Universidad de La Laguna

Programa de Doctorado en Matemáticas y Estadística

TESIS DOCTORAL

Análisis del proceso de evaluación entre pares en actividades de resolución de problemas de final abierto. Un estudio con futuros docentes de Matemáticas de Educación Secundaria.

PATRICIA DE ARMAS GONZÁLEZ

Directora: Josefa Perdomo Díaz

Codirectora: Diana Sosa Martín

La Laguna, 2023

Agradecimientos

A mis directoras, Pepi y Diana, porque sin ustedes no lo podría haber logrado. Gracias por haber aceptado acompañarme en este camino. Gracias por todas las enseñanzas, por apretar para que sacara todo lo que podía dar, por haber formado un equipo conmigo y por sentir este trabajo tan suyo como mío. Gracias por el tiempo extra, por la energía, por las risas y por ser, más veces de las que me hubiera gustado, paño de lágrimas.

A los estudiantes del Máster en Formación del Profesorado que participaron en este estudio. Sin su implicación plena y seriedad durante el desarrollo de la actividad, esta investigación no hubiera sido posible.

A las compañeras y compañeros del Área de Didáctica de la Matemática y del Departamento de Análisis Matemático, por el apoyo mostrado durante estos años. Especialmente a Valia, por tu comprensión e inestimable ayuda en los momentos de más trabajo.

A mi madre, por enseñarme a ser una mujer fuerte e independiente. Gracias a ti estoy donde siempre supiste que podía llegar.

A mi padre, por enseñarme el sentido de la responsabilidad y la constancia, por ser serenidad, desahogo y equilibrio.

A mi hermana, porque verme como tú me ves es el impulso que me ayuda a no desviarme del camino.

A mi tío, porque el destino, que siempre sabe lo que hace, nos unió al final de este largo recorrido para enseñarme que lo único necesario para llegar a la meta es que la vida nos permita seguir dando pasos.

Y a ti, mi hogar, mi refugio, mi paz, porque solo tú sabes todo lo que hay detrás de estas páginas.

Índice

INTRODUCCIÓN

Dentro de la amplia diversidad de procesos que tienen lugar en contextos de enseñanza y aprendizaje, la evaluación juega un papel fundamental, permitiendo a los estudiantes conocer su progreso en el aprendizaje y ayudando a los docentes a tomar decisiones sobre los procesos de enseñanza (Silver y Mills, 2018).

La evaluación es un proceso complejo que involucra muchos aspectos, entre ellos, las técnicas e instrumentos de evaluación. A pesar de la amplia variedad de instrumentos de evaluación disponibles actualmente, las pruebas tradicionales parecen seguir siendo el principal método de evaluación utilizado, en particular por los profesores de matemáticas (e.g., Chanudet, 2019; Nieminen y Atjonen, 2022). Esto podría estar relacionado con el tipo de formación que han recibido los docentes respecto a los procesos de evaluación. De hecho, una de las preocupaciones de los futuros profesores es la falta de experiencia práctica en materia de evaluación (Zevenbergen, 2001). En este sentido, la evaluación entre pares ofrece un excelente escenario para formar a los futuros docentes en el proceso de evaluación, brindándoles la oportunidad de analizar la evaluación desde la perspectiva tanto del alumno como del docente.

En el proceso de evaluación, el evaluador debe identificar aspectos importantes de la tarea, emitir juicios sobre la calidad de la respuesta, identificar posibles errores en la producción, medir el desempeño de los estudiantes e interpretar evidencias del aprendizaje (Arnal-Bailera et al., 2018 ; Goos, 2014). Sin embargo, se sabe poco sobre el proceso de evaluación por pares en sí. ¿Qué proceso sigue un estudiante para evaluar el trabajo de un compañero? ¿Qué busca?

Dentro del propio desafío que ya supone la evaluación tanto para profesores como para investigadores, encontramos la evaluación de la resolución de problemas. Con el objetivo de contribuir a la comprensión de este complejo proceso, esta investigación presenta un estudio exploratorio de la evaluación por pares en actividades de resolución de un problema matemático de final abierto. Abordamos esta cuestión con un diseño metodológico exploratorio basado en estudios de caso, que nos permite profundizar en las principales características del proceso de evaluación por pares y tener un conocimiento más profundo de este proceso (Creswell, 2012).

La investigación que se presenta en esta memoria está dividida en dos fases. El objetivo de la primera fase es analizar las resoluciones de los futuros docentes de matemáticas de Educación Secundaria a un problema de final abierto atendiendo a: los heurísticos que emplean, los casos estudiados, las representaciones utilizadas, las soluciones que presentan, si comprueban o no dichas soluciones y los errores que cometen. La segunda fase tiene como objetivo identificar qué aspectos de la resolución del problema tienen en cuenta los futuros docentes cuando actúan como evaluadores, y analizar de qué forma utilizan sus propias resoluciones para evaluar la de un compañero (si es que lo hacen), así como el carácter de sus intervenciones.

Esta memoria se estructura en seis capítulos, un listado de referencias bibliográficas y dos anexos de los que describiremos su contenido a continuación.

El primer capítulo introduce el Problema de Investigación y lo sitúa dentro del marco de la investigación en Educación Matemática. En primer lugar se presenta una revisión de la importancia de la resolución de problemas a nivel internacional desde una perspectiva institucional, con su inclusión en los currículos de distintos países y en pruebas internacionales de evaluación como TIMSS o PISA. En segundo lugar se indaga en la complejidad de la evaluación de la resolución de problemas, mostrando distintos aspectos presentes en la literatura en torno a la dificultad de evaluar la resolución de problemas como pueden ser las perspectivas de interpretación de la resolución de problemas, la variedad de situaciones que pueden darse, qué aspectos considerar a la hora de evaluar o qué instrumentos, técnicas o herramientas utilizar. A continuación se presenta un estudio preliminar a este trabajo en el que se exponen los resultados de diferentes estudios realizados a partir de una investigación con futuros docentes de Educación Primaria en la que participaron en una actividad de evaluación entre pares (de-Armas-González et al., 2021b, 2021c, 2021d). El capítulo finaliza estableciendo el problema de investigación y los objetivos.

En el segundo capítulo encontramos el Marco Conceptual, donde se presentan los fundamentos teóricos que sustentan esta investigación. Este capítulo gira en torno a dos aspectos fundamentales en este trabajo y esenciales en la educación matemática: la resolución de problemas y la evaluación. En lo referente a la resolución de problemas, se comienza explorando como se define el término *problema* en la literatura, mostrando las características que distintos autores establecen para que una tarea matemática sea considerada un problema (e.g. NCTM, 2000; Polya, 1945; Santos-Trigo, 2020b; Schoenfeld, 1992) y distintas clasificaciones de estos (Zhu y Fan, 2006). A continuación, nos centraremos en la resolución de problemas, indagando en las distintas perspectivas (Schoenfeld, 1992) y enfoques (Castro-Martínez y Ruiz-Hidalgo, 2018, Schroeder y Lester, 1989) presentes en la literatura. Y nos detendremos en los aspectos que intervienen en la resolución de problemas, prestando especial importancia a los heurísticos y las representaciones. El segundo aspecto que se aborda en este marco conceptual es la evaluación, donde se comenzará mostrando lo que entendemos, en términos generales, por evaluar (Beaver y Beaver, 2011; Segovia-Alex, 2016; Suurtamm et al., 2010) así como las distintas finalidades (Silver y Mills, 2018; William, 2007; Wiliam y Thompson, 2007), funciones y etapas (Segovia-Alex, 2016) de la evaluación. En esta segunda parte referida a la evaluación, prestaremos especial atención a la evaluación entre pares, mostrando sus características (Mogessie, 2015; Sadler y Good, 2006; Topping, 2009), algunas las contribuciones de este método al proceso de enseñanza y aprendizaje que han observado investigaciones anteriores (Beaver y Beaver, 2011; Lavy y Shriki, 2014; Zevenbergen, 2001) o la variedad de formas en las que se puede implementar (Jones y Alcock, 2014; Wyatt-Smith et al., 2010, Topping, 2009). Este capítulo se cierra con la evaluación de la resolución de problemas, haciendo hincapié en la variedad de situaciones que pueden darse, qué aspectos considerar a la hora de evaluar o qué instrumentos, técnicas o herramientas utilizar (Arnal-Bailera et al., 2018, Chanudet, 2019, Di-Martino y Signorini, 2019).

En el capítulo 3 se describe la Metodología de la investigación. Se comienza describiendo el diseño metodológico empleado y el esquema general de la investigación. Se presenta el contexto en el que se llevó a cabo así como las características principales de los participantes. A continuación se detallan los procedimientos seguidos en cada una de las dos fases en las que se dividió la investigación, mostrando, para cada una de ellas, los procesos de recogida y análisis de datos, los instrumentos utilizados, las categorías de análisis y especificando las particularidades propias del estudio. Además, se incluye un análisis a priori del problema donde se muestran distintas estrategias de resolución del problema empleado en el estudio (Figura 3.2) que ayudará al lector a situarse frente al análisis de los datos que se presentan en los capítulos siguientes.

En los dos siguientes capítulos se muestra el análisis de los datos obtenidos en la investigación. En el capítulo 4 se muestra el análisis de los datos correspondientes a la primera fase del estudio: las resoluciones del problema. Se comienza analizando el contenido individual de cada resolución, en primer lugar, un análisis descriptivo de todos los pasos dados y, a continuación, un análisis atendiendo a las categorías descritas en la metodología (*heurísticos, casos estudiados, representaciones, soluciones, comprobación de las soluciones y errores*). Este capítulo finaliza con el análisis conjunto de todas las respuestas con foco, en las categorías anteriores, mostrando similitudes que permitan extraer patrones. En relación al análisis de las resoluciones se pueden consultar trabajos previos surgidos de los datos obtenidos en esta fase, donde se muestran resultados centrados en las estrategias de resolución y las representaciones utilizadas (de-Armas-González et al., 2022a, 2022b).

En el capítulo 5 se presenta el análisis de los datos obtenidos en la segunda fase de la investigación: los procesos de evaluación seguidos por una pareja de estudiantes para evaluar la resolución al problema de una compañera o un compañero. Este análisis se divide en ocho casos, formados por tres estudiantes (la pareja que evalúa y la persona evaluada). En cada caso se comienza con un análisis conjunto de las tres resoluciones implicadas, seguido por el análisis del proceso de evaluación que lleva a cabo la pareja evaluadora. Este análisis de los procesos de evaluación se enfoca en tres aspectos: categorías a las que hacen referencia (*heurísticos, casos estudiados, representaciones, soluciones, comprobación de las soluciones y errores*), uso de la propia resolución y carácter de las intervenciones. En relación al análisis de los procesos de evaluación se pueden consultar trabajos previos surgidos de los datos obtenidos en esta fase, donde se muestra el análisis de un caso y el análisis de dos casos, respectivamente (de-Armas-González et al., 2021a, 2023).

En el capítulo 6 se presenta una discusión en torno a los principales resultados obtenidos en el desarrollo de este trabajo, organizada en torno a los objetivos de investigación, identificados con cada una de las fases. Los datos se interpretan teniendo en cuenta tanto los resultados obtenidos en los capítulos 4 y 5 como los aspectos teóricos y resultados de investigaciones anteriores recogidos en el segundo capítulo. Este capítulo concluye con una reflexión sobre las limitaciones de este trabajo y se plantean algunas líneas abiertas que permitirían profundizar en los datos ya obtenidos en esta investigación, así como algunas perspectivas para investigaciones futuras.

A continuación se recoge el listado de referencias utilizadas para la redacción del trabajo. Y finaliza la memoria con dos anexos, el primero recoge las resoluciones originales entregadas por los 16 participantes y el segundo las transcripciones de las 8 parejas, divididas en episodios clasificados según a la resolución a la que se refieren y el carácter de las intervenciones.

Capítulo 1

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se introduce y delimita el problema de investigación, en el que intervienen y confluyen dos tópicos que, por separado, han generado mucho interés en el ámbito de la Educación Matemática y en el área de la Didáctica de la Matemática, en particular: La resolución de problemas y la evaluación. El capítulo comienza con una sección dedicada a la reflexión en torno a la importancia de la resolución de problemas en el aprendizaje y la enseñanza de la matemática para, posteriormente, discutir sobre la complejidad de evaluar esta competencia. A continuación, se incluye una sección en la que se presenta un estudio preliminar, realizado con futuras maestras y maestros de Educación Primaria, en el que se indaga sobre las experiencias previas que han tenido en relación con la evaluación entre pares y se analiza la valoración que hacen de este tipo de actividades, en términos de su utilidad, interés y dificultad, así como la percepción que tienen del aporte de este tipo de actividades al desarrollo de su conocimiento matemático y didáctico. El capítulo finaliza exponiendo el problema de investigación e indicando los objetivos específicos, con una breve explicación sobre cómo se abordarán.

1.1. La importancia de la resolución de problemas en la Educación Matemática

Desde hace varias décadas, la resolución de problemas es considerada como un elemento principal en el desarrollo del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Una evidencia de la importancia que la resolución de problemas ha ido adquiriendo en la Educación Matemática es su inclusión explícita y destacada en los currículos de Matemáticas de numerosos países. Es el caso, por ejemplo, de Estados Unidos, donde la resolución de problemas se incluye como uno de los estándares para el desarrollo de la "práctica matemática", junto con el razonamiento y la prueba, la comunicación, la representación y el establecimiento de conexiones (Common Core State Standards Initiative, 2021). Los *Common Core State Standards for Mathematics* indican que, el desarrollo de la competencia matemática de un estudiante comienza con la comprensión de problemas, la visualización de posibles vías de resolución, el análisis de los datos, las restricciones y relaciones indicadas en el problema, la formulación de conjeturas y el establecimiento de un plan concreto que permita encontrar la solución al problema (Common Core State Standards Initiative, 2021).

Esta tendencia internacional se refleja también en otros países como Nueva Zelanda, cuyo currículo pone el foco en el desarrollo del pensamiento matemático y la resolución de problemas (Ingram et al., 2020), o Finlandia, donde se incluyen los métodos de resolución de problemas como uno de los propósitos de la enseñanza de la matemática (Mullis et al., 2016).

Singapur (Ministry of Education Singapore, 2012, 2023), por su parte, plantea la resolución de problemas como el elemento central del desarrollo del aprendizaje matemático (Figura 1.1), el cuál depende de un conjunto de elementos interrelacionados entre los que se encuentran conceptos (numéricos, algebraicos, etc.), procesos (razonar, comunicar, establecer conexiones, emplear heurísticos…), habilidades en el uso de dichos conceptos y procesos (estimación, manipulación algebraica, etc.), actitudes frente a la matemática (perseverancia, creencias…) y aspectos metacognitivos como la revisión del propio proceso de resolución y la autorregulación del aprendizaje. Todos estos elementos deben emplearse en el análisis y la resolución de diversos tipos de situaciones que incluyen problemas no rutinarios, de final abierto o de la vida real.

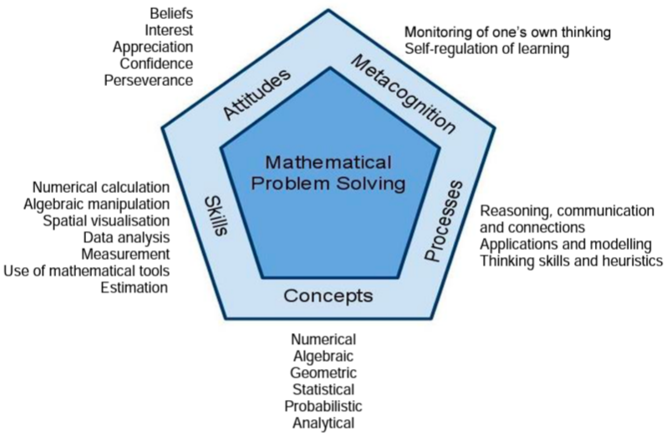


Figura 1.1. Esquema del currículo de Matemáticas de Singapur.
(Imagen extraída de: https://www.moe.gov.sg/)

En los currículos oficiales españoles, tanto de Educación Primaria como de Educación Secundaria, la resolución de problemas se presenta como un eje fundamental para el aprendizaje de las matemáticas (Real Decreto 157/2022, Real Decreto 217/2022). En estos documentos se establece que la resolución de problemas es un objetivo en sí mismo, pero también un proceso central para la construcción del conocimiento matemático. Un elemento distintivo del currículo español actual es que se otorga una especial importancia a la relación entre la resolución de problemas y el pensamiento computacional, declarando este último como una destreza clave en la formación del alumnado, cuyo objetivo es alcanzar soluciones que puedan ser ejecutadas por sistemas informáticos. En este sentido, el currículo también pone énfasis en el empleo de herramientas tecnológicas adecuadas durante el proceso de resolución de problemas como una competencia específica a desarrollar en la etapa escolar.

Otra evidencia de la importancia de la resolución de problemas en la educación matemática es el rol que cumple en pruebas internacionales como TIMSS y PISA. La prueba TIMSS (del inglés Trends in International Mathematics and Science Study, Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias) evalúa el rendimiento en matemáticas y ciencias, de estudiantes de 4º grado y 8º grado (4º de Educación Primaria y 2º de ESO en España). Lleva realizándose durante casi 30 años, clasificando las preguntas, en el caso de la prueba de matemáticas, por dominios de contenido y dominios cognitivos (conocimiento, aplicación y razonamiento). Desde el inicio, esta prueba incluyó la resolución de problemas como un aspecto importante a evaluar, indicando que entre un 60% y un 65% de las preguntas debían estar diseñadas de manera que se emplearan los dominios cognitivos de aplicación o razonamiento en la resolución de problemas. En la prueba TIMSS 2023, cuyos datos fueron recogidos durante el año 2022, el porcentaje de presencia de la resolución de problemas aumentó al 85% de las preguntas correspondientes a cada uno de los dominios de contenido (Philpot et al., 2022).

En el caso de la prueba de Matemáticas del programa PISA (del inglés Programme for International Student Assessment, Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos), ésta evalúa la "alfabetización matemática" de los estudiantes de 15 años. El marco del programa PISA define la "alfabetización matemática" de la siguiente forma:

> Mathematical literacy is an individual's capacity to reason mathematically and to formulate, employ, and interpret mathematics to solve problems in a variety of real world contexts. It includes concepts, procedures, facts and tools to describe, explain and predict phenomena. It assists individuals to know the role that mathematics plays in the world and to make the well-founded judgments and decisions needed by constructive, engaged and reflective 21st century citizens. (OECD, 2023, p. 22).

Así, la prueba PISA evalúa la forma en que los estudiantes utilizan el razonamiento matemático y un conjunto de procesos asociados a la resolución de problemas (formular, aplicar, interpretar y evaluar) para analizar y resolver situaciones planteadas en distintos contextos (personales, ocupacionales, sociales y científicos), en las que tendrán que hacer uso de distintos tipos de contenidos matemáticos (Figura 1.2).

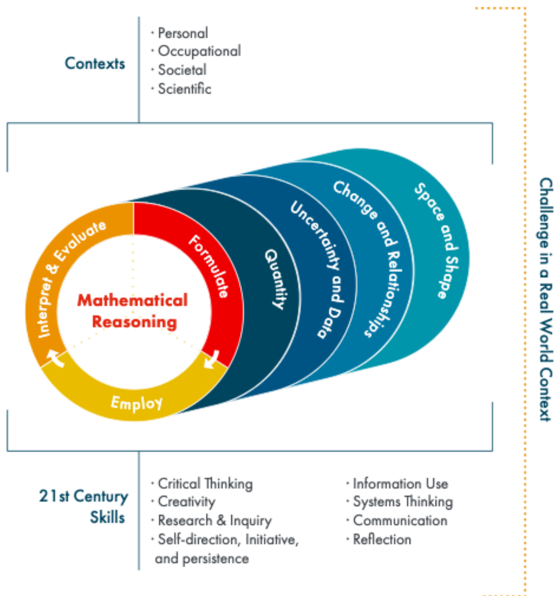


Figura 1.2. Marco para la prueba de Matemáticas PISA 2022
(Imagen extraída de: https://pisa2022-maths.oecd.org/)

La investigación en Educación Matemática también refleja la importancia de la resolución de problemas en el aprendizaje y la enseñanza de la matemática, así como su complejidad. Es tal la cantidad y variedad de trabajos publicados en torno a este tópico que se hace muy complejo realizar una revisión sistemática de la literatura. Solo entre los años 2011 y 2021, se publicaron casi 3.000 artículos relacionados con la resolución de problemas en revistas con índice de impacto en el Journal Citation Reports (Tabla 1.1). Además, en los últimos diez años se han publicado numerosos trabajos que presentan una revisión de las investigaciones sobre resolución de problemas (e.g. Lester, 2013; Lester y Cai, 2016; Weber y Leikin, 2016) y se han editado monográficos especiales centrados en este tópico (e.g. Amado et al., 2018; Felmer et al., 2019; Liljedahl et al., 2016).

Tabla 1.1. Artículos relacionados con la resolución de problemas en revistas con índice de impacto en el Journal Citation Reports.

Revistas indexadas en JCR	**Artículos publicados entre 2011 y 2021**[1]
Journal for Research in Mathematics Education	63
Educational Studies in Mathematics	649
Journal of Mathematics Teacher Education	307
International Journal of Science and Mathematics Education	729
Mathematical Thinking and Learning	180
ZDM - Mathematics Education	836
Enseñanza de las Ciencias	23
Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education	48
TOTAL	2835

1.2. La complejidad de la evaluación en la resolución de problemas

Uno de los retos a la hora de incorporar la resolución de problemas en las aulas es diseñar una estrategia para su evaluación. Una situación bastante común en el ámbito escolar es que, al resolver un problema, el estudiante llegue a un resultado final que ha obtenido aplicando un procedimiento determinado y que la evaluación en estos casos se centre en analizar si la respuesta dada por el estudiante es correcta, pasando por alto el proceso seguido para alcanzarla (Castro-Martínez y Ruiz-Hidalgo, 2018). Sin embargo, distintos autores señalan que se deben considerar los procesos de pensamiento que hay detrás de una respuesta dada para poder evaluar realmente la resolución de problemas, por lo que el foco del docente debería estar en analizar, interpretar y comprender lo que implican las respuestas de los estudiantes y no únicamente en medir su desempeño matemático a partir del número de respuestas correctas logradas (e. g. Chanudet, 2019; Monaghan et al., 2009; Szetela y Nicol, 1992).

La situación anterior muestra que la primera dificultad para evaluar la resolución de problemas surge con la propia concepción de qué es un problema y en qué consiste la resolución de problemas. El significado asociado al término *problema* ha ido cambiando a lo

[1] Los datos corresponden a principios de noviembre de 2021

largo de los años, conforme iba creciendo el número de investigaciones y de publicaciones sobre este tópico (sección 2.1.1). En la actualidad existe cierto acuerdo en considerar que un *problema* es una tarea matemática para la que se desconoce un procedimiento que conduzca de forma directa a la solución (e.g. Mason, 2015; Schoenfeld, 1992). Además, debe despertar cierto interés en el resolutor (Szetela y Nicol, 1992) y hacerle sentir que tiene los conocimientos necesarios para afrontarla (Felmer y Perdomo-Díaz, 2016).

Esta definición genera al menos dos dificultades a la hora de plantearse cómo evaluar la resolución de problemas. La primera tiene que ver con el tipo de tarea matemática a utilizar y la relación que debe existir entre el resolutor y la tarea para que la actividad propuesta sea efectivamente un problema (e.g. Mason, 2015); la segunda tiene que ver con el hecho de que no se conozca un procedimiento directo de resolución, lo que implicaría que los resolutores necesiten más tiempo para pensar en el problema (Di-Martino y Signorini, 2019) y que el docente tenga que analizar, comprender y valorar distintas propuestas de resolución, lo que requiere un conocimiento especializado por parte del mismo (Carrillo et al., 2019; Chapman, 2015).

Por otra parte, la resolución de problemas puede interpretarse desde diferentes perspectivas, las cuales serán expuestas en detalle en el siguiente capítulo (sección 2.1.2). En particular, la resolución de problemas puede considerarse como una competencia principal a desarrollar en el aprendizaje de la matemática (e.g. Kilpatrick et al., 2001) y también esencial para el desarrollo como ciudadanos del siglo XXI, donde la globalización, el avance tecnológico, y los numerosos cambios sociales y culturales generan situaciones cada vez más complejas y desafiantes (Siarova et al., 2017).

Voogt y Pareja Roblin (2012) señalan que estas competencias tienen tres características principales: son transversales, es decir, que no son propias de un campo de conocimiento específico sino que son relevantes para muchos ámbitos; son multidimensionales, puesto que incluyen conocimientos, habilidades y actitudes; y se corresponden con habilidades y comportamientos de orden superior, puesto que representan la capacidad para enfrentar situaciones complejas e impredecibles. Este carácter competencial de la resolución de problemas, hace que su evaluación sea un proceso complejo y desafiante, sobre todo por su carácter multidimensional y la variedad de situaciones en las que se desarrolla.

En el caso particular de los problemas matemáticos, en el proceso de resolución intervienen las siguientes dimensiones (Schoenfeld, 1992): el conjunto de conocimientos matemáticos que el resolutor tenga sobre los conceptos matemáticos presentes en el problema, el uso de heurísticos, el empleo de estrategias metacognitivas y el sistema de creencias del individuo. El sistema de creencias incluye creencias acerca de la matemática, su aprendizaje y la relación del individuo con la disciplina (Roesken et al., 2011).

En cuanto a la variedad de situaciones que pueden darse, está el uso o no de tecnología, lo que requeriría conocimientos específicos sobre la herramienta a utilizar y fluidez en su manejo (Hernández, 2021; Jacinto y Carreira, 2017). En este tipo de escenarios también es importante identificar nuevas estrategias que puedan emerger del uso de esa tecnología, como es el caso de la construcción de deslizadores o el uso del lugar geométrico para explorar distintas situaciones cuando se trabaja con GeoGebra (e.g. Hernández et al., 2020; Santos-Trigo y Camacho-Machín, 2013; Santos-Trigo et al., 2021). Otra situación que afecta al proceso de resolución de un problema es el contexto en que este esté planteado. Por ejemplo, en algunas actividades de modelización es necesario tener conocimientos sobre otras disciplinas, que permitan analizar la situación que se quiere modelizar y estudiar (e.g. Guerrero-Ortíz et al., 2016; Sevinc, 2023). También pueden influir otras características del problema planteado como el número de soluciones que tenga. Un problema con múltiples soluciones puede enriquecer la actividad matemática en relación con el tipo de estrategias y razonamientos matemáticos que son necesarios para resolverlo (Chan y Clarke, 2017; Haylock, 1997; Leikin, 2008), pero también supone un desafío desde el punto de vista de la evaluación, entre otras cosas por el tipo de conocimiento que necesita un docente para poder utilizar este tipo de actividades en el aula y gestionarlas (Carrillo et al., 2019; Guberman y Leikin, 2013).

Como puede observarse, son múltiples los aspectos que podrían considerarse a la hora de evaluar la resolución de problemas, más allá de simplemente considerar si la respuesta o respuestas dadas son correctas. Cárdenas et al. (2016) realizaron una investigación acerca de las prácticas evaluativas de los docentes en la resolución de problemas y encontraron que, a pesar de que hay aspectos que los docentes consideran que son importantes enseñar y aprender en relación con la resolución de problemas y, por tanto, objetos de evaluación, no siempre los evalúan. Sin embargo, otros elementos que sí evalúan, los consideran menos importantes para el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Por ejemplo, los docentes continúan priorizando la evaluación de aspectos cognitivos sobre los afectivos, a pesar de reconocer la importancia del dominio afectivo en el proceso de aprendizaje y enseñanza y, por tanto, en la evaluación.

Una tercera dificultad a la hora de evaluar la resolución de problemas tiene que ver con la definición de los instrumentos, técnicas y herramientas a utilizar, las cuales deben considerar los atributos relevantes de la definición de problema, las distintas situaciones en que puede presentarse y las múltiples dimensiones que configuran la competencia, algunas de las cuales son de difícil acceso como aquellas que tienen que ver con aspectos metacognitivos (Loh y Lee, 2019).

Siarova et al. (2017) presentan algunos ejemplos de instrumentos de evaluación y cómo pueden utilizarse para este tipo de competencias, distinguiendo entre instrumentos para realizar evaluaciones estandarizadas (test, cuestionario de actitudes, preguntas de elección múltiple) y no estandarizadas (e.g. portfolio, proyectos, actividades realizadas usando tecnología…). El uso de instrumentos estandarizados para evaluar la resolución de problemas presenta algunas dificultades relacionadas con la naturaleza no rutinaria de los problemas matemáticos. La principal dificultad tiene que ver con el tiempo, puesto que se dispone de un tiempo limitado para responder, lo que tiene un efecto negativo frente a actividades para las que a priori no se conoce un procedimiento directo de resolución, por lo que sería necesario dar tiempo a los estudiantes para que reflexionen, realicen los intentos necesarios y cambien de estrategia si lo consideran oportuno (Di-Martino y Signorini, 2019). En cuanto a los instrumentos no estandarizados, se han realizado estudios sobre el uso de narrativas, entrevistas basadas en tareas o autoinformes retrospectivos para evaluar la resolución de problemas matemáticos (e.g. Loh y Lee, 2019).

Siarova et al. (2017) también hace referencia a dos tipos de evaluación: la autoevaluación y la evaluación entre pares. En la literatura se han encontrado muy pocos trabajos donde se utilice este tipo de evaluaciones en matemáticas (e.g. Ayalon y Wilkie, 2021; Beaver y Beaver, 2011; Lavy y Shriki, 2014; Zevenbergen, 2001) y menos aún donde se utilicen para evaluar la resolución de problemas (e.g. Felmer y Perdomo-Díaz, 2016; Monaghan et al., 2009; Ukobizaba et al., 2021). En la siguiente sección se presenta un estudio realizado con futuros docentes de Educación Primaria, cuyo objetivo general era obtener información sobre las experiencias previas que habían tenido en relación con la evaluación entre pares, en general y en matemáticas en particular, y la valoración que hacían de este tipo de evaluación desde el punto de vista de su interés y también del desarrollo de su propio conocimiento para el ejercicio de la docencia (de-Armas-González et al., 2021b, 2021c, 2021d).

1.3. La evaluación entre pares en matemáticas: Un estudio preliminar con futuros docentes de Educación Primaria

Al comienzo de la tesis doctoral surgió la oportunidad de realizar un estudio exploratorio sobre el uso de la evaluación entre pares en la formación matemática de los futuros maestros y maestras de Educación Primaria y cómo ésta era percibida por los futuros docentes.

La investigación incluía la participación de un grupo de futuras maestras y maestros en una experiencia de evaluación entre pares, realizada con actividades de matemáticas. El objetivo del estudio era conocer la experiencia previa de los participantes en actividades de evaluación entre pares, la valoración que hacen de ella y los beneficios que consideran que les aporta en su formación como maestras y maestros. Las preguntas que guiaron esta investigación fueron:

- ¿Qué experiencia tienen los futuros maestros de Educación Primaria en relación con la evaluación entre pares?
- ¿Qué valoración hacen de la evaluación entre pares, en términos de su interés, utilidad e importancia en la formación docente?
- ¿Qué aportes perciben de la evaluación entre pares para el desarrollo de su conocimiento matemático y su conocimiento didáctico?

Esta experiencia se realizó con 94 estudiantes del Grado en Maestro/a en Educación Primaria de la Universidad de La Laguna que cursaban la asignatura *Didáctica de la Medida y de la Geometría* durante el curso 2019-20. La actividad de evaluación entre pares se dividió en tres fases (Sosa-Martín et al., en preparación):

Fase 1: Resolución de actividades matemáticas

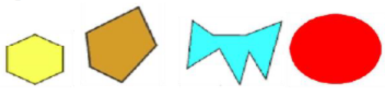
Fase 2: Evaluación de la resolución de un compañero o compañera

Fase 3: Recepción de la evaluación de un compañero o compañera

En la primera fase, cada estudiante resolvió individualmente un conjunto de doce actividades, de un nivel adaptado a Educación Primaria, relacionadas con geometría tridimensional (Figura 1.3), cuyos contenidos incluyen: identificación y clasificación de cuerpos geométricos y de sus elementos, desarrollos en el plano, huellas o tomografías, identificación y descripción de los sólidos platónicos, construcción de cuerpos geométricos utilizando materiales o el software de geometría dinámica *GeoGebra* y búsqueda de elementos de su entorno con formas parecidas a la de los cuerpos geométricos.

3. Inserta la siguiente imagen en el GeoGebra y señala los tipos de cuerpos geométricos que observas, indicando qué tipo de cuerpo es.

7. Las siguientes imágenes son parte de la huella de un cuerpo geométrico. Indica a qué cuerpos podrían corresponder.



10. Representa el desarrollo en el plano de los siguientes cuerpos geométricos:

a. Pirámide hexagonal. b. Prisma pentagonal. c. Cono truncado.

Figura 1.3. Ejemplos de actividades que los estudiantes debían resolver.

En la segunda fase, evaluación de la resolución de un compañero, se asignó, aleatoriamente y de manera anónima, a cada estudiante las respuestas de un compañero o compañera para evaluarla y calificarla con sus propios criterios. Cada estudiante, de forma individual, evaluó las actividades recibidas siguiendo la indicación de revisar la resolución incorporando los comentarios, correcciones, etc., que creyeran oportunas con la finalidad de realizar una evaluación y asignar una calificación. Se decidió no aportar a los participantes criterios de evaluación con la intención de promover la reflexión sobre su rol de docente y proporcionar experiencia para su futura actividad profesional, pero se les instó a fijar y hacer explícitos sus propios criterios de evaluación.

La tercera fase, recepción de la evaluación de un compañero, consistió en revisar la evaluación recibida del propio trabajo. Cada estudiante recibió la evaluación de sus respuestas que había realizado un compañero o compañera, pasando del rol de evaluador al de evaluado.

Al finalizar dicha experiencia, los participantes respondieron un cuestionario en el que recogieron sus valoraciones y percepciones acerca de la misma. El cuestionario estaba formado por 31 preguntas en formato de escala Likert sobre la experiencia en este tipo de actividades, la valoración que hacen del interés, utilidad y dificultad de la actividad, y la percepción que tienen acerca de los beneficios que esta aporta en su formación docente (Sosa-Martín et al., en preparación).

Las cuatro primeras preguntas solicitaban información general del estudiante (identificación, turno y grupo al que asistían en la asignatura). En los 26 ítems siguientes debían indicar su nivel de acuerdo o desacuerdo con una serie de afirmaciones según una escala Likert graduada entre 1 (Muy en desacuerdo) y 4 (Muy de acuerdo) y agrupadas en tres dimensiones:

Dimensión 1. Experiencia previa en actividades de evaluación entre pares (en general y, en particular, dentro del área de las matemáticas).

Dimensión 2. Valoración de la evaluación entre pares en términos del interés suscitado, su utilidad, la dificultad encontrada durante su realización y como elemento importante e imprescindible en los programas de formación de maestras y maestros.

Dimensión 3. Autopercepción de la contribución de la evaluación entre pares al desarrollo de su conocimiento profesional docente en términos de la contribución a su conocimiento matemático (formación matemática, detección de sus propios errores o formas de expresarse), a su conocimiento didáctico del contenido matemático (mejora en la interpretación de las resoluciones, en la identificación de dificultades en el aprendizaje de los contenidos y en el proceso de evaluación) y a su propia formación para evaluar resoluciones de actividades matemáticas.

El cuestionario finalizaba con una pregunta de respuesta abierta en la que podían comentar o aclarar alguna de las valoraciones anteriores y añadir una reflexión sobre la actividad.

El análisis de los datos consistió, principalmente, en un análisis descriptivo de las respuestas obtenidas en dicho cuestionario, apoyado por las reflexiones finales que los participantes dejaron registradas. Se analizó la distribución de frecuencias de las respuestas a cada ítem de cada una de las tres dimensiones descritas anteriormente y se clasificaron los comentarios en la pregunta final de respuesta abierta atendiendo a las tres dimensiones del cuestionario, añadiendo una nueva categoría con los comentarios que hacían alusión a características de la actividad (falta o necesidad de tener establecidos unos criterios de evaluación o las respuestas correctas de las actividades matemáticas y la calidad del feedback realizado o recibido).

Con los datos obtenidos en esta investigación se realizaron tres estudios parciales (de-Armas-González et al., 2021b, 2021c, 2021d) como paso previo al análisis completo de los resultados (Sosa-Martín et al., en preparación).

En el primero de estos estudios se analizaron las percepciones y valoraciones de la actividad desde el punto de vista del evaluador (de-Armas-González et al., 2021d). Para ello se tomaron solo las respuestas a aquellos ítems a los que debían responder como evaluadores (Figura 1.4). Además, de la segunda dimensión se analizaron las valoraciones de la actividad de evaluar las respuestas de un compañero únicamente en términos de la dificultad, el interés y la utilidad.

P1.3. Al hacer la evaluación del trabajo de mi compañera(o), ha mejorado mi formación matemática.

P1.4. Al evaluar el trabajo de mi compañera(o), he detectado errores en mis propias respuestas.

P1.9. Al hacer la evaluación del trabajo de mi compañera(o), ha mejorado mi formación para evaluar el conocimiento de mis futuros estudiantes.

Figura 1.4. Ejemplos de ítems desde el papel de evaluador.

Los resultados de este estudio mostraron que la mayoría de los estudiantes, aunque ya habían participado previamente en actividades donde debían evaluar producciones de compañeros, era la primera vez que lo hacían en la asignatura de matemáticas. De las respuestas a las preguntas englobadas en la segunda dimensión se extrajo que casi la mitad de los participantes encontró alguna dificultad a la hora realizar la evaluación de las respuestas de un compañero y una amplia mayoría (85%) valoró la actividad de evaluar como interesante y útil. Las preguntas relativas a la tercera dimensión analizadas en este estudio pueden dividirse en dos grupos: las relacionadas con la contribución de evaluar a un par al desarrollo de su conocimiento matemático y las relacionadas con la contribución a su conocimiento didáctico del contenido matemático. En cuanto a los ítems del primer grupo, los resultados pusieron de manifiesto que más de la mitad de los participantes percibió haber obtenido beneficios en cuanto a su formación matemática, en particular, más del 62% indicó que evaluar las respuestas de un compañero les había servido para advertir errores en sus propias resoluciones. Más de la mitad también indicaron que se plantearon dudas sobre su propia formación matemática. Por otra parte, solo un 28,7% percibió que evaluar a su compañera(o) le sirvió para mejorar su manera de expresarse. En relación al segundo grupo, preguntas relacionadas con la contribución al conocimiento didáctico del contenido, un 72,2% de los participantes consideró que la experiencia había contribuido a su formación didáctica. En particular, en torno al 80% percibió que evaluar la resolución de un compañero había servido para poder interpretar el conocimiento de sus futuros alumnos, para mejorar su formación para evaluarlos y para ayudarles a identificar dificultades y errores en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Los otros dos trabajos ampliaron cada uno una parte del estudio anterior. Poniendo el foco en una de las dimensiones (segunda y tercera), se añadieron al estudio de las valoraciones y percepciones desde el papel de evaluador, las valoraciones desde la perspectiva de evaluado. Uno de estos trabajos se enfocó en analizar, de forma conjunta, las valoraciones que los participantes hacían de la evaluación entre pares, tanto al evaluar las respuestas de un compañero como al recibir la evaluación de sus propias respuestas (de-Armas-González et al., 2021c). Además, en este estudio se incorporaron a las valoraciones en términos de la dificultad, la utilidad y el interés de la actividad, aquellas en las que se valora la actividad desde el punto de vista de la formación docente. Los resultados de este segundo estudio preliminar mostraron que el alto porcentaje de participantes que indicó que evaluar las respuestas de un compañero fue una actividad interesante, se mantiene al preguntar si también resultó interesante recibir la evaluación de las suyas propias. En términos de utilidad, los estudiantes consideraron más útil evaluar (85%) que recibir una evaluación (72%). Por último, en cuanto a las valoraciones de las actividades de evaluación entre pares en la formación docente, los resultados mostraron que la mayoría de los estudiantes (88%) creyó importante realizar actividades de evaluación entre pares durante su formación como maestras y maestros y casi un 70% lo considera imprescindible.

El tercero de estos estudios preliminares se centró en analizar la percepción de los participantes acerca de lo que la actividad de evaluación entre pares podría haber aportado a su conocimiento matemático, tanto en el papel de evaluadores como en el rol de evaluados (de-Armas-González et al., 2021b). Para ello, se analizaron las respuestas a los 8 ítems del cuestionario clasificados en la tercera dimensión y referidos a las percepciones de la contribución de la actividad a su conocimiento matemático (formación matemática, detección de sus propios errores o formas de expresarse) (Figura 1.5).

P1.5. Al evaluar el trabajo de mi compañera(o), me han surgido dudas sobre mi formación matemática.

P2.6. A partir de la evaluación recibida, me he dado cuenta de que debo mejorar mi forma de expresarme, al escribir mis respuestas.

P1.7. Al hacer la evaluación del trabajo de mi compañera(o), ha mejorado mi formación para interpretar el conocimiento de mis futuros estudiantes.

P2.9. Al recibir una evaluación de mi trabajo, por parte de un compañero(a), ha mejorado mi formación para evaluar el conocimiento de mis futuros estudiantes.

Figura 1.5. Ejemplos de ítems sobre la contribución a su conocimiento matemático.

Con respecto a la formación matemática, los resultados muestran que la actividad contribuyó a mejorar su formación matemática más al actuar como evaluadores (60%) que tras recibir la evaluación de sus propias respuestas (50%). Del mismo modo, surgieron más dudas acerca de su formación matemática mientras evaluaban (40%) que al observar la evaluación recibida (30%). Además, el porcentaje de estudiantes que admitió que la actividad contribuyó a detectar errores en sus propias respuestas es similar tanto evaluando como siendo evaluados (60%). También se encontró un resultado similar entre el porcentaje de estudiantes que consideró que evaluar les hizo darse cuenta de que debían mejorar su forma de expresarse y los que lo consideraron al ser evaluados (20%).

Finalmente se realizó un estudio completo, integrando los resultados parciales obtenidos en los trabajos anteriores y explorando relaciones entre las distintas variables consideradas. Los resultados de este estudio forman parte de un artículo que ya se encuentra en proceso avanzado de preparación (Sosa-Martín et al., en preparación). En él se aborda el análisis de los resultados de cada una de las preguntas del cuestionario, completando el estudio de las tres dimensiones establecidas anteriormente y dando respuesta así a las tres preguntas de investigación. Se comparan los resultados de las percepciones y valoraciones como evaluadores y como evaluados en aquellas preguntas formuladas desde ambas perspectivas. Y se incorpora el análisis de la última pregunta del cuestionario de respuesta abierta, complementando así el análisis cuantitativo de los datos.

Tanto los trabajos parciales como el estudio completo nos permiten extraer conclusiones en torno a la evaluación entre pares en la formación docente. En primer lugar, se observó la poca experiencia de los participantes en actividades de evaluación entre pares en matemáticas, lo que podría mostrar que la mayoría de los profesores de matemáticas, en general continúan empleando métodos tradicionales para evaluar al alumnado (Cárdenas et al., 2016).

Otro de los resultados destacables tiene que ver con los beneficios de involucrar a los estudiantes en actividades de evaluación entre pares. Investigaciones anteriores han mostrado los múltiples beneficios de estas actividades (Beaver y Beaver, 2011; Hanrahan e Isaacs, 2001; Lavy y Shriki, 2014; Zevenbergen; 2001), tanto al evaluar como al recibir una evaluación de un par (Topping, 2009; Topping y Ehly, 1998). En estos trabajos también se observó que los participantes valoraron la actividad como interesante y útil y percibieron contribuciones de la actividad a su conocimiento matemático, su conocimiento didáctico y a su formación como evaluadores.

Por otro lado, los resultados de estos estudios también mostraron las dificultades encontradas a la hora de evaluar, evidenciando la complejidad del proceso de evaluación y reflejando una de las principales preocupaciones de los docentes en formación: la falta de experiencia práctica con la evaluación (Zevenbergen, 2001).

1.4. Problema de investigación y objetivos

Como se ha mostrado en las secciones anteriores, la resolución de problemas juega un papel central en el desarrollo de la formación matemática de los estudiantes, no solo a nivel escolar, sino como individuos que forman parte de una sociedad en la que tienen que participar siendo analíticos, críticos y reflexivos.

La incorporación de la resolución de problemas en el aula supone una serie de desafíos para el docente que incluyen, desde la elección del tipo de actividad matemática a utilizar, cómo gestionar dichas actividades y cómo evaluarlas. Esto requiere de unos conocimientos especializados, propios de la profesión docente, que incluyen, en términos del modelo MTSK, acrónimo de *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (Carrillo et al., 2018), los siguientes (Carrillo et al., 2019):

- Un conocimiento de la variedad de situaciones que pueden utilizarse y cómo seleccionar las más apropiadas según los objetivos de aprendizaje (KMT: Knowledge of Mathematics Teaching)

- Un conocimiento particular de los contenidos matemáticos presentes en el problema a resolver (KoT: Knowledge of Topics).

- Un conocimiento de la resolución de problemas como práctica matemática (KPM: Knowledge of Practices in Mathematics)
- Un conocimiento de los estudiantes como resolutores de problemas y las dificultades que pueden encontrarse en distintas fases de la resolución (KFLM: Knowledge of Features of Learning Mathematics)

En la literatura se encuentra una amplia cantidad y variedad de investigaciones sobre la resolución de problemas, sin embargo, son muy pocos los estudios realizados con foco en la evaluación de esta competencia (e.g. Di-Martino y Signorini, 2019; Felmer y Perdomo-Díaz, 2016; Loh y Lee, 2019; Monaghan et al., 2009; Ukobizaba et al., 2021).

