  $f$  es una inmersión lagrangiana (resp. isotropa, coisótropa, simpléctica) si  $f$  posee dicha propiedad en todo punto.

Sea  $N$  una subvariedad de  $S$ .

**Definición 3.19.** Decimos que  $N$  es lagrangiana (resp. isotropa, coisótropa, simpléctica) si la inclusión  $i: N \rightarrow S$  es una inmersión lagrangiana (resp. isotropa, coisótropa, simpléctica).

A continuación, veremos cómo generar algunos ejemplos de subvariedades lagrangianas.

**Proposición 3.20.** *Sea  $Q$  una variedad de dimensión  $n$  y  $T^*Q$  su fibrado cotangente con la forma simpléctica canónica  $\omega_Q$ . Una 1-forma  $\beta: Q \rightarrow T^*Q$  en la variedad  $Q$  es una inmersión lagrangiana, si y sólo si,  $\beta$  es cerrada, esto es,  $d\beta = 0$ . En tal caso,  $\beta(Q)$  es una subvariedad lagrangiana.*

*Demostración.* En primer lugar, veremos que  $\beta: Q \rightarrow T^*Q$  es una inmersión o, equivalentemente,  $T_x\beta: T_xQ \rightarrow T_{\beta(x)}(T^*Q)$  es inyectiva, para  $x \in Q$ . En efecto, si  $v_x \in T_xQ$  y  $f \in C^\infty(Q)$  entonces,

$$\{(T_x\beta)(v_x)\}(f \circ \Pi_Q) = v_x(f \circ \Pi_Q \circ \beta) = v_x(f).$$

Así, deducimos que  $(T_x\beta)(v_x) = 0$ , si y sólo si,  $v_x = 0$ , que es lo que queríamos probar.

En consecuencia,  $\beta(Q)$  es una subvariedad de  $T^*Q$  de dimensión  $n$ . Por tanto, la Proposición 3.8 implica que  $\beta(Q)$  es lagrangiana, si y sólo si,  $\beta$  es isótropa.

Por otra parte,  $\beta$  es isótropa, si y sólo si,

$$(\omega_Q)_x(T_x\beta(v_x), T_x\beta(u_x)) = 0, \quad \text{para todo } v_x, u_x \in T_xQ.$$

Como  $\omega_Q = -d\lambda_Q$  tenemos que

$$0 = (\omega_Q)_x(T_x\beta(v_x), T_x\beta(u_x)) = -d\lambda_Q(T_x\beta(v_x), T_x\beta(u_x)) = -(\beta^*(d\lambda_Q))_x(v_x, u_x).$$

Luego,  $\beta$  es isótropa, si y sólo si,  $\beta^*(d\lambda_Q) = 0$ . Pero, de la Proposición 3.15 y de las propiedades de la diferencial, se tiene que  $\beta^*(d\lambda_Q) = d\beta^*(\lambda_Q) = d\beta$ . En definitiva,  $\beta$  es lagrangiana, si y sólo si,  $d\beta = 0$ . □

En lo que sigue, presentamos el siguiente teorema, que será un resultado fundamental para probar el Teorema de Malus-Dupin usando geometría simpléctica.

**Teorema 3.21.** *Sean  $(S, \omega)$  y  $(S', \omega')$  dos variedades simplécticas,  $f: (S, \omega) \rightarrow (S', \omega')$  un simplectomorfismo y  $N$  una subvariedad lagrangiana de  $(S, \omega)$ . Entonces,  $f(N) = N'$  es una subvariedad lagrangiana de  $(S', \omega')$ .*

*Demostración.* Tenemos que  $f: (S, \omega) \rightarrow (S', \omega')$  es un simplectomorfismo, entonces  $f$  es una transformación simpléctica biyectiva. Por tanto,  $\dim S = \dim S' = 2n$  y  $f^*\omega' = \omega$ , es decir,

$$\omega'_{f(x)}(T_x f(u_x), T_x f(v_x)) = \omega_x(u_x, v_x), \quad \forall x \in S \text{ y } \forall u_x, v_x \in T_x S. \quad (3.13)$$



Como  $N$  es una subvariedad de  $S$  y  $f$  es un difeomorfismo, se deduce que  $N' = f(N)$  es una subvariedad de  $S'$  de la misma dimensión que  $N$ .

Además,  $N$  es una subvariedad lagrangiana de  $(S, \omega)$ . Esto implica que  $T_x N$  es un subespacio lagrangiano de  $(T_x S, \omega_x)$ , para todo  $x \in N$ . Luego, aplicando la Proposición 3.8 se deduce que  $\dim N = \dim N' = n$ .

Queremos ver que  $N'$  es una subvariedad lagrangiana de  $(S', \omega')$ , es decir, que  $T_{x'} N'$  es un subespacio lagrangiano de  $(T_{x'} S', \omega'_{x'})$ , para todo  $x' \in N'$ . Como  $\dim T_{x'} N' = n$ , aplicando la Proposición 3.8, basta ver que  $T_{x'} N'$  es un subespacio isótropo de  $(T_{x'} S', \omega'_{x'})$ .

Tenemos que  $T_x N$  es un subespacio lagrangiano de  $(T_x S, \omega_x)$ . Entonces,  $T_x N$  es también isótropo. Así que

$$\omega_x(u_x, v_x) = 0, \quad \forall x \in N \text{ y } \forall u_x, v_x \in T_x N. \quad (3.14)$$

De nuevo, teniendo en cuenta la biyectividad de  $f$ , se tiene que para todo  $x' \in N'$  existe  $x \in N$  tal que  $f(x) = x'$ . Además, la aplicación  $T_x f: T_x N \rightarrow T_{f(x)} N'$  es también biyectiva. Por tanto, para todo  $u'_{x'}, v'_{x'} \in T_{f(x)} N' = T_{x'} N'$  existen  $u_x, v_x \in T_x N$  tales que  $T_x f(u_x) = u'_{x'}$  y  $T_x f(v_x) = v'_{x'}$ .

