

Sara Díaz Mederos

# *El Problema de las Tres Lentes*

The Three Lenses Problem

Trabajo Fin de Grado  
Grado en Matemáticas  
La Laguna, Mayo de 2023

DIRIGIDO POR

*David Baldomero Iglesias Ponte*

*David Baldomero Iglesias Ponte*  
*Matemáticas, Estadística e*  
*Investigación Operativa*  
*Universidad de La Laguna*  
*38200 La Laguna, Tenerife*

---

## Agradecimientos

A mis profesores del grado, por haber sabido transmitirme esa pasión que compartimos hacia las Matemáticas y particularmente a mi tutor David, por el tiempo y las ganas empleadas para hacer posible esta memoria.

A a mi familia y amigos por ser un apoyo incondicional durante estos cuatro años de carrera, gracias por creer siempre en mí.

Sara Díaz Mederos  
La Laguna, 22 de mayo de 2023



---

## Resumen · Abstract

### *Resumen*

---

*En esta memoria, mostramos que la Óptica Geométrica (donde el carácter ondulatoria de la luz es ignorado) puede ser descrita usando Geometría Simpléctica, de modo que, el espacio de rayos es una variedad simpléctica y las transformaciones ópticas, la traslación y la refracción, son symplectomorfismos. Para la Óptica Gaussiana, donde las transformaciones a considerar son lineales y es asumida la simetría rotacional, identificamos las transformaciones ópticas con  $SL(2, \mathbb{R})$  y abordamos el conocido como Problema de las Tres Lentes, donde se da respuesta a la siguiente pregunta: ¿Cuál es el número mínimo de lentes necesario para crear cualquier sistema óptico?*

### *Abstract*

---

*In this Memory, we show that Geometrical Optics (in which the undulatory nature of light is ignored) can be described using symplectic geometry, showing that the space of rays is a symplectic manifold and that the optical transformations refraction and translation are symplectomorphisms. For Gaussian Optics, in which transformations are linear and rotational symmetry is assumed, we identify optical transformations with  $SL(2, \mathbb{R})$  and we will deal with The Three Lenses Problem where we give an answer to the following question: How many lenses would we need to build any optical system?*



---

# Contenido

<b>Agradecimientos</b> .....	III
<b>Resumen/Abstract</b> .....	V
<b>Introducción</b> .....	IX
<b>1. Geometría Simpléctica</b> .....	1
1.1. Espacios Vectoriales Simplécticos .....	1
1.2. Variedades Simplécticas .....	6
<b>2. Óptica</b> .....	13
2.1. Óptica Geométrica .....	13
2.1.1. El Espacio de Rayos como variedad simpléctica .....	13
2.1.2. Transformaciones ópticas .....	18
2.2. Óptica Lineal .....	23
2.2.1. Traslación .....	25
2.2.2. Refracción .....	27
<b>3. Problema de las 3 lentes</b> .....	35
3.1. Configuración de una lente .....	36
3.2. Configuración de dos lentes .....	37
3.3. Configuración de tres lentes .....	39
<b>Bibliografía</b> .....	45
<b>Poster</b> .....	47





---

## Introducción

Las Matemáticas han estado presente a lo largo de toda nuestra historia, pero la relevancia de su sentido abstracto y su relación con la Física, tardó años en llegar a consolidarse. Los primeros indicios se encontraban en asuntos de la vida cotidiana, donde mejorar la rapidez del conteo y del entendimiento de las figuras geométricas desarrollaba la necesidad de crear herramientas útiles, capaces de cumplir con fines inmediatos y prácticos, esto es, una matemática empírica.

Tras las grandes aportaciones de Tales y de la escuela Pitagórica, Platón transmitía un punto de vista un poco más cercano al significado de nuestra materia, consideraba que el mundo inteligible caracterizado por verdades absolutas, sólo podía ser alcanzado por las Matemáticas, y más concretamente, por la Geometría, describía a los números y las figuras como entidades ideales, inteligibles, e inmutables.

La Geometría, es considerada la rama de las Matemáticas más cercana a nuestra realidad, además, la podemos encontrar interiorizada en la Física, a través del estudio de la trayectoria que sigue un cuerpo, o más concretamente, cuando nos planteamos que comportamiento tiene la luz, esto es, cuando nos adentramos en un campo de la física denominado Óptica.

La dualidad de la luz onda-partícula, sugiere el análisis de la Óptica desde dos vertientes: la Óptica Física, encargada del estudio de la naturaleza de la luz cuando esta es considerada una onda electromagnética; y la Óptica Geométrica donde la luz se define como un rayo rectilíneo que reacciona ante objetos como: espejos, pantallas o lentes.

La perspectiva de la Óptica Geométrica, tal y como su propio nombre sugiere, posee un trasfondo matemático encargado de dar consistencia a todos los resultados físicos. Concretamente, está vinculada con la Geometría Simpléctica, un área de la Geometría Diferencial que no sólo se ve implicada en aspectos de la Óptica, sino que es muy valorada desde el punto de vista mecánico particularmente en las Ecuaciones de Hamilton.

El hecho de que los rayos sean considerados rectas orientadas en el espacio, incita la aparición de una herramienta matemática capaz de identificar cualquiera de ellos a partir de coordenadas, esto es, interesa dotar al espacio de rayos de una estructura de variedad y más concretamente, de una estructura de variedad simpléctica.

Si ponemos nuestro ojo matemático sobre los posibles fenómenos ópticos que describen los rayos de luz, como la reflexión, la traslación y la refracción, seremos capaces de indentificar que son simplectomorfismos. Además, si nos restringimos al régimen paraxial, donde los ángulos que entran en consideración son lo suficientemente pequeños, notaremos que todos los posibles efectos que se producen sobre un rayo son lineales, dando paso así a unos de los pilares de las Matemáticas: el Álgebra Lineal. De hecho, si tratamos con esas aplicaciones lineales capaces de decribir transformaciones ópticas, apreciaremos que existe una biyección entre cualquier sistema óptico y cualquier matriz de determinante 1.

Dando un salto a la física experimental, si imaginamos que formamos parte de un taller de lentes, con todo el conocimiento anterior podemos ser capaces de responder a la siguiente pregunta: *¿Cuál es el número mínimo de lentes necesario para crear cualquier sistema óptico?*

En esta Memoria, seremos partícipes de como la Física se retroalimenta de las Matemáticas para dar validez a sus resultados, así como las Matemáticas ceden sus herramientas, trasladando esas verdades absolutas a la realidad. Pues tal y como cita Jorge Wagensberg en un artículo titulado; *La verdad absoluta existe*, los matemáticos estamos acostumbrados a manejar lo absoluto, lo infinito y lo eterno, con total normalidad.

Este trabajo de fin de grado, está dividido en tres capítulos. En el primero, se expone una introducción a la Geometría Simpléctica, empezando por los espacios vectoriales simplécticos y desarrollando los conceptos básicos de las variedades simplécticas. En ambos contextos, ilustraremos las definiciones y resultados con diversos ejemplos, que serán de utilidad posterior.

El segundo capítulo ofrece una introducción a la Óptica Geométrica. Más precisamente, dotaremos al espacio de rayos de una estructura de variedad simpléctica e interpretaremos los fenómenos ópticos de la traslación y la refracción como simplectomorfismos, es decir, transformaciones que preservan la estructura simpléctica. Más adelante, nos restringiremos a la Óptica lineal, en particular la conocida como Óptica Gaussiana, lo que nos permitirá utilizar técnicas del Álgebra Lineal y mostrar que cualquier sistema óptico Gaussiano se puede interpretar como una matriz de  $SL(2, \mathbb{R})$ .

Finalmente, en el tercer capítulo afrontaremos el *Problema de las Tres Lentes*, recogido en la Referencia [11], donde se analiza cuántas lentes (combinación de dos sistemas refractantes) son necesarias para describir cualquier sistema óptico.

## Geometría Simpléctica

---

En este capítulo, trataremos conceptos básicos sobre la Geometría Simpléctica, apoyándonos en ejemplos y proposiciones que serán utilizados en capítulos posteriores. Las referencias en base a las que se ha desarrollado esta primera parte son [1, 3].

### 1.1. Espacios Vectoriales Simplécticos

**Definición 1.1.** Una forma simpléctica  $\omega$  en un espacio vectorial  $V$  es una 2-forma sobre  $V$  no degenerada, esto es, una aplicación  $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaciendo:

- *Bilinealidad:*  $\omega(u_1 + u_2, v) = \omega(u_1, v) + \omega(u_2, v)$  y  $\omega(\lambda u, v) = \lambda \omega(u, v)$ , para todo  $u_1, u_2, v \in V$  y para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- *Antisimetría:*  $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$ , para todo  $u, v \in V$ .
- *No degeneración:* Si  $\omega(u, v) = 0$  para todo  $v \in V$  entonces  $u = 0$ .

Al par  $(V, \omega)$  se le denomina espacio vectorial simpléctico.

Dada  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  una base de  $(V, \omega)$ . La forma simpléctica  $\omega$  viene dada por una matriz  $B = (\omega_{ij})$ , con  $\omega_{ij} := \omega(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ .

Si  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  entonces

$$\omega(\vec{u}, \vec{v}) = (u_1 \dots u_n) B \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

La antisimetría de  $\omega$  implica que  $B$  es antisimétrica y la no degeneración implica que  $B$  es una matriz regular.

*Ejemplo 1.2.* En  $\mathbb{R}^{2n}$  la 2-forma  $\omega_o : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\omega_o((u_1, u_2, \dots, u_{2n}), (v_1, v_2, \dots, v_{2n})) = \sum_{i=1}^n u_i v_{i+n} - u_{i+n} v_i \quad (1.1)$$

determina una forma simpléctica en  $\mathbb{R}^{2n}$ . De (1.1) se deduce inmediatamente que  $\omega_o$  es bilineal y antisimétrica. Vemos ahora la no degeneración:

Supongamos que existe  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_{2n})$  tal que  $\omega_o(\vec{v}, \vec{u}) = 0$  para todo  $\vec{u}$  perteneciente a  $\mathbb{R}^{2n}$ . En particular, lo verificará para los elementos de la base canónica  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{2n}\}$  de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Teniendo en cuenta la ecuación (1.1), se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} 0 &= w_0((0, \dots, 1, \dots, 0, 0, \dots, 0), (v_1, \dots, v_{2n})) = v_{n+i} \\ 0 &= w_0((0, \dots, 0, 0, \dots, 1, \dots, 0), (v_1, \dots, v_{2n})) = -v_i \end{aligned}$$

para todo  $i = 1, \dots, n$ . Luego, se llega a que  $\vec{v} = 0$ . Se concluye por tanto que  $w_0$  es no degenerada.

Si denotamos la base canónica en  $\mathbb{R}^{2n}$  por  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n\}$ , esto es,  $\vec{e}_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $\vec{f}_i = (0, \dots, 0, 0, \dots, \overset{n+i}{1}, \dots, 0)$ , usando:  $\omega_0(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0$ ,  $\omega_0(\vec{f}_i, \vec{f}_j) = 0$ ,  $\omega_0(\vec{e}_i, \vec{f}_j) = \delta_{i,j}$ , se tiene que la matriz asociada a  $\omega_o$  es:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & Id_n \\ -Id_n & 0 \end{pmatrix}$$

Para el caso particular  $(\mathbb{R}^2, \omega_o)$ , la forma simpléctica queda de la siguiente forma:

$$\omega_o((u_1 \ u_2), (v_1 \ v_2)) = u_1v_2 - u_2v_1,$$

que es el determinante de los vectores  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  y  $\vec{v} = (v_1, v_2)$ . Geométricamente  $\omega_o$  determina el área orientada de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .

*Ejemplo 1.3.* Sea  $W$  un espacio vectorial y  $W^*$  su espacio dual. Considérese  $V = W \times W^*$  y la aplicación  $\omega$  definida sobre dicho producto cartesiano:

$$\omega((X, \alpha), (Y, \beta)) = \alpha(Y) - \beta(X)$$

A continuación se justificará que  $\omega$  es una forma simpléctica.

La bilinealidad se deduce aplicando la linealidad de los elementos de  $W^*$  y las definiciones de la suma de dos aplicaciones lineales y el producto de una de ellas por un escalar, y la antisimetría se justifica por la propia definición de  $\omega$ .

Para probar la no degeneración, supongamos que existe  $(X, \alpha)$  perteneciente a  $V$  tal que:

$$\omega((X, \alpha), (Y, \beta)) = 0, \text{ para todo } (Y, \beta) \in V.$$

En particular, tomando  $(Y, 0)$  para todo  $Y$  perteneciente a  $W$ . Se tiene que:

$$\omega((X, \alpha), (Y, 0)) = \alpha(Y),$$

de lo que se deduce que  $\alpha = 0$ . Análogamente, si tomamos  $(0, \beta)$  con  $\beta$  perteneciente a  $W^*$ ,

$$\omega((X, \alpha), (0, \beta)) = -\beta(X),$$

se tiene que  $X = 0$ . Sea  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$  base de  $W$  y  $\{\vec{u}^1, \vec{u}^2, \dots, \vec{u}^n\}$  base de su dual  $W^*$ .

Se define una base de  $V = W \times W^*$  a partir de los pares  $\vec{e}_i = (\vec{u}_i, 0)$  y  $\vec{f}_i = (0, \vec{u}^i)$ , que viene dada por  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \dots, \vec{f}_n\}$ .

Por la definición de  $\omega$  y la propiedad  $u^j(u_i) = \delta_{ij}$ , se tienen las siguientes igualdades:  $\omega(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0$ ,  $\omega(\vec{e}_i, \vec{f}_j) = \delta_{i,j}$ ,  $\omega(\vec{f}_i, \vec{f}_j) = 0$ . Así, la matriz asociada a la forma simpléctica  $\omega$  es:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -Id & 0 \end{pmatrix}.$$

*Ejemplo 1.4.* Sean  $(V_1, \omega_1)$  y  $(V_2, \omega_2)$  espacios vectoriales simpléticos, entonces  $(V_1 \times V_2, \omega_1 \oplus \omega_2)$  es un espacio vectorial simplético con

$$\omega_1 \oplus \omega_2 : (V_1 \times V_2) \times (V_1 \times V_2) \longrightarrow \mathbb{R},$$

donde

$$\omega_1 \oplus \omega_2((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = \omega_1(u_1, v_1) + \omega_2(u_2, v_2).$$

Las propiedades de bilinealidad y antisimetría son inmediatas teniendo en cuenta que  $\omega_1$  y  $\omega_2$  las verifican. Supongamos que

$$(\omega_1 \oplus \omega_2)((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = 0,$$

para cualquier  $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ . En particular se verificará para  $(v_1, 0)$  y  $(0, v_2)$ .

$$(\omega_1 \oplus \omega_2)((u_1, u_2), (v_1, 0)) = \omega_1(u_1, v_1) + \omega_2(u_2, 0) = \omega_1(u_1, v_1) = 0 \longrightarrow u_1 = 0$$

$$(\omega_1 \oplus \omega_2)((u_1, u_2), (0, v_2)) = \omega_1(u_1, 0) + \omega_2(u_2, v_2) = \omega_2(u_2, v_2) = 0 \longrightarrow u_2 = 0$$

Luego,  $\omega_1 \oplus \omega_2$  es no degenerada.