Puesto que la evaluación de la resolución de problemas es una de las prácticas profesionales del docente de matemáticas, nos preguntamos: ¿Qué tipo de formación reciben los futuros docentes sobre la evaluación de la resolución de problemas? ¿De qué manera evalúan esta competencia? ¿Qué tipos de evaluaciones conocen?

Para tratar de aportar algo de información que contribuya a responder a las preguntas anteriores, se decidió realizar un estudio diagnóstico exploratorio con futuros docentes de matemáticas de Educación Secundaria. Así, el problema de investigación que se aborda en este trabajo consiste en estudiar la forma en que los docentes de matemáticas de Educación Secundaria en formación inicial evalúan actividades de resolución de problemas.

Dada la gran cantidad y diversidad de situaciones de evaluación de resolución de problemas que pueden darse, se decidió acotar el estudio a un tipo concreto de problemas, los problemas de final abierto (con múltiples soluciones). Esta elección responde a la necesidad de emplear una actividad matemática que realmente fuera un problema para los participantes de la investigación, en el sentido de que fuera un desafío y no conocieran un procedimiento que les llevara directamente a las soluciones (Schoenfeld, 1992; Mason, 2015). Por otra parte, se optó por realizar el estudio sobre un tipo concreto de evaluación, la evaluación entre pares, puesto que ésta permite a los involucrados revisar su propio conocimiento y reflexionar también sobre el proceso de evaluación (Beaver y Beaver, 2011; Lavy y Shriki, 2014). A partir de lo anterior, se plantean las siguientes preguntas que guían la investigación:

> **Pregunta 1.** ¿Qué características presentan las resoluciones de los futuros docentes de matemáticas de Educación Secundaria a un problema de final abierto?
>
> **Pregunta 2.** ¿De qué forma se enfrentan los futuros docentes de matemáticas de Educación Secundaria a la evaluación de la resolución de problemas de final abierto?

Para responder a las preguntas anteriores se establecieron los siguientes objetivos:

1. Analizar las resoluciones de los futuros docentes de matemáticas de Educación Secundaria a un problema de final abierto atendiendo a: los heurísticos que emplean, los casos estudiados, las representaciones utilizadas, las soluciones que presentan, si comprueban o no dichas soluciones y los errores que cometen.

2. Identificar qué aspectos de la resolución del problema tienen en cuenta los futuros docentes cuando actúan como evaluadores, y analizar de qué forma utilizan sus propias resoluciones para evaluar la de un compañero (si es que lo hacen), así como el carácter de sus intervenciones.

La investigación se realizó con estudiantes de la especialidad de Matemáticas del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas (Interuniversitario: Universidad de La Laguna y Universidad de Las Palmas de Gran Canaria). El estudio se divide en dos fases, en cada una de las cuales se aborda uno de los objetivos de investigación (Figura 1.6). En la primera fase se realiza un análisis de cada una de las resoluciones que los participantes presentan a un problema de final abierto. En esta fase, mediante un análisis de contenido, se identifican los heurísticos que cada uno emplea en su resolución, los casos que estudia, las representaciones que utiliza, las soluciones que indica, si comprueba o no dichas soluciones, así como los errores que comente. Toda esta información se toma como base para la segunda fase de la investigación donde, el foco se pone en el análisis del proceso que los participantes siguieron para evaluar (en parejas) la solución presentada por un compañero. El diseño metodológico de esta segunda fase corresponde con un estudio de casos, donde cada caso lo forma una pareja de evaluadores y el estudiante evaluado.

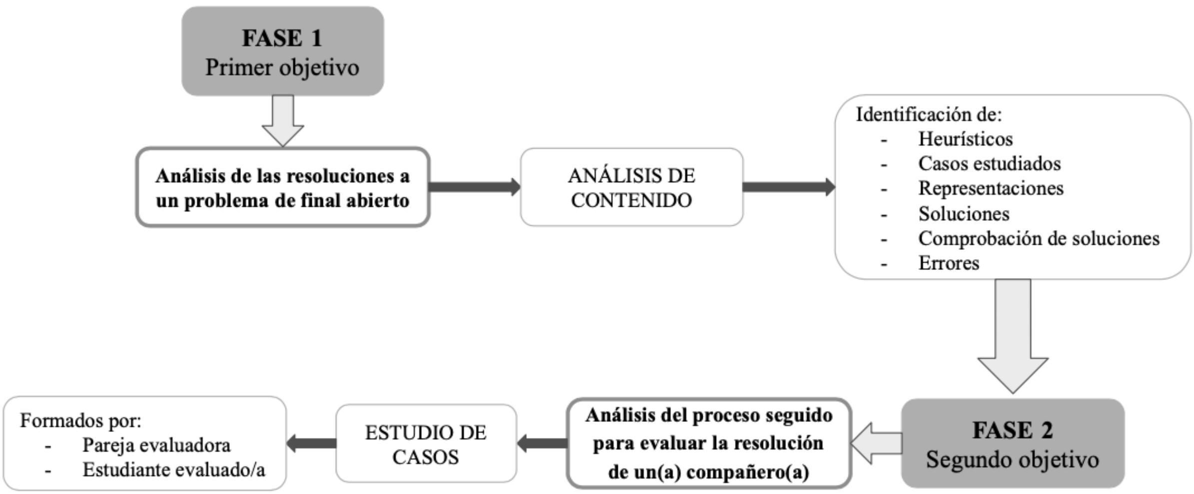


Figura 1.6. Esquema de las fases del estudio.

Capítulo 2

MARCO CONCEPTUAL

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos que sustentan esta investigación y que están relacionados principalmente con la resolución de problemas y su evaluación. Se comienza mostrando qué se entiende en la literatura por problema y discutiendo distintas clasificaciones de los mismos, en particular los problemas de final abierto. Posteriormente, se establece un conjunto de elementos teóricos relativos a la resolución de problemas y se describen algunos aspectos que intervienen en este proceso. Por último, se presenta una revisión teórica sobre la evaluación, con énfasis en la evaluación entre pares y las particularidades de la evaluación en actividades de resolución de problemas.

2.1. Resolución de problemas

Desde la publicación del libro de Polya (1945), *How to solve it*, la resolución de problemas se ha convertido en una de las principales líneas de investigación en Educación Matemática. La importancia y actualidad de la resolución de problemas como tema de interés ha dado lugar a que los congresos internacionales de mayor relevancia en el área hayan incorporado grupos de estudio dedicados exclusivamente a este tópico. Es el caso, por ejemplo, del ICME (International Congress on Mathematical Education), la conferencia anual del PME (International Group for the Psychology of Mathematics Education) o el CERME (Conference of the European Society for Research in Mathematics Education). Otro indicador del interés que sigue habiendo en la resolución de problemas es el número de publicaciones, entre las que se incluyen libros dedicados exclusivamente a este tema (e.g., Felmer et al., 2019; Liljedahl et al., 2016).

La gran cantidad y diversidad de investigaciones en torno a la resolución de problemas muestra una variedad de significados asociados a los términos *problema* y *resolución de problemas*, lo que en ocasiones resta claridad a los estudios realizados (Mason, 2015), dificultando el establecimiento de un marco teórico sólido (Lesh y Zawojewski, 2007; Schoenfeld, 1992). En las siguientes secciones se presentan y discuten las distintas formas en que el término *problema* aparece en la literatura y las perspectivas desde la que se considera la *resolución de problemas*, haciendo explícita qué concepción de *problema* y *resolución de problemas* se consideran en la investigación que se presenta en esta tesis.

2.1.1. Los problemas

Una de las primeras definiciones del término *problema* que aparece en la literatura proviene de Polya (1945), quien especifica que un *problema* debe ser una tarea no rutinaria, definiendo las tareas rutinarias como aquellas que se resuelven siguiendo paso a paso un ejemplo resuelto con anterioridad. Las definiciones más aceptadas hoy en día coinciden en que para que una tarea sea considerada un *problema* no debe conocerse el método de resolución con antelación, en el sentido de que la estrategia para encontrar la solución no se reduzca a la mera aplicación de un procedimiento ya conocido (NCTM, 2000). En este sentido, dichas tareas deben poseer un cierto grado de dificultad que no se limite a una dificultad procedimental, sino que suponga un desafío para la persona que trata de resolverla (Perdomo-Díaz y Felmer, 2017; Santos-Trigo, 2020b). Sin embargo, el nivel de dificultad no debe hacer que el resolutor abandone la tarea sin intentar avanzar en el proceso de resolución (Mason, 2016). Otros autores señalan que para que una tarea pueda considerarse un *problema*, su resolución debe requerir de razonamientos cognitivos de orden superior (Kolovou et al., 2009).

Es decir, existe un amplio consenso en que el término *problema* se refiere a una tarea matemática que genera en el resolutor una sensación de desafío al no disponer de un procedimiento conocido y directo para resolverla (Mason, 2015), pero poseyendo la experiencia necesaria para trabajar en alcanzar una solución (Schoenfeld, 1992).

En esta investigación se asume, por tanto, que para que una tarea matemática sea un *problema*, debe tener el potencial de generar un desafío intelectual a la persona que intenta resolverla, de manera que mejore su desarrollo matemático, promoviendo su comprensión conceptual, su razonamiento matemático y la competencia para comunicar ideas matemáticas (Cai y Lester, 2010). La tarea también debe despertar el interés del resolutor (Szetela y Nicol, 1992) y hacerle sentir capaz de afrontarla (Felmer y Perdomo-Díaz, 2016).

Schoenfeld (1985) destacó la relación entre una tarea y su resolutor a la hora de considerarla un *problema*. La definición de un *problema* está directamente relacionada con el esfuerzo que le supone su resolución a un individuo (Santos-Trigo, 2008). Lo que para algunos estudiantes es un problema, pues su resolución les supone un esfuerzo, para otros solo se trata de un ejercicio rutinario (Fernández-Bravo, 2010; Santos-Trigo, 2008). Es decir, "lo importante es la relación alumno-problema y no el problema en sí" (Fernández-Bravo, 2010, p. 31).

En el contexto de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas hay que tener en cuenta esta relación individuo-tarea y otros aspectos que influyen en que la tarea empleada pueda considerarse o no un *problema*. Por ejemplo, se debe analizar cuándo introducir estas tareas en el proceso de enseñanza para que realmente supongan una situación problemática para los estudiantes (Mason, 2016) y cómo introducirlas para que no se conviertan en una tarea rutinaria y mantengan su nivel de demanda cognitiva (Olson y Knott, 2013).

En este sentido, Zhu y Fan (2006) analizaron los problemas planteados en libros de texto con el objetivo de explorar de qué forma podían influir en el desempeño de los estudiantes en matemáticas, pues los libros de texto son un componente clave del plan de estudios e intervienen de forma directa en la enseñanza de los profesores y en el aprendizaje de los estudiantes. Lo autores establecieron para este estudio siete clasificaciones de los problemas:

- *Problemas rutinarios frente a problemas no rutinarios.* Un problema no rutinario es aquel que no puede resolverse con la simple aplicación de un algoritmo, fórmula o procedimiento estándar. Si un problema se plantea después de una explicación que muestra métodos particulares de resolución (algoritmo, fórmula o procedimiento), se considera un problema rutinario.

- *Problemas tradicionales frente a problemas no tradicionales*. Los autores dividen los problemas no tradicionales en cuatro subtipos:
    - *Problemas de planteamiento*. Requieren que los estudiantes formulen preguntas utilizando la información proporcionada.
    - *Problemas de puzle*. Permiten que los estudiantes participen en matemáticas creativas potencialmente enriquecedoras.
    - *Problemas de proyecto*. Tareas que involucran uno o más de los siguientes procesos: recopilar datos, observar, buscar referencias, identificar, medir, analizar, determinar patrones y/o relaciones, representar gráficamente y comunicarse.
    - *Problemas de diario*. Requieren que los estudiantes escriban un trabajo para expresar sus ideas, experiencias, preguntas, reflexiones, comprensión o nuevos aprendizajes.

- *Problemas de aplicación frente a problemas no relacionados con la aplicación*. Un problema de aplicación es aquel que está relacionado o que surge en el contexto de una situación de la vida real, pudiendo ser problemas de aplicación ficticia, cuyas condiciones y datos son creados por los autores de los libros de texto, o problemas de aplicación auténtica, cuyas condiciones y datos provienen de situaciones de la vida real o son recopilados por los propios estudiantes en su vida diaria. Un problema de no aplicación es aquel que no está relacionado con ningún aspecto de la vida cotidiana o del mundo real.

- *Problemas en forma matemática, problemas en forma verbal, problemas en forma visual y problemas en forma combinada*. Esta categorización tiene en cuenta tanto la descripción de la situación como la presentación de los datos. Si se incluyen sólo expresiones matemáticas, es un problema en forma matemática. Si sólo se expresan palabras escritas, es un problema en forma verbal. Si consiste simplemente en figuras, imágenes, gráficos, cuadros, tablas, diagramas, mapas, etc., entonces es un problema en forma visual. El resto son problemas en forma combinada, presentados con una combinación de dos o tres de las formas anteriores.

- *Problemas con datos suficientes, problemas con datos sobrantes y problemas con datos insuficientes*. Los problemas en los que las condiciones y los datos son exactamente los necesarios para resolverlos se consideran problemas con datos suficientes. Si un problema contiene información añadida a la estrictamente necesaria para resolverlo se trata de un problema con datos sobrantes. Si la información proporcionada en un problema no es suficiente para obtener la solución, se considera un problema con datos insuficientes.

- *Problemas de un solo paso frente a problemas de varios pasos*. Los problemas que pueden resolverse mediante una operación directa se definen como problemas de un solo paso. Si no es así, los problemas se denominan problemas de varios pasos.

- *Problemas abiertos frente a problemas cerrados*. Un problema abierto es un problema con varias soluciones. En consecuencia, un problema cerrado es un problema que tiene una única respuesta correcta, sin importar cuántos enfoques diferentes existan para llegar a ella.

Para el desarrollo de esta investigación se seleccionó un problema de final abierto, definidos como aquellos que tienen múltiples soluciones (Zhu y Fan, 2006) y pueden resolverse de más de una manera (Chan y Clarke, 2017). Ärlebäck (2009) añade que son problemas en los que no existe un procedimiento o estrategia de resolución determinada y conocida, lo que obliga a los resolutores a poner en juego otras habilidades y conocimientos previos. Los problemas abiertos podrían, por tanto, clasificarse también como problemas no rutinarios, según la definición de Zhu y Fan (2006), en el sentido de que quienes los resuelven desconocen un procedimiento previamente establecido para encontrar las soluciones.

Los problemas de final abierto permiten dejar atrás la concepción de problema como una tarea con una única solución, obtenida con un único método de resolución explicado por el docente y empleando poco tiempo (Schoenfeld, 1992). El uso en el aula de problemas con una única solución, a la que puede llegarse con un único camino, que debe encontrarse rápidamente y muchas veces mostrado por el docente hace que, en muchas ocasiones, los estudiantes abandonen aquellas tareas que no identifican con las realizadas en el aula y de las que no encuentran una solución rápidamente (Camacho-Martín et al., 2012). Al desconocer un procedimiento de resolución y verse obligados a movilizar conocimientos adquiridos, los problemas de final abierto permiten a los resolutores trabajar según sus posibilidades, aumentando sus probabilidades de obtener, al menos, una respuesta correcta (Ochoviet, 2020). La solución encontrada será, además, propia, lo que eleva la autoestima y confianza en la resolución de problemas, dejando atrás la perspectiva de las matemáticas como una disciplina restrictiva y rígida y transformándola en una materia más flexible y que admite diversidad (Martínez et al., 2017).

Zaslavsky (1995) ya proponía transformar los problemas cerrados en los que hay una única respuesta correcta, en problemas de final abierto para crear tareas ricas que fomenten nuevas dinámicas en el aula que promuevan el aprendizaje. En comparación con las tareas cerradas, las tareas abiertas proporcionan una plataforma de enseñanza que permite el desarrollo, no sólo de la comprensión matemática de los estudiantes, sino también sus habilidades argumentativas y de resolución de problemas (Chan y Clarke, 2017). Silver y Mills (2018) sostienen que los estudiantes pueden aprender más resolviendo un mismo problema empleando varios métodos diferentes que resolviendo multitud de problemas diferentes con una misma estrategia. Resolver problemas con múltiples soluciones otorga al alumnado una variedad de representaciones y estrategias de resolución que les proporcionará una mayor destreza en futuras situaciones de resolución de problemas y contribuye a mejorar el nexo entre un problema y los conocimientos necesarios para resolverlo, fortaleciendo la movilización y la conexión entre conceptos relacionados (Silver y Mills, 2018).

Dadas las posibilidades de los problemas de final abierto de contribuir al desarrollo matemático, este tipo de tareas deberían incluirse en la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles, en particular, en los programas de formación de futuros docentes. En investigaciones realizadas con profesores de Matemáticas, en activo y en formación, se ha visto como cada vez más docentes consideran necesaria la incorporación de problemas de final abierto en sus prácticas habituales de aula (Ferrando et al., 2017), considerando que pueden contribuir a promover la creatividad y el aprendizaje de las matemáticas (Sánchez et al., 2019).

2.1.2. La resolución de problemas

La investigación sobre resolución de problemas ha crecido a lo largo del tiempo y ha tomado diferentes enfoques, siendo ampliamente estudiada desde diferentes perspectivas (Liljedahl y Cai, 2021). En 1989, Stanic y Kilpatrick identifican tres perspectivas principales con respecto al uso de la resolución de problemas (como se citó en Schoenfeld, 1992).

Desde la primera perspectiva, *la resolución de problemas como contexto,* la resolución de problemas se emplea para alcanzar metas curriculares y desempeña cinco funciones: (1) Justificar la enseñanza del contenido matemático a través de problemas relacionados con experiencias del mundo real; (2) Motivar la presentación de nuevos conocimientos mostrando problemas que se podrán resolver una vez que se adquieran dichos conocimientos; (3) Mostrar una visión recreativa de las matemáticas con problemas que resulten entretenidos para el alumnado; (4) Desarrollar nuevas habilidades en los estudiantes, a través de problemas que fomenten discusiones sobre el contenido y (5) Practicar los conocimientos adquiridos con problemas en los que pongan en práctica las técnicas aprendidas.

Desde la segunda perspectiva, *la resolución de problemas como habilidad*, se sitúa a la resolución de problemas como una de las habilidades que deben adquirir los estudiantes. Se distingue entre la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios, clasificando la resolución de problemas no rutinarios como una habilidad de nivel superior que se adquiere tras la habilidad para resolver problemas rutinarios (que, a su vez, se adquiere después de que los estudiantes aprendan los conceptos y las habilidades matemáticas básicas).

Desde la tercera perspectiva, *la resolución de problemas como arte,* la resolución de problemas se considera como el eje de las matemáticas, incluso las matemáticas en sí mismas, considerando que las matemáticas se hacen resolviendo problemas.

Las investigaciones, pasadas y presentes, sobre la resolución de problemas pueden clasificarse en torno a estas tres perspectivas propuestas por Stanic y Kilpatrick en 1989: como una tarea cognitiva, como algo que debe enseñarse y como algo a través de lo que enseñar (Liljedahl y Cai, 2021). Estas perspectivas se manifiestan en los tres enfoques desde los que se puede incorporar la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas:

(1) Enseñar *para* la resolución de problemas; (2) Enseñar *sobre* la resolución de problemas y (3) Enseñar *a través de* la resolución de problemas (Castro-Martínez y Ruiz-Hidalgo, 2018).

En el primer enfoque, enseñar *para* la resolución de problemas, se utilizan los conocimientos adquiridos previamente para resolver problemas (Castro-Martínez y Ruiz-Hidalgo, 2018). La resolución de problemas se considera una actividad en la que los estudiantes participan sólo después de la introducción de un nuevo concepto o después de trabajar en un algoritmo (Schroeder y Lester, 1989). La labor docente se centra en organizar secuencias de tareas que muestren los conceptos necesarios que deben conocer los estudiantes, con el objetivo de que estos alcancen las habilidades básicas para aplicar los conocimientos a la resolución de problemas de distinta dificultad, rutinarios y no rutinarios (Castro-Martínez y Ruiz-Hidalgo, 2018; Schroeder y Lester, 1989). Normalmente, estos problemas aparecen bajo el título del tópico que se está trabajando y se proporciona un ejemplo como modelo para resolver otros problemas similares, donde se obtiene la solución siguiendo el patrón del ejemplo. Este tipo de problemas no requiere de pensamiento matemático, lo que provoca que los estudiantes crean que todos los problemas matemáticos se pueden resolver rápidamente y sin esfuerzo, sin necesidad de comprender la conexión entre las matemáticas que utilizan con la situación planteada en el problema (Schroeder y Lester, 1989).

En el segundo enfoque, enseñar *sobre* la resolución de problemas, se enseñan modelos de resolución de problemas, centrando la enseñanza en cómo se resuelven los problemas más que en la propia resolución de problemas concretos (Schroeder y Lester, 1989). Uno de los modelos de resolución de problemas que se emplea bajo este enfoque es el establecido por Polya (1945). Este modelo describe un conjunto de cuatro fases interdependientes en el proceso de resolución de problemas matemáticos: (1) comprender el problema; (2) diseñar un plan; (3) ejecutar el plan y (4) mirar hacia atrás, reflexionar sobre el problema y la resolución (Castro-Martínez y Ruiz-Hidalgo, 2018). A los estudiantes se les enseñan explícitamente estas cuatro fases además de una serie de estrategias que les ayudarán a diseñar y llevar a cabo sus planes de resolución de problemas (Schroeder y Lester, 1989).

En el tercer enfoque, enseñar *a través de* la resolución de problemas, los problemas se utilizan como un método de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Castro-Martínez y Ruiz-Hidalgo, 2018), concibiéndolos no sólo como un propósito para aprender matemáticas sino también como el medio principal para hacerlo (Schroeder y Lester, 1989). Se plantean a los estudiantes problemas que involucran los aspectos clave del tema para que indaguen en su solución, movilizando los conocimientos previos y haciendo surgir nuevos aprendizajes de conceptos y procesos, derivados de las respuestas y procesos de resolución de los problemas (Castro-Martínez y Ruiz-Hidalgo, 2018; Schroeder y Lester, 1989). El aprendizaje de las matemáticas *a través de* la resolución de problemas puede verse como un paso desde lo concreto (un problema del mundo real que sirve como ejemplo del concepto o técnica matemática) a lo abstracto (una representación simbólica de una clase de problemas y técnicas para operar con esos símbolos) (Schroeder y Lester, 1989).

Los dos primeros enfoques, enseñar *para* y *sobre* la resolución de problemas, consideran la resolución de problemas como el objetivo del aprendizaje, mientras que el tercero, enseñar *a* *través de* la resolución de problemas, la considera un vehículo para enseñar y desarrollar nuevos conocimientos (Castro-Martínez y Ruiz-Hidalgo, 2018). A pesar de que en la teoría se describen estos tres enfoques de la resolución de problemas de forma independiente y podrían utilizarse de manera aislada, en la práctica se solapan y se utilizan de forma combinada (Castro-Martínez y Ruiz-Hidalgo, 2018; Schroeder y Lester, 1989).

Tal y como señalan distintos autores, la resolución de problemas es uno de los principales procesos implicados en el pensamiento matemático (e.g., Drijvers et al., 2019; Schoenfeld, 1992), promoviendo la capacidad de razonar y de comunicarse matemáticamente, desarrollando los conocimientos y estimulando el aprendizaje (Cai y Lester, 2010). La resolución de problemas no es exclusiva de las matemáticas sino que también es fundamental en otras ramas de conocimiento como la tecnología, la ingeniería, la biología, la física o la medicina. Por este motivo, lograr convertir al alumnado en resolutores de problemas competentes y eficientes, capacitados para actuar, además de en matemáticas, en otros campos se ha convertido en uno de los principales objetivos en todos los niveles educativos (Chan y Clarke, 2017).

Las industrias están mostrando una tendencia a realizar tareas rutinarias de forma automatizada, valorando cada vez más las habilidades de resolución de problemas de sus empleados (Chan y Clarke, 2017). Como resultado de estas nuevas demandas junto con las contribuciones de la investigación, varios países han introducido cambios en sus planes de estudio de matemáticas, dando una mayor presencia a la resolución de problemas (por ejemplo, Singapur, España y Estados Unidos).

En los currículos oficiales de la asignatura de Matemáticas de la Comunidad Autónoma de Canarias, la resolución de problemas está presente en la mayoría de los sentidos matemáticos (conocimientos, destrezas y actitudes) que estructuran los saberes básicos que deben adquirir los estudiantes de Educación Primaria, Secundaria y Bachillerato (Decreto 211/2022; Decreto 30/2023). En estos documentos se establece que la resolución de problemas "constituye un eje fundamental en el aprendizaje de las matemáticas, pues es un proceso central en la construcción del conocimiento matemático" (Decreto 30/2023, p. 4) y, por ello, se observa como pieza clave del desarrollo del currículo, "unas veces como fin, otras como vía por la cual se genera el conocimiento, y otras como nexo entre las diferentes partes del currículo o materias" (Decreto 30/2023, p. 9). Se incide, además, en que se trabajará la resolución de problemas "tanto como un objetivo en sí mismo como un medio para la construcción del conocimiento matemático" (Decreto 211/2022, p. 5).

En estos currículos también se reflejan las contribuciones de la resolución de problemas al aprendizaje del alumnado, estableciendo que "facilita plantearse interrogantes, leer comprensivamente, cuantificar, estimar, analizar la información, reflexionar, establecer un plan y revisarlo, verificar la validez de las soluciones, argumentar, comunicar e integrar los conocimientos adquiridos" (Decreto 211/2022, p. 3). "Tanto los problemas de la vida cotidiana en diferentes contextos como los problemas propuestos en el ámbito de las matemáticas permiten ser catalizadores de nuevo conocimiento, ya que las reflexiones que se realizan durante su resolución ayudan a la construcción de conceptos y al establecimiento de conexiones entre ellos" (Decreto 30/2023, p. 4), pues la resolución de problemas lleva ímplicita la "capacidad de transformar las ideas en actos, es decir, de adquirir conciencia de la situación a intervenir o resolver, y saber elegir, planificar y gestionar los conocimientos, aplicando las habilidades y actitudes necesarias con criterio propio, con el fin de alcanzar el objetivo previsto con seguridad y confianza" (Decreto 211/2022, p. 4).

2.1.3. Aspectos que intervienen en la resolución de problemas

Schoenfeld (1992, 2013) identificó cuatro elementos que intervienen en el éxito o el fracaso de una persona en la resolución de problemas:

- El conocimiento del individuo.

  Los conocimientos matemáticos relacionados con el tema abordado en el problema que se pretende resolver son determinantes para el éxito o fracaso en la resolución del mismo.

- El uso de estrategias de resolución de problemas o heurísticos.

  Con una instrucción adecuada, los estudiantes pueden aprender a emplear de forma efectiva las estrategias heurísticas de resolución de problemas descritas por Polya (1945).

- El monitoreo y la autorregulación del individuo.

  La manera en que el resolutor gestiona los recursos que tiene a su disposición es un factor fundamental en su éxito o fracaso al resolver un problema. Schoenfeld (1992) observó que, los resolutores que tenían éxito al intentar resolver un problema complejo, eran aquellos que revisaban su progreso y, a partir de esa revisión, decidían si continuaban con la estrategia o cambiaban de dirección. Por el contrario, aquellos que no tenían éxito, tendían a elegir rápidamente una estrategia de resolución y perseveraban en ella a pesar de no lograr ningún progreso. Esto muestra la importancia del desarrollo de estrategias metacognitivas para la resolución de problemas.

- Las creencias del individuo (sobre sí mismo, sobre las matemáticas, sobre resolución de problemas) y sus orígenes en las experiencias matemáticas de los estudiantes.

  Los estudiantes poseen muchas creencias acerca de la resolución de problemas que afectan a sus actuaciones a la hora de enfrentarse a un problema. Por ejemplo, los estudiantes cuya experiencia matemática consiste en ejercicios que podían resolverse en pocos minutos pueden llegar a creer que todos los problemas se pueden resolver en poco tiempo y dejan de trabajar en problemas que podrían resolver si hubieran perseverado.

Las categorías anteriores definidas por Schoenfeld (1992, 2013) tienen que ver con la relación entre el resolutor y el problema. Por otra parte, para desarrollar las competencias necesarias para convertirse en un resolutor eficiente hay que entrenarse en la resolución de problemas (Castro-Martínez y Ruiz-Hidalgo, 2018). Por ello, en la resolución de problemas también intervienen directamente aspectos relacionados con las prácticas educativas en las que se participe.

Muchos profesores y libros de texto a menudo proponen actividades que no pueden considerarse problemas, pues se reducen a la simple aplicación rutinaria de un procedimiento aprendido previamente y no suponen un reto para el alumnado. Por otro lado, cuando un profesor propone un problema, los estudiantes parten con ciertas ideas preconcebidas ligadas a las prácticas educativas habituales: que tiene una única solución, que ésta se puede obtener aplicando procedimientos aprendidos en clase, o que el profesor conoce la solución y pueden realizarle preguntas que les acerquen a la solución. Estas creencias no son exclusivas del alumnado, muchos docentes comparten estas ideas y son quienes las trasmiten a los estudiantes (Castro-Martínez y Ruiz-Hidalgo, 2018). En este sentido, Liljedahl (2016) realiza una serie de recomendaciones a tener en cuenta cuando se utiliza la resolución de problemas en la enseñanza.

- *El tipo de tareas utilizadas y cuándo y cómo se utilizan.* Según el autor, la resolución de problemas debería plantearse al inicio, con la introducción de un nuevo contenido, con tareas atractivas para el alumnado que les motiven a intentar resolverlas, y debe permanecer a lo largo de toda la unidad de estudio, haciendo emerger matemáticas ricas.

- *La forma en que se entregan las tareas a los estudiantes.* Los enunciados de las tareas deberían plantearse al alumnado de forma oral, salvo datos y diagramas. Esto lleva a los estudiantes a discutir sobre lo que se les pregunta en lugar de intentar interpretar las instrucciones escritas en una página.

- *Cómo se forman los grupos cuando los estudiantes trabajan en las tareas.* Las agrupaciones deberían ser un recurso que se utilice con frecuencia. Se deberían formar al inicio de cada clase, de modo aleatorio, grupos de 2 a 4 estudiantes que trabajarán juntos en cualquier tarea de resolución de problemas asignada, permaneciendo juntos durante toda la sesión.

- *Espacio de trabajo de los estudiantes mientras realizan las tareas.* Se recomienda que los grupos trabajen en superficies verticales como, por ejemplo, pizarras. Esto permite que todos los componentes del grupo vean todo el trabajo que se está realizando, siendo visible también para el profesor y el resto de los grupos.

- *Organización del aula, tanto en general como cuando los estudiantes trabajan en las tareas.* Todos los pupitres deberían estar colocados en una configuración aleatoria alrededor del aula y orientados hacia un espacio de enseñanza. El profesor debe dirigirse a la clase desde distintos puntos del aula y, en la medida de lo posible, utilizar las cuatro paredes.

- *Cómo se responden las preguntas mientras los estudiantes trabajan en las tareas.* Mientras los estudiantes están trabajando en las tareas suelen hacer tres tipos de preguntas: (1) preguntas de proximidad: las hacen cuando el docente está cerca; (2) preguntas para dejar de pensar, la mayoría de las veces del tipo "¿es esto correcto?"; y (3) preguntas para seguir pensando: preguntas que los estudiantes hacen para poder volver al trabajo. El docente solo debería responder al tercero de estos tipos de preguntas. Los dos primeros tipos deben escucharse pero no responderse, haciendo así a los estudiantes menos dependientes de la figura del profesor.

- *La forma en que se realizan sugerencias mientras los estudiantes trabajan en las tareas y la importancia de las ampliaciones.* Es necesario que el docente proporcione sugerencias y ampliaciones para mantener el equilibrio entre el desafío que supone una tarea y la habilidad de los estudiantes para trabajar en ella. Si sus habilidades son demasiado altas podrían aburrirse al terminar la tarea antes que sus compañeros y tener que esperar, lo que se evita entregando una ampliación del problema. Por otro lado, si el desafío es demasiado grande, los estudiantes podrían frustrarse, por lo que se hace necesario entregar alguna sugerencia que les permita avanzar en su trabajo.

- *Cuándo y cómo formalizar.* Es recomendable establecer un espacio para formalizar los aprendizajes desarrollados y discutir en torno a ellos. Este proceso de nivelación del avance de todo el grupo convendría realizarlo cuando cada grupo haya alcanzado un mínimo en la resolución de la tarea. En ese momento, el profesor debería entablar un debate sobre la experiencia y los conocimientos que comparte toda la clase en ese momento. Con esto se concreta y se formaliza el trabajo realizado por los grupos.

- *Evaluación, tanto en general como cuando los estudiantes trabajan en las tareas.* La evaluación debe centrarse en la participación de los estudiantes en los procesos de aprendizaje más que en los productos y debe incluir tanto el trabajo en grupo como el trabajo individual, observando cómo se comunican, dónde se encuentran y hacia dónde se dirigen en su aprendizaje.

Como ya se indicó al comienzo de esta sección, uno de los aspectos que influye en el éxito o el fracaso que una persona tenga cuando resuelve un problema es el conocimiento y uso de estrategias de resolución o heurísticos.

2.1.4. Heurísticos

El término *heurístico* proviene de la palabra griega "*εὑρίσκειν*" que significa "descubrir", "hallar", "inventar" y comenzó a utilizarse en el ámbito de la educación matemática a raíz del trabajo de Polya (1945), quien lo definió, dentro del contexto de la resolución de problemas, como los métodos que conducen a la solución de un problema. A partir de ese momento, los heurísticos se convierten en una parte fundamental de la resolución de problemas matemáticos y, en consecuencia, de la investigación en educación matemática. Tanto es así, que autores como Son y Lee (2021) definen los problemas matemáticos como problemas que requieren la aplicación de heurísticos apropiados en lugar de procedimientos previamente aprendidos.

En la literatura pueden encontrarse distintas formas de referirse al término *heurístico* cuando se usa en el contexto de la resolución de problemas, aunque todas ellas derivadas de la definición dada por Polya (1945) y expresando la misma idea fundamental. En Groner et al. (1983) se describen como los métodos y reglas que guían el descubrimiento y la resolución de problemas. Schoenfeld (1985) declara que los heurísticos son reglas generales que ayudan a comprender mejor un problema o avanzar hacia su solución. Para Santos-Trigo (2014) también son estrategias generales para abordar la resolución de un problema y aclara que, aunque ayudan en la resolución, no garantizan alcanzar las soluciones. Mousoulides y Sriraman (2014), en la misma línea, se refieren a los heurísticos como las reglas que ayudan a resolver problemas. Goldin (2009) profundiza y los define como formas de razonamiento complejas que engloban cuatro dimensiones cognitivas: (1) planificación anticipada para hacer uso de un proceso en particular, (2) dominio para aplicar el proceso, (3) conocimiento de donde se puede aplicar el proceso, y (4) criterio para determinar que el proceso se puede aplicar en la situación matemática dada.

Apoyándonos en la definición de Schoenfeld (1992), en esta investigación entenderemos el término *heurístico* como las distintas estrategias que pueden emplearse para explorar el problema en busca de alguna solución y que, tal y como apunta Santos-Trigo (2014), pueden llevar o no a alcanzarla.

Polya, en su libro *How to solve it* (1945), dio nombre a algunos heurísticos para resolver problemas matemáticos, realizando una discusión sobre ellos. Desde entonces, este listado de heurísticos ha sido utilizado por diversos autores, adaptados o renombrados en algunas y apareciendo nuevos heurísticos en investigaciones posteriores. A continuación, analizaremos los principales heurísticos que aparecen tanto en el libro de Polya (1945) como en otras investigaciones:

a) Ensayo y error
b) Considerar un problema análogo más sencillo
c) Descomponer el problema en partes
d) Suponer el problema resuelto
e) Dibujar una figura
f) Descomponer y recombinar
g) Generalización

Ensayo y error. Este heurístico consiste en examinar una conjetura sustentada en el estudio y comprensión del problema y verificar si es o no solución (Polya, 1945; Mousoulides y Sriraman, 2014). El resultado obtenido en el primer ensayo se utiliza para mejorar la siguiente conjetura y para buscar patrones (Mousoulides y Sriraman, 2014). Contreras-González (2021) distingue dos tipos dentro de este heurístico: *ensayo y error aleatorio,* donde se examinan múltiples conjeturas para encontrar una solución, y *el ensayo y error controlado*, donde se plantea una única conjetura y se realizan los ajustes necesarios mediante un análisis reflexivo del problema, alcanzando la solución.

Ejemplo 1 (ensayo y error aleatorio): Encontrar un número que al elevarlo al cuadrado y restarle 4 dé 117.

Probamos si el número 5 verifica la igualdad.

$5^2 - 4 = 25 - 4 = 21$

El resultado es bastante menor que 117, así que probamos un número mayor que 5. Probamos con 10.

$10^2 - 4 = 100 - 4 = 96$

Debe ser mayor que 10, pero el resultado es más ajustado que en el paso anterior. Probamos con 12.

$12^2 - 4 = 144 - 4 = 140$

Ahora el resultado es mayor que 117, por tanto, buscamos un número menor. Probamos con 11.

$11^2 - 4 = 121 - 4 = 117$

El número buscado es 11.

Ejemplo 2 (ensayo y error controlado): En un corral hay gallinas y conejos, alcanzamos a ver 8 animales y contabilizamos 28 patas, ¿cuántas gallinas y cuántos conejos hay?

Colocamos a los 8 animales en una tabla. Como cada animal tiene al menos dos patas, y sabemos que hay gallinas y conejos, probamos colocando a 7 animales dos patas y a un animal 4 patas.

Animales	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
Patas	4	2	2	2	2	2	2	2

Contamos las patas que tendríamos y obtenemos 18 patas. Debe haber 28 patas, es decir, faltan 10 patas por colocar. Como las patas deben colocarse de dos en dos, debemos colocar otras dos patas a 5 animales más (para que tengan 4 patas) .

Animales	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
Patas	4	4	4	4	4	4	2	2

Ahora ya tenemos 8 animales y 28 patas. Por lo que podemos concluir que la solución al problema es 6 conejos y 2 gallinas.

Considerar un problema análogo más sencillo. Con este heurístico se resuelve un problema análogo más sencillo con el fin de obtener un *modelo a seguir* para resolver el problema original, un resultado que se pueda extrapolar, o ambos a la vez (Polya, 1945; Goldin, 2009; Schoenfeld, 1985). Algunos ejemplos de este heurístico serían considerar un problema con menos variables (Schoenfeld, 1985; Mousoulides y Sriraman, 2014) o simplificar los números involucrados en el problema (Mousoulides y Sriraman, 2014). Algunos autores llaman a este heurístico *explorar casos más simples* (Callejo y Vila, 2009; Santos-Trigo, 2014).

Ejemplo 3: ¿Cuántas botellas de ¾ de litro se pueden llenar con 12 litros de agua?

Al involucrar una fracción, podría surgir la duda de qué operación se debe realizar para solucionar el problema, así que podemos cambiar los números del enunciado por unos más simples, en este caso, números naturales.

Por ejemplo, si las botellas a llenar fuesen de 2 litros sabríamos que podemos llenar 6 botellas y que la operación que realizamos fue una división del número de litros totales entre el número de litros de cada botella.

Con esto, ya podemos seguir el mismo procedimiento en nuestro problema original y calcular el número de botellas necesarias:

$$12 : \frac{3}{4} = \frac{12 \cdot 4}{3} = 16$$

Necesitamos 16 botellas.

Descomponer el problema en partes. Consiste en dividir el problema en partes y resolverlas para encontrar la solución del problema completo (Carrillo, 2009).

Ejemplo 4: ¿Cuántas veces aparece la cifra 9 en los mil primeros números?

1. Calculamos primero cuántos nueves hay en cada decena:

   En cada decena hay 1 nueve, excepto en la decena del 90 al 99, que hay 11 nueves.

2. Calculamos cuántos nueves hay en cada centena:

   Hay 9 decenas en las que hay 1 nueve y 1 decena en la que hay 11 nueves, por tanto, en cada centena, excepto en la centena del 900 al 999, hay:

   $9 \cdot 1 + 11 = 20$ nueves

   En la centena del 900 al 999 hay 100 nueves más:

   $100 + 20 = 120$

3. Calculamos cuántos nueves hay en total del 1 al 1000:

Hay 9 centenas en las que hay 20 nueves y una centena en la que hay 120 nueves, por tanto, del 1 al 1000 hay:

$9 \cdot 20 + 120 = 300$ nueves

Suponer el problema resuelto. Este heurístico consiste en asumir una solución hipotética, determinar las propiedades que debe tener y, a partir de esas propiedades, encontrar la solución buscada (Schoenfeld, 1985). Este heurístico podría asociarse con el heurístico denominado por Mousoulides y Sriraman (2014) como *trabajar hacia atrás*, en el que se parte de la solución desconocida.

Ejemplo 5: Calcular las rectas que tienen dos puntos de intersección con la parábola $y = x^2 + 3$ y que pasan por su vértice.

Asumimos que existen rectas que cumplen las condiciones del problema y que son de la forma $y = ax + b$. Ahora buscamos las condiciones que deben cumplir a y b para que, efectivamente, cumplan con lo requerido en el enunciado.

Igualamos la ecuación de la recta a la ecuación de la parábola:

$x^2 + 3 = ax + b \Rightarrow x^2 - ax + 3 - b = 0$ (1)

Para que tengan dos puntos de intersección, el discriminante de la ecuación anterior (1) debe ser mayor estricto que cero, esto es:

$a^2 - 12 + 4b > 0$ (2)

Calculamos ahora el vértice de la parábola ya que sabemos, también, que las rectas deben pasar por él: $V(0, 3)$.

Sabiendo que el vértice es un punto perteneciente a las rectas, sustituimos en la ecuación de la recta:

$3 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 3$

Sustituyendo el valor de b en la inecuación (2):

$a^2 - 12 + 4 \cdot 3 > 0 \Rightarrow a^2 - 12 + 12 > 0 \Rightarrow a^2 > 0$

$a^2 > 0$, para todo $a \neq 0$. Por tanto, las rectas que tienen dos puntos de intersección con la parábola y que pasan por su vértice son las rectas $y = ax + 3,\ \forall a \neq 0$.

Dibujar una figura. Consiste en utilizar figuras, gráficas, diagramas, esquemas… que sirvan de ayuda para entender el problema y resolverlo. Este heurístico puede utilizarse aunque el problema que se vaya a resolver no sea un problema geométrico, pues las figuras pueden ser una ayuda importante para todo tipo de problemas (Polya, 1945). Estos diagramas o modelos se pueden utilizar para generar una descripción esquemática del problema y visualizar los datos (Mousoulides y Sriraman, 2014). Este heurístico también es denominado por otros autores como *dibujar un diagrama* (Goldin, 2009; Mousoulides y Sriraman, 2014) o *hacer un esquema* (Callejo y Vila, 2009; Carrillo, 2009).

Ejemplo 6: Encontrar los puntos de corte entre la recta $y = x + 2$ y la recta $y =- x - 4$

Representamos gráficamente las dos rectas dadas en el enunciado en un eje de ordenadas (haciendo uso de herramientas digitales o de lápiz y papel) y obtenemos el punto de intersección de las dos rectas (Figura 1).

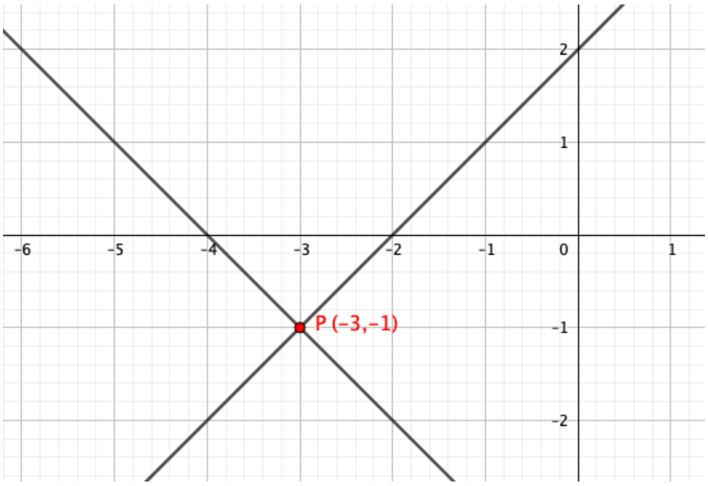
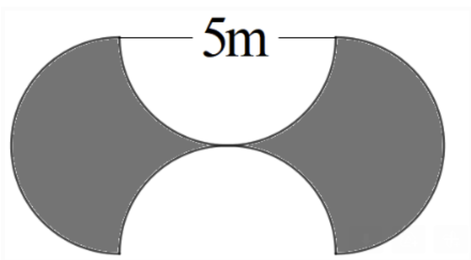


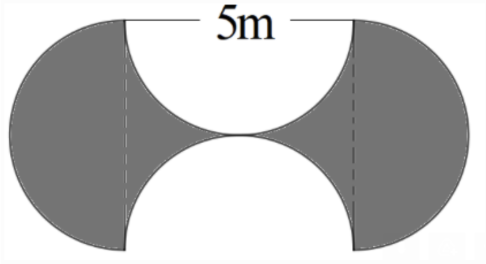
Figura 1. Ejemplo del uso del heurístico *dibujar una figura.*

Descomponer y recombinar. Cuando se utiliza este heurístico, se descompone un objeto en partes y se recombinan las partes volviendo a considerar el objeto como un todo similar al inicial (Polya, 1945). Este heurístico suele utilizarse para el cálculo del área de formas compuestas (Ejemplo 7), pero también se puede aplicar a otros dominios de las matemáticas, como el razonamiento geométrico y el pensamiento computacional (Lehmann, 2023).