Finalmente, de las igualdades (3.13) y (3.14) deducimos que,

$$\omega'_{x'}(u'_{x'}, v'_{x'}) = \omega'_{f(x)}(T_x f(u_x), T_x f(v_x)) = \omega_x(u_x, v_x) = 0.$$

En consecuencia,  $T_{x'} N'$  es un subespacio isótropo de  $(T_{x'} S', \omega'_{x'})$ .  $\square$

### 3.3. Demostración simpléctica del teorema

En el desarrollo de esta sección hay tres espacios que van a jugar un papel fundamental para la demostración del Teorema de Malus-Dupin mediante geometría simpléctica. Pasaremos ahora a describir dos de ellos.

Sea  $O \in \mathbb{R}^3$  un punto fijo tomado como origen.

- **El espacio de rayos  $\mathcal{L}$ :** Vimos en la Sección 1.3 que  $\mathcal{L}$  tiene una estructura de variedad de dimensión 4 difeomorfa al fibrado cotangente  $T^*S^2$  de una esfera  $S^2$  de centro  $C$ . El difeomorfismo está dado por la aplicación

$$\begin{aligned} \phi_O : \mathcal{L} &\longrightarrow T^*S^2 \\ L &\longmapsto (m_L, \alpha_{m_L}) \end{aligned}$$

tal que  $\overrightarrow{Cm_L}$  es un vector unitario en la dirección y sentido del rayo orientado  $L$  y  $\alpha_{m_L} \in T^*_{m_L} S^2$  es el covector dado por

$$\begin{aligned} \alpha_{m_L} : T_{m_L} S^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{v} &\longmapsto \alpha_{m_L}(\vec{v}) = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

donde  $P$  es un punto arbitrario de  $L$ .

Este difeomorfismo nos permite introducir una estructura simpléctica sobre el espacio de rayos.

**Proposición 3.22.** *El espacio de rayos  $\mathcal{L}$  admite una estructura simpléctica  $\omega_{\mathcal{L}}$  tal que*

$$\phi_O : \mathcal{L} \longrightarrow T^* S^2$$

es un symplectomorfismo, esto es,

$$\omega_{\mathcal{L}} = \phi_O^* \omega_{S^2} \tag{3.15}$$

donde  $\omega_{S^2}$  es la estructura simpléctica canónica de  $T^* S^2$ . Además, la forma simpléctica  $\omega_{\mathcal{L}}$  no depende del punto  $O$  elegido.

*Demostración.* Resta probar sólo que la estructura simpléctica  $\omega_{\mathcal{L}}$  no depende del punto  $O \in \mathbb{R}^3$  elegido. En efecto, de la Proposición 1.6 se deduce que si tomamos otro punto  $O' \in \mathbb{R}^3$  como origen, existe un difeomorfismo  $\Psi_{O'O} : T^* S^2 \longrightarrow T^* S^2$  tal que  $\phi_{O'} = \Psi_{O'O} \circ \phi_O$  donde

$$\Psi_{O'O}(m_L, \alpha_{m_L}) = (m_L, \alpha_{m_L} + df_{O'O}(m_L))$$

con  $f_{O'O} : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable sobre  $S^2$ .

Luego,

$$\Psi_{O'O}^*(\lambda_{S^2}) = \lambda_{S^2} + d(f_{O'O} \circ \Pi_{S^2}),$$

con  $\lambda_{S^2}$  la 1-forma de Liouville sobre  $S^2$  y  $\Pi_{S^2} : T^* S^2 \longrightarrow S^2$  la proyección canónica. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} \phi_{O'}^*(\omega_{S^2}) &= (\Psi_{O'O} \circ \phi_O)^*(\omega_{S^2}) = \phi_O^*(\Psi_{O'O}^*(\omega_{S^2})) = \\ &= -\phi_O^*(\Psi_{O'O}^*(d\lambda_{S^2})) = -\phi_O^*(d(\Psi_{O'O}^*\lambda_{S^2})) = \\ &= -\phi_O^*(d(\lambda_{S^2} + d(f_{O'O} \circ \Pi_{S^2}))) = -\phi_O^*(d\lambda_{S^2}) = \\ &= \phi_O^*(\omega_{S^2}). \end{aligned}$$

Esto prueba el resultado. □

- **El espacio  $\widehat{\mathcal{L}}$ :** Consideramos  $\widehat{\mathcal{L}}$  el conjunto

$$\widehat{\mathcal{L}} = \{(L, P) \mid P \in L \text{ y } L \in \mathcal{L}\}.$$

Denotaremos por  $p : \widehat{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathcal{L}$  a la proyección en el espacio de rayos dada por  $p(L, P) = L$ .

**Proposición 3.23.** *El conjunto  $\widehat{\mathcal{L}}$  es una variedad diferenciable de dimensión 5 difeomorfa al espacio  $T_{S^2}^*\mathbb{R}^3 = \{(p, \alpha) \in T^*\mathbb{R}^3 \mid p \in S^2\} \cong S^2 \times \mathbb{R}^3$  de los covectores de  $\mathbb{R}^3$  a lo largo de los puntos de  $S^2$ . Bajo esta identificación y la de  $\mathcal{L} \cong T^*S^2$  la proyección  $p$  es la submersión*

$$T^*i : T_{S^2}^*\mathbb{R}^3 \longrightarrow T^*S^2$$

definida por

$$T^*i(m, \widehat{\alpha}_m) = (m, T_m^*i(\widehat{\alpha}_m)), \text{ para todo } m \in S^2,$$

donde  $i : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  es la inclusión y  $T_m^*i : T_m^*\mathbb{R}^3 \longrightarrow T_m^*S^2$  es la aplicación cotangente de  $i$  en el punto  $m \in S^2$ . Además,  $\widehat{\mathcal{L}}$  es una subvariedad embebida de  $T^*\mathbb{R}^3$ .

