Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Kevin Herrera Dévora

Un estudio sobre la compresión de la demostración por inducción matemática con estudiantes del Grado en Matemáticas.

A study on understanding of Mathematical induction proof with undergraduate Mathematics students.

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Mayo de 2023

Dirigido por
Matías Camacho Machín

Matías Camacho Machín
Departamento de Análisis
Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

A mi tutor Matías, por sus sabios consejos y por guiarme en mis primeros pasos en la Didáctica de la Matemática.

A mi madre, mi padre y mi hermana, por apoyarme en todos mis retos y permitirme estudiar lo que deseaba.

A Nayra, por ser mi apoyo incondicional y parte fundamental de mi vida.

A mis compañeros de piso y amigos, Adri, Ancor y Javi, por nuestras largas conversaciones, matemáticas y cotidianas, y por hacerme un poco más díficil la vida fuera de casa.

A todos los profesores que he tenido durante mi vida estudiantil, en particular, a Amalia, por transmitirme su amor por las Matemáticas, y a Manu y Amalia, por contagiarme su pasión por la docencia.

A mis amigos, Adri, Kevin, Dani y Laura, por estar siempre ahí cuando se les necesitaba, pese a la distancia.

A Claudia y Paula, por brindarme su amistad y enseñarme esta maravillosa isla.

Kevin Herrera Dévora
La Laguna, 22 de mayo de 2023

Resumen · Abstract

Resumen

Este informe presenta una investigación en la que se utilizan diagramas para demostrar propiedades matemáticas, es decir, enunciados matemáticos simples representados mediante imágenes y diagramas accesibles sin lenguaje algebraico. Se trata de indagar sobre las dificultades conceptuales de dos grupos de estudiantes del grado en Matemáticas, uno de primer curso y otro de cuarto curso, en el aprendizaje de la prueba por inducción matemática. Se diseñaron un cuestionario y entrevistas basadas en tareas, con este propósito se concluyó que, en general, los estudiantes son capaces de conjeturar el resultado a probar, aunque los conocimientos en inducción que poseen está ligado al procedimiento formal y, además, que un gran número de participantes encuentra grandes dificultades para interpretar imágenes y visualizar. Por otro lado, la mayoría de los participantes considera que los diagramas pueden servir de apoyo para explicar la demostración pero no son válidos, por sí mismos, como demostración.

Palabras clave: *Inducción matemática – Demostración – Visualización*

Abstract

This report describes an investigation that used diagrams to proof mathematical properties, that is, simple mathematical statements represented by images and diagrams accessible without algebraic language. In this way, the conceptual difficulties of two groups of Mathematics undergraduate students, one in first grade and one in fourth grade, in learning to proof by mathematical induction, were investigated. Were designed a questionnaire and task-based interviews, with this purpose it was concluded that, in general, students are able to guess the result to proof, although their induction knowledge is linked to the formal procedure and, furthermore, a large number of participants find great difficulties interpreting images and visualizing. On the other hand, most of the participants consider that diagrams can serve as support to explain the proof but they are not valid, by themselves, as proof.

Keywords: *Mathematical Induction – Proof – Visualization*

Contenido

Introducción

Esta investigación constituye el Trabajo Fin de Grado, mediante el que se culminarán los estudios de grado de su autor, que le llevará a la obtención del título de Graduado en Matemáticas por la Universidad de La Laguna.

El trabajo consiste, en líneas generales, en llevar a cabo una adaptación de la investigación desarrollada por Josephine Relaford-Doyle y Rafael Núñez [36], con el fin de estudiar las dificultades conceptuales que presentan los estudiantes de Grado en Matemáticas en el aprendizaje de la demostración por inducción matemática. En particular, la investigación se centrará en comparar dichas dificultades entre dos grupos de estudiantes del Grado de Matemáticas de la Universidad de La Laguna. Por un lado, una muestra de alumnos del primer curso del Grado, los cuáles acaban de ser introducidos en los conocimientos necesarios para realizar este tipo de demostraciones y, por otro lado, un grupo de alumnos del último curso del Grado, quienes están más familiarizados con el llamado método de demostración por inducción matemática.

El trabajo está estructurado en 4 capítulos:

- En el capítulo 1, se presenta el problema de investigación. Aquí, a partir de un estudio detallado de la literatura reciente sobre este ámbito de investigación, se caracteriza el concepto de demostración por inducción, se debate sobre la importancia de la visualización en la demostración y en las Matemáticas en general. También se realiza una revisión bibliográfica con el objeto de estudiar los antecedentes de nuestro trabajo y, por último, se establecen los objetivos que guiarán la investigación.
- En el capítulo 2, se detalla la metodología seguida en la investigación. Está conformado por las fases de la investigación, la elección de los estudiantes, los instrumentos utilizados en la investigación y la forma en la que se recolectaron los datos y el análisis de los mismos.

- El tercer capítulo incorpora, tanto el análisis de los resultados obtenidos, como su discusión. Se presentan las respuestas de los estudiantes del primer y cuarto curso del Grado de Matemáticas, tanto del cuestionario, como de las entrevistas basadas en tareas realizadas.
- En el último capítulo se muestran las conclusiones de la investigación y algunas propuestas de mejora. Las conclusiones se organizaron en torno a los objetivos de la investigación y se llegó a conclusiones sobre la capacidad del alumnado para conjeturar, sobre las dificultades para la interpretación y visualización, sobre la visión ante las pruebas visuales, etc.

Posteriormente, se presenta la bibliografía consultada y un póster en lengua inglesa que resume el contenido del trabajo.

1

Problema de investigación

En este capítulo, en primer lugar se introducen algunos conceptos relacionados con la demostración por inducción matemática, como son algunas definiciones o la axiomática de los números naturales ($\mathbb{N}$). Luego, nos adentramos en la importancia de la visualización en las matemáticas y, en la enseñanza y aprendizaje de las demostraciones. Posteriormente, se exponen antecedentes teóricos del problema, incorporando investigaciones recientes. Por último, se presentan los orientadores que guiarán el proceso de investigación, es decir, el objetivo general, los objetivos específicos y las preguntas de investigación.

1.0.1. Nota de terminología

Antes de empezar, es necesario conocer algunas definiciones[1], así como algunas diferencias y similitudes entre términos que usaremos habitualmente.

En primer lugar, la **inducción matemática formal** es una técnica de demostración que se usa para comprobar la veracidad de un enunciado (teorema, proposición, lema, propiedad, etc) para todos los números naturales.

Realmente, la inducción formal nace de un pensamiento deductivo que luego se apoya en los axiomas de Peano (veáse 1.1), para concluir la veracidad de un enunciado y negar la posibilidad de contraejemplos. Por otro lado, el **razonamiento inductivo cotidiano** también parte de una base deductiva, en cambio, generaliza una regla a partir de un número muy limitado de observaciones, dando lugar a la posibilidad de que existan contraejemplos. Por ejemplo, un niño puede observar un coche, una motocicleta, una patineta y una bicicleta, y concluir que todos los vehículos circulan por tierra, pero pueden existir vehículos desconocidos para el niño, como el barco o el avión, que no circulan por tierra. Esta generalización inductiva nunca puede considerarse una prueba

[1] Solo tocaremos estos conceptos de manera superficial, para obtener una explicación mayor véase la página 4.

formal ni aceptable, ya que al observar un número finito de casos, siempre hay hueco para la existencia de contraejemplos. El razonamiento inductivo cotidiano es un proceso que realizamos todos diariamente, ya sea consciente o inconscientemente, pero la inducción formal es una técnica rigurosa que requiere una serie de conocimientos matemáticos para poder utilizarla con destreza .

Hablamos de la **inducción matemática informal**, como el razonamiento propio de los números naturales, en el que el observador generaliza una regla basada en los casos que ha observado, pero reconoce la necesidad de un enunciado, de manera que los contraejemplos no sean posibles. Lo llamamos informal porque no existe la necesidad de realizar una prueba formal del resultado.

1.1. Demostración por inducción matemática

La demostración matemática según Chambadal, en el "diccionario de las matemáticas modernas" [12], es "una serie de relaciones mediante la cual se pasa de los axiomas, o de teoremas ya establecidos, a un teorema dado". Esta definición no difiere de la que presenta Strobl en su diccionario "Matemática"[41], ya que la define como: "deducción a partir de sentencias (premisas), con la cual se gana una sentencia deducida verdadera y segura". Basta con hacer una rápida búsqueda en internet para encontrar definiciones similares, como "argumento utilizado para mostrar la veracidad de una proposición matemática. En las matemáticas modernas una demostración comienza con una o más declaraciones denominadas premisas, y prueba, utilizando las reglas de la lógica, que si las premisas son verdaderas, entonces una determinada conclusión debe ser también cierta" [14].

De Villiers [16] considera que en Matemáticas, la demostración no es solo verificar si un resultado goza del rigor suficiente para ser considerado correcto, sino que la demostración posee 6 funciones o roles: verificación, explicación, descubrimiento, sistematización, comunicación y desafío intelectual.

Habla de la prueba como verificación o convencimiento refiriendo la verificación empírica del enunciado que realizamos previa a la demostración, es decir, el convencimiento de la certeza del enunciado, para no pasar incontables horas tratando de demostrar algo que no es cierto.

La prueba también es un medio de explicación, de hecho, para muchos matemáticos es la parte más importante de las Matemáticas. Cuando existen resultados trivialmente ciertos, la función de la demostración no es la verificación sino la explicación.

Muchos teoremas se construyen a partir de la intuición y la prueba empírica, sin embargo, hay numerosos ejemplos donde se han descubierto o inventado resultados a partir de la deducción. Por eso, la demostración es un medio para explorar, analizar, descubrir y crear nuevos teoremas.

La prueba también es un medio de sistematización, consigue reunir diferentes resultados conocidos, definiciones y axiomas no relacionados entre sí para dar una perspectiva global y útil de todas las propiedades.

Por otra parte, la demostración es una forma de comunicación de resultados entre matemáticos, que tiene el proceso social de informar y difundir el conocimiento, creando interacción social entre las partes, que concluye, en ocasiones, en la identificación de errores o el rechazo al descubrimiento de contraejemplos.

Para los matemáticos, la demostración es un desafío personal. La sensación que genera la conclusión fructuosa de ella se puede comparar con la finalización de una maratón y la sensación posterior. La satisfacción tras la obtención de una demostración no se basa solo en resolver la duda sobre su certeza, sino en hallar la manera de conseguirlo.

Axiomas de Dedekind-Peano

Los axiomas de Dedekind-Peano, también conocidos como Axiomas de Peano, deben su nombre a Richard Dedekind y Giuseppe Peano. Dedekind fue un matemático alemán que trabajó en la teoría de números durante la segunda mitad del siglo XIX, definiendo los números reales a partir de los racionales y proponiendo en 1888 una axiomática de la aritmética de números naturales. Un año más tarde, Peano presentó unos axiomas que caracterizan los números naturales, los cuales se han usado desde entonces como base fundamental de diversos campos de las matemáticas, como la teoría de números o la aritmética ([37], [3]).

Los axiomas son los siguientes:

1. $1 \in \mathbb{N}$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists\, m \in \mathbb{N} : m = n + 1$. (A m se le suele llamar **sucesor**).
3. $\nexists\, n \in \mathbb{N} : n + 1 = 1$. (Esto es que el 1 no tiene sucesor).
4. Si $n, m \in \mathbb{N} : n + 1 = m + 1 \Rightarrow n = m$. (Si dos números tienen el mismo sucesor, entonces son el mismo número).
5. Si $1 \in S \wedge \forall n \in S, \exists\, n + 1 \in S \Rightarrow S = \mathbb{N}$.

Pese a que hemos considerado la axiomática anterior como base de nuestros argumentos, somos conscientes de que existe un debate en la comunidad matemática sobre la inclusión del 0 como el primer natural. ([17], [4])

Estos axiomas son usados para definir la suma, en particular el segundo de ellos. Además, el último de estos axiomas es conocido como "Principio de Inducción Matemática", ya que si nos detenemos a entender este axioma, llegaremos a la conclusión de que el procedimiento que realizamos al demostrar por inducción es exactamente el mismo que el enunciado del axioma.

Veamos ahora la definición de "inducción" o "demostración por inducción matemática". Clapham [13] lo define como "principio o método de demostración para proposiciones en las que aparece como variable un número natural, que se formula como sigue: Si tenemos asociada a cada número natural n una proposición $P(n)$, que puede ser verdadera o falsa, y se cumple:

1. $P(1)$ es verdadera.
2. Para todo número natural k, $P(k)$ implica $P(k+1)$.

Entonces, $P(n)$ es verdadera para todos los números naturales n".

Se pueden encontrar definiciones similares, en [15] la definen como "método que se utiliza para demostrar que una determinada afirmación es verdadera para todos los números naturales. [...] primero se demuestra que la afirmación es verdadera para el primer número natural, que suele ser el 1. Luego, se asume que la afirmación es verdadera para algún número natural arbitrario, digamos n. A partir de esto, se debe demostrar que la afirmación también es verdadera para el siguiente número natural, que es $n+1$. Si puedes hacer esto, entonces has demostrado con éxito que la afirmación es verdadera para todos los números naturales".

