Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Alex Hernández Gutiérrez

# *El operador maximal de Hardy-Littlewood y aplicaciones*

## The Hardy-Littlewood maximal operator and applications

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Junio de 2023

Dirigido por
*Marta de León Contreras*

Marta de León Contreras
*Departamento de Análisis matemático*
*Universidad de La Laguna*
*38200 La Laguna, Tenerife*

# Agradecimientos

A mi tutora, Marta, por su gran compromiso, dedicación y esfuerzo, sin ella este trabajo no sería posible, gracias por guiarme y preocuparte por mi, eres un ejemplo a seguir.

A mi familia, en especial a mi madre, y amigos por acompañarme durante estos cuatro años, gracias por su apoyo incondicional.

A mi gran amiga Yanira, gracias por estar siempre conmigo y por hacer que estos cuatro años, a tu lado, sean inolvidables.

Alex Hernández Gutiérrez
La Laguna, 22 de mayo de 2023

# Resumen · Abstract


## *Resumen*

*El objetivo de este trabajo es el estudio del operador maximal de Hardy-Littlewood, su acotación en espacios de Lebesgue y algunas de sus aplicaciones al análisis matemático. Para ello, presentaremos previamente los resultados de teoría de la medida y de la teoría de espacios* $L^p$ *(espacios de Lebesgue) que serán fundamentales para el desarrollo de la memoria. Seguidamente, introduciremos el operador maximal de Hardy-Littlewood (centrado y no centrado) y demostramos los resultados de acotación de tipo débil* $(1,1)$ *y fuerte* $(p,p)$, $1 < p \leq \infty$. *Estudiaremos otras versiones de este operador maximal, cambiando los conjuntos de integración y la medida y, como consecuencia de las propiedades establecidas para el operador maximal, veremos el Teorema de diferenciación de Lebesgue, las propiedades de acotación y convergencia de los núcleos de sumabilidad, las bases de la teoría de pesos* $A_p$ *y el teorema de extrapolación.*



**Palabras clave:** *Operador maximal de Hardy-Littlewood – Desigualdades de tipo débil y tipo fuerte – Espacios de Lebesgue – Teorema de diferenciación de Lebesgue – Núcleos de sumabilidad.*

## *Abstract*

*The objective of this work is the study of the Hardy-Littlewood maximal operator, its boundedness properties in Lebesgue spaces and some of its applications to mathematical analysis. For that aim, we will previously introduce some results of measure theory and Lebesgue spaces theory that will be crucial for the development of the work. Next, we will introduce the Hardy-Littlewood maximal operator (centered and uncentered) and we will prove its weak type* $(1, 1)$ *and strong type* $(p, p)$, $1 < p \leq \infty$, *boundedness results. We will study other versions of this maximal operator, changing the integration sets and the measure and, as a consequence of the properties established for the maximal operator, we will see the Lebesgue's Differentiation Theorem, the boundedness properties and convergence of the summability kernels, the foundations of the theory of* $A_p$ *weights and the extrapolation theorem.*


**Keywords:** *Hardy-Littlewood maximal operator – Weak and strong-type inequalities –Lebesgue spaces – Lebesgue's Differentiation Theorem–summability kernels.*

# Contenido


**Agradecimientos** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . iii

**Resumen/Abstract** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . v

**Introducción** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ix

**1. Resultados básicos de teoría de la medida** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
- 1.1. Los espacios de medida . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
- 1.2. Teoría de integración . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4

**2. Espacios $L^p(X, \mu)$** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13
- 2.1. Conceptos básicos de los espacios $L^p(X, \mu)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13
- 2.2. Contenidos en espacios $L^p(X, \mu)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 18
- 2.3. Aproximación en $L^p(X, \mu)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21
- 2.4. Espacios $L^{p,\infty}(X, \mu)$ e interpolación . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24
  - 2.4.1. Interpolación en espacios $L^p(X, \mu)$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27

**3. La función maximal de Hardy-Littlewood.** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31
- 3.1. El operador maximal de Hardy-Littlewood en bolas . . . . . . . . . . . . . 31
- 3.2. Aplicaciones del Teorema maximal . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37
  - 3.2.1. Teorema de diferenciación de Lebesgue . . . . . . . . . . . . . . . . . . 37
  - 3.2.2. Acotación en $L^p$ de otros operadores . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39
- 3.3. Otros operadores maximales de Hardy-Littlewood . . . . . . . . . . . . . . 41
  - 3.3.1. Operadores maximales de Hardy-Littlewood sobre otros conjuntos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41
  - 3.3.2. Operadores maximales de Hardy-Littlewood en otros espacios de medidas . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43
- 3.4. Pesos $A^p$ de Muckenhoupt y teorema de extrapolación en $L^p(\mathbb{R}^n, \omega dx)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 46

**Bibliografía** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49

# Introducción

El operador maximal de Hardy-Littlewood es uno de los operadores maximales más relevantes en el análisis matemático, pues se trata de una herramienta versátil que ha resultado ser esencial para probar resultados importantes en análisis armónico, funcional y ecuaciones en derivadas parciales. En particular, puede ser utilizado para el estudio de la acotación de otros operadores, así como para obtener resultados de convergencia en casi todo punto de las medias integrales de una función. Además, sirve para caracterizar los pesos $A_p$ de Muckenhoupt y establecer resultados tan potentes como el teorema de extrapolación.

En el año 1930, los matemáticos británicos G. H. Hardy y J. E. Littlewood en [7] introducen este operador en dimensión 1. En dicho artículo, explicaron la desigualdad maximal en el lenguaje del cricket, deporte del que eran grandes seguidores: *"the problem is most easily grasped when stated in the language of cricket, or any other game in which a player compiles a series of scores of which an average is recorded"*. Nueve años más tarde, N. Wiener en [17] define el operador maximal para cualquier dimensión $n > 1$. A partir de ese momento, y hasta la actualidad, el estudio de propiedades de este operador y sus variantes en distintos espacios de funciones ha sido un tema recurrente de investigación para muchos analistas armónicos.

El objetivo principal de esta memoria es el estudio del operador maximal de Hardy-Littlewood (centrado y no centrado) en diferentes conjuntos de integración (bolas, cubos, rectángulos,...), formulado con respecto a la medida de Lebesgue y a otras medidas más generales. Probaremos su acotación en espacios de Lebesgue y algunas de sus aplicaciones al análisis matemático.

El trabajo está dividido en tres capítulos. En el primer capítulo presentaremos los resultados y definiciones básicas de teoría de la medida que nos serán de gran utilidad para la demostración de posteriores resultados. En la primera sección, definimos los espacios medibles, los espacios de medida y repasamos sus propiedades más importantes. En la segunda y última sección estudiamos los resultados más relevantes de la teoría de integración. Introducimos las funciones medibles, algunas de sus propiedades y prestamos especial atención a las funciones medibles más sencillas, las funciones simples. Estas funciones aproximan a cualquier función medible y constituyen la base para definir la integral de una función medible. Concluimos la sección definiendo la integración abstracta de funciones medibles y demostrando tres de los resultados más importantes de la teoría de la integración: el Teorema de la Convergencia Monótona, el Lema de Fatou y el Teorema de la Convergencia Dominada. Los textos consultados para el desarrollo de este capítulo han sido, mayormente, los libros de Cohn [2], Folland [5] y Stein y Schakarchi [15].

El segundo capítulo está dedicado al estudio de los espacios de Lebesgue, $L^p(X,\mu)$, donde $(X,\mathcal{M},\mu)$ es un espacio de medida. En la primera sección repasamos los conceptos básicos y algunas desigualdades importantes, como las de Young, Hölder y de Minkoswki, siendo la última de ellas indispensable para probar que los espacios $L^p(X,\mu)$ son espacios de Banach, para $1\leq p\leq\infty$. En la siguiente sección estudiamos las relaciones de contenidos entre estos espacios, mientras que en la penúltima sección tratamos resultados de aproximación en espacios de Lebesgue, introducimos el concepto de convolución de dos funciones medibles y los núcleos de sumabilidad o aproximaciones de la identidad. En la última sección presentamos dos elementos que tendrán un papel importante en el siguiente capítulo de la memoria, los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}(X,\mu)$ con $0<p\leq\infty$, también llamados espacios $L^p-$débiles, y el Teorema de interpolación de Marcinkiewicz. Para este capítulo los textos más consultados han sido los libros de Duoandikoetxea [4] y Folland [5].

En el último capítulo de esta memoria presentamos el operador maximal de Hardy-Littlewood, en sus versiones centrada y no centrada. En las dos primeras secciones se considera el operador definido sobre bolas en el espacio $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue. Estudiamos la medibilidad de las funciones maximales centradas y no centradas y probamos la equivalencia entre ambos operadores. Seguidamente, demostramos la acotación de tipo débil $(1,1)$ y de tipo fuerte $(p,p)$, $1<p\leq\infty$. En la segunda sección se presentan como aplicaciones de este teorema el Teorema de Diferenciación de Lebesgue y las propiedades de acotación en $L^p$ y la convergencia en casi todo punto de operadores dados por la convolución de funciones con aproximaciones de la identidad. En particular, se prueba que el maximal de este tipo de operadores de convolución está mayorado por el operador maximal de Hardy-Littlewood y de ahí se deducen sus propiedades. La siguiente sección está dedicada a variantes de la función maximal de Hardy-Littlewood, considerando otros conjuntos de integración, como cubos o rectángulos, y medidas más generales (borelianas y no negativas). En particular, se muestra que si la medida es doblante (como la de Lebesgue), entonces los operadores definidos en bolas y en cubos son equivalentes, por los que los resultados de acotación y convergencia pueden probarse indistintamente para cualquiera de ellos y deducirse para el resto. Sin embargo, si la medida no es doblante estos operadores no tienen por qué ser equivalentes y de hecho hay grandes diferencias entre considerar el operador centrado o no, y también entre considerar como espacio $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^n$, con $n>1$. En particular, cuando $n>1$ la acotación de tipo débil $(1,1)$ para el maximal no centrado no es cierta. Finalizamos la memoria haciendo una breve introducción de los pesos $A^p$ de Muckenhoupt y el teorema de extrapolación en espacios $L^p$ con pesos. La biblografía más usada en este capítulo son los libros de Duoandikoetxea [4] y Stein [15], aunque también hemos hecho uso de varios artículos de investigación.

# 1

# Resultados básicos de teoría de la medida

En el este primer capítulo de la memoria hemos recogido las definiciones y los resultados básicos de teoría de la medida que serán de gran importancia en el desarrollo de este trabajo. En la primera sección recordamos los elementos principales de un espacio de medida y sus propiedades, mientras que en la segunda sección profundizamos sobre la teoría de integración abstracta y demostramos los tres resultados más relevantes de convergencia de integrales: el Lema de Fatou, el Teorema de la Convergencia Monótona y el Teorema de la Convergencia Dominada.

## 1.1. Los espacios de medida

Sea $X$ un conjunto no vacío y $\mathcal{M}$ una colección de subconjuntos de $X$. Decimos que $\mathcal{M}$ es una *$\sigma$-álgebra* sobre $X$ cuando se cumplen las siguientes propiedades:

a) El conjunto vacío está en $\mathcal{M}$, es decir, $\emptyset \in \mathcal{M}$.
b) Para todo conjunto $E \in \mathcal{M}$, se tiene que $X \setminus E \in \mathcal{M}$.
c) Si $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una colección numerable de conjuntos de $\mathcal{M}$, entonces la unión de todos ellos están en $\mathcal{M}$, esto es, $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$.

Al par $(X, \mathcal{M})$ se le denomina *espacio medible* y a cada $E \in \mathcal{M}$ se le llama *conjunto medible*.

Algunos ejemplos importantes de $\sigma-$álgebras son $\mathcal{M} = \{\emptyset, X\}$ y las partes de $X$, $\mathcal{P}(X)$, que es la clase de todos los subconjuntos de $X$. Estas son la menor y la mayor $\sigma-$álgebra en $X$, respectivamente. Además, si $X$ es un espacio topológico, podemos considerar la $\sigma-$álgebra generada por todos los subconjuntos abiertos en $X$, esto es, la $\sigma$ -álgebra más pequeña que contiene a los abiertos de $X$. Esta se conoce como la *$\sigma-$álgebra de Borel* en $X$, $\mathcal{B}(X)$, y a los conjuntos pertenecientes a ella se les llama *conjuntos borelianos*. Si $X = \mathbb{R}$ con la topología usual, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ es la $\sigma$ -álgebra generada por todos los intervalos de $\mathbb{R}$. En particular, $\mathcal{B}(X)$ puede generarse a partir de la familia de intervalos de la forma $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$. Cuando $X = [-\infty, \infty]$ (la llamada recta extendida), se tiene que $\mathcal{B}([-\infty, \infty]) = \{E \subset [-\infty, \infty] : E \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

A continuación vamos a introducir el concepto de medida. La medidas son una generalización de los conceptos de longitud, área y volumen. Como idea intuitiva, podemos pensar que es una aplicación que, a cada conjunto medible, le asocia un número positivo que nos da información acerca de su tamaño.

Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible. Una *medida* en $X$ es una función $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ que satisface las siguientes condiciones:

a) $\mu(\emptyset) = 0$.
b) Si $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una colección de conjuntos disjuntos de $\mathcal{M}$, entonces $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$.

Si $\mu(X) < \infty$, decimos que $\mu$ es *finita*, mientras que si $\mu(X) = \infty$ pero podemos escribir $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ donde, para cada $k \in \mathbb{N}$, $E_k \in \mathcal{M}$ y $\mu(E_k) < \infty$, decimos que $\mu$ es *$\sigma$-finita.*
Comúnmente, se denomina *espacio de medida* a la terna $(X, \mathcal{M}, \mu)$.

Algunas propiedades básicas de la medida se recogen en el siguiente resultado.

**Teorema 1.1.** *Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida.*

*(a) Si $E, F \in \mathcal{M}$, tal que $E \subset F$, entonces $\mu(E) \leq \mu(F)$.*
*(b) Si $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, entonces $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$.*
*(c) Si $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$ y $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$, entonces $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k)$.*
*(d) Si $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$, y $\mu(E_1) < \infty$, entonces $\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(E_k)$.*

*Demostración.* a) Supongamos que $E, F \in \mathcal{M}$, tal que $E \subset F$. Entonces, $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F \backslash E) \geq \mu(E)$.

b) Supongamos que $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$. Consideramos la familia de conjuntos $F_1 = E_1$ y $F_j = E_j \backslash \left(\bigcup_{k=1}^{j-1} E_k\right)$ para $j > 1$. Por construcción, los $F_k$ son disjuntos, $\mu(F_k) \leq \mu(E_k)$, $k \in \mathbb{N}$, y además $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Por tanto, aplicando el apartado a), tenemos que

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

c) Supongamos que $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, tal que $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$, y $E_0 = \emptyset$. Nótese que, debido a la cadena de inclusiones de los conjuntos, $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \backslash E_{k-1})$. Por consiguiente, usando la propiedad b) de la definición de medida, tenemos que

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \backslash E_{k-1})\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k \backslash E_{k-1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k \backslash E_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n).\end{aligned}$$

d) Supongamos que $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}$, tal que $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$, y $\mu(E_1) < \infty$. Consideramos la familia $F_k = E_1 \backslash E_k$, $k \in \mathbb{N}$. Entonces, tenemos que $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \cdots$, $\mu(E_1) = \mu(F_k) + \mu(E_k)$, $k \in \mathbb{N}$, y $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = E_1 \backslash \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right)$. Aplicando c), obtenemos que

$$\mu(E_1) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \bigcup \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right)\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(F_k) + \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right)$$
$$= \lim_{k\to\infty} [\mu(E_1) - \mu(E_k)] + \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right).$$

Como $\mu(E_1) < \infty$, restando a ambos lados de la igualdad $\mu(E_1)$ y obtenemos el resultado.

□

Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$, se dice que una propiedad se cumple en *$\mu$-casi todo punto* de $X$, $\mu$-c.t.p. $X$ (o simplemente c.t.p. $X$, cuando se sobreentiende la medida) cuando el conjunto donde no es cierta tiene medida cero. Nótese que, por la propiedad a), si $\mu(F) = 0$ y $E \subset F$, se tiene que $\mu(E) = 0$, siempre que $E \in \mathcal{M}$, pero en general no es cierto que $E \in \mathcal{M}$. Un espacio de medida cuya $\sigma-$álgebra contiene a todos los subconjuntos de los conjuntos de medida cero, se dice que es *completo.*

Recordemos varios ejemplos de medidas. Sea $X$ un conjunto no vacío y $A \in \mathcal{P}(X)$. Se define la *medida de contar* $\mu$ como

$$\mu(A) = \begin{cases} n, & A \text{ es finito y tiene } n \in \mathbb{N} \text{ elementos,} \\ \infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, que denotaremos por $m$, es una medida que generaliza la medida estándar de longitud (caso $n = 1$), área (caso $n = 2$), volumen (caso $n = 3$), etc. Se construye definiendo la medida exterior de Lebesgue, $m^*$, que es el ínfimo de los "volúmenes"(producto de las longitudes de los intervalos) de los "rectángulos"$I_1 \times I_1 \times \cdots \times I_n$, siendo $I_j \subset \mathbb{R}$ intervalos abiertos y acotados, que recubren al subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que queremos medir. Ahora, para pasar de esta medida exterior a $m$, recordamos cómo se definen los conjuntos medibles, dada una medida exterior en un conjunto (en este caso $\mathbb{R}^n$): se dice que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es $m^*$-medible si

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c), \text{ para todo } E \subseteq \mathbb{R}^n.$$

En virtud del Teorema de Carathéodory ([5, Teorema 1.11]), sabemos que la colección $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de conjuntos $m^*$- medibles es una $\sigma-$álgebra y la restricción de $m^*$ a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es una medida completa, que es lo que conocemos por $m$, la medida de Lebesgue. A los conjuntos en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ se les conoce como conjuntos *Lebesgue medibles.* Los conjuntos borelianos son Lebesgue medibles, esto es, $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, pero no al revés. Véase [2, Proposición 1.3.8 y Proposición 2.1.11].