*Demostración.* Para probar que  $\widehat{\mathcal{L}}$  es una variedad diferenciable de dimensión 5 consideramos la aplicación biyectiva

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_O : \widehat{\mathcal{L}} &\longrightarrow T_{S^2}^*\mathbb{R}^3 \cong S^2 \times \mathbb{R}^3 \\ (L, P) &\longmapsto \widehat{\phi}_O(L, P) = (m_L, \widehat{\alpha}_{m_L}), \end{aligned}$$

tal que  $\overrightarrow{Cm_L}$  es el vector director unitario orientado del rayo  $L$  y  $\widehat{\alpha}_{m_L} : T_{m_L}\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  es el covector tangente definido por

$$\widehat{\alpha}_{m_L}(\vec{u}) = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{u}, \text{ para todo } \vec{u} \in T_{m_L}\mathbb{R}^3.$$

Nota que su inversa viene dada por

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_O^{-1} : T_{S^2}^*\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \widehat{\mathcal{L}} \\ (m, \widehat{\alpha}_m) &\longmapsto \widehat{\phi}_O^{-1}(m, \widehat{\alpha}_m) = (L, P), \end{aligned}$$

donde  $L$  es el rayo que tiene como vector director unitario orientado  $\overrightarrow{Cm}$  y pasa por el punto  $P$  deducido como sigue. Si fijamos  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ , el punto  $P$  tiene coordenadas  $(\widehat{\alpha}_m(\vec{e}_1), \widehat{\alpha}_m(\vec{e}_2), \widehat{\alpha}_m(\vec{e}_3))$  respecto de esa base. Nota entonces que

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{e}_i = \widehat{\alpha}_m(\vec{e}_i), \quad i \in \{1, 2, 3\}.$$

Por tanto,  $P$  queda únicamente determinado.

Además, de las construcciones de  $\phi_O$  y  $\widehat{\phi}_O$  se tiene que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{L}} & \xrightarrow{p} & \mathcal{L} \\ \widehat{\phi}_O \downarrow & & \downarrow \phi_O \\ T_{S^2}^*\mathbb{R}^3 & \xrightarrow{T^*i} & T^*S^2 \end{array}$$

Por último, uno puede considerar el embebimiento

$$\iota = (i, Id_{\mathbb{R}^3}) \circ \widehat{\phi}_O : \widehat{\mathcal{L}} \xrightarrow{\widehat{\phi}_O} T_{S^2}^* \mathbb{R}^3 \cong S^2 \times \mathbb{R}^3 \xrightarrow{(i, Id_{\mathbb{R}^3})} T^* \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3.$$

□

Nota que de este resultado podemos inferir que  $\widehat{\mathcal{L}}$  no admite una estructura simpléctica, pues su dimensión como variedad diferenciable es impar.

El siguiente diagrama muestra las relaciones entre todos estos espacios

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{L} & \xleftarrow{p} & \widehat{\mathcal{L}} & \xrightarrow{\iota} & T^* \mathbb{R}^3 \\ \downarrow \phi_O & & \downarrow \widehat{\phi}_O & & \downarrow Id_{T^* \mathbb{R}^3} \\ T^* S^2 & \xleftarrow{T^* i} & T_{S^2}^* \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{(i, Id_{\mathbb{R}^3})} & T^* \mathbb{R}^3 \end{array} \quad (3.16)$$

y nos permite conectar las estructuras simplécticas de  $\mathcal{L}$  y de  $T^* \mathbb{R}^3$ .

**Proposición 3.24.** *Si  $\omega_{\mathcal{L}}$  es la estructura simpléctica en  $\mathcal{L}$  y  $\omega_{\mathbb{R}^3}$  es la estructura simpléctica canónica de  $\mathbb{R}^3$ , entonces*

$$\iota^*(\omega_{\mathbb{R}^3}) = p^*(\omega_{\mathcal{L}}).$$

*Demostración.* Sea  $\lambda_{\mathbb{R}^3}$  la 1-forma de Liouville de  $(T^* \mathbb{R}^3, \omega_{\mathbb{R}^3})$ . Usando (3.15) y las propiedades de la diferencial  $d$  se tiene que

$$\begin{aligned} \omega_{\mathcal{L}} &= \phi_O^*(\omega_{S^2}) = -\phi_O^*(d\lambda_{S^2}) = -d(\phi_O^* \lambda_{S^2}), \\ \omega_{\mathbb{R}^3} &= -d\lambda_{\mathbb{R}^3}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} p^*(\omega_{\mathcal{L}}) &= -p^*(d(\phi_O^* \lambda_{S^2})) = -d(p^*(\phi_O^* \lambda_{S^2})) = -d((\phi_O \circ p)^*(\lambda_{S^2})), \\ \iota^*(\omega_{\mathbb{R}^3}) &= -\iota^*(d\lambda_{\mathbb{R}^3}) = -d(\iota^*(\lambda_{\mathbb{R}^3})). \end{aligned}$$

Así, probar que  $\iota^*(\omega_{\mathbb{R}^3}) = p^*(\omega_{\mathcal{L}})$  es equivalente a demostrar que  $d(\iota^*(\lambda_{\mathbb{R}^3})) = d((\phi_O \circ p)^*(\lambda_{S^2}))$ . Esto es directo si comprobamos que  $\iota^*(\lambda_{\mathbb{R}^3}) = (\phi_O \circ p)^*(\lambda_{S^2})$ . Del diagrama conmutativo (3.16) tenemos que  $\phi_O \circ p = T^* i \circ \widehat{\phi}_O$ . Así que, probaremos a continuación que

$$\iota^*(\lambda_{\mathbb{R}^3}) = \widehat{\phi}_O^*((T^* i)^*(\lambda_{S^2})),$$

esto es (véase diagrama (3.16))

$$(i, Id_{\mathbb{R}^3})^*(\lambda_{\mathbb{R}^3}) = (\iota \circ \widehat{\phi}_O^{-1})^*(\lambda_{\mathbb{R}^3}) = (T^* i)^*(\lambda_{S^2}). \quad (3.17)$$