**Definición 1.5.** Dada una 2-forma  $\omega$  definida en un espacio vectorial  $V$  se define la aplicación lineal  $\omega^\flat : V \longrightarrow V^*$  dada por,

$$\omega^\flat(u)(v) = \omega(u, v) \text{ para cualquier } v \in V.$$

*Observación 1.6.* Sea  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  base de  $V$  y  $\{\vec{e}^1, \vec{e}^2, \dots, \vec{e}^n\}$  su base dual en  $V^*$ . La matriz asociada a  $\omega^\flat$  respecto de dichas bases, vendrá dada por los coeficientes  $a_{ki}$  de la siguiente expresión:

$$\omega^\flat(e_k) = \sum_{i=1}^n a_{ki} e^i.$$

De (1.5)

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^n a_{ki} e^i(e_j) = \omega^b(e_k)(e_j) = \omega(e_k, e_j).$$

Luego, se concluye que las matrices asociadas a  $\omega$  y  $\omega^b$  coinciden.

**Proposición 1.7.** *Sea  $\omega$  una 2-forma en  $V$  y  $\omega^b$  la aplicación asociada definida en (1.5), entonces  $\omega$  es no degenerada si y solo si  $\omega^b$  es un isomorfismo.*

*Demostración.* La demostración de este resultado es inmediata por la propia construcción de  $\omega^b$ . Notar que

$$\text{Ker}\omega^b = \{\vec{u} \in V \mid \omega(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \text{ para cualquier } v \text{ en } V\}.$$

Así, la propiedad de no degeneración para  $\omega$  es equivalente a la inyectividad sobre  $\omega^b$ . Además, la aplicación  $\omega^b$  está definida sobre espacios vectoriales con la misma dimensión. Por tanto, inmediatamente tenemos que es sobreyectiva.

**Teorema 1.8.** *Sea  $\omega$  una 2-forma en  $V$ . Entonces, existe una base*

*$\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$  de  $V$ , tal que:*

- $\omega(\vec{u}_i, \vec{v}) = 0$  para todo  $i$  en  $\{1, \dots, n\}$  y para todo  $v$  perteneciente a  $V$ .
- $\omega(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0 = \omega(\vec{f}_i, \vec{f}_j)$  para todo  $i, j$  perteneciente a  $\{1, \dots, n\}$ .
- $\omega(\vec{e}_i, \vec{f}_j) = \delta_{ij}$ .

*Esta base recibe el nombre de base canónica asociada a  $\omega$ .*

*Demostración.* Sea

$$U := \{u \in V \mid \omega(u, v) = 0 \forall v \in V\} = \text{Ker}\omega^b.$$

Escogemos una base  $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$  de  $U$  y determinamos un espacio  $W$  complementario de  $U$  en  $V$ , esto es,  $V = U \oplus W$  y  $U \cap W = \{0\}$ . Se descompone  $W$  a través de sumas directas con el siguiente procedimiento.

Tomamos  $\vec{e}_1 \in W$  no nulo. Por definición se debe cumplir que existe  $\vec{f}_1 \in W \subseteq V$  tal que  $\omega(\vec{e}_1, \vec{f}_1) \neq 0$ . Se asume sin pérdida de generalidad que  $\omega(\vec{e}_1, \vec{f}_1) = 1$ . Sean:

$$W_1 = \langle \vec{e}_1, \vec{f}_1 \rangle \quad \text{y} \quad W_1^\omega = \{\vec{w} \in W \mid \omega(\vec{w}, \vec{v}) = 0 \text{ para todo } \vec{v} \text{ en } W_1\}$$

Veamos que se cumplen las siguientes afirmaciones:

- $W_1 \cap W_1^\omega = \{0\}$ . “ $\subseteq$ ” Supongamos que  $\vec{v} = a\vec{e}_1 + b\vec{f}_1 \in W_1 \cap W_1^\omega$ . Consecuentemente, aplicando la bilinealidad de  $\omega$ , su antisimetría, y teniendo en cuenta que habíamos tomado sin pérdida de generalidad  $\omega(\vec{e}_1, \vec{f}_1) = 1$ , se obtienen las siguientes equivalencias:

$$0 = \omega(\vec{v}, \vec{e}_1) = -b \Rightarrow b = 0,$$

$$0 = \omega(\vec{v}, \vec{f}_1) = a \Rightarrow a = 0.$$

Luego, se concluye  $\vec{v} = 0$ .

- $W = W_1 + W_1^\omega$   
 Supongamos que  $\vec{v} \in W$ ,  $\omega(\vec{v}, \vec{e}_1) = c$  y  $\omega(\vec{v}, \vec{f}_1) = d$  con  $c$  y  $d$  constantes arbitrarias. Así,  $\vec{v}$  se puede expresar como:  $\vec{v} = (-c\vec{f}_1 + d\vec{e}_1) + (\vec{v} + c\vec{f}_1 - d\vec{e}_1)$ , donde  $(-c\vec{f}_1 + d\vec{e}_1) \in W_1$  y  $(\vec{v} + c\vec{f}_1 - d\vec{e}_1) \in W_1^\omega$ .

Sea  $\vec{e}_2 \in W_1^\omega$ ,  $\vec{e}_2 \neq 0$ . Hay  $\vec{f}_2 \in W_1^\omega$  tal que  $\omega(\vec{e}_2, \vec{f}_2) = 1$ . Ahora consideráramos  $W_2 = \langle \vec{e}_2, \vec{f}_2 \rangle$ .

Este proceso eventualmente para, puesto que  $\dim V < \infty$ . Se obtiene finalmente que,

$$V = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n,$$

donde  $W_i$  tienen como base  $\{\vec{e}_i, \vec{f}_i\}$ , tal que  $\omega(\vec{e}_i, \vec{f}_i) = 1$ .

**Corolario 1.9.** Si  $(V, \omega)$  es un espacio vectorial simplético, existe una base  $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\}$  tal que:

- $\omega(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 0 = \omega(\vec{f}_i, \vec{f}_j) \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ .
- $\omega(\vec{e}_i, \vec{f}_j) = \delta_{ij}$ .

En consecuencia,  $\dim V = 2n$ .

*Demostración.* Si  $\omega$  es simplética, en particular es no degenerada y por la Proposición 1.7 el espacio  $U := \{u \in V | \omega(u, v) = 0 \forall v \in V\} = 0$ . Por tanto, aplicando el Teorema (1.8) se concluye el resultado.

*Observación 1.10.* Dado un espacio vectorial simplético  $(V, \omega)$  con base canónica  $\{\vec{e}_i, \vec{f}_i\}$ , del Corolario 1.9 se tiene que, la matriz asociada a  $\omega$  es:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

**Definición 1.11.** Sean  $(V, \omega)$ ,  $(V', \omega')$  espacios vectoriales simpléticos. Un isomorfismo  $\varphi : (V, \omega) \rightarrow (V', \omega')$  es una transformación simplética o simplectomorfismo si  $\varphi^* \omega' = \omega$ , donde  $(\varphi^* \omega')(u, v) = \omega'(\varphi(u), \varphi(v))$ .

**Proposición 1.12.** Dado un isomorfismo,  $\varphi : (V, \omega) \rightarrow (V', \omega')$ ,  $\varphi$  es una transformación simplética si y sólo si  $\omega^\flat = \varphi^* \circ (\omega')^\flat \circ \varphi$ .

*Observación 1.13.* Si  $T$  es la matriz asociada a un isomorfismo  $\varphi : V \rightarrow V$  respecto de la base canónica  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  de  $V$ , entonces de la proposición anterior,  $\varphi$  es una transformación simplética si y sólo si

$$T^t J T = J, \tag{1.2}$$

donde  $J$  es la matriz asociada a  $\omega$  y por tanto a  $\omega^\flat$ .

*Observación 1.14.* Si hacemos el estudio anterior, dividiendo la matriz  $T$  en 4 cajas, esto es:

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Al exigir la Ecuación (1.2), se tiene:

$$\begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Desarrollando las multiplicaciones pertinentes, se obtienen las siguientes relaciones, que aseguran el cumplimiento de la igualdad:

$$\begin{aligned} C^t A &= A^t C, \\ B^t D &= D^t B, \\ A^t D - C^t B &= I_n. \end{aligned}$$

**Proposición 1.15.** *Dado un espacio vectorial simpléctico  $(V, \omega)$ , el conjunto de transformaciones simplécticas*

$$S_p(V) = \{\varphi : V \longrightarrow V \mid \varphi \text{ transformación simpléctica}\}$$

*es un grupo con la composición de funciones. El grupo  $S_p(V)$  se denomina grupo simpléctico.*

*Ejemplo 1.16.* Sea  $V = \mathbb{R}^2$ , con la forma simpléctica ya estudiada en el Ejemplo 1.2. En este caso, la ecuación  $T^t J T = J$  se reduce a  $\det(T) = 1$ . En efecto,

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \iff ad - bc = 1 \iff \det(A) = 1.$$

Se concluye por tanto que  $S_p(\mathbb{R}^2) = SL(2, \mathbb{R})$ .

**Corolario 1.17.** *Dado  $V$  un espacio vectorial simpléctico de dimensión arbitraria  $2n$ , este será simplectomorfo a  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_o)$ , donde  $\omega_o$  denota la 2-forma del Ejemplo 1.2.*

## 1.2. Variedades Simplécticas

**Definición 1.18.** *Una estructura simpléctica en una variedad  $M$ , viene dada por una 2-forma cerrada  $\omega \in \Omega^2(M)$  tal que  $\omega(p)$  es una forma simpléctica en  $T_p M$  para todo  $p \in M$ .*



*Ejemplo 1.19.* Sea  $(V, \omega)$  un espacio vectorial simpléctico y  $\vec{u}$  un elemento cualquiera de  $V$ . Utilizando el isomorfismo  $\phi_{\vec{u}} : T_{\vec{u}}V \rightarrow V$  se puede construir  $\bar{\omega} \in \Omega^2(V)$  simpléctica tal que:

$$\bar{\omega}_{\vec{u}}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \omega(\phi_{\vec{u}}(\vec{v}_1), \phi_{\vec{u}}(\vec{v}_2)).$$

para cualquier  $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in T_{\vec{u}}V$ .

Respecto de una base  $\{\vec{e}_i\}$  del espacio vectorial  $V$ , se pueden obtener las coordenadas  $(x^1, \dots, x^{2n})$  para cualquier  $\vec{u} \in V$ . De esta manera, el isomorfismo vendría caracterizado por

$$\phi_{\vec{u}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\vec{u}}\right) = \vec{e}_i.$$

En coordenadas, la forma explícita de  $\bar{\omega}$  es:

$$\bar{\omega} = \sum_{i>j} \bar{\omega}_{ij} dx^i \wedge dx^j.$$

Comprobemos a continuación que es diferenciable y cerrada. Hallando los coeficientes  $\omega_{ij}$  para cada  $\vec{u}$  se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{ij}(x^1, \dots, x^{2n}) &= \bar{\omega}_{(x^1, \dots, x^{2n})}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\vec{u}}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{\vec{u}}\right) = \\ &= \omega\left(\phi_{\vec{u}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\vec{u}}\right), \phi_{\vec{u}}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_{\vec{u}}\right)\right) = \omega(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \omega_{ij} \end{aligned}$$

Como los coeficientes  $\bar{\omega}_{ij}$  son constantes, se concluye por tanto que la  $\bar{\omega}$  definida es diferenciable. En consecuencia, usando que

$$d\bar{\omega} = \sum_{i<j} \frac{\partial \bar{\omega}_{ij}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j,$$

dado que  $\bar{\omega}_{ij}$  no depende de  $(x^1, \dots, x^{2n})$ , inmediatamente se tiene que  $d\bar{\omega} = 0$ .

Como caso particular, considerando el espacio vectorial simpléctico  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_o)$ , visto en el Ejemplo 1.2 y las coordenadas globales  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  derivadas de la base canónica de  $\mathbb{R}^{2n}$ , siguiendo el desarrollo anterior, se obtiene la forma simpléctica

$$\bar{\omega}_o = \sum_{1<i<n} dx_i \wedge dy_i,$$

que dota a  $\mathbb{R}^{2n}$  de estructura de variedad simpléctica.

*Ejemplo 1.20.* Sea  $\omega \in \Omega^2(M)$  simpléctica, entonces para cada  $k$  escalar no nulo se tiene que  $k\omega \in \Omega^2(M)$  es simpléctica, dónde  $(k\omega)(x) = k(\omega(x))$  para todo  $x \in M$ .

*Ejemplo 1.21.* Sean  $(M_1, \omega_1)$  y  $(M_2, \omega_2)$  variedades simplécticas, entonces  $(M_1 \times M_2, \omega_1 \oplus \omega_2)$  es una variedad simpléctica, donde

$$(\omega_1 \oplus \omega_2)(x_1, x_2) : T_{(x_1, x_2)}(M_1 \times M_2) \times T_{(x_1, x_2)}(M_1 \times M_2) \longrightarrow \mathbb{R},$$

por el Ejemplo 1.4 es una forma simpléctica para cualquier  $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ . Además,  $\omega_1 \oplus \omega_2$  es trivialemente cerrada, por ser suma de  $\omega_1$  y  $\omega_2$  que son cerradas por hipótesis.

*Ejemplo 1.22.* Sea  $M$  una variedad y  $T^*M$  su fibrado cotangente. A continuación, definiremos una forma simpléctica en  $T^*M$ . Primero, se define la 1-forma de Liouville como la 1-forma en  $T^*M$

$$\Theta_M : T^*M \longrightarrow T^*(T^*M)$$

donde  $\Theta_M(\alpha_q) \in T_{\alpha_q}^*(T^*M)$  para todo  $\alpha_q$  perteneciente a  $T^*M$ . Para cada  $X_{\alpha_q}$  perteneciente a  $T_{\alpha_q}(T^*M)$ , se define

$$\Theta_M(\alpha_q)(X_{\alpha_q}) = \alpha_q[(T_{\alpha_q}\Pi_M)(X_{\alpha_q})]$$

donde  $\Pi_M$  denota la proyección canónica,  $\Pi_M : T^*M \longrightarrow M$  tal que  $\Pi_M(\alpha_q) = q$ .

Dada  $(U, (q^1, \dots, q^n))$  una carta local en  $M$ , esta induce una carta sobre  $\Pi_M^{-1}(U)$  dada por  $(\bar{q}^1, \dots, \bar{q}^n, p_1, \dots, p_n)$ , donde  $\bar{q}^i(\alpha) = (q^i \circ \Pi_M)(\alpha)$  y  $p_i(\alpha) = \alpha(\frac{\partial}{\partial q^i})$ .

Usando que:

$$(T_{\alpha_q}\Pi_M)\left(\frac{\partial}{\partial \bar{q}^i|_{\alpha_q}}\right) = \frac{\partial}{\partial q^i|_q},$$

$$(T_{\alpha_q}\Pi_M)\left(\frac{\partial}{\partial p^i|_{\alpha_q}}\right) = 0,$$

se tiene que,

$$\Theta_{M(\alpha_q)}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{q}^j|_{\alpha_q}}\right) = p_j(\alpha_q)$$

y

$$\Theta_{M(\alpha_q)}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{p}^i|_{\alpha_q}}\right) = 0.$$

Así, se concluye que,

$$\Theta_M = \sum_{i=1}^n p_i d\bar{q}^i.$$

Definimos ahora  $\omega_M = -d\Theta_M$ . En coordenadas esto se corresponde con  $d(p_i d\bar{q}^i) = -dp_i \wedge d\bar{q}^i = d\bar{q}^i \wedge dp_i$ .

Por construcción es una 2-forma, para verificar que es simpléctica veremos que es cerrada y no degenerada.