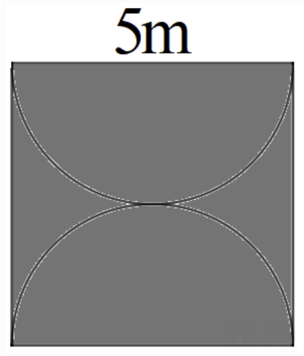
Ejemplo 7: Calcular el área sombreada de la siguiente figura:



Partimos la figura por la línea de puntos como se ve en la siguiente imagen:



A continuación recolocamos los dos semicírculos tal y como se observa en imagen siguiente para formar un cuadrado:



Por tanto, el área sombreada es el área de un cuadrado de lado 5 m, es decir, 25 m^2.

Generalización. Consiste en realizar el estudio de un objeto o caso concreto para después estudiar un conjunto de objetos o casos que contenga al primero. O realizar el estudio de un conjunto pequeño de objetos para después estudiar un conjunto más amplio que contenga al anterior (Polya, 1945). Este heurístico podría asociarse con el que Schoenfeld (1985) y Santos-Trigo (2020a) denominan *examinar casos particulares* y que describen como examinar varios casos particulares que sugieran la forma o la plausibilidad de una solución general.

Ejemplo 8: Calcular el término general de la sucesión 2, 5, 10, 17, 26,…

Primero estudiamos la relación entre los números dados en el enunciado y el puesto que ocupan en la sucesión:

$2 = 1^2 + 1 = a_1$

$5 = 2^2 + 1 = a_2$

$10 = 3^2 + 1 = a_3$

$17 = 4^2 + 1 = a_4$

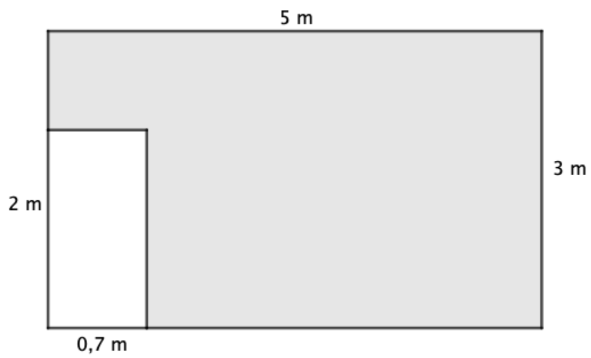
$26 = 5^2 + 1 = a_5$

El estudio de un grupo pequeño de objetos, nos sugiere la forma de la solución completa del problema, es decir, el término general de la sucesión: $a_n=n^2+1$.

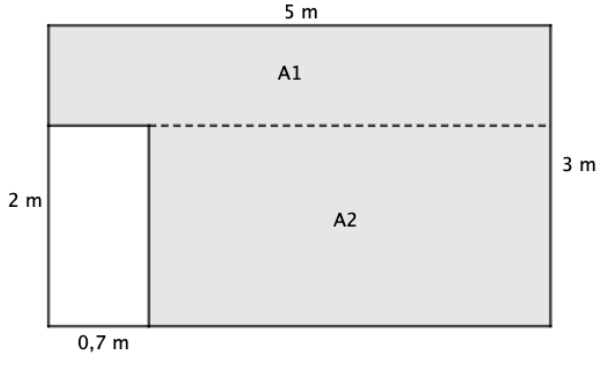
Con el auge de las nuevas tecnologías y su actual presencia en todos los ámbitos de la vida diaria, en particular, en la enseñanza de las matemáticas, aparecen nuevos heurísticos propios como, por ejemplo, representación de situaciones en aplicaciones digitales (Mousoulides y Sriraman, 2014), construcción de modelos dinámicos o el uso de deslizadores (Santos-Trigo, 2020a).

Los heurísticos pueden servir para diferentes propósitos, como ayudar a comprender el problema, simplificarlo, identificar similitudes con otros problemas e identificar posibles soluciones (Mousoulides y Sriraman, 2014). En un mismo problema puede utilizarse más de un heurístico, bien porque no se alcance el objetivo y se decida cambiar, porque se utilicen distintos heurísticos para encontrar distintas soluciones o porque sea necesaria la combinación para resolver el problema (Mousoulides y Sriraman, 2014). Mostramos, a continuación, un ejemplo donde se combinan los heurísticos *dibujar una figura* y *descomponer el problema en partes*.

> Ejemplo 9: Se desea pintar una pared de 5 m de largo y 3 m de alto en la que se encuentra una puerta de 0,7 m de ancho y 2 m de alto. Calcular la superficie de pared que debemos pintar.
>
> En primer lugar realizamos un dibujo de la pared en el que se observa el área que debemos calcular (área sombreada).

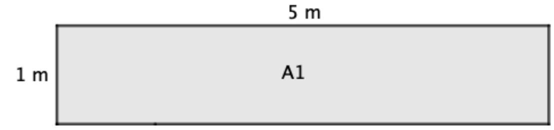


> Como el área completa que hay que calcular no es una figura conocida, la dividimos de la siguiente forma:



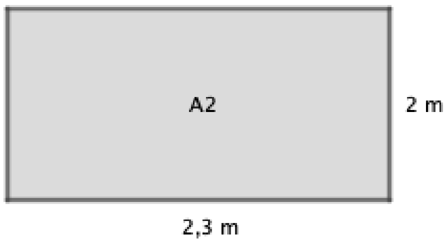
Así, el problema queda dividido en dos partes: (1) calcular el área A1 y (2) calcular el área A2.

- Calculamos el área A1:



A1 = 5 · 1 = 5 m^2

- Calculamos el área A2:



A2 = 2,3 · 2 = 4,6 m^2

Entonces, el área total de la pared es:

A = A1 + A2 = 5 + 4,6 = 9,6 m^2

2.1.5. Representaciones

Los objetos matemáticos no se pueden percibir de forma directa como se percibe un objeto físico, por lo que las representaciones se convierten en una herramienta imprescindible en el aprendizaje y la enseñanza de la matemática, tanto para comunicar información como para comprender la información recibida (NCTM, 2000).

La noción de *representación* ha sido ampliamente estudiada en investigaciones relacionadas con la Didáctica de la Matemática y la Educación Matemática a lo largo de varias décadas (e.g., Duval, 1993; Goldin, 1998, 2014; Janvier, 1987; Rico, 2009) y, desde entonces, se considera una parte esencial para el análisis de los procesos de aprendizaje y comprensión de las matemáticas (Rico, 2009).

El término *representación* se define “como una señal externa que muestra y hace presente un concepto matemático” (Rico, 2009, p. 3) o “como aquellos esquemas o imágenes mentales con los que la mente trabaja sobre ideas matemáticas” (Rico, 2009, p. 3). De esta forma, en la literatura se distingue entre dos tipos de representaciones: las representaciones externas y las representaciones internas. Las representaciones externas serían, por ejemplo, una palabra, un símbolo, un gráfico o una figura que representa un objeto matemático: un número, una función, un vector, una figura geométrica… (Duval, 1993). Estas representaciones se denominan externas porque son externas al individuo que las produce y accesibles a otros para su observación, discusión, interpretación y/o manipulación (Goldin, 2014). Por otra parte, las representaciones internas hacen referencia a las construcciones, conceptos o configuraciones cognitivas de una persona. Estas representaciones se denominan internas al individuo porque hacen referencia a la representación cognitiva visual y espacial de objetos geométricos, patrones, operaciones o situaciones matemáticas (Goldin, 2014).

Estas dos acepciones del término *representación* se conectan con lo que Duval (1993) llama representaciones mentales y representaciones semióticas. Las representaciones mentales abarcan las imágenes y concepciones que un individuo se forma en torno a un objeto, una situación matemática y todo lo relacionado con ellos, tratándose así de representaciones internas. Mientras que las representaciones semióticas son las producciones constituidas por el uso de signos, figuras geométricas, enunciados verbales, fórmulas algebraicas, gráficas…, siendo por tanto representaciones externas.

Así, el concepto de *representación* lleva implícito dos nociones relacionadas, el objeto matemático (objeto representado) y sus representaciones (objetos representantes) (Kaput, 1987) y, tal y como señala Duval (1993), para el desarrollo de la comprensión de los conceptos matemáticos es fundamental distinguir entre el objeto y sus representaciones. Por lo tanto, "hablar de representación equivale a hablar de conocimiento, significado, comprensión, modelización, etc." (Font et al., 2007, p. 1)

Las representaciones semióticas se organizan en *sistemas de representación* (Duval, 1993), constituidos por representaciones que se agrupan según sus características y propiedades (Lupiáñez-Gómez, 2016). De esta forma, cada una de las representaciones semióticas pertenece a un sistema de representación que tiene su propio significado y funcionamiento (Duval, 1993). Generalmente, en matemáticas, se distinguen dos grandes sistemas: las representaciones simbólicas y las representaciones gráficas. En las representaciones simbólicas se encuentran los símbolos alfanuméricos que se emplean siguiendo ciertas reglas de procedimiento. En las representaciones gráficas se encuentran objetos de tipo figurativo que se emplean siguiendo reglas de composición y convenios de interpretación (Rico, 2009). A partir de estos dos conjuntos surgen otros sistemas de representación que dependen del concepto matemático trabajado. Por ejemplo, en relación con el concepto de "función real de variable real" se pueden distinguir cuatro sistemas de representación: simbólico, gráfico, numérico (tabla de valores) y verbal (Lupiáñez-Gómez, 2016).

La utilidad de las representaciones, además de hacer visibles los objetos matemáticos, radica en que se pueden manipular y transformar, lo que permite expresar y mostrar propiedades y relaciones estructurales de los conceptos matemáticos (Lupiáñez-Gómez, 2016). Duval (1993) distingue dos tipos de acciones que se pueden realizar sobre una representación y que es necesario incluirlas en los procesos de enseñanza y aprendizaje, puesto que contribuyen a establecer la diferencia entre un objeto matemático y sus distintas representaciones:

- *Procesamientos*. Esta acción se refiere al conjunto de transformaciones que se realizan dentro de un mismo sistema de representación. La posibilidad de realizar procesamientos sobre objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación utilizado.

- *Conversiones*. Estas acciones hacen referencia a las transformaciones que se realizan de un sistema de representación a otro diferente y que permiten profundizar en el concepto matemático.

La naturaleza del sistema de representación elegido para representar un concepto proporciona una serie de elementos significativos del propio objeto representado. Por ejemplo, mediante la representación gráfica de una función se pueden observar a simple vista elementos como los puntos de corte con los ejes de coordenadas, su curvatura o su monotonía, algo que no puede observarse directamente si se usa una representación simbólica o numérica. Por otra parte, no todos los sistemas de representación ofrecen las mismas posibilidades, por ejemplo con el tipo de transformaciones que pueden realizarse dentro de cada una de ellas, por lo que el conocimiento y la coordinación de varios sistemas de representación es fundamental para el desarrollo de la comprensión de los conceptos matemáticos. Tal y como señala Duval (1993), los estudiantes deben reconocer los objetos en cualquiera de sus representaciones, poder realizar transformaciones dentro de cada uno de esos sistemas y conversiones de un sistema a otro y viceversa, para así desarrollar una comprensión profunda del objeto matemático estudiado.

En la misma línea, Hitt (2003) señala que para facilitar el proceso de construcción de ciertos conceptos matemáticos, es importante no priorizar el uso de unos sistemas de representación en detrimento de otros. En numerosas ocasiones, en el contexto escolar se observa una compartimentación de los sistemas de representación asociados a conceptos matemáticos, lo que hace que los estudiantes tengan dificultades para reconocer un mismo objeto expresado mediante dos sistemas de representación diferentes. Aunque esta ausencia de coordinación no detiene el aprendizaje, lo limita, no favoreciendo la conexión, transferencia y movilización de conocimientos (Duval, 1993).

El éxito en los procesos de enseñanza y aprendizaje en matemáticas está relacionado con el uso de diferentes representaciones de un mismo objeto matemático y de las interacciones entre ellas, pues la habilidad de efectuar conversiones favorece la coordinación de los distintos sistemas de representación, que es imprescindible para la conceptualización amplia de los objetos matemáticos (Amaya-de-Armas y Medina-Rivilla, 2013). En este sentido, Duval (1993) indica que la compresión de un concepto matemático depende de la coordinación de, al menos, dos sistemas de representación y se manifiesta con la rapidez y espontaneidad de la conversión de uno a otro.

En un sentido más amplio, la comprensión de un concepto matemático también se manifiesta por su uso en la resolución de problemas, por la habilidad de reconocer que es útil para responder a una situación y emplearlo de forma correcta (Kilpatrick et al., 2001). Surge así la importancia de que los estudiantes aprendan a resolver problemas mediante el uso de una variedad de representaciones (Stylianou, 2011), empleándolas para organizar y comunicar ideas matemáticas, seleccionando las más adecuadas y realizando transformaciones y conversiones entre representaciones, que permitan dar respuesta a los problemas planteados (NCTM, 2000).

En la investigación que se presenta en este documento, las representaciones se han considerado como una variable de interés para analizar el proceso de resolución de un problema y una característica que permite distinguir distintos tipos de resolución. El problema planteado involucra los conceptos de función y recta (sección 3.3.1, Figura 3.2), por lo que se considerarán cuatro representaciones: gráfica, simbólica, tabular y verbal.

2.2. Evaluación

En todas las etapas educativas, desde la Educación Infantil hasta la formación universitaria, y tanto en modelos de educación formal como no formal, los procesos de enseñanza y aprendizaje deben reunir ciertas características que garanticen su desarrollo de forma efectiva. Uno de los puntos clave que influye directamente en la calidad de dichos procesos y, además, informa sobre dicha calidad, es la evaluación.

Evaluar, de forma general, puede referirse a distintas acciones: atribuir un valor, emitir un juicio, describir comportamientos cualitativa y cuantitativamente, recoger y analizar información para tomar decisiones, probar el valor de una actividad… (Segovia-Alex, 2016).

En el ámbito educativo, los significados asociados al concepto de *evaluación* han evolucionado en los últimos años, pasando de ser considerada como un juicio cuantificado del aprendizaje de los estudiantes, a verse como una herramienta útil para obtener información sobre el proceso de aprendizaje y enseñanza que sirva de base para la toma de decisiones respecto a posibles cambios (Segovia-Alex, 2016; Siarova et al., 2017). De esta forma, se ha ido dejando atrás la visión de la evaluación como una serie de métodos que permitieran medir la adquisición de conocimientos de la manera más objetiva posible y asignar una calificación, para dejar paso a una concepción de la evaluación como una práctica que, además de asignar una calificación, proporciona conocimientos e información de forma continua, que apoya el aprendizaje del alumno e influye en la práctica docente (Beaver y Beaver, 2011; Segovia-Alex, 2016; Suurtamm et al., 2010).

Estos cambios en la percepción de la evaluación están relacionados con cambios en los propósitos que se considera que debe cumplir. Dependiendo de la finalidad con la que se realice la evaluación estaremos ante una evaluación sumativa o formativa.

- *Evaluación sumativa*. Su objetivo es certificar el nivel de los logros y habilidades adquiridos por los estudiantes en su aprendizaje durante su formación (Silver y Mills, 2018; Wiliam, 2007; Wiliam y Thompson, 2007).

- *Evaluación formativa.* Su objetivo es apoyar, fomentar y orientar el aprendizaje del alumnado (Wiliam, 2007). Esta evaluación se centra en cómo avanza el proceso de aprendizaje de los estudiantes, observando en qué medida están alcanzando los objetivos y utilizando esta información para reorientar la acción de los docentes

(Silver y Mills, 2018; Wiliam y Thompson, 2007). Así, la evaluación formativa confiere a la evaluación el carácter de un instrumento que permite realizar un seguimiento del aprendizaje de los estudiantes y mejorarlo (Suurtamm et al., 2010).

Y, a su vez, estos cambios en la finalidad con la cual se considera que debe evaluarse vienen motivados por cambios en la consideración de la función que debe desempeñar la evaluación. Para Segovia-Alex (2016), la evaluación tiene cuatro funciones principales:

- *Función social.* Diferencia a los estudiantes, controlando el funcionamiento del sistema mediante la contribución a la toma de decisiones sobre la promoción del alumnado y considerando la atención a la diversidad.

- *Función política.* Busca mejorar el sistema educativo mediante la evaluación de las instituciones, las prácticas educativas, los materiales y los recursos didácticos.

- *Función formativa.* Determina los conocimientos del alumnado, identificando los aciertos y errores para reorientar tanto los aprendizajes de los estudiantes como las prácticas educativas de los docentes.

- *Función profesional.* Busca mejorar los planes y programas de formación, los currículos y su implementación.

De hecho, aunque los términos *sumativa* y *formativa* son utilizados, normalmente, para denotar dos propósitos diferentes de la evaluación, Wiliam y Thompson (2007) consideran que el término *formativa* no denota tanto el propósito de la evaluación, sino más bien la función que cumple la evaluación. Estos autores indican cinco puntos clave para el uso de la evaluación formativa: (1) aclarar y compartir los propósitos del aprendizaje y los criterios necesarios para alcanzar los objetivos; (2) diseñar preguntas y tareas de aprendizaje efectivas; (3) proporcionar retroalimentación que haga avanzar a los alumnos; (4) hacer que los estudiantes sean recursos de aprendizaje los unos para los otros; y (5) convertir a los estudiantes en dueños de su propio aprendizaje. Esta perspectiva es compartida por Castillo-Arredondo (1999), quien expresa que la función de la evaluación formativa es la de averiguar cómo se desarrolla el proceso de aprendizaje de los alumnos para conocer el grado de adquisición de los objetivos y, gracias a la retroalimentación acerca de este aprendizaje, reorientar y mejorar la acción docente de los profesores y el aprendizaje de los alumnos.

Como decíamos al comienzo de esta sección, en las últimas décadas ha habido un esfuerzo por desarrollar estrategias que promuevan que el profesorado oriente sus prácticas evaluativas en el aula hacia un enfoque formativo, donde la evaluación se convierta en un método para apoyar el aprendizaje, recompensando y fomentando aquellos conocimientos que deben ser adquiridos (Schoenfeld, 1992; Zhao et al., 2017).

Uno de los principales aportes de la evaluación formativa es que favorece que, tanto el alumnado como el profesorado, puedan obtener información precisa y detallada sobre el proceso de aprendizaje, determinando en qué grado se han alcanzado los objetivos previstos y ofreciendo información que les ayude a tomar decisiones adecuadas (Nortvedt et al. 2016;

Shahbari y Abu-Alhija, 2018; Silver y Mills, 2018; Suurtamm, et al., 2010; Zhao et al., 2017). Es decir, la información no solo debe ser suficiente y relevante para poder asignar la calificación que mejor represente el nivel de aprendizaje del alumnado (Allal, 2013), sino para motivarlos a progresar en su formación y enriquecer las prácticas educativas de los docentes (Shahbari y Abu-Alhija, 2018; Suurtamm, et al., 2010; Zhao et al., 2017). En palabras de Castillo-Arredondo (1999), "la evaluación necesita obtener todos los datos necesarios sobre el proceso que se sigue en la enseñanza y en el aprendizaje para regular los ritmos y para determinar lo positivo del proceso y corregir lo negativo" (p. 66).

Estas diferencias entre la evaluación sumativa y la formativa afectan no solo a la función y la finalidad del proceso de evaluación, sino también a otros aspectos como el momento en que tiene lugar, los actores principales involucrados, las preguntas a las que trata de dar respuesta o las estrategias para recopilar la información que permita evaluar (Siarova et al., 2017).

Para que la evaluación cumpla su función formativa su implementación no debe limitarse al final de la enseñanza de un contenido, sino que debe ser continua desde el inicio de la instrucción. Segovia-Alex (2016) distingue tres etapas de la evaluación en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas:

- *Evaluación inicial.* Antes incluso de planificar el trabajo que se va a realizar en una determinada unidad didáctica, el docente debe identificar los conocimientos previos y las concepciones matemáticas con las que parte su alumnado.

- *Evaluación de seguimiento.* En esta etapa el docente debe analizar el progreso en el aprendizaje de los alumnos, detectando los errores, las dificultades y los distintos ritmos de aprendizaje para adaptar las tareas a la diversidad del aula, informando en todo momento al alumnado de los cambios que se llevarán a cabo.

- *Evaluación a término.* Por último, el docente debe valorar en qué medida se han alcanzado los objetivos y competencias previstos. Además, permite detectar aspectos que no se han afianzado y diseñar actividades para trabajar en ellos.

En cuanto a los actores que participan activamente en el proceso de evaluación, uno de los elementos principales para lograr que la evaluación cumpla con su función formativa es involucrar a los estudiantes en su propio aprendizaje y hacer que formen parte activamente de su propia evaluación (Siarova et al., 2017; Wiliam y Thompson, 2007). Para conseguir que esto ocurra es necesario emplear en el aula métodos de evaluación alternativos al tradicional uso del examen escrito, resuelto por el estudiante de manera individual y revisado únicamente por el docente, donde el alumnado no se ve implicado en su propia evaluación, y utilizar otros métodos como la autoevaluación o la evaluación entre pares, donde se involucra directamente a los estudiantes en el proceso (Chanudet, 2019).

Esta investigación se centra en el estudio del proceso de *evaluación entre pares*, cuando este se realiza en actividades de resolución de problemas, aspectos que se desarrollan en las siguientes secciones.

2.2.1. Evaluación entre pares

La *evaluación entre pares* o *coevaluación* se define como un proceso en el que los estudiantes revisan el trabajo de un compañero del mismo nivel para determinar la calidad de su respuesta a una tarea (Topping, 2009). Es uno de los métodos de evaluación que permite dar una perspectiva formativa a este proceso, involucrando a los estudiantes en el desarrollo y evaluación de su propio aprendizaje (Black y Wiliam, 2009; Chanudet, 2019; Mogessie, 2015; Wiliam y Thompson, 2007).

Utilizar actividades de evaluación entre pares en el aula contribuye a la mejora de la calidad del aprendizaje, y eso ocurre tanto para la persona que actúa como evaluador como para la persona cuyo trabajo es evaluado (Topping, Topping y Ehly, 1998). Los beneficios que la evaluación entre pares aporta al aprendizaje están relacionados, por una parte, con un incremento de la comprensión de los conceptos y procesos implicados (Beaver y Beaver, 2011; Topping, 2009; Zevenbergen, 2001) y con el desarrollo del pensamiento crítico (Beaver y Beaver, 2011; Hanrahan e Isaacs, 2001). Así, quién ejerce el rol de evaluador, tras revisar cómo un compañero ha resuelto una tarea, puede darse cuenta de que existen formas alternativas de resolverla, lo que le podría llevar a reflexionar sobre su propia resolución, buscando la manera de corregirla o enriquecerla (Beaver y Beaver, 2011; Lavy y Shriki, 2014; Zevenbergen, 2001). De esta forma, revisar el trabajo de un compañero, ayuda a identificar las propias fortalezas y debilidades e identificar los propios errores y dificultades (Hanrahan e Isaacs, 2001; Topping, 2009), contribuyendo a incrementar el conjunto de herramientas de que dispone el individuo para resolver problemas (Beaver y Beaver, 2011; Zevenbergen, 2001) y promoviendo la reflexión y la autoevaluación (Beaver y Beaver, 2011; Topping, 2009).

Por otra parte, participar en actividades de evaluación entre pares, aporta a los estudiantes un mayor sentido de la responsabilidad (Lavy y Shriki, 2014; Topping, 2009), lo que se ve reflejado, por ejemplo, en un aumento del tiempo de dedicación a las tareas (Topping, 2009). Además, este método de evaluación exige habilidades sociales y de comunicación, por lo que también contribuye al desarrollo de capacidades sociales y de trabajo en equipo, ofreciendo oportunidades para aprender a dar y aceptar críticas, justificar las propias opiniones y rechazar sugerencias (Lavy y Shriki, 2014).

Una de las principales características que distingue la evaluación entre pares de otros modelos de evaluación es el tipo de retroalimentación que reciben los estudiantes, la cual proviene de otro estudiante y no del docente. Esto, según los resultados de distintas investigaciones, implica ciertos aspectos positivos y otros menos positivos. Entre los aportes positivos, los estudios señalan que, por un lado, los profesores a menudo no tienen tiempo suficiente para proporcionar a los estudiantes una retroalimentación tan detallada como la que les ofrecería un compañero (Sadler y Good, 2006). Por otro lado, la retroalimentación de los compañeros podría ser más comprensible para los estudiantes porque utilizan el mismo lenguaje (Seifert y Feliks, 2018). También, gracias a un punto de vista diferente, los estudiantes pueden juzgar mejor su propio trabajo (Hanrahan e Isaacs, 2001). Custodia et al. (2015), en sus investigaciones acerca de la influencia de una actividad de evaluación entre pares a la calidad de las tareas, observaron que la calidad de los trabajos presentados por los estudiantes sufrían una mejora notable tras participar en la actividad de evaluación entre pares. Esa mejora se percibió, principalmente, en aquellos alumnos que habían recibido una mejor corrección por parte de su compañero y en aquellos que habían realizado una mejor corrección del trabajo de su compañero.

Entre los aspectos no tan positivos de la evaluación entre pares está, por ejemplo, que algunos estudiantes desconfían de la evaluación de los pares porque sienten que es menos precisa que la evaluación del docente y, en ocasiones, la retroalimentación proporcionada por un compañero no es clara, lo que hace que no sea útil para mejorar sus producciones o su aprendizaje (Seifert y Feliks, 2018).

A pesar de circunstancias aisladas que puedan hacer de la evaluación entre pares una herramienta poco fiable, la realidad es que varios estudios encuentran adecuada la fiabilidad y validez de este método de evaluación (Mogessie, 2015; Sadler y Good, 2006; Topping, 2009). Un estudiante con menos habilidad en la evaluación pero con más tiempo para hacerlo podría producir una evaluación igualmente fiable y válida que la del docente. La retroalimentación entre pares suele ser más detallada y estar disponible con mayor inmediatez que la retroalimentación de los docentes, lo que compensa una posible disminución de la calidad de dicha retroalimentación (Topping, 2009).

Aunque, en general, existe cierto consenso entre los investigadores al señalar los aspectos positivos y no tan positivos de la evaluación entre pares, hay un punto sobre el que el debate sigue abierto: proporcionar o no a los evaluadores los criterios a utilizar para realizar la evaluación. Algunos autores defienden que entregar los criterios de evaluación conduce a mejores resultados en las actividades de evaluación entre pares (Beaver y Beaver, 2011; Custodia et al., 2015; Lavy y Shriki, 2014; Zevenbergen, 2001); otros sostienen que depende de las circunstancias y del contexto en el que se desarrolle la actividad y que en algunos casos es mejor no indicar los criterios de evaluación (Jones y Alcock, 2014; Wyatt-Smith et al., 2010), como cuando se evalúa en grupo y la intención está en que los evaluadores tengan que llegar a un consenso. En este sentido, el estudio de Wyatt-Smith et al. (2010) muestra que, en algunos casos, aportar los criterios de evaluación puede ser muy importante para alcanzar los resultados esperados, pero que en otros casos podría perjudicar la evaluación. Esto es coherente con lo observado por Jones y Alcock (2014) quienes encontraron que la ausencia de criterios de evaluación puede mejorar los resultados de la actividad. Las razones para que esto ocurra podrían estar relacionadas con el hecho de que proporcionar una rúbrica, por un lado, facilita la evaluación para los estudiantes y reduce las posibles imprecisiones en la evaluación, pero por otro lado podría limitar consideraciones y puntos de vista adicionales e interesantes de los propios estudiantes (Seifert y Feliks, 2018).

La evaluación entre pares es una estrategia que puede utilizarse en todos los niveles educativos y para trabajar cualquier contenido incluido en el currículo. Se ha implementado con éxito en educación primaria y secundaria, incluso con estudiantes muy jóvenes y con estudiantes con necesidades educativas especiales o problemas de aprendizaje (Scruggs y Mastropieri, 1998). Para emplear este método de evaluación pueden utilizarse diversos instrumentos como pruebas escritas, presentaciones orales, redacciones, etc. (Beaver y Beaver, 2011; Custodia et al., 2015; Jones y Alcock, 2014; Lavy y Shriki, 2014; Topping, 2009; Wyatt-Smith et al., 2010; Zevenbergen, 2001). Además, los evaluadores y los evaluados pueden ser parejas o grupos; la evaluación entre pares puede ser unidireccional o recíproca. Incluso los objetivos de la evaluación entre pares pueden variar: se puede buscar obtener ganancias cognitivas o metacognitivas, ahorrar tiempo u otras metas (Topping, 2009).

Con el fin de estructurar la gran variedad de formas que puede adoptar la implementación de la evaluación entre pares, Topping (2009) propone considerar los siguientes aspectos a la hora de organizar una actividad con este tipo de evaluación:

- Fijar los objetivos que se persiguen con la actividad y especificar los productos que se van a evaluar.
- Involucrar a los participantes en el desarrollo de los criterios de evaluación.
- Emparejar a los participantes con la misma capacidad en los papeles de evaluador y evaluado.
- Proporcionar pautas y ejemplos y aclarar a los estudiantes lo que se espera de ellos.
- Especificar las actividades y el cronograma.
- Monitorear los procesos de evaluación, guiando a los estudiantes según sea necesario.
- Examinar la calidad de las evaluaciones.
- Evaluar y dar retroalimentación.

En el contexto de la formación docente, la evaluación entre pares adquiere un especial interés e importancia. La evaluación es una actividad profesional habitual de los docentes por lo que involucrarse en la evaluación entre pares les permite aprender sobre este proceso (Sadler y Good, 2006; Seifert y Feliks, 2018). Las investigaciones de Beaver y Beaver (2011) y Lavy y Shriki (2014) muestran los beneficios que se pueden obtener al involucrar a futuros profesores en actividades de evaluación entre pares, quienes mejoraron su capacidad para evaluar, desarrollando habilidades para elegir mejor tanto los criterios de evaluación como el peso numérico que asignaban a cada uno de ellos; dándoles experiencia en el reconocimiento de argumentos válidos, ganando confianza para ser críticos con el razonamiento de los demás y responsables con los comentarios que brindan como evaluadores.

Estos beneficios específicos están relacionados con su futura actividad docente, mejorando habilidades de evaluación que son esenciales para su desarrollo profesional como futuros profesores. Además, les permite observar distintos enfoques para enseñar un mismo contenido, yendo más allá de sus propias percepciones y les proporciona experiencia en la evaluación, tomando conciencia de la complejidad de este proceso (Zevenbergen, 2001) al experimentar las dificultades que se presentan durante la evaluación (Hanrahan e Isaacs,

2001) y de la importancia de brindar, como evaluadores, una retroalimentación útil y adecuada (Lavy y Shriki, 2014 y Mogessie, 2015).

Sin embargo, algunos futuros docentes no se sienten capaces de proporcionar una evaluación constructiva y precisa a sus compañeros y no se sienten cómodos juzgando las respuestas de un igual (Seifert y Feliks, 2018). Y es que una de las preocupaciones expresadas por los docentes en formación es su falta de experiencia práctica con la evaluación, tanto en los cursos de nivel universitario como en las prácticas en los centros educativos (Zevenbergen, 2001).

A pesar de los múltiples modos en los que se puede llevar a cabo la evaluación entre pares y los numerosos estudios que indican los beneficios de aplicar este tipo de evaluación, la evaluación entre pares sigue siendo uno de los métodos alternativos de evaluación menos utilizados en las aulas, tal y como refleja el trabajo de Suurtamm et al. (2010). En un cuestionario realizado por estos autores a 1096 profesores de 7º y 10º grado de escuelas de Ontario, Canadá, obtuvieron que, aunque el 91% de los profesores admitía sentirse cómodo usando distintos tipos de evaluación, los más usados seguían siendo los exámenes escritos (95%) y los cuestionarios (84%). La evaluación entre pares solo se utilizaba por un 15% de los docentes, un 10% la utilizaba para hacerse una idea del aprendizaje de los alumnos y un 5% de ellos para evaluar. Entre las razones que las y los docentes dan a este hecho se incluyen una escasa o nula formación recibida en relación con la evaluación en general, y con la evaluación entre pares en particular, (Zhao et al., 2017), considerar la evaluación entre pares como poco fiable (Zevenbergen, 2001) o no disponer de tiempo suficiente para llevarla al aula (Mogessie, 2015).

Tal y como señalan Carrillo et al. (2013), las prácticas que realizan los docentes en su aula dependen, por un lado, del conocimiento pedagógico del docente, de su conocimiento en relación con el contenido a enseñar y de su conocimiento didáctico-disciplinar y, por otro lado, de sus creencias acerca de la materia, su enseñanza y aprendizaje; además de elementos no cognitivos necesarios para lograr cierta disposición a la acción (Baumert y Kunter, 2013). En el caso de las creencias, Eccles y Wigfield (2002) señalan que la autoeficacia y el valor son dos de los aspectos que influyen en la motivación y, por tanto, en la acción. Desde la perspectiva del profesor, adquieren relevancia tanto la autoeficacia en la disciplina que se están enseñando (Woolfolk-Hoy et al., 2009) como la autoeficacia en relación con el proceso de enseñanza (Tschannen-Moran et al., 1998). Por esta razón, para lograr que el profesorado en formación considere la posibilidad de aplicar la evaluación entre pares en las clases de matemáticas, se les debe ofrecer oportunidades para reflexionar sobre dicha actividad y los beneficios que aporta al desarrollo del aprendizaje.

En los currículos oficiales de las distintas asignaturas de Matemáticas de la Comunidad Autónoma de Canarias se establece explícitamente que “se hace necesario … utilizar la autoevaluación y coevaluación para contribuir a la formación del alumnado … para conseguir que la evaluación tenga el efecto de retroalimentar el proceso” (Decreto 211/2022, p. 10), es decir, son “fundamentales en este modelo pedagógico [modelo que considera necesaria la integración de la evaluación en el proceso de planificación y diseño de las situaciones de aprendizaje, para asegurar una evaluación competencial del alumnado]" (Decreto 30/2023, p. 9).

2.2.2. Evaluación de la resolución de problemas

En este estudio, la evaluación entre pares se entenderá como el proceso que siguen los estudiantes, en este caso futuros profesores, para analizar la respuesta de un compañero a una tarea determinada, en este caso la resolución a un problema matemático. En este proceso pueden intervenir diversos elementos, entre ellos el hecho de que la persona que evalúa podría tener que analizar una respuesta completamente diferente a la suya, lo que pondría en juego sus propios conocimientos acerca de las diferentes formas de resolver la actividad (Cáceres y Chamoso, 2015; Cárdenas et al., 2016; Carrillo et al., 2019).

La evaluación de la resolución de problemas, tal y como se mostró en el capítulo anterior (sección 1.2) es un proceso complejo, en el que intervienen, entre otras cosas, la concepción que el docente tenga del término *problema*, la perspectiva desde la que utilice la resolución de problemas y el propósito que defina para la evaluación de la resolución de problemas, con un carácter sumativo y/o formativo.

Entre los educadores hay cierto consenso a la hora de considerar que, al evaluar la resolución de problemas, conviene no centrarse únicamente en si la solución obtenida es correcta o no, puesto que el proceso seguido para llegar a esa respuesta también es imprescindible. Castro-Martínez y Ruiz-Hidalgo (2018) son contundentes en este sentido, indicando que "en la evaluación de la resolución de problemas debe destacar el progreso y dominio de procedimientos y estrategias por encima del logro de un resultado" (p. 106).

Un primer aspecto crítico para la evaluación de la resolución de problemas es tener acceso a esos procedimientos y razonamientos y no solo a la respuesta final obtenida (Monaghan et al., 2009). Las dificultades para acceder al procedimiento seguido por los estudiantes al resolver un problema de matemáticas, unido a la necesidad de la mayoría de los docentes de asignar una calificación numérica, hace que muchos profesores continúen utilizando métodos tradicionales para evaluar la resolución de problemas que consisten principalmente en evaluar la aplicación de un algoritmo y el resultado final, a través de pruebas escritas con preguntas extraídas de libros de texto o actividades realizadas previamente con los estudiantes (Cárdenas et al., 2016; Nieminen y Atjonen, 2022; Szetela y Nicol, 1992).

Esto nos lleva, por una lado, a la definición del término *problema* que, tal y como ya hemos indicado, en este trabajo, nos referimos a tareas no rutinarias, con cierto desafío para el resolutor, que no pueden resolverse siguiendo paso a paso un procedimiento previamente establecido, como cuando el docente muestra un ejemplo resuelto con anterioridad (Polya, 1945; Schoenfeld, 1992; Mason, 2015). Los problemas con múltiples soluciones serían una buena alternativa en este sentido (Leikin, 2008). Felmer y Perdomo-Díaz (2016) realizaron un estudio con profesores de matemáticas de Educación Secundaria principiantes (entre 1 y 3 años de docencia), en el que los docentes debía realizar una autoevaluación de su desempeño como resolutores de problemas después de haber resuelto dos problemas con múltiples soluciones. Los participantes indicaron que habían tenido dificultades para resolver la actividad y para evaluarse a sí mismos debido a la poca práctica que tenían con este tipo de problemas.

El problema del acceso al pensamiento de los estudiantes también dificulta el diseño de estrategias para la evaluación de la resolución de problemas. A través de discusiones en el aula y solicitando de forma explícita a los estudiantes que justifiquen, se pueden interpretar las respuestas de los estudiantes y detectar las posibles dificultades y errores que pueden haber cometido no sólo al obtener una respuesta incorrecta, sino también habiendo obtenido una respuesta correcta (Di-Martino y Signorini, 2019).

Otra manera de acceder a esta información es utilizando como instrumento la *narrativa de investigación*, que Chanudet (2019) define como un nuevo contrato entre estudiantes y profesores en el que los estudiantes tienen que explicar por escrito cómo resolvieron (o intentaron resolver) el problema (incluidos errores, caminos equivocados, callejones sin salida, ayuda que recibieron) y en el que los profesores evalúan únicamente estos aspectos sin tener en cuenta si los estudiantes encontraron la respuesta correcta o no. El autor utilizó este instrumento en un estudio con profesores de matemáticas, sobre sus prácticas de evaluación de resolución de problemas. Entre los resultados que obtuvo observó que la mayoría de los docentes (85%) evaluaban la resolución de problemas con mayor frecuencia de lo esperado y que casi todos (95%) decían utilizar la narrativa de investigación, junto con una rúbrica, para evaluar a los estudiantes. Sin embargo, la naturaleza de los criterios utilizados por los docentes para evaluar estaban relacionados con las competencias narrativas (claridad, coherencia y exhaustividad) más que con los procesos asociados a la resolución de problemas. Además, observó que para más de la mitad de los docentes (63%), evaluar a los estudiantes en este contexto particular seguía implicando darles una nota.

Otro aspecto crítico para que la evaluación de la resolución de problemas sea global es la limitación de tiempo: los estudiantes deben disponer de tiempo suficiente para reflexionar, actuar, verificar y cambiar de opinión si se desea evaluar sus competencias para la resolución de problemas. Tal y como señalan Di-Martino y Signorini (2019), para evaluar el razonamiento de los estudiantes, se les debe dar la oportunidad de razonar y eso implica darles tiempo para poder hacerlo.

Arnal-Bailera et al. (2018) estudiaron cuáles son esos aspectos en lo que se fijan los docentes de matemáticas al evaluar una tarea. Analizaron las evaluaciones de 21 profesores de matemáticas a 10 tareas, observando no sólo la calificación otorgada sino las justificaciones que los correctores aportaron acerca de esa calificación. En el análisis de estas anotaciones encontraron que los docentes, al evaluar las tareas, hacían comentarios relacionados con cinco aspectos principales:

- *Procedimiento*. Comentarios acerca del proceso general seguido por el alumno.
- *Cálculos*. Comentarios acerca de una tarea concreta llevada a cabo por el alumno dentro del proceso general de resolución.

- *Errores*. Comentarios acerca de un error cometido por el alumno.
- *Exposición*. Comentarios acerca de la calidad expositiva de la respuesta del alumno.
- *Resultados*. Comentarios acerca del resultado final presentado por el alumno.

Aunque este estudio no se realizó explícitamente en relación con la resolución de problemas, consideramos que estos aspectos pueden ser una buena base para establecer un sistema de categorías que nos permita analizar, por un lado, cómo los futuros docentes resuelven un problema de final abierto (objetivo 1) y, por otro lado, en qué aspectos de la resolución de problemas se fijan cuando evalúan la resolución de un compañero o compañera (objetivo 2).

Capítulo 3

METODOLOGÍA

En este capítulo se describe la metodología empleada en la investigación, se indican las características de los participantes y el contexto, y se detallan los procesos de recopilación y análisis de datos. En la primera sección se realiza una descripción general del diseño metodológico. La segunda sección está dedicada a la descripción de los participantes y del contexto. Por último, en la tercera y cuarta sección, se detallan los procesos de recogida y análisis de datos empleados en cada una de las dos fases en que se divide la investigación.

3.1. Diseño metodológico

El estudio se realizó desde una perspectiva cualitativa. En un estudio cualitativo, la información se presenta de manera inductiva, es decir, comenzando por una descripción de detalles más específicos, dando datos particulares y pormenorizados, y avanzando hasta alcanzar una visión global que permita obtener algunas generalidades (Creswell, 2012). Esto hace que sea un enfoque apropiado para explorar y comprender fenómenos que han sido poco estudiados, como el que planteamos en este trabajo.

Dentro de esta perspectiva, la investigación sigue un enfoque descriptivo y exploratorio, bajo un diseño de estudio de casos. Esta elección se fundamenta en el hecho de que el estudio de casos es un método que se utiliza para explorar las características intrínsecas de cada caso (Stake, 1995), ofreciendo información detallada de los procesos observados en cada uno de ellos (Creswell, 2012) y permitiendo, a través de la investigación, una mejor comprensión de la población objeto de estudio y el problema planteado (Brantlinger et al., 2005).

Atendiendo a este diseño, hay que tener en cuenta que, en el paradigma cualitativo se recopilan datos y se interpreta el significado de la información obtenida, tomando como base investigaciones anteriores y reflexiones personales. Esto hace que los resultados obtenidos en este tipo de investigaciones puedan ser flexibles y muestren sesgos del investigador (Creswell, 2012). Para minimizar estos sesgos, se ha optado por la triangulación de información como estrategia que permite aumentar la validez y fiabilidad de los resultados obtenidos.

Por último, en cuanto al diseño general de la investigación, ésta se ha realizado en dos fases, cada una asociada a uno de los objetivos (Figura 3.1). En una primera fase se analiza un conjunto de características de las resoluciones que los participantes entregan a un problema matemático que se les plantea (objetivo 1). En la segunda fase, el análisis se centra en la evaluación que estos participantes hacen de las resoluciones de sus compañeros (objetivo 2).

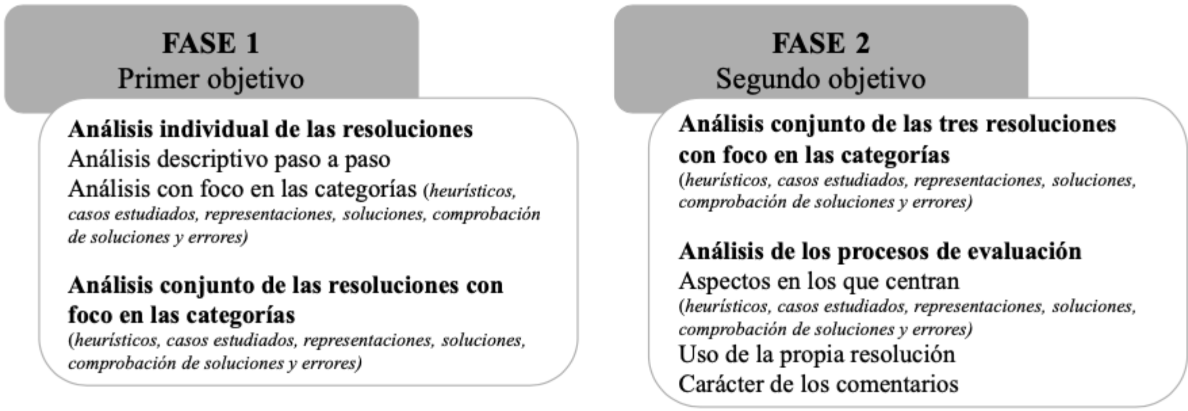


Figura 3.1. Esquema del proceso de análisis de datos.

La Tabla 3.1 muestra una síntesis de los aspectos metodológicos de la investigación, que serán detallados en las siguientes secciones.

Tabla 3.1. Esquema general de la metodología.

Participantes	● 16 estudiantes del Máster en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato de la Universidad de La Laguna. ● Especialidad de Matemáticas ● Curso 2019/2020	
Fases de la investigación	**Primera fase** ***Resolución de problemas***	**Segunda fase** ***Evaluación entre pares***
Recogida de datos	Problema de final abierto. Resolución individual. Papel y lápiz.	Evaluación de la resolución de un compañero. En parejas. Grabación de audio.
Análisis de datos	Análisis de documentos. 16 resoluciones individuales. Categorías de análisis: - Heurísticos - Casos estudiados - Representaciones - Soluciones - Comprobación de soluciones - Errores	Análisis de la discusión mantenida por cada pareja durante la evaluación. Transcripción de las 8 grabaciones de audio. Categorías de análisis: - Categorías de la fase 1. - Resolución en la que se apoyan. - Carácter de las intervenciones.

