

Keyna González Armas

*Introducción a la mecánica de
fluidos: las ecuaciones de Euler y
Navier-Stokes*

An introduction to fluid dynamics: the Euler and
Navier-Stokes equations

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, 07 de 2023

DIRIGIDO POR
Diego Alonso Orán

Diego Alonso Orán
Departamento de Análisis
Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

La finalización de este tipo de proyectos es un logro que rara vez se logra de forma aislada. Es el resultado de los esfuerzos, el apoyo y la inspiración proporcionados por numerosas personas a lo largo del camino. Esta sección sirve como tributo a ellos, a todas las personas que han estado conmigo durante empresa.

Me gustaría en primer lugar ofrecer mis agradecimientos a mi tutor Diego Alonso Orán. Con su ayuda y esfuerzo inmensurable ha sido posible finalizar este trabajo.

Le doy las gracias también a mi familia, sobre todo a mis padres. Por confiar en mí en todo momento y acompañarme tanto en las victorias como en los fracasos, incluso estando a un viaje en barco de distancia.

Agradezco a mis amigos y compañeros de carrera, por ayudarme con sus propias experiencias a mantener la calma en un ámbito que siempre me ha llenado de preocupación.

Finalmente, me gustaría dar mil gracias a mi pareja. Por escuchar mis penurias y ofrecerme un buen abrazo cada vez que lo necesitaba. Por tenderme una mano cuando parecía que el mundo se me caía encima.

Os agradezco a todos de corazón que hayais formado parte de esta experiencia.

Keyna González Armas
La Laguna, 9 de julio de 2023

Resumen · Abstract

Resumen

En este trabajo introductorio sobre la dinámica de fluidos, se ha realizado un análisis detallado de las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes, que son las bases teóricas para describir el movimiento de los fluidos. Mediante la deducción de estas ecuaciones a partir de las leyes físicas fundamentales, se ha buscado comprender cómo se relacionan las propiedades físicas de los fluidos con su comportamiento dinámico. Además de explorar las distintas formulaciones de las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes, hemos conocido el concepto de la vorticidad, y se han introducido las distintas cantidades conservadas asociadas a ambas ecuaciones. Estas cantidades, como la masa, el impulso y la energía, tienen un papel fundamental en la descripción de los fenómenos fluidos y son útiles para entender los principios físicos subyacentes. El trabajo se concluye con el estudio de algunas soluciones elementales exactas de las ecuaciones.

Palabras clave: *Fluidos – Ecuación Euler – Ecuación Navier-Stokes – Vorticidad – Cantidades conservadas – Soluciones elementales*

Abstract

In this introductory work on fluid dynamics, a detailed analysis of the Euler and Navier-Stokes equations has been carried out, which are the theoretical bases to describe the movement of fluids. Through the deduction of these equations using the fundamental physical laws, we have sought to understand how the physical properties of fluids are related to their dynamic behavior. In addition to exploring the different formulations of the Euler and Navier-Stokes equations, we have learned about the concept of vorticity, and the different conserved quantities associated with both equations have been introduced. These quantities, such as mass, momentum and energy, have a fundamental role in the description of fluid phenomena and are useful for understanding the underlying physical principles. The work concludes with the study of some exact elementary solutions of the equations.

Keywords: *Fluids – Euler’s equation – Navier-Stokes’ equation – Vorticity – Conserved quantities – Elementary solutions*

Contenido

Resumen/Abstract	IV
Introducción	VII
1. El medio continuo y las leyes físicas	1
1.1. El medio continuo: Lagrange vs Euler	1
1.2. Leyes físicas	6
1.3. Fluidos ideales: La ecuación de Euler	12
1.4. Fluidos viscosos: La ecuación de Navier-Stokes	13
2. La vorticidad: una magnitud clave	16
2.1. El concepto de vorticidad	16
2.2. Formulación vorticidad-corriente de las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes	20
2.3. Sistemas cerrados Euler y Navier-Stokes	23
3. Cantidades conservadas	27
3.1. Cantidades conservadas geométricas. Teorema de Helmholtz y Kelvin	27
3.2. Cantidades físicas conservadas para fluidos ideales	33
3.3. Cantidades físicas conservadas para fluidos con viscosidad	41
4. Soluciones elementales de fluidos ideales	44
4.1. Método general para construir soluciones estacionarias para Euler 2D	44
4.2. Soluciones estacionarias para Euler 3D: flujos de Beltrami	47
A. Apéndice: Miscelánea de cálculo	50
Bibliografía	52
Poster	53

Introducción

La mecánica de fluidos es la rama de la física que estudia el movimiento de los fluidos, las fuerzas que provocan este movimiento y las interacciones entre el fluido y su entorno. Esta disciplina científica, ha evolucionado a lo largo de siglos de investigación y desarrollo, desde los primeros intentos de comprender y describir el comportamiento de los fluidos en movimiento, hasta los avances teóricos y tecnológicos más recientes, la historia ha sido testigo de una fascinante exploración de las leyes y principios que rigen los fluidos. Los orígenes de la mecánica de fluidos se remontan a la antigüedad, con los primeros indicios de su estudio en las civilizaciones mesopotámica y egipcia, seguidos del comienzo de su teorización por filósofos y matemáticos como Arquímedes. No fue sin embargo hasta el Renacimiento y la era de la Ilustración que se produjeron avances significativos en esta disciplina. Estos fueron a mano de mentes como Leonardo da Vinci, conocido tanto por sus habilidades artísticas como por su genialidad científica. Da Vinci realizó numerosos estudios sobre el flujo de agua y aire, sentando las bases para el desarrollo posterior de la mecánica de fluidos. Tras él, y a medida que avanzaba el siglo XVIII, científicos como Daniel Bernoulli y Leonhard Euler comenzaron a formular las primeras ecuaciones matemáticas para describir el comportamiento de los fluidos en movimiento. Bernoulli introdujo el principio de la conservación de la energía en los fluidos, mientras que Euler por su parte desarrolló las ecuaciones de Euler, una formulación simplificada, y que no tiene en cuenta los efectos viscosos, de las ecuaciones de Navier-Stokes que veremos más adelante. Hacia finales del siglo XVIII y principios del XIX, nos encontramos con el trabajo pionero de Claude-Louis Navier y George Gabriel Stokes, quienes sentaron las bases para las ecuaciones de Navier-Stokes, que tienen en cuenta los efectos viscosos y son fundamentales para comprender la dinámica de fluidos en situaciones más complejas, como la turbulencia. Estas ecuaciones se convirtieron en una piedra angular de la mecánica de fluidos y han sido objeto de intensa investigación desde entonces. A lo largo del siglo XX, la mecánica de fluidos experimentó un rápido desarrollo gracias al avance de la tecnología y los métodos numéricos. La aparición de las computadoras y de software es-

pecífico permitió la resolución numérica de las ecuaciones de Navier-Stokes, lo cual abrió nuevas puertas al estudio y comprensión de fenómenos fluidodinámicos más complejos. En la actualidad, la mecánica de fluidos es interdisciplinaria, llegándose a aplicar en numerosos campos, desde la aerodinámica y la ingeniería de materiales, hasta la oceanografía y la medicina.

Ahora que hemos visto el entorno histórico que rodea a la mecánica de fluidos, vamos a ver, distinguiendo por capítulos, todo lo que estudiaremos en esta memoria. Durante el primer capítulo vamos a introducir el concepto de *fluido* y cómo describir matemáticamente su movimiento, para lo cual haremos uso de las formulaciones de Lagrange y Euler. Conoceremos también en este capítulo las leyes de conservación de la masa, junto con la segunda ley de Newton. Acabaremos explicando los conceptos de fluidos ideales y viscosos y su relación con las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes, respectivamente.

A lo largo del segundo capítulo daremos a conocer el concepto de vorticidad, y presentaremos algunas de sus propiedades. Por otro lado, veremos la conocida como formulación en forma de vorticidad de las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes. Finalmente, haremos una pequeña aclaración sobre la importancia de que nuestros sistemas sean cerrados para poder encontrar las soluciones a ambas ecuaciones.

En el tercer capítulo, procederemos a estudiar distintas cantidades físicas que se conservan globalmente a lo largo del tiempo para las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes. En particular, veremos algunas cantidades con especial interpretación geométrica, además de otras que describen características importantes de ambos sistemas, cómo pueden ser la energía, el momento o la helicidad. Cabe aclarar además que la dimensión espacial $d = 2$ o $d = 3$ jugará un papel fundamental en este estudio.

Finalmente, durante el último capítulo nos centraremos en construir ciertas soluciones para las ecuaciones de Euler estacionarias. En particular, vamos a estudiar un método de construcción de soluciones 2-dimensionales a partir de la función de corriente, además de ver distintos ejemplos particulares. Concluiremos este capítulo presentando los conocidos como, flujos de Beltrami, para construir soluciones estacionarias 3-dimensionales a partir a partir de las 2-dimensionales anteriores.

El medio continuo y las leyes físicas

En este primer capítulo vamos a introducir el concepto de *fluido* y cómo describir matemáticamente su movimiento mediante las formulaciones lagrangianas y eulerianas. También introduciremos las leyes de conservación de la masa, junto con la segunda ley de Newton. Finalmente, explicaremos los conceptos de fluidos ideales y viscosos y su relación con las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes, respectivamente. Para redactar este primer capítulo hemos seguido mayoritariamente las referencias [2] y [8].

1.1. El medio continuo: Lagrange vs Euler

Comencemos este capítulo explicando de manera intuitiva lo que se entiende por un fluido. Un fluido es un medio continuo, o lo que es decir, es un agregado que se deforma de forma continua en el tiempo, t , y forma un todo continuo en el espacio, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

La razón para considerar un fluido como un medio continuo se basa en que este es un agregado de partículas en movimiento caótico y en que la distancia característica del mismo (llamada recorrido libre medio entre colisiones) es mucho menor que las longitudes experimentales. En ocasiones el recorrido libre medio es mucho mayor y la hipótesis del continuo deja de ser válida, y deberemos tener en cuenta los movimientos moleculares. Precisamente en estas escalas superiores es donde vamos a trabajar. Por ello, podemos olvidar el concepto del movimiento de las partículas individualmente y centrarnos en un volumen elemental representativo, que denotaremos por δV , entorno a todo punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ e instante $t \in \mathbb{R}^+$. En este volumen, el cual asumimos 0 un medio continuo y homogéneo, definimos la velocidad del fluido en un punto \mathbf{x} e instante t mediante el campo de velocidades $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$.

También trataremos otras magnitudes, como la densidad ρ , la presión p o la viscosidad del fluido entre otras, más adelante. El tratamiento de esta realidad *ideal* sigue las leyes de los medios continuos de la mecánica de fluidos. De

aquí surge la siguiente dualidad; por una parte, la mecánica de fluidos es una rama de la ciencia natural, por lo que sus líneas de investigación deben describir y comprender la naturaleza mediante los resultados que se puedan validar experimentalmente. Por otro lado, el estudio teórico se desarrolla según pautas estrictamente matemáticas, dando lugar a una teoría perfectamente independiente y autónoma.

El ser consciente de una realidad más compleja, a escalas inferiores, es fundamental para poder obtener las leyes idealizadas que describen correctamente el movimiento. Por tanto, tener una comprensión de la situación física es muy conveniente a la hora de realizar un estudio o describir cierto fenómeno. Resumiendo, en esta sección nos vamos a centrar en estudiar partículas ideales en torno a \mathbf{x} y t , donde su campo de velocidades se denotará por $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

Pasemos a continuación a describir matemáticamente el movimiento en un medio continuo. Sea un dominio regular Ω_0 y $\Omega_t \subseteq \mathbb{R}^3$ y una familia de transformaciones $\Phi_t : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$, con t perteneciente a $I = [0, T]$. Diremos que Ω_0 es la posición inicial del cuerpo y Ω_t el dominio ocupado en el tiempo t . Consecuentemente se puede entender Φ_t como una aplicación deformación.

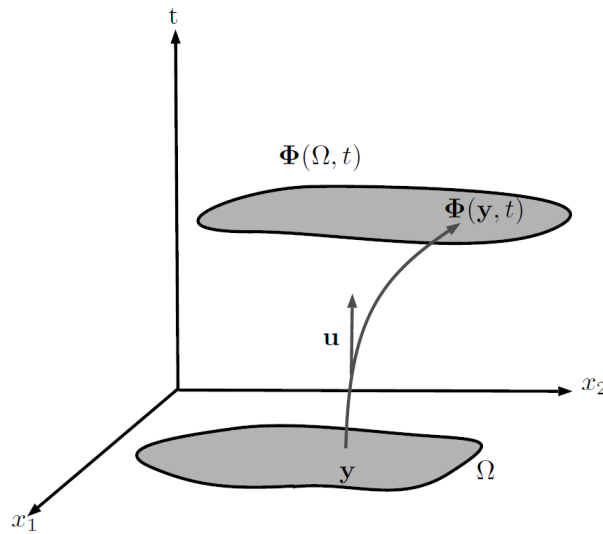


Figura 1.1. Aplicación deformación

Veamos a continuación que condiciones de regularidad debemos de imponerle a nuestra aplicación deformación para describir con cierto rigor este fenómeno. Para ello necesitaremos las siguientes hipótesis de regularidad:

- **(H₁)** $\Phi : \Omega_0 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ es C^k diferenciable, con $k = 1, 2, 3$, es decir, existen sus k -ésimas derivadas parciales y son continuas.

- **(H₂)** Siendo $\Phi_t = \Phi(\mathbf{x}, t)$, para todo t , Φ_t es un difeomorfismo, es decir, es una aplicación biyectiva diferenciable cuya inversa también lo es.
- **(H₃)** Φ_0 es la identidad, es decir, $\Phi_0 = \Phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$.

También denotaremos por $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ a la posición de la partícula a tiempo $t = 0$. Además $\mathbf{x}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{x}(t) = \Phi(\mathbf{y}, t) \in \mathbb{R}^3$.

La forma en la que vamos a estudiar el movimiento será pensar en las partículas de forma individual y ver cómo evolucionan sus trayectorias. Para ello fijamos un \mathbf{y} y estudiaremos la curva $\mathbf{x}(\mathbf{y}, t)$.

Comencemos con el concepto de vector velocidad, el cual se halla calculando la derivada temporal

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{y}, t) = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\mathbf{y}} \quad \text{con } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \text{ fijo.} \quad (1.1)$$

El vector aceleración, que denotaremos como \mathbf{a} , viene dado por:

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \left. \frac{d^2\Phi}{dt^2} \right|_{\mathbf{y}}. \quad (1.2)$$

Observación 1.1. Podemos observar que las ecuaciones (1.1) y (1.2) coinciden con los conceptos de velocidad y aceleración clásicos respectivamente, los cuales podemos encontrar en cualquier libro de física elemental.

Recordemos ahora los vectores normales y tangentes. Siendo la velocidad $\mathbf{u} = |u| \cdot \mathbf{t}$, tendremos el vector tangente y unitario de la trayectoria a $\mathbf{t} = \mathbf{u}/|u|$ con $u \neq 0$. Derivando de nuevo \mathbf{u} en t :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d|u|}{dt} \mathbf{t} + |u| \frac{d\mathbf{t}}{dt}.$$

Por tanto, $\mathbf{a} = a_t \mathbf{t} + a_n \mathbf{n}$, siendo a_t la aceleración tangencial, a_n la normal y \mathbf{n} el vector unitario normal. Como \mathbf{t} es unitario, sabemos que $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$, y derivando

$$2\mathbf{t} \cdot \frac{d\mathbf{t}}{dt} = 0.$$

Concluimos que \mathbf{t} es perpendicular a su derivada, por lo que la dirección de la derivada $\frac{d\mathbf{t}}{dt}$ es \mathbf{n} . En cuanto a su módulo, se tiene que

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n} \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{t}}{dt} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \kappa |u| \mathbf{n},$$

siendo κ la curvatura, y s el arco definido por $ds = |u| dt$. Así tenemos

$$a_n = \kappa |u|^2 = \frac{|u|^2}{R},$$

con $R = 1/\kappa$ el radio de la curvatura. Esta última fórmula se conoce como aceleración centrípeta

Por tanto, debido a lo expuesto anteriormente, el movimiento de un fluido viene completamente descrito si calculamos la función $\Phi(\mathbf{y}, t)$. Las trayectorias se calcularán entonces resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{y}. \end{cases}$$

Hemos reducido nuestro problema para las trayectorias en resolver una ODE, donde podemos usar teoría clásica para estudiar su existencia y unicidad, véase [4, Teorema 9.1.1].

