Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Airam González Dorta

Aplicación del teorema de los residuos de Cauchy a la suma de series

Application of Cauchy's residue theorem to series summation

Trabajo Fin de Grado
Grado en Matemáticas
La Laguna, septiembre de 2021

Dirigido por
María Isabel Marrero Rodríguez
María José Martín Gómez

María Isabel Marrero Rodríguez
Departamento de Análisis
Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

María José Martín Gómez
Departamento de Análisis
Matemático
Universidad de La Laguna
38200 La Laguna, Tenerife

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres por apoyarme en todo momento y a mis tutoras del TFG por ayudarme cuando más lo necesitaba. Muchas gracias a todos.

Airam González Dorta
La Laguna, 6 de septiembre de 2021

Resumen · Abstract

Resumen

Una de las aplicaciones más sorprendentes del cálculo de residuos es su utilidad para obtener sumas de series de números reales (aunque no exclusivamente reales). Esta aplicación se apoya principalmente en el comportamiento de dos funciones complejas de variable compleja: la cotangente y la cosecante, cuyos únicos polos, simples, se encuentran en los enteros.
En el presente trabajo se recopilan varias técnicas de suma de series basadas en el teorema de los residuos de Cauchy, y se deducen diversas fórmulas para sumas finitas y series infinitas particulares que son de difícil o imposible consecución por métodos de análisis real. En la misma línea, se incluye una demostración del teorema de Mittag-Leffler, el cual generaliza la descomposición de funciones racionales en fracciones simples al caso de funciones meromorfas con una infinidad de polos.

Palabras clave: *Números de Bernoulli – Suma de series – Teorema de Mittag-Leffler – Teorema de los residuos.*

Abstract

One of the most amazing applications of the residue calculus is its usefulness for summing series of real numbers (although not exclusively real). This application mainly leans on the behavior of two complex functions of one complex variable: the cotangent and the cosecant, whose only simple poles lie within the integers.
In the present work, several series summation techniques based on Cauchy's residue theorem are compiled, and various formulas for finite sums and particular infinite series that are difficult or impossible to reach by real analysis methods are deduced. Along the same lines, we include a proof of the Mittag-Leffler theorem, which generalizes the partial fraction decomposition of rational functions to the case of meromorphic functions with an infinite number of poles.

Keywords: *Bernoulli numbers – Mittag-Leffler theorem – Residue theorem – Series summation.*

Contenido

Agradecimientos iii

Resumen/Abstract v

Introducción ix

1. Preliminares 1
- 1.1. Integrales y contornos 1
- 1.2. Homotopía 3
- 1.3. Residuos 4
  - 1.3.1. Desarrollo de Laurent 4
  - 1.3.2. Singularidades aisladas 5
  - 1.3.3. Residuos en polos 7
  - 1.3.4. Teorema de Rouché 7

2. Números de Bernoulli 9
- 2.1. Definición y primeras propiedades 9
- 2.2. Algunos resultados sobre suma de series 12

3. Evaluación de sumas finitas e infinitas mediante residuos 15
- 3.1. Preliminares 15
- 3.2. Sumas finitas 19
- 3.3. Sumas infinitas 23
  - 3.3.1. Singularidades no enteras 23
  - 3.3.2. Singularidades enteras 29
  - 3.3.3. Singularidades en cero 35

4. Otros ejemplos 37

5. El teorema de Mittag-Leffler 41

Bibliografía 47

Póster 49

Introducción

Una de las aplicaciones del desarrollo de Laurent

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, (z - z_0)^k$$

de una función $f(z)$ en torno a una singularidad aislada $z = z_0$ consiste en el cálculo de integrales sobre caminos cerrados. En este cálculo, la parte significativa del desarrollo es la correspondiente al coeficiente a_{-1}, coeficiente que es conocido como residuo y que se representa habitualmente por $\operatorname{Res}(f, z_0)$:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1}.$$

La razón para destacar el coeficiente a_{-1} es la siguiente. Cuando se integra $f(z)$ a lo largo de un camino cerrado, simple y positivamente orientado C, contenido en el disco perforado de centro z_0 en el que es válido el desarrollo de Laurent, y que rodea a z_0 una única vez, la convergencia uniforme de la serie sobre la traza de C permite integrarla término a término. La existencia de primitiva para las funciones $(z - z_0)^k$ siempre que $k \neq -1$ anula las integrales correspondientes a estos términos, por lo que únicamente sobrevive una integral, la de coeficiente a_{-1}, que vale $2\pi i$. En consecuencia, a_{-1} es «lo que queda» o el «residuo» al integrar:

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\, dz &= \int_C \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, (z - z_0)^k \right] dz \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_C (z - z_0)^k \, dz \\
&= a_{-1} \int_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i \, a_{-1}.
\end{aligned}$$

Se comprende entonces la importancia de los residuos: suponiendo (sin pérdida de generalidad) que $f(z)$ no tiene en el dominio rodeado por C más singularidades que z_0, el cálculo de la integral se reduce al cálculo de $\operatorname{Res}(f, z_0)$.

La fundamentación del análisis complejo en general, y del cálculo de residuos en particular, se debe al matemático francés Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Cauchy llegó al concepto de residuo en 1814, en su primer artículo sobre integración compleja, al estudiar la diferencia entre dos integrales $\int_{C_1} f(z)\,dz$, $\int_{C_2} f(z)\,dz$, cuando C_1 y C_2 son caminos con los mismos puntos extremos y tales que la región comprendida entre las trazas de C_1 y C_2 encierra polos de $f(z)$.

El propio término «residuo» data de 1826 y también es debido a Cauchy. En los 40 años que siguieron a la introducción de este concepto, Cauchy desarrolló su teoría de residuos hasta el extremo de convertirla en una disciplina independiente, con aplicaciones a múltiples ramas de las matemáticas: teoría de ecuaciones, teoría de números, análisis matricial, evaluación de integrales definidas reales, suma de series finitas e infinitas, desarrollo de funciones en series y productos infinitos, ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, física teórica, física matemática, cálculo de diferencias finitas, ecuaciones en diferencias, funciones especiales, transformaciones integrales...

Desde entonces, la práctica totalidad de los manuales publicados sobre análisis complejo dedican un capítulo o, al menos, una sección al cálculo de residuos, generalmente restringiendo sus aplicaciones a la evaluación de integrales y a la suma de series. De hecho, esta segunda aplicación no se suele estudiar en un curso introductorio de variable compleja, como el que se imparte en el tercer curso del Grado en Matemáticas de esta universidad, ya que recurre a funciones trigonométricas complejas, tanto circulares como hiperbólicas, e involucra estimaciones que la mayoría de los estudiantes de este nivel perciben como artificiales y de difícil manejo. Otras aplicaciones ni siquiera son mencionadas, o lo son muy raramente. Por otra parte, en la literatura existen escasas monografías dedicadas enteramente al cálculo de residuos [6, 7, 8, 10, 11, 14] (la más reciente data de 1984-1993), y el acceso a algunas de ellas no es sencillo.

Las consideraciones anteriores han motivado la elección del tema de este trabajo. Para su desarrollo nos hemos basado fundamentalmente en la selección que Alotaibi [1] (donde, por cierto, hemos detectado varias erratas/errores) hace de [2] y del tratado de Mitrinović y Kečkić [11], selección que hemos intentado enriquecer con diversas aportaciones personales. Los dos volúmenes de la extensa monografía [11] cubren prácticamente todas las aplicaciones conocidas del cálculo de residuos, e incluyen una breve semblanza de la vida y obra de Cauchy así como del desarrollo histórico de la teoría. Por supuesto, el vastísimo material y referencias que dicha monografía alberga pueden ser objeto de futuros estudios de ampliación sobre este tema.

Hemos estructurado la memoria en cinco capítulos. Al objeto de que la redacción sea, en lo posible, autocontenida, en el capítulo 1 se recuerdan algunas definiciones y resultados básicos sobre integración compleja y cálculo de residuos. En el capítulo 2 se exploran las principales propiedades de los números de Bernoulli, una familia de racionales que comparece en la obtención de diversas sumas de series infinitas importantes, algunas de las cuales se recogen ya en este mismo capítulo. En el capítulo 3 se aplica la teoría de residuos para desarrollar métodos que permitan calcular sumas de la forma $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$, donde $f(z) = p(z)/q(z)$ es una función racional tal que el grado del polinomio denominador, $\delta q(z)$, supera, al menos, en dos unidades al grado $\delta p(z)$ del polinomio numerador: $\delta q(z) - \delta p(z) \geq 2$. Se distinguen aquí dos secciones dedicadas, respectivamente, a sumas finitas y sumas infinitas y, dentro de esta última, tres subsecciones según que se consideren singularidades no enteras, singularidades enteras y, específicamente, singularidades en cero. En el capítulo 4 se ilustra la obtención de algunas sumas finitas e infinitas particulares mediante técnicas que, si bien se apoyan en el cálculo de residuos, difieren de las estudiadas en el capítulo 3. Finalmente, en el capítulo 5 se aborda el teorema de Mittag-Leffler como generalización de la descomposición en fracciones simples de una función racional al caso de una función meromorfa con infinitos polos, cuya demostración hace uso del teorema de los residuos. La memoria concluye con la relación de, entre otras, las principales referencias consultadas, junto con el preceptivo póster en inglés que resume el contenido de la misma.

1

Preliminares

Al objeto de que la memoria sea, en lo posible, autocontenida, en el presente capítulo se recuerdan muy sucintamente algunas definiciones y resultados básicos sobre integración compleja y cálculo de residuos.

1.1. Integrales y contornos

Definición 1.1. *Sea C una curva en $\mathbb{C}$. Se dice que $\gamma : [a, b] \to C$ parametriza C, si γ es suprayectiva y continua. Además, se dice que C es regular si admite una parametrización derivable, con derivada continua no nula.*

La orientación de C viene dada por su parametrización: $\gamma(a)$ «va antes que» $\gamma(b)$. Cuando $\gamma : [a, b] \to C$ parametriza C, es fácil ver que $\gamma(a + b - t)$ es también una parametrización de C pero con orientación opuesta. Esta nueva curva se denota por $-C$.

Definición 1.2. *Un contorno C es la unión de un número finito de curvas regulares $C_1, C_2, \dots, C_n$, tales que el extremo de C_k coincide con el origen de C_{k+1}, para cada $k = 1, 2, \dots, n-1$. Escribimos $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$.*

Definición 1.3. *Se dice que el contorno C es cerrado si su origen y su extremo coinciden.*

Definición 1.4. *Un contorno cerrado está orientado positivamente cuando su parametrización permite recorrerlo dejando a la izquierda su región interior.*

Definición 1.5. *Se dice que un contorno C es simple si no se autointerseca, excepto posiblemente en sus extremos. Los contornos simples también se denominan arcos de Jordan.*

Definición 1.6. *Cuando $g : [a,b] \to \mathbb{C}$,*

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}[g(t)]\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}[g(t)]\,dt,$$

donde las integrales del segundo miembro se toman en el sentido de Riemann.

Definición 1.7. *Si $\gamma : [a,b] \to C$ parametriza una curva regular C y $f \circ \gamma$ es integrable sobre C, se define*

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Cuando $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ es un contorno, la integral de contorno de f sobre C es

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)\,dz.$$

Como el valor de la integral es independiente de la parametrización particular utilizada, la Definición 1.7 es consistente. Para comprobar esta afirmación, supongamos que g es una función real con dominio D y consideremos dos parametrizaciones $\gamma : [a,b] \to D$ y $\sigma : [c,d] \to D$, con $\gamma(a) = \sigma(c)$ y $\gamma(b) = \sigma(d)$. Aplicando el teorema del cambio de variable,

$$\int_a^b g(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} g(u)\,du = \int_{\sigma(c)}^{\sigma(d)} g(u)\,du = \int_a^b g(\sigma(t))\sigma'(t)\,dt.$$

El caso general sigue sin más que considerar las partes real e imaginaria por separado. De forma similar se demuestra que con esta definición se satisfacen las reglas de integración esperables, como la linealidad.

Definición 1.8. *Una curva que tiene longitud finita se dice rectificable.*

Teorema 1.9. *Si $\gamma : [a,b] \to C$ es una parametrización regular de una curva C entonces C es rectificable, con longitud*

$$L(C) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

Corolario 1.10 (Estimación ML). *Si existe la integral de f a lo largo de una curva rectificable C, con longitud $L(C)$, y si f está acotada sobre C, entonces*

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le M_f L(C),$$

donde M_f es el máximo de $|f|$ sobre C.

