Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

David Toribio Rodríguez

Modelos de inventario con política de crédito comercial

Inventory models with trade credit policy

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, Julio de 2023

Dirigido por
Joaquín Sicilia Rodríguez

Joaquín Sicilia Rodríguez
Departamento de Matemáticas,
Estadística e Investigación
Operativa
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia por el apoyo y el cariño que me dieron durante estos 4 años.

A mis amigos por mostrarme siempre el lado positivo en los peores momentos y hacer que nunca bajara los brazos por el camino.

A Joaquín por su fantástica labor como tutor de este trabajo y por abrirme las puertas de esta rama de la Investigación Operativa.

Gracias a todas las personas que han estado presentes durante esta etapa de mi vida, ya que de no ser por ellas, no hubiera llegado hasta aquí.

David Toribio Rodríguez
La Laguna, 10 de julio de 2023

Resumen · Abstract

Resumen

El objetivo de este trabajo es el estudio de modelos de gestión de inventarios que siguen una política de crédito comercial, es decir, el proveedor permite que la empresa pague por el importe del lote de artículos en cualquier momento dentro de un periodo de tiempo prefijado.

La memoria comienza con un breve resumen en el que se recogen los conceptos básicos de la gestión de inventarios. Así, también se desarrollan los modelos clásicos de tamaño del lote sin rotura y con ella, siendo ambos la base de los modelos que se presentan posteriormente. A continuación, los siguientes capítulos presentan algunos trabajos relevantes sobre modelos de gestión de inventarios. Así, en el segundo capítulo se muestran modelos que consideran el retraso permisible de los pagos. En el tercer capítulo se recogen modelos que tienen en cuenta el deterioro de los artículos almacenados y, por último, en el cuarto capítulo, se desarrollan trabajos que combinan ambas hipótesis y que describen un escenario más similar a la gestión práctica del inventario.

La finalidad de esta memoria es profundizar en el estudio de los modelos de control de stocks que siguen una política de crédito comercial. Estos modelos son de gran interés en el sector empresarial. Ese periodo de crédito es un plan de actuación que muchas empresas proveedoras llevan a cabo actualmente, ya que esa concesión les ofrece la oportunidad de poder vender un mayor volumen de artículos. También a las empresas compradoras de los productos les permite disponer de un periodo de tiempo donde poder vender artículos y obtener beneficios desde un principio, sin haber tenido que adelantar el dinero antes de haber completado un cierto porcentaje de ventas.

Palabras clave: *Inventario – Gestión – Política de crédito comercial – Deterioro – Modelos de tamaño del lote.*

Abstract

The aim of this work is the study of models of inventory management that follow a trade credit policy, that is, the supplier allows the company to pay for the amount of the lot of articles at any time within a period of time prefixed.

This memory begins with a brief summary of the basic concepts of inventory management, including a description of the classical lot size model without breakage and with breakage, both being the basis of the models that are subsequently presented. Then, the following chapters present some relevant works on inventory management models. Thus, in the second chapter models are shown that consider the permissible delay of payments. In the third chapter, models that take into account the deterioration of stored items are collected and, finally, in the fourth chapter, works are developed that combine both hypotheses and describe a scenario more similar to practical inventory management.

The purpose of this report is to deepen the study of stock control models that follow a commercial credit policy. These models are of great interest in the business sector. This credit period is an action plan that many supplier companies currently carry out, since this concession offers them the opportunity to sell a greater volume of articles. Also the companies buying the products it allows them to have a period of time where they can sell items and obtain benefits from the beginning, without having to advance the money before having completed a certain percentage of sales.

Keywords: *Inventory – Management – Commercial credit policy – Decay – Lot size models.*

Contenido

Introducción

En las últimas décadas, la humanidad ha crecido considerablemente en cuanto al número de habitantes. Esto conlleva un aumento en la demanda que debe ser correspondida por las empresas incrementando su oferta. Así mismo, crecen las transacciones comerciales entre clientes y vendedores, aumenta el transporte de mercancías para poder distribuir los artículos por todo el mundo, y muy importante, crece la competencia entre empresas por vender sus productos. Como consecuencia, los comerciantes buscan despuntar de sus competidores para ser los principales vendedores en su sector. Por este motivo, las empresas están cada vez más interesadas en optimizar los recursos de los que disponen para obtener el mejor resultado posible de la forma más eficiente. Esto se puede abordar gracias a la Investigación Operativa, la cual se encarga de estudiar y analizar la manera más óptima de que una empresa realice sus actividades con los recursos que dispone. Una parte muy importante de este campo es la Gestión de Inventarios, la cual se encarga de modelar o planificar de forma matemática la política de inventario que implique conseguir el mayor beneficio posible controlando los gastos generados, como el mantenimiento y la reposición de los artículos.

La resolución de un problema de inventario se basa en la toma de decisiones que permitan hacer una buena gestión del stock. Estas decisiones determinan cuándo deben realizarse los pedidos para reponer el stock y qué cantidad de artículos es necesario solicitar en cada pedido, teniendo en cuenta los costes asociados. Todo modelo de inventario debe responder a estas cuestiones. Para ello, se debe obtener la política óptima que permita gestionar la manera más eficiente posible de mantener y reponer los artículos. En los últimos años, algunas empresas han seguido una política de crédito comercial, de forma que no pagan al proveedor el lote de artículos comprados inmediatamente, sino que tienen la posibilidad de pagarle dentro de un periodo de tiempo prefijado. Esto permite a las empresas generar beneficios a partir de las ventas de los items sin haber invertido por ellos previamente. Por otra parte, también se debe tener en cuenta que los productos con los que trabajan se van deteriorando durante su estancia en el almacén.

En esta memoria se estudian primero modelos de gestión de inventario que siguen una política de crédito comercial y, luego, se desarrollan modelos que trabajan con artículos susceptibles de deteriorarse. Posteriormente, se estudian algunos trabajos que reúnen de forma conjunta las dos hipótesis anteriores. Se formalizan los modelos que recojan todas las propiedades y se calculan las políticas óptimas de inventario para cada uno de ellos.

1

Modelos clásicos de Tamaño del lote (EOQ)

1.1. Introducción

En la actualidad, las empresas cuentan con una amplia variedad de recursos como son los empleados de la institución, las máquinas con las que manufacturan los productos o realizan sus tareas, el dinero con el que financian su actividad, la materia prima y la energía para su funcionamiento, etc. Uno de estos recursos son los inventarios de bienes o artículos para atender la demanda de los clientes. Tienen una función vital en la fabricación y comercialización de los productos con los que trabaja una empresa y muchas veces no se realiza un control adecuado de los mismos. Por este motivo, se debe enfatizar en el estudio de los sistemas de gestión de inventarios para reducir los costes y/o aumentar los beneficios de la organización o empresa.

El término inventario hace referencia al conjunto de recursos materiales en propiedad de una empresa que están almacenados para su uso posterior y que poseen valor económico. Pueden ser productos listos para la venta, materia prima para la fabricación de un artículo, o cualquier otro bien que recoja las características anteriores. El modo de gestionar el inventario puede ser un factor distintivo frente a la competencia. Si no se procede de la forma correcta puede producir malestar entre los clientes de la empresa por falta de artículos, lo que deriva en repercusiones negativas económicamente hablando.

Una buena administración del inventario conlleva conocer la fluctuación de la cantidad de recursos en el almacén durante el transcurso del tiempo. Esto proporciona ciertas ventajas, como son:

- Mayor facilidad para cumplir con los plazos de entrega.
- Mejor administración de los recursos.
- Conocer las cantidades de los artículos de los que se dispone para poder cubrir futuras demandas y evitar que los procesos de venta se detengan.
- Informar sobre la disponibilidad del producto al cliente, lo cual genera credibilidad y mejora las futuras negociaciones.

El objetivo es construir un modelo que tenga en cuenta las características del sistema y que explique la evolución del inventario a lo largo del tiempo para conseguir una correcta gestión del mismo. A continuación, se presentan los conceptos fundamentales que intervienen en la construcción de los modelos de gestión de inventarios y sus principales propiedades.

1.2. Componentes principales en gestión de inventarios

1.2.1. Reposiciones

Se entiende por reposición a la cantidad que se añade al inventario para cubrir o satisfacer una demanda futura de algún producto. En las reposiciones intervienen ciertos elementos como el instante de la realización del pedido, el tiempo que transcurre entre reposiciones consecutivas y la cantidad de producto que se pide. Se detallan a continuación los principales elementos a estudiar:

- **Periodo de gestión (T).** Es el periodo de tiempo que transcurre entre dos reposiciones consecutivas. Esta componente, también conocida como periodo de planificación o ciclo del inventario, puede ser conocido o desconocido. En el caso de conocer el valor del periodo de gestión, este puede ser fijo o constante o variable. Si no conocemos el valor del ciclo de inventario, T se convierta en una variable de decisión del problema.
- **Periodo de reposición (t').** Se corresponde con el intervalo de tiempo que se necesita para introducir la mercancía nueva en el inventario. Puede ser que la reposición sea instantánea, uniforme o siga cierta distribución. Este periodo depende del tamaño del pedido.
- **Tiempo de retardo (L).** Periodo de tiempo que pasa desde que se hace el pedido al proveedor hasta que se suministra la mercanía solicitada al almacén. También puede estar fijado (constante o variable), o es desconocido. Si es bastante corto o despreciable se suele considerar que $L = 0$.
- **Tamaño de la reposición (Q).** Es la cantidad de producto que se pide para reponer el inventario. Dicha cantidad puede ser conocida o desconocida. En el primer caso, el tamaño en todas las reposiciones puede ser el mismo, luego Q se conoce como tamaño del lote, pero también puede ocurrir que cambie el tamaño de la reposición entre distintos pedidos. Si es desconocido, Q pasa a ser una variable del problema.
- **Punto de pedido o reposición (s).** Es la cantidad de stock que marca el momento en el que debe solicitarse una nueva reposición de inventario.
- **Nivel inicial de inventario (S).** Representa la cantidad de inventario de cierto producto que debe haber al inicio del periodo de planificación T si la reposición fuera instantánea. Puede ser un dato fijado, o por lo contrario, desconocido. En ese caso se trata como una variable más.

Es importante saber que la manera en la que se reponen los artículos en el inventario es diferente para cada empresa. Los **modelos o patrones de reposición** son las distintas formas de incorporar las unidades solicitadas al stock. La siguiente expresión matemática recoge las formas principales de reposición:

$$I(t) = S + Q \sqrt[m]{\frac{t}{t'}}\ ,\ 0 \leq t \leq t'$$

$I(t)$ es la función que nos indica el nivel de inventario en el tiempo t y m es el índice del modelo de reposición. Según el valor que tome este parámetro, la reposición se comporta de una forma u otra. En este trabajo, vamos a considerar siempre que la reposición es instantánea, luego $m = \infty$.

1.2.2. Demandas

El inventario de una empresa se vacía al ritmo que dictamine la demanda de sus clientes. La demanda es la cantidad de producto que un cliente necesita para cubrir sus necesidades. Sus características pueden variar debido a diferentes aspectos: clase de producto, situación del mercado, tipo de público objetivo, etc. Conocer el comportamiento de la demanda de los clientes y sus cambios es fundamental para la gestión de los inventarios.

Al igual que con las reposiciones, la forma en la que se extraen los artículos del inventario para satisfacer la demanda de los clientes viene recogido en los **modelos o patrones de demanda**. La siguiente fórmula agrupa algunas formas de extraer los productos del inventario:

$$I(t) = S - X \sqrt[n]{\frac{t}{T}}\ ,\ 0 \leq t \leq T$$

donde X es la cantidad demandada. Como en la anterior sección, $I(t)$ es la función que nos indica el nivel de inventario en el tiempo t y n es el índice del modelo de demanda. En nuestro caso, los modelos que estudiaremos consideran que la demanda es constante. Por tanto, $n = 1$.

1.2.3. Costes

El conocimiento y control de los gastos a la hora de gestionar un inventario es fundamental en el funcionamiento de la empresa. Los costes que se estudian de forma más generalizada en el control de inventario se enumeran a continuación:

- **Coste de mantenimiento** (K_1), es cualquier coste relacionado con el almacenamiento de productos. Se identifican como este tipo los gastos del alquiler del local, limpieza, luz, agua, seguro e impuestos, entre otros.

- **Coste de rotura** (K_2), se refiere a las repercusiones económicas relativas a la insuficiencia de productos con la que satisfacer la demanda de los clientes. El periodo de tiempo en el que una empresa tiene más demanda que artículos disponibles se denomina rotura. Existen dos escenarios: las roturas son recuperables y se satisface la demanda de los clientes posteriormente con la llegada de nuevos productos, o las roturas no son recuperables y son ventas perdidas de clientes que ya buscan otro establecimiento para cubrir sus necesidades.
- **Coste de reposición** (K_3), es el gasto que engloba todo lo relacionado con la reposición del inventario, ya sea los costes por el transporte de mercancía hasta el almacén, seguro, combustible, carga y descarga, etc.

Cualquier coste que influya en la gestión de inventario tiene cabida en el modelo. Otros costes que podrían considerarse son el **coste de inspección de los artículos** (K_4), el **coste de compra** (K_5) o el **coste de eliminación de artículos desechables** (K_6). Si queremos considerar los costes anteriores por unidad de tiempo, los denotamos como $C_i = \frac{K_i}{T}, \forall i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Otra forma de calcular los costes por unidad de tiempo C_i es considerando los costes unitarios y las cantidades medias por unidad de tiempo. Algunos de los costes por unidad o artículo con los que más se trabajarán son:

- h : coste de mantenimiento unitario, cuya dimensión es $\frac{[\$]}{[Q][T]}$. Luego, $C_1 = hI_1$ donde I_1 es la cantidad media en almacenamiento.
- w : coste de rotura unitario en caso de venta recuperable. Tiene dimensión $\frac{[\$]}{[Q][T]}$.
- π : coste de rotura unitario en caso de venta perdida, que tiene dimensión $\frac{[\$]}{[Q]}$. Si consideramos los costos unitarios relacionados con las roturas, el coste de rotura C_2 se puede expresar como $C_2 = \beta w I_{21} + (1-\beta)\pi I_{22}$, donde I_{21} es la cantidad media en stock, I_{22} es la cantidad media de rotura y β es el porcentaje de rotura que son recuperables.
- A : coste por reposición. Por tanto, el coste de reposición C_3 es $C_3 = AI_3$, donde I_3 es el número de reposiciones.
- p : coste unitario de compra.
- v : coste unitario de venta.

(Las dimesiones $[\$], [Q]$ y $[T]$ hacen referencia a dinero, cantidad y tiempo respectivamente).

El principal objetivo del problema de inventario es minimizar el coste total, es decir, la suma de los costes relacionados con la gestión del inventario. Para ello, primero hay que indentificar qué tipo de costes se tienen en cuenta en el inventario estudiado. Se pueden clasificar los sistemas de inventario en función de los costes generales que intervienen. Por ejemplo, en un sistema (1,2) solo se tiene en cuenta el coste de mantenimiento y el coste de rotura; un sistema (1,3) siempre tiene stock disponible, luego no interviene el coste de rotura, pero sí el de mantenimiento y el de reposición; y en un sistema (1,2,3) intervienen los tres costes generales que se verán en próximos capítulos.

1.3. Políticas de inventario

Las preguntas más importantes que se tienen que resolver a la hora de solucionar un problema de gestión de inventario son cuándo y cuánto reponer. Las respuestas las dará la política de inventario considerada. Por política de inventario se entiende a la estrategia que se lleva a cabo para la resolución de un problema de gestión de inventario. Un sistema de inventario se gestiona de forma correcta si se toma la política de inventario más adecuada. Se pueden plantear políticas diferentes si se tiene en cuenta como variables el momento en que solicita un nuevo pedido y la cantidad requerida en la reposición. Por ejemplo, si se sigue una política (s, Q), el inventario se repone cuando el nivel de inventario sea igual o inferior a s unidades y siempre se realiza un pedido de tamaño fijo de Q unidades. Otro caso, si se adopta una política (T, S), el inventario se repone cada T unidades de tiempo con un pedido de forma que hayan S unidades en stock al inicio del ciclo del inventario.

1.4. Modelo clásico de tamaño del lote sin permitir roturas (Modelo EOQ)

El primer análisis conocido de gestión de inventarios fue desarrollado en 1913 por Ford Whitman Harris, un ingeniero de producción estadounidense. Se conoce como el modelo clásico del tamaño del lote, también denominado EOQ (siglas de Economic Order Quantity en inglés). No obstante, el modelo no ganó importancia y utilidad hasta 1934 cuando Robert Woodrow Wilson analizó en profundiad el trabajo de Harris e hizo un artículo sobre dicho modelo. De hecho, en la actualidad se atribuye el modelo a Wilson por ser quien lo puso en conocimiento a un mayor número de personas.

El modelo EOQ o sistema clásico de tamaño del lote es el modelo base del cual parten la gran mayoría de modelos usados en el estudio y gestión de inventarios. Sigue una política (s, Q), es decir, el inventario se repone con un pedido fijo de Q unidades cuando el nivel de stock es igual o menor que s artículos. Cuenta con las siguientes características:

- La demanda D es conocida y constante.
- No se permiten roturas, luego el inventario se debe reponer cuando el nivel de inventario sea $s = 0$, es decir, no hay stock disponible.

- La razón de reposición es infinita, es decir, la reposición es instantánea.
- La capacidad de producción es ilimitada.
- Se presupone que el pago de la cantidad solicitada se realiza cuando se recibe el pedido.

La cantidad solicitada para la reposición del inventario debe satisfacer la cantidad demandada durante el periodo T. Por tanto, $Q = DT$. De ahí, se deduce que el periodo de gestión o ciclo de inventario es $T = \frac{Q}{D}$.