Sean  $u \in S^2$ ,  $\beta_u \in T_u^*\mathbb{R}^3$  y  $X_{\beta_u} \in T_{\beta_u}(T_{S^2}^*\mathbb{R}^3)$ . Aplicando las definiciones de las 1-formas de Liouville de  $S^2$  y  $\mathbb{R}^3$  y que  $\Pi_{S^2} \circ T^*i = \Pi_{\mathbb{R}^3} \circ (i, Id_{\mathbb{R}^3})$  se tiene que

$$\begin{aligned} \{((T^*i)^*\lambda_{S^2})(\beta_u)\}(X_{\beta_u}) &= \lambda_{S^2}((T^*i)(\beta_u))(T_{\beta_u}(T^*i)(X_{\beta_u})) = \\ &= (T^*i)(\beta_u)(T_{(T^*i)(\beta_u)}\Pi_{S^2}(T_{\beta_u}(T^*i)(X_{\beta_u}))) = \\ &= (T^*i)(\beta_u)(T_{\beta_u}(\Pi_{S^2} \circ (T^*i))(X_{\beta_u})) = \\ &= (T^*i)(\beta_u)(T_{\beta_u}(\Pi_{\mathbb{R}^3} \circ (i, Id_{\mathbb{R}^3}))(X_{\beta_u})) = \\ &= \beta_u(T_{(i, Id_{\mathbb{R}^3})(\beta_u)}\Pi_{\mathbb{R}^3}(T_{\beta_u}(i, Id_{\mathbb{R}^3})(X_{\beta_u}))) = \\ &= \lambda_{\mathbb{R}^3}((i, Id_{\mathbb{R}^3})(\beta_u))(T_{\beta_u}(i, Id_{\mathbb{R}^3})(X_{\beta_u})) = \\ &= \{((i, Id_{\mathbb{R}^3})^*\lambda_{\mathbb{R}^3})(\beta_u)\}(X_{\beta_u}). \end{aligned}$$

En consecuencia, se verifica (3.17) y se concluye el resultado.  $\square$

Teniendo en cuenta esta relación veamos cuál es la expresión local de  $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$ .

**Proposición 3.25.** Sean  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ ,  $(L, P) \in \widehat{\mathcal{L}}$  y  $(u^1, u^2, u^3)$  y  $(p_1, p_2, p_3)$  las coordenadas en  $\mathbb{R}^3$  respecto de la base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  del vector director unitario  $\vec{u}$  de  $L$  y un punto  $P \in L$ , respectivamente. La forma  $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}} = \iota^*(\omega_{\mathbb{R}^3}) = p^*(\omega_{\mathcal{L}})$  sobre  $\widehat{\mathcal{L}}$  viene dada por

$$\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}(L, P) = \sum_{i=1}^3 du^i \wedge dp_i = d\vec{u} \wedge d\vec{OP}. \quad (3.18)$$

*Demostración.* Aplicando la Proposición 3.16, se deduce que la forma simpléctica canónica  $\omega_{\mathbb{R}^3}$  sobre  $\mathbb{R}^3$  viene dada por

$$\omega_{\mathbb{R}^3} = \sum_{i=1}^3 du^i \wedge dp_i.$$

La inmersión  $\iota: \widehat{\mathcal{L}} \rightarrow T^*\mathbb{R}^3$  nos permite concluir que

$$\omega_{\widehat{\mathcal{L}}} = \iota^*(\omega_{\mathbb{R}^3}) = \sum_{i=1}^3 du^i \wedge dp_i = d\vec{u} \wedge d\vec{OP}.$$

$\square$

A continuación, relacionaremos la noción de rectangularidad con la lagrangianidad. Previamente, demostraremos una caracterización de rectangularidad que será necesaria en lo que sigue.

Sean  $\mathcal{F}$  una familia de rayos bi-paramétrica y  $L: V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}$  la aplicación inyectiva y diferenciable definida en un entorno abierto  $V$  de  $\mathbb{R}^2$ , con  $(0,0) \in V$ , tal que a cada  $k = (k_1, k_2) \in V$  le asocia el rayo  $L(k) \in \mathcal{F}$ . Entonces, por la continuidad de  $L$ , para todo  $L_0 \in \mathcal{F}$ , existe un entorno abierto  $U$  en  $\mathcal{F}$  de  $L_0$  tal que  $U \subseteq L(V)$ .

Puesto que  $L: V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}$  y  $\mathcal{L} \cong T^*S^2 \subseteq T_{S^2}^*\mathbb{R}^3 \cong S^2 \times \mathbb{R}^3 \cong \widehat{\mathcal{L}}$ , entonces, es posible encontrar una función diferenciable  $\widehat{L}: V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}$  tal que  $L = p \circ \widehat{L}$ .

**Lema 3.26.** *Una familia de rayos bi-paramétrica  $\mathcal{F}$  es lagrangiana, si y sólo si, existe una función diferenciable  $F: V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que*

$$\overrightarrow{u(k)} \cdot \overrightarrow{dP(k)} = dF(k). \quad (3.19)$$

con  $\overrightarrow{u(k)}$  vector director unitario de  $L(k)$ .

*Demostración.* Teniendo en cuenta que  $\dim \mathcal{F} = 2$  y  $\dim \mathcal{L} = 4$  y aplicando la Proposición 3.8, se tiene que la subvariedad inmersa  $\mathcal{F}$  es lagrangiana en  $U$ , si y sólo si,  $L$  es isotropa, esto es, si y sólo si,  $L^*\omega_{\mathcal{L}} = 0$ .