En análisis complejo se dispone de un análogo al teorema fundamental del cálculo del análisis real.

Definición 1.11. *La función F es una primitiva de la función f en el conjunto G si*

$$F'(z) = f(z)$$

para todo $z \in G$.

Teorema 1.12. *Sea C un contorno en un abierto G, con extremos z_1 y z_2. Si F es una primitiva de f en G, entonces*

$$\int_C f(z)\,dz = F(z_2) - F(z_1).$$

En un contorno cerrado se tiene $F(z_2) = F(z_1)$, lo que da lugar al

Corolario 1.13. *Sea C un contorno cerrado en un abierto G. Si F es una primitiva de f en G, entonces*

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Llegamos ya a la primera versión de uno de los resultados centrales del análisis complejo.

Teorema 1.14 (Cauchy). *Si C es un contorno cerrado en la bola*

$$B\left(z_0, r\right) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

y f es analítica en $B\left(z_0, r\right)$, entonces

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

Demostración. Como f es analítica en $B\left(z_0, r\right)$, admite un desarrollo en serie de Taylor válido en $B\left(z_0, r\right)$. Antiderivando término a término se obtiene una primitiva para f. Ahora basta con aplicar el corolario precedente. ☐

1.2. Homotopía

Definición 1.15. *Dos curvas planas C_1 y C_2, con origen A y extremo B, son homótopas en $G \subset \mathbb{C}$ si existe una aplicación continua $\Psi : [0,1]^2 \to G$ tal que:*

$\Psi(s,0) = A$ *para cada* $s \in [0,1]$,

$\Psi(s,1) = B$ *para cada* $s \in [0,1]$,

$\Psi(0,t)$ *parametriza* C_1, *y*

$\Psi(1,t)$ *parametriza* C_2.

En lo sucesivo supondremos que ψ es lo suficientemente diferenciable como para producir curvas regulares.

Nótese que, fijado $s \in [0,1]$, la aplicación $\Psi(s,t) : [0,1] \to G$ parametriza alguna curva en G uniendo A con B. Intuitivamente, Ψ produce una «deformación continua» de C_1 en C_2.

Teorema 1.16. *Si dos contornos tienen los mismos extremos e igual orientación en un dominio simplemente conexo G, entonces son homótopos en G.*

Teorema 1.17. *Si f es analítica en un dominio G y si C_1 y C_2 son contornos homótopos en G, entonces*

$$\int_{C_1} f(z)\, dz = \int_{C_2} f(z)\, dz.$$

Los siguientes resultados son de fundamental importancia en análisis complejo.

Teorema 1.18 (Cauchy-Goursat). *Sea C un contorno cerrado simple en un abierto simplemente conexo G. Si la función $f(z)$ es analítica dentro y sobre C, entonces*

$$\int_C f(z)\, dz = 0.$$

Teorema 1.19 (Fórmula integral de Cauchy). *Sea C un contorno simple cerrado, positivamente orientado, y sea $f(z)$ una función analítica dentro y sobre C. Si a es cualquier punto interior a C, entonces, para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$,*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz.$$

1.3. Residuos

1.3.1. Desarrollo de Laurent

Definición 1.20. *Un anillo es una región del plano complejo de la forma*

$$\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\},$$

donde $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$. *Cuando* $R_1 = 0$, *el anillo se suele denominar disco perforado. Si una propiedad se verifica para todo* z *en un disco perforado con centro en* z_0, *decimos que la propiedad es válida cerca de* z_0.

Teorema 1.21 (Laurent). *Toda función* f *analítica en un anillo* D *admite un único desarrollo en serie de la forma*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in D.$$

La serie converge absolutamente en D *y uniformemente en todo anillo cerrado* $\{z \in \mathbb{C} : \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2\}$, *con* $R_1 < \rho_1 < \rho_2 < R_2$. *Además,*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

donde C *es cualquier curva simple cerrada, positivamente orientada, contenida en el interior de* D *y que rodea a* z_0.

Definición 1.22. *La serie descrita en el Teorema 1.21 se denomina serie de Laurent de* f *en* D.

1.3.2. Singularidades aisladas

Definición 1.23. *Se dice que* $z_0 \in \mathbb{C}$ *es una singularidad aislada de la función* f *si existe* $R > 0$ *tal que* f *es analítica en el disco perforado*

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\},$$

pero no en z_0.

Definición 1.24. *Una singularidad aislada* z_0 *de* f *se denomina evitable si existen una función* g *y una constante* $R > 0$ *tales que* g *es analítica en la bola* $B(z_0, R)$ *y se tiene que* $f(z) = g(z)$ *en el disco perforado*

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}.$$

Definición 1.25. *Sea* z_0 *una singularidad aislada de la función* f. *Se dice que* z_0 *es un polo de orden* m *de* f *si existen* $m \in \mathbb{N}$ *y* $r > 0$ *tales que*

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}$$

para alguna función ϕ *analítica en la bola* $B(z_0, r)$, *con* $\phi(z_0) \neq 0$.

Definición 1.26. *Una función f es meromorfa en un dominio D si las únicas singularidades aisladas de f en D son evitables o polos.*

Definición 1.27. *Una singularidad aislada es esencial si no es evitable ni un polo.*

Definición 1.28. *Diremos que f tiene una singularidad aislada en ∞ si $f^*(z) = f(1/z)$ es analítica en un disco perforado con centro en $z = 0$. Es decir, f tiene una singularidad aislada en ∞ si f es analítica en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$, para algún $R > 0$. Además, ∞ será una singularidad evitable, un polo de orden m o una singularidad esencial de f según que $z = 0$ lo sea de f^*.*

Definición 1.29. *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de una función f, analítica en el disco perforado*

$$D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}.$$

El coeficiente a_{-1} del único desarrollo en serie de Laurent de f en D se denomina residuo de f en z_0 y se denota $\operatorname{Res}(f, z_0)$. Dicho de otro modo,

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz,$$

donde C es cualquier curva simple cerrada, positivamente orientada, contenida en el interior de D y que rodea a z_0.

Definición 1.30. *Supongamos que f es analítica en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ y tal que todas las singularidades de f, excepto ∞, están encerradas por la circunferencia positivamente orientada $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$. Definimos entonces*

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-C} f(z)\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz.$$

Teorema 1.31. *Si f es analítica en $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$, para cierto $R > 0$, y todas las singularidades de f, excepto ∞, están en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$, entonces*

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{Res}\left(\frac{f(1/z)}{z^2}, 0\right).$$

Teorema 1.32 (Teorema de los residuos de Cauchy). *Supóngase que f es una función analítica dentro y sobre una curva cerrada positivamente orientada C, excepto por un número finito de singularidades aisladas $z_1, \ldots, z_n$ interiores a C. Entonces,*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_i).$$

Corolario 1.33. *Si f es holomorfa salvo en puntos singulares aislados, la suma de todos los residuos de f (incluyendo el residuo en el infinito) es igual a cero.*

1.3.3. Residuos en polos

Teorema 1.34. *Si* z_0 *es un polo de* f*, entonces* $\lim_{z\to 0} f(z) = \infty$.

Teorema 1.35. *Supongamos que las funciones* g *y* h *son analíticas en* $z = z_0$*, que* h *tiene un cero de orden* n *en* $z = z_0$*, y que* $g(z_0) \neq 0$*. Entonces, la función* $f(z) = g(z)/h(z)$ *tiene un polo de orden* n *en* $z = z_0$*.*

Teorema 1.36. *Si* f *presenta un polo un polo de orden* m *en* z_0*, entonces*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[\frac{(z-z_0)^m f(z)}{(m-1)!} \right].$$

Teorema 1.37. *Sean* p *y* q *funciones analíticas en* z_0*, y supongamos que* $q(z_0) = 0$*,* $p(z_0) \neq 0$*, y* $q'(z_0) \neq 0$*. Si* $f(z) = p(z)/g(z)$ *entonces* z_0 *es un polo simple de* f*, con*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Teorema 1.38. *Si* g *es analítica en* z_0 *y* f *tiene un polo simple en* z_0*, se cumple que*

$$\operatorname{Res}(fg, z_0) = g(z_0) \operatorname{Res}(f, z_0).$$

Teorema 1.39. *Supongamos que* p *es un polinomio de grado al menos 2, con ceros* $z_1, z_2, \ldots, z_n$*. Entonces*

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{p(z)}, z_j \right) = 0.$$

1.3.4. Teorema de Rouché

El resultado siguiente es una consecuencia muy útil del Teorema 1.32.

Teorema 1.40 (Rouché). *Sea* C *un contorno simple cerrado, enteramente contenido en el dominio* D*. Supóngase que* f *y* g *son analíticas en* D*. Si se da la desigualdad estricta*

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad (z \in C),$$

entonces f *y* g *tienen el mismo número de ceros (contados según sus multiplicidades) dentro de* C*.*

2

Números de Bernoulli

Los números de Bernoulli se usan habitualmente en álgebra y teoría de números. En el presente capítulo definimos y exploramos algunas propiedades de esta familia de racionales en el marco del análisis complejo, que aplicaremos en el capítulo 3 a la obtención de algunas sumas infinitas de interés.

2.1. Definición y primeras propiedades

Definición 2.1. *La sucesión de números de Bernoulli* $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ *se define recursivamente mediante las ecuaciones*

$$\begin{cases} B_0 = 1, \\ B_n = \dfrac{-1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k, \quad n \geq 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Lema 2.2. *Sea*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!},$$

y sea $f(z) = 1/F(z)$*. Entonces* $f(z)$ *es analítica en* $B(0, 2\pi)$*, y*

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z}{e^z - 1}, & \text{si } z \neq 0 \\ 1, & \text{si } z = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Demostración. Se tiene que $F(0) = 1$. Para $z \neq 0$, podemos escribir:

$$\frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} = F(z).$$

De aquí sigue (2.2). Esta representación implica que $f(z)$ es analítica cuando $e^z \neq 1$ y en $z = 0$, es decir, cuando $z \neq 2\pi i k$, con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. En particular, $f(z)$ es analítica si $|z| < 2\pi$. □

Teorema 2.3. *Sea*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!},$$

y sea $f(z) = 1/F(z)$. Entonces, para todo $z \in B(0, 2\pi)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n,$$

donde $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ son los números de Bernoulli.

Demostración. Por el Lema 2.2, f es analítica en $B(0, 2\pi)$. Luego, f tiene una serie de Maclaurin convergente en $B(0, 2\pi)$, digamos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Como $f(z)$ y $F(z) = (e^z - 1)/z$ son recíprocas,

$$1 = F(z)f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n.$$

El teorema del producto de Cauchy implica que

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad z \in B(0, 2\pi),$$

donde, para cada n,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!\,(n-k+1)!}.$$

La serie de Maclaurin de 1 tiene coeficientes nulos a excepción de $c_0 = 1$, así que la unicidad de la serie de Taylor obliga a que $c_n = 0$ cuando $n \neq 0$. Consecuentemente, para $n \geq 1$,

$$0 = c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{a_n}{n!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k!\,(n-k+1)!}.$$

Sigue que

$$\begin{aligned} a_n &= -n! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k!\,(n-k+1)!} \\ &= \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!}\, a_k \\ &= \frac{-1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} a_k. \end{aligned}$$

Puesto que $a_0 = B_0$ y $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ tienen igual fórmula de recursión, ambas sucesiones deben ser la misma. □

Definición 2.4. *En vista del Lema 2.2 y el Teorema 2.3, llamamos a* $z/(e^z-1)$ *la función generatriz de los números de Bernoulli y escribimos*

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n,$$

asumiendo el valor 1 *en la singularidad evitable que esta función presenta en* $z=0$.

Corolario 2.5. *Los números de Bernoulli de orden impar son todos nulos, a excepción de* B_1.

Demostración. Se comprueba fácilmente que la función

$$g(z) = \frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} - 1$$

es par. Como

$$\frac{z}{e^z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n, \quad z \neq 0,$$

resulta que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n = \frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} - 1$$

es par. Por consiguiente,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{B_n}{n!}\, z^n.$$

De la unicidad del desarrollo de Maclaurin se concluye que $B_n = -B_n$ cuando $n \geq 3$ es impar, obligando a que $B_n = 0$ en tal caso. □

2.2. Algunos resultados sobre suma de series

Nos apoyamos ahora en los números de Bernoulli para calcular la suma de algunas series. A su vez, estas sumas serán útiles en el capítulo 3 para evaluar nuevas series.

Proposición 2.6. *Para* $|z| < \pi$,

$$z\coth(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!}\, z^{2n}.$$

Demostración. Fijemos z, con $|z| < \pi$. Se tiene:

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\,\frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2}\,\frac{e^{z/2} + e^{-z/2}}{e^{z/2} - e^{-z/2}} = \frac{z}{2}\coth\left(\frac{z}{2}\right).$$

Por otra parte, en virtud de la Definición 2.4,

$$z\coth(z) = \frac{2z}{e^{2z} - 1} + z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\,(2z)^n + \frac{2z}{2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\,(2z)^n.$$

Puesto que $B_{2n+1} = 0$ para todo $n \geq 1$ (Corolario 2.5), esta expresión queda reducida a

$$z\coth(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!}\, z^{2n},$$

como se pretendía. □

Proposición 2.7. *Para* $|z| < \pi$,

$$z\cot(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!}\, z^{2n}.$$

Demostración. Ya que $iz\coth(iz) = z\cot(z)$, reemplazando z por iz en la Proposición 2.6 obtenemos

$$z\cot(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n} i^{2n}}{(2n)!}\, z^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!}\, z^{2n},$$

como habíamos afirmado. □

Proposición 2.8. *Para* $|z| < \pi/2$,

$$\tan(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n}\left(2^{2n} - 1\right) B_{2n}}{(2n)!}\, z^{2n-1}.$$

Demostración. Ya que

$$\tan(z) = \frac{1}{\cot(z)} = \cot(z) - \frac{\cot^2(z) - 1}{\cot(z)} = \cot(z) - 2\cot(2z),$$

si $|2z| < \pi$, la Proposición 2.7 implica:

$$\begin{aligned}
\tan(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}\, z^{2n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{4n-1}B_{2n}}{(2n)!}\, z^{2n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n}\left(1 - 2^{2n}\right)B_{2n}}{(2n)!}\, z^{2n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{2^{2n}\left(2^{2n} - 1\right)B_{2n}}{(2n)!}\, z^{2n-1}.
\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

Proposición 2.9. *Para* $|z| < \pi$,

$$\csc(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{\left(2^{2n} - 2\right)B_{2n}}{(2n)!}\, z^{2n-1}.$$

Demostración. Ya que $\csc(z) = 1/\operatorname{sen}(z)$, para $|z| < \pi$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\csc(2z) &= \frac{1}{2\operatorname{sen}(z)\cos(z)} = \frac{\csc^2(z)}{2\cot(z)} \\
&= \cot(z) - \frac{\cot^2(z) - 1}{2\cot(z)} \\
&= \cot(z) - \cot(2z).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\csc(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n}B_{2n}}{2^{2n-1}(2n)!}\, z^{2n-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n}B_{2n}}{(2n)!}\, z^{2n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\left(2 - 2^{2n}\right)B_{2n}}{(2n)!}\, z^{2n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{\left(2^{2n} - 2\right)B_{2n}}{(2n)!}\, z^{2n-1}.
\end{aligned}$$

□

3

Evaluación de sumas finitas e infinitas mediante residuos

En este capítulo usaremos la teoría de residuos para desarrollar métodos que permitan calcular sumas de la forma $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$, donde $f(z) = p(z)/q(z)$ es una función racional tal que el grado del polinomio denominador, $\delta q(z)$, supera, al menos, en dos unidades al grado $\delta p(z)$ del polinomio numerador: $\delta q(z) - \delta p(z) \geq 2$.

3.1. Preliminares

La técnica para sumar series mediante residuos es similar a la que se aplica al cálculo de integrales. Básicamente, consiste en encerrar dentro de contornos un conjunto cada vez mayor de singularidades para obtener sumas finitas, y luego pasar al límite para deducir la suma infinita deseada.

Dado $n \in \mathbb{N}$, llamaremos contorno básico C_n indistintamente a cualquiera de los dos siguientes, con orientación antihoraria: el cuadrado de centro el origen y lado $2n+1$, y la circunferencia de centro el origen y radio $n + 1/2$.

Nótese que los contornos básicos son simples, cerrados, regulares a trozos y rectificables. Denotaremos por $L(C_n)$ la longitud del contorno C_n.

Lema 3.1. *Fijado $n \in \mathbb{N}$, sea $r_n = n + 1/2$, y sea $0 < \varepsilon < 1$. Si (x, y) está en la intersección de $(x - r_n)^2 + y^2 = \varepsilon^2$ con $x^2 + y^2 = r_n^2$, entonces $|y| > \varepsilon/2$.*

Demostración. Resolviendo el sistema de ecuaciones encontramos que

$$y = \pm\,\varepsilon \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{(2r_n)^2}}.$$

Como $r_n \geq 3/2$ y $\varepsilon < 1$,

$$\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{(2r_n)^2}} > \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} > \frac{1}{2}.$$

Consecuentemente, $|y| > \varepsilon/2$. □

Lema 3.2. *Existe $B > 0$, independiente de n, tal que*

$$|\cot(\pi z)| < B \quad y \quad |\csc(\pi z)| < B$$

para todo z en un contorno básico C_n, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Pongamos $z = x + iy$. Como las funciones $\cot(z)$ y $\csc(z)$ son impares, no se pierde generalidad suponiendo $y \geq 0$. Entonces

$$\left|e^{2\pi iz}\right| = e^{\mathrm{Re}(2\pi iz)} = e^{-2\pi y} \leq 1, \qquad \left|e^{\pi iz}\right| = e^{\mathrm{Re}(\pi iz)} = e^{-\pi y} \leq 1. \tag{3.1}$$

Sea $z \in B\,(1/2, 1/4)$. Se tiene que $1/4 < x < 3/4$, así que $\cos(2\pi x) < 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\left|e^{2\pi iz} - 1\right| &\geq \left|\mathrm{Re}\left(e^{2\pi ix-2\pi y} - 1\right)\right| \\
&= \left|\mathrm{Re}\left(e^{-2\pi y}[\cos(2\pi x) + i\,\mathrm{sen}(2\pi x)] - 1\right)\right| \\
&= \left|e^{-2\pi y}\cos(2\pi x) - 1\right| \\
&= 1 - e^{-2\pi y}\cos(2\pi x) \\
&\geq 1. \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

Combinando (3.1) y (3.2) resulta, para todo $z \in B\,(1/2, 1/4)$:

$$|\cot(\pi z)| = \left|\frac{e^{\pi iz} + e^{-\pi iz}}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}}\right| = \left|\frac{e^{2\pi iz} + 1}{e^{2\pi iz} - 1}\right| \leq \left|e^{2\pi iz}\right| + 1 \leq 2$$

y

$$|\csc(\pi z)| = \left|\frac{2i}{e^{\pi iz} - e^{-\pi iz}}\right| = \left|\frac{2e^{\pi iz}}{e^{2\pi iz} - 1}\right| \leq 2.$$

Fijemos ahora un entero arbitrario $n \geq 1$. Si $z \in B\,(n + 1/2, 1/4)$, entonces $z - n \in B\,(1/2, 1/4)$. Como $|\cot(z)|$ y $|\csc(z)|$ tienen periodo π, encontramos que

$$|\cot(\pi z)| = |\cot(\pi(z-n))| \leq 2 \tag{3.3}$$

y

$$|\csc(\pi z)| = |\csc(\pi(z-n))| \leq 2 \tag{3.4}$$

cuando $z \in S = \cup_{n=1}^{\infty} B\,(n + 1/2, 1/4)$.

Si z está en un cuadrado de vértices $\pm\,(n + 1/2) \pm i\,(n + 1/2)$ pero $z \notin S$, entonces $y \geq 1/4$.

Si z está en una circunferencia de radio $r_n = n + 1/2$ pero $z \notin S$, entonces $y \geq b$, donde (a, b) es un punto en la intersección de $(x - r_n)^2 + y^2 = 1/16$ y $x^2 + y^2 = r_n^2$ en el primer cuadrante. Por el Lema 3.1, $y > 1/8$. Observando que $e^{-2\pi y} < 1$, se infiere que

$$|\cot(\pi z)| = \left| \frac{e^{2\pi i x} e^{-2\pi y} + 1}{e^{2\pi i x} e^{-2\pi y} - 1} \right| \leq \frac{e^{-2\pi y} + 1}{|e^{-2\pi y} - 1|} = \frac{1 + e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} \leq \frac{1 + e^{-\pi/4}}{1 - e^{-\pi/4}}, \tag{3.5}$$

y, similarmente,

$$|\csc(\pi z)| = \left| \frac{2e^{\pi i z}}{e^{2\pi i z} - 1} \right| = \left| \frac{2e^{\pi i x} e^{-\pi y}}{e^{2\pi i x} e^{-2\pi y} - 1} \right| \leq \frac{2e^{-\pi y}}{|e^{-2\pi y} - 1|} \leq \frac{2e^{-\pi/8}}{1 - e^{-\pi/4}}. \tag{3.6}$$

Tomando B como la mayor de las cotas encontradas en (3.3), (3.4), (3.5) y (3.6) ya se obtiene la cota deseada para todo z en cualquier contorno básico. $\square$

Lema 3.3. *Sea n un entero positivo, y sea C_n un contorno básico. Si $f(z) = p(z)/q(z)$ es una función racional tal que $\delta q(z) - \delta p(z) \geq 2$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{C_n} \frac{p(z)}{q(z)} \cot(\pi z)\, dz = 0 \tag{3.7}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \int_{C_n} \frac{p(z)}{q(z)} \csc(\pi z)\, dz = 0. \tag{3.8}$$

Demostración. En virtud del Lema 3.2, $|\cot(\pi z)|$ y $|\csc(\pi z)|$ están acotadas sobre C_n por cierta $B > 0$, independiente de $n \in \mathbb{N}$.

La función $12zf(z)$ es racional, y el grado de su numerador es inferior, al menos, en una unidad al grado de su denominador. Así, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que $|z| \geq N$ implica

$$|2\pi z f(z)| < |12 z f(z)| < \frac{\varepsilon}{B}.$$

Suponemos también que cuando $n \geq N$ todos los polos de f están dentro de C_n. Fijemos $n \geq N$. Si C_n es un cuadrado, dado cualquier $z \in C_n$ tenemos $1 \leq n < |z|$. Sigue que $12|z| = 8|z| + 4|z| > 8n + 4$. Puesto que $n \geq N$, también $|z| > N$ y, en consecuencia,

$$\left| \int_{C_n} f(z) \cot(\pi z)\, dz \right| \leq \int_{C_n} \frac{12|z|}{8n+4} |f(z)|\, B\, |dz| \leq \frac{L\,(C_n)}{8n+4} \frac{\varepsilon}{B} B = \varepsilon,$$

lo que establece (3.7) en el caso en que C_n es un cuadrado. Cuando C_n es una circunferencia, $|z| = n + 1/2$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_n} f(z)\cot(\pi z)\,dz\right| &\leq \int_{C_n} \frac{2\pi|z|}{2\pi(n+1/2)}\,|f(z)|\,B\,|dz| \\ &\leq \frac{L\,(C_n)}{2\pi(n+1/2)}\,\frac{\varepsilon}{B}\,B = \varepsilon,\end{aligned}$$

completando la demostración de (3.7).

La prueba de (3.8) en ambos casos es análoga y se omite. □

Proposición 3.4. *Supongamos que f es analítica en un entero k. Entonces:*

(i) $\operatorname{Res}(f(z)\cot(\pi z),k) = \dfrac{1}{\pi}\,f(k)$.

(ii) $\operatorname{Res}(f(z)\csc(\pi z),k) = \dfrac{(-1)^k}{\pi}\,f(k)$.

(iii) $\operatorname{Res}\left(f(z)\tan(\pi z),\dfrac{2k+1}{2}\right) = \dfrac{-1}{\pi}\,f\left(\dfrac{2k+1}{2}\right)$.

(iv) $\operatorname{Res}\left(f(z)\sec(\pi z),\dfrac{2k+1}{2}\right) = \dfrac{(-1)^{k+1}}{\pi}\,f\left(\dfrac{2k+1}{2}\right)$.

Demostración. (i) Como $\operatorname{sen}(\pi z) = 0$ si, y sólo si, z es un entero k y $\cos(\pi k) \neq 0$, el Teorema 1.37 muestra que $\cot(\pi z) = \cos(\pi z)/\operatorname{sen}(\pi z)$ tiene un polo simple en cada $k \in \mathbb{Z}$, con

$$\operatorname{Res}(\cot(\pi z),k) = \frac{\cos(\pi k)}{[\operatorname{sen}(\pi z)]'|_{z=k}} = \frac{\cos(\pi k)}{\pi\cos(\pi k)} = \frac{1}{\pi}.$$

Consecuentemente, el Teorema 1.38 implica

$$\operatorname{Res}(f(z)\cot(\pi z),k) = f(k)\,\operatorname{Res}(\cot(\pi z),k) = \frac{1}{\pi}\,f(k).$$

(ii) Al igual que en el apartado (i), por el Teorema 1.37 la función $\csc(\pi z) = 1/\operatorname{sen}(\pi z)$ tiene un polo simple en cada entero k, con

$$\operatorname{Res}(\csc(\pi z),k) = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi z)},k\right) = \frac{1}{\pi\cos(\pi k)} = \frac{(-1)^k}{\pi}.$$

Del Teorema 1.38 se desprende que

$$\operatorname{Res}\left(f(z)\csc(\pi z),k\right) = f(k)\operatorname{Res}(\csc(\pi z),k) = \frac{(-1)^k}{\pi}\,f(k).$$

(iii) Ahora, $\tan(\pi z) = \operatorname{sen}(\pi z)/\cos(\pi z)$ y los ceros de $\cos(\pi z)$ son $(2k+1)/2$, con k entero. Por el Teorema 1.37, esos ceros son polos simples de $\tan(\pi z)$, y

$$\operatorname{Res}\left(\tan(\pi z), \frac{2k+1}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left((2\pi k + \pi)/2\right)}{-\pi \operatorname{sen}\left((2\pi k + \pi)/2\right)} = \frac{-1}{\pi}.$$

El Teorema 1.38 permite concluir que

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(f(z)\tan(\pi z), \frac{2k+1}{2}\right) &= f\left(\frac{2k+1}{2}\right)\operatorname{Res}\left(\tan(\pi z), \frac{2k+1}{2}\right)\\ &= \frac{-1}{\pi} f\left(\frac{2k+1}{2}\right).\end{aligned}$$

(*iv*) Puesto que $\sec(\pi z) = 1/\cos(\pi z)$, el Teorema 1.37 asegura, como en (*iii*), que $\sec(\pi z) = 1/\cos(\pi z)$ presenta un polo simple en $(2k+1)/2$ para cada entero k, con

$$\operatorname{Res}\left(\sec(\pi z), \frac{2k+1}{2}\right) = \frac{1}{-\pi \operatorname{sen}\left((2\pi k + \pi)/2\right)} = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi}.$$

Una nueva aplicación del Teorema 1.38 conduce a

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(f(z)\sec(\pi z), \frac{2k+1}{2}\right) &= f\left(\frac{2k+1}{2}\right)\operatorname{Res}\left(\sec(\pi z), \frac{2k+1}{2}\right)\\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{\pi} f\left(\frac{2k+1}{2}\right).\end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

Proposición 3.5. *Para cada $k \in \mathbb{Z}$,*

$$\operatorname{Res}(\pi \coth(\pi z), ik) = 1.$$

Demostración. Haciendo $\operatorname{senh}(\pi z) = 0$ encontramos que $e^{\pi z} - e^{-\pi z} = 0$, o bien $e^{2\pi z} = 1$, así que los ceros de $\operatorname{senh}(\pi z)$ están en $z = ik$, para cada entero k. Como $\cosh(\pi ik) \neq 0$, sigue del Teorema 1.37 que los polos de $\pi \coth(\pi z) = \pi \cosh(\pi z)/\operatorname{senh}(\pi z)$ son simples, con

$$\operatorname{Res}(\pi \coth(\pi z), ik) = \frac{\pi \cosh(\pi ik)}{[\operatorname{senh}(\pi z)]'|_{z=ik}} = \frac{\pi \cosh(\pi ik)}{\pi \cosh(\pi ik)} = 1,$$

como pretendíamos. □

3.2. Sumas finitas

En esta sección probaremos algunos resultados que permiten transformar sumas finitas en integrales.

Teorema 3.6. *Sea f una función analítica en la región G definida por*

$$G = \{z \in \mathbb{C} : \alpha \leq \operatorname{Re} z \leq \beta, \ |\operatorname{Im} z| \leq \delta\},$$

con

$$m - 1 < \alpha < m, \ n < \beta < n + 1 \quad (m, n \in \mathbb{Z}),$$

excepto quizá por un número finito de singularidades no enteras $z_1, \ldots, z_p$. Si $\Gamma = \partial G$, entonces

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} f(z) \cot(\pi z)\, dz - \pi \sum_{j=1}^{p} \operatorname{Res}\left(f(z) \cot(\pi z), z_j\right)$$

y

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^k f(k) = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} f(z) \csc(\pi z)\, dz - \pi \sum_{j=1}^{p} \operatorname{Res}\left(f(z) \csc(\pi z), z_j\right).$$

Demostración. Puesto que cada z_j es interior a Γ, tenemos, por el teorema de los residuos de Cauchy (Teorema 1.32), el Teorema 1.38 y el apartado (i) de la Proposición 3.4, que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(z) \cot(\pi z)\, dz \\
&= \sum_{k=m}^{n} \operatorname{Res}(f(z) \cot(\pi z), k) + \sum_{j=1}^{p} \operatorname{Res}\left(f(z) \cot(\pi z), z_j\right) \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{k=m}^{n} f(k) + \sum_{j=1}^{p} \operatorname{Res}\left(f(z) \cot(\pi z), z_j\right).
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} f(z) \cot(\pi z)\, dz - \pi \sum_{j=1}^{p} \operatorname{Res}\left(f(z) \cot(\pi z), z_j\right).$$

La prueba de la segunda afirmación coincide casi exactamente con la de la primera, con la única diferencia de que debe aplicarse el apartado (ii) de la Proposición 3.4, en lugar del apartado (i).

Así pues, damos por concluida la demostración. □

Observación 3.7. El Teorema 3.6 conduce, como caso particular, al siguiente resultado:

Sea C_n un contorno básico. Si f es analítica en C_n, excepto por un número finito de singularidades $z_1, \ldots, z_m$ rodeadas por C_n, ninguna de las cuales es un entero, entonces

$$\sum_{k=-n}^{n} f(k) = \frac{1}{2i}\int_{C_n} f(z)\cot(\pi z)\,dz - \pi\sum_{j=1}^{m}\operatorname{Res}\left(f(z)\cot(\pi z), z_j\right)$$

y

$$\sum_{k=-n}^{n} (-1)^k f(k) = \frac{1}{2i}\int_{C_n} f(z)\csc(\pi z)\,dz - \pi\sum_{j=1}^{m}\operatorname{Res}\left(f(z)\csc(\pi z), z_j\right).$$

Teorema 3.8 (Lindelöf). *Supongamos que la función f es analítica en la región $G = \{z \in \mathbb{C} : \alpha \leq \operatorname{Re}(z) \leq \beta\}$, y que*

$$\lim_{|y|\to\infty} e^{-2\pi|y|} f(x+iy) = 0 \tag{3.9}$$

uniformemente en G. Si $m, n \in \mathbb{Z}$, con $m-1 < \alpha < m$ y $n < \beta < n+1$, entonces

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + E_{\alpha,\beta},$$

donde

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta} = \lim_{\delta\to\infty} \Bigg(&\int_{\alpha}^{\alpha+i\delta} \frac{f(z)}{e^{-2\pi iz}-1}\,dz + \int_{\alpha}^{\alpha-i\delta} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz}-1}\,dz \\ &- \int_{\beta}^{\beta+i\delta} \frac{f(z)}{e^{-2\pi iz}-1}\,dz - \int_{\beta}^{\beta-i\delta} \frac{f(z)}{e^{2\pi iz}-1}\,dz \Bigg). \end{aligned}$$

Demostración. Fijado $\delta > 0$, sean:

$$\begin{aligned} G_\delta &= G \cap \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| \leq \delta\}, \\ \varGamma &= \partial G_\delta, \\ \varGamma_1 &= \varGamma \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}, \\ \varGamma_2 &= \varGamma \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) < 0\}. \end{aligned}$$

Puesto que f carece de singularidades en G_δ, en virtud del Teorema 3.6 se tiene que

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \frac{1}{2i}\int_{\varGamma} f(z)\cot(\pi z)\,dz.$$

Luego,

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = -\frac{1}{2i}\int_{-\varGamma_1} f(z)\cot(\pi z)\,dz + \frac{1}{2i}\int_{\varGamma_2} f(z)\cot(\pi z)\,dz. \tag{3.10}$$

Es fácil verificar que

$$\frac{1}{2i}\cot(\pi z) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{e^{-2\pi i z}-1}, \tag{3.11}$$

y también

$$\frac{1}{2i}\cot(\pi z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{2\pi i z}-1}. \tag{3.12}$$

Insertando (3.11) y (3.12) en la primera y segunda integrales de (3.10), respectivamente, y aplicando homotopía (Teoremas 1.16 y 1.17), encontramos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} f(k) &= \int_{-\Gamma_1} f(z)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{-2\pi i z}-1}\right)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{2\pi i z}-1}\right)dz\\
&= \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\alpha+i\delta}\frac{f(z)}{e^{-2\pi i z}-1}\,dz + \int_{\alpha}^{\alpha-i\delta}\frac{f(z)}{e^{2\pi i z}-1}\,dz\\
&\quad - \int_{\beta}^{\beta+i\delta}\frac{f(z)}{e^{-2\pi i z}-1}\,dz - \int_{\beta}^{\beta-i\delta}\frac{f(z)}{e^{2\pi i z}-1}\,dz + \int_{\alpha}^{\beta}\frac{f(x+i\delta)}{e^{-2\pi i(x+i\delta)}-1}\,dx\\
&\quad + \int_{\alpha}^{\beta}\frac{f(x-i\delta)}{e^{2\pi i(x-i\delta)}-1}\,dx.\end{aligned}$$

Sin más que hacer $\delta \to \infty$ y tener en cuenta (3.9) ya concluimos

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} f(k) &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to\infty}\left(\int_{\alpha}^{\alpha+i\delta}\frac{f(z)}{e^{-2\pi i z}-1}\,dz + \int_{\alpha}^{\alpha-i\delta}\frac{f(z)}{e^{2\pi i z}-1}\,dz\right.\\
&\quad\left. - \int_{\beta}^{\beta+i\delta}\frac{f(z)}{e^{-2\pi i z}-1}\,dz - \int_{\beta}^{\beta-i\delta}\frac{f(z)}{e^{2\pi i z}-1}\,dz\right)\\
&= \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + E_{\alpha,\beta},\end{aligned}$$

como se pretendía. □

Teorema 3.9 (Lindelöf). *Sea f una función analítica en $G = \{z \in \mathbb{C} : \alpha \leq \operatorname{Re} z \leq \beta\}$, salvo quizá por un número finito de singularidades no enteras $z_1, \dots, z_p$. Si f satisface la condición (3.9) uniformemente en G, y si m, n y $E_{\alpha,\beta}$ son como en el Teorema 3.8, entonces*

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} f(k) &= \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + E_{\alpha,\beta} - \pi\sum_{j=1}^{p}\operatorname{Res}\left(f(z)\cot(\pi z), z_j\right)\\
&\quad - \pi i\sum_{\operatorname{Im} z_j>0}\operatorname{Res}(f,z_j) + \pi i\sum_{\operatorname{Im} z_j<0}\operatorname{Res}(f,z_j).\end{aligned}$$

Demostración. Basta argumentar como en la prueba del Teorema 3.8, teniendo en cuenta la presencia de singularidades en G_δ a la hora de aplicar el Teorema 3.6. □

Teorema 3.10 (Lindelöf). *Supóngase que la función f es analítica en la región $G_\delta = \{z \in \mathbb{C} : \alpha \leq \operatorname{Re} z \leq \beta,\ |\operatorname{Im} z| \leq \delta\}$, excepto quizá por un número finito de singularidades no enteras $z_1, \dots, z_p$, y sean $\Gamma = \partial G$, $\Gamma_1 = \Gamma \cap \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\Gamma_2 = \Gamma \cap \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$. Si $m-1 < \alpha < m$, $n < \beta < n+1$, con $m, n \in \mathbb{Z}$, y si $r \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} (-1)^k f(k) = 2\sum_{k=0}^{r-1} \int_\alpha^\beta f(x)\cos((2k+1)\pi x)\,dx - \pi\sum_{j=1}^{p} \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}, z_j\right)\\ + \int_{\Gamma_1} \frac{e^{2r\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} \frac{e^{-2r\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} f(z)\,dz.\end{aligned}$$

Demostración. El Teorema 3.6 implica

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n} (-1)^k f(k) = -\int_{-\Gamma_1} \frac{f(z)}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}}\,dz + \int_{\Gamma_2} \frac{f(z)}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}}\,dz\\ - \pi\sum_{j=1}^{p} \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{\operatorname{sen}(\pi z)}, z_j\right).\end{aligned}$$

La prueba se completa sustituyendo en la primera y segunda integrales, respectivamente, las expresiones

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} &= -\sum_{k=0}^{r-1} e^{(2k+1)\pi i z} + \frac{e^{2r\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}},\\ \frac{1}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} &= \sum_{k=0}^{r-1} e^{-(2k+1)\pi i z} + \frac{e^{-2r\pi i z}}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}},\end{aligned}$$

válidas para cualquier $r \in \mathbb{N}$. □

3.3. Sumas infinitas

3.3.1. Singularidades no enteras

Teorema 3.11. *Sea $f(z) = p(z)/q(z)$ una función racional, con $\delta q(z) - \delta p(z) \geq 2$. Supongamos además que f tiene polos en $z_1, z_2, \dots, z_m$, ninguno de los cuales es entero. Entonces:*

(i) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = -\pi\sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(f(z)\cot(\pi z), z_j)$, *y*

(*ii*) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k f(k) = -\pi \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(f(z)\csc(\pi z), z_j).$

Demostración. (i) Sea C_n un contorno básico, y asumamos que n es lo suficientemente grande como para que los z_j queden encerrados por C_n. Aplicando la Observación 3.7, se tiene lo siguiente:

$$\sum_{k=-n}^{n} f(k) = \frac{1}{2i}\int_{C_n} f(z)\cot(\pi z)\,dz - \pi \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(f(z)\cot(\pi z), z_j).$$

Haciendo $n \to \infty$ y teniendo en cuenta que, por el Lema 3.3,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{C_n} f(z)\cot(\pi z)\,dz = 0,$$

resulta finalmente

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = -\pi \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}(f(z)\cot(\pi z), z_j).$$

(ii) Es suficiente proceder como en la prueba de (i), sin más que reemplazar cot por csc y $f(k)$ por $(-1)^k f(k)$. □

A continuación mostraremos varios ejemplos ilustrativos de la aplicación del Teorema 3.11, que revisten especial interés o utilidad.

Ejemplo 3.12. Si $ia \notin \mathbb{Z}$, entonces:

(i) $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a)$, y

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}\coth(\pi a) - \frac{1}{2a^2}.$

Resolución. Para probar (i), sea

$$f(z) = \frac{1}{z^2+a^2} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)},$$

donde $z_1 = ia$ y $z_2 = -ia$. La función $f(z)\cot(\pi z)$ tiene un polo simple en z_1 y z_2. Por el Teorema 1.38,

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\cot(\pi z)}{z^2+a^2}, ia\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{\cot(\pi z)}{(z-ia)(z+ia)}, ia\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\cot(\pi ia)}{(ia+ia)} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z-ia)}, ia\right) \\
&= \frac{\cot(\pi ia)}{2ia} = \frac{1}{2ia}\frac{\cos(\pi ia)}{\operatorname{sen}(\pi ia)} \\
&= \frac{1}{2ia}\frac{\cosh(\pi a)}{i\operatorname{senh}(\pi a)} = -\frac{1}{2a}\coth(\pi a).
\end{aligned}
$$

Calculando el residuo en $z_2 = -ia$ de la misma manera se obtiene que

$$
\operatorname{Res}\left(\frac{\cot(\pi z)}{z^2+a^2}, -ia\right) = -\frac{1}{2a}\coth(\pi a).
$$

Consecuentemente, aplicando el Teorema 3.11 ya resulta

$$
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+a^2} = -\pi \sum_{j=1}^{2} \operatorname{Res}\left(\frac{\cot(\pi z)}{z^2+a^2}, z_j\right) = \frac{\pi}{a}\coth(\pi a).
$$

Por paridad, del apartado (i) sigue que

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+a^2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2+a^2} - \frac{1}{a^2}\right) = \frac{\pi}{2a}\coth(\pi a) - \frac{1}{2a^2},
$$

probando (ii). □

Ejemplo 3.13. Si $ia \notin \mathbb{Z}$, entonces

$$
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}\coth(\pi a) + \frac{\pi^2}{2a^2}\operatorname{csch}^2(\pi a).
$$

Resolución. Se considera la función

$$
f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)^2} = \frac{1}{(z-ia)^2(z+ia)^2},
$$

que tiene polos dobles en $z_1 = ia$ y $z_2 = -ia$. El producto $f(z)\cot(\pi z)$ presenta polos dobles en los mismos puntos. Por el Teorema 1.36,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{\cot(\pi z)}{(z^2+a^2)^2}, ia\right) &= \lim_{z\to ia} \frac{d}{dz}\left[\frac{(z-ia)^2\cot(\pi z)}{(z-ia)^2\,(z+ia)^2}\right] \\
&= \lim_{z\to ia} \frac{d}{dz}\left[\frac{\cot(\pi z)}{(z+ia)^2}\right] \\
&= \lim_{z\to ia} \frac{-\pi(z+ia)\csc^2(\pi z) - 2\cot(\pi z)}{(z+ia)^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-2\pi ia\csc^2(\pi ia) - 2\cot(\pi ia)}{(2ia)^3} \\
&= -\frac{\pi i^2\csc^2(\pi ia)}{4a^2} - \frac{i\cot(\pi ia)}{4a^3} \\
&= -\frac{\pi\operatorname{csh}^2(\pi a)}{4a^2} - \frac{\coth(\pi a)}{4a^3}.
\end{aligned}
$$

Similarmente,

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\cot(\pi z)}{(z^2+a^2)^2}, -ia\right) = -\frac{\pi\operatorname{csh}^2(\pi a)}{4a^2} - \frac{\coth(\pi a)}{4a^3}.$$

Aplicamos ahora el Teorema 3.11 para obtener

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(k^2+a^2)^2} = -\pi\sum_{j=1}^{2}\operatorname{Res}\left(\frac{\cot(\pi z)}{(z^2+a^2)^2}, z_j\right) = \frac{\pi^2\operatorname{csh}^2(\pi a)}{2a^2} + \frac{\pi\coth(\pi a)}{2a^3},$$

completando la resolución. □

Ejemplo 3.14. Si $a > 0$ no es un entero, entonces

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+a)^2} = \pi^2\cot(\pi a)\csc(\pi a).$$

Resolución. Sea $f(z) = (z+a)^{-2}$. Como $-a$ no es un entero, la función $f(z)\csc(\pi z)$ tiene un polo doble en $z = -a$. Luego, por el Teorema 1.36,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{1}{(z+a)^2}\csc(\pi z), -a\right) &= \lim_{z\to -a}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z+a)^2}{(z+a)^2}\csc(\pi z)\right] \\
&= \lim_{z\to -a}\left[-\pi\cot(\pi z)\csc(\pi z)\right] \\
&= -\pi\cot(-\pi a)\csc(-\pi a) \\
&= -\pi\cot(\pi a)\csc(\pi a).
\end{aligned}
$$

Del Teorema 3.11 se concluye que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+a)^2} = -\pi[-\pi\cot(\pi a)\csc(\pi a)] = \pi^2\cot(\pi a)\csc(\pi a),$$

como se había afirmado. □

Ejemplo 3.15. Si $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, entonces:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2-a^2} = \frac{1-\pi a\,\cot(\pi a)}{2a^2}.$$

Resolución. Consideremos la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - a^2}.$$

Se trata de una función racional en la que el grado del denominador supera en dos unidades al grado del numerador, y cuyas únicas singularidades son los polos no enteros y simples $z = \pm a$. Por tanto, cabe aplicar el Teorema 3.11 para obtener

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = -\pi \left[\operatorname{Res}\left(f(z)\cot(\pi z), a\right) + \operatorname{Res}\left(f(z)\cot(\pi z), -a\right) \right]. \tag{3.13}$$

Ahora bien, por el Teorema 1.36:

$$\operatorname{Res}\left(f(z)\cot \pi z, a\right) = \lim_{z\to a} (z-a)\frac{\cot \pi z}{(z-a)(z+a)} = \frac{\cot \pi a}{2a},$$

$$\operatorname{Res}\left(f(z)\cot \pi z, -a\right) = \lim_{z\to -a} (z+a)\frac{\cot \pi z}{(z-a)(z+a)} = \frac{\cot(-\pi a)}{-2a} = \frac{\cot \pi a}{2a}.$$

Así, (3.13) se convierte en

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 - a^2} = -\frac{\pi \cot(\pi a)}{a}.$$

Como $f(z)$ es una función par y $f(0) = -1/a^2$,

$$-\frac{\pi \cot(\pi a)}{a} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 - a^2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - a^2} - \frac{1}{a^2}.$$

Despejando, obtenemos finalmente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{1 - \pi a \cot(\pi a)}{2a^2}.$$

□

Ejemplo 3.16. Si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, entonces:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{a \operatorname{senh}(\pi a)}.$$

Resolución. Consideremos la función racional

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}.$$

El grado del denominador de $f(z)$ supera en dos unidades al grado del numerador, y las únicas singularidades de esta función son los polos no enteros y simples $z = \pm ia$. Por el Teorema 1.36:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(f(z)\csc(\pi z), ia\right) &= \lim_{z\to ia}(z - ia)\,\frac{\csc(\pi z)}{(z - ia)(z + ia)}\\
&= \frac{\csc(i\pi a)}{2ia} = \frac{1}{2ia\ \operatorname{sen}(i\pi a)} = \frac{1}{2ia\,[i\operatorname{senh}(\pi a)]}\\
&= -\frac{1}{2a\ \operatorname{senh}(\pi a)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(f(z)\csc(\pi z), -ia\right) &= \lim_{z\to -ia}(z + ia)\,\frac{\csc(\pi z)}{(z - ia)(z + ia)} = \frac{\csc(-i\pi a)}{-2ia}\\
&= \frac{\csc(i\pi a)}{2ia} = -\frac{1}{2a\ \operatorname{senh}(\pi a)}.
\end{aligned}$$

Sin más que apelar al Teorema 3.11 ya obtenemos:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{a\ \operatorname{senh}(\pi a)}.$$

□

Ejemplo 3.17. Si $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, entonces:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4 - a^4} = \frac{1}{2a^4} - \frac{\pi}{4a^3}\left[\cot(\pi a) + \coth(\pi a)\right].$$

Resolución. El argumento es análogo al seguido en ejemplos anteriores y se omite. □

Teorema 3.18. *Supongamos que a, b, t son números reales, con $|b| < |a|$. Entonces*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{at}{\pi^2 k^2 + a^2 t^2}\, e^{i\pi bk/a} = \frac{\cosh(bt)}{\operatorname{senh}(at)}.$$

Demostración. Sea

$$f(z) = \frac{at\, e^{i\pi bz/a}}{\pi^2 z^2 + a^2 t^2} = \frac{at\, e^{i\pi bz/a}}{\pi^2\,(z - z_1)\,(z - z_2)},$$

donde $z_1 = iat/\pi$ y $z_2 = -iat/\pi$. Como estos polos son simples, el Teorema 1.38 proporciona

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{at\, e^{i\pi bz/a}}{\pi^2 z^2 + a^2t^2}\csc(\pi z), z_1\right) &= \frac{at\, e^{i\pi bz_1/a}}{\pi^2\left(z_1 - z_2\right)}\csc\left(\pi z_1\right)\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z-z_1}, z_1\right)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\, e^{-bt}\csc(iat).\end{aligned}$$

De forma similar se obtiene

$$\operatorname{Res}\left(\frac{at\, e^{i\pi bz/a}}{\pi^2 z^2 + a^2t^2}\csc(\pi z), z_2\right) = \frac{1}{2\pi i}\, e^{bt}\csc(iat).$$