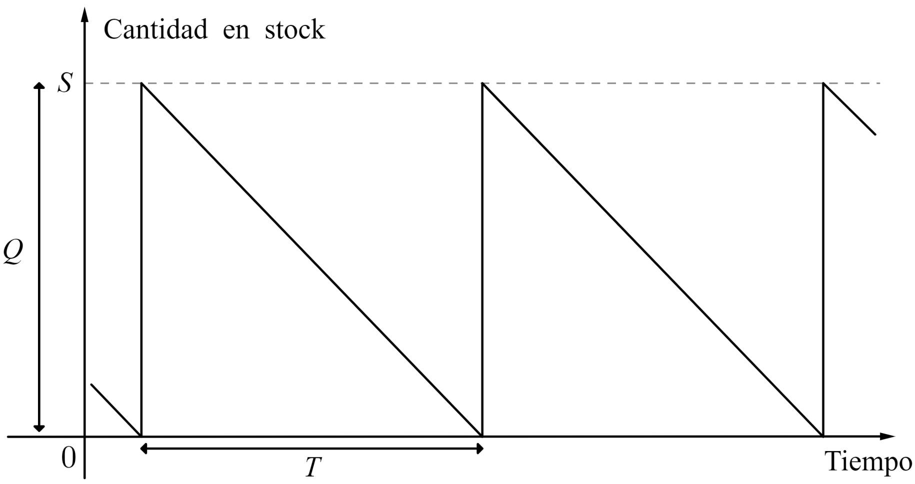

Figura 1.1. Evolución del nivel de inventario en el sistema clásico de tamaño del lote.

La función que determina el coste total de la gestión del inventario por unidad de tiempo es:

$$C(Q) = \frac{K_1 + K_3}{T} = C_1(Q) + C_3(Q)$$

Para calcular el coste de mantenimiento por unidad de tiempo $C_1(Q)$ se necesita conocer el coste de mantenimiento por artículo y unidad de tiempo (h) y la cantidad media en stock (I_1). Se expresa como $C_1 = hI_1$, donde $I_1 = \frac{\frac{QT}{2}}{T} = \frac{Q}{2}$.

Por otra parte, el coste de reposición por unidad de tiempo se expresa como $C_3 = AI_3$. Para su cálculo se requiere del coste unitario de reposición (A) y el número medio de reposiciones (I_3). Como se realiza un pedido cada T unidades de tiempo, el número medio de reposiciones es $I_3 = \frac{1}{T} = \frac{D}{Q}$.

La función de coste total del sistema clásico de tamaño del lote viene dada por:

$$C(Q) = C_1(Q) + C_3(Q) = hI_1 + AI_3 = h\frac{Q}{2} + A\frac{D}{Q} \tag{1.1}$$

El objetivo del problema es minimizar la ecuación (1.1) sujeta a $Q > 0$. Se deriva y se iguala a 0 para obtener la solución óptima:

$$C'(Q) = 0 \iff \frac{h}{2} - \frac{AD}{Q^2} = 0 \iff Q^2 = \frac{2AD}{h} \iff Q_0 = \sqrt{\frac{2AD}{h}} \tag{1.2}$$

La expresión (1.2) se conoce como la **fórmula de Harris-Wilson**. En efecto, $Q = Q_0$ es un mínimo de la ecuación, dado que al calcular la segunda derivada se obtiene:

$$C''(Q) = \frac{2AD}{Q^3} > 0 \quad \text{ya que } Q > 0.$$

Una vez obtenido el tamaño óptimo del lote Q_0, se calcula el coste mínimo total por unidad de tiempo asociado al problema de inventario:

$$C_0 = C(Q_0) = h\frac{Q_0}{2} + A\frac{D}{Q_0} = \sqrt{2hAD}$$

También se puede obtener el periodo de gestión óptimo:

$$T_0 = \frac{Q_0}{D} = \frac{1}{D}\sqrt{\frac{2AD}{h}} = \sqrt{\frac{2A}{hD}}$$

Se observa que este modelo es un sistema de nivelación de costes porque en la solución óptima del problema, el coste de mantenimiento es igual al coste de reposición. En efecto:

$$C_1^0 = hI_1(Q_0) = h\frac{Q_0}{2} = \frac{h}{2}\sqrt{\frac{2wD}{h}} = \sqrt{\frac{hAD}{2}}$$

$$C_3^0 = AI_3(Q_0) = A\frac{D}{Q_0} = \frac{AD}{\sqrt{\frac{hAD}{2}}} = \sqrt{\frac{hAD}{2}}$$

Hay que tener en cuenta que el modelo de Harris-Wilson es muy útil para entender esta temática sobre la gestión de sistemas de inventario, pero cuenta con unas hipótesis muy concretas y limitantes, por lo que es complicado encontrar una situación real así. Por ejemplo, la capacidad de producción de las empresas no es infinita; todas tienen una tasa máxima de fabricación. Por otra parte, la razón de demanda no es constante habitualmente, influyen muchos factores, por lo que es difícil que se comporte igual todo el tiempo. También, en pocos casos la reposición del stock es instantánea, por lo que puede existir un periodo de retardo desde que se solicita el periodo hasta que éste se añade al stock. Por último, en la práctica puede haber un periodo de tiempo donde no haya stock, lo que puede derivar en roturas del inventario.

En la siguiente sección se va a estudiar el sistema de tamaño del lote con roturas. En este problema se considera que el cliente acepta esperar por su pedido, si en el momento de hacer la compra no hay stock disponible.

1.5. Modelo clásico de tamaño del lote con roturas

Este modelo de gestión de inventario sigue una política (S, Q), es decir, el tamaño de las reposiciones es de Q unidades y el nivel de inventario al inicio del ciclo es S, siendo estas dos características las variables de decisión de nuestro problema. Además, intervienen los tres costos generales definidos anteriormente ya que ahora, a diferencia con el modelo EOQ, sí existe coste de rotura en el sistema. Luego, la función de coste por unidad de tiempo es:

$$C(S, Q) = C_1(S, Q) + C_2(S, Q) + C_3(S, Q) \tag{1.3}$$

El objetivo del problema es minimizar esta función para obtener el menor costo asociado a la gestión del inventario. Las características más relevantes de este modelo son las siguientes:

- La demanda D es conocida y constante.
- El tamaño del lote de reposición Q es constante pero desconocido.
- El nivel de inventario al inicio del periodo S es constante porque se mantiene igual para cada periodo, pero desconocido.
- Se permiten roturas, las cuales son recuperables con la llegada de nueva mercancía en la próxima reposición.
- El periodo de gestión o ciclo de inventario T es desconocido, pero puede determinarse mediante la expresión $Q = DT \Rightarrow T = \frac{Q}{D}$.
- El punto de reposición s no está fijado. Se puede obtener usando la fórmula $s + Q = S$. Así, se tiene que $s = S - Q$.
- La reposición es instantánea, esto es, la razón de reposición es infinita.
- El tiempo de retardo es nulo $(L = 0)$.

Teniendo en cuenta las propiedades que caracterizan este modelo, la evolución del nivel de inventario depende de S y Q. Hay 3 casos a considerar:

- **Primer caso** $(S \geq Q)$: No hay existencia de roturas ya que el punto de reposición llega antes de quedarse el alamcén sin inventario. Se observa en la Figura 1.2.
  La cantidad media en stock, para esta situación, se calcula dividiendo la cantidad total en stock por el periodo de gestión:
  $$I_1 = \frac{Area(A) + Area(B)}{T} = \frac{sT + \frac{QT}{2}}{T} = s + \frac{Q}{2} = S - Q + \frac{Q}{2} = S - \frac{Q}{2}$$
  Por otra parte, la cantidad media de roturas es $I_2 = 0$ ya que no hay roturas en ningún instánte. El número medio de reposiciones es $I_3 = \frac{1}{T} = \frac{D}{Q}$.

  La función de coste total del sistema por unidad de tiempo cuando $S \geq Q$ es:
  $$C(S, Q) = h(S - \frac{Q}{2}) + A\frac{D}{Q}$$

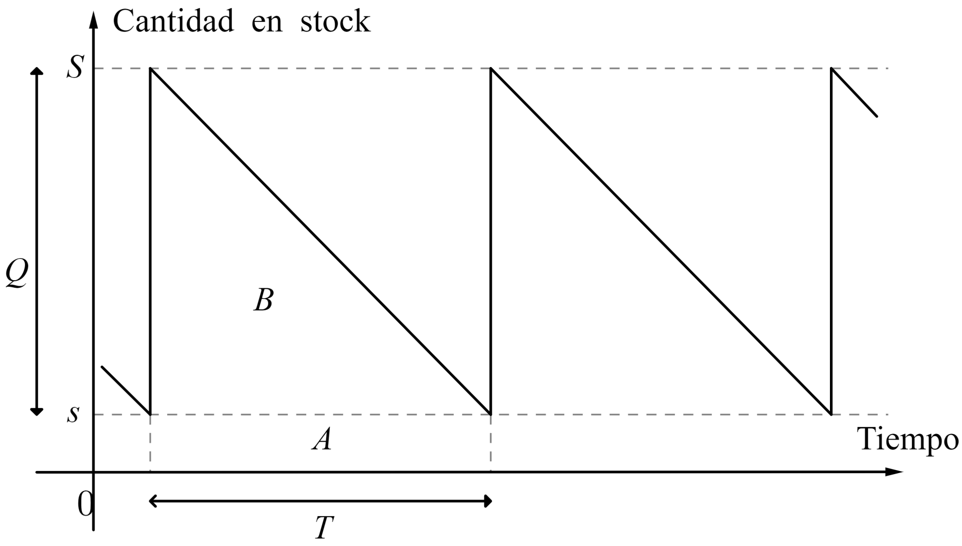

Figura 1.2. Evolución del nivel de inventario en el sistema de tamaño del lote con roturas si $S \geq Q$.

- **Segundo caso** $(0 \leq S \leq Q)$: Existe un periodo en el que hay stock disponible (T_1) y otro periodo de rotura (T_2). Se presenta la situación de la Figura 1.3.

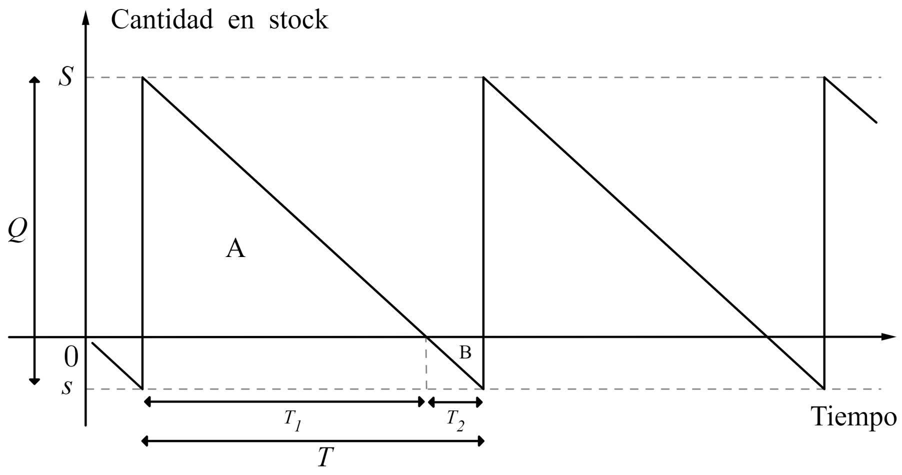

Figura 1.3. Evolución del nivel de inventario en el sistema de tamaño del lote con roturas si $0 \leq S \leq Q$.

Por semejanza de triángulos tras observar la gráfica, se tiene que $\frac{S}{Q} = \frac{T_1}{T}$ y que $\frac{T_2}{T} = \frac{-s}{Q} = \frac{Q-S}{Q}$.

Usando esta información, se calculan las cantidades medias de stock y de rotura empleadas en la obtención de los costes generales:

$$I_1 = \frac{\frac{ST_1}{2}}{T} = \frac{ST_1}{2T} = \frac{S^2}{2Q}$$

$$I_2 = \frac{\frac{-sT_2}{2}}{T} = \frac{(Q-S)T_2}{2T} = \frac{(Q-S)^2}{2Q}$$

$$I_3 = \frac{1}{T} = \frac{D}{Q}$$

La función de coste total a minimizar es:

$$C(S,Q) = h\frac{S^2}{2Q} + w\frac{(Q-S)^2}{2Q} + A\frac{D}{Q}$$

- **Tercer caso** ($S \leq 0$): En la última situación que puede ocurrir, el sistema se encuentra durante todo el ciclo en rotura como se observa en la Figura 1.4.

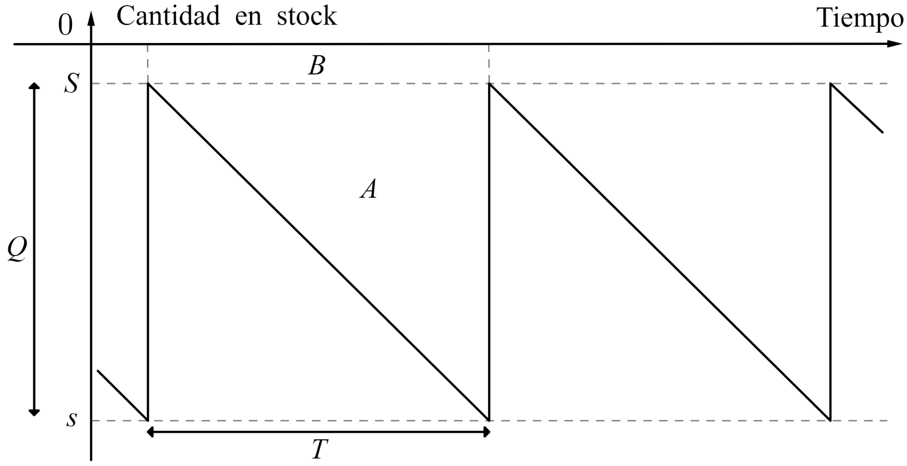

Figura 1.4. Evolución del nivel de inventario en el sistema de tamaño del lote con roturas si $S \leq 0$.

Como no hay artículos en el inventario, tal y como se observa en la gráfica, $I_1 = 0$. El número medio de roturas es el siguiente:

$$I_2 = \frac{Area(A) + Area(B)}{T} = \frac{\frac{QT}{2} - ST}{T} = -S + \frac{Q}{2}$$

El número medio de reposiciones $I_3 = \frac{1}{T} = \frac{D}{Q}$ como en los casos anteriores. Por tanto, la función de coste total por unidad de tiempo es:

$$C(S,Q) = w(\frac{Q}{2} - S) + A\frac{D}{Q}$$

En resumen, la función general de coste total por unidad de tiempo es:

$$C(S,Q) = \begin{cases} w(\frac{Q}{2} - S) + A\frac{D}{Q} & \text{si} \quad S \leq 0 \\ h\frac{S^2}{2Q} + w\frac{(Q-S)^2}{2Q} + A\frac{D}{Q} & \text{si } 0 \leq S \leq Q \\ h(S - \frac{Q}{2}) + A\frac{D}{Q} & \text{si} \quad S \geq Q \end{cases}$$

El objetivo del problema de inventario es buscar los valores de S y Q que optimicen la función anterior. Para ello, primero hay que identificar la región en la que están esos valores óptimos.

- Si $S \leq 0 \Rightarrow C(S,Q) = w(\frac{Q}{2} - S) + A\frac{D}{Q} \geq w\frac{Q}{2} + A\frac{D}{Q} = C(0,Q)$
- Si $S \geq Q \Rightarrow C(S,Q) = h(S - \frac{Q}{2}) + A\frac{D}{Q} \geq h(Q - \frac{Q}{2}) + A\frac{D}{Q} = h(\frac{Q}{2}) + A\frac{D}{Q} = C(Q,Q)$

Por tanto, los valores mínimos se encuentran en la región $0 \leq S \leq Q$. Esto conduce a que el problema de inventario a resolver es:

$$\begin{aligned} min\ C(S,Q) \\ sujeto\ a : 0 \leq S \leq Q \end{aligned} \tag{1.4}$$

Para encontrar la política óptima (S_0, Q_0) que resuelve el problema, se hallan las derivadas parciales respecto a cada variable de decisión y se igualan a cero.

$$\frac{\partial C}{\partial S} = 0 \Rightarrow \frac{2hS}{2Q} - \frac{2w(Q-S)}{2Q} = 0 \Rightarrow S = \frac{wQ}{h+w} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial Q} = 0 \Rightarrow -\frac{hS^2}{2Q^2} + \frac{w}{2}\left[\frac{2(Q-S)Q - (Q-S)^2}{Q^2}\right] - \frac{AD}{Q^2} = 0 \Rightarrow \\ -hS^2 + 2w(Q-S)Q - w(Q-S)^2 - 2AD = 0 \Rightarrow \\ -(h+w)S^2 + wQ^2 - 2AD = 0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Se sustituye el valor del nivel inicial de inventario S de (1.5) en la ecuación (1.6). De esta forma se obtiene el tamaño óptimo del lote:

$$-(h+w)\frac{w^2Q^2}{(h+w)^2} + wQ^2 = 2AD \Rightarrow Q_0 = \sqrt{\frac{2AD(h+w)}{hw}}$$

Si se sutituye el valor de Q_0 en (1.5), se obtiene el nivel de inventario óptimo:

$$S_0 = \frac{w}{h+w} Q_0 = \sqrt{\frac{2wAD}{h(h+w)}}$$

En este punto ya se puede calcular el coste mínimo del sistema de inventario:

$$C_0 = C(S_0, Q_0) = h\frac{S_0^2}{2Q_0} + w\frac{(Q_0 - S_0)^2}{2Q_0} + A\frac{D}{q_0} = ... = \sqrt{\frac{2hwAD}{h+w}}$$

El periodo de gestión óptimo es:

$$T_0 = \frac{Q_0}{D} = \frac{1}{D}\sqrt{\frac{2AD(h+w)}{hw}} = \sqrt{\frac{2A(h+w)}{hwD}}$$

El punto de reposición óptimo es:

$$s_0 = S_0 - Q_0 = \frac{w}{h+w}Q_0 - Q_0 = -\frac{h}{h+w}Q_0 = -\sqrt{\frac{2hAD}{w(h+w)}}$$

El periodo óptimo en el que hay stock es:

$$T_1^0 = \frac{T_0 S_0}{Q_0} = \frac{T_0 \frac{w}{h+w} Q_0}{Q_0} = T_0 \frac{w}{h+w} = \sqrt{\frac{2wA}{h(h+w)D}}$$

Y por último, el periodo óptimo en el que hay roturas es:

$$T_2^0 = \frac{(Q_0 - S_0)}{Q_0} T_0 = \frac{(Q_0 - \frac{w}{h+w} Q_0)}{Q_0} T_0 = \frac{h}{h+w} T_0 = \sqrt{\frac{2hA}{w(h+w)D}}$$

En este capítulo se ha explicado el modelo EOQ sin rotura y con rotura, y se ha calculado la política de inventario óptima y el coste mínimo asociado para ambos casos. En los próximos, se van a estudiar y desarrollar modelos de gestión de inventarios considerando la hipótesis de que el pago de la cantidad solicitada puede retrasarse un cierto periodo de tiempo preestablecido.