Se deduce de la expresión de  $\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}$  de la Proposición 3.25 y de las propiedades de la diferencial  $d$  que

$$\begin{aligned} L^*\omega_{\mathcal{L}} &= (p \circ \widehat{L})^*(\omega_{\mathcal{L}}) = \widehat{L}^*(p^*(\omega_{\mathcal{L}})) = \widehat{L}^*(\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}) = \\ &= \widehat{L}^*(d\overrightarrow{u} \wedge d\overrightarrow{OP}) = -\widehat{L}^*(d(\overrightarrow{OP}) \cdot d\overrightarrow{u}) = \\ &= -d(\widehat{L}^*(\overrightarrow{OP}) \cdot d\overrightarrow{u}) = -d(\overrightarrow{P(k)} \cdot d\overrightarrow{u(k)}) = \\ &= -d(d(\overrightarrow{P(k)}) \cdot \overrightarrow{u(k)}) - \overrightarrow{u(k)} \cdot d\overrightarrow{P(k)} = \\ &= d(\overrightarrow{u(k)} \cdot d\overrightarrow{P(k)}), \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde  $O \in \mathbb{R}^3$  es un punto fijo y  $\overrightarrow{P(k)}$  denota al vector  $\overrightarrow{OP(k)}$ .

Así que, de la ecuación (3.20), se sigue que  $L^*\omega_{\mathcal{L}} = 0$ , si y sólo si,  $\overrightarrow{u(k)} \cdot d\overrightarrow{P(k)}$  es cerrada. Aplicando el *Lema de Poincaré*<sup>1</sup>, se concluye que la subvariedad inmersa  $\mathcal{F}$  es lagrangiana en  $U$  (o un entorno más pequeño que  $U$ ), si y sólo si, existe una función diferenciable  $F: V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\overrightarrow{u(k)} \cdot d\overrightarrow{P(k)} = dF(k).$$

□

<sup>1</sup> El Lema de Poincaré establece que una 1-forma es cerrada, si y sólo si, es localmente la diferencial de una función diferenciable.

A continuación, usando el Lema 3.26, caracterizamos la propiedad de rectangularidad de una familia bi-paramétrica de rayos en términos de subvariedades lagrangianas.

**Proposición 3.27.** *Una familia de rayos bi-paramétrica  $\mathcal{F}$  es rectangular en un entorno de  $L_0$ , si y sólo si,  $\mathcal{F}$  es una subvariedad lagrangiana inmersa de la variedad simpléctica del espacio de rayos  $(\mathcal{L}, \omega_{\mathcal{L}})$ .*

*Demostración.* Suponemos que  $\mathcal{F}$  es lagrangiana en  $U$  y probemos que es rectangular. Por el Lema 3.26 se tiene que existe una función diferenciable  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaciendo (3.19).

Como el vector  $\overrightarrow{u(k)}$  es unitario, se deduce que  $d(\overrightarrow{u(k)} \cdot \overrightarrow{u(k)}) = 0$  y, por tanto,  $\overrightarrow{u(k)} \cdot d\overrightarrow{u(k)} = 0$ . Luego, para todo  $c \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u(k)} \cdot d\left((F(k) + c)\overrightarrow{u(k)}\right) &= \overrightarrow{u(k)} \cdot \left(d(F(k)\overrightarrow{u(k)}) + c d\overrightarrow{u(k)}\right) = \\ &= \overrightarrow{u(k)} \cdot \left(dF(k)\overrightarrow{u(k)} + F(k)d\overrightarrow{u(k)}\right) = \\ &= dF(k). \end{aligned} \quad (3.21)$$

De (3.19) y (3.21) deducimos que

$$\overrightarrow{u(k)} \cdot d\overrightarrow{P(k)} = \overrightarrow{u(k)} \cdot d\left((F(k) + c)\overrightarrow{u(k)}\right), \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Es decir,

$$\overrightarrow{u(k)} \cdot d\left(\overrightarrow{P(k)} - (F(k) + c)\overrightarrow{u(k)}\right) = 0, \quad \forall c \in \mathbb{R}. \quad (3.22)$$

Sea  $Q_0$  un punto regular en  $L_0$ , entonces existe  $c_0 \in \mathbb{R}$  tal que

$$\overrightarrow{P}(0, 0) - (F(0, 0) + c_0)\overrightarrow{u}(0, 0) = \overrightarrow{Q}_0,$$

donde  $\overrightarrow{Q}_0$  denota al vector  $\overrightarrow{OQ_0}$ .

Definimos la aplicación  $J : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$J(k) = \overrightarrow{P(k)} - (F(k) + c_0)\overrightarrow{u(k)}, \quad \forall k \in V.$$

Como  $Q_0$  es regular,  $J$  es inyectiva. Por tanto,  $J(V)$  es una superficie diferenciable que contiene a  $Q_0$ . Por (3.22), los rayos  $L(k)$  inciden ortogonalmente en esa superficie. Concluyendo así que la familia de rayos  $\mathcal{F}$  es rectangular en  $U$ .

Recíprocamente, suponemos que  $\mathcal{F}$  es rectangular en  $U$  y asumamos que existe un punto regular  $Q_0$  en  $L_0$ . Luego, existe una superficie diferenciable  $\mathcal{S}$  que contiene a  $Q_0$ , de manera que para todo  $k \in V$ , los rayos  $L(k)$  inciden ortogonalmente en la superficie  $\mathcal{S}$ .

Denotamos por  $Q(k) \in \mathcal{S}$  al punto de  $\mathcal{S}$  en el que incide  $L(k)$ . Este es único por la regularidad de  $Q_0$ . Como  $\overrightarrow{P(k)Q(k)}$  es proporcional a  $\overrightarrow{u(k)}$  existe una función diferenciable  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\overrightarrow{Q(k)} = \overrightarrow{P(k)} - F(k)\overrightarrow{u(k)}.$$

En consecuencia, usando nuevamente que  $\overrightarrow{u(k)} \cdot d\overrightarrow{u(k)} = 0$  y que los rayos de  $\mathcal{F}$  inciden ortogonalmente en  $\mathcal{S}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \overrightarrow{u(k)} \cdot d\left(\overrightarrow{P(k)} - F(k)\overrightarrow{u(k)}\right) = \\ &= \overrightarrow{u(k)} \cdot d\overrightarrow{P(k)} - \overrightarrow{u(k)} \cdot d\left(F(k)\overrightarrow{u(k)}\right) = \\ &= \overrightarrow{u(k)} \cdot d\overrightarrow{P(k)} - \overrightarrow{u(k)} \cdot \left(dF(k)\overrightarrow{u(k)} + F(k)d\overrightarrow{u(k)}\right) = \\ &= \overrightarrow{u(k)} \cdot d\overrightarrow{P(k)} - dF(k). \end{aligned}$$

Esto es,  $F$  satisface (3.19). Así, por el Lema 3.26 se concluye que  $\mathcal{F}$  es lagrangiana en  $U$ .  $\square$

Los resultados que se presentan a continuación establecen que las aplicaciones diferenciables que definen a las reflexiones y refracciones son simplectomorfismos entre abiertos del espacio de rayos.