Al aplicar el Teorema 3.11 encontramos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\frac{at}{\pi^2k^2 + a^2t^2}\, e^{i\pi bk/a} &= -\pi\sum_{j=1}^{2}\operatorname{Res}\left(\frac{at\, e^{i\pi bz/a}}{\pi^2 z^2 + a^2t^2}\csc(\pi z), z_j\right)\\ &= -\pi\left[\frac{1}{2\pi i}\, e^{-bt}\csc(iat) + \frac{1}{2\pi i}\, e^{bt}\csc(iat)\right]\\ &= \frac{e^{bt}+e^{-bt}}{-2i\operatorname{sen}(iat)} = \frac{\cosh(bt)}{\operatorname{senh}(at)},\end{aligned}$$

completando la prueba. □

3.3.2. Singularidades enteras

Teorema 3.19. *Supongamos que $f(z) = p(z)/q(z)$ es una función racional tal que $\delta q(z) - \delta p(z) \geq 2$. Sean $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ los polos de f, algunos de los cuales pueden ser enteros, y sea $S = \mathbb{Z}\setminus\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$. Se verifica que*

$$\sum_{k\in S} f(k) = -\pi\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}\left(f(z)\cot(\pi z), z_j\right).$$

Demostración. Si $k \in S$ entonces $f(z)\cot(\pi z)$ tiene un polo simple en k, con

$$\operatorname{Res}(f(z)\cot(\pi z), k) = \frac{1}{\pi} f(k)$$

(Proposición 3.4). Sea ahora $n \in \mathbb{N}$ tal que todas las singularidades de f son interiores al contorno básico C_n. En virtud del teorema de los residuos (Teorema 1.32),

$$\int_{C_n} f(z)\cot(\pi z)\, dz = 2\pi i\sum\{\text{residuos de los polos interiores a } C_n\}$$

$$= 2\pi i \sum_{\substack{k\in S\\ |k|<n}} \frac{1}{\pi} f(k) + 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\left(f(z)\cot(\pi z), z_j\right).$$

Basta con hacer $n \to \infty$ y aplicar el Lema 3.3 para concluir el resultado que se buscaba. □

Ejemplo 3.20. El teorema precedente permite obtener la célebre fórmula de Euler:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Resolución. Sea $f(z) = 1/z^2$. La función $f(z)\cot(\pi z)$ tiene un polo triple en $z = 0$. En virtud del Teorema 1.36 y la regla de L'Hôpital, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}\cot(\pi z), 0\right) &= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{z^3\cot(\pi z)}{z^2}\right]\\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[-\pi z\csc^2(\pi z) + \cot(\pi z)\right]\\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\left[2\pi^2 z\cot(\pi z)\csc^2(\pi z) - 2\pi\csc^2(\pi z)\right]\\
&= \lim_{z\to 0}\left[\frac{\pi^2 z\cos(\pi z)}{\operatorname{sen}^3(\pi z)} - \frac{\pi}{\operatorname{sen}^2(\pi z)}\right]\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{\pi^2 z\cos(\pi z) - \pi\operatorname{sen}(\pi z)}{\operatorname{sen}^3(\pi z)}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{-\pi^3 z\operatorname{sen}(\pi z) + \pi^2\cos(\pi z) - \pi^2\cos(\pi z)}{3\pi\operatorname{sen}^2(\pi z)\cos(\pi z)}\\
&= \lim_{z\to 0}\frac{-\pi^2 z}{3\operatorname{sen}(\pi z)\cos(\pi z)} = -\frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Tomando ahora $S = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ en el Teorema 3.19, obtenemos:

$$\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2} = -\pi\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}\cot(\pi z), 0\right) = -\pi\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \frac{\pi^2}{3}.$$

Puesto que la función $1/z^2$ es par,

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Consecuentemente

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

lo que completa la resolución. □

El argumento empleado para resolver el siguiente ejemplo servirá también para probar la generalización propuesta en el Teorema 3.25.

Ejemplo 3.21. Se verifica:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Resolución. Sea $f(z) = 1/z^4$. En primer lugar, hallamos el residuo de la función $f(z)\cot(\pi z)$ en el polo quíntuple $z = 0$. Atendiendo a la Proposición 2.7 y el Corolario 2.5, para $|z| < 1$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^4}\cot(\pi z) &= \frac{\pi^4}{(\pi z)^5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} (\pi z)^{2n} \\
&= \pi^4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} (\pi z)^{2n-5} \\
&= \pi^4 \left[\frac{B_0}{\pi^5} \frac{1}{z^5} - \frac{2^2 B_2}{2!\,\pi^3} \frac{1}{z^3} + \frac{2^4 B_4}{4!\,\pi} \frac{1}{z} - \ldots \right].
\end{aligned}$$

Mediante la fórmula de recursión (2.1) que define los números de Bernoulli encontramos que $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$ y, finalmente, $B_4 = -1/30$. Por tanto,

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4}\cot(\pi z), 0\right) = \frac{2^4 B_4\, \pi^4}{4!\,\pi} = -\frac{\pi^3}{45}.$$

Aplicando ahora paridad y el Teorema 3.19 con $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, podemos escribir

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^4} = -\pi \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^4}\cot(\pi z), 0\right) = \frac{\pi^4}{45},$$

de donde ya se obtiene el resultado que se pretendía. □

Ejemplo 3.22. Si ia no es un entero, se cumple que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\,(k^2 + a^2)} = \frac{3 + \pi^2 a^2 - 3\pi a \coth(\pi a)}{6a^4}.$$

Resolución. Sea

$$f(z) = \frac{1}{z^2\,(z^2 + a^2)}.$$

La función $f(z)\cot(\pi z)$ tiene un polo triple en $z_1 = 0$ y sendos polos simples en $z_2 = ia$ y $z_3 = -ia$. Nótese que z_1 es un entero, mientras que z_2 y z_3 no lo son. Así, por el Teorema 1.38 tenemos:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(\frac{\cot(\pi z)}{z^2(z-ia)(z+ia)}, ia\right) &= \frac{-i\coth(\pi a)}{(-a^2)\,(2ia)}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z-ia}, ia\right) \\ &= \frac{\coth(\pi a)}{2a^3}.\end{aligned}$$

Análogamente se calcula que

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\cot(\pi z)}{z^2(z-ia)(z+ia)}, -ai\right) = \frac{\coth(\pi a)}{2a^3}.$$

Para encontrar el residuo de $f(z)\cot(\pi z)$ en el polo triple $z_1 = 0$, haremos uso de la forma de Bernoulli para la serie de Taylor de la función $z\cot(z)$ (Proposición 2.7):

$$\pi z\cot(\pi z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}}{(2k)!}(\pi z)^{2k}.$$

De aquí deducimos la serie de Laurent para $\cot(\pi z)$:

$$\begin{aligned}\cot(\pi z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}\pi^{2k-1}}{(2k)!} z^{2k-1} \\ &= \frac{1}{\pi z} - \frac{\pi z}{3} - \frac{\pi^3 z^3}{45} - \dots.\end{aligned}$$

Además, por tratarse de una serie geométrica,

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^2\,(z^2+a^2)} &= \frac{1}{a^2 z^2}\,\frac{1}{1+(z/a)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k-2}}{a^{2k+2}} \\ &= \frac{1}{a^2 z^2} - \frac{1}{a^4} + \frac{z^2}{a^6} + \dots.\end{aligned}$$

Se infiere que

$$\begin{aligned}\frac{\cot(\pi z)}{z^2\,(z^2+a^2)} &= \left(\frac{1}{a^2 z^2} - \frac{1}{a^4} + \frac{z^2}{a^6} + \dots\right)\left(\frac{1}{\pi z} - \frac{\pi z}{3} - \frac{\pi^3 z^3}{45} - \dots\right) \\ &= \left(\frac{1}{\pi a^2 z^3} - \frac{\pi}{3a^2 z} + \frac{\pi^3 z}{45 a^2} + \dots\right) \\ &\quad + \left(\frac{-1}{\pi a^4 z} + \frac{\pi z}{3a^4} - \frac{\pi^3 z^3}{45 a^4} - \dots\right) \\ &\quad + \left(\frac{z}{\pi a^6} - \frac{\pi z^3}{3a^6} + \frac{\pi^3 z^5}{45 a^6} + \dots\right) \\ &= \dots\end{aligned}$$

$$= \frac{z^{-3}}{\pi a^2} - \frac{3+\pi^2 a^2}{3\pi a^4} z^{-1} + \frac{-\pi^4 a^4 + 15\pi^2 a^2 + 45}{45\pi a^6} z + \ldots .$$

Luego, por definición,

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\cot(\pi z)}{z^2\left(z^2+a^2\right)}, 0\right) = -\frac{3+\pi^2 a^2}{3\pi a^4}.$$

Tomando $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ en el Teorema 3.19 encontramos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k\neq 0} \frac{1}{k^2\left(k^2+a^2\right)} &= -\pi \sum_{j=1}^{3} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2\left(z^2+a^2\right)} \cot(\pi z), z_j\right) \\
&= -\pi\left(\frac{\coth(\pi a)}{2a^3} + \frac{\coth(\pi a)}{2a^3} - \frac{3+\pi^2 a^2}{3\pi a^4}\right) \\
&= \frac{3+\pi^2 a^2 - 3\pi a \coth(\pi a)}{3a^4}.
\end{aligned}$$

Finalmente, por paridad:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\left(k^2+a^2\right)} = \frac{1}{2} \sum_{k\neq 0} \frac{1}{k^2\left(k^2+a^2\right)} = \frac{3+\pi^2 a^2 - 3\pi a \coth(\pi a)}{6a^4}.$$

Esto completa la resolución. □

Teorema 3.23. *Supóngase que $f(z) = p(z)/q(z)$ es una función racional tal que $\delta q(z) - \delta p(z) \geq 2$. Sean $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ los polos de f, algunos de los cuales pueden ser enteros, y sea $S = \mathbb{Z} \setminus \{z_1, z_2 \ldots, z_n\}$. Entonces,*

$$\sum_{k\in S} (-1)^k f(k) = -\pi \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\left(f(z)\csc(\pi z), z_j\right).$$

Demostración. Como $\csc(\pi z)$ y $\cot(\pi z)$ tienen el mismo denominador y las hipótesis de este teorema son las mismas que las del Teorema 3.19, la demostración también es similar y será omitida. □

Ejemplo 3.24. Si $a \neq 0$ es un entero, entonces

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0,a\}} \frac{(-1)^k}{k^2(k-a)} = \frac{6+\pi^2 a^2 - 12\,(-1)^{a+1}}{6a^3}.$$

Resolución. Sea

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-a)}.$$

La función $f(z)\csc(\pi z)$ tiene un polo triple en $z_1 = 0$ y un polo doble en $z_2 = a$. Nótese que z_1 y z_2 son enteros.

Para encontrar los residuos de la función $f(z)\csc(\pi z)$ en el polo $z_2 = a$ aplicamos el Teorema 1.36, obteniendo:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\csc(\pi z)}{z^2(z-a)}, a\right) = \lim_{z\to a}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z-a)^2\csc(\pi z)}{z^2(z-a)}\right] = \frac{2\,(-1)^{a+1}}{\pi a^3}.$$

Por otra parte, para encontrar el residuo de $f(z)\csc(\pi z)$ en el polo $z_1 = 0$ usaremos la siguiente identidad para la cosecante (Proposición 2.9):

$$\begin{aligned}\csc(\pi z) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{\left(2^{2k}-2\right)B_{2k}\pi^{2k-1}}{(2k)!}\,z^{2k-1}\\ &= \frac{1}{\pi z} + \frac{\pi z}{6} - \frac{7\pi^3 z^3}{360} - \dots .\end{aligned}$$

Necesitamos también el desarrollo de Laurent de $z^{-2}(z-a)^{-1}$:

$$\frac{1}{z^2}\,\frac{1}{z-a} = \frac{1}{az^2}\,\frac{-1}{1-(z/a)} = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k-2}}{a^{k+1}} = -\frac{1}{az^2} - \frac{1}{a^2 z} - \frac{1}{a^3} + \dots .$$

Ahora calculamos el producto de ambas series:

$$\begin{aligned}\csc(\pi z)\left(\frac{1}{z^2}\,\frac{1}{z-a}\right) &= \left(\frac{1}{\pi z} + \frac{\pi z}{6} - \frac{7\pi^3 z^3}{360} - \dots\right)\left(-\frac{1}{az^2} - \frac{1}{a^2 z} - \frac{1}{a^3} + \dots\right)\\ &= \left(-\frac{1}{\pi a z^3} - \frac{1}{\pi a^2 z^2} - \frac{1}{\pi a^3 z} + \dots\right)\\ &\quad + \left(-\frac{\pi}{6az} - \frac{\pi}{6a^2} - \frac{\pi z}{6a^3} - \dots\right)\\ &\quad + \left(-\frac{7\pi^3 z}{360a} - \frac{7\pi^3 z^2}{360a^2} - \frac{7\pi^3 z^3}{360a^3} - \dots\right)\\ &\quad + \dots .\end{aligned}$$

El coeficiente de z^{-1} en este desarrollo es

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2(z-a)}\csc(\pi z), 0\right) = -\frac{6+\pi^2 a^2}{6\pi a^3}.$$

Tomando $S = \mathbb{Z}\setminus\{0,a\}$ en el Teorema 3.23 ya concluimos

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0,a\}}\frac{(-1)^k}{k^2(k-a)} &= -\pi\sum_{j=1,2}\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2(z-a)}\csc(\pi z), z_j\right)\\ &= -\pi\left(\frac{2\,(-1)^{a+1}}{\pi a^3} - \frac{6+\pi^2 a^2}{6\pi a^3}\right)\\ &= \frac{6+\pi^2 a^2 - 12\,(-1)^{a+1}}{6a^3},\end{aligned}$$

como se pretendía. □

3.3.3. Singularidades en cero

Teorema 3.25. *Sea n un entero positivo, y sea $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$ la sucesión de números de Bernoulli. Se verifica:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}B_{2n}\pi^{2n}}{(2n)!}.$$

Demostración. Pongamos $f(z) = 1/z^{2n}$. La función $f(z)\cot(\pi z)$ tiene un polo de orden $2n+1$ en $z = 0$. Mediante la Proposición 2.7 se obtiene la serie de Laurent

$$\begin{aligned}\frac{\cot(\pi z)}{z^{2n}} &= \frac{1}{\pi z^{2n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}\pi^{2k}}{(2k)!} z^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} B_{2k}\pi^{2k-1}}{(2k)!} z^{2k-2n-1}.\end{aligned}$$

Puesto que $2k - 2n - 1 = -1$ implica $k = n$:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\cot(\pi z)}{z^{2n}}, 0\right) = \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n}\pi^{2n-1}}{(2n)!}.$$

Tomando $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ en el Teorema 3.19 vemos que

$$\sum_{k\neq 0} \frac{1}{k^{2n}} = -\pi \operatorname{Res}\left(\frac{\cot(\pi z)}{z^{2n}}, 0\right) = \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} B_{2n}\pi^{2n}}{(2n)!}.$$

Por paridad,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{1}{2} \sum_{k\neq 0} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1} B_{2n}\pi^{2n}}{(2n)!},$$

completando la demostración. □

Ejemplo 3.26. El resultado de los Ejemplos 3.20 y 3.21 también se deduce por aplicación directa del Teorema 3.25 para $n = 1$ y $n = 2$, respectivamente. Como $B_2 = 1/6$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{2\pi^2 B_2}{2!} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Y como $B_4 = -1/30$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = -\frac{2^3\pi^4 B_4}{4!} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Teorema 3.27. *Si n es un entero positivo y $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$ es la sucesión de números de Bernoulli, entonces*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{2n}} = \frac{(-1)^n \left(2^{2n-1} - 1\right) B_{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}.$$

Demostración. Pongamos $f(z) = 1/z^{2n}$. La función $f(z)\csc(\pi z)$ presenta un polo de orden $2n+1$ en $z = 0$. Por la Proposición 2.9 se tiene la serie de Laurent

$$\csc(\pi z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \left(2^{2k} - 2\right) B_{2k} \pi^{2k-1}}{(2k)!} z^{2k-1}.$$

Sigue que

$$\frac{\csc(\pi z)}{z^{2n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \left(2^{2k} - 2\right) B_{2k} \pi^{2k-1}}{(2k)!} z^{2k-2n-1}.$$

Como $n = k$ cuando $2k - 2n - 1 = -1$, la serie anterior proporciona

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\cot(\pi z)}{z^{2n}}, 0\right) = \frac{(-1)^{n-1} \left(2^{2n} - 2\right) B_{2n} \pi^{2n-1}}{(2n)!}.$$

Tomando $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ en el Teorema 3.19 resulta

$$\sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^{2n}} = -\pi \operatorname{Res}\left(\frac{\csc(\pi z)}{z^{2n}}, 0\right) = \frac{(-1)^n \left(2^{2n} - 2\right) B_{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}.$$

Finalmente, por paridad,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{2n}} = \frac{1}{2} \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k}{k^{2n}} = \frac{(-1)^n \left(2^{2n-1} - 1\right) B_{2n} \pi^{2n}}{(2n)!},$$

como se deseaba probar. □

Ejemplo 3.28. Se verifica:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Resolución. Particularizando $n = 1$ en el Teorema 3.27, encontramos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{B_2 \pi^2}{2}.$$

Ahora basta advertir que $B_2 = 1/6$. □

4

Otros ejemplos

En este capítulo abordaremos sendos ejemplos de cálculo de sumas finitas e infinitas, respectivamente, que, si bien se apoyan en el teorema de los residuos (Teorema 1.32), no requieren de las técnicas estudiadas en el capítulo 3.

Proposición 4.1. *Supóngase que $a_1, \ldots, a_m$ y $b_1, \ldots, b_n$ son números reales distintos. Entonces*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(b_k - a_1) \cdots (b_k - a_m)}{(b_k - b_1) \cdots (b_k - b_{k-1})(b_k - b_{k+1}) \cdots (b_k - b_n)} = \begin{cases} 0, & si \;\; m < n-1 \\ 1, & si \;\; m = n-1. \end{cases} \tag{4.1}$$

Demostración. Para la función f, definida por

$$f(z) = \frac{(z - a_1) \cdots (z - a_m)}{(z - b_1) \cdots (z - b_n)},$$

se tiene:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z), b_k) = -\operatorname{Res}(f(z), \infty)$$

(cf. Corolario 1.33). Además, para $k = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z), b_k) &= \lim_{z \to b_k} (z - b_k) f(z) \\ &= \frac{(b_k - a_1) \cdots (b_k - a_m)}{(b_k - b_1) \cdots (b_k - b_{k-1})(b_k - b_{k+1}) \cdots (b_k - b_n)} \end{aligned}$$

y

$$-\operatorname{Res}(f(z), \infty) = \lim_{z \to \infty} z f(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } m < n-1 \\ 1, & \text{si } m = n-1. \end{cases}$$

Combinando los resultados anteriores se obtiene (4.1). □

Proposición 4.2. *Sea $k \in \mathbb{N}$. Si $|z| < (k-1)^{k-1}/k^k$, entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{kn}{n} z^n = \frac{1+W}{1-(k-1)W},$$

donde W es la única raíz de la ecuación $w - z(1+w)^k = 0$ interior a la circunferencia

$$\left\{ w \in \mathbb{C} : |w| = \frac{1}{k-1} \right\}.$$

Demostración. Notemos, en primer lugar, que $\binom{kn}{n}$ es el coeficiente de w^n en el desarrollo del binomio $(1+w)^{kn}$; por tanto,

$$\operatorname{Res}\left(\frac{(1+w)^{kn}}{w^{n+1}}, 0 \right) = \binom{kn}{n}.$$

Sea Γ un contorno simple cerrado que rodea el origen. En virtud de (4.2) y del teorema de los residuos (Teorema 1.32),

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{kn}{n} z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Res}\left(\frac{(1+w)^{kn}}{w^{n+1}}, 0 \right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(1+w)^{kn}}{w^n} \frac{1}{w}\, dw \right) z^n \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{z(1+w)^k}{w} \right]^n \frac{1}{w}\, dw, \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde el intercambio de la integral con el sumatorio se justifica si la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} \left[z(1+w)^k/w \right]^n$ es uniformemente convergente sobre Γ. Como, por hipótesis, $|z| < (k-1)^{k-1}/k^k$, para $n > 1$ y $|w| = 1/(k-1)$ tenemos

$$\left| \frac{z(1+w)^k}{w} \right| \le \frac{|z|\,(1+|w|)^k}{|w|} < 1. \tag{4.3}$$

Luego, la serie converge uniformemente, con suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{z(1+w)^k}{w} \right]^n = \frac{w}{w - z(1+w)^k},$$

y (4.2) se convierte en

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{kn}{n} z^n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{w - z(1+w)^k}\, dw.$$

De (4.3) se infiere, aplicando el teorema de Rouché (Teorema 1.40), que la ecuación $w - z(1+w)^k = 0$ tiene una única raíz W en la región interior a Γ, así que, por el Teorema 1.37,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{kn}{n} z^n = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{w - z(1+w)^k}, w = W\right) = \frac{1}{1 - kz(1+W)^{k-1}}$$
$$= \frac{1+W}{1+W-kz(1+W)^k} = \frac{1+W}{1-(k-1)W}.$$

□

Ejemplo 4.3. Se tiene:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sqrt{5}$;

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{10^n} = \frac{\sqrt{15}}{3}$;

(iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{3n}{n} \frac{2^n}{27^n} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Resolución. Los tres apartados se prueban por aplicación directa de la Proposición 4.2. Justificaremos sólo (i), puesto que el procedimiento para la verificación de los otros dos es completamente análogo.

Haciendo $k = 2$ en la Proposición 4.2, encontramos que el resultado vale para $|z| < 1/4$ y la única raíz W de $5w - (1+w)^2 = 0$ en el disco abierto $|w| < 1$. Se comprueba sin dificultad que $W = (3-\sqrt{5})/2$. Por tanto, tomando $z = 1/5$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \frac{1 + \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}{1 - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{5-\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}}$$
$$= \frac{(5-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}$$
$$= \sqrt{5}.$$

□

5

El teorema de Mittag-Leffler

Es bien conocido (cf. [13, Teorema 4.4.3]) que si f es una función racional, podemos encontrar una única representación de f como

$$f(z) = p(z) + \sum_{j=1}^{m} P_j\left(\frac{1}{z - z_j}\right),$$

donde p es un polinomio y cada P_j es un polinomio tal que $P_j(0) = 0$. Esta es la llamada descomposición en fracciones simples de la función racional f, cuyo interés reside en que hace explícitos los polos $\{z_j : 1 \leq j \leq m\}$ y las correspondientes partes principales $P_j\left(1/\left(z - z_j\right)\right)$. El objetivo de este capítulo es llegar a una expresión análoga para una función f, meromorfa con infinitos polos $\{z_j : j \in \mathbb{N}\}$. La resolución del problema se conoce como teorema de Mittag-Leffler (Teorema 5.1) y hace uso del teorema de los residuos (Teorema 1.32).

Teorema 5.1 (Mittag-Leffler). *Sea f una función analítica excepto por polos simples distintos $\{z_j : j \in \mathbb{N}\}$, satisfaciendo $0 < |z_j| \leq |z_{j+1}|$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Pongamos*

$$R_j = \operatorname{Res}\left(f, z_j\right), \quad j \in \mathbb{N},$$

y para cada $n \in \mathbb{N}$ sean C_n circunferencias de radio r_n, centradas en cero, que no atraviesan ningún z_j y tales que $r_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$. Supongamos, además, que existe $B > 0$ tal que

$$|f(z)| < B, \quad z \in C_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Entonces

$$f(z) = f(0) + \sum_{j=1}^{\infty} R_j\left(\frac{1}{z - z_j} + \frac{1}{z_j}\right).$$

Demostración. Sea z_0 cualquier número complejo, salvo un polo de f. Definimos

$$F(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Esta función tiene un polo simple en z_0 y en cada z_j, $j \in \mathbb{N}$. Por el Teorema 1.38,

$$\operatorname{Res}(F, z_0) = f(z_0) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Res}(F, z_j) = \frac{R_j}{z_j - z_0}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

El teorema de los residuos de Cauchy (Teorema 1.32) implica

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0) + \sum_{|z_j| < r_n} \frac{R_j}{z_j - z_0}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.1}$$

Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Haciendo $z_0 = 0$ en (5.1) resulta

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(z)}{z}\, dz = f(0) + \sum_{|z_j| < r_n} \frac{R_j}{z_j}. \tag{5.2}$$

Restamos (5.2) de (5.1), miembro a miembro, para obtener

$$\begin{aligned} \frac{z_0}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{f(z)}{z(z - z_0)}\, dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} f(z) \left(\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z} \right) dz \\ &= f(z_0) - f(0) + \sum_{|z_j| < r_n} R_j \left(\frac{1}{z_j - z_0} - \frac{1}{z_j} \right). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Como $|z - z_0| \geq |z| - |z_0| = r_n - |z_0|$ para todo $z \in C_n$, encontramos que

$$\left| \int_{C_n} \frac{f(z)}{z(z - z_0)}\, dz \right| \leq \frac{2\pi r_n B}{r_n (r_n - |z_0|)} = \frac{2\pi B}{r_n - |z_0|};$$

de este modo,

$$\int_{C_n} \frac{f(z)}{z(z - z_0)}\, dz \longrightarrow 0$$

cuando $n \to \infty$ y, por tanto, $r_n \to \infty$. Incorporando este resultado a (5.3),

$$\begin{aligned} f(z_0) &= f(0) - \lim_{n \to \infty} \sum_{|z_j| < r_n} R_j \left(\frac{1}{z_j - z_0} - \frac{1}{z_j} \right) \\ &= f(0) + \sum_{j=1}^{\infty} R_j \left(\frac{1}{z_0 - z_j} + \frac{1}{z_j} \right). \end{aligned}$$

Esto completa la demostración. □

Ejemplo 5.2. Para $z \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, se cumple:

$$\cot(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}.$$

Resolución. Pongamos $f(z) = \cot(z) - 1/z$. Por la Proposición 3.4, $\cot(z)$ tiene polos simples en $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, y el residuo en cada polo vale 1. Se sigue que la serie de Laurent centrada en cero es

$$\cot(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} a_k z^k,$$

con $a_{-1} = 1$. En consecuencia

$$\cot(z) - \frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

así que $z = 0$ es una singularidad evitable de f. Aplicando la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{z \to 0} \left(\cot(z) - \frac{1}{z} \right) = 0,$$

por lo que podemos definir $f(0) = 0$. Además, el Lema 3.2 asegura que la función $\cot(z)$ está acotada sobre los contornos básicos C_n. El teorema de Mittag-Leffler y un pequeño cálculo ya permiten concluir que

$$\begin{aligned} \cot(z) &= \frac{1}{z} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right) \\ &= \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}, \end{aligned}$$

como se deseaba. □

Proposición 5.3. *Si* $z_j = (2j+1)\pi/2$, $j \in \mathbb{Z}$, *entonces:*

(i) $z_{-j-1} = -z_j$.

(ii) $\dfrac{1}{z_j - z} + \dfrac{1}{z_{-j-1} - z} = \dfrac{2z}{z_j^2 - z^2}$.

Demostración. Dado $z_j = (2j+1)\pi/2$, se tiene

$$z_{-j-1} = [2(-j-1)+1] \frac{\pi}{2} = (-2j - 2 + 1) \frac{\pi}{2} = -(2j+1) \frac{\pi}{2} = -z_j,$$

lo que prueba (i). De aquí,

$$\frac{1}{z_j - z} + \frac{1}{z_{-j-1} - z} = \frac{1}{z_j - z} - \frac{1}{z_j + z} = \frac{z_j + z - z_j + z}{(z_j - z)\,(z_j + z)} = \frac{2z}{z_j^2 - z^2},$$

que es (ii). □

Ejemplo 5.4. Para $z \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, se cumple:

$$\tan(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8z}{(2k+1)^2\pi^2 - 4z^2}.$$

Resolución. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea C_n una circunferencia de radio πn, centrada en 0. Usando los métodos del Lema 3.2, se prueba que existe $B > 0$ tal que $|\tan(z)| < B$ cuando $z \in C_n$, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$. Denotamos por

$$\omega_j = (2j+1)\,\frac{\pi}{2}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

las singularidades de la tangente, observando que esta función posee polos simples con residuo -1 en cada ω_j y ninguno de ellos está sobre ninguna C_n. Reordenamos tales singularidades de forma que se satisfagan las restantes hipótesis del teorema de Mittag-Leffler (Teorema 5.1), y escribimos

$$z_k = \begin{cases} \omega_{k/2}, & \text{si } k \text{ es par} \\ \omega_{(1-k)/2}, & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

Se tiene entonces:

$$\begin{aligned}
\tan(z) &= -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z_{2k} - z} - \frac{1}{z_{2k}} + \frac{1}{z_{2k-1} - z} - \frac{1}{z_{2k-1}} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\omega_k - z} - \frac{1}{\omega_k} + \frac{1}{\omega_{1-k} - z} - \frac{1}{\omega_{1-k}} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\omega_k - z} - \frac{1}{\omega_k} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\omega_{1-k} - z} - \frac{1}{\omega_{1-k}} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\omega_k - z} - \frac{1}{\omega_k} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\omega_{-1-k} - z} - \frac{1}{\omega_{-1-k}} \right).
\end{aligned}$$

El apartado (i) de la Proposición 5.3 asegura que $\omega_{-1-k} = -\omega_k$; luego,

$$\tan(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\omega_k - z} + \frac{1}{\omega_{-1-k} - z} \right).$$

Finalmente, por el apartado (*ii*) de la misma proposición obtenemos

$$\begin{aligned} \tan(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2z}{\left[(2k+1)\pi/2\right]^2 - z^2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8z}{(2k+1)^2\pi^2 - 4z^2}, \end{aligned}$$

completando la resolución. □

Bibliografía

[1] M.S. Alotaibi: *Residues, Bernoulli numbers and finding sums*. Graduate Thesis, Missouri State University, 2017.

[2] N.H. Asmar: *Applied complex analysis with partial differential equations*. Prentice Hall, 2002.

[3] N.H. Asmar, L. Grafakos: *Complex analysis with applications*. Springer, 2018.

[4] J.W. Brown, R.V. Churchill: *Complex variables and applications*, 9th ed. McGraw-Hill, 2014.

[5] J.B. Conway: *Functions of one complex variable I*. Springer, 1978.

[6] A.Ó. Guelfond: *Los residuos y sus aplicaciones*. Mir, 1968.

[7] H. Laurent: *Théorie des résidus*. Gauthier-Villars, 1865.

[8] E. Lindelöf: *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions*. Gauthier-Villars, 1905. Disponible en https://www.gutenberg.org/files/29781/29781-pdf.pdf.

[9] J.E. Marsden, M.J. Hoffman: *Basic complex analysis*, 3rd ed. Freeman, 1999.

[10] D.S. Mitrinović: *Calculus of residues*. Noordhoff, 1966.

[11] D.S. Mitrinović, J.D. Kečkić: *The Cauchy method of residues: Theory and applications* (2 vols.). Springer, 1984, 1993.

[12] M. Molero, A. Salvador, T. Menárguez, L. Garmendia: *Análisis matemático para ingeniería*. Pearson, 2007.

[13] G. Vera: *Lecciones de análisis complejo*. Universidad de Murcia, 2013. Disponible en https://webs.um.es/gvb/AC/LeccAC%282013%29.pdf.

[14] G.N. Watson: *Complex integration and Cauchy's theorem*. Hafner, 1914.

Application of Cauchy's residue theorem to series summation

Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna

Airam González Dorta
Facultad de Ciencias · Sección de Matemáticas
Universidad de La Laguna
alu0101016467@ull.edu.es

Abstract

IN the present work, several series summation techniques based on Cauchy's residue theorem are compiled, and various formulas for finite sums and particular infinite series that are difficult or impossible to reach by real analysis methods are deduced. Along the same lines, we include a proof of the Mittag-Leffler theorem, which generalizes the partial fraction decomposition of rational functions to the case of meromorphic functions with an infinite number of poles.

1. Introduction

THE techniques studied in this report rely on the following celebrated result.

Theorem 1.1 (Cauchy's residue theorem) *Assume f is analitic on and within a positively oriented closed curve C, except perhaps for a finite number of isolated singularities $z_1, \dots, z_n$ inside C. Then,*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_i).$$

2. Main summation results and some examples

Theorem 2.1 *Let f be analytic in*

$$G = \{z : \alpha \le \operatorname{Re} z \le \beta,\ |\operatorname{Im} z| \le \delta\},$$

with $m-1<\alpha<m$, $n<\beta<n+1$ $(m,n\in\mathbb{Z})$, except perhaps for a finite number of non-integer isolated singularities $z_1,\dots,z_p$. If $\Gamma = \partial G$, then

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \frac{1}{2i}\int_\Gamma f(z)\cot(\pi z)\,dz - \pi\sum_{j=1}^{p}\operatorname{Res}\left(f(z)\cot(\pi z), z_j\right),$$

$$\sum_{k=m}^{n} (-1)^k f(k) = \frac{1}{2i}\int_\Gamma f(z)\csc(\pi z)\,dz - \pi\sum_{j=1}^{p}\operatorname{Res}\left(f(z)\csc(\pi z), z_j\right).$$

Theorem 2.2 *Let $f(z) = p(z)/q(z)$ be a rational function such that $\operatorname{degree}[q(z)] - \operatorname{degree}[p(z)] \ge 2$. Assume f has poles in $z_1, z_2, \dots, z_m$, none of which is an integer. Then:*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = -\pi\sum_{j=1}^{m}\operatorname{Res}(f(z)\cot(\pi z), z_j),$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k f(k) = -\pi\sum_{j=1}^{m}\operatorname{Res}(f(z)\csc(\pi z), z_j).$$

Theorem 2.3 *Let $f(z) = p(z)/q(z)$ be a rational function such that $\operatorname{degree}[q(z)] - \operatorname{degree}[p(z)] \ge 2$. Assume f has poles in $z_1, z_2, \dots, z_n$, some of which may be integers, and let $S = \mathbb{Z}\setminus\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$. Then:*

$$\sum_{k\in S} f(k) = -\pi\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}\left(f(z)\cot(\pi z), z_j\right),$$

$$\sum_{k\in S} (-1)^k f(k) = -\pi\sum_{j=1}^{n}\operatorname{Res}\left(f(z)\csc(\pi z), z_j\right).$$

Theorem 2.4 *Let $\{B_k\}_{k=0}^{\infty}$ denote the sequence of Bernoulli numbers, recursively defined through*

$$B_0 = 1, \qquad B_k = \frac{-1}{k+1}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j}B_j, \quad k\ge 1.$$

For a fixed $n\in\mathbb{N}$, the following holds:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}} = \frac{(-1)^{n-1}2^{2n-1}B_{2n}\pi^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^{2n}} = \frac{(-1)^n\left(2^{2n-1}-1\right)B_{2n}\pi^{2n}}{(2n)!}.$$

Theorem 2.5 *Assume $k\in\mathbb{N}$ and $|z| < (k-1)^{k-1}/k^k$. Then*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{kn}{n}z^n = \frac{1+W}{1-(k-1)W},$$

where W is the only root of the equation $w - z(1+w)^k = 0$ inside the circumference $\{w : |w| = 1/(k-1)\}$.

Example 2.6

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}\coth(\pi a) - \frac{1}{2a^2}, \quad ia\notin\mathbb{Z},$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0,a\}}\frac{(-1)^k}{k^2(k-a)} = \frac{6+\pi^2a^2-12(-1)^{a+1}}{6a^3}, \quad a\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

Example 2.7

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Example 2.8

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{5^n} = \sqrt{5}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\binom{3n}{n}\frac{2^n}{27^n} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

3. Mittag-Leffler's theorem

This theorem yields an analogue of the partial fraction decomposition for meromorphic functions with an infinite set of poles.

Theorem 3.1 (Mittag-Leffler) *Let f be analytic except perhaps for distinct simple poles $\{z_j : j\in\mathbb{N}\}$, which satisfy $0<|z_j|\le|z_{j+1}|$, $j\in\mathbb{N}$. For every $n\in\mathbb{N}$, let C_n denote circumferences of radius r_n, centered at zero, not passing through any z_j and such that $r_n\to\infty$ cuando $n\to\infty$. Further, assume there exists $B>0$ with*

$$|f(z)| < B, \quad z\in C_n,\ n\in\mathbb{N}.$$

Then,

$$f(z) = f(0) + \sum_{j=1}^{\infty}\operatorname{Res}(f, z_j)\left(\frac{1}{z-z_j}+\frac{1}{z_j}\right).$$

Example 3.2 *For $z\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, there holds:*

$$\cot(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-k^2\pi^2},$$

$$\tan(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{8z}{(2k+1)^2\pi^2-4z^2}.$$

References

[1] E. LINDELÖF: *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions*. Gauthier-Villars, 1905.

[2] D.S. MITRINOVIĆ, J.D. KEČKIĆ: *The Cauchy method of residues: Theory and applications* (2 vols.). Springer, 1984, 1993.