Si $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida, siendo $X$ un espacio topológico y $\mathcal{M} = \mathcal{B}(X)$, se dice que $\mu$ es una *medida de Borel*. Además, diremos que $\mu$ es una *medida interior regular* en $E \in \mathcal{B}(X)$ si,

$$\mu(E) = \sup \{\mu(K) : K \text{ compacto y } K \subset E\},$$

y $\mu$ es *regular exterior* si,

$$\mu(E) = \sup \{\mu(A) : A \text{ abierto y } E \subset A\}.$$

Por último, diremos que $\mu$ es *regular* si es finita en los compactos y es regular exterior y regular interior en todo boreliano. La medida de Lebesgue es un ejemplo de medida regular.

## 1.2. Teoría de integración

En esta sección vamos a exponer los fundamentos de la teoría de integración con respecto a una medida abstracta. Para ello, vamos a introducir en primer lugar el concepto de función medible.

Sean $(X, \mathcal{M})$ e $(Y, \mathcal{N})$ espacios medibles. Decimos que una aplicación $f : X \to Y$ es $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$-medible si, para cada $E \in \mathcal{N}$, se tiene que $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$. Si $(Y, \mathcal{N}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (respectivamente, $(Y, \mathcal{N}) = (\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C})))$ y $f$ es $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-medible (respectivamente, $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$-medible), entonces se dice que $f$ es una *función* $\mathcal{M}$-*medible* o simplemente medible, si están claras la $\sigma$-álgebras del contexto. En particular, si $X = \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{M}$ es la $\sigma$-álgebra de Borel o la de los conjuntos medibles Lebesgue, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, diremos que la función es Borel medible o Lebesgue medible, respectivamente. Cada función Borel medible en $\mathbb{R}^n$ es Lebesgue medible.

También podemos considerar la medibilidad en subconjuntos medibles de $X$. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible, $E \subseteq X$, $E \in \mathcal{M}$ . Diremos que una función $f : E \subseteq X \to \mathbb{R}$ es medible en $E$ si $f^{-1}(B) \cap E \in \mathcal{M}$, para cualquier $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. La definición para funciones que toman valores complejos es análoga.

**Proposición 1.2 (Proposition 2.1.1, [2]).** *Sean* $(X, \mathcal{M})$ *un espacio medible,* $E \subseteq X$, $E \in \mathcal{M}$ *y* $f : E \to [-\infty, \infty]$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

*(a)* $f$ *es* $\mathcal{M}$-*medible.*
*(b) Para cada* $t \in \mathbb{R}$, *se tiene que* $\{x \in E : f(x) < t\} = f^{-1}([-\infty, t)) \cap E \in \mathcal{M}$.

*(c) Para cada* $t \in \mathbb{R}$*, se tiene que* $\{x \in E : f(x) > t\} = f^{-1}((t, \infty]) \cap E \in \mathcal{M}$.
*(d) Para cada* $t \in \mathbb{R}$*, se tiene que* $\{x \in E : f(x) \leq t\} = f^{-1}([-\infty, t]) \cap E \in \mathcal{M}$.
*(e) Para cada* $t \in \mathbb{R}$*, se tiene que* $\{x \in E : f(x) \geq t\} = f^{-1}([t, \infty]) \cap E \in \mathcal{M}$.

El siguiente resultado engloba las propiedades más relevantes de las funciones medibles. Sus pruebas pueden encontrarse en [2, Capítulo 2, Sección 2.1] y [5, p. 43–46].

**Proposición 1.3.** *Sean* $(X, \mathcal{M})$*,* $(Y, \mathcal{N})$ *y* $(Z, \mathcal{O})$ *espacios medibles y* $E \subseteq X$*,* $E \in \mathcal{M}$*.*

*a) Si* $f : X \to Y$ *es* $(\mathcal{M}, \mathcal{N})-$*medible y* $g : Y \to Z$ *es* $(\mathcal{N}, \mathcal{O})-$*medible, entonces* $g \circ f$ *es* $(\mathcal{M}, \mathcal{O})-$*medible.*
*b) Si* $X$ *e* $Y$ *son espacios métricos (o topológicos) y* $f : X \to Y$ *es continua, entonces* $f$ *es* $(\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y))-$ *medible.*
*c) Una función* $f : E \subseteq X \to \mathbb{C}$ *es medible en* $E$ *si, y solo si, sus partes real e imaginaria,* $\Re f$ *e* $\Im f$*, son medibles en* $E$*.*
*d) Si* $f, g : E \subseteq X \to [-\infty, \infty]$ *son funciones medibles en* $E$*, entonces también lo son* $f + g$*,* $fg$*,* $\max\{f, g\}$ *y* $\min\{f, g\}$*.*
*e) Si* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de funciones medibles en* $E$ *que toman valores en* $[-\infty, \infty]$*, entonces* $\sup_n f_n$*,* $\inf_n f_n$*,* $\lim_{n\to\infty} \sup f_n$*,* $\lim_{n\to\infty} \inf f_n$ *son medibles en* $E$*. En particular, si existe* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$*, para todo* $x \in E$*, entonces* $f$ *es medible en* $E$*.*

Es necesario hacer unas observaciones con respecto a la proposición anterior. Puesto que en el apartado d) hemos considerado que las funciones pueden tomar los valores $\pm\infty$, debemos tener cuidado a la hora de tratar con las expresiones indeterminadas $\infty - \infty$ y $0 \cdot \pm\infty$. Por convenio, consideraremos $0 \cdot \pm\infty = 0$. Por otro lado, si existen $x \in E$ tales que $f(x) = -g(x) = \pm\infty$, entonces fijamos $a \in [-\infty, \infty]$ y definimos $h(x) = a$ para los $x \in E$ tales que $f(x) = -g(x) = \pm\infty$, y $h(x) = f(x) + g(x)$, en caso contrario. De este modo, $h$ es medible en $E$ y en este sentido podemos decir que $f + g$ es medible.

Por otra parte, sería deseable obtener resultados, como los del apartado e), para funciones medibles que cumplen una cierta propiedad en casi todo punto, en lugar de en todos sus puntos. Si el espacio de medida es completo, tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 1.4 (Proposition 2.11,[5]).** *Sean* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espacio de medida completo.*

- *Si* $f : X \to \mathbb{C}$ *es una función medible y* $f = g$ *en* $\mu -$ *c.t.p., entonces* $g$ *es medible.*
- *Si* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de funciones medibles y* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $\mu -$ *c.t.* $x \in X$*, entonces* $f$ *es medible.*

Uno de los ejemplos más sencillos de funciones medibles son las funciones características. Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible y $E \subseteq X$. La función característica

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

es $\mathcal{M}$-medible si, y solo si, $E \in \mathcal{M}$. Otro ejemplo básico y que será fundamental para la construcción de la integral de una función medible son las *funciones simples*. Estas son combinaciones lineales finitas de funciones características en conjuntos medibles. La representación de estas funciones como combinaciones lineales no es única, pero existe una formulación, denominada estándar o canónica, que nos permite escribirlas de manera única. Las funciones simples pueden escribirse de la forma

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{E_i}(x), \quad x \in X,$$

donde $E_i = \varphi^{-1}(\{a_i\}) \in \mathcal{M}$, $i = 1, \ldots, N$, y $\mathrm{Ran}(\varphi) = \{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$ y uno de los coeficientes $a_i$, $i = 1, \ldots, N$, puede ser cero. De este modo, las funciones simples pueden escribirse de manera única como combinación lineal finita (con coeficientes distintos) de funciones características en conjuntos disjuntos cuya unión es $X$.

El siguiente resultado recoge el motivo por el cual esta clase de funciones son tan importantes en análisis y es que cualquier función medible se puede aproximar por funciones simples.

**Teorema 1.5 (Teorema 2.10, [5]).** *Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medible.*

*(a) Si $f : X \to [0, \infty]$ es medible, entonces existe una sucesión $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples tales que $0 \le \phi_1 \le \phi_2 \le \cdots \le f$, $\phi_n(x) \to f(x)$, cuando $n \to \infty$, para cada $x \in X$ y la convergencia es uniforme en el conjunto donde $f$ está acotada.*

*(b) Si $f : X \to \mathbb{C}$ es medible, entonces existe una sucesión $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples tales que $0 \le |\phi_1| \le |\phi_2| \le \cdots \le |f|$, $\phi_n(x) \to f(x)$, cuando $n \to \infty$, para cada $x \in X$ y la convergencia es uniforme en el conjunto donde $f$ está acotada.*

El primer paso para la construcción de la integral de una función medible es definir la integral de una función simple no negativa. Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $\varphi = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{E_i}$, tal que $\{a_1, a_2, \cdots, a_N\} \subset [0, \infty)$ y $\{E_i\}_{i=1}^{N}$ son conjuntos medibles disjuntos. Se define la integral de $\varphi$ respecto a $\mu$ como

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{N} a_i \mu(E_i) \tag{1.1}$$

El valor de esta integral es un número no negativo o infinito y no depende de la representación empleada de $\varphi$ como combinación lineal.

Ahora vamos a extender la definición de integral de una función simple no negativa a una función medible no negativa. Sea $f : X \to [0, +\infty]$ una función medible, se define

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu : \varphi \text{ es una función simple y } 0 \leq \varphi \leq f \right\}.$$

Supongamos que tenemos ahora una función medible $f : X \to [-\infty, +\infty]$, podemos descomponer $f$ como $f = f_+ - f_-$, donde $f_+ = \max\{f, 0\}$ y $f_- = \max\{-f, 0\}$ son funciones medibles no negativas. Si se cumple que $\displaystyle\int_X f_+ d\mu$ y $\displaystyle\int_X f_- d\mu$ son finitas, decimos que $f$ es *$\mu$-integrable* (o simplemente integrable, si se sobreentiende la medida) y además se tiene que

$$\int_X f d\mu = \int_X f_+ d\mu - \int_X f_- d\mu.$$

Supongamos ahora que $f : X \to \mathbb{C}$ es una función medible que toma valores complejos. Decimos que $f$ es integrable si $\displaystyle\int_X |f| d\mu < \infty$. Como $|f| \leq |\Re f| + |\Im f| \leq 2|f|$ y teniendo en cuenta la Proposición 1.3 c), se define

$$\int_X f d\mu = \int_X \Re f d\mu + \int_X \Im f d\mu.$$

Además, si $E \subset X$, $E \in \mathcal{M}$, diremos que $f$ es integrable en $E$ si $f\chi_E$ es integrable y $\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu$.

En el resultado siguiente se recogen las propiedades más importantes de la integración, su demostración se puede encontrar en [2, p. 57–58] y [5, Proposición 2.16–2.22].

**Proposición 1.6.** *Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ funciones medibles.*

*a) Si $f, g$ son integrables y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable y* $\displaystyle\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$

*b) Si $f : X \to [0, \infty]$ es medible, entonces $\int f d\mu = 0$ si, y solo si, $f = 0$ c.t.p.*

*c) $f$ es integrable si, y solo si, $|f|$ es integrable. Si estas funciones son integrables, entonces $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$.*

*d) Si $f(x) \leq g(x)$ para cada $x \in X$, entonces $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.*

*e) Si $f(x) = g(x)$ c.t.x en $X$ y existe $\int f d\mu$ o $\int g d\mu$, entonces ambas integrales existen y $\int f d\mu = \int g d\mu$.*

A continuación vamos a probar tres de los resultados más relevantes de la Teoría de la medida e integración y que serán fundamentales en algunas de las pruebas desarrolladas en esta memoria.

**Teorema 1.7 (Teorema de Convergencia Monótona).** *Sean* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espacio de medida y* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión no decreciente de funciones medibles no negativas en* $X$ *tales que, para cada* $x \in X$*, existe* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$*. Entonces,* $f$ *es medible, no negativa y* $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$*.*

*Demostración.* La medibilidad de $f$ es consecuencia de la Proposición 1.3. Además, por hipótesis, para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \geqslant 0$, $x \in X$. Por tanto, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \geqslant 0$, $x \in X$. Veamos ahora que $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.
Como $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$, se tiene que $f_n(x) \leq f(x)$, $n \in \mathbb{N}$, y $x \in X$. Esto implica que $\int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y por consiguiente

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu.$$

Falta ver que $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geqslant \int_X f d\mu$.
Sea $0 \leq \phi \leq f$ una función simple definida en $X$ y $\alpha \in (0,1)$. Definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \{x \in X : f_n(x) \geqslant \alpha\phi(x)\}$.
Se tiene que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n$ es medible pues se puede expresar como unión finita de conjuntos medibles y

$$\int_X f_n d\mu \geqslant \int_{E_n} f_n d\mu \geqslant \int_{E_n} \alpha\phi d\mu = \alpha \int_{E_n} \phi d\mu.$$

Nótese que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $E_n \subseteq E_{n+1}$. En efecto, dado $n \in \mathbb{N}$ y $x \in E_n$, se tiene que

$$f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \geq \alpha\phi(x), \text{ luego } x \in E_{n+1}.$$

Por tanto, $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de conjuntos medibles. Además, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$. En efecto, sea $x \in X$ y supongamos que $\phi(x) > 0$. Entonces, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \geqslant \phi(x) > \alpha\phi(x)$, luego existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_{n_0}(x) \geq \alpha\phi(x)$. Por tanto, $x \in E_{n_0}$ y $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Si $x \in X$ y $\phi(x) = 0$, entonces $f(x) \geq 0 = \alpha \cdot 0$. Por tanto, como $f_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, es claro que $x \in E_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. En cuanto a la otra inclusión, si $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_{n_0} \subseteq X$. Por tanto, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = X$.

Supongamos que $\phi$ tiene una expresión de la forma $\phi = \sum_{j=1}^{k} b_j \chi_{B_j}$, donde $\{b_j\}_{j=1}^{k}$ son constantes no negativas y $\{B_j\}_{j=1}^{k}$ son conjuntos medibles disjuntos.

Entonces, por la definición que anteriormente dimos de la integral de una función simple no negativa, se tiene que,

$$\int_{E_n} \phi d\mu = \sum_{j=1}^{k} b_j \mu(B_j \cap E_n).$$

En consecuencia, para cada $1 \leq j \leq k$, la sucesión $\{B_j \cap E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente y

$$\cup_{n=1}^{\infty}(B_j \cap E_n) = B_j \cap (\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = B_j \cap X = B_j.$$

Así, del Teorema 1.1 c) se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_j \cap E_n) = \mu(B_j)$ y

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \alpha \lim_{n\to\infty} \left( \sum_{j=1}^{k} b_j \mu(B_j \cap E_n) \right) &= \alpha \sum_{j=1}^{k} b_j \lim_{n\to\infty} \mu(B_j \cap E_n) \\ &= \alpha \sum_{j=1}^{k} b_j \mu(B_j) = \alpha \int_X \phi d\mu.\end{aligned}$$

Esto es cierto para todo $\alpha \in (0,1)$, luego $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X \phi d\mu$. Ahora, tomamos el supremo entre todas las funciones simples $0 \leq \phi \leq f$ en $X$, y obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu.$$

Concluimos que

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

□

**Lema 1.8 (Lema de Fatou).** *Sean* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espacio de medida y* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones medibles no negativas definidas en* $X$*. Se tiene que*

$$\int_X \lim_{n\to\infty} \inf f_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_X f_n d\mu.$$

*Demostración.* Sea $h(x) = \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x),\ x \in X$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos las siguientes funciones auxiliares

$$g_k(x) := \inf_{n\geq k} f_n(x),\ x \in X.$$

Entonces, por la definición de límite inferior tenemos que,

$$h(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x),\ x \in X.$$

Nótese que las funciones $g_k, k \in \mathbb{N}$, son medibles y la sucesión $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente. Aplicando el Teorema 1.7, se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \int_X g_k d\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} g_k d\mu = \int_X h d\mu.$$

De la definición de $g_k$ es claro que, para todo $n, k \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq k$, $f_n(x) \geq g_k(x),\ x \in X$. Entonces,

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_X g_k d\mu, \text{ para todo } n, k \in \mathbb{N} \text{ tales que } n \geq k.$$

Por consiguiente,

$$\inf_{n\geq k} \int_X f_n d\mu \geq \int_X g_k d\mu,$$

y tomando límite cuando $k \to \infty$, obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \inf \int_X f_n d\mu = \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} \int_X f_n d\mu \geq \lim_{k\to\infty} \int_X g_k d\mu = \int_X h d\mu.$$

□

**Teorema 1.9 (Teorema de Convergencia Dominada).** *Sean* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espacio de medida y* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones medibles en* $X$ *tal que*

*a)* $f_n \to f$ *c.t.p en* $X$*.*
*b) Existe una función* $g$ *en* $X$*, integrable y no negativa tal que para cada* $n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leq g(x)$ *c.t.p* $x \in X$*.*

*Entonces,* $f$ *es integrable y* $\displaystyle\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$

*Demostración.* Supongamos en primer lugar que las condiciones $(a)$ y $(b)$ se cumplen en el conjunto $X$, esto es, para cada $x \in X$,

$$|f_n(x)| \leq g(x),\ n \in \mathbb{N}, \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Como $g$ es una función integrable y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq g$, se tiene que $\displaystyle\int_X |f_n| d\mu \leq \int_X g d\mu < \infty$, luego $f_n$ es integrable, $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, $f$ es también integrable, pues $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x),\ x \in X$. Veamos que $\displaystyle\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$.