**Proposición 3.28.** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  la superficie diferenciable reflectante. El conjunto  $U$  de rectas orientadas que se intersecan con  $M$  transversalmente por su lado reflectante es un subconjunto abierto de la variedad simpléctica  $(\mathcal{L}, \omega_{\mathcal{L}})$ . La aplicación*

$$g_1 : U \subset \mathcal{L} \rightarrow V \subset \mathcal{L}$$

*que asocia a cada rayo  $L_1 \in U$  su correspondiente rayo reflejado  $L_2$ , es un simplectomorfismo de  $U$  en un subconjunto abierto  $V \subset \mathcal{L}$  formado por los rayos de  $U$  que se reflejan.*

*Demostración.* Sea  $h : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$  la aplicación continua que asocia a cada rayo  $L \in \mathcal{L}$  el ángulo  $\theta_L$  que determina  $L$  con el plano tangente a la superficie  $M$  en el punto de incidencia de  $L$  con  $M$ . Entonces,  $U = h^{-1}(]0, \pi[)$  es un abierto de  $\mathcal{L}$ .

Sean  $L_1 \in U$ ,  $P$  el punto en el que  $L_1$  se interseca con la superficie reflectante  $M$ ,  $L_2$  el correspondiente rayo reflejado y  $\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2$  los vectores directores unitarios de  $L_1$  y  $L_2$ , respectivamente (véase Fig. 2.2). Denotamos  $\overrightarrow{P} \equiv \overrightarrow{OP}$  con  $O \in \mathbb{R}^3$  punto fijo tomado como origen.

Sea  $\Phi : U \subseteq \mathcal{L} \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}$  la aplicación diferenciable dada por



$$\Phi(L_1) = (L_2, P) = (g_1(L_1), P).$$

Entonces,  $\Phi^*(\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}) = g_1^*(\omega_{\mathcal{L}})$ . En efecto,

$$\Phi^*(\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}) = \Phi^*(p^*(\omega_{\mathcal{L}})) = (p \circ \Phi)^*(\omega_{\mathcal{L}}) = g_1^*(\omega_{\mathcal{L}}),$$

donde  $p : \widehat{\mathcal{L}} \rightarrow \mathcal{L}$  es la proyección. Luego, debemos probar que

$$\Phi^*(\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}) = \omega_{\mathcal{L}}.$$

Para ello, como  $p$  es una submersión (por tanto,  $p^*$  es inyectiva) es suficiente comprobar que

$$p^*(\Phi^*(\omega_{\widehat{\mathcal{L}}})) = p^*(\omega_{\mathcal{L}}),$$

esto es,

$$(\Phi \circ p)^*(\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}) = \omega_{\widehat{\mathcal{L}}}.$$

Ahora, usando la Proposición 3.25, tenemos que

$$(\Phi \circ p)^*(\omega_{\widehat{\mathcal{L}}}) = (\Phi \circ p)^*(d\vec{u}_1 \wedge d\vec{P}) = d\vec{u}_2 \wedge d\vec{P}.$$

Luego, la prueba se reduce a demostrar que

$$d\vec{P} \wedge d\vec{u}_1 = d\vec{P} \wedge d\vec{u}_2. \quad (3.23)$$

Aplicando la ecuación (2.2) del Lema 2.5, se tiene que

$$\vec{u}_2 - \vec{u}_1 = 2 \cos(\vec{u}_2, \vec{n}) \vec{n} = 2(\vec{u}_2 \cdot \vec{n}) \vec{n}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} d\vec{P} \wedge d(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) &= 2d\vec{P} \wedge d((\vec{u}_2 \cdot \vec{n}) \vec{n}) = \\ &= -2d((\vec{u}_2 \cdot \vec{n}) \vec{n}) \wedge d\vec{P} = \\ &= -2d((\vec{u}_2 \cdot \vec{n}) (\vec{n} \cdot d\vec{P})) = 0, \end{aligned}$$

pues  $\vec{n}$  y  $d\vec{P}$  son, respectivamente, un vector ortogonal y tangente a la superficie  $M$  en el punto  $P$ , es decir,  $\vec{n} \cdot d\vec{P} = 0$ . En consecuencia, se verifica (3.23).  $\square$

**Proposición 3.29.** *Sea  $M \subset \mathbb{R}^3$  una superficie diferenciable refractante que separa dos medios transparentes con índices de refracción  $n_1$  y  $n_2$ , respectivamente, tal que  $n_1 \neq n_2$ . El conjunto  $U$  de rectas orientadas que se intersecan con  $M$  transversalmente por el lado del medio con índice de refracción  $n_1$  es un subconjunto abierto  $U$  de la variedad simpléctica  $(\mathcal{L}, \omega_{\mathcal{L}})$ . La aplicación*

$$g_2 : U \subset \mathcal{L} \rightarrow V \subset \mathcal{L}$$

*que asocia a cada rayo  $L_1 \in U$  su correspondiente rayo refractado, es un simplectomorfismo de  $U$ , dotado de la forma simpléctica  $n_1 \omega_{\mathcal{L}}$ , en otro subconjunto abierto  $V \subset \mathcal{L}$ , dotado de la forma simpléctica  $n_2 \omega_{\mathcal{L}}$ .*