Tal y como se ha indicado, el método de demostración por inducción se usa, en general, para probar propiedades que cumplen los números naturales (normalmente identificado como n). Ahora nos adentraremos un poco en los tipos de inducción existentes.

En primer lugar, como se señaló en el apartado 1.0.1, la inducción matemática formal, es una técnica de demostración que se usa para comprobar la veracidad de un enunciado (teorema, proposición, lema, propiedad, etc) que se cumple para todos los números naturales.

En esta prueba se distinguen dos pasos claramente diferenciados: el **paso base o inicial**, en él se muestra que el enunciado se cumple para un caso inicial, donde normalmente tratamos con $n = 1$; y el **paso inductivo**, aquí se muestra que si el enunciado se cumple para un valor arbitrario $n = k$, entonces se cumple para el caso siguiente $n = k + 1$. Cuando se consigue demostrar estos dos pasos, se concluye por los axiomas de Dedekind-Peano que el enunciado es cierto para todos los números naturales (para más información sobre estos axiomas, véase 1.1).

Además, la inducción formal tiene dos componentes, una componente procedimental o procesual y una componente conceptual ([5], [22], [26]).

Cuando hablamos de componente procedimental, nos referimos a la capacidad de comprender y realizar los procedimientos que nos llevan a la finalización de la demostración correctamente, es decir, realizar adecuadamente el paso base y el paso inductivo (usualmente se refiere a llevar a cabo correctamente las manipulaciones algebraicas).

Por otro lado, la componente conceptual requiere una mayor compresión del método y de la axiomática de los números naturales. Esto conlleva entender por qué es necesario el paso base y el inductivo, así como por qué son suficientes para concluir la veracidad del enunciado para todos los números naturales.

La diferencia existente es que la compresión conceptual no está vinculada con ningún procedimiento en particular, solo implica una compresión general de que esta técnica implica la validez del paso base y una invarianza de la relación de casos sucesivos. Normalmente, el paso inductivo resulta ser la parte más complicada de ejecutar y menos arraigada en los estudiantes, ya que es un proceso que no se puede memorizar ni mecanizar.

En muchas ocasiones, cuando los profesores explican la inducción matemática a sus alumnos, la presentan como un dominó. Refieren que el método de la inducción matemática funciona igual que el efecto dominó, pues ocurre después de que caiga la primera ficha, pero bajo ciertas condiciones. Tenemos que saber que las fichas están lo suficiente cerca unas de otras como para que al caer una, derribe a la siguiente. Pensando esto podemos concluir que el efecto dominó tendrá efecto si: derribamos la primera ficha y, al caer una ficha cualquiera, entonces esta derriba a la siguiente. De hecho, esta es la misma idea que sigue el método de demostración por inducción matemática.

1.2. Visualización y demostración en matemáticas

Aunque la visualización en el aprendizaje surgió casi a la par que las Matemáticas en sí, hasta no hace mucho no existían investigaciones sobre el uso del pensamiento visual en el aprendizaje de las Matemáticas. Estas investigaciones han ido creciendo desde la década de los 70, promovida por Bishop ([7] y [8]) y Clements ([9] y [10]) cuando estudiaron las preferencias de estudiantes en relación con la visualización en las Matemáticas y como influían sus capacidades espaciales en esas preferencias.

La visualización se puede concebir como interior y exterior al individuo, Presmeg [32] definió la visualización interior como "imágenes mentales visuales que representa información visual o espacial" ([33], p.3), y la visualización exterior como "inscripciones como símbolos, diagramas, información en pantallas de computadora, o cualquier representación con un componente visual" ([33], p.3).

Arcavi [2] a partir de diferentes definiciones de varios autores concluyó: "la visualización es la habilidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión de los dibujos, imágenes, diagramas, ya sea mentalmente, en papel o apoyado por herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y razonamientos avanzados" (p.217).

Krutetskii [25] argumentó que sin análisis lógico no hay matemáticas, pero que el uso de "soportes visuales" es opcional, ya que la lógica determina la fuerza del procesamiento matemático y la visualización determina el tipo de procesamiento. Krutetskii clasificó una serie de alumnos según su tipo de pensamiento en relación a una entrevista basada en resolución de problemas. Consideró tres niveles: el pensamiento lógico-verbal, pensamiento visual-pictórico y el pensamiento equilibrado. Por otro lado, cuando Presmeg [30] analizó la preferencia sobre la visualización de alumnos de Bachillerato, también los clasificó en niveles parecidos, llegando a la conclusión que no todos los estudiantes con capacidades espaciales son capaces de utilizar la visualización en su pensamiento matemático.

En relación a la preferencia por la visualización en matemáticas, Presmeg [31] diseñó instrumento de procesamiento matemático con 3 partes (A, B y C). Presentó la parte A y B de este instrumento ante alumnos de secundaria y la parte B y C (partes con mayor dificultad) para profesores de matemáticas. De esta manera, comparó la capacidad de visualización entre alumnos y profesores en la parte B y la de cada uno de los grupos independientemente con las partes A y C. Los resultados no revelaron diferencias significativas entre los estudiantes ni entre los profesores, pero sí entre estudiantes y profesores. Los estudiantes necesitaban una mayor visualización de los problemas para conseguir resolverlos correctamente. Por otro lado, se halló que las preferencias por la visualización seguían una distribución gaussiana con una leve asimetría positiva en todas las poblaciones (esto es, una leve preferencia por no visualizar).

De acuerdo con Clements [10], los estudiantes que obtienen peores notas en Matemáticas, tienden a aprender mejor cuando se trabaja manipulativamente y los estudiantes que obtienen mejores notas en Matemáticas les resulta más sencillo entender cuando se trabaja simbólicamente. Estos resultados refuerzan la hipotésis de Salomon [38], que dice que los estudiantes con altas capacidades Matemáticas no se encuentran cómodos cuando se les proporciona ayuda visual, ya que son capaces de resolver el problema sin ella, en cambio, los estudiantes con menores capacidades, les favorece significativamente esta ayuda visual. Horwitz [23], obtuvo resultados similares en un estudio con alumnos universitarios, concluyendo que la visualización de los problemas influye positivamente en su resolución en alumnos con bajas capacidades, pero no en alumnos con altas capacidades, ya que les interfiere en la resolución, provocandoles dudas.

Vladimirski [43] estudió la efectividad del uso de imágenes en la resolución de ejercicios y concluyó que los profesores de matemáticas no utilizan de manera efectiva los diagramas e imágenes porque los alumnos carecen de capacidad visual, ya que esta destreza no se trabaja lo suficiente en la edad temprana. Hoy en día, esto ha cambiado, en los centros de educación infantil y primaria se motiva al aprendizaje mediante el uso de las imágenes. Sin embargo, como se ha podido observar en las prácticas externas realizadas, por parte del autor de esta memoria, en un centro de educación secundaria en La Laguna (Tenerife, España), los diagramas no siempre resultan de ayuda para la resolución de ejercicios, pues muchos alumnos no son capaces de visualizar y transferir los datos del problema en el diagrama, por tanto centran su esfuerzo en tratar de comprender el significado de la imagen, en muchos casos llegando a frustrarse y abandonando la resolución del ejercicio. Esto también lo observó Vladimirski, asegurando que los alumnos tienen gran dificultad para identificar los conceptos matemáticos incrustados en figuras no estándar o habituales.

Este invariante, tras más de medio siglo, nos debe hacer reflexionar en qué se está haciendo de manera incorrecta en la educación para que los alumnos no sean capaces de visualizar de manera útil. Esta situación puede tener una causa cultural y/o de aprendizaje. Presmeg [31], mostró gráficamente que no hay una escasez de personas capaces de visualizar, pero sí hay escasez de personas que usen la visualización como herramienta (fundamental o complementaria) en la resolución de problemas.

En cuanto a la importancia de la visualización en la demostración, se entiende visualizar como razonar visualmente. Es por esto que visualizando un enunciado, con el fin de demostrarlo, llegamos a nueva información, ideas, conceptos, métodos de demostración, etc. Además, este proceso surge de forma casi inmediata, clara y sin mucho esfuerzo. Por eso, para visualizar se requieren habilidades relacionadas con la interpretación de información figural y con el procesamiento visual, así se deja ver el papel explicativo y de descubrimiento que posee la demostración ([8], [35]).

De la misma forma, la visualización favorece la fase exploratoria de la demostración, desarrolla la intuición e influye en la identificación de conceptos. También, explorar ejemplos ayuda a ver el funcionamiento del teorema, proporcionando ideas rigurosas para la demostración formal. Aunque las ideas visuales e intuitivas normalmente no son consideradas rigurosas por los matemáticos, la intuición, la visualización y el rigor pueden ir de la mano [35].

La mayoría de los matemáticos no consideran que las demostraciones visuales sean válidas, así como los estudiantes de matemáticas tampoco las consideran, tal y como exploró Jerez [24]: "prácticamente la totalidad de los estudiantes no considera como rigurosos los argumentos deductivos visuales, aunque señalan que son correctos" (p.54). Aunque en muchos casos las "demostraciones visuales" carecen de rigor matemático, consideramos que en otros muchos casos son totalmente explicativas y válidas. Cuando hablamos de inducción, existen abundantes teoremas que dan pie a la visualización y al uso de gráficas y, por tanto, también a la demostración visual. Consideramos válida una demostración visual por inducción cuando se es capaz de desarrollar el proceso algebraico de forma gráfica, esto es, realizar el caso base y el paso inductivo. En la práctica sucede igual cuando tratamos de demostrar algebraicamente que cuando lo hacemos visualmente, el caso base resulta más sencillo y directo de ejecutar que el paso inductivo. Se considera correcto el paso inductivo cuando desde el diagrama del caso n se consigue llegar al caso $n+1$, sin modificar el anterior.

Desde nuestro punto de vista, el razonamiento y el aprendizaje en matemáticas está estrechamente ligado a la visualización de los conceptos, por eso la educación infantil y primaria debería utilizar técnicas especiales que favorezcan el uso de la visualización, proponiendo, de manera gradual, diagramas no convencionales y complejos. Además, tratar de usar imágenes en los distintos tipos de explicaciones y fomentar el uso de la visualización en distintos escenarios, siempre que sea apropiado. De esta manera, el estudiante se familiarizaría con la visualización y cuando el profesor use apoyos visuales en sus explicaciones, no le resultará un hecho ocasional o extraño. Así, se motivará el uso de la visualización en la resolución autónoma de problemas y en el proceso de aprendizaje. Por otra parte, también debemos aprender a usar la visualización, al menos, como apoyo a la demostración, sobre todo en teoremas relacionados con el análisis matemático, la geometría y la topología.

1.3. Antecedentes

Autores como Baker [5], han documentado las dificultades que presentan los estudiantes de todos los niveles en el aprendizaje de la demostración mediante inducción matemática. En concreto, estos estudios revelan que los estudiantes conocen y, en muchos casos, dominan el procedimiento de este tipo de demostración. Realizan la demostración del caso base y el paso inductivo, pero normalmente no adquieren una comprensión conceptual. La realidad, es que desconocen la necesidad de estos pasos y por qué permiten concluir que un enunciado es cierto para todo el conjunto de los números naturales.

Sin embargo, parece existir una contradicción, pues algunos psicólogos expertos en el desarrollo en la edad infantil, como Smith [40] y Baroody [6], afirman que niños de 5 años son capaces de participar en una versión informal de la inducción matemática sin haber recibido los conocimientos necesarios para realizar el procedimiento formal.

Esta contradicción puede deberse a la dificultad existente para investigar la inducción matemática, pues los estudiantes, e incluso algunos profesores, poseen grandes dificultades para separar la parte procedimental de la conceptual en los problemas que se les presentan. A su vez, el escaso número de estudios que confirman la capacidad de los niños para participar en una versión informal de la inducción matemática no termina de convencer de que comprendan la imposibilidad de contraejemplos y determinar que no se trata de un razonamiento inductivo cotidiano.

Desde el movimiento, mal llamado de la “Matemática Moderna”, de renovación en la enseñanza de las matemáticas surgido durante los años 70 del pasado siglo, se ha intentando profundizar en el rigor lógico y en la comprensión (reforzando de forma inherente la asimilación de los conceptos y la visualización de las Matemáticas), contraponiendo los aspectos puramente teóricos. Incluso, en estos últimos años, se han priorizado los aspectos manipulativos y operativos.

De esta manera, el método más usado a día de hoy es la enseñanza basada en la resolución de problemas (“problem solving”), para poner en práctica lo aprendido y que los alumnos no vean las Matemáticas como compartimentos cerrados. Todo esto es lo que hoy está tan presente en los currículos básicos de enseñanza, denominado como aprendizaje activo y competencial. Este tipo de enseñanza pone el énfasis en los procesos de pensamiento, de aprendizaje y en la toma de contenidos matemáticos.

Actualmente, la educación matemática está centrada en que el alumno sea capaz de manipular objetos matemáticos, ejercite su creatividad y su propia capacidad mental mediante trabajo autónomo guiado, reflexione sobre sus procesos de pensamiento y aprendizaje (con el fin de mejorarlo), adquiera confianza y se prepare para los nuevos retos tecnológicos y científicos. La finalidad de esto es que tome las riendas de su aprendizaje, pierda el miedo a las Matemáticas, siendo capaz de disfrutarlas y fomentando su conocimiento en lugar de solo su estudio.