Esta formulación suele recibir el nombre de formulación lagrangiana, en honor al matemático francés J-L. Lagrange. A pesar de ser muy visual y geométrica, no siempre es la más cómoda para trabajar.

Vamos a introducir ahora la versión alternativa, que será la versión euleriana, en honor al matemático suizo a Leonhard Euler. Esta se basa en colocar el punto central de la mecánica de fluidos en el campo de vectores $\mathbf{u} = (u, v, w)$, con componentes $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$, $v = v(x_1, x_2, x_3, t)$ y $w = w(x_1, x_2, x_3, t)$. Partiendo de la masa, se determinará la velocidad de un fluido \mathbf{u} en el punto \mathbf{x} y el instante de tiempo t .

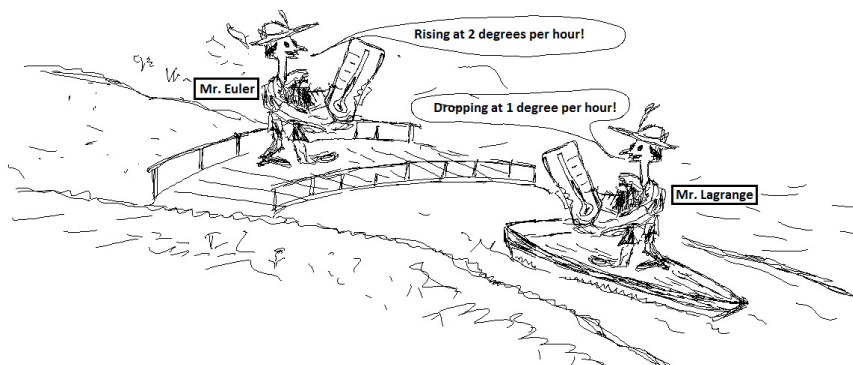


Figura 1.2. Formulación Euler vs Lagrange

Por tanto, como vemos representado en la Figura 1.2, a diferencia de la versión lagrangiana, en la versión euleriana prescindimos de entender cada partícula individualmente y nos concentramos en lo que sucede en un punto \mathbf{x} , independientemente de qué o cuántas partículas pasen por dicho punto.

Dado que cada una de las formulaciones que hemos visto tiene un conjunto de variables independientes distinto, necesitamos entender cómo pasar de una de las formulaciones a la otra. Para ello haremos uso de la transformación $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y}, t)$ más precisamente definimos

$$f(\mathbf{x}, t) = f(\Phi(\mathbf{y}, t), t) := F(\mathbf{y}, t) . \quad (1.3)$$

Para las derivadas eulerianas tendremos entonces que

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{(t, x_j)} , \quad (j \neq i) , \quad (1.4)$$

es decir, la notación estándar. Sin embargo, para las lagrangianas se tiene que, utilizando la transformación anterior,

$$\frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{(t, x_j)} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_{\mathbf{y}} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} . \quad (1.5)$$

Llegando entonces a la fórmula fundamental para el cambio de coordenadas:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f . \quad (1.6)$$

Es interesante saber que a $\frac{\partial f}{\partial t}$ en (1.4) se la conoce como tasa de variación temporal a espacio fijo, mientras que a (1.5) como tasa de variación temporal a partícula fija.

Observación 1.2. Denotaremos a la derivada de Lagrange de la siguiente manera:

$$\frac{Df}{Dt} := \frac{\partial F}{\partial t} = \left[\partial_t + \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right] f(\mathbf{x}, t) ,$$

y la denominaremos derivada material. Cabe destacar que al término $\mathbf{u} \cdot \nabla f$ se le conoce como término convectivo y se entiende como la suma de las derivadas direccionales de f a lo largo del vector \mathbf{u} .

Finalmente y antes de concluir esta sección, introduzcamos el siguiente concepto que vamos a utilizar más adelante. Para t fijo podemos hallar la matriz jacobiana o matriz deformación

$$M = \frac{\partial(x_1 x_2 x_3)}{\partial(y_1 y_2 y_3)} := D(\Phi_t). \quad (1.7)$$

Por la condición (\mathbf{H}_2) tenemos que dicha matriz es no singular, es decir que existe su inversa. Por ello, el determinante jacobiano dado por

$$J(\mathbf{y}, t) := \det(D(\Phi_t)) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.8)$$

es distinto de 0. En particular si $t = 0$, $\det(D\Phi_0) = 1$. Esto último se debe a la hipótesis (\mathbf{H}_3) , pues podemos ver fácilmente que para $t = 0$ la matriz jacobiana es la matriz identidad.

1.2. Leyes físicas

En esta sección introduciremos la leyes de conservación de la masa y la segunda ley de Newton. Estas dos leyes son los dos principios físicos elementales para poder derivar más adelante las ecuaciones que describen el movimiento de los fluidos incompresibles: las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes.

Ley de conservación de la masa

Sea $D_0 \subseteq \Omega_0$ y $D_t = \Phi_t(D_0)$, sea una familia de medidas $m_t \geq 0$ que cumplen $m_t(D_t) = m_0(D_0)$, y sea ρ una función llamada densidad que cumple $dm_t = \rho(\mathbf{x}, t) dx_1 dx_2 dx_3$ que supondremos continua y diferenciable.

La ley de la conservación de la masa en términos de ρ ó ley de conservación de masa según Lagrange viene dada por:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0. \quad (1.9)$$

Vemos fácilmente que, realizando el cambio de variable $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y}, t)$ tenemos lo que sigue

$$\int_{D_t} \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_{D_0} \rho(\Phi(\mathbf{y}, t), t) J(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y},$$

donde recordemos que J está dada por (1.8). Por otro lado, debido a que la masa se conserva respecto al tiempo se tiene $\forall D_0 \subset \Omega_0$ que

$$\int_{D_0} \rho(\Phi(\mathbf{y}, t), t) J(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} = \int_{D_0} \rho(\mathbf{y}, 0) d\mathbf{y}. \quad (1.10)$$

Tomando derivada temporal a ambos lados de la igualdad anterior, y usando que $\rho(\mathbf{y}, 0)$ no depende de t concluimos que (1.9) se puede expresar como

$$\frac{d}{dt}(\rho J) = 0 . \quad (1.11)$$

Para poder utilizar esta versión puntual de la ley debemos evaluar la derivada temporal de J . Para ello necesitaremos el siguiente resultado.

Lema 1.3. *Sea $J(\mathbf{y}, t) = \det(D(\Phi_t))$ una función regular. Se tiene entonces que*

$$\frac{dJ}{dt} = (\nabla \cdot \mathbf{u})J ,$$

donde el operador divergencia actuando sobre un vector que denotaremos por $\nabla \cdot \mathbf{u}$ viene dado por

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} .$$

Demostración. Notemos en primer lugar que escribimos el jacobiano de la matriz $D(\Phi_t)$ como sigue

$$J(\mathbf{y}, t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_3} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} .$$

Derivando con respecto a t , se tiene que

$$\frac{dJ}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_1} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial x_1}{\partial y_3} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{d}{dt} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{d}{dt} \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_3} & \frac{d}{dt} \frac{\partial x_2}{\partial y_3} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{d}{dt} \frac{\partial x_3}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{d}{dt} \frac{\partial x_3}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_3} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} & \frac{d}{dt} \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} . \quad (1.12)$$

Sabemos que por

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) ,$$

se cumple que

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) . \quad (1.13)$$

Por tanto, usando (1.13), se observa que (1.12) viene dado por

$$\frac{dJ}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_1} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} \\ \frac{\partial}{\partial y_3} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_1}{\partial y_3} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_3} & \frac{\partial}{\partial y_3} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_2}{\partial y_3} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_3}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_3}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_3} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} & \frac{\partial}{\partial y_3} \frac{d}{dt} \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} = J_1 + J_2 + J_3 .$$

Usando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial u_i}{\partial y_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial y_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial y_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial y_j} , \quad i, j = 1, 2, 3 .$$

Vemos que el primer término J_1 se puede expandir como sigue

$$J_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_3} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix} + \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_3} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix}}_{\equiv 0} + \underbrace{\frac{\partial u_1}{\partial x_3} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3}{\partial y_1} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_3} & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \end{vmatrix}}_{\equiv 0} .$$

pues ambos determinantes tiene dos columnas idénticas. Repitiendo el mismo proceso para J_2 y J_3 concluimos que

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} J + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} J + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} J = (\nabla \cdot \mathbf{u}) J .$$

Observación 1.4. Este cálculo se puede generalizar para n dimensiones, quedando:

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} J = (\nabla \cdot \mathbf{u}) J .$$

□

Un corolario que podemos probar a partir del lema anterior es el siguiente.

Corolario 1.5. *Bajo las mismas hipótesis de regularidad anteriores, se tiene que*

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = \int_{D_t} \left(\frac{D\rho}{Dt}(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \right) \, d\mathbf{x} .$$

Demostración. Este corolario se puede demostrar fácilmente haciendo uso de la fórmula integral (1.10). Sabemos que:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{D_0} \rho(\Phi(\mathbf{y}, t), t) J(\mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y} .$$

De aquí vemos que, como D_0 no depende de t ,

$$\frac{d}{dt} \int_{D_0} \rho J \, d\mathbf{y} = \int_{D_0} \frac{d}{dt} \rho J + \rho \frac{d}{dt} J \, d\mathbf{y} .$$

Por la regla de la cadena y haciendo uso del Lema 1.3 tenemos que

$$\int_{D_0} \frac{D\rho}{Dt} J + \rho (\nabla \cdot \mathbf{u}) J \, d\mathbf{y} .$$

Por tanto, como $J \in \mathbb{R}$, vemos que

$$\int_{D_0} \frac{D\rho}{Dt} J + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) J \, d\mathbf{y} = \int_{D_0} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right) J \, d\mathbf{y} .$$

Finalmente, deshaciendo el cambio y volviendo a D_t , tenemos que

$$\int_{D_0} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right) J \, d\mathbf{y} = \int_{D_t} \frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} .$$

□

Haciendo uso de los dos resultados anteriores, podemos derivar la versión euleriana de la ley de conservación de masa. Partiendo de

$$\frac{d}{dt}(\rho J) = \frac{D\rho}{Dt} J + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) J = 0 , \quad (1.14)$$

y teniendo en cuenta que para $\rho \neq 0$ se tiene que $J \neq 0$, se deduce que

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 .$$

Recordando que la derivada material viene dada por

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla ,$$

y sustituyendo en (1.14) tenemos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 .$$

Reescribiendo esta última ecuación llegamos a la versión euleriana de la ley de conservación de masa dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 , \quad (1.15)$$

que en coordenadas se escribe como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho w) = 0 . \quad (1.16)$$

Observación 1.6. Existe una forma modificada de la ley de conservación de la masa que tiene en cuenta la existencia de fuentes o sumideros de fluido de intensidad $r = r(x, t)$ y viene dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = r .$$

Sin embargo, en esta memoria asumiremos siempre la ausencia de fuentes o sumideros.

Segunda ley de Newton

Pasemos ahora a recordar la conocida como segunda ley de Newton para una partícula. Esta ley establece que las aceleraciones que experimenta un cuerpo son proporcionales a las fuerzas que recibe (fuerza igual a masa por la aceleración), que matemáticamente no es más que

$$F = m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{u}) .$$

Para el caso continuo escribimos una ley que denotaremos por $I(D_t)$, el impulso en un trozo de fluido que ocupa el volumen D_t en el tiempo t , y en la suma de las fuerzas que se aplican en D_t , las cuales pueden ser externas o superficiales. Partiendo de

$$\frac{d}{dt}I(D_t) = F_{total}(D_t) = F_{ext}(D_t) + F_{sup}(D_t) . \quad (1.17)$$

Tenemos por una parte que, usando la definición de impulso y recordando que $dm_t = \rho d\mathbf{x}$ que

$$I(D_t) = \int_{D_t} \mathbf{u} dm_t = \int_{D_t} \mathbf{u} \rho d\mathbf{x} . \quad (1.18)$$

Por otra parte, las fuerzas externas (que también se denominan fuerzas de volumen) vienen dadas por

$$F_{ext}(D_t) = \int_{D_t} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} . \quad (1.19)$$

Escribiremos \mathbf{f} como $\mathbf{f} = \rho \mathbf{f}_m$, siendo \mathbf{f}_m una aceleración que representa la densidad de la fuerza por unidad de masa. Por último, tenemos las fuerzas superficiales o de contacto, que son de corto alcance. Comenzamos suponiendo que existe una densidad superficial de la fuerza, y que denotaremos por $\Pi(\mathbf{x}, t)$. Ahora, siendo ∂D_t la frontera de D_t que supondremos regular, y $dA = dA_t$ la medida de la superficie, tendremos

$$F_{sup}(D_t) = \int_{\partial D_t} \Pi(\mathbf{x}, t) dA . \quad (1.20)$$

Es importante ver que Π no solo depende del punto (\mathbf{x}, t) de ∂D_t , sino de la dirección de la normal hacia ∂D_t , en dicho punto. Esto se traduce combinando (1.17), (1.18), (1.19) y (1.20),

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho \mathbf{u} d\mathbf{x} = \int_{D_t} \mathbf{f} d\mathbf{x} + \int_{\partial D_t} \Pi dA . \quad (1.21)$$

Esta forma es demasiado impráctica y compleja. Para obtener una versión más útil, nos hará falta el siguiente resultado, que fué demostrado por L. Cauchy en 1827, cf. [8, Teorema 3.1.1]:

Teorema 1.7. *Bajo las hipótesis anteriores, se tiene que Π es una función lineal de \mathbf{n} , donde \mathbf{n} es el vector normal a ∂D_t . Es decir, existe $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ un tensor de esfuerzo tal que*

$$\Pi(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} .$$

Queremos conseguir una versión de la ley (1.21) que sea puntual (y no integral). Para ello, usando la regla de la cadena se tiene que

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{D_0} \left(\frac{D\rho}{Dt} \mathbf{u} J + \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} J + \rho \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{u}) J \right) d\mathbf{y} . \quad (1.22)$$

Como observamos anteriormente en (1.14), ρ satisface la ecuación siguiente

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 .$$

Es decir,

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{D_0} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} J \, d\mathbf{y} = \int_{D_t} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \, d\mathbf{x}, \quad (1.23)$$

dónde en la última igualdad hemos vuelto a nuestro dominio original D_t . Combinando (1.23) y (1.21), llegamos a

$$\int_{D_t} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \, d\mathbf{x} = \int_{D_t} \mathbf{f} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial D_t} \Pi \, dA . \quad (1.24)$$

Invocando el Teorema 1.7 y el Teorema de la divergencia (Teorema A.1 en Apéndice A) se concluye que

$$\int_{D_t} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \, d\mathbf{x} = \int_{D_t} \mathbf{f} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial D_t} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_{D_t} (\mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{S}) \, d\mathbf{x}.$$

Debido a la arbitrariedad de D , concluimos la versión:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{S} , \quad (1.25)$$

o equivalentemente

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{S} . \quad (1.26)$$

La ecuación (1.26), se conoce como ley de balance del impulso o momento.

1.3. Fluidos ideales: La ecuación de Euler

Partiendo de la última ecuación de la sección anterior, (1.26), podemos pensar en tomar diversos valores para el tensor de esfuerzo \mathbf{S} , dependiendo de la situación física que queramos modelar.

Nuestra primera elección de tensor nos va a llevar a la conocida como ecuación de Euler, la cual describe la ecuación de los llamados fluidos ideales. Para poder llegar a esta, debemos ver qué implica ser un fluido ideal, y para ello necesitaremos presentar primero los siguientes conceptos.

Definición 1.8. *Un fluido perfecto es aquel que tiene un tensor de esfuerzo en el que se excluyen los esfuerzos cortantes.*

Sobre las superficies de separación entre dos elementos contiguos sólo aparecen esfuerzos perpendiculares a S , lo cual excluye la fricción y el arrastre. En virtud al Teorema 1.7, esta ausencia de esfuerzos cortantes se traduce en la existencia de la matriz diagonal

$$S = -p(x_1, x_2, x_3, t)I, \quad I = id. \quad (1.27)$$

Esta se conoce a veces con el nombre de ley de presión isótropa, y a p como presión interna.

Tenemos por tanto, juntando (1.26) y (1.27), el primer paso hacia las ecuaciones de Euler de la forma

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mathbf{f}. \quad (1.28)$$

Los fluidos perfectos se pueden subdividir en fluidos incompresibles y fluidos compresibles. Durante esta memoria, nos centraremos en el primero.