*Demostración.* Utilizando la notación establecida en la Sección 2.3 y de manera análoga a la prueba de la Proposición 3.28 se comprueba que  $U$  es un abierto de  $\mathcal{L}$ . Para probar que  $g_2$  es un simplectomorfismo, basta ver que

$$n_1 d\vec{P} \wedge d\vec{u}_1 = n_2 d\vec{P} \wedge d\vec{u}_2. \quad (3.24)$$

Aplicando la ecuación (2.12) del Lema 2.8, se tiene que

$$n_2 \vec{u}_2 - n_1 \vec{u}_1 = -(n_1 \cos(\vec{u}_1, \vec{n}) - n_2 \cos(\vec{u}_2, \vec{n})) \vec{n} = -(n_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{n}) - n_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{n})) \vec{n}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} d\vec{P} \wedge d(n_2 \vec{u}_2 - n_1 \vec{u}_1) &= -d\vec{P} \wedge d((n_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{n}) - n_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{n})) \vec{n}) = \\ &= d((n_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{n}) - n_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{n})) \vec{n}) \wedge d\vec{P} = \\ &= d\left((n_1(\vec{u}_1 \cdot \vec{n}) - n_2(\vec{u}_2 \cdot \vec{n}))(\vec{n} \cdot d\vec{P})\right) = 0, \end{aligned}$$

ya que  $\vec{n} \cdot d\vec{P} = 0$ . En consecuencia, se verifica (3.24). □

Ahora, estamos en condiciones de demostrar el Teorema de Malus-Dupin aplicando los resultados de geometría simpléctica y subvariedades lagrangianas probados anteriormente.

**Teorema 3.30 (Teorema de Malus-Dupin).** *Una familia de rayos bi-paramétrica rectangular que entra en un sistema óptico con cualquier número de superficies diferenciables reflectantes o refractantes sigue siendo rectangular en cada medio transparente, homogéneo e isótropo en el que se propague.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F}_1$  una familia de rayos bi-paramétrica rectangular. Por la Proposición 3.27 se tiene que  $\mathcal{F}_1$  es una subvariedad lagrangiana inmersa de  $\mathcal{L}$ .

Sea  $g: \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{L}$  la aplicación diferenciable que asocia a cada rayo  $L_1$  que choca en la superficie de reflexión o refracción, el correspondiente rayo reflejado o refractado  $L_2$ . Por las Proposiciones 3.28 y 3.29, sabemos que  $g$  es un simplectomorfismo. Luego, aplicando el Teorema 3.21, se tiene que  $g(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_2$  es una subvariedad lagrangiana de  $\mathcal{L}$ .

En consecuencia, de nuevo por la Proposición 3.27, concluimos que la familia de rayos reflejada o refractada  $\mathcal{F}_2$  es rectangular. □

---

## Conclusiones

En esta memoria hemos abordado la prueba del Teorema de Malus-Dupin desde diferentes perspectivas. En primer lugar, dotamos al espacio de rayos de luz  $\mathcal{L}$  de una estructura de variedad diferenciable de dimensión 4, a través de un difeomorfismo entre  $\mathcal{L}$  y el fibrado cotangente  $T^*S^2$  de una esfera  $S^2$  de radio 1.

A continuación, definimos los conceptos de familia bi-parámetrica de rayos, punto regular y rectangularidad, que nos han permitido enunciar el Teorema de Malus-Dupin. Además, hemos presentado la demostración original del teorema realizada por Hamilton, tanto para las reflexiones como para las refracciones.

Por otro lado, abordamos la prueba del teorema desde la geometría simpléctica. Para ello, hemos usado la estructura simpléctica de  $\mathcal{L}$ , hemos interpretado la propiedad de rectangularidad en términos de subvariedades lagrangianas y se ha probado que las reflexiones y refracciones son simplectomorfismos sobre el espacio de rayos  $\mathcal{L}$ .

La prueba simpléctica del Teorema del Malus-Dupin, usando la teoría de subvariedades lagrangianas, puede ser considerada como una ratificación más del credo simpléctico formulado por Weinstein [7] en la forma “*everything is a Lagrangian submanifold*”.

Al mismo tiempo, es interesante reseñar que en esta segunda prueba se usó frecuentemente la geometría del espacio de dimensión 5 cuyos elementos están formados por un rayo de luz y un punto sobre él. Este espacio no es simpléctico (tiene dimensión impar). Sin embargo, admite una estructura geométrica muy interesante: una estructura de contacto. Este tipo de objetos constituyen la base matemática de la óptica geométrica siguiendo Arnold [2] y sería interesante explorar en esta dirección en el futuro.

---

## Bibliografía

- [1] R. Abraham and J.E. Marsden. *Foundations of Mechanics* (2nd. edition). Benjamin Cummings, Reading, Massachusetts, 1978.
- [2] V.I. Arnold. *Contact geometry. In: Singularities of Caustics and Wave Fronts. Mathematics and Its Applications.* 62. Springer, Dordrecht, 1990.
- [3] W.R. Hamilton. Theory of systems of rays. Part First and Part Second (1827). Part first: *Trans. Royal Irish Academy*, 15 (1828), pp. 69–174. Part Second: manuscript. In Sir William Rowan Hamilton mathematical Works, vol. I, chapter I, Cambridge University Press, London, (1931).
- [4] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer New York Heidelberg Dordrecht London, 2013.
- [5] P. Libermann and C.-M. Marle. *Symplectic geometry and analytical mechanics*, Mathematics and its Applications, vol. 35, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.
- [6] C.-M. Marle. The Works of William Rowan Hamilton in Geometrical Optics and the Malus-Dupin Theorem. *Banach Center Publications*, 110 177-191 (2017).
- [7] A. Weinstein. Symplectic geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.* 5, 1 1-13 (1981).
- [8] Fernández, J. L. (s.f.). *Principios de Óptica Geométrica*. Fisicalab. Disponible en: <https://www.fisicalab.com/apartado/fundamentos-optica-geometrica>.
- [9] Étienne Louis Malus. (s.f.). *Maths History*. Disponible en: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Malus/>.
- [10] Colaboradores de Wikipedia. (2022). Charles Dupin. *Wikipedia, la enciclopedia libre*. Disponible en: [https://es.wikipedia.org/wiki/Charles\\_Dupin](https://es.wikipedia.org/wiki/Charles_Dupin).
- [11] *Biografía de William Rowan Hamilton*. (s.f.). Disponible en: [https://www.biografiasyvidas.com/biografia/h/hamilton\\_william.htm](https://www.biografiasyvidas.com/biografia/h/hamilton_william.htm).
- [12] Fernández, J. L. (s.f.-b). *Reflexión y Refracción de la Luz*. Fisicalab. Disponible en: <https://www.fisicalab.com/apartado/reflexion-refraccion-luz>.