Autores como Gónzalez, Garcés y Grimaldy [19], consideran que el empleo de diagramas en el planteamiento y resolución de problemas, ayuda a modificar el esquema de enseñanza algebraico tradicional y ayuda a la aprehensión al conocimiento matemático.

Además, consideran que la poca frecuencia con la que se interpretan, visualizando, los conceptos matemáticos, así como las propiedades y relaciones, impide que los alumnos se impregnen de esta herramienta para interpretar los resultados, ya que al apoyarse plenamente en recursos algebraicos no son conscientes del significado de los resultados obtenidos.

Es lógico que, como concluye Jerez [24], los estudiantes sienten que poseen una mayor comprensión de las Matemáticas, cuando comprenden por qué un resultado es cierto, pues le ven una utilidad y llegan a visualizar su sentido. Sin embargo, los alumnos rara vez optan por una demostración gráfica (visual), así como por la visualización de los problemas.

Por otra parte, aunque muchos alumnos dicen conocer la inducción matemática, la realidad es que cuando se les pregunta por ello no saben contestar nada más que “es una prueba con pasos” [22]. Después de presionar la respuesta, algunos estudiantes admiten ver el paso inicial como innecesario y que lo realizan para satisfacer la regla. Los estudiantes no interiorizan ni se llegan a plantear de que trata el método que están repitiendo sin comprender.

La comprobación del caso inicial es una parte fundamental del método de demostración por inducción, es como pensar que el efecto dominó puede llevarse a cabo sin derribar la primera ficha (1.1). Además, existen diversos enunciados que no se cumplen para $n = 1$, por ejemplo la prueba por inducción de la desigualdad mostrada en 1.1. Es importante señalar que para estos enunciados también es necesario comprobar el caso base ($n = 3$), que además puede ayudar a hacerse una idea del patrón que se sigue.

$$n < 2^{n-1} < n! \quad para\ \mathbb{N}, \quad n \geq 3. \tag{1.1}$$

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos ha sido abordado por numerosos investigadores. Se han obtenido importantes resultados en la búsqueda de una forma de enseñar a razonar, de modo que el alumno sea capaz de crear sus propias estrategias de resolución a partir de sus concepciones. Algunos de estos investigadores han sido Polya [34]; Schoenfeld [39]; Godino y Recio [11]; Álvarez, Alonso y Gorina [1]; quienes han profundizado en la forma en que los estudiantes resuelven los problemas matemáticos.

Investigadores como Harel y Sowder [21], Haya [20] o Jerez [24], han registrado el bajo nivel en la compresión y elaboración de demostraciones matemáticas por parte de los estudiantes, así como la gran cantidad de alumnos que escogen comprobaciones empíricas en lugar de demostraciones formales.

Sin embargo, todavía queda mucho camino por recorrer en cuanto a la investigación relativa a las dificultades presentes en el aprendizaje de las técnicas de demostración. Algunos autores critican ciertos libros de texto que no dan la suficiente importancia al proceso de aprendizaje de las demostraciones, centrándose únicamente en demostrar aquellos teoremas que enuncian. Otro problema es que los profesores suelen calcar las demostraciones extraídas de los libros, sin realizar la necesaria adaptación didáctica que facilite la absorción del método de demostración, las técnicas usadas, etc.

Además, en los currículos de educación secundaria no se menciona, en ninguno de los niveles, técnicas de demostración ni tipos de razonamiento, aunque si se le da un papel importante a la capacidad de argumentación del alumno, algo que parece un poco contradictorio, ya que la argumenación no es una tarea sencilla y está fuertemente ligada al razonamiento. Solo en el currículo de bachillerato se introducen estos términos, aunque la realidad dentro del aula es que los profesores pasan por alto esta parte de los contenidos, con el único fin de que los alumnos lleguen preparados, con los conocimientos y contenidos necesarios, a la selectividad. Esto desencadena en que aquellos alumnos que optan por grados de ciencias puras, como Matemática, Física o incluso alguna Ingeniería, lleguen al Grado universitario sin ni tan siquiera conocer los tipos de demostraciones existentes.

A día de hoy, el consenso sobre la necesidad de enseñar a demostrar va en aumento y tal y como plantea el Consejo Nacional de Profesores de Matemática de Estados Unidos (NCTM), *"el razonamiento y la demostración matemáticos proporcionan modos potentes de desarrollar y codificar conocimientos sobre una amplia variedad de fenómenos. Las personas que razonan y piensan analíticamente tienden a percibir patrones, estructuras o regularidades [...] y conjeturan y demuestran"*.

Desde nuestro punto de vista, la enseñanza de la demostración, ya sea deductiva, inductiva o cualquier otro método, es vital en el desarrollo del razonamiento lógico de la persona. De hecho, diariamente trabajamos con pensamientos de razonamiento inductivo aunque pase desapercibido ante nuestros ojos. Consideramos que los currículos de bachillerato deberían reforzar este punto para que los alumnos, al menos, conozcan los métodos de demostración y sean capaces de realizar pruebas sencillas.

La inducción matemática formal es un método que resulta complicado de aprender, tanto para estudiantes en general como para futuros profesores según autores como Movshovitz [28] y Stylianides et al [42]. En particular, los estudios han demostrado que los estudiantes son capaces de, con relativa facilidad, emular los procedimientos necesarios para realizar la demostración, aunque carecen de la comprensión conceptual del método.

Como la inducción consiste en realizar un procedimiento específico, cuando se presentan dificultades, es díficil analizar si resultan ser procedimentales o conceptuales. Para tratar de detallar la naturaleza de estas dificultades, Relaford-Doyle y Núñez [36] presentaron las imágenes de la Figura 1.1 a dos grupos de estudiantes, unos con conocimientos universitarios de inducción matemática y otros que no lo tenía.

En las imágenes se muestran casos particulares de las igualdades que se pretenden demostrar, pero sin presentar ejemplos numéricos. Además, en la investigación presentan la Figura 1.2 en conjunto, planteándose con las siguientes preguntas de investigación esos mismo autores:

- ¿Cómo interpretan la imagen los estudiantes que no están familiarizados con la inducción formal? ¿Reconocen la necesidad del enunciado que representa? Si no es así, ¿qué obstáculos conceptuales les impiden hacerlo?
- ¿Cómo utilizan la imagen los estudiantes que están familiarizados con la inducción formal para justificar el enunciado? ¿Son capaces de utilizar su conocimiento en inducción en este nuevo formato de representación, o su conocimiento de inducción está totalmente ligado al procedimiento algebraico?

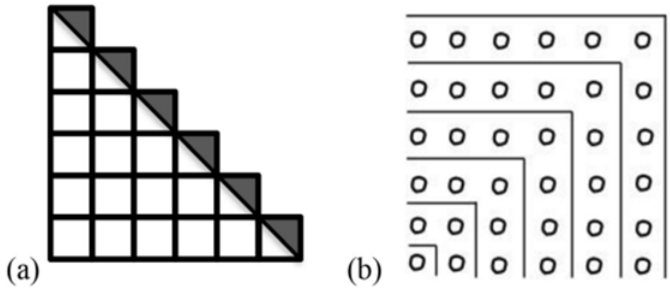


Figura 1.1. Pruebas visuales extraídas de [36]. (a):$1+2+3+...+n = (n^2+n)/2$. (b):$1+3+5+...+(2n-1) = n^2$

Utilizaron por tanto, la demostración visual de la Figura 1.2 para investigar la compresión conceptual de los estudiantes, evaluando hasta qué punto depende la comprensión de la inducción del procedimiento algebraico, ya que esta figura es la demostración del paso inductivo.

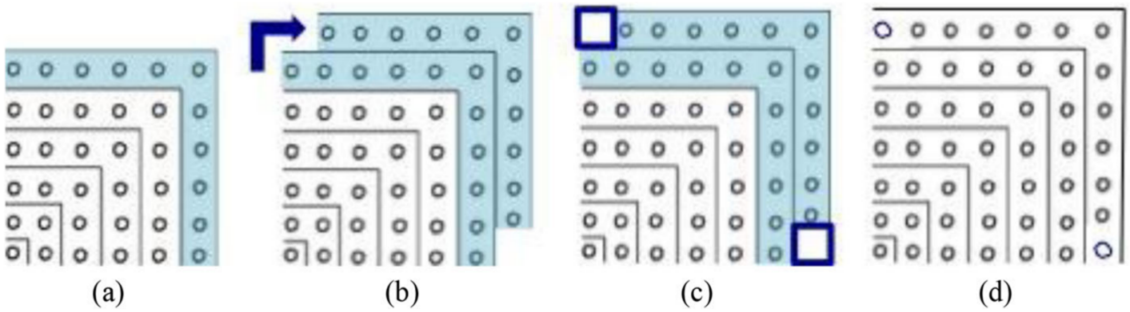


Figura 1.2. Demostración del paso inductivo de la Figura 1.1 (b) extraída de [36].

1.4. Preguntas de investigación y objetivos del trabajo

Como hemos visto, en la mayoría de las investigaciones analizadas relacionadas con la inducción, se han centrado en la parte procedimental de la demostración o en el aprendizaje inductivo cotidiano y las pocas veces que han indagado en la parte procesual, lo han enfocado en estudiantes de distintos grados que no tienen la prueba como parte fundamental de sus objetivos de aprendizaje.

En este estudio se pretende indagar en los aspectos conceptuales del aprendizaje de la inducción matemática, utilizando recursos gráficos y sin olvidarnos de la parte procedimental, en estudiantes del Grado de Matemáticas, en el que la prueba y el rigor son partes fundamentales de los objetivos de aprendizaje y las competencias que deben alcanzar los estudiantes.

Para lograrlo, se adaptará el estudio realizado por Relaford y Núñez [36] y se tratará de responder a las siguientes preguntas de investigación:

- ¿Son los estudiantes capaces de generalizar casos a partir de imágenes?
- ¿Son los participantes capaces de admitir como verdadero un enunciado sin necesidad de demostrarlo?
- ¿Realizan, los estudiantes, adecuadamente la demostración formal por inducción matemática?
- ¿Son capaces, los estudiantes, de realizar el paso inductivo, de la demostración por inducción, de forma gráfica?
- ¿Aceptan los estudiantes la imposibilidad de contraejemplos para números grandes?
- ¿Consideran los participantes las demostraciones visuales como válidas? ¿Usarían diagramas como apoyo a la explicación de una demostración?
- ¿Consideran los estudiantes el paso base como necesario para concluir una demostración por inducción ?

De esta manera, el objetivo general de la investigación consiste en:

- Analizar las dificultades que presentan los estudiantes universitarios en la compresión del concepto de inducción matemática.

Para alcanzar este objetivo, se han propuesto varios objetivos específicos que nos ayuden al desarrollo de la investigación:

- Determinar la visión de los estudiantes ante la validez de las pruebas visuales.
- Estudiar los problemas que presentan en la visualización de las Matemáticas y su importancia en la resolución de problemas y apoyo en las demostraciones.
- Indagar en la capacidad de participar en versiones informales de la demostración por inducción de los estudiantes.
- Conocer la importancia que dan los estudiantes al procedimiento formal de la demostración por inducción.
- Analizar si la compresión del método de demostración por inducción está ligada al procedimiento algebraico y evaluar el progreso del pensamiento conceptual de los estudiantes del Grado de Matemáticas.

2

Metodología

En este capítulo se detallan las componentes metodológicas que se llevaron a cabo para conseguir los objetivos propuestos. Se ha dividido en cuatro apartados: en el primero, se describirán las fases de la investigación; el segundo, está dedicado a describir a los participantes del estudio, así como la formación recibida; en el tercero, se detallan los instrumentos usados en la investigación, y el último describe el proceso de recolección y procesamiento de los datos.

2.1. Organización de la investigación: Fases

La investigación se dividió en 6 fases de trabajo bien diferenciadas que se detallarán a continuación.

En la primera fase se llevó a cabo una revisión de la literatura especializada sobre la demostración en general y sobre el método de inducción en particular. También se estableció el marco conceptual de la investigación y los objetivos específicos.
La segunda fase se dedicó a diseñar un cuestionario con pruebas visuales de una proposición matemática.
En la tercera fase se implementó el cuestionario con dos grupos de estudiantes: un grupo de primer curso del Grado de Matemáticas y el otro de cuarto curso del Grado. Además, se analizaron los resultados de los cuestionarios.
Posteriormente, en la cuarta fase, se seleccionaron cuatro estudiantes de cada grupo con el objetivo de realizar con ellos entrevistas basadas en las resolución de tareas [27].
Durante la quinta fase, se analizaron y compararon los resultados de las entrevistas.
Finalmente, en la sexta fase, se elaboró el informe de la investigación, se establecieron las conclusiones y las propuestas de mejora.

2.2. Participantes

En el estudio participaron un total de 115 estudiantes del Grado de Matemáticas de la Universidad de La Laguna, de los cuales 96 están matriculados en el primer curso, concretamente en la asignatura de carácter básico “Cálculo Diferencial de una Variable Real” y los 19 estudiantes restantes, están matriculados en cuarto curso, concretamente aquellos que han escogido la asignatura optativa “Matemáticas para la Enseñanza”.