Sabemos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son funciones medibles, pero no sabemos si son no negativas. Consideramos las funciones $f_n + g$, $n \in \mathbb{N}$, que son funciones no negativas. Aplicando el Lema 1.8, obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_X (f+g)d\mu &= \int_X \lim_{n\to\infty}(f_n+g)d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\inf \int_X (f_n+g)d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty}\inf \int_X f_n d\mu + \int_X g d\mu.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_X f d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\inf \int_X f_n d\mu.$$

Para probar la otra desigualdad, consideramos la sucesión de funciones $\{-f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que son medibles y verifican que $|-f_n(x)| \leq g(x),\ x\in X$ y $\lim_{n\to\infty}(-f_n)(x) = (-f)(x),\ x\in X$.
Las funciones $-f_n+g$ son no negativas y, aplicando el Lema 1.8, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_X ((-f)+g)d\mu &= \int_X \lim_{n\to\infty}((-f_n)+g)d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\inf \int_X ((-f_n)+g)d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty}\inf \int_X (-f_n)d\mu + \int_X g d\mu.\end{aligned}$$

De este modo, tenemos que

$$\int_X (-f)d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\inf \int_X (-f_n)d\mu = -\lim_{n\to\infty}\sup \int_X f_n d\mu,$$

luego $\displaystyle\int_X f d\mu \geq \lim_{n\to\infty}\sup \int_X f_n d\mu$. En consecuencia,

$$\lim_{n\to\infty}\sup \int_X f d\mu \leq \int_X f d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\inf \int_X f_n d\mu \leq \lim_{n\to\infty}\sup \int_X f_n d\mu,$$

y concluimos que

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu.$$

Vamos a tratar ahora el caso general. Supongamos que existe un conjunto $Z_0 \subset X$ tal que $\mu(Z_0)=0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),\ x\in X\backslash Z_0$, y que para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $Z_n \subset X$ con $\mu(Z_n)=0$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x),\ x\in X\backslash Z_n$. Definimos $Z = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} Z_n$. Se tiene que $\mu(Z) \leq \sum\limits_{n=0}^{\infty}\mu(Z_n) = 0$, luego $Z$ es medible y, para cada $x\in X\backslash Z$ se verifica que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ y $|f_n(x)| \leq g(x),\ n\in\mathbb{N}$. Consideramos las funciones $h = f\chi_{X\backslash Z}$ y $h_n = f_n\chi_{X\backslash Z}$. Tenemos que

$$|h_n(x)| = \begin{cases} |f_n(x)|, & \text{si } x\in X\backslash Z, \\ 0, & \text{si } x\in Z.\end{cases}$$

Entonces, $|h_n(x)| \leq g(x)$ y $h_n(x) \to h(x)$ cuando $n \to \infty$, para todo $x \in X$. Además, las funciones $h_n$ son integrables para todo $n \in \mathbb{N}$, pues $h_n = f_n$ salvo en un conjunto de medida nula y $\displaystyle\int_X h_n d\mu = \int_X f_n d\mu$.

Aplicando el caso anterior, $h$ es integrable y $\displaystyle\int_X h d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X h_n d\mu$.

Por último, como $f = h$ salvo en $Z$ (que es un conjunto de medida nula), concluimos que $f$ es integrable y

$$\int_X f d\mu = \int_X h d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X h_n = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

□

Para finalizar el capítulo, veamos un resultado que nos dice que podemos intercambiar sumas (infinitas) con integrales, siempre que las funciones sean medibles y no negativas.

**Teorema 1.10.** *Sean* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espacio de medida y* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones medibles no negativas y* $f = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$. *Se tiene que*

$$\int_X f d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n d\mu.$$

*Demostración.* Probamos primero el caso de dos sumandos, sean $f_1$ y $f_2$ funciones medibles no negativas y $f = f_1 + f_2$. En virtud del Teorema 1.5 podemos obtener sucesiones no decrecientes de funciones simples $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que aproximan a $f_1$ y $f_2$ respectivamente. Entonces $\{\phi_n + \psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión no decreciente de funciones simples que aproximan a $f = f_1 + f_2$. Del Teorema de la Convergencia Monótona y la Proposición 1.6 a), se sigue que

$$\begin{aligned}\int_X f d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_X (\phi_n + \psi_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n d\mu + \lim_{n\to\infty} \int_X \psi_n d\mu \\ &= \int_X f_1 d\mu + \int_X f_2 d\mu.\end{aligned}$$

Por inducción, para cada $N \in \mathbb{N}$, se tiene que $\displaystyle\int_X \sum_{n=1}^{N} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{N} \int_X f_n d\mu$. Tomando $N \to \infty$ y aplicando de nuevo el Teorema de Convergencia Monótona concluimos que $\displaystyle\int_X f d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n d\mu$.

□

# 2

# Espacios $L^p(X, \mu)$

Los espacios de Lebesgue $L^p$ se llamaron así en honor al matemático Henri Lebesgue, aunque fueron introducidos por primera vez por Frigyes Riesz en 1910. Estos espacios tienen un papel fundamental en el análisis matemático y la teoría de la probabilidad y están constituidos por las funciones medibles cuya potencia $p$ en valor absoluto, $|\cdot|^p$, es integrable. En la segunda sección del capítulo anterior estudiamos las funciones integrables, que constituyen el espacio $L^1(X, \mu)$. En este capítulo estudiaremos estos espacios para $0 < p \leq \infty$, así como la versión débil de los mismos, $L^{p,\infty}$, conocidos como espacios de Lorentz. Ambos serán los dos tipos de espacios en los que estudiaremos la acotación del operador maximal de Hardy Littlewood en el siguiente capítulo.

## 2.1. Conceptos básicos de los espacios $L^p(X, \mu)$

Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $0 < p \leq \infty$. Denotemos por $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ el espacio de funciones medibles $f : X \to \mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|_p = \left[ \int_X |f|^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 0 < p < \infty, \tag{2.1}$$

$$\text{y } \|f\|_\infty := ess \sup_{x \in X} |f(x)| = \text{ínf} \{\alpha \geq 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) = 0\} . \tag{2.2}$$

En la literatura se suelen utilizar las siguientes notaciones para estos espacios,

$$L^p(X, \mu),\ L^p(\mu),\ L^p(X),\ L^p,$$

siempre que se sobreentienda del contexto el resto de elementos del espacio de medida. El espacio $L^p(X, \mu)$, $0 < p \leq \infty$, es un espacio vectorial. En efecto, sean $f$ y $g$ dos funciones de $L^p(X, \mu)$ y $0 < p < \infty$. Se tiene que

$$|f + g|^p \leq [2 \text{máx}(|f|, |g|)]^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p),$$

luego $f + g \in L^p(X, \mu)$. Por otro lado, si $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$|\lambda f|^p = |\lambda|^p |f|^p.$$

Por tanto, $\lambda f \in L^p(X, \mu)$. Para $p = \infty$ el resultado es directo.

Nos preguntamos ahora si estos espacios $L^p(X,\mu)$ son espacios normados. Para ello, vamos a recordar la definición de norma. Un *espacio normado* es un par $(X,\|\cdot\|)$ donde $X$ es un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ es una aplicación, $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ tal que

1. $\|x\| \geq 0$, para todo $x \in X$;
2. $\|x\| = 0$ si, solo si, $x = 0$;
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, para todo escalar $\alpha$ y $x \in X$;
4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todo $x, y \in X$.

Llamamos *norma* a la aplicación $\|\cdot\|$. Nótese que, en general, $\|f\|_p = 0$ no implica que $f \equiv 0$. Por consiguiente, $\|\cdot\|_p$ no es una norma para $L^p(X,\mu)$ aunque la notación lo sugiera. Para resolver este problema, se considera la siguiente relación de equivalencia: sea $f, g \in L^p(X,\mu)$. Decimos que $f \sim g$ si $f = g$ en $\mu-$casi todo punto. De este modo, a partir de ahora, consideraremos el espacio cociente $L^p(X,\mu)/\sim$, constituido por las clases de equivalencia $[f]$ de $f \in L^p(X,\mu)$. Sin embargo, por simplicidad en la notación, denotaremos dicho espacio por $L^p(X,\mu)$ y a las clases de equivalencia las denotaremos también por $f$, que se distinguirá de la función $f$ por el contexto.
Ahora que consideramos los espacios $L^p(X,\mu)$ con las clases de equivalencia, es claro que $\|\cdot\|_p$ verifica las tres primeras propiedades de norma. Por tanto, sólo queda comprobar si se cumple la desigualdad triangular. Veamos que para $0 < p < 1$ este no es el caso. En efecto, sean $0 < p < 1$, $a, b > 0$ y $E, F$ dos conjuntos de medida finita, positiva y disjuntos. Veamos primero que $a + b < (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}}$. Como $0 < p < 1$, entonces $p - 1 < 0$ y, $(a+t)^{p-1} < t^{p-1}$. Integramos entre 0 y $b$ y obtenemos que,

$$\frac{1}{p}((a+b)^p - a^p) = \int_0^b \frac{1}{(a+t)^{1-p}} dt < \int_0^b \frac{1}{t^{1-p}} dt = \frac{b^p}{p}.$$

Por tanto, $((a+b)^p)^{\frac{1}{p}} < (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}}$. Tomamos $a = \mu(E)^{\frac{1}{p}}$ y $b = \mu(F)^{\frac{1}{p}}$ en la desigualdad anterior y obtenemos que

$$(\mu(E))^{\frac{1}{p}} + (\mu(F))^{\frac{1}{p}} < (\mu(E) + \mu(F))^{\frac{1}{p}}.$$

Esto es,

$$\left(\int_X \chi_E d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X \chi_F d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\int_X \chi_E d\mu + \int_X \chi_F d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

lo que implica que

$$\left(\int_X (\chi_E)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X (\chi_F)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\int_X (\chi_E + \chi_F)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Hemos probado que

$$\|\chi_E\|_p + \|\chi_F\|_p < \|\chi_E + \chi_F\|_p,$$

luego no se cumple la desigualdad triangular.

Vamos a probar que si $1 \leq p \leq \infty$ , entonces $\|\cdot\|_p$ satisface la desigualdad triangular y por tanto $L^p(X,\mu)$ es un espacio normado. Para ello, necesitamos dos resultados previos.

**Lema 2.1 (Desigualdad de Young).** *Sean $a, b \geqslant 0$ y $0 < \lambda < 1$. Entonces,*

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b.$$

*La igualdad se da si, y solo si, $a = b$.*

*Demostración.* Si $b = 0$, hemos acabado. Supongamos que $b \neq 0$. Dividimos por $b$ ambos lados de la desigualad y el resultado a probar quedaría:

$$a^\lambda b^{-\lambda} \leqslant \lambda \frac{a}{b} + (1-\lambda).$$

Tomando $t = \frac{a}{b}$, basta demostrar que

$$t^\lambda \leqslant \lambda t + (1-\lambda),$$

y que la igualdad se da si, y solo si, $t = 1$. Consideramos la función $f(t) = t^\lambda - \lambda t$. Vamos a estudiar donde alcanza el máximo esta función. Como $f'(t) = \lambda t^{\lambda-1} - \lambda$ se tiene que $f'(t) = 0$ si, y solo si, $t = 1$.
Además, podemos observar que $f(t) = t^\lambda - \lambda t$ es estrictamente creciente para $t < 1$ y estrictamente decreciente para $t > 1$. El máximo se alcanza para $t = 1$, donde $f(1) = 1 - \lambda$. Por tanto, para cada $t \geq 0$, $f(t) \leq 1 - \lambda$, esto es, $t^\lambda \leqslant \lambda t + (1-\lambda)$.

□

Procedemos ahora a presentar el otro resultado clave para la demostración de la desigualdad triangular y que aparecerá también en otras pruebas relevantes de esta memoria.

**Proposición 2.2 (Desigualdad de Hölder).** *Sean $1 \leq p, q \leq \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $f \in L^p(X,\mu)$ y $g \in L^q(X,\mu)$ entonces $fg \in L^1(X,\mu)$ y*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q, \tag{2.3}$$

*La igualdad en (2.3) se da si, y solo si, $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ c.t.p. para algunas constantes $\alpha, \beta$, con $\alpha\beta \neq 0$.*

*Demostración.* Si $\|f\|_p = 0$ o $\|g\|_q = 0$ hemos acabado. Supongamos que $\|f\|_p,\ \|g\|_q \neq 0$.
Probaremos primero el caso $p = 1$ y $q = \infty$ (el caso $p = \infty$ y $q = 1$ es simétrico). Si $f \in L^1(X,\mu)$ y $g \in L^\infty(X,\mu)$ tenemos que $|f(x)g(x)| \leq \|g\|_\infty |f(x)|$, c.t. $x \in X$, y por consiguiente $\|fg\|_1 = \int_X |f(x)g(x)|d\mu \leq \|g\|_\infty \int_X |f(x)|d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1$. Supongamos ahora que $1 < p, q < \infty$. Nótese que si la desigualdad se cumple para $f$ y $g$, entonces se cumple para todos los múltiplos escalares de $f$ y $g$, ya que si $f$ y $g$ se reemplazan por $af$ y $bg$ respectivamente, ambos lados de la desigualdad cambian por un factor de $ab$. Por tanto, es suficiente probar la desigualdad cuando $\|f\|_p = 1 = \|g\|_q$. Aplicando el Lema 2.1 con $a = |f|^p$, $b = |g|^q$ y $\lambda = \frac{1}{p}$, obtenemos que

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q, \quad x \in X. \tag{2.4}$$

Integrando a ambos lados de la desigualdad concluimos que

$$\begin{aligned} \|fg\|_1 = \int |f(x)g(x)|d\mu &\leq \frac{1}{p}\int |f(x)|^p d\mu + \frac{1}{q}\int |g(x)|^q d\mu \\ &= \frac{\|f\|_p^p}{p} + \frac{\|g\|_q^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \|g\|_q. \end{aligned}$$

Por otro lado, en virtud de (2.4) y el Lema 2.1, la igualdad en (2.3) se da si, y solo si, $|f|^p = |g|^q$ c.t.p. en $X$.

□

A los exponentes $p$ y $q$ tales que $1 \leq p, q \leq \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (con el convenio $1/\infty = 0$) se les conoce como *exponentes conjugados.*

Procedemos ahora a probar la desigualdad triangular para la norma en los espacios $L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, también conocida como la *Desigualdad de Minkowski.*

**Proposición 2.3 (Desigualdad de Minkowski).** *Sea* $1 \leq p \leq \infty$*. Si* $f, g \in L^p(X,\mu)$*, entonces*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

*Demostración.* Supongamos que $f, g \in L^\infty(X,\mu)$. Entonces,

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \text{ c.t. } x \in X.$$

Por tanto, $f + g \in L^\infty(X,\mu)$. Por otro lado, si $f, g \in L^1(X,\mu)$, tenemos que

$$\|f + g\|_1 = \int_X |f + g|d\mu \leq \int_X |f|d\mu + \int_X |g|d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Supongamos ahora que $f, g \in L^p(X,\mu)$, $1 < p < \infty$. Si $\|f+g\|_p = 0$, el resultado es trivial, por lo que supongamos que $\|f+g\|_p \neq 0$. Entonces,

$$|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \leq (|f|+|g|)|f+g|^{p-1}.$$

Ahora, integramos a ambos lados de la desigualdad en $X$ y aplicamos la Proposición 2.2, (teniendo en cuenta que $(p-1)q = p$) y obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_X |f+g|^p d\mu &\leq \int_X (|f|+|g|)|f+g|^{p-1} d\mu \\ &\leq \left[\left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left[\left(\int_X |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\right].\end{aligned}$$

Como $q = \frac{p}{p-1}$, podemos reescribir la desigualdad anterior como

$$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}.$$

Dividimos por $\|f+g\|_p^{\frac{p}{q}}$ ambos lados de la desigualdad y obtenemos que

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

□

De la desigualad de Minkowski podemos concluir que los espacios $L^p(X,\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, son espacios normados con las normas definidas en (2.1) y (2.2). Nos interesa ahora estudiar la completitud de los espacios $L^p(X,\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$. Recordemos que un espacio métrico es *completo* si toda sucesión de Cauchy definida en este espacio converge en él.

**Teorema 2.4 (Teorema 6.6, [5]).** *Si $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(X,\mu)$ es un espacio de Banach, es decir, un espacio vectorial normado y completo con la métrica definida por su norma.*

Recordemos que si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, llamamos *espacio dual* de $X$ al conjunto

$$X^* = \{\phi : X \to \mathbb{R} : \phi \text{ es lineal y acotado}\}.$$

El espacio dual de un espacio de Banach es de nuevo un espacio de Banach, y en el caso de los espacios $L^p(X,\mu)$, $1 < p < \infty$, su dual se puede caracterizar completamente.

**Teorema 2.5 (Teorema 6.15, [5]).** *Sean $1 < p, q < \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Si $1 < p < \infty$, para cada $\phi \in (L^p(X,\mu))^*$ existe $g \in L^q(X,\mu)$ tal que*

$$\phi(f) = \int_X fg d\mu, \quad f \in L^p(X,\mu).$$

*Además, $L^q(X,\mu)$ es isométricamente isomorfo a $(L^p(X,\mu))^*$. Si la medida $\mu$ es $\sigma-$finita, el resultado también es válido para $p = 1$.*

Especial mención merecen los duales de los espacio $L^1(X,\mu)$ y $L^\infty(X,\mu)$. El dual $L^1(X,\mu)$ es $L^\infty(X,\mu)$, pero el dual de $L^\infty(X,\mu)$ no es $L^1(X,\mu)$. Se sabe que el espacio dual de $L^\infty(X,\mu)$ puede identificarse con el espacio de medidas finitamente aditivas y acotadas en el espacio de medida subyacente. En otras palabras, los funcionales lineales continuos sobre $L^\infty(X,\mu)$ pueden expresarse como integración respecto a una medida finitamente aditiva y acotada. Esta es la llamada representación de Riesz-Markov-Kakutani de $L^\infty(X,\mu)$. Podemos encontrar más información sobre los duales de estos espacios en [2, p. 108–109] y en [5, p. 191].