Por propiedades de la diferencial exterior, inmediatamente se tiene que:

$$d(\omega_M) = d(-d\Theta_M) = 0.$$

Por la Proposición 1.7, podemos afirmar que, para cada  $\alpha_q$  perteneciente a  $T^*M$ ,  $(T_{\alpha_q}T^*M, \omega_M(\alpha_q))$  es simpléctico si y sólo si  $(\omega_M(\alpha_q))^b$  es un isomorfismo. Aludiendo la Observación 1.6, sabemos que las matrices asociadas a  $\omega_M(\alpha_q)$  y a  $(\omega_M(\alpha_q))^b$  coinciden, y por la definición de  $\omega_M(\alpha_q)$  es claro que su matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente la matriz es regular, por tanto la aplicación  $(\omega_M(\alpha_q))^b$  es un isomorfismo y  $\omega_M$  es simpléctica.

**Definición 1.23.** Sean  $(M_1, \omega_1)$  y  $(M_2, \omega_2)$  dos variedades simplécticas y sea  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  un difeomorfismo,  $\varphi$  es un *simplectomorfismo* si  $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$ .

*Ejemplo 1.24.* Dada  $\beta \in \Omega^1(M)$ , se define  $\psi_\beta : T^*M \rightarrow T^*M$ , donde  $\psi_\beta(\alpha_q) = \alpha_q + \beta(q)$  con  $\alpha_q \in T_q^*M$ . Se demuestran a continuación las siguientes propiedades de la aplicación  $\psi_\beta$ .

-  $\psi_\beta$  es un difeomorfismo: Sea  $(q^i, p_i)$  la representación en coordenadas de  $\alpha(q) \in T_q^*M$ , y  $(q^i, h_i)$  la de  $\beta(q) \in T_q^*M$ . Entonces, se tiene que  $\psi_\beta(q^i, p_i) = (q^i, p_i + h_i)$ . Luego, observando como funciona la aplicación en coordenadas notamos que es diferenciable. Además, la inversa de la aplicación viene dada por  $\psi_\beta^{-1} = \psi_{-\beta}$ , concluimos por tanto que  $\psi_\beta$  es un difeomorfismo.

-  $\psi_\beta$  verifica la siguiente igualdad:  $\psi_\beta^*(\Theta_M) = \Theta_M + \Pi_M^*\beta$ .

Sea  $\alpha_q$  una 1-forma en  $M$ , tal que  $\alpha_q \in T_q^*M$  y  $X_{\alpha_q} \in T_{\alpha_q}T^*M$ . Entonces, para cualquier  $q \in M$  se tiene

$$\begin{aligned} \Theta_M(\psi_\beta(\alpha_q))(T_{\alpha_q}\psi_\beta(X_{\alpha_q})) &= \psi_\beta(\alpha_q)((T_{\psi_\beta(\alpha_q)}\Pi_M)(T_{\alpha_q}\psi)(X_{\alpha_q})) = \\ &= \psi_\beta(\alpha_q)(T_{\alpha_q}(\Pi_M \circ \psi)(X_{\alpha_q})) = (\alpha_q + \beta(q))(T_{\alpha_q}\Pi_M(X_{\alpha_q})) = \\ &= \alpha_q(T_{\alpha_q}\Pi_M(X_{\alpha_q})) + \beta(q)(T_{\alpha_q}\Pi_M)(X_{\alpha_q}) = \Theta_M(\alpha_q)(X_{\alpha_q}) + (\Pi_M^*\beta)(\alpha_q)(X_{\alpha_q}) = \\ &= (\Theta_M + \Pi_M^*\beta)_{\alpha_q}(X_{\alpha_q}) \end{aligned}$$

-  $\psi_\beta^*$  es simplectomorfismo cuando  $\beta$  es cerrada: Como  $\omega_M = d\Theta_M$ , se tiene que

$$\psi_\beta^*(\omega_M) = d\psi_\beta^*(\Theta_M) = d(\Theta_M + \Pi_M^*\beta) = \omega_M + \Pi_M^*(d\beta)$$

Por tanto,  $\psi_\beta^*$  es simplectomorfismo, si y sólo si,  $\Pi_M^*(d\beta) = 0$ . Dado que,  $\Pi_M$  es una submersión, se tiene que  $\Pi_M^*$  es inyectiva, por tanto,  $\psi_\beta^*$  es simplectomorfismo si y sólo si  $\beta$  es cerrada.

*Ejemplo 1.25.* Sean  $M$  y  $N$  dos variedades y  $f : M \rightarrow N$  un difeomorfismo. Entonces  $\varphi_f := T^*f : T^*M \rightarrow T^*N$  con  $\varphi_f(\alpha_m) \in T_{f(m)}^*N$ , donde  $\varphi_f(\alpha_m) = T_{f(m)}^*f^{-1}(\alpha_m)$ , es un simplectomorfismo.

A continuación se va a demostrar que:  $\varphi_f^*(\Theta_N) = \Theta_M$

$$\begin{aligned} \Theta_N(\varphi_f(\alpha_m))(T_{\alpha_m}\varphi_f(X_{\alpha_m})) &= \varphi_f(\alpha_m)((T_{\varphi_f(\alpha_m)}\Pi_N)(T_{\alpha_m}\varphi_f(X_{\alpha_m}))) = \\ &= \varphi_f(\alpha_m)(T_{\alpha_m}(\Pi_N \circ \varphi_f)(X_{\alpha_m})) \end{aligned}$$

Atendiendo al diagrama conmutativo derivado de relacionar  $\varphi_f$ ,  $\Pi_N$ ,  $\Pi_M$ , y  $f$  se tiene que  $\Pi_N \circ \varphi_f = f \circ \Pi_M$ . Luego,

$$\begin{aligned} \varphi_f(\alpha_m)(T_{\alpha_m}(\Pi_N \circ \varphi_f)(X_{\alpha_m})) &= \varphi_f(\alpha_m)(T_{\alpha_m}(f \circ \Pi_M)(X_{\alpha_m})) = \\ &= \varphi_f(\alpha_m)(T_{\alpha_m}f(T_{\alpha_m}\Pi_M(X_{\alpha_m}))) = T_{f(m)}^*f^{-1}(\alpha_m)(T_{\alpha_m}f(T_{\alpha_m}\Pi_M(X_{\alpha_m}))) = \\ &= \alpha_m((T_{f(m)}f^{-1} \circ T_{\alpha_m}f)(T_{\alpha_m}\Pi_M(X_{\alpha_m}))) = \alpha_m((T_{\alpha_m}\Pi_M(X_{\alpha_m}))) = \\ &= \Theta_M(\alpha_m)(X_{\alpha_m}) \end{aligned}$$

En efecto,  $\varphi_f^*(\Theta_N) = \Theta_M$ . En consecuencia,  $\varphi_f^*(\omega_N) = -d\varphi_f^*(\Theta_N) = -d\Theta_M = \omega_M$ .

Dado un difeomorfismo  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ , se puede construir la subvariedad  $S_\varphi \subseteq M_1 \times M_2$  definida como:

$$S_\varphi = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in M_1\}. \quad (1.3)$$

Esta subvariedad, denominada el grafo de  $\varphi$ , permite caracterizar los simplectomorfismos según la siguiente proposición.

**Proposición 1.26.** *Dadas dos variedades simplécticas  $(M_1, \omega_1)$  y  $(M_2, \omega_2)$  y un difeomorfismo  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ ,  $\varphi$  es un simplectomorfismo si y sólo si la restricción de la forma simpléctica  $\omega_1 \oplus -\omega_2$  al grafo de  $\varphi$ , definido por (1.3), se anula.*

*Demostración.* Dado un difeomorfismo  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ , se tiene que,

$$T_{(x, \varphi(x))}S_\varphi = \{(\vec{u}, T_x\varphi(\vec{u})) \mid \vec{u} \in T_xM_1\}. \quad (1.4)$$

Por tanto, usando la definición de  $\omega_1 \oplus -\omega_2$  recogida en el Ejemplo 1.21, su restricción a  $S_\varphi$  viene dada por:

$$\begin{aligned} (\omega_1 \oplus -\omega_2)_{(x, \varphi(x))}((\vec{u}_1, T_x\varphi(\vec{u}_1)), (\vec{u}_2, T_x\varphi(\vec{u}_2))) &= \\ = \omega_1(x)(\vec{u}_1, \vec{u}_2) - \omega_2(\varphi(x))(T_x\varphi(\vec{u}_1), T_x\varphi(\vec{u}_2)) &= (\omega_1 - \varphi^*\omega_2)(x)(\vec{u}_1, \vec{u}_2), \end{aligned}$$

de lo que se concluye que la restricción se anula en  $S_\varphi$  si y sólo si  $\varphi$  es un simplectomorfismo.

Un resultado importante en Geometría Simplética es el conocido como Teorema de Darboux, en el que se prueba que toda estructura simpléctica admite una forma local normal. La prueba de este resultado se encuentra en [1, Teorema 3.2.2]

**Teorema 1.27.** *Sea  $(M, \omega)$  una variedad simpléctica. Para todo punto  $p \in M$ , se puede encontrar una carta  $(U, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  centrada en  $p$  tal que,*

$$\omega|_U = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i. \quad (1.5)$$

**Definición 1.28.** *Las cartas  $(U, \varphi)$  del Teorema 1.27 se denominan Cartas de Darboux y las coordenadas se denominan coordenadas canónicas.*



## Óptica

---

### 2.1. Óptica Geométrica

La Óptica Geométrica es una aproximación de la Óptica de Onda, donde la naturaleza ondulatoria de la luz es despreciada. En ella, no se tienen en cuenta fenómenos como la difracción, las interferencias o la polarización. En Óptica Geométrica, los rayos a considerar son rectilíneos, lo que justifica la siguiente definición.

#### 2.1.1. El Espacio de Rayos como variedad simpléctica

**Definición 2.1.** *El espacio de rayos, denotado por  $\mathcal{L}$ , es el conjunto de rectas orientadas en  $\mathbb{R}^3$ .*

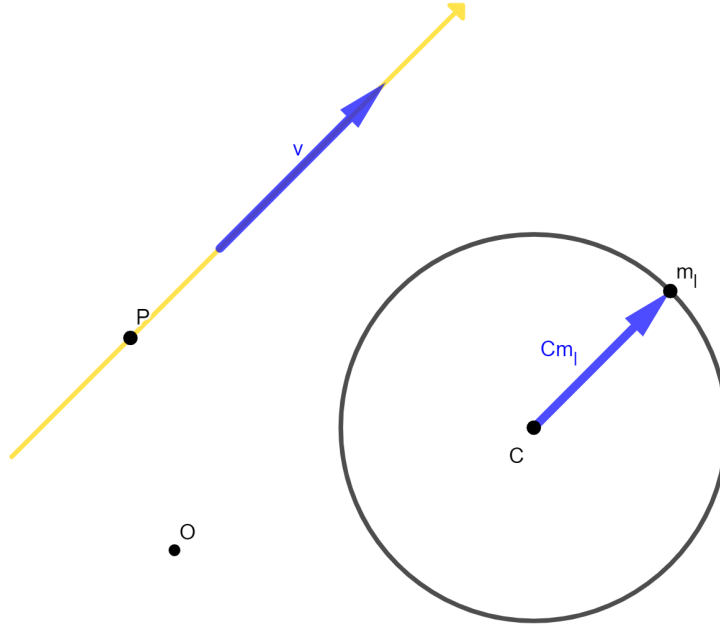
Para dotar a este espacio de estructura matemática, se establece a continuación una biyección entre el espacio de rayos  $\mathcal{L}$  y  $T^*S^2$ , recogida en la referencia [7, Proposition 4.1] (ver también [4]).

**Teorema 2.2.** *Sea  $\mathcal{L}$  el espacio de rayos en  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ . Dado un punto  $O \in \mathbb{R}^n$ , existe una biyección entre  $\mathcal{L}$  y el fibrado cotangente  $T^*S^{n-1}$ , donde  $S^{n-1}$  es la esfera de centro  $C$  el origen y radio 1. Esta biyección permite dotar a  $\mathcal{L}$  de una estructura de variedad diferenciable y la forma simpléctica canónica  $\omega_{S^{n-1}}$  en  $T^*S^{n-1}$  induce una forma simpléctica en  $\mathcal{L}$ .*

*Demostración.* Sea  $\phi_O : \mathcal{L} \rightarrow T^*S^{n-1}$  definida como sigue: dado  $l \in \mathcal{L}$  y  $O$  un punto arbitrario de  $\mathbb{R}^n$  distinto de  $C$ , se tiene que  $\phi_O(l) = \eta_l \in T_{m_l}^*S^{n-1}$  donde  $m_l \in S^{n-1}$  verifica que  $\overrightarrow{Cm_l}$  es paralelo a  $l$  y  $\eta_l : T_{m_l}S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  se define como  $\eta_l(\vec{u}) = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{u}$ , donde  $P$  es un punto arbitrario de  $l$ .

Se observa que la aplicación es independiente del punto  $P \in l$ . De hecho, si se toma un  $P' \in l$ , entonces

$$\eta_l(\vec{u}) = \overrightarrow{OP'} \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'}) \cdot \vec{u} = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{PP'} \cdot \vec{u}$$



**Figura 2.1.**  $\mathcal{L}$  como variedad simpléctica

Atendiendo a que  $\vec{u} \in T_{m_l} S^{n-1}$ , es decir, es un vector perpendicular a  $\overrightarrow{Cm_l}$ , y que  $\overrightarrow{Cm_l}$  y  $\overrightarrow{PP}$  son paralelos, se tiene que el producto escalar de ambos vectores es nulo. Luego,

$$\overrightarrow{OP'} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{u}$$

Se demuestra a continuación que la aplicación  $\phi_O$  es biyectiva:

Inyectividad: Sean  $\phi_O(l_1) = (m_{l_1}, \eta_{l_1})$  y  $\phi_O(l_2) = (m_{l_2}, \eta_{l_2})$ . Igualando componente a componente se tiene que  $m_{l_1} = m_{l_2}$  y con ello  $\overrightarrow{Cm_{l_1}} = \overrightarrow{Cm_{l_2}}$ . Por tanto, los vectores directores de cada recta coinciden. Además, de la condición  $\eta_{l_1} = \eta_{l_2}$ , se tiene que,  $\overrightarrow{OP_1} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{OP_2} \cdot \vec{u}$  con  $P_1 \in l_1$  y  $P_2 \in l_2$ . Esto es equivalente a que  $(\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2}) \cdot \vec{u} = 0$  para todo  $\vec{u} \in T_{m_l} S^{n-1}$ , pero  $\vec{u}$  es un vector cualquiera tangente a  $S^{n-1}$  en el punto  $m_l$ , luego la ecuación anterior nos estaría diciendo que  $\overrightarrow{P_2P_1} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2}$  es perpendicular a  $T_{m_l} S^{n-1}$ , y por tanto paralelo a la dirección radial  $\overrightarrow{Cm_{l_1}}$ , esto es,

$$\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{P_2P_1} = \lambda \overrightarrow{Cm_{l_1}}.$$

Por tanto, se tiene que,  $P_1, P_2$  pertenecen a ambas rectas  $l_1, l_2$ , es decir,  $l_1 = l_2$ .

Sobreyectividad: Para demostrar esta propiedad se tendrá presente el isomorfismo  $\psi$  sobre un espacio vectorial euclídeo  $V$  de dimensión finita y su dual  $V^*$ , que viene dado por  $\psi(\vec{u})(\vec{v}) = \vec{u} * \vec{v}$  donde  $*$  denota el producto escalar.