Definición 1.9. *Decimos que un fluido es perfecto incompresible si $\forall D_t \subseteq \mathbb{R}^d$ subregión del fluido, con frontera ∂D_t regular se cumple*

$$Vol(D_t) = \int_{D_t} d\mathbf{x} = Vol(D_0) = cte., \quad t > 0. \quad (1.29)$$

La definición anterior es equivalente a

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{D_t} d\mathbf{x} = \frac{d}{dt} \int_{D_0} J d\mathbf{x} = \int_{D_0} (\nabla \cdot \mathbf{u}) J d\mathbf{x} = \int_{D_t} \nabla \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} = 0, \quad (1.30)$$

donde en la tercera igualdad hacemos uso del Lema 1.3. Concluimos que ser incompresible es entonces equivalente al hecho de que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, $J \equiv 1$, ó $\frac{d\rho}{dt} = 0$. Finalmente, tenemos la definición de homogéneo.

Definición 1.10. *Un fluido va a ser homogéneo si ρ es constante en el espacio, es decir, $\nabla_{\mathbf{x}}\rho = 0$.*

Con todo esto, por fin podemos definir el concepto de un fluido ideal.

Definición 1.11. *Un fluido ideal va a ser un fluido perfecto, incompresible y homogéneo.*

Resumiendo, terminamos con el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mathbf{f} , \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 . \end{cases} \quad (1.31)$$

Sin pérdida de generalidad (mediante reescalamiento) podemos asumir que $\rho \equiv 1$. Asumiremos además que no hay fuerzas externas actuando en el sistema, es decir, tomaremos $\mathbf{f} \equiv 0$.

1.4. Fluidos viscosos: La ecuación de Navier-Stokes

Una segunda posible elección del tensor \mathbf{S} , la cual se aplica para modelar un nuevo tipo de escenario físico, en particular para describir fluidos viscosos, se usará a continuación para derivar las conocidas como ecuaciones de Navier-Stokes.

Para poder entender la importancia de esta clase de fluidos, veamos el siguiente ejemplo.

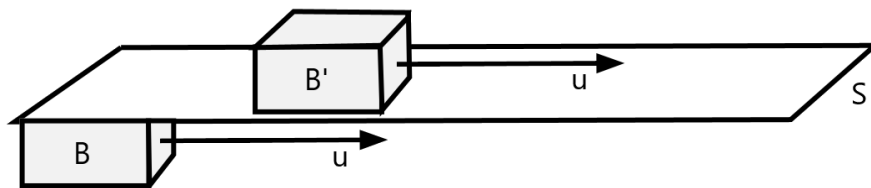


Figura 1.3. Fluidos viscosos

En la Figura 1.3 observamos que el vector velocidad \mathbf{u} es paralelo a la superficie S pero aumenta de magnitud cuando avanzamos en la superficie. Si todas las fuerzas fueran perpendiculares a S , no habría transferencia de momento entre los volúmenes B y B' . Sin embargo, esto no sucede experimentalmente; moléculas más rápidas (B') afectarán a las más lentas de debajo y viceversa. Para modelar los nuevos fluidos que vamos a tratar en esta sección tendremos en cuenta este fenómeno.

Los fluidos viscosos o también llamados fluidos newtonianos son más realistas y físicamente relevantes que los fluidos ideales que hemos definido en la sección anterior. En particular, esta clase de fluidos, a diferencia de los anteriores, admiten una acción tangencial entre capas. Esta acción tangencial es lo que llamaremos viscosidad.

Cuando esta clase de fluidos están en un estado estacionario (no dependen del tiempo) o se mueven con un movimiento uniforme, el mismo tensor de esfuerzo $S \cdot \mathbf{n} = -p\mathbf{n}$ es aplicable. Esto cambia ante el movimiento relativo de las capas contiguas. En estos casos vamos a asumir que $S \cdot \mathbf{n} = -p\mathbf{n} + \sigma\mathbf{n}$, donde σ será una matriz sobre la que tendremos que hacer ciertas hipótesis que aclararemos a continuación. Para poder tener viscosidad no trivial, necesitamos que el producto $\sigma\mathbf{n}$ sea no paralelo a la normal \mathbf{n} , lo cual se tendrá en cuenta al determinar nuestro σ .

Como sabemos por la segunda ley de Newton:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{D_t} f \, d\mathbf{x} + \int_{\partial D_t} (-p\mathbf{n} + \sigma\mathbf{n}) \, dA . \quad (1.32)$$

Por esto, necesitamos encontrar un σ que aproxime de forma razonable el transporte del momento en un movimiento.

Con todo esto en cuenta, nuestras suposiciones para σ serán las siguientes:

1. σ depende de $\nabla\mathbf{u}$ de forma lineal, es decir, $\sigma = \vartheta(\nabla\mathbf{u})$ con ϑ una función lineal.
2. σ es invariante bajo un cuerpo de rotaciones rígidas, en otras palabras, siendo A una matriz ortogonal se tiene que:

$$\sigma(A \cdot (\nabla\mathbf{u}) \cdot A^t) = A \cdot \sigma(\nabla\mathbf{u}) \cdot A^t . \quad (1.33)$$

3. σ es simétrico. Esto es necesario para que el objeto no rote en el espacio.

Ahora, como σ es simétrica, se sigue por (1) y (2) que σ sólo depende de la parte simétrica de $\nabla\mathbf{u}$, la cual recibe el nombre de matriz de deformación, que denotaremos $D = D(\nabla\mathbf{u})$ y viene dada por $D = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^t)$.

Usando las propiedades anteriores y mediante algunos cálculos de álgebra lineal combinado con cierta intuición física, se tiene que

$$\sigma = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})I + 2\mu D, \quad (1.34)$$

véase [8, §6.1] y [2, §1.3] para una derivación más rigurosa. Esto se puede describir como

$$\sigma = 2\mu\left(D - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})I\right) + \zeta(\nabla \cdot \mathbf{u})I , \quad (1.35)$$

donde a μ lo llamaremos el primer coeficiente de viscosidad, $\lambda + \frac{2}{3}\mu = \zeta$ será el segundo coeficiente de viscosidad.

Por tanto, al sistema completo que describe la evolución de un fluido viscoso incompresible viene dado por las ecuaciones de Navier-Stokes

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f} ,$$

donde $\Delta\mathbf{u} = (\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2})$ es el laplaciano. De la misma forma que se ve en el caso de los fluidos perfectos, podemos también introducir en nuestro modelo el concepto de incompresibilidad. Por tanto, como hemos visto previamente, debemos añadir a las ecuaciones anteriores la restricción $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, es decir

$$\begin{cases} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f} , \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 . \end{cases} \quad (1.36)$$

Reescalando de la misma manera que en el caso anterior, podemos tomar $\rho \equiv 1$. Al igual que en las ecuaciones de Euler (1.31), asumiremos ausencia de fuerzas externas y por tanto $\mathbf{f} \equiv 0$.

La vorticidad: una magnitud clave

En este segundo capítulo vamos a introducir el concepto de vorticidad, y presentar algunas de sus propiedades. Por otro lado, veremos la conocida como formulación en forma de vorticidad de las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes. El libro que hemos utilizado para la redacción de este capítulo es la referencia [7].

2.1. El concepto de vorticidad

Nuestro primer paso será definir el concepto de vorticidad.

Definición 2.1. Sea $\mathbf{u} = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t), u_3(\mathbf{x}, t)) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ un campo de velocidades. El rotacional del campo vectorial \mathbf{u} viene dado por

$$\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (\partial_{x_2} u_3 - \partial_{x_3} u_2, \partial_{x_3} u_1 - \partial_{x_1} u_3, \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1)(\mathbf{x}, t),$$

y lo denotaremos por $\omega(\mathbf{x}, t) = (\omega_1(\mathbf{x}, t), \omega_2(\mathbf{x}, t), \omega_3(\mathbf{x}, t))$, con componentes $\omega_1 = \partial_{x_2} u_3 - \partial_{x_3} u_2$, $\omega_2 = \partial_{x_3} u_1 - \partial_{x_1} u_3$, $\omega_3 = \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1$. El vector $\omega(\mathbf{x}, t)$ recibe el nombre de vorticidad del fluido en el punto \mathbf{x} , a tiempo t .

Veamos a continuación como describir localmente el campo de velocidades de un fluido incompresible. Sea $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3$ regular y sea (\mathbf{x}_0, t_0) fijo. Usando la serie de Taylor tenemos que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}, t_0) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0) + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0) \cdot \mathbf{h} + \mathcal{O}(\mathbf{h}^2), \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^3. \quad (2.1)$$

En (2.1), la notación \mathcal{O} denota la \mathcal{O} de Landau.¹ Por otro lado, vemos que $\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0) = (u_{x_j}^i)$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$ es una matriz de 3×3 . En particular, sumando y restando tenemos que

¹ Se dice que $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ cuando $x \rightarrow \infty$, si existe una constante $M > 0$ y $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M g(x)$, $\forall x_0 > x$.

$$\nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0) = \underbrace{\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^t)}_{\text{parte simétrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^t)}_{\text{parte antisimétrica}} = D + \Omega . \quad (2.2)$$

La matriz simétrica, que denotaremos por D , se llama matriz deformación y Ω se conoce como matriz de rotación, y viene dada por

$$\Omega = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Un cálculo sencillo muestra que $\Omega \cdot \mathbf{h} = \frac{1}{2}\omega \times \mathbf{h}$, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^3$. Combinando (2.1), (2.2) y tomando $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.2. *Todo campo de vectores regular e incompresible $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ se puede expresar hasta orden lineal ($|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|$) como la siguiente suma de términos*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0) + D(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}\omega \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) , \quad (2.3)$$

donde D es la matriz deformación con $\text{tr}(D) = 0$ y ω la vorticidad.

Partiendo de la proposición anterior vamos a estudiar las trayectorias descritas por el campo de velocidades despreciando los distintos términos de (2.3). Con esto, pretendemos ver una interpretación física de cada uno de los términos del lado derecho de la igualdad (2.3).

Como introdujimos en la sección 1.1, las trayectorias asociadas a un campo de velocidades vienen descritas por la siguiente ODE

$$\begin{cases} \frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{u}(\Phi(\mathbf{y}, t), t) , \\ \Phi(\mathbf{y}, t_0) = \mathbf{y} . \end{cases} \quad (2.4)$$

Usando la expresión (2.3) en la ecuación que describe las trayectorias (2.4), tenemos que

$$\frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0) + D(\Phi(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}\omega \times (\Phi(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}_0) . \quad (2.5)$$

Resolveremos en primer lugar la ecuación (2.5) despreciando los dos últimos términos, es decir, estudiaremos el sistema

$$\begin{cases} \frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0) , \\ \Phi(\mathbf{y}, t_0) = \mathbf{y} . \end{cases} \quad (2.6)$$

Integrando (2.6) entre t_0 y t , se tiene que

$$\Phi(\mathbf{y}, t) - \Phi(\mathbf{y}, t_0) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0)(t - t_0) .$$

Como $\Phi(\mathbf{y}, t_0) = \mathbf{y}$, concluimos que

$$\Phi(\mathbf{y}, t) = \mathbf{y} + \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0)(t - t_0). \quad (2.7)$$

Por tanto, las trayectorias (2.7) asociadas al primer término de (2.5) representan una traslación local infinitesimal.

Del mismo modo, ahora obviaremos los términos $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0)$ y $D(\Phi(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}_0)$ de (2.5). Además, para simplificar los cálculos asumiremos que $\omega = (0, 0, \omega)^t$, por tanto el sistema a resolver viene dado por

$$\begin{cases} \frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{y}, t) = \frac{1}{2}\omega \times (\Phi(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\Phi(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}_0) , \\ \Phi(\mathbf{y}, t_0) = \mathbf{y} . \end{cases} \quad (2.8)$$

Escribiremos por componentes las trayectorias y además, para simplificar la resolución de este sistema, tomaremos $t_0 = 0$ y $\mathbf{x}_0 = 0$. De esta forma tenemos que (2.8) viene dado por

$$\begin{cases} \frac{d\Phi^1}{dt}(\mathbf{y}, t) = -\frac{\omega}{2}\Phi^2(\mathbf{y}, t), \\ \frac{d\Phi^2}{dt}(\mathbf{y}, t) = \frac{\omega}{2}\Phi^1(\mathbf{y}, t), \\ \frac{d\Phi^3}{dt}(\mathbf{y}, t) = 0 . \end{cases} \quad (2.9)$$

Vemos entonces que la última componente queda desacoplada, y por tanto podemos integrarla directamente, es decir,

$$\Phi^3(\mathbf{y}, t) = \Phi^3(\mathbf{y}, 0) = y^3.$$

Por otra parte, se tiene que el sistema (2.9) lo podemos escribir como dos ecuaciones de segundo orden como sigue

$$\frac{d^2\Phi^i}{dt^2}(\mathbf{y}, t) = -\frac{\omega}{2}\Phi^i(\mathbf{y}, t), \text{ para } i = 1, 2. \quad (2.10)$$

Por tanto, las soluciones de (2.10) vienen dadas por

$$\begin{aligned} \Phi^1(t) &= c_1 \cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\omega}{2}t\right), \\ \Phi^2(t) &= d_1 \cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) + d_2 \sin\left(\frac{\omega}{2}t\right). \end{aligned}$$

Utilizando como vemos en (2.9) que $\frac{d\Phi^1}{dt}(\mathbf{y}, t) = -\frac{\omega}{2}\Phi^2(\mathbf{y}, t)$, junto con las soluciones de los datos iniciales, se observa que

$$c_1 = d_2 = y^1, \quad d_1 = -c_2 = y^2,$$

por lo que las soluciones de (2.9) vienen dadas por

$$\begin{cases} (\Phi^1(t), \Phi^2(t)) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\omega}{2}t) & -\sin(\frac{\omega}{2}t) \\ \sin(\frac{\omega}{2}t) & \cos(\frac{\omega}{2}t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix} \\ \Phi^3(\mathbf{y}, 0) = y^3. \end{cases},$$

y por tanto las trayectorias representan una rotación en el plano $x_1 - x_2$.

Para concluir, veamos qué ocurre con las trayectorias asociadas a (2.5) cuando sólo mantenemos el término $D(\Phi(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}_0)$, es decir, el asociado a la matriz deformación. Nuestro sistema viene dado por

$$\begin{cases} \frac{d\Phi(\mathbf{y}, t)}{dt} = D(\Phi(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}_0), \\ \Phi(\mathbf{y}, t_0) = \mathbf{y}. \end{cases} \quad (2.11)$$

Como D es una matriz simétrica y cuadrada, aplicando el Teorema de Schur A.6 en Apéndice A, podemos diagonalizar la matriz D , es decir, $\exists Q \in M_{3 \times 3} : QDQ^t = \bar{D}$ es una matriz diagonal con diagonal $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$. Además, como el campo vectorial \mathbf{u} es incompresible se tiene que D tiene traza 0, y si Q es invariante respecto a traslaciones y rotaciones, entonces la traza de \bar{D} también es 0, o lo que es lo mismo, $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$. Tomamos sin pérdida de generalidad que $\gamma_3 = -(\gamma_1 + \gamma_2)$.