La elección de las asignaturas fue intencional. En primero, se escogió “Cálculo Diferencial de una Variable Real”, dado que en esta asignatura se introduce la demostración mediante inducción matemática. Por otro lado en cuarto, se seleccionó “Matemáticas para la Enseñanza”, teniendo en cuenta que los alumnos que eligen esta asignatura, se supone que tienen una alta predisposición a profesores de matemáticas.

Cabe destacar que, los alumnos del primer curso habían sido formados en el desarrollo formal de demostraciones por inducción matemática durante las primeras semanas de curso académico, tanto en inducción recursiva como no recursiva y en todos los niveles de dificultad: problemas de igualdades, problemas de inecuaciones y problemas de divisibilidad [22]. El alumnado de cuarto curso posee un largo bagaje en este tipo de demostraciones, pues aunque no exista ninguna otra asignatura en el plan de estudios que tengan entre sus contenidos la inducción, es una técnica de demostración muy usada en las diferentes áreas de las Matemáticas, en Álgebra (segundo curso), Matemática Discreta (segundo curso), Teoría de Grupos (tercer curso) o Inferencia Estadítica (tercer curso), entre otras.

En la tabla 2.1 se detalla el género de los participantes por curso.

Género	**1°**	**4°**	**Total**
Masculino	43	9	52
Femenino	46	10	56
No binario	7	0	7

Tabla 2.1. Género de los participantes

En cuanto a la edad, por un lado, los participantes de primero oscilan entre los 17 y 23 años, concentrándose en los 18 ($\bar{x} = 18'52$, $\sigma = 1'129$). Por el otro lado, los participantes de cuarto oscilan entre los 21 y 24, concentrándose en los 21 ($\bar{x} = 21'21$, $\sigma = 0'976$).

En cuanto al curso más alto en que se habían matriculado, se obtuvieron 70 participantes en primero, 20 de segundo, 5 de tercero, 19 de cuarto y 1 no responde. Claramente, todos los participantes de cuarto estaban matriculados en cuarto como curso superior, pero los datos restantes motiva conocer el número de matriculas en la asignatura de primero. Se halló 61 participantes de primera matricula, 7 de segunda, 13 de tercera y 15 no responden.

2.3. Instrumentos de investigación: Descripción

Para el análisis de los resultados obtenidos, se utilizaron dos instrumentos de investigación, un cuestionario con varios items y una entrevista basada en la resolución de tareas (task-based interview) [27].

2.3.1. El cuestionario

El cuestionario estaba constituido por 5 preguntas en las que se pedían a los participantes sus datos personales y 8 preguntas o ítems propias de la investigación.

Los datos personales fueron género, edad, curso más alto del que se habían matriculado, número de veces que se habían matriculado de esa asignatura y, por último de forma opcional, se preguntaba su nombre y apellidos.

Las 8 preguntas de investigación se dividieron en 3 bloques. En estos bloques están comprendidas aquellas preguntas que buscan recabar un mismo tipo de información. (Véase el Anexo A.1)

Bloque 1: Deducción y prueba de la identidad general a partir de argumentos visuales

En este bloque están incluidas las preguntas 1, 2, 3 y 6.

En la primera pregunta se presenta un problema para demostrar por inducción, incluyendo dos imágenes (adaptadas de [29]), correspondientes a los casos $n = 3$ y $n = 4$ y con dos igualdades para completar.

El segundo ítem pide que representen la imagen correspondiente y escriban el caso siguiente al que se mostraba en la pregunta anterior, es decir, $n = 5$. Con estas preguntas se trata de analizar si los estudiantes son capaces de entender e interpretar la imagen.

La tercera pregunta trata de conocer si los alumnos son capaces de extraer la igualdad general a partir de las imágenes anteriores.

El sexto ítem trata de conocer si los participantes son capaces de realizar el paso inductivo, de la demostración formal, de forma gráfica. Esto es, relacionar el diagrama del caso n con el del caso $n+1$.

Bloque 2: Prueba (formal e informal) y comprobación

En este bloque se incluyen los ítems 4, 5 y 7.

La cuarta pregunta trata de ver si los estudiantes son capaces de negar la existencia de contraejemplos sin haber demostrado la igualdad, analizando así su capacidad de participar en una versión informal de la inducción matemática.

El quinto ítem pone a prueba su capacidad procedimental mediante la realización formal y algebraica de la prueba por inducción mateática de la ecuación general hallada en la pregunta 3.

La séptima pregunta trata de ver si han interiorizado la igualdad y son capaces de usarla correctamente.

Bloque 3: Aceptación de la demostración gráfica

En este bloque incluimos la octava y última pregunta , que trata de conocer la visión de los estudiantes ante la validez de las demostraciones visuales, así como si consideran útil el uso de imaágenes y diagramas como apoyo a la explicación de las demostraciones.

El problema que se aborda es un problema de inducción recursiva en igualdades, considerado el más sencillo según Harel [22]. La relativa dificultad que presenta el cuestionario está en la interpretación de las imágenes.

Se presentan en lo que sigue las respuestas que se esperaban obtener para cada una de las preguntas, organizadas en sus correspondientes bloques.

Bloque 1

En la primera pregunta los participantes debían identificar los cuadrados de dimensión 3×3 y 4×4, respondiendo de esta manera 3^2 y 4^2, para la primera y la segunda imagen, respectivamente.

Para la segunda pregunta, se esperaba que se dibujara siguiendo el patrón de las imágenes anteriores, dibujando un cuadrado de dimensión 5×5, acompañado de la identidad $1+2+3+4+5+4+3+2+1 = 5^2$, tal y como se muestra en la imagen 2.1.

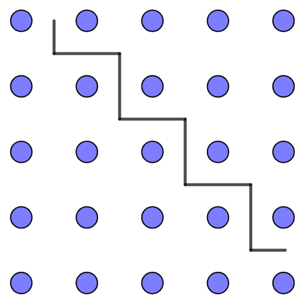


Figura 2.1. Respuesta esperada a la pregunta 2.

Para la pregunta 3, se esperaba que, mediante la interpretación de las imágenes y las respuestas a las preguntas anteriores, se respondiera:

$$1+2+3+\ldots+(n-1)+n+(n-1)+\ldots+3+2+1 = n^2 \tag{2.1}$$

El sexto ítem pide relacionar gráficamente el caso n con el $n+1$, la respuesta no es única, ya que existen diversas maneras de hacerlo, una de ellas es la realizada en la Figura 2.2. Se puede apreciar, dibujado de azul, el caso n y se muestra, de negro, los puntos que se deben añadir al caso anterior para obtener el caso $n+1$.

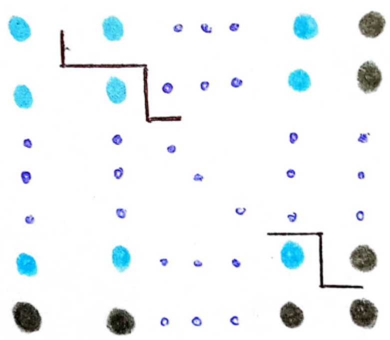


Figura 2.2. Ejemplo de respuesta para la pregunta 6.

Bloque 2

En relación con este bloque se tiene que, en el cuarto ítem, se pone a prueba la capacidad del estudiante para participar en una inducción informal, de esta manera, se asume que son capaces de participar aquellos estudiantes que respondan que no existe ningún caso que no cumpla la identidad general.

En la pregunta 5 se pide una demostración formal de 2.1, esta se vería de la siguiente forma:

Demostración. Queremos demostrar que:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 1 = n^2 \tag{2.2}$$

Lo demostraremos por inducción:
Veamos el caso inicial $n = 1$:

$$1 = 1^2 \tag{2.3}$$

Supongamos cierto para $n = k$. Es decir:

$$1 + 2 + \ldots + (k-1) + k + (k-1) + \ldots + 2 + 1 = k^2 \tag{2.4}$$

Comprobemos para $n = k + 1$:

$$1 + 2 + \ldots + (k-1) + k + (k+1) + k + (k-1) + \ldots + 2 + 1 = (k+1)^2 \tag{2.5}$$

De 2.4 se sigue:

$$k^2 + (k+1) + k = (k+1)^2 \tag{2.6}$$

Agrupando términos llegamos a:

$$k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 \tag{2.7}$$

■

En la séptima pregunta, se llegaba fácilmente al resultado 153^2, usando la igualdad 2.1.

Bloque 3

El octavo ítem, era de opinión personal y buscaba indagar en la visión de los participantes hacia las pruebas visuales. Por tanto, no existen respuestas correctas o incorrectas.

(Véase el Anexo A.1 para más detalles.)

2.3.2. Las entrevistas basadas en tareas

Tal y como señalan Maher y Sigley [27], una entrevista de este tipo (task-based interview) es "una entrevista en la que un sujeto o grupo de sujetos hablan mientras trabajan en una tarea o conjunto de tareas matemáticas" (p. 579). Goldin [18], añade que "es una forma particular de entrevista clínica, está diseñada para que los entrevistados interactúen no solo con el entrevistador y, a veces, con un grupo pequeño, sino también con un entorno de tareas cuidadosamente diseñado para los propósitos de la entrevista".

En nuestro caso, tratan de concretar la información obtenida en los cuestionarios suministrados, resumiendo las preguntas realizadas y poniendo el foco sobre los bloques 1 y 3.

Las entrevistas constan de 3 partes diferenciadas. En la primera parte se les entrega a los estudiantes una tarea (Anexo A.2) con dos identidades numéricas expresadas gráficamente y una serie de preguntas relacionas con estas imágenes. Posteriormente, se realiza unas preguntas, algunas relacionadas con la actividad, y otras más generales. En la segunda parte de las entrevistas, se indaga sobre sus respuestas al cuestionario, con el fin de clarificar las respuestas. Principalmente, las cuestiones se centraron en las preguntas 4, 6 y 8 del cuestionario. Por último, se les entrega otra tarea (Anexo A.3), de nuevo con dos identidades numéricas gráficas y las mismas preguntas que en el primer caso.

<u>Tarea 1</u>

En la primera de las tareas, se puede apreciar los cuadrados en la parte derecha de la igualdad y teniendo en cuenta las líneas oblicuas separativas se llega a las identidades numéricas:

$$1 + 3 + 1 = 1^2 + 2^2$$

$$1 + 3 + 5 + 3 + 1 = 2^2 + 3^2$$

De la misma manera, la igualdad para el caso siguiente quedaría:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 5 + 3 + 1 = 3^2 + 4^2$$

Acompañado por la imagen 2.3.

Al realizar el diagrama correspondiente a este caso, el estudiante ya debería darse cuenta del patrón que se sigue y ser capaz de identificar que se trata de la suma de los primeros $n + 1$ números impares y como resultado se obtiene el cuadrado de n y de $n + 1$. Así serían capaces de escribir la igualdad general:

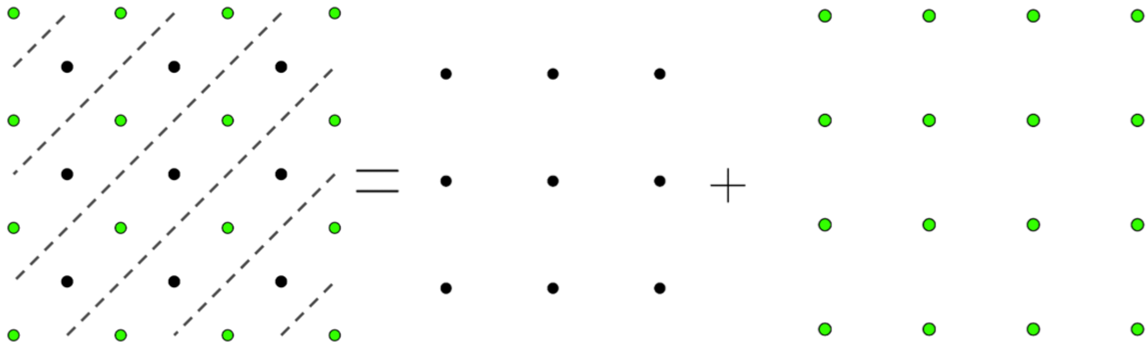


Figura 2.3. Respuesta esperada para la segunda pregunta.

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) + (2n - 1) + \ldots + 3 + 1 = n^2 + (n + 1)^2$$

Cuando hallaban la igualdad general, se les preguntaba 3 cosas:

1. Si te dijera que existen números muy grandes que no cumplen la igualdad, ¿Qué me dirías?
2. Entonces, ¿crees que la igualdad es cierta? ¿Cómo lo demostrarías? ¿Crees que se puede demostrar gráficamente?
3. ¿Qué entiendes por inducción? ¿Para qué sirve? ¿En que se basa?

La primera pregunta trata de indagar sobre la capacidad de participar en una versión informal de la inducción, esto es, ver si a partir de tres casos particulares y después de generalizar la igualdad son capaces de negar la posibilidad de contraejemplos. La respuesta se valoraba de 0 a 5 en base a la tabla 2.4.

La segunda pregunta, trata de hacer reflexionar al estudiante sobre la veracidad general de la igualdad. En cualquier caso se pregunta por como demostrarían su hipótesis, buscando que respondan que usarían inducción, en caso afirmativo, y que buscaran un contraejemplo, en caso negativo. Finalmente, se pregunta por su creencia sobre la posibilidad de demostrarlo gráficamente.