## 2.2. Contenidos en espacios $L^p(X,\mu)$

Otro aspecto importante a estudiar de los espacios $L^p(X,\mu)$, $0 < p \leq \infty$, son las relaciones de contenidos que hay entre ellos. En general, $L^p(X,\mu) \not\subseteq L^q(X,\mu)$, cuando $p \neq q$. En efecto, sea $X = [0,1]$ y $1 \leq p < \alpha < q \leq \infty$, donde $\alpha = \frac{p+q}{2}$. Escogemos $\beta = \frac{1}{\alpha}$ y definimos

$$|f(x)| = \begin{cases} \frac{1}{x^\beta}, & \text{si } x \in (0,1], \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Entonces,

$$\|f\|_p^p = \int_0^1 |f(x)|^p dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{p\beta}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{p}{\alpha}}} < \infty,$$

puesto que $\frac{p}{\alpha} < 1$. Por otra parte,

$$\|f\|_q^q = \int_0^1 |f(x)|^q dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{q\beta}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{q}{\alpha}}} = \infty,$$

ya que $\frac{q}{\alpha} > 1$, luego $f \notin L^q([0,1], dx)$. Por tanto,

$$L^p([0,1]) \not\subseteq L^q([0,1]).$$

Sin embargo, cuando la medida del espacio es finita, el contenido de espacios en el sentido opuesto sí es válido.

**Proposición 2.6.** *Sean* $1 \leq p < q \leq \infty$ *y* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espacio de medida. Si* $\mu(X) < \infty$*, entonces* $L^q(X,\mu) \subset L^p(X,\mu)$.

*Demostración.* Consideramos el caso $q = \infty$. Si $f \in L^\infty(X,\mu)$, entonces

$$\int_X |f|^p d\mu \leq \|f\|_\infty^p \int_X d\mu = \mu(X)\|f\|_\infty^p < \infty.$$

Por tanto, $f \in L^p(X,\mu)$.
Supongamos ahora que $f \in L^q(X,\mu)$, $1 \leq q < \infty$. Definimos el siguiente conjunto

$$E = \{x \in X : |f(x)| \leq 1\}.$$

Entonces, $|f(x)|^p < |f(x)|^q$, si $x \in X \backslash E$ y $|f(x)| \leq 1$ si $x \in E$.

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &= \int_X |f|^p d\mu = \int_X \chi_E |f|^p d\mu + \int_X \chi_{X\backslash E}|f|^p d\mu \\
&\leq \int_E d\mu + \int_X \chi_{X\backslash E}|f|^p d\mu \leq \mu(E) + \int_X \chi_{X\backslash E}|f|^q d\mu \\
&\leq \mu(X) + \|f\|_q^q < \infty.
\end{aligned}$$

Concluimos que $f \in L^p(X,\mu)$.

□

En particular, resultado anterior nos dice que si el espacio $X$ tiene medida finita, para cada $1 \leq p < \infty$, se tiene que $L^\infty(X,\mu) \subset L^p(X,\mu)$. Por otra parte, cuando $X = \mathbb{Z}, \mathbb{N}$, y $\mu$ es la medida de contar, el contenido de espacios se tiene en la otra dirección y por lo tanto el espacio $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ (respectivamente $\ell^\infty(\mathbb{N})$) es el espacio más grande en la cadena de espacios de Lebesgue en $\mathbb{Z}$ (respectivamente en $\mathbb{N}$). Veamos el siguiente resultado:

**Proposición 2.7.** *Sean* $1 \leq p < q \leq \infty$*. Se tiene que* $\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})$.

*Demostración.* Sea $x \in \ell^p(\mathbb{N})$. Queremos ver que $\|x\|_q \leq \|x\|_p$, pero como esta desigualdad es homogénea, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\|x\|_p = 1$. De este modo, es suficiente probar que $\|x\|_q \leq 1$. Como $\|x\|_p = 1$, entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|^p = 1$ y por tanto $|x(i)| \leq 1$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Como además $p < q$, se tiene que $|x(i)|^q < |x(i)|^p$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\|x\|_q^q = \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|^q \leq \sum_{i=1}^{\infty} |x(i)|^p = 1,$$

como queríamos probar.

$\square$

**Proposición 2.8.** *Sean $0 < p < q < r \leq \infty$. Se tiene que $L^q(X,\mu) \subset L^p(X,\mu) + L^r(X,\mu)$, esto es, cada $f \in L^q(X,\mu)$ puede escribirse como suma de una función en $L^p(X,\mu)$ y una función en $L^r(X,\mu)$.*

*Demostración.* Sea $f \in L^q(X,\mu)$. Definimos el conjunto

$$E = \{x \in X : |f(x)| > 1\}.$$

Consideramos las siguientes funciones, $g = f\chi_E$ y $h = f\chi_{E^c}$, donde $E^c = X \setminus E$. Es claro que $f = g + h$. Además, por definición, se tiene que $|g|^p = |f\chi_E|^p = |f|^p\chi_E$, entonces

$$\|g\|_p^p = \int_E |f|^p d\mu \leq \int_E |f|^q d\mu \leq \|f\|_q^q < \infty, \text{ luego } g \in L^p(X,\mu).$$

Por otra parte, $|h|^r = |f\chi_{E^c}|^r = |f|^r\chi_{E^c}$, y por consiguiente

$$\|h\|_r^r = \int_{E^c} |f|^r d\mu \leq \int_{E^c} |f|^q d\mu \leq \|f\|_q^q < \infty, \text{ luego } h \in L^r(X,\mu).$$

$\square$

**Proposición 2.9.** *Sean $0 < p < q < r \leq \infty$. Se verifica que $L^p(X,\mu) \cap L^r(X,\mu) \subset L^q(X,\mu)$ y $\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda}$, siendo $\lambda \in (0,1)$ tal que*

$$q^{-1} = \lambda p^{-1} + (1-\lambda)r^{-1},$$

*es decir,*

$$\lambda = \frac{q^{-1} - r^{-1}}{p^{-1} - r^{-1}}.$$

*Demostración.* Sea $f \in L^p(X,\mu) \cap L^r(X,\mu)$. Si $r = \infty$, tenemos que

$$|f(x)|^q \leq \|f\|_\infty^{q-p} |f(x)|^p.$$

Entonces, si integramos a ambos lados de la desigualdad vemos que el resultado se cumple para $\lambda = \frac{p}{q}$. Supongamos que $r < \infty$. Nótese que $\frac{\lambda q}{p} + \frac{(1-\lambda)q}{r} = 1$. Entonces, de la Desigualdad de Hölder con $\frac{p}{\lambda q}$ y $\frac{r}{(1-\lambda)q}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|f\|_q^q = \int_X |f|^q d\mu &= \int_X |f|^{\lambda q} |f|^{(1-\lambda)q} d\mu \leq \||f|^{\lambda q}\|_{\frac{p}{\lambda q}} \||f|^{(1-\lambda)q}\|_{\frac{r}{(1-\lambda)q}} \\ &= \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{\lambda q}{p}} \left(\int_X |f|^r d\mu\right)^{\frac{(1-\lambda)q}{r}} = \|f\|_p^{\lambda q} \|f\|_r^{(1-\lambda)q}. \end{aligned}$$

Concluimos que

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda},$$

es decir, $f \in L^q(X,\mu)$.

$\square$

## 2.3. Aproximación en $L^p(X,\mu)$

En ocasiones, cuando vamos a probar un resultado en los espacios $L^p$, es conveniente probarlo primero en un espacio de funciones con mejores propiedades y que constituya un subconjunto denso del espacio $L^p$. Recordemos que si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio métrico y $A \subseteq X$, decimos que $A$ es *denso* en $X$ si, y solo si, la clausura de $A$ coincide con el espacio $X$.

**Teorema 2.10.** *Sea $1 \leq p \leq \infty$. El conjunto de las funciones simples que pertenecen a $L^p(X,\mu)$ es denso en $L^p(X,\mu)$.*

*Demostración.* Sea $f \in L^p(X,\mu)$, $1 \leq p < \infty$. Del Teorema 1.5, sabemos que existe $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples tales que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ c.t.p y $|f_n| \leq |f|$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \in L^p(X,\mu)$ y $|f_n - f|^p \leq 2^p|f|^p \in L^1(X,\mu)$. Del Teorema de la Convergencia Dominada se sigue que $\|f_n - f\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Además, si cada $f_n$, $n \in \mathbb{N}$, puede escribirse como $f_n = \sum_j a_j \chi_{E_j}$, donde los $E_j$ son disjuntos y las constantes $a_j$ son distintas de cero, necesariamente $\mu(E_j) < \infty$ para cada $j$, pues $\sum_j |a_j|^p \mu(E_j) = \int_X |f_n|^p < \infty$.

Por otra parte, si $f \in L^\infty(X,\mu)$, elegimos un representante de $f$ que esté acotado. En virtud del Teorema 1.5, existe una sucesión de funciones simples $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $|f_n| \leq |f|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y que converge uniformemente a $f$, esto es, $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ cuando $n \to \infty$. Además, cualquier función simple está en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

□

Hemos demostrado que las funciones simples son densas en los espacios $L^p(X,\mu)$. Nos preguntamos si también lo son las funciones continuas de soporte compacto, es decir, si el conjunto $C_c(X)$ es denso en $L^p(X,\mu)$, $1 \leq p < \infty$. En el caso particular $X = \mathbb{R}^n$ y $\mu = m$, donde $m$ denota la medida de Lebesgue, el resultado es cierto.

**Teorema 2.11 (Proposición 7.4.3, [2]).** *Para cada $1 \leq p < \infty$, $C_c(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n, dx)$.*

Para finalizar esta sección, veremos otra forma de aproximar las funciones de $L^p(X,\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, por funciones con mejores propiedades, definidas a través de una operación llamada *convolución*. Sean $f$ y $g$ funciones medibles en $\mathbb{R}^n$. Se define la *convolución* de $f$ y $g$, $f * g$, de la siguiente forma

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

siempre que la integral exista. Se pueden imponer varias condiciones a $f$ y a $g$ para garantizar que $f*g$ esté definida al menos en casi todo punto. Por ejemplo,

si $f$ es acotada y de soporte compacto, $g$ puede ser cualquier función localmente integrable. Se puede demostrar fácilmente que $f * g = g * f$ y que además $(f * g) * h = f * (g * h)$, es decir, la convolución de dos funciones verifica las propiedades conmutativa y asociativa.
El siguiente resultado es una herramienta fundamental en el estudio de la convolución de funciones en espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ y su prueba puede encontrarse en [5, Proposición 8.7].

**Proposición 2.12 (Desigualdad de Young's generalizada).** *Sean* $1 \leq p, q, r \leq \infty$, *tales que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$. *Si* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *y* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, *entonces* $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ *y* $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

La convolución es una operación que regulariza a las funciones implicadas, es decir, $f*g$ tiene mejores propiedades que $f$ y $g$ por separado. Es por ello que esta operación tiene un papel fundamental en análisis de Fourier y en ecuaciones en derivadas parciales. En particular, son de crucial importancia las funciones que actúan en cierto sentido como el elemento unidad con respecto a la convolución. Estas se conocen como *aproximaciones de la identidad*. Se dice que una familia $\{K_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ de funciones es una *aproximación de la identidad* si

1. Para cada $\epsilon > 0$, se tiene que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} K_\epsilon(x)dx = 1$.
2. Existe una constante $C > 0$ tal que, para todo $\epsilon > 0$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |K_\epsilon(x)|dx \leq C$.
3. Para cada $\delta > 0$, se tiene que $\displaystyle\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{|x|>\delta} |K_\epsilon(x)|dx = 0$.

A estas familias $\{K_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ también se las conoce como núcleos de sumabilidad. Una manera de construir aproximaciones de la identidad es la siguiente: sea $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$. Para cada $\epsilon > 0$ definimos

$$\phi_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right). \tag{2.5}$$

Entonces, $\{\phi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ es una *aproximación de la identidad*. En efecto, veamos que se verifican las tres condiciones anteriores:

1. Sea $\epsilon > 0$. Haciendo el cambio de variable $y = \frac{x}{\epsilon}$, se tiene que
$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_\epsilon(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\epsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)dy = 1.$$
2. Teniendo en cuenta el mismo cambio de variable anterior:
$$\int_{\mathbb{R}^n} |\phi_\epsilon(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{1}{\epsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right|dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(y)|dy,$$
entonces $\|\phi_\epsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \infty$.

3. Sea $\delta > 0$. Haciendo el cambio de variable $y = \frac{x}{\epsilon}$ se tiene que:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{|x|\geq\delta}|\phi_\epsilon(x)|dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{|x|\geq\delta}\left|\frac{1}{\epsilon^n}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right|dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{|y|\geq\frac{\delta}{\epsilon}}|\phi(y)|dy = 0,$$

pues $\frac{\delta}{\epsilon}\to\infty$ cuando $\epsilon\to 0$.

Por tanto, podemos afirmar que $\{\phi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ es una aproximación de la identidad.

Veamos algunos ejemplos de núcleos de sumabilidad que pueden escribirse como (2.5) para ciertas funciones $\phi$, y que tienen una gran importancia en el análisis matemático y en la física.

*Ejemplo 2.13.* El *núcleo de Gauss-Weierstrass* viene dado por

$$W_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{-|x|^2}{4t}}.$$

Tomando $\phi(u) = \frac{e^{-|u|^2}}{\pi^{n/2}}$, obtenemos que $W_t(x) = \phi_{2\sqrt{t}}(x)$.

*Ejemplo 2.14.* El *núcleo de Poisson* viene dado por

$$P_t(x) = C_n\frac{t}{(t^2+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}},\quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^n,\ \text{ y } C_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Nótese que si tomamos $\phi = C_n\frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}}$, tebenis que $P_t = \phi_t$.

El siguiente resultado nos dice que las funciones en $L^p$ pueden aproximarse por la convolución de aproximaciones de la identidad con dicha función.

**Teorema 2.15 (Teorema 2.1, [4]).** *Sean $\{K_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ núcleos de sumabilidad. Si $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1\leq p<\infty$, entonces*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\|K_\epsilon * f - f\|_p = 0.$$

*Si $f\in C_0(\mathbb{R}^n)$, entonces la convergencia es uniforme, es decir, $\lim_{\epsilon\to 0}\|K_\epsilon * f - f\|_\infty = 0$.*

En el teorema anterior, estamos considerando $C_0(\mathbb{R}^n) = \{f\in C(\mathbb{R}^n) : \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0\}$.

En el Capítulo 3 probaremos que los núcleos de sumabilidad tienen incluso mejores propiedades, como la acotación fuerte en $L^p$ y la acotación débil (1,1), así como la convergencia en casi todo punto. Estas propiedades las podremos deducir a partir del comportamiento de la función maximal de Hardy-Littlewood.

## 2.4. Espacios $L^{p,\infty}(X,\mu)$ e interpolación

En esta sección presentamos los espacios de Lorentz $L^{p,\infty}(X,\mu)$ con $0 < p \leq \infty$, que son también llamados espacios $L^p(X,\mu)-$débiles. La manera más natural de definir estos espacios es a través de la *función de distribución*. Sean $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espacio de medida y $f : X \to \mathbb{C}$ una función medible. Definimos la función de distribución de $f$, $a_f : (0,\infty) \to [0,\infty]$, por

$$a_f(\lambda) = \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}\right), \quad \lambda > 0.$$

Nótese que el conjunto $\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}$ es medible pues $f$ es medible y esto nos garantiza que tiene sentido estudiar la medida de este tipo de conjuntos. El siguiente resultado recoge algunas de las propiedades más importantes de la función de distribución.

**Proposición 2.16 (Proposición 6.22, [5]).** *Sean $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espacio de medida y $f,g : X \to \mathbb{C}$ funciones medibles. Se verifican las siguientes propiedades*

*a) $a_f$ es decreciente y continua por la derecha.*
*b) Si $|g(x)| \leq |f(x)|$ en $\mu-c.t.x \in X$, entonces $a_g(\alpha) \leq a_f(\alpha)$, para todo $\alpha > 0$.*
*c) $a_{f+g}(\alpha+\beta) \leq a_f(\alpha) + a_g(\beta)$, $\alpha,\beta > 0$.*

El siguiente resultado será muy útil en el siguiente capítulo, pues nos permite escribir la norma $\|\cdot\|_p$ en términos de la función de distribución.

**Proposición 2.17.** *Sean $(X,\mathcal{M},\mu)$ un espacio de medida, $0 < p < \infty$ y $f \in L^p(X,\mu)$. Se tiene que*

$$\|f\|_p^p = p\int_0^\infty \lambda^{p-1} a_f(\lambda)d\lambda. \tag{2.6}$$

*Demostración.* Del Teorema de Fubini, deducimos que

$$\begin{aligned} p\int_0^\infty \lambda^{p-1} a_f(\lambda)d\lambda &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left(\int_X \chi_{\{x:\,|f(x)|>\lambda\}}d\mu\right)d\lambda \\ &= p\int_X\int_0^{|f(x)|} \lambda^{p-1}d\lambda d\mu = \int_X |f(x)|^p d\mu = \|f\|_p^p. \end{aligned}$$

□

Sean $(X,\mu)$ y $(Y,\nu)$ espacios medibles, $0 < p < \infty$ y $T$ un operador definido de $L^p(X,\mu)$ en el espacio de las funciones medibles de $Y$ a $\mathbb{C}$. Para cada $0 < q < \infty$, se dice que $T$ es *débil* $(p,q)$, si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\nu\left(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}\right) \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q, \quad f \in L^p(X,\mu),\, \lambda > 0. \tag{2.7}$$

Además, se dice que $T$ es un operador débil $(p,\infty)$ si está acotado de $L^p(X,\mu)$ en $L^\infty(Y,\nu)$.