Se tiene entonces que

$$\frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{y}, t) = D(\Phi(\mathbf{y}, t) - \mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -(\gamma_1 + \gamma_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^1(\mathbf{y}, t) - x_0^1 \\ \Phi^2(\mathbf{y}, t) - x_0^2 \\ \Phi^3(\mathbf{y}, t) - x_0^3 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Para resolver (2.12), usaremos el cambio de variable $\varphi^i(\mathbf{y}, t) = \Phi^i(\mathbf{y}, t) - x_0^i$. Veamos primero los valores de λ para $\det(A - \lambda Id) = 0$, siendo A como sigue

$$A = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -(\gamma_1 + \gamma_2) \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} \gamma_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -(\gamma_1 + \gamma_2) - \lambda \end{vmatrix} = -(\gamma_1 - \lambda)(\gamma_2 - \lambda)(\gamma_1 + \gamma_2 + \lambda) = 0.$$

Tenemos por tanto los valores siguientes $\lambda_1 = \gamma_1$, $\lambda_2 = \gamma_2$, $\lambda_3 = -\gamma_1 - \gamma_2$. Vemos facilmente que nuestra solución general viene dada por

$$\varphi(\mathbf{y}, t) = \begin{pmatrix} e^{\gamma_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\gamma_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(\gamma_1 + \gamma_2)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que los valores iniciales son $\varphi(\mathbf{y}, t_0) = \mathbf{y} - \mathbf{x}_0$, sustituimos

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}^1 - \mathbf{x}_0^1 \\ \mathbf{y}^2 - \mathbf{x}_0^2 \\ \mathbf{y}^3 - \mathbf{x}_0^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\gamma_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\gamma_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(\gamma_1 + \gamma_2)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Tenemos para la primera incógnita C_1 que

$$C_1 e^{\gamma_1 t_0} = \mathbf{y}^1 - \mathbf{x}_0^1 \Rightarrow C_1 = \frac{\mathbf{y}^1 - \mathbf{x}_0^1}{e^{\gamma_1 t_0}} \Rightarrow C_1 e^{\gamma_1 t} = e^{\gamma_1 t} \frac{\mathbf{y}^1 - \mathbf{x}_0^1}{e^{\gamma_1 t_0}} = e^{\gamma_1(t-t_0)} (\mathbf{y}^1 - \mathbf{x}_0^1).$$

Calculando de forma similar C_2 y C_3 , y deshaciendo el cambio de variable tenemos entonces que la solución de (2.12) viene dada por

$$\Phi(\mathbf{y}, t) = \mathbf{x}_0 + \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\gamma_1(t-t_0)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\gamma_2(t-t_0)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(\gamma_1 + \gamma_2)(t-t_0)} \end{pmatrix}}_{D'} (\mathbf{y} - \mathbf{x}_0), \quad \gamma_1, \gamma_2 > 0, \quad \mathbf{x}_0 = 0.$$

A la matriz D' , la cual cumple que $\text{tr}(D') = 0$, la llamaremos matriz deformación. En este último caso tendremos una deformación en distintas partes del plano según los valores de γ_1, γ_2 . Por tanto, la anterior discusión prueba el siguiente resultado.

Corolario 2.3. *Todo campo $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ regular incompresible se puede poner hasta orden lineal como suma de una traslación, rotación y deformación.*

2.2. Formulación vorticidad-corriente de las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes

En esta sección, veremos una formulación de las ecuaciones de Euler (1.31) y Navier-Stokes (1.36) en función de la nueva cantidad introducida en la sección anterior: la vorticidad. Para fluidos invíscidos, es decir, cuando estamos en las condiciones de las ecuaciones de Euler, la ecuación para la vorticidad se deriva tomando el rotacional en las ecuaciones de Euler, que recordemos vienen dadas por

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p , \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 . \end{cases} \quad (2.13)$$

Por tanto, tomando el rotacional a (2.13) se tiene que

$$\nabla \times (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\nabla \times (\partial_t \mathbf{u})}_{\mathbb{T}} + \underbrace{\nabla \times ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})}_{\mathbb{U}} + \underbrace{\nabla \times (\nabla p)}_{\mathbb{P}} = 0 .$$

Veamos como calcular el rotacional de cada uno de estos términos por separado.

Cálculo término \mathbb{T} : Comencemos viendo que sucede cuando tomamos el rotacional a $\partial_t \mathbf{u}$, al cual hemos denotado por $\mathbb{T} = \nabla \times (\partial_t \mathbf{u})$. Usando la definición de rotacional observamos que

$$\begin{aligned} \nabla \times (\partial_t \mathbf{u}) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_{x_1} & \partial_{x_2} & \partial_{x_3} \\ \partial_t u_1 & \partial_t u_2 & \partial_t u_3 \end{vmatrix} \\ &= (\partial_{x_2} \partial_t u_3 - \partial_{x_3} \partial_t u_2 , \partial_{x_3} \partial_t u_1 - \partial_{x_1} \partial_t u_3 , \partial_{x_1} \partial_t u_2 - \partial_{x_2} \partial_t u_1) \\ &= \partial_t (\nabla \times \mathbf{u}) = \partial_t \omega . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Concluimos por tanto que la derivada temporal conmuta con el rotacional y por tanto se tiene que $\mathbb{T} = \partial_t \omega$.

Cálculo término \mathbb{P} : Comprobemos a continuación que el rotacional de un campo gradiente siempre se anula. Para ello, habiendo denotado por $\mathbb{P} = \nabla \times (\nabla p)$, y usando la definición de rotacional, se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla p) &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_{x_1} & \partial_{x_2} & \partial_{x_3} \\ \partial_{x_1} p & \partial_{x_2} p & \partial_{x_3} p \end{vmatrix} \\ &= (\partial_{x_2} \partial_{x_3} p - \partial_{x_3} \partial_{x_2} p , \partial_{x_3} \partial_{x_1} p - \partial_{x_1} \partial_{x_3} p , \partial_{x_1} \partial_{x_2} p - \partial_{x_2} \partial_{x_1} p) = 0 . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Cálculo término \mathbb{U} : Finalmente, comprobemos como calcular el rotacional del término de advección no lineal $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ que hemos denotado por $\mathbb{U} = \nabla \times ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})$. Para desarrollar este término, nos será de gran ayuda demostrar previamente la siguiente igualdad

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \omega \times \mathbf{u} + \nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) . \quad (2.16)$$

Primero veamos cuando vale $\omega \times \mathbf{u}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_{x_2} u_3 - \partial_{x_3} u_2 & \partial_{x_3} u_1 - \partial_{x_1} u_3 & \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \\ &= (u_3(\partial_{x_3} u_1 - \partial_{x_1} u_3) - u_2(\partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1), u_1(\partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1) - u_3(\partial_{x_2} u_3 - \partial_{x_3} u_2), \\ &\quad u_2(\partial_{x_2} u_3 - \partial_{x_3} u_2) - u_1(\partial_{x_3} u_1 - \partial_{x_1} u_3)) . \end{aligned} \quad (2.17)$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) &= (u_1 \partial_{x_1} u_1 + u_2 \partial_{x_1} u_2 + u_3 \partial_{x_1} u_3, u_1 \partial_{x_2} u_1 + u_2 \partial_{x_2} u_2 + u_3 \partial_{x_2} u_3, \\ &\quad u_1 \partial_{x_3} u_1 + u_2 \partial_{x_3} u_2 + u_3 \partial_{x_3} u_3) . \end{aligned} \quad (2.18)$$

Combinando (2.17) y (2.18), concluimos que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \frac{\nabla}{2} (\mathbf{u}^2) &= (u_1 \partial_{x_1} u_1 + u_3 \partial_{x_3} u_1 + u_2 \partial_{x_2} u_1, u_1 \partial_{x_1} u_2 + u_3 \partial_{x_3} u_2 + u_2 \partial_{x_2} u_2, \\ u_1 \partial_{x_1} u_3 + u_3 \partial_{x_3} u_3 + u_2 \partial_{x_2} u_3) &= ((\mathbf{u} \cdot \nabla) u_1, (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_2, (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_3) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} , \end{aligned}$$

probando por tanto (2.16). Entonces, usando (2.16) encontramos que

$$\nabla \times ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \nabla \times \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \right) = \underbrace{\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})}_{I_1} + \underbrace{\nabla \times \left(\nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \right)}_{I_2} .$$

Aplicando el mismo razonamiento que en (2.15), el rotacional de un gradiente es cero, por tanto $I_2 = \nabla \times \left(\nabla \left(\frac{\mathbf{u}^2}{2} \right) \right) = 0$. Por otro lado, haciendo uso de la última igualdad de la Proposición A.7 en Apéndice A, y sabiendo que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ se tiene que

$$I_1 = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} .$$

Con esto concluimos que $\mathbb{U} = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$.

Juntando los resultados de \mathbb{T} , \mathbb{P} y \mathbb{U} llegamos a que las ecuaciones de Euler (2.13) en fórmula de vorticidad vienen dadas por

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} , \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 . \end{cases} \quad (2.19)$$

En caso de tratar con fluidos viscosos, tendremos que usar las ecuaciones de Navier-Stokes, que recordemos son

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} , \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 . \end{cases} \quad (2.20)$$

Del mismo modo que para las ecuaciones de Euler (2.13), podemos obtener una formulación en forma de vorticidad. Observamos que tomando el rotacional nos quedará una parte exactamente igual a la calculada para Euler y otro término que necesitamos calcular

$$\begin{aligned} \nabla \times (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}) = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \underbrace{\nabla \times (\partial_t \mathbf{u}) + \nabla \times ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla p)}_{\text{Rotacional Euler}} + \underbrace{\nabla \times (\mu \Delta \mathbf{u})}_{\mathbb{V}} = 0 . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Cálculo término \mathbb{V} : Para obtener las ecuaciones de Navier-Stokes tendremos que calcular el rotacional del operador de Laplace, es decir $\mathbb{V} = \nabla \times (\mu \Delta \mathbf{u})$. Podemos calcular fácilmente que

$$(\partial_{x_2} \Delta u_3 - \partial_{x_3} \Delta u_2 , \partial_{x_3} \Delta u_1 - \partial_{x_1} \Delta u_3 , \partial_{x_1} \Delta u_2 - \partial_{x_2} \Delta u_1) = \Delta(\nabla \times \mathbf{u}) = \Delta \omega .$$

Es decir, el rotacional y el laplaciano son operadores que conmutan en \mathbb{R}^N . Por tanto, nuestro elemento de viscosidad será $\mathbb{V} = \mu \Delta \omega$. Juntando este último término calculado junto con los anteriores para la ecuación de Euler llegamos a las ecuaciones de la vorticidad de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t \omega + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mu \Delta \omega , \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 . \end{cases} \quad (2.22)$$

Observación 2.4. Cabe notar que en $d = 2$ el término $(\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0$, lo cual se ve fácilmente, pues en dos dimensiones $\omega = (0, 0, \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1)$ y $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$. Este término se conoce como término de *stretching*. En este caso las ecuaciones vinieron dadas por

$$\begin{cases} \partial_t \omega + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = \mu \Delta \omega , \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 , \end{cases} \quad (2.23)$$

con $\mu = 0$ en el caso invíscido (Euler) o $\mu > 0$ en el caso viscoso (Navier-Stokes).

2.3. Sistemas cerrados Euler y Navier-Stokes

Una cuestión importante que no hemos tratado en detalle hasta el momento es como observar que las ecuaciones de Euler (2.13) y Navier-Stokes (2.20) son sistemas cerrados. A priori tenemos que las incógnitas en ambas ecuaciones son el campo de velocidades $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ y la presión del fluido $p : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Sin embargo, cuando se inspeccionan ambas ecuaciones sólo tenemos ecuaciones de evolución para el campo de velocidades $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ y no tenemos ninguna ecuación de evolución para $p(\mathbf{x}, t)$. Una manera de solventar este problema (no es la única, y esto lo veremos más adelante) es encontrar una ecuación para la presión $p = p(\mathbf{u})$ y poder *eliminar* esta incógnita de las ecuaciones (2.13) y (2.20).

Nuestro objetivo es por tanto encontrar esta ecuación $p = p(\mathbf{u})$. De manera similar a como hicimos en la sección anterior, podemos tomar la divergencia a las ecuaciones

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} , \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 . \end{cases} \quad (2.24)$$

Calculando cada término por separado tenemos que

- Término temporal:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_t = \partial_{x_1} \partial_t u_1 + \partial_{x_2} \partial_t u_2 + \partial_{x_3} \partial_t u_3 = \partial_t (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 .$$

- Término viscoso:

$$\nabla \cdot \Delta \mathbf{u} = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}) \cdot ((\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2)(u_1, u_2, u_3)) = \Delta (\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 .$$

- Término presión:

$$\nabla \cdot (\nabla p) = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}) \cdot (\partial_{x_1} p, \partial_{x_2} p, \partial_{x_3} p) = \Delta p .$$

- Término no lineal:

$$\nabla \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) .$$

Por tanto, juntando lo anterior se tiene que

$$\Delta p + \nabla \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = 0 ,$$

donde la presión p y la velocidad \mathbf{u} están relacionadas mediante la ecuación de Poisson

$$-\Delta p = \nabla \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) .$$

Denotemos por $-\Delta = L$ al operador de Laplace y por $f := \nabla \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})$. Para resolver la ecuación de Poisson nos gustaría *invertir* el operador L , es decir calcular L^{-1} y así poder escribir la presión como $p = L^{-1} f$. Bajo ciertas hipótesis, las cuales veremos en el siguiente Lema [7, Lema 1.12], podremos encontrar una fórmula explícita para p en función de \mathbf{u} .

Lema 2.5. *Sea f una función regular en \mathbb{R}^d que decae suficientemente rápido a cero para $|x| \rightarrow \infty$. Entonces la solución \mathbf{v} de la ecuación de Poisson*

$$\Delta \mathbf{v} = f ,$$

con $|\nabla \mathbf{v}| \rightarrow 0$ para $|x| \rightarrow \infty$ viene dada por

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} N(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (2.25)$$

donde la solución fundamental N , conocida como el potencial Newtoniano, es

$$N(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x}|, & d = 2, \\ \frac{1}{(2-d)\omega_d} |\mathbf{x}|^{2-d}, & d \geq 3, \end{cases} \quad (2.26)$$

y ω_d es el área de la esfera unidad en \mathbb{R}^d .

Por tanto, para calcular la forma explícita de $p = p(\mathbf{u})$, basta usar el Lema 2.5 con $f := \nabla \cdot ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u})$ y $\mathbf{v} = p$.

Una forma alternativa de eliminar la presión es justamente la que vimos en la sección anterior (sección 2.2), tomando el rotacional a las ecuaciones de Euler (2.13) y Navier-Stokes (2.20). Sin embargo, en nuestra nueva formulación con la vorticidad (véase ecuaciones (2.19) y (2.22)) nos surge un problema similar. En efecto, para cerrar los sistemas de ecuaciones (2.19) y (2.22) tenemos que ser capaces de expresar \mathbf{u} en función de ω , es decir, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\omega)$. Para ello, tenemos que estudiar el siguiente sistema.

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{u} = \omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{cases} \quad (2.27)$$

el cual se conoce en inglés como sistema *div-curl*. Utilizando entonces el sistema (2.27) podemos conseguir una expresión explícita (del mismo modo que para la presión p anteriormente) que relaciona la \mathbf{u} con ω . Los detalles de estos cálculos se escapan al objetivo principal de esta memoria, y por tanto no entraremos detalles técnicos. Para calcular esta relación usaremos el siguiente resultado cuya demostración se puede encontrar en [7, Proposición 2.16]

Proposición 2.6. *Sea $\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$ (cuadrado integrable) un campo vectorial regular que decae suficientemente rápido a cero para $|x| \rightarrow \infty$. Entonces*

1. *El sistema div-curl (2.27) tiene una solución regular \mathbf{u} que decae a cero para $|x| \rightarrow \infty$ si y sólo si $\nabla \cdot \omega = 0$.*
2. *Si $\nabla \cdot \omega = 0$, entonces la solución \mathbf{u} está determinada constructivamente por*

$$\mathbf{u} = -(\nabla \times \Psi),$$

donde la función corriente Ψ es solución de la ecuación de Poisson

$$\Delta \Psi = \omega.$$

La fórmula explícita para \mathbf{u} viene dada por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} K_d(\mathbf{x} - \mathbf{y})\omega(\mathbf{y}) d\mathbf{y} , \quad (2.28)$$

donde el núcleo $K_d(x)$ tiene la forma

$$K_2(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{x_2}{|\mathbf{x}|^2} , \frac{x_1}{|\mathbf{x}|^2} \right)^t , \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 , \quad (2.29)$$

$$K_3(\mathbf{x})\mathbf{h} = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{x} \times \mathbf{h}}{|\mathbf{x}|^3} , \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^3 . \quad (2.30)$$

La ecuación (2.28) junto con (2.29), (2.30) se conoce como operador de *Biot-Savart* en dos y tres dimensiones respectivamente.

Por tanto, con lo expuesto anteriormente concluimos que los sistemas de Euler y Navier-Stokes, tanto en su formulación original (con variables \mathbf{u}, p) como en su nueva formulación en vorticidad (con variables \mathbf{u}, ω) constituyen un sistema de ecuaciones en derivadas parciales cerrado. Como contrapartida, se tiene que las expresiones de las funciones $p = p(\mathbf{u})$ o $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\omega)$ vienen dadas por operadores complicados (más conocidos en la literatura como operadores singulares y no locales).

Cantidades conservadas

En este capítulo, procederemos a estudiar las distintas cantidades físicamente relevantes que se conservan globalmente en el tiempo para las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes. En particular, presentaremos algunas cantidades con especial interpretación geométrica como también cantidades que describen características importantes de ambos sistemas como la energía, el momento o la helicidad. La dimensión espacial $d = 2$ o $d = 3$ jugará un papel fundamental. Como base para escribir este capítulo hemos utilizado la referencia [7].

3.1. Cantidades conservadas geométricas. Teorema de Helmholtz y Kelvin

En esta sección probaremos el conocido como Teorema de Helmholtz y Teorema de Conservación de Kelvin. Para ello, debemos introducir algunos resultados previos como la fórmula de transporte de la vorticidad.

Proposición 3.1. *Sea $\Phi(\mathbf{y}, t)$ una solución regular de la ODE (2.4), es decir, una trayectoria regular asociada al campo de velocidades $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ con $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Entonces la solución de las ecuaciones de Euler en forma de vorticidad (2.19) viene dada explícitamente mediante la fórmula*

$$\omega(\Phi(\mathbf{y}, t), t) = \nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{y}, t) \omega_0(\mathbf{y}) . \quad (3.1)$$

Observación 3.2 (Método de las características). La fórmula (3.1) se conoce como fórmula de transporte de la vorticidad. Esta fórmula explícita no es tan sorprendente, pues recuerda al clásico método de las características para resolver EDPs de primer orden. Es decir, resolvemos la ecuación a través de sus sistemas característicos.

Para poder probar esta Proposición 3.1, veamos en primer lugar un resultado más general.

Lema 3.3. Sea $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ un campo de velocidades regular asociado a las trayectorias

$$\begin{cases} \frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{u}(\Phi(\mathbf{y}, t), t) , \\ \Phi(\mathbf{y}, t_0) = \mathbf{y} . \end{cases} \quad (3.2)$$

Sea $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ un campo de velocidades regular. Entonces se tiene que

$$\frac{D\mathbf{h}}{Dt} = \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u} \iff \mathbf{h}(\Phi(\mathbf{y}, t), t) = \nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{y}, t) \mathbf{h}_0(\mathbf{y}) . \quad (3.3)$$

Demostración. Derivando (3.2) con respecto a \mathbf{y} , se tiene que

$$\frac{d\nabla_{\mathbf{y}} \Phi}{dt}(\mathbf{y}, t) = \nabla_x \mathbf{u}(\Phi(\mathbf{y}, t), t) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{y}, t) . \quad (3.4)$$

Multiplicando (3.4) por \mathbf{h}_0 y denotando por $\mathbf{E}(t) = \nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{y}, t) \mathbf{h}_0(\mathbf{y})$ observamos que

$$\frac{d\mathbf{E}}{dt}(t) = \nabla_x \mathbf{u}(\Phi(\mathbf{y}, t), t) \cdot \mathbf{E}(t) . \quad (3.5)$$

Entonces, si \mathbf{h} satisface el lado izquierdo de la ecuación (3.3) se tiene que

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt}(\Phi(\mathbf{y}, t), t) = \nabla_x \mathbf{h}(\Phi(\mathbf{y}, t), t) \frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{y}, t) + \mathbf{h}_t(\Phi(\mathbf{y}, t), t) . \quad (3.6)$$

Usando (3.2) y el hecho de que $\mathbf{h}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{h} = \nabla \mathbf{h} \cdot \mathbf{u}$ (pues satisface el lado izquierdo de (3.3)) se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathbf{h}(\Phi(\mathbf{y}, t), t) \cdot \mathbf{u}(\Phi(\mathbf{y}, t), t) + \mathbf{h}_t(\Phi(\mathbf{y}, t), t) &= \nabla_x \mathbf{h} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla_x \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \nabla_x \mathbf{u} \\ &= \mathbf{h} \cdot \nabla_x \mathbf{u} . \end{aligned} \quad (3.7)$$

Combinando (3.5), (3.6) y (3.7) nos damos cuenta que

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{E}}{dt}(t) = \mathbf{E}(t) \nabla_x \mathbf{u} ; \quad \mathbf{E}(t_0) = \nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{y}, t_0) \mathbf{h}_0(\mathbf{y}) = \mathbf{h}_0(\mathbf{y}) , \\ \frac{d\mathbf{h}}{dt}(t) = \mathbf{h}(t) \nabla_x \mathbf{u} ; \quad \mathbf{h}(t_0) = \mathbf{h}(\Phi(\mathbf{y}, t_0), t_0) = \mathbf{h}(\mathbf{y}, t_0) = \mathbf{h}_0(\mathbf{y}) . \end{cases} \quad (3.8)$$

Es decir, $\mathbf{E}(t)$ y $\mathbf{h}(t)$, satisfacen la misma ecuación diferencial ordinaria. Usando la unicidad de ODE lineales de primer orden (Teorema A.5 en Apéndice A), concluimos que

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{h}(t) \implies \nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{y}, t) \mathbf{h}_0(\mathbf{y}) = \mathbf{h}(\Phi(\mathbf{y}, t), t) .$$

Notemos que todas las implicaciones son un sí y solo sí, finalizando así la demostración del lema.

□

El Lema 3.3 implica directamente el resultado de la Proposición 3.1 tomando $\mathbf{h} = \omega$. Observemos además que en este lema no estamos asumiendo que \mathbf{u} sea incompresible, es decir, $\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$.

Observación 3.4 (El caso dos dimensional). Siendo $\Phi(\mathbf{y}, t) = (\Phi^1(\mathbf{y}, t), \Phi^2(\mathbf{y}, t), \Phi^3(\mathbf{y}, t))$ podemos ver fácilmente que en $d = 2$ se tiene que

$$\nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{y}, t) = \begin{pmatrix} \Phi_{y_1}^1 & \Phi_{y_2}^1 & 0 \\ \Phi_{y_1}^2 & \Phi_{y_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, cuando $d = 2$, las trayectorias satisfacen

$$\frac{d\Phi}{dt}(\mathbf{y}, t) = (u_1(\Phi(\mathbf{y}, t), t), u_2(\Phi(\mathbf{y}, t), t), 0).$$

Por otro lado, para $d = 2$, se tiene que $\omega_0(\mathbf{y}) = (0, 0, \omega_0(\mathbf{y}))^t$, donde

$$\omega_0(\mathbf{y}) = \nabla \times (u_1, u_2, 0) = (0, 0, \partial_{y_1} u_2 - \partial_{y_2} u_1).$$

Por ende usando la Proposición 3.1 concluimos que

$$\omega(\Phi(\mathbf{y}, t), t) = \nabla_{\mathbf{y}} \Phi(\mathbf{y}, t) \omega_0(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \Phi_{y_1}^1 & \Phi_{y_2}^1 & 0 \\ \Phi_{y_1}^2 & \Phi_{y_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0(\mathbf{y}) \end{pmatrix} = \omega_0(\mathbf{y}). \quad (3.9)$$

Esta observación implica que en el caso dos dimensional la vorticidad se conserva a través de las trayectorias. Como veremos más adelante, esta propiedad juega un papel fundamental en el problema de existencia y unicidad de soluciones de las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes.

Veamos ahora otra propiedad importante relativa a la vorticidad en fluidos ideales. Para ello, necesitamos introducir la siguiente notación. Sea \mathbf{S} un dominio abierto de \mathbb{R}^d , ($d = 2, 3$), con frontera regular y orientada que denotaremos por \mathbf{C} , y sean $\mathbf{S}(t) = \{\Phi(\mathbf{y}, t) : \mathbf{y} \in \mathbf{S}\}$ y $\mathbf{C}(t) = \{\Phi(\mathbf{y}, t) : \mathbf{y} \in \mathbf{C}\}$.

Se tiene el siguiente resultado

Teorema 3.5 (Teorema de Helmholtz). *Sea \mathbf{u} una solución regular de la ecuación de Euler (1.31) y sea $F_{\mathbf{S}(t)}$ el flujo de vorticidad a través de una superficie $\mathbf{S}(t)$ que se mueve con el flujo, entonces:*

$$\frac{d}{dt} F_{\mathbf{S}(t)} = 0 \quad \text{donde} \quad F_{\mathbf{S}(t)} = \oint_{\mathbf{S}(t)} \omega \cdot d\mathbf{S}.$$

La demostración del Teorema de Helmholtz requiere introducir y probar ciertas propiedades relacionadas con nuestro campo de velocidades $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. En primer lugar, probaremos el siguiente resultado.

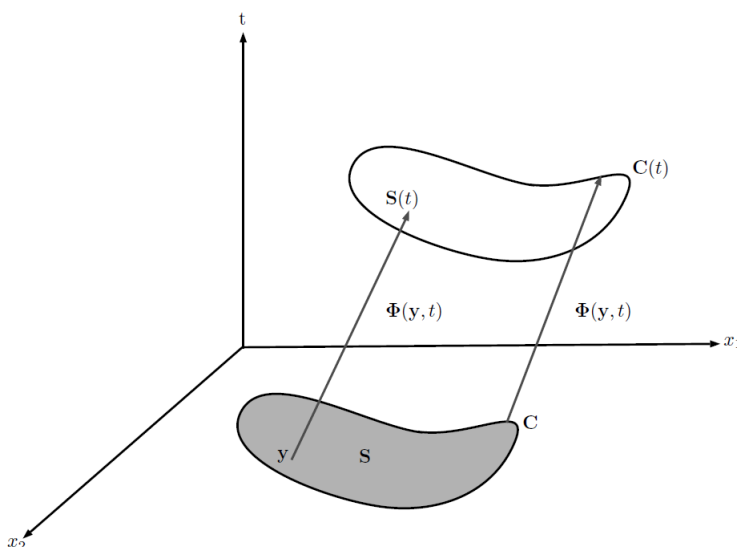


Figura 3.1. Dominio S con frontera C y evolución lagrangiana del dominio.

Proposición 3.6. Sea C una curva orientada regular y cerrada. Sea $\Phi(\mathbf{y}, t)$ las trayectorias asociadas a un campo de vectores regular incompresible. Entonces se tiene que:

$$\frac{d}{dt} \oint_{\mathbf{C}(t)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\mathbf{C}(t)} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{l} .$$

Observación 3.7. Es necesario hacer los siguientes comentarios:

- El término $\oint_{\mathbf{C}_t} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} := \Gamma_{\mathbf{C}(t)}$ se conoce como circulación alrededor de la curva $\mathbf{C}(t)$.
- Sea $\mathbf{C}(t)$ es una curva que parametrizamos mediante $\mathbf{r}(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ y sea $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$, entonces se define la integral de línea como

$$\oint_{\mathbf{C}(t)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{u}(\mathbf{r}(t), t) \cdot \mathbf{r}'(t) dt .$$

Demostración. Usando la definición de la integral de línea, es decir, parametrizando $\mathbf{C}(t)$ con una curva $\mathbf{r}(s)$, con $0 \leq s \leq 1$, por lo que $\mathbf{C}(t) = \{\mathbf{X}(\mathbf{r}(s), t) : 0 \leq s \leq 1\}$

$$\frac{d}{dt} \oint_{\mathbf{C}(t)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \frac{d}{dt} \int_0^1 \mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{r}(s), t), t) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{X}(\mathbf{r}(s), t) ds .$$

Usando la regla integral de Leibniz, tenemos que

$$\frac{d}{dt} \oint_{\mathbf{C}(t)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^1 \underbrace{(\nabla_x \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{X}(\mathbf{r}(s), t)}{dt} + \mathbf{u}_t(\mathbf{X}(\mathbf{r}(s), t), t)) \cdot \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{X}(\mathbf{r}(s), t)}_{I_1} +$$

$$+ \underbrace{\mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{r}(s), t), t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{X}(\mathbf{r}(s), t)}_{I_2} ds = \int_0^1 I_1 + I_2 .$$

Teniendo en cuenta que por definición de las trayectorias

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{X}(\mathbf{r}(s), t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{r}(s), t), t),$$

tenemos que

$$\int_0^1 I_1 = \int_0^1 \frac{D\mathbf{u}}{Dt}(\mathbf{X}(\mathbf{r}(s), t), t) \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{X}(\mathbf{r}(s), t) ds , \quad (3.10)$$

$$\int_0^1 I_2 = \int_0^1 \mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{r}(s), t), t) \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{r}(s), t), t) ds , \quad (3.11)$$

donde recordemos que $\frac{D}{Dt} = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}$ es la derivada material. Observamos en primero lugar que

$$\int_0^1 I_2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{u}(\mathbf{X}(\mathbf{r}(s), t), t))^2 ds = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^2(\mathbf{X}(\mathbf{r}(1), t), t) - \mathbf{u}^2(\mathbf{X}(\mathbf{r}(0), t), t)) = 0. \quad (3.12)$$

Por otro lado, usando la definición de integral de línea se tiene que

$$\int_0^1 \frac{D\mathbf{u}}{Dt}(\mathbf{X}(\mathbf{r}(s), t), t) \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{X}(\mathbf{r}(s), t) ds = \oint_{\mathbf{C}(t)} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{l} . \quad (3.13)$$

Combinando, (3.12) y (3.13) se tiene el resultado deseado.

□

Una consecuencia importante de la proposición anterior es el conocido como el Teorema de la conservación de Kelvin.

Teorema 3.8 (Teorema de conservación de Kelvin). *Sea \mathbf{u} un campo de velocidades regular que soluciona la ecuación de Euler (1.31). Entonces la circulación alrededor de la curva $\mathbf{C}(t)$, $\Gamma_{\mathbf{C}(t)} = \oint_{\mathbf{C}(t)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}$, que se mueve con el fluido, es constante en el tiempo. Es decir,*

$$\frac{d}{dt} \Gamma_{\mathbf{C}(t)} = 0 .$$

Demostración. La demostración de este teorema es un corolario directo de la Proposición 3.6, junto con el hecho de que ∇p es periódica con respecto a la parametrización de la Proposición 3.6. En efecto, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \oint_{\mathbf{C}(t)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} &= \oint_{\mathbf{C}(t)} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{l} = - \oint_{\mathbf{C}(t)} \nabla p \cdot d\mathbf{l} = - \int_0^1 \nabla p(\mathbf{r}(s), t) \cdot \mathbf{r}'(s) ds \\ &= - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} p(\mathbf{r}(s), t) ds = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

□

Con esto ya podemos proceder con la demostración del Teorema 3.5.

Demostración (Teorema 3.5 de Helmholtz). La demostración del teorema se sigue del Teorema de conservación de Kelvin 3.8 junto con el Teorema de Stokes (Teorema A.2 en Apéndice A). En efecto, invocando el Teorema de Stokes se tiene que

$$\oint_{\mathbf{C}(t)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\mathbf{S}(t)} \nabla \times \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathbf{S}(t)} \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S}.$$

Por tanto, aplicando el Teorema 3.8 se concluye que

$$\frac{d}{dt} \oint_{\mathbf{C}(t)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{S}(t)} \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

□

Observación 3.9 (Teorema de Kelvin en Navier-Stokes). En el Teorema 3.8 hemos visto que el flujo de la velocidad a través de una superficie se conserva en el tiempo en el caso de las ecuaciones de Euler. Podemos ahora plantearnos si esto será también posible para las ecuaciones de Navier-Stokes (1.36). Usando la Proposición 3.6, se tiene que

$$\frac{d}{dt} \oint_{\mathbf{C}(t)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \oint_{\mathbf{C}(t)} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \cdot d\mathbf{l} = - \oint_{\mathbf{C}(t)} \nabla p \cdot d\mathbf{l} + \mu \oint_{\mathbf{C}(t)} \Delta \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}.$$

Del mismo modo que observamos para anteriormente, el término asociado a la presión es cero, véase (3.14). Por otro lado, usando la primera expresión en la Proposición A.7 en el Apéndice A, junto con la incompresibilidad del fluido $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, concluimos que

$$\frac{d}{dt} \oint_{\mathbf{C}(t)} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = -\mu \oint_{\mathbf{S}(t)} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{S} = -\mu \oint_{\mathbf{S}(t)} \nabla \times (\boldsymbol{\omega}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Por tanto, en general para fluidos viscosos no se conserva la circulación $\Gamma_{\mathbf{C}(t)}$ y crecerá o decrecerá dependiendo del signo del rotacional de la vorticidad.

3.2. Cantidades físicas conservadas para fluidos ideales

En la sección anterior se han introducido algunas cantidades conservadas geométricas para fluidos ideales (véase Teorema 3.8 y Teorema 3.5). En esta sección se investigarán nuevas cantidades conservadas para fluidos ideales donde la dimensión espacial ($d = 2, 3$) marcará diferencias sustanciales. El siguiente resultado recopila las distintas cantidades conservadas en el caso tres dimensional.

Teorema 3.10. *Sea (\mathbf{u}, p) una solución regular de Euler (1.31) en \mathbb{R}^3 que decae suficientemente rápido en el infinito, es decir, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$ para $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Entonces las siguientes cantidades se conservan globalmente para $t > 0$:*

- *El flujo total de \mathbf{u} , es decir,*

$$U(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} .$$

- *La energía cinética, es decir,*

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 \, d\mathbf{x} ,$$

$$\text{donde } |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 = \sum_{i=1}^3 u_i^2(\mathbf{x}, t).$$

- *El flujo de la vorticidad que se define como*

$$\Omega_3(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \omega(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x},$$

donde recordemos que ω se define como $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$.

- *La helicidad, que definimos como*

$$H_3(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \omega(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} .$$

- *El impulso, que viene dado por*

$$I_3(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{x} \times \omega \, d\mathbf{x}.$$

Para poder demostrar la proposición anterior tendremos que ver primero el siguiente lema.

Lema 3.11. Sea $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ un campo vectorial regular con $\nabla \cdot g = 0$. Sea q una función escalar regular, es decir, $q(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces si $|g(\mathbf{x})||q(\mathbf{x})| = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-d})$ para $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(\mathbf{x}) \cdot \nabla q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 . \quad (3.15)$$

Demostración (Demostración Lema 3.11). En primer lugar, notamos que

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(\mathbf{x}) \cdot \nabla q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B(0,r)} g(\mathbf{x}) \cdot \nabla q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} ,$$

donde $B(0, r)$ es la bola d -dimensional centrada en el origen con radio r . Aplicamos ahora la segunda igualdad de la Proposición A.7 en el Apéndice A, con lo que tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B(0,r)} g(\mathbf{x}) \cdot \nabla q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B(0,r)} \nabla \cdot (g(\mathbf{x})q(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial B(0,r)} q(\mathbf{x})(\nabla \cdot g(\mathbf{x})) \, dS . \end{aligned}$$

Haciendo uso de la hipótesis $\nabla \cdot g = 0$, la segunda integral se anula, por lo que nos queda ver que sucede con la primera, para lo cual haremos primero uso del Teorema de la divergencia (Teorema A.2 en Apéndice A). Veamos que sucede ahora con este término frontera

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial B(0,r)} g(\mathbf{x})q(\mathbf{x}) \cdot \vec{n} \, dS &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial B(0,r)} |g(\mathbf{x})q(\mathbf{x}) \cdot \vec{n}| \, dS \leq \\ &\leq \lim_{r \rightarrow \infty} |g(\mathbf{x})||q(\mathbf{x})| \int_{\partial B(0,r)} dS = \lim_{r \rightarrow \infty} |g(\mathbf{x})||q(\mathbf{x})| r^{d-1} C_d = 0 , \end{aligned}$$

pues $|g(\mathbf{x})||q(\mathbf{x})| = \mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-d})$ cuando $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, y donde el término $r^{d-1}C_d$ es la superficie de la bola de dimensión d .

□

Ahora podemos volver a la demostración del Teorema 3.10.

Observación 3.12. Como hemos visto en el Lema 3.11, se asume cierto decaimiento en las funciones para justificar que el término de frontera que aparece al integrar por partes se anula. En el enunciado del Teorema 3.10, hemos querido simplificar la exposición pidiendo que las soluciones de la ecuación de Euler (1.31) decaigan lo suficientemente rápido en el infinito, sin embargo el decaimiento necesario es exactamente el elegido en el Lema 3.11.

Demostración (Teorema 3.10). En primer lugar, veamos la conservación del flujo $U(t)$. Para ello es suficiente probar que $\partial_t U(t) = 0$. Por tanto, tomando la derivada temporal y escribiendo la integral por componentes¹, tenemos que

$$\partial_t U(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = - \int_{\mathbb{R}^3} u_j \partial_{x_j} u_i \, d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_i} p \, d\mathbf{x} = J_1 + J_2 ,$$

donde en la segunda igualdad hemos usado que \mathbf{u} es solución de las ecuaciones de Euler (1.31). Observamos que $J_2 = 0$, pues basta aplicar el Teorema A.1 en el Apéndice A y el decaimiento de p para $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$.² Del mismo modo aplicando el Lema 3.11, se tiene que

$$J_1 = - \int_{\mathbb{R}^3} u_j \partial_{x_j} u_i \, d\mathbf{x} = 0,$$

Con esto concluimos que

$$\partial_t U(t) = 0 \implies U(t) = U(0) , \quad t \geq 0$$

Vamos a demostrar ahora la conservación de la energía cinética. De nuevo, tomando la derivada temporal de $E(t)$ observamos que

$$\begin{aligned} \partial_t E(t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u} \cdot \partial_t \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^3} \nabla p \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = K_1 + K_2 . \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente el Lema 3.11, obtenemos que $K_2 = 0$. Por otro lado, escribiendo el término K_1 por componentes, vemos que

$$K_1 = \int_{\mathbb{R}^3} u_j \partial_{x_j} u_i u_i \, d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u} \cdot \nabla |\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} .$$

Haciendo uso una vez más del Lema 3.11, concluimos que $K_1 = 0$, y por tanto hemos demostrado que

$$\partial_t E(t) = 0 \implies E(t) = E(0), \quad t \geq 0.$$

Para probar el resto de las cantidades conservadas necesitamos usar la ecuación que satisfica la vorticidad, es decir la ecuación (2.19). Demostraremos a continuación la conservación del flujo de la vorticidad $\Omega_3(t)$. Procediendo como anteriormente, tomando la derivada temporal de $\Omega_3(t)$ vemos que

¹ Asumiremos siempre al escribir por componentes que estamos sumando sobre índices repetidos. Por cuestiones de estilo, no escribiremos explícitamente esta suma en los cálculos.

² Notemos que en realidad esto coincide con el caso degenerado del Lema 3.11 para $q = p$, $g = 1$.

$$\partial_t \Omega_3(t) = \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \omega(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} \, d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega \, d\mathbf{x} = L_1 + L_2 . \quad (3.16)$$

Para cada integral L_1 e L_2 vamos a utilizar la misma estrategia que hemos usado para las cantidades anteriores. En efecto, escribiendo ambas cantidades por componentes

$$L_1 + L_2 = \int_{\mathbb{R}^3} \omega_j \partial_{x_j} u_i \, d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^3} u_j \partial_{x_j} \omega_i \, d\mathbf{x} .$$

Ahora, teniendo en cuenta que u_i y ω_i son escalares, y que $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, $\nabla \cdot \omega = 0$, basta invocar una vez más el Lema 3.11 para ver que $L_1 = L_2 = 0$. Por tanto, hemos probado la conservación del flujo de la vorticidad $\Omega_3(t)$,

$$\partial_t \Omega_3(t) = 0 \implies \Omega_3(t) = \Omega_3(0), \quad t \geq 0 .$$

Pasemos ahora a probar la conservación de la helicidad $H_3(t)$. Tomando al derivada temporal de $H_3(t)$ y usando que \mathbf{u} y ω cumplen las ecuaciones de Euler (1.31) y (2.19) respectivamente se tiene

$$\begin{aligned} \partial_t H_3(t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \omega(\mathbf{x}, t)) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u} \cdot (\partial_t \omega) + (\partial_t \mathbf{u}) \cdot \omega \, d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u} \cdot [(\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega] \, d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^3} \omega \cdot [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p] \, d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} u_i \omega_j \partial_{x_j} u_i \, d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^3} u_i u_j \partial_{x_j} \omega_i \, d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^3} \omega_i u_j \partial_{x_j} u_i \, d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^3} \omega_j \partial_{x_j} p_i \, d\mathbf{x} \\ &= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 . \end{aligned}$$

En primer lugar, observamos que el término T_1 se puede escribir (del mismo modo que el término K_1) como

$$T_1 = \int_{\mathbb{R}^3} u_i \omega_j \partial_{x_j} u_i \, d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \omega_j \partial_{x_j} (|u_i|^2) \, d\mathbf{x} = 0, \quad (3.17)$$

dónde en la última igualdad hemos aplicado el Lema 3.11. Invocando el mismo Lema 3.11, se tiene también que $T_4 = 0$. Por tanto, falta por comprobar que $T_2 + T_3 = 0$. Usando su expresión por componentes e integrando por partes (Teorema A.3 en Apéndice A) vemos que

$$\begin{aligned} T_2 + T_3 &= - \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_j} u_i u_j \omega_i \, d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^3} u_i \partial_{x_j} u_j \omega_i \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_j} \omega_i u_j u_i \, d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^3} \omega_i \partial_{x_j} u_j u_i \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_j} u_i u_j \omega_i \, d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_j} \omega_i u_j u_i \, d\mathbf{x} \quad (3.18)$$

donde hemos usado que la segunda y la cuarta integral son cero, pues $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Integrando por partes (Teorema A.3 en Apéndice A) la segunda integral una vez más,

$$(3.18) = - \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_j} u_i u_j \omega_i \, d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^3} \omega_i \partial_{x_j} u_j u_i \, d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^3} \omega_i u_j \partial_{x_j} u_i \, d\mathbf{x} = 0, \quad (3.19)$$

pues la segunda integral es cero ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) y la primera y tercera integral se cancelan ya que $\partial_{x_j} u_i u_j \omega_i = \omega_i u_j \partial_{x_j} u_i$. Es por ello que combinando los cálculos (3.17) - (3.19) concluimos que la helicidad se conserva en el tiempo, i.e.,

$$\partial_t H_3(t) = 0 \implies H_3(t) = H_3(0), \quad t \geq 0.$$

Queda por último demostrar la conservación el impulso $I_3(t)$. Tomando la derivada temporal y usando que ω cumple las ecuaciones (2.19) tenemos

$$\begin{aligned} I_3(t) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t (\mathbf{x} \times \omega) \, d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{x} \times (\partial_t \omega) \, d\mathbf{x} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{x} \times [(\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega] \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \underbrace{\mathbf{x} \times (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u}}_{F_1} - \underbrace{\mathbf{x} \times (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega}_{F_2} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

En primer lugar, centrémonos en el término $\int_{\mathbb{R}^3} F_1 \, d\mathbf{x}$. Para ello, notemos que

$$\begin{aligned} F_1 &= (x_2 \omega_j \partial_{x_j} u_3 - x_3 \omega_j \partial_{x_j} u_2, \quad x_3 \omega_j \partial_{x_j} u_1 - x_1 \omega_j \partial_{x_j} u_3, \quad x_1 \omega_j \partial_{x_j} u_2 - x_2 \omega_j \partial_{x_j} u_1) \\ &= (F_1^1, F_1^2, F_1^3). \end{aligned}$$

Fijámonos sólo en la primera componente F_1^1 y usando integración por partes (Teorema A.3 en Apéndice A) vemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} F_1^1 \, d\mathbf{x} &= - \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_i} x_2 \omega_i u_3 \, d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^3} x_2 \partial_{x_i} \omega_i u_3 \, d\mathbf{x} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_i} x_3 \omega_i u_2 \, d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^3} x_3 \partial_{x_i} \omega_i u_2 \, d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_i} x_2 \omega_i u_3 \, d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_i} x_3 \omega_i u_2 \, d\mathbf{x} \quad (3.20) \end{aligned}$$

pues $\nabla \cdot \omega = 0$. Por otro lado, notemos que $\partial_{x_i} x_j = \delta_{ij}$, donde δ_{ij} es la delta de Kronocker, es decir,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{for } i = j, \\ 0, & \text{for } i \neq j. \end{cases}$$

Por tanto, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^3} F_1^1 d\mathbf{x} = - \int_{\mathbb{R}^3} (\omega_2 u_3 - \omega_3 u_2) d\mathbf{x} .$$

Repitiendo estos mismos cálculos para la F_1^2 y F_1^3 se observa que

$$\int_{\mathbb{R}^3} F_1 d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} (\omega_3 u_2 - \omega_2 u_3, \omega_1 u_3 - \omega_3 u_1, \omega_2 u_1 - \omega_1 u_2) d\mathbf{x} \quad (3.21)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} (u \times \omega) d\mathbf{x} \quad (3.22)$$

Invocando la siguiente identidad, cf. [2, §2]),

$$\mathbf{u} \times \omega = -(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{2}\nabla(|\mathbf{u}|^2),$$

se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^3} F_1 d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_i}(|u_i|^2) d\mathbf{x} - \int_{\mathbb{R}^3} u_i \partial_{x_i} u_j d\mathbf{x}$$

Aplicando el Teorema A.1 del Apéndice A , se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \partial_{x_i}(|u_i|^2) d\mathbf{x} = 0$$

pues estamos asumiendo que \mathbf{u} decae suficientemente rápido cuando $\mathbf{x} \rightarrow \infty$. El segundo término también se anula pues lo hemos probado ya previamente (véase el término J_2 en la demostración de la conservación del flujo $U(t)$). Es decir, concluimos que

$$\int_{\mathbb{R}^3} F_1 d\mathbf{x} = 0.$$

Basta, repetir *mutatis mutandis* los cálculos de nuevo para observar que

$$\int_{\mathbb{R}^3} F_2 d\mathbf{x} = 0.$$

Por tanto, se tiene que el impulso se conserva globalmente en tiempo

$$\partial_t I_3(t) = 0 \implies I_3(t) = I_3(0), \quad t \geq 0.$$

concluyendo así la demostración del resultado.

□

Observación 3.13. Cabe aclarar que las cantidades conservadas que hemos demostrado en $d = 3$ se conservan también en $d = 2$. Para el resto de cantidades que vamos a ver tendremos que diferenciar entre 3 y 2 dimensiones.

Centrémonos finalmente en las cantidades que se conservan en $d = 2$. Para ello, notemos que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t), 0)$ y por tanto la vorticidad viene dada por $\omega = (0, 0, \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1)$.

Teorema 3.14. *Sea (\mathbf{u}, p) una solución regular de Euler (1.31) en \mathbb{R}^2 que decaea suficientemente rápido en el infinito, es decir, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$ para $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Entonces se tiene que las siguientes cantidades*

- *La norma L^p de las vorticidades para $1 \leq p \leq \infty$, es decir*

$$\|\omega(t)\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\omega(\mathbf{x}, t)|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p},$$

y

$$\|\omega(t)\|_{L^\infty} = \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^2} |\omega(\mathbf{x}, t)|,$$

se conservan globalmente para $t > 0$. Además, para toda F suficientemente regular se tiene que

$$C_F(t) = \int_{\mathbb{R}^2} F(\omega(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x}$$

se conserva globalmente para $t > 0$.

- *La helicidad, dada por*

$$H_2(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{u} \cdot \omega d\mathbf{x}$$

es idénticamente cero, i.e., $H_2(t) \equiv 0$, para todo $t > 0$.

Observación 3.15 (Infinitas cantidades conservadas). Notemos que para la ecuación de Euler dos dimensional, tenemos una cantidad infinita de cantidades conservadas. Esta propiedad es de vital importancia, pues aporta de una estructura invariante a la ecuación.

Demostración (Teorema 3.14). Comencemos demostrando la conservación de la norma L^p de la vorticidad para $1 \leq p < \infty$. Para ello demostraremos primero la conservación $\|\omega(t)\|_{L^p}^p$. Como hemos hecho repetidas veces en la demostración del Teorema 3.10, tomando la derivada temporal de $\|\omega(t)\|_{L^p}^p$, usando la regla de la cadena y el hecho de que ω cumple las ecuaciones (2.19) observamos que

$$\begin{aligned} \partial_t \|\omega(t)\|_{L^p}^p &= \partial_t \int_{\mathbb{R}^2} |\omega(\mathbf{x}, t)|^p d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^2} p |\omega|^{p-1} \frac{\omega}{|\omega|} \partial_t \omega d\mathbf{x} = \\ &= -p \int_{\mathbb{R}^2} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega) |\omega|^{p-2} \omega d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Notando que

$$\nabla(|\omega|^p) = p|\omega|^{p-2}\omega\nabla\omega$$

tenemos que

$$\partial_t\|\omega(t)\|_{L^p}^p = -\int_{\mathbb{R}^2}\mathbf{u}\cdot\nabla(|\omega|^p)d\mathbf{x} = 0,$$

dónde en la última igualdad hemos usado el Lema 3.11. Elevando a $1/p$ se concluye que

$$\|\omega(t)\|_{L^p} = \|\omega(0)\|_{L^p}, \quad t \geq 0$$

es decir la norma L^p se conserva globalmente en tiempo.

Nos queda ver ahora que sucede para el caso $p = \infty$. Para ello, vamos a hacer uso del Lema 3.3 de la sección anterior. Usaremos además que, como vimos en (3.9), para $d = 2$ se tiene que $\omega(\Phi(\mathbf{y}, t), t) = \omega_0(\mathbf{y})$. Tomando entonces Φ^{-1} tenemos

$$\omega(\Phi^{-1}(\Phi(\mathbf{y}, t), t), t) = \omega_0(\Phi^{-1}(\mathbf{y})) \implies \omega(\mathbf{y}, t) = \omega_0(\Phi^{-1}(\mathbf{y})).$$

Como además Φ^{-1} es un difeomorfismo que conserva la medida, tenemos que

$$\|\omega(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} = \|\omega_0(\Phi^{-1})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} = \|\Phi^{-1} \circ \omega_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} = \|\omega_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Alternativamente, otra forma de demostrar la conservación de la norma infinito es tomando $p \rightarrow \infty$ en la prueba anterior.

Finalmente, veamos como demostrar que se conserva $C_F(t)$ para F suficientemente regular. Para ello, realizaremos el cambio de variable $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{y}, t)$ y utilizaremos, como hemos visto en la demostración de la conservación de la norma L^∞ , que en $d = 2$ se cumple que

$$\omega(\Phi(\mathbf{y}, t), t) = \omega_0(\mathbf{y}),$$

y como el fluido es incompresible además

$$\det\nabla_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{y}, t) = 1.$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} C_F(t) &= \int_{\mathbb{R}^2} F(\omega(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^2} F(\omega(\Phi(\mathbf{y}, t), t)) \det\nabla_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{y}, t) d\mathbf{y} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} F(\omega_0(\mathbf{y})) d\mathbf{y} = C_F(0). \end{aligned}$$

Finalmente, veremos como la helicidad es idénticamente cero para todo $t > 0$. En efecto, para $d = 2$,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t), 0), \text{ y } \omega(\mathbf{x}, t) = (0, 0, \partial_{x_1}u_2(\mathbf{x}, t) - \partial_{x_2}u_1(\mathbf{x}, t)).$$

Por consiguiente, es claro que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \omega(\mathbf{x}, t) = u_1 \cdot 0 + u_2 \cdot 0 + 0 \cdot (\partial_{x_1}u_2 - \partial_{x_2}u_1) = 0 .$$

Por lo que $H_2 = \int_{\mathbb{R}^2} 0 \, d\mathbf{x} \equiv 0 \, \forall t > 0$.

□

3.3. Cantidades físicas conservadas para fluidos con viscosidad

En esta subsección, estudiaremos cuáles son las cantidades conservadas en el caso de fluidos con viscosidad. Para ello, veamos el siguiente resultado

Teorema 3.16. *Sea (\mathbf{u}, p) una solución regular de las ecuación de Navier-Stokes (2.20) que decae suficientemente rápido en el infinito, es decir, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$ para $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Entonces si*

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 \, d\mathbf{x}$$

se tiene que

$$E(t) \leq E(0), \text{ para } t \geq 0.$$

Demostración (Teorema 3.16). Tomando la derivada temporal y sabiendo que \mathbf{u} cumple las ecuaciones de Navier-Stokes (2.20) encontramos que

$$\begin{aligned} \partial_t E(t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u} \partial_t \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u} [-\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla p] \, d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u} [\mu \Delta \mathbf{u}] \, d\mathbf{x} = E_1 + E_2 . \end{aligned}$$

Notamos que el término E_1 coincide con el término calculado para la ecuación de Euler (1.31) en la demostración (3.2). Por tanto, veamos que ocurre con el término E_2 , que a priori no tiene por qué ser cero. Usando la identidad de Green (Teorema A.4 en Apéndice A) y el hecho de que \mathbf{u} decae suficientemente rápido en el infinito llegamos a

$$E_2 = -\mu \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = -\mu \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} \leq 0 .$$

Tenemos por tanto que

$$E(t) \leq E(0) , \text{ } t \geq 0 .$$

Así que podemos concluir que en Navier-Stokes la energía cinética no se conserva sino que se disipa. Es por ello que al término $\mu \Delta \mathbf{u}$ se le conoce cómo término disipativo.

□

Finalmente, observemos cuál es el efecto del término difusivo cuando calculamos en dimensión $d = 2$, el flujo de la vorticidad, el impulso o el momento. Esto se recopila en la siguiente proposición

Teorema 3.17. *Sea (\mathbf{u}, p) una solución regular de las ecuación de Navier-Stokes (2.20) en \mathbb{R}^2 que decae suficientemente rápido en el infinito, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$ para $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Entonces se tiene que para $\nu > 0$,*

- *El flujo de la vorticidad que se define como*

$$\Omega_2(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \omega(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}$$

y el impulso I_2 ,

$$I_2(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{x} \times \omega \, d\mathbf{x} ,$$

se conservan para todo $t > 0$.

Demostración (Teorema 3.17). Comenzemos demostrando la conservación del flujo de la vorticidad. Calculando la derivada temporal del flujo y usamos que ω cumple las ecuaciones de Navier-Stokes para $d = 2$ (2.23), se tiene lo siguiente

$$\partial_t \Omega_2(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t \omega(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^2} (-(\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega + \mu \Delta \omega) \, d\mathbf{x} .$$

Hemos visto durante la demostración de la conservación del flujo en el caso de Euler (3.16) que la integral $-\int_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega$ se anula, por lo que deberemos comprobar únicamente que ocurre con la integral restante, $\mu \int_{\mathbb{R}^2} \Delta \omega \, d\mathbf{x}$. Haciendo uso de la primera igualdad de Green (Teorema A.4 en Apéndice A) podemos ver que se cumple lo siguiente

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Delta \omega(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B(0,r)} \Delta \omega \, d\mathbf{x} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial B(0,r)} \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{n}} \, dS . \quad (3.23)$$

Utilizando finalmente que por definición $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$, y que \mathbf{u} decae suficientemente rápido en el infinito, el límite (3.23) converge a cero. Concluimos por tanto que el flujo de la vorticidad se conserva en el tiempo.

Pasamos finalmente a demostrar la conservación del impulso. Para ello tomando la derivada temporal y haciendo uso de las ecuaciones de Navier-Stokes en forma de vorticidad para $d = 2$ (2.23), se observa que

$$\partial_t I_2(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_t (\mathbf{x} \times \omega) \, d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} (-\mathbf{x} \times (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega + \mu(\mathbf{x} \times \Delta \omega)) \, d\mathbf{x} . \quad (3.24)$$

Veamos primero que ocurre con la integral $\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{x} \times (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega \, d\mathbf{x}$. Podemos calcular fácilmente que, por componentes, se tiene que

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega = (x_2(\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega, -x_1(\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega) = (x_2u_j\partial_{x_j}\omega_3, -x_1u_j\partial_{x_j}\omega_3) .$$

Nos damos cuenta ahora que estamos en un caso muy similar que a la demostración del impulso en $d = 3$ para Euler (3.2), pues integrando por partes, volvemos a tener $\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{u} \times \omega \, d\mathbf{x}$, siendo en este caso $\mathbf{u} = (u_1, u_2, 0)$ y $\omega = (0, 0, \omega_3)$. Realizando por tanto los mismos cálculos, podemos concluir que esta integral se anula. Nos queda por tanto ver que ocurre con la integral $\int_{\mathbb{R}^2} \mu(\mathbf{x} \times \Delta\omega) \, d\mathbf{x}$. De nuevo, podemos ver que

$$\mathbf{x} \times \Delta\omega = (x_2\Delta\omega_3, -x_1\Delta\omega_3) . \quad (3.25)$$

Integrando la primera componente, podemos hacer uso de la segunda fórmula de Green (Teorema A.4 en Apéndice A), con lo cual obtenemos la siguiente

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B(0,r)} x_2 \Delta\omega_3 \, d\mathbf{x} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{\partial B(0,r)} \frac{\partial\omega_3}{\partial\mathbf{n}} x_2 \, dS - \int_{B(0,r)} \nabla\omega_3 \cdot \nabla x_2 \, d\mathbf{x} \right) . \quad (3.26)$$

Como $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$, y \mathbf{u} decae suficientemente rápido en el infinito, la primera integral de (3.26) se anula. Para la segunda integral podremos ver lo siguiente

$$\begin{aligned} - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B(0,r)} \nabla\omega_3 \cdot \nabla x_2 \, d\mathbf{x} &= - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B(0,r)} \partial_{x_1}\omega_3 \partial_{x_1}x_2 + \partial_{x_2}\omega_3 \partial_{x_2}x_2 \, d\mathbf{x} = \\ &= - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{B(0,r)} \partial_{x_2}\omega_3 \, d\mathbf{x} = - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial B(0,r)} \omega_3 n_2 \, dS , \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde en la última igualdad hemos utilizado el Teorema de Gauss-Green (Teorema A.1 en Apéndice A). De nuevo, como $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$, y \mathbf{u} decae suficientemente rápido en el infinito, (3.27) es idénticamente cero. Repitiendo este mismo proceso para la segunda componente de (3.25), concluimos que $\int_{\mathbb{R}^2} \mu(\mathbf{x} \times \Delta\omega) \, d\mathbf{x} = 0$, y por tanto observamos que el impulso se conserva globalmente en el tiempo.

□

Soluciones elementales de fluidos ideales

Este último capítulo se centra en ver algunos ejemplos de familias de soluciones elementales para las ecuaciones de Euler. El problema de existencia y unicidad de soluciones para las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes es uno de los grandes problemas abiertos de estos últimos siglos. En particular, el conocido como *el problema del milenio* propuesto por el instituto Clay de las matemáticas, el cual pregunta si para las ecuaciones tres dimensionales de Navier-Stokes siempre existen soluciones regulares globalmente en el tiempo, o si por el contrario se pueden producir singularidades a tiempo finito. Cabe notar además que la misma pregunta sigue abierta para Euler. En esta memoria, basándonos en la referencia [7], veremos como construir algunas soluciones particulares para las ecuaciones de Euler estacionarias.

4.1. Método general para construir soluciones estacionarias para Euler 2D

En esta sección vamos a ver un método para construir soluciones exactas estacionarias para la ecuación de Euler en dos dimensiones. Para ello, deberemos conocer primero el concepto de función de corriente.

Definición 4.1. *Sea $\mathbf{u} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo regular con divergencia cero. Decimos que $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es la función corriente del campo incomprensible \mathbf{u} si $\mathbf{u} = (-\partial_{x_2}\psi, \partial_{x_1}\psi)$. Bajo ciertas hipótesis de regularidad, esta función siempre existe y es única (salvo constante aditiva).*

Veamos ahora como, con la relación que existe entre la función corriente que acabamos de definir y la vorticidad

$$\omega = \nabla \times \mathbf{u} = (0, 0, -\partial_{x_2}u_1 + \partial_{x_1}u_2),$$

podremos construir las soluciones que buscamos. Recordemos que para $d = 2$ la ecuación de Euler en forma de vorticidad (2.19) se puede escribir como

$$\partial_t\omega + u_1\partial_{x_1}\omega + u_2\partial_{x_2}\omega = 0. \quad (4.1)$$

Haciendo uso de la función de corriente y sustituyendo tenemos lo que sigue

$$\partial_t \omega - \partial_{x_2} \psi \partial_{x_1} (\partial_{x_1} \partial_{x_1} \psi + \partial_{x_2} \partial_{x_2} \psi) + \partial_{x_1} \psi \partial_{x_2} (\partial_{x_1} \partial_{x_1} \psi + \partial_{x_2} \partial_{x_2} \psi) = 0 ,$$

y por tanto

$$\implies \partial_t \omega - \partial_{x_2} \psi \Delta \partial_{x_1} \psi + \partial_{x_1} \psi \Delta \partial_{x_2} \psi = 0 . \quad (4.2)$$

Nos damos cuenta ahora que

$$-\partial_{x_2} \psi \Delta \partial_{x_1} \psi + \partial_{x_1} \psi \Delta \partial_{x_2} \psi = J(\psi, \Delta \psi),$$

donde $J(\psi, \Delta \psi)$ es el jacobiano de ψ y $\Delta \psi$, por lo que la igualdad (4.2) es equivalente a

$$\partial_t \omega + J(\psi, \Delta \psi) = 0 . \quad (4.3)$$

Nuestro objetivo es construir soluciones estacionarias, por lo que $\partial_t \omega = 0$, lo cual implica que $J(\psi, \Delta \psi) = 0$. Esta igualdad implica a su vez que los gradientes de ψ y $\Delta \psi$ son paralelos entre sí, y que por tanto tienen las mismas curvas de nivel. Por tanto, ψ y $\Delta \psi$ deben ser funciones dependientes, es decir, se cumple la siguiente proposición.

Proposición 4.2. *Una función de corriente ψ en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ define una solución ω estacionaria en el tiempo para (2.19) si y sólo si*

$$\Delta \psi = F(\psi) \quad (4.4)$$

para alguna función regular F .

Note 4.3. Es necesario aclarar que F en general es una función no lineal. Sin embargo, para las soluciones que estudiaremos en esta sección tomaremos $F = cte$. Para los casos en que F no sea una constante, encontrar las soluciones de (4.4) es un problema no trivial.

Note 4.4. Para un flujo estacionario bidimensional, el sistema característico viene dado por

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}(\mathbf{y}, t) = -\partial_{x_2} \psi(\Phi(\mathbf{y}, t)) , \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial t}(\mathbf{y}, t) = \partial_{x_1} \psi(\Phi(\mathbf{y}, t)) . \end{cases} \quad (4.5)$$

Para el sistema (4.5), los puntos de equilibrio coincidirán con los puntos críticos de ψ . Si estos puntos críticos son máximos o mínimos locales, estos serán estables y por tanto el fluido rotará a su alrededor de manera local. Si por otra parte son puntos de silla, el fluido tendrá una deformación distinta en cada punto del espacio. Vamos a ver ambos casos en distintos ejemplos a continuación.

Ejemplo 4.5. Sea la siguiente función $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, veamos cuales son sus puntos críticos. Calculando las derivadas parciales tenemos que

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} \psi = 2x_1 = 0 &\implies x_1 = 0 , \\ \partial_{x_2} \psi = 2x_2 = 0 &\implies x_2 = 0 . \end{aligned}$$

Vemos entonces que el origen es un punto crítico, en particular, como $\partial_{x_1}^2 \psi = 2 = \partial_{x_2}^2 \psi$, el origen es un mínimo. Cabe notar que si cambiamos el signo de ψ , el origen pasará a ser un máximo. Por otro lado, el campo de velocidades del fluido originado por ψ será

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (-\partial_{x_2} \psi, \partial_{x_1} \psi) = (-2x_2, 2x_1) . \quad (4.6)$$

Ejemplo 4.6. Sea ahora la función $\psi(x_1, x_2) = x_1 x_2$, el origen va a ser un punto crítico, en particular un punto de silla, lo cual se ve a continuación

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} \psi = x_2 = 0 &\implies x_2 = 0 , \\ \partial_{x_2} \psi = x_1 = 0 &\implies x_1 = 0 . \end{aligned}$$

Al estudiar estas derivadas, según si nos aproximamos por ejemplo en la dirección $x_1 = x_2$ ó $x_1 = -x_2$, observamos un cambio de signo, por lo que concluimos en efecto que el centro es un punto de silla. Por otra parte, tenemos el siguiente campo de velocidades originado por ψ

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (-\partial_{x_2} \psi, \partial_{x_1} \psi) = (-x_1, x_2) . \quad (4.7)$$

Es claro que (4.6) y (4.7) son soluciones estacionarias de la ecuación de Euler 2D, donde las presiones respectivas son $p = cte$.

Ejemplo 4.7. Finalmente, veamos la siguiente función $\psi(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$. Podemos ver claramente que el origen es un punto de silla. Estudiando sus derivadas tenemos

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} \psi = 2x_1 = 0 &\implies x_1 = 0 , \\ \partial_{x_2} \psi = -2x_2 = 0 &\implies x_2 = 0 . \end{aligned} \quad (4.8)$$

Si ahora nos acercamos al origen en la dirección $x_1 = 0$, $\psi = -x_2^2 < 0$, por lo que el origen sería un máximo. Si por el contrario nos acercamos en la dirección $x_2 = 0$, $\psi = x_1^2 > 0$, con lo que el origen es un mínimo. Con esto confirmamos que el origen es un punto de silla. Resolveremos ahora el sistema (4.5) para $\psi = x_1^2 - x_2^2$, es decir, resolvemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}(\mathbf{y}, t) = 2\Phi_2(\mathbf{y}, t) ; \Phi_1(\mathbf{y}, 0) = y^1 , \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial t}(\mathbf{y}, t) = 2\Phi_1(\mathbf{y}, t) ; \Phi_2(\mathbf{y}, 0) = y^2 . \end{cases} \quad (4.9)$$

Si volvemos a derivar, podemos llegar a este segundo sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} = 4\Phi_1 ; \Phi_1(0) = y^1 , \\ \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} = 4\Phi_2 ; \Phi_2(0) = y^2 . \end{cases} \quad (4.10)$$

Supongamos ahora para la primera ecuación de este sistema (4.10) una solución de la forma $\psi_1 = e^{rt}$, y sustituyendo tendremos

$$r^2 e^{rt} = 4e^{rt} \implies r^2 = 4 \implies r = \pm 2 . \quad (4.11)$$

Tendremos por tanto la solución general

$$\Phi_1(\mathbf{y}, t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} . \quad (4.12)$$

Tenemos además por el sistema (4.9) que $\Phi_1' = 2\Phi_2$, por lo que derivando (4.12) tendremos nuestra segunda solución general

$$\Phi_2(\mathbf{y}, t) = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t} . \quad (4.13)$$

Tomando ahora (4.12) y (4.13) en $t = 0$ se tiene que

$$\begin{cases} y^1 = C_1 + C_2 , \\ y^2 = C_1 - C_2 . \end{cases} \quad (4.14)$$

Finalmente despejando C_1 y C_2 tendremos la solución específica del sistema (4.9)

$$\begin{cases} \Phi_1 = \frac{1}{2}((e^{2t} + e^{-2t})y^1 + (e^{2t} - e^{-2t})y^2) , \\ \Phi_2 = \frac{1}{2}((e^{2t} - e^{-2t})y^1 + (e^{2t} + e^{-2t})y^2) . \end{cases} \quad (4.15)$$

Si nos acercamos al origen en la dirección $y^1 = -y^2$, entonces se tiene lo que sigue

$$\begin{cases} \Phi_1 = 2y^1 e^{-2t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 , \\ \Phi_2 = -2y^1 e^{-2t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 . \end{cases}$$

Si por otro lado decidimos acercarnos en la dirección $y^1 = y^2$, obtendremos

$$\begin{cases} \Phi_1 = 2y^1 e^{2t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty , \\ \Phi_2 = 2y^1 e^{2t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty . \end{cases}$$

4.2. Soluciones estacionarias para Euler 3D: flujos de Beltrami

En esta última sección vamos a construir soluciones estacionarias en las cuales la velocidad y vorticidad son colineales en todo el espacio. A este tipo de fluidos se los conocen como flujos de Beltrami.

Definición 4.8. A un flujo estacionario 3D se le llama flujo de Beltrami si $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, la vorticidad ω satisface

$$\omega(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad (4.16)$$

para alguna función escalar $\lambda(\mathbf{x})$ no nula en todo el espacio. A la condición (4.16) se la conoce como condición de Beltrami.

Una consecuencia de esta definición es el siguiente resultado.

Proposición 4.9. Sea $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ un campo de velocidades estacionario, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Si \mathbf{u} cumple la condición (4.16) para alguna función escalar $\lambda(\mathbf{x})$ no nula en todo el espacio, entonces \mathbf{u} es una solución estacionaria de Euler 3D.

Demostración. Sabemos por construcción de ω que $\nabla \cdot \omega = 0$, entonces, sustituyendo (4.16) nos queda

$$\nabla \cdot \omega = \nabla \cdot (\lambda \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \lambda + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (4.17)$$

Como $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, podemos concluir que la igualdad (4.17) queda como sigue

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \lambda = 0. \quad (4.18)$$

Ahora, como \mathbf{u} debe ser una solución estacionaria de Euler 3D, debe cumplir las ecuaciones de Euler (1.31), lo cual para una solución estacionaria se reduce a

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\omega = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u},$$

que sustituyendo de nuevo mediante la condición (4.16) se tiene que

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\lambda \mathbf{u}) &= u_1 \partial_{x_1} \lambda \mathbf{u} + u_2 \partial_{x_2} \lambda \mathbf{u} + u_3 \partial_{x_3} \lambda \mathbf{u} + u_1 \lambda \partial_{x_1} \mathbf{u} + u_2 \lambda \partial_{x_2} \mathbf{u} + u_3 \lambda \partial_{x_3} \mathbf{u} \\ &= (\mathbf{u} \cdot \nabla \lambda) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \lambda = (\lambda \mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde en la última igualdad hemos usado (4.18) y por tanto el primer término de (4.19) se anula. Por tanto, como los dos términos restantes son equivalentes, se cumple el resultado que queríamos probar.

□

Note 4.10. Para los siguientes resultados cabe notar que $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$.

Por otro lado, la siguiente proposición nos permitirá generar soluciones estacionarias de las ecuaciones Euler 3D a partir de una solución estacionaria 2D particular. Este resultado la daremos por demostrada debido a razones de espacio. Su demostración se puede consultar en [7, Proposición 2.9].

Proposición 4.11. *Sea $\psi(\mathbf{x})$ una función de corriente asociada a una solución estacionaria $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ de Euler 2D, entonces, para cualquier función $G(\psi) \in C^1$, el campo*

$$\mathbf{u} = (-\partial_{x_2}\psi, \partial_{x_1}\psi, G(\psi))$$

es una solución estacionaria de las ecuaciones de Euler 3D.

Haciendo uso de las Proposiciones 4.9 y 4.11, podremos construir flujos de Beltrami 3D a partir de funciones de corriente 2D, es decir, se cumple el siguiente resultado.

Proposición 4.12. *Sea ψ una función de corriente como vimos en la sección anterior (4.1) que genera una solución estacionaria de Euler 2D, entonces, el campo de velocidades*

$$\mathbf{u} = (-\partial_{x_2}\psi, \partial_{x_1}\psi, G(\psi))$$

es un flujo de Beltrami 3D si y sólo si G cumple

$$G'(\psi)G(\psi) = -F(\psi) . \quad (4.20)$$

Demostración. Recordemos que ψ de la Proposición 4.2 es una función corriente que define una solución estacionaria de Euler 2D $\mathbf{u} = (-\partial_{x_2}\psi, \partial_{x_1}\psi)$ si y sólo si $\Delta\psi = F(\psi)$ para cierta función regular F . Tomando ahora \mathbf{u} como vimos en la Proposición 4.11 ($\mathbf{u} = (-\partial_{x_2}\psi, \partial_{x_1}\psi, G(\psi))$, $G \in C^1$), podemos ver que la vorticidad corresponde a lo siguiente

$$\begin{aligned} \omega &= (\partial_{x_2}G(\psi), -\partial_{x_1}G(\psi), \partial_{x_1}\partial_{x_1}\psi + \partial_{x_2}\partial_{x_2}\psi) \\ &= (G'(\psi)\partial_{x_2}\psi, -G'(\psi)\partial_{x_1}\psi, F(\psi)) . \end{aligned}$$

donde hemos usado en la última igualdad la regla de la cadena y el hecho de que $\Delta\psi = F(\psi)$. De nuevo, para que \mathbf{u} sea un flujo de Beltrami, se debe verificar (4.16), que en nuestro caso implica

$$\begin{cases} G'(\psi)\partial_{x_2}\psi = -\lambda\partial_{x_2}\psi , \\ -G'(\psi)\partial_{x_1}\psi = \lambda\partial_{x_1}\psi , \end{cases} \implies G'(\psi) = -\lambda , \quad (4.21)$$

y por otro lado

$$F(\psi) = \lambda G(\psi) . \quad (4.22)$$

Combinando (4.21) y (4.22) se tiene que

$$G(\psi)G'(\psi) = -F(\psi) ,$$

con lo que queda demostrada la proposición.

□

A

Apéndice: Miscelánea de cálculo

En este apéndice hemos decidido recopilar todos los teoremas y propiedades de los que hemos hecho uso durante esta disertación, pero cuyas demostraciones no entraban en nuestros objetivos. La demostración de los primeros cuatro resultados se pueden consultar en [3]. Los resultados sobre existencia de ODEs y algebra lineal se encuentran en [5] y por último las identidades vectoriales se han obtenido de [6]

Teorema A.1 (Gauss-Green). *El Teorema de Gauss-Green nos dice lo siguiente:*

1. Sea $U \in \mathbb{R}^d$ un abierto con borde $\partial U \in C^1$ y sea $\mathbf{u} \in C^1(\bar{U})$, se tiene entonces que

$$\int_U \mathbf{u}_{x_i} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial U} \mathbf{u} n_i \, dS, \quad (i = 1, \dots, n).$$

2. Se tiene también que

$$\int_U \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial U} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

para cada campo vectorial $\mathbf{u} \in C^1(\bar{U}; \mathbb{R}^d)$.

Teorema A.2 (Stokes). *El Teorema de Stokes nos dice que, teniendo una superficie orientada $\mathbf{S}(t)$ en \mathbb{R}^3 con frontera $\mathbf{C}(t)$, y siendo $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ un campo vectorial cuyas derivadas parciales son continuas en una región abierta que contiene a $\mathbf{S}(t)$, entonces se cumple que*

$$\oint_{\mathbf{C}(t)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int \int_{\mathbf{S}(t)} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Teorema A.3 (Integración por partes). *El Teorema de la fórmula de integración por partes nos dice que, sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C^1(\bar{U})$, entonces*

$$\int_U \mathbf{u}_{x_i} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = - \int_U \mathbf{u} \mathbf{v}_{x_i} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial U} \mathbf{u} \mathbf{v} n_i \, dS, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Teorema A.4 (Fórmula de Green). Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in C^2(\bar{U})$, se tiene que

1. $\int_U \Delta \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial U} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \, dS,$
2. $\int_U \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = - \int_U \mathbf{u} \Delta \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial U} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{u} \, dS,$
3. $\int_U \mathbf{u} \Delta \mathbf{v} - \mathbf{v} \Delta \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial U} \mathbf{u} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} - \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \, dS.$

Teorema A.5 (Existencia y unicidad para ODEs). El Teorema global de existencia y unicidad para ODEs de primer orden nos dice que, suponiendo que se cumplen las siguientes hipótesis

- $U = [a, b] \times \mathbb{R}$, donde $[a, b]$ es un intervalo compacto en \mathbb{R} ,
- $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en U ,
- f es lipschitziana en U respecto de la segunda variable,

entonces, para cada $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) \in U$, el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) , \\ \mathbf{y}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0 , \end{cases}$$

posee una única solución definida en el intervalo $[a, b]$.

Teorema A.6 (Descomposición de Schur). El Teorema de la descomposición de Schur nos dice que, para cualquier matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ podemos encontrar una matriz invertible $P \in M_n(\mathbb{C})$ y una matriz triangular superior $T \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $A = PTP^t$.

Proposición A.7 (Identidades de cálculo vectorial). Sean a, b campos vectoriales regular y ψ una función escalar, se tiene las siguientes identidades vectoriales

1. $\nabla \times (\nabla \times a) = \nabla(\nabla \cdot a) - \nabla^2 a$
2. $\nabla \cdot (\psi a) = a \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot a$
3. $\nabla \times (a \times b) = a(\nabla \cdot b) - b(\nabla \cdot a) + (b \cdot \nabla)a - (a \cdot \nabla)b$

Bibliografía

- [1] C.K. Batchelor and G.K. Batchelor. An introduction to fluid dynamics. *Cambridge University Press*, (1967).
- [2] A.J. Chorin and J.E. Marsden. A mathematical introduction to fluid mechanics. *New York: Springer*, (1990).
- [3] L.C. Evans. Partial differential equations. *American Mathematical Society*, (2022).
- [4] M.D. Guzman. Ecuaciones diferenciales ordinarias. *Alhambra*, (1975).
- [5] R.A. Horn and C.R. Johnson. Mátrix Análisis. *Cambridge University Press*, (1985).
- [6] J.D. Jackson. Classical electrodynamics. *John Wiley and Sons*, (1999).
- [7] A. Majda and A. Bertozzi. Vorticity and incompressible flows. Cambridge Texts in Applied Mathematics, *Cambridge University Press*, (2002).
- [8] J.L. Vázquez. Fundamentos matemáticos de la mecánica de Fluidos, (2003).

Introduction to fluid mechanics: the Euler and Navier-Stokes equations

Keyna González Armas

Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas

Universidad de La Laguna

alu0101157054@ull.edu.es

Abstract

In this introductory work on fluid dynamics, a detailed analysis of the Euler and Navier-Stokes equations has been carried out, which are the theoretical bases to describe the movement of fluids. Through the deduction of these equations using the fundamental physical laws, we have sought to understand how the physical properties of fluids are related to their dynamic behavior. In addition to exploring the different formulations of the Euler and Navier-Stokes equations, we have learned about the concept of vorticity, and the different conserved quantities associated with both equations have been introduced. These quantities, such as mass, momentum and energy, have a fundamental role in the description of fluid phenomena and are useful for understanding the underlying physical principles. The work concludes with the study of some exact elementary solutions of the Euler equations.

1. The continuous medium and the laws of physics

DURING the first chapter we introduce the concept of fluid and how to describe its movement mathematically using the Lagrangian and Eulerian formulations. Moreover, in order to derive the equations which governs the dynamics of fluids we introduce the following physical laws

- **Law of conservation of mass:** The law of conservation of mass according to Lagrange is given by

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} \rho(\mathbf{x}, t) dx = 0,$$

where ρ denotes the density function.

- **Newton's second law:** $F = ma = \frac{d}{dt}(m\mathbf{u})$.

We introduce also the concepts of ideal and viscous fluids and derive via the previous physical laws the equations of motion, i.e. the Euler and Navier-Stokes equation. The latter reads

$$(NSE) : \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

where \mathbf{u} is the velocity field of the fluid, p the scalar internal pressure and $\mu > 0$ is the viscosity coefficient. In the inviscid case ($\mu = 0$), system (1) is known as the Euler equation.

2. The vorticity: a key quantity

IN the second chapter we introduce the concept of vorticity and present some of its properties. The vorticity describes the local spinning motion of a continuum near some point, and is given by

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}.$$

Alongside it, we also introduce the so-called vorticity formulation of the Navier-Stokes equations and Euler equations ($\mu = 0$)

$$\begin{cases} \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mu \Delta \boldsymbol{\omega}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

where $\mathbf{u} = \mathcal{K}[\boldsymbol{\omega}]$ with \mathcal{K} is the Biot-Savart operator. The new formulation eliminates the pressure unknown p .

3. Conserved quantities

IN the third chapter, we proceed to study the different physically relevant quantities that are globally conserved over time for the Euler and Navier-Stokes equations. The spatial dimension $d = 2$ or $d = 3$ plays a fundamental role, as we can see in the following table, where we mark whether a given quantity is conserved or not in different circumstances

Quantities	2D-Eul	3D-Eul	2D-NSE	3D-NSE
$\Gamma_{C(t)}$	✓	✓	×	×
$E(t)$	✓	✓	$E(t) \leq E(0)$	$E(t) \leq E(0)$
$H(t)$	0	✓	0	×
$\ \boldsymbol{\omega}(t)\ _{L^p}$	✓	×	×	×

In this table, we present some of the quantities we study in our dissertation, including the conservation of circulation $\Gamma_{C(t)}$ around a curve, the internal energy of the system $E(t)$, the helicity $H(t)$ and the L^p -norm, i.e. $\|\boldsymbol{\omega}(t)\|_{L^p}$ for vorticities $1 \leq p \leq \infty$. Obtaining conserved quantities of a system is of vital importance when demonstrating the local or global existence of a solution.

4. Elementary solutions for ideal fluids

FINALLY, the last chapter focuses on building certain stationary solutions for the Euler equations. In particular, we first study a constructive method to derive two-dimensional stationary solutions using the current function. More precisely, we show the following result

THEOREM: A current function ψ in a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ defines a stationary solution $\boldsymbol{\omega}$ for (2) if and only if

$$\Delta \psi = F(\psi)$$

for some regular function F .

Moreover, we also construct particular stationary solutions for the 3D case where the velocity and vorticity are collinear in the whole space. Such flows are called Beltrami flow and have the particular expression

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}),$$

for some non-zero scalar function $\lambda(\mathbf{x})$.

References

- [1] A.J. Chorin and J.E. Marsden. A mathematical introduction to fluid mechanics. *New York: Springer*, (1990).
- [2] A. Majda and A. Bertozzi. Vorticity and incompressible flows. Cambridge Texts in Applied Mathematics, *Cambridge University Press*, (2002).
- [3] J.L. Vázquez. Fundamentos matemáticos de la mecánica de Fluidos, (2003).