# Malus-Dupin Theorem and Symplectic Geometry

Carla Benítez García

Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas

Universidad de La Laguna

alu0101340517@ull.edu.es

## Abstract

The main result of this memory is Malus-Dupin Theorem. According to this theorem, a rectangular bi-parametric family of rays remains rectangular after an arbitrary number of reflections or refractions through smooth surfaces. In order to prove this result, we start by seeing that the ray space is a smooth manifold of dimension 4 diffeomorphic to the cotangent bundle of a sphere of radius 1. Then, we present Hamilton's original proof of the theorem for both reflection and refraction phenomena. In the last part of the memory, using the symplectic structure on the ray space (which is inherited from the existing one in the cotangent bundle of the sphere), we will give a different modern proof of Malus-Dupin theorem. Two key points are important in this proof: i) the interpretation of rectangularity in terms of Lagrangian submanifolds and ii) the fact that reflections and refractions are symplectomorphism.

## 1. Ray Space

The ray space  $\mathcal{L}$  is the set of all oriented straight lines in  $\mathbb{R}^3$ . It is naturally endowed with a four-dimensional smooth manifold structure, by a diffeomorphism from  $\mathcal{L}$  to  $T^*S^2$ , with  $S^2$  a sphere in  $\mathbb{R}^3$  of radius 1. Reflections and refractions are described as transformations of the space  $\mathcal{L}$ .

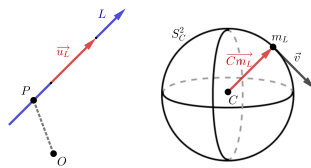


Figure 1: Ray space and sphere  $S^2$ .

## 2. Malus-Dupin Theorem

- A family of light rays smoothly depending on 2 parameters is an immersed submanifold  $\mathcal{F}$  of dimension 2 of  $\mathcal{L}$ .
- A regular point of a light ray  $L_0 \in \mathcal{F}$  is a point  $m_0 \in L_0$  with the following property: for any smooth surface  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  containing  $m_0$  and transverse at that point to the ray  $L_0$ , there exists an open neighbourhood  $U$  of  $L_0$  in  $\mathcal{F}$  and an open neighbourhood  $V$  of  $m_0$  in  $S$ , such that each ray  $L \in U$  meets  $V$  at a unique point  $m$  and that the map  $L \mapsto m$  is a diffeomorphism of  $U$  onto  $V$ .

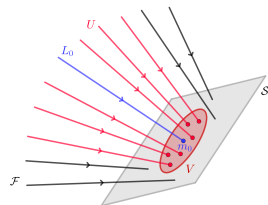


Figure 2: Regular point  $m_0$ .

- $\mathcal{F}$  is rectangular when for each regular point of each ray  $L \in \mathcal{F}$ , there exists a smooth surface orthogonally crossed by  $L$  and by all the rays in a neighbourhood of  $L \in \mathcal{F}$ .

## Malus-Dupin Theorem

A rectangular family of light rays which enters into an optical system with any number of smooth reflecting or refracting surfaces remains rectangular in each homogeneous and isotropic transparent medium in which it propagates.

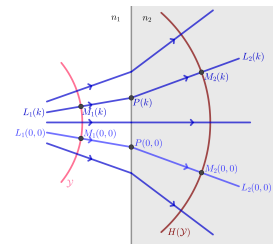


Figure 3: Malus-Dupin Theorem for a refraction.

## 3. Symplectic Geometry

- A symplectic manifold is a smooth manifold  $S$ , equipped with a closed nondegenerate differential 2-form  $\omega$  (the symplectic structure).
- A symplectomorphism is a diffeomorphism

$$f : (S, \omega) \rightarrow (S', \omega')$$

between two symplectic manifolds that satisfies  $f^*\omega' = \omega$ .

- A submanifold  $N$  of a symplectic manifold  $(S, \omega)$  is Lagrangian if, for every  $x \in S$ ,  $T_x N = \text{orth}_{\omega_x} T_x N$ , where

$$\text{orth}_{\omega_x} T_x N = \{v \in T_x S \mid \omega_x(u, v) = 0, \forall u \in T_x N\}.$$

## 4. Malus-Dupin Theorem from Symplectic Geometry

- $\mathcal{L}$  has a symplectic structure  $\omega_{\mathcal{L}}$  inherited from  $T^*S^2$ .
- A bi-parametric family of rays  $\mathcal{F}$  is rectangular if and only if  $\mathcal{F}$  is an immersed Lagrangian submanifold of  $(\mathcal{L}, \omega_{\mathcal{L}})$ .
- Reflections and refractions are symplectomorphism of  $(\mathcal{L}, \omega_{\mathcal{L}})$ .
- If  $f : (S, \omega) \rightarrow (S', \omega')$  is a symplectomorphism and  $N$  is a Lagrangian submanifold of  $(S, \omega)$ , then  $f(N)$  is a Lagrangian submanifold of  $(S', \omega')$ .

↓

Malus-Dupin Theorem

## References

C.-M. Marle. The Works of William Rowan Hamilton in Geometrical Optics and the Malus-Dupin Theorem. *Banach Center Publications*, 110 177-191 (2017).