En la tercera pregunta, se indagaba sobre el significado de la demostración por inducción, así como su uso y el proceso que se sigue.

Tras responder estas tres cuestiones, se pide que continúen con la pregunta 4 de la tarea, para posteriormente realizarles una última pregunta:

4. ¿Cómo explicarías a un compañero que no sabe nada sobre matemáticas, de manera sencilla, el significado de una demostración por inducción? ¿Crees que las imágenes ayudan a entender la demostración?

Puntuación	Criterio	Respuesta de muestra
0	Sin resistencia, acepta claramente la existencia de contraejemplos	"Eso tiene sentido, lo creo"
1	Muy poca resistencia, declara la probabilidad de contraejemplos	"Puede ser, puede darse"
2	Inseguro o neutral a la existencia de contraejemplos	"No lo sé, no estoy seguro"
3	Algo dudoso de la existencia de contraejemplos	"Parece que el patrón debería mantenerse, pero cuando llega a números grandes, podría darse"
4	Muy dudoso de la existencia de contraejemplos	"No lo creo si no me lo muestras, me parece muy raro"
5	Rechazo completo de la existencia de contraejemplos	"Eso es imposible, no tiene sentido"

Figura 2.4. Tabla de puntuación a la existencia de contraejemplos.

Revisión del cuestionario

En la segunda parte de la entrevista se entregaba el cuestionario que habían realizado previamente para que lo revisasen y se familiaricen de nuevo con las preguntas. Después de hacerlo, se busca aclarar aspectos que no han quedado claros al revisar las respuestas iniciales. Las preguntas estaban centradas en la pregunta 4 (creencia sobre la veracidad de la igualdad previa a la demostración), la pregunta 6 (relación gráfica entre el caso n y el caso $n+1$) y en la pregunta 8 (validez de las demostraciones gráficas).

Tarea 2

En la última parte de la entrevista, se entrega al alumnado entrevistado una segunda tarea (Anexo A.3) con otras dos identidades gráficas. En este caso, se busca que los estudiantes interpreten las siguientes identidades:

$$2 + 3 + 4 = 3^2$$

$$3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 5^2$$

De esta manera, el caso siguiente sería $n = 4$, formaría un cuadrado 7×7, tal como se representa en 2.5 , siguiendo el diagrama, el mismo patrón:

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 7^2$$

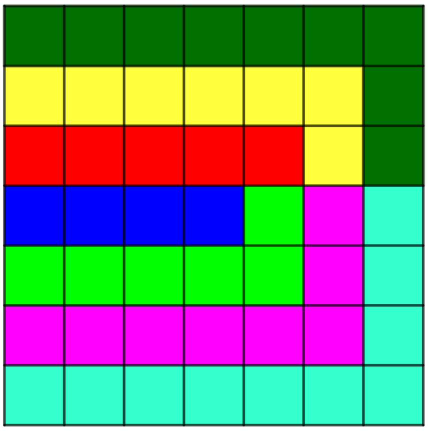


Figura 2.5. Respuesta esperada para la segunda pregunta.

Con estos tres casos, el estudiante debería ser capaz de llegar al caso general:

$$n + (n + 1) + \ldots + (3n + 2) = (2n - 1)^2$$

Equivalentemente

$$\sum_{i=n}^{3n-2} i = (2n - 1)^2$$

Al terminar la tercera pregunta, se les realiza las mismas dos primeras preguntas que se realizan en la primera parte de la entrevista (2.3.2) y posteriormente se le anima a continuar con la última pregunta.

De manera aleatoria, se pidió a algunos de los entrevistados que realizaran la demostración por inducción de la identidad general de la primera tarea.

2.4. Recolección y análisis de los datos

En el caso del cuestionario, la muestra tomada entre los estudiantes fue aleatoria y voluntaria. Los 96 alumnos de primero, fueron aquellos que asistieron a la clase magistral impartida el miércoles 30 de noviembre de 2022 y representan un 66,2 % de los alumnos matriculados en la asignatura. Los 19 alumnos de cuarto, fueron aquellos que asistieron a la clase magistral impartida el martes 15 de noviembre de 2022 y representan el 95 % de los alumnos matriculados en la asignatura.

Para manejar y analizar los datos fácilmente, se decidió enumerar a los participantes según iban acabando los cuestionarios. De esta manera, a cada alumno de cuarto se le asignó un número del 1 al 19, y a los de primero un número del 1 al 96. Además, se le añadió la letra A a los estudiantes de cuarto y la B a los de primero, resultando, por ejemplo, los alumnos A4 o B37. También, se fue marcando en cada cuestionario la hora a la que lo entregaban finalizado, para su posterior estudio.

Con respecto a la entrevista, se seleccionaran 8 estudiantes basádose en el tipo de respuestas dadas en el cuestionario. Se escogieron 4 alumnos de primero y 4 de cuarto para realizar la entrevista de forma anónima y voluntaria. Fueron seleccionados, después de analizar sus respuestas a las preguntas 4, 6 y 8, de forma que aquellos alumnos que su respuesta no consideramos suficientemente clara, fueron elegidos. Se trataban de respuestas diferentes a las respuestas mayoritarias o especialmente originales. Los alumnos escogidos fueron: A8, A9, A10, A18, B6, B31, B53 y B69. Se pidió que utiliaran lápices de colores, bolígrafos y regla para registrar sus respuestas en el papel. Las entrevistas fueron realizadas entre el 27 de abril de 2023 y el 8 de mayo de 2023.

Para analizar los datos se utilizaron distintos programas estadísticos. Se resumieron las respuestas de los estudiantes en hojas de cálculo de Microsoft Excel, utilizándolo conjuntamente con el software SPSS para el estudio descriptivo y se usó RStudio para el estudio inferencial de los datos. Para la generación de los gráficos estadísticos se uso Python.

3

Resultados y discusión

En este capítulo se presentará el análisis de los resultados obtenidos, primeramente desde un punto de vista cuantitativo y posteriormente cualitativo. Para el estudio inferencial se tomará $\alpha = 0'05$ como nivel de significación, es decir, los test de hipótesis tendrán un nivel de confianza del 95 %.

3.1. Cuestionarios

En relación con el tiempo dedicado a la realización de los cuestionarios, hubo diferencias significativas entre los grupos (estudiantes de 1°: $\bar{x} = 29'08$ min, $\sigma = 7'739$ min; estudiantes de 4°: $\bar{x} = 19'84$ min, $\sigma = 3'665$ min, Prueba Levene para igualdad de varianzas F=12'951, p≅0'000, Prueba t para igualdad de medias con varianzas desconocidas pero distintas, t=7'688, gl=46'367, p≅0'000). Como es lógico, los estudiantes de primer curso tardaron considerablemente más tiempo en realizar los cuestionarios que los estudiantes de cuarto curso, pues estos participantes acababan de aprender los fundamentos de la demostración por inducción, además de estar menos familiarizados con la visualización y las matemáticas universitarias .

Análisis de las respuestas al bloque 1

Para el análisis de la segunda pregunta se considera la representación como la parte (a) y la suma como la parte (b) de la pregunta.

1.- Un matemático dibuja las siguientes imágenes para tratar de probar una igualdad. Basándote en las imágenes, completa las 2 igualdades siguientes:

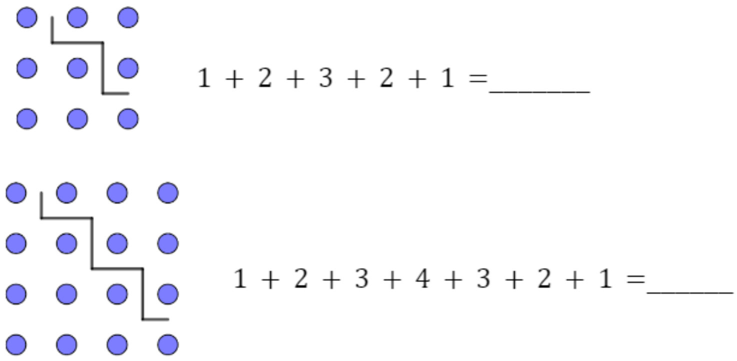


Figura 3.1. Imágenes asociadas al ítem 1.

14/96 (14’6 %) estudiantes de 1° curso contestaron 3^2 y 4^2, frente a 7/19 (36’8 %) estudiantes de 4°, concluimos que existen diferencias significativas entre los porcentajes (Test de Fisher, R=0’2967, I.C=[0’0879, 1’048], p=0’04482).

2.- Representa la imagen para el caso siguiente y escribe la igualdad resultante.

En la parte (a), 93/96 (96’9 %) estudiantes de 1° y 18/19 (94’7 %) estudiantes de 4° dibujaron correctamente el caso $n = 5$, no existen diferencias significativas entre ambos porcentajes (Test de Fisher, R=1’7127, I.C=[0’0311, 22’748], p=0’5195). Por otro lado, en la parte (b) 82/96 (85’42 %) estudiantes de 1° y 11/19 (57’9 %) estudiantes de 4° escriben la igualdad $1{+}2{+}3{+}4{+}5{+}4{+}3{+}2{+}1 = 5^2$, existen diferencias significativas entre ambos porcentajes (Test de Fisher, R=4’19, I.C=[1’2347, 13’981], p=0’00999).

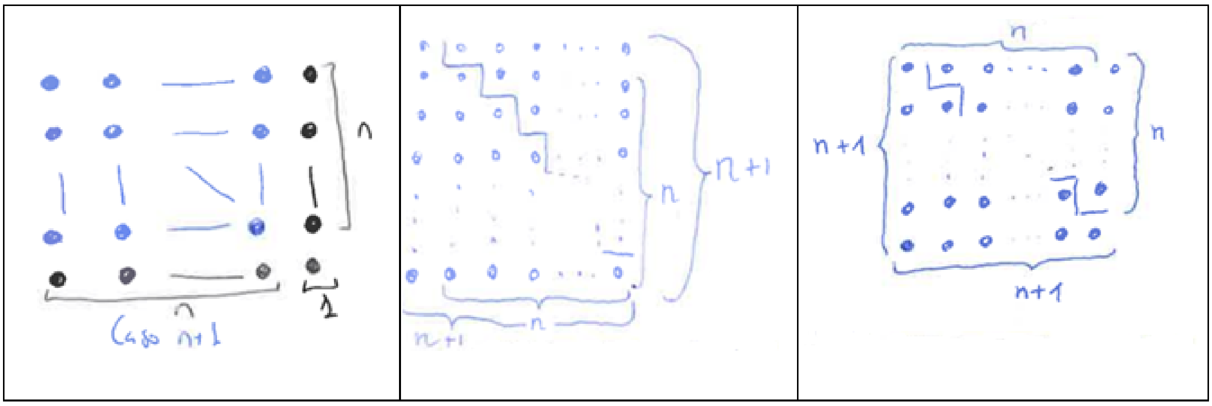
Al comparar las respuestas de la primera y la segunda pregunta, se puede apreciar que, en general, los alumnos que utilizan la imagen en la pregunta 1 (respondiendo 3^2 y 4^2), también usan la imagen en la segunda pregunta (respondiendo 5^2 como resultado de la suma).

3.- ¿Cómo sería la igualdad para el caso general?

No se encuentran diferencias significativas entre los porcentajes de alumnos que escriben correctamente la igualdad para el caso general (80/96 estudiantes de primero y 18/19 estudiantes de cuarto, Test de Fisher, R=0’2799, I.C=[0’006, 2’045], p=0’2984).

6.- Relaciona el diagrama del caso n con el diagrama del caso $n+1$ haciendo uso de las imágenes de la pregunta 1.

Esta pregunta muestra quién comprende el proceso inductivo de manera gráfica. Se hallaron diversos tipos de respuestas: alumnos que dibujan y relacionan correctamente, alumnos que solo dibujan pero no crean una relación, alumnos que solo explican la relación pero no dibujan, alumnos que dibujan y relacionan (o no) casos particulares correctamente, alumnos que dibujan y/o relacionan mal y alumnos que no responden. En esta ocasión nos centraremos solo en aquellos alumnos que dibujan y relacionan correctamente, 34/96 (35'4 %) estudiantes de primero y 9/19 (47'4 %) estudiantes de cuarto dibujan y relacionan correctamente, estos porcentajes no son significativamente diferentes (Test de Fisher, R=1'156, I.C=[0'439, 3'237], p=0'824). Se considera "dibujar y relacionar correctamente" respuestas como 3.2.



(a) (b) (c)

Figura 3.2. Respuestas de los participantes A3, B70 y B83 a la pregunta 6.

Análisis de las respuestas al bloque 2

4.- ¿Es cierta la igualdad para todos los casos o existe algún caso que no la cumpla?

No hay diferencias significativas entre los porcentajes de estudiantes que realizan una inducción informal, habiendo respondiendo 80/96 (83'3 %) y 15/19 (78'95 %) estudiantes de primero y cuarto, respectivamente, sin dudas sobre la veracidad de la igualdad (Test de Fisher, R=1'3298, I.C=[0'284, 4'966], p=0'7405). Por tanto, parece que los estudiantes, tanto del primer curso como del último, son capaces de participar en versiones informales de la inducción.

5.- Prueba por inducción la igualdad del apartado 3.

En esta pregunta no encontramos diferencias significativas entre los porcentajes de estudiantes que ejecutan correctamente la demostración[1]. 60/96 (62'5 %) y 14/19 (73'7 %) de los estudiantes de primero y cuarto, respectivamente, realizaron correctamente la demostración (Test de Fisher, R=0'5977, I.C=[0'155, 1'9465], p=0'438).

En la pregunta anterior, es interesante también analizar los porcentajes de estudiantes que omiten la comprobación de la veracidad del caso base. 5/91 (5'2 %) y 3/19 (15'8 %) de los estudiantes de primero y cuarto, respectivamente, omitieron la comprobación del caso base en la demostración formal. En esta ocasión, no se encuentran diferencias significativas entre los porcentajes (Test de Fisher, R=0'2973, I.C=[0'051, 2'101], p=0'1249). Aunque la estadística inferencial no aprecia diferencias, descriptivamente se observa que el porcentaje de alumnos del último curso que omite la comprobación del caso base es mayor, esto se puede deber a la confianza que poseen en este tipo de demostraciones, considerando este paso como trivial. Al saltarse un paso vital del proceso de prueba, se deja ver la falta de compresión sobre el concepto de demostración por inducción.

7.- ¿Cúal es el resultado de la siguiente suma? $\displaystyle\sum_{k=1}^{153} k + \sum_{j=1}^{152} j =$

56/96 (58'3 %) y 15/19 (78'95 %) estudiantes de primero y cuarto, respectivamente, contestaron usando la fórmula ya probada, esto es, respondiendo 153^2. No se aprecian diferencias significativas entre los porcentajes (Test de Fisher, R=0'376, I.C=[0'084, 1'30], p=0'1223).

Análisis de las respuestas al bloque 3

8.- ¿Consideras que los diagramas o imágenes utilizados constituyen una demostración válida? ¿Por qué? ¿Se lo explicarías a un compañero apoyándote en los diagramas? ¿Por qué?

En esta pregunta distinguimos las respuestas sobre la aceptación o negación de los diagramas como demostraciones válidas y las respuestas sobre el uso de los diagramas como apoyo a la explicación.

[1] Entendemos que se realiza correctamente la demostración cuando se verifica la veracidad del caso inicial y se desarrolla correctamente el paso inductivo mediante mecanismos algebraicos.

23/79 (29'11 %) estudiantes de primero y 6/18 (33'3 %) estudiantes de cuarto consideran que los diagramas pueden constituir una demostración válida. Por otro lado, 67/69 (97'1 %) estudiantes de primero y 16/17 (94'11 %) estudiantes de cuarto usarían los diagramas como apoyo en las explicaciones. No se encuentran diferencias significativas en los porcentajes (Test de Fisher, R=0'823, I.C=[0'248, 3'01], p=0'778 y Test de Fisher, R=2'07, I.C=[0'03, 42'15], p=0'488). Se puede observar que existe una tendencia por no considerar las demostraciones gráficas como válidas, aunque en general, los alumnos agradecen que se usen diagramas e imágenes como apoyo en las explicaciones.

En la tabla 3.1 se resumen los resultados obtenidos en los cuestionarios. En ella se explicitan los porcentajes de participantes por curso que responden de acuerdo al criterio.

Pregunta	Criterio	Porcentaje de 1°	Porcentaje de 4°
1	Realiza la suma interpretando la imagen	14'6	36'8
2	Representa correctamente el caso $n = 5$	93'6	94'7
	Escribe la igualdad, para $n = 5$, usando la imagen	13'5	36'8
3	Escribe la igualdad general correctamente	83'3	94'7
4	Niega la existencia de contraejemplos	83'3	73'7
5	Realiza correctamente la demostración formal	62'5	73'7
	Omite el caso inicial de la demostración	5'2	15'8
6	Dibuja y relaciona casos consecutivos	35'4	47'4
7	Realiza la suma usando la proposición	58'3	78'9
8	Considera válidas las demostraciones visuales	29'1	33'3
	Usaría imagenes como apoyo a la explicación de la demostración	97'1	94'1

Tabla 3.1. Porcentaje de participantes por pregunta y curso

Como respuesta a las preguntas de investigación, si revisamos las respuestas del primer bloque (3.1), en las respuestas de los dos primeros ítems permiten conjeturar que los participantes no son capaces reconocer la importancia de los cuadrados que se forman en las imágenes, sin embargo, la tercera pregunta presenta ver que sí, puesto que la mayoría de los estudiantes logra encontrar la igualdad general. Esto nos lleva a pensar que los alumnos si que son capaces de generalizar varios casos a partir de imágenes.

En general, a los participantes les ha costado relacionar gráficamente casos generales consecutivos. Además, muchos estudiantes dibujan correctamente ambos casos, pero no explican la relación que existen entre ellos o explican la relación de forma escrita (sin diagramas). Esto demuestra, la poca capacidad de visualización que poseen los participantes, así como el escaso éxito que alcanzan al realizar gráficamente el paso inductivo de la demostración gráficamente.

Si nos fijamos en el cuarto ítem, la mayoría de los participantes generaliza la veracidad de la identidad sin haberla demostrado, es decir, son capaces de realizar una inducción informal, pero siempre teniendo en mente que se debe realizar una demostración formal para poder afirmarlo.

En cuanto a la demostración formal, más de la mitad de los participantes, tanto del primer curso como del último, logra ejecutar la demostración correctamente. Sin embargo, existen un considerable porcentaje de alumnos, sobre todo de cuarto curso, que omite la comprobación del caso base. Esto deja ver que se sienten cómodos con este tipo de demostración, al punto de considerar innecesario esta parte de la misma.

Los participantes consideran vitales las imágenes o los diagramas en el proceso de explicación de una demostración. Sin embargo, un porcentaje muy bajo de ellos considera que las demostraciones visuales sean válidas. Creemos que esto puede ser debido a la insistencia del profesorado universitario, en particular en los primeros cursos del Grado, en recalcar que los diagramas, por muy explicativos, ilustrativos o claros que sean, nunca suponen una demostración formal ni válida.

3.2. Entrevistas

En cuanto al tiempo que necesitó cada participante para realizar la totalidad de la entrevista, se aprecia que los estudiantes de primer curso necesitaron, una media de, casi el doble de tiempo que los de último curso. Los estudiantes de primero utilizaron: 84, 121, 109 y 85 minutos cada uno, frente a: 57, 37, 55 y 76 minutos de los alumnos de cuarto. Tal y como muestra el gráfico 3.3, existen diferencias significativas entre las medias de tiempo de ambos grupos (estudiantes de 1°: $\bar{x} = 99'75$ min, $\sigma = 18'28$ min; estudiantes de 4°: $\bar{x} = 56'25$ min, $\sigma = 15'94$ min, Prueba Levene para igualdad de varianzas F=0'723, p=0'428, Prueba t para igualdad de medias con varianzas desconocidas pero iguales t=3'586, gl=6, p=0'012). Es claro que esta diferencia en los tiempos de ejecución se debe al tiempo necesario para la interpretación de las imágenes. Los participantes de primero experimentaron mayores dificultades para interpretar y producir diagramas.

En relación con la interpretación de las imágenes, ninguno de los participantes de primero consiguió interpretar correctamente (sin ayuda) las imágenes de la primera tarea, en cambio, dos estudiantes de cuarto curso fueron capaces

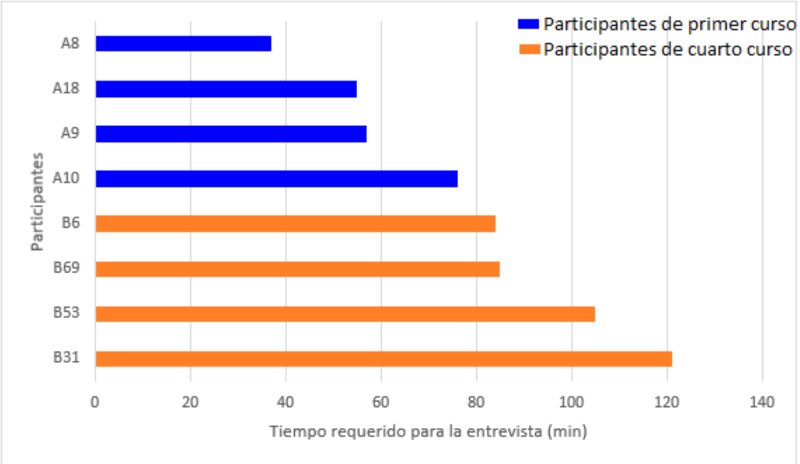


Figura 3.3. Duración de la entrevista para cada participante

de interpretarlas. Varios participantes se guiaron de los colores para interpretar las identidades, tal y como se muestra en la Figura 3.4. Otros participantes consiguieron hallar el lado derecho de la igualdad ($n^2 + (n+1)^2$), pero no el izquierdo, llegando solo a desarrollar los cuadrados. Uno de los participantes no consiguió diferenciar los pares de los impares, escribiendo:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + n + (n-2) + (n-4) + \ldots + 3 + 1 = n \cdot n + (n+1) \cdot (n+1)$$

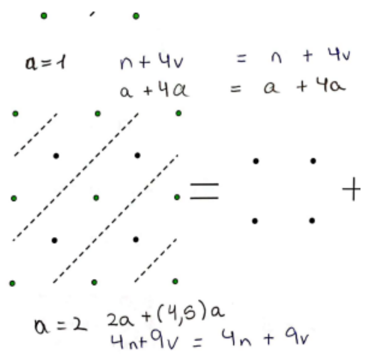


Figura 3.4. Interpretación mediante colores realizada por el participantes B53

En la segunda tarea, solo dos participantes de primero fueron capaces hallar la identidad general sin ayuda, sin embargo, todos los participantes de cuarto hallaron correctamente la identidad. Las mayores dificultades que se encontraron los participantes fue identificar hasta que número debían sumar y percatarse de que la parte derecha de la identidad eran números impares.

Si analizamos la cuarta pregunta, en la que se pedía la relación gráfica que existe entre los pasos n y $n+1$, percibimos una notable diferencia entre ambas tareas. Mientras que en la primera, solo un participante de primero consiguió relacionar los casos frente a dos participantes de cuarto. Sin embargo, en la segunda tarea, todos los participantes identificaron la relación de forma gráfica. La dificultad principal que encontraron en la relación de la primera tarea fue la de encontrar cuantos puntos nuevos había que añadir en el caso siguiente y, sobre todo, en qué parte de la gráfica añadirlos. Algunos participantes dibujaron correctamente ambos casos pero no mostraron la relación existente entre el caso n y el $n+1$. Se obtuvieron respuestas, para ambas tareas, como las mostradas en la Figura 3.5.

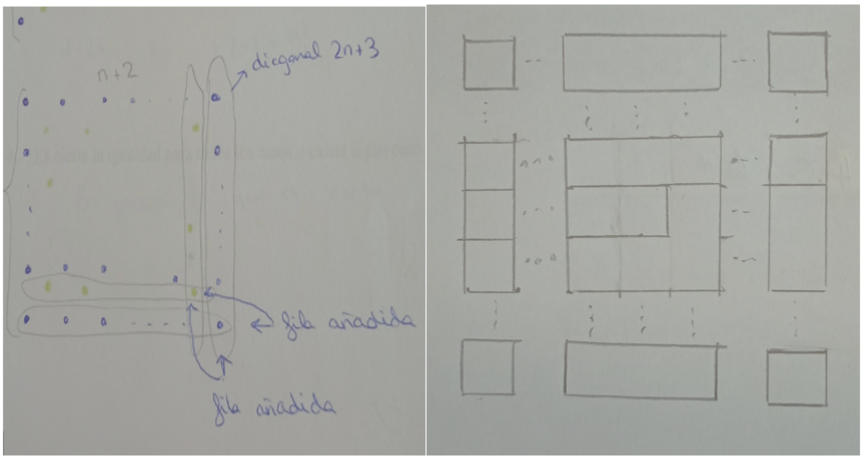


Figura 3.5. Relaciones realizadas por los participantes A8 y B31 para la primera y segunda tarea, respectivamente.

En la Figura 3.6 se puede apreciar que los participantes de cuarto fueron más propensos que los de primero a mostrar alta resistencia a la existencia de contraejemplos. Esto confirma que los participantes, sobre todo de último curso, son capaces de interpretar correctamente participar, lo que se ha denominado en la literatura versión informal de la inducción.

Harel [22] afirma que estudiantes que dicen estar familiarizados con la inducción, solo son capaces de responder "Es una prueba con pasos" al preguntarles "¿Qué es inducción matemática?". En nuestro caso, también se obtuvieron respuestas de este tipo, cuando se pidió que indicaran qué entendían por inducción se obtuvo respuestas como:

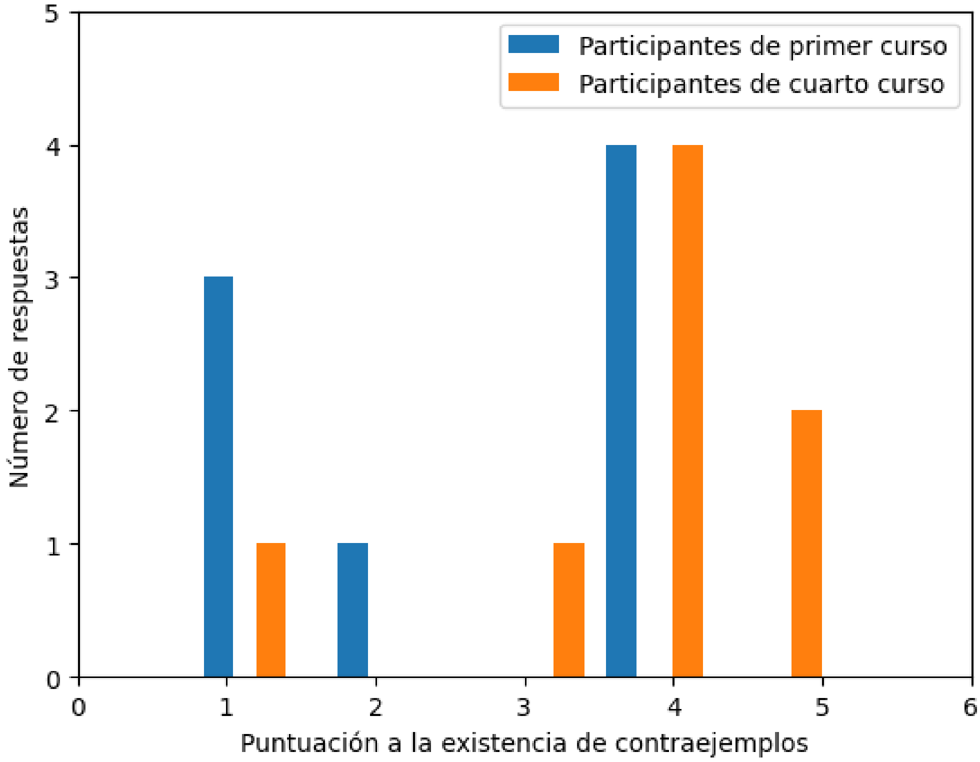


Figura 3.6. Resistencia a los contraejemplos en ambos grupos

- "Es un método que se utiliza para demostrar cosas"
- "Sucesión de pasos de que te llevan a conclusiones"
- "Suponer algo cierto y eso induce a que lo siguiente sea cierto"
- "Partir de algo muy pequeño y tratar de ver que se cumple para números muy grandes a partir de lo pequeño"
- "Sirve para demostrar sumas, restas, multiplicaciones, sucesiones, cosas de geometría, en general, para cosas periódicas"

Solo cuando se insiste en que lo expliquen desarrollan un poco más interés y se obtienen respuestas como las siguientes:

- "Es un método que sirve para demostrar problemas que utilicen los números naturales. Sabemos que una propiedad es cierta hasta un número, aplicamos la propiedad al siguiente número y vemos si también se cumple"
- "Sirve para demostrar proposiciones matemáticas. Se basa en demostrar que algo es cierto para números pequeños, que puedes ver a mano, generalizarlo para n, número grande, y ver que es cierto para $n+1$"
- "Sirve para demostrar afirmaciones con mucha cantidad de números y todos naturales. Se basa en demostrar para el primer caso $n = 1$ (o en otro si ese

es trivial, ya que a lo mejor hay que llegar a $n = 5$, que es controlable), y eso te da pistas o indicios que son útiles para una vez que afirmes el caso n y quieras demostrar el caso siguiente apoyándote en la hipótesis de inducción."

- "El método tiene tres pasos: primero, establecer la igualdad para los números naturales; segundo, suponer la hipótesis cierta para el caso n, es decir, generalizar; tercero, tomar la expresión, llevarla al caso siguiente y comprobar con la hipótesis anterior que también se cumple lo que estamos viendo"

Tanto en las respuestas obtenidas, como en los casos en los que se pedía que demostraran la igualdad, se puede apreciar que los participantes omiten la comprobación de caso base. Esto puede deberse, como destacó un participante, a que ya lo tenían comprobado mediante las imágenes. De hecho, 3 participantes de primero omiten el caso base en la explicación del método de inducción, en cambio, solo un participante de cuarto lo omite. Sin embargo, todos los participantes a los que se les pidió una demostración formal omitieron el caso inicial.

Todos los participantes, a excepción de uno, demostrarían la igualdad mediante el método de inducción. El participante que no se planteó utilizarla, señala que trataría de operar con los sumatorios para llegar al lado derecho de la igualdad.

Al preguntar por la posibilidad de demostrar la identidad de forma gráfica, todos los participantes de primer curso consideraron que sí era posible, para ambas tareas. Sin embargo, solo un participante de cuarto consideró que era posible para ambas tareas propuestas, el resto de participantes dio respuestas como: "Se podría hacer pero para casos muy grandes no" o "Sí, se puede ir dibujando caso por caso hasta que sea suficiente para concluir, pero ... como nunca es suficiente ... no, no se podría, tendríamos que aplicar inducción". Esta circunstancia podría explicarse por la insistencia en su formación en el uso de demostraciones algebraicas.

Por último, cuando se les pedía que explicaran, de forma sencilla, el significado de una demostración por inducción a un compañero, tres participantes (dos de cuarto y uno de primero) lo harían basado en casos, tres participantes (dos de cuarto y uno de primero) explicarían el método tal cual y dos participantes (de primero) lo relacionarían con el razonamiento inductivo cotidiano.

Cabe destacar que nuestro estudio contaba con dos grupos de participantes, pero ambos tenían conocimientos, en mayor o menor medida, sobre la demostración por inducción matemática. Sin embargo, el estudio realizado por Relaford-Doyle y Núñez contaba con un grupo de participantes "no preparados para demostrar por inducción matemática" y otro "preparado para demostrar por el método de inducción matemática". Se puede afirmar que en nuestro estudio no se observan grandes diferencias en los resultados entre grupos, aun así, los resultados de los participantes de cuarto curso son, en general, más favorables que los de primer curso del Grado.

4

Conclusiones

En este estudio se ha utilizado un método diferente para explorar las dificultades conceptuales que afrontan los estudiantes de Grado de Matemáticas en el aprendizaje de la prueba por inducción matemática. Se han usado distintas imágenes presentadas como pruebas visuales por inducción, es decir, enunciados matemáticos simples representados mediante imágenes y diagramas accesibles y sin lenguaje algebraico. De esta forma se pudo indagar y comparar las conceptualizaciones de estudiantes recién llegados al Grado y estudiantes que se encuentran a punto de finalizar sus estudios de Grado.

Objetivo 1: Estudiar los problemas que presentan en la visualización de las Matemáticas y su importancia en la resolución de problemas y apoyo en las demostraciones.

Nuestros resultados sugieren que los participantes de primer curso tienen mayores dificultades para interpretar imágenes y, por tanto, para generalizar en base a ellas. Se observa que los estudiantes poseen notables dificultades para visualizar, aunque la mayor parte del alumnado la considera parte fundamental en la explicación de las demostraciones y en la resolución de problemas.

Objetivo 2: Indagar en la capacidad de participar en versiones informales de la demostración por inducción de los estudiantes.

Aunque en las respuestas de los cuestionarios no se aprecian diferencias significativos en la capacidad de participar en inducción informal entre ambos grupos, en las entrevistas se concluyó que, en general, los participantes de primer curso tienen mayor dificultad para tomar parte en este tipo de inducción. También, se evidenció una notable diferencia en la resistencia a los contraejemplos, los participantes de primer curso ofrecieron menor resistencia a esta posibilidad.

Puede deberse a la concepción de los números naturales que poseen los estudiantes, notándose una mayor asimilación de su axiomática en los estudiantes de último curso.

Objetivo 3: Conocer la importancia que dan los estudiantes al procedimiento formal de la demostración por inducción.

En general, los estudiantes logran realizar con éxito la demostración formal. No obstante, un gran número de alumnos, sobre todo de cuarto curso, tiende a omitir la comprobación del caso inicial cuando realizan la demostración formal de un enunciado. Aun así, los estudiantes prefieren la demostración formal frente a la demostración gráfica.

Objetivo 4: Analizar si la compresión del método de demostración por inducción está ligada al procedimiento algebraico y evaluar el progreso del pensamiento conceptual de los estudiantes del Grado de Matemáticas.

Acorde a hallazgos previos, los resultados sugieren que el conocimiento que poseen los estudiantes es, en gran medida, de carácter procedimental y depende, en muchas ocasiones, de la aplicación de un procedimiento algebraico específico y conocido. Aunque se pueden apreciar diferencias en el pensamiento conceptual de los estudiantes de ambos cursos del Grado de Matemáticas, la mayoría de los estudiantes no se replantea los conceptos más allá de las clases.

Objetivo 5: Determinar la visión de los estudiantes ante la validez de las pruebas visuales.

Los estudiantes, en general, consideran que los diagramas pueden servir como apoyo para explicar la demostración, pero deniegan la validez de las pruebas visuales, prefiriendo realizar la prueba algebraica.

Algunas propuestas de mejora

Este estudio ha tenido ciertas limitaciones en la metodología y en el tamaño muestral. En cuanto a la metodología, algunas preguntas realizadas en el cuestionario no permiten asegurar que el estudiante haya conseguido interpretar correctamente las imágenes, es por eso que las entrevistas personales resultan ser de vital importancia, ya que permiten indagar más sobre las respuestas de los participantes. Sin embargo, realizar estas entrevistas conlleva dedicar un gran número de horas a un trabajo de este estilo. Por otra parte, el tamaño de la muestra, sobre todo en los estudiantes de cuarto curso, fue bastante restringida. El número de estudiantes de nuevo ingreso está limitado a 90 por curso académico y el número de egresados se reduce a un tercio de los ingresos, por este motivo es prácticamente imposible aumentar la muestra. Aun así, se han reafirmado las grandes dificultades de los estudiantes para visualizar, o al menos para ponerla en práctica.

En conclusión, como propuestas de mejora, también se recomienda indagar mediante task-based interviews sobre la compresión conceptual de los estudiantes de la demostración por inducción matemática, procurando realizar el estudio con muestras suficientemente grandes. Insistimos en que, desde un punto de vista didáctico, el razonamiento y el aprendizaje en matemáticas debe estar ligado a la visualización de los conceptos implicados. Se recomienda la utilización de imágenes desde los primeros cursos de la educación para favorecer así la visualización por parte del alumnado. En cuanto a la educación universitaria, se insta al profesorado a proporcionar a los estudiantes, conocimientos explíctos sobre los axiomas de Dedekind-Peano para la construcción del conjunto de los números naturales y así para favorecer su compresión y la del principio de inducción, lo que serviría para complementar las demostraciones formales con diagramas o imágenes ilustrativas para fomentar la comprensión de los resultados demostrados.

A

Anexos

A.1. El cuestionario

Cuestionario

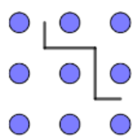
Género: __ Hombre. __ Mujer. __ Otro

Edad:__

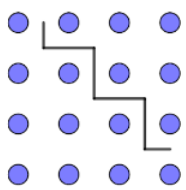
Curso más alto del que te has matriculado: __

Número de veces que te has matriculado en esta asignatura: __

1.- Un matemático dibuja las siguientes imágenes para tratar de probar una igualdad. Basándote en las imágenes, completa las 2 igualdades siguientes:



$1 + 2 + 3 + 2 + 1 =$_______



$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 =$______

2.- Representa la imagen para el caso siguiente y escribe la igualdad resultante.

3.- ¿Cómo sería la igualdad para el caso general?

4.- ¿Es cierta la igualdad para todos los casos o existe algún caso que no la cumpla?

5.- Prueba por inducción la igualdad del apartado 3.

6.- Relaciona el diagrama del caso n con el diagrama del caso $n+1$ haciendo uso de las imágenes de la pregunta 1.

7.- ¿Cúal es el resultado de la siguiente suma? $\sum_{k=1}^{153} k + \sum_{j=1}^{152} j =$

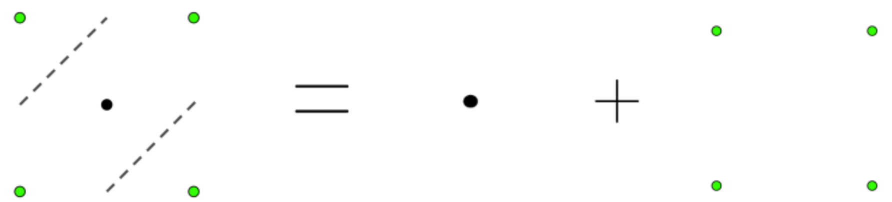
8.- ¿Consideras que los diagramas o imágenes utilizados constituyen una demostración válida? ¿Por qué? ¿Se lo explicarías a un compañero apoyándote en los diagramas? ¿Por qué?

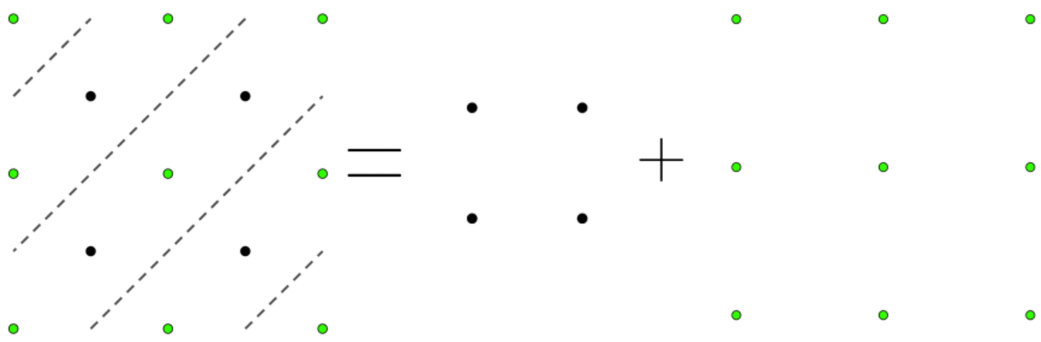
A.2. La entrevista. Tarea 1

Nombre y apellidos:

Observación: Cada punto representa una unidad. Las líneas oblicuas discontinuas son meramente separativas.

1.- Estas imágenes representan identidades numéricas, ¿serías capaz de hallarlas?





2.- ¿Cómo construirías la igualdad para el caso siguiente?

3.- Estamos tratando de generalizar. ¿Cuál sería la igualdad para el caso general (n)?

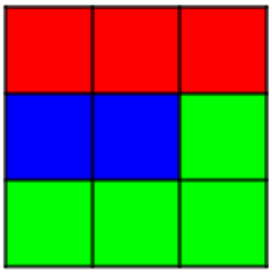
4.- ¿Podrías interpretar visualmente el paso de una igualdad (n) a la siguiente ($n+1$)?

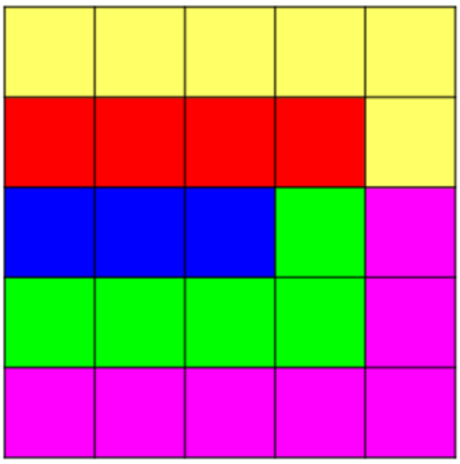
A.3. La entrevista. Tarea 2

Nombre y apellidos:

Observación: Cada cuadrado pequeño representa una unidad. Los colores indican piezas que no se pueden separar (como de un puzzle).

1.- Estas imágenes representan identidades numéricas, ¿serías capaz de hallarlas?





2.- ¿Cómo construirías la igualdad para el caso siguiente?

3.- Estamos tratando de generalizar. ¿Cuál sería la igualdad para el caso general (n)?

4.- ¿Podrías interpretar visualmente el paso de una igualdad (n) a la siguiente $(n+1)$?

Bibliografía

[1] Álvarez, M. Y., Alonso, I., y Gorina, A. (2012). Dinámica del razonamiento inductivo en la resolución de problemas matemáticos. Una propuesta didáctica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Disponible en https://www.researchgate.net/publication/317447178_DINAMICA_DEL_RAZONAMIENTO_INDUCTIVO_EN_LA_RESOLUCION_DE_PROBLEMAS_MATEMATICOS_UNA_PROPUESTA_DIDACTICA

[2] Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 52, 215-241. Disponible en https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

[3] *Axiomas de Peano.*[en línea]. [Fecha de consulta: 23-03-2023]. Disponible en: https://hmong.es/wiki/Peano%27s_axioms

[4] Axiomas de Peano. *Los axiomas*[en línea]. [Fecha de consulta: 23-03-2023]. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Axiomas_de_Peano

[5] Baker, J. D. (1996). *Students' difficulties with proof by mathematical induction.* New York: Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association.

[6] Baroody, A. J. (2005). Discourse and research on an overlooked aspect of mathematical reasoning. *The American Journal of Psychology*, 118(3), 484-489. Disponible en: http://www.jstor.org/stable/30039079

[7] Bishop A.J. (1973). The use of structural apparatus and spatial ability - a possible relationship. *Res Educ* 9:43-49. Disponible en https://doi.org/10.1177/003452377300900104

[8] Bishop, A.J. Spatial abilities and mathematics education-A review. *Educ Stud Math* 11, 257-269. Dispobible en https://doi.org/10.1007/BF00697739

[9] Clements, K. (1981). Visual Imagery and School Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, Part 1. 2(2), 2-9. Disponible en http://www.jstor.org/stable/40247731

[10] Clements, K. (1982). Visual Imagery and School Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, Part 2. 2(3), 33-38.

[11] Godino, J. D. & Recio, A. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 19(3), 405-414. Disponible en https://core.ac.uk/download/pdf/38990678.pdf

[12] Chambadal, L. *Diccionario De Las Matemáticas Modernas*. Barcelona: Plaza & Janes, 1972. Print.

[13] Clapham, C. *Diccionario De Matemáticas*. Madrid :: Editorial Complutense, ;, 1998. Print. Diccionarios Oxford-Complutense.

[14] Definiciones de palabras. *Definición de Demostración matemática* [en línea]. [Fecha de consulta: 22-03-2023]. Disponible en: https://definicionesdepalabras.com/demostracion-matematica/.

[15] Definiciones de términos técnicos. *Inducción Matemática* [en línea]. [Fecha de consulta: 22-03-2023]. Disponible en: https://techlib.net/techedu/induccion-matematica/

[16] DeVilliers, M. (1999). *Rethinking proof with the Geometer's sketchpad*. Berkeley: Key Curriculum Press.

[17] *'?Es el 0 un número natural?* [en línea]. [Fecha de consulta: 17-05-2023]. Disponible en https://www.mheducation.es/blog/es-el-0-un-numero-natural

[18] Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. *Handbook of research design in mathematics and science education*, 517-545.

[19] González, N. & Garcés, W. & Grimaldy, L.N (2022). Empleo de la visualización matemática en el proceso de planteo y resolución de problemas. *Didasc@lia. Didáctica y Educación* 13:2-22. Disponible en https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8456703

[20] Haya, I. A. (2015). *Razonamiento y demostración en educación matemática.* Tesis de maestría. Cantabria: UNICAN.

[21] Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education* (Vol. 7, pp. 234-283). Providence, RI: AMS, CBMS: Issues in Mathematics Education.

[22] Harel, G. (2001). *The Development of Mathematical Induction as a Proof Scheme: A Model for DNR-Based Instruction.*

[23] Horwitz, L. (1981). *Visualization and arithmetic problem solving*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Los Angeles.

[24] Jerez, K. O. (2021). *Preferencias sobre la prueba en matemáticas: un estudio exploratorio con estudiantes de primer curso de los Grados de Física*

y Matemáticas. Trabajo de Fin de Máster. Universidad de La Laguna (sin publicar).

[25] Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. University of Chicago Press.

[26] Lowenthal, F. & Eisenberg, T.A. (1992). Mathematical Induction in School: An Illusion of Rigor? *School Science and Mathematics*, 92, 233-238.

[27] Maher, C.A. & Sigley, R. (2014). Task-based interviews in mathematics education. In: Lerman S, editor. *Encyclopedia of mathematics education.* New York (NY): Springer; 2014. p. 579-582.

[28] Movshovitz-Hadar, N. (1993). The false coin problem, mathematical induction and knowledge fragility. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, 253-268

[29] Nelsen, R. (1993). *Proofs Without Words. Exercises in Visual Thinking.* Mathemathical Association of America. USA

[30] Presmeg, N. C. (1986). Visualisation in High School Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 42-46. Disponible en http://www.jstor.org/stable/40247826

[31] Presmeg, N. (1986). Visualisation in High School Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 42-46. Disponible en http://www.jstor.org/stable/40247826

[32] Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future.* Disponible en https://www.researchgate.net/publication/241301299_Research_on_visualization_in_learning_and_teaching_mathematics

[33] Presmeg, N. (2020). Visualization and Learning in Mathematics Education. In: Lerman, S. (eds) *Encyclopedia of Mathematics Education.* Springer, Cham. Disponible en https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_161

[34] Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible.* Madrid: TECNOS. S. A.

[35] Rabino, A. & Bressan, A. (2018). Visualizar y demostrar. *Grupo patagónico de Didáctica de la Matemática*, Sección Publicaciones. Argentina. Disponible en chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://new.gpdmatematica.ar/wp-content/uploads/2021/02/visualizacion_demostracion.pdf

[36] Relaford-Doyle, J. & Núñez, R. Characterizing students' conceptual difficulties with mathematical induction using visual proofs. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* , (2021) 7:1-20. Disponible en: https://doi.org/10.1007/s40753-020-00119-4

[37] *Richard Dedekind.*[en línea]. [Fecha de consulta: 23-03-2023]. Disponible en: https://es.wikipedia.org/wiki/Richard_Dedekind

[38] Salomon, G. (1971). Heuristic models for the generation of aptitude-treatment interaction hypotheses. *Review of Educational Research.* 42, 327-343. Disponible en https://doi.org/10.3102/00346543042003327

[39] Schoenfeld, A.H. (1989). *Mathematical thinking and problem solving*

[40] Smith, L. (2003). Children's reasoning by mathematical induction: Normative facts, not just causal facts. *International Journal of Educational Research,* 39(7), 719-742. Disponible en: https://doi.org/10.1016/j.ijer.2004.10.004

[41] Strobl, Walter. *Matemática.* Madrid: Rioduero, 1977. Print. Diccionarios Rioduero.

[42] Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Philippou, G. N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(3), 145-166

[43] Vladimirskii, G. A. (1971). An experimental verification of a method and system of exercises for developing spatial imagination. In Kilpatrick, J. and Wirszup, I. (eds.). *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics 5*, Vroman, California.

A study on understanding of Mathematical induction proof with undergraduate Mathematics students.

Kevin Herrera Dévora
Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0101265285@ull.edu.es

Abstract

This research describes an investigation that used images presented as visual proofs by induction, that is, simple mathematical statements represented by images and diagrams accessible without algebraic language. In this way, the conceptual difficulties of two groups of Mathematics undergraduate students in learning to proof by mathematical induction were investigated. Through a questionnaire and task-based interviews, it was concluded that, in general, students are able to guess the result to proof, although their induction knowledge is linked to the formal procedure and, furthermore, a large number of participants face great difficulties interpreting images and visualizing. On the other hand, most of the participants consider that diagrams can serve as support to explain the proof but they are not valid by themselves.

1. Research problem

The induction method relies on the Peano axioms to conclude the truth of a mathematical statement for all natural numbers. The proof is made up of two parts, base step, where it is shown that the proposition is fulfilled for an initial case, and inductive step, which shows that if the statement is fulfilled for an arbitrary value ($n = k$), then it is true for the next ($n = k + 1$).
Besides, visualization and reasoning and learning of Mathematics are strongly linked, therefore, visualization must be, at least, a great support for proof explanation.
Several investigations have been carried out on mathematical induction learning, however, most of them have been focused on the procedural part of the formal proof or on everyday inductive reasoning, without looking at the conceptual part of mathematical induction.
Mathematical induction entails a specific procedure, therefore, when difficulties arise it is difficult to know if they are of procedural or conceptual nature. Consequently, it is intended to investigate this conceptual difficulties using graphic resources.

2. Methodology

Two groups of students participated in the study, 96 first-year students of mathematics degree and 19 students in the fourth-year. A questionnaire based on a graphically presented mathematical proposition was implemented. Later, four students from each group were selected to carry out task-based interviews.

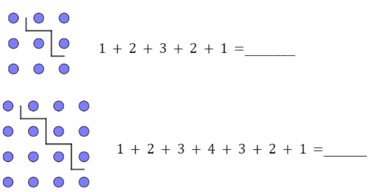


Figure 1: *Questionnaire*

These images represent numerical identities. Are you be able to find them?

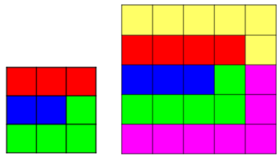


Figure 2: *Task two diagram*

3. Results and discussion

As far as questionnaires, only significant differences were found in the execution times of the task, although the last-year participants obtained better results. In task-based interviews, students, especially first graders, experienced difficulties interpreting the images and finding general identities. In addition, first-year students did not offer great resistance to possibility of counterexamples in general identities. Although students are familiar with induction, some are only able to answer "It is a method used to prove things" when asked about induction.

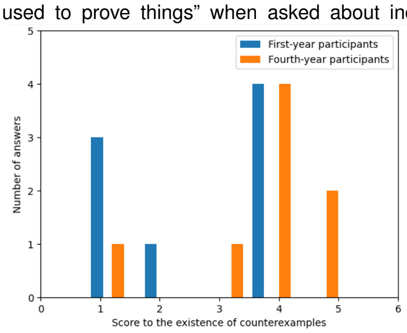


Figure 3: *Resistance to the existence of counterexamples in both groups*

4. Conclusion

Results suggest that first-year undergraduate students have greater difficulties interpreting images than the fourth degree and, therefore, generalizing based on them. According to previous findings, results suggest that students' knowledge is procedural in nature and reliant on applying a specific algebraic. Also, participants consider that diagrams are not valid as proof, but they can serve as support to explain it.

References

[1] Relaford-Doyle, J. & Núñez, R. Characterizing students' conceptual difficulties with mathematical induction using visual proofs. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, (2021) 7:1-20. https://doi.org/10.1007/s40753-020-00119-4