3.2. Contexto y participantes

El estudio se realizó con los estudiantes de la especialidad de Matemáticas del Máster Interuniversitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas de la Universidad de La Laguna. Se trata de un máster habilitante para la formación de docentes de la etapa de Educación Secundaria de todas las disciplinas.

En la investigación participaron los dieciséis estudiantes que durante el curso académico 2019/2020 estaban cursando la asignatura *Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, en modalidad de evaluación continua. Esta asignatura es anual, tiene una carga total de 12 créditos y para muchos estudiantes es su primer acercamiento al estudio y la reflexión sobre los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Entre sus objetivos se encuentra que los futuros docentes conozcan los principales desarrollos teórico-prácticos acerca del aprendizaje y la enseñanza de la disciplina, adquieran criterios de selección y elaboración de materiales educativos que les permitan transformar el currículo en secuencias de actividades y aprendan estrategias y técnicas de evaluación, entendiendo la evaluación como un instrumento de regulación del aprendizaje y estímulo al esfuerzo.

La asignatura se divide en tres módulos. En el primer módulo se realiza una introducción a la educación matemática, donde se dan a conocer distintas teorías de enseñanza y aprendizaje, se discute acerca del tipo de conocimiento y competencias que debe desarrollar un docente para ejercer su profesión, se analizan distintos tipos de actividades y estrategias metodológicas y se discute sobre la evaluación, los distintos tipos de evaluación y los elementos que intervienen en este proceso. En el segundo y tercer módulo se profundiza en estos aspectos, exponiendo al alumnado a situaciones particulares de la educación secundaria obligatoria y postobligatoria, respectivamente.

La investigación se llevó a cabo durante el primer módulo del curso, en la primera sesión dedicada a la evaluación. Esta sesión tuvo una duración de 2 horas y en ella se realizaron cuatro actividades, cuya descripción general se presenta en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2. Descripción general de la sesión dedicada a la evaluación.

Actividad	**Descripción**	**Agrupamiento**	**Duración**
Resolución de problemas	Resolver un problema de final abierto	Individual	35 minutos
Evaluación entre pares	Discutir y evaluar la resolución de un compañero	Parejas	25 minutos
Autoevaluación	Evaluar sus propias resoluciones	Individual	10 minutos
Discusión final	Reflexionar y discutir sobre distintos aspectos de las actividades anteriores	Gran grupo	25 minutos

Atendiendo a los objetivos de esta investigación, el estudio se centra en el análisis de la información recogida en las dos primeras actividades: resolución de problemas (objetivo 1) y evaluación entre pares (objetivo 2). Cada una de dichas actividades define una fase de la investigación, cuyas características se detallarán en las dos secciones siguientes.

En cuanto a los estudiantes que participaron en esta investigación, el perfil de los mismos era bastante variado. Sus edades estaban comprendidas entre los 21 y los 28 años, sobresaliendo uno de ellos con 46 años. La mayoría eran graduados y graduadas en Matemáticas, excepto el estudiante de mayor edad que es licenciado en Ciencias y Técnicas Estadísticas y otros tres participantes graduados en Física. Prácticamente todos habían obtenido el grado ese mismo año (2019), dos de ellos en los últimos dos años (2018 y 2017) y uno en el año 2010.

En un cuestionario inicial en el que se les preguntó si habían tenido algún tipo de experiencia como docentes, en qué materias y de qué cursos, diez participantes indicaron tener experiencia docente. El máster que están cursando es habilitante y requisito indispensable para poder prestar servicios docentes tanto en centros públicos como privados y concertados. Esto, unido a las respuestas de las siguientes preguntas sobre los cursos y materias, aunque no se recoge en el cuestionario, podemos inferir que la experiencia docente proviene de clases particulares. Esta docencia va desde la educación primaria, pasando por la educación secundaria, hasta la universitaria. Cinco de ellos indicaron haber impartido en dos de las etapas (primaria y secundaria o secundaria y universitaria) y una de ellas en las tres. El resto solo había impartido en la etapa de educación secundaria. La mitad del alumnado únicamente había impartido clase de asignaturas de matemáticas y la otra mitad había impartido clases de física, química, biología e inglés. Dos de los participantes no entregaron información sobre su experiencia docente y los otros cuatro indicaron que no habían tenido ningún tipo de experiencia en este sentido.

Con el fin de garantizar el anonimato de los participantes, nos referiremos a ellos con un seudónimo. Además, a cada estudiante se le asignó un código para facilitar el análisis de datos. En la Tabla 3.3 se identifican los estudiantes a través de su seudónimo y el código correspondiente.

Tabla 3.3. Seudónimos y códigos de identificación de los participantes

SEUDÓNIMO	CÓDIGO	SEUDÓNIMO	CÓDIGO
Antonio	E1	Judith	E9
Victoria	E2	Maite	E10
David	E3	Francisco	E11
Yolanda	E4	Yaiza	E12
Javier	E5	Zahira	E13
Sandra	E6	Mónica	E14
Yurena	E7	Sofía	E15
Marta	E8	Manuel	E16

A continuación se presenta el detalle de los procesos de recogida y análisis de datos de cada una de las dos fases en que se ha dividido la investigación.

3.3. Primera fase. Resolución del problema

El objetivo de esta primera fase es dar respuesta al primer objetivo de investigación: Analizar las resoluciones de los futuros docentes de matemáticas de Educación Secundaria a un problema de final abierto atendiendo a: los heurísticos que emplean, los casos estudiados, las representaciones empleadas, las soluciones que entregan, si comprueban o no dichas soluciones y los errores que cometen. Para ello, se analizará cómo los participantes resuelven individualmente un problema de final abierto, de un nivel curricular de educación secundaria, identificando similitudes y diferencias entre los procesos de resolución seguidos por cada uno de ellos.

3.3.1. Proceso de recogida de datos

Los datos para esta fase de la investigación se recogieron a partir de la primera de las actividades realizadas en la primera sesión dedicada a la evaluación en la asignatura *Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (Tabla 3.2). Se trata de una actividad matemática, donde los 16 participantes debían resolver individualmente un problema de final abierto.

El enunciado del problema requiere encontrar rectas con dos puntos de intersección con una función cuadrática dada (Figura 3.2). Los futuros docentes dispusieron de 30 minutos para resolver el problema individualmente, utilizando únicamente papel y lápiz, y no recibieron ninguna indicación adicional a la aportada en el enunciado del problema.

Encontrar ecuaciones de rectas que tengan dos puntos de intersección con la parábola $y=x^2+4x+5$.

Figura 3.2. Enunciado del problema.

El objetivo de esta primera actividad es ofrecer a los participantes la oportunidad de reflexionar sobre la situación presentada en el problema, antes de evaluar la respuesta de un compañero o una compañera, lo que constituye la segunda actividad.

El criterio que se utilizó para seleccionar la actividad matemática fue que resultara ser un problema para los participantes, en el sentido de Schoenfeld (1985). Para ello se optó por el uso de un problema de final abierto, es decir, un problema que admite múltiples soluciones (Zhu y Fan, 2006), puede resolverse de más de una manera (Chan y Clarke, 2017) y del que los resolutores desconocen un procedimiento previo de resolución (Ärlebäck, 2009). Desconocer un procedimiento estándar para resolver el problema lo convierte en un problema no rutinario (Zhu y Fan, 2006), lo que obliga a la movilización y reflexión acerca de conocimientos previos (Ochoviet, 2020) y que puede generar dificultades asociadas a la falta de experiencia en la resolución de este tipo de problemas (Felmer y Perdomo-Díaz, 2016; Montejo-Gámez et al., 2017).

Por otra parte, se decidió que el problema implicara funciones cuadráticas puesto que se trata de un tópico matemático muy relevante en el currículo y donde suelen aparecer diversas dificultades, relacionadas con la compresión de sus diferentes elementos (Amaya-de-Armas y Medina-Rivilla, 2013), con la representación gráfica (Díaz et al., 2015) o con la conexión entre los distintos registros de representación (ecuaciones, tablas y gráficos) (Lobato et al., 2012; McCallum, 2018; Wilkie, 2022).

La variedad de respuestas y formas de resolución que admite el problema al ser de final abierto y las distintas representaciones que pueden utilizarse para trabajar con una función cuadrática, aumenta las posibilidades de que en la segunda fase los participantes se enfrenten a la evaluación de una respuesta con aspectos matemáticos diferentes a los que ellos mismos utilizaron al resolverlo.

Los datos recogidos para esta primera fase de la investigación consisten en el conjunto de documentos escritos por los 16 participantes durante la actividad de resolución de problemas (Anexo A.1).

3.3.2. Análisis a priori del problema

En este apartado se mostrarán diferentes formas de abordar el problema de manera clara y detallada. Realizaremos el análisis de posibles resoluciones de este problema desde dos enfoques: un enfoque gráfico y un enfoque algebraico.

Enfoque gráfico

En la Figura 3.3 se observa la representación gráfica de la parábola. Se trata de una parábola convexa, cuyo vértice se encuentra en el punto (-2,1), interseca al eje de ordenadas en el punto (0,5) y no tiene puntos de intersección con el eje de abscisas.

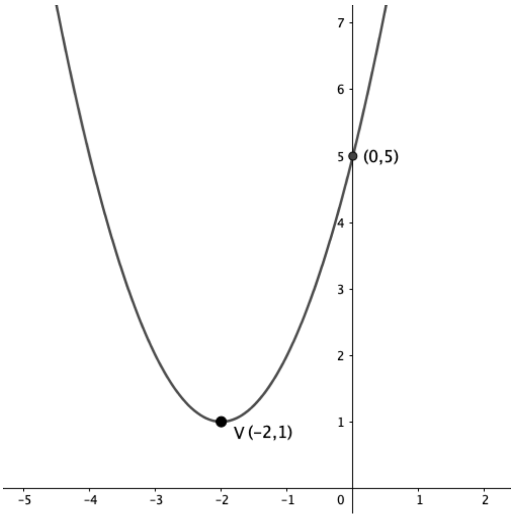


Figura 3.3. Representación gráfica de la parábola dada en el problema.

A partir de esta representación gráfica nos podemos plantear distintos tipos de soluciones: rectas horizontales, rectas que pasan por el vértice y rectas que pasan por dos puntos cualesquiera de la parábola distintos del vértice.

<u>Rectas horizontales</u>

Trazamos rectas horizontales en la gráfica de la parábola y vemos que se dividen en tres tipos según cuántas veces corten a la parábola (Figura 3.4). La que pasa por el vértice, con un solo punto de corte; las que se encuentran por debajo del vértice, que no cortan a la parábola; y las rectas horizontales por encima del vértice, con dos puntos de intersección. Estas últimas serían soluciones al problema planteado.

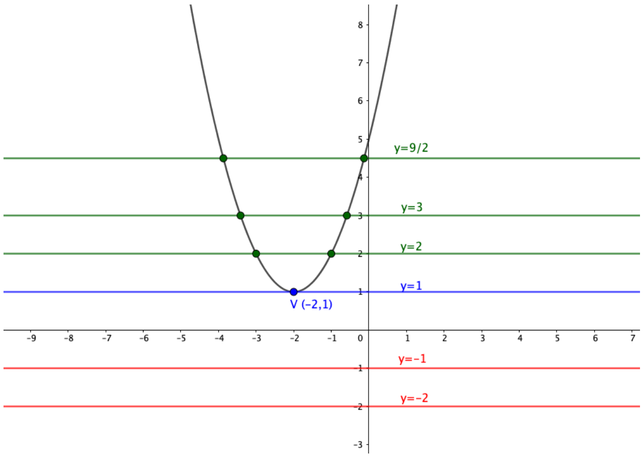


Figura 3.4. Algunas rectas horizontales con dos puntos, un punto o ningún punto de intersección con la parábola.

Esta estrategia permite encontrar de manera sencilla rectas que cortan en dos puntos a la parábola. Además, podemos generalizar a partir de las soluciones encontradas, afirmando que todas las rectas paralelas al eje de abscisas por encima del vértice tienen dos puntos de intersección con la parábola. Es decir, todas las rectas de la forma $y = n$, con $n \in \mathbb{R}$ y $n > 1$, son soluciones al problema.

<u>Rectas que pasan por el vértice de la parábola</u>

Todas las rectas que pasan por el vértice, excepto la recta tangente, tienen dos puntos de intersección con la parábola. Por tanto, eligiendo cualquier número m distinto de cero como pendiente e imponiendo que pasan por el vértice (-2,1), la ecuación de estas rectas puede expresarse de la forma:

$$y - 1 = m \cdot (x + 2) \Rightarrow y = mx + 2m + 1, \text{con } m \in \mathbb{R} \text{ y } m \neq 0.$$

A partir de esta expresión, se pueden obtener distintas rectas que pasan por el vértice con dos puntos de intersección con la parábola, asignando valores a m, distintos de cero (Figura 3.5).

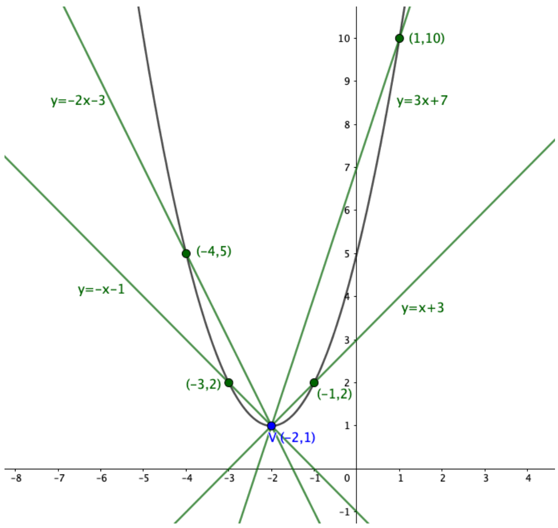


Figura 3.5. Algunas rectas que pasan por el vértice con dos puntos de intersección con la parábola.

Rectas que pasan por dos puntos de la parábola distintos del vértice

Por otra parte, si consideramos dos puntos cualesquiera de la parábola, la recta que los une cumple con las condiciones del problema (Figura 3.6).

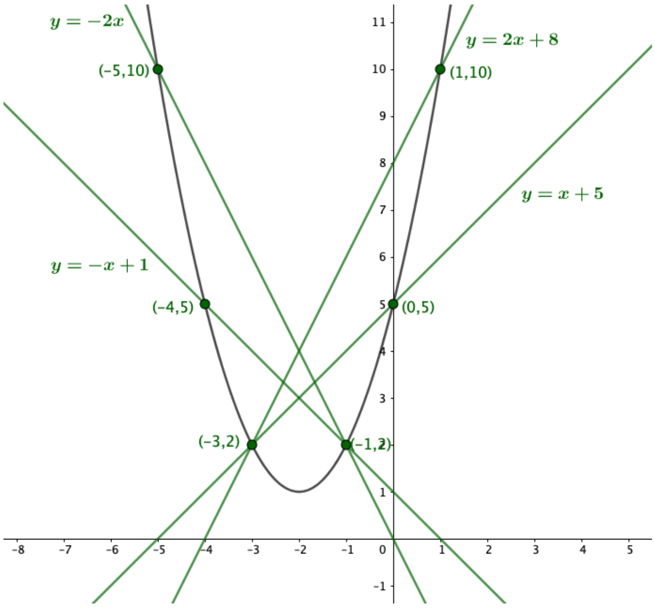


Figura 3.6. Rectas que pasan por dos puntos de la parábola.

Con esta estrategia de resolución solo es posible calcular un número limitado de rectas, ya que no permite generalizar fácilmente.

Encontrar todas las rectas que cumplen la condición del problema requeriría plantear una resolución algebraica para la búsqueda de condiciones, lo que nos lleva al siguiente enfoque.

Enfoque algebraico

Consideramos la ecuación explícita de una recta, $y = ax + b$, que incluye todas las posibles rectas solución ya que las rectas de la forma $x = \alpha$, dada la forma de la parábola, no serían solución. Igualamos la ecuación de la recta a la de la parábola:

$$ax + b = x^2 + 4x + 5 \Leftrightarrow x^2 + (4 - a)x + 5 - b = 0$$

La recta y la parábola tendrán dos puntos de intersección cuando el discriminante de la ecuación cuadrática resultante sea mayor estricto que cero, esto es:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow a^2 - 8a + 4b - 4 > 0$$

Para resolver esta inecuación, consideramos la expresión algebraica obtenida en ella como una nueva función cuadrática siendo a la variable independiente, $f(a) = a^2 - 8a + 4b - 4$, y estudiamos el signo de $f(a)$ en función de los valores de a y b. Podemos estudiar el signo de $f(a)$ atendiendo a la situación de su vértice. Puesto que esta función también es convexa, si el vértice está por encima del eje de abscisas, $f(a)$ es siempre positiva; si el vértice está en el eje de abscisas, $f(a)$ es positiva excepto en el vértice, donde la función se anula; y si el vértice está por debajo del eje de abscisas, $f(a)$ toma valores positivos y negativos.

El vértice de $f(a)$ es $(4, 4b - 20)$. La situación del vértice respecto del eje de abscisas depende del signo de la segunda coordenada:

- El vértice está sobre el eje de abscisas si $4b - 20 = 0 \Leftrightarrow b = 5$
- El vértice está por encima del eje de abscisas si $4b - 20 > 0 \Leftrightarrow b > 5$
- El vértice está por debajo del eje de abscisas si $4b - 20 < 0 \Leftrightarrow b < 5$

Por tanto, estudiaremos el signo de $f(a)$ para $b = 5,\ b > 5$ y $b < 5$:

- Si $b = 5$, la expresión de la función sería $f(a) = a^2 - 8a + 16 = (a - 4)^2$. Como podemos observar, la función es positiva para todos los valores de a, excepto para $a = 4$, donde se anula.

  Por tanto, todas las rectas de la forma $y = ax + 5$, con $a \neq 4$, tienen dos puntos de intersección con la parábola y son soluciones del problema.

Para estudiar los casos $b > 5$ y $b < 5$, calculamos los puntos de corte de la parábola $y = a^2 - 8a + 4b - 4$ con el eje de abscisas. Estos puntos son: $\left(4 - 2\sqrt{5 - b},\ 0\right)$ y $\left(4 + 2\sqrt{5 - b},\ 0\right)$.

- Si $b > 5$, en los puntos de corte obtenemos una raíz negativa por lo que concluimos que no tiene puntos de corte con el eje de abscisas y que la parábola $y = a^2 - 8a + 4b - 4$ es positiva para cualquier valor de a (Figura 3.7).

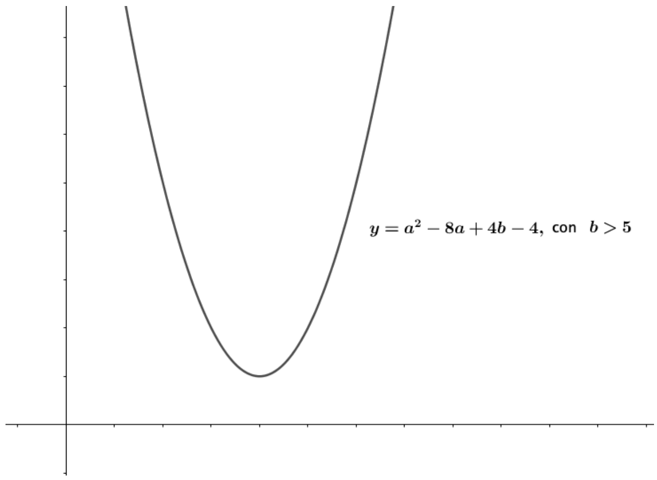


Figura 3.7. Estudio del discriminante para $b > 5$.

  Por tanto, todas las rectas de la forma $y = ax + b$, con $b > 5$ y $a \in \mathbb{R}$, tienen dos puntos de intersección con la parábola y son soluciones del problema.

- Si $b < 5$, la parábola toma valores positivos y negativos (Figura 3.8). Teniendo en cuenta los puntos de corte con el eje de abscisas y la concavidad de la parábola, deducimos que $f(a)$ toma valores positivos para $a \in \left(-\infty,\ 4 - 2\sqrt{5-b}\right) \cup \left(4 + 2\sqrt{5-b},\ \infty\right)$.

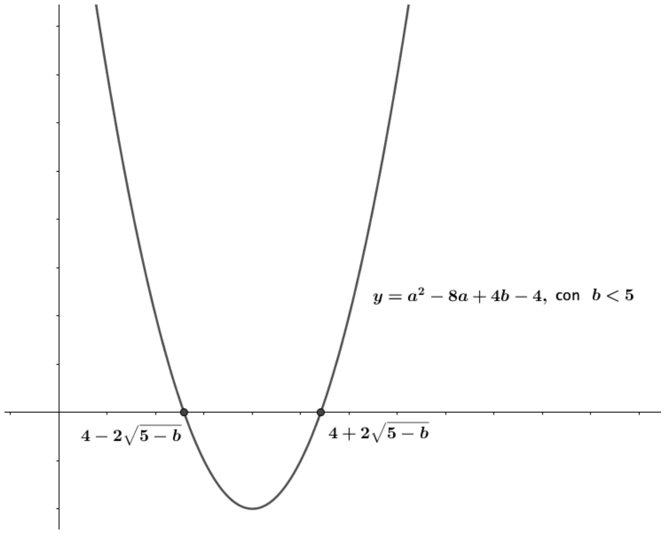


Figura 3.8. Estudio del discriminante para $b < 5$.

Por tanto, todas las rectas de la forma $y = ax + b$, con $b < 5$ y $a \in \left(-\infty,\ 4 - 2\sqrt{5-b}\right) \cup \left(4 + 2\sqrt{5-b},\ \infty\right)$, tienen dos puntos de intersección con la parábola y son soluciones del problema.

En resumen, las rectas de la forma $y = ax + b$ tienen dos puntos de intersección con la parábola y son soluciones del problema si:

- $b = 5$ y $a \neq 4$
- $b > 5$ y $a \in \mathbb{R}$
- $b < 5$ y $a \in \left(-\infty,\ 4 - 2\sqrt{5-b}\right) \cup \left(4 + 2\sqrt{5-b},\ \infty\right)$

El enfoque algebraico nos permite dar las condiciones para todas las rectas que son soluciones del problema, sin tener en cuenta características de la parábola como el vértice o la concavidad. Además, se puede reproducir el mismo procedimiento de resolución para cualquier parábola dada. Sin embargo, en contraposición a los procesos de resolución del enfoque gráfico, que permitían encontrar ecuaciones de rectas de manera sencilla y rápida, la resolución algebraica es un procedimiento largo, con numerosos pasos que no permite dar soluciones hasta que se ha concluido.

3.3.3. Proceso de análisis de datos

Tal y como ya se ha indicado, el objetivo de esta primera fase es analizar cómo los futuros docentes resuelven el problema, lo que requiere considerar cuatro aspectos fundamentales: las estrategias utilizadas, el procedimiento llevado a cabo, las soluciones dadas y los errores cometidos. Para sistematizar este análisis y estudiar estos aspectos en profundidad, se establecieron seis categorías o variables de análisis: *Heurísticos*, *casos estudiados*, *representaciones*, *soluciones*, *comprobación de las soluciones* y *errores*.

Tres de estas categorías (*heurísticos*, *soluciones* y *errores*) están inspiradas en la propuesta de análisis presentada por Arnal-Bailera et al. (2018), quienes las denominan procedimiento, resultado y errores, respectivamente (sección 2.2.2). Las categorías *casos estudiados*, *representaciones y comprobación de soluciones* fueron añadidas considerando las características concretas del problema utilizado en la investigación y el objetivo del estudio. La primera de ellas, *casos estudiados,* se incluyó con el objetivo de analizar en profundidad los procesos de resolución seguidos por los participantes pues, como en cualquier proceso de resolución de problemas, las estrategias utilizadas no garantizan alcanzar las soluciones (Santos-Trigo, 2014), lo que hace necesario estudiar, no solo las soluciones alcanzadas, sino también todas aquellas rectas planteadas durante el proceso de resolución. Por otra parte, se consideró necesario incluir una categoría asociada a las *representaciones*, por su importante papel en las matemáticas (e.g. Duval, 1993; NCTM, 2000; Rico, 2009) en la resolución de problemas en general (e.g. Callejo y Vila, 2009; Carrillo, 2009; Mousoulides y Sriraman, 2014; Polya, 1945; Schoenfeld, 1985) y en el uso y tratamiento de las funciones en particular (e.g. Amaya-de-Armas y Medina-Rivilla, 2013; Lobato et al., 2012; Mangwende y Maharaj, 2018; McCallum, 2018; Wilkie, 2022). Por último, la categoría *comprobación de soluciones* se ha incluido para tratar de capturar aspectos metacognitivos del proceso de resolución (Schoenfeld, 1985).

A continuación se presenta una breve explicación de cada una de las categorías de análisis y los posibles valores dentro de cada una de ellas, que se han definido de forma explícita para el problema planteado, a partir del análisis a priori presentado en la sección 3.3.2.

Heurísticos

La categoría *heurísticos* hace referencia a las distintas estrategias empleadas para alcanzar las soluciones del problema. A partir de los heurísticos encontrados en la literatura, y que han sido discutidos en el marco conceptual (sección 2.1.3), y del análisis a priori del problema (sección 3.3.2) se identificó un conjunto de estrategias que podrían aparecer en el caso particular del problema utilizado en este trabajo. Esto dió lugar a la siguiente lista de heurísticos que podrían aparecer en las resoluciones, y que se tuvieron en cuenta a la hora de analizar los datos:

- *Dibujar una figura*. Esta estrategia se refiere a utilizar la representación gráfica de la parábola para explorar posibles soluciones al problema.

- *Ensayo y error.* Esta estrategia, aplicada al problema, consiste en tomar rectas particulares y verificar si cumplen o no las condiciones del problema.

- *Generalizar.* A partir del estudio de rectas particulares con un característica común (misma pendiente, misma ordenada en el origen, pasan por un mismo punto,...), extender el estudio a toda la familia de rectas con dicha característica.

- *Descomponer el problema en partes*. Este heurístico consistiría en dividir el problema en partes, de manera que cada una de ellas se dedique al estudio de una familia de rectas (horizontales, que pasan por el vértice,...) y de forma que, el conjunto de familias abarquen, al menos, todas las rectas que son solución del problema (podrían estudiarse también rectas que no sean solución).

- *Suponer el problema resuelto.* Tomar la ecuación de una recta con coeficientes desconocidos (en su forma general $Ax + By + C = 0$ o en su forma explícita $y = ax + b$ que, como se explicó en el enfoque algebraico del análisis a priori del problema (sección 3.3.2), abarca todas las rectas solución), imponer las condiciones del problema y encontrar valores de los coeficientes que hacen que esas condiciones se cumplan. Este sería el principal heurístico que hemos empleado para resolver el problema con el enfoque algebraico (sección 3.3.2).

Estos heurísticos pueden aparecer de forma individual o combinados entre sí. En el análisis de los datos se indicarán todos los heurísticos que se identifiquen en cada una de las resoluciones, señalando además el orden en el que han aparecido.

Casos estudiados

Como ya se indicó, para realizar un análisis más detallado del procedimiento general de resolución empleado por cada participante, se establecieron dos categorías: *casos estudiados* y *representaciones*.

La categoría *casos estudiados* nos dará información acerca del tipo de rectas que los futuros docentes estudian en sus resoluciones. Analizar en profundidad los procesos de resolución implica conocer no solo las soluciones presentadas sino también aquellas rectas que se plantean pero que, o bien no son solución al problema o bien no concluyen el estudio que les lleva a establecerlas como solución. A partir del análisis a priori del problema (sección 3.3.2) en esta categoría se identificaron cuatro tipos de rectas divididas en dos grupos: aquellas con un enfoque gráfico (rectas horizontales, rectas verticales y rectas oblicuas) y una recta general derivada de un enfoque algebraico (en su forma general $Ax+By+C=0$, en su forma explícita, $y=ax+b$ o en cualquier otra forma). Si bien el último tipo contiene los tipos anteriores, como se ha mencionado, se ha decidido distinguir dada su naturaleza algebraica en contraposición a la naturaleza geométrica de los casos anteriores.

Representaciones

La categoría *representaciones* recoge información sobre el tipo de sistema de representación (Duval, 1993) utilizado por los participantes. En este caso concreto podrá tomar los siguientes valores:

- *Gráfica*. Se indicará cuando la resolución incluya una representación gráfica de la parábola y/o rectas.
- *Tabular*. Se indicará cuando aparezca una tabla de valores que recoja las coordenadas de puntos pertenecientes a la parábola. Podría aparecer junto a la representación gráfica.
- *Simbólica*. Se empleará cuando la resolución presente el uso de fórmulas, operaciones o expresiones en lenguaje matemático. Esta representación aparecerá sobre todo si los estudiantes resuelven el problema de manera similar a como se ha mostrado en el enfoque algebraico del análisis a priori (sección 3.3.2).
- *Verbal*. Este tipo de representación se indicará si los participantes incluyen descripciones, justificaciones o argumentaciones expresadas con palabras.

Tal y como ocurre en el resto de categorías, una misma resolución del problema puede incluir el uso de más de un tipo de representación. En el análisis se considerarán todos los que se observen.

Soluciones

En torno a las soluciones se establecieron dos categorías, una que tiene que ver con las soluciones que indican los participantes para el problema dado y otra para registrar si hay evidencias de que se haya comprobado la validez de dichas soluciones o no.

La categoría *soluciones*, recoge aquellas rectas o familia de rectas que aparecen de forma explícita en los documentos escritos por los participantes como soluciones al problema. En esta categoría no se valora si dichas soluciones son correctas o no, se indican todas las rectas o familias de rectas que los futuros docentes señalan como soluciones del problema.

En relación con esta categoría se identificarán, en línea con los *casos estudiados*, los siguientes tipos de soluciones: rectas horizontales, rectas oblicuas y una recta general (desaparecen las rectas verticales por no ser solución al problema). Este análisis aportará información sobre las similitudes y diferencias entre distintas resoluciones, lo que permitirá obtener más detalle sobre cada una de las resoluciones y, por tanto, sobre cada uno de los casos estudiados.

Comprobación de soluciones

Además de las soluciones que indican los participantes, nos interesa observar si comprueban o no dichas soluciones. Tal y como señala Schoenfeld (1985), uno de los elementos que intervienen en la resolución de problemas es la metacognición. Los procesos metacognitivos pueden activarse de diferentes maneras, con cualquier acción que haga que el resolutor revise su propio proceso de resolución. Estas acciones, muchas veces no son fáciles de observar, quedando en el pensamiento de la persona y no haciéndolos explícitos.

En esta investigación, dado el carácter de los datos recogidos para esta primera fase (documentos escritos), resulta complejo obtener información sobre los procesos metacognitivos empleados por los participantes, más allá de que hayan comprobado o no la validez de las soluciones que presentan. Por esa razón consideramos importante incluir esta categoría, como una forma de acceder a los procesos metacognitivos de los futuros docentes.

Por tanto, en la categoría *comprobación de soluciones*, se recoge información sobre la existencia o no de evidencias de que los participantes comprueben las soluciones dadas. En esta categoría se incluye la comprobación de que una recta o familias de rectas sean solución y también la comprobación de que no lo sean.

Errores

Por último, incluimos la categoría *errores*, que recoge información sobre cualquier tipo de error identificado en el proceso de resolución de cada uno de los participantes. Los errores han sido ampliamente investigadas a lo largo de los años ya que constituyen una parte inherente a los procesos de enseñanza y aprendizaje (e.g. Alvidrez et al., 2022; Rico, 1995; Socas-Robayna, 2007). Por ello, es esperable que durante el análisis de las resoluciones se encuentren errores en los procesos de resolución. En este sentido, otras investigaciones en las que se estudiaron los errores cometido en problemas de funciones cuadráticas muestran dificultades relacionadas con la representación gráfica (por ejemplo, en la situación del eje) (Díaz et al., 2015), con la relación entre la ecuación y la representación gráfica (Lobato et al., 2012; McCallum, 2018; Wilkie, 2022) o con la comprensión de los distintos elementos de las funciones (Amaya-de-Armas y Medina-Rivilla, 2013).

La siguiente Tabla 3.4 muestra una síntesis de las categorías o variables de análisis utilizadas en la investigación.

Tabla 3.4. Resumen de las categorías de análisis.

CATEGORÍAS DE ANÁLISIS	
Heurísticos	- *Dibujar una figura* - *Ensayo y error* - *Generalizar* - *Descomponer el problema en partes* - *Suponer el problema resuelto*
Casos estudiados	*Rectas planteadas, sean o no solución al problema*
Representaciones	- *Gráfica* - *Tabular* - *Simbólica* - *Verbal*
Soluciones	*Soluciones presentadas*
Comprobación de soluciones	*Soluciones de las que se realiza una comprobación explícita de las condiciones del problema*
Errores	*Errores cometido durantes el proceso de resolución*

El proceso de análisis de esta primera fase de la investigación se dividió en dos partes (Figura 3.9). En la primera parte, se estudiaron individualmente cada una de las resoluciones entregadas por los 16 participantes. Primero se examinaron en detalle los pasos seguidos por cada estudiante en su proceso de resolución, generando un análisis descriptivo de cada respuesta. Posteriormente, se analizó cada resolución atendiendo a las categorías de análisis (*heurísticos*, *casos estudiados*, *representaciones*, *soluciones*, *comprobación de las soluciones* y *errores*), es decir, se determinó de forma concreta el heurístico o heurísticos utilizados, cuáles fueron los casos que estudiaban, qué representaciones se utilizaron, qué soluciones finalmente daban, si las comprobaban o no, y qué errores concretos se cometieron. Para cada resolución se construyó una tabla resumen con la información sobre cada categoría (Figura 3.10). En la segunda parte, se analizaron conjuntamente todas las respuestas poniendo el foco en cada una de las categorías de análisis, identificando similitudes y diferencias entre las distintas resoluciones.

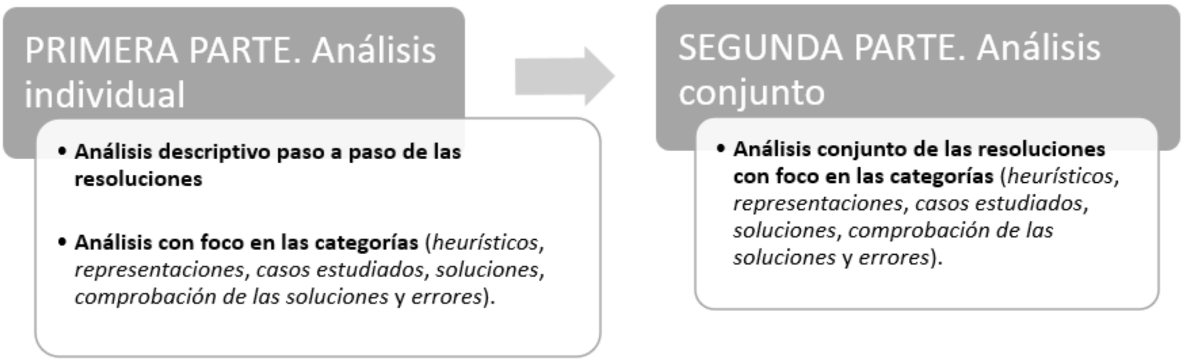


Figura 3.9. Esquema del proceso de análisis de datos (Primera fase).

Heurísticos	1. Dibujar una figura 2. Descomponer el problema en partes 3. Suponer el problema resuelto
Casos estudiados	Rectas paralelas al eje OX en el semiplano $x > 5$ $y = mx + n$, con pendiente positiva
Representaciones	Gráfica, tabular, simbólica y verbal
Soluciones	Rectas paralelas al eje OX en el semiplano $x > 5$, representadas, erróneamente, como $y = x + n$, con $n > 5$
Comprobación de soluciones	No
Errores	Representación del vértice de la parábola Representar las rectas paralelas al eje OX en el semiplano $x > 5$ como $y = x + n$, con $n > 5$ Representar el semiplano anterior como x>5 Error de operatoria al multiplicar

Figura 3.10. Ejemplo de tabla resumen de cada resolución.

El análisis conjunto de las 16 resoluciones permite dar respuesta al primer objetivo de la investigación. Por otra parte, el análisis individual ofrece información relevante no solo para construir ese análisis conjunto, sino también sobre el punto de partida de los futuros docentes a la hora de evaluar la resolución de sus compañeros (objetivo 2). Saber cómo resolvieron el problema permite analizar con más detalle su proceso de evaluación y, por ello, se utiliza también ese análisis individual en la segunda fase de la investigación.

3.4. Segunda fase. Evaluación entre pares

El objetivo de la segunda fase es identificar qué aspectos de la resolución del problema tienen en cuenta los futuros docentes cuando actúan como evaluadores, y analizar de qué forma utilizan sus propias resoluciones para evaluar la de un compañero (si lo hacen), así como el carácter de sus reflexiones (objetivo 2). A continuación, se detallan los procesos de recogida y análisis de datos de esta fase, estrechamente ligados a los procesos de la fase anterior.

3.4.1. Proceso de recogida de datos

Los datos principales para esta segunda fase de la investigación se recogieron a partir de la segunda actividad realizada en la sesión dedicada a la introducción de la evaluación en el módulo 1 de la asignatura *Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (Tabla 3.1). En dicha actividad, se propuso a los futuros docentes una tarea que consistía en evaluar la respuesta de un compañero o compañera al problema. Esta actividad, que hemos denominado *Evaluación entre pares*, se organizó de la siguiente forma: Al finalizar la actividad de resolución de problemas se recogieron las 16 resoluciones y se seleccionaron 8 de ellas al azar. A continuación, se dividió a los estudiantes en ocho parejas, también al azar. A cada una de las parejas se le asignó una de las resoluciones, de manera que ninguno de los evaluadores recibiera su propia resolución para ser evaluada. En la Tabla 3.5 se indican cuáles fueron las resoluciones evaluadas y qué pareja de participantes evaluó cada una de ellas.

Tabla 3.5. Resoluciones evaluadas y pareja evaluadora.

EVALUADO/A	EVALUADORES/AS
Antonio (E1)	Marta (E8) y Manuel (E16)
David (E3)	Francisco (11) y Sofía (E15)
Javier (E5)	David (E3) y Sandra (E6)
Maite (E10)	Zahira(E13) y Mónica (E14)
Yaiza (E12)	Yurena (E7) y Judith (E9)
Mónica (E14)	Antonio (E1) y Javier (E5)
Sofía (E15)	Maite (E10) y Yaiza (E12)
Manuel (E16)	Victoria (E2) y Yolanda (E4)

Las resoluciones se entregaron en versión anónima para garantizar la objetividad de la evaluación. Se eligió una selección aleatoria de las resoluciones a evaluar debido a que no se disponía de tiempo suficiente entre la primera y la segunda actividad para analizar cada resolución y realizar una elección deliberada.

Por otra parte, se decidió formar las parejas evaluadoras también aleatoriamente ya que las agrupaciones aleatorias aumentan el compromiso con la tarea que se está desarrollando y la movilidad de los conocimientos (Liljedahl, 2016), lo que fomentaría la responsabilidad de los futuros docentes con la evaluación, enriqueciendo el análisis.

Junto con la resolución a evaluar, a cada pareja se le entregó un documento con el enunciado de la actividad *Evaluación entre pares* (Figura 3.11).

Evalúa la resolución del problema que se te entrega en documento aparte. Argumenta de forma detallada dicha evaluación.

(No escribir sobre el documento de resolución del problema)

Figura 3.11. Indicaciones para la evaluación por pares.

Las instrucciones no incluían ninguna indicación concreta sobre cómo realizar la evaluación, ni criterios de evaluación. Se decidió que así fuera ya que el objetivo era identificar aquellos aspectos que los futuros docentes tienen en cuenta cuando evalúan, por lo que cualquier indicación concreta sobre los aspectos a considerar contaminaría la información. Existen investigaciones que sostienen que entregar o no criterios de evaluación en una actividad de evaluación entre pares depende del contexto y las circunstancias en las que se desarrolle (Jones y Alcock, 2014; Wyatt-Smith et al., 2010). Y, en el sentido del objetivo de esta investigación, Seifert y Feliks (2018) sostienen que, efectivamente, una rúbrica podría limitar consideraciones y puntos de vista adicionales e interesantes de los estudiantes.

La discusión mantenida por cada pareja evaluadora fue grabada en audio con el fin de obtener el máximo detalle sobre su proceso de evaluación. También se recogieron las respuestas al documento de la actividad (Figura 3.11), sin embargo, no fueron utilizadas para el análisis ya que el detalle del proceso de evaluación se encontró en las grabaciones de audio y no en el documento, que redactaban tras haber mantenido la discusión sobre la evaluación. Solo se hace referencia a estos documentos en el análisis del Caso 2, ya que uno de los evaluadores realiza una representación para apoyar su intervención (sección 5.1.2, Figura 5.1.2.1).

Los datos utilizados en esta segunda fase de la investigación consisten en:

- La discusión mantenida por cada una de las 8 parejas evaluadoras mientras evaluaban la resolución de un compañero al problema.
- Las resoluciones de cada uno de los 16 participantes al problema.

Los datos principales en esta fase del estudio son las 8 discusiones grabadas en audio. Las resoluciones del problema, analizadas en la primera fase de esta investigación, se utilizan como datos secundarios, para profundizar y triangular la información obtenida de los datos principales.

3.4.2. Proceso de análisis de datos

Tal y como se indicó al comienzo de este capítulo, la investigación se planteó con un diseño de estudio de casos. En total se definieron 8 casos, cada uno de los cuales involucra a tres participantes: dos estudiantes que de forma conjunta evaluaron la resolución que un compañero o compañera había dado al problema (los evaluadores), y el estudiante cuya resolución fue evaluada (el evaluado). En la Tabla 3.6 se observa la distribución de los participantes en cada uno de los casos, con su rol correspondiente.

Tabla 3.6. Distribución de los participantes por casos

	EVALUADORES	CÓDIGO	EVALUADO/A
CASO 1	David	E3	Javier
	Sandra	E6	
CASO 2	Marta	E8	Antonio
	Manuel	E16	
CASO 3	Francisco	E11	David
	Sofía	E15	
CASO 4	Zahira	E13	Maite
	Mónica	E14	
CASO 5	Antonio	E1	Mónica
	Javier	E5	
CASO 6	Yurena	E7	Yaiza
	Judith	E9	
CASO 7	Maite	E10	Sofía
	Yaiza	E12	
CASO 8	Victoria	E2	Manuel
	Yolanda	E4	

El proceso de análisis de esta segunda fase viene determinado por el segundo objetivo de investigación: Identificar qué aspectos de la resolución del problema tienen en cuenta los futuros docentes cuando actúan como evaluadores, y analizar de qué forma utilizan sus propias resoluciones para evaluar la de un compañero (si es que lo hacen), así como el carácter de sus intervenciones.

Para sistematizar este análisis y estudiar estos aspectos en profundidad, se transcribieron las discusiones mantenidas por las 8 parejas evaluadoras durante la actividad de *Evaluación entre pares*. Cada transcripción se dividió en fragmentos que denominamos *episodios,* cada uno de los cuáles se analizó teniendo en cuenta tres variables:

1. En qué aspectos de la resolución de problemas se centran los futuros docentes a la hora de evaluar la solución de un compañero.
2. En qué resolución o resoluciones se fijan.
3. Cuál es el carácter de los comentarios que hacen mientras evalúan.

Para codificar la primera de las variables se utilizaron las categorías de análisis definidas en la primera fase de la investigación: *Heurísticos*, *casos estudiados*, *representaciones*, *soluciones*, *comprobación de las soluciones* y *errores*. La codificación de la segunda variable se hizo indicando si los evaluadores hacen referencia a la resolución que están evaluando o a la suya propia. Por último, para el carácter de los comentarios que realizan los evaluadores consideramos tres categorías: *interpretativo*, *valorativo* o *expositivo*.

La Figura 3.12 muestra un esquema del proceso de análisis realizado en esta segunda fase de la investigación.

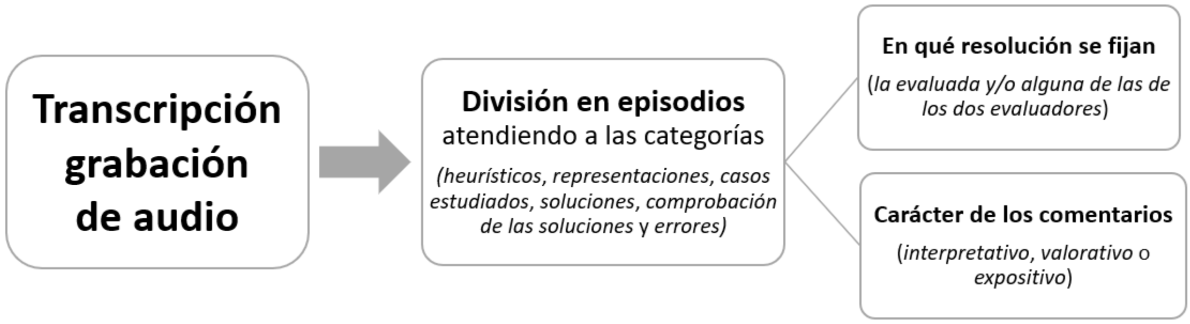


Figura 3.12. Esquema del proceso de análisis de datos (Segunda fase).