Dado  $h \in T_m^* S^{n-1}$ , tenemos que encontrar  $l_h \in \mathcal{L}$ , tal que  $\phi_O(l_h) = h$ . Exigiendo esa igualdad se tiene que un vector director de la recta será  $\vec{v}_h = \overrightarrow{Cm}$ ,



faltaría por determinar un punto de la misma. Esto es equivalente a encontrar un  $P_h \in l_h$  tal que  $\overrightarrow{OP_h} \cdot \vec{u} = h(\vec{u})$ .

Por el isomorfismo  $\psi$ , se deduce que para cualquier  $h \in T_m^*S^{n-1}$  existe un  $\vec{v} \in T_mS^{n-1}$  tal que  $\vec{v} \cdot \vec{u} = h(\vec{u})$ , para todo  $\vec{u} \in T_mS^{n-1}$ . Por tanto, el  $P_h$  buscado es el punto que cumple  $\overrightarrow{OP_h} = \vec{v}$ . Consecuentemente,  $\phi_O(l_h) = h$  y con ello,  $\phi_O$  es sobreyectiva.

La biyección entre  $\mathcal{L}$  y  $T^*S^{n-1}$  induce una estructura de variedad diferenciable en  $\mathcal{L}$  a partir de una estructura de variedad diferenciable en  $T^*S^{n-1}$ . Para ver que dicha estructura no depende del punto, notar que dados  $O, O' \in \mathbb{R}^3$ , sus covectores asociados  $\eta_O$  y  $\eta_{O'}$ , cumplen la siguiente equivalencia:

$$\eta_{O'}(\vec{u}) = \eta_O(\vec{u}) + \overrightarrow{O'O} \cdot \vec{u},$$

para todo  $\vec{u} \in T_{m_i}S^{n-1}$ . Por tanto, las aplicaciones  $\phi_O$  y  $\phi_{O'}$  están relacionadas por  $\phi_{O'} = \psi_{O'O} \circ \phi_O$ , donde  $\psi_{O'O} : T^*S^{n-1} \rightarrow T^*S^{n-1}$  es el difeomorfismo dado por  $\psi_{O'O}(\eta) = \eta + df_{O'O}(\Pi_{S^{n-1}}(\eta))$ , donde  $f_{O'O} : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  se define por  $f_{O'O}(M) = \overrightarrow{O'O} \cdot \overrightarrow{CM}$ .

Finalmente, si  $\omega_{\mathcal{L}} = \phi_O^*(\omega_{S^{n-1}})$  es la forma simpléctica inducida por la 2-forma simpléctica canónica  $\omega_{S^{n-1}}$  en  $T^*S^{n-1}$ , como  $\psi_{O'O} = \psi_{df_{O'O}}$ , y  $df_{O'O}$  es trivialmente cerrada, del Ejemplo 1.24 se tiene que  $\omega_{\mathcal{L}}$  está bien definida.

A continuación, describiremos de manera explícita la forma simpléctica  $\omega_{\mathcal{L}}$  definida en  $\mathcal{L}$ .

*Observación 2.3.* Sea

$$\hat{\mathcal{L}} = \{(P, l) \mid l \in \mathcal{L}, P \in l\},$$

de modo que la proyección sobre  $\mathcal{L}$  viene dada por,  $(P, l) \rightarrow l$ . Si fijamos un punto  $O \in \mathbb{R}^3$ , atendiendo a la biyección encontrada en el Teorema 2.2 podemos encontrar una identificación entre  $\hat{\mathcal{L}}$  y  $T_{S^2}^*\mathbb{R}^3 = \{(Q, \gamma) \mid Q \in S^2, \gamma \in T_Q^*\mathbb{R}^3\}$ , esto implica que  $\hat{\mathcal{L}}$  es una variedad de dimensión 5.

Además, tomando la inclusión  $i : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , podemos definir  $q : T_{S^2}^*\mathbb{R}^3 \rightarrow T^*S^2$ , de modo que  $q(Q, \gamma) = (Q, T_Q i^*(\gamma))$ . Fijando  $(x_i, y_i)$  como coordenadas globales sobre  $T^*\mathbb{R}^3$ , tenemos que su 2-forma simpléctica canónica (Ejemplo 1.22) viene dada por

$$\omega_{\mathbb{R}^3} = \sum_{i=1}^3 dx_i \wedge dy_i.$$

Dadas las relaciones anteriormente nombradas, teniendo en cuenta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{L}} & \longrightarrow & T_{S^2}^*\mathbb{R}^3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{L} & \longrightarrow & T^*S^2 \end{array}$$

se induce sobre  $\hat{\mathcal{L}}$  la siguiente 2-forma diferenciable:

$$\omega_{\hat{\mathcal{L}}}(P, l) = \sum_{i=1}^3 dp_i \wedge du_i = d\overrightarrow{OP} \wedge d\overrightarrow{u}, \quad (2.1)$$

donde  $(u_1, u_2, u_3)$  son las coordenadas de  $\overrightarrow{u}$ , vector director unitario de  $l \in \mathcal{L}$  y  $(p_1, p_2, p_3)$  son las coordenadas de  $\overrightarrow{OP}$ . Si se toma otro punto  $P' \in l$  distinto de  $P$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \omega_{\hat{\mathcal{L}}}(P', l) &= d\overrightarrow{OP'} \wedge d\overrightarrow{u} = d(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PP'}) \wedge d\overrightarrow{u} = \\ &= d\overrightarrow{OP} \wedge d\overrightarrow{u} + d\overrightarrow{PP'} \wedge d\overrightarrow{u}. \end{aligned}$$

Tenemos que  $\overrightarrow{PP'}$  es un vector director de  $l$ , esto es,  $\overrightarrow{PP'} = \lambda \overrightarrow{u}$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$  y, por las propiedades de la diferencial exterior,  $d\lambda \overrightarrow{u} \wedge d\overrightarrow{u} = 0$ . Luego,

$$\omega_{\hat{\mathcal{L}}}(P', l) = \omega_{\hat{\mathcal{L}}}(P, l).$$

La independencia del punto  $P$  permite proyectar  $\omega_{\hat{\mathcal{L}}}$  sobre  $\mathcal{L}$ , dando lugar a la forma simpléctica  $\omega_{\mathcal{L}}$  estudiada en el Teorema 2.2, explícitamente dada por:

$$\omega_{\mathcal{L}}(l) = d\overrightarrow{OP} \wedge d\overrightarrow{u}, \quad (2.2)$$

para cada  $l \in \mathcal{L}$  con vector unitario  $\overrightarrow{u}$  y para cualquier punto  $P \in l$ , donde  $\wedge$  en esta expresión es una combinación de productos escalares y exteriores como en la Ecuación (2.1).

Construiremos ahora una familia de cartas distinguida en el espacio de rayos  $\mathcal{L}$ . Consideramos la carta en  $S^1$  dada por el abierto  $V = \{(x, y) \in S^1 \mid x > 0\}$ , y el homeomorfismo  $\psi(x, y) = \psi(\cos(\theta), \sin(\theta)) = \theta$ . Si denotamos por  $\theta$  la coordenada en  $V \subseteq S^1$  y  $(\theta, p_\theta)$  las coordenadas canónicas inducidas en  $T^*S^1$ , la composición  $\phi_O \circ \bar{\psi}$  determina una carta en el espacio de rayos  $\mathcal{L}$ , donde  $\phi_O : \mathcal{L} \rightarrow T^*S^1$  es la biyección del Teorema 2.2.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \xrightarrow{\phi_O} & T^*S^1 \\ & \searrow \varphi & \downarrow \bar{\psi} \\ & & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Si fijamos  $O = (x_o, 0)$  con  $x_o \neq 0$ ,

$$\phi_O^{-1}(\bar{V}) = U_{x_o}^+ = \{l \in \mathcal{L} \mid l \cap r_{x_o} \neq \emptyset \text{ y } -\frac{\pi}{2} < \text{ángulo}(\overrightarrow{v}, (1, 0)) < \frac{\pi}{2}\}$$

donde  $r_{x_o} \equiv x = x_o$  y  $\overrightarrow{v}$  es un vector director de  $l \in \mathcal{L}$ .

Además, dado  $l \in U_{x_o}^+$  podemos escribir  $l \equiv y = mx + b$ , donde  $m = \tan(\theta)$ . Así, considerando  $m_l = (\cos(\theta), \sin(\theta))$  y  $P_l = (x_o, mx_o + b) = (x_o, \tan(\theta)x_o + b) \in l$ , si  $\eta_l = \phi_O(l)$ , por la propia definición de  $\phi_O$  se tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\eta_l(\vec{u}) &= \overrightarrow{OP_l} \cdot \vec{u} = (0, \tan(\theta)x_o + b) \cdot (u_1, u_2) = \\ &= (\tan(\theta)x_o + b)dy(u_1, u_2),\end{aligned}$$

donde  $\vec{u} \in T_{m_l}S^2$ . Usando que  $dy(u_1, u_2) = \cos(\theta)d\theta(u_1, u_2)$ ,

$$\eta_l(\vec{u}) = (x_o \sin(\theta) + b \cos(\theta))d\theta(u_1, u_2).$$

Por tanto,

$$\bar{\psi} \circ \phi_O(l) = (\theta, x_o \sin(\theta) + b \cos(\theta)),$$

lo que nos llevaría a definir coordenadas  $(q, p)$  en  $\mathcal{L}$  dadas por  $q = \theta$  y  $p = x_o \sin(\theta) + b \cos(\theta)$ . Sin embargo, las coordenadas  $(q, p)$  no son canónicas ya que,

$$\begin{aligned}\phi_O^*(d\theta \wedge dp_\theta) &= d(\theta \circ \phi_O) \wedge d(p_\theta \circ \phi_O) = \\ &= d\theta \wedge (x_o \cos(\theta)d\theta + \cos(\theta)db - b \sin(\theta)d\theta) = \\ &= \cos(\theta)d\theta \wedge db.\end{aligned}$$

Si modificamos estas coordenadas, y definimos las coordenadas  $\varphi_{x_o}^+ = (q, p)$  en  $\mathcal{L}$  como:

$$\begin{cases} q = \sin(\theta) \\ p = b \end{cases}$$

tenemos que,  $\omega_{\mathcal{L}} = dq \wedge dp$ , esto es,  $(q, p)$  son las coordenadas canónicas para  $\omega_{\mathcal{L}}$ . A estas coordenadas se les denomina, coordenadas asociadas al plano de referencia  $x = x_o$  (también llamada pantalla estándar).

*Observación 2.4.* Una extensión al conjunto de rayos en  $\mathbb{R}^3$ , incluyendo coordenadas canónicas, se puede ver en [4].

A continuación, se definen conceptos básicos sobre la Óptica Geométrica a los que nos referiremos durante el desarrollo de la memoria.

**Definición 2.5.** *El eje óptico, es una recta de izquierda a derecha que representa el eje de simetría del sistema.*

**Definición 2.6.** *Un plano de referencia o pantalla, es una recta(plano) perpendicular al eje óptico, denotada por  $RP$ .*

**Definición 2.7.** *El índice de refracción de un medio viene determinado por la expresión:*

$$n = \frac{c}{v},$$

donde  $c$  denota la velocidad de la luz en el vacío y  $v$  la velocidad con la que viaja la luz en un medio concreto.

*Observación 2.8.* i) Notar que, en general si el índice de refracción es  $n$ , la forma simpléctica  $\omega_{\mathcal{L}}$  se define por  $n\omega_{\mathcal{L}}$  y las coordenadas canónicas  $\varphi_{x_0}^+ = (q, p)$  están dadas por:

$$\begin{cases} q = n \operatorname{sen}(\theta) \\ p = b \end{cases} \quad (2.3)$$

ii) Hay que resaltar que cualquier eje óptico (no necesariamente la recta horizontal  $y = 0$ ) y un plano de referencia  $RP$  permiten construir coordenadas en  $\mathcal{L}$ . De hecho, estas cartas coordenadas permitirían construir un atlas simpléctico en  $\mathcal{L}$ .

### 2.1.2. Transformaciones ópticas

Una transformación óptica representa la variación que experimenta un rayo cuando toma contacto con objetos ópticos. Las más elementales son la traslación, la refracción y la reflexión.

En esta memoria nos centraremos en la traslación y en la refracción, dejando a un lado la reflexión, puesto que nuestro objetivo final es resolver un problema enfocado a las lentes. De este modo, nos apoyaremos en las referencias [7], [4] y [10].

Comprobaremos a continuación que tanto la traslación como la refracción son simplectomorfismos en  $\mathcal{L}$ .

#### Traslación

**Definición 2.9.** *La traslación es el proceso óptico en el que se observa la trayectoria que sigue un rayo al atravesar dos pantallas que descansan sobre el mismo medio y que se encuentran separadas por una distancia  $t$ .*

La traslación no provoca modificaciones en el rayo sobre el que actúa.

Desde un punto de vista matemático, la traslación coincide con la aplicación  $Id : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$  que es trivialmente un simplectomorfismo.

Tomando como pantallas  $x = 0$  y  $x = t$  tal y como se expone en la Figura 2.2, atendiendo al diagrama que se muestra a continuación se toman las cartas  $(U_0^+, \varphi_0^+)$  y  $(U_t^+, \varphi_t^+)$  en  $\mathcal{L}$  descritas en (2.3) y se tiene que:

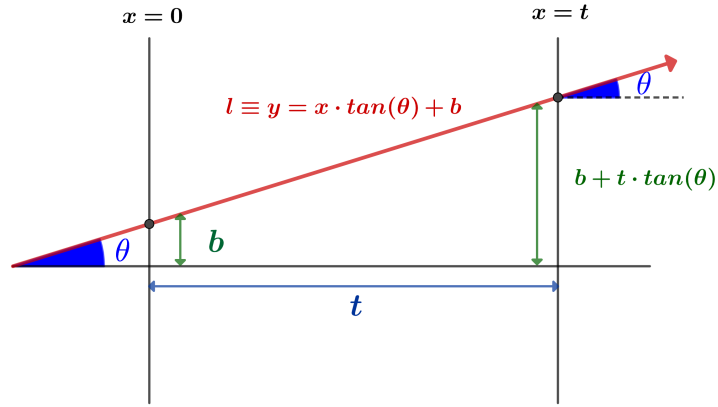


Figura 2.2. Traslación

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{U}^+ & \xrightarrow{Id} & \mathcal{U}^+ \\
 \downarrow & & \downarrow \varphi_t^+ \\
 \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\hat{Id}} & \mathbb{R}^2
 \end{array}$$

$$\hat{Id}(p_1, q_1) = (\varphi_t^+ \circ Id \circ \varphi_0^{+ -1})(q_1, p_1) = (q_2, p_2)$$

donde

$$\begin{cases}
 q_2 = q_1 \\
 p_2 = p_1 + t \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\theta)} = p_1 + \frac{t}{n} \frac{q_1}{\sqrt{1 - \text{sen}(\theta)^2}} = p_2 + t \frac{q_1}{\sqrt{n^2 - q_1^2}}
 \end{cases} \quad (2.4)$$

que coincide con la expresión de la traslación en un medio homogéneo recogida en [10, 2.10 Equation] (con los valores  $p$  y  $q$  intercambiados).