2

Modelo EOQ con retraso en los pagos

Una hipótesis fundamental del modelo EOQ es que se supone que el pago al proveedor se debe realizar en el instante en que la mercancía llega al almacén. No obstante, puede darse la situación de que el proveedor permita que el cliente pague el lote dentro de un periodo de tiempo posterior a su entrega. Es decir, existe un retraso en el pago. En esta situación, se dice que la empresa sigue una política de crédito comercial.

Normalmente, las empresas que demoran el pago de los productos intentan amortizar su deuda con el interés que le reportan los beneficios de la venta de dichos artículos durante el periodo permisible de pago. Es decir, las ganancias obtenidas por la venta de los productos se ingresan en un banco, el cual le ofrece un interés a la empresa. Llegados a este punto, pueden darse dos situaciones: la empresa consigue pagar su deuda antes de acabar el plazo o, por el contrario, no consigue reunir la cantidad suficiente para sufragar el pago y debe pedir un préstamo al banco y pagar sus intereses. En esta sección vamos a estudiar modelos de inventario que trabajan con este último enfoque.

2.1. Modelo de inventario bajo retraso permitido en los pagos desarrollado por Goyal (1985)

Comenzamos analizando el modelo de gestión de inventario con retraso permitido en los pagos propuesto por S. K. Goyal en el año 1985. Goyal desarrolló un sistema de inventario de tamaño del lote considerando que los artículos que llegan al almacén del vendedor no tienen que ser pagados en ese preciso instante. Es decir, el proveedor concede un periodo de tiempo $M > 0$ en el cual la empresa debe abonar el coste de la compra de los artículos antes de que éste finalice. Durante ese periodo M, el proveedor no carga intereses a la empresa. Una vez finalizado el plazo del pago, el vendedor debe pagar el precio de los items. Para aquellos artículos que no haya vendido, solicita al banco un capital para cubrir el coste de compra de dichos artículos.

La demanda D del artículo es constante durante todo el año. No se permiten roturas y el periodo de retardo es nulo. Se considera que el tamaño del lote solicitado es $Q = DT$. El precio de compra por artículo se denota por p, mientras que v es el precio de venta por unidad. Durante el periodo de crédito M, los beneficios recaudados por las ventas se depositan en un banco, generando unos intereses obtenidos con un tipo de interés I_e. Una vez finalizado el periodo M, se debe abonar la deuda. Si no se han vendido todos los artículos, se debe solicitar un préstamo a un interés I_p para pagar el coste de los artículos $pD(T-M)$ que han quedado en stock sin vender. Consideremos como es habitual que el interés cobrado I_e del banco es menor o igual que el interés pagado I_p al banco.

A continuación, vamos a especificar los diferentes costos que intervienen en la gestión del inventario. Así, se calculan las componentes que intervienen en las funciones objetivo del problema de inventario tanto para el caso de que $M \leq T$ como si $T < M$:

(1) Coste de mantenimiento por unidad de tiempo es $C_1 = hI_1 = h\frac{\frac{DT^2}{2}}{T} = \frac{DTh}{2}$.
(2) Coste de reposición es $C_3 = \frac{A}{T}$.

A continuación, vamos a determinar el interés que se puede ganar y el interés que se debe pagar, teniendo en cuenta los artículos vendidos en el momento en que se debe realizar el pago de los artículos al proveedor. Para ello, consideraremos dos casos: $M \leq T$ y $T < M$ (ver Figuras 2.1 y 2.2 respectivamente), según sea el periodo M permitido para el pago y la duración del periodo de gestión T del inventario .

(3) Coste de intereses a pagar por tener artículos en stock en el instante M. Los beneficios que se obtienen por la venta de artículos antes de finalizar M, se usan para generar intereses y aumentar ganancias. Sin embargo, tras acabar dicho periodo, los items no vendidos que quedaron en el stock deben ser financiados con un interés del I_p.
- Caso I (ver Figura 2.1): $M \leq T$. El nivel de inventario en el instante M es $D(T-M)$ y se debe pagar un interés I_p por cada artículo que queda en stock sin vender durante el periodo $T-M$. Así, se tiene que:
  El interés a pagar en un ciclo de inventario $= Area(B) \cdot pI_p = \frac{D(T-M)^2 pI_p}{2}$
  Por tanto, el interés a pagar por unidad de tiempo $= \frac{Area(B)}{T} \cdot pI_p = \frac{D(T-M)^2 pI_p}{2T} = \frac{D(T^2-2TM+M^2)pI_p}{2T} = \frac{DTpI_p}{2} + \frac{DM^2 pI_p}{2T} - DMpI_p$
- Caso II (ver Figura 2.2): $T < M$. No se paga interés porque se ha vendido todo el producto antes de que se cumpla el periodo de pago M.

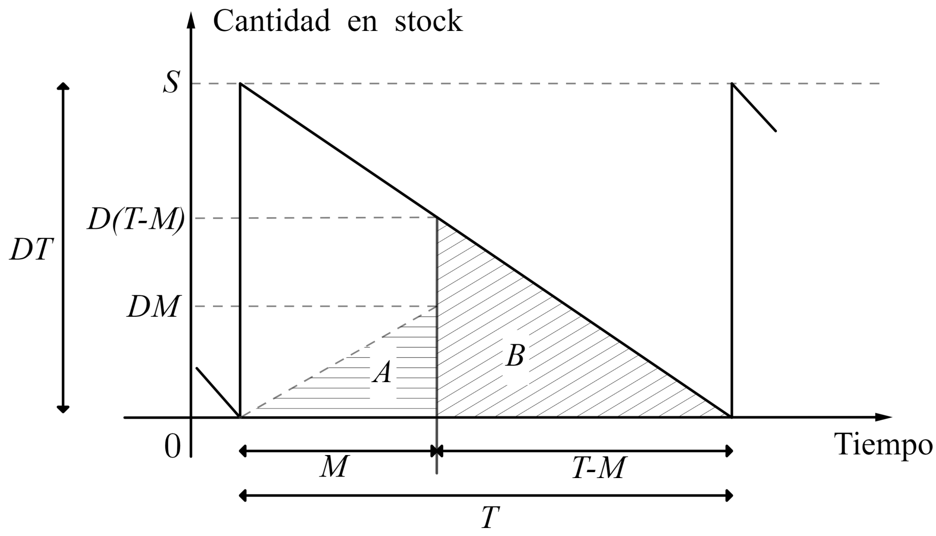

Figura 2.1. Evolución del nivel de inventario cuando $M \leq T$.

(4) Ingreso por los intereses ganados durante el periodo de liquidación permitido. Si $M \leq T$, la cantidad vendida hasta el instante M es DM, luego la cantidad de dinero obtenida por las ventas es vDM (ver Figura 2.1) y si $T < M$, esa cantidad es vDT (ver Figura 2.2). Luego, el interés ganado durante M se calcula a continuación:

- Caso I (ver Figura 2.1): $M \leq T$.
  El interés ganado en un ciclo es $Area(A) \cdot vI_e = \frac{DM^2 vI_e}{2}$
  Por tanto, el interés ganado por unidad de tiempo es $\frac{Area(A)}{T} \cdot vI_e = \frac{DM^2 vI_e}{2T}$
- Caso II (ver Figura 2.2): $T < M$.
  El interés ganado en un ciclo es $[Area(A) + Area(B)] \cdot vI_e = (\frac{DT^2}{2} + DT(M-T))vI_e = \frac{DT^2 vI_e}{2} + DT(M-T)vI_e = DTvI_e(\frac{T}{2} + M - T) = DTvI_e(M - \frac{T}{2})$
  Por tanto, el interés ganado por unidad de tiempo es $\frac{Area(A)+Area(B)}{T} \cdot vI_e = DvI_e(M - \frac{T}{2})$

Ahora, se deben calcular las políticas óptimas para ambos casos. El objetivo es obtener los mayores beneficios posibles en un periodo de gestión determinado.

Política óptima cuando $M \leq T$

Consideramos los ingresos obtenidos y los costes asociados por unidad de tiempo para construir la función objetivo. En M, se ha recaudado una cantidad equivalente a $v\frac{DM}{T} + \frac{DM^2}{2T}vI_e$, generada por las ventas de los artículos durante ese

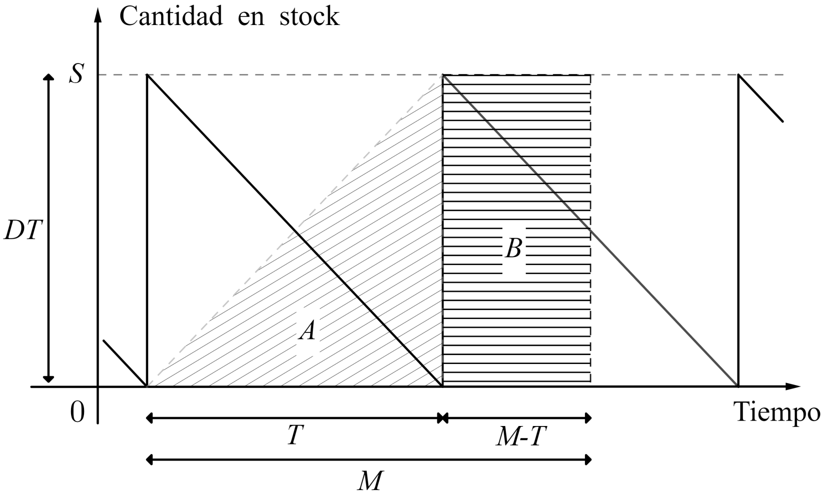

Figura 2.2. Evolución del nivel de inventario cuando $T < M$.

periodo y los intereses que se han ido acumulando. No obstante, en M tocaría abonar $p\frac{Q}{T} = pD$ que es el importe total del lote . Se puede pagar $p\frac{DM}{T}$, que es el coste de compra correspondiente a los artículos ya vendidos, usando el dinero obtenido por las ventas de los mismos, y para pagar el coste del resto de items que permanecen en stock se pide un crédito cuyo importe asciende a $p\frac{D(T-M)}{T}$, lo cual supone el coste de compra del resto de artículos no vendidos. Tras saldar la deuda con el proveedor, el dinero que le queda a la empresa en M es $(v-p)\frac{DM}{T} + \frac{DM^2}{2T}vI_e$.

En el periodo de longitud $T - M$, las ventas del stock restante reportan unos ingresos de $v\frac{D(T-M)}{T}$. Sin embargo, se debe pagar por el precio de compra de estos artículos $p\frac{D(T-M)}{T}$ que fue subsanado con el crédito, además de los intereses que lleva consigo el préstamo, es decir, $\frac{D(T-M)^2}{2T}pI_p$. Por tanto, el dinero que queda al final de este periodo es $(v-p)\frac{D(T-M)}{T} - \frac{D(T-M)^2}{2T}pI_p$.

Sumando los beneficios generados en ambos periodos y restando los costes asociados de mantenimiento y reposición, se tiene que la función de beneficio o ganancia total por unidad de tiempo es:

$$G = (v-p)\frac{DM}{T} + \frac{DM^2}{2T}vI_e + (v-p)\frac{D(T-M)}{T} - \frac{D(T-M)^2}{2T}pI_p - \frac{hDT}{2} - \frac{A}{T} =$$

$$= (v-p)D + \frac{DM^2}{2T}vI_e - \frac{D(T-M)^2}{2T}pI_p - \frac{hDT}{2} - \frac{A}{T} \tag{2.1}$$

Nótese que $(v-p)D$ es una constante, ya que no depende de la variable a optimizar que en este caso va a ser T. Por tanto, maximizar la función anterior es equivalente a maximizar la expresión sin contar con dicha constante, que a su vez es lo mismo que minimizar la siguiente función de coste total por unidad de tiempo:

$$C(T) = \frac{A}{T} + \frac{DTh}{2} + \frac{D(T-M)^2}{2T} pI_p - \frac{DM^2 vI_e}{2T} =$$

$$= \frac{2A + DM^2(pI_p - vI_e)}{2T} + \frac{DT}{2}(h + pI_p) - DMpI_p \quad (2.2)$$

En resumen, el problema de inventario a resolver consiste en minimizar la función de coste dada por (2.2). Para encontrar la política óptima, derivamos la ecuación del costo total e igualamos a cero. Es decir:

$$\frac{\partial C(T)}{\partial T} = 0 \Rightarrow T_1^* = \sqrt{\frac{2A + DM^2(pI_p - vI_e)}{D(h + pI_p)}} \quad (2.3)$$

Nótese que se asume que $pI_p > vI_e$. A partir del ciclo de inventario óptimo, se obtienen el tamaño del lote óptimo

$$Q_1^* = DT_1^* = \sqrt{\frac{D(2A + DM^2(pI_p - vI_e))}{h + pI_p}} \quad (2.4)$$

y el coste mínimo total anual

$$C(T_1^*) = \sqrt{D[2A + DM^2(pI_p - vI_e)](h + pI_p)} - DMpI_p \quad (2.5)$$

Como resultado del retraso permitido en el pago de los artículos, el tamaño del lote dado por (2.4) es normalmente más alto que el tamaño del lote dado por el modelo clásico, que es:

$$Q_0 = \sqrt{\frac{2DA}{h + pI_p}}$$

Política óptima cuando $M > T$

En esta situación no tenemos intereses que pagar por artículos en el stock, ya que todos son vendidos antes de que se acabe el plazo M. Por tanto, los ingresos generados por ventas son iguales a $v\frac{Q}{T} = vD$ y se acumulan unos intereses extras por un importe de $DvI_e(M - \frac{T}{2})$. No obstante, al finalizar el periodo M, hay que saldar la deuda con el proveedor, abonando el precio del lote completo $p\frac{Q}{T} = pD$. Por tanto, el dinero restante a la empresa en M es $(v-p)D + DvI_e(M - \frac{T}{2})$. Si juntamos los beneficios generados con los costes asociados de mantenimiento y reposición, obtenemos la función de beneficio o ganancia total por unidad de tiempo:

$$G = (v-p)D + DvI_e(M - \frac{T}{2}) - \frac{hDT}{2} - \frac{A}{T} \tag{2.6}$$

Al igual que en el primer caso, $(v-p)D$ es una constante porque no depende de la variable T. Luego, maximizar la función de beneficio total es equivalente a maximizar la expresión que resulta de quitar el primer término, que a su vez es lo mismo que minimizar la siguiente función de coste total por unidad de tiempo:

$$C(T) = \frac{A}{T} + \frac{DTh}{2} - DvI_e(M - \frac{T}{2}) = \frac{A}{T} + \frac{DT}{2}(h + vI_e) - DMvI_e \tag{2.7}$$

El problema de inventario a resolver consiste en minimizar la función de coste dada por (2.7). Derivamos e igualamos a 0 para obtener el ciclo del inventario óptimo:

$$\frac{\partial C(T)}{\partial T} = 0 \Rightarrow T_2^* = \sqrt{\frac{2A}{D(h+vI_e)}} \tag{2.8}$$

A partir de este resultado, podemos calcular el tamaño del lote óptimo y el coste mínimo total anual:

$$Q_2^* = DT_2^* = \sqrt{\frac{2AD}{h+vI_e}} \tag{2.9}$$

y

$$C(T_2^*) = \sqrt{2DA(h+vI_e)} - DMvI_e \tag{2.10}$$

Notar que si $pI_p \geq vI_e \Rightarrow Q_2^* \geq Q_0$. También cabe destacar que el coste total anual para $T = M$ se puede obtener a partir de (2.2) ó (2.7).

Por tanto, para obtener la política óptima de inventario hay que seguir los siguientes pasos:

1. Determinar T_1^*. Si $T_1^* \geq M$, entonces obtener Q_1^* y $C(T_1^*)$ de (2.4) y (2.5), respectivamente, guardar esta posible solución e ir al paso 2. En otro caso, ir directamente al paso 2.
2. Determinar T_2^*. Si $T_2^* < M$, entonces evaluar Q_2^* y $C(T_2^*)$ de (2.9) y (2.10), respectivamente, guardar esta posible solución e ir al paso 3. En otro caso, ir directamente al paso 3.
3. Si $T_1^* < M$ y $T_2^* \geq M$, entonces calcular $C(M)$.
4. Comparar $C(T_1^*)$, $C(T_2^*)$, y $C(M)$. Seleccionar el ciclo de inventario T^* y el tamaño del lote asociado Q^* con menor costo anual total de entre los calculados en los pasos anteriores.

En lineas generales, este modelo de inventario con retraso permisible en los pagos conlleva una gran reducción en el costo total anual. Esto se debe a la posibilidad de retrasar el pago de la mercancía nueva sin ningún tipo de interés. A cambio, se produce un aumento no muy considerable en la duración del ciclo de inventario y en el tamaño del lote óptimo. Como se repone con un mayor número de artículos, el inventario se debe reponer con menor frecuencia. En la siguiente sección vamos a estudiar qué ocurre en un modelo de crédito comercial de estas características al permitir roturas.