A continuación se explica con más detalle la forma de identificar los episodios en que se divide cada transcripción y el proceso de codificación para cada una de las variables.

Episodios

La definición de *episodio* empleada en esta investigación está sujeta a las categorías de análisis de la primera variable de estudio: En qué aspectos de la resolución de problemas se centran los futuros docentes a la hora de evaluar la solución de un compañero. Así, un *episodio* está constituido por un fragmento de discusión en el que los evaluadores hacen referencia a una de las categorías definidas en el análisis de la primera fase de la investigación: *Heurísticos*, *casos estudiados*, *representaciones*, *soluciones*, *comprobación de las soluciones* y *errores*. Es decir, un episodio termina y empieza el siguiente cuando los evaluadores cambian el foco a otra de las categorías. Veamos un ejemplo tomando el siguiente fragmento de la transcripción de una de las evaluaciones (Caso 7):

> *Yaiza: A lo mejor el procedimiento que empleó es un poco al azar. Pero la solución está bien.*

En esta intervención, Yaiza (E12) está evaluando la resolución de Sofía (E15), quien utilizando el *heurístico ensayo y error* va tomando distintas rectas y comprobando si tienen o no dos puntos de intersección con la parábola. En dicha intervención se distinguen dos episodios:

- Primer episodio: Corresponde a la frase "*A lo mejor el procedimiento que empleó es un poco al azar*". Donde, aunque utilice la palabra "procedimiento", Yaiza hace referencia al hecho de ir tomando rectas arbitrarias, es decir, al *heurístico* utilizado por Sofía.
- Segundo episodio: Corresponde a la frase "*Pero la solución está bien*". Donde, explícitamente, se refiere a las *soluciones*.

Aspectos de la resolución del problema en que se centra la evaluación

Como ya se ha indicado, una de las variables que analizamos en el proceso de evaluación entre pares se refiere a aquellos aspectos de la resolución de problemas que los evaluadores toman en cuenta a la hora de hacer su valoración. Del amplio conjunto de cosas que podrían observarse en la resolución de un problema, se decidió considerar las categorías ya empleadas en la primera fase de la investigación: *Heurísticos*, *casos estudiados*, *representaciones*, *soluciones*, *comprobación de las soluciones* y *errores*. Además, se incluyó una categoría denominada "*Otros*" para aquellos episodios que no hacen referencia a ninguno de los aspectos anteriores.

La codificación de esta variable se realiza de forma simultánea a la definición de los episodios, puesto que las categorías antes mencionadas son las que determinan dichos episodios. En el ejemplo anterior se evidencia la complejidad de la separación en episodios, encontrándonos en una misma intervención con dos episodios diferentes. A esto hay que añadir que, en muchas ocasiones, nos encontramos con fragmentos en los que resulta complejo indicar una categoría determinada. Estas dificultades derivan de las características de los datos recogidos, por lo que se ha intentado definir una serie de indicadores que permitan discernir la categoría a la que pertenece cada episodio.

La categoría *heurísticos* es una de las que más dudas genera, pues no se trata de un término que los participantes utilicen de manera explícita. Se codifican en esta categoría aquellos episodios donde aparecen términos o expresiones relacionadas con las definiciones de cada uno de los *heurísticos* que aparecen en la sección 3.3.3, es decir, con la idea principal de en qué consiste dicho *heurístico*, ya sea de forma explícita o implícita. En la Tabla 3.7 se muestran algunos ejemplos de episodios según el *heurístico* al que hacen referencia.

Tabla 3.7. Ejemplos de episodios clasificados en la categoría *heurísticos*.

EPISODIOS	**HEURÍSTICO**
Maite: No sé, yo creo que fue probando, diciendo, tiene dos puntos de corte, tiene dos puntos de corte…	Ensayo y error (tomar rectas y verificar si cortan en dos puntos a la parábola)
Yaiza: Utilizó el método de probar valores un poco. Escogió rectas y las comparó, hizo una intersección con la parábola.	
Yolanda: A ver, yo creo que está bien planteado y es una forma buena de verlo. **Virginia:** Sí, porque es eso, el final lo generalizas de esta manera.	Descomponer el problema en partes (dividir en familias de rectas)
Marta: Es que lo primero que hizo sí. **Manuel:** Sí. Igualar las ecuaciones.	Suponer el problema resuelto (tomar la expresión de una recta general y=ax+b)
David: Aquí te da la función. **Sandra:** Aquí interseca la recta con la parábola. **David:** Sí, una recta arbitraria y=ax+b.	
David: Lo primero que hace es dibujar la parábola y buscar cortes.	Dibujar una figura (representación gráfica de la parábola)
Judith: Bueno, es una resolución visual.	
Marta: Yo primero hice 2. Puse y=6 y y=7. Y dije, si te das cuenta, para y=n esto también te sirve.	Generalizar (estudiar rectas particulares y extender a un grupo más amplio con la misma característica)

En la categoría *casos estudiados* se consideran aquellas intervenciones donde los evaluadores analizan o realizan alguna observación sobre los casos presentados por su compañero o compañera (Tabla 3.8a-d) o hacen alguna mención a los casos que ellos mismos consideraron al resolver el problema (Tabla 3.8e). En algunas ocasiones los episodios únicamente indicarán qué casos aparecen (Tabla 3.8a), en otros comprobarán si el caso estudiado es solución o no del problema (Tabla 3.8b) o mostrarán dudas sobre algún caso concreto que haya sido estudiado por el evaluado (Tabla 3.8c) y en otros pueden estar haciendo referencia a la necesidad de incluir más casos (Tabla 3.8d).

Tabla 3.8. Ejemplos de episodios clasificados en la categoría *casos estudiados*.

Maite: Te está diciendo: esta recta no corta, esta recta no corta, esta recta no corta. O sea, todas las que van así, no cortan. Vale, genial. **Yaiza:** No, pero él empieza en el y=2. Bueno, eso es lo que estamos entendiendo nosotras porque pone y=3, y=4 y ya está. Luego, esta no corta, porque cogió una recta cualquiera. En esta digo existen dos puntos, y en esta digo existen otros dos puntos y en esta, por ejemplo, digo pues no existe ningún punto. Está bien, en principio está bien.	a
David: Y esta solo corta una vez, o sea, esta para la solución no te vale.	b
Yaiza: Es que no sé en qué se basó para coger y=4x. Y aquí más de lo mismo. Aquí puso esta ecuación, que no sé de dónde le vino la idea.	c
Yurena: Claro, esta coincide en dos puntos, esta también coincide en dos puntos. Pero no da la ecuación general.	d
Yolanda: Y luego, a ver, ¿qué es lo más fácil? Pues todas las rectas que son paralelas al eje. Primero pensé eso y luego dije, vale, entonces ¿cómo lo tengo que hacer?	e

En esta segunda fase de la investigación, se considera que un episodio hace referencia a la categoría *representaciones* cuando los evaluadores tratan aspectos concretos de una representación (puntos de corte, vértice de la parábola, pendiente de las rectas, resolución de una ecuación, claridad de una explicación…) (Tabla 3.9a), si valoran si dicha representación es o no correcta (Tabla 3.9b) o si mencionan la necesidad o importancia de alguna representación concreta (Tabla 3.9c).

Tabla 3.9. Ejemplos de episodios clasificados en la categoría *representaciones*.

Yaiza: Porque además la parábola en x no cortaba. En el y cortaba en 5. **Maite:** ¿En el y? **Yaiza:** En el y cortaba en el 5, o sea, que no cortaba en el cero. Y la x no tenía nada.	a
David: Hasta aquí está perfecto, o sea, que no se ha equivocado en los cálculos ni nada. **Sandra:** ¿Cómo que no se ha equivocado en los cálculos? Aquí le falta una a, aquí abajo. **David:** No, esto es 2 por 1. Porque la variable es a.	b
Manuel: Si hubiera intentado detallar con palabras qué estaba haciendo, qué estaba intentando… podríamos seguir el razonamiento. Pero hay un momento que yo no puedo seguirlo y no sé por qué hace las cosas que hace.	c

Esta categoría podría confundirse en algunos casos con la categoría *heurísticos*. Para evitar dicha confusión se estableció que un episodio se codificaría en la categoría *heurísticos* cuando hiciera referencia a aspectos generales (Tabla 3.10) mientras que se codificaría en la categoría *representaciones* cuando hiciera mención a aspectos concretos del procedimiento de resolución (Tabla 3.9).

Tabla 3.10. Ejemplos de episodios clasificados en la categoría *heurísticos*.

David: Lo primero que hace es dibujar la parábola y buscar cortes.
Judith: Bueno, es una resolución visual.

Además, en esta categoría distinguimos los episodios según se refieran a la representación *gráfica, tabular, simbólica* o *verbal*.

La categoría representación gráfica incluye los episodios referentes a aspectos concretos de la representación gráfica de la parábola y/o rectas (puntos de corte, vértice de la parábola, pendiente de las rectas,...) (Tabla 3.11).

Tabla 3.11. Ejemplos de episodios clasificados en la categoría *representaciones (gráfica)*.

Sandra: Está cambiando la pendiente de la recta. **David:** Sí, el ratio en el que hay dos puntos. **Sandra:** Intentando ver si es para arriba o para abajo.
Yaiza: Porque además la parábola en x no cortaba. En el y cortaba en 5. **Maite:** ¿En el y? **Yaiza:** En el y cortaba en el 5, o sea, que no cortaba en el cero. Y la x no tenía nada.
Judith: Pues en primer lugar la gráfica bien dibujada.

En la categoría *representación tabular* se consideran aquellos episodios que hacen referencia a la tabla de valores empleada para recoger las coordenadas de puntos pertinentes a la parábola (Tabla 3.12).

Tabla 3.12. Ejemplos de episodios clasificados en la categoría *representaciones (tabular)*

Mónica: Y después hace una tabla de coordenadas y le da varios valores a la x y después va calculando los valores que tiene y en esta parábola.
Zahira: Esta parte yo creo que está bien, ¿no? Porque así va sacando puntos de la parábola que puede utilizar para luego la intersección, luego poder coger varios puntos. **Mónica:** Sí.

Dentro de *representación simbólica* se consideran todos aquellos episodios que traten de los cálculos o de expresiones concretas realizadas en lenguaje algebraico (Tabla 3.13).

Se consideran episodios en la categoría *representación verbal* aquellos que hacen referencia a justificaciones o explicaciones con palabras, ya sean que se encuentran en la resolución o que señalan su ausencia (Tabla 3.14).

Tabla 3.13. Ejemplos de episodios clasificados en la categoría *representaciones (simbólica)*.

Sandra: A ver, voy a ver si los cálculos están bien. ¿Y aquí la *a* la dejó atrás? El signo del discriminante es lo que te importa, esto está aquí. **David:** Hasta aquí está perfecto, o sea, que no se ha equivocado en los cálculos ni nada. **Sandra:** ¿Cómo que no se ha equivocado en los cálculos? Aquí le falta una a, aquí abajo. **David:** No, esto es 2 por 1. Porque la variable es a.
Marta: Entonces, una vez resuelve la inecuación y despeja el valor de a, que le queda en función de b. Luego intenta calcular… bueno, o… **Manuel:** Seguir estudiando, por casos, en función de los valores que puede asignarle a b. Eso es lo que intenta. Y se queda en el primero. **Marta:** Pero es que, por ejemplo, calcula para b igual 0. Pero no se da cuenta que la b=0 no cumple la inecuación. **Manuel:** Claro, es que aquí… Porque si llegas hasta aquí más o menos bien, si b es igual a cero…
Yaiza: Ah, vale, vale. Y entonces aquí, cuando es tres, lo pasó para aquí… Para resolverlo por la ecuación. Y halló los dos puntos. Pero espera, ¿por qué le dio eso 2 y esto 2 y te pone el 4?… Pero, ¿cómo llega luego aquí? O sea, ¿para qué necesitaba lo anterior?

Tabla 3.14. Ejemplos de episodios clasificados en la categoría *representaciones (verbal).*

Sandra: Lo que parece que lo tiene explicado, pero después te das cuenta que no lo tiene explicado, lo que está haciendo. O sea, eso está bien, todo esto bien, pero aquí otra vez escribe exactamente lo mismo y sin sentido.
Manuel: Si hubiera intentado detallar con palabras qué estaba haciendo, qué estaba intentando… podríamos seguir el razonamiento. Pero hay un momento que yo no puedo seguirlo y no sé por qué hace las cosas que hace.
Yurena: ¿Qué más? **Judith:** Bueno, a parte de lo positivo, yo diría que es bastante claro. Que no se pierde, que no escribe en diferentes sitios lo mismo,... **Yurena:** Sí, bien redactado.

En cuanto a la categoría *soluciones,* se codifica un episodio en esta categoría cuando en el mismo se comentan o analizan aspectos concretos de las soluciones, por ejemplo, si simplemente las indican (Tabla 3.15a), si valoran si son correctas (Tabla 3.15b) o si echan en falta alguna solución (Tabla 3.15c-d).

Tabla 3.15. Ejemplos de episodios clasificados en la categoría *soluciones.*

Yurena: Y pone dos ejemplos de rectas. **Judith:** Sí. Pone una recta, tal… Y otra que pasa por el punto 5.	a
Mónica: Entonces estaría perfecto, porque ha encontrado tres rectas que intersectan a la parábola en dos puntos.	b
Manuel: En cualquier caso, yo le veo cosas. Que ni siquiera llega a especificar una solución concreta. Porque queda un poco genérico. **Marta:** No, y aparte, yo por ejemplo creo que está dando como solución la b igual cero y en verdad no es solución, porque ni siquiera cumple lo que él puso (o ella).	c
Zahira: Es verdad que para llegar a una forma general y demostrarlo realmente, que se verifica para todos los puntos que contenga la parábola, a lo mejor sí sería mejor.	d

En la categoría *comprobación de soluciones* se incluirán episodios donde hablen de la comprobación presente en la resolución evaluada (Tabla 3.16a) o expresen que echan en falta alguna comprobación (Tabla 3.16b-c). No pertenecen a esta categoría aquellos episodios referentes a los cálculos realizados durante el proceso de comprobación y que serán clasificados en la categoría *representación simbólica.*

Tabla 3.16. Ejemplos de episodios clasificados en la categoría *comprobación de soluciones*.

Sofía: Y luego aquí simplemente lo comprueba, ¿no? ¿O estas son distintas? No, vale, está comprobando que las que había dado… **Francisco:** Tienen dos soluciones. Vale. Quizás ni siquiera hacía falta, pero vale. Está bien. **Sofía:** Sí, sí. Realmente, está bien que lo compruebe, pero…	a
Marta: Es que yo creo que luego él no comprueba cuando la b es cero. **Manuel:** No, no, no sé. No sé cómo, ni cuando procedía…	b
Zahira: Pero le faltaría esto del final. Comprobar que es cierto esto, lo de que todas las rectas de la forma y=mx+5 y que cumplen los otros puntos también esta recta, ¿no?	c

Por último, en la categoría *errores* se incluirán episodios que hagan referencia a los errores realmente cometidos por el resolutor (Tabla 3.17). No se tendrán en cuenta en esta categoría aquellos errores que los evaluadores, incorrectamente, atribuyan a la resolución evaluada.

Tabla 3.17. Ejemplos de episodios clasificados en la categoría *errores*.

David: Puso aquí mayor o igual que cero, pero tiene que ser mayor que cero, porque si se queda igual, te queda una solución doble y entonces eso es un corte solo. Bueno, a ver si después se da cuenta.
David: Y aquí sigue con lo de "tendrá sentido cuando sea mayor o igual que cero" **Sandra:** Lo mismo que había dicho aquí. **David:** Claro. No se ha dado cuenta de que con lo de igual a cero… Bueno, no sé si se ha dado cuenta o lo escribió en la hoja por inercia, cuando vea el problema te lo puedo decir mejor.

Además, se añadió una nueva categoría denominada *otros*. Pues se encontraron episodios en los que no hacían referencia a ninguna de las categorías establecidas. Estos episodios se clasifican en dos grupos: los que hacen referencia a la resolución evaluada pero no son clasificables en las categorías anteriores (otorgar una calificación a la resolución o evaluarla de manera global (Tabla 3.18a-b-c)) y los que hacen referencia a otros aspectos ajenos a las resoluciones (enunciado del problema (Tabla 3.18d-e), dudas sobre el propio proceso de evaluación (Tabla 3.18f), el tiempo disponible para resolver (Tabla 3.18g)).

Tabla 3.18. Ejemplos de episodios clasificados en la categoría *otros*.

Antonio: Tenemos que evaluarlo, se supone. ¿Qué le pones?, ¿un 5?	a
Yaiza: Y por tanto, ¿tiene un 10?	b
Francisco: ¿Qué ponemos? ¿Que está perfecto y ya está?	c
David: Sí, pero en el enunciado del problema, si no recuerdo mal, te dice que tienes que dar dos rectas que corten dos veces.	d
Zahira: Hombre, no me queda claro, si con el enunciado lo que te pide es una forma general de todas las rectas o especificar alguna en concreto.	e
Yaiza: Yo no sé cómo evaluar. No sé si poner está bien o está mal, o describir lo que la persona está haciendo. Pero es que a eso no le veo sentido, ¿no?	f
Zahira: Hombre, es verdad, que tampoco mucho tiempo dio.	g

Uso de la propia resolución en la evaluación de un par

Cuando los evaluadores discuten sobre alguna de las categorías anteriores, sus comentarios pueden estar referidos tanto a la resolución evaluada como a sus propias resoluciones, información que se recoge en una nueva variable de análisis. La codificación de esta variable puede tomar tres valores, que se corresponden con cada una de las tres resoluciones involucradas en cada caso: la del participante evaluado y/o la de alguno de los dos evaluadores. Quedan excluidos de esta nueva clasificación aquellos episodios de la categoría *otros* que no hacen referencia a aspectos propios de los procesos de resolución (enunciado del enunciado del problema, dudas sobre el propio proceso de evaluación, tiempo disponible para resolver).

Así, en la codificación de cada episodio se indica a qué resolución o resoluciones se está haciendo referencia, pudiendo ser solo una (Tabla 3.19a) o varias (Tabla 3.19b).

Tabla 3.19. Ejemplos de episodios en los que hace referencia a una o varias resoluciones.

Marta: Yo primero hice 2. Puse y=6 y y=7. Lo comprobé. Y dije, si te das cuenta, para y=n esto también te sirve.	a
Manuel: No, es que… Claro. Yo no encontré todas las soluciones. **Marta:** Ah no. Yo tampoco. **Manuel:** Yo hice una cosa muy sencilla pero no tiene nada que ver con esto. Yo encontré infinitas soluciones que eran todas paralelas al eje horizontal. **Marta:** Yo también. Yo me quedé ahí. Tú porque no te cabían más.	b

En algunas ocasiones se hace una mención explícita a las resoluciones de los propios evaluadores (Tabla 3.19); en otras ocasiones la mención es implícita. En esta parte del análisis es donde más importancia recobra el uso de las 16 resoluciones del problema como datos secundarios, puesto que permite identificar momentos en los que los evaluadores están haciendo referencia a sus propias resoluciones.

Por ejemplo, el episodio de la Tabla 3.20 muestra una parte de la discusión mantenida entre Yaiza y Maite (Caso 7) mientras evalúan la resolución de Sofía (E15). Para dar contexto a la situación presentada: Yaiza (E12), en su resolución, representó gráficamente la parábola (Figura 4.1.64), mostrando que no tiene puntos de intersección con el eje de abscisas y corta al eje de ordenadas en el punto (0,5); la resolución de Sofía (E15) no incluye ninguna representación gráfica, toda la resolución la hace empleando las representaciones simbólica y verbal (sección 4.1.15). En el episodio mostrado como ejemplo, Yaiza explica a su compañera qué ocurre con los puntos de corte de la parábola con los ejes, lo que muestra que no se está refiriendo a ninguno de los aspectos de la resolución evaluada sino, de manera implícita, a su propia resolución.

Tabla 3.20. Ejemplo donde una evaluadora hace referencia implícita a su propia resolución.

Yaiza: Porque además la parábola en x no cortaba. En el y cortaba en 5. **Maite:** ¿En el y? **Yaiza:** En el y cortaba en el 5, o sea, que no cortaba en el cero. Y la x no tenía nada.

Este análisis nos permite estudiar de qué manera los futuros docentes usan sus propias resoluciones para evaluar la resolución de sus compañeros.

Carácter de los episodios

La tercera y última característica que se codificó en cada episodio fue el carácter de las intervenciones realizadas por la pareja evaluadora. Para esta variable se consideraron tres categorías, distinguiendo tres tipos de episodios: *Interpretativo*, *valorativo* y *expositivo.* Estas categorías se han definido a partir de las descritas por vas Es y Sherin (2010) al observar cómo profesores de educación primaria analizaron aspectos de su práctica docente (describiendo, interpretando o evaluando). Estas autoras clasificaron en *describir* aquellas intervenciones donde se relatan hechos ocurridos; en *evaluar* aquellas afirmaciones en las que los docentes comentaban lo que estaba bien o mal o lo que se debería haber hecho de otra manera; y en *interpretar* incluyeron las intervenciones donde los profesores intentaron hacer inferencias sobre lo que observaron, es decir, a partir de lo que observaban formularon hipótesis sobre por qué estaba ocurriendo. Así, para esta investigación se establece que un episodio es:

- *Interpretativo*: cuando los participantes hacen inferencias sobre lo que observan en la resolución que están evaluando (Tabla 3.21a) o intentan comprender alguno de los pasos dados en ella (Tabla 3.21b)

Tabla 3.21. Ejemplos de episodios con carácter *interpretativo.*

Sandra: Está cambiando la pendiente de la recta. **David:** Sí, el ratio en el que hay dos puntos. **Sandra:** Intentando ver si es para arriba o para abajo.	a
Antonio: Esta parte no la entiendo muy bien. ¿Sacó dos puntos, los unió y creó la recta? **Javier:** Claro. Sacó dos puntos que pertenecen a la parábola. **Antonio:** Vale, sí. Creó la recta con los puntos. **Javier:** Sí **Antonio:** ¿Un punto y el vector director? Es que no, ¿es otro método? Es que no lo entiendo. **Javier:** No, no. Al igual que el primero	b

- *Valorativo*: cuando declaran que algo es correcto o incorrecto (Tabla 3.22a-b) o destacan aspectos que, a su juicio, faltan en la resolución evaluada (Tabla 3.22c-d).

Tabla 3.22. Ejemplos de episodios con carácter *valorativo.*

Yaiza: Pero la solución está bien. **Maite:** Hecho está.	a
Maite: Sí, claro, pero no me cuadra este tres. Debería haber un 5. **Yaiza:** Se equivocó. Claro, los dos puntos de intersección que obtuvo están mal. Creo yo. **Maite:** Sí, sí, por eso.	b
Yaiza: Pero no me explica cómo llegó a esta ecuación y a esta ecuación.	c
Zahira: Pero tampoco demuestra que los otros puntos verifican esta ecuación. Entonces yo creo que ahí también faltaría esa parte. Porque tú realmente lo que quieres es que se corten en dos puntos. Entonces, también se tiene que verificar que el otro punto dé la igualdad.	d

- *Expositivo*: Cuando leen o describen partes de la resolución (Tabla 3.23a-b) o cuando explican algún aspecto de su propia resolución sin que interfiera en el proceso de evaluación (Tabla 3.23c-d).

Tabla 3.23. Ejemplos de episodios con carácter *expositivo.*

Yurena: Y ahora “queremos dos rectas con dos puntos de intersección con la parábola”	a
Yolanda: En primer lugar hace lo de las rectas paralelas al eje x.	b
Marta: Yo primero hice 2. Puse y=6 y y=7. Lo comprobé. Y dije, si te das cuenta, para y=n esto también te sirve.	c
Javier: A ver, yo no supe terminar de hacerlo. **Antonio:** Yo tampoco lo acabé.	d

El carácter es atribuible a todos los episodios de las categorías *heurísticos, casos estudiados, representaciones, soluciones, comprobación de soluciones* y *errores*. En cuanto a la categoría *otros*, encontramos dos tipos de episodios: los que hacen referencia a la resolución evaluada pero no son clasificables en las categorías anteriores y los que hacen referencia a otros aspectos ajenos a las resoluciones. De estos episodios, únicamente se podrá asignar carácter a aquellos que hacen referencia a las resolución evaluada (otorgar una calificación a la resolución o evaluarla de manera global) y no a aquellos relacionados con aspectos externos (enunciado del problema, dudas sobre el propio proceso de evaluación, el tiempo disponible para resolver).

La Figura 3.13 (fragmento extraído del Anexo A.2.1) muestra un ejemplo de codificación. Se trata de la transcripción de una parte de la discusión mantenida entre Marta y Manuel al evaluar la resolución de su compañero Antonio (Caso 2). En ella se puede ver la división por episodios y, en cada uno de ellos, la categoría a la que se refiere, la resolución o resoluciones con la que está relacionado y su carácter.

	TRANSCRIPCIÓN	SOLUCIÓN A LA QUE SE REFIEREN			CATEGORÍAS								
		Evaluado Antonio	Evaluadora Marta	Evaluador Manuel	HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDIADOS	REPRESENTACIONES			SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
Nº episodio							Gráfica	Simbólica	Verbal				
1	Marta: Yo no lo entiendo. Manuel: Yo tampoco. Marta: Es que lo primero que hizo sí. Manuel: Sí. Igualar las ecuaciones. Marta: Igualar las ecuaciones. Manuel: Sí. Hasta ahí lo entiendo.	X			I								
2	Marta: Pero aquí ya no. Aquí ya me pierdo un poco. Dice que resolvemos la ecuación de segundo grado y, ¿tiene que encontrar dos valores distintos? ¿Qué es lo que significa? Manuel: Sí, pero… Marta: Pero cuando encuentra dos valores […] una recta… Manuel: Sí. Exacto. Marta: …que se intersecta. ¿Pero cómo sabe que es dos veces?	X							I				
3	Manuel: No, es que… Claro. Yo no encontré todas las soluciones. Marta: Ah no. Yo tampoco. Manuel: Yo hice una cosa muy sencilla pero no tiene nada que ver con esto. Yo encontré infinitas soluciones que eran todas paralelas al eje horizontal. Marta: Yo también. Yo me quedé ahí. Tú porque no te cabían más.		X	X						E			
4	Manuel: Lo digo porque este enfoque para mí no es el que… yo quería pasar por ahí y luego generalizar. Pero no llegué a generalizar, no sé si por falta de tiempo o […]	X		X	E								
5	Manuel: Ese se me queda un poco lejos, porque además no lo veo. No veo bien que fuera eso. No me suena bien en principio pero no digo que no.	X						V					
6	Marta: No es que… al tampoco representar nada gráficamente también yo creo que cuesta mucho más.	X	X		V								

Figura 3.13. Ejemplo de codificación.

Capítulo 4

ANÁLISIS DE LOS DATOS. PRIMERA FASE

En este capítulo se presenta el análisis de los datos de la primera fase de la investigación: las resoluciones del problema. En primer lugar, se muestra un estudio individual de cada resolución, mostrando, primero, de forma descriptiva los pasos seguidos por cada estudiante y, posteriormente, el estudio de cada resolución atendiendo a las categorías de análisis (heurísticos, casos estudiados, representaciones, soluciones, comprobación de las soluciones y errores). En segundo lugar, se muestra un análisis conjunto de todas las respuestas con foco, también, en las categorías de análisis, con el propósito de encontrar similitudes y diferencias entre ellas.

4.1. Análisis individual de las resoluciones

En esta sección se presenta el análisis detallado de cada una de las resoluciones entregadas por los 16 participantes. En primer lugar, se expone un análisis descriptivo, donde se examinan en detalle los pasos seguidos por el estudiante en su proceso de resolución. Y, en segundo lugar, se estudia la resolución atendiendo a las categorías de análisis: *heurísticos*, *casos estudiados*, *representaciones*, *soluciones*, *comprobación de las soluciones* y *errores.* Algunos resultados preliminares de este análisis fueron publicados en los trabajos de-Armas-González et al. (2022a, 2022b). El primero de ellos se centró, principalmente, en dos aspectos de las resoluciones. Por un lado, se analizó la estrategia elegida para su resolución, diferenciando si intentaban encontrar condiciones generales para todas las rectas solución posibles o si, por el contrario, intentaban encontrar soluciones de rectas particulares. Por otro lado, se analizó si hacían uso de la representación gráfica de la parábola o si solo incluían representaciones simbólicas en todo el proceso. En el segundo trabajo se profundizó en las diferentes estrategias utilizadas para encontrar tanto las rectas particulares como generales, así como en los errores cometidos en la representación gráfica de la parábola.

4.1.1 Resolución de Antonio (E1)

Descripción de la resolución de Antonio

Antonio comienza considerando la ecuación explícita de una recta, $y=ax+b$, e igualándola a la ecuación de la parábola dada en el enunciado (Figura 4.1.1). Transpone los términos del segundo al primer miembro de la ecuación, cometiendo un error con el signo del parámetro b que arrastra a lo largo de toda la resolución.

Para ver que rectas cortan a la parábola tomaremos la ecuación general de una recta cualquiera $y=ax+b$ y la igualaremos a la ecuación de la parábola.

$$x^2+4x+5=ax+b \Rightarrow x^2+(4-a)x+(5+b)=0$$

Figura 4.1.1. Igualación de la recta *y*=*ax*+*b* y la parábola. Resolución de Antonio.

A continuación, resuelve la ecuación de segundo grado resultante en función de los parámetros a y b, afirmando que, en los casos que la ecuación tenga dos soluciones, la recta y la parábola tendrán dos puntos de intersección (Figura 4.1.2). Señala, también, que esto ocurrirá cuando el discriminante de la ecuación sea mayor que cero.

A continuación resolvemos la ecuación de segundo grado y cuando haya dos soluciones para valores de a y b, significará que la recta intersecta a la parábola en dos puntos (salvo cuando la solución sea doble.

$$x=\frac{-(4-a)\pm\sqrt{(4-a)^2-4\cdot 1\cdot(5+b)}}{2}$$

cuando lo de dentro de la raíz sea mayor que cero habrá dos soluciones

Figura 4.1.2. Resolución de la ecuación segundo grado. Resolución de Antonio.

Plantea, entonces, la inecuación para que dicho discriminante sea mayor que cero, cometiendo un nuevo error al expandir la expresión $(4-a)^2$, escribiendo $4a$ donde debería escribir $8a$ (Figura 4.1.3). Para resolver dicha inecuación, intenta obtener los valores del parámetro a en términos de b. Para ello, calcula los valores para los que se cumple la igualdad, equivocándose nuevamente escribiendo $16b$ donde debería escribir $32+16b$, según su resolución (Figura 4.1.3).

$$16-4a+a^2-20-4b \geq 0; \quad a^2-4a-4(b+1)>0$$

$$a=\frac{4\pm\sqrt{16\cancel{a}+4\cdot 4\cdot(b+1)}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{+16b}}{2}=2\pm 2\sqrt{+b}$$

Figura 4.1.3. Resolución de la inecuación del discriminante. Resolución de Antonio.

Por último, estudia los valores que se obtienen para *a* en función de los posibles valores de *b*. Comienza analizando el caso *b*=0 (Figura 4.1.4). Reescribe la inecuación del discriminante sustituyendo dicho valor de *b*, resuelve la ecuación correspondiente de considerar la igualdad y determina gráficamente en la recta real, sin recoger ningún cálculo, el signo que tendría la expresión algebraica de la inecuación en cada uno de los tres intervalos en los que se dividen los posibles valores de *a*. Teniendo en cuenta los signos obtenidos, indica los valores solución de *a* para el caso *b*=0.

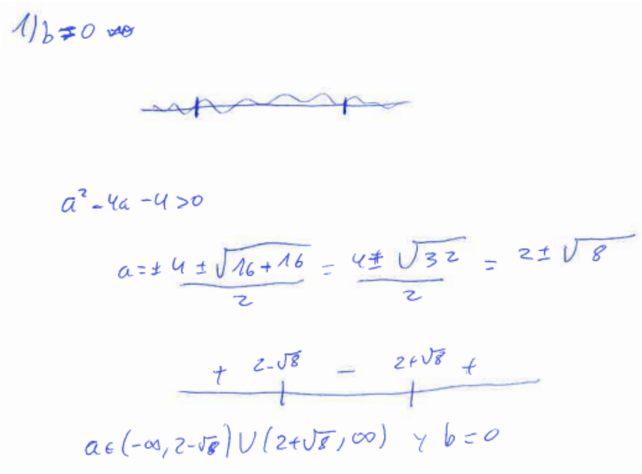


Figura 4.1.4. Búsqueda de los valores de *a* para b=0. Resolución de Antonio.

El caso b<0, aparece tachado y no lo desarrolla (Figura 4.1.5), quizás porque se da cuenta de que se obtendría la raíz cuadrada de un número negativo (Figura 4.1.3). Estudia, entonces, el caso b>0. Considera los valores que anulan el primer discriminante (Figura 4.1.2), $2 - 2\sqrt{b}$ y $2 + 2\sqrt{b}$ según sus cálculos, y estudia el signo que tendría la expresión algebraica de la inecuación en cada uno de los tres intervalos en los que queda dividida la recta real (Figura 4.1.5). Para ello, sustituye el valor $-2\sqrt{b}$, que es menor que $2 - 2\sqrt{b}$ y que se encontraría en el primero de los tres intervalos, en la expresión algebraica del primer discriminante (Figura 4.1.2) e indica que la expresión obtenida es mayor que cero, sin justificarlo (Figura 4.1.5). De hecho, esta conclusión es errónea ya que, por ejemplo, para b=⅕ el resultado es menor que cero. Este es el único cálculo que realiza para determinar el signo en los intervalos. Termina su resolución indicando los valores de *a* para los que el discriminante es mayor que cero en función del parámetro b, cuando b>0.

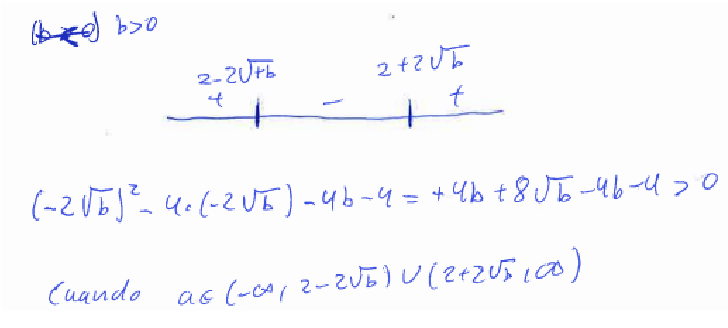


Figura 4.1.5. Búsqueda de los valores de *a* para b>0. Resolución de Antonio.

<u>Análisis de la resolución de Antonio</u>

Atendiendo a las categorías de análisis, Antonio hace uso del *heurístico suponer el problema resuelto*, ya que considera una recta general, $y=ax+b$, y busca las condiciones que deben cumplir los parámetros *a* y *b* para que cumpla el enunciado del problema.

El *caso estudiado* por Antonio es la ecuación explícita de una recta, $y=ax+b$.

En cuanto a las *representaciones* utilizadas, hace uso de la *representación simbólica* y la *representación verbal*. La primera la utiliza para presentar las ecuaciones y para expresar los cálculos necesarios en la búsqueda de condiciones (Figuras 4.1.1-4.1.5). La segunda de ellas se observa cuando explica los pasos que va a realizar (Figuras 4.1.1 y 4.1.2).

Antonio obtiene como soluciones las rectas *y=ax+b* con $a \in (-\infty, 2-\sqrt{8}) \cup (2+\sqrt{8}, \infty)$ y b=0; y las rectas *y=ax+b* con $a \in (-\infty, 2-2\sqrt{b}) \cup (2+2\sqrt{b}, \infty)$ y b>0. Estas soluciones no son correctas debido a los errores que comete a lo largo de su resolución. Además, no realiza ninguna *comprobación de las soluciones*.

Por último, como se ha ido observando, comete tres *errores* de cálculo: transponiendo los términos en la primera ecuación planteada (Figura 4.1.1), resolviendo $(4-a)^2$ y $16+4\cdot 4(b+1)$ (Figura 4.1.3), y afirmando que $4b+8\sqrt{b}-4b-4>0$ (Figura 4.1.5). Estos errores hacen que las soluciones también sean incorrectas.

En la Tabla 4.1.1 se muestra un resumen de la resolución de Antonio atendiendo a las categorías de análisis.

Tabla 4.1.1. Resumen de la resolución de Antonio.

Heurísticos	1. Suponer el problema resuelto
Casos estudiados	*y=ax+b*
Representaciones	Simbólica y verbal
Soluciones	*y=ax+b,* con $a \in (-\infty, 2-\sqrt{8}) \cup (2+\sqrt{8}, \infty)$ y b=0 *y=ax+b,* con $a \in (-\infty, 2-2\sqrt{b}) \cup (2+2\sqrt{b}, \infty)$ y b>0
Comprobación de soluciones	No
Errores	Transponiendo los términos en la primera ecuación planteada (Figura 4.1.1) Resolviendo $(4-a)^2$ y $16+4\cdot 4(b+1)$ (Figura 4.1.3) Afirmando que $4b+8\sqrt{b}-4b-4>0$ (Figura 4.1.5)

4.1.2 Resolución de Victoria (E2)

<u>Descripción de la resolución de Victoria</u>

Victoria resuelve el problema de forma similar a Antonio (E1). Comienza considerando la ecuación explícita de una recta, *y=ax+b*, e indicando que los puntos de intersección deben verificar tanto la ecuación de la recta como la de la parábola (Figura 4.1.6).

Sabemos que una recta debe tener la forma $y = ax + b$

~~Si queremos que~~ haya dos puntos de intersección deben verificar ambas ecuaciones.

$y = ax + b$

$y = x^2 + 4x + 5$

Figura 4.1.6. Establecimiento de la recta *y=ax+b*. Resolución de Victoria (E2).

Iguala ambas ecuaciones, obteniendo una ecuación de segundo grado que resuelve en función de los parámetros *a* y *b* de la ecuación de la recta (Figura 4.1.7).

Por lo que $ax + b = x^2 + 4x + 5 \Rightarrow x^2 + (4-a)x + 5 - b = 0$

Resolvemos.

$$x = \frac{(a-4) \pm \sqrt{(4-a)^2 - 4(5-b)}}{2} = \frac{(a-4) \pm \sqrt{16 - 8a + a^2 - 20 + 4b}}{2} =$$

$$= \frac{(a-4) \pm \sqrt{a^2 - 8a - 4 + 4b}}{2}$$

Figura 4.1.7. Igualación de la recta *y=ax+b* y la parábola. Resolución de la ecuación de segundo grado. Resolución de Victoria.

A continuación, analiza las soluciones en función de diferentes valores del discriminante de la ecuación cuadrática. Afirma que si el discriminante es igual a cero, solo existiría un punto de intersección (Figura 4.1.8).

Analicemos esta solución: Si el discriminante $(a^2 - 8a - 4 + 4b)$ es igual a cero solo tendríamos un valor para el cual la recta se corta con la parábola.

$a^2 - 8a - 4 + 4b = 0$

Figura 4.1.8. Estudio de las soluciones de la ecuación para el discriminante nulo. Resolución de Victoria.

Afirma también, que si el discriminante no es igual a cero, serían dos los puntos de corte, descartando por ello los valores para los que el discriminante es nulo (Figura 4.1.9). Esta afirmación es incorrecta ya que si el discriminante es menor que cero no existen puntos de intersección entre la recta y la parábola, caso que no tiene en cuenta.

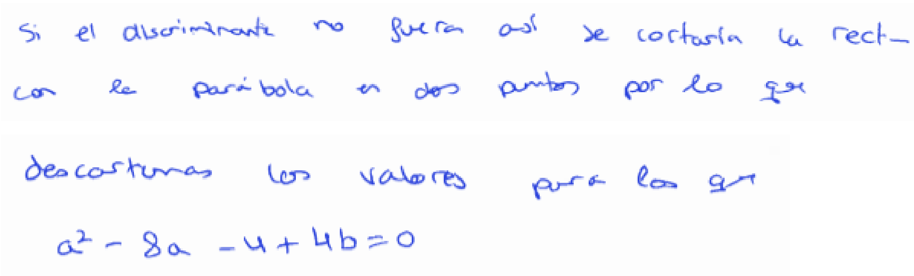


Figura 4.1.9. Estudio de las soluciones para el discriminante no nulo. Resolución de Victoria.

Por último, concluye que las rectas que tienen dos puntos de intersección con la parábola son aquellas rectas de la forma *y=ax+b*, que verifican que el discriminante es distinto de cero (Figura 4.1.10), manteniendo el error mencionado anteriormente. Con esto, Victoria finaliza su resolución.

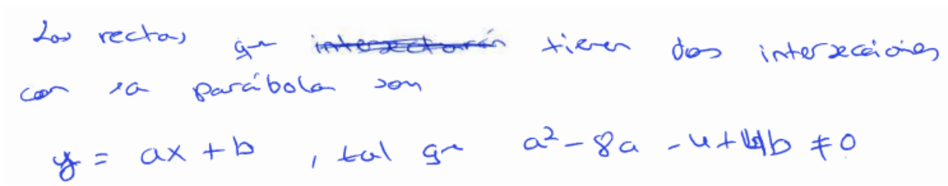


Figura 4.1.10. Presentación de soluciones con las condiciones para *a* y *b*. Resolución de Victoria.

Análisis de la resolución de Victoria

Atendiendo a las categorías de análisis, el *heurístico* utilizado por Victoria es *suponer el problema resuelto*, pues considera una recta general, *y=ax+b*, y busca las condiciones que deben verificar *a* y *b* para que cumpla el enunciado del problema.

El *caso estudiado* por Victoria es la ecuación explícita de una recta, *y=ax+b*.

En cuanto a las *representaciones*, hace uso de la *representación simbólica* y la *representación verbal*. La primera la utiliza para presentar las ecuaciones y para realizar los cálculos necesarios en la búsqueda de condiciones para los parámetros *a* y *b* (Figuras 4.1.6-4.1.10). La segunda de ellas aparece para justificar tanto los pasos que realiza como para indicar las rectas que son y las que no son soluciones del problema (Figuras 4.1.6-4.1.10).

Victoria da como soluciones las rectas *y=ax+b* con $a^2 - 8a - 4 + 4b \neq 0$, condición que no es correcta como ya se ha comentado. Además, no realiza ninguna *comprobación de las soluciones* obtenidas.

Por último, comete un *error* al afirmar que cuando el discriminante es distinto de cero las rectas y la parábola tendrán dos puntos de intersección, incluyendo en sus soluciones las rectas que no cortan a la parábola en ningún punto, resultantes de los valores de *a* y *b* que hacen que el discriminante sea menor estricto que cero.

En la Tabla 4.1.2 se muestra un resumen de la resolución de Victoria atendiendo a las categorías de análisis.

Tabla 4.1.2. Resumen de la resolución de Victoria.

Heurísticos	1. Suponer el problema resuelto
Casos estudiados	*y=ax+b*
Representaciones	Simbólica y verbal
Soluciones	*y=ax+b,* con $a^2 - 8a - 4 + 4b \neq 0$
Comprobación de soluciones	No
Errores	No descarta las soluciones que hacen el discriminante menor que cero y que, por tanto, no tienen puntos de intersección con la parábola.

4.1.3 Resolución de David (E3)

<u>Descripción de la resolución de David</u>

David comienza su resolución de la misma forma que lo hacen Antonio (E1) y Victoria (E2). Considera la ecuación explícita de una recta, *y=ax+b*, y plantea el sistema de ecuaciones entre esta recta y la parábola (Figura 4.1.11).

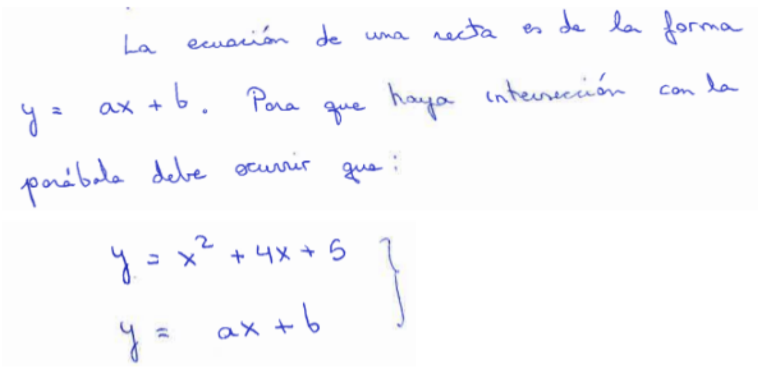


Figura 4.1.11. Sistema de ecuaciones entre la ecuación de una recta *y=ax+b* y la parábola. Resolución de David.

Iguala ambas ecuaciones y resuelve la ecuación de segundo grado resultante en función de los parámetros *a* y *b* de la recta (Figura 4.1.12).

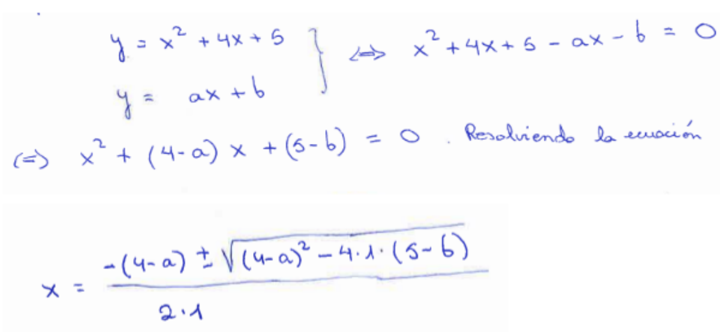


Figura 4.1.12. Resolución del sistema de ecuaciones. Resolución de David.