Por otra parte, diremos que $T$ es un operador *fuerte* $(p,q)$, $0<q<\infty$, si está acotado de $L^p(X,\mu)$ en $L^q(Y,\nu)$. Nótese que si $T$ es fuerte $(p,q)$, $0<q<\infty$, entonces también será débil $(p,q)$. En efecto, sean $T$ un operador de tipo fuerte $(p,q)$, $0<q<\infty$, y $\lambda>0$. Consideramos el conjunto $E_\lambda=\{y\in Y : |Tf(y)|>\lambda\}$. Se tiene que

$$\nu(E_\lambda)=\int_{E_\lambda} d\nu \le \int_{E_\lambda}\left|\frac{Tf(x)}{\lambda}\right|^q d\nu \le \frac{\|Tf\|_q^q}{\lambda^q} \le \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q.$$

Por tanto, $T$ es débil $(p,q)$.

Además, si $(X,\mu)=(Y,\nu)$, $q=p$ y $T$ es el operador identidad, la desigualdad (2.7) es la desigualdad clásica de Chebyshev.

Otra forma de escribir la acotación de tipo débil $(p,q)$, $0<p,q<\infty$, es a través de los espacios de Lorentz. Sea $(X,\mu)$ un espacio medible y $0<p<\infty$. Se define el *espacio de Lorentz* $L^{p,\infty}(X,\mu)$, como el conjunto de las funciones medibles $f : X\to\mathbb{C}$ tales que

$$\|f\|_{L^{p,\infty}}=\sup_{\lambda>0}\left\{\lambda\,(a_f(\lambda))^{\frac{1}{p}}\right\}<\infty.$$

Si $p=\infty$, el espacio $L^{\infty,\infty}(X,\mu)$ coincide con el espacio $L^\infty(X,\mu)$. De manera análoga a lo que ocurría para los espacios $L^p$, consideraremos dos funciones en $L^{p,\infty}(X,\mu)$ como iguales, si coinciden en casi todo punto. En virtud de la desigualdad de Chebyshev, es claro que $L^p(X,\mu)\subset L^{p,\infty}(X,\mu)$.

Veamos un ejemplo de una función $f\in L^{p,\infty}$, $0<p<\infty$ que no pertenece a $L^p$.

*Ejemplo 2.18.* Sea $f : (0,\infty)\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=\frac{1}{x^{1/p}}$.
Para $t>0$, se tiene que

$$\begin{aligned}\mu\left(\{x\in(0,\infty) : |f(x)|>t\}\right)&=\mu\left(\left\{x\in(0,\infty) : \frac{1}{|x|^{1/p}}>t\right\}\right)\\&=\mu\left(\left\{x\in(0,\infty) : |x|<\frac{1}{t^p}\right\}\right)\\&=\mu\left(\left(-\frac{1}{t^p},\frac{1}{t^p}\right)\right)=\frac{2}{t^p}.\end{aligned}$$

Por consiguiente, $f\in L^{p,\infty}((0,\infty))$, pero $f\notin L^p((0,\infty))$.

Nótese que si un operador $T$ es *débil* $(p,q)$, con $0<p,q<\infty$, entonces $T$ es acotado de $L^p(X,\mu)$ en $L^{q,\infty}(Y,\nu)$.

El siguiente resultado, llamado *principio de Banach*, nos establece la relación entre las desigualdades débiles $(p,q)$ y la convergencia en casi todas partes.

**Teorema 2.19.** *Sean* $(X,\mathcal{M},\mu)$ *un espacio de medida,* $0<p,q<\infty$ *y* $\{T_t\}_{t>0}$ *una familia operadores lineales en* $L^p(X,\mu)$*. Si el operador maximal*

$$T^*f(x) := \sup_{t>0} |T_t f(x)|$$

*es débil* $(p,q)$*, entonces el conjunto*

$$\Psi := \left\{ f \in L^p(X,\mu) : \lim_{t\to t_0} T_t f(x) = f(x) \ c.t.x \in X \right\}$$

*es cerrado en* $L^p(X,\mu)$*.*

*Demostración.* Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Psi$ tal que $f_n \to f$, cuando $n\to\infty$, en $L^p(X,\mu)$. Queremos ver que $f\in\Psi$. Como $\|f_n - f\|_p \to 0$, cuando $n\to\infty$, aplicando la desigualdad triangular se tiene que $\|f\|_p \le \|f_n - f\|_p + \|f_n\|_p$, para todo $n\in\mathbb{N}$, luego $\|f\|_p<\infty$ y por tanto $f\in L^p(X,\mu)$. Vamos a probar que, para cualquier $\lambda>0$,

$$\mu\left(\left\{ x\in X : \limsup_{t\to t_0} |T_t f(x) - f(x)| > \lambda \right\}\right) = 0.$$

Nótese que, para cada $x\in X$,

$$\begin{aligned} |T_t f(x) - f(x)| &= |T_t f(x) - T_t f_n(x) + T_t f_n(x) + f_n(x) - f_n(x) - f(x)| \\ &\le |T_t f_n(x) - f_n(x)| + |T_t(f-f_n)(x) - (f-f_n)(x)|. \end{aligned}$$

Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\Psi$, $T^*$ es de tipo débil $(p,q)$, y $f_n - f\in L^p(X,\mu)$, $n\in\mathbb{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned} &\mu\left(\left\{ x\in X : \limsup_{t\to t_0} |T_t f(x) - f(x)| > \lambda \right\}\right) \\ &\quad \le \mu\left(\left\{ x\in X : \limsup_{t\to t_0} |T_t(f-f_n)(x) - (f-f_n)(x)| > \lambda \right\}\right) \\ &\quad \le \mu\left(\left\{ x\in X : T^*(f-f_n)(x) > \frac{\lambda}{2} \right\}\right) + \mu\left(\left\{ x\in X : |f_n(x) - f(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\}\right) \\ &\quad \le \left(\frac{2C}{\lambda}\|f-f_n\|_p\right)^q + \left(\frac{2C'}{\lambda}\|f-f_n\|_p\right)^p. \end{aligned}$$

Usando que $f_n\to f$ en $L^p(X,\mu)$, cuando $n\to\infty$, concluimos que, para cada $\lambda>0$,

$$\mu\left(\left\{ x\in X : \limsup_{t\to t_0} |T_t f(x) - f(x)| > \lambda \right\}\right) = 0.$$

Nótese que

$$\left\{ x\in X : \limsup_{t\to t_0} |T_t f(x) - f(x)| > 0 \right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left\{ x\in X : \limsup_{t\to t_0} |T_t f(x) - f(x)| > \frac{1}{k} \right\}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} & m\left(\left\{x \in X : \lim_{t\to t_0}\sup |T_t f(x) - f(x)| > 0\right\}\right) \\ & \quad \le \sum_{k\in\mathbb{N}} m\left(\left\{x \in X : \lim_{t\to t_0}\sup |T_t f(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) = 0, \end{aligned}$$

y deducimos que el conjunto de $x \in X$ tales que $\lim_{t\to t_0} T_t f(x) \neq f(x)$ también tiene medida nula, luego $f \in \Psi$.

□

### 2.4.1. Interpolación en espacios $L^p(X,\mu)$.

Anteriormente, en la Sección 2.2 hemos demostrado que si $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida y $1 \le p_0 < p < p_1 \le \infty$, entonces

$$L^{p_0}(X,\mu) \cap L^{p_1}(X,\mu) \subset L^p(X,\mu) \subset L^{p_0}(X,\mu) + L^{p_1}(X,\mu).$$

Nos preguntamos si un operador lineal en $L^{p_0}(X,\mu)+L^{p_1}(X,\mu)$ que está acotado tanto en $L^{p_0}(X,\mu)$ como en $L^{p_1}(X,\mu)$ también estará acotado en $L^p(X,\mu)$, $1 \le p_0 \le p \le p_1 \le \infty$. La respuesta es afirmativa y se recoge en el Teorema de interpolación de Marcinkiewicz, que probamos a continuación.

**Teorema 2.20 (Interpolación de Marcinkiewicz).** *Sean $(X,\mu)$ y $(Y,\nu)$ espacios medibles, $1 \le p_0 \le p_1 \le \infty$ y $T$ un operador sublineal de $L^{p_0}(X,\mu) + L^{p_1}(X,\mu)$ en el espacio de las funciones medibles en $Y$. Supongamos que $T$ es débil $(p_0,p_0)$ y débil $(p_1,p_1)$, es decir,*

$$\nu\left(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}\right) \le \left(M_0 \frac{\|f\|_{p_0}}{\lambda}\right)^{p_0}, \quad f \in L^{p_0}(X,\mu),$$

*y*

$$\nu\left(\{y \in Y : |Tf(y)| > \lambda\}\right) \le \left(M_1 \frac{\|f\|_{p_1}}{\lambda}\right)^{p_1}, \quad f \in L^{p_1}(X,\mu),$$

*para ciertas constantes $M_0, M_1 > 0$. Entonces, $T$ es fuerte $(p,p)$ para todo $p_0 < p < p_1$ y $\|Tf\|_{L^p(Y,\nu)} \le M\|f\|_{L^p(X,\mu)}$, para cierta $M > 0$.*

*Demostración.* Sean $p_0 < p < p_1$, $f \in L^p(X,\mu)$ y $\lambda > 0$. Descomponemos $f$ como $f = f^\lambda + f_\lambda$ donde

$$f^\lambda(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } |f(x)| \le c\lambda \\ 0, & \text{si } |f(x)| > c\lambda \end{cases}, \qquad f_\lambda(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } |f(x)| \le c\lambda \\ f(x), & \text{si } |f(x)| > c\lambda \end{cases}$$

y la constante $c > 0$ la determinaremos luego. Veamos que $f_\lambda \in L^{p_0}(X,\mu)$ y $f^\lambda \in L^{p_1}(X,\mu)$. En efecto, como $p_0 - p < 0$ y $p_1 - p > 0$, tenemos que $|f_\lambda(x)|^{p_0-p} < (c\lambda)^{p_0-p}$ y $|f^\lambda(x)|^{p_1-p} \leq (c\lambda)^{p_1-p}$, para todo $x \in X$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_X |f_\lambda(x)|^{p_0} d\mu(x) &= \int_X |f\chi_{\{y\in X:|f(y)|>c\lambda\}}(x)|^{p_0} d\mu(x)\\ &= \int_{\{y\in X:|f(y)|>c\lambda\}} |f(x)|^p |f(x)|^{p_0-p} d\mu(x)\\ &\leq (c\lambda)^{p_0-p} \int_{\{y\in X:|f(y)|>c\lambda\}} |f(x)|^p d\mu(x) = (c\lambda)^{p_0-p} \|f\|_p^p < \infty\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\int_X |f^\lambda(x)|^{p_1} d\mu(x) &= \int_X |f\chi_{\{y\in X:|f(y)|\leq c\lambda\}}(x)|^{p_1} d\mu(x)\\ &= \int_{\{y\in X:|f(y)|\leq c\lambda\}} |f(x)|^p |f(x)|^{p_1-p} d\mu(x)\\ &\leq (c\lambda)^{p_1-p} \int_{\{y\in X:|f(y)|\leq c\lambda\}} |f|^p d\mu(x) = (c\lambda)^{p_1-p} \|f\|_p^p < \infty.\end{aligned}$$

Como $T$ es un operador sublineal, se tiene que $|Tf(x)| = |T(f^\lambda + f_\lambda)(x)| \leq |Tf^\lambda(x)| + |Tf_\lambda(x)|$ y en virtud de la Proposición 2.16 c), se tiene que

$$a_{Tf}(\lambda) \leq a_{Tf^\lambda}\left(\frac{\lambda}{2}\right) + a_{Tf_\lambda}\left(\frac{\lambda}{2}\right). \tag{2.8}$$

Supongamos que $p_1 = \infty$. Por definición, tipo débil $(\infty,\infty)$ coincide con tipo fuerte $(\infty,\infty)$. Tomamos $c = \frac{1}{2M_1}$ y tenemos que $\|Tf^\lambda\|_\infty \leq M_1\|f^\lambda\|_\infty \leq \frac{\lambda}{2}$. Por consiguiente,

$$a_{Tf^\lambda}\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \nu\left(\left\{y \in Y : |Tf^\lambda(y)| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) = 0.$$

Por otro lado, como $f_\lambda$ es débil $(p_0,p_0)$, se tiene que $a_{Tf_\lambda}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \leq \left(2M_0\frac{\|f_\lambda\|_{p_0}}{\lambda}\right)^{p_0}$. De este modo, como $p < \infty$, teniendo en cuenta (2.6) y (2.8), obtenemos que

$$\begin{aligned}\|Tf\|_p^p &= \int_Y |Tf(y)|^p d\nu = p\int_0^\infty \lambda^{p-1} a_{Tf}(\lambda) d\lambda\\ &\leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1} a_{Tf^\lambda}\left(\frac{\lambda}{2}\right) d\lambda + p\int_0^\infty \lambda^{p-1} a_{Tf_\lambda}\left(\frac{\lambda}{2}\right) d\lambda\\ &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1} a_{Tf_\lambda}\left(\frac{\lambda}{2}\right) d\lambda \leq p(2M_0)^{p_0} \int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0} \|f_\lambda\|_{p_0}^{p_0} d\lambda.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0}\|f_\lambda\|_{p_0}^{p_0}d\lambda &= \int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0}\left(\int_X |f_\lambda|^{p_0}d\mu\right)d\lambda \\
&= \int_0^\infty \int_{\{y\in X:|f(y)|>c\lambda\}} \lambda^{p-1-p_0}|f(x)|^{p_0}d\mu(x)d\lambda \\
&= \int_X |f(x)|^{p_0}\left(\int_0^{\frac{|f(x)|}{c}} \lambda^{p-1-p_0}d\lambda\right)d\mu(x) \\
&= \frac{1}{(p-p_0)c^{p-p_0}}\int_X |f(x)|^p d\mu(x) = \frac{(2M_1)^{p-p_0}}{p-p_0}\|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

Concluimos que $\|Tf\|_p \leq \left(2^p p\dfrac{M_0^{p_0}M_1^{p-p_0}}{p-p_0}\right)^{\frac{1}{p}}\|f\|_p$.

Supongamos ahora que $p_1<\infty$. Aplicando (2.8) y procediendo como antes concluimos que

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &\leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left(a_{Tf^\lambda}\left(\frac{\lambda}{2}\right)+a_{Tf_\lambda}\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right)d\lambda \\
&\leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left[\left(2M_1\frac{\|f^\lambda\|_{p_1}}{\lambda}\right)^{p_1}+\left(2M_0\frac{\|f_\lambda\|_{p_0}}{\lambda}\right)^{p_0}\right]d\lambda \\
&= \left(\frac{p(2M_0)^{p_0}}{c^{p-p_0}(p-p_0)}+\frac{p(2M_1)^{p_1}}{c^{p_1-p}(p_1-p)}\right)\|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

$\square$

# 3

# La función maximal de Hardy-Littlewood.

El presente capítulo está dedicado al estudio del operador maximal de Hardy-Littlewood, considerado como uno de los operadores maximales más importantes en análisis real y armónico. Su interés radica en que constituye una herramienta versátil que permite probar el Teorema de diferenciación de Lebesgue así como obtener propiedades de acotación y convergencia para otros operadores.

En las dos primeras secciones de este capítulo trabajaremos en el espacio medible $(\mathbb{R}^n, m)$, donde $m$ denota la medida de Lebesgue, y consideraremos el operador maximal definido en bolas, en sus versiones centrada y no centrada. Una vez desarrollada la teoría para este contexto, en la tercera sección estudiaremos el operador maximal cuando tenemos otros conjuntos de integración (cubos, rectángulos,...) y cuando cambiamos la medida de Lebesgue, por otra medida boreliana no negativa. Por último, en la sección final esbozaremos las ideas principales de otra de las aplicaciones importantes que tiene la función maximal en el análisis armónico: la caracterización de los pesos $A_p$ y el teorema de extrapolación en espacios $L^p$ con pesos.

## 3.1. El operador maximal de Hardy-Littlewood en bolas

Denotaremos por $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ al espacio de las funciones localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, es decir, funciones que son integrables en cualquier subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, y por $B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$ a la bola abierta de centro $x \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$.

Supongamos que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Se define la *función maximal centrada de Hardy-Littlewood* de $f$ como

$$M_c f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy. \tag{3.1}$$

Si hacemos el cambio de variable $x-y = z$, podemos escribir (3.1) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} M_c f(x) &= \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{\{z:|z|<r\}} |f(x-z)| dz \\ &= \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(0,r))} \int_{B(0,r)} |f(x-z)| dz \\ &= \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(0,r))} \left( \chi_{B(0,r)} * |f| \right)(x). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Es claro que $M_c f = M_c(|f|) \geq 0$. Además, $M_c f$ es una función medible. En efecto, fijamos $\lambda > 0$ y consideramos el conjunto

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : M_c f(x) > \lambda\}.$$

Vamos a probar que $E_\lambda$ es abierto. Sea $x_1 \in E_\lambda$. Entonces, $M_c f(x_1) > \lambda$ y existe $r > 0$ tal que

$$M_c f(x_1) \geq \frac{1}{m(B(x_1,r))} \int_{B(x_1,r)} |f(y)| dy > \lambda.$$

Tomamos $s > r$ suficientemente cerca de $r$ tal que

$$\frac{1}{m(B(x_1,s))} \int_{B(x_1,r)} |f(y)| dy > \lambda.$$

Entonces, para cada $x_2 \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x_1 - x_2| < s - r$ se tiene que $B(x_1, r) \subset B(x_2, s)$. Por consiguiente, para cada $x_2 \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x_1 - x_2| < s - r$, obtenemos que

$$\begin{aligned} M_c f(x_2) &\geq \frac{1}{m(B(x_2,s))} \int_{B(x_2,s)} |f(y)| dy \\ &\geq \frac{1}{m(B(x_1,s))} \int_{B(x_1,r)} |f(y)| dy > \lambda. \end{aligned}$$

Hemos probado que $B(x_1, r-s) \subset E_\lambda$, luego $E_\lambda$ es abierto y por consiguiente $M_c f$ es medible.