2.2. Modelo de inventario con retraso en los pagos y rotura recuperable, por Chung y Huang (2009)

Pasamos a desarrollar el modelo de inventario con retraso permisible en los pagos y con rotura recuperable, elaborado por Kun-Jen Chung y Chao-Kuei Huang en 2009. Este modelo sigue el construido por Goyal en la sección anterior. Se permite pagar el importe del lote de reposición después del momento de la entrega, sin que suponga un interés extra, siempre y cuando se efectue el pago antes de finalizar un periodo M preestablecido por el proveedor. En este estudio, Chung y Huang añadieron la característica de que las roturas son permitidas y recuperables. Por tanto, existe un periodo de tiempo T_1 en el que hay stock disponible y otro periodo T_2 en el que hay rotura, luego $T = T_1 + T_2$. Mientras que Goyal solo incluía una variable en su problema de inventario, en este caso son dos variables las involucradas.

Se asume que la demanda del artículo es constante. El precio de compra por artículo se denota por p, mientras que v es el precio de venta por unidad. Mientras no se salde la deuda, los beneficios generados por las ventas durante el periodo M son depositados en el banco. Generan unos intereses con una tasa del I_e. Al final del periodo, se abona la deuda y se paga por los artículos en el inventario no vendidos con un cargo de interés del I_p. Se tiene en cuenta que $I_p \geq I_e$.

Vamos a calcular los componentes de la función de coste total por unidad de tiempo. Como antes, vamos a contemplar dos situaciones: una, donde el stock se acaba antes de pagar el lote ($T_1 < M$) y otra, donde hay que abonar el importe de la deuda antes de vender todo el stock ($M \leq T_1$). Tendremos una función de coste total para cada situación y algunas componentes cambiarán. Dichas componentes son:

(1) Coste de reposición es $\frac{A}{T} = \frac{A}{T_1+T_2}$.

(2) Coste de mantenimiento. La cantidad media en stock es $\frac{DT_1^2}{2T}$. Luego, el coste de mantenimiento por unidad de tiempo es $\frac{DT_1^2 h}{2T} = \frac{DT_1^2 h}{2(T_1+T_2)}$.

(3) Coste de rotura. La cantidad media de rotura es $\frac{DT_2^2}{2T}$. Luego, el coste de rotura por unidad de tiempo es $\frac{DT_2^2 w}{2T} = \frac{DT_2^2 w}{2(T_1+T_2)}$.

(4) Coste de los intereses a pagar debido a los artículos que quedan en stock en el instante M. Los beneficios obtenidos por ventas de items antes de finalizar M son utilizados para generar intereses. Cuando caduca el plazo de retraso en el pago, los artículos que siguen en el almacen deben ser financiados con un interés del I_p.
- Caso I (ver Figura 2.3): $M \leq T_1$. El nivel de stock cuando acaba el periodo M es $D(T_1 - M)$ y los intereses se cargan durante el periodo $T_1 - M$. El interés a pagar por unidad de tiempo es $\frac{D(T_1-M)^2 pI_p}{2(T_1+T_2)}$.
- Caso II (ver Figura 2.4): $T_1 < M$. El nivel de inventario al pagar la deuda es cero. Por tanto, no hay items por los que pagar con un interés extra y el coste por intereses a pagar por unidad de tiempo es nulo.

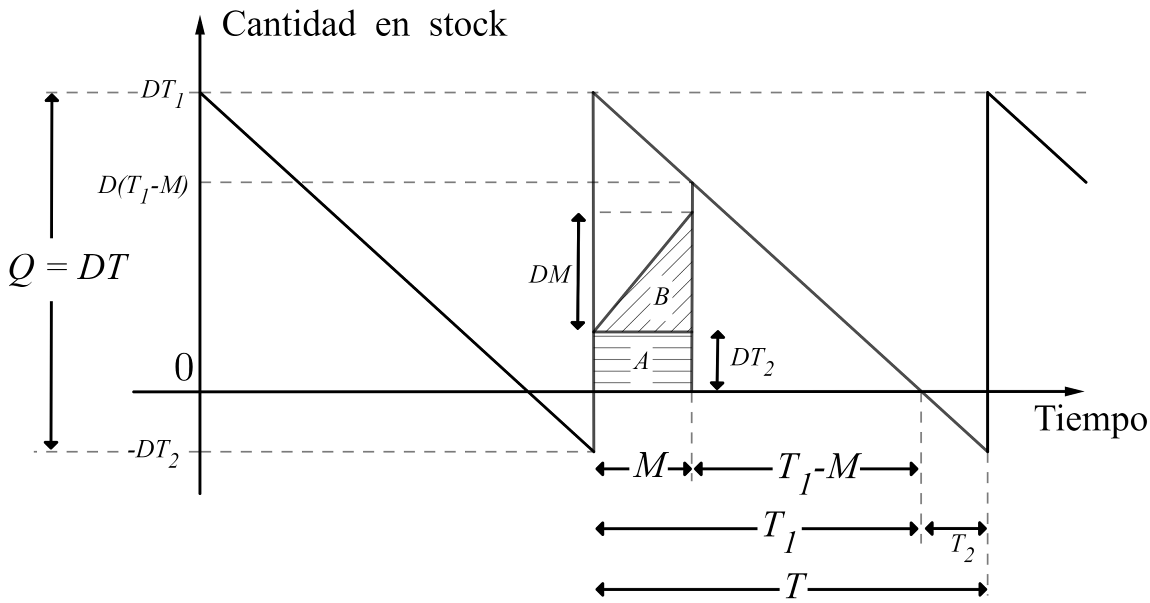

Figura 2.3. Evolución del nivel de inventario cuando $M \leq T_1$.

(5) Interés ganado durante el periodo permisible de pago. Al inicio del ciclo de inventario T, las ventas pendientes de satisfacer por rotura deben ser atendidas primero. Este número es igual a DT_2. Así, la ganancia máxima acumulada al comienzo del periodo T asciende a vDT_2. Por otra parte, el mayor valor de intereses que se pueden ganar dentro del periodo permisible

de pago M es vDM si $M \leq T_1$ (ver Figura 2.3) ó DT_1v si $T_1 < M$ (ver Figura 2.4). Luego, el interés ganado durante M es:

- Caso I (Fig. 2.3): $M \leq T_1$. El interés ganado por unidad de tiempo es:

$$\frac{Area(A) + Area(B)}{T} = \frac{DT_2MvI_e + \frac{DM^2vI_e}{2}}{T_1 + T_2}$$

- Caso II (Fig. 2.4): $T_1 < M$. El interés ganado por unidad de tiempo es:

$$\frac{Area(A) + Area(B) + Area(C)}{T} = \frac{DT_2MvI_e + \frac{DT_1^2vI_e}{2} + DT_1(M - T_1)vI_e}{T_1 + T_2}$$

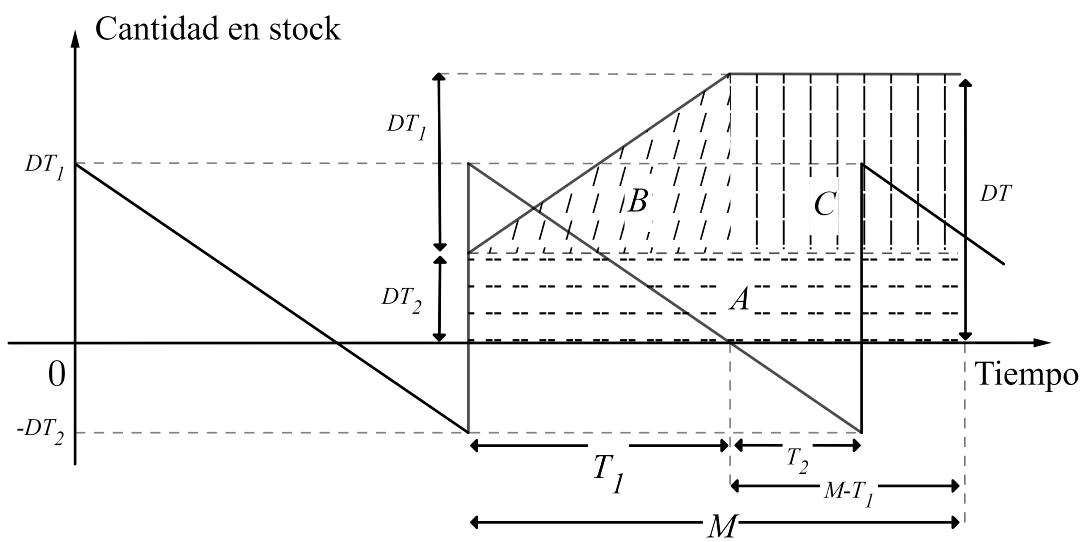

Figura 2.4. Evolución del nivel de inventario cuando $T_1 < M$.

Nótese que el interés ganado se restará a los otros costes en la función de coste total por unidad de tiempo porque representa un ingreso en lugar de un coste. Luego, la función de coste total por unidad de tiempo viene dada por:

$$C(T_1, T_2) = \begin{cases} C_1(T_1, T_2) & \text{si} \quad M \leq T_1 \\ C_2(T_1, T_2) & \text{si} \quad T_1 < M \end{cases} = \begin{cases} \frac{F_1(T_1, T_2)}{2(T_1 + T_2)} & \text{si} \quad M \leq T_1 \\ \frac{F_2(T_1, T_2)}{2(T_1 + T_2)} & \text{si} \quad T_1 < M \end{cases}$$

donde

$$F_1(T_1, T_2) = 2A + DT_1^2h + DT_2^2w + D(T_1 - M)^2pI_p - 2DT_2MvI_e - DM^2vI_e$$

$$F_2(T_1,T_2) = 2A + DT_1^2h + DT_2^2w - 2DT_2MvI_e - DT_1^2vI_e + 2DT_1(M-T_1)vI_e$$

con $T_1 \geq 0, T_2 \geq 0$ y $T_1 + T_2 = T > 0$. Observamos que para $T_1 = M$, se da que $C_1(M,T_2) = C_2(M,T_2)$.

A partir de este punto, se consideran que las funciones $C_1(T_1,T_2)$ y $C_2(T_1,T_2)$ están definidas en $T_1 \geq 0, T_2 \geq 0$ y $T_1 + T_2 > 0$. Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.1. *Las funciones $C_1(T_1,T_2)$ y $C_2(T_1,T_2)$ son convexas en $T_1 \geq 0, T_2 \geq 0$ y $T_1 + T_2 = T > 0$.*

Demostración:

Comenzamos viendo que $C_1(T_1,T_2)$ **es convexa** en $T_1 \geq 0, T_2 \geq 0$ y $T_1 + T_2 = T > 0$. Para ello, se demuestra que las derivadas segundas parciales son positivas y que la matriz Hessiana es semidefinida positiva en el dominio descrito anteriormente. La matriz Hessiana de la función $C_1(T_1,T_2)$ es la siguiente:

$$Hess\ C_1(T_1,T_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 C_1(T_1,T_2)}{\partial T_1^2} & \frac{\partial^2 C_1(T_1,T_2)}{\partial T_1 \partial T_2} \\ \frac{\partial^2 C_1(T_1,T_2)}{\partial T_2 \partial T_1} & \frac{\partial^2 C_1(T_1,T_2)}{\partial T_2^2} \end{bmatrix}$$

Se calculan las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial C_1(T_1,T_2)}{\partial T_1} = \frac{(T_1+T_2)[2DT_1h + 2D(T_1-M)pI_p] - F_1(T_1,T_2)}{2(T_1+T_2)^2} \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial^2 C_1(T_1,T_2)}{\partial T_1^2} = \frac{\Delta_{11}}{(T_1+T_2)^3} \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial C_1(T_1,T_2)}{\partial T_2} = \frac{(T_1+T_2)[2DT_2w - 2DMvI_e] - F_1(T_1,T_2)}{2(T_1+T_2)^2} \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial^2 C_1(T_1,T_2)}{\partial T_2^2} = \frac{\Delta_{22}}{(T_1+T_2)^3} \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial^2 C_1(T_1,T_2)}{\partial T_1 \partial T_2} = \frac{\partial^2 C_1(T_1,T_2)}{\partial T_2 \partial T_1} = \frac{\Delta_{12}}{(T_1+T_2)^3} \tag{2.15}$$

donde

$$\begin{gathered} \Delta_{11} = 2A + DT_2^2(h+w) + DT_2^2pI_p + DM^2(pI_p - vI_e) + 2DT_2M(pI_p - vI_e) > 0 \\ \Delta_{22} = 2A + D(h+w)T_1^2 + DT_1^2vI_e + D(T_1-M)^2(pI_p - vI_e) > 0 \\ \Delta_{12} = 2A - DT_1T_2(h+w) - DT_1T_2pI_p + DT_2M(pI_p - vI_e) - \\ -DT_1M(pI_p - vI_e) + DM^2(pI_p - vI_e) \end{gathered}$$

En efecto, la matriz Hessiana es semidefinida positiva ya que se verifican las condiciones

$$\frac{\partial^2 C_1(T_1,T_2)}{\partial T_1^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 C_1(T_1,T_2)}{\partial T_2^2} > 0$$

y

$$\left(\frac{\partial^2 C_1(T_1,T_2)}{\partial T_1^2}\right)\left(\frac{\partial^2 C_1(T_1,T_2)}{\partial T_1^2}\right) - \left[\frac{\partial^2 C_1(T_1,T_2)}{\partial T_1 \partial T_2}\right]^2 =$$
$$= \frac{\Delta_{11}\Delta_{22} - (\Delta_{12})^2}{(T_1+T_2)^6} = \frac{\Delta_1}{(T_1+T_2)^6} > 0$$

donde

$$\Delta_1 = 2AD(h+w)(T_1^2+T_2^2) + 2ADpI_p(T_1^2+T_2^2) + D^2(pI_p-vI_e)(h+w)T_2^2M^2+$$
$$+D^2(pI_p-vI_e)(h+w)T_1^2M^2+2D^2vI_e(pI_p-vI_e)T_1T_2M^2+4AD(h+w)T_1T_2+4ADpI_pT_1T_2+$$
$$+D^2vI_e(pI_p-vI_e)T_2^2M^2+D^2vI_e(pI_p-vI_e)T_1^2M^2+2D^2(pI_p-vI_e)(h+w)T_1T_2M^2 > 0$$

Por tanto, $C_1(T_1,T_2)$ es convexa en $T_1 \geq 0, T_2 \geq 0$ y $T_1 + T_2 = T > 0$.

Por otra parte, para comprobar que $C_2(T_1,T_2)$ es convexa en $T_1 \geq 0, T_2 \geq 0$ y $T_1 + T_2 = T > 0$, se repite el mismo proceso. Se comprueba que su matriz Hessiana es semidefinida positiva en el dominio anterior. La matriz Hessiana de la función $C_2(T_1,T_2)$ viene dada por:

$$Hess\ C_2(T_1,T_2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 C_2(T_1,T_2)}{\partial T_1^2} & \frac{\partial^2 C_2(T_1,T_2)}{\partial T_1 \partial T_2} \\ \frac{\partial^2 C_2(T_1,T_2)}{\partial T_2 \partial T_1} & \frac{\partial^2 C_2(T_1,T_2)}{\partial T_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{\Delta}_{11}}{(T_1+T_2)^3} & \frac{\bar{\Delta}_{12}}{(T_1+T_2)^3} \\ \frac{\bar{\Delta}_{12}}{(T_1+T_2)^3} & \frac{\bar{\Delta}_{22}}{(T_1+T_2)^3} \end{bmatrix}$$

donde

$$\bar{\Delta}_{11} = 2A + D(h+w)T_2^2 + DT_2^2vI_e > 0$$
$$\bar{\Delta}_{22} = 2A + D(h+w)T_1^2 + DT_1^2vI_e > 0$$
$$\bar{\Delta}_{12} = 2A - D(h+w)T_1T_2 - DT_1T_2vI_e$$

Se comprueba que su matriz Hessiana es semidefinida positiva en el dominio anterior. Por tanto, la función $C_2(T_1,T_2)$ es convexa en el dominio descrito.

■

Por el teorema anterior, la solución óptima (T_1^*, T_2^*) de $C_1(T_1,T_2)$ se puede determinar a partir de las ecuaciones siguientes:

$$\frac{\partial C_1(T_1,T_2)}{\partial T_1} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial C_1(T_1,T_2)}{\partial T_2} = 0$$

Desarrollando las dos ecuaciones anteriores, obtenemos la siguiente relación:

$$T_2^* = \frac{T_1^*(h + pI_p) - M(pI_p - vI_e)}{w} \tag{2.16}$$

Definimos $\bar{C}_1(T_1) = C_1(T_1, T_2^*)$. Luego T_1^* es la solución óptima de $\bar{C}_1(T_1)$. Sustituyendo T_2 por T_2^* en $C_1(T_1, T_2)$, tenemos:

$$\begin{aligned}\bar{C}_1(T_1) = &\frac{1}{2[(w + h + pI_p)T_1 - (pI_p - vI_e)M]}\cdot \\ &\cdot (2Aw + DT_1^2hw + D[(h + pI_p)T_1 - (pI_p - vI_e)M]^2 - \\ &- 2DMvI_e[(h + pI_p)T_1 - (pI_p - vI_e)M] + Dw(T_1 - M)^2pI_p - DwM^2vI_e)\end{aligned}$$

El teorema anterior implica que $\bar{C}_1(T_1)$ es convexa en $T_1 \geq 0$. Si derivamos su expresión igualándola a 0 y despejamos T_1, obtenemos:

$$T_1^* = \frac{M(pI_p - vI_e)}{h + w + pI_p} \pm \left[\frac{M^2(pI_p - vI_e)^2}{(h + w + pI_p)^2} + \frac{\frac{2wA}{D} + M^2(pI_p - vI_e)[w - (pI_p - vI_e)]}{(h + pI_p)(h + w + pI_p)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Si tomamos la opción con la raíz negativa y sustituimos en la ecuación (2.16), obtenemos que $T_2^* < 0$, lo que es una contradicción porque estamos trabajando con funciones convexas en $T_2 \geq 0$. Por tanto, tomamos T_1^* con la raíz positiva. De hecho, se tiene:

$$\frac{\partial \bar{C}_1(T_1)}{\partial T_1} \begin{cases} < 0 & \text{si} \quad T_1 < T_1^* \\ = 0 & \text{si} \quad T_1 = T_1^* \\ > 0 & \text{si} \quad T_1 > T_1^* \end{cases} \tag{2.17}$$

Concluimos confirmando que $\bar{C}_1(T_1)$ es decreciente en $(0, T_1^*]$ y creciente en $[T_1^*, \infty)$. Ahora vamos a hallar la solución óptima $(\bar{T}_1^*, \bar{T}_2^*)$ de la función $C_2(T_1, T_2)$. Procedemos igual que antes. Calculamos las derivadas parciales de la función $C_2(T_1, T_2)$ con respecto T_1 y T_2, las igualamos entre sí y desarrollamos. Se obtiene la siguiente relación entre $\bar{T}_1^*$ y $\bar{T}_2^*$:

$$\bar{T}_2^* = \frac{\bar{T}_1^*(h + vI_e)}{w} \tag{2.18}$$

Definimos $\bar{C}_2(T_1) = C_2(T_1, \bar{T}_2^*)$. Luego $\bar{T}_1^*$ es la solución óptima de $\bar{C}_2(T_1)$. Sustituyendo T_2 por $\bar{T}_2^*$ en $C_2(T_1, T_2)$, tenemos:

$$\bar{C}_2(T_1) = \frac{1}{2(h + w + vI_e)T_1} \cdot (2wA + DhwT_1^2 + D(h + vI_e)T_1^2 -$$

$$-2D(h + vI_e)T_1MvI_e - DwT_1^2vI_e - 2DwT_1(M - T_1)vI_e)$$

El teorema anterior implica que $\bar{C}_2(T_1)$ es convexa en $T_1 \geq 0$. Si derivamos su expresión igualándola a 0 y despejamos T_1, obtenemos:

$$\bar{T}_1^* = \left(\frac{2wA}{D(h+vI_e)(w+h+vI_e)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Luego:

$$\frac{\partial \bar{C}_2(T_1)}{\partial T_1} \begin{cases} < 0 & \text{si} \quad T_1 < \bar{T}_1^* \\ = 0 & \text{si} \quad T_1 = \bar{T}_1^* \\ > 0 & \text{si} \quad T_1 > \bar{T}_1^* \end{cases} \tag{2.19}$$

Por tanto, decimos que $\bar{C}_2(T_1)$ es decreciente en $(0, \bar{T}_1^*]$ y creciente en $[\bar{T}_1^*, \infty)$. Tenemos:

$$\bar{C}(T_1) = \begin{cases} \bar{C}_1(T_1) & \text{si} \quad T_1 \geq M \\ \bar{C}_2(T_1) & \text{si} \quad T_1 \leq M \end{cases} \tag{2.20}$$

y definimos como T^* la solución óptima de $\bar{C}(T_1)$. La estudiamos para los dos casos que pueder darse:

- Si $T^* \geq M$, entonces $(T^*, \frac{(h+pI_p)T^* - (pI_p - vI_e)M}{w})$ es la solución óptima de $C(T_1, T_2)$.
- Si $T^* \leq M$, entonces $(T^*, \frac{(h+vI_e)T^*}{w})$ es la solución óptima de $C(T_1, T_2)$.

En siguiente lugar, definimos:

$$\Delta = \frac{DM^2(h+vI_e)(w+h+vI_e)}{2w} - A$$

Se propone el siguiente lema:

Lema 1: $T_1^* \geq M$ sí, y solo sí, $\Delta \leq 0$. En efecto:

$$\begin{aligned} T_1^* \geq M \iff & \frac{(pI_p - vI_e)^2 M^2}{(w+h+pI_p)^2} + \frac{\frac{2wA}{D} + (pI_p - vI_e)[w - (pI_p - vI_e)]M^2}{(H+pI_p)(w+h+pI_p)} \geq \\ & \geq \frac{M^2(w+h+vI_e)^2}{(w+h+pI_p)^2} \\ & \iff (pI_p - vI_e)^2 M^2 (h+pI_p) + \frac{2wA}{D}(w+h+pI_p) + \\ & + (pI_p - vI_e)[w - (pI_p - vI_e)]M^2(w+h+pI_p) \geq \\ & \geq M^2(w+h+vI_e)^2(h+pI_p) \\ & \iff \frac{2wA}{D}(w+h+pI_p) \geq M^2(w+h+vI_e)^2(h+pI_p) - \\ & - w(pI_p - vI_e)M^2(w+h+pI_p) - w(pI_p - vI_e)^2 M^2 = \\ & \iff 0 \geq \frac{DM^2(h+vI_e)(w+h+vI_e)}{2w} - A \iff 0 \geq \Delta \end{aligned}$$

Ahora bien, el lema anterior, la convexidad de $\bar{C}_1(T_1)$ y la ecuación $\frac{\partial \bar{C}_2(T_1)}{\partial T_1}$ implican lo siguiente:

- Si $\Delta > 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{C}_1(M)}{\partial T_1} > 0$ y $\frac{\partial \bar{C}_2(M)}{\partial T_1} > 0$.
- Si $\Delta < 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{C}_1(M)}{\partial T_1} < 0$ y $\frac{\partial \bar{C}_2(M)}{\partial T_1} < 0$.
- Si $\Delta = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{C}_1(M)}{\partial T_1} = 0$ y $\frac{\partial \bar{C}_2(M)}{\partial T_1} = 0$.

Si nos ayudamos de este resultado, podemos demostrar el siguiente teorema que nos dará la solución óptima T^* para la situación en la que se encuentre el sistema:

Teorema 2.2. *1. Si $\Delta > 0 \Rightarrow T^* = \bar{T}_1^*$. Luego $(\bar{T}_1^*, \frac{(h+vI_e)}{w}\bar{T}_1^*)$ es la solución óptima de $C(T_1, T_2)$.*

2. Si $\Delta < 0 \Rightarrow T^* = T_1^*$. Luego $(T_1^*, \frac{(h+pI_p)T_1^* - (pI_p - vI_e)M}{w})$ es la solución óptima de $C(T_1, T_2)$.

3. Si $\Delta = 0 \Rightarrow T^* = T_1^* = \bar{T}_1^* = M$. Luego $(M, \frac{(h+vI_e)}{w}M)$ es la solución óptima de $C(T_1, T_2)$.

Demostración:

1. Si $\Delta > 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{C}_1(M)}{\partial T_1} > 0$ y $\frac{\partial \bar{C}_2(M)}{\partial T_1} > 0$. Luego $\bar{C}(T_1)$ tiene el valor mínimo en M cuando $T_1 \geq M$ y en $\bar{T}_1^*$ cuando $T_1 < M$. Como $\bar{C}_1(M) = \bar{C}_2(M) = \bar{C}(M)$ y $\bar{C}_1(M) > \bar{C}_2(\bar{T}_1^*) = \bar{C}(\bar{T}_1^*)$, $\bar{C}(T_1)$ tiene el valor mínimo en $\bar{T}_1^*$ con $T_1 \geq 0$. Como consecuencia, $T^* = \bar{T}_1^*$ y $(\bar{T}_1^*, \frac{(h+vI_e)}{w}\bar{T}_1^*)$ será la solución óptima.
2. Si $\Delta < 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{C}_1(M)}{\partial T_1} < 0$ y $\frac{\partial \bar{C}_2(M)}{\partial T_1} < 0$. Luego $\bar{C}(T_1)$ tiene el valor mínimo en T_1^* cuando $T_1 \geq M$ y en M cuando $T_1 < M$. Como $\bar{C}_1(M) = \bar{C}_2(M) = \bar{C}(M)$ y $\bar{C}_2(M) > \bar{C}_1(T_1^*) = \bar{C}(T_1^*)$, $\bar{C}(T_1)$ tiene el valor mínimo en T_1^* con $T_1 \geq 0$. Como consecuencia, $T^* = T_1^*$ y $(T_1^*, \frac{(h+pI_p)T_1^* - (pI_p - vI_e)M}{w})$ será la solución óptima.
3. Si $\Delta = 0 \Rightarrow \frac{\partial \bar{C}_1(M)}{\partial T_1} = 0$ y $\frac{\partial \bar{C}_2(M)}{\partial T_1} = 0$. Como $\bar{C}_1(M) = \bar{C}_2(M) = \bar{C}(M)$, $\bar{C}(T_1)$ tiene el valor mínimo en M y $T^* = T_1^* = \bar{T}_1^* = M$. Luego $(M, \frac{(h+vI_e)}{w}M)$ será la solución óptima.

■

Hemos encontrado la política óptima para el modelo de inventario bajo condiciones de existencia de roturas recuperables y retraso permitido en el pago del lote en función del periodo permisible de retraso en el pago M y el intervalo de tiempo T_1 en el que hay stock disponible.

En este capítulo, hemos estudiado dos modelos de gestión del inventario EOQ con la característica de que el pago por el lote puede retrasarse, sin permitir roturas o con existencia de ellas. En la siguiente parte de este trabajo, se van a estudiar otros modelos que analizan el nivel de inventario teniendo en cuenta que los artículos pueden estropearse o deteriorarse a medida que pasa el tiempo, lo cual influye en la cantidad de artículos en stock y, por tanto, en el coste de la gestión del inventario.

3

Modelo EOQ con deterioro de los artículos

Una hipótesis que se repite en la mayoría de modelos de gestión de inventarios es que el stock se agota exclusivamente por la demanda de los clientes, es decir, por las ventas efectuadas. Para estos productos, no se tiene en consideración los efectos que puede tener, en los materiales o artículos del inventario, la influencia de otros elementos o fenómenos como el tiempo. Esta hipótesis es válida para empresas o negocios que trabajen con productos no perecederos, como pueden ser objetos de acero o cristal, ordenadores, móviles, juguetes, etc.

Existen, no obstante, numerosos tipos de inventarios que están sujetos a cierto agotamiento por fenómenos diferentes a la demanda. Encontramos, por ejemplo, el deterioro progresivo de los productos como frutas, verduras, hortalizas, etc, muy común en empresas alimenticias debido a la naturaleza perecedera de los alimentos. Por otra parte, organizaciones que trabajen con gasolina, alcohol, productos químicos u otros líquidos altamente volátiles similares, lidian con el problema de la posible disminución de las cantidades almacenadas debido a los efectos de la evaporación, lo cual puede suponer una pérdida constante de fluidos. Por último, puede darse también que, con el paso del tiempo, los mismos objetos pierden potencial y/o utilidad, deteriorándose de forma gradual (véase en componentes electrónicos o sustancias radioactivas).

En este capítulo, para hacer referencia al agotamiento de productos almacenados mediante los fenónemos descritos anteriormente, lo llamaremos **sistema de inventario con un proceso de deterioro de los artículos**. A continuación, se expone uno de los primeros trabajos relativos al estudio de sistemas de inventario con items que pueden deteriorarse con el tiempo.

3.1. Modelo de inventario con deterioro exponencial desarrollado por Ghare y F. Schrader (1963)

En esta sección, se analiza el trabajo realizado por Ghare y F. Scharader sobre un modelo de inventario bajo condiciones de deterioro exponencial.

La hipótesis fundamental de este modelo es que el inventario almacenado se agota por la combinación de la demanda D de los clientes, la cual se considera constante, y los efectos del deterioro de los artículos. No se permiten roturas y la reposición es instantánea. Los artículos deteriorados no son reemplazados ni reparados durante el periodo de gestión T. Por otra parte, para el desarrollo de este modelo de inventario, y de cualquier otro en el que se traten con productos susceptibles a deteriorarse con el paso del tiempo, se requiere del parámetro θ, que representa el ratio de deterioro de los artículos por unidad de tiempo.

Como ya se ha explicado, el inventario se agota por dos vías: las demandas y el deterioro, que ocurren de forma simultánea. Por este motivo, en el sistema de tamaño del lote con deterioro se define la siguiente ecuación diferencial que rige el nivel de inventario $I(t)$ respecto al tiempo:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\theta I(t) - D(t) \tag{3.1}$$

Si consideramos que la demanda es constante, es decir, $D(t) = D$, con D constante, entonces la ecuación diferencial (3.1) queda de la siguiente forma:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\theta I(t) - D \tag{3.2}$$

Para resolverla, podemos denotar $y = I(t)$. Sustituyendo en la ecuación diferencial, nos queda la ecuación lineal $y' = -\theta y - D$. Para encontrar una solución de la misma, primero se calcula la solución homogénea y_H.

$$y' = -\theta y \iff \int \frac{dy}{y} = -\theta \int dt \iff lny = -\theta t + k \iff y_H = ce^{-\theta t} \tag{3.3}$$

En segundo lugar, se añade una solución particular de la completa usando para ello el método de variación de las constantes.

$$y_P = c(t)e^{-\theta t} \Rightarrow y_P' = c'(t)e^{-\theta t} - c(t)\theta e^{-\theta t}$$

Sustituyendo la solución particular en la ecuación lineal completa, se tiene:

$$c'(t)e^{-\theta t} - c(t)\theta e^{-\theta t} = -\theta c(t)e^{-\theta t} - D \iff c'(t) = -De^{\theta t} \iff$$
$$\iff c(t) = \int -De^{\theta t}dt = -D\frac{e^{\theta t}}{\theta}$$

Luego, la solución particular es:

$$y_P = -\frac{D}{\theta} \tag{3.4}$$

Una vez calculadas las soluciones homogénea (3.3) y particular (3.4), sumando ambas obtenemos la solución general siguiente:

$$y_G = ce^{-\theta t} - \frac{D}{\theta} \iff I(t) = ce^{-\theta t} - \frac{D}{\theta}$$

Falta por obtener el valor de la constante c. Para ello, se usa el dato de que el nivel de inventario al comienzo del periodo de gestión es el lote completo, es decir, $I(0) = Q$ ya que no se permiten roturas. Por tanto, $I(0) = ce^{-\theta\cdot 0} - \frac{D}{\theta} = c - \frac{D}{\theta} \Rightarrow c = Q + \frac{D}{\theta}$.

En definitiva, el nivel de inventario en un sistema de tamaño del lote con deterioro y demanda constante es:

$$I(t) = \left(Q + \frac{D}{\theta}\right) e^{-\theta t} - \frac{D}{\theta}, \quad 0 \leq t \leq T \tag{3.5}$$

Además, como $I(T)$ debe ser cero, es decir, el inventario al final del periodo de gestión T debe estar vacío, se tiene $I(T) = 0 \iff \left(Q + \frac{D}{\theta}\right) e^{-\theta T} - \frac{D}{\theta} = 0 \iff 1 + \frac{\theta Q}{D} = e^{\theta T} \iff Q = \frac{D}{\theta}(e^{\theta T} - 1)$.

Si sustituimos este resultado en (3.5), la función del nivel de inventario es:

$$I(t) = \frac{D}{\theta}(e^{\theta(T-t)} - 1), \quad 0 \leq t \leq T \tag{3.6}$$

En el caso de que la demanda no fuera constante, la solución de la ecuación diferencial sería diferente. La solución homogénea y_H se mantiene igual, pero la solución particular $y_P = c(t)e^{-\theta t}$ cambia debido a que la función $c(t)$ es diferente. Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso anterior, tras sustituir en la ecuación completa y despejar, se tiene:

$$c(t) = -\int_0^t D(z)e^{\theta z}dz \Rightarrow y_P = c(t)e^{-\theta t} = \left(-\int_0^t D(z)e^{\theta z}dz\right) e^{-\theta t}$$

La solución general queda de la forma siguiente:

$$I(t) = ce^{-\theta t} - e^{-\theta t}\int_0^t D(z)e^{\theta z}dz \tag{3.7}$$

Al igual que antes, obtenemos el valor de la constante c considerando el dato $I(0) = Q$. Por tanto, $Q = ce^{-\theta\cdot 0} - e^{-\theta\cdot 0}\int_0^0 D(z)e^{\theta z}dz = c$. Luego, el nivel de inventario en un sistema de tamaño del lote con deterioro y demanda no constante es:

$$I(t) = Qe^{-\theta t} - e^{-\theta t}\int_0^t D(z)e^{\theta z}dz, \quad 0 \leq t \leq T \tag{3.8}$$

Nótese que si consideramos que $D(t) = D$ en la ecuación (3.8) y resolvemos la integral, se obtiene la ecuación (3.5).

A continuación, calcularemos la política óptima para el modelo de inventario con deterioro, demanda constante y sin roturas. Para ello, se obtienen los costes que intervienen en la función objetivo:

(1) Coste de mantenimiento por unidad de tiempo.

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{h}{T}\int_0^T I(t)dt = \frac{h}{T}\int_0^T \left[\frac{D}{\theta}(e^{\theta(T-t)} - 1)\right] dt = \\ &= \frac{hD}{T\theta}\left[\left(\frac{e^{\theta T} - 1}{\theta}\right) - T\right] = \frac{hD}{T\theta^2}(e^{\theta T} - 1) - \frac{hD}{\theta} \end{aligned}$$

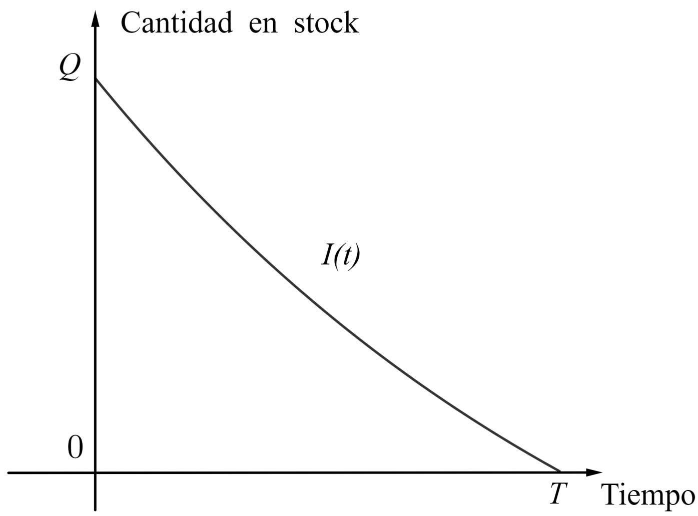

Figura 3.1. Evolución del nivel de inventario con deterioro.

(2) Coste de rotura es $C_2 = 0$ ya que no hay rotura.
(3) Coste de reposición es $C_3 = \frac{A}{T}$.
(4) Coste de compra por unidad de tiempo es $C_4 = \frac{pQ}{T} = \frac{pD}{T\theta}(e^{\theta T} - 1)$.
(5) Coste de deterioro. Existe un coste por artículo deteriorado y por unidad de tiempo, que se denota por λ. Para obtener el coste total de deterioro, debemos averiguar el número de artículos que se han deteriorado en un ciclo de inventario, lo cual se denota por $U(t)$. Nótese que el nivel de inventario $I(t)$ en cualquier instante t en el intervalo $[0, T]$ se puede calcular restando, al tamaño del lote Q, las unidades vendidas hasta ese instante y las unidades deterioradas hasta t. Esto se traduce en lo siguiente:

$$I(t) = Q - Dt - U(t)$$

Por tanto, se tiene:

$$U(t) = Q - Dt - I(t)$$

Esta es la expresión general de las unidades deterioradas en un periodo de longitud t. Las unidades deterioradas en $t = T$ son:

$$U(T) = Q - DT - I(0) = \frac{D}{\theta}(e^{\theta T} - 1) - DT$$

ya que $I(T) = 0$ como se explicó anteriormente. Por tanto, el coste total de deterioro por unidad de tiempo es $C_5 = \frac{\lambda U(T)}{T} = \frac{D\lambda}{\theta T}(e^{\theta T} - 1) - D\lambda$.

También tenemos en cuenta los ingresos obtenidos de las ventas por unidad de tiempo, los cuales son $\frac{vDT}{T} = vD$. Por tanto, el problema de inventario consiste en maximizar los beneficios o las ganancias por unidad de tiempo, que son los ingresos menos los costes o gastos, es decir:

$$G = vD - \frac{hD}{T\theta^2}(e^{\theta T} - 1) + \frac{hD}{\theta} - \frac{A}{T} - \frac{pD}{T\theta}(e^{\theta T} - 1) - \frac{D\lambda}{\theta T}(e^{\theta T} - 1) + D\lambda$$

No obstante, esto equivale a minimizar los costes. Para ello, eliminamos de la expresión anterior aquellos términos que son constantes, es decir, no dependen de la variable de decisión T. Se obtiene la siguiente función de costes:

$$C(T) = \frac{hD}{T\theta^2}(e^{\theta T} - 1) + \frac{A}{T} + \frac{D(p + \lambda)}{T\theta}(e^{\theta T} - 1) \tag{3.9}$$

Pasamos a buscar la solución óptima de la función de costes. Si la derivamos obtenemos:

$$C'(T) = \frac{hD}{\theta^2}\left[\frac{\theta e^{\theta T}T - (e^{\theta T} - 1)}{T^2}\right] - \frac{A}{T^2} + \frac{D(p + \lambda)}{\theta}\left[\frac{\theta e^{\theta T}T - (e^{\theta T} - 1)}{T^2}\right]$$

Igualando a cero la derivada se tiene:

$$\frac{hD}{\theta^2}e^{\theta T}(\theta T - 1) + \frac{D(p + \lambda)}{\theta}e^{\theta T}(\theta T - 1) = A - \frac{hD}{\theta^2} - \frac{D(p + \lambda)}{\theta} \tag{3.10}$$

La solución del ciclo de inventario óptimo T_0 se obtendría resolviendo la ecuación anterior. No obstante, se puede obtener una solución aproximada considerando el desarrollo en serie de $e^{\theta T}$ hasta el segundo término, es decir, $e^{\theta T} = 1 + \theta T + \frac{(\theta T)^2}{2}$. Sustituyendo en (3.10), se tiene:

$$\left(\frac{hD}{\theta^2}+\frac{D(p+\lambda)}{\theta}\right)\left(1+\theta T+\frac{(\theta T)^2}{2}\right)(\theta T-1)=A-\frac{hD}{\theta^2}-\frac{D(p+\lambda)}{\theta}$$

$$\left(\frac{hD}{\theta^2}+\frac{D(p+\lambda)}{\theta}\right)\left(\frac{(\theta T)^2}{2}+\frac{(\theta T)^3}{2}\right)=A$$

$$T^3[\theta hD+\theta^2 D(p+\lambda)]+T^2[hD+\theta D(p+\lambda)]=2A$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtendría una solución aproximada T_1 para el ciclo del inventario. Una vez tengamos el periodo de gestión óptimo T_0 (o bien T_1), la cantidad económica a pedir será:

$$Q_0=\frac{D}{\theta}(e^{\theta T_0}-1)$$

o bien la cantidad aproximada:

$$Q_1=\frac{D}{\theta}(e^{\theta T_1}-1)=\frac{D}{\theta}\left(1+\theta T_1+\frac{(\theta T_1)^2}{2}-1\right)=D\left(T_1+\frac{\theta T_1^2}{2}\right)$$

Por último, el coste mínimo C_0 asociado a la gestión del inventario cuando hay deterioro será:

$$C_0=C(T_0)=\frac{hD}{T_0\theta^2}(e^{\theta T_0}-1)+\frac{A}{T_0}+\frac{D(p+\lambda)}{T_0\theta}(e^{\theta T_0}-1)$$

y el coste aproximado C_1 es:

$$\begin{aligned}C(T_1)&=\frac{hD}{T_1\theta^2}(1+\theta T_1+\frac{(\theta T_1)^2}{2}-1)+\frac{A}{T_1}+\frac{D(p+\lambda)}{T_1\theta}(1+\theta T_1+\frac{(\theta T_1)^2}{2}-1)=\\&=hD(\frac{1}{\theta}+\frac{T_1}{2})+\frac{A}{T_1}+D(p+\lambda)(1+\frac{\theta T_1}{2})=\\&=[hD+D\theta(p+\lambda)]\left(\frac{1}{\theta}+\frac{T_1}{2}\right)+\frac{A}{T_1}\end{aligned}$$

Hemos concluido con la revisión del trabajo fundamental en cuanto a modelos de gestión de inventarios que tienen en cuenta el deterioro de los artículos durante el periodo de gestión. Se ha visto el desarrollo matemático que hay detrás de este concepto y cómo esto afecta a los costos de gestión del propio sistema.

A continuación, se va a estudiar un modelo de inventario con deterioro en los artículos que permite roturas, siendo recuperables en su totalidad.

3.2. Modelo de inventario con deterioro de los ítems y rotura recuperable desarrollado por Shah (1977)

En este capítulo, se revisa el modelo de inventario que desarrolló Shah (1977) en el que considera que los artículos sufren deterioro y se permite rotura.

Este modelo tiene características muy similares al estudiado en la sección 3.1, pero cuenta con algunas diferencias. Por un lado, ahora las roturas están permitidas y todas son recuperables. Por ello, el periodo de gestión T se divide en dos partes: un periodo T_1 en el que existe stock y otro T_2 en el que hay rotura. Se asume que $T = T_1 + T_2$. Por otra parte, Shah considera en su modelo que el ratio de deterioro sigue una distribución de probabilidad $\theta(t)$ que depende del instante dentro del ciclo de inventario. Por tanto, este modelo puede extenderse de forma general para cualquier función para el deterioro de los artículos que se comporte adecuadamente. No obstante, para esta memoria vamos a considerar que el deterioro de los items es constante, es decir, $\theta(t) = \theta$, al igual que hicieron Ghare y Schrader en su trabajo.

Antes de modelar el problema de inventario, analicemos lo que ocurre en un periodo de gestión. Inicialmente, en $T = 0$, llega un lote de Q unidades al almacén de la empresa, de las cuales $Q - S$ unidades se destinan a las roturas, dejando un balance de S unidades en el inventario inicial. Luego, el nivel de inventario decrece gradualmente debido a la demanda constante D y al deterioro de los items a un ratio de θ artículos por unidad de tiempo hasta finalizar el stock, lo cual ocurre en T_1. Por ello, $t = T_1$, el nivel de inventario es 0. Durante el intervalo $[T_1, T]$ ó en el periodo de longitud T_2 no hay inventario, luego no existe deterioro y la demanda se convierte en rotura.

La ecuación diferencial que describe la evolución del nivel de inventario $I(T)$ durante el ciclo de inventario viene dado por:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \begin{cases} -D - \theta I(t) & , 0 \leq t \leq T_1 \\ -D & , T_1 \leq t \leq T \end{cases} \tag{3.11}$$

Si resolvemos, la función del nivel de inventario queda:

$$I(t) = \begin{cases} \left(Q + \frac{D}{\theta}\right) e^{-\theta t} - \frac{D}{\theta} & , 0 \leq t \leq T_1 \\ D(T_1 - t) & , T_1 \leq t \leq T \end{cases} \tag{3.12}$$

Teniendo en cuenta que $I(T_1) = 0$, obtenemos el valor de Q, esto es, $Q = \frac{D}{\theta}(e^{\theta T_1} - 1)$. Si sustituimos Q en (3.12), la función del nivel de inventario con deterioro y rotura recuperable es:

$$I(t) = \begin{cases} \frac{D}{\theta}(e^{\theta(T_1-t)} - 1) & , \; 0 \le t \le T_1 \\ D(T_1 - t) & , \; T_1 \le t \le T \end{cases} \tag{3.13}$$

A continuación, vamos a calcular la política óptima para el modelo de inventario planteado con deterioro, demanda constante y roturas recuperables. El objetivo consiste en maximizar el beneficio por unidad de tiempo, siendo éste la diferencia entre ingresos y gastos. Los ingresos por unidad de tiempo son $\frac{vDT_1}{T}$ ya que las unidades vendidas son DT_1. Los costes que intervienen en la función objetivo son:

(1) Coste de mantenimiento por unidad de tiempo.

$$C_1 = \frac{h}{T} \cdot Area(A) = \frac{h}{T}\int_0^{T_1} I(t)dt = \frac{h}{T}\int_0^{T_1}\left[\frac{D}{\theta}(e^{\theta(T_1-t)} - 1)\right]dt =$$
$$= \frac{hD}{\theta T}\left[\left(\frac{e^{\theta T_1} - 1}{\theta}\right) - T_1\right] = \frac{hD}{\theta^2 T}(e^{\theta T_1} - 1) - \frac{hDT_1}{\theta T}$$

(2) Coste de rotura por unidad de tiempo.

$$C_2 = \frac{w}{T} \cdot Area(B) = \frac{w}{T}\int_{T_1}^{T} -I(t)dt = \frac{w}{T}\int_{T_1}^{T} -D(T_1 - t)dt =$$
$$= -\frac{wD}{T}\left[T_1 T - \frac{T^2}{2} - T_1^2 + \frac{T_1^2}{2}\right] = -wDT_1 + \frac{wDT}{2} + \frac{wDT_1^2}{2T}$$

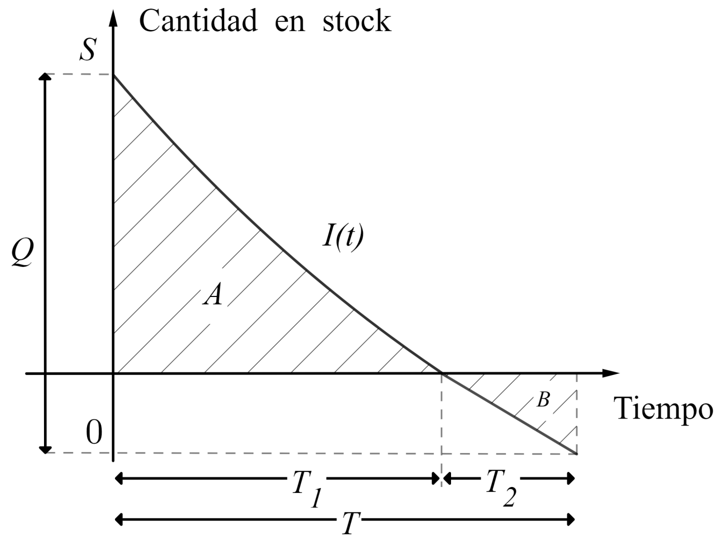

Figura 3.2. Evolución del nivel de inventario con deterioro y existencia de rotura.

(3) Coste de reposición es $C_3 = \frac{A}{T}$.
(4) Coste de compra por unidad de tiempo es $C_4 = \frac{pQ}{T} = \frac{pD}{\theta T}(e^{\theta T_1} - 1)$.
(5) Coste de deterioro. Considerando el coste de deterioro unitario por unidad de tiempo λ y el número de unidades deterioradas $U(T_1)$ durante el periodo de longitud T_1, que en este caso es $U(T_1) = S - DT_1 - I(T_1) = \frac{D}{\theta}(e^{\theta T_1} - 1) - DT_1$ ya que $I(T_1) = 0$, se tiene que el coste total de deterioro por unidad de tiempo es $C_5 = \frac{\lambda U(T_1)}{T} = \frac{\lambda D}{\theta T}(e^{\theta T_1} - 1) - \frac{\lambda DT_1}{T}$.

La maximización del beneficio equivale a minimizar la función de costes relacionada con la compra y gestión del inventario. Las variables de decisión del modelo, es decir, el tamaño del lote Q y el nivel inicial de inventario S se pueden expresar explícitamente en función de las variables T y T_1. Serán estas las que tomaremos como variables de la función de costes a minimizar, la cual viene dada por la expresión siguiente:

$$C(T, T_1) = \frac{hD}{\theta^2 T}(e^{\theta T_1} - 1) - \frac{hDT_1}{\theta T} - wDT_1 + \frac{wDT}{2} + \frac{wDT_1^2}{2T} + \frac{A}{T} + \\ + \frac{pD}{\theta T}(e^{\theta T_1} - 1) + \frac{\lambda D}{\theta T}(e^{\theta T_1} - 1) - \frac{\lambda DT_1}{T} - \frac{vDT_1}{T} \quad (3.14)$$

Para encontrar los valores óptimos T^* y T_1^*, realizamos las derivadas parciales:

$$\frac{\partial C(T, T_1)}{\partial T} = -\frac{hD}{\theta^2 T^2}(e^{\theta T_1} - 1) + \frac{hDT_1}{\theta T^2} + \frac{wD}{2} - \frac{wDT_1^2}{2T^2} - \frac{A}{T^2} - \\ - \frac{pD}{\theta T^2}(e^{\theta T_1} - 1) - \frac{\lambda D}{\theta T^2}(e^{\theta T_1} - 1) + \frac{(\lambda + v)DT_1}{T^2} \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial C(T, T_1)}{\partial T_1} = -\frac{hD}{\theta^2 T}(\theta e^{\theta T_1}) - \frac{hD}{\theta T} - wD + \frac{wDT_1}{T} + \\ + \frac{pD}{\theta T}(\theta e^{\theta T_1}) + \frac{\lambda D}{\theta T}(\theta e^{\theta T_1}) - \frac{(\lambda + v)D}{T} \quad (3.16)$$

Si igualamos las ecuaciones (3.15) y (3.16) a 0 y despejamos la variable T respectivamente, se obtiene:

$$-\frac{h(e^{\theta T_1} - 1)}{\theta^2} + \frac{hT_1}{\theta} - \frac{wT_1^2}{2} - \frac{A}{D} - \frac{(p + \lambda)(e^{\theta T_1} - 1)}{\theta} + (\lambda + v)T_1 = -\frac{w}{2}T^2 \quad (3.17)$$

$$-\frac{he^{\theta T_1}}{\theta} - h + wT_1 + (p + \lambda)e^{\theta T_1} - (\lambda + v) = wT \quad (3.18)$$

Despejando T de la ecuación (3.18), obtenemos:

$$T = \frac{1}{w}\left(-\frac{he^{\theta T_1}}{\theta} - h + wT_1 + (p+\lambda)e^{\theta T_1} - (\lambda + v)\right) =$$
$$= T_1 + \left(p + \lambda - \frac{h}{\theta}\right)\frac{e^{\theta} T_1}{w} - \frac{h + \lambda + v}{w} \quad (3.19)$$

Si sustituimos el valor que se obtiene en la expresión (3.17), se llega a la ecuación siguiente:

$$-\frac{h(e^{\theta T_1} - 1)}{\theta^2} + \frac{hT_1}{\theta} - \frac{wT_1^2}{2} - \frac{A}{D} - \frac{(p+\lambda)(e^{\theta T_1} - 1)}{\theta} + (\lambda + v)T_1 =$$
$$= -\frac{1}{2w}\left(-\frac{he^{\theta T_1}}{\theta} - h + wT_1 + (p+\lambda)e^{\theta T_1} - (\lambda + v)\right)^2$$

Si resolvemos la ecuación anterior expresada en términos de T_1, se obtiene el periodo óptimo T_1^* en el que hay stock. Por último, sustituyendo en (3.19), se consigue el valor óptimo T^* del ciclo de inventario.

Una vez calculados los valores T_1^* y T^* de las variables de decisión, se pueden hallar el resto de medidas. Por ejemplo, el coste mínimo asociado al problema de inventario se calcula sustituyendo los valores óptimos calculados en la función de costes, es decir, $C(T^*, T_1^*)$. Por otra parte, el tamaño del lote óptimo Q^* es igual a:

$$Q^* = \frac{D}{\theta}(e^{\theta T_1^*} - 1)$$

y el nivel inicial óptimo de inventario S^* es:

$$S^* = Q^* - DT_2^* = \frac{D}{\theta}(e^{\theta T_1^*} - 1) - D(T^* - T_1^*)$$

Finalizamos este capítulo habiendo visto los principales trabajos sobre modelos de gestión de inventarios relativos al deterioro de artículos, tanto con existencia de rotura como sin ella. En el siguiente capítulo de esta memoria, se estudian un par de modelos que combinan las dos características que se han visto por separado hasta el momento, esto es, deterioro y retraso permitido en en el pago de la reposición del lote de productos.

4

Modelos EOQ para artículos deteriorados con retraso permitido en los pagos

En los capítulos anteriores de esta memoria se han desarrollado algunos de los principales trabajos sobre modelos de gestión de inventarios en lo que concierne por un lado, a la política de crédito comercial y por otro, al deterioro de los artículos almacenados. En este capítulo, se van a estudiar algunos modelos matemáticos para la gestión de inventarios que son algo más relevantes, dado que combinan ambas características. Esto es, los sistemas planteados trabajan con artículos que sufren deterioro con el paso del tiempo, y además, el pago del lote recibido no se efectúa en el momento de la llegada de los productos al almacén de la empresa, sino que el proveedor fija un periodo de tiempo dentro del cual la empresa debe abonar el coste de compra del lote antes de su finalización.

Los trabajos que se van a presentar en este capítulo nos van a proporcionar una perspectiva más cercana a los sistemas reales de inventario, ya que las características que reflejan esta situación se encuentran en la mayoría de empresas e instituciones del tejido empresarial actual.

4.1. Modelo de inventario con deterioro y política de crédito comerical propuesto por Aggarwal y Jaggi (1995)

En esta sección, se analiza el trabajo realizado por Aggarwal y Jaggi en 1995, en el que desarrollan un modelo matemático para un sistema de inventario con deterioro y retraso permisible en el pago del lote solicitado.

Se considera que la demanda D durante el periodo de gestión T es constante y conocida. No se permiten roturas, no hay tiempo de retardo y la reposición es instantánea. Como en los trabajos presentados en el segundo capítulo, se consideran dos tipos de intereses a tener en cuenta: el interés a pagar I_p por unidad monetaria y por unidad de tiempo, si se pide un préstamo para cubrir el coste de aquellos productos que han quedado en stock sin vender tras la finalización del periodo de gracia M; y el interés a ganar I_e por unidad monetaria y por unidad de tiempo, que generan los ingresos obtenidos de las ventas durante el ciclo de inventario. Se asume que $I_e < I_p$ tal y como ocurre en la práctica. El precio de compra por artículo es p y el precio de venta es v. Por otra parte, al existir deterioro en los productos se debe considerar también en el modelo el ratio de deterioro θ de los artículos por unidad de tiempo.

En primer lugar, como nos encontramos en un sistema con deterioro, si recordamos del tercer capítulo, la función que describe el nivel de inventario en un cierto instante del intervalo $[0, T]$ cuando la demanda es constante y no hay rotura es:

$$I(t) = \frac{D}{\theta}(e^{\theta(T-t)} - 1), \quad 0 \leq t \leq T \tag{4.1}$$

y el tamaño del lote Q viene determinado por:

$$Q = \frac{D}{\theta}(e^{\theta T} - 1) \tag{4.2}$$

Además, hay que tener en cuenta el número de unidades deterioradas $U(T)$ en un periodo de gestión. Este número venía dado por la expresión siguiente:

$$U(T) = Q - DT = \frac{D}{\theta}(e^{\theta T} - 1) - DT$$

A continuación, vamos a determinar primero los costes relacionados con la gestión del inventario con independencia de la relación entre los valores de M y T. Así, se tiene:

(1) Coste de mantenimiento por unidad de tiempo.

$$C_1 = \frac{h}{T}\int_0^T I(t)dt = \frac{h}{T}\int_0^T \left[\frac{D}{\theta}(e^{\theta(T-t)} - 1)\right] dt =$$
$$= \frac{hD}{\theta T}\left[\left(\frac{e^{\theta T} - 1}{\theta}\right) - T\right] = \frac{hD}{\theta^2 T}(e^{\theta T} - 1) - \frac{hD}{\theta}$$

(2) Coste de rotura. Como no se permiten roturas, el coste de rotura por unidad de tiempo es $C_2 = 0$.
(3) Coste de reposición. El número medio de reposiciones es $\frac{1}{T}$, luego el coste de reposición es $C_3 = \frac{A}{T}$.
(4) Coste de compra. El coste por la compra del lote es $C_4 = \frac{pQ}{T} = \frac{pD}{\theta T}(e^{\theta T} - 1)$.
(5) Coste de deterioro por unidad de tiempo. Considerando que λ es el coste de deterioro unitario por unidad de tiempo, el coste total de deterioro es:

$$C_5 = \frac{\lambda U(T)}{T} = \frac{\lambda D}{\theta T}(e^{\theta T} - 1) - \lambda D$$

A continuación, vamos a especificar los diferentes costos que intervienen en la gestión del inventario según sea el periodo M permitido para el pago y la duración del periodo de gestión T del inventario. Así, se calculan las componentes relativas a los intereses que intervienen en las funciones objetivo del problema de inventario, tanto para el caso de que $M \leq T$ como si $T < M$:

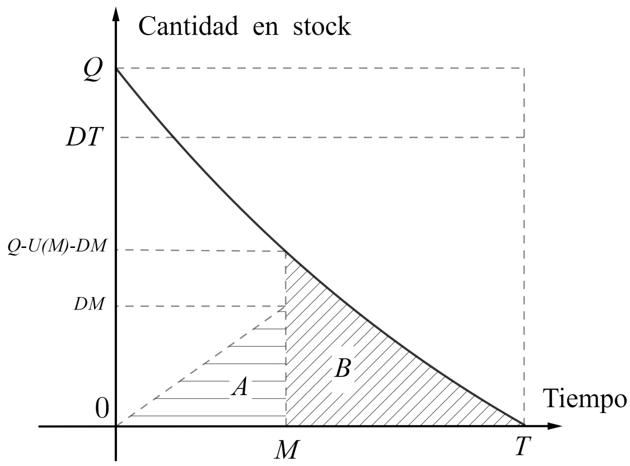

Figura 4.1. Evolución del nivel de inventario con deterioro cuando $M \leq T$.

(6) Coste de intereses a pagar por tener artículos en stock en el instante M. Los artículos que permanecen en stock después de finalizar el periodo de pago M deben ser financiados a un interés I_p respecto al precio de compra por unidad p.

- Caso I (ver Figura 4.1): $M \leq T$. En este caso, en el periodo M se han vendido DM unidades y se han deteriorado $U(M) = Q - DM - \frac{D}{\theta}(e^{T-M} - 1)$ unidades. Por tanto, han quedado sin vender $Q - DM$ unidades. Así, se debe pedir un crédito de $p(Q - DM)$. El interés a pagar por unidad de tiempo es:

$$\frac{pI_p}{T} \cdot Area(B) = \frac{pI_p}{T} \int_M^T I(t)dt = \frac{pI_p}{T} \int_M^T \left[\frac{D}{\theta}(e^{\theta(T-t)} - 1) \right] dt =$$
$$= \frac{pI_p D}{\theta T} \left[\left(\frac{e^{\theta(T-M)} - 1}{\theta} \right) - (T - M) \right] =$$
$$= \frac{DpI_p}{\theta^2 T}(e^{\theta(T-M)} - 1) - \frac{DpI_p}{\theta T}(T - M)$$

- Caso II (ver Figura 4.2): $T \leq M$. No se paga interés porque no es necesario pedir un préstamo ya que se ha vendido todo el producto antes de que se cumpla el periodo de pago M.

(7) Ingreso por los intereses ganados durante el ciclo de inventario. Los ingresos que reportan las ventas de los artículos se usan para generar beneficios extras a una tasa de interés de I_e respecto al precio de venta v de cada artículo.

- Caso I (ver Figura 4.1): $M \leq T$. En esta situación, la empresa sigue acumulando ingresos de las ventas que se producen durante el ciclo de inventario para generar intereses. Por tanto, el interés ganado por unidad de tiempo es:

$$\frac{vI_e}{T} \cdot Area(A) = \frac{vI_e}{T} \cdot \frac{DM^2}{2} = \frac{DM^2 vI_e}{2T}$$

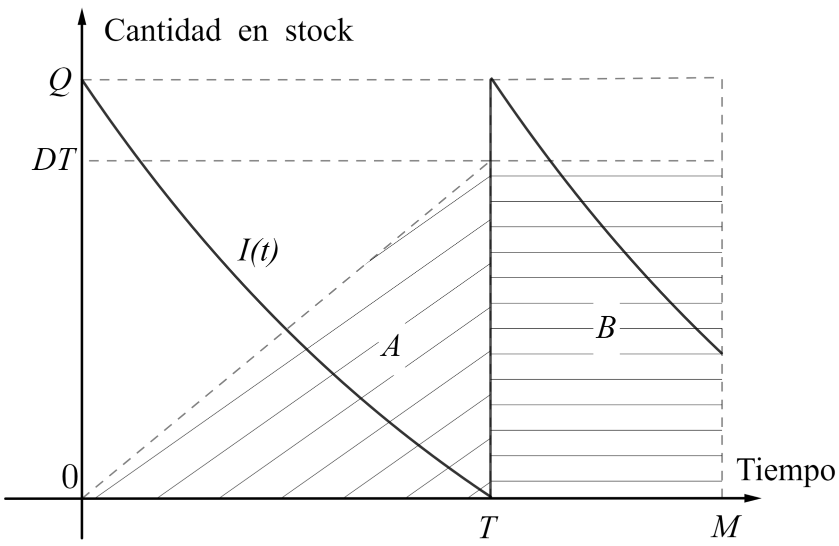

Figura 4.2. Evolución del nivel de inventario con deterioro cuando $T \leq M$.

- Caso II (Fig. 4.2): $T \leq M$. El interés ganado por unidad de tiempo es:

$$\frac{vI_e}{T} \cdot (Area(A) + Area(B)) = \frac{vI_e}{T}\left(\frac{DT^2}{2} + DT(M - T)\right) = DvI_e\left(M - \frac{T}{2}\right)$$

Ahora, se deben calcular las políticas óptimas para ambos casos. El objetivo es obtener los mayores beneficios posibles en un periodo de gestión determinado. Si consideramos que los ingresos por unidad de tiempo son $\frac{vDT}{T} = vD$, la función de beneficios o ganancias por unidad de tiempo es:

$$G = vD - C(T)$$

siendo $C(T)$ la suma de los costes totales relacionados con la gestión del inventario. Como maximizar G es equivalente a minimizar $C(T)$, nos centramos en esta última función de costes. Vamos a calcular la función de los costes para cada uno de los casos planteados.

Política óptima cuando $M \leq T$

La función de costes por unidad de tiempo a minimizar es:

$$C(T) = \frac{hD}{\theta^2 T}(e^{\theta T} - 1) - \frac{hD}{\theta} + \frac{A}{T} + \frac{pD}{\theta T}(e^{\theta T} - 1) + \frac{\lambda D}{\theta T}(e^{\theta T} - 1) - \lambda D + \\ + \frac{DpI_p}{\theta^2 T}(e^{\theta(T-M)} - 1) - \frac{DpI_p}{\theta T}(T - M) - \frac{DM^2 vI_e}{2T} \quad (4.3)$$

Para buscar la solución óptima, derivamos e igualamos a 0:

$$C'(T) = 0 \iff \frac{hD}{\theta^2}\left[\frac{\theta e^{\theta T} T - (e^{\theta T} - 1)}{T^2}\right] - \frac{A}{T^2} + \frac{(p+\lambda)D}{\theta}\left[\frac{\theta e^{\theta T} T - (e^{\theta T} - 1)}{T^2}\right] + \\ + \frac{DpI_p}{\theta^2}\left[\frac{\theta e^{\theta(T-M)} T - (e^{\theta(T-M)} - 1)}{T^2}\right] - \frac{DpI_p M}{\theta T^2} + \frac{DM^2 vI_e}{2T^2} = 0 \\ \iff \frac{hD}{\theta^2}[(\theta T - 1)e^{\theta T} + 1] - A + \frac{(p+\lambda)D}{\theta}[(\theta T - 1)e^{\theta T} + 1] + \\ + \frac{DpI_p}{\theta^2}[(\theta T - 1)e^{\theta(T-M)} + 1] - \frac{DpI_p M}{\theta} + \frac{DM^2 vI_e}{2} = 0$$

Usando métodos numéricos obtenemos el ciclo de inventario óptimo T_1^* que minimiza la ecuación (4.3).

Política óptima cuando $T \leq M$

La función de costes por unidad de tiempo a minimizar es:

$$C(T) = \frac{hD}{T\theta^2}(e^{\theta T} - 1) - \frac{hD}{\theta} + \frac{A}{T} + \frac{pD}{\theta T}(e^{\theta T} - 1) + \\ + \frac{\lambda D}{\theta T}(e^{\theta T} - 1) - \lambda D - DvI_e\left(M - \frac{T}{2}\right) \quad (4.4)$$

Para buscar la solución óptima, derivamos e igualamos a 0:

$$C'(T) = 0 \iff \frac{hD}{\theta^2}\left[\frac{\theta e^{\theta T} T - (e^{\theta T} - 1)}{T^2}\right] - \frac{A}{T^2} + \\ + \frac{(p+\lambda)D}{\theta}\left[\frac{\theta e^{\theta T} T - (e^{\theta T} - 1)}{T^2}\right] + \frac{DvI_e}{2} = 0 \\ \iff \frac{hD}{\theta^2}[(\theta T - 1)e^{\theta T} + 1] - A +$$

$$+\frac{(p+\lambda)D}{\theta}[(\theta T-1)e^{\theta T}+1]+\frac{DvI_eT^2}{2}=0$$
$$\Longleftrightarrow \left(\frac{h}{\theta}+p+\lambda\right)\frac{D}{\theta}[(\theta T-1)e^{\theta T}+1]-A+\frac{DvI_eT^2}{2}=0$$

Usando métodos numéricos obtenemos el ciclo de inventario óptimo T_2^* que minimiza la ecuación (4.4).

Por otra parte, nos fijamos que para $T=M$, las funciones de coste total de los dos casos son idénticas. Si evaluamos, se tiene:

$$C(M)=\frac{hD}{M\theta^2}(e^{\theta M}-1)-\frac{hD}{\theta}+\frac{A}{M}+\frac{\lambda D}{\theta M}(e^{\theta M}-1)-\lambda D-\frac{DvI_eM}{2} \quad (4.5)$$

De acuerdo con lo comentado previamente, el procedimiento para encontrar la política óptima de este modelo de inventario se recoge en el siguiente algoritmo:

Algoritmo

Paso 1. Si $T_1^* > M$ y $T_2^* < M$, comparamos $C(T_1^*)$ y $C(T_2^*)$ de (4.3) y (4.4) respectivamente. Ir al paso 4.

Paso 2. Si $T_1^* > M$ y $T_2^* \not< M$, comparamos $C(T_1^*)$ y $C(M)$ de (4.3) y (4.5) respectivamente. Ir al paso 4.

Paso 3. Si $T_1^* \not> M$ y $T_2^* < M$, comparamos $C(M)$ y $C(T_2^*)$ de (4.5) y (4.4) respectivamente. Ir al paso 4.

Paso 4. Para encontrar el ciclo de inventario óptimo, seleccionamos la solución con el menor costo asociado. Calculamos el tamaño del lote óptimo Q^* a partir de la ecuación (4.2).

Paso 5. Si $T_1^* \not> M$ y $T_2^* \not< M$, entonces el ciclo de inventario óptimo será M. Calculamos el tamaño del lote óptimo Q^* a partir de la ecuación (4.2).

A continuación, abarcamos el último trabajo que se incluye en esta memoria, el cual combina las dos características que venimos estudiando a lo largo de esta monografía: la política de crédito comercial o el retraso permisible de los pagos, y el deterioro de los artículos. Además, en el modelo se permite la existencia de roturas, lo cual refleja mejor los sistemas reales de inventario.

4.2. Modelo de inventario con política de crédito comercial, deterioro y existencia de rotura por Jamal, Sarker y Wang (1997)

En la última sección de esta memoria, vamos a revisar el trabajo realizado por Jamal, Sarker y Wang (1997) sobre el desarrollo de un modelo para un inventario que sigue una política de crédito comercial, trabaja con artículos que sufren deterioro y se permiten roturas, siendo todas recuperables.

Llegados hasta este punto, ya conocemos las hipótesis que van a caracterizar el problema y las condiciones iniciales. Tenemos una demanda D constante y conocida. El ratio de deterioro θ de los artículos es constante. Se permiten roturas y todas son recuperables. Por ende, el periodo de gestión T es igual a $T = T_1 + T_2$, donde T_1 es el periodo en el que hay existencia de stock, y T_2 es el periodo en el que hay rotura. Por otra parte, la política de crédito comercial que se lleva a cabo permite que la empresa retrase el pago del lote de productos antes de que se acabe un periodo de gracia M prefijado por el proveedor. Además, sabemos que los ingresos obtenidos por las ventas antes de M son utilizados para generar beneficios extras a través de intereses generados por un banco a una tasa del I_e. Por otro lado, para aquellos productos que no han sido vendidos antes de la finalización del periodo permisible de pago, se debe solicitar un préstamo equivalente al valor de los artículos restantes, y abonar su coste con una carga de interés del I_p. Se asume que $I_p \geq I_e$.

Recordando de la sección 3.2, la función del nivel de inventario con deterioro y rotura recuperable es:

$$I(t) = \begin{cases} \frac{D}{\theta}(e^{\theta(T_1-t)} - 1) & , \ 0 \leq t \leq T_1 \\ D(T_1 - t) & , \ T_1 \leq t \leq T \end{cases} \tag{4.6}$$

El inventario se reduce debido a la demanda y al deterioro, llegando a 0 en T_1. Posteriormente, debido al efecto de las demandas aparecen las roturas y se obtiene la rotura máxima $D(T - T_1)$ al final del ciclo de inventario. Como el nivel de inventario al comienzo del periodo es $S = I(0) = \frac{D}{\theta}(e^{\theta T_1} - 1)$, el tamaño del lote o cantidad a pedir para reponer el inventario debe ser $Q = I(0) + D(T - T_1) = \frac{D}{\theta}(e^{\theta T_1} - 1) + D(T - T_1)$.

A continuación, vamos a calcular la política óptima para el modelo de inventario que sigue una política de crédito comercial con demanda constante, deterioro en los artículos y roturas recuperables. El objetivo consiste en maximizar el beneficio por unidad de tiempo, siendo éste la diferencia entre ingresos y gastos. Por una parte, los ingresos por unidad de tiempo son $\frac{vDT_1}{T}$ ya que las unidades vendidas son DT_1. Por otra parte, se calculan los costes relacionados con la gestión del inventario. En este trabajo, los valores de T_1 y M son los que van a determinar el escenario en el que se trabaja. Por un lado, $M \leq T_1$, donde hay que abonar el importe de la deuda antes de vender todo el stock, y por otro, $T_1 < M$, donde el stock se acaba antes de tener que pagar el lote. Tendremos una función de coste total para cada situación y algunas componentes serán diferentes. Primero se hallan aquellas que son idénticas para ambos casos:

(1) Coste de mantenimiento por unidad de tiempo.

$$C_1 = \frac{h}{T}\int_0^{T_1} I(t)dt = \frac{h}{T}\int_0^{T_1}\left[\frac{D}{\theta}(e^{\theta(T_1-t)}-1)\right]dt = \frac{hD}{\theta^2 T}(e^{\theta T_1}-1) - \frac{hDT_1}{\theta T}$$

(2) Coste de rotura por unidad de tiempo.

$$C_2 = \frac{w}{T}\int_{T_1}^{T} -I(t)dt = \frac{w}{T}\int_{T_1}^{T} -D(T_1-t)dt = -wDT_1 + \frac{wDT}{2} + \frac{wDT_1^2}{2T}$$

(3) Coste de reposición es $C_3 = \frac{A}{T}$.
(4) Coste de compra por unidad de tiempo es $C_4 = \frac{pQ}{T} = \frac{pD}{\theta T}(e^{\theta T_1}-1) + \frac{pD}{T}(T - T_1)$.
(5) Coste de deterioro. Considerando el coste de deterioro unitario por unidad de tiempo λ y el número de unidades deterioradas $U(T_1)$ durante el periodo de longitud T_1, que en este caso es $U(T_1) = S - DT_1 - I(T_1) = \frac{D}{\theta}(e^{\theta T_1}-1) - DT_1$ ya que $I(T_1) = 0$, se tiene que el coste total de deterioro por unidad de tiempo es $C_5 = \frac{\lambda U(T_1)}{T} = \frac{\lambda D}{\theta T}(e^{\theta T_1}-1) - \frac{\lambda DT_1}{T}$.

Ahora, se hallan los diferentes costos que intervienen en la gestión del inventario según sea el periodo M permitido para el pago y la duración del periodo T_1 en el que hay stock. Así, se calculan las componentes relativas a los intereses que intervienen en las funciones objetivo del problema de inventario tanto para el caso de que $M \leq T_1$ como si $T_1 < M$:

(6) Coste de intereses a pagar por tener artículos en stock en el instante M. Los artículos que permanecen en stock después de finalizar el periodo de pago M deben ser financiados a un interés I_p respecto al precio de compra p por cada artículo.
- Caso I (ver Figura 4.3): $M \leq T_1$. En este caso, se debe pedir un crédito de $p(Q - DM)$. El interés a pagar por unidad de tiempo es:

$$\frac{pI_p}{T}\cdot Area(B) = \frac{pI_p}{T}\int_M^{T_1} I(t)dt = \frac{pI_p}{T}\int_M^{T_1}\left[\frac{D}{\theta}(e^{\theta(T_1-t)}-1)\right]dt =$$
$$= \frac{DpI_p}{\theta^2 T}(e^{\theta(T_1-M)}-1) - \frac{DpI_p}{\theta T}(T_1 - M)$$

- Caso II: $T_1 \leq M$. No se paga interés porque no es necesario pedir un préstamo ya que se ha vendido todo el producto antes de que se cumpla el periodo de pago M.

(7) Ingreso por los intereses ganados durante el ciclo de inventario. Los ingresos que reportan las ventas de los artículos se usan para generar beneficios extras a una tasa de interés de I_e respecto al precio de venta v de cada artículo.

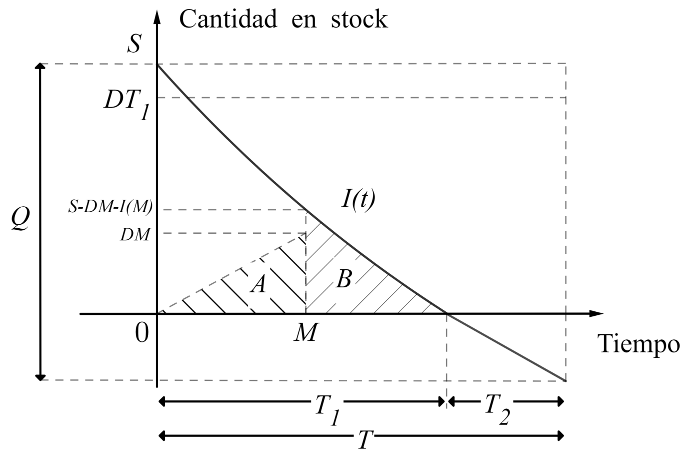

Figura 4.3. Evolución del nivel de inventario con deterioro y rotura cuando $M \leq T_1$.

- Caso I (ver Figura 4.3): $M \leq T_1$. El interés ganado por unidad de tiempo en el periodo de crédito M es:

$$\frac{vI_e}{T} \cdot Area(A) = \frac{vI_e}{T} \cdot \frac{DM^2}{2} = \frac{DM^2 vI_e}{2T}$$

- Caso II: $T_1 \leq M$. El interés ganado por unidad de tiempo durante el periodo M es:

$$\frac{DT_1 vI_e}{T}\left(M - \frac{T_1}{2}\right)$$

La maximización del beneficio equivale a minimizar la función de costes relacionada con la compra y gestión del inventario. Las variables de decisión del modelo, es decir, el tamaño del lote Q y el nivel inicial de inventario S se pueden expresar explícitamente en función de las variables T y T_1. Serán éstas las que se consideren como variables de la función de costes a minimizar. Vamos a obtener la política óptima para cada uno de los casos planteados.

Política óptima cuando $M \leq T_1$

La función de costes por unidad de tiempo a minimizar es:

$$\begin{aligned} C(T,T_1) = {} & \frac{hD}{\theta^2 T}(e^{\theta T_1}-1) - \frac{hDT_1}{\theta T} - wDT_1 + \frac{wDT}{2} + \frac{wDT_1^2}{2T} + \frac{A}{T} + \frac{pD}{\theta T}(e^{\theta T_1}-1) + \\ & + \frac{pD}{T}(T-T_1) + \frac{\lambda D}{\theta T}(e^{\theta T_1}-1) - \frac{\lambda DT_1}{T} - \frac{vDT_1}{T} + \frac{DpI_p}{\theta^2 T}(e^{\theta(T_1-M)}-1) - \\ & - \frac{DpI_p}{\theta T}(T_1 - M) - \frac{DM^2 vI_e}{2T} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Si calculamos las derivadas parciales, obtenemos:

$$\frac{\partial C(T,T_1)}{\partial T} = -\frac{hD}{\theta^2 T^2}(e^{\theta T_1}-1)+\frac{hDT_1}{\theta T^2}+\frac{wD}{2}-\frac{wDT_1^2}{2T^2}-\frac{A}{T^2}-\frac{pD}{\theta T^2}(e^{\theta T_1}-1)+ \\ +\frac{pDT_1}{T^2}-\frac{\lambda D}{\theta T^2}(e^{\theta T_1}-1)+\frac{(\lambda+v)DT_1}{T^2}-\frac{DpI_p}{\theta^2 T^2}(e^{\theta(T_1-M)}-1)+ \\ +\frac{DpI_p}{\theta T^2}(T_1-M)+\frac{DM^2vI_e}{2T^2} \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial C(T,T_1)}{\partial T_1} = \frac{hD}{\theta^2 T}(\theta e^{\theta T_1})-\frac{hD}{\theta T}-wD+\frac{wDT_1}{T}+\frac{pD}{\theta T}(\theta e^{\theta T_1})-\frac{pD}{T}+\frac{\lambda D}{\theta T}(\theta e^{\theta T_1})- \\ -\frac{(\lambda+v)D}{T}+\frac{DpI_p}{\theta T}(e^{\theta(T_1-M)}-1) \quad (4.9)$$

Las ecuaciones (4.8) y (4.9) se igualan a cero y se resuelven de forma simultánea, usando métodos numéricos, para encontrar los valores óptimos T_1^* y T^*. Obtenemos de esta forma la política de inventario óptima para el modelo de inventario en el caso de que el periodo M sea menor que el periodo T_1 en el que hay existencia de stock.

Política óptima cuando $T_1 \leq M$

La función de costes por unidad de tiempo a minimizar es:

$$C(T,T_1) = \frac{hD}{\theta^2 T}(e^{\theta T_1}-1)-\frac{hDT_1}{\theta T}-wDT_1+\frac{wDT}{2}+\frac{wDT_1^2}{2T}+\frac{A}{T}+\frac{pD}{\theta T}(e^{\theta T_1}-1)+ \\ +\frac{pD}{T}(T-T_1)+\frac{\lambda D}{\theta T}(e^{\theta T_1}-1)-\frac{\lambda DT_1}{T}-\frac{vDT_1}{T}-\frac{DT_1vI_e}{T}\left(M-\frac{T_1}{2}\right) \quad (4.10)$$

Si calculamos las derivadas parciales, se tiene:

$$\frac{\partial C(T,T_1)}{\partial T} = -\frac{hD}{\theta^2 T^2}(e^{\theta T_1}-1)+\frac{hDT_1}{\theta T^2}+\frac{wD}{2}-\frac{wDT_1^2}{2T^2}-\frac{A}{T^2}-\frac{pD}{\theta T^2}(e^{\theta T_1}-1)+ \\ +\frac{pDT_1}{T^2}-\frac{\lambda D}{\theta T^2}(e^{\theta T_1}-1)+\frac{(\lambda+v)DT_1}{T^2}+\frac{DT_1vI_e}{T^2}\left(M-\frac{T_1}{2}\right) \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial C(T,T_1)}{\partial T_1} = \frac{hD}{\theta^2 T}(\theta e^{\theta T_1})-\frac{hD}{\theta T}-wD+\frac{wDT_1}{T}+\frac{pD}{\theta T}(\theta e^{\theta T_1})+\frac{\lambda D}{\theta T}(\theta e^{\theta T_1})-\frac{pD}{T}- \\ -\frac{(\lambda+v)D}{T}-\frac{DvI_e}{T}(M-T_1) \quad (4.12)$$

Al igual que hicimos en el caso anterior, igualamos las derivadas (4.11) y (4.12) a cero. Resolviendo ambas expresiones de forma simultánea mediante el empleo de métodos numéricos, llegamos a los valores óptimos T_1^* y T^* para el modelo de gestión de inventario donde $T_1 \leq M$.

5

Conclusiones

Los modelos de gestión de inventarios pueden ser muy complejos por la cantidad de variables a tener en cuenta y el número de factores que configuran el escenario en el que se está trabajando. En esta memoria se ha hecho un acercamiento a algunos modelos que se trabajan en la práctica, considerando dos características que comparten muchas empresas. La primera es la política de crédito comercial, es decir, la posibilidad de retrasar el pago de un lote de artículos hasta un periodo de tiempo determinado previamente por el proveedor. Esta práctica es muy común entre las organizaciones para poder vender artículos sin tener que desembolsar dinero inicialmente. La segunda es el agotamiento del inventario por el deterioro de los artículos. En realidad, existe un amplio número de artículos que se estropean o quedan inservibles para la venta con el paso del tiempo. Asumir esta hipótesis acerca en gran medida el modelo con la naturaleza de los objetos con los que se tratan. Este trabajo hace una recopilación de los trabajos más importantes que desarrollan modelos basados en algunas de esas líneas de investigación, así como aquellos que combinan ambas hipótesis.

Bibliografía

[1] Hax, A.C. y Candea, D. *Production And Inventory Management.* Prentice-Hall, 1984.

[2] Whitin, T.M. y Hadley, G. *Analysis of Inventory Systems.* Prentice-Hall, 1963.

[3] Zipkin, P.H. *Foundations of Inventory Management.* The McGraw-Hill Companies, 2000.

[4] Goyal, S.K. *Economic Order Quantity Under Conditions of Permissible Delay in Payments*, Journal of the Operational Research Society, 1985, vol. 36, No. 4, pp. 335-338.

[5] Chung, K.-J. y Huang, C.-K. *An orderin policy with allowabe shortage and permissible delay in payments*, Applied Mathematical Modelling, 2009, vol 33, pp. 2518-2525.

[6] Ghare, P.M. y Schrader, G.F. *A Model for an Exponentially Decaying Inventory*, The Journal of Industrial Engineering, 1963, vol. XIV, No. 5, pp. 238-243.

[7] Shah, Y.K. *An Order-Level Lot-Size Inventory Model for Deteriorating Items*, AIIE Transactions, 1977, vol. 9, No. 1, pp. 108-112.

[8] Aggarwal, S.P. y Jaggi, C.K. *Ordering Policies of Deteriorating Items Under Permissible Delay in Payments*, Journal of the Operational Research Society, 1995, vol. 46, No. 5, pp. 658-662.

[9] Jamal, A.M.M., Sarker, B.R. y Wang, S. *An ordering policy for deteriorating items with allowable shortage and permissible delay in payment*, Journal of the Operational Research Society, 1997, vol. 48, No. 8, pp. 826-833.

Inventory models with trade credit policy

David Toribio Rodríguez
Facultad de Ciencias • Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0101361529@ull.edu.es

Abstract

The aim of this work is the study of models of inventory management that follow a trade credit policy, that is, the supplier allows the company to pay for the amount of the lot of articles at any time within a period of time prefixed. This memory begins with a brief summary of the basic concepts of inventory management, including a description of the classical lot size model without breakage and with breakage, both being the basis of the models that are subsequently presented. Next, the following chapters consist of a analysis of some relevant works on models of inventory management. The chapters are classified as models that consider the permissible delay of payments, models that take into account the deterioration of stored articles, and finally, the works that combine both hypotheses and describe a more similar scenario to practice.

1. Introduction

The resolution of an inventory problem is based on making decisions that allow good stock management. These decisions determine when orders must be placed to replenish stock and how many items need to be ordered, taking into account the associated costs. Any inventory model must respond to these questions, thus obtaining the optimal policy that manages the items in the most optimal way.

2. Basic lot size models

We start by introducing the basic concepts used in inventory management models, such as demand, replenishment and the different types of general costs. Then, we introduce the basic of lot size model without breakage (EOQ model) in which the total cost of maintenance and replacement per unit of time is minimized. In addition, the lot size model with breakage is proposed.

3. EOQ models under conditions of permissible delay in paymets

A fundamental assumption of the EOQ model is that payment to the supplier is supposed to be made the moment the merchandise arrives at the warehouse. However, there may be a situation where the supplier allows the customer to pay for the lot within a period of time after delivery. That is, there is a delay in payment. In this situation, the company is said to follow a trade credit policy. Typically, companies that delay payment for products try to pay off their debt with interest earned from the sale of those items during the allowable payment period. In other words, the profits obtained from the sale of the products are deposited in a bank, which offers interest to the company.

Goyal (1985) was one of the first to propose an inventory model considering a trade credit policy. Subsequently, Chung and Huang (2009) developed a model based on Goyal's work allowing shortage.

4. EOQ models for deteriorating items

Demand is not the only factor involved in inventory depletion. Products, as time goes by, can deteriorate and become unusable. Ghare and Schrader (1963) considered in their work that inventory decreased due to a combination of demand and deterioration. Later, Shah (1977) developed an inventory model with item spoilage allowing breakage.

5. EOQ models for deteriorating items under conditions of permissible delay in paymets

In this final chapter, Aggarwal and Jaggi (1995) present an inventory management model that combines trade credit policy with product spoilage. It will provide us with a closer perspective on real inventory systems, since the characteristics that reflect this situation are found in the majority of companies and institutions in the current business fabric. Finally, Jamal, Sarker and Wang (1997) introduce us to their model in which they include both hypotheses with the existence of breakage.

References

[1] Hax, A.C. y Candea, D. *Production And Inventory Management.* Prentice-Hall, 1984.

[2] Whitin, T.M. y Hadley, G. *Analysis of Inventory Systems.* Prentice-Hall, 1963.

[3] Zipkin, P.H. *Foundations of Inventory Management.* The McGraw-Hill Companies, 2000.

[4] Goyal, S.K. *Economic Order Quantity Under Conditions of Permissible Delay in Payments*, Journal of the Operational Research Society, 1985, vol. 36, No. 4, pp. 335-338.

[5] Chung, K.-J. y Huang, C.-K. *An orderin policy with allowabe shortage and permissible delay in payments*, Applied Mathematical Modelling, 2009, vol 33, pp. 2518-2525.

[6] Ghare, P.M. y Schrader, G.F. *A Model for an Exponentially Decaying Inventory*, The Journal of Industrial Engineering, 1963, vol. XIV, No. 5, pp. 238-243.

[7] Shah, Y.K. *An Order-Level Lot-Size Inventory Model for Deteriorating Items*, AIIE Transactions, 1977, vol. 9, No. 1, pp. 108-112.

[8] Aggarwal, S.P. y Jaggi, C.K. *Ordering Policies of Deteriorating Items Under Permissible Delay in Payments*, Journal of the Operational Research Society, 1995, vol. 46, No. 5, pp. 658-662.

[9] Jamal, A.M.M., Sarker, B.R. y Wang, S. *An ordering policy for deteriorating items with allowable shortage and permissible delay in payment*, Journal of the Operational Research Society, 1997, vol. 48, No. 8, pp. 826-833.