

AGENDA DE INVESTIGACIÓN PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN EL NIVEL UNIVERSITARIO

Research Agenda for the teaching and learning Mathematics in the University level

Camacho Machín, M.
Universidad de La Laguna

Resumen

En este trabajo, se presenta una revisión de las diferentes investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la Universidad, especialmente en el marco de los Simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, con el propósito de establecer una propuesta de agenda de investigación que pueda servir de guía para los diferentes colectivos que se dedican a este campo. Después de analizar una serie de factores que hemos considerado relevantes para nuestro objetivo, se elabora una lista de propuestas de investigación, que no pretende ser exhaustiva, pero que pudiera servir de ayuda para nuestro campo de interés.

Palabras clave: *Matemáticas universitarias, enseñanza, aprendizaje, agenda de investigación.*

Abstract

In this paper, we present a review of the different research on the teaching and learning of mathematics at the University, especially within the framework of the Symposia of the Spanish Society for Research in Mathematics Education, with the purpose of establishing a proposal for a research agenda that can serve as a guide for the different groups involved in this field. After analyzing a series of factors that we have considered relevant to our objective, a list of research topics are drawn up, which is not intended to be exhaustive, but which could be of help to our field of interest.

Keywords: *University mathematics Education, teaching, learning, research agenda*

INTRODUCCIÓN

Han pasado diez años desde que se llevó a cabo el Seminario *La investigación en Educación Matemática en diferentes niveles* (Ciudad Real, 2011- XV Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática). En dicho Seminario, en la ponencia llevó por título *La Investigación en Didáctica de las Matemáticas en Bachillerato y Universidad* se discutió parcialmente el tema de investigación que se presenta ahora en este Simposio una década después. En (Camacho, 2011) se desarrolló un análisis de la investigación realizada en los niveles educativos mencionados, tanto en el nivel universitario como en los últimos cursos de bachillerato en los ámbitos internacional y nacional. En una primera parte de ese trabajo, se revisaron las publicaciones reseñadas en Gutiérrez

Camacho Machín, M. (2021). Agenda de investigación para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 33 – 48). Valencia: SEIEM.

y Boero (2006) y Lester (2007) en el ámbito internacional y, para el ámbito nacional, se analizaron las publicaciones de los trabajos presentados en los catorce simposios anteriores de la SEIEM, así como las Tesis Doctorales defendidas entre nuestro país hasta ese momento, que se relacionaban con la enseñanza y aprendizaje en ambos niveles educativos. En dicho seminario se pudo constatar que, a partir de la revisión realizada, la gran mayoría de las treinta comunicaciones/ponencias que mostraban investigaciones situadas en la universidad, se correspondían al campo de investigación de Didáctica del Análisis Matemático (19/30) y en particular en torno a los conceptos de límite, derivada e integral. Además, las Tesis Doctorales que se revisaron -un total de veinte- casi todas eran también sobre dichos conceptos, salvo algunas centradas en la modelización matemática. Como conclusiones, en dicho trabajo se señala, entre otras cosas y refiriéndose al análisis desarrollado, que

.....el camino recorrido por la investigación en el bachillerato y universidad no ha seguido un camino paralelo a las necesidades del sistema educativo. La mayoría de investigaciones nos suministran resultados que confirman resultado obtenidos en otras o encuentran pequeños avances pero una gran parte de ellos deben ser incorporados a la enseñanza efectiva, buscando puentes que hagan visibles esas pequeñas aportaciones (p. 216).

y se añade la importancia de “promover la elaboración de materiales curriculares que permitan implementar esos avances” y se propone, para concluir, la necesidad de poner un mayor énfasis en la conexión entre los diferentes ámbitos, indicándose que

.....deben crearse cuanto antes unas nuevas agendas de investigación en las que se incorporen nuevos aspectos que investigar acordes con la evolución de las investigaciones desarrolladas a nivel internacional (p. 216)

La situación ha cambiado bastante, y en la actualidad, esos cambios han venido implicados, sobre todo en el ámbito internacional por varios elementos importantes tales como el cambio de planes de estudio avalados por el nuevo espacio de educación superior (Bolonia), la ampliación de los ámbitos de investigación, anteriormente centradas en la enseñanza y aprendizaje del Cálculo y del Análisis Matemático. También se ha podido constatar un aumento de experimentos de enseñanza en la Universidad. Por otra parte, el trabajo de investigación desarrollado ha provocado un fortalecimiento de los diferentes marcos teóricos y conceptuales. Otro elemento importante que podrá contribuir a la elaboración de una agenda de investigación viene implicado por la ampliación de los ámbitos de difusión de las diversas investigaciones del campo. Estas y otras circunstancias implican la necesidad de retomar y actualizar, ahora más específicamente en la universidad, la evolución de este campo de investigación tanto en el ámbito internacional como en las adaptaciones e interpretaciones que se están haciendo en nuestro país. Al igual que en el aquel entonces, nos centraremos principalmente al trabajo desarrollado por la Sociedad Española de Investigación Matemática (SEIEM) y haremos una mirada al ámbito internacional que surge de la creación de un nuevo foro internacional que surgió a partir de la organización de los CERME.

En esta ponencia, a la vista una revisión general de la literatura actual, se tratará de configurar una primera aproximación para la elaboración de una posible agenda de investigación para los próximos años que permita avanzar en una consolidación mayor de este campo de investigación en nuestro país.

Algunas de las preguntas que motivarán este trabajo, sin pretender responder aquí a todas, podrían ser las siguientes ¿Cuáles son los problemas de aprendizaje de las matemáticas que se pueden encontrar en los diferentes estudios universitarios? ¿Son los mismos que todas las ramas de las Ciencias y en particular son los mismos que en el Grado de Matemáticas? ¿Varían este tipo de problemas en el campo de la ingeniería? ¿Los programas actuales tienen una concepción diferente de las Matemáticas que los anteriores? ¿los marcos teóricos y conceptuales que se emplean en las investigaciones realizadas hasta ahora son consistentes con la investigación en estos niveles

educativos? ¿responden los experimentos de enseñanza que se van realizando a las diferentes demandas que se necesitan?