A continuación, afirma que para que existan dos soluciones reales, esto es, que la recta y la parábola tengan dos puntos de intersección, el discriminante de la ecuación cuadrática debe ser mayor que cero. Así, obtiene una relación para los valores de *a* y *b* (Figura 4.1.13).

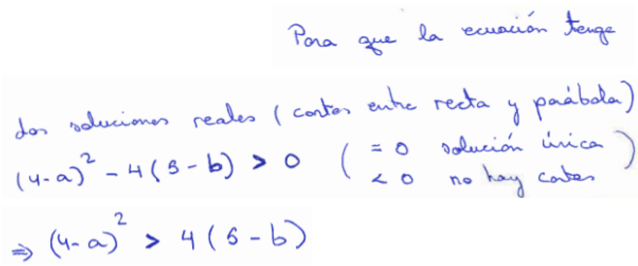


Figura 4.1.13. Resolución de la inecuación del discriminante. Resolución de David.

A partir de este punto, la resolución de David (E3) se diferencia de las de Antonio (E1) y Victoria (E2), pues plantea dos valores concretos de *a* y *b* que cumplan la inecuación, comprobando que se cumple la condición encontrada, y construye las ecuaciones de las rectas correspondientes a dichos valores de *a* y *b* (Figura 4.1.14).

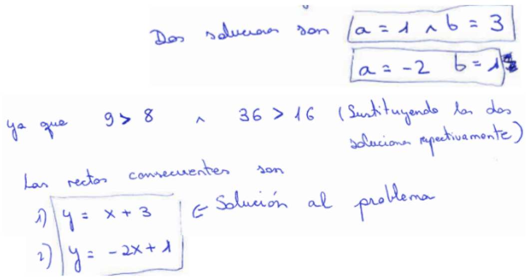


Figura 4.1.14. Presentación de dos rectas particulares. Resolución de David.

Por último, verifica que estas dos rectas tienen, cada una, dos puntos de intersección con la parábola, planteando el sistema de ecuaciones y calculando los puntos de corte (Figura 4.1.15). Las coordenadas de los puntos de corte de la segunda recta con la parábola son incorrectas, pues la segunda coordenada en ambos puntos es errónea. Con estas comprobaciones termina su resolución.

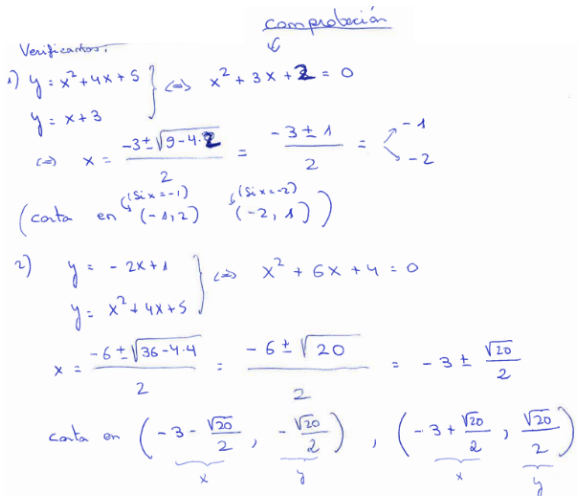


Figura 4.1.15. Comprobación de las soluciones. Resolución de David.

Análisis de la resolución de David

En relación con las categorías de análisis, David utiliza dos *heurísticos*: *suponer el problema resuelto* y *ensayo y error*. Su proceso de resolución comienza con el *heurístico suponer el problema resuelto,* tomando una recta general, *y=ax+b*, y buscando las condiciones para *a* y *b* que hacen que cumpla el enunciado del problema. Llegado un punto de este proceso, utiliza el *heurístico ensayo y error* para obtener dos valores concretos de *a* y *b* que cumplan las condiciones obtenidas anteriormente y construir las rectas correspondientes.

Los *casos estudiados* por David son la ecuación explícita de una recta, *y=ax+b*, que deja incompleto y analiza dos rectas particulares: *y=x+3* e *y=-2x+1*.

El alumno utiliza la *representación simbólica* para presentar las ecuaciones (Figuras 4.1.11 y 4.1.14), para realizar los cálculos necesarios en la búsqueda de condiciones (Figuras 4.1.12 y 4.1.13) y en la verificación de las soluciones (Figura 4.1.15). Y la *representación verbal* la usa para indicar los pasos que va a dar y para mostrar las conclusiones de sus cálculos (Figuras 4.1.11-4.1.15).

David da como *soluciones* las rectas *y=x+3* e *y=-2x+1*. Y realiza la *comprobación* de ambas rectas.

Por último, comete un *error* al calcular los puntos de corte de la recta *y=-2x+1* con la parábola, siendo incorrecta la segunda coordenada de ambos puntos de intersección.

En la Tabla 4.1.3 se muestra un resumen de la resolución de David atendiendo a las categorías de análisis.

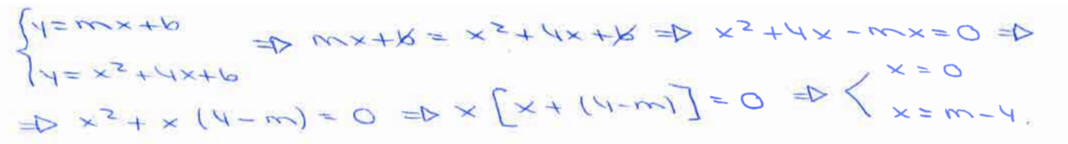
Tabla 4.1.3. Resumen de la resolución de David.

Heurísticos	1. Suponer el problema resuelto 2. Ensayo y error
Casos estudiados	*y=ax+b* *y=x+3* *y=-2x+1*
Representaciones	Simbólica y verbal
Soluciones	*y=x+3* *y=-2x+1*
Comprobación de soluciones	*y=x+3* *y=-2x+1*
Errores	Segunda coordenada de los puntos de intersección de la recta *y=-2x+1* y la parábola.

4.1.4 Resolución de Yolanda (E4)

<u>Descripción de la resolución de Yolanda</u>

Yolanda comienza la resolución planteando el sistema de ecuaciones entre la ecuación explícita de una recta, *y=mx+b*, y la ecuación de la parábola (Figura 4.1.16), igual que Antonio (E1), Victoria (E2) y David (E3). Como puede verse en la Figura 4.1.16, la estudiante se equivoca al transcribir la ecuación de la parábola, tomando como término independiente de esta el parámetro *b*, haciéndolo coincidir con el término independiente de la ecuación explícita de la recta que ha considerado. Iguala ambas ecuaciones y resuelve la ecuación de segundo grado resultante en función de *m*, puesto que, debido al error cometido, el parámetro *b* se elimina (Figura 4.1.16).



$$\begin{cases} y=mx+b \\ y=x^2+4x+b \end{cases} \Rightarrow mx+\cancel{b}=x^2+4x+\cancel{b} \Rightarrow x^2+4x-mx=0 \Rightarrow$$

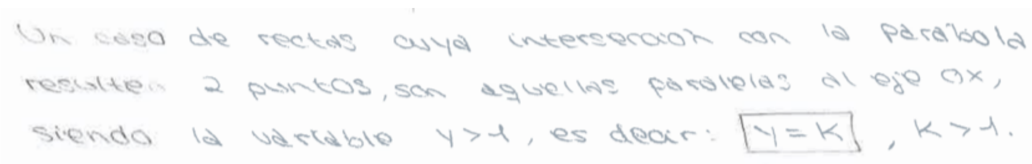
$$\Rightarrow x^2+x(4-m)=0 \Rightarrow x\left[x+(4-m)\right]=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=m-4. \end{cases}$$

Figura 4.1.16. Sistema de ecuaciones entre la ecuación de una recta *y=mx+b* y la parábola (error de transcripción). Resolución de Yolanda.

Entonces, cambia de estrategia y realiza la representación gráfica de la parábola. Sin indicar ningún tipo de cálculo, señala varios puntos de la parábola en unos ejes de coordenadas cartesianos y la representa gráficamente apoyándose en dichos puntos (Figura 4.1.17).

Figura 4.1.17. Representación gráfica de la parábola. Resolución de Yolanda.

Por último, afirma que las rectas paralelas al eje OX de la forma *y=k*, con *k*>1, tienen dos puntos de intersección con la parábola (Figura 4.1.18). Finalizando así su resolución.



Un caso de rectas cuya intersección con la parábola resulte 2 puntos, son aquellas paralelas al eje OX, siendo la variable $y>1$, es decir: $\boxed{y=k}$, $k>1$.

Figura 4.1.18. Presentación de soluciones horizontales. Resolución de Yolanda.

Análisis de la resolución de Yolanda

Analizando la resolución según las categorías de análisis, observamos que Yolanda hace uso de dos *heurísticos* independientes. Comienza con el *heurístico suponer el problema resuelto* al tomar una recta general e intentar buscar las condiciones que deben cumplir sus coeficientes para satisfacer el enunciado. Pero en un determinado momento, detiene este proceso, cambiando el *heurístico* a *dibujar una figura*, en este caso, la representación gráfica de la parábola en la que se apoya para continuar con la búsqueda de soluciones.

Los *casos estudiados* por Yolanda son: la ecuación explícita de una recta general, $y=mx+b$ (que deja incompleto) y las rectas horizontales $y=k$, con $k>1$.

Con respecto a las *representaciones* utilizadas, se observan: la *representación gráfica* de la parábola (Figura 4.1.17); la *representación simbólica* al realizar los cálculos en la búsqueda de condiciones de una recta general (Figura 4.1.16) y al presentar las soluciones de rectas paralelas al eje OX (Figura 4.1.18); y la *representación verbal* al presentar las soluciones (Figura 4.1.18).

Aunque comienza estudiando la ecuación explícita de una recta general, $y=mx+b$, termina presentado como *soluciones* las rectas paralelas al eje OX, $y=k$, con $k>1$. No realiza ninguna *comprobación de las soluciones* dadas.

El único *error* cometido por Yolanda en su resolución es al transcribir la ecuación de la parábola, intercambiando el término independiente por una b (Figura 4.1.16).

En la Tabla 4.1.4 se muestra un resumen de la resolución de Yolanda atendiendo a las categorías de análisis.

Tabla 4.1.4. Resumen de la resolución de Yolanda.

Heurísticos	1. Suponer el problema resuelto 2. Dibujar una figura
Casos estudiados	$y=mx+b$ $y=k$, con $k>1$
Representaciones	Gráfica, simbólica y verbal
Soluciones	$y=k$, con $k>1$
Comprobación de soluciones	No
Errores	Transcripción de la ecuación de la parábola

4.1.5 Resolución de Javier (E5)

<u>Descripción de la resolución de Javier</u>

Javier comienza realizando varios cálculos para representar gráficamente la parábola (Figura 4.1.19). En primer lugar, halla los puntos de corte de la parábola con el eje OX, obteniendo dos soluciones complejas, ya que no posee intersección con dicho eje. En segundo lugar, calcula la primera derivada de la función cuadrática y el punto en el que se anula. A continuación, calcula $f\left(\frac{-1}{2}\right)$ y $f(-\ 3)$. Aunque tacha los cálculos de $f\left(\frac{-1}{2}\right)$ y no recoge ninguna explicación, podría haberlos utilizado para deducir que el punto $x = -\ 2$, en el que la derivada es nula, es un mínimo.

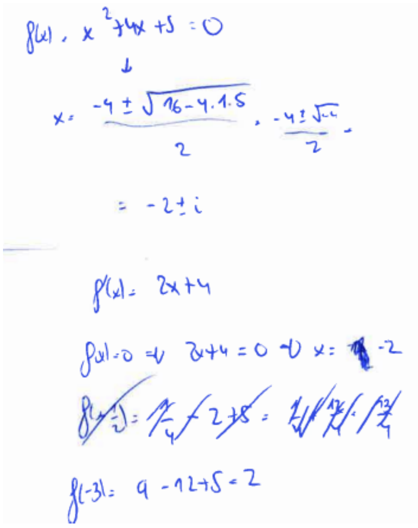


Figura 4.1.19. Cálculos para representar gráficamente la parábola. Resolución de Javier.

Con la información obtenida, representa gráficamente la parábola (Figura 4.1.20). En esta representación aparecen señalados los dos puntos calculados anteriormente (el mínimo y el (-3,2)) y otros tres puntos (el (-1,2), el (1,19) y el (0,5), punto de corte con el eje OY) de los que no recoge ningún cálculo. Además, aparecen representadas dos rectas ($y = 1$ e $y = 8x + 1$) que, como se expondrá a continuación, son las rectas que Javier da como solución y que, basándonos en su proceso de resolución, podríamos deducir que son representadas al final de este.

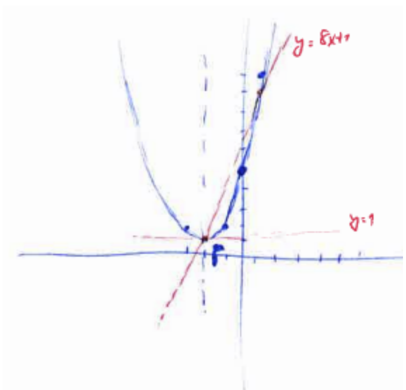


Figura 4.1.20. Representación gráfica de la parábola. Resolución de Javier.

A continuación, coincidiendo con las cuatro resoluciones analizadas anteriormente, toma la ecuación explícita de una recta, *y=ax+b*, la iguala a la ecuación de la parábola y resuelve la ecuación de segundo grado resultante en función de *a* y *b* (Figura 4.1.21).

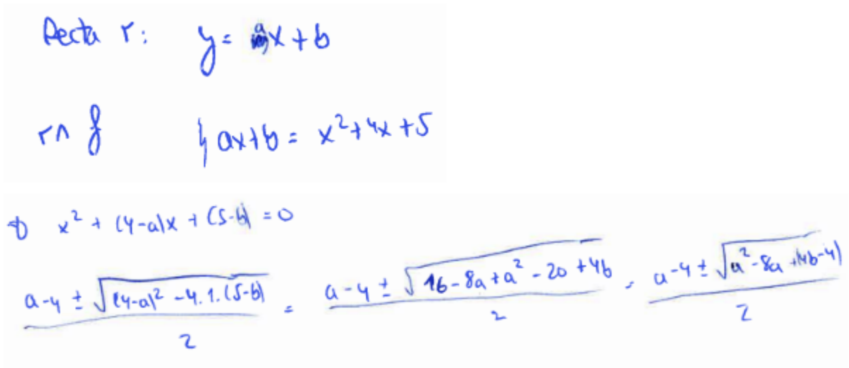


Figura 4.1.21. Igualación de la ecuación de una recta *y=ax+b* y la parábola. Resolución de la ecuación de segundo grado. Resolución de Javier.

Afirma que la expresión *tendrá sentido* cuando el discriminante de la ecuación de segundo grado obtenida sea mayor o igual que cero (Figura 4.1.22). Para resolver dicha inecuación, plantea la igualdad y calcula *a* en función del parámetro *b*. Podemos inferir que con *tener sentido* el estudiante pretende decir que la expresión tomará valores reales, sin embargo, en el contexto del problema, esta expresión debe ser mayor estricta que cero para que las rectas tengan dos puntos de intersección con la parábola.

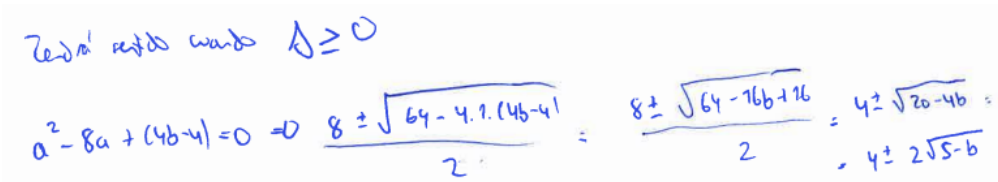


Figura 4.1.22. Resolución de la inecuación del discriminante. Resolución de Javier.

De nuevo afirma que *tendrá sentido* cuando el nuevo discriminante, $5 - b$, sea mayor o igual que cero (Figura 4.1.23), concluyendo que entonces, *b* debe ser menor o igual que 5 y $a = 4 \pm 2\sqrt{5 - b}$. Nuevamente se centra en que la expresión tome valores reales, sin embargo, para encontrar soluciones al problema no es necesario que el nuevo discriminante, $5 - b$, sea mayor o igual que cero. Se debe tener presente que el signo del primer discriminante, $a^2 - 8a + (4b - 4)$, que es el que determina los puntos de corte entre la recta y la parábola, puede tomar valores positivos cuando el segundo discriminate, $5 - b$, es menor que cero (ver enfoque algebraico del análisis a priori del problema). Por otro lado, está tomando $a = 4 \pm 2\sqrt{5 - b}$, y estos valores de a son los que hacen que el primer discriminante, $a^2 - 8a + (4b - 4)$, se anule (impuesto en la Figura 4.1.22). Con estas condiciones solo se obtienen rectas tangentes a la parábola.

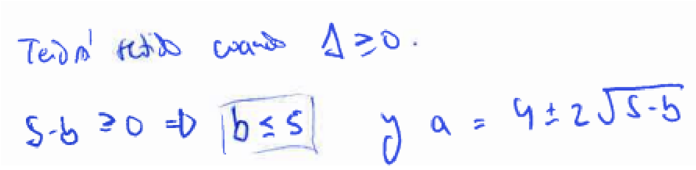


Figura 4.1.23. Establecimiento de condiciones para el discriminante. Resolución de Javier.

Por último, el estudiante presenta un ejemplo de cómo obtener las soluciones para un valor concreto de b. Considera b=1 y, calculando los correspondientes valores de a a partir del resultado obtenido en la Figura 4.1.23, escribe las dos rectas resultantes, $y = 8x + 1$ e $y = 1$ (Figura 4.1.24). Concluye que la recta $y = 1$ no es solución al problema por tener un único punto de intersección con la parábola (Figura 4.1.24). Al obtener estas dos rectas, se puede pensar que Javier retoma la representación gráfica (Figura 4.1.20) y las representa junto a la gráfica de la parábola a modo de comprobación, pero lo hace erróneamente en el caso de $y = 8x + 1$ pues también es tangente a la parábola.

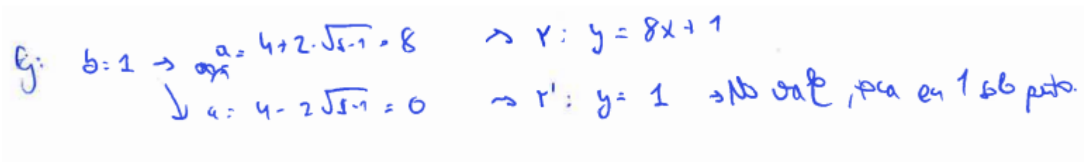


Figura 4.1.24. Obtención de dos rectas particulares. Resolución de Javier.

Tras esto, vuelve a escribir la primera derivada de la parábola y plantea el sistema de ecuaciones de la derivada y una recta general, $y = ax + b$ (Figura 4.1.25). Aunque no aparece ninguna explicación y termina tachando este último paso, podría indicar una duda en el proceso de resolución anterior al darse cuenta que la recta obtenida, $y = 1$, cumple con lo indicado en la Figura 4.1.23, pero no con las condiciones del problema y, por ello, prueba a abordar el problema siguiendo otra estrategia. Con este intento, termina su resolución.

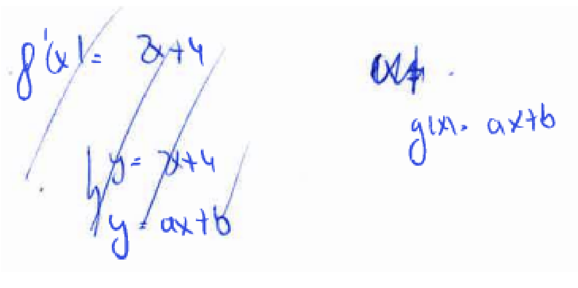


Figura 4.1.25. Parte tachada. Resolución de Javier.

Análisis de la resolución de Javier

Enfocando el análisis de la resolución en las categorías de análisis, Javier hace uso de tres *heurísticos*: *dibujar una figura, suponer el problema resuelto* y *ensayo y error*. Comienza representando gráficamente la parábola, la cual utiliza, también, al finalizar el proceso de resolución para comprobar dos soluciones particulares. A continuación, utiliza el *heurístico suponer el problema resuelto* y, tomando la ecuación de una recta general, *y*=*ax*+*b*, busca las condiciones para *a* y *b* que hacen que cumpla el enunciado del problema. Cuando ha obtenido ciertas restricciones para los parámetros, utiliza el *heurístico ensayo y error* para calcular valores concretos de a y b que cumplan las condiciones obtenidas anteriormente y construir las rectas correspondientes.

Los *casos estudiados* por Javier son: la ecuación explícita de una recta, $y=ax+b$, y las rectas particulares $y = 8x + 1$ e $y = 1$.

En cuanto a las *representaciones* utilizadas, se apoya en la *representación gráfica*, tanto de la parábola como de las dos rectas que da como solución (Figura 4.1.20). Utiliza la *representación simbólica* para calcular los puntos con los que representa la parábola (Figura 4.1.19) y realizar los cálculos necesarios en la búsqueda de condiciones de a y b para que la recta $y = ax + b$ tenga dos puntos de intersección con la parábola (Figuras 4.1.21-4.1.24). Y la *representación verbal* es utilizada para justificar que los discriminantes deben ser mayores o iguales que cero (Figuras 4.1.22 y 4.1.23) y por qué descarta $y = 1$ como solución del problema (Figura 4.1.24).

Javier da como *soluciones* las rectas $y = ax + b$ con $b \leq 5$ y $a = 4 \pm 2\sqrt{5 - b}$. Estas soluciones son incorrectas ya que son tangentes a la parábola y, por tanto, no tienen dos puntos de intersección. Además, realiza la *comprobación de las soluciones*, de manera gráfica, de dos rectas particulares: la recta $y = 8x + 1$, que representa erróneamente, y la recta $y = 1$ (Figura 4.1.20).

Por último, comete un *error* al conectar los cálculos realizados con el enunciado, pues toma las condiciones que anulan el discriminante y que hacen que las rectas sean tangentes a la parábola (Figura 4.1.23).

En la Tabla 4.1.5 se muestra un resumen de la resolución de Javier atendiendo a las categorías de análisis.

Tabla 4.1.5. Resumen de la resolución de Javier.

Heurísticos	1. Dibujar una figura 2. Suponer el problema resuelto 3. Ensayo y error
Casos estudiados	$y = ax + b$ $y = 8x + 1$ $y = 1$
Representaciones	Gráfica, simbólica y verbal
Soluciones	$y = ax + b$, con $b \leq 5$ y $a = 4 \pm 2\sqrt{5 - b}$
Comprobación de soluciones	$y = 8x + 1$ $y = 1$
Errores	Conexión entre los cálculos y el enunciado

4.1.6 Resolución de Sandra (E6)

<u>Descripción de la resolución de Sandra</u>

Sandra comienza representando gráficamente la parábola junto con una recta, señalando los puntos de intersección entre ambas (Figura 4.1.26). A diferencia de Javier (E6), no recoge ningún cálculo ni explicación de cómo las ha representado. Además, la representación gráfica de la parábola es incorrecta ya que sitúa su vértice sobre el eje de ordenadas.

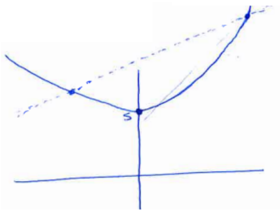


Figura 4.1.26. Representación gráfica de la parábola (error en el vértice). Resolución de Sandra.

Además, escribe la ecuación explícita de una recta, $y = mx + n$, y una tabla valores en la que no representa ningún punto (Figura 4.1.27).

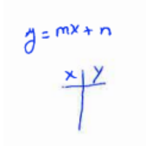


Figura 4.1.27. Consideración de la ecuación de una recta $y = mx + n$. Tabla de valores sin completar. Resolución de Sandra.

A continuación, afirma que las rectas paralelas al eje OX que se encuentran en el semiplano $x > 5$ tendrán dos puntos de intersección con la parábola (Figura 4.1.28). No incluye ninguna argumentación ni explicación, pero puede entenderse que lo ha deducido a partir de la representación gráfica realizada. Comete errores al escribir tanto la inecuación que define el semiplano, ya que para que las rectas sean paralelas al eje OX el semiplano debe ser el determinado por la inecuación y>5, y al escribir las expresiones de estas rectas horizontales como $y = x + n$, con $n > 5$, y no como $y = n$, con $n > 5$.

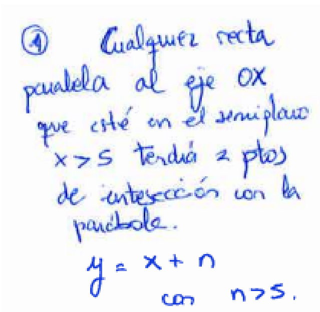


Figura 4.1.28. Presentación de soluciones horizontales (error en la ecuación). Resolución de Sandra.

En segundo lugar, considera rectas con pendiente positiva (Figura 4.1.29).

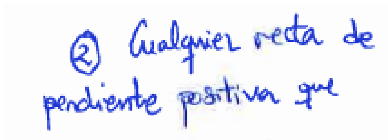


Figura 4.1.29. Comienzo de estudio de rectas oblicuas. Resolución de Sandra.

Este caso lo aborda considerando de nuevo la ecuación explícita de una recta, $y = mx + n$, que iguala a la ecuación de la parábola. Resuelve la ecuación de segundo grado resultante e indica que el discriminante debe ser mayor que cero, pero no continúa (Figura 4.1.30). Comete un error de cálculo escribiendo +20 donde debería escribir -20, pero no tiene ninguna consecuencia ya que no completa la resolución.

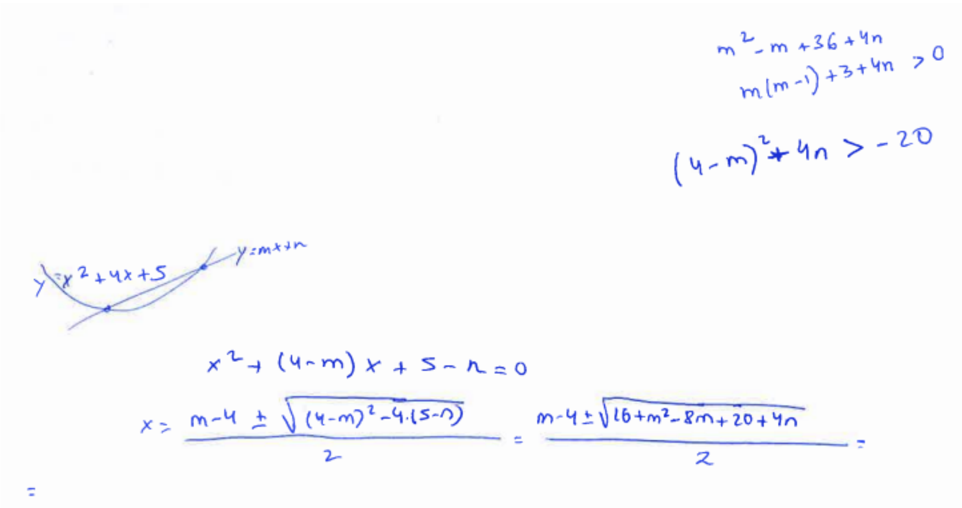


Figura 4.1.30. Igualación de la ecuación de la recta $y = mx + n$ y la parábola. Resolución de la ecuación de segundo grado. Resolución de Sandra.

<u>Análisis de la resolución de Sandra</u>

Atendiendo a las categorías de análisis, Sandra utiliza tres *heurísticos*. Combina *dibujar una figura* con *descomponer el problema en partes*, pues, apoyándose en la representación gráfica de la parábola, intenta dividir el estudio de las posibles rectas solución al problema en grupos de rectas según su pendiente: rectas horizontales y rectas con pendiente positiva. Para abordar este segundo grupo utiliza el *heurístico suponer el problema resuelto*, tomando la ecuación de una recta general e intentando buscar las condiciones para sus coeficientes que hacen que cumpla el enunciado del problema.

Los *casos estudiados* por Sandra son las rectas paralelas al eje OX en el semiplano $x > 5$ (error en la inecuación) y las rectas de ecuación $y = mx + n$, con pendiente positiva.

Sandra comienza su resolución con la *representación gráfica*, tanto de la parábola como de una recta (Figura 4.1.26) y vuelve a hacer uso de ella al abordar, al final, el problema siguiendo un enfoque algebraico (Figura 4.1.30). Aparece también la *representación tabular* en forma de tabla de valores, aunque no recoge ningún valor en ella (Figura 4.1.27). Utiliza la *representación simbólica* para mostrar las ecuaciones de las rectas que considera (Figura 4.1.27), las ecuaciones de las rectas horizontales solución (Figura 4.1.28) y los cálculos para averiguar las condiciones para los parámetros m y n que hacen que $y = mx + n$ tenga dos puntos de intersección con la parábola (Figura 4.1.30). Y la *representación verbal* para presentar los dos grupos diferentes de rectas que aborda (Figuras 4.1.28 y 4.1.29).

Las *soluciones* presentadas por Sandra son las rectas paralelas al eje OX en el semiplano $x > 5$ (error en la inecuación) y que representa, erróneamente, como $y = x + n$, con $n > 5$ Y no realiza *comprobación de las soluciones*.

Por último, Sandra comete cuatro *errores*. Representa incorrectamente el vértice de la parábola sobre el eje de ordenadas. Considera rectas paralelas al eje OX en el semiplano x>5, cuando debe ser en el semiplano y>5 para que cumplan la característica indicada y escribe las expresiones de dichas rectas como $y = x + n$, con $n > 5$, en lugar de y=n. Además, comete un error de operatoria al final de la resolución en el discriminante de la ecuación, confundiendo el signo de un término (Figura 4.1.30).

En la Tabla 4.1.6 se muestra un resumen de la resolución de Sandra atendiendo a las categorías de análisis.

Tabla 4.1.6. Resumen de la resolución de Sandra.

Heurísticos	1. Dibujar una figura 2. Descomponer el problema en partes 3. Suponer el problema resuelto
Casos estudiados	Rectas paralelas al eje OX en el semiplano $x > 5$ $y = mx + n$, con pendiente positiva
Representaciones	Gráfica, tabular, simbólica y verbal
Soluciones	Rectas paralelas al eje OX en el semiplano $x > 5$, representadas, erróneamente, como $y = x + n$, con $n > 5$
Comprobación de soluciones	No
Errores	Representación del vértice de la parábola Representar las rectas paralelas al eje OX en el semiplano $x > 5$ como $y = x + n$, con $n > 5$ Representar el semiplano anterior como x>5 Error de operatoria al multiplicar

4.1.7 Resolución de Yurena (E7)

Descripción de la resolución de Yurena

Yurena comienza representando gráficamente la parábola y, como Sandra (E6), no indica los cálculos realizados para ello (Figura 4.1.31). Esta representación es incorrecta ya que, igual que hace Sandra (E6), posiciona el vértice de la parábola en el punto de corte con el eje OY. Además de la parábola, representa varias rectas. La recta horizontal y=5 que, debido al error del vértice, señala con un único punto de intersección con la parábola. Tres rectas oblicuas, paralelas entre ellas (representadas con trazo discontinuo): en una de ellas, marcados dos puntos de intersección, en otra, solo un punto de intersección (el que ha considerado como vértice) y la última sin puntos de intersección. Por último, representa otras dos rectas, una con pendiente positiva y otra con pendiente negativa, ambas pasando por el punto (0,5), considerado erróneamente por la alumna como el vértice de la parábola.

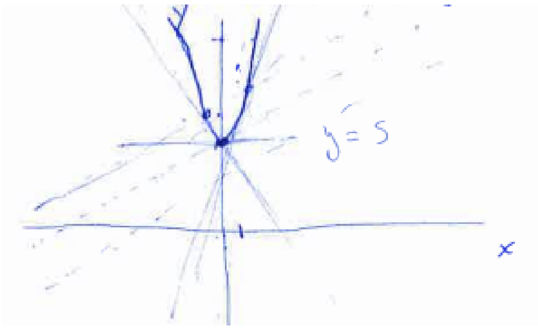


Figura 4.1.31. Primera representación gráfica de la parábola (error en el vértice). Recta tangente en el vértice y rectas oblicuas. Resolución de Yurena.

Junto a la representación anterior, Yurena escribe las expresiones que se observan en la Figura 4.1.32 y que parecen ser un esbozo de las soluciones que intentará buscar a continuación. La expresión algebraica de una recta, $y = mx + n$, que aparece dos veces y donde se pregunta por los valores de m y n. Y la expresión y>5 que, al no recoger nada más, no podemos concluir a que hace referencia, aunque podría estar considerando las rectas horizontales por encima del vértice incorrectamente representado, pues representó la recta y=5.

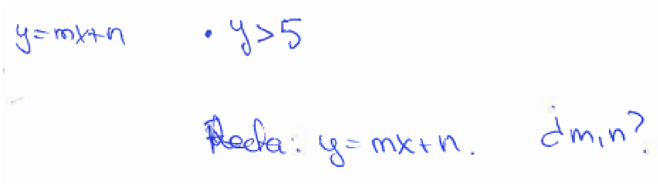


Figura 4.1.32. Establecimiento de la ecuación de una recta $y = mx + n$. Resolución de Yurena.

A continuación, representa nuevamente la parábola cometiendo el mismo error (Figura 4.1.33). Representa la recta y=5 y otras tres rectas oblicuas, señalando con un *tick* la recta que tiene dos puntos de intersección con la parábola y con una *equis* aquellas que considera que cortan a la parábola únicamente en un punto o en ninguno. En la recta oblicua con un solo punto de corte marcado, la estudiante comete un error al considerar que existen dos rectas tangentes a la parábola en un mismo punto, pues admitiendo el (0,5) como el vértice, la única recta tangente en este punto sería la horizontal.

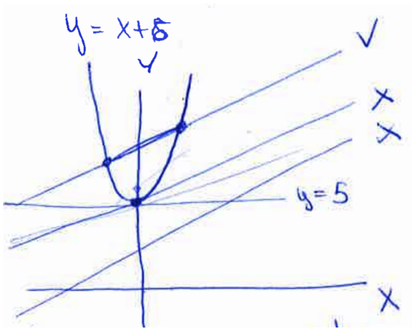


Figura 4.1.33. Segunda representación gráfica de la parábola (error en el vértice). Rectas oblicuas. Resolución de Yurena.

Con el uso de herramientas digitales como, por ejemplo, GeoGebra este tipo de equivocaciones desaparecen. Podríamos construir el haz de rectas por el vértice y observar que, salvo la horizontal, todas tienen dos puntos de corte con la parábola (Figura 4.1.34).

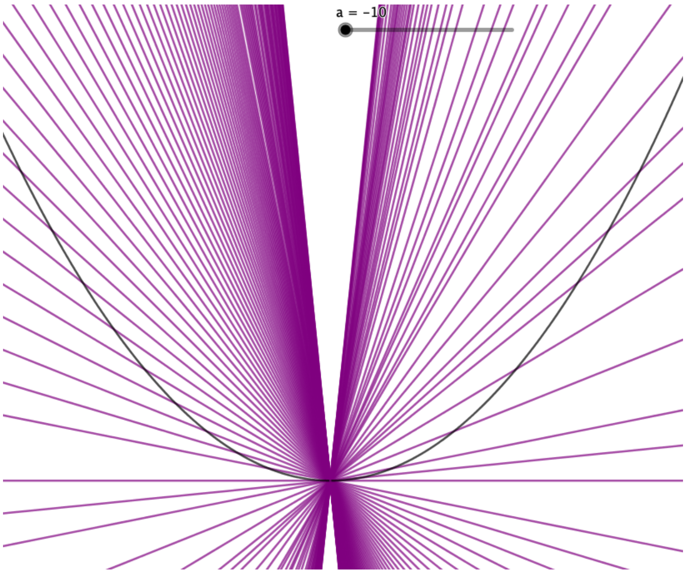


Figura 4.1.34. Ejemplo de rectas que pasan el vértice con dos puntos de intersección con la parábola.

En la parte superior de la segunda gráfica realizada por Yurena (Figura 4.1.33), aparece la expresión y=x+5 y/o y=x+6 (pues escribe un 6 sobre el 5, o viceversa). Aunque no recoge ninguna indicación acerca de estas rectas, podríamos deducir que la primera de ellas (y=x+5) se corresponde con la recta marcada con una X y que pasa por el vértice de la parábola. Y la segunda, y=x+6, podría corresponderse con una recta representada por encima de la anterior con un trazo más débil en la que puede apreciarse marcado el punto (0,6). Estas consideraciones no son esenciales para el desarrollo de la resolución, pues, hasta el momento, la alumna parece estar probando con distintas representaciones de rectas y distintas expresiones algebraicas.

Tras realizar las dos representaciones, estudia tres familias de rectas, agrupadas según su dirección: verticales, horizontales y oblicuas. Descarta como solución al problema las rectas verticales, $x = \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, argumentando que solo tienen un punto de intersección con la parábola (Figura 4.1.35).

· Al tratarse de una parábola descartamos las rectas $x=\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$, ya que al ser perpendiculares al eje x sólo cortarán la parábola en un pto.

Figura 4.1.35. Rectas verticales. Resolución de Yurena.

A continuación, señala que todas las rectas horizontales por encima del punto que ha considerado como vértice, $y = \beta$, con $\beta > 5$, tienen dos puntos de intersección con la parábola (Figura 4.1.36). Podemos suponer que esta afirmación la obtiene a partir de su representación gráfica en la que se puede observar la recta y=5 (Figuras 4.1.31 y 4.1.33). Debido al error cometido con el vértice, no considera las rectas horizontales que se encuentran entre el vértice real de la parábola, (-2,1), y el vértice de su representación, (0,5).

Al contrario, las rectas de la forma $y=\beta, \beta>5$, sí cortarán la parábola en 2 ptos distintos ya que estas rectas se situarán por encima del mín de dicha parábola.

Figura 4.1.36. Presentación de soluciones horizontales. Resolución de Yurena.

Por último, estudia las rectas de la forma $y = mx + n$, con $m \neq 0$ y $m, n \in \mathbb{R}$. Pero se centra en las rectas con pendiente positiva, pues afirma que las rectas con pendiente negativa se comportan de forma análoga (Figura 4.1.37). Aunque no lo justifica, esta afirmación podría apoyarse en la primera representación gráfica (Figura 4.1.31), donde representa dos rectas, una con pendiente positiva y otra negativa, que se intersectan en el punto (0,5). Para ello, vuelve a representar de manera semejante la parábola y una recta oblicua (Figura 4.1.38). Plantea el sistema de ecuaciones entre la recta $y = mx + n$ y la parábola, iguala ambas ecuaciones e intenta despejar x en función de m y n, pero se detiene y tacha los cálculos realizados hasta ese momento (Figura 4.1.39). En este punto finaliza la resolución presentada por Yurena.

· Solo nos queda estudiar el caso $y=mx+n$. ~~Para ello~~ con $m\neq 0$, $m,n\in\mathbb{R}$. Para ello nos centraremos en las rectas con $m>0$ ya que las de pendiente negativa se tratarán de forma análoga.

$y=mx+n$ ¿m,n?, $m\neq 0$.

Figura 4.1.37. Estudio de rectas oblicuas. Resolución de Yurena.

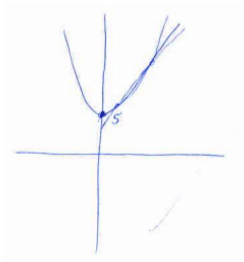


Figura 4.1.38. Tercera representación gráfica de la parábola (error en el vértice). Resolución de Yurena.

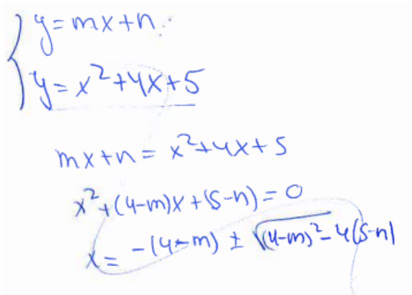


Figura 4.1.39. Resolución incompleta del sistema de ecuaciones entre la ecuación de una recta $y = mx + n$ y la parábola. Resolución de Yurena.

<u>Análisis de la resolución de Yurena</u>

Atendiendo a las categorías de análisis, en esta resolución se identifican cinco *heurísticos*: *dibujar una figura*, *ensayo y error*, *descomponer el problema en partes, generalizar* y *suponer el problema resuelto*. El primero de ellos lo utiliza en repetidas ocasiones, ya que se apoya en la representación gráfica de la parábola para tomar rectas particulares y, de manera visual, verificar si cumplen o no las condiciones del problema (Figuras 4.1.31 y 4.1.33) y también para abordar el problema según el enfoque algebraico al final de su resolución (Figura 4.1.38). Apoyándose en dichas gráficas, va representando diferentes rectas y comprobando si cumplen la condición del problema o no, por lo que puede identificarse el *ensayo y error*. Posteriormente, divide el estudio de las rectas en grupos de rectas según su pendiente: rectas verticales, rectas horizontales y la ecuación explícita de una recta y=mx+n, con $m \neq 0$. Para las rectas horizontales, analiza inicialmente la recta y=5 que ha representado anteriormente y *generaliza* este estudio a las rectas del semiplano y>5. Por último, para abordar el caso de rectas oblicuas, utiliza el *heurístico suponer el problema resuelto* abordando el problema desde un enfoque algebraico que no completa.

Los primeros *casos estudiados* por Yurena parten de las representaciones gráficas presentadas: la recta y=5, una recta oblicua con pendiente negativa y varias rectas oblicuas con pendiente positiva paralelas entre ellas (Figuras 4.1.31 y 4.1.33), y las rectas y=x+5 e y=x+6 (Figura 4.1.33). Luego trata de generalizar estudiando tres familias de rectas: $x = \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$; $y = \beta$, con $\beta > 5$; e y=mx+n, con $m \neq 0$.

En relación a las *representaciones* utilizadas, en esta resolución predominan las representaciones *gráfica* y *verbal*. Como ya se ha indicado anteriormente, Yurena *representa* *gráficamente*, tanto la parábola como varias rectas hasta en tres ocasiones, todas ellas con el fin de visualizar las rectas que cumplen la condición del enunciado del problema (Figuras 4.1.31, 4.1.33 y 4.1.38). Hace uso de la *representación simbólica*, por un lado, para escribir las ecuaciones de las rectas que considera (Figuras 4.1.35, 4.1.36 y 4.1.37) y, al estudiar las rectas oblicuas, para realizar los cálculos buscando condiciones para los parámetros m y n (Figura 4.1.39). Y opta por la *representación verbal* al estudiar las rectas según su dirección, para justificar tanto por qué las estudia como por qué son o no soluciones del problema (Figuras 4.1.35, 4.1.36 y 4.1.37).

Yurena concluye que las rectas verticales no son *soluciones* al problema y presenta como *soluciones* las rectas horizontales $y = \beta$, con $\beta > 5$. Además, da como solución las rectas y=x+5 e y=x+6 de manera gráfica (Figura 4.1.33). A pesar de que la recta general y=mx+n, no alcanza ninguna solución. No realiza *comprobación de las soluciones*.

Yurena comete varios *errores*. Coloca incorrectamente el vértice de la parábola sobre el eje de ordenadas (Figuras 4.1.31, 4.1.33 y 4.1.38). Como consecuencia, afirma, erróneamente, que las rectas y=x+5 e y=5 no tienen dos puntos de intersección con la parábola (Figura 4.1.33).

En la Tabla 4.1.7 se muestra un resumen de la resolución de Yurena atendiendo a las categorías de análisis.

Tabla 4.1.7. Resumen de la resolución de Yurena.

Heurísticos	1. Dibujar una figura 2. Ensayo y error 3. Descomponer el problema en partes 4. Generalizar 5. Suponer el problema resuelto
Casos estudiados	y=5 (gráficamente) Rectas oblicuas con pendiente negativa y positiva (gráficamente) y=x+5 (gráficamente) y=x+6 (gráficamente) $x = \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ $y = \beta$, con $\beta > 5$ y=mx+n, con $m \neq 0$
Representaciones	Gráfica, simbólica y verbal
Soluciones	$y = \beta$, con $\beta > 5$ y=x+5 (gráfica) y=x+6 (gráfica)
Comprobación de soluciones	No
Errores	Representación del vértice de la parábola Afirmar que y=5 e y=x+5 no son soluciones

4.1.8 Resolución de Marta (E8)

Descripción de la resolución de Marta

Marta comienza, como lo hace Javier (E5), calculando los puntos de corte de la parábola con los ejes para representar gráficamente la parábola (Figuras 4.1.40 y 4.1.41). En primer lugar, halla los puntos de corte con el eje OX, planteando y resolviendo el sistema de ecuaciones entre la parábola y la recta y=0. Obtiene un discriminante negativo y concluye que la parábola no tiene puntos de corte con el eje OX (Figura 4.1.40).

$$\begin{cases} y=0 \\ x^2+4x+5=0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} \;\#$$

$x \notin \mathbb{R} \Rightarrow$ la parábola no corta el eje X

Figura 4.1.40. Cálculo de los puntos de corte de la parábola con el eje OX. Resolución de Marta.

A continuación, calcula el punto de corte con el eje OY. Sustituye el valor x=0 en la ecuación de parábola, calcula la coordenada para *y* y, con ello el punto de corte con el eje (Figura 4.1.41).

$$x=0 \Rightarrow y=5$$

$$P_3(0,5)$$

Figura 4.1.41. Cálculo del punto de corte de la parábola con el eje OY. Resolución de Marta.

Toma la información anterior para representar gráficamente la función (Figura 4.1.42). En este paso comete un error ya que considera el punto de corte con el eje OY como el vértice de la parábola. Dicho error fue cometido también por Sandra (E6) y Yurena (E7). A partir de la representación gráfica (incorrecta) de la función, propone dos soluciones particulares: las rectas horizontales y=6 e y=7.

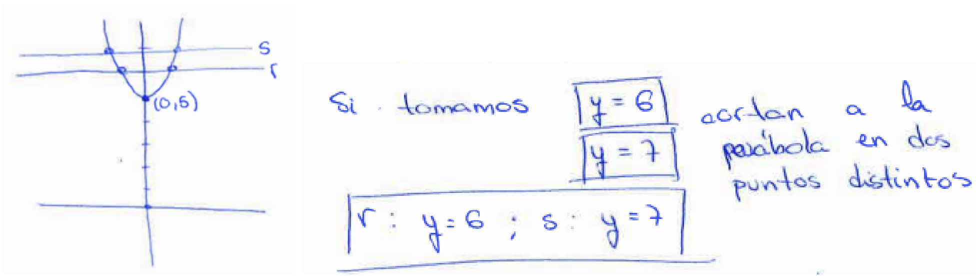


Figura 4.1.42. Representación gráfica de la parábola (error en el vértice). Presentación de dos soluciones de rectas horizontales particulares. Resolución de Marta.

Tras esto, comprueba que las dos rectas tienen dos puntos de intersección con la parábola. Para ello, plantea el sistema de ecuaciones de cada una de ellas con la parábola y calcula los puntos de intersección (Figura 4.1.43).

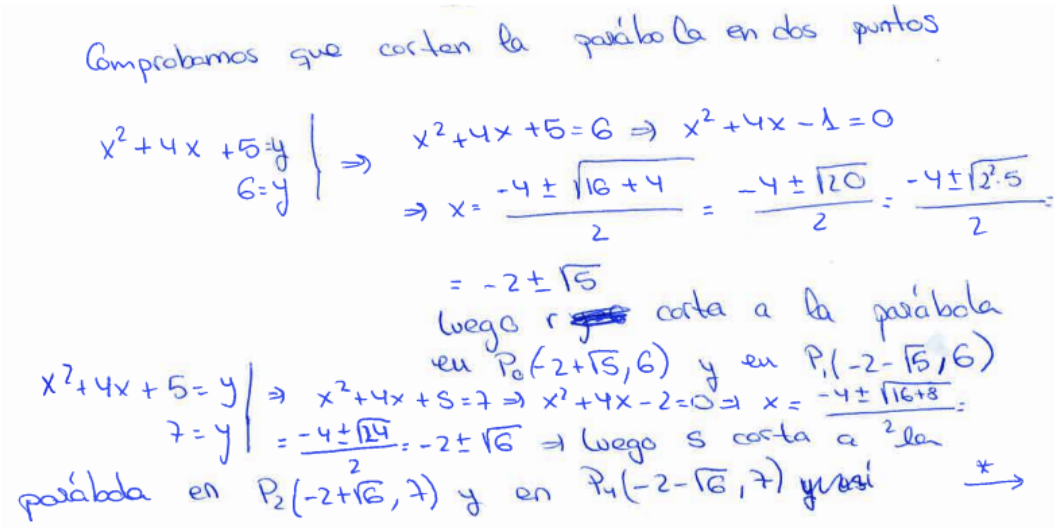


Figura 4.1.43. Comprobación de las soluciones. Resolución de Marta.

Por último, generaliza para todas las rectas horizontales por encima del punto que ha considerado como el vértice de la parábola (Figura 4.1.44). Lo hace sin indicar ningún tipo de justificación y finalizando así la resolución.

Figura 4.1.44. Generalización de las rectas horizontales. Resolución de Marta.

<u>Análisis de la resolución de Marta</u>

Atendiendo a las categorías de análisis descritas en la metodología, Marta combina dos *heurísticos* para resolver el problema: *dibujar una figura* y *generalizar*. Apoyándose en la representación gráfica de la parábola, obtiene dos rectas horizontales particulares, y generaliza su solución a todas las rectas horizontales por encima del vértice (incorrectamente representado).

Los *casos estudiados* por Marta son: las rectas particulares y=6 e y=7, y su generalización y=n, con n>5 y $n \in \mathbb{R}$.

Durante el proceso de resolución Marta usa diferentes *representaciones*. Por un lado, realiza la *representación gráfica*, tanto de la parábola como de dos rectas (Figura 4.1.42). Además, utiliza la *representación simbólica* para calcular los puntos de corte de la parábola con los ejes (Figuras 4.1.40 y 4.1.41), los puntos de corte de las rectas con la parábola (Figura 4.1.43) y para presentar la generalización de las rectas horizontales (Figura 4.1.44). También usa la *representación verbal* para indicar alguno de los pasos que va a realizar (Figura 4.1.43), las conclusiones de sus cálculos (Figuras 4.1.40, 4.1.42 y 4.1.43) y la generalización de rectas horizontales (Figura 4.1.44).

Marta da como *soluciones* al problema las rectas de la forma y=n, con n>5 y $n \in \mathbb{R}$. Estas soluciones son correctas, pero al estar basadas en el error cometido con la representación del vértice, estarían incompletas. En su resolución, realiza la *comprobación de las soluciones* particulares y=6 e y=7.

Como ya se ha mencionado, comete un *error* al representar el vértice de la parábola sobre el eje OY.

En la Tabla 4.1.8 se muestra un resumen de la resolución de Marta atendiendo a las categorías de análisis.

Tabla 4.1.8. Resumen de la resolución de Marta.

Heurísticos	1. Dibujar una figura 2. Generalizar
Casos estudiados	y=6 y=7 y=n, con n>5 y $n \in \mathbb{R}$
Representaciones	Gráfica, simbólica y verbal
Soluciones	y=n, con n>5 y $n \in \mathbb{R}$.
Comprobación de soluciones	y=6 y=7
Errores	Representación del vértice de la parábola

4.1.9 Resolución de Judith (E9)

<u>Descripción de la resolución de Judith</u>

Judith comienza, igual que Javier (E5), Sandra (E6), Yurena (E7) y Marta (E8), representando gráficamente la parábola. A diferencia de los anteriores, construye una tabla de valores en la que únicamente recoge un punto, el (0,5), y toma este punto como única referencia para representarla. La representación gráfica de esta estudiante también es incorrecta ya que, comete el mismo error que Sandra (E6), Yurena (E7) y Marta (E8), coloca el vértice sobre el único punto calculado que, justamente, es el punto de corte con el eje OY (Figura 4.1.45).

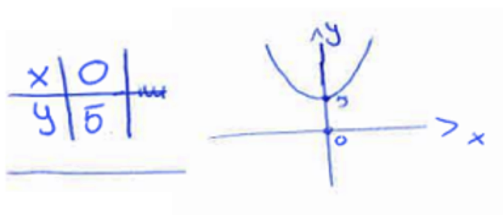


Figura 4.1.45. Tabla de valores y representación gráfica de la parábola (error en el vértice). Resolución de Judith.

A partir de dicha representación gráfica, considera dos rectas horizontales, una por encima del punto que ha representado como vértice de la parábola (y=6) y otra por debajo (y=0).

Estudia los puntos de intersección de cada una de estas rectas con la parábola, comprobando así si cumplen las condiciones del enunciado. Al resolver las correspondientes ecuaciones de segundo grado, obtiene dos soluciones en la primera y ninguna en la segunda (Figura 4.1.46).

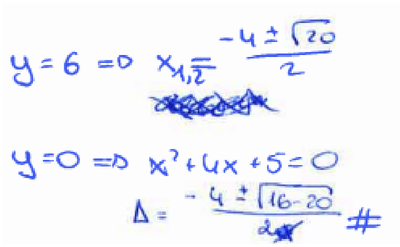


Figura 4.1.46. Estudio de dos rectas horizontales. Resolución de Judith.

Teniendo en cuenta estos resultados, presenta sus soluciones: la recta y=6 y otras rectas horizontales por encima de esta (Figura 4.1.47), finalizando con esto su resolución.

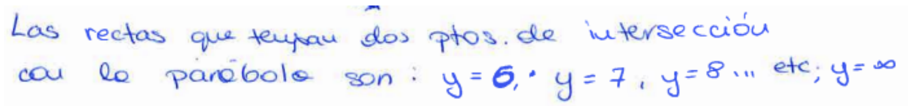


Figura 4.1.47. Presentación de soluciones horizontales. Resolución de Judith.

<u>Análisis de la resolución de Judith</u>

Atendiendo a las categorías de análisis descritas en la metodología, podemos indicar que Judith utiliza dos heurísticos. Combina *dibujar una figura* y *generalizar*, ya que apoyándose en la representación gráfica de la parábola, estudia dos rectas horizontales particulares y, a partir de la recta horizontal obtenida como solución, generaliza a un conjunto más amplio de rectas horizontales.

Los *casos estudiados* son: la recta y=6, recta horizontal por encima del punto considerado como vértice, y=0, recta horizontal por debajo de dicho punto, y las rectas y=7, y=8, …, $y = \infty$.

Durante el proceso de resolución, Judith hace uso de distintas *representaciones.* Comienza con la *representación gráfica* de la parábola (Figura 4.1.45), que realiza apoyándose en la *representación tabular* donde recoge las coordenadas de un único punto de la parábola y que identifica, erróneamente, con el vértice. A continuación, es la *representación simbólica* la que toma protagonismo a la hora de analizar los casos y comprobar si y=0 e y=6 son soluciones y dar sus soluciones (Figuras 4.1.46 y 4.1.47). Por último, la *representación verbal* aparece para indicar su respuesta al problema (Figura 4.1.47).

Judith presenta como *soluciones* la recta y=6 y otras rectas horizontales (y=7, y=8, "etc.") por encima de esta (Figura 4.1.47). Aunque no lo indica explícitamente, se presume, de la presentación de las soluciones, que solo tiene en cuenta rectas horizontales de la forma y=n, con n un número natural y mayor o igual que 6 (Figura 4.1.47), obviando valores reales no naturales.

En este caso, la *comprobación de las soluciones* está contenida dentro del propio proceso de análisis de los casos. Judith comprueba la primera de las soluciones presentadas, y=6, buscando los puntos de corte con la parábola (Figura 4.1.46), pero no justifica las otras soluciones dadas. También comprueba que y=0 no es solución.

Como se puede advertir, son varios los *errores* cometidos por Judith. En primer lugar, elabora una tabla de valores en la que calcula únicamente las coordenadas de un punto, el punto de corte de la parábola con el eje OY, el (0,5), y con ello representa gráficamente la parábola sin calcular ni señalar ningún otro punto (Figura 4.1.45). Ninguna función puede representarse utilizando un solo punto, lo que la conduce a posicionar incorrectamente el vértice sobre el punto calculado. Como consecuencia, no estudia ni presenta como soluciones las rectas horizontales que se encuentran entre el verdadero vértice de la parábola (el punto (-2,1)) y el que ella representa (Figura 4.1.47). Además, puede observarse en la Figura 4.1.47 una incorrección en el lenguaje empleado al presentar las soluciones, pues da como solución la "recta" $y = \infty$.

En la Tabla 4.1.9 se muestra un resumen de la resolución de Judith atendiendo a las categorías de análisis.

Tabla 4.1.9. Resumen de la resolución de Judith.

Heurísticos	1. Dibujar una figura 2. Generalizar
Casos estudiados	y=6 y=0 y=7, y=8, …, $y = \infty$
Representaciones	Gráfica, tabular, simbólica y verbal
Soluciones	y=6, y=7, y=8, …, $y = \infty$
Comprobación de soluciones	y=6 y=0
Errores	Uso incorrecto de la tabla de valores para representar gráficamente Representación del vértice de la parábola Representación algebraica de una recta "$y = \infty$"

4.1.10 Resolución de Maite (E10)

Descripción de la resolución de Maite

Maite, de manera similar a Judith (E9), utiliza una tabla de valores para representar gráficamente la parábola. Construye dicha tabla de manera inversa a como suelen presentarse las coordenadas de los puntos, coloca en la primera columna la variable dependiente y en la segunda la variable independiente (Figura 4.1.48). Teniendo en cuenta un único punto de los recogidos en esta tabla de valores (el (0,5), punto de corte con el eje OY), representa gráficamente la parábola (Figura 4.1.48). Esta representación gráfica es incorrecta, pues comete el mismo error que las resoluciones anteriores, situando el vértice en el punto de corte con el eje de ordenadas.

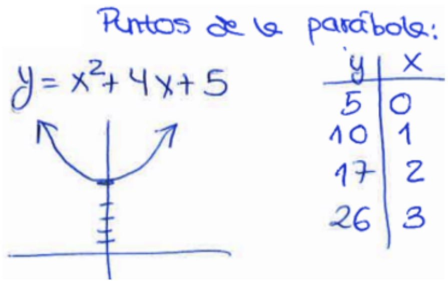


Figura 4.1.48. Tabla de valores y representación gráfica de la parábola (error en el vértice). Resolución Maite.

Una vez realizadas estas representaciones, considera la expresión algebraica de la ecuación explícita de una recta general (Figura 4.1.49), y=mx+n. Utilizando dicha expresión y los puntos de la parábola calculados en la tabla de valores (Figura 4.1.48), obtiene expresiones de rectas particulares solución del problema (Figura 4.1.50). En concreto, calcula las ecuaciones de tres rectas que intersectan a la parábola en el punto (0,5) y en cada uno de los otros tres puntos obtenidos en la tabla de valores (Figuras 4.1.48 y 4.1.50).

las ecuaciones de una recta en general:

$y = mx + n$ (*)

Figura 4.1.49. Ecuación de la recta utilizada para construir rectas solución. Resolución de Maite.

1) Recta que pasa por (0,5) y (1,10). Sustituyendo en (*)

$$\left.\begin{array}{l} 5 = n \\ 10 = m+5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} n=5 \\ m=5 \end{array} \Rightarrow y = 5x+5$$

2) Recta que pasa por (0,5) y (2,17). Sustituyendo en (*)

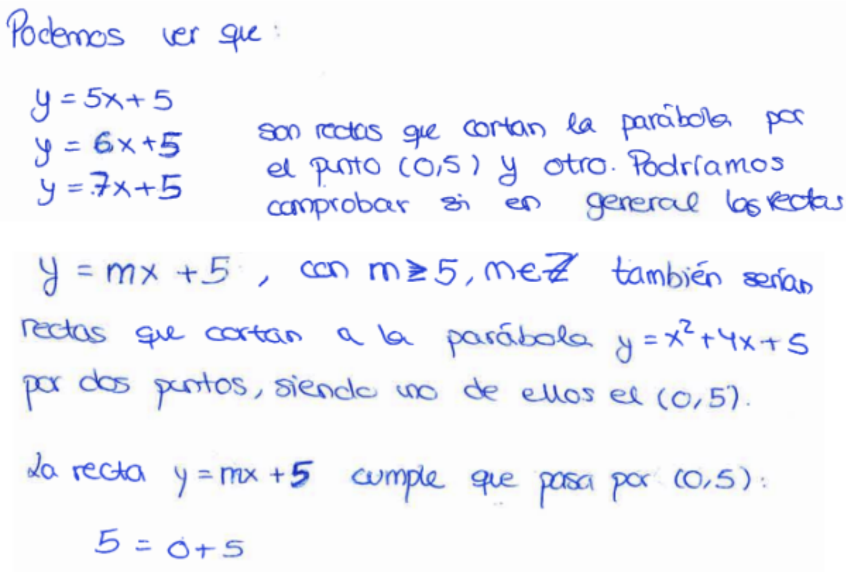
$$\left.\begin{array}{l} 5 = n \\ 17 = 2m+5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} n=5 \\ m=6 \end{array} \Rightarrow y = 6x+5$$

3) Recta que pasa por (0,5) y (3,26) Sustituyendo en (*)

$$\left.\begin{array}{l} 5 = n \\ 26 = 3m+5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} n=5 \\ m=7 \end{array} \Rightarrow y = 7x+5$$

Figura 4.1.50. Presentación de soluciones. Resolución de Maite.

A continuación, Maite se plantea comprobar si todas las rectas que pasan por el punto (0,5), es decir, las rectas de la forma y=mx+5, intersectan en dos puntos a la parábola (Figura 4.1.51). Al estudiar esta familia de rectas, destaca que únicamente se plantea valores enteros de m que sean mayores o iguales que 5. Esta omisión de posibles valores que puede tomar la pendiente de la recta podría proceder de las tres rectas obtenidas anteriormente, cuyas pendientes son números naturales mayores o iguales que 5. Maite no concluye su razonamiento, finalizando la resolución como puede observarse en la Figura 4.1.51.


Podemos ver que:

$y = 5x+5$
$y = 6x+5$
$y = 7x+5$

son rectas que cortan la parábola por el punto (0,5) y otro. Podríamos comprobar si en general las rectas

$y = mx + 5$, con $m \geq 5, m \in \mathbb{Z}$ también serían rectas que cortan a la parábola $y = x^2+4x+5$ por dos puntos, siendo uno de ellos el (0,5).

La recta $y = mx + 5$ cumple que pasa por (0,5):

$5 = 0+5$

Figura 4.1.51. Generalización de las soluciones. Resolución Maite.

<u>Análisis de la resolución de Maite</u>

Considerando ahora las categorías de análisis, Maite combina dos *heurísticos: dibujar una figura* y *generalizar*. En primer lugar, realiza la representación gráfica de la parábola (con error en el vértice) y, apoyándose en los puntos calculados en la tabla de valores, obtiene rectas particulares que pasan por el punto (0,5) a partir de las cuales generaliza a todas las rectas que pasan por este y cualquier otro punto de la parábola.

Los *casos estudiados* por Maite son: tres rectas particulares que pasan por el (0,5) y otro punto de la parábola (y=5x+5, y=6x+5 e y=7x+5 [Figura 4.1.50]) a partir de las que estudia las rectas que pasan por el (0,5) y cualquier otro punto de la parábola dadas de la forma $y = mx + 5$, con $m \geq 5,\ m\epsilon\mathbb{Z}$ (Figura 4.1.51).

En relación a las *representaciones* utilizadas, Maite realiza, utiliza la *representación tabular* para recoger las coordenadas de cuatro puntos de la parábola (Figura 4.1.48). A continuación, realiza la *representación gráfica* utilizando un solo punto de los recogidos en la tabla de valores y que, de forma incorrecta, representa como el vértice de la parábola (Figura 4.1.48). Utiliza la *representación simbólica* para calcular las rectas que pasan por dos puntos de la parábola (Figura 4.1.50) y mostrar cada una de las rectas calculadas, así como para generalizar a las rectas que pasan por el punto (0,5) (Figura 4.1.51). Por último, utiliza la *representación verbal* al presentar la tabla de valores para indicar que son puntos de la parábola los incluidos en dicha tabla (Figura 4.1.48), cuando considera la ecuación explícita de una recta arbitraria (Figura 4.1.49) y los casos que aborda (Figuras 4.1.50 y 4.1.51), así como para indicar el proceso seguido para calcular las tres primeras rectas (Figura 4.1.50).

Las *soluciones* presentadas por Maite son las tres rectas particulares y=5x+5, y=6x+5 e y=7x+5 y todas las rectas que pasan por el (0,5) y cualquier otro punto de la parábola dadas de la forma $y = mx + 5$, con $m \geq 5$, $m \epsilon \mathbb{Z}$. De estas últimas, comienza la *comprobación de las soluciones* pero no la completa.

Por último, encontramos un *error* en la representación gráfica de la parábola ya que Maite sitúa el vértice incorrectamente sobre el eje OY.

En la Tabla 4.1.10 se muestra un resumen de la resolución de Maite atendiendo a las categorías de análisis.

Tabla 4.1.10. Resumen de la resolución de Maite.

Heurísticos	1. Dibujar una figura 2. Generalizar
Casos estudiados	y=5x+5 y=6x+5 y=7x+5 Rectas que pasan por (0,5) y otro punto de la parábola de la forma $y = mx + 5$, con $m \geq 5$, $m \epsilon \mathbb{Z}$
Representaciones	Gráfica, tabular, simbólica y verbal
Soluciones	y=5x+5 y=6x+5 y=7x+5 Rectas que pasan por (0,5) y otro punto de la parábola de la forma $y = mx + 5$, con $m \geq 5$, $m \epsilon \mathbb{Z}$
Comprobación de soluciones	Rectas que pasan por (0,5) y otro punto de la parábola de la forma $y = mx + 5$, con $m \geq 5$, $m \epsilon \mathbb{Z}$ (incompleta)
Errores	Representación del vértice de la parábola

4.1.11 Resolución de Francisco (E11)

<u>Descripción de la resolución de Francisco</u>

Francisco realiza un proceso de resolución diferente a los que se han presentado anteriormente. Comienza realizando varios cálculos para representar gráficamente la parábola: cálculo de vértice, estudio de la monotonía y cálculo de los puntos de corte. Para calcular el vértice de la parábola halla la primera derivada de la función cuadrática y calcula las coordenadas del punto donde esta se anula (Figura 4.1.52).

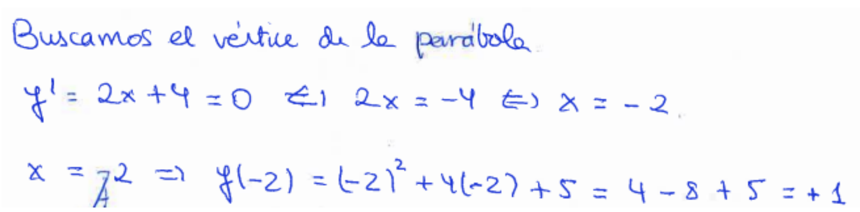


Figura 4.1.52. Cálculo de la primera derivada de la parábola y del vértice. Resolución de Francisco.

Para el estudio de la monotonía de la función emplea la condición de que será creciente cuando la primera derivada sea positiva y decreciente cuando sea menor que cero. Indica que la parábola es creciente para $x \geq -2$ (podría tratarse como un error tomar la función como creciente en x=-2, pero no influye en el desarrollo de la resolución) y decreciente para $x < -2$ (Figura 4.1.53).

La parábola es creciente cuando

$y' = 2x+4 > 0 \Rightarrow x \geq -2$

y decreciente cuando $x < -2$.

Figura 4.1.53. Establecimiento de la monotonía de la función cuadrática. Resolución de Francisco.

A continuación, calcula el punto de corte con el eje OY y al intentar hallar el punto de intersección con el eje OX, detiene el proceso, posiblemente al darse de cuenta de que el discriminante es negativo (Figura 4.1.54).

Además ~~esos~~ el punto de corte con el eje y es

$y(0) = 5 \quad (0,5)$

y con el eje x.

$x^2+4x+5=0 \Rightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-}}{}$

Figura 4.1.54. Cálculo de los puntos de corte de la parábola con los ejes. Resolución de Francisco.

Con los datos obtenidos anteriormente, representa gráficamente la parábola (Figura 4.1.55).

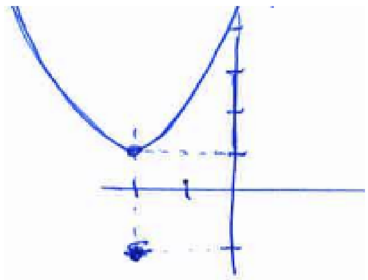


Figura 4.1.55. Representación gráfica de la parábola. Resolución de Francisco.

Apoyándose en la representación gráfica, afirma que la recta que pasa por los puntos (0,4) y (-4,0) tiene dos puntos de intersección con la parábola (Figura 4.1.56). Obtiene la ecuación de dicha recta a partir del segundo punto y el vector director determinado por ambos. Estos puntos no pertenecen a la parábola y, al no recoger ninguna argumentación, solo podemos suponer que dicha afirmación y la elección de los puntos la hace en base a la representación gráfica de la parábola y a la posición en los ejes coordenados de estos.

Luego la recta que pasa por los puntos (0,4),(-4,0).
Con vector director $\vec{v} = (-4,-4)$.
$\frac{x+4}{-4} = \frac{y}{-4} \Rightarrow \boxed{y = x+4}$
tiene dos puntos de intersección con la parábola.

Figura 4.1.56. Cálculo de una recta por dos puntos. Presentación de una solución. Resolución de Francisco.

Continúa comprobando que la recta anterior tiene dos puntos de corte con la parábola resolviendo la ecuación resultado de igualar las expresiones de cada una de ellas (Figura 4.1.57).

En efecto. $x+4 = x^2+4x+5 \Rightarrow x^2+3x+1=0 \Rightarrow$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2 \cdot 1}$ dos raíces reales.

Figura 4.1.57. Comprobación de la solución. Resolución de Francisco.

Tomando como base la recta construida anteriormente, afirma que la familia de rectas que pasan por el punto (-4,0) y un punto de la forma (0,y) tiene dos puntos de intersección con la parábola (Figura 4.1.58). Esta afirmación es incorrecta, ya que, por ejemplo, para y=0, la recta pasa por el (-4,0) y por el (0,0), la recta y=0, no tiene puntos de intersección con la parábola.

Fijando el punto (-4,0) y deslizando (0,y) tenemos una familia de rectas que ~~pasan~~ cortan ~~dos~~ (cada una) dos veces la parábola.

Figura 4.1.58. Establecimiento del siguiente paso. Resolución de Francisco.

Además, comprueba que la familia de rectas descrita anteriormente tiene dos puntos de intersección con la parábola. Para ello empieza hallando la expresión de la familia de rectas que pasan por los puntos (-4,0) y (0, λ), con λ ∈ ℝ, considerando como vector director el dado por (4, λ) determinado a partir de los puntos anteriores, pero con λ > 1, de lo que tampoco recoge ninguna argumentación, por lo que no podemos saber qué le ha llevado a restringir los valores de λ. (Figura 4.1.59). Puede estar apoyándose de nuevo en la representación gráfica de la parábola y considerar solo puntos sobre el eje OY que se encuentren en el semiplano de puntos con ordenada mayor a la ordenada del vértice, (-2,1).

En efecto, la ~~recta po~~ familia uniparamétrica de rectas que pasan por (-4,0) y (0,λ), λ∈ℝ, es
$\vec{v} = (4,\lambda)$, $\lambda > 1$.
$r_\lambda \equiv \frac{x+4}{4} = \frac{y}{\lambda} \Rightarrow y = \lambda\left(\frac{x+4}{4}\right)$.

Figura 4.1.59. Generalización de las soluciones. Resolución de Francisco.

Siguiendo el mismo proceso que antes, intenta comprobar que la familia de rectas y la parábola tienen dos puntos de intersección, igualando ambas ecuaciones y obteniendo las expresiones de las soluciones en función de λ (Figura 4.1.60).

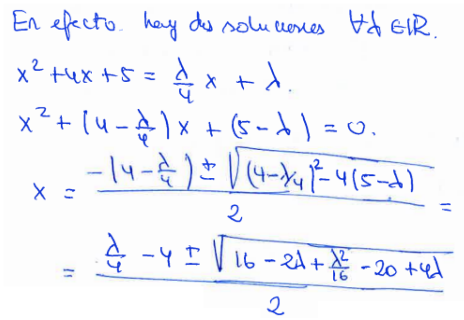


Figura 4.1.60. Comprobación incompleta de la generalización. Resolución de Francisco.

Termina su resolución afirmando que si λ>1 habrá dos soluciones reales y, por tanto, que la familia de rectas descrita tendrá dos puntos de intersección con la parábola (Figura 4.1.61). Esta conclusión también es incorrecta, puesto que, por ejemplo para λ=1,5 no hay soluciones reales. Este error puede estar provocado por la imposibilidad de realizar una representación gráfica exacta de la familia de rectas utilizando únicamente papel y lápiz. Como se comentó en la resolución de Yurena (E7), con el uso de la herramienta GeoGebra esta equivocación podría no haberse dado. Como puede verse en la Figura 4.1.62 podríamos crear un deslizador para valores de λ mayores que 1 y construir el haz de rectas $y = \lambda\left(\frac{x+4}{4}\right)$. Al activar el deslizador se observan fácilmente todas las rectas con λ>1 que no intersectan a la parábola.

Figura 4.1.61. Afirmación (errónea) sobre la generalización de las soluciones. Resolución de Francisco.

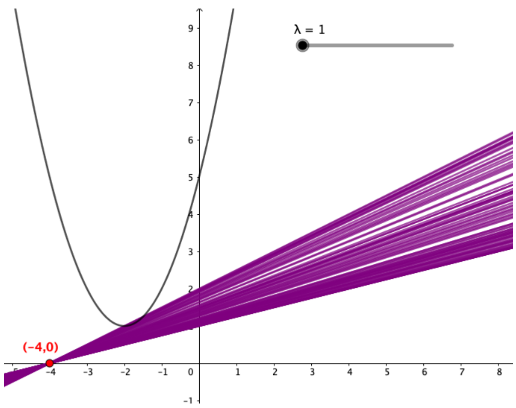


Figura 4.1.62. Ejemplo de rectas de la forma $y = \lambda\left(\frac{x+4}{4}\right)$, con λ>1 que no son solución del problema.

Tras esto, aunque lo tacha, parece que intenta estudiar el discriminante de la ecuación de la Figura 4.1.60, calculando los valores de λ que lo anulan (Figura 4.1.63), aunque se observa un error de cálculo en el término de primer grado puesto que debe tener coeficiente 2 y no 4 como indica Francisco. Este estudio podría haberle llevado a subsanar el error indicado anteriormente.

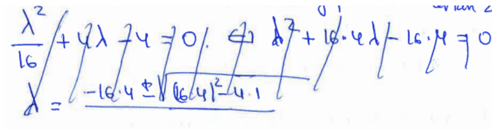


Figura 4.1.63. Comprobación incompleta (y con error de cálculo) de la generalización (tachada). Resolución de Francisco.

<u>Análisis de la resolución de Francisco</u>

Atendiendo a las categorías de análisis, Francisco combina dos *heurísticos*: *dibujar una figura* y *generalizar*. Apoyándose en la representación gráfica de la parábola, y a partir de la recta particular que pasa por los puntos (-4,0) y (0,4), generaliza su solución a la familia de rectas rectas que pasan por los puntos (-4,0) y (0,λ), con λ>1.

Los *casos estudiados* por Francisco son: la recta que pasa por los puntos (-4,0) y (0,4) y, apoyándose en ella, la familia de rectas que pasan por los puntos (-4,0) y (0,λ), con λ>1.

En esta resolución encontramos la *representación gráfica* de la parábola (Figura 4.1.55). La *representación simbólica* aparece para mostrar los cálculos del vértice, estudiar la monotonía de la parábola y obtener los puntos de corte de esta con los ejes de coordenadas (Figuras 4.1.52, 4.1.53 y 4.1.54). También para mostrar los cálculos que permiten obtener la ecuación de la recta que pasa por dos puntos (Figura 4.1.56) y de la familia de rectas (Figura 4.1.59), así como para la comprobación de que ambas tienen dos puntos de intersección con la parábola (Figuras 4.1.57 y 4.1.60). Y la *representación verbal* es utilizada para explicar cada unos de los pasos dados (Figuras 4.1.52-4.1.54, 4.1.56-4.1.60), para indicar las conclusiones obtenidas de sus cálculos (Figuras 4.1.53, 4.1.56, 4.1.57 y 4.1.61) y para presentar las soluciones (Figura 4.1.59).

Las *soluciones* presentadas son la familia de rectas $y = \lambda\left(\frac{x+4}{4}\right)$ con $\lambda \in R$ y λ>1. Además realiza la *comprobación de las soluciones*, tanto de la recta particular y=x+4 como del haz de rectas.

Por último, Francisco presenta un error al afirmar que la familia de rectas $y = \lambda\left(\frac{x+4}{4}\right)$ intersectan dos veces a la parábola si λ>1, pues si estudiamos el signo del discriminante de la Figura 4.1.60, se obtiene que para $1 \leq \lambda \leq 8\left(\sqrt{5} - 2\right)$ este discriminante es menor o igual que cero y que, por tanto, las rectas no tienen dos puntos de intersección con la parábola. Además, comete otros dos errores que no influyen en el desarrollo de la resolución: uno al tomar la función como creciente en x=-2, cuando afirma que es creciente para $x \geq -2$, y otro, en la última parte que tacha al intentar estudiar el discriminante de la ecuación de la Figura 4.1.60, pues indica que el término de primer grado de la ecuación cuadrática es 4λ, cuando en realidad es 2λ.

En la Tabla 4.1.11 se muestra un resumen de la resolución de Francisco atendiendo a las categorías de análisis.

Tabla 4.1.11. Resumen de la resolución de Francisco.

Heurísticos	1. Dibujar una figura 2. Generalizar
Casos estudiados	Recta que pasa por los puntos (-4,0) y (0,4) Familia de rectas que pasan por los puntos (-4,0) y (0,λ)
Representaciones	Gráfica, simbólica y verbal
Soluciones	$y = \lambda\left(\frac{x+4}{4}\right)$, con $\lambda \in R$ y $\lambda>1$
Comprobación de soluciones	y=x+4 $y = \lambda\left(\frac{x+4}{4}\right)$, con $\lambda \in R$ y $\lambda>1$
Errores	Afirmar que para λ>1, la familia de rectas $y = \lambda\left(\frac{x+4}{4}\right)$ tienen dos puntos de intersección con la parábola Afirmar que la parábola es creciente para $x \geq -2$ Error de operatoria

4.1.12 Resolución de Yaiza (E12)

Descripción de la resolución de Yaiza

Yaiza, de la misma manera que lo hicieron Judith (E9) y Maite (E10), utiliza una tabla de valores para representar gráficamente la parábola. Construye la tabla recogiendo en ella las coordenadas de varios puntos de la parábola, entre ellos el punto de corte con el eje OY, el vértice y otros puntos simétricos respecto al eje de la parábola (Figura 4.1.64). Situando estos puntos en unos ejes de coordenadas cartesianos, representa gráficamente la parábola (Figura 4.1.64). También aparecen representadas las dos rectas que estudia a continuación (y=2 e y=5x+5), ambas pasando por dos puntos de la parábola (se ha señalado la recta y=5x+5 en la Figura 4.1.64, pues al estar representada superpuesta a la parábola no es posible distinguirla fácilmente en la imagen escaneada).

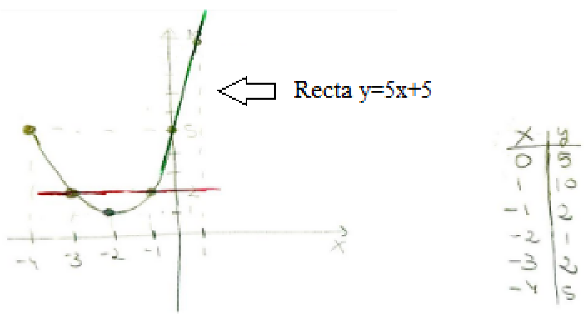


Figura 4.1.64. Representación gráfica de la parábola y tabla de valores. Recta horizontal y recta oblicua. Resolución de Yaiza.

Tras representar gráficamente la parábola, presenta las ecuaciones de dos rectas (y=2 e y=5x+5), sin indicar ningún cálculo ni justificación de cómo las ha obtenido (Figura 4.1.65). Escribe directamente las ecuaciones de ambas rectas y las coordenadas de los dos puntos en los que afirma que cada una de ellas intersecta a la parábola, los cuales fueron obtenidos anteriormente en la tabla de valores. Concluye así su resolución.

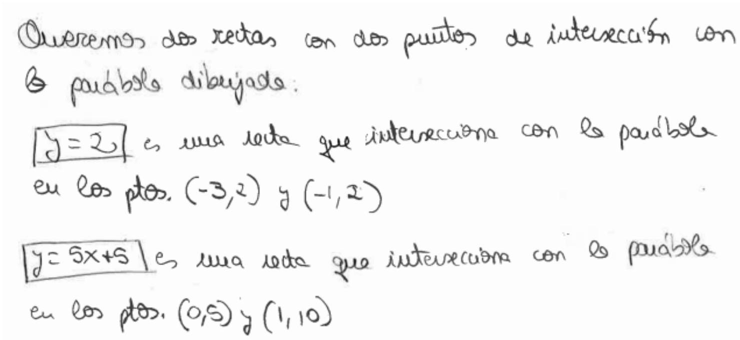

Queremos dos rectas con dos puntos de intersección con la parábola dibujada:
$\boxed{y=2}$ es una recta que intersecciona con la parábola en los ptos. (-3,2) y (-1,2)
$\boxed{y=5x+5}$ es una recta que intersecciona con la parábola en los ptos. (0,5) y (1,10)

Figura 4.1.65. Presentación de soluciones. Resolución Yaiza.

<u>Análisis de la resolución de Yaiza</u>

Teniendo en cuenta ahora las categorías de análisis, Yaiza hace uso de un único *heurístico: dibujar una figura*. Apoyándose en la representación gráfica de la parábola y en los puntos obtenidos en la tabla de valores, da la expresión algebraica de dos rectas particulares.

Los *casos estudiados* en esta resolución son dos rectas particulares: una horizontal, la recta y=2, y otra oblicua, la recta 5x+5 (Figura 4.1.65).

En cuanto a las *representaciones* utilizadas, aparece la *representación tabular* en la que recoge las coordenadas de seis puntos de la parábola y que utiliza para realizar la *representación gráfica* de la parábola, donde representa también dos rectas (Figura 4.1.64). Encontramos la *representación simbólica* tanto mostrar las ecuaciones de las rectas como las coordenadas de los puntos de intersección con la parábola (Figura 4.1.65). Y la *representación verbal* es usada para indicar las soluciones y para afirmar que cumplen la condición del enunciado del problema (Figura 4.1.65).

Los *casos estudiados* por Yaiza son: las rectas y=2 e y=5x+5.

Las *soluciones* dadas por Yaiza coinciden con los casos estudiados: y=2 e y=5x+5. En este aspecto, destaca el inicio de la frase con la que las presenta: "Queremos dos rectas…" (Figura 4.1.65), ya que lo hace intencionadamente, por lo que parece que su interpretación del enunciado puede ser que se piden exactamente dos rectas, cuando en el enunciado no se especifica ninguna cantidad.

Yaiza realiza la *comprobación de las soluciones* gráficamente (Figura 4.1.64). Aunque no podemos afirmar en qué momento de la resolución representa las dos rectas junto con la parábola, se trata de una comprobación gráfica donde se muestra que las dos rectas tienen dos puntos de intersección con la parábola.

Por último, en esta resolución no se han encontrado *errores*.

En la Tabla 4.1.12 se muestra un resumen de la resolución de Yaiza atendiendo a las categorías de análisis.

Tabla 4.1.12. Resumen de la resolución de Yaiza.

Heurísticos	1. Dibujar una figura
Casos estudiados	y=2 y=5x+5
Representaciones	Gráfica, tabular, simbólica y verbal
Soluciones	y=2 y=5x+5
Comprobación de soluciones	y=2 y=5x+5
Errores	No

4.1.13 Resolución de Zahira (E13)

<u>Descripción de la resolución de Zahira</u>

Zahira comienza su resolución calculando el vértice de la parábola usando la fórmula correspondiente, lo que la diferencia de las resoluciones de Javier (E5) y Francisco (E11) que lo calculaban a través de la derivada de la función cuadrática. También calcula el punto de corte con el eje OY (Figura 4.1.66).

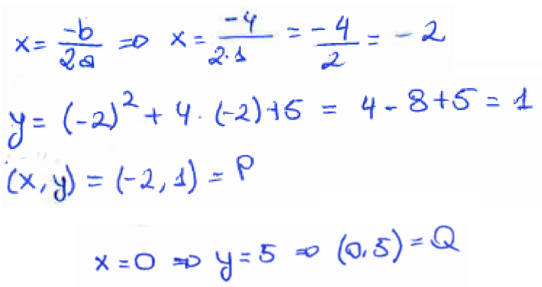


Figura 4.1.66. Cálculo del vértice de la parábola y del punto de corte con el eje OY. Resolución de Zahira

A continuación, considera la ecuación general de una recta, Ax+By+C=0, en la cual sustituye las coordenadas de los dos puntos obtenidos anteriormente (Figura 4.1.67) e intenta resolver el sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas resultante para los coeficientes de dicha ecuación general. Por un lado, la alumna parece no advertir que la expresión obtenida para la recta, $Ax+\left(-\frac{A}{2}\right)y-\frac{5}{2}A=0$, con $A \in \mathbb{R}$, corresponde a una única recta, siempre que A sea no nulo. Por otro lado, comete un error en la operatoria al calcular el valor de C en función de A tras obtener el valor de B en función de A, escribiendo $C=-\frac{5}{2}A$ en lugar de

$C = \frac{5}{2}A$. Esto hace que la recta dada no tenga puntos de corte con la parábola, por lo que no sería solución del problema.

$Ax+By+C=0$

$\left.\begin{array}{l} -2A+B+C=0 \\ 5B+C=0 \end{array}\right\} \Rightarrow C=-5B$

$-2A+B-5B=0 \Rightarrow -2A-4B=0$

$(A=-2B)$ $\quad B=-\frac{2A}{4}=-\frac{1}{2}A$

$C=-\frac{5}{2}A$

Por tanto, las ecuaciones con la forma

$Ax+\left(-\frac{A}{2}\right)y-\frac{5}{2}A=0$

tienen como puntos de intersección P y Q.

Figura 4.1.67. Cálculo de la recta que pasa por los puntos P y Q. Presentación de soluciones. Resolución de Zahira.

Por último, toma un punto cualquiera de la parábola de la forma (x,x^2+4x+5) y lo sustituye en la ecuación general de la recta, Ax+By+C=0, pero no alcanza ningún resultado, concluyendo con esto su resolución (Figura 4.1.68). Se puede suponer que intenta generalizar el proceso anterior en el que ha calculado una recta particular a partir de dos puntos concretos de la parábola, para obtener la ecuación de una recta determinada por puntos arbitrarios de la parábola. Este procedimiento debería continuar con el estudio más amplio de las condiciones que deben cumplir los coeficientes de la recta (A, B y C) para que la ecuación de segundo grado obtenida por Zahira tenga dos soluciones reales, estudio similar al enfoque algebraico visto en el análisis a priori del problema pero con la ecuación general de una recta en lugar de la explícita.

De forma general, los puntos de la parábola satisfacen la igualdad ($y=x^2+4x+5$). Luego:

$Ax+By+C=0 \Leftrightarrow Ax+B(x^2+4x+5)+C=0$

$Ax+Bx^2+4Bx+5B+C=0$

$Bx^2+(A+4B)x+5B+C=0$

Figura 4.1.68. Generalización incompleta del procedimiento. Resolución de Zahira.

<u>Análisis de la resolución de Zahira</u>

Enfocándonos en las categorías de análisis, Zahira utiliza únicamente el *heurístico generalizar,* pues construye una recta que pasa por dos puntos concretos de la parábola e intenta generalizar este procedimiento para las rectas que pasen por otros puntos de la parábola. Es decir, examina un caso particular a partir del cual intenta obtener una solución general.

Los *casos estudiados* son: la recta particular que pasa por los puntos (-2,1), vértice de la parábola, el y (0,5), punto de corte de la parábola con el eje OY (Figura 4.1.67); y el caso más general, la recta que pasa por un punto cualquiera de la parábola, que incluye a la primera recta estudiada (Figura 4.1.68).

Zahira hace uso de la *representación simbólica* y de la *representación verbal*. La primera de ellas es la que predomina y la utiliza para recoger los cálculos del vértice de la parábola y del punto de corte de la parábola con el eje OY (Figura 4.1.66), de la recta particular estudiada (Figuras 4.1.67) y de los pasos dados para intentar generalizar (Figura 4.1.68). La segunda la utiliza para presentar las soluciones y para introducir la generalización del procedimiento (Figuras 4.1.67 y 4.1.68).

Las *soluciones* presentadas por Zahira son las rectas $Ax + \left(-\frac{A}{2}\right)y - \frac{5}{2}A = 0$. Intenta obtener una solución general, pero no la alcanza. No realiza la *comprobación de las soluciones.*

Por último, Zahira comete un *error* de operatoria en el cálculo de la expresión algebraica de la recta que da como solución que la lleva a que esta no tenga realmente puntos de corte con la parábola.

En la Tabla 4.1.13 se muestra un resumen de la resolución de Zahira atendiendo a las categorías de análisis.

Tabla 4.1.13. Resumen de la resolución de Zahira.

Heurísticos	1. Generalizar
Casos estudiados	Recta que pasa por los puntos (-2,1) y (0,5). Rectas que pasan por un punto general de la parábola.
Representaciones	Simbólica y verbal
Soluciones	$Ax + \left(-\frac{A}{2}\right)y - \frac{5}{2}A = 0$
Comprobación de soluciones	No
Errores	Operatoria

4.1.14 Resolución de Mónica (E14)

<u>Descripción de la resolución de Mónica</u>

Mónica comienza calculando dos puntos de la parábola, considerando valores particulares de la variable independiente y, se intuye que, usando la expresión algebraica para calcular el valor de la variable dependiente. Además, calcula el vector determinado por esos dos puntos y escribe la ecuación de la recta que pasa por uno de los puntos y que tiene como vector director el calculado. La alumna afirma que la recta obtenida tiene dos puntos de intersección con la parábola (Figura 4.1.69).

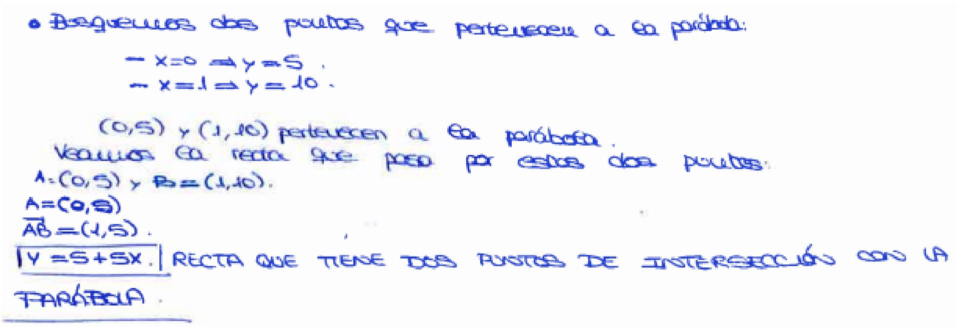

• Busquemos dos puntos que pertenecen a la parábola:
- x=0 ⇒ y=5 .
- x=1 ⇒ y=10 .
(0,5) y (1,10) pertenecen a la parábola.
Veamos la recta que pasa por estos dos puntos:
A=(0,5) y B=(1,10).
A=(0,5)
$\overrightarrow{AB}$=(1,5).
$\boxed{Y=5+5X.}$ RECTA QUE TIENE DOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN CON LA PARÁBOLA.

Figura 4.1.69. Cálculo de recta que pasa por dos puntos. Resolución de Mónica.

A continuación, indica que el procedimiento podría repetirse con otros dos puntos de la parábola. Calcula otros dos puntos de la parábola, obtiene el vector que determinan y, sin construirla, indica que, buscando la recta determinada por uno de los puntos y el vector, se obtendría otra recta con dos puntos de intersección con la parábola (Figura 4.1.70). Con esto, Mónica finaliza su resolución.

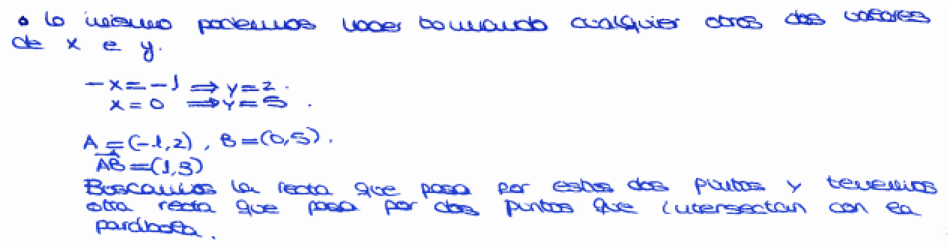

• Lo mismo podemos hacer tomando cualquier otros dos valores de x e y.
- x=-1 ⇒ y=2.
x=0 ⇒ y=5 .
A=(-1,2), B=(0,5).
$\overrightarrow{AB}$=(1,3)
Buscamos la recta que pasa por estos dos puntos y tenemos otra recta que pasa por dos puntos que intersectan con la parábola.

Figura 4.1.70. Generalización del procedimiento. Resolución de Mónica.

<u>Análisis de la resolución de Mónica</u>

Enfocándonos en las categorías de análisis, Mónica utiliza el *heurístico generalizar,* pues, tras tomar dos puntos de la parábola y construir la recta que pasa por ellos, indica que podría realizar el mismo procedimiento para otros dos puntos de la parábola. De esta manera, examina dos casos particulares que sugieren una forma de obtener una solución general, considerando dos puntos de la parábola $(x_1, x_1^2 + 4x_1 + 5)$ y $(x_2, x_2^2 + 4x_2 + 5)$ y calculando la ecuación de la recta que determinan.

Los *casos estudiados* son: las rectas que pasan por los puntos (0,5) y (1,10) y por los puntos (-1,2) y (0,5).

Mónica utiliza la *representación simbólica* para expresar las coordenadas cartesianas de los puntos, los vectores directores y las rectas que da como solución (Figuras 4.1.69 y 4.1.70). Y la *representación verbal* para indicar los pasos que da y que las rectas obtenidas cumplen las condiciones del enunciado (Figuras 4.1.69 y 4.1.70).

Las *soluciones* presentadas son la recta y=5+5x y la recta que pasa por los puntos (-1,2) y (0,5). Y no realiza la *comprobación de las soluciones.*

Por último, no se han encontrado *errores* en la resolución de Mónica.

En la Tabla 4.1.14 se muestra un resumen de la resolución de Mónica atendiendo a las categorías de análisis.

Tabla 4.1.14. Resumen de la resolución de Mónica.

Heurísticos	1. Generalizar
Casos estudiados	Recta que pasa por los puntos (0,5) y (1,10) Recta que pasa por los puntos (-1,2) y (0,5)
Representaciones	Simbólica y verbal
Soluciones	y=5+5x Recta que pasa por los puntos (-1,2) y (0,5)
Comprobación de soluciones	No
Errores	No

4.1.15 Resolución de Sofía (E15)

<u>Descripción de la resolución de Sofía</u>

Sofía comienza escribiendo la ecuación de la parábola incompleta, pues falta la variable dependiente, y la fórmula de las soluciones de una ecuación de segundo grado (Figura 4.1.71). Expresiones que utiliza, a continuación, para abordar rectas horizontales, es decir, rectas de la forma y=k.

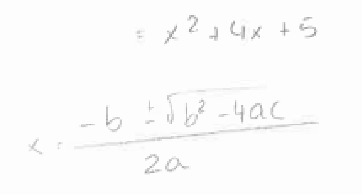


Figura 4.1.71. Ecuación de la parábola y fórmula de las soluciones de una ecuación de segundo grado. Resolución de Sofía.

Considera, en primer lugar, las rectas y=0 e y=1 y, sin recoger ningún cálculo, concluye que la primera no tiene puntos de intersección con la parábola y que la segunda tiene un punto (Figura 4.1.72). Observando que en el paso anterior escribe la expresión de la parábola dejando en blanco la igualación (Figura 4.1.71), posiblemente haya resuelto las ecuaciones $x^2 + 4x + 5 = 0$ y $x^2 + 4x + 5 = 1$.

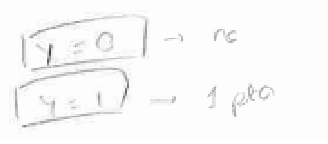


Figura 4.1.72. Estadio de rectas horizontales que no son solución. Resolución de Sofía.

Las siguientes rectas que estudia son y=2, y=3 e y=4. En cada caso, iguala la ecuación de la recta a la de la parábola y halla sus soluciones. Al obtener dos soluciones, concluye que tienen dos puntos de intersección (Figura 4.1.73).

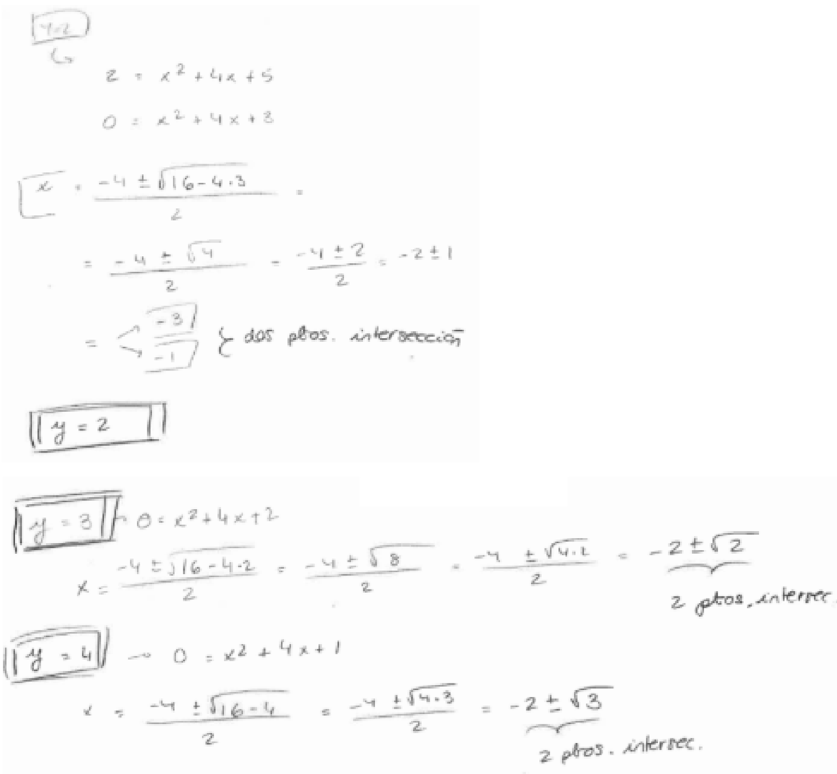


Figura 4.1.73. Estudio de rectas horizontales y presentación de soluciones. Resolución de Sofía.

Tras analizar las cinco rectas horizontales anteriores, aborda dos rectas oblicuas con ordenada en el origen igual a cero, y=4x e y=x. En el estudio de la primera, iguala la ecuación de la recta a la de la parábola, halla sus soluciones y concluye que la recta tiene dos puntos de intersección con la parábola (Figura 4.1.74). En el estudio de la segunda, únicamente iguala las ecuaciones y, sin mostrar ningún cálculo, concluye que no tiene puntos de intersección con la parábola (Figura 4.1.75).

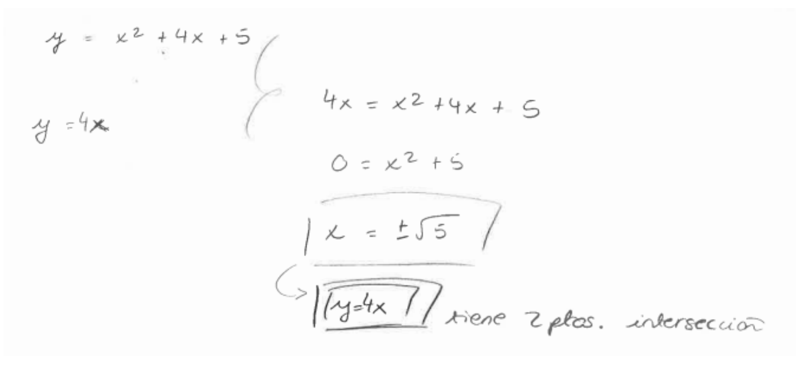


Figura 4.1.74. Estudio de recta oblicua y presentación de solución. Resolución de Sofía.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2+4x+5 \\ y = x \end{array}\right\} \quad 0 = x^2+3x+5 \quad \} \text{ No}$$

Figura 4.1.75. Estudio de recta oblicua que no es solución. Resolución de Sofía.

Por último, estudia otra recta oblicua, pero esta vez con ordenada en el origen no nula, y=x+4. Iguala la ecuación de la recta a la de la parábola y, sin llegar a calcular las soluciones pero observando que el discriminante es mayor que cero, concluye que la recta tiene dos puntos de intersección con la parábola (Figura 4.1.76). Aquí termina la resolución de Sofía.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2+4x+5 \\ \boxed{y = x+4} \end{array}\right\} \quad 0 = x^2+3x+1$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} \qquad \underline{2 \text{ ptos}}$$

Figura 4.1.76. Estudio de recta oblicua y presentación de solución. Resolución de Sofía.

<u>Análisis de la resolución de Sofía</u>

Poniendo el foco en las categorías de análisis, Sofía basa su resolución en el *heurístico ensayo y error*, pues toma rectas particulares y comprueba si cumplen o no las condiciones del problema.

Los *casos estudiados* por Sofía son cada una de las ocho rectas que analiza: y=0, y=1, y=2, y=3, y=4, y=4x, y=x e y=x+4.

Como puede observarse, predomina, casi exclusivamente, la *representación simbólica*, usada para presentar las rectas consideradas y realizar los cálculos de comprobación, utilizando la *representación verbal* solo al indicar el número de puntos de intersección entre la recta estudiada y la parábola.

Las *soluciones* presentadas son aquellas rectas en las que obtiene dos soluciones y, por tanto, tienen dos puntos de intersección con la parábola, es decir, y=2, y=3, y=4, y=4x e y=x+4. La *comprobación de las soluciones* es intrínseca al heurístico empleado, por lo que comprueba cada una de los casos que estudia: y=0, y=1, y=2, y=3, y=4, y=4x, y=x e y=x+4.

Por último, no se han encontrado *errores* en la resolución de Sofía.

En la Tabla 4.1.15 se muestra un resumen de la resolución de Sofía atendiendo a las categorías de análisis.

Tabla 4.1.15. Resumen de la resolución de Sofía.

Heurísticos	1. Ensayo y error
Casos estudiados	y=0 y=1 y=2 y=3 y=4 y=4x y=x y=x+4
Representaciones	Simbólica y verbal
Soluciones	y=2 y=3 y=4 y=4x y=x+4
Comprobación de soluciones	y=0 y=1 y=2 y=3 y=4 y=4x y=x y=x+4
Errores	No

4.1.16 Resolución de Manuel (E16)

<u>Descripción de la resolución de Manuel</u>

Manuel comienza declarando su interpretación del enunciado y afirma que no se piden todas las rectas con dos puntos de intersección con la parábola. Por ello, especifica que comenzará estudiando las rectas paralelas al eje OX, caso que considera el más sencillo (Figura 4.1.77).

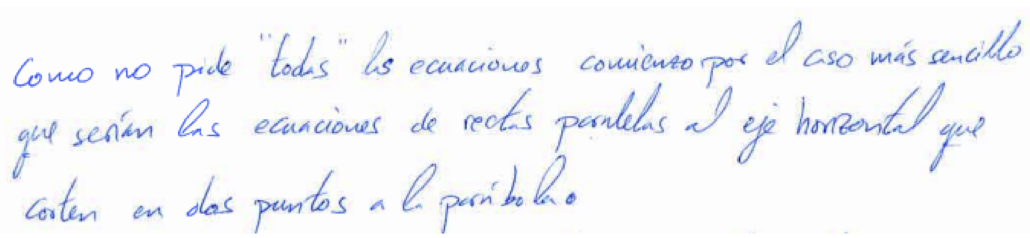


Figura 4.1.77. Declaración del primer paso de la búsqueda de soluciones (rectas horizontales). Resolución de Manuel.

Para el estudio de estas rectas, en primer lugar, calcula la que es paralela al eje OX con un solo punto de intersección con la parábola, es decir, la recta tangente a la parábola en su vértice. Con este fin, halla la primera derivada de la función cuadrática y la iguala a cero. Obtiene así la abscisa del vértice, la cual sustituye en la expresión de la parábola para calcular la ordenada correspondiente. Concluye que la recta y=1 es la tangente horizontal de la parábola (Figura 4.1.78).

Primero determino la recta que solo corta en un punto de esta manera:

$y = x^2+4x+5$

$y' = 2x+4 \Rightarrow (y'=0 \Leftrightarrow x=-2)$

$(-2)^2+4\cdot(-2)+5 = 4-8+5 = 1 \Rightarrow y=1$ es la recta tangente a la parábola $y=x^2+4x+5$ paralela al eje horizontal

Figura 4.1.78. Cálculo de la primera derivada, del vértice y de la recta tangente por el vértice. Resolución de Manuel.

Teniendo la recta tangente horizontal, indica que toda recta horizontal por encima de ella, tiene dos puntos de intersección con la parábola (Figura 4.1.79).

Por tanto, cualquier recta: $y = a$ con $a>1$ $(a\in\mathbb{R}^+)$ es una recta que corta a la parábola en dos puntos.

Figura 4.1.79. Presentación de soluciones horizontales. Resolución de Manuel.

Tras esto, indica que para generalizar este resultado comenzaría por las rectas que pasen por el punto (-2,1) y cualquier otro punto de la parábola para, a continuación, generalizar para las rectas que pasen por dos puntos cualesquiera de la parábola (Figura 4.1.80).

Para generalizar este resultado a rectas no paralelas al eje horizontal empezaría a plantear, primero las que pasan por el punto (-2,1) y por cualquier otro punto de la parábola y, posteriormente, intentaría generalizarlo a dos puntos cualesquiera de la parábola.

Figura 4.1.80. Declaración de los siguientes pasos en la búsqueda de soluciones. Resolución de Manuel.

Para el primer caso planteado, rectas que pasen por el (-2,1) y otro punto de la parábola, indica que se trataría de todo el haz de rectas que pasan por el (-2,1) a excepción de las rectas y=1 y x=-2, que solo tendrían un punto de intersección. A pesar de ser correcto, termina su resolución indicando que su argumento no le “ayuda demasiado” (Figura 4.1.81).

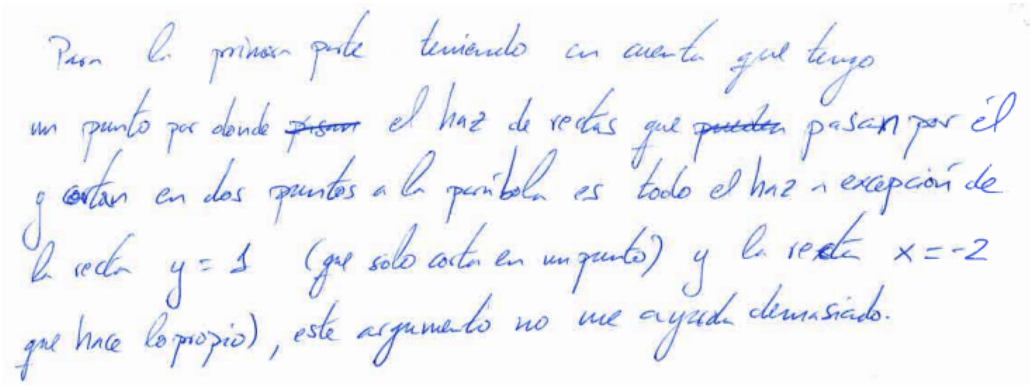

Para la primera parte teniendo en cuenta que tengo un punto por donde ~~pasan~~ el haz de rectas que ~~pueden~~ pasan por él y cortan en dos puntos a la parábola es todo el haz a excepción de la recta $y=1$ (que solo corta en un punto) y la recta $x=-2$ que hace lo propio), este argumento no me ayuda demasiado.

Figura 4.1.81. Presentación de soluciones (haz de rectas que pasan por el vértice de la parábola). Resolución de Manuel.

Análisis de la resolución de Manuel

Teniendo en cuenta las categorías de análisis, Manuel hace uso del *heurístico descomponer el problema en partes.* Divide la búsqueda de soluciones abordando, de manera graduada, tres grupos de rectas: rectas horizontales, rectas que pasan por el vértice y otro punto de la parábola y rectas que pasan por dos puntos cualesquiera de la parábola (distintos del vértice).

Los *casos estudiados* por Manuel son: rectas paralelas al eje OX; rectas que pasan por el vértice de la parábola y rectas que pasan por dos puntos cualesquiera de la parábola.

En esta resolución aparece la *representación simbólica* para calcular la recta tangente horizontal (Figura 4.1.78) y presentar las soluciones (Figura 4.1.79). Aunque predomina el uso de la *representación verbal*, utilizándose para indicar los tipos de rectas que va a analizar (Figuras 4.1.77 y 4.1.80), los pasos que da (Figura 4.1.78), las conclusiones de sus cálculos (Figura 4.1.78) y para presentar y justificar las soluciones (Figuras 4.1.79 y 4.1.81).

Manuel da como *soluciones* las rectas paralelas al eje OX, y=a, con a>1 y $a \in R^{+}$, y el haz de rectas que pasan por (-2,1) excepto y=1 y x=-2, sin dar ningún tipo de expresión algebraica. Todas estas soluciones son correctas y completas. No realiza la *comprobación de las soluciones*.

Por último, no se ha detectado ningún *error* en la resolución de este estudiante.

En la Tabla 4.1.16 se muestra un resumen de la resolución de Manuel atendiendo a las categorías de análisis.

Tabla 4.1.16. Resumen de la resolución de Manuel.

Heurísticos	1. Descomponer el problema en partes
Casos estudiados	Rectas paralelas al eje OX Rectas que pasan por el vértice de la parábola Rectas que pasan por dos puntos cualesquiera de la parábola
Representaciones	Simbólica y verbal
Soluciones	y=a, con a>1 y $a \in R^{+}$ Haz de rectas que pasan por (-2,1) excepto y=1 y x=-2
Comprobación de soluciones	No
Errores	No

4.2. Análisis de las resoluciones por categorías

En esta sección se presenta una síntesis de los resultados obtenidos en el estudio de las resoluciones para cada una de las categorías de análisis: *heurísticos*, *casos estudiados*, *representaciones*, *soluciones*, *comprobación de las soluciones* y *errores*.

4.2.1 Heurísticos

En la Tabla 4.1.17 se presenta un resumen de los *heurísticos* utilizados por cada uno de los estudiantes, donde el número indica el orden en el aparece en su resolución. A continuación, se analiza en detalle el contenido de dicha tabla.

Tabla 4.1.17. Resumen de los *heurísticos* utilizados.

HEURÍSTICOS	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15	E16
Ensayo y error			2		3		2								1	
Descomponer el problema en partes						2	3									1
Suponer el problema resuelto	1	1	1	1	2	3	5									
Dibujar una figura				2	1	1	1	1	1	1	1	1				
Generalizar							4	2	2	2	2		1	1		

El *heurístico* más utilizado por los participantes para realizar la búsqueda de soluciones del problema fue *dibujar una figura*, en este caso, la representación gráfica de la parábola dada en el enunciado (9 estudiantes). Todos los participantes que lo han usado es el primer paso que realizan al abordar el problema, a excepción de una estudiante (E4). Además, salvo otra de las estudiantes (E12), el resto utiliza este heurístico combinado con otros.

A continuación, encontramos dos *heurísticos* que fueron utilizados por 7 estudiantes: *suponer el problema resuelto* y *generalizar*.

El primero de ellos, todos lo utilizan de manera similar: consideran la ecuación explícita de una recta (por ejemplo, y=ax+b), la igualan a la ecuación de la parábola dada y buscan las condiciones para los coeficientes de la recta (a y b) que hacen que tenga dos puntos de intersección con la parábola. Dos de los participantes (E1 y E2) es el único heurístico que utilizan, llevando a cabo un enfoque puramente algebraico (Figuras 4.1.1-4.1.5 para E1 y Figuras 4.1.6-4.1.10 para E2). Junto a E3 y E4, estos cuatro estudiantes, es la primera estrategia con la que afrontan la resolución, continuando E3 con *ensayo y error* (Figura 4.1.14) y E4 con *dibujar una figura* (Figura 4.1.17). Los otros tres estudiantes que han utilizado este heurístico (E5, E6 y E7) lo han hecho después de haber utilizado antes uno, dos y cuatro heurísticos diferentes (Figura 4.1.24 para E5, Figuras 4.1.28-4.1.29 para E6 y Figuras 4.1.35-4.1.37 para E7), respectivamente, y, anteriormente, habían usado, los tres, *dibujar una figura* (Figura 4.1.20 para E5, Figura 4.1.26 para E6 y Figuras 4.1.31, 4.1.33 y 4.1.38 para E7).

En relación al *heurístico generalizar,* dos estudiantes (E13 y E14) es el único que utilizan y, a pesar de ser resoluciones diferentes, lo hacen apoyándose en el cálculo de puntos concretos de la parábola y rectas que pasen por ellos. E13 busca una recta que pasa por dos puntos de la parábola (Figura 4.1.67) y, a partir de este procedimiento, intenta generalizar para las rectas que pasen por otros puntos de la parábola (Figura 4.1.68). E14 considera dos puntos de la parábola, construye la recta que pasa por ellos (Figura 4.1.69) e indica que podría realizar el mismo procedimiento para dos puntos cualesquiera de la parábola (Figura 4.1.70). Cuatro de los estudiantes (E8-E11) lo combina, exclusivamente, con *dibujar una figura* comenzando con la representación gráfica de la función y generalizando a partir de algunas soluciones que obtienen con dicha representación. E8 y E9, dan rectas horizontales (Figuras 4.1.42 y 4.1.46 respectivamente) que son solución del problema y, a partir de ellas, generalizan la solución para rectas horizontales por encima del vértice (Figuras 4.1.44 y 4.1.47, respectivamente). E10 a partir de tres rectas particulares que pasan por el punto (0,5) (Figura 4.1.50), generaliza a todas las rectas que pasan por el (0,5) y cualquier otro punto de la parábola (Figura 4.1.51). E11 a partir de la recta que pasa por los puntos (-4,0) y (0,4) (Figura 4.1.56), generaliza su solución a la familia de rectas rectas que pasan por los puntos (-4,0) y (0,λ) (Figura 4.1.59). En cambio, E7, a pesar de empezar su resolución también con *dibujar una figura,* utiliza otros dos heurísticos antes de abordar la generalización.

Cuatro estudiantes (E3, E5, E7 y E15) utilizaron el *heurístico ensayo y error*. E15 es el único heurístico que utiliza en su resolución. Para ello, toma rectas particulares y verifica si cumplen o no las condiciones del problema igualando cada una de las ecuaciones de las rectas a la ecuación de la parábola y comprobando si tienen o no dos puntos de intersección (Figuras 4.1.72-4.1.76). Este proceso no es del todo aleatorio ya que primero toma rectas horizontales (Figuras 4.1.72 y 4.1.73), después rectas oblicuas con ordenada en el origen

(Figuras 4.1.74 y 4.1.75) y, por último, una recta oblicua con ordenada en el origen no nula (Figura 4.1.76). E3 y E5 lo utilizan tras el *heurístico suponer el problema resuelto* para probar si dos valores concretos de a y b cumplen las condiciones obtenidas anteriormente y construir las rectas correspondientes (Figuras 4.1.14 y 4.1.24). Y E7 combina el *ensayo y error* con todos los otros *heurísticos* y destaca, además, que lo utiliza de manera gráfica (Figura 4.1.33). Representa gráficamente la parábola y varias rectas, indicando si tienen o no dos puntos de intersección.

El *heurístico descomponer el problema en partes* aparece en la resolución de 3 estudiantes (E6, E7 y E16). E16 utiliza este heurístico únicamente, mientras que E6 y E7 lo combinan con varios. Los tres estudiantes dividen el estudio de las soluciones en grupos de rectas según su pendiente. E6 considera dos grupos: rectas horizontales (Figura 4.1.28) y rectas de la forma y=mx+n con pendiente positiva (Figura 4.1.29), y, seguidamente, cambia su heurístico a *suponer el problema resuelto* (Figura 4.1.30). En cambio, E7 lo utiliza tras haber hecho uso de *dibujar una figura* (Figura 4.1.31) y *ensayo y error* (Figura 4.1.33). En su caso, divide el estudio en tres grupos: rectas verticales (Figura 4.1.35), rectas horizontales (Figura 4.1.36) y rectas de la forma y=mx+n con pendiente positiva (Figura 4.1.37). Por último, E16 también divide el estudio en tres grupos, pero que no coinciden con los anteriores: rectas horizontales (Figura 4.1.79), rectas que pasan por el vértice de la parábola (Figura 4.1.80) y rectas que pasan por dos puntos cualesquiera de la parábola, distintos del vértice (Figura 4.1.81).

Para concluir, como puede observarse en la Tabla 4.1.17, la mayoría de los estudiantes utilizan el *heurístico dibujar una figura* (9 estudiantes), salvo una de ellas (E4) lo hacen como primera opción para aproximarse a las soluciones (E5-E12). Además, solo una de ellas lo utiliza como única estrategia de resolución (E12), el resto lo combina con otros heurísticos (E4-E11). La mitad de ellos continúan utilizando *generalizar* (E8-E11) y los demás con los diferentes heurísticos. Entre los que intentan resolver el problema con un único *heurístico* hay variedad en los utilizados: E1 y E2 lo hacen con *suponer el problema resuelto*; E13 y E14 con *generalizar*, E12 utiliza *dibujar una figura*, E15 *ensayo y error* y E16 *descomponer el problema en partes.*

4.2.2 Casos estudiados

En la Tabla 4.1.18 se muestra un resumen de los *casos estudiados* y que se analiza con más detalle a continuación. En el análisis de las resoluciones de los 16 participantes se pueden distinguir cuatro tipos de casos estudiados:

- *Rectas horizontales*. Se incluyen rectas horizontales particulares (por ejemplo, y=0, y=1, y=2, …) o la expresión general de una recta horizontal (por ejemplo, y=k, con $k \in \mathbb{R}$)
- *Rectas verticales*. Se incluyen rectas verticales particulares (por ejemplo, x=0, x=1, x=2, …) o la expresión general de una recta vertical (por ejemplo, x=k, con $k \in \mathbb{R}$)
- *Rectas oblicuas*. Se incluyen rectas oblicuas particulares (por ejemplo, y=x, y=x+4, y=-x+1, y=-2x-3). En este tipo de rectas no se incluye la forma general, que se estudia de manera independiente en el siguiente tipo.

- *Recta general (y=ax+b; y=mx+n)*. Aunque este tipo contiene todas las rectas anteriores, se ha decidido estudiar de manera independiente ya que la naturaleza de su estudio no es geométrica, como los casos anteriores, sino algebraica al estar ligado al *heurístico suponer el problema resuelto.*

Tabla 4.1.18. Resumen de los *casos estudiados*.

CASOS ESTUDIADOS	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15	E16
Rectas horizontales				x	x	x	x	x	x			x			x	x
Rectas verticales							x									
Rectas oblicuas			x		x		x			x	x	x	x	x	x	x
Recta general (y=ax+b; y=mx+n)	x	x	x	x	x	x	x									

Como puede observarse, los casos más estudiados son las rectas oblicuas, siendo diez estudiantes quienes las abordan (E3, E5, E7, E10-E16). E3 y E5 estudian rectas oblicuas particulares tras encontrar condiciones de a y b para que la recta general y=ax+b sea solución del problema (Figuras 4.1.14 y 4.1.24). E10, E12, E13 y E14 construyen rectas oblicuas que pasan por dos puntos de la parábola y E11 las construye a partir de dos puntos situados en los ejes de coordenadas (Figura 4.1.56). Además, E10 y E11 intentan generalizar dicha construcción fijando uno de los puntos y variando el otro (Figura 4.1.51 para E10 y Figuras 4.1.58 y 4.1.59). E15 estudia varias rectas oblicuas particulares como parte de su *heurístico ensayo y error*. Y, por último, E16 se plantea, de forma general, estudiar las rectas que pasan por el vértice de la parábola y las rectas que pasan por dos puntos cualesquiera de la parábola.

El siguiente caso más abordado por los participantes es el correspondiente a rectas horizontales, siendo 9 estudiantes quienes las estudian (E4-E9, E12, E15 y E16). E8 y E9 son el único tipo de rectas que abordan. Para ello, en primer lugar, estudian dos rectas horizontales particulares (Figuras 4.1.42 y 4.1.46) y, a partir de ellas, generalizan para todas las rectas horizontales por encima del vértice representado (Figuras 4.1.44 y 4.1.47). En cambio, tres participantes (E5, E12 y E15) analizan solo rectas horizontales particulares, sin llegar a generalizar. Dos participantes (E5 y E12) estudian únicamente una recta, E5 tras encontrar condiciones de a y b para que la recta general y=ax+b sea solución del problema (Figura 4.1.24) y E12 la construye tomando dos puntos de la tabla de valores (Figura 4.1.65). Al contrario que E15 que estudia cinco rectas horizontales como parte de su *heurístico ensayo y error* (Figuras 4.1.72 y 4.1.73). En las otras cuatro resoluciones (E4, E6, E7 y E16) estudian la forma general de las rectas horizontales por encima del vértice de la parábola.

La recta general es el siguiente *caso* más estudiado, y coincide con aquellos estudiantes que utilizan el *heurístico suponer el problema resuelto* (E1-E7). Este heurístico lleva implícito realizar un estudio de la ecuación de una recta (y=ax+b; y=mx+n) para encontrar aquellas condiciones que las hacen soluciones del problema. En el caso de E6, se plantea las rectas de la forma y=mx+n con pendiente positiva (Figuras 4.1.29) y, en el caso de E7, las de pendiente no nula (Figura 4.1.37).

La estudiante E7 es la única que estudia rectas verticales y argumenta por qué no son solución del problema (Figura 4.1.35).

4.2.3 Representaciones

En la Tabla 4.1.19 se muestra una síntesis de las *representaciones* que pueden observarse en las resoluciones y que serán analizadas a continuación.

Tabla 4.1.19. Resumen de las *representaciones* utilizadas.

REPRESENTACIONES	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15	E16
Gráfica				x	x	x	x	x	x	x	x	x				
Tabular						x			x	x		x				
Simbólica	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Verbal	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Todos los participantes usaron tanto la *representación simbólica* como la *representación verbal*. La primera la utilizaron para presentar ecuaciones de rectas, soluciones y la operatoria necesaria para calcular el vértice de la parábola, los puntos de corte, la monotonía, rectas tangentes y para resolver ecuaciones. La *representación verbal* aparece para explicar los pasos dados durante el proceso de resolución, y para justificar y presentar soluciones.

De los 16 estudiantes, 9 (E4-E12) realizaron la *representación gráfica*, de la parábola y, en algunos casos, de diferentes rectas, utilizándola como heurístico en sus resoluciones. Este resultado fue publicado en los análisis preliminares de algunas categorías en los trabajos de-Armas-González et al. (2022a, 2022b). Cuatro de estos estudiantes (E6, E9, E10 y E12) se apoyaron para ello en la *representación tabular* en la que recogen las coordenadas de puntos particulares de la parábola. E6 la plantea pero la deja vacía (Figura 4.1.27). E9 da un único punto que confunde con el vértice (Figura 4.1.45). E10 incluye cuatro puntos, pero solo representa uno que, al igual que E9, confunde con el vértice (Figura 4.1.48). E12 es la única que la utiliza correctamente, recogiendo 6 puntos de la parábola en la tabla y utilizando todos para realizar una representación gráfica correcta de la parábola (Figura 4.1.64). Dos estudiantes, E4 y E7, realizan la *representación gráfica* de la parábola sin recoger ninguna información adicional (Figura 4.1.17 para E4 y Figuras 4.1.31, 4.1.33 y 4.1.38 para E7). Y los tres estudiantes restantes la realizan apoyándose en la *representación simbólica.* E5 recoge los cálculos de los puntos de corte y el vértice (Figura 4.1.19), E8 solo calcula los puntos de corte (Figuras 4.1.40 y 4.1.41) y E11 recoge cálculos del vértice (Figura 4.1.52), monotonía (Figura 4.1.53) y puntos de corte (Figura 4.1.54).

4.2.4 Soluciones

La Tabla 4.1.20 recoge un resumen de las *soluciones* dadas por los estudiantes que analizamos seguidamente con más detalle.

Tabla 4.1.20. Resumen de las *soluciones*.

SOLUCIONES	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15	E16
Rectas horizontales				x		x	x	x	x			x			x	x
Rectas oblicuas			x				x			x	x	x	x	x	x	x
Recta general (y=ax+b; y=mx+n) con condiciones para sus coeficientes	x	x			x											

Como puede observarse en la Tabla 4.1.20, la mitad de los estudiantes presenta rectas horizontales (E4, E6-E9, E12, E15 y E16) y/o rectas oblicuas (E3, E7, E10-E16) como solución al problema. Solo tres (E1, E2 y E5) presentan ecuaciones de rectas generales con condiciones para sus coeficientes para que cumplan el enunciado. Por lo tanto, se puede concluir que la mayoría de los estudiantes, 13 de 16, presenta soluciones particulares al problema, mientras que solo 3 presentan como solución la ecuación de una recta general con ciertas restricciones. Estos resultados fueron publicados en unos estudios preliminares de las resoluciones (de-Armas-González et al., 2022a, 2022b).

De los que presentan rectas horizontales, salvo dos de ellos (E12 y E15) que solo obtienen rectas horizontales particulares (Figuras 4.1.65, 4.1.72 y 4.1.73), el resto recoge una generalización de las rectas horizontales por encima del vértice (en algunos casos erróneamente representado) (Figuras 4.1.18, 4.1.28, 4.1.36, 4.1.44, 4.1.47 y 4.1.79).

Los participantes que dan como solución rectas oblicuas particulares las obtienen siguiendo diferentes estrategias. E3 las halla tras calcular condiciones parciales para que una recta general tenga dos puntos de intersección con la parábola (Figura 4.1.14). E7 las presenta gráficamente. E10, E13 y E14 construyen las rectas determinadas por dos puntos particulares de la parábola (Figuras 4.1.50, 4.1.67 y 4.1.69), al igual que E12 (Figura 4.1.65) aunque no indica ningún cálculo ni argumentación. E11 utiliza dos puntos no pertenecientes a la parábola y situados en los ejes de coordenadas (Figura 4.1.56). E15, aplicando ensayo y error, da como solución varias rectas horizontales (Figuras 4.1.72 y 4.1.73) y varias oblicuas (Figuras 4.1.74-4.1.76). Y, por último, E16 que, después de calcular el vértice, da como solución el haz de rectas que pasan por él excepto y=1 y x=-2 (Figura 4.1.81).

Finalmente, tres estudiantes (E1, E2 y E5) presentan condiciones para los coeficientes de la ecuación explícita de una recta que hacen que cumpla la condición del enunciado, aunque ninguna de estas soluciones es completamente correcta (Figuras 4.1.4, 4.1.5, 4.1.10 y 4.1.23).

4.2.5 Comprobación de soluciones

La Tabla 4.1.21 recoge las resoluciones que realizan o no *comprobación de las soluciones* (de todas o de parte de ellas).

Tabla 4.1.21. Resumen de la *comprobación de soluciones*.

COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15	E16
Todas las dadas			x								x	x			x	
Algunas de las dadas					x			x	x	x						
Ninguna	x	x		x		x	x						x	x		x

La mitad de los estudiantes no comprueba ninguna de las soluciones que da (8 estudiantes). En el caso de seis de ellos (E1, E2, E4, E6, E7 y E16), estas soluciones son familias infinitas de rectas (por ejemplo, todas las rectas horizontales por encima del vértice o todas las rectas que pasan por el vértice) o son las rectas de ecuación y=ax+b cuyos coeficientes deben cumplir ciertas condiciones. Al haberlas obtenido a partir de la posición del vértice de la parábola o imponiendo que cumplan el enunciado del problema, puede ser una justificación de que no hayan realizado su comprobación.

Los cuatro estudiantes que comprueban algunas de las soluciones dadas (E5, E8, E9 y E10), son aquellos que dan como solución un conjunto de rectas particulares a partir de las que generalizan a una grupo más amplio de rectas, siendo las rectas particulares aquellas que comprueban, salvo E10 que la hace de su generalización pero no la completa (Figura 4.1.51). E5 las comprueba de manera gráfica, aunque incorrectamente, dibujándolas junto a la parábola (Figura 4.1.20) mientras que E8 y E9 lo hacen de manera analítica calculando los puntos de corte de las rectas con la parábola (Figuras 4.1.43 y 4.1.46).

De los cuatro participantes que comprueban todas las soluciones dadas, tres de ellos (E3, E11 y E15) lo hacen calculando los puntos de intersección resolviendo la ecuación resultante de igualar las ecuaciones de las rectas y la parábola (Figuras 4.1.15, 4.1.57 y 4.1.73-4.1.76). En el caso de E15 esta comprobación está implícita dentro del heurístico utilizado, ensayo y error. En cambio, E12 realiza esta verificación de manera gráfica (Figura 4.1.64).

4.2.6 Errores

Durante el análisis de las resoluciones, se han detectado diversos errores que hemos agrupado en las siguientes categorías:

- Operatoria: Errores al transponer términos en una ecuación, al multiplicar o al expandir expresiones elevadas al cuadrado.
- Representación del vértice: Errores al representar gráficamente el vértice de la parábola dada en el enunciado.

- Representaciones de una función: Errores en la utilización de las representaciones simbólica o tabular de las rectas o la parábola.
- Conexión entre los cálculos y el enunciado: Errores al interpretar los cálculos realizados o los resultados obtenidos en el contexto del problema.
- Tangentes a la parábola: Errores en la interpretación del concepto de recta tangente a una parábola.
- Conjeturas falsas: Errores relacionados con el establecimiento de propiedades.

En la Tabla 4.1.22, se presenta una síntesis de los errores cometidos por cada uno de los participantes atendiendo a las categorías anteriores.

Tabla 4.1.22. Resumen de los *errores* cometidos.

ERRORES	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15	E16
No comete errores												x		x	x	x
Operatoria	x		x			x					x		x			
Representación del vértice						x	x	x	x	x						
Representaciones de una función				x		x			x							
Conexión entre los cálculos y el enunciado		x			x											
Tangentes de la parábola							x									
Conjeturas falsas	x										x					

Como se observa en la Tabla 4.1.22, en solo cuatro de las 16 resoluciones no se ha encontrado ningún error. Los errores que aparecen con mayor frecuencia (en 5 resoluciones) son de operatoria y en la representación gráfica del vértice.

Con respecto a los errores de operatoria, E1 comete tres errores de este tipo: uno al transponer términos de la ecuación resultante de igualar la ecuación de la parábola a la de una recta general y=ax+b (Figura 4.1.1), otro al expandir la expresión $(4 - a)^2$ (Figura 4.1.3) y el último al operar con sumas y multiplicaciones (Figura 4.1.3). E3 comete un error en la obtención de las ordenadas de los puntos de intersección entre una recta particular y la parábola, pero al no recoger el cálculo realizado no podemos concluir a qué se debe (Figura 4.1.15). E6 y E13 cometen errores con los signos al multiplicar (Figuras 4.1.30 y 4.1.67). Para finalizar con este tipo de errores, E11 olvida restar dos términos en una ecuación durante su comprobación de las soluciones (Figura 4.1.63).

En relación al error en la representación del vértice de la parábola, de los 9 estudiantes que representan gráficamente la parábola (Tabla 4.1.19), cinco (E6, E7, E8, E9 y E10) sitúan el vértice sobre el punto de corte de la parábola con el eje OY (Figuras 4.1.26, 4.1.33, 4.1.42, 4.1.45 y 4.1.48). Este resultado fue presentado en el estudio preliminar de-Armas-González et al. (2022b).

Tres alumnas (E4, E6 y E9) cometen errores con las diferentes representaciones de una función. E4 transcribe erróneamente la ecuación de la parábola del enunciado cambiando su término independiente por una b, al igual que el término de la recta ha considerado en su resolución, y=mx+b. E6 expresa las ecuaciones de las rectas paralelas al eje OX en el semiplano x>5 como y=x+n con n>5, cometiendo a la vez el error de definir dicho semiplano por la inecuación x>5 en lugar de y>5. En el caso de E9, comete dos errores de este tipo: por un lado, representa gráficamente la parábola empleando una tabla de valores en la que indica un único punto y, por otro lado, expresa una recta como $y = \infty$.

En las resoluciones de dos alumnos (E2 y E5) se han detectado errores relacionados con la conexión entre los cálculos y el enunciado del problema. Ambos, apoyándose en el *heurístico suponer el problema resuelto,* enfocan su resolución desde un punto de vista algebraico en el que, al igualar la ecuación de la parábola a la de una recta general y=ax+b, se buscan las condiciones para a y b tales que sea solución del problema. Como puede observarse en el enfoque algebraico del análisis a priori del problema, de esta igualación se obtiene una ecuación de segundo grado convirtiendo en el objetivo encontrar los valores de a y b que hacen que el discriminante sea mayor estricto que cero, para así obtener dos soluciones que serían, precisamente, los puntos de corte entre la parábola y la recta. El error de E2 está en afirmar que la recta y la parábola tendrán dos puntos de intersección cuando el discriminante es distinto de cero, incluyendo los valores que lo hacen menor estricto que cero y, con esto, las rectas que no cortan a la parábola en ningún punto (Figura 4.1.10). E5 se centra en que los dos discriminantes que obtiene a lo largo de su resolución *tengan sentido*, que interpretamos como que se obtienen valores reales (Figuras 4.1.22 y 4.1.23) ya que indica que deben ser mayores o iguales que cero. Esto le lleva a, finalmente, dar condiciones para a y b que hacen que las rectas sean tangentes y, por tanto, no solución del problema (Figura 4.1.23).

Una alumna (E7) comete un error asociado a las rectas tangentes a una función, en este caso, la parábola. Como puede verse en la Figura 4.1.33 representa dos rectas que pasan por el vértice de la parábola, una horizontal y una oblicua, tomando ambas como tangentes a la parábola si advertir que en un mismo punto solo existe una recta tangente.

Por último, dos alumnos (E1 y E15) presentan errores al realizar conjeturas equivocadas. E1, en su resolución, busca condiciones para los coeficientes de una recta general y=ax+b que resuelven el problema. Al final de esta, mientras estudia los valores que debe tener a para ciertas condiciones de b, establece equivocadamente que una expresión en función de b es siempre positiva (Figura 4.1.5), sin mostrar ninguna explicación ni argumentación. E11, por su parte, tras construir la recta que pasa por los puntos (-4,0) y (0,4) intenta generalizar su solución a la familia de rectas rectas que pasan por los puntos (-4,0) y (0,λ). Establece, erróneamente, que para λ>1 habrá dos soluciones reales (Figuras 4.1.59 y 4.1.61), sin indicar cómo alcanza ese valor, aunque podría estar apoyándose en la representación gráfica de la parábola y considerar solo puntos sobre el eje OY que se encuentren en el semiplano de puntos con ordenada mayor a la ordenada del vértice, (-2,1). Esta equivocación puede estar provocada por la imposibilidad de realizar una representación gráfica exacta utilizando únicamente papel y lápiz.

Capítulo 5

ANÁLISIS DE LOS DATOS. SEGUNDA FASE

En este capítulo se presenta el análisis de los datos de la segunda fase de la investigación: los procesos de evