

Francisco Javier García González

*Transformada Wavelet de Haar:
Fundamentos y Aplicaciones*

Haar Wavelet Transform: Fundamentals and
Applications

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Julio de 2023

DIRIGIDO POR
Rodrigo Trujillo González

Rodrigo Trujillo González
Análisis Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

A mi familia, amigos y a mi tutor Rodrigo.

Francisco Javier García González
La Laguna, 10 de julio de 2023

Resumen · Abstract

Resumen

La teoría de wavelets es extremadamente valiosa en diversas aplicaciones, como el procesamiento de imágenes, la compresión de datos, el procesamiento de señales, el análisis de textos y la detección de bordes. Su capacidad de analizar señales en diferentes escalas y frecuencias con una alta resolución temporal ha impulsado el desarrollo de algoritmos más eficientes y precisos en estas áreas. Las wavelets presentan propiedades clave que las convierten en herramientas ideales para el análisis de señales, como su capacidad de localización en tiempo y frecuencia, su habilidad para representar señales discontinuas y su capacidad de comprimir información de manera óptima. En este trabajo, dedicamos nuestro estudio a la wavelet origen de la teoría, la wavelet de Haar. A partir de este ejemplo elaboramos toda la teoría de construcción de wavelets por medio del análisis multi-resolución y nos hemos enfocado en el desarrollo de un algoritmo eficiente para descomponer y reconstruir una señal que ha sido afectada por ruido, con el objetivo de comprender el comportamiento de la tendencia y los detalles de la señal, y lograr una reconstrucción que se asemeje lo más posible a la señal original antes de la interferencia.

Palabras clave: *Función escala – Wavelet – Descomposición – Reconstrucción.*

Abstract

Wavelet theory is valuable in a wide range of applications, such as image processing, data compression, signal processing, text analysis, and edge detection. The ability to analyze signals at different scales and frequencies with high temporal resolution has led to the development of more efficient and accurate algorithms in these areas. Wavelets possess key properties that make them ideal for signal analysis, including time and frequency localization, the ability to represent discontinuous signals, and optimal information compression. In this work, we dedicate our study to the foundational wavelet of the theory, the Haar wavelet. Based on this example, we develop the entire theory of wavelet construction through multiresolution analysis, and we have focused on the development of an efficient algorithm to decompose and reconstruct a signal that has been affected by noise, aiming to understand the behavior of the signal's trend and details in order to achieve a reconstruction that closely resembles the signal prior to the interference.

Keywords: *Scaling Function – Wavelet – Decomposition – Reconstruction.*

Contenido

Agradecimientos	III
Resumen/Abstract	V
Introducción	IX
1. Análisis de Fourier	1
1.1. Ejemplo de análisis de Fourier de una señal de audio	2
2. Análisis Wavelet: La wavelet de Haar	5
2.1. Wavelet de Haar	5
2.1.1. La Función Escala de Haar	5
2.1.2. Propiedades básicas de la función escala de Haar	8
2.1.3. La Función Wavelet de Haar	11
2.2. Algoritmos de descomposición y reconstrucción de Haar	16
2.2.1. Descomposición	16
2.2.2. Reconstrucción	22
2.3. Ejemplo de análisis de una señal usando una wavelet discreta	29
3. Análisis multiresolución	31
3.1. Estructura de la multiresolución	31
3.1.1. La relación de escala	32
3.1.2. La wavelet asociada y los espacios wavelet	37
3.1.3. Fórmulas de descomposición y reconstrucción	42
3.2. Ejemplo de análisis de una señal usando una wavelet continua ...	45
Bibliografía	49
Poster	51

Introducción

La teoría de las wavelets se basa en funciones matemáticas que permiten el análisis de señales en diferentes escalas y frecuencias, brindando información tanto en el dominio de la frecuencia como en el dominio del tiempo. A diferencia de las transformadas de Fourier, que solo se enfocan en las frecuencias, las wavelets proporcionan una representación más completa y detallada de las señales. Esta teoría ha sido aplicada con éxito en diversas áreas como el procesamiento de imágenes, la compresión de datos, el análisis de señales, el procesamiento de textos y la detección de bordes.

En este Trabajo de Fin de Grado, hemos dedicado nuestra atención principalmente al libro “A First Course in Wavelets with Fourier Analysis” [1]. Hemos desarrollado una comparativa de análisis de señales utilizando primero la teoría de Fourier y luego la teoría de wavelets. Además, dentro de la teoría de wavelets, hemos llevado a cabo una comparación entre el uso de wavelets discretas y continuas.

En el capítulo 1, abordamos el análisis de Fourier, desarrollado por Joseph Fourier (Francia, 1768-1830), una técnica matemática que descompone una señal en componentes armónicos, conocidos como frecuencias. El análisis de Fourier ha sido fundamental en varios campos, permitiendo el estudio de fenómenos complejos, mejorando la calidad de las comunicaciones digitales, desarrollando técnicas de compresión de datos y facilitando la resolución de problemas mediante algoritmos eficientes. También hemos desarrollado un programa para el estudio de señales aplicando análisis de Fourier basándonos en “Clean Up Data Noise with Fourier Transform in Python” [2]

En el capítulo 2, se explora la wavelet de Haar, propuesta por Alfred Haar (Hungría, 1885-1933), que fue la primera wavelet desarrollada que sentó las bases para la teoría de wavelets. Aunque ha sido superada por wavelets más avanzadas, la wavelet de Haar sigue siendo importante debido a su papel histórico y su

utilidad en aplicaciones específicas. También hemos desarrollado un programa para el estudio de señales aplicando análisis wavelet basandonos en “Wavelet denoising with PyWavelets” [3]

En el capítulo 3, se presenta una estructura más amplia y versátil para la construcción de wavelets continuas, el análisis multirresolución. Durante la década de 1980 y 1990, se produjeron avances clave en la teoría de wavelets que ampliaron su alcance y aplicabilidad. Por un lado, Jean Morlet (Francia, 1931-2007) y Alex Grossmann (Croacia, 1930-2019) desarrollaron la transformada continua de wavelets, sentando las bases de la teoría de wavelets. Por otro lado, Stephane Mallat (Francia, 1962-) y Yves Meyer (Francia, 1939-) trabajaron en el desarrollo de wavelets ortogonales y dieron impulso a su aplicación en diversas áreas, como lo detalla Mallat en su libro “A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way” [4]. Además, Ingrid Daubechies (Bélgica, 1954-) fue pionera en la creación de wavelets ortogonales compactas, como las wavelets de Daubechies, que brindaron una descomposición discreta precisa y eficiente de señales, como lo detalla en su libro “Ten Lectures on Wavelets” [5].

La teoría de wavelets ha tenido una amplia gama de aplicaciones prácticas gracias a estos desarrollos. Ha sido utilizada en la compresión de imágenes con wavelets, dando lugar a algoritmos eficientes como el estándar JPEG2000 [6]. También ha encontrado aplicaciones en el reconocimiento de patrones y el aprendizaje automático, permitiendo un análisis más preciso y detallado de las señales. Además, la teoría de wavelets ha sido empleada en el procesamiento de señales biomédicas, el procesamiento de imágenes médicas, la compresión de video, la detección de señales en telecomunicaciones y el análisis de series de tiempo.

Estos hitos históricos han impulsado el avance y la aplicación de la teoría de wavelets en diversas disciplinas, y han sentado las bases para el desarrollo de técnicas más sofisticadas en el análisis y procesamiento de señales.

Análisis de Fourier

El objetivo de este capítulo es comparar diferentes archivos de audio, uno sin ruido y otros con diferentes niveles de ruido, con el fin de analizar y visualizar las diferencias entre ellos en términos del tiempo y la frecuencia. El concepto fundamental del análisis de Fourier se fundamenta en la noción de que cualquier señal, periódica o no, puede ser representada como una combinación de funciones seno y coseno. Estas funciones poseen diversas frecuencias, amplitudes y fases. Al descomponer una señal en estas funciones, el análisis de Fourier nos permite examinar cada componente de manera individual y comprender su contribución a la señal en su totalidad, tal como se muestra en la Figura 1.1¹.



Figura 1.1: Transformación de los datos del dominio de tiempo al dominio de frecuencia.

¹ Será necesario abrir el PDF con Adobe Acrobat Reader para ver el GIF.

1.1. Ejemplo de análisis de Fourier de una señal de audio

Se comparan diferentes casos²: sonido original sin ruido [1], sonido con ruido en su totalidad [2], sonido con ruido al principio [3], en el medio [4] y al final [5]. Los sonidos con ruido al principio, en el medio y al final, se generaron sumando el audio original con un audio de ruido de dos segundos en diferentes tiempos y el audio con ruido en su totalidad, sumándole un ruido de la misma duración que el audio original.

En cada gráfico³, se muestra la forma de onda de la señal en el dominio del tiempo, donde el eje x representa el tiempo en segundos y el eje y representa el valor de la señal. Además, se calcula la Transformada de Fourier de cada señal y se muestra en el segundo gráfico de cada par, donde el eje x representa la frecuencia en Hz y el eje y representa la amplitud de las componentes de frecuencia. Estas visualizaciones permiten observar las diferencias en la amplitud y distribución de las frecuencias entre las señales limpias y las afectadas por el ruido. Además, se pueden identificar patrones específicos de ruido según la ubicación del mismo en la señal original.

Comenzamos analizando un archivo de audio que contiene el sonido de una vibración a una frecuencia de 440 Hz, conocido como **La 440**, como se muestra en la Figura 1.2.

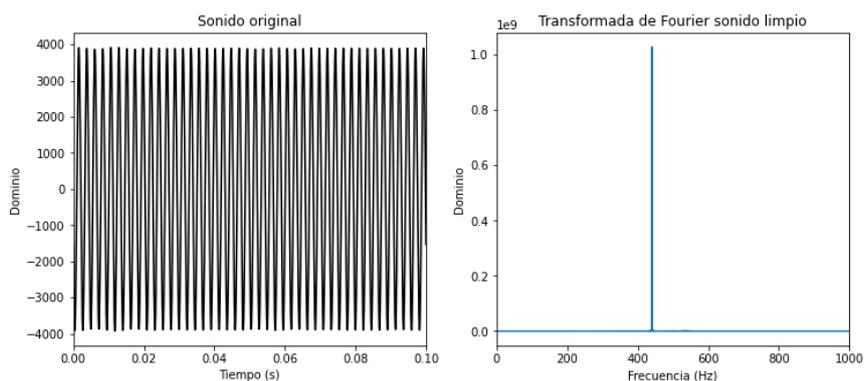


Figura 1.2: Análisis sonido original.

² Será necesario abrir el PDF con Adobe Acrobat Reader para escuchar los audios.

³ Para ver el código completo que genera los gráficos ver <https://colab.research.google.com/drive/1iKnPJcv-14gphd006BZLtBXRpdibpKHW?usp=sharing>.

Después de calcular la Transformada de Fourier se puede comprobar que efectivamente hay un pico en la frecuencia de 440 Hz.

Luego, analizamos el archivo del audio con ruido en su totalidad, como se muestra en la Figura 1.3.

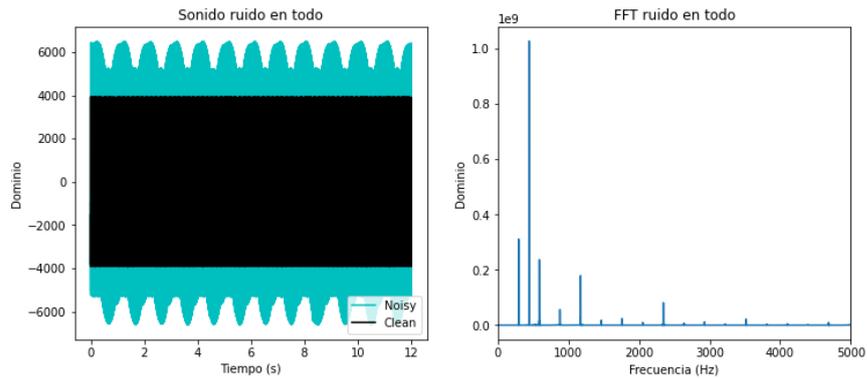


Figura 1.3: Análisis sonido con ruido en todo el audio.

Al calcular la Transformada de Fourier, observa que además del pico en la frecuencia de 440 Hz, hay picos en muchas otras frecuencias con diferentes amplitudes.

Por otro lado, analizamos el archivo del audio con ruido al principio, como se muestra en la Figura 1.4.

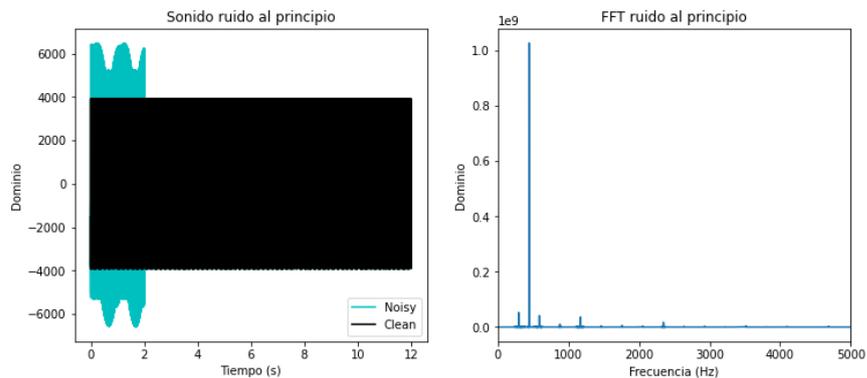


Figura 1.4: Análisis sonido con ruido al principio del audio.

Al calcular la Transformada de Fourier se puede observar que los picos de frecuencia se mantienen, pero con menor amplitud en comparación a los picos

en la Figura 1.3.

Finalmente, analizamos los archivos de los audios con ruido en el medio y al final, como se muestran en las Figuras 1.5 y 1.6 respectivamente.

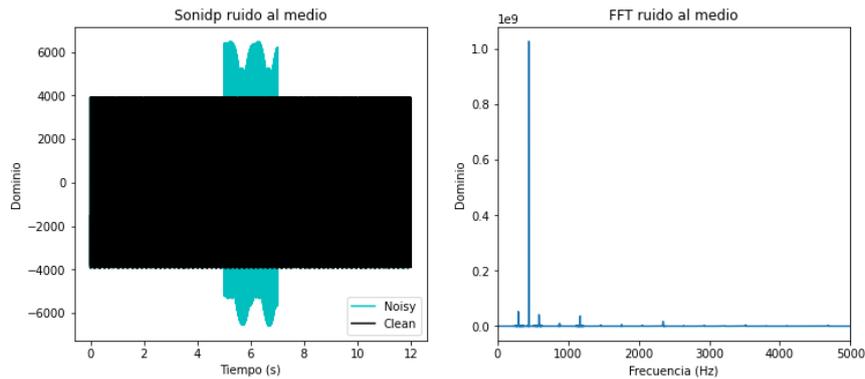


Figura 1.5: Análisis sonido con ruido al medio del audio.

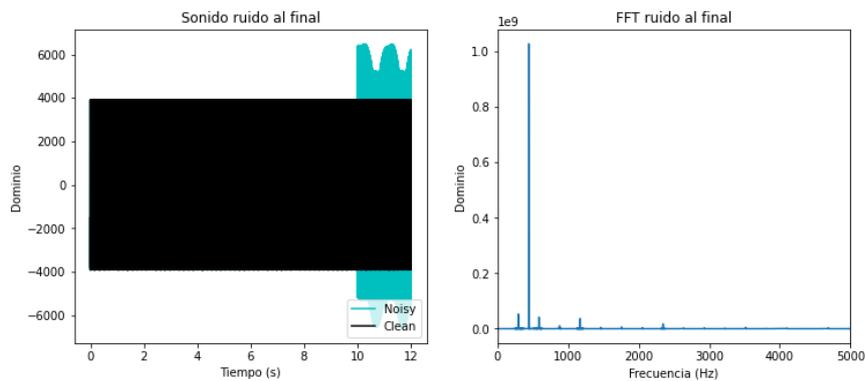


Figura 1.6: Análisis sonido con ruido al final del audio.

Al calcular la Transformada de Fourier, podemos notar que los picos y amplitudes se mantienen exactamente iguales a los de la Figura 1.4, a pesar de que hayamos agregado el ruido en diferentes momentos del audio.

Por tanto, observamos que en general la Transformada de Fourier no es adecuada para localizar ruidos en el dominio del tiempo, lo que nos lleva al siguiente capítulo, donde se explorará una herramienta más poderosa para el análisis de señales, el análisis wavelet.

Análisis Wavelet: La wavelet de Haar

En este capítulo desarrollaremos el análisis wavelet, que es una poderosa técnica matemática que ha revolucionado el procesamiento de señales y la compresión de datos. A diferencia de la transformada de Fourier, el análisis wavelet permite detectar frecuencias y también localizar su posición en el tiempo. Se basa en descomponer una señal en componentes de diferentes frecuencias y escalas utilizando una función wavelet.

2.1. Wavelet de Haar

En esta sección abordaremos la función escala de Haar y examinaremos sus propiedades básicas para finalmente estudiar la función wavelet de Haar.

2.1.1. La Función Escala de Haar

En el análisis wavelet existen dos funciones principales que desempeñan un papel fundamental: la función de escala ϕ y la wavelet ψ . Estas funciones generan una familia de funciones que se utilizan para descomponer o reconstruir una señal. El análisis wavelet más sencillo se basa en la función de escala de Haar, cuyo gráfico se muestra en la Figura 2.1. Los bloques de construcción son traslaciones y dilataciones (tanto en altura como en anchura) de este gráfico básico.

Una desventaja que tienen las wavelets de Haar es que son discontinuas por lo que no se ajustan muy bien a las señales continuas.

Definición 2.1. La función escala de Haar está definida como

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

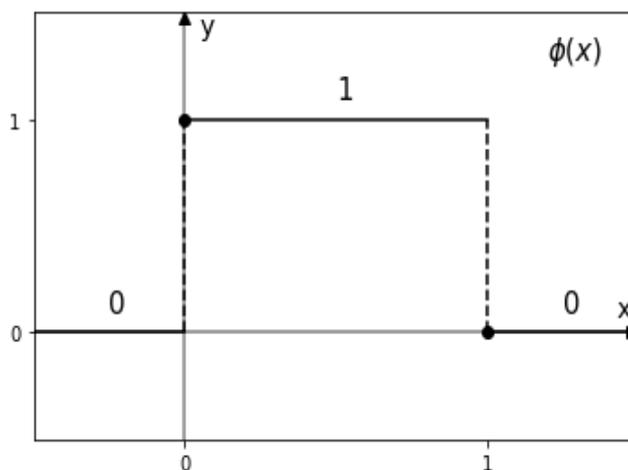


Figura 2.1: Gráfica de la función escala de Haar $\phi(x)$.

La función $\phi(x - k)$ tiene la misma forma que ϕ pero trasladada k unidades (asumiendo k entero). Llamamos V_0 el espacio de todas las funciones de la forma

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(x - k), \text{ con } a_k \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

Observamos que, debido a las discontinuidades de $\phi(x - k)$ en $x = k$ y $x = k + 1$, otra forma de describir V_0 es como el conjunto de todas las funciones constantes a trozos cuyas discontinuidades están contenidas en \mathbb{Z} , como se muestra en la Figura 2.2. Es importante destacar que una función en V_0 no necesariamente tiene discontinuidades en todo \mathbb{Z} . Por ejemplo, si $a_1 = a_2$, la función será continua en $x = 2$. Además si k varía en un conjunto finito, cada elemento de V_0 es cero fuera de un conjunto acotado, lo que significa que tiene soporte compacto.

Para analizar señales de alta frecuencia, es necesario utilizar bloques más estrechos. Para lograr esto, nos construimos bloques cuya anchura sea la mitad de la función de escala original $\phi(x)$. En otras palabras, consideramos la función $\phi(2x)$, que tiene una escala más fina como se muestra en la Figura 2.3.

La función $\phi(2x - k) = \phi(2(x - k/2))$ tiene la misma forma que la función $\phi(2x)$ pero trasladada $k/2$ unidades. Llamamos V_1 el espacio de todas las funciones de la forma

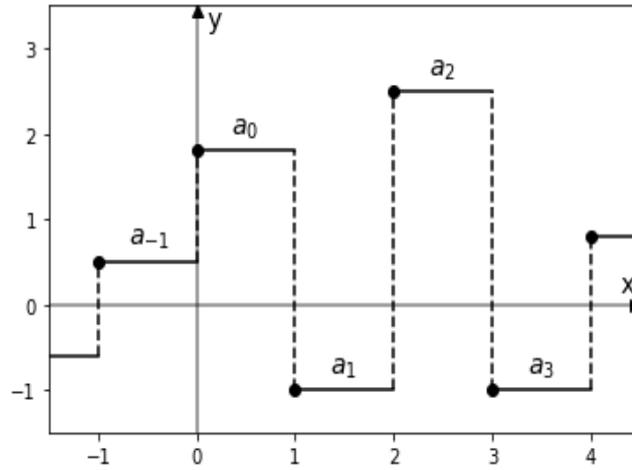


Figura 2.2: Gráfica de un elemento de V_0 .

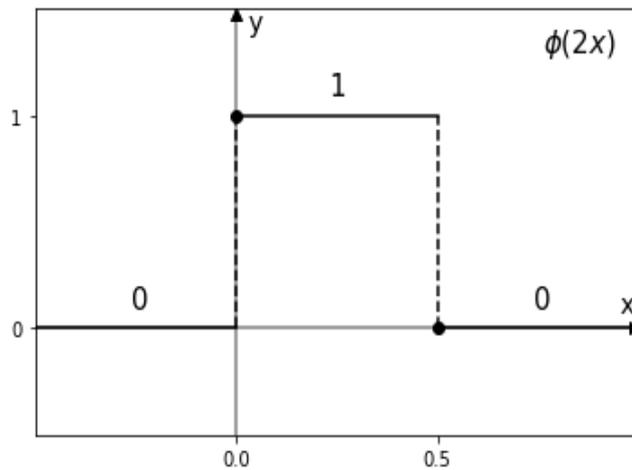


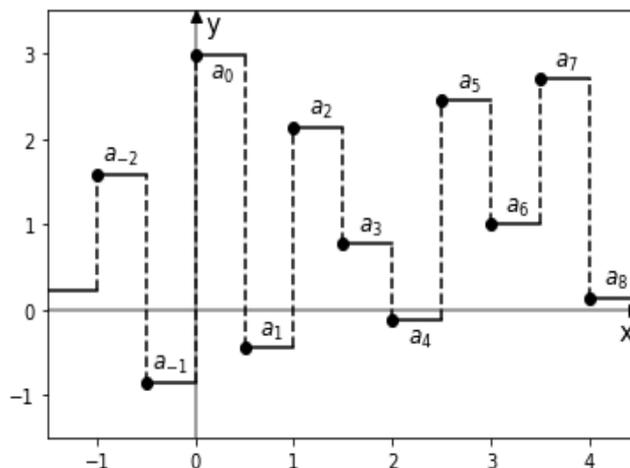
Figura 2.3: Gráfica de $\phi(2x)$.

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2x - k), \text{ con } a_k \in \mathbb{R} \text{ y } k \in \mathbb{Z}.$$

Desde una perspectiva geométrica, el espacio V_1 se puede entender como el conjunto de todas las funciones constantes a trozos con soporte compacto, cuyas discontinuidades están contenidas en los puntos $\{0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \dots\}$ como se muestra en la Figura 2.4.

Ampliamos este esquema a todas las diferentes escalas disponibles.

Definición 2.2. Sea j un número entero no negativo. Llamamos V_j al espacio de todas las funciones de la forma

Figura 2.4: Gráfica de un elemento de V_1 .

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2^j x - k), \text{ con } a_k \in \mathbb{R} \text{ y } k \in \mathbb{Z},$$

es decir, V_j es el espacio de todas las funciones constantes a trozos de soporte compacto cuyas discontinuidades están contenidas en el conjunto

$$\{\dots - 1/2^j, 0, 1/2^j, 2/2^j, 3/2^j \dots\}.$$

Es importante destacar que todas las funciones en V_0 también se encuentran en V_1 , ya que estas últimas son funciones constantes a trozos con discontinuidades específicamente en el conjunto $\{\dots - 1/2, 0, 1/2, 3/2 \dots\}$. Esto implica que V_0 es un subconjunto estricto de V_1 , y de manera análoga, V_1 es un subconjunto estricto de V_2 , y así sucesivamente

$$V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{j-1} \subset V_j \subset V_{j+1} \dots$$

Cada espacio V_j contiene toda la información relevante a una escala de resolución de 2^{-j} . A medida que aumenta el valor de j , la resolución se vuelve más fina, lo que significa que se capturan detalles más pequeños en la señal. El hecho de que V_j esté contenido en V_{j+1} asegura que no se pierda información al aumentar la resolución, ya que las funciones en V_{j+1} son extensiones más detalladas de las funciones en V_j .

2.1.2. Propiedades básicas de la función escala de Haar

El siguiente Teorema es fundamental para la construcción de la wavelet de Haar.

Teorema 2.1. Sea $f(x)$ una función de $L^2(\mathbb{R})$, se tiene que

- $f(x)$ pertenece a V_0 , si y solo si, $f(2^j x)$ pertenece a V_j
- $f(x)$ pertenece a V_j , si y solo si, $f(2^{-j} x)$ pertenece a V_0 .

Demostración. Si una función $f(x)$ pertenece al espacio V_0 , podemos expresarla como una combinación lineal de funciones $\{\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$. Por lo tanto, si consideramos $f(2^j x)$, esta función será una combinación lineal de funciones $\{\phi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$, lo que implica que $f(2^j x)$ pertenece al espacio V_j . De manera similar, se puede demostrar que si $f(x)$ pertenece a V_j , entonces $f(2^{-j} x)$ pertenece a V_0 . En resumen, la escala j se relaciona con la función original $f(x)$ mediante la transformación $2^j x$, mientras que la transformación inversa se logra mediante $2^{-j} x$. Esto establece una correspondencia entre las funciones en diferentes espacios de aproximación. ■

A medida que aumenta el valor de j , la función $\phi(2^j x)$ se asemeja a un pico más estrecho de ancho $1/2^j$ como se muestra en la Figura 2.5. Este pico representaría una componente de alta frecuencia de la señal que deseamos descomponer. Por lo tanto, es deseable tener un algoritmo eficiente que nos permita descomponer una señal en sus componentes correspondientes de V_j . Una forma de lograr esta descomposición es construir una base ortonormal para el espacio V_j utilizando el producto interno en $L^2(\mathbb{R})$.

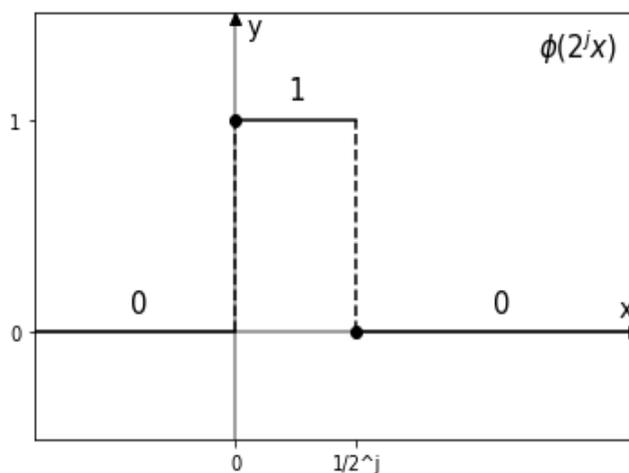


Figura 2.5: Gráfica de $\phi(2^j x)$.

Comenzamos con el espacio V_0 , que está generado por la función de escala ϕ y sus traslaciones. Las funciones de la forma $\phi(x - k)$ tienen una norma unitaria en $L^2(\mathbb{R})$, esto es,

$$\|\phi(x - k)\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\phi(x - k))^2 dx = \int_k^{k+1} dx = 1.$$

Cuando los valores de j y k son diferentes, las funciones $\phi(x - j)$ y $\phi(x - k)$ tienen soporte disjunto, como se ilustra en la Figura 2.6. Esto es importante porque nos permite probar que estas funciones son ortogonales entre sí en el espacio $L^2(\mathbb{R})$, es decir,

$$\langle \phi(x - j), \phi(x - k) \rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x - j)\phi(x - k) dx = 0.$$

Por tanto, el conjunto $\{\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de V_0 .

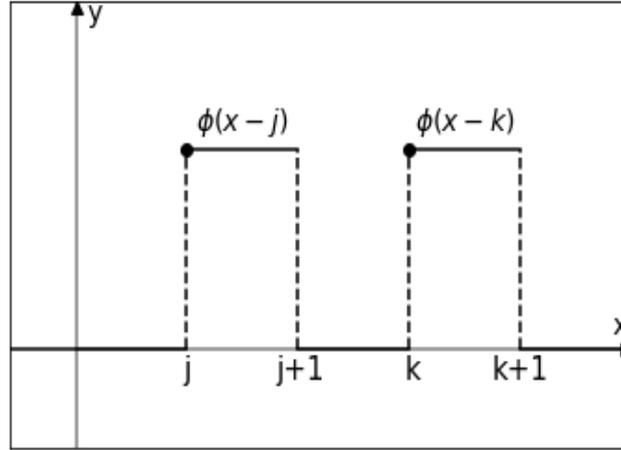


Figura 2.6: Gráfica donde se ve que $\phi(x - j)$ y $\phi(x - k)$ tienen soporte disjunto.

Extendemos lo visto al espacio V_j .

Teorema 2.2. *El conjunto de las funciones $\{2^{j/2}\phi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de V_j .*

Demostración. Primero, estudiemos la norma de $\phi(2^j x - k)$,

$$\|\phi(2^j x - k)\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\phi(2^j x - k))^2 dx = \int_k^{k+\frac{1}{2^j}} dx = \frac{1}{2^j}.$$

Lo que implica que

$$\|2^j \phi(2^j x - k)\|_{L^2}^2 = 1.$$

Por otro lado, análogamente al caso que se muestra en la Figura 2.6, se ve que $\phi(2^j x - j)$ y $\phi(2^j x - k)$ tienen soporte disjunto cuando si j es distinto de k , lo que implica que

$$\langle \phi(2^j x - j), \phi(2^j x - k) \rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^j x - j) \phi(2^j x - k) dx = 0.$$

Por tanto, el conjunto $\{2^{j/2} \phi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de V_j . ■

2.1.3. La Función Wavelet de Haar

Tener una base ortonormal para V_j es solo una parte de la solución para nuestro problema de filtrado de ruido. Necesitamos encontrar una forma de aislar los picos que pertenecen a V_j pero no a V_{j-1} , y es aquí donde entra en juego la wavelet ψ . La idea consiste en descomponer V_j en una suma ortogonal de V_{j-1} y su complemento ortogonal.

Comenzamos con $j = 1$ y buscamos el complemento ortogonal de V_0 en V_1 . Dado que V_0 está generado por ϕ y sus traslaciones, es razonable suponer que el complemento ortogonal de V_0 está generado por las traslaciones de una cierta función ψ , nuestra wavelet.

Hay dos condiciones clave que se necesitan para construir la función ψ :

1. ψ pertenece a V_1 , entonces ψ se puede expresar como la suma $\psi(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l \phi(2x - l)$.
2. ψ es ortogonal a V_0 . Esto es equivalente a que $\int \psi(x) \phi(x - k) dx = 0$ para todo k entero.

La primera condición implica que la wavelet ψ está compuesta por bloques de ancho $1/2$. La segunda condición, con $k = 0$, implica que $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \phi(x) dx = 0$ en todo el dominio. Existe una wavelet simple que cumple ambas condiciones y su gráfica consiste en dos bloques de ancho $1/2$. Esta wavelet puede ser expresada como

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2(x - 1/2)) = \phi(2x) - \phi(2x - 1),$$

y además tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \psi(x) dx = \int_0^{1/2} 1 dx - \int_{1/2}^1 1 dx = 1/2 - 1/2 = 0.$$

En el caso de $k \neq 0$, el soporte de $\psi(x)$ y el soporte de $\phi(x - k)$ no se superponen y entonces $\int \psi(x)\phi(x - k)dx = 0$. Por tanto, ψ pertenece a V_1 y es ortogonal a V_0 .

Definición 2.3. La función wavelet de Haar viene definida como

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1).$$

Su gráfica se muestra en la Figura 2.7.

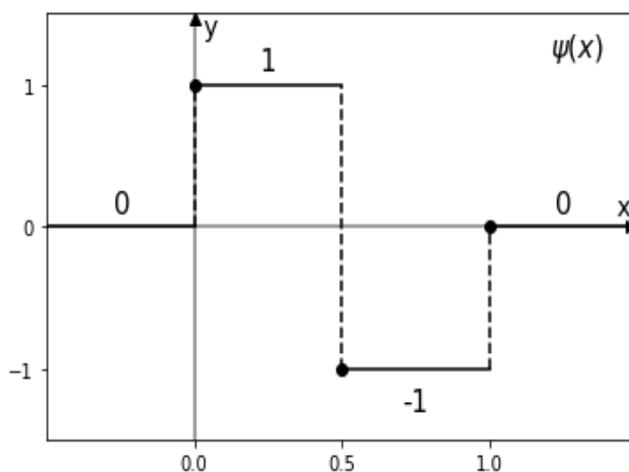


Figura 2.7: Gráfica de la función wavelet de Haar $\psi(x)$.

Proposición 2.1. Toda función

$$f_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2x - k) \in V_1$$

es ortogonal a V_0 (ortogonal a toda función $\phi(x - l)$, $l \in \mathbb{Z}$) si, y solo si,

$$a_1 = -a_0, a_3 = -a_2, \dots$$

Demostración. Consideramos $f_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2x - k)$ y $\phi(x - l)$, $l \in \mathbb{Z}$ como se muestran en la Figura 2.8. Si f_1 es ortogonal (en $L^2(\mathbb{R})$) a toda función $\phi(x - l)$, $l \in \mathbb{Z}$, entonces,

$$0 = \langle \phi(x - l), \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2x - k) \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \langle \phi(x - l), \phi(2x - k) \rangle.$$

Como $\phi(x-l)$ es igual a 1 en el intervalo $[l, l+1]$ y 0 en el resto, entonces como $\phi(2x-k) = \phi(2(x-\frac{k}{2}))$, es igual 1 en el intervalo $[\frac{k}{2}, \frac{k}{2} + \frac{1}{2}]$ y 0 en el resto, solo comparten soporte cuando $\frac{k}{2} = l$ y $\frac{k}{2} = l + \frac{1}{2}$, es decir, cuando $k = 2l$ y $k = 2l+1$, por lo que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_l^{l+\frac{1}{2}} a_{2l} \phi(2x-2l) dx + \int_{l+\frac{1}{2}}^{l+1} a_{2l+1} \phi(2x-2l-1) dx \\ &= \frac{a_{2l}}{2} + \frac{a_{2l+1}}{2} \Leftrightarrow a_{2l} = -a_{2l+1}, \quad l \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Por tanto, se tiene que

$$f_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k} (\phi(2x-2k) - \phi(2x-2k-1)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k} \psi(x-k).$$

■

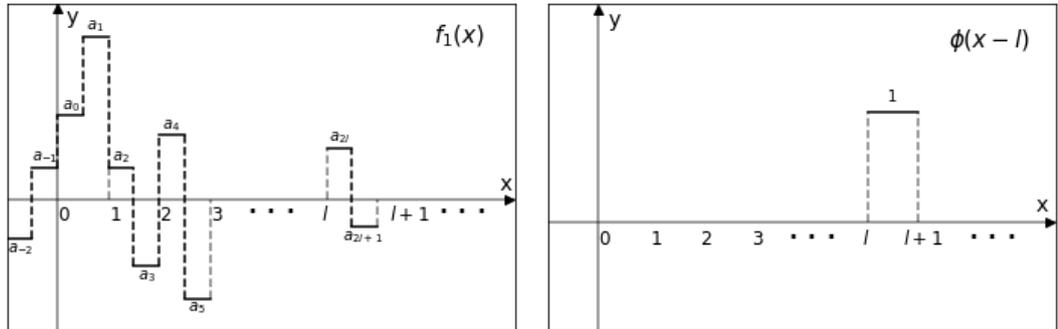


Figura 2.8: Gráficas de $f_1(x)$ y $\phi(x-l)$.

En resumen, una función de V_1 es ortogonal a V_0 , si y solo si, se puede expresar de la forma $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \psi(x-k)$ (reescribiendo a_{2k} por a_k) y se asume que solo un número finito de a_k son diferentes de cero. Denotamos por W_0 al espacio de todas las funciones que son de la forma

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \psi(x-k), \quad \text{con } a_k \in \mathbb{R}.$$

Lo que hemos demostrado es que W_0 es el complemento ortogonal de V_0 en V_1 , en otras palabras, V_1 se puede descomponer en la suma directa de V_0 y W_0 , es decir, $V_1 = V_0 \oplus W_0$.

Teorema 2.3. Sea W_j el espacio de las funciones de la forma

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \psi(2^j x - k), \text{ con } a_k \in \mathbb{R},$$

donde asumimos que solo un número finito de a_k son distintos de cero. Entonces, W_j es el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} , es decir,

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

Demostración. Para probar este Teorema, debemos ver si se verifica lo siguiente:

1. Cada función de W_j es ortogonal a toda función de V_j .
2. Cualquier función de V_{j+1} , que es ortogonal a V_j , debe pertenecer a W_j .

Para establecer la primera condición, definimos $g := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \psi(2^j x - k)$, que pertenece a W_j , y tomamos $f \in V_j$.

Tenemos que demostrar que

$$\langle g, f \rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \overline{f(x)} dx = 0.$$

Como $f(x)$ pertenece a V_j , la función $f(2^{-j}x)$ pertenece a V_0 , entonces,

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \psi(x - k) \overline{f(2^{-j}x)} dx.$$

Haciendo el cambio de variable $y = 2^{-j}x$, entonces, $x = 2^j y$ y $2^j dy = dx$,

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \psi(2^j y - k) \overline{f(y)} 2^j dy = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \overline{f(y)} dy.$$

Por tanto, g es ortogonal a cualquier función $f \in V_j$.

Para la segunda condición, necesitamos demostrar que cualquier elemento de V_{j+1} , que es ortogonal a V_j , debe ser una combinación lineal de $\{\psi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$, lo que implicaría que pertenece a W_j .

Consideramos una función $f \in V_{j+1}$, es decir, $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2^{j+1}x - k)$.

Como f es ortogonal a V_j , es ortogonal a toda función $\phi(2^j x - l), l \in \mathbb{Z}$, entonces,

$$\begin{aligned}
0 &= \langle f, \phi(2^j x - l) \rangle = \left\langle \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2^{j+1} x - k), \phi(2^j x - l) \right\rangle \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \langle \phi(2^{j+1} x - k), \phi(2^j x - l) \rangle.
\end{aligned}$$

Y análogamente al caso base, obtenemos que $a_{2l} = -a_{2l+1}$, $l \in \mathbb{Z}$. Por tanto, se tiene que

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k} (\phi(2^{j+1} x - 2k) - \phi(2^{j+1} x - 2k - 1)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k} \psi(2^j x - k) \in W_j.$$

■

Al realizar sucesivas descomposiciones de V_j, V_{j-1}, \dots , obtenemos

$$\begin{aligned}
V_j &= W_{j-1} \oplus V_{j-1} \\
&= W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus V_{j-2} \\
&\dots \\
&= W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \dots \oplus W_0 \oplus V_0,
\end{aligned}$$

y así, cada función f en V_j puede ser descompuesta de manera única como una suma de componentes

$$f = w_{j-1} + w_{j-2} + \dots + w_0 + f_0,$$

donde cada w_l pertenece a W_l con $0 \leq l \leq j-1$, y f_0 pertenece a V_0 . Podemos interpretar intuitivamente a w_l como los “picos” de f con una anchura de $1/2^{l+1}$ que no pueden ser representados mediante combinaciones lineales de picos de otras anchuras. Esta descomposición en componentes nos permite capturar y analizar diferentes niveles de detalles de la señal f , desde los detalles más gruesos hasta los más finos.

Teorema 2.4. *El espacio $L^2(\mathbb{R})$ se puede descomponer en una suma directa ortogonal infinita*

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots$$

En particular, cada $f \in L^2(\mathbb{R})$ se puede escribir como

$$f = f_0 + \sum_{j=0}^{\infty} w_j,$$

donde f_0 pertenece a V_0 y w_j pertenece a W_j .

El Teorema establece que la suma infinita debe entenderse como el límite de sumas finitas. En otras palabras,

$$f = f_0 + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N w_j,$$

donde el límite se toma en el sentido del espacio $L^2(\mathbb{R})$.

2.2. Algoritmos de descomposición y reconstrucción de Haar

2.2.1. Descomposición

Una vez que hemos descompuesto V_j en una suma directa de V_0 y W_l para $0 \leq l < j$, la solución teórica a nuestro problema de filtrado de ruido se vuelve más sencilla. Primero, aproximamos nuestra función $f \in L^2(\mathbb{R})$ por una función de escala $f_j \in V_j$ (con j lo suficientemente grande) utilizando el Teorema 2.4. Luego, descomponemos f_j en sus componentes

$$f_j = f_0 + w_1 + \cdots + w_{j-1}, \text{ con } w_l \in W_l.$$

Cada componente w_l representa un “pico” de ancho $1/2^{l+1}$. Cuando l es lo suficientemente grande, estos picos son lo suficientemente finos para representar el ruido. Para filtrar el ruido, necesitamos que estas componentes sean nulas. El resto de la suma representa la señal que se aproxima lo máximo posible a f y que está libre de ruido. De esta manera, podemos separar la señal original en sus componentes de ruido y señal limpia para lograr el filtrado deseado.

Para implementar este algoritmo teórico de manera eficiente, se requiere llevar a cabo una descomposición como se muestra en el Teorema 2.4. El primer paso consiste en aproximar la señal original f mediante una función de escala de la forma

$$f_j(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l \phi(2^j x - l).$$

Necesitamos ahora descomponer $\phi(2^j x - l)$ en sus componentes W_l para $0 \leq l < j$. Para lograr esto, necesitamos hacer uso de las siguientes relaciones entre ϕ y ψ :

$$\phi(2x) = \frac{\psi(x) + \phi(x)}{2}$$

$$\phi(2x - 1) = \frac{\phi(x) - \psi(x)}{2}.$$

En un sentido más general, contamos con el siguiente Lema que nos será de utilidad en este proceso.

Lema 2.1. *Las siguientes relaciones son para todo $x \in \mathbb{R}$*

$$\phi(2^j x) = \frac{\psi(2^{j-1} x) + \phi(2^{j-1} x)}{2} \quad (2.1)$$

$$\phi(2^j x - 1) = \frac{\phi(2^{j-1} x) - \psi(2^{j-1} x)}{2}. \quad (2.2)$$

Ahora podemos proceder con el esquema general de descomposición de la siguiente manera. En primer lugar, dividimos la suma $f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2^j x - k)$ en términos pares e impares, es decir,

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k} \phi(2^j x - 2k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k+1} \phi(2^j x - 2k - 1). \quad (2.3)$$

Luego, utilizando las ecuaciones (2.1) y (2.2), donde reemplazamos x por $x - k2^{1-j}$, tenemos que

$$\phi(2^j x - 2k) = \frac{\psi(2^{j-1} x - k) + \phi(2^{j-1} x - k)}{2}$$

$$\phi(2^j x - 2k - 1) = \frac{\phi(2^{j-1} x - k) - \psi(2^{j-1} x - k)}{2}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (2.3), obtenemos

$$\begin{aligned} f_j(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k} \frac{\psi(2^{j-1} x - k) + \phi(2^{j-1} x - k)}{2} \\ &+ \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{2k+1} \frac{\phi(2^{j-1} x - k) - \psi(2^{j-1} x - k)}{2} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{a_{2k} - a_{2k+1}}{2} \right) \psi(2^{j-1} x - k) + \left(\frac{a_{2k} + a_{2k+1}}{2} \right) \phi(2^{j-1} x - k) \\ &= w_{j-1} + f_{j-1}, \end{aligned}$$

donde el primer término en el lado derecho de la igualdad, w_{j-1} , representa la componente W_{j-1} de f_j , ya que W_{j-1} es el espacio generado por las funciones

$\{\psi(2^{j-1}x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ y de manera similar, el segundo término en el lado derecho, f_{j-1} , representa la componente V_{j-1} de f_j .

Resumimos el algoritmo de descomposición anterior en el siguiente Teorema.

Teorema 2.5. (*Descomposición de Haar*) *Suponemos*

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^j \phi(2^j x - k) \in V_j.$$

Entonces, f_j se puede descomponer como

$$f_j(x) = w_{j-1} + f_{j-1},$$

donde

$$w_{j-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{j-1} \psi(2^{j-1}x - k) \in W_{j-1} \quad y \quad f_{j-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{j-1} \phi(2^{j-1}x - k) \in V_{j-1},$$

con

$$b_k^{j-1} = \frac{a_{2k}^j - a_{2k+1}^j}{2} \quad y \quad a_k^{j-1} = \frac{a_{2k}^j + a_{2k+1}^j}{2}.$$

El proceso anterior se puede repetir al reemplazar j por $j-1$ para descomponer f_{j-1} en $w_{j-2} + f_{j-2}$. Continuando de esta manera, llegamos a la descomposición

$$f_j(x) = w_{j-1} + w_{j-2} + \cdots + w_0 + f_0.$$

Ejemplo de Descomposición de una señal

Consideramos la señal $f \in V_3$ como se muestra en la Figura 2.9, definida en el intervalo unidad $0 \leq x \leq 1$ que viene discretizada en 2^3 nodos, de la forma

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2^3-1} a_k^3 \phi(2^3 x - k) \in V_3,$$

donde $a_0^3 = 1$, $a_1^3 = 0$, $a_2^3 = -3$, $a_3^3 = 2$, $a_4^3 = 1$, $a_5^3 = 0$, $a_6^3 = 1$ y $a_7^3 = 2$.

Aplicamos el algoritmo de descomposición de Haar para descomponer f en sus componentes como se ilustrará en las Figuras 2.10, 2.11 y 2.12 (En el cálculo de

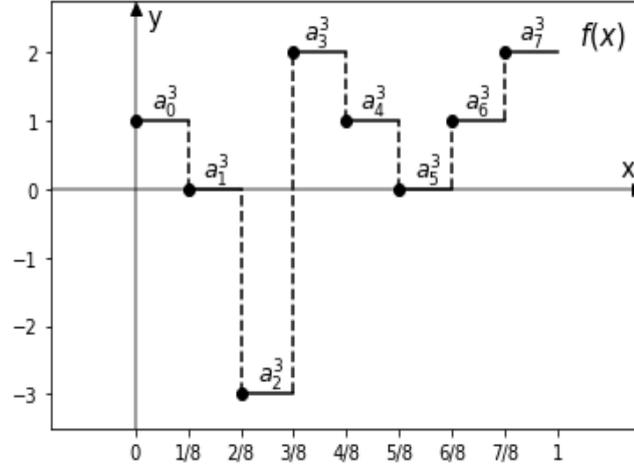


Figura 2.9: Gráfica de señal f .

cada coeficiente, hemos obviado el factor $2^{\frac{1}{2}}$ de ortonormalización de la función escala y wavelet de Haar por simplicidad).

El primer paso es descomponer la señal como $f = w_2 + f_2$, donde

$$w_2 = \sum_{k=0}^3 b_k^2 \psi(2^2 x - k) \in W_2,$$

con

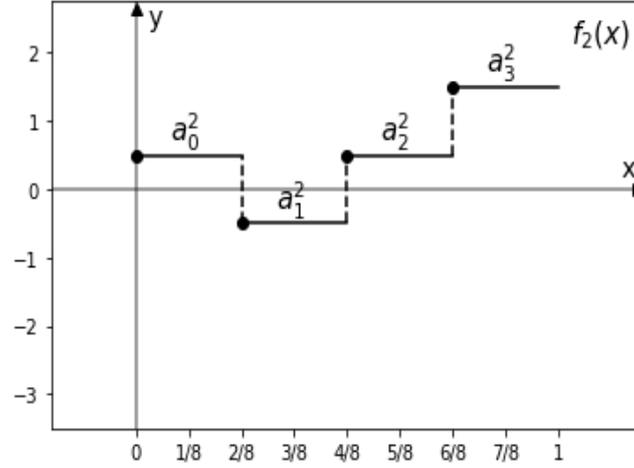
$$\begin{aligned} b_0^2 &= \frac{a_0^3 - a_1^3}{2} = \frac{1 - 0}{2} = \frac{1}{2} & b_2^2 &= \frac{a_4^3 - a_5^3}{2} = \frac{1 - 0}{2} = \frac{1}{2} \\ b_1^2 &= \frac{a_2^3 - a_3^3}{2} = \frac{-3 - 2}{2} = \frac{-5}{2} & b_3^2 &= \frac{a_6^3 - a_7^3}{2} = \frac{1 - 2}{2} = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

y

$$f_2 = \sum_{k=0}^3 a_k^2 \phi(2^2 x - k) \in V_2,$$

con

$$\begin{aligned} a_0^2 &= \frac{a_0^3 + a_1^3}{2} = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2} & a_2^2 &= \frac{a_4^3 + a_5^3}{2} = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2} \\ a_1^2 &= \frac{a_2^3 + a_3^3}{2} = \frac{-3 + 2}{2} = \frac{-1}{2} & a_3^2 &= \frac{a_6^3 + a_7^3}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Figura 2.10: Gráfica de f_2 .

El segundo paso es repetir el proceso pero esta vez descomponiendo f_2 , es decir, descomponer $f_2 = w_1 + f_1$, donde

$$w_1 = \sum_{k=0}^1 b_k^1 \psi(2x - k) \in W_1,$$

con

$$b_0^1 = \frac{a_0^2 - a_1^2}{2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{-1}{2}}{2} = \frac{1}{2} \quad b_1^1 = \frac{a_2^2 - a_3^2}{2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = \frac{-1}{2}$$

y

$$f_1 = \sum_{k=0}^1 a_k^1 \phi(2x - k) \in V_1,$$

con

$$a_0^1 = \frac{a_0^2 - a_1^2}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{-1}{2}}{2} = 0 \quad a_1^1 = \frac{a_2^2 - a_3^2}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1$$

Y el tercer paso es repetir el proceso pero esta vez descomponiendo f_1 , es decir, descomponer $f_1 = w_0 + f_0$, donde

$$w_0 = b_0^0 \psi(x - k) \in W_0,$$

con

$$b_0^0 = \frac{a_0^1 - a_1^1}{2} = \frac{0 - 1}{2} = \frac{-1}{2}$$

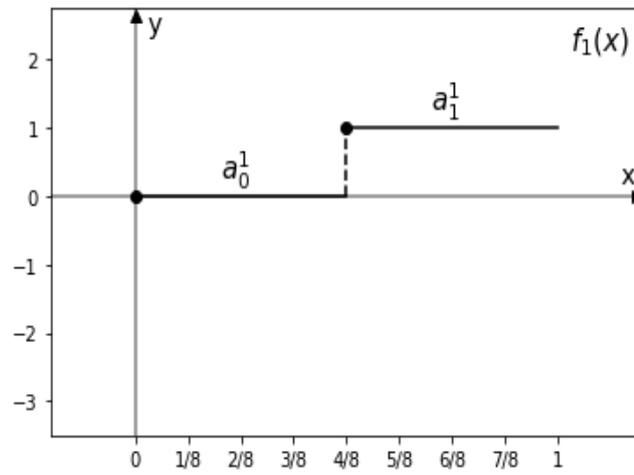


Figura 2.11: Gráfica de f_1 .

y

$$f_0 = a_0^0 \phi(x - k) \in V_0,$$

con

$$a_0^0 = \frac{a_0^1 + a_1^1}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$$

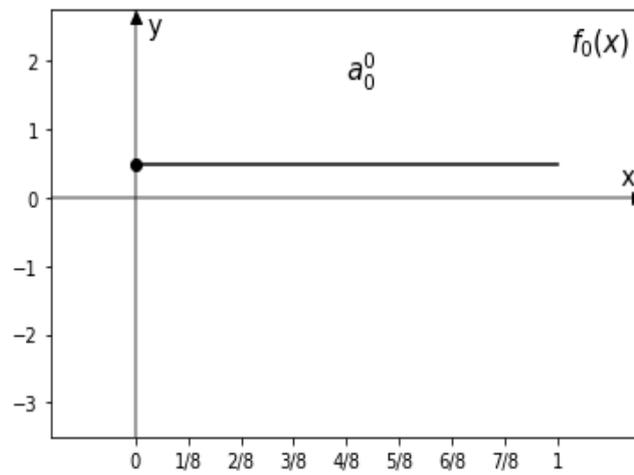


Figura 2.12: Gráfica de f_0 .

Una vez realizado el proceso, hemos descompuesto la señal f como $f = w_2 + w_1 + w_0 + f_0$.

2.2.2. Reconstrucción

Después de descomponer la función f en sus componentes V_0 y $W_{j'}$ para $0 \leq j' < j$, ¿qué sucede a continuación? La respuesta depende del objetivo que se persiga.

Si el objetivo es filtrar el ruido, se pueden eliminar las componentes $W_{j'}$ de f correspondientes a los detalles y conservar únicamente las componentes relacionadas con la tendencia, lo que resulta en una señal aproximada con mucho menos ruido. Si el objetivo es la compresión de datos, se pueden descartar las componentes de detalles que son más pequeñas que un cierto umbral sin afectar significativamente la señal. Solo es necesario almacenar o transmitir las componentes significativas (los $b_k^{j'}$ más grandes), lo que permite lograr una compresión significativa de los datos. En resumen, la descomposición en componentes permite filtrar el ruido y realizar una compresión efectiva de los datos, optimizando así el procesamiento de la señal según el objetivo deseado.

En cualquier caso, dado que los $b_k^{j'}$ han sido alterados o descartados, se requiere un algoritmo de reconstrucción para poder recuperar la señal comprimida o filtrada en términos de los elementos de la base $\phi(2^j x - l)$ de V_j . En otras palabras, queremos obtener la representación de la señal $f(x)$ como una suma de funciones escala en el intervalo $\frac{l}{2^j} \leq x \leq \frac{l+1}{2^j}$, es decir,

$$f(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l^j \phi(2^j x - l).$$

Una vez que se logra esto, el gráfico de la señal f consiste en una serie de funciones escala con alturas a_l^j en los intervalos correspondientes. El algoritmo de reconstrucción es esencial para recuperar la señal original a partir de las componentes seleccionadas o modificadas.

Comenzamos con una señal $f(x)$ que se puede descomponer en términos de sus componentes

$$f(x) = f_0 + w_0 + \cdots + w_{j-1}, \text{ con } w_l \in W_l,$$

donde la componente V_0 está representada por la función

$$f_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^0 \phi(x - k) \in V_0$$

y las componentes W_l están representadas por la función

$$w_l(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^l \psi(2^l x - k) \in W_l, \text{ con } 0 \leq l < j.$$

Nuestro objetivo es reescribir la señal f como una suma de funciones escala $\sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l^j \phi(2^j x - l)$ y encontrar un algoritmo para calcular las constantes a_l^j . Para ello, usamos las ecuaciones

$$\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x - 1) \quad (2.4)$$

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x - 1) \quad (2.5)$$

y si reemplazamos x por $2^{j-1}x$, obtenemos

$$\phi(2^{j-1}x) = \phi(2^j x) + \phi(2^j x - 1)$$

$$\psi(2^{j-1}x) = \phi(2^j x) - \phi(2^j x - 1).$$

Usando la ecuación (2.4) reemplazando x por $x - k$, obtenemos la siguiente expresión para $f_0(x)$,

$$f_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^0 \phi(x - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^0 \phi(2x - 2k) + a_k^0 \phi(2x - 2k - 1).$$

Luego, podemos escribir $f_0(x)$ como

$$f_0(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{a}_l^1 \phi(2x - l), \quad (2.6)$$

donde \hat{a}_l^1 se define de la siguiente manera

$$\hat{a}_l^1 = \begin{cases} a_k^0, & \text{si } l = 2k \text{ es par} \\ a_k^0, & \text{si } l = 2k + 1 \text{ es impar.} \end{cases}$$

De manera similar, podemos expresar $w_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^0 \psi(x - k)$ usando la ecuación (2.5) y reemplazando x por $x - k$, se puede escribir como

$$\begin{aligned} w_0(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^0 \phi(2x - 2k) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^0 \phi(2x - 2k - 1) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{b}_l^1 \phi(2x - l), \end{aligned} \quad (2.7)$$

donde \hat{b}_l^1 se define de la siguiente manera

$$\hat{b}_l^1 = \begin{cases} b_k^0, & \text{si } l = 2k \text{ es par} \\ -b_k^0, & \text{si } l = 2k + 1 \text{ es impar.} \end{cases}$$

Al combinar las ecuaciones (2.6) y (2.7), obtenemos

$$\begin{aligned} f_0(x) + w_0(x) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{a}_l^1 \phi(2x - l) + \sum_{l \in \mathbb{Z}} \hat{b}_l^1 \phi(2x - l) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l^1 \phi(2x - l), \end{aligned}$$

donde a_l^1 se define de la siguiente manera

$$a_l^1 = \hat{a}_l^1 + \hat{b}_l^1 = \begin{cases} a_k^0 + b_k^0, & \text{si } l = 2k \text{ es par} \\ a_k^0 - b_k^0, & \text{si } l = 2k + 1 \text{ es impar.} \end{cases}$$

Continuando de esta manera, agregamos $w_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^1 \psi(2x - k)$ a la suma y obtenemos

$$\begin{aligned} f_0(x) + w_0(x) + w_1(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^1 \phi(2x - k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^1 \psi(2x - k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^1 \phi(2^2x - 2k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^1 \phi(2^2x - 2k - 1) \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^1 \phi(2^2x - 2k) - \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^1 \phi(2^2x - 2k - 1) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l^2 \phi(2^2x - l), \end{aligned}$$

donde a_l^2 se define de la siguiente manera

$$a_l^2 = \begin{cases} a_k^1 + b_k^1, & \text{si } l = 2k \text{ es par} \\ a_k^1 - b_k^1, & \text{si } l = 2k + 1 \text{ es impar.} \end{cases}$$

Este proceso se repite de forma recursiva para generar los coeficientes restantes. En resumen, el algoritmo de reconstrucción nos permite obtener la representación de la señal original en términos de las funciones escala y calcular los coeficientes correspondientes.

Resumimos el algoritmo de reconstrucción anterior en el siguiente Teorema.

Teorema 2.6. (*Reconstrucción de Haar*) Si

$$f = f_0 + w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_{j-1},$$

con

$$f_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^0 \phi(x - k) \in V_0$$

y

$$w_{j'}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{j'} \psi(2^{j'} x - k) \in W_{j'}, \text{ con } 0 \leq j' < j,$$

entonces

$$f(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} a_l^j \phi(2^j x - l) \in V_j,$$

donde $a_l^{j'}$ son determinados recursivamente por

$$a_l^{j'} = \begin{cases} a_k^{j'-1} + b_k^{j'-1}, & \text{si } l = 2k \text{ es par} \\ a_k^{j'-1} - b_k^{j'-1}, & \text{si } l = 2k + 1 \text{ es impar} \end{cases}$$

para $1 \leq j' \leq j$.

Ejemplo de Reconstrucción de una señal

Partimos de la señal f que hemos descompuesto anteriormente en el ejemplo de descomposición como $f = w_2 + w_1 + w_0 + f_0$ y usamos el algoritmo de reconstrucción de Haar para reconstruir la señal como se ilustrará en las Figuras 2.13, 2.14, 2.15 y 2.16.

Comenzamos con la señal f_0 .

Podemos escribir f_0 y w_0 de la forma

$$f_0 = a_0^0 \phi(x) = a_0^0 [\phi(2x) + \phi(2x - 1)]$$

y

$$w_0 = b_0^0 \phi(x) = b_0^0 [\phi(2x) - \phi(2x - 1)],$$

entonces

$$\begin{aligned} f_1 = f_0 + w_0 &= (a_0^0 + b_0^0) \phi(2x) + (a_0^0 - b_0^0) \phi(2x - 1) \\ &= \sum_{l=0}^1 a_l^1 \phi(2x - l), \end{aligned}$$

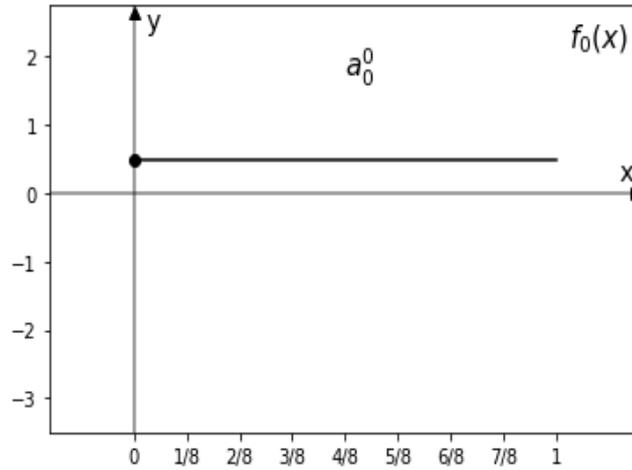


Figura 2.13: Gráfica de f_0 .

donde

$$a_0^1 = a_0^0 + b_0^0 = \frac{1}{2} + \frac{-1}{2} = 0 \quad a_1^1 = a_0^0 - b_0^0 = \frac{1}{2} - \frac{-1}{2} = 1.$$

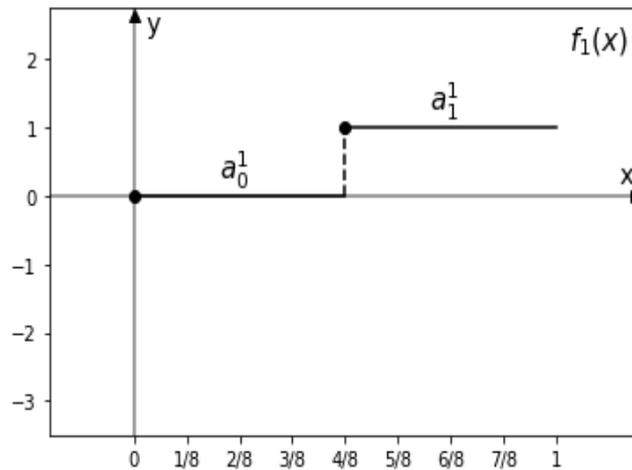


Figura 2.14: Gráfica de f_1 .

Ahora a sumamos w_1 , sabiendo que podemos escribirlos de la forma

$$f_0 + w_0 = \sum_{k=0}^1 a_k^1 \phi(2x - k) = \sum_{k=0}^1 a_k^1 [\phi(2^2x - 2k) + \phi(2^2x - 2k - 1)]$$

y

$$w_1 = \sum_{k=0}^1 b_k^1 \psi(2x - k) = \sum_{k=0}^1 b_k^1 [\phi(2^2x - 2k) - \phi(2^2x - 2k - 1)],$$

entonces

$$\begin{aligned} f_2 = f_0 + w_0 + w_1 &= \sum_{k=0}^1 (a_k^1 + b_k^1) \phi(2^2x - 2k) + (a_k^1 - b_k^1) \phi(2^2x - 2k - 1) \\ &= \sum_{l=0}^3 a_l^2 \phi(2^2x - l), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a_0^2 &= a_0^1 + b_0^1 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} & a_2^2 &= a_1^1 + b_1^1 = 1 + \frac{-1}{2} = \frac{1}{2} \\ a_1^2 &= a_0^1 - b_0^1 = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} & a_3^2 &= a_1^1 - b_1^1 = 1 - \frac{-1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

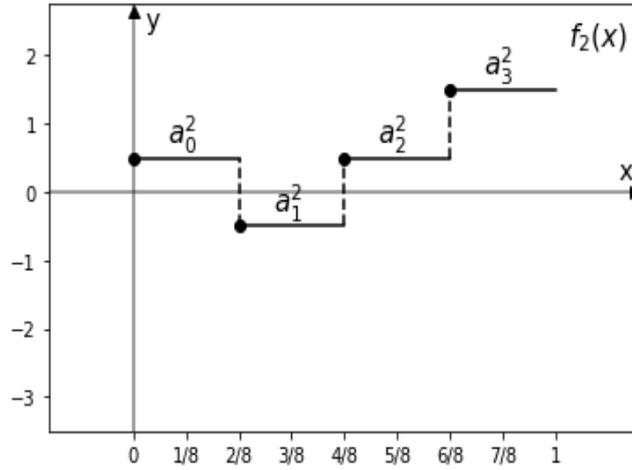


Figura 2.15: Gráfica de f_2 .

Por último, a sumamos w_2 , sabiendo que podemos escribirlos de la forma

$$f_0 + w_0 + w_1 = \sum_{k=0}^3 a_k^2 \phi(2^2x - l) = \sum_{k=0}^3 a_k^2 [\phi(2^3x - 2k) + \phi(2^3x - 2k - 1)]$$

y

$$w_2 = \sum_{k=0}^3 b_k^2 \phi(2^2 x - l) = \sum_{k=0}^3 b_k^2 [\phi(2^3 x - 2k) - \phi(2^3 x - 2k - 1)],$$

entonces

$$\begin{aligned} f_3 = f_0 + w_0 + w_1 + w_2 &= \sum_{k=0}^3 (a_k^2 + b_k^2) \phi(2^3 x - 2k) + (a_k^2 - b_k^2) \phi(2^3 x - 2k - 1) \\ &= \sum_{l=0}^7 a_l^3 \phi(2^3 x - l), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} a_0^3 &= a_0^2 + b_0^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 & a_4^3 &= a_2^2 + b_2^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ a_1^3 &= a_0^2 - b_0^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 & a_5^3 &= a_2^2 - b_2^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \\ a_2^3 &= a_1^2 + b_1^2 = \frac{-1}{2} + \frac{-5}{2} = -3 & a_6^3 &= a_3^2 + b_3^2 = \frac{3}{2} + \frac{-1}{2} = 1 \\ a_3^3 &= a_1^2 - b_1^2 = \frac{-1}{2} - \frac{-5}{2} = 2 & a_7^3 &= a_3^2 - b_3^2 = \frac{3}{2} - \frac{-1}{2} = 2. \end{aligned}$$

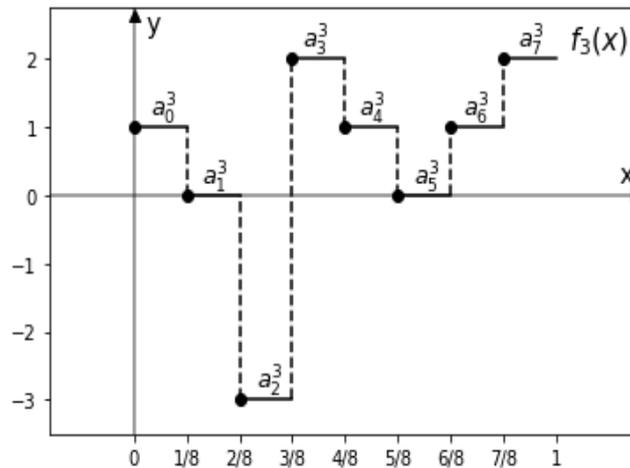


Figura 2.16: Gráfica de f_3 .

Una vez realizado el proceso, tenemos que f_3 es la reconstrucción de la señal f y además vemos que la gráfica de la Figura 2.16 de la función f_3 es idéntica a la gráfica de la Figura 2.9 de la función f .

2.3. Ejemplo de análisis de una señal usando una wavelet discreta

Partimos de una señal de una onda generada manualmente a través de la ecuación

$$y(x) = \sin(2\pi x) + \cos(4\pi x).$$

Luego, se le ha añadido ruido blanco a la señal en el intervalo $x \in [0.5, 0.6]$, como se muestra en la Figura 2.17.

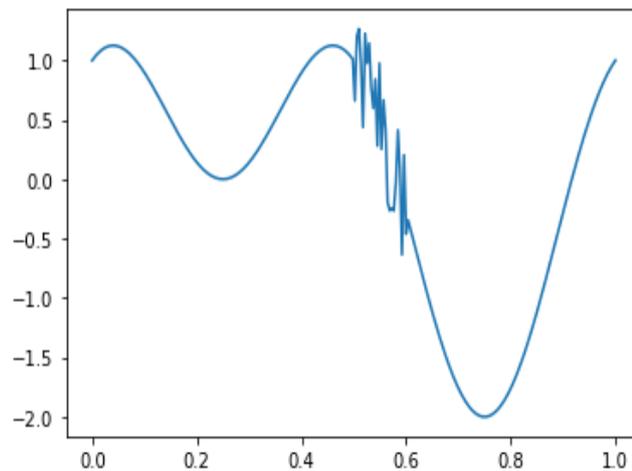


Figura 2.17: Gráfica de la señal con ruido.

Una vez tenemos la señal construida, procedemos a utilizar el algoritmo de descomposición¹.

Para el tratamiento de eliminación de ruido (denoising), se utilizan muchos métodos dependiendo del tipo de señal y de perturbaciones a tratar. Estos métodos se suelen denominar *trillado* y destacamos aquí los dos más básicos:

1. *Trillado fuerte a nivel λ* : elimina todos los coeficientes de detalle que sean inferiores en módulo al valor λ dado. Esto hace que los valores muy próximos sean ahora iguales.
2. *Trillado suave a nivel λ* : además de eliminar los coeficientes de detalle menores o iguales en módulo que λ , al resto de los coeficientes (α) que no los elimina, se les disminuye su valor con reglas de sustitución como $\text{sign}(\alpha)(|\alpha| - \lambda)$ o $\lambda\alpha$ con $0 < \lambda < 1$.

¹ Para ver el código completo que genera los gráficos ver <https://colab.research.google.com/drive/1y1VSAAns-keTXbJ8D08t4LceXnrkF-cGm?usp=sharing>.

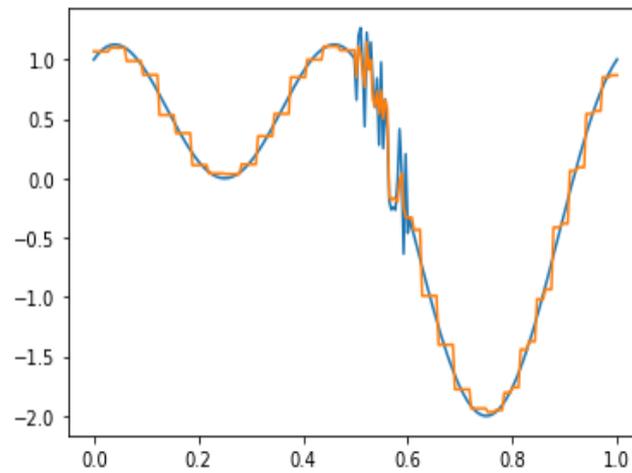


Figura 2.18: Gráficas de la señal con ruido y la señal limpia reconstruída con la ondícula de Haar.

Una vez reconstruida la señal, como se muestra en la Figura 2.18, observamos que atenúa considerablemente el ruido, aunque no se aproxima de manera óptima debido al uso de funciones con discontinuidades. En el siguiente capítulo, exploraremos formas de obtener una aproximación de la señal de mejor calidad.

Análisis multiresolución

En el capítulo anterior, explicamos cómo descomponer una señal en componentes de frecuencia variable utilizando las wavelets de Haar. Estas wavelets se basan en dos funciones: la función escala ϕ y la wavelet ψ . Ambas son fáciles de describir y se pueden utilizar en un algoritmo de descomposición sencillo.

Sin embargo, el algoritmo de descomposición de Haar tiene una limitación importante, ambas funciones tienen discontinuidades (ϕ en $x = 0, 1$ y ψ en $x = 0, \frac{1}{2}, 1$). Como resultado, este algoritmo proporciona una aproximación deficiente para señales que varían de manera continua. Lo que necesitamos es una teoría similar a la que hemos descrito en el capítulo anterior, pero con versiones continuas de nuestras funciones ϕ y ψ . En este capítulo, presentaremos una estructura más general para construir wavelets continua. Esto mejorará el rendimiento del algoritmo al poder usar otros ejemplos de wavelets más regulares que la de Haar descritas en el capítulo anterior.

3.1. Estructura de la multiresolución

Empezaremos con una definición general de análisis de multiresolución.

Definición 3.1. Sea V_j , con $j \in \mathbb{Z}$, una secuencia de subespacios de funciones en $L^2(\mathbb{R})$. Esta colección de espacios $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ se llama *análisis de multiresolución* con la *función escala* ϕ si se cumplen las siguientes condiciones:

- (i) Están anidados, $V_j \subset V_{j+1}$.
- (ii) La unión de los V_j es densa, $\overline{\cup V_j} = L^2(\mathbb{R})$.
- (iii) $\cap V_j = \{0\}$.
- (iv) Toda función $f(x)$ pertenece a V_j si, y solo si, la función $f(2^{-j}x)$ pertenece a V_0 .

(v) La función ϕ pertenece a V_0 y el conjunto $\{\phi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal (usando el producto interior de $L^2(\mathbb{R})$) de V_0 .

Los conjuntos V_j se llaman espacios de aproximación. Para cada función f en $L^2(\mathbb{R})$, es posible aproximarla tan cerca como se desee mediante una función de V_j , siempre que j sea lo suficientemente grande. Esto es lo que se significa la propiedad de densidad, a $\overline{\cup V_j}$ se le llama la clausura de la unión de los conjuntos V_j , y se define de tal manera que f pertenece a $\overline{\cup V_j}$ si, y solo si, para cada $\epsilon > 0$, es posible encontrar j tal que exista $f_j \in V_j$ y $\|f - f_j\| < \epsilon$.

Teorema 3.1. *Suponemos que $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ es un análisis de multiresolución con la función escala ϕ . Entonces para todo $j \in \mathbb{Z}$, el conjunto de funciones*

$$\{\phi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$$

es una base ortonormal de V_j .

Demostración. Para demostrar que $\{\phi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$ genera V_j , debemos demostrar que cualquier $f(x) \in V_j$ se puede escribir como una combinación lineal de $\{\phi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$.

Entonces, si $f(x) \in V_j$, usando la propiedad (iv), la función $f(2^{-j}x)$ pertenece a V_0 y por tanto $f(2^{-j}x)$ es una combinación lineal de $\{\phi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$. Y si reemplazamos x por $2^j x$, vemos que $f(x)$ es una combinación lineal de $\{\phi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$.

Ahora veamos que $\{\phi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal. Tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j,k}, \phi_{j,l} \rangle_{L^2} &= 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^j x - k) \overline{\phi(2^j x - l)} dx = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2^j x - k) \overline{\phi(2^j x - l)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y - k) \overline{\phi(y - l)} dy = \delta_{k,l} = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq l, \\ 1, & \text{si } k = l. \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto, $\{\phi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de V_j . ■

3.1.1. La relación de escala

Ahora estamos listos para enunciar y probar la ecuación central del análisis de multirresolución, la relación de escala.

Teorema 3.2. *Suponemos que $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ es un análisis de multirresolución con la función escala ϕ . Entonces se cumplen las siguientes relaciones de escala*

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2x - k),$$

donde

$$p_k = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \overline{\phi(2x - k)} dx.$$

Además, también tenemos

$$\phi(2^{j-1}x - l) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \phi(2^j x - k)$$

o equivalentemente

$$\phi_{j-1,l} = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \phi_{j,k}.$$

Observación. La relación entre $\phi(x)$ y la traslación $\phi(2x)$ se denomina relación de escala o relación de dos escalas. Cuando el soporte de ϕ es compacto, solo un número finito de los p_k será no nulo, ya que cuando $|k|$ es lo suficientemente grande, el soporte de $\phi(2x - k)$ estará fuera del soporte de $\phi(x)$. Por lo tanto, la suma en el teorema anterior es finita. En general, ϕ tiene un valor real, lo que implica que los p_k son reales.

Demostración. Para demostrar que se verifica las relaciones de escala, primero llamamos \tilde{p}_k a

$$\tilde{p}_k = \langle \phi, \phi_{1,k} \rangle_{L^2} = 2^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \overline{\phi_{1,k}(x)} dx.$$

Como $\{\phi_{1,k}, k \in \mathbb{Z}\}$ es base ortonormal de V_1 , podemos decir que

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{p}_k \phi_{1,k}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{p}_k 2^{\frac{1}{2}} \phi(2x - k).$$

Ahora llamamos $p_k = 2^{\frac{1}{2}} \tilde{p}_k$, entonces

$$p_k = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \overline{\phi(2x - k)} dx.$$

Y además tenemos que

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2x - k).$$

También, si reemplazamos x por $2^{j-1}x - l$ en ϕ

$$\phi(2^{j-1}x - l) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2^j x - 2l - k).$$

Y ajustamos el índice de la suma de la serie sustituyendo k por $k - 2l$

$$\phi(2^{j-1}x - l) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \phi(2^j x - 2l - (k - 2l)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \phi(2^j x - k).$$

■

Teorema 3.3. *Suponemos que $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ es un análisis de multiresolución con la función escala ϕ . Entonces, siempre que la relación de escala se pueda integrar por términos, se verifican las siguientes identidades*

1. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \bar{p}_k = 2\delta_{l,0}$
2. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |p_k|^2 = 2$
3. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k = 2$
4. $\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k} = 1$ y $\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k+1} = 1$.

Demostración. Para demostrar la primera identidad, primero utilizaremos la relación de escala $\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2x - k)$, entonces

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2x - k) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k 2^{\frac{1}{2}} \phi(2x - k)$$

y

$$\phi(x - l) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k 2^{\frac{1}{2}} \phi(2(x - l) - k) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k 2^{\frac{1}{2}} \phi(2x - 2l - k).$$

Llamamos $k' = k + 2l$, entonces

$$\phi(x - l) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \sum_{k' \in \mathbb{Z}} p_{k'-2l} 2^{\frac{1}{2}} \phi(2x - k').$$

Ahora, como vimos en el teorema 3.1 que $\{2^{\frac{1}{2}} \phi(2x - k)\}$ es base ortonormal de V_1 y usando la ecuación de Parseval, tenemos que

$$\langle \phi(x-l), \phi(x) \rangle = \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \overline{p_k}.$$

Como $\{\phi(x-k)\}$ es base ortonormal de V_0 ,

$$\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \overline{p_k} = \langle \phi(x-l), \phi(x) \rangle = \delta_{l,0} \Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \overline{p_k} = 2\delta_{l,0}.$$

La segunda identidad se obtiene al evaluar $l=0$, es decir,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \overline{p_k} = 2\delta_{0,0} \Rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} |p_k|^2 = 2.$$

Para la tercera identidad, integramos respecto a x la ecuación de la relación de escala, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2x-k) dx.$$

Si llamamos $t = 2x - k$ y $dx = \frac{dt}{2}$, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt.$$

Además, sabemos que $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt$ no puede ser igual a cero porque de lo contrario nunca podríamos aproximar las funciones $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \neq 0$ por funciones en V_j . Por tanto, el factor $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt$ a la derecha se puede cancelar con $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx$ de la izquierda y nos quedaría

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k = 2.$$

Para probar la cuarta identidad, tomamos la primera ecuación, y reemplazamos l por $-l$ para luego sumar sobre l , lo que obtendríamos es

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k+2l} \overline{p_k} = 2 \sum_{l \in \mathbb{Z}} \delta_{-l,0} = 2.$$

Ahora dividimos la suma sobre k en términos pares e impares:

$$\begin{aligned} 2 &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k+2l} \overline{p_{2k}} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k+1+2l} \overline{p_{2k+1}} \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} p_{2k+2l} \right) \overline{p_{2k}} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} p_{2k+1+2l} \right) \overline{p_{2k+1}}. \end{aligned}$$

Para las dos sumas internas, reemplazamos l por $l - k$, por tanto,

$$\begin{aligned} 2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{p_{2k}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} p_{2l} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{p_{2k+1}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} p_{2l+1} \\ &= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k} \right|^2 + \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k+1} \right|^2. \end{aligned}$$

Ahora llamamos $E = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k}$ y $O = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k+1}$ pudiendo reescribir la ecuación como $|E|^2 + |O|^2 = 2$. De la tercera propiedad, tenemos que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k = 2$ y dividiendo la suma en índices pares e impares, tenemos que $E + O = 2$. Estas dos ecuaciones para E y O solo tienen una solución para el caso cuando todos los p_k son números reales: $E = O = 1$ es decir,

$$E = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k} = 1 \quad \text{y} \quad O = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{2k+1} = 1. \quad \blacksquare$$

Ejemplos de funciones escalas

Un ejemplo de una función escala es la función $\text{sinc}(x)$, la función escala de *Shannon*, que viene definida como

$$\phi^{(Sha)}(x) := \text{sinc}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0, \\ \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Su gráfica se muestra en la Figura 3.1.

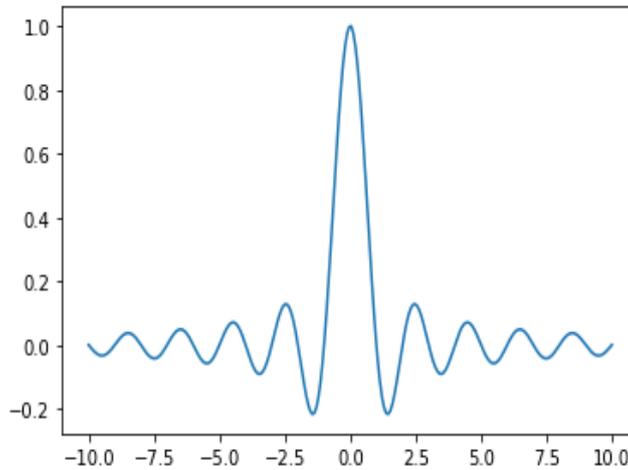


Figura 3.1: Gráfica de la función escala de *Shannon*.

Otro ejemplo de una función de escala es la función *Daubechies 12* (D12). Esta función no puede ser expresada de manera implícita o explícita, sino que se construye utilizando un conjunto de coeficientes conocidos como coeficientes de Daubechies para determinar su forma. En el caso de la función Daubechies 12, cuenta con 24 coeficientes, a diferencia de la función Daubechies 6, por ejemplo, que solo tiene 12 coeficientes, lo que significa que captura menos detalles de la señal. Su gráfica se muestra en la figura 3.2.

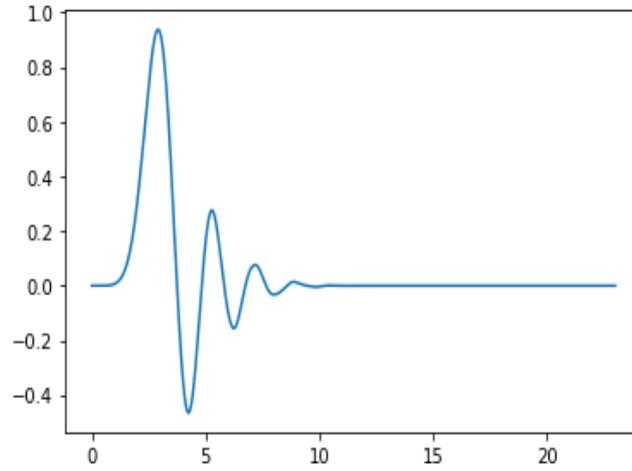


Figura 3.2: Gráfica de la función *Daubechies 12*.

3.1.2. La wavelet asociada y los espacios wavelet

Para llevar a cabo el algoritmo de descomposición en el caso general, debemos descomponer el espacio V_{j+1} en una suma directa ortogonal de V_j y su complemento ortogonal, que llamaremos W_j y necesitamos construir una función ψ cuyas traslaciones generen el espacio W_j (similar a lo que hicimos en el sistema de Haar). Una vez que se especifica la función ϕ , podemos utilizar la relación de escala para construir la función asociada ψ que genera W_j .

Teorema 3.4. *Supongamos que $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ es un análisis de multiresolución con la función escala*

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \phi(2x - k), \quad (3.1)$$

donde p_k son los coeficientes dados en el Teorema 3.2.

Sea W_j el espacio generado por $\{\psi(2^j x - k); k \in \mathbb{Z}\}$ donde

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{p_{1-k}} \phi(2x - k). \quad (3.2)$$

Entonces, $W_j \subset V_{j+1}$ es el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} .

Además, $\{\psi_{j,k}(x) := 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal para W_j .

Demostración. Veamos si el teorema se verifica para el caso $j = 0$ ya que después podremos extender el resultado a cualquier $j \in \mathbb{Z}$ utilizando la condición de escala. Para ello, debemos ver si se verifica lo siguiente:

1. El conjunto $\{\psi_{0,k}(x) = \psi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$ es ortonormal.
2. $\psi_{0,k}(x) = \psi(x - k)$ es ortogonal a V_0 para todo $k \in \mathbb{Z}$. Es decir, que W_0 está contenido en el complemento ortogonal de V_0 en V_1 .
3. Cualquier función en V_1 que sea ortogonal a V_0 se puede escribir como una combinación lineal de $\psi(x - k)$. Es decir, que W_0 contiene el complemento ortogonal de V_0 en V_1 .

Con las tres condiciones, demostraríamos que W_0 es el complemento ortogonal de V_0 en V_1 .

Para establecer la primera condición, vemos que

$$\psi_{0,m} = \psi(x - m) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{p_{1-k}} \phi(2(x - m) - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{p_{1-k}} \phi(2x - 2m - k).$$

Si llamamos $k' = 2m + k$, entonces $k = k' - 2m$

$$\psi_{0,m} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k' - 2m} \overline{p_{1 - k' + 2m}} \phi(2x - k') = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k'} \overline{p_{1 - k' + 2m}} 2^{\frac{1}{2}} \phi(2x - k').$$

Ahora, sabiendo que $\psi_{0,l}$ tiene la misma expresión que $\psi_{0,m}$ y usando la ecuación de Parseval, se tiene que

$$\langle \psi_{0,m}, \psi_{0,l} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{p_{1-k+2m}} p_{1-k+2l}.$$

Haciendo el cambio de índices $k' = 1 - k + 2m$ en esta serie y usando la primera identidad del Teorema 3.3, tenemos

$$\langle \psi_{0,m}, \psi_{0,l} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k' \in \mathbb{Z}} \overline{p_{k'}} p_{k'+2l-2m} = \delta_{m-l,0} = \delta_{m,l}.$$

Por tanto, el conjunto $\{\psi_{0,k}(x)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es ortonormal.

Para demostrar la segunda condición, es suficiente con probar que $\psi(x-m)$ es ortogonal a $\phi(x-l)$ para cada $l \in \mathbb{Z}$ ya que V_0 está generado por $\{\phi(x-l), l \in \mathbb{Z}\}$.

De la relación de escala del teorema 3.2, tenemos que

$$\phi_{0,l} = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \phi_{1,k}(x) = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} 2^{\frac{1}{2}} \phi(2x-k).$$

Y usando nuevamente la ecuación de Parseval, se tiene que

$$\langle \phi_{0,l}, \psi_{0,m} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k p_{1-k+2m} p_{k-2l}.$$

Veamos que la suma de la derecha es cero. Para verlo, primero examinamos el caso cuando $l = m = 0$, para ver el patrón de cancelación. En este caso, la suma nos quedaría

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k p_{1-k} p_k = \cdots - p_2 p_{-1} + p_1 p_0 - p_0 p_1 + p_{-1} p_2 + \cdots$$

que vemos que se van cancelando sucesivamente.

Para ver el caso general, nos fijamos que el término con $k = l + m - j$ para $j > 0$

$$(-1)^{l+m-j} p_{1-l+m+j} p_{m-l-j},$$

se cancela con el término $k = l + m + j + 1$, de nuevo con $j > 0$, que es

$$(-1)^{l+m+j+1} p_{m-l-j} p_{m+j+1-l} = -(-1)^{l+m-j} p_{m-l-j} p_{m+j+1-l}.$$

Para la tercera condición, necesitamos demostrar que cualquier elemento de V_1 es una combinación lineal de elementos de V_0 y W_0 , lo que implicaría que cualquier elemento de W_0 , el complemento ortogonal de V_0 en V_1 , es una combinación lineal de funciones de la forma $\psi(x-k)$. Entonces, debemos demostrar que para cada j que tenemos

$$\phi(2x-j) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(x-k) + b_k \psi(x-k).$$

Dado que $\{\phi(x-k), k \in \mathbb{Z}\}$ es ortonormal, las constantes a_k existen y están dadas por

$$\begin{aligned}
a_k &= \int \phi(2y - j) \overline{\phi(y - k)} dy \\
&= \int \sum_{l \in \mathbb{Z}} \phi(2y - j) \overline{p_l} \overline{\phi(2y - 2k - l)} dy \\
&= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \overline{p_l} \int \phi(2y - j) \overline{\phi(2y - 2k - l)} dy \\
&= \frac{1}{2} \overline{p_{j-2k}},
\end{aligned}$$

donde en la primera igualdad usamos la relación de escala y en la última igualdad se usa el hecho de que $\{2^{\frac{1}{2}}\phi(2y - j), j \in \mathbb{Z}\}$ es ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$.

Del forma similar, las constantes b_k , existen y están dadas por

$$b_k = \frac{1}{2} (-1)^j p_{1-j+2k}.$$

Así que debemos ver que

$$\phi(2x - j) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{p_{j-2k}} \phi(x - k) + (-1)^j p_{1-j+2k} \psi(x - k).$$

Usando las ecuaciones (3.1) y (3.2), esta ecuación es equivalente a

$$\phi(2x - j) = \frac{1}{2} \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} \left((-1)^{j+l} p_{1-j+2k} \overline{p_{1-l}} + \overline{j - 2k} p_l \right) \phi(2x - 2k - l).$$

Lo que quiere decir que, el coeficiente de $\phi(2x - 2k - l)$ debe ser cero a menos que $2k + l = j$. Por lo tanto, debemos demostrar que si $l = j - 2k$, entonces

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{1-j+2k} \overline{p_{1-j+2k}} + \overline{p_{j-2k}} p_{j-2k} = 2, \quad (3.3)$$

y si $l = j - 2k + t$ para $t \neq 0$, entonces

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^t p_{1-j+2k} \overline{p_{1-j+2k-t}} + \overline{p_{j-2k}} p_{j-2k+t} = 0 \quad (3.4)$$

para todo $t \neq 0$.

Si llamamos $\gamma = 1 - j + 2k$ y también llamamos $\gamma = j - 2k$ en la ecuación (3.3), la podemos reescribir como

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} \overline{p_\gamma} p_\gamma,$$

que es igual a 2 por la segunda propiedad del Teorema 3.3.

Para la ecuación (3.4), tenemos que diferenciar los casos cuando t es par o impar por separado. Si t es impar, es decir, $t = 2s + 1$, entonces la primera suma de la ecuación (3.4) se puede reescribir por un cambio de índice $k' = s + j - k$ a

$$\sum_{k' \in \mathbb{Z}} -p_{j-2k'+t} \overline{p_{j-2k'}},$$

que se cancela con la segunda suma.

Si t es par, es decir, $t = 2s$, entonces con el cambio de índices $k = -k' + j + s$ reescribimos la segunda suma a la forma

$$\sum_{k' \in \mathbb{Z}} p_{-j+2k'} \overline{p_{-j+2k'-t}}.$$

Si llamamos $\gamma = -j + 2k'$ para la suma anterior y llamamos $\gamma = 1 - j + 2k$ para la primera suma en la ecuación (3.4) podemos reescribirla como

$$\sum_{\gamma \in \mathbb{Z}} p_{\gamma} \overline{p_{\gamma-2s}},$$

que es igual a cero por la primera propiedad del Teorema 3.3. ■

Como el conjunto $\{\psi_{j-1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal para el espacio W_{j-1} , que es el complemento ortogonal de V_{j-1} en V_j , implica que $V_j = W_{j-1} \oplus V_{j-1}$. Luego, mediante sucesivas descomposiciones ortogonales obtenemos

$$\begin{aligned} V_j &= W_{j-1} \oplus V_{j-1} \\ &= W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus V_{j-2} \\ &\quad \dots \\ &= W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \dots \oplus W_0 \oplus V_0. \end{aligned}$$

Como hemos definido V_j para $j < 0$, podemos seguir como

$$\begin{aligned} V_j &= W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \dots \oplus W_0 \oplus W_{-1} \oplus V_{-1} \\ &\quad \dots \\ &= W_{j-1} \oplus W_{j-2} \oplus \dots \oplus W_{-1} \oplus W_{-2} \oplus \dots \end{aligned}$$

Los V_j están anidados y la unión de todos los V_j es el espacio $L^2(\mathbb{R})$. Por tanto, si $j \rightarrow \infty$, obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.5. Sea $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$ un análisis de multiresolución con la función escala ϕ . Sea W_j el complemento ortogonal de V_j en V_{j+1} . Entonces,

$$L^2(\mathbb{R}) = \cdots \oplus W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j.$$

En particular, cada $f \in L^2(\mathbb{R})$ se puede expresar únicamente como una suma $\sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k$, con $w_k \in W_k$ y donde los w_k son ortogonales mutuamente.

Equivalentemente, el conjunto de todas las wavelets, $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

El teorema establece que la suma infinita presente debe interpretarse como una aproximación mediante sumas finitas. En otras palabras, para cada función $f \in L^2(\mathbb{R})$, es posible aproximarla arbitrariamente cerca en la norma $L^2(\mathbb{R})$ mediante sumas finitas de la forma $w_{-j} + w_{1-j} + \cdots + w_{j-1} + w_j$, siempre que j sea lo suficientemente grande. Para valores grandes de j , las componentes W_j de una señal representan sus componentes de alta frecuencia, ya que W_j se genera mediante traslaciones de la función $\psi(2^j x)$, que vibra a altas frecuencias.

Ejemplos de wavelets asociadas

Retomando los ejemplos de funciones escala mencionados anteriormente, por un lado, la wavelet asociada a la función $\text{sinc}(x)$, conocida como la *wavelet de Shannon*, viene definida como

$$\psi^{(Sha)}(x) := \text{sinc}\left(t - \frac{1}{2}\right) - 2\text{sinc}\left(2\left(t - \frac{1}{2}\right)\right).$$

Su gráfica se muestra en la Figura 3.3.

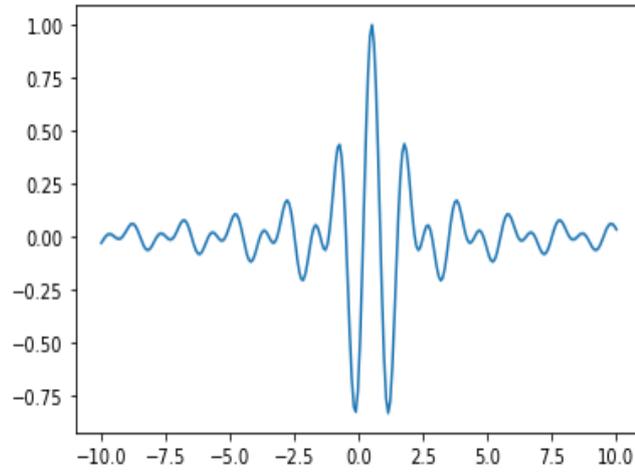
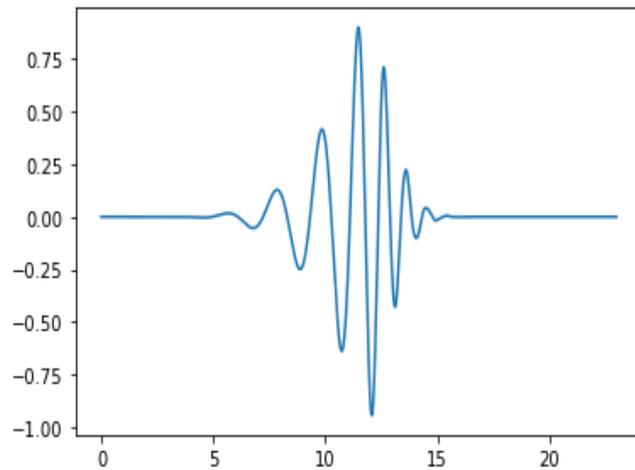
Por otro lado, la gráfica de la wavelet asociada a la función *Daubechies 12* (D12) se muestra en la Figura 3.4

3.1.3. Fórmulas de descomposición y reconstrucción

Supongamos que tenemos una señal f que ya se encuentra en uno de los espacios de aproximación, como V_j . En este caso, podemos utilizar dos bases ortonormales principales para representar f . La primera es una base natural de la función escala para V_j , denotada por $\phi_{j,k}$ con $k \in \mathbb{Z}$, como se define en el Teorema 3.1. En cuanto a esa base, tenemos

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}. \quad (3.5)$$

Dado que tenemos la descomposición de suma directa ortogonal $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$, también podemos usar la concatenación de las bases para V_{j-1}

Figura 3.3: Gráfica de la *wavelet de Shannon*.Figura 3.4: Gráfica de la *wavelet de Daubechies 12*.

y W_{j-1} , es decir, usamos $\{\phi_{j-1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\psi_{j-1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$, donde $\psi_{j,k}$ se define en el Teorema 3.4.

En relación con esa base ortonormal f tiene la forma

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j-1,k} \rangle \phi_{j-1,k} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j-1,k} \rangle \psi_{j-1,k}. \quad (3.6)$$

La fórmula de descomposición comienza con los coeficientes relativos a la primera base en la ecuación (3.5) y los utiliza para calcular los relativos a la segunda base en la ecuación (3.6).

$$\text{Descomposición: } \begin{cases} \langle f, \phi_{j-1,l} \rangle = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{p_{k-2l}} \langle f, \phi_{j,k} \rangle, \\ \langle f, \psi_{j-1,l} \rangle = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k p_{1-k+2l} \langle f, \phi_{j,k} \rangle. \end{cases} \quad (3.7)$$

De la fórmula de descomposición (3.7) y teniendo en cuenta que los $\phi_{j,k}$ son ortogonales entre si, se tiene que

$$\langle \phi_{j,k}, \phi_{j-1,l} \rangle = 2^{-\frac{1}{2}} \overline{p_{k-2l}} \text{ y } \langle \phi_{j,k}, \psi_{j-1,l} \rangle = 2^{-\frac{1}{2}} (-1)^k p_{1-k+2l},$$

y podemos escribir $\phi_{j,k}$ de la forma

$$\phi_{j,k} = \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{-\frac{1}{2}} \overline{p_{k-2l}} \phi_{j-1,l} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} 2^{-\frac{1}{2}} (-1)^k p_{1-k+2l} \psi_{j-1,l},$$

que vemos que es la ecuación inversa de la relación de escala.

Al tomar el producto interno en $L^2(\mathbb{R})$ de la ecuación anterior con f , obtenemos la fórmula de reconstrucción:

$$\text{Reconstrucción: } \begin{cases} \langle f, \phi_{j,k} \rangle = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} \langle f, \phi_{j-1,l} \rangle \\ \quad + 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{p_{1-k+2l}} \langle f, \psi_{j-1,l} \rangle. \end{cases}$$

Si usamos las versiones ortogonales de $\{\phi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ en lugar de $\{\phi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ y $\{\psi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ en lugar de $\{\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, la expansión de $f \in V_j$ en la ecuación (3.5) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{\frac{j}{2}} \langle f, \phi_{j,k} \rangle 2^{-\frac{j}{2}} \phi_{j,k} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^j \phi(2^j x - k) \end{aligned}$$

Del mismo modo, la ecuación (3.6) se puede reescribir como

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{j-1} \phi(2^{j-1} x - k) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{j-1} \psi(2^{j-1} x - k),$$

donde $a_k^{j-1} = 2^{\frac{j-1}{2}} \langle f, \phi_{j-1,k} \rangle$ y $b_k^{j-1} = 2^{\frac{j-1}{2}} \langle f, \psi_{j-1,k} \rangle$.

Los a_k^j 's se llaman coeficientes de tendencia y los b_k^j se llaman coeficientes de detalle. Por tanto, fórmulas de descomposición y reconstrucción se pueden reformular como

$$\text{Descomposición: } \begin{cases} a_l^{j-1} = 2^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{p_{k-2l}} a_k^j, \\ b_l^{j-1} = 2^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k p_{1-k+2l} a_k^j, \end{cases}$$

$$\text{Reconstrucción: } \left\{ a_k^j = \sum_{l \in \mathbb{Z}} p_{k-2l} a_l^{j-1} + \sum_{l \in \mathbb{Z}} (-1)^k \overline{p_{1-k+2l}} b_l^{j-1} \right.$$

Usando la base $\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ para ver una señal en su conjunto y usando la base $\{\phi_{j-1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\psi_{j-1,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ para ver las partes suavizadas y oscilatorias de la señal.

3.2. Ejemplo de análisis de una señal usando una wavelet continua

Retomamos el ejemplo de la señal mostrada en la Figura 2.17, donde en el capítulo anterior aplicamos el algoritmo utilizando funciones que presentaban discontinuidades. Ahora, abordaremos el mismo proceso, pero esta vez utilizando funciones continuas, específicamente la función *Daubechies 12* (D12) mencionada previamente¹.

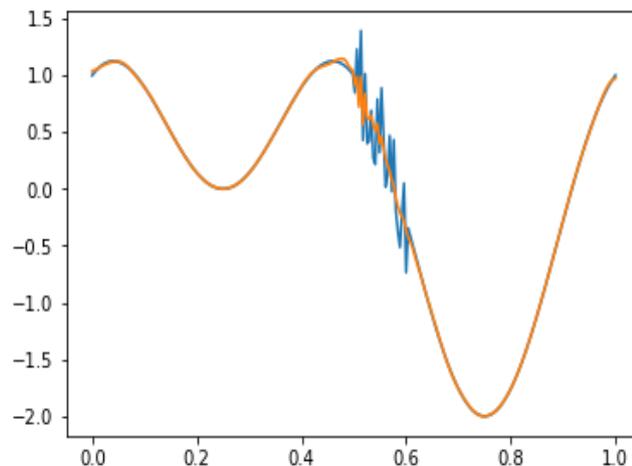


Figura 3.5: Gráficas de la señal con ruido y la señal limpia reconstruída con la ondícula de *Daubechies 12*.

Una vez reconstruida la señal, como se muestra en la Figura 3.5, notamos que además de reducir considerablemente el ruido, se logra una aproximación bastante precisa de la función original en las partes donde no había interferencia del ruido. Esto nos brinda una representación muy exitosa de cómo habría sido la señal antes de la interferencia del ruido.

¹ Para ver el código completo que genera los gráficos ver <https://colab.research.google.com/drive/1y1VSAAns-keTXbJ8D08t4LceXnrkF-cGm?usp=sharing>.

Conclusiones

En este trabajo hemos explorado los fundamentos de dos técnicas de análisis de señales: el análisis de Fourier y el análisis wavelet. A partir de un Análisis de Fourier más familiar (Capítulo 1), hemos estudiado herramientas basadas en funciones de escala y wavelets (Capítulos 2 y 3), que permiten la descomposición y reconstrucción de señales con el objetivo de eliminar el ruido no deseado.

La aplicación práctica de la teoría a ejemplos de señales reales ha sido la parte más interesante del trabajo. Para ello, hemos utilizado el lenguaje de programación Python debido a su amplia variedad de paquetes y su facilidad para visualizar datos, lo cual ha simplificado los cálculos y análisis.

Para el desarrollo de este trabajo, han tenido especial importancia los contenidos estudiados en las asignaturas de Medida e Integración, Análisis Espectral de Datos, Ecuaciones en Derivadas Parciales y Modelización.

Como posible investigación futura sugerimos la aplicación de la teoría aprendida a señales más complejas, como las utilizadas en la geofísica para estudiar las ondas generadas por los terremotos. Además, se podría explorar su aplicación en el procesamiento de imágenes, estudiando la compresión de datos, similar a lo realizado en el caso de JPEG 2000 [6].

En resumen, en este trabajo hemos proporcionado una base sólida para comprender y utilizar los algoritmos de análisis de señales estudiados, y hemos descubierto interesantes posibilidades de investigación futura en muchas áreas.

Bibliografía

- [1] Albert Boggess and Francis J. Narcowich. *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*. 2009, Second Edition.
- [2] Andrew Zhu. *Clean Up Data Noise with Fourier Transform in Python* [en línea] Disponible en: <https://towardsdatascience.com/clean-up-data-noise-with-fourier-transform-in-python-7480252fd9c9> [Consulta: 21-09-2022]
- [3] Christopher Schölzel. *Wavelet denoising with PyWavelets* [en línea] Disponible en: <https://notebook.community/CSchoel/learn-wavelets/wavelet-denoising> [Consulta: 13-06-2023]
- [4] Stephane Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way*. Academic Press. 1999.
- [5] Ingrid Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM. 1992.
- [6] JPEG 2000. *JPEG 2000: sistema de codificación de la imagen* [en línea] Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/JPEG_2000 [Consulta: 07-07-2023]

Haar Wavelet Transform: Fundamentals and Applications

Francisco Javier García González
 Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas
 Universidad de La Laguna
 alu0101242354@ull.edu.es

Abstract

Wavelet theory is valuable in a wide range of applications, such as image processing, data compression, signal processing, text analysis, and edge detection. The ability to analyze signals at different scales and frequencies with high temporal resolution has led to the development of more efficient and accurate algorithms in these areas. Wavelets possess key properties that make them ideal for signal analysis, including time and frequency localization, the ability to represent discontinuous signals, and optimal information compression. In this work, we dedicate our study to the foundational wavelet of the theory, the Haar wavelet. Based on this example, we develop the entire theory of wavelet construction through multiresolution analysis, and we have focused on the development of an efficient algorithm to decompose and reconstruct a signal that has been affected by noise, aiming to understand the behavior of the signal's trend and details in order to achieve a reconstruction that closely resembles the signal prior to the interference.

1. Fourier Analysis

The fundamental concept of Fourier analysis is based on the notion that any signal, periodic or not, can be represented as a combination of sine and cosine functions. These functions have different frequencies, amplitudes, and phases.

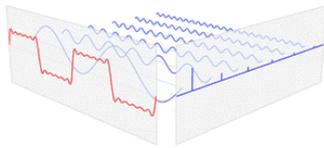


Figure 1: Transformation of data from the time domain to the frequency domain.

2. Wavelet Analysis: Haar Wavelet

In wavelet analysis, there are two main functions that play fundamental role: the scaling function ϕ and the wavelet ψ .

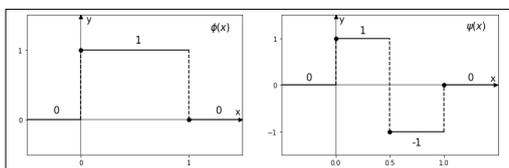


Figure 2: Haar scaling function and wavelet.

The steps required for the analysis are:

1. Having an approximation at level j of a signal f given by

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^j \phi(2^j x - k)$$

2. The decomposition algorithm decomposes f_j into

$$f_j = w_{j-1} + f_{j-1}$$

where

$$w_{j-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{j-1} \psi(2^{j-1} x - k) \quad y \quad f_{j-1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{j-1} \phi(2^{j-1} x - k).$$

The coefficients b_k^{j-1} and a_k^{j-1} represent the details and the trend of the signal. The algorithm will continue until the 0 level is reached, that is

$$f_j = w_{j-1} + \dots + w_0 + f_0.$$

3. The signal can now be filtered by modifying the wavelet coefficients b_k^j making them all zero or only those that are below a certain threshold.

4. Take the modified signal f_j , with the modified b_k^j and reconstruct it with the reconstruction algorithm as

$$f_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^j \phi(2^j x - k)$$

3. Multiresolution Analysis

To construct continuous wavelets, it is necessary a more sophisticated structure: The Multiresolution Analysis due to Mallat and Meyer [2]. An example of continuous scaling function and continuous wavelet is the Daubechies 12 (D12).

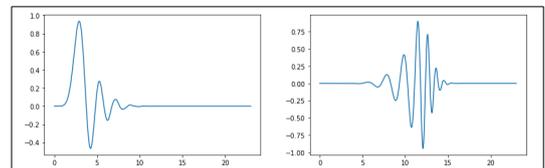


Figure 3: Daubechies 12 (D12) scaling function and wavelet.

Once we have a scaling function and a continuous wavelet, we apply the decomposition and reconstruction algorithm in a similar manner as we did before. Here follow examples where the algorithms are applied to a real signal:

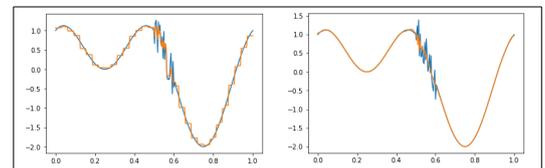


Figure 4: Comparison between using discrete (Haar) or continuous (D12) scaling functions and wavelets in the algorithm.

References

- [1] Albert Boggess and Francis J. Narcowich. *A First Course in Wavelets with Fourier Analysis*. 2009, Second Edition.
- [2] Stephane Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing: The Sparse Way*. Academic Press, 1999.