El objetivo de este trabajo consiste en realizar una primera reflexión que nos ayude a establecer una agenda de investigación para los próximos años que permita avanzar en una consolidación mayor del campo de investigación de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas universitarias en nuestro país (UME)¹ y que surja principalmente de una revisión sobre las aportaciones presentadas en los Simposios de la SEIEM, congresos y publicaciones internacionales.

Abordaremos a continuación algunos de estos aspectos mencionados. Después de hacer una revisión de los diferentes trabajos en este campo de investigación que han ocupado el espacio de los últimos ocho Simposios de la SEIEM, se hablará de la ampliación de los ámbitos de difusión a nivel internacional, para mostrar como consecuencia de esto el fortalecimiento de los diferentes marcos teóricos y conceptuales, así como la diversificación en el tipo de investigaciones desarrolladas, para finalizar con una tentativa agenda de investigación.

Conviene señalar que en este trabajo al igual que en el anterior realizado en el año 2011, pese a que los profesores de Matemáticas se forman en la Universidad, no estamos considerando las investigaciones en formación de profesores, tanto de Educación Primaria como Educación Secundaria, como objeto de estudio de lo que denominamos investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas universitarias (UME) pese a que obviamente estos se forman en la Universidad.

LA INVESTIGACIÓN SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA UNIVERSITARIA EN LA SEIEM

En este apartado, se desarrollará la revisión de las diferentes comunicaciones y pósteres que han sido presentados en los Simposios de la SEIEM desde el año 2011 hasta el último celebrado en 2019. Creemos que varias de esas comunicaciones derivan en la presentación de Tesis Doctorales, por lo que consideramos también esos trabajos de Tesis como indicadores del tipo de investigación que se ha venido realizando en estos últimos años. Es evidente, que casi con toda seguridad, nuestra revisión no es del todo completa, sobre todo por la fuente que ha sido utilizada que es principalmente los materiales a los que se tiene acceso mediante la página web de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

En los Anexos 1, 2 y 3 se han incluido, agrupadas por año las referencias bibliográficas de las comunicaciones, los pósteres y las Tesis Doctorales, respectivamente.

Comunicaciones y Pósteres

El análisis realizado de las Actas de los diferentes Simposios de la SEIEM, llevó a desarrollar la revisión de un total de veintiséis comunicaciones cuyo ámbito de trabajo se refiere a estudios de matemáticas universitarias. Se observó que el conjunto de trabajos presentados incorporan temas más diversificados que los que se encontraron en la revisión anterior (Camacho, 2011), tanto por los participantes en las diferentes investigaciones (titulaciones) como en los temas y tópicos tratados.

Se han analizado también los veintitrés pósteres presentados en los Simposios a partir del año 2015. También tan diversificados como las comunicaciones, principalmente si se tiene en cuenta las titulaciones de los participantes. Hemos optado por agrupar los trabajos revisados en torno, a los temas o tópicos principalmente tratados. De esta manera, consideramos un primer grupo de trabajos relacionados con la enseñanza y aprendizaje del Álgebra y Números, el segundo grupo, al Análisis Matemático y la Modelización, un tercer grupo que trata de probabilidad y estadística

¹ Utilizaremos en alguna ocasión el término internacionalmente aceptado de UME (University Mathematics Education)

(principalmente estadística) y finalmente un grupo de comunicaciones y pósteres sobre temas variados Geometría, aspectos afectivos, resolución de problemas, la transición del Bachillerato a la Universidad, el aprendizaje de la prueba.

La Tabla 1 resume el número de trabajos presentados en torno a la clasificación que se ha hecho. Se incorpora entre paréntesis cuáles son los trabajos que hemos considerado en cada uno de los tópicos.

	2011-2014	2015-2019		Total	
	C	C	P	C	P
Álgebra y Números	4 (C4,11,12,16)	3 (C20,21,22)	4 (P1,3,9,10)	7	4
Análisis y Modelización	3 (C3,10,14)	1 (C18)	3 (P12,13,19)	4	3
Probabilidad y Estadística	3 (C5,9,15))	3 (C19, 23,24)	7 (P4,6,7,18,20,21,22)	6	7
Aspectos afectivos, prueba, Geometría, Transición, RP	6 (C1,2,6,7,8,13)	3 (C17, 25,26)	9 (P2,5,8,11,14,15,16,17,23)	9	9
Totales	16	10	23	26	23

Tabla 1. Comunicaciones y pósteres presentados en los Simposios de la SEIEM relacionados con las Matemáticas Universitarias

Tesis Doctorales

Se han revisado catorce Tesis Doctorales entre los años 2012 y 2018, lo que ha supuesto un incremento de trabajos en comparación con las defendidas en los casi veinte años anteriores. Se pueden encontrar investigaciones sustentadas por diferentes Marcos Teóricos (TAD², OSO³, APOE⁴) así como marcos conceptuales según indica Eisenhart (1991, op.c. en Camacho, 2011) en el sentido de que

Un Marco Conceptual puede estar basado en diferentes teorías y una noción fundamental para este tipo de marcos es la de justificación; resulta fundamental explicar por qué se hacen las cosas y por qué son razonables las explicaciones e interpretaciones (p. 206)

Se observa una amplia variabilidad (mayor que en el estudio anterior) en el empleo de marcos de referencia así como de temáticas de investigación y ámbitos de la investigación (derivada, la prueba y la demostración, uso de tecnologías digitales para el aprendizaje, geometría, Álgebra Lineal, concepciones...) curiosamente no encontramos ninguna Tesis Doctoral sobre Probabilidad y Estadística.

	2012-2014	2015-2018	Total
Álgebra y Números	0	3 (TD11,13,14)	3
Análisis Matemático y Modelización	4 (TD1,3,4,5)	3 (TD6,10,12)	7
Otros: Ámbito afectivo Prueba, Geometría, RP	1 (TD2)	3 (TD7,8,9)	4
Totales	5	9	14

Tabla 3. Tesis doctorales presentadas en los distintos Simposios de la SEIEM relacionadas con las Matemáticas Universitarias

² Teoría antropológica de lo Didáctico

³ Enfoque Ontosemiótico

⁴ Acción, Proceso, Objeto y Esquema

LA AMPLIACIÓN DE LOS MEDIOS DE DIFUSIÓN DE LA INVESTIGACIÓN EN EL CAMPO

Se puede considerar que uno de los factores más importantes que favorecen el interés por el desarrollo de un campo cualquiera de investigación, es el poder disponer de lugares específicos en los que se puedan visibilizar los avances del mismo. Con ello se consigue, de alguna manera, compartir los avances y recibir la colaboración del colectivo que se interesa por el mismo.