### Refracción

**Definición 2.10.** *La refracción es el fenómeno óptico que experimenta un rayo al atravesar una superficie que separa dos medios con distintos índices de refracción.*

**Proposición 2.11 (Ley de Snell [5]).** *Si  $i_1$  es el ángulo que forma el rayo incidente con la normal a la superficie en el medio 1, con índice de refracción  $n_1$ , y  $i_2$  es el ángulo que configura el rayo refractado sobre el medio 2, con índice de refracción  $n_2$ , se tiene que:*

$$n_1 \text{sen}(i_1) = n_2 \text{sen}(i_2) \quad (2.5)$$

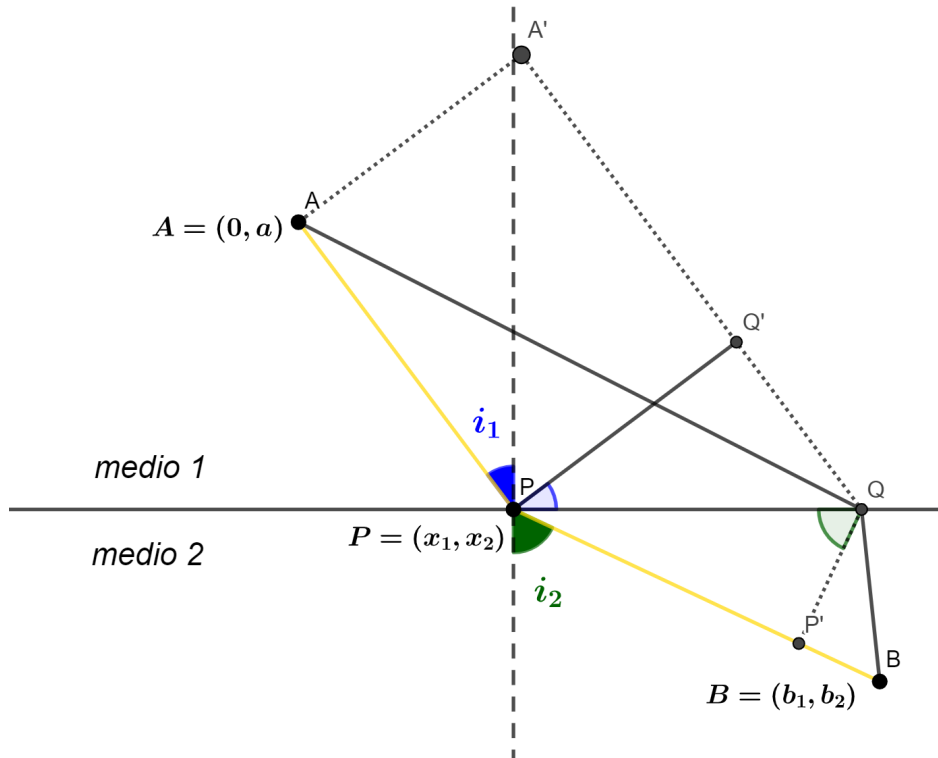


Figura 2.3. Ley de Snell

*Demostración.* Para el desarrollo de esta prueba, es necesario tener presente el Principio de Fermat, que establece que la trayectoria recorrida por un rayo de luz entre dos puntos A y B estará descrita por el camino entre A y B que conlleve menos tiempo en recorrerse.

Atendiendo a la Figura 2.3, vamos a suponer que la trayectoria determinada por los puntos A, P y B subrayada en amarillo, es la que verifica la Ley de Snell. Veremos que si consideramos cualquier otro punto Q encargado de unir el punto A con el punto B, el camino que se describe tardará más tiempo en recorrerse. Luego, por el Principio de Fermat podremos concluir que un rayo óptico que atraviesa una superficie que separa dos medios con distintos índices de refracción va a verificar la Ley de Snell.

Denotaremos por  $v_1$  y  $v_2$  a las velocidades en el medio 1 y 2 respectivamente. Por las relaciones presentes en la Figura 2.3 con respecto a los ángulos se tiene que :

$$\frac{PP'}{v_2} = \frac{PQ \operatorname{sen}(i_2)}{v_2}$$

Suponiendo cierta la Ley de Snell (2.5), recordando que  $n_i = \frac{c}{v_i}$ , se tiene que:

$$\frac{PP'}{v_2} = \frac{PQ \operatorname{sen}(i_2)}{v_2} = \frac{PQ \operatorname{sen}(i_1)}{v_1} = \frac{QQ'}{v_1}.$$

Luego, si denotamos por  $t$  a la aplicación que mide el tiempo que tarda en recorrerse una distancia a la velocidad del medio donde se encuentra, se deduce que  $t(PP') = t(QQ')$ .

Si prestamos atención sobre los triángulos rectángulos presentes en la Figura 2.3, teniendo en cuenta que la hipotenusa de un triángulo siempre es mayor a la longitud de sus catetos, se obtiene la siguiente relación:

$$\begin{aligned} t(AQ) + t(QB) &> t(A'Q) + t(P'B) = t(A'Q') + t(Q'Q) + t(P'B) = \\ &= t(AP) + t(PP') + t(P'B) = t(AP) + t(PB). \end{aligned}$$

En efecto, el rayo coloreado en la Figura 2.3 caracterizado por verificar la Ley de Snell es aquel que menos se dilata en el tiempo y por tanto, atendiendo al Principio de Fermat, es el encargado de describir el proceso de refracción.

**Proposición 2.12.** *El conjunto de rayos que atraviesan una superficie refractante constituyen un abierto  $U_1$  de la variedad simpléctica  $(\mathcal{L}, \omega_{\mathcal{L}})$ , así como el conjunto de rayos resultantes tras la acción de la superficie constituyen un abierto  $U_2 \in (\mathcal{L}, \omega_{\mathcal{L}})$ . La aplicación  $\mathcal{R}$  que transforma la recta orientada inicial  $l_1$  en el rayo refractado  $l_2$  es un simplectomorfismo donde  $\mathcal{R} : (U_1, n_1\omega_{\mathcal{L}}) \longrightarrow (U_2, n_2\omega_{\mathcal{L}})$  con  $\omega_{\mathcal{L}}$  definida en la Ecuación (2.2).*

*Demostración.* Sean  $\omega_1 = n_1\omega_{\mathcal{L}}$  y  $\omega_2 = n_2\omega_{\mathcal{L}}$ , para comprobar que  $\mathcal{R}$  es un simplectomorfismo debemos verificar que  $\mathcal{R}^*\omega_2 = \omega_1$ , esto es,

$$\omega_2(\mathcal{R}(l))(T_l\mathcal{R}(\vec{u}_1), T_l\mathcal{R}(\vec{u}_2)) = \omega_1(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \quad (2.6)$$

para cualquier  $l \in U_1$  y para cualquier  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in T_lU_1 \times T_lU_1$ .

Sin embargo, no tenemos una expresión explícita para la aplicación de la Refracción, lo que impide actuar directamente sobre la Ecuación (2.6).

De hecho, si  $\vec{u}_1$  y  $\vec{u}_2$  son los vectores directores unitarios de  $l_1$  y  $l_2$ , respectivamente, y consideramos  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  las proyecciones ortogonales de estos vectores sobre el plano tangente a la superficie, la Ley de Snell nos da:

$$n_1\vec{v}_1 = n_2\vec{v}_2$$

o, equivalentemente, tomando  $\vec{n}$  como el vector normal a la superficie en  $P$ ,

$$n_2(\vec{u}_2 - (\vec{u}_2 \vec{n}) \vec{n}) = n_1(\vec{u}_1 - (\vec{u}_1 \vec{n}) \vec{n}). \quad (2.7)$$

Resumiendo, si  $l(P, \vec{u})$  es la recta por  $P$  con vector director  $\vec{u}$ ,

$$\mathcal{R}(l_{(P, \vec{u}_1)}) = l_{(P, \vec{u}_2)} \quad (2.8)$$

si y sólo si  $\vec{u}_1$  y  $\vec{u}_2$  cumplen (2.7). De la Proposición (1.26), será suficiente comprobar que  $(n_1\omega_{\mathcal{L}} \oplus -n_2\omega_{\mathcal{L}})$  restringido a  $S_{\mathcal{R}}$  se anula, donde

$$S_{\mathcal{R}} = \{(l_{(P,\vec{u}_1)}, l_{(P,\vec{u}_2)}) \mid n_2(\vec{u}_2 - (\vec{u}_2 \vec{n}) \vec{n}) = n_1(\vec{u}_1 - (\vec{u}_1 \vec{n}) \vec{n})\}$$

y  $\omega_{\mathcal{L}}$  está dada por la Ecuación (2.2).

Atendiendo a las relaciones anteriores y notando que  $\vec{n} d\vec{P} = 0$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} n_1\omega_{\mathcal{L}} - n_2\omega_{\mathcal{L}} &= d\vec{P} \wedge ((n_2 d\vec{u}_2 - n_1 d\vec{u}_1)) = d\vec{P} \wedge d(n_2(\vec{u}_2 \vec{n}) \vec{n} - n_1(\vec{u}_1 \vec{n}) \vec{n}) = \\ &= -d(n_2(\vec{u}_2 \vec{n}) - n_1(\vec{u}_1 \vec{n}))(\vec{n} d\vec{P}) = 0, \end{aligned}$$

con lo que se puede concluir el resultado.

*Observación 2.13.* Si consideramos en  $\mathcal{L}$  la pantalla estándar  $x = 0$  y suponemos que la superficie refractante es de la forma  $y = S(x)$ , entonces tomando coordenadas  $(q_1, p_1)$  y  $(q_2, p_2)$  en  $\mathcal{L}$  asociadas a dicha pantalla (2.3), las ecuaciones de la refracción vienen dadas por:

$$\begin{aligned} p_1 + S(\bar{p}) \frac{q_1}{\sqrt{(n_1)^2 - (q_1)^2}} &= p_2 + S(\bar{p}) \frac{q_2}{\sqrt{(n_2)^2 - (q_2)^2}} \\ q_1 + \sqrt{(n_1)^2 - (q_1)^2} \frac{dS}{dx}(\bar{p}) &= q_2 + \sqrt{(n_2)^2 - (q_2)^2} \frac{dS}{dx}(\bar{p}) \end{aligned}$$

Estas ecuaciones han sido consideradas en [8] (intercambiando las  $p$  por las  $q$ ).

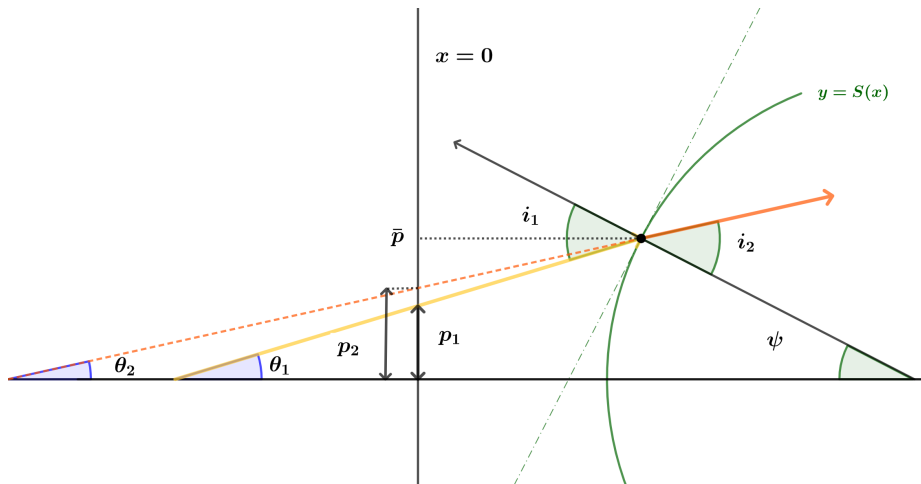


Figura 2.4. Refracción



## 2.2. Óptica Lineal

La Óptica Lineal, es un caso concreto de la Óptica Geométrica donde las aberraciones son ignoradas. Es correcto usarla cuando los ángulos con el eje óptico son lo suficientemente pequeños, para establecer las aproximaciones,

$$\theta = \text{sen}(\theta), \theta = \text{tan}(\theta) \text{ y } 1 = \text{cos}(\theta), \quad (2.9)$$

permitiendo que todas las expresiones se reduzcan a orden 1.

Por otra parte, la Óptica Gaussiana es un caso particular de la Óptica Lineal, donde se asume simetría rotacional, permitiendo que el estudio se restrinja a un plano fijo [2, 10, 6].

**Definición 2.14.** *El Régimen Paraxial, es un modelo de Óptica Geométrica  $d$ -dimensional, donde cada rayo se identifica con un punto del espacio fase  $\mathbb{R}^{2d}$  y está sujeto a transformaciones canónicas lineales. El caso  $d = 1$ , define la Óptica Gaussiana, y  $d = 2$  corresponde a la Óptica Lineal.*

Atendiendo a la carta de rayos ya definida para la Óptica Geométrica en la Observación 2.3 y teniendo en cuenta las aproximaciones lineales establecidas para la Óptica Lineal en la Ecuación (2.9), se fija un plano de referencia  $RP$  con  $x = x_o$  y se consideran las coordenadas  $\varphi_{x_o}^+ \equiv (q, p)$  dadas por:

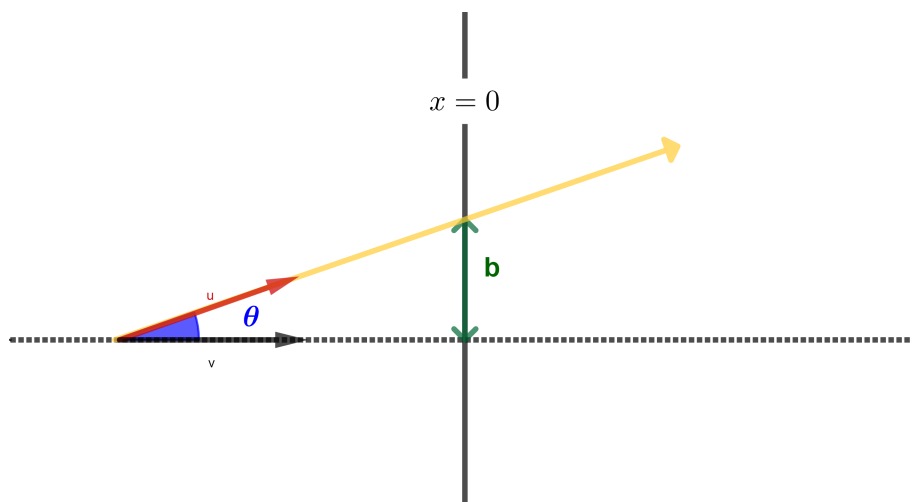


Figura 2.5. Carta del espacio de rayos

$$\begin{cases} q = n\theta \\ p = b \end{cases}$$

El conjunto imagen del abierto  $U_{x_o}^+$  dado por este homeomorfismo es:

$$\varphi_{x_o}^+(U_{x_o}^+) = \left( \frac{-n\pi}{2}, \frac{n\pi}{2} \right) \times \mathbb{R}$$

Las coordenadas explícitas asociadas a cualquier rayo dado en su forma general por  $l \equiv y = mx + b$  y fijando como plano de referencia  $x = 0$  son:

- $q = n \cdot \arctan(m)$
- $p = b$

Por otra parte,

$$\varphi_{x_o}^{+^{-1}}(q, p) \equiv y = x \tan\left(\frac{q}{n}\right) + b$$

Notar que, si extendemos el espacio de rayos a  $\mathbb{R}^3$ , se procede de manera análoga. Entendiendo que, fijado un plano de referencia, su intersección con el rayo vendrá determinada en este caso por dos coordenadas  $(p_1, p_2)$ . Así como, la dirección que describe se tomará unitaria, y vendrá descrita por  $(\theta_1, \theta_2)$ .

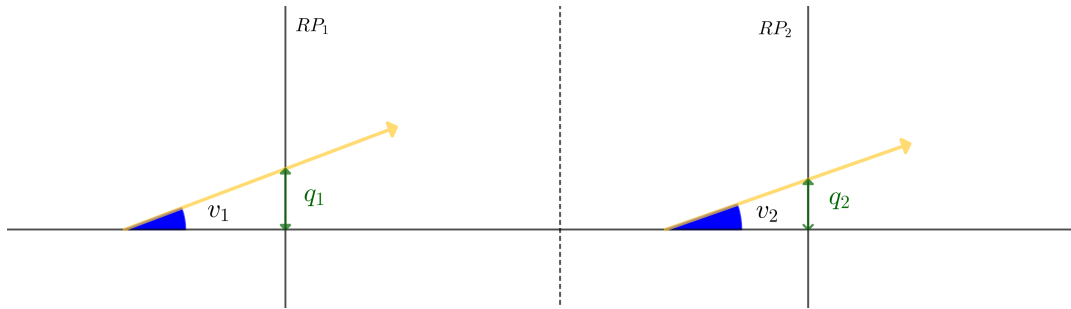


Figura 2.6. Objetivo

Esta sección se centrará en encontrar la relación lineal entre el rayo de entrada y el rayo de salida.

Comenzaremos introduciendo conceptos sobre la Óptica Gaussiana, para luego generalizar lo estudiado a la Óptica Lineal.

*Observación 2.15.* La concatenación de transformaciones ópticas corresponde en lenguaje matemático a la composición de aplicaciones lineales, y con ello, al producto de matrices, cuyo orden es invertido respecto de la composición.

Desde el punto de vista físico se da relevancia al orden en que se componen las transformaciones ópticas. Por ello, surge la necesidad de establecer una aplicación  $\mathcal{M}$  entre el espacio de transformaciones ópticas lineales y sus matrices asociadas, verificando la condición:

$$\mathcal{M}(M_1 \cdot M_2) = \mathcal{M}(M_1) \circ \mathcal{M}(M_2) \quad (2.10)$$

donde  $\cdot$  denota el producto de matrices y  $\circ$  la composición de aplicaciones lineales. Por tanto, se define el siguiente operador  $\mathcal{M}$ :

$$\mathcal{M}(M) \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} := M^{-1} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

De este modo, se tiene que:

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}(M_1) \circ \mathcal{M}(M_2)) : \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} &= \mathcal{M}(M_1) : (\mathcal{M}(M_2)) : \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \\ &= \mathcal{M}(M_1) : M_2^{-1} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = M_2^{-1} ((M_1) : \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}) = \\ &= M_2^{-1} M_1^{-1} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = (M_1 M_2)^{-1} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \mathcal{M}(M_1 M_2) : \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En efecto, la Ecuación (2.10) se verifica. Luego, en el desarrollo matemático se tendrá en cuenta tanto la matriz natural  $M$  asociada a cada fenómeno óptico como el operador  $\mathcal{M}$  que coincide con la acción de su inversa.

A continuación, se presentan los sistemas ópticos más elementales con respecto al régimen paraxial: la traslación y la refracción.

### 2.2.1. Traslación

La traslación o vuelo libre describe el trayecto de un rayo en línea recta entre dos planos de referencia ( $RP_1$  y  $RP_2$ ) que descansan en el mismo medio. El rayo pasa por  $RP_1$  con coordenadas  $(q_1, p_1)$  y al atravesar el segundo plano de referencia ( $RP_2$ ), es caracterizado por  $(q_2, p_2)$ .

Atendiendo a la Figura 2.7 se obtiene la siguiente relación lineal entre  $b_2$  e  $b_1$ :

$$p_2 = b_2 = RP = RQ + QP = TS + SQ \tan(PSQ) = b_1 + \tan(\theta_1) \approx p_1 + t\theta_1,$$

(notar que se ha hecho uso de la aproximación paraxial).

Dado que se trabajará teniendo en cuenta el índice de refracción de cada medio (que en este caso coinciden), la ecuación anterior se modifica obteniendo:

$$p_2 = p_1 + \left(\frac{t}{n}\right)(n\theta_1) = Tq_1 + p_1$$

donde  $T = \frac{t}{n}$ , denominada distancia reducida del espacio. Por su parte, los ángulos se mantienen constantes, luego:

$$q_2 = n\theta_2 = n\theta_1 = 1q_1 + 0p_1$$

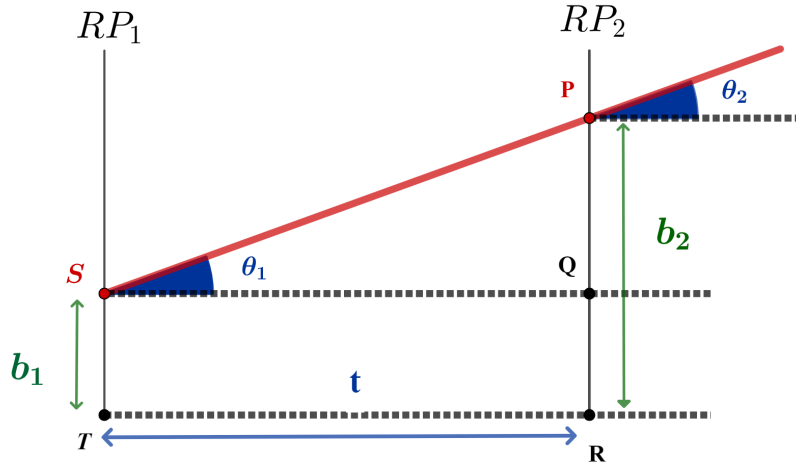


Figura 2.7. Traslación

Las ecuaciones anteriores se pueden escribir a nivel matricial como

$$\begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix}.$$

Luego, la matriz que representa un desplazamiento hacia la derecha a través de una distancia reducida T es

$$D_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$$

donde cabe notar que  $\det(D) = 1$ . Además, la aplicación lineal asociada viene dada por:

$$\mathcal{M}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -T & 1 \end{pmatrix}\right) : \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

El resultado obtenido a partir de la Figura 2.2 lo podíamos haber deducido partiendo de las coordenadas obtenidas en el caso de la traslación para la Óptica Geométrica, recogidas en la Ecuación (2.4) y estableciendo las aproximaciones lineales correspondientes. En efecto,

$$\begin{cases} q_2 = q_1 \\ p_2 = p_1 + t \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{cos}(\theta)} \approx p_1 + t\theta = p_1 + Tq_1 \end{cases}$$

*Observación 2.16.* Si el espacio  $t$  es dividido en dos espacios  $t_1$  y  $t_2$  que siguen manteniendo el mismo índice de refracción  $n$ , se obtienen dos sucesivas matrices de traslación con sus respectivos operadores lineales:

$$D_{T_1} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -T_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } D_{T_2} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -T_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_2 & 1 \end{pmatrix},$$

donde  $T_1 = \frac{t_1}{n}$  y  $T_2 = \frac{t_2}{n}$ . Multiplicando estas dos matrices se obtiene la matriz de traslación para un espacio  $t = t_1 + t_2$ :

$$D_{T_1} D_{T_2} = D_{T_2} D_{T_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T_1 + T_2 & 1 \end{pmatrix} = D_T$$

Como cabría esperar, dos traslaciones sucesivas de un rayo óptico se traducen matricialmente como el producto de sus respectivas matrices de traslación.

Del mismo modo, para un espacio dado de total espesor  $t$ , que consiste en una serie de capas separadas de manera que cada una de ellas tiene su propio espesor  $t_i$ , se tiene que, todas las matrices de traslación pueden ser multiplicadas dando lugar a única matriz que referencia el efecto del espacio completo  $t$ .

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -T_1 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{M} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -T_2 & 1 \end{pmatrix} \cdots \mathcal{M} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -T_n & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\sum_i T_i & 1 \end{pmatrix}.$$

*Observación 2.17.* Si dejamos de asumir simetría rotacional estamos en las condiciones de la Óptica Lineal. Un argumento análogo al anterior, permite concluir que el sistema matricial que relaciona el rayo de entrada con el de salida en la traslación viene dado por:

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -dI & I \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ dI & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

donde,  $q = (q_x, q_y)$ ,  $p = (p_x, p_y)$  y  $d$  corresponde con la distancia óptica entre los planos de referencia.

Cabe señalar que, la matriz que describe este proceso óptico verifica las propiedades asociadas a una transformación simpléctica, vistas en la Observación 1.14. Por tanto, la traslación desde el punto de vista de la Óptica Lineal es una transformación simpléctica.

### 2.2.2. Refracción

En este fenómeno se estudia la acción de una superficie curva que separa dos regiones de índices de refracción  $n_1$  y  $n_2$ . En la Figura 2.8 aparece simulada la refracción, a partir de ella se irán razonando las distintas relaciones que comparten los objetos que intervienen.

La Ley de Snell establece que  $n_1 \text{sen}(i_1) = n_2 \text{sen}(i_2)$  donde  $i_1$  e  $i_2$  son los ángulos señalados en la Figura 2.8. Adaptando esta igualdad al Régimen

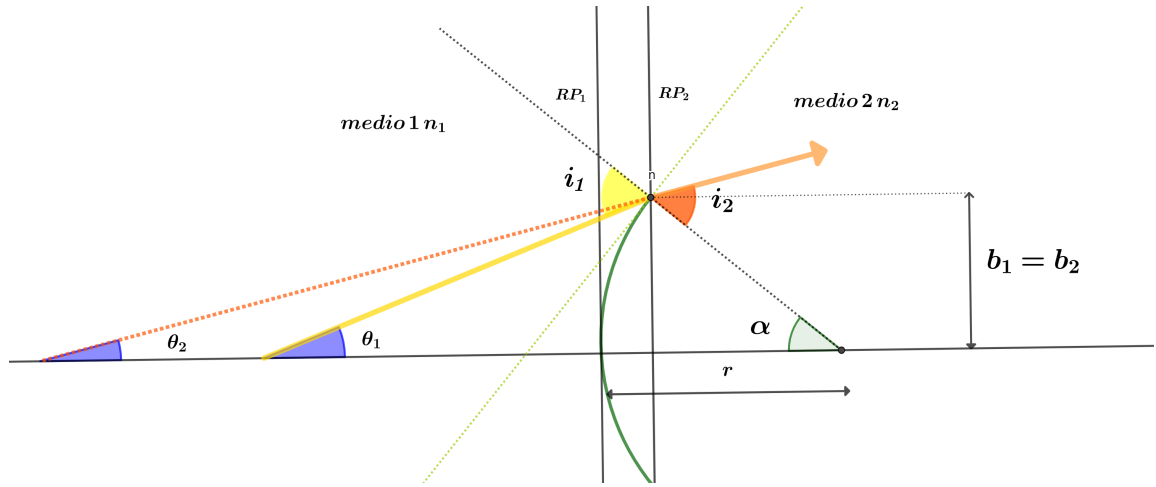


Figura 2.8. Refracción

Paraxial, con sus respectivas aproximaciones, se obtiene:  $n_1 i_1 = n_2 i_2$ . Aplicando el teorema del ángulo exterior, se tiene que:

$$i_1 = \theta_1 + \alpha = \theta_1 + \frac{b_1}{r}, \quad i_2 = \theta_2 + \alpha = \theta_2 + \frac{b_2}{r}$$

donde  $r$  es la curvatura de la superficie, que por simplicidad supondremos que es una circunferencia. Por tanto, atendiendo a la Ley de Snell, se obtiene:

$$n_1 \left( \theta_1 + \frac{b_1}{r} \right) = n_2 \left( \theta_2 + \frac{b_2}{r} \right).$$

Esto es,

$$q_1 + n_1 \frac{p_1}{r} = q_2 + n_2 \frac{p_2}{r}.$$

Asimismo, se considera que la distancia entre  $RP_1$  y  $RP_2$  es insignificante, es por ello que se puede concluir que  $p_1 = p_2$ . Luego,

$$\begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-(n_2 - n_1)}{r} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix}.$$

Se concluye por tanto que, la matriz de refracción es

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -P \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde  $P = \frac{(n_2 - n_1)}{r}$  se denomina poder de refracción. Cabe notar que  $\det(R) = 1$ . Además, la aplicación lineal asociada viene dada por:

$$\mathcal{M}\left(\begin{pmatrix} 1 & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) : \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

*Ejemplo 2.18.* Aproximación de lentes finas

Una aproximación de lentes finas se alcanza cuando varias superficies de refracción están lo suficientemente cercanas, de manera que los espacios que intervienen son insignificantes. En estos casos, siendo la distancia reducida  $T$  despreciable, las matrices de traslación se corresponden con la identidad. Si cada  $i$ -ésima superficie de refracción posee un radio de curvatura  $r_i$  y un índice  $n_i$ , el poder de refracción se corresponde con  $P_i = \frac{n_{i+1} - n_i}{r_i}$  y la matriz que representa la combinación de lentes finas será:

$$L = \begin{pmatrix} 1 - \sum_i P_i & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - P & \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde  $P = \sum_i P_i$ . De este modo, la aplicación lineal asociada a una lente fina se define como:

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} 1 & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - P & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Diferenciamos varios tipos de lentes según el signo de  $P$ :

- Lente convexa:  $P > 0$
- Lente cóncava:  $P < 0$
- Lente trivial:  $P = 0$

La matriz de refracción asociada a un sistema de lentes simples, no depende del orden en el que están dispuestas. Esto se debe a la conmutatividad presente en las matrices de refracción.

$$L_1 L_2 = \begin{pmatrix} 1 - P_2 & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - P_1 & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (P_1 + P_2) & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = L_2 L_1$$

Sin embargo, cuando el espacio establecido entre cada lente fina no es lo suficientemente pequeño, se debe trabajar con una secuencia de matrices de  $L$  y  $D_T$ , teniendo cuidado con el orden en el que se disponen, puesto que el producto de una matriz traslación con una de refracción, no es necesariamente conmutativo.

$$LD_T = \begin{pmatrix} 1 - P & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - PT & -P \\ T & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_T L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - P & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -P \\ T & 1 - PT \end{pmatrix}$$

*Observación 2.19.* La refracción vista desde la Óptica Lineal, viene dada por la siguiente expresión:

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & I \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I - P & \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix}$$

con  $q = (q_x, q_y)$ ,  $p = (p_x, p_y)$  y  $P = (n_1 - n_2)k$ , donde  $k$  es una matriz  $2 \times 2$  simétrica. El argumento óptico está recogido en la Referencia [2, Section 9.5].

De nuevo, es apreciable que la matriz asociada a este fenómeno refractante cumple las condiciones necesarias para ser una transformación simpléctica, recogidas en la Observación 1.14.

**Teorema 2.20.** *En la Óptica Gaussiana, cualquier sistema óptico se puede representar como producto de matrices de traslación y de refracción, ambas con determinante 1.*

*Demostración.* Veamos que cualquier matriz  $2 \times 2$  con determinante 1 puede descomponerse como producto de matrices de traslación y refracción. Sea

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

con  $\det(M) = 1$ . Distinguiremos dos casos:

- $B \neq 0$ . Se quiere encontrar  $s$  y  $t$  escalares reales, tales que:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}$$

Esto es equivalente a ver que,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + tB & B \\ As + C + t(Bs + D) & Bs + D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dado que  $B \neq 0$ , podemos escoger  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $A + tB = 1$ , esto es,  $t = \frac{1-A}{B}$ . Sustituyendo el valor escogido de  $t$ , para que se cumpla la igualdad, podemos tomar  $s = -(C + tD)$ . Teniendo en cuenta que

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$$

para que todo tenga coherencia, se debe cumplir que,  $Bs + D = 1$ . En efecto, con los valores  $s$  y  $t$  tomados, se verifica que:

$$\begin{aligned} Bs + D &= B(-(C + tD)) + D = -BC + -B\left(\frac{1-A}{B}\right)D + D = \\ &= -BC + AD = \det(M) = 1. \end{aligned}$$

Por tanto, la matriz  $M$  se ha descompuesto, físicamente hablando, como la combinación ordenada de una traslación, una refracción y una traslación.



- $B = 0$ . Consideramos la matriz de refracción  $\begin{pmatrix} 1 & -P \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , con  $P \neq 0$ . Observamos que si  $B = 0$ , teniendo en cuenta que  $\det(M) = 1$  se tiene que  $D \neq 0$ , entonces  $PD \neq 0$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & -P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - PC & -PD \\ C & D \end{pmatrix}$$

Vamos a descomponer esta última matriz como el producto de las siguientes matrices ópticas:

$$\begin{pmatrix} A - PC & -PD \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -PD \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}$$

Esto es equivalente a ver que,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A - PC & -PD \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -PD \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dado que  $PD \neq 0$ , nos encontramos en las mismas condiciones que en el caso  $B \neq 0$ , por tanto, se procede de manera análoga para determinar los escalares  $s$  y  $t$ .

En conclusión, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -PD \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz  $M$ , en este caso, se ha descompuesto como el producto de 4 factores. A nivel físico, esta expresión representa la combinación de una refracción, seguida de una traslación, otra refracción y una última traslación.

*Observación 2.21.* El estudio de las posibles transformaciones ópticas visto desde la Óptica Lineal, ofrece un resultado análogo, donde se demuestra que  $Sp(4, \mathbb{R})$  se puede escribir como el producto de traslaciones y refracciones, recogido en [6, p.28].

Una vez hemos comprendido en profundidad que  $SL(2, \mathbb{R})$  representa a cualquier sistema óptico, vamos a estudiar algunos casos particulares según los valores que toman los coeficientes de una matriz óptica.

Se tiene el siguiente sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix},$$

Estudiaremos el tipo de sistema óptico que se obtienen cuando  $a = 0$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$  y  $d = 0$ .

- Caso  $a = 0$

$$\begin{cases} q_2 = dq_1 - bp_1 \\ p_2 = -cq_1 \end{cases}$$

Prestando atención sobre la coordenada  $p_2$ , referida al punto de corte sobre el segundo plano de referencia, observamos que depende únicamente de  $q_1$ . Esto nos permite concluir que todos los rayos que inciden sobre el sistema óptico configurando un mismo ángulo  $q_1$ , emergen pasando por un mismo punto.

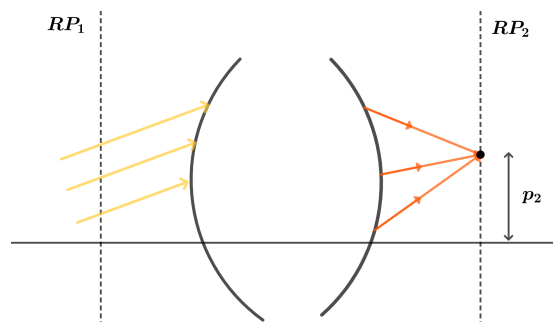


Figura 2.9. Caso  $a = 0$

- Caso  $b = 0$

$$\begin{cases} q_2 = dq_1 \\ p_2 = -cq_1 + ap_1 \end{cases}$$

Notamos que  $q_2 = dq_1$ , desde un punto de vista físico esta igualdad nos estaría diciendo que si un conjunto de rayos paralelos entra en el sistema, el conjunto de rayos que emerge del mismo mantiene su relación de paralelismo respecto a otra nueva dirección.

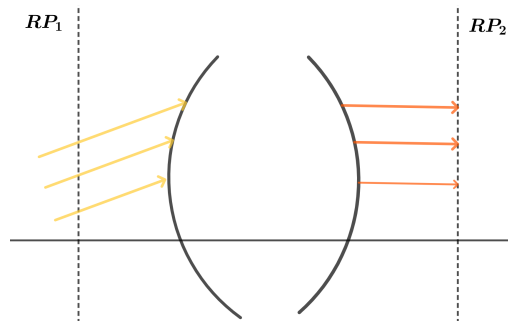


Figura 2.10. Caso  $b = 0$

- Caso  $c = 0$

$$\begin{cases} q_2 = dq_1 - bp_1 \\ p_2 = ap_1 \end{cases}$$

En este caso podremos deducir que, si un conjunto de rayos abandonan inicialmente un punto caracterizado por  $p_1$  en el primer plano de referencia  $RP_1$ , emergerán del sistema pasando todos por un mismo punto en  $RP_2$ , caracterizado por  $p_2$ . Este es un caso relevante en la literatura, cuando este suceso ocurre los planos de referencia  $RP_1$  y  $RP_2$  se denominan planos conjugados.

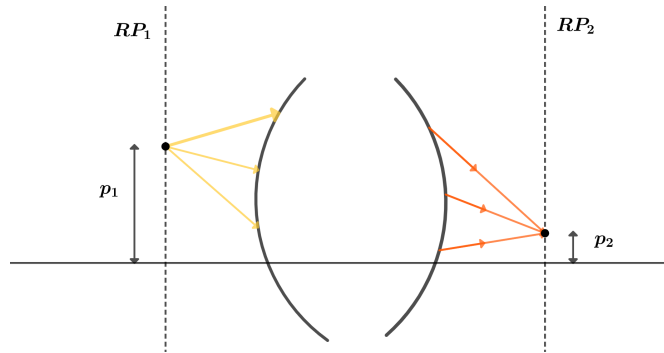


Figura 2.11. Caso  $c = 0$

- Caso  $d = 0$

$$\begin{cases} q_2 = -bp_1 \\ p_2 = -cq_1 + ap_1 \end{cases}$$

Por las relaciones anteriores, deducimos que todos los rayos que corten en  $RP_1$  en un mismo punto, abandonarán el sistema siendo paralelos.

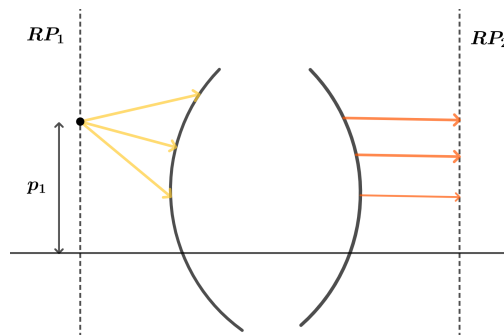


Figura 2.12. Caso  $d = 0$



## Problema de las 3 lentes

---

En el capítulo anterior, se ha estudiado la identificación existente entre los sistemas ópticos paraxiales y el conjunto  $SL(2, \mathbb{R})$ . En este apartado, imaginaremos que estamos trabajando en un taller óptico, donde lo más habitual es trabajar con lentes, para tratar de dar respuesta a la siguiente cuestión:

*¿Cuál es el número mínimo de lentes necesario para configurar cualquier sistema óptico paraxial?* Para responder a ello, utilizamos las referencias [9, 11].

Teniendo en cuenta que cualquier sistema óptico está constituido por dos fenómenos elementales que son la traslación cuya expresión está recogida en la Ecuación (2.11) y la lente fina dada por la Ecuación (2.13), atenderemos a los posibles sistemas ópticos que se pueden configurar a partir de la concatenación de lentes finas y traslaciones, encontrando así el número mínimo de lentes necesarias para poder alcanzar cualquier sistema paraxial.

*Observación 3.1.* Sea  $SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in M(2, \mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$  el conjunto que representa todas las matrices ópticas posibles. Consideramos la carta  $(U, \phi)$  donde  $U = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \mid a \neq 0\}$  y  $\phi : U \rightarrow \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^3$ , con  $\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a, b, c)$ , donde se ha tenido en cuenta que:

$$\det(A) = 1 \longrightarrow ad - bc = 1 \longrightarrow d = \frac{1 + bc}{a}.$$

Luego, hablando desde el punto de vista de variedad, tenemos que  $SL(2, \mathbb{R})$  es una variedad de dimensión 3. Notar que, el conjunto imagen es  $\phi(U) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \neq 0\}$ .

De este razonamiento, se deduce que el conjunto de sistemas ópticos paraxiales descritos en el abierto  $U$  se corresponde en coordenadas con  $\mathbb{R}^3$  excluyendo el plano  $a \neq 0$ . Cada punto de este espacio, se identifica con un sistema óptico. Por tanto, para poder alcanzar todos los sistemas ópticos existentes, habrá que cubrir el espacio  $\phi(U)$ .

En el desarrollo que se expone a continuación, se tomarán como ejes cartesianos del espacio  $\mathbb{R}^3$  los parámetros  $(a, b, c)$ .

### 3.1. Configuración de una lente

El estudio comenzará por analizar la disposición DLD, esto es, la acción de una traslación de distancia reducida  $T_1$ , seguida de una lente fina con poder de refracción  $P \neq 0$ , que concluye de nuevo con una traslación de distancia reducida  $T_2$ .

A nivel matemático, este sistema óptico se traduce como la siguiente multiplicación de matrices:

$$\begin{aligned} D_{T_1} L_P D_{T_2} &= \mathcal{M}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -T_1 & 1 \end{pmatrix}\right) \mathcal{M}\left(\begin{pmatrix} 1 & P \\ -0 & 1 \end{pmatrix}\right) \mathcal{M}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -T_2 & 1 \end{pmatrix}\right) = \\ &= \mathcal{M}\left(\begin{pmatrix} 1 - PT_2 & P \\ -T_1 - T_2 + T_1PT_2 & 1 - T_1P \end{pmatrix}\right) = \mathcal{M}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Se obtienen las siguientes relaciones con respecto a los parámetros  $(a, b, c)$ , que definen este sistema óptico en el espacio:

- $a = 1 - PT_2$
- $b = P$
- $c = -T_1 - T_2 + T_1PT_2 = -T_1a - T_2$

El estudio se divide según el signo de  $P$  en dos casos.

1. Lente cóncava ( $P < 0$ ): Atendiendo a las ecuaciones obtenidas, se tiene que  $b = P < 0$  y teniendo en cuenta el signo positivo de  $T_2$ , se deduce que  $a \geq 1$  y  $c \leq 0$ .

Considerando  $a = 1$ , se obtendrían los sistemas reducidos  $DL$  con  $T_2 = 0$ , donde la lente se encuentra en contacto directo con la segunda pantalla. Por otra parte, el caso  $c = 0$  implica que  $-T_1a = T_2$ , lo que significaría que  $T_2 \leq 0$ , que es un absurdo exceptuando el caso  $T_2 = 0$ , que traería consigo  $T_1 = 0$ , y con ello  $a = 1$ .

Luego, la región de sistemas DLD cóncavos, se corresponde con las dos regiones que se describen a continuación:

$$\begin{cases} a \geq 1, b < 0, c < 0 \\ a = 1, b < 0, c = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

2. Lente convexa ( $P > 0$ ): En este caso, se tendría que  $b = P > 0$  y con ello,  $a \leq 1$ . De nuevo,  $a = 1$  contiene los sistemas reducidos  $DL$ , el caso contrario  $LD$  es obtenido cuando  $T_1 = 0$ .

Por otra parte, descartamos el caso  $a = 0$ , pues la matriz óptica asociada no formaría parte de nuestro abierto  $U$ .

Se distingue que ocurre cuando  $0 < a \leq 1$  y  $a < 0$ . Lo cierto es que para el caso  $0 < a \leq 1$ , se deduce que necesariamente  $c \leq 0$ , de otra manera, si  $a < 0$ , no se imponen condiciones para  $c$ .

Luego, la región de sistemas DLD convexos, se corresponde con:

$$\begin{cases} 0 < a \leq 1, b > 0, c \leq 0 \\ a < 0, b > 0, c \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.2)$$

La intersección entre las regiones DLD cóncavas y convexas son disjuntas, sólo se acercan a través de  $(a = 1, b = 0, c = 0)$ , que representa el sistema óptico asociado a una lente trivial.

Las posibles configuraciones que se pueden obtener a través de una lente y a lo sumo dos vuelos libres, vienen dadas por la unión de las franjas asociadas a los DLD cóncavos y a los sistemas DLD convexos.

### 3.2. Configuración de dos lentes

A continuación, se trabaja la configuración genérica DLDDL, constituida por tres traslaciones y dos lentes. Para afrontar este caso, comenzaremos por simplificarlo a uno más sencillo, donde las dos lentes están en contacto directo con los planos de referencia, esto es, particularizamos el estudio al caso LDL.

$$\begin{aligned} L_{P_1} D_T L_{P_2} &= \mathcal{M}\left(\begin{pmatrix} 1 & P_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \mathcal{M}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -T & 1 \end{pmatrix}\right) \mathcal{M}\left(\begin{pmatrix} 1 & P_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \\ &= \mathcal{M}\left(\begin{pmatrix} 1 - P_1 T & (1 - P_1 T)P_2 + P_1 \\ -T & 1 - TP_2 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{M}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Por tanto, recogemos las siguientes relaciones:

- $a = 1 - P_1 T$
- $b = (1 - P_1 T)P_2 + P_1$
- $c = -T$

Atendiendo al signo de la distancia reducida  $T \geq 0$  se tiene que  $c = -T \leq 0$ . Para el caso  $c = 0$  inmediatamente se obtiene  $a = 1$  y un valor de  $b$  sin restricciones. Por otro lado, para  $c < 0$ , el estudio en conjunto de las lentes cóncavas y convexas advierte que  $a$  y  $b$  varían en todos los reales exceptuando el caso  $a = 0$ . De este modo, se obtiene la siguiente región asociada a los posibles sistemas ópticos *LDL*:

$$\begin{cases} a = 1, b \in \mathbb{R}, c = 0 \\ a \in \mathbb{R} - \{0\}, b \in \mathbb{R}, c < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

*Observación 3.2.* Podemos apreciar que la región del espacio asociada a los sistemas ópticos obtenidos a través de la configuración DLD, recogida en las Ecuaciones (3.1) y (3.2), está parcialmente contenida en la región descrita en la Ecuación (3.3). Esto quiere decir, que parte de los posibles sistemas configurables a partir de dos traslaciones y una lente pueden ser obtenidos empleando la configuración LDL, dos lentes y una traslación. Además, es notable que la configuración LDL completa nuevas zonas de  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , el parámetro  $b$  en este caso vive en todos los números reales, incluyendo  $b = 0$ .

*Observación 3.3.* La segunda relación de parámetros descrita en (3.3) advierte que queda por cubrir el caso de una matriz óptica con parámetros ( $a \in \mathbb{R} - \{0\}, b \in \mathbb{R}, c \geq 0$ ), esto sugiere la necesidad de seguir agregando traslaciones o lentes en el análisis planteado.

Avanzamos en el estudio de analizar el caso genérico DLDDL añadiendo una traslación, esto es, despegamos la primera lente del primer plano de referencia (DLDDL). Recuperando la matriz obtenida para el caso LDL genérico, se tiene la siguiente igualdad entre matrices:

$$D(L_1DL_2) = \mathcal{M}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -T & 1 \end{pmatrix}\right)\mathcal{M}\left(\begin{pmatrix} a \neq 0 & b \in \mathbb{R} \\ c < 0 & d \in \mathbb{R} \end{pmatrix}\right) = \\ \mathcal{M}\left(\begin{pmatrix} a' = a \neq 0 & b' = b \in \mathbb{R} \\ c' = -aT + c & d' = -bT + d \end{pmatrix}\right)$$

Observamos que el parámetro  $b' = b$  no está sujeto a ninguna restricción, puesto que  $b \in \mathbb{R}$ . El caso en el que estamos interesados, esto es,  $c' \geq 0$  con  $c' = -aT + c$  donde  $T \geq 0$  y  $c < 0$ , podrá ser considerado cuando  $a < 0$  y la traslación escogida posee una distancia reducida  $T$  verificando que  $T < \frac{c}{a}$ . Por otro lado, si se quiere abarcar  $c' < 0$ , dado que  $c' = -aT + c$  se tendría que  $c < aT$ , lo que no impone condiciones sobre el resto de parámetros puesto que  $c < 0$ , pero si indica que la traslación a escoger en ese caso deberá verificar que  $T > \frac{c}{a}$ . Para reducir la notación, en adelante los parámetros ( $a', b', c', d'$ ) serán sustituidos por ( $a, b, c, d$ ). Consecuentemente, se obtiene la siguiente región óptica asociada a configuraciones de la forma DLDDL:

$$\begin{cases} a \neq 0, b \in \mathbb{R}, c < 0 \\ a < 0, b \in \mathbb{R}, c \geq 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Como era de esperar, la configuración DLD está contenida, basta con considerar la última lente trivial en DLDDL.

*Observación 3.4.* Atendiendo a la franja descrita por las Ecuaciones (3.4), se aprecia como se continua excluyendo del estudio un cuadrante asociado a la coordenada  $c \geq 0$ . No se está abarcando el caso ( $a > 0, b \in \mathbb{R}, c \geq 0$ ).



A continuación, se añade otro vuelo libre obteniendo una configuración de la forma  $DLDDL$ , con sistema matricial asociado:

$$\mathcal{M}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)\mathcal{M}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -T & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{M}\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right)$$

donde los valores para  $(a, b, c)$  están recogidos en las Ecuaciones (3.4). De aquí, se obtienen las siguientes relaciones:

- $a' = a - Tb$
- $b' = b$
- $c' = c - Td$

Partiendo de  $a < 0, b \in \mathbb{R}, c \geq 0$ , tratamos de exigir  $a' > 0$  y  $c' \geq 0$ . Al exigir la condición  $a' = a - Tb > 0$ , surge la necesidad de restringir la variable  $b' = b$  a números negativos, particularmente, debe verificar  $b' < \frac{a}{T}$ , esto es, la traslación escogida debe tener una distancia reducida  $T < \frac{a}{b}$ . Por consiguiente, al exigir la condición  $c' \geq 0$ , se tiene que el vuelo libre escogido debe verificar además  $T < \frac{ac}{1+bc}$ .

Eliminando primas, se observa que a través de la configuración  $DLDDL$ , se estaría logrando cubrir una nueva región:

$$a > 0, b < 0, c \geq 0 \tag{3.5}$$

Notamos que restar por cubrir una parte del espacio  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ , donde  $a > 0, b \geq 0, c \geq 0$ .

### 3.3. Configuración de tres lentes

Finalmente, veremos que las configuraciones constituidas por 3 lentes se encargarán de cubrir la franja restante.

Comenzaremos estudiando el sistema restringido  $LDLDDL$ , donde dos de las lentes están en contacto directo con los planos de referencia. Apoyándonos en lo que ya hemos analizado para los sistemas  $DLDDL$ , agregamos una lente de potencia gaussiana  $P$  en el inicio, obteniendo la siguiente relación matricial,

$$\mathcal{M}\left(\begin{pmatrix} 1 & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\mathcal{M}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \mathcal{M}\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right),$$

donde las condiciones para los parámetros  $(a, b, c)$ , vuelven a estar recogidas en las Ecuaciones (3.4). Se tiene que,

- $a' = a + Pc$

- $b' = b + Pd$
- $c' = c$

Con el objetivo de incluir la región  $a' > 0, b' \geq 0, c' \geq 0$  y, observando que  $c' = c$ , nos decantamos por la segunda restricción recogida en (3.4), donde  $a < 0, b \in \mathbb{R}, c \geq 0$ . Diferenciamos dos casos, según  $c = 0$ , o  $c > 0$ .

- $c > 0$ : Notamos que, escogiendo una lente adecuada, dado que  $a < 0$  y  $c > 0$ , tanto  $a'$  como  $b'$  pueden alcanzar cualquier valor real. Luego, en particular, se estará logrando cubrir la región:

$$a > 0, b \geq 0, c > 0 \tag{3.6}$$

Notar de nuevo que han sido eliminadas las primas de los parámetros.

- $c = 0$ : Por las relaciones recogidas del sistema matricial, se tiene que  $a' = a + Pc \rightarrow a' = a < 0$ . En este caso, no estaríamos abarcando ninguna región nueva, puesto que interesa  $a' > 0$ .

Llegados a este punto, conviene añadir un vuelo libre, pretendiendo que sea ocupado el cuadrante plano  $a > 0, b \geq 0, c = 0$ . Con esta acción, que ya ha sido desarrollada en otros apartados, se obtienen las siguientes relaciones:

- $a' = a$
- $b' = b$
- $c' = c - Ta$

donde las restricciones de  $(a,b,c)$  vienen dadas en (3.6). Exigiendo  $c' = 0$ , esto es,  $c - Ta = 0$ , se tiene que, escogiendo una traslación adecuada, donde  $T = \frac{c}{a}$ , alcanzaríamos con una configuración  $DLDL$ , lo que restaba por cubrir.

Con tres lentes, hemos sido capaces de configurar todos los sistemas ópticos paraxiales descritos por el abierto  $U$ , definido en el inicio.

Si tomásemos el abierto  $V = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) | b \neq 0\}$ , llevando a cabo un razonamiento análogo en el que trataríamos de abarcar el espacio  $\mathbb{R}^3$  excluyendo el plano  $b = 0$ , se concluye de igual forma que el número mínimo de lentes necesarias para alcanzar todos los sistemas ópticos posibles es 3.

*Observación 3.5.* Imaginemos ahora que nos encontramos en un taller con un número determinado de lentes y queremos alcanzar un sistema óptico caracterizado por  $\mathcal{M} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Por el desarrollo anterior, podemos estar seguros de que va a ser posible crearlo a partir de la combinación de tres lentes, pero ¿con qué potencias  $P_i$ ? ¿Qué separación debe haber entre cada lente? Para ello, será necesario prestar atención sobre los valores de  $T_i$  y  $P_i$  en función de los parámetros  $a, b, c$  y  $d$  que definen cada sistema óptico.

Por ejemplo, si atendemos a los posibles sistemas que se pueden crear a partir de una lente, esto es, si nos centramos en el caso *DLD* obtendremos tres parámetros libres dados por:

$$T_1 = \frac{a - bc - 1}{ab}$$

$$P = b$$

$$T_2 = \frac{1 - a}{b}$$

donde  $T_1, T_2 \geq 0$  y  $P \neq 0$ .

De otra manera, si trabajamos con tres lentes las relaciones a considerar son las siguientes:

$$T_1 = \frac{1}{P_1} + \frac{P_2 + (d - cP_3)P_1}{(aP_3 - b)P_1}$$

$$T_2 = \frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{aP_3 - b}{P_1P_2}$$

$$T_3 = \frac{1}{P_2} + \frac{P_1 + aP_2}{(aP_3 - b)P_2}$$

Cabe notar que, en un taller la acción de traslaciones no supone ningún coste, por ello en el despeje se toman como parámetros libres los  $P_i$ , referidos a la potencia de las lentes. Un desarrollo más detallado de los distintos casos se puede encontrar en [11].



---

## Conclusiones y trabajo futuro

En esta memoria se ha mostrado la estrecha relación existente entre la Óptica Geométrica y la Geometría Simpléctica.

Hemos comenzado exponiendo una introducción a espacios vectoriales simplécticos y variedades simplécticas y con ello a sus transformaciones naturales, los simplectomorfismos, que cobran gran relevancia en la Óptica. El marco teórico es acompañado de teoremas, proposiciones y ejemplos que dan consistencia a gran parte del desarrollo óptico que le sigue.

En la segunda parte, hemos mostrado que el espacio de los rayos en  $\mathbb{R}^n$ , es difeomorfo a  $T^*S^{n-1}$ . Consecuentemente, hemos encontrado en dicho espacio una estructura de variedad simpléctica, que nos ha permitido dar una visión matemática a los fenómenos ópticos de la traslación y la refracción, comprobando que las transformaciones ópticas son simplectomorfismos.

Finalmente, hemos particularizado a la Óptica Lineal donde notaríamos que los fenómenos ópticos son transformaciones simplécticas y por último, nos hemos restringido a la Óptica Gaussiana, probando que cualquier transformación óptica viene dada por una matriz de determinante 1.

A modo de conclusión, hemos abarcado el Problema de las 3 lentes para el caso de la Óptica Gaussiana, quedando como extensión para investigaciones futuras el Problema de las 3 lentes visto desde la Óptica Lineal 3-dimensional.



---

## Bibliografía

- [1] ABRAHAM, R., MARSDEN, J. E.: *Foundations of mechanics*. (Second edition, revised and enlarged), Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass., 1978.
- [2] BAMBERG, P. & STERNBERG, S.: *A course in mathematics for students of physics:1*, Cambridge University Press, 1991.
- [3] CANNAS DA SILVA, A.: *Lectures on Symplectic Geometry, Lecture Notes in Mathematics 1764*, Springer Verlag (Corrected 2nd printing 2008).
- [4] CARIÑENA, J.F. & NASARRE, J.: On the Symplectic Structures arising in Geometric Optics, *Fortschr. Phys.* 44 (1996), no. 3, 181-198.
- [5] GEIGES, H.: Christian Huygens and contact geometry. *Nieuw Arch. Wiskd.* (5) 6 (2005), no. 2, 117-123.
- [6] GUILLERMIN, V. & STERNBERG, S.: *Symplectic techniques in physics*, Cambridge University Press, 1986.
- [7] MARLE, C.M.: The works of William Rowan Hamilton in geometrical optics and the Malus-Dupin theorem. *Geometry of jets and fields*, 177-191, Banach Center Publ., 110, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2016.
- [8] NAVARRO SAAD, M. & WOLF, K.B.: Factorization of the phase-space transformation produced by an arbitrary refracting surface, *J. Opt. Soc. Am. A* 3, 340-346 (1986)
- [9] SUDARSHAN E.C.G., MUKUNDA N. & SIMON, R.: Realization of First Order Optical Systems Using Thin Lenses, *Optica Acta* 32 (1985), no. 8, 855-872.
- [10] WOLF, K.B.: *Geometric optics on phase space*, Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [11] WOLF, K.B. & KRÖTZSH, G.: El problema de las tres lentes, *Rev. Mexicana Fís.* 47 (2001), no. 3, 291-298.





# The Three Lenses Problem

Sara Díaz Mederos

Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas  
 Universidad de La Laguna  
 alu0101313115@ull.edu.es

## Abstract

In this Memory, we show that Geometrical Optics (in which the undulatory nature of light is ignored) can be described using symplectic geometry, showing that the space of rays is a symplectic manifold and that the optical transformations refraction and translation are symplectomorphisms. For Gaussian Optics, in which transformations are linear and rotational symmetry is assumed, we identify optical transformation with  $SL(2, \mathbb{R})$  and we show that any optical transformation can be described using three lenses.

## 1. Symplectic Geometry

A symplectic manifold is a pair  $(M, \omega)$  where  $M$  is a manifold and  $\omega \in \Omega^2(M)$  is a nondegenerate closed 2-form, that is

- $\omega(x): T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  is nondegenerate.
- $d\omega = 0$ .

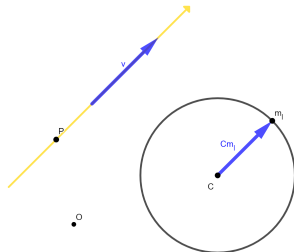
### Examples

1.  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0 = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i)$ .
2.  $(T^*M, \omega_M = -d\Theta_M)$ .

## 2. Geometrical Optics

### Ray Space

Ignoring the wave character of light, a ray of light can be seen as an oriented line in  $\mathbb{R}^3$ . Moreover, we can provide to  $\mathcal{L}$ , the set of oriented lines, a symplectic manifold structure [2]:



More precisely, there is a bijection

$$\begin{aligned} \phi_O: \mathcal{L} &\rightarrow T^*S^{n-1} \\ l &\mapsto \phi_O(l) = \eta_l \in T_{m_l}^*S^{n-1} \end{aligned}$$

where  $m_l \in S^{n-1}$  verifies that  $\vec{Cm}_l$  is parallel to  $l$  and  $\eta_l(\vec{u}) = \vec{OP} \cdot \vec{u}$ , where  $P$  is an arbitrary point of  $l$ .

### Translation

Translation is the optical process where the ray goes through two screens that are laying on the same medium and are separated by a distance  $t$ . Mathematically, the translation is the identity symplectomorphism, that is, it preserves the symplectic structure.

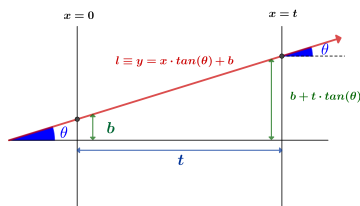


Figure 1: Translation

TRABAJO FIN DE GRADO, Convocatoria de mayo, 2023

## Refraction

Refraction is a phenomenon that describes a ray under the action of a surface that separates two regions of different refraction index  $n_1$  and  $n_2$ , respectively. It is defined taking into account the Snell's law,  $n_1 \text{sen}(i_1) = n_2 \text{sen}(i_2)$  where  $i_1$  (resp.  $i_2$ ) is the angle between the incoming (resp. the outgoing) ray and the normal vector to the surface. It can be proved that refraction also is a symplectomorphism.

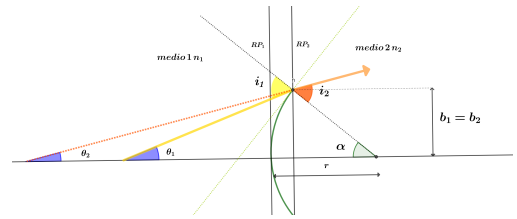


Figure 2: Refraction

## 3. The paraxial regime. Gaussian Optics

The paraxial regime is an approximation in which the angle of the rays are assumed to be small. Mathematically, the ray space is  $\mathbb{R}^{2n}$  and the optical transformations are linear. The simplest model (in  $\mathbb{R}^2$ ) is called Gaussian Optics.

Each ray is characterized by two coordinates

$$\begin{cases} q = \theta \\ p = b \end{cases}$$

The translation is the linear map given by

$$\begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix},$$

where  $T = t/n$  and  $n$  is the refraction index, and the linear function linked to refraction is given by

$$\begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -(n_2 - n_1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix},$$

where  $r$  is the curvature of a spherical surface. The combinations of refraction surfaces with a negligible distance of separation is called *fine lens*.

**Theorem** Under paraxial approximation, any optical system can be defined as an element of  $SL(2, \mathbb{R})$ .

**Theorem** (Three lenses problem) Under paraxial approximation, any optical system can be described using three lenses.

## References

- [1] BAMBERG, P. & STERNBERG, S.: *A course in mathematics for students of physics:1*, Cambridge University Press, 1991.
- [2] MARLE, C.M.: The works of William Rowan Hamilton in geometrical optics and the Malus-Dupin theorem. *Geometry of jets and fields*, 177-191, Banach Center Publ., 110, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2016.
- [3] WOLF, K.B. & KRÖTZSH, G.: El problema de las tres lentes, *Rev. Mexicana Fis.* 47 (2001), no. 3, 291-298.