Podemos considerar también el operador maximal cuando el supremo se toma sobre bolas que no tienen por qué estar centradas en $x$. Se define la *función maximal no centrada de Hardy-Littlewood* de $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ por

$$Mf(x) = \sup_{\substack{B \subset \mathbb{R}^n: \\ x \in B}} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| dy = \sup_{r>0} \sup_{y \in B(x,r)} \frac{1}{m(B(y,r))} \int_{B(y,r)} |f(z)| dz,$$

donde en la primera identidad el supremo se toma sobre todas las bolas $B$ contenidas en $\mathbb{R}^n$ tal que $x \in B$.

La medibilidad de $Mf$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, es más sencilla de probar que en el caso centrado pues, siguiendo la misma notación que antes, basta tener en cuenta que, para cada $x_1 \in E_\lambda$, ($\lambda > 0$, fijo), existe una bola $\tilde{B}$ tal que $x_1 \in \tilde{B}$ y $\tilde{B} \subset E_\lambda$.

Por otra parte, es claro que, para cada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $M_c f \leq Mf$. Además, existe una constante $C > 0$ tal que $Mf \leq C\, M_c f$. En efecto, sean $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ y $x \in B(y,r)$. Entonces, $B(y,r) \subset B(x,2r)$ y $m(B(x,2r)) = 2^n m(B(y,r))$. Por consiguiente,

$$\frac{1}{m(B(y,r))}\int_{B(y,r)} |f(z)|dz \leq \frac{2^n}{m(B(x,2r))}\int_{B(x,2r)} |f(z)|dz,$$

de lo que se deduce que $Mf \leq 2^n M_c f$. Concluimos que

$$M_c f \leq Mf \leq 2^n M_c f, \quad f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \tag{3.3}$$

por lo que podremos probar la mayoría de propiedades (como acotación en espacios de Lebesgue) para uno de los operadores maximales y deducirlos para el otro, utilizando en cada caso la versión más conveniente.

Hemos visto que, para cada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $M_c f$ y $Mf$ son medibles, por tanto los operadores

$$M_c, M : L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^n).$$

Además, si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, es claro que $\|M_c f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Por consiguiente, si probamos la acotación de $M_c$ de tipo débil $(1,1)$, por el Teorema de interpolación de Marcinkiewicz (Teorema 2.20), obtendremos que $M_c$ es de tipo fuerte $(p,p)$, $1 < p \leq \infty$.

Para poder establecer el resultado de acotación de tipo débil $(1,1)$ es necesario probar algún lema de cubrimiento, como el Lema de Vitali.

**Lema 3.1 (Lema de cubrimiento de Vitali).** *Sea $\mathbb{B} = \{B_i\}_{i=1}^N$ una familia finita de bolas abiertas de $\mathbb{R}^n$. Existe una subfamilia disjunta de bolas $B_{i_1}, B_{i_2}, \cdots, B_{i_k}$ de $\mathbb{B}$ tal que*

$$m\left(\bigcup_{i=1}^N B_i\right) \leq 3^n \sum_{j=1}^k m(B_{i_j}).$$

*Demostración.* Nótese que si $B$ y $B'$ son un par de bolas en $\mathbb{R}^n$ con intersección no vacía tal que el radio de $B$ es mayor o igual al radio de $B'$, entonces $B'$ está contenida en una bola $\hat{B}$ que tiene el mismo centro que $B$, pero su radio es 3 veces el de $B$.

Escogemos la bola $B_{i_1} \subset \mathbb{B}$ que tenga el mayor radio de toda la familia y eliminamos de $\mathbb{B}$ la bola $B_{i_1}$ y todas aquellas bolas que la intersecan. De este modo, todas las bolas eliminadas están contenidas en la bola $\hat{B}_{i_1}$ concéntrica

con $B_{i_1}$ y de radio 3 veces el de $B_{i_1}$.
Las bolas restantes de $\mathbb{B}$ producen una nueva colección $\mathbb{B}'$ para la cual repetimos el procedimiento anterior, es decir, elegimos la bola $B_{i_2}$ de mayor radio en $\mathbb{B}'$ y eliminamos de esta colección a $B_{i_2}$ y todas aquellas bolas que la intersecan. Continuando de esta manera obtenemos, después de a lo sumo $N$ pasos, una subcolección disjunta de bolas $\{B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_k}\} \subset \mathbb{B}$ tal que $\bigcup_{i=1}^N B_i \subset \bigcup_{j=1}^k \hat{B}_{i_j}$.
Por tanto,

$$m\left(\bigcup_{k=1}^N B_k\right) \leq m\left(\bigcup_{j=1}^k \hat{B}_{i_j}\right) \leq \sum_{j=1}^k m(\hat{B}_{i_j}) = 3^n \sum_{j=1}^k m(B_{i_j}).$$

□

A continuación probamos el resultado de acotación para el operador maximal centrado de Hardy-Littlewood, siendo el mismo válido para la versión no centrada, en virtud de (3.3).

**Teorema 3.2.** *El operador $M_c$ es de tipo débil $(1,1)$ y de tipo fuerte $(p,p)$, $1 < p \leq \infty$. Además,*

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n : \ M_c f(x) > \lambda\}) \leq \frac{3^n}{\lambda}\|f\|_1, \quad \textit{para todo } \lambda > 0, \ f \in L^1(\mathbb{R}^n), \tag{3.4}$$

*y*

$$\|M_c f\|_p \leq 2\left(\frac{3^n p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n). \tag{3.5}$$

*Demostración.* Veamos que $M_c$ es de tipo débil $(1,1)$. Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\lambda > 0$ y consideramos el conjunto $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : M_c f(x) > \lambda\}$. Al principio de esta sección probamos que el conjunto $E_\lambda$ es abierto. Debido a la regularidad de la medida de Lebesgue, podemos obtener una cota de la medida de $E_\lambda$ si estimamos el supremo de las medidas de los compactos contenidos en $E_\lambda$. Sean $K \subset E_\lambda$ un compacto y $x \in K$. Entonces, existe una bola $B(x, r_x) \subset E_\lambda$, tal que

$$\frac{1}{m(B(x,r_x))} \int_{B(x,r_x)} |f(y)| dy > \lambda. \tag{3.6}$$

Es claro que $K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, r_x)$ y por ser $K$ compacto, admite un subrecubrimiento finito $\{B_{x_i}\}_{i=1}^N$. Del Lema de Vitali se sigue que existe una subcolección de bolas disjuntas, $\{B_{x_{i_j}}\}_{j=1}^k \subset \{B_{x_i}\}_{i=1}^N$ tal que $m\left(\bigcup_{i=1}^N B_{x_i}\right) \leq 3^n \sum_{j=1}^k m(B_{x_{i_j}})$.
Por consiguiente, usando (3.6) y el hecho de que la familia $\{B_{x_{i_j}}\}_{j=1}^k$ es disjunta, se sigue que

$$m(K) \leq m\left(\bigcup_{i=1}^N B_{x_i}\right) \leq 3^n \sum_{j=1}^k m(B_{x_{i_j}})$$

$$\leq \frac{3^n}{\lambda} \sum_{j=1}^{k} \int_{B_{x_{i_j}}} |f(y)|dy = \frac{3^n}{\lambda} \int_{\bigcup_{j=1}^{k} B_{x_{i_j}}} |f(y)|dy \leq \frac{3^n}{\lambda} \|f\|_1.$$

Veamos ahora que $M_c$ es de tipo fuerte $(p,p)$, $1 < p \leq \infty$. Como $\|M_c f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, tenemos que $M_c$ está bien definido en $L^1(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y del Teorema de interpolación de Marcinkiewicz (Teorema 2.20) y su prueba, conluimos que $M_c$ es de tipo fuerte $(p,p)$, $1 < p < \infty$, y satisface (3.5).

□

Como hemos visto, los operadores $M, M_c$ están definidos sobre las funciones localmente integrables. Sin embargo, para cualquier $0 \not\equiv f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $M_c f$ no es integrable (de hecho, ni siquiera es localmente integrable). En efecto, sea $0 \not\equiv f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces, dado $0 < \epsilon < \|f\|_1$, existe un $R > 0$ suficientemente grande tal que $\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)} |f(y)|dy < \epsilon$. Además, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x| > R$, se tiene que $B(0,R) \subset B(x, 2|x|)$. Por tanto,

$$M_c f(x) \geq \frac{1}{m(B(x,2|x|))} \int_{B(0,R)} |f(y)|dy \geq \frac{\|f\|_1 - \epsilon}{2^n |x|^n m(B(0,1))}, \quad |x| > R,$$

y como $\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)}(x)|x|^{-n} \notin L^1(\mathbb{R}^n)$, concluimos que $M_c f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

A continuación probaremos que si $f$ pertenece a un subespacio especial de funciones de $L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $M_c f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Decimos que una función medible $f$ pertenece al espacio de Zygmund $L \log L(X)$ si $|f| \log^+(|f|) \in L^1(X)$, donde $\log^+ t = \max(\log t, 0)$.

**Proposición 3.3.** *Si $B$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ y $f$ una función con soporte en $B$ tal que $f \in L \log L(B)$, entonces $M_c f \in L^1(B)$ y*

$$\int_B M_c f(x)dx \leq 2m(B) + C \int_B |f(x)| \log^+ |f(x)|dx.$$

*Demostración.* Sea $B \subset \mathbb{R}^n$ acotado y $f$ una función con soporte en $B$ tal que $f \in L \log L(B)$. Nótese que $f \in L^1(B)$, pues $|f| \leq \max\{e, |f| \log^+(|f|)\}$. Por otra parte, en vitud de (2.17),

$$\begin{aligned}
\int_B M_c f(x)dx &= \int_0^\infty m(\{x \in B : M_c f(x) > t\})dt \\
&= 2\int_0^\infty m(\{x \in B : M_c f(x) > 2\lambda\})d\lambda \\
&= 2\bigg(\int_0^1 m(\{x \in B : M_c f(x) > 2\lambda\})d\lambda \\
&\quad + \int_1^\infty m(\{x \in B : M_c f(x) > 2\lambda\})d\lambda\bigg)
\end{aligned}$$

$$\leq 2m(B) + 2\int_1^\infty m(\{x \in B : M_c f(x) > 2\lambda\})d\lambda.$$

Para acotar la integral de la derecha, descomponemos $f$ como $f = f_1 + f_2$, donde $f_1 = f\chi_{\{x\in B:\,|f(x)|>\lambda\}}$ y $f_2 = f - f_1$. Entonces, $\{x \in B : M_c f(x) > 2\lambda\} \subset \{x \in B : M_c f_1(x) > \lambda\}$, luego

$$m(\{x \in B : M_c f(x) > 2\lambda\}) \leq m(\{x \in B : M_c f_1(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda}\|f_1\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

pues $M_c f_1$ es débil $(1,1)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty m(\{x \in B : M_c f(x) > 2\lambda\})d\lambda &\leq \int_1^\infty \left(\frac{C}{\lambda}\int_{\{y\in B:|f(y)|>\lambda\}} |f(x)|dx\right) d\lambda \\
&\leq C\int_B |f(x)| \int_1^{\max\{|f(x)|,1\}} \frac{d\lambda}{\lambda} dx \\
&= C\int_B |f(x)| \log^+ |f(x)|dx.
\end{aligned}$$

Concluimos que $\displaystyle\int_B M_c f(x)dx \leq 2m(B) + C\int_B |f(x)|\log^+|f(x)|dx.$

□

*Observación 3.4.* En el Teorema 3.2 probamos que existen unas constantes $C_n, C_{n,p} > 0$ tales que

$$m(\{x \in \mathbb{R}^n :\ M_c f(x) > \lambda\}) \leq \frac{C_n}{\lambda}\|f\|_1, \quad \text{para todo } \lambda > 0,\ \ f \in L^1(\mathbb{R}^n), \tag{3.7}$$

$$\|M_c f\|_p \leq C_{n,p}\|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n). \tag{3.8}$$

Una pregunta importante para la comunidad matemática es si dichas constantes en el Teorema 3.2 son óptimas y la respuesta es negativa. De hecho, aún es un tema de estudio el obtener las constantes óptimas en cualquier dimensión y si estas realmente dependen de $n$. En 1982, *Stein* en [14] dio un argumento para eliminar la dependencia de $n$ en la constante para (3.8), pero su método no servía para la desigualdad (3.7). Un año más tarde, Stein y Strömberg en [16] demostraron que en (3.7) la constante puede ser tomada con dependencia polinomial en lugar de exponencial, es decir, se puede conseguir dicha cota con $C_n = C\,n$, para cierta constante $C > 0$. En dimensión 1, Melas en [9] determinó que la constante óptima en (3.7) es $\frac{11+\sqrt{61}}{12}$. En el caso del operador maximal no centrado en dimensión 1, la constante óptima en (3.7) es 2, véase [1], y en (3.8) la constante viene determinada en [6].

## 3.2. Aplicaciones del Teorema maximal

### 3.2.1. Teorema de diferenciación de Lebesgue

El Teorema de diferenciación de Lebesgue es una generalización del *Teorema Fundamental del Cálculo*, que recordemos que rezaba que si $f$ es una función continua en un intervalo $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$ y $F(x) := \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a,b]$, entonces $F$ es diferenciable en $(a,b)$ y $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in (a,b)$. Sean $f$ una función en las condiciones del teorema anterior y $x \in (a,b)$. De la definición de derivada y de $F$, tenemos que $F'(x) = f(x)$ si, y sólo si,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_{[x,x+h]} f(t)dt = f(x). \end{aligned} \tag{3.9}$$

La ecuación (3.9) también puede escribirse en términos de diferencias simétricas, esto es,

$$F'(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{2h}\int_{[x-h,x+h]} f(t)dt = f(x).$$

Como $m([x-h,x+h]) = 2h$, podemos escribir la igualdad anterior como

$$\lim_{m(I)\to 0^+} \frac{1}{m(I)}\int_I f(t)dt = f(x),$$

donde $I = [x-h,x+h]$, y su versión $n-$dimensional sería

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x). \tag{3.10}$$

El Teorema maximal (Teorema 3.2, ecuación (3.4)) nos permite extender (3.10) para funciones localmente integrables.

**Teorema 3.5 (Teorema de diferenciación de Lebesgue).** *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\lim_{r\to 0^+}\left[\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f(y)dy\right] = f(x), \quad c.t.\ x \in \mathbb{R}^n.$$

*Demostración.* Como para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ se tiene que

$$0 \le \left|\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} f(y)dy - f(x)\right| = \left|\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} (f(y)-f(x))dy\right|$$

$$\leq \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy,$$

vamos a probar que

$$\lim_{r \to 0^+} \left[ \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy \right] = 0, \quad c.t.\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Es suficiente probar el resultado en $L^1(\mathbb{R}^n)$. En efecto, si para cada $k \in \mathbb{N}$ el resultado es cierto para $f\chi_{B_k(0)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ excepto en un conjunto de medida nula $E_k$, entonces el resultado es cierto para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ excepto en $\cup_{k=1}^{\infty} E_k$, donde $m\left(\cup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 0$.

En primer lugar, vamos a probar el teorema para funciones $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Sea $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$. Existe $\delta > 0$ tal que para $|x - y| < \delta$, se tiene que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Por tanto, para cualquier $r < \delta$, obtenemos que

$$\frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy \leq \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \epsilon dy = \epsilon.$$

Supongamos ahora que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y sea $\epsilon > 0$. Como el espacio de funciones $C_c(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^1(\mathbb{R}^n)$, existe $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|f - g\|_{L^1} < \frac{\epsilon}{2}$.
Nótese que, para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy \\
&\leq \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - g(y)| dy + \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |g(y) - g(x)| dy \\
&+ \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |g(x) - f(x)| dy.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |g(y) - g(x)| dy = 0$, obtenemos que

$$\lim_{r \to 0^+} \left[ \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy \right] \leq M_c(f-g)(x) + |g(x) - f(x)|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Por consiguiente, fijado $\alpha > 0$, se verifica que

$$\begin{aligned}
&\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{r \to 0^+} \left[ \frac{1}{m(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy \right] > 2\alpha \right\} \\
&\subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : M_c(f - g)(x) > \alpha\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) - g(x)| > \alpha\}.
\end{aligned}$$

Por un lado, como $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\|f - g\|_{L^1} < \frac{\epsilon}{2}$, de la desigualdad de Chebyshev, (2.7), tenemos que

$$m\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) - g(x)| > \alpha\}\right) \leq \frac{C}{\alpha}\frac{\epsilon}{2}.$$

Por otro lado, Teorema 3.2, tenemos que

$$m\left(\{x \in \mathbb{R}^n : M_c(f - g)(x) > \alpha\}\right) \leq \frac{C}{\alpha}\frac{\epsilon}{2}.$$

Concluimos que

$$m\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \lim_{r \to 0^+}\left[\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|dy\right] > 2\alpha\right\}\right) \leq \frac{C}{\alpha}\epsilon.$$

□

Una consecuencia inmediata del teorema anterior es que, para cada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $|f(x)| \leq M_c f(x)$, c.t $x \in \mathbb{R}^n$.

### 3.2.2. Acotación en $L^p$ de otros operadores

El operador maximal de Hardy-Littlewood es de gran importancia porque mayora a ciertas familias de operadores, como los núcleos de sumabilidad (o aproximaciones de la identidad), por lo que algunas de sus propiedades, como la acotación en espacios $L^p$ y la convergencia en casi todo punto, pueden transferirse a dichas familias.

**Proposición 3.6.** *Sea $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ una función no negativa, radial y decreciente y $\{K_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ una aproximación de la identidad construida a partir de $K$ como en (2.5). Entonces, para cada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$,*

$$\sup_{\epsilon>0} |K_\epsilon * f(x)| \leq \|K\|_1 M_c f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

*Demostración.* En primer lugar, nótese que como $K$ es una función integrable, no negativa, radial y decreciente, puede aproximarse por funciones simples de la forma $k_j(x) = \sum_{i=1}^{N_j} a_i \chi_{B(0,r_i)}(x)$, donde $a_i \geq 0$, y $r_i > 0$, $i = 1, \ldots N_j$, tal que $k_j \leq k_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$, y $k_j(x) \to k(x)$, c.t. $x \in \mathbb{R}^n$. Del Teorema de la Convergencia Monótona (Teorema 1.7) se sigue que $k_j \to K$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$ cuando $j \to \infty$.

Por consiguiente, vamos a probar el resultado para las funciones simples de la forma anterior. Sea $k(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{B(0,r_i)}(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, donde $a_i \geq 0$, $r_i > 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, N$. Entonces, teniendo en cuenta (1.1) y (3.2), obtenemos

$$\begin{aligned}(k * f)(x) &= \sum_{i=1}^{N} a_i m(B(0,r_i)) \frac{1}{m(B(0,r_i))}(\chi_{B(0,r_i)} * f)(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} k(x)dx \left(\frac{1}{m(B(0,r_i))}(\chi_{B(0,r_i)} * f)(x)\right)\end{aligned}$$

$$\leq \|k\|_1 M_c f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Nótese que si en lugar de $k$ consideramos ahora la función dilatada $k_\epsilon$, $\epsilon > 0$, el resultado sigue siendo cierto, pues para cada $\epsilon > 0$, $k_\epsilon$ es también no negativa, radial y decreciente y $\|k_\epsilon\|_1 = \|k\|_1$. Por consiguiente, hemos probado el resultado para la sucesión de funciones simples $k_{j,\epsilon} := \frac{1}{\epsilon^n} k_j\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$, $j \in \mathbb{N}$, y $\epsilon > 0$ que hereda las propiedades de monotonía de $k_j$ y converge a $K_\epsilon$ puntualmente y en norma $L^1(\mathbb{R}^n)$. Por consiguiente, para cada $\epsilon > 0$,

$$(K_\epsilon * f)(x) = \lim_{j\to\infty} (k_{j,\epsilon} * f)(x) \leq \lim_{j\to\infty} \|k_j\|_1 M_c f(x) = \|K\|_1 M_c f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

y esto concluye el resultado.

□

Como consecuencia de la proposición anterior y de las propiedades de acotación de la función maximal centrada (Teorema 3.2) podemos probar el siguiente resultado.

**Proposición 3.7.** *Sean $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\phi$ una función integrable, no negativa, radial y decreciente, tal que $|K(x)| \leq |\phi(x)|$ en casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces, para cada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, la función maximal $\sup_{\epsilon>0} |(K_\epsilon * f)|$ es de tipo débil $(1,1)$ y fuerte $(p,p)$, $1 < p \leq \infty$, donde $\{K_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ es una aproximación de la identidad construida como en (2.5).*

*Demostración.* En primer lugar, nótese que, para cada $\epsilon > 0$

$$|(K_\epsilon * f)(x)| \leq |(\phi_\epsilon * f)(x)|, \quad c.t.\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Por tanto, de la proposición anterior, deducimos que

$$\sup_{\epsilon>0} |(\phi_\epsilon * f)(x)| \leq \|\phi\|_1 M_c f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ahora, la acotación débil $(1,1)$ y fuerte $(p,p)$, $1 < p \leq \infty$, para $\sup_{\epsilon>0} |(K_\epsilon * f)|$ se deduce de las propiedades del operador $M_c$ recogidas en el Teorema 3.2.

□

Finalmente, presentamos el resultado de convergencia en casi todo punto para la convolución de aproximaciones de la identidad, como consecuencia de los resultados anteriores y del Teorema 2.19.

**Proposición 3.8.** *Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ (o $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$), $K \in L^1(\mathbb{R}^n)$ una función no negativa, radial y decreciente y $\{K_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ una aproximación de la identidad construida a partir de $K$ como en (2.5). Se tiene que*

$$\lim_{\epsilon\to 0} (K_\epsilon * f)(x) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} K dx\right) f(x) \quad c.t.\ x \in \mathbb{R}^n.$$

*Demostración.* Sea $\gamma > 0$ y supongamos que $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ y $\|K\|_1 > 0$. De la continuidad de $f$ sabemos que existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x-y) - f(x)| < \frac{\gamma}{\|K\|_1}$, para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$ tal que $|y| < \delta$. Por consiguiente, usando que $\|K\|_1 = \|K_\epsilon\|_1$, $\epsilon > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\lim_{\epsilon\to 0^+}(K_\epsilon * f)(x) - \left(\int_{\mathbb{R}^n} K dx\right) f(x)\right| &\leq \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{|y|\leq\delta} K_\epsilon(y)|f(x-y) - f(x)|dy \\ &\quad + \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{|y|>\delta} K_\epsilon(y)|f(x-y) - f(x)|dy \\ &< \gamma + 2\|f\|_\infty \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{|y|>\delta} K_\epsilon(y)dy \\ &= \gamma, \quad x \in \mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos hecho uso de la propiedad 3 de aproximación de la identidad.

Por consiguiente, el resultado es cierto para funciones continuas y de soporte compacto. Como $C_c(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, usando la Proposición 3.7 y el Teorema 2.19 se concluye el resultado para funciones $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Para funciones $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ la prueba sería análoga al caso $C_c(\mathbb{R}^n)$.

□

Como caso particular del resultado anterior, podemos deducir que la convolución del núcleo de *Gauss-Weierstrass* o del *Poisson* (ver ejemplos 2.13 y 2.14) con una función $f$, perteneciente a uno de los espacios anteriores, converge en casi todo punto a $f$.

## 3.3. Otros operadores maximales de Hardy-Littlewood

### 3.3.1. Operadores maximales de Hardy-Littlewood sobre otros conjuntos

Hasta el momento hemos considerado el operador maximal de Hardy-Littlewood en bolas (centradas o no) de $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, podemos definir este operador en otros conjuntos. Denotamos por $Q(x,r)$ al cubo abierto centrado en $x \in \mathbb{R}^n$ y de lado $2r$. Definimos la *función maximal centrada en cubos* de $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ como

$$M_c' f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m(Q(x,r))}\int_{Q(x,r)} |f(y)|dy, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.11}$$

Nótese que si $n = 1$, entonces $M_c$ y $M_c'$ coinciden, pues los cubos y las bolas en dimensión 1 son el mismo objeto. Si $n > 1$ estos dos operadores son equivalentes, es decir, existen constantes $C_n, c_n > 0$ tales que

$$c_n M_c' f(x) \leq M_c f(x) \leq C_n M_c' f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

En efecto, sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Como para cada $x \in \mathbb{R}^n$, y $r > 0$ se tiene que $B(x,r) \subset Q(x,r)$ y $m(Q(x,r)) = 2^n r^n$, podemos escribir

$$\begin{aligned}\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f(y)|dy &\leq \frac{2^n r^n}{m(B(x,r))}\frac{1}{2^n r^n}\int_{Q(x,r)} |f(y)|dy\\ &\leq \frac{2^n}{\omega_n}\frac{1}{m(Q(x,r))}\int_{Q(x,r)} |f(y)|dy,\end{aligned}$$

donde hemos usado que $m(B(x,r)) = \omega_n r^n$, $\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. Tomando supremos en ambos lados, obtenemos que $M_c f \leq \frac{2^n}{\omega_n} M_c' f$. Por otra parte, como para cada $x \in \mathbb{R}^n$, y $r > 0$ se tiene que $Q\left(x, \frac{\sqrt{2}}{2} r\right) \subset B(x,r)$, procediendo como antes, deducimos que $M_c' f \leq \frac{\omega_n}{2^{n/2}} M_c f$. Por consiguiente, $\frac{2^{n/2}}{\omega_n} M_c' f \leq M_c f \leq \frac{2^n}{\omega_n} M' f_c$, esto es, $M_c$ y $M_c'$ son operadores equivalentes.

También podemos definir la función maximal en cubos no centrados, esto es,

$$M' f(x) = \sup_{\substack{Q \subset \mathbb{R}^n \\ x \in Q}} \frac{1}{m(Q)}\int_Q |f(y)|dy,$$

donde el supremo se toma en todos los cubos $Q$ que contienen a $x$. Procediendo de manera análoga a la prueba de (3.3), se demuestra que $M_c'$ *y* $M'$ son operadores equivalentes, por lo que $M_c$, $M$, $M_c'$ *y* $M'$ son operadores equivalentes, y las propiedades de acotación de uno, como el Teorema 3.2, puede transferirse a los otros. Además, la medibilidad de $M_c' f$ *y* $M' f$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, se prueba de la misma manera que probamos la medibilidad para las funciones maximales análogas definidas en bolas.

Pueden definirse operadores maximales de tipo Hardy-Littlewood con respecto a otro tipo de conjuntos, distintos de cubos y bolas, pero para que se puedan transferir los mismos resultados de acotación que hemos visto con los operadores anteriores, tal familia de conjuntos debe cumplir ciertas propiedades geométricas. Por ejemplo, si en lugar de cubos considerásemos las familias de todos los rectángulos con lados paralelos a los ejes que contienen al punto $x$, la desigualdad de tipo débil $(1,1)$ (y la existencia del límite en casi todo punto) fallaría. Sin embargo, si a esta familia de rectángulos les imponemos una condición geométrica que veremos a continuación, la acotación de tipo débil $(1,1)$ sería cierta. Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Se dice que una familia de conjuntos de Borel $\{U_\alpha\}_{\alpha>0} \subset \mathbb{R}^n$ tiene *excentricidad acotada en* $x$ si, para cada $\alpha > 0$, $U_\alpha \subset B(x,\alpha)$ y existe una constante $C > 0$ tal que $m(U_\alpha) \geq C\ m(B(x,\alpha))$.

Nótese que los conjuntos pertenecientes a las familias con excentricidad acotada en un punto $x$ están contenidos en bolas centradas en $x$ y su medida es comparable a la de dichas bolas centradas en $x$. Por consiguiente, el operador maximal definido en estos conjuntos de excentricidad acotada estará mayorado por el maximal centrado en bolas y por consiguiente heredará de este último sus propiedades de acotación y convergencia.

### 3.3.2. Operadores maximales de Hardy-Littlewood en otros espacios de medidas

En esta subsección vamos a estudiar las propiedades del operador maximal de Hardy-Littlewood definido con respecto a medidas borelianas no negativas $\mu$ en $\mathbb{R}^n$.

Sea $\mu$ una medida boreliana no negativa en $\mathbb{R}^n$ y $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Definimos la función maximal centrada de Hardy-Littlewood de $f$ por

$$M_c^\mu f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y)| d\mu(y), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

y la versión no centrada por

$$M^\mu f(x) = \sup_{\substack{B \subset \mathbb{R}^n: \\ x \in B}} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Independientemente de si el operador es el centrado o no, es claro que los operadores $M_c^\mu, M^\mu : L^\infty(\mathbb{R}^n, \mu) \to L^\infty(\mathbb{R}^n, \mu)$ son acotados, es decir, son de tipo fuerte $(\infty, \infty)$. Por consiguiente, en virtud del Teorema de interpolación de Marcinkiwicz (Teorema 2.20), lo deseable es establecer la acotación débil $(1, 1)$ de estos operadores para así poder deducir la acotación fuerte $(p, p)$, $1 < p < \infty$. En este contexto de medidas más generales, vamos a observar que el hecho de ser centrado o no y la dimensión $n$ del espacio en el que estemos trabajando van a jugar un papel importante. En particular, si el operador es centrado, no tendremos que añadir ninguna condición adicional a la medida, mientras que si el operador es no centrado, necesitaremos que la medida sea un poco mejor.

En la Sección 3.1, probamos el Teorema 3.2 gracias al lema de cubrimiento de Vitali, que está formulado con respecto a la medida de Lebesgue. Al estar ahora en un contexto más general, necesitamos de un lema de cubrimiento que sea válido para las medidas que vamos a trabajar y este es el Lema de Besicovitch, cuya prueba puede encontrarse en [3].

**Lema 3.9 (Lema de cubrimiento de Besicovitch).** *Sean $A$ un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ y $\{B(x, r_x)\}_{x \in A}$, con $r_x > 0$, para cada $x \in A$, una familia de bolas abiertas centradas en los puntos de $A$. Existe una subfamilia de bolas a lo sumo numerable $\{B(x_j, r_{x_j})\}_{j \in J}$ y una constante $K_n > 0$, que sólo depende de la dimensión, tales que*

*(a)* $A \subset \cup_{j\in J} B(x_j, r_{x_j})$,
*(b)* $\sum_{j\in J} \chi_{B(x_j,r_{x_j})}(y) \leq K_n$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Este lema también es válido para familias de cubos en lugar de bolas.

**Teorema 3.10.** *Sea $\mu$ una medida boreliana no negativa en $\mathbb{R}^n$. El operador $M_c^\mu$ es de tipo débil* $(1,1)$.

*Demostración.* Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mu)$, $\lambda > 0$ y $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : M_c^\mu f(x) > \lambda\}$. Nuestro objetivo es ver que $\mu(E_\lambda) \leq \frac{C_n}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n,\mu)}$, para cierta constante $C_n > 0$. Para ello, probaremos primero que, para cada $R > 0$, $\mu(E_{\lambda,R}) \leq \frac{C_n}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n,\mu)}$, donde $E_{\lambda,R} = \{x \in B(0,R) :\ M_c^\mu f(x) > \lambda\}$.

Sea $R > 0$. De la definición del operador maximal tenemos que, para cada $x \in E_{\lambda,R}$ existe una bola $B(x, r_x)$, $r_x > 0$, tal que

$$\frac{1}{\mu(B(x,r_x))} \int_{B(x,r_x)} |f(y)| d\mu(y) > \lambda.$$

Del Lema de Besicovitch deducimos que existen una subfamilia a lo sumo numerable $\{B(x_j, r_{x_j})\}_{j\in J}$ y una constante $K_n > 0$, tales que $E_{\lambda,R} \subset \cup_{j\in J} B(x_j, r_{x_j})$ y $\sum_{j\in J} \chi_{B(x_j,r_{x_j})}(y) \leq K_n$, $y \in \mathbb{R}^n$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\mu(E_{\lambda,R}) &\leq \sum_{j\in J} \mu(B(x_j, r_{x_j})) \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{j\in J} \int_{B(x_j,r_{x_j})} |f(y)| d\mu(y) \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j\in J} \chi_{B(x_j,r_{x_j})}(y) |f(y)| d\mu(y) \leq \frac{K_n}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n,\mu)}.\end{aligned}$$

Como $E_{\lambda,R} \subset E_{\lambda,R+1}$ y $E_\lambda = \bigcup_{R=1}^\infty E_{\lambda,R}$, de la Proposición 1.1 concluimos que

$$\mu(E_\lambda) = \lim_{R\to\infty} \mu(E_{\lambda,R}) \leq \frac{K_n}{\lambda} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n,\mu)}.$$

□

En cuanto al operador no centrado, si la dimensión es $n = 1$, los resultados de acotación siguen siendo válidos sin añadir ninguna hipótesis extra sobre la medida.

**Teorema 3.11 (Sjögren,[12]).** *Sea $\mu$ una medida boreliana no negativa en $\mathbb{R}$. El operador $M^\mu$ es de tipo débil* $(1,1)$.

En [12] Sjögren probó el Teorema 3.11 utilizando un argumento geométrico que no es válido para dimensiones mayores, $n > 1$. De hecho, en dicho trabajo dio un contraejemplo de una medida $\mu$ para la cual, en dimensión $n = 2$, $M^\mu$

no es de tipo débil $(1,1)$. Dicha medida en cuestión es la Gaussiana estándar $d\mu(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy$.

El hecho de que en general no se verifique la acotación de tipo débil $(1,1)$ para el operador no centrado en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, dificulta la prueba de la acotación fuerte $(p,p)$ para dicho operador. Sin embargo, se conocen resultados parciales, para los cuales $M^\mu$ es de tipo fuerte $(p,p)$, $1 < p < \infty$. Véase por ejemplo [8] y [13]. De hecho, en [13] los autores prueban que, con la medida Gaussiana, $M^\mu$ es de tipo fuerte $(p,p)$, $1 < p < \infty$.

Veamos qué propiedad adicional podemos imponer a la medida para que se verifique el Teorema Maximal (acotación débil $(1,1)$) en cualquier dimensión para el operador no centrado.

Decimos que una medida $\mu$ es *doblante*, si $\mu(B(z,2r)) \leq C\mu(B(z,r))$ para cada $z \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Nótese que la medida de Lebesgue es doblante, pues $m(B(z,2r)) = 2^n m(B(z,r))$ para cada $z \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Sin embargo, la medida Gaussiana no es doblante. La ventaja de trabajar con medidas doblantes es que nos permite comparar la medida de cualquier bola dilatada $B(z,\alpha r)$, $\alpha > 0$, (o cubo) con la bola $B(z,r)$, $\alpha > 0$, (o cubo) original. Además, si la medida es doblante, podremos establecer la equivalencia entre estos operadores maximales $M_c^\mu$ y $M^\mu$ y sus análogos en cubos (si la medida no es doblante esto no tiene por qué ser cierto).

**Teorema 3.12.** *Sea $\mu$ una medida boreliana no negativa y doblante en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. El operador $M^\mu$ es de tipo débil $(1,1)$.*

*Demostración.* Sean $f \in L^1(\mathbb{R}^n,\mu)$, $\lambda > 0$ y $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : M^\mu f(x) > \lambda\}$. Al igual que en la prueba del Teorema 3.10, probaremos el resultado primero para $E_{\lambda,R} = \{x \in B(0,R) : M^\mu f(x) > \lambda\}$, $R > 0$, para luego deducir el resultado para $E_\lambda$.

Sea $R > 0$. De la definición del operador maximal tenemos que, para cada $x \in E_{\lambda,R}$ existe una bola $B_x = B(z_x, r_x)$, para ciertos $z_x \in \mathbb{R}^n$, y $r_x > 0$, tal que $x \in B_x$ y

$$\frac{1}{\mu(B_x)} \int_{B_x} |f(y)| d\mu(y) > \lambda.$$

Nótese que, para cada $x \in E_{\lambda,R}$, $B_x = B(z_x,r_x) \subset B(x,2r_x) \subset B(z_x,3r_x)$ y como la medida $\mu$ es doblante, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{C}{\mu(B(x,2r_x))} \int_{B(x,2r_x)} |f(y)| d\mu(y) &\geq \frac{\mu(B(z_x,3r_x))}{\mu(B(z_x,r_x))} \frac{1}{\mu(B(x,2r_x))} \int_{B(x,2r_x)} |f(y)| d\mu(y) \\
&\geq \frac{\mu(B(x,2r_x))}{\mu(B(z_x,r_x))} \frac{1}{\mu(B(x,2r_x))} \int_{B(x,2r_x)} |f(y)| d\mu(y) \\
&\geq \frac{1}{\mu(B(z_x,r_x))} \int_{B(z_x,r_x)} |f(y)| d\mu(y) > \lambda.
\end{aligned}$$

Además, es claro que $E_{\lambda,R} \subset \cup_{x\in E_\lambda} B(x, 2r_x)$. Del Lema de Besicovitch deducimos que existen una subfamilia a lo sumo numerable $\{B(x_j, 2r_{x_j})\}_{j\in J}$ y una constante $K_n > 0$, tales que $E_{\lambda,R} \subset \cup_{j\in J} B(x_j, 2r_{x_j})$ y $\sum_{j\in J} \chi_{B(x_j,2r_{x_j})}(y) \leq K_n$, $y \in \mathbb{R}^n$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\mu(E_{\lambda,R}) &\leq \sum_{j\in J} \mu(B(x_j, 2r_{x_j})) \leq \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j\in J} \chi_{B(x_j,2r_{x_j})}(y)|f(y)|d\mu(y)\\ &\leq \frac{K_n}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n,\mu)}.\end{aligned}$$

Como $E_{\lambda,R} \subset E_{\lambda,R+1}$ y $E_\lambda = \bigcup_{R=1}^{\infty} E_{\lambda,R}$, de la Proposición 1.1 concluimos que

$$\mu(E_\lambda) = \lim_{R\to\infty} \mu(E_{\lambda,R}) \leq \frac{K_n}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n,\mu)}.$$

□

## 3.4. Pesos $A^p$ de Muckenhoupt y teorema de extrapolación en $L^p(\mathbb{R}^n, \omega dx)$

Finalizamos esta memoria dando unas pinceladas acerca de una última aplicación de los resultados probados para el operador maximal de Hardy-Littlewood y su importancia para probar un resultado muy potente en el análisis armónico y funcional: el teorema de extrapolación.

Los espacios $L^p$ con pesos son espacios $L^p(\mathbb{R}^n, d\mu)$, donde la medida $d\mu(x) = \omega(x)dx$, $x \in \mathbb{R}^n$, para una cierta función no negativa y localmente integrable $\omega$ que se denomina *peso*. Si $\omega$ es un peso, entonces definimos

$$\omega(E) = \int_E \omega(x)dx, \text{ para todo } E \text{ conjunto medible.}$$

Por consiguiente, para cada $1 < p < \infty$,

$$L^p(\mathbb{R}^n, \omega(x)dx) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \omega dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

En 1972, Muckenhoupt en [10] caracterizó los pesos $\omega$ para los que el operador maximal de Hardy-Littlewood no centrado en cubos está acotado de $L^p(\mathbb{R}^n, \omega dx)$ en sí mismo, $1 < p < \infty$, y de $L^1(\mathbb{R}^n, \omega dx)$ en $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \omega dx)$. Recordemos que, para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, la función maximal no centrada en cubos se define como

$$M'f(x) = \sup_{\substack{Q\subset\mathbb{R}^n\\ x\in Q}} \frac{1}{m(Q)}\int_Q |f(y)|dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

y que es equivalente a la función maximal centrada en cubos, así como a las funciones maximales centradas y no centradas en bolas (estamos considerando la medida de Lebesgue).

**Teorema 3.13 (Proposición 7.1, [4]).** *Sea $M'$ el operador maximal no centrado (en cubos).*

*(a) $M'$ está acotado en $L^p(\mathbb{R}^n, \omega dx)$, $1 < p < \infty$, si, y sólo si, para cualquier cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$, existe una constante $C > 0$ independiente de $Q$ tal que*

$$\left(\frac{1}{m(Q)} \int_Q \omega(x)dx\right)\left(\frac{1}{m(Q)} \int_Q \omega^{1-p'}(x)dx\right)^{p-1} \leq C. \tag{3.12}$$

*(b) $M'$ está acotado de $L^1(\mathbb{R}^n, \omega dx)$ en $L^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \omega dx)$ si, y sólo si, para cualquier cubo $Q \subset \mathbb{R}^n$ tal que $x \in Q$ existe una constante $C > 0$*

$$\frac{\omega(Q)}{m(Q)} \leq C\omega(x), \quad c.t.\ x \in Q. \tag{3.13}$$

*Observación 3.14.* La condición (3.12) se conoce comúnmente como la *condición $A_p$* y (3.13) se conoce como *condición $A_1$*. Además, (3.13) es equivalente a $M\omega(x) \leq C\omega(x)$, *c.t.* $x \in \mathbb{R}^n$. A los ínfimos de las constantes $C$ que cumplen (3.12) y (3.13), se les conoce como constantes $A_p$ y $A_1$ del peso, respectivamente.

Uno de los ejemplos más sencillos de pesos lo encontramos en $\omega(x) = |x|^\alpha \in A_1$ si $-n < \alpha \leq 0$ y $\omega(x) = |x|^\alpha \in A_p$ si $-n < \alpha < n(p-1)$, donde $x \in \mathbb{R}^n$. Además, si $\alpha > -n$, la medida $d\mu(x) = |x|^\alpha dx$ es doblante.

El siguiente resultado recoge propiedades muy importantes acerca de los pesos $A_p$ y que serán fundamentales para la prueba del teorema de extrapolación.

**Proposición 3.15 (Proposición 7.2, [4]).** *Sean $1 \leq p < q$.*

*(a) $A_p \subset A_q$*
*(b) Si $\omega_0, \omega_1 \in A_1$, entonces $\omega_0 \omega_1^{1-p} \in A_p$.*
*(c) Un peso $\omega \in A_p$ si, y sólo si, $\omega^{1-p'} \in A_{p'}$.*

Es natural preguntarse si el recíproco en el apartado (*b*) de la proposición anterior es cierto, esto es, si todo peso $\omega \in A_p$ puede expresarse como producto de dos pesos de $A_1$ y la respuesta la encontramos en el *Teorema de factorización de pesos*.

**Teorema 3.16 (Factorización de pesos, [11]).** *Supongamos que $\omega \in A_p$, $1 < p < \infty$, entonces podemos encontrar $\omega_0, \omega_1 \in A_1$ tal que $\omega = \omega_0 \omega_1^{1-p}$.*

Los dos resultados anteriores serán fundamentales en la prueba del teorema de extrapolación, combinados con el siguiente teorema, por el cual nos dice cómo construir pesos $A_1$ (y por consiguiente pesos $A_p$, $1 < p < \infty$) en términos de la función maximal $M'f$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

**Teorema 3.17.** *Para cada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que $M'f(x) < \infty$ en casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ y cada $0 < \delta < 1$, se tiene que $\omega(x) = (Mf(x))^\delta$ es un peso $A_1$, con constante $A_1$ sólo dependiendo de $\delta$. Recíprocamente, para cada $\omega \in A_1$, existe una función $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, un $0 \leq \delta < 1$ y una función $K$ tal que $K, K^{-1} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, de modo que $\omega(x) = K(x)(Mf(x))^\delta$.*

Los resultados anteriores nos permiten construir pesos en $A_p$, para todo $p > 1$. Esta construcción resulta esencial para probar el Teorema de Extrapolación, que enunciamos a continuación y cuya prueba puede encontrarse en [4, Teorema 7.8].

**Teorema 3.18 (Teorema de Extrapolación).** *Sea $1 < r < \infty$. Si $T$ es un operador acotado en $L^r(\mathbb{R}^n, \omega dx)$, para cada $\omega \in A_r$, cuya norma solo depende de la constante $A_r$ de $\omega$, entonces para cualquier $\omega \in A_p$, $T$ está acotado en $L^p(\mathbb{R}^n, \omega dx)$, $1 < p < \infty$.*

# Bibliografía


[1] Bernal, A., A note on the one-dimensional maximal function, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 1989, vol. 111, pp. 325–328.

[2] Cohn, D. L. *Measure theory* Birkhäuser/Springer, NY, 2013. 2nd edition.

[3] DiBenedetto, E. *Real analysis* Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002.

[4] Duoandikoetxea, J. *Fourier analysis* American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[5] Folland, G. B. *Real analysis. Modern techniques and their applications* John Wiley & Sons, Inc, NY, 1999. 2nd edition.

[6] Grafakos, L. and Montgomery-Smith, S., Best constants for uncentered maximal functions, *Bull. London Math. Soc.*, 1997, vol. 29, pp. 60–64.

[7] Hardy, G. H. and Littlewood, J. E., A maximal theorem with function-theoretic applications, *Acta Math.*, 1930, vol. 53, pp. 81–116.

[8] Infante, A. and Soria, F., On the Maximal Operator Associated with Certain Rotational Invariant Measures, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, 2010, vol. 26, pp. 993–1004.

[9] Melas, A. D., The best constant for the centered Hardy-Littlewood maximal inequality, *Ann. of Math.(2)*, 2003, vol. 157, pp. 647–688.

[10] Muckenhoupt, B., Weighted norm inequalities for the Hardy maximal, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1972, vol. 165, pp. 207–226.

[11] Rubio de Francia, J. L., Factorization and extrapolation of weights, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 1982, vol. 7, pp. 393–395.

[12] Sjögren, P., A remark on the maximal function for measures in $\mathbb{R}^n$, *Amer. J. Math.*, 1983, vol. 105, pp. 1231–1233.

[13] Sjögren, P. and Soria, F., Sharp estimates for the non-centered maximal operator associated to Gaussian and other radial measures, *Adv. Math.*, 2004, vol. 181, pp. 251–275.

[14] Stein, E. M., The development of square functions in the work of A. Zygmund, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 1982, vol. 7, pp. 359–376.

[15] Stein. E. and Schakarchi, R. *Real Analysis. Measure theory, integration and Hilbert spaces* Princeton University Press, NY, 2005.

[16] Stein, E. M. and Strömberg, J.-O., Behavior of maximal functions in $\mathbf{R}^n$ for large $n$, *Ark. Mat.*, 1983, vol. 21, pp. 259–269.
[17] Wiener, N., The ergodic theorem, *Duke Math J.*, 1939, vol. 5, pp. 1–18.

# The Hardy-Littlewood maximal operator and applications

**Alex Hernández Gutiérrez**
Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0101364599@ull.edu.es

**Abstract**

*In this work we will study the Hardy-Littlewood maximal operator, its boundedness in Lebesgue spaces and some applications to mathematical analysis. First, we will show some results of measure theory and Lebesgue spaces theory that will be crucial for the development of the work. Next, we will introduce the Hardy-Littlewood maximal operator and we will prove its weak type $(1,1)$ and strong type $(p,p)$, $1<p\leq\infty$, boundedness results. We will study other versions of this maximal operator, changing the integration sets and the measure and we will prove the Lebesgue's Differentiation Theorem, the boundedness properties and convergence of the summability kernels, and other applications.*

## 1. Introduction

The Hardy-Littlewood maximal operator is one of the most significant maximal operators in mathematical analysis. It can be used to study the boundedness of other operators and to obtain almost everywhere convergence results for the integral means of a function.
The main objective of this work is the study of the Hardy-Littlewood maximal operator (centered and non-centered) on different integration sets (balls, cubes, rectangles, etc.), formulated with respect to the Lebesgue measure and other more general measures. We will prove its boundedness in Lebesgue spaces and explore some of its applications in mathematical analysis.

## 2. Outline of the first chapter

In the first chapter, we will recall the results and basic definitions of measure theory. We define measurable spaces, measure spaces, and show their most important properties. We conclude by defining abstract integration of measurable functions and proving three of the most important results of integration theory: Monotone convergence Theorem, Fatou's Lemma and Dominated convergence Theorem.

## 3. Outline of the second chapter

The second chapter is devoted to the study of Lebesgue spaces. Let $(X,\mathcal{M},\mu)$ be a measure space and $0<p\leq\infty$. Let $L^p(X,\mu)$ denote the space of measurable functions $f:X\to\mathbb{C}$ such that

$$\|f\|_p=\left[\int|f|^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}}<\infty,\quad 0<p<\infty,$$

and

$$\|f\|_\infty:=ess\sup_{x\in X}|f(x)|=\inf\{\alpha\geq 0:\mu(\{x\in X:|f(x)|>\alpha\})=0\}.$$

For every $1\leq p\leq\infty$, $L^p(X,\mu)$ are Banach spaces.
Some important inequalities for Lebesgue spaces are the following.
**Hölder inequality** Let $1\leq p,q\leq\infty$ such that $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. If $f\in L^p(X,\mu)$ and $g\in L^q(X,\mu)$ then $fg\in L^1(X,\mu)$ and $\|fg\|_1\leq\|f\|_p\|g\|_q$. The equality is true if, only if, $\alpha|f|^p=\beta|g|^q\,a.e.\ x\in X$, for some constants $\alpha,\beta$, with $\alpha\beta\neq 0$.
**Young's inequality** Let $1\leq p,q,r\leq\infty$, such that $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+1$. If $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ and $g\in L^q(\mathbb{R}^n)$, then $f*g\in L^r(\mathbb{R}^n)$ and $\|f*g\|_r\leq\|f\|_p\|g\|_q$.
In general it is not true that $L^p(X,\mu)\subset L^q(X,\mu)$, $p\neq q$, instead we have the following result.

**Proposition** For $0<p<q<r\leq\infty$, we have that $L^p(X,\mu)\cap L^r(X,\mu)\subset L^q(X,\mu)\subset L^p(X,\mu)+L^r(X,\mu)$.
Let $(X,\mu)$ and $(Y,\nu)$ be measurable spaces, $0<p<\infty$, and $T$ be an operator defined from $L^p(X,\mu)$ to the space of measurable functions from $Y$ to $\mathbb{C}$. We say that $T$ is weak $(p,q)$, $q<\infty$, if there exists a constant $C>0$ such that

$$\nu(\{y\in Y:|Tf(y)|>\lambda\})\leq\left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q,\quad\lambda>0.$$

$T$ is strong $(p,q)$ if it is bounded from $L^p(X,\mu)$ to $L^q(Y,\nu)$.
The following theorem allows us to extend the $L^p$ boundedness properties, $p\in(p_0,p_1)$, for a sublinear operator whenever we know its weak $(p_0,p_0)$ and $(p_1,p_1)$ boundedness properties.
**Marcinkiewicz theorem** Let $(X,\mu)$ and $(Y,\nu)$ be measurable spaces, $1\leq p_0\leq p_1\leq\infty$, and $T$ be a sublinear operator from $L^{p_0}(X,\mu)+L^{p_1}(X,\mu)$ to the space of measurable functions on $Y$. If $T$ is weak $(p_0,p_0)$ and weak $(p_1,p_1)$, then $T$ is strong $(p,p)$ for every $p_0<p<p_1$ and $\|Tf\|_{L^p(Y,\nu)}\leq M\|f\|_{L^p(X,\mu)}$, for some $M>0$.

## 4. Outline of the third chapter

In the third and final chapter of the work, we introduce the Hardy-Littlewood maximal operator and study its properties.
Let $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. The centered Hardy-Littlewood maximal function of $f$ is defined as follows

$$M_cf(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f(y)|dy,\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

**Proposition** For every $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $M_cf$ is measurable.
**Theorem** The operator $M_c$ is weak type $(1,1)$ and strong type $(p,p)$, $1<p\leq\infty$.
One of the main consequences of this result is the Lebesgue's Differentiation Theorem, which is a generalization of the Fundamental Theorem of Calculus.
**The Lebesgue Differentiation Theorem** If $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, then

$$\lim_{r\to 0^+}\left[\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}f(y)dy\right]=f(x),\quad a.e.\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Let $\mu$ be a non-negative Borel measure on $\mathbb{R}^n$ and $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. We define the centered Hardy-Littlewood maximal function of $f$ as

$$M_c^\mu f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{\mu(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f(y)|d\mu(y),\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

**Theorem** Let $\mu$ be a non-negative Borel measure on $\mathbb{R}^n$. The operator $M_c^\mu$ is of weak type $(1,1)$ and strong type $(p,p)$, $1<p\leq\infty$.
We will also consider the non-centered Hardy-Littlewood maximal function $M^\mu f(x)=\sup\limits_{\substack{B\subset\mathbb{R}^n:\\ x\in B}}\frac{1}{\mu(B)}\int_B|f(y)|d\mu(y),\quad x\in\mathbb{R}^n.$
If the measure $\mu$ is doubling, that is $\mu(B(z,2r))\leq C\mu(B(z,r))$ for each $z\in\mathbb{R}^n$ and $r>0$, then $M_c^\mu\sim M^\mu$, so they have the same boundedness properties. If $\mu$ is not doubling, then both operators are not equivalent and $M$ is not of weak type $(1,1)$ in general.

## References

[1] Duoandikoetxea, J. *Fourier analysis* American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
[2] Folland, G. B. *Real analysis. Modern techniques and their applications* John Wiley & Sons, Inc, NY, 1999. 2nd edition.
[3] Stein, E; Schakarchi, R. *Real Analysis. Measure theory, integration and Hilbert spaces* Princeton University Press, NY, 2005.