La publicación de una revista a nivel internacional denominada *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education (IJRUME)*, la cual tiene ya siete volúmenes, ha resultado ser de gran importancia para este campo de investigación dado que se muestra como un lugar en el que se pueden visualizar a nivel internacional las guías que dirigen las investigaciones en el nivel universitario. Actualmente se han publicado en sus veinte números, más de cien trabajos de investigación centrados todos en las Matemáticas a nivel universitario.

El Surgimiento de un espacio de discusión específico sobre la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en el nivel universitario auspiciado por la ERME⁵ y derivado directamente del “Working Group” 14 de los últimos CERME⁶. Este nuevo espacio es una red temática denominada *International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM)* creada en el año 2016, contando como principales impulsores de esta iniciativa con un grupo de investigadores de la Universidad de Barcelona, liderados por la Dra. Marianna Bosch que es miembro activo de la SEIEM. Esta red internacional ha celebrado tres congresos en los últimos años: 2016 (Montpellier, Francia), 2018 (Kristiansand, Noruega) y 2020 (Bizarta, Túnez), este último celebrado telepresencialmente, debido a la situación sanitaria que nos ha asolado en el pasado año y lo que va del presente año. El próximo está previsto celebrarse en Alemania en 2022 y en su comité organizador participará nuestra compañera Berta Barquero de la Universidad de Barcelona, quien participa activamente en la SEIEM.

En la Tabla 1 se recogen el número de comunicaciones y pósteres presentados en los diferentes grupos temáticos en los que se estructuran los congresos celebrados, revisadas de Nardi, et al (2016), Durand-Guerrier et al. (2018) y Hausberger et al. (2020)

Se puede observar una mayor diversidad de temas que los que se observaron en las comunicaciones y pósteres de los Simposios de la SEIEM, principalmente relacionados con las prácticas tanto de los profesores como de los estudiantes en las distintas instituciones.

También se ha podido constatar una preponderancia de las investigaciones sobre tópicos específicos del Cálculo y el Análisis Matemático, algo que ocurría en los Simposios de la SEIEM con anterioridad al año 2011, pero desde múltiples perspectivas, así como un importante número de trabajos dedicados a las a la Modelización Matemática y Matemáticas en otras disciplinas. Los trabajos presentados en Números, Álgebra y Lógica ocupan también un lugar destacado.

Revisando en detalle el conjunto de investigación que se muestran en los Proceedings analizados, la presencia española está muy limitada a investigaciones que se pueden situar en corrientes epistemológicas de lo didáctico y hay apenas representación de investigaciones que incorporen otros marcos teóricos o conceptuales con enfoques cognitivos. Consideramos que ese déficit de trabajos debe ser superado con la presencia de investigadores de la SEIEM que se sitúen en estas otras corrientes de investigación de la Educación Matemática en la Universidad, compartiendo y enriqueciendo con ello los avances de la investigación en el campo de la UME

⁵ European Society for Research in Mathematics Education

⁶ Congress of the European Society for Research in Mathematics Education

Grupos temáticos de trabajo (TWG) ⁷	INDRUM2016		INDRUM2018		INDRUM2020		Total	
	C	P	C	P	C	P	C	P
TWG1. Cálculo y Análisis	13	3	7	0	11	0	31	3
TWG2. Modelización y Matemáticas en otras disciplinas (*)	7	2	10	4	11	2	28	8
TWG3. Numeros, Álgebra y Lógica	8	1	9	0	11	0	28	1
TWG4. Prácticas de los profesores e instituciones. (**)	8	6	8	7	11	3	45	22
TWG5. Prácticas de los estudiantes (**)	10	3	8	3				
TWG6. Transición hacia y dentro de la universidad	0	0	9	0	0	0	9	0
Totales	46	15	51	14	44	5	141	34

Tabla 1: Investigaciones presentadas en los diferentes INDRUM celebrados en los últimos seis años

(*) en el INDRUM 2020 se incorporó en este grupo temático Matemáticas para ingenieros

(**) en el INDRUM 2020 se configuró un único Grupo temático combinando el 4 y el 5

EL FORTALECIMIENTO DE DIFERENTES MARCOS CONCEPTUALES Y TEÓRICOS

Artigue (2019) desarrolla un análisis sobre la evolución que ha habido en el ámbito de investigación de la Didáctica de la Matemática en la Universidad. Dicha evolución la caracteriza a partir de diferentes ideas que se relacionan principalmente la complementación de las perspectivas epistemológicas y la aproximación sociocultural. Destaca que no existen rupturas entre las diferentes perspectivas, sino que en algunos casos se podrían considerar como enriquecimiento de las tales enfoques teóricos.

Si se analizan en detalle los diferentes congresos de la sociedad de investigación europea CERME y se revisan las diferentes investigaciones que aparecen en los Proceedings de los INDRUM, se puede observar una cierta preponderancia en los informes de la investigación de diferentes aproximaciones asociadas a la corriente francesa de la Didáctica de la Matemática, que lideran de alguna manera los avances en sus marcos teóricos. Desde la perspectiva cognitiva, el marco teórico APOE⁸ de Dubinski ha recibido muchas aportaciones de las investigaciones que se han presentado en las diferentes comunicaciones, pósteres y Tesis Doctorales derivados de la SEIEM (Anexos 1, 2 y 3),

Otra evidencia que permite reconocer este fortalecimiento proviene de sus propios productos la *Encyclopedia of Mathematics Education* publicada en su segunda edición recientemente (Lerman, 2020) y que ha incorporado nuevas entradas (un total de nueve referencias nuevas) relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario, mientras que en la primera edición había una única referencia (Artigue, 2019). Las diez referencias que se pueden encontrar en esta segunda edición son las siguientes:

⁷ TWG1: Calculus and Analysis

TWG2: Mathematics for engineers; Mathematical Modelling; Mathematics and other disciplines

TWG3: Number, Algebra, Logic

TWG4: Students' practices

TWG5: Teachers' practices

TWG6: Transition to and across university

⁸ Acción-Proceso-Objeto-Esquema

- Abstract Algebra Teaching and Learning (Hausberger, T.) p. 5-8
- Analysis Teaching and Learning (Winsløw, K.) p. 50-53
- Differential Equations Teaching and Learning (Kwon, O.N.) p. 220-223
- Linear Algebra Teaching and Learning (Trigueros, M. & Wawro, M.) p. 474-478
- Logic in University Mathematics Education (Durand-Guerrier, V. & Dawkins, P. C.) p.481-485
- Preparation and Professional Development of University Mathematics Teachers (Jaworski, B.) (670-675
- Secondary-Tertiary Transition in Mathematics Education (Gueudet, G. & Thomas, M.O.J.)762-766
- Service Courses in University Mathematics Education (Hochmuth, R.) p. 770-774
- Teaching Practices at University Level (Nardi, E. & Rasmussen) p. 840-844
- University Mathematics Education (Winsløw C. & Rasmussen C.) p. 881-890

Pese a que no constituyen un número elevado de referencias, puede interpretarse, a partir del análisis de estas entradas de la *Encyclopedia*, el importante papel que ha jugado el reforzamiento de los diferentes Marcos teóricos y conceptuales en la incorporación de estos tópicos, específicamente situados en el campo de investigación de la UME.

DIVERSIFICACIÓN DEL TIPO DE INVESTIGACIONES

El cambio de planes de estudios para la formación matemática de los estudiantes universitarios consideramos que ha jugado un papel importante en la investigación. En concreto, en los estudios para la obtención del título de graduado en Matemáticas y Física la disminución de cursos, ha provocado en nuestro país una sintetización en la metodología de enseñanza que ha hecho que esos estudiantes tengan muchas dificultades a la hora de aprender lo que es una demostración o prueba matemática lo que viene condicionado por sus propias concepciones o creencias sobre la prueba. En (Jerez-Santana, 2021) se presentan los resultados de un estudio exploratorio desarrollado con el objetivo de

Analizar las concepciones y creencias que tienen los estudiantes de primeros cursos universitarios sobre el papel de la prueba en su aprendizaje de las matemáticas, así como el tipo de argumentaciones que consideran más rigurosas, válidas, claras y más comunicables a los demás, cuando se encuentran con una situación, propiedad o resultado matemático (p. 18)

En el aprendizaje de las matemáticas por parte de estudiantes universitarios, varias investigaciones han mostrado que los estudiantes consideran más importante el formato de la prueba de una afirmación matemáticas que en el propio contenido de las mismas (Harel y Sowder, 1998) otras investigaciones concluyen que existe una resistencia por parte de los estudiantes a utilizar diagramas y esquemas visuales para justificar y dar explicaciones sobre la falsedad o veracidad de las tesis planteadas (González-Martín y Camacho-Machín, 2004). Por otra parte, Stylianou et al. (2015) afirman en su investigación, que los estudiantes universitarios sienten una predilección hacia el empleo de argumentos de tipo deductivo para hacer justificaciones de resultados o proposiciones matemáticas, aunque dependiendo preferentemente de la naturaleza de relación que se estaba estudiando y el contexto de uso.

(Jerez-Santana, 2021) realiza un estudio con 66 estudiantes de primer curso universitario (42 del Grado en Física y 24 del Grado en Matemáticas) adaptando los instrumentos utilizados en la investigación desarrollada por (Stylianou et al., 2015) con el objetivo de explorar, tanto “la relación entre las creencias de los estudiantes respecto a las pruebas y su comprensión, como el tipo de argumentos que prefieren cuando se les presenta la justificación o prueba de un argumento relativamente sencillo” (Jerez-Santana y Camacho-Machín, 2021).

Se utilizó un cuestionario dividido en tres partes. En la primera parte se hacía una recopilación de datos de los estudiantes. La segunda parte era la parte central de dicho cuestionario y presentaba cuatro conjeturas o resultados matemáticos elementales (llamadas situaciones), con cuatro preguntas para cada situación, dando lugar a dieciséis preguntas. Se trataba de conocer qué tipo de justificación prefieren los estudiantes como prueba de cada una de las afirmaciones o propiedades que se presentaban, así como cuál darían ellos si se les pidiese que eligieran una, cuál era más rigurosa, y cuál más clara y cuál más consistente. También se les preguntaba su opinión sobre el valor de cada justificación. Esas preguntas se adaptaron del trabajo de Stylianou et al (2015). De esta forma, cada una de las cuatro conjeturas propuestas presentaban cuatro opciones y el estudiante debería elegir una de las justificaciones propuestas, como la justificación “más valorada por el profesor si así lo hiciese”. Las justificaciones incorporadas en el cuestionario presentaban cuatro argumentaciones.

- Un argumento específico o empírico,
- Un argumento presentado en forma visual o gráfica,
- Un argumento escrito en forma narrativa que es en cierta manera deductivo y que se denomina deductivo-narrativo y
- Una prueba deductiva escrita formalmente con argumentaciones lógicas que se denominará deductivo-simbólico.

La Figura 1 muestra una de las situaciones propuestas (igualdad algebraica) con sus cuatro justificaciones.

SITUACIÓN 2
Si a, b son dos números reales, entonces $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Justificación A
Es cierto, pues solo hay que aplicar la definición de potenciación, la ley distributiva y la ley conmutativa de la suma y del producto.

Justificación B
Por la definición,
$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b).$$

Por la ley distributiva,
$$(a + b)(a + b) = (a + b)a + (a + b)b.$$

Nuevamente por la ley distributiva,
$$(a + b)a + (a + b)b = aa + ba + ab + bb.$$

Por la definición, la ley conmutativa del producto y de la suma
$$aa + ba + ab + bb = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Justificación C

- Si $a = 1$ y $b = 3.5$, entonces
$$(1 + 3.5)^2 = 4.5^2 = 20.25 = 1 + 12.25 + 7 = 1^2 + 3.5^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3.5.$$
- Si $a = -\frac{1}{2}$ y $b = \frac{1}{3}$, entonces
$$\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right).$$
- Si $a = -\pi$ y $b = -3$, entonces
$$(-\pi - 3)^2 = (-(3 + \pi))^2 = (3 + \pi)^2 = (3 + \pi)(3 + \pi) = 3^2 + 3 \cdot \pi + \pi \cdot 3 + \pi^2 = 3^2 + \pi^2 + 2 \cdot 3 \cdot \pi.$$

He elegido aleatoriamente distintos tipos de reales y la fórmula se ha verificado en todos los casos.
Así, si a, b son dos números reales, entonces
$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Justificación D

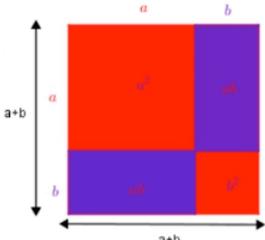


Figura 1. La situación 2 y sus argumentos: deductivo-narrativo (A), comprobación empírica (B), deductivo-simbólico (D), y visual o gráfico(C).

Se pide a continuación que los estudiantes indiquen cual de estas justificaciones elegirían para presentar a alguien, cuál considerar más rigurosa y cuál más clara (Figura 2) finalmente la Figura 3 muestra la pregunta que se hace a los estudiantes en relación con su opinión sobre cada una de las justificaciones para los cuatro argumentos.

10. De las justificaciones presentadas anteriormente, ¿cuál se aproxima más a la respuesta que tú darías?

(a) Justificación A.
 (b) Justificación B.
 (c) Justificación C.
 (d) Justificación D.

11. ¿Qué justificación consideras más rigurosa matemáticamente?

(a) Justificación A.
 (b) Justificación B.
 (c) Justificación C.
 (d) Justificación D.

12. ¿Cuál es para ti es la más clara?

(a) Justificación A.
 (b) Justificación B.
 (c) Justificación C.
 (d) Justificación D.

Figura 2. Opinión sobre la claridad y rigurosidad de las justificaciones sobre los cuatro argumentos

13. Para cada justificación señala lo que opinas (solo una por solución).

	Justificación A	Justificación B	Justificación C	Justificación D
Es imperfecta lógicamente				
Es un argumento correcto, pero no riguroso				
No es una demostración, sino una comprobación				
Es un argumento consistente				

Figura 3. Opinión sobre si es consistente, riguroso o si no es una demostración

Del análisis de los resultados obtenidos, se observa que existe una tendencia mayoritaria, a elegir preferentemente las argumentaciones de tipo deductivo-simbólico, así como una resistencia generalizada a seleccionar la argumentación visual para justificar cualquier tipo de relación, ya sea geométrica o numérica. Esto difiere de los resultados de Stylianou et al. (2015), quienes encontraron que la predilección por el argumento deductivo se reduce prácticamente a la mitad y que el argumento visual constituye elección más elegida por los participantes en su investigación al justificar una relación geométrica.

La predilección por el argumento deductivo-simbólico no parece fortuita, pues tal y como muestra el análisis, la mayor parte de los participantes consideraron que es la justificación más rigurosa y la más fácil de comprender. Se puede concluir además que los estudiantes del Grado en matemáticas son más proclives a considerar como claras las justificaciones de tipo deductivo-simbólico que los estudiantes de la otra especialidad. En contrapartida, los estudiantes del Grado en Física se inclinan más a considerar como claras las comprobaciones empíricas que los de matemáticas. En estas preferencias, también se mostraron diferencias con los resultados de la investigación de Stylianou et al. (2015), mayoritariamente los estudiantes encuestados consideraron los argumentos narrativos mayoritariamente cuando se trata de una relación numérica y el

argumento visual, cuando se trata de una propiedad geométrica.

UNA POSIBLE AGENDA DE INVESTIGACIÓN

De cara a establecer una agenda de investigación para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en nuestro país, conviene tener más en cuenta lo que hasta ahora lo que está ocurriendo en el ámbito internacional. Si hacemos una comparación del tipo de trabajos que se recogen en las Actas de la SEIEM y de los Proceedings de los INDRUMs, se puede observar que existen algunas semejanzas entre los temas tratados, pero también algunas diferencias. El agrupamiento por temas de investigación podría ser de ayuda para esto.

Del análisis detallado de las diferentes comunicaciones y pósteres, se puede observar cómo hay un número amplio de las investigaciones que han dado lugar a las comunicaciones son encaminadas al estudio de las matemáticas por parte de estudiantes de otros estudios diferentes al Grado de Matemáticas.

Habría que potenciar los estudios centrados en la enseñanza y aprendizaje de estudiantes de las diferentes ingenierías, ciencias experimentales, económicas y otras ciencias que requieran una formación matemática diferente a la de los matemáticos. Es necesario dar un impulso a la investigación sobre la modelización matemática pero analizado desde otras perspectivas diferente a las epistemológicas.

Desde nuestra perspectiva, las investigaciones del campo afectivo, relacionadas con las creencias y concepciones sobre las matemáticas, la enseñanza y sobre su propia naturaleza, deberían jugar un papel importante.

Las prácticas tanto de los profesores como los estudiantes y las instituciones, deben también conformar una línea de investigación que en la actualidad es poco atendida en nuestro país.

Pese a que hay algunos estudios sobre la transición del bachillerato a la universidad, requieren también de una mayor atención.

Desde hace ya décadas, las TIC están a la disponibilidad de todos los estudiantes universitarios, por lo que es fundamental seguir desarrollando investigaciones en torno al uso de esos recursos como materiales de apoyo para el aprendizaje.

La resolución de problemas haciendo uso de tecnologías digitales es también esencial. Hay una escasez de proyectos de investigación que emplean para su desarrollo Entornos dinámicos de trabajo como GeoGebra.

Es también importante determinar el papel de la prueba y la argumentación en el aprendizaje de las matemáticas en el nivel universitario. El uso de los diferentes teoremas matemáticos sin entender y distinguir la hipótesis de la tesis y el desarrollo de argumentos que los justifiquen requieren también de mayor atención.

Estamos de acuerdo con (Artigue, 2019) cuando señala que la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas en el nivel universitario (UME) requiere de, no solamente intentar comprender sus procesos de enseñanza y aprendizaje “sino también desarrollar acciones didácticas en sintonía con las visiones epistemológicas, cognitivas y didácticas que sustentaban la investigación y nutriéndose de los conocimientos que ésta producía” (p. 88), estas acciones didácticas se refieren al desarrollo de investigaciones basadas en propuestas innovadoras de enseñanza. También será importante incorporar a la agenda elementos que se derivan de las prácticas de enseñanza, como señala Artigue (2019), tales como:

- El desarrollo de cursos de matemáticas para la transición del Bachillerato a la Universidad

- La potenciación del trabajo colaborativo (estudiantes, profesores y especialistas en didáctica de las matemáticas)
- La ampliación de recursos tecnológicos para apoyar el trabajo de los estudiantes y de los docentes
- La formación del profesorado universitario

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido subvencionado por el Proyecto de Investigación del Plan Nacional del MICINN con Referencia EDU2017-84276-R.

Referencias

- Artigue, M. (2019). Evolución de las investigaciones en Didáctica de la Matemática a nivel universitario. *Revista de la Academia de Ciencias Canaria* 31, 75-93.
- Camacho, M. (2011) Investigación en Didáctica de las Matemáticas en el Bachillerato y primeros cursos de Universidad". En Marín, M. Fernández, G., Blanco, L. y Palarea, M. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XV*, pp. 195-223. Universidad Castilla la Mancha.
- Durand-Guerrier, V., Hochmuth, R., Goodchild, S. & Hogstad, N. M. (Eds.), *Proceedings of the Second Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*. 2018. Kristiansand, Norway: University of Agder and INDRUM.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM2018>
- Gutiérrez, A.; Boero, P. (Eds.)(2006) *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from an exploratory study. In A.H. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research in college mathematics education III* (pp. 234-283). Providence: American Mathematical Society.
- Hausberger, T. Bosch, M. & F. Chellougui, F. (Eds.), *Proceedings of the Third Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*. 2020. Bizerte, Tunisia: University of Carthage and INDRUM.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM2020>
- González-Martín, A. S. y Camacho, M. (2004). Legitimization of the graphic register in problem solving at the undergraduate level. The case of the improper integral. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 479-486.
- Jerez-Santana, K. O. (2021) *Preferencias sobre la prueba en Matemáticas: un estudio exploratorio con estudiantes del primer curso de los Grados de Física y Matemática*. Trabajo de Fin de Máster (sin publicar). Universidad de La Laguna. España.
- Jerez-Santana, K. O.; Camacho-Machín, M. (2021) Preferencias sobre la prueba en Matemáticas: un estudio exploratorio con estudiantes del primer curso de los Grados de Física y Matemática. (Pendiente de publicar en este mismo Volumen).
- Lerman (Ed.) (2020). *Encyclopedia of Mathematics Education (second edition)*. New York: Springer.
- Lester, F.K. (Ed.) (2007) *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte: Information Age Publishing

Nardi, H., Winsløw, C., & Hausberger, T. (eds.) *Proceedings of INDRUM 2016 First conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*. 2020. Montpellier : University of Montpellier and INDRUM.

<http://indrum2016.sciencesconf.org/conference/indrum2016/pages/indrum2016proceedings.pdf>

Stylianou, D., Blanton, M. y Rotou, O. (2015). Undergraduate Students' Understanding of Proof: Relationships Between Proof Conceptions, Beliefs, and Classroom Experiences with Learning Proof. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1, 91-134.

ANEXO 1. COMUNICACIONES

Referencia	Simposio	CÓD
Cañadas, G., Díaz, C., Batanero, C. y Arteaga, P. (2011). Estimación de la asociación por estudiantes de psicología. En Actas del 15º Simposio de la Sociedad Española de Investigación de Educación Matemática. Ciudad Real. SEIEM Pp. 297-305.	2011	C1
Montoro Medina, A. B. y Gil Cuadra, F. (2011). Concentración y disfrute con actividades matemáticas. En Actas del 15º Simposio de la Sociedad Española de Investigación de Educación Matemática. Ciudad Real. SEIEM Pp. 451-460.		C2
Silva Muslera, A. y De La Torre Fernández, E. (2011). La herramienta arrastre en funciones usando geogebra. En Actas del 15º Simposio de la Sociedad Española de Investigación de Educación Matemática. Ciudad Real. SEIEM Pp. 555-564.		C3
Almeida, R., Bruno, A., Perdomo-Díaz, J. (2012). Sentido numérico de alumnado del Grado en Matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 99 - 111). Jaén: SEIEM.	2012	C4
Cañadas, G.R., Batanero, C., Díaz, C., Gea, M.M. (2012). Comprensión del test chi-cuadrado por estudiantes de Psicología. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 153 - 163). Jaén: SEIEM.		C5
Martins, J.A., Nascimento, M.M., Estrada, A. (2012). Caminando: las actitudes hacia la estadística en estudiantes universitarios en el norte de Portugal. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 375 - 383). Jaén: SEIEM.		C6
Rodríguez, F., Gutiérrez, A. (2012). Software DeMMA TTouL: una herramienta para la investigación sobre la estructura argumentativa de la demostración. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 457 - 468). Jaén: SEIEM.		C7
Rodríguez del Tío, P., Hidalgo, S., Palacios, A. (2012). La ansiedad matemática en alumnos de Grados en Estadística. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 469 - 478). Jaén: SEIEM.		C8
Cañadas, G. R., Batanero, C., Estepa, A. y Arteaga, P. (2013). Juicios de asociación en tablas de contingencia con datos ordinales. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 209-217). Bilbao: SEIEM.	2013	C9
Delgado, M. L., González, M.T., Monterrubio, C. y Codes, M. (2013). El mecanismo collecting para la comprensión del concepto de serie numérica. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 245-252). Bilbao: SEIEM.		C10
Ordóñez, C., Ordóñez L. y Contreras, A. (2013). Significados personales acerca de una demostración en Teoría de Números con Mathematica. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 411-420). Bilbao: SEIEM.		C11
Cañadas, G. R., Batanero, C., Arteaga, P., Gea, M. M. (2014). Medidas de asociación en tablas 2x2: evaluación de una experiencia de enseñanza con estudiantes universitarios. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVIII (pp. 207-216). Salamanca: SEIEM.	2014	C12
Gaita, C. y Ortega, T. (2014). Unidades elementales en problemas de lugar geométrico en los cuadros geométrico y algebraico. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVIII (pp. 317-326). Salamanca: SEIEM.		C13
González-Ruiz, I., Ruiz-Hidalgo, J. F., Molina, M. (2014). Influencia de los conceptos topológicos en la definición de límite finito de una función en un punto en libros de texto de cálculo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVIII (pp. 385-394). Salamanca: SEIEM		C14

Nascimento, M. M., Martins, J. A., Estrada, A. (2014). La vida es sueño: proyectos de estadística en ingenierías. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XVIII</i> (pp. 475-483). Salamanca: SEIEM		C15
Soneira, C., Souto, M. J., Tarrío, A. D. (2014). La variable sintáctica en el paso del lenguaje natural al algebraico. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XVIII</i> (pp. 563-572). Salamanca: SEIEM.		C16
Boigues, F. J., Estruch V. y Vidal A. (2015). El perfil afectivo/matemático de estudiantes de Ciencias e Ingeniería. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XIX</i> (pp.183-190). Alicante: SEIEM.	2015	C17
Fuentealba C., Badillo E. y Sánchez-Matamoros G. (2015). Fases en la tematización del esquema de la derivada: comprensión en alumnos universitarios. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XIX</i> (pp. 259-268). Alicante: SEIEM.		C18
Inzunza, S. y Ward, S. E. (2015). Explorando el razonamiento covariacional mediante un ambiente computacional en un curso introductorio de estadística. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XIX</i> (pp. 317-325). Alicante: SEIEM.		C19
Mendoza, E., Rodríguez, F. M. y Roa, S. (2015). Estudio del concepto matriz de cambio de base en términos de la Teoría APOE. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XIX</i> (pp. 371- 379). Alicante: SEIEM.		C20
Ordóñez, C., Ordóñez L. y Contreras, A. (2015). La divisibilidad en manuales para estudiantes de Ingeniería Informática. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XIX</i> (pp. 431- 440). Alicante: SEIEM.		C21
Cañadas, G. R., Arteaga, P., Contreras, J. M. y Gea, M. M. (2016). Comprensión de medidas de asociación en tablas RxC por estudiantes de Psicología. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XX</i> (pp. 187-196). Málaga: SEIEM.	2016	C22
Vera, O. D., Díaz, C., Batanero, C. y López Martín, M. M. (2016). Evaluación de dificultades en el análisis de varianza elemental por estudiantes de Psicología. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XX</i> (pp. 539-548). Málaga: SEIEM.		C23
González-Ruiz, I., González- López, M. J. y González-Astudillo, M. T. (2018). Contextos médicos de los datos en problemas de inferencia sobre la media en libros de bioestadística. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XXII</i> (pp. 251-260). Gijón: SEIEM.	2018	C24
Ortiz-May, D. (2018). Comparaciones entre argumentos formales e informales. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XXII</i> (pp. 437-446). Gijón: SEIEM.		C25
Rodríguez-Cisneros, L. y Perdomo-Díaz, J. (2019). Modelos para el estudio de la transición entre secundaria y universidad en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. MuñozEscolano y Á. Alsina (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XXIII</i> (pp. 523-532). Valladolid: SEIEM.	2019	C26

ANEXO 2. PÓSTERES

Cárcamo A., Gómez J. y Fortuny J. (2015). La modelización matemática para iniciar la construcción de conjunto generador y espacio generado. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XIX</i> (p. 543). Alicante: SEIEM.	2015	P1
Comas, C., Estrada, A., Nascimento, M. y Martins, A. (2015). Evolución de las actitudes hacia la Estadística en estudiantes de Psicología. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XIX</i> (p. 545). Alicante: SEIEM.		P2
Rodríguez, M. y Sánchez, A. B. (2015). Errores en la sustracción cometidos por estudiantes universitarios. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XIX</i> (p. 585). Alicante: SEIEM.		P3
Boigues, F., Estruch, V. y Vidal, A. (2016). Homologando datos virtuales: Una aproximación a la probabilidad frecuencial. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XX</i> (p. 569). Málaga: SEIEM.	2016	P4
Díaz, F. J. y Marbán, J. M. (2016). Análisis de la formación matemática en los actuales grados en Administración y Dirección de Empresas. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XX</i> (p. 591). Málaga: SEIEM.		P5
Gavilán-Izquierdo, J.M. y González, A. (2016). Investigación sobre el concepto de grafo a través del modelo de Van Hiele. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XX</i> (p. 597). Málaga: SEIEM		P6
Marín-Che, A. y Pinto-Sosa, J. (2016). Evaluación de alfabetización estadística en una universidad pública. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XX</i> (p. 619). Málaga: SEIEM.		P7
Mejía, A. y Sánchez, J. G. (2016). Diferencias en actitudes hacia las matemáticas y actitudes matemáticas en estudiantes universitarios de matemáticas e ingeniería. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XX</i> (p. 621). Málaga: SEIEM		P8
Rodríguez, M. M., Sánchez, A. B. y López, R. (2016). Caracterización de la estructura de las sustracciones en las que estudiantes universitarios cometen errores. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XX</i> (p. 635).		P9
Ventura-Campos, N., Arnau, D., Gutiérrez-Soto, J., González-Calero, J. A. y Ávila, C. (2016). Diseño de una investigación sobre el error de inversión y las bases neuronales subyacentes. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XX</i> (p. 655). Málaga: SEIEM.		P10
Díaz, F.J. y Marbán, J.M. (2017). Conexiones de la formación matemática con las competencias profesionales en los actuales Grados en Administración y Dirección de Empresas. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XXI</i> (pp. 513). Zaragoza: SEIEM.	2017	P11
Muñoz Orozco, A., Arenas-Peñaloza, J. y Rodríguez Vásquez, F. M. (2017). Análisis de la comprensión sobre el concepto de función. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XXI</i> (pp. 561). Zaragoza: SEIEM.		P12

Pinto-Rojas, I. y Parraguez, M. (2017). Articulando modos de comprender la derivada desde una perspectiva local. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XXI</i> (pp. 565). Zaragoza: SEIEM.		P13
Piñero, J.C. y Guerrero, A.Á. (2017). Un paso más en el aprendizaje basado en problemas: aprendizaje mixto en enseñanzas superiores. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XXI</i> (pp. 567). Zaragoza: SEIEM.		P14
Sánchez-Cruzado, C., Sánchez-Compañía, T. y García-Pardo, F. (2017). Metodología clase invertida como alternativa para la educación matemática en la enseñanza universitaria. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XXI</i> (pp. 581). Zaragoza: SEIEM.		P15
Ariza Muñoz, E., González-Calero, J. A. y Cozar Gutierrez, R. (2018). Una mirada a las competencias generales y específicas de los futuros licenciados en matemáticas de Colombia. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XXII</i> (p. 608). Gijón: SEIEM.	2018	P16
Díaz, F. J. y Marbán, J. M. (2018). Acotación competencial de la formación matemática en los actuales grados en Administración y Dirección de Empresas. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XXII</i> (p. 622). Gijón: SEIEM.		P17
Alvarado, H. y Retamal, L. (2019). Renovación metodológica en estadística basada en la creación de problemas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XXIII</i> (p. 607). Valladolid: SEIEM.	2019	P18
Cox-Figueroa, E., Maz-Machado, A. y Jiménez-Fanjul, N. (2019). Ideas previas a un curso de cálculo: concepciones de los alumnos sobre continuidad de una función. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XXIII</i> (p. 616). Valladolid: SEIEM.		P19
González, A., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2019). Presencia de la teoría de grafos en la enseñanza de grado en España. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XXIII</i> (p. 622). Valladolid: SEIEM.		P20
González-Ruiz, I, Estrella, S., González, M. J. y González-Astudillo, M. T. (2019). Orientación cognitiva de tareas sobre intervalos de confianza en libros de bioestadística. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XXIII</i> (p. 623). Valladolid: SEIEM.		P21
López-Iñesta, E., García-Costa, D., Grimaldo, F. y Vidal-Abarca, E. (2019). Analítica de datos de aprendizaje en un curso universitario de estadística con <i>Read and Learn</i> . En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XXIII</i> (p. 626). Valladolid: SEIEM.		P22
Pedrosa-Jesús, C., León-Mantero, C., Maz-Machado, A, Casas-Rosal, J. C. y Gutiérrez-Rubio, D. (2019). Género y actitudes hacia las matemáticas en la universidad. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), <i>Investigación en Educación Matemática XXIII</i> (p. 636). Valladolid: SEIEM.		P23

ANEXO 3. TESIS DOCTORALES

TESIS DOCTORAL	AUTOR	DIRECTORES	AÑO	CÓD
Análisis de la Construcción del Concepto de la Derivada en un Primer Ciclo de Enseñanza Superior asistida por Ordenador	María Angélica Vega Urquieta	José Carrillo Yañez y Jorge Soto Andrade	2012	TD1
Estudio de contraste sobre la preferencia y significación de pruebas formales y preformales	Juan Carlos González Vara	Tomás Ortega del Rincón	2012	TD2
La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica	Lidia Serrano	Marianna Bosch y Josep Gascón	2013	TD3
Enseñanza y aprendizaje de ecuaciones diferenciales ordinarias en contexto: una secuencia de enseñanza basada en la interpretación de modelos matemáticos	Carolina Guerrero Ortiz	Hugo Rogelio Mejía Velasco y Matías Camacho Machín	2013	TD4
Análisis del uso del concepto de derivada por estudiantes universitarios en el estudio de conceptos económicos	Ángel Luis Ariza Jiménez	Salvador Llinares Ciscar	2014	TD5
Una posible «razón de ser» del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional.	Catarina Oliveira Lucas.	Dr. Cecilio Fonseca Bon, Dr. Josep Gascón Pérez y Dr. José Manuel Casas Mirás	2015	TD6
El paso de la geometría sintética a la geometría analítica	Rosa Cecilia Gaita Iparraguirre	Tomás Ortega del Rincón	2015	TD7
El Perfil Emocional y Competencial Matemático del Alumnado de Grados en Estadística.	M ^a del Pilar Rodríguez del Tío	Dr. Andrés Palacios Picos y Dr. Tomás Ortega del Rincón	2016	TD8
Análise das eleições e decisões dos Estudantes quando enfrentam situações-problema de matemática	Humberto Plácido Gusmao de Moura	Dra. M ^a Teresa Fernández Blanco	2016	TD9
La enseñanza y aprendizaje de la modelización y las familias de funciones con el uso de GeoGebra en un primer curso de ciencias Administrativas y Económicas en Colombia.	Francisco Infante Mejía	Dr. Luis Puig Espinosa	2016	TD10
Una innovación docente basada en los modelos emergentes y la modelización matemática para conjunto generador y espacio generado	Andrea Cárcamo Bahamonde	Dr. Joan Gómez y Dr. Josep M. Fortuny	2017	TD11
Análisis del esquema de la derivada en estudiantes universitarios	Claudio Fuentealba Aguilera	Dra. Edelmira Badillo, Dra. Gloria Sánchez-Matamoros	2017	TD12
La investigación en didáctica del álgebra lineal: una perspectiva de su contribución a la enseñanza a través de la reflexión sobre la práctica	Ricardo Jorge Castro Gonçalves	Dra. M ^a Cecilia Rosas Pereira Peixoto da Costa y Dra. Paula M ^a Machado Cruz Catarino	2018	TD13

La enseñanza y aprendizaje de la divisibilidad en álgebra superior mediada por un entorno informático.	Carmen Ordóñez Cañada.	Dr. Ángel Contreras de la Fuente y Dra. Lourdes Ordóñez Cañada	2018	TD14
--	------------------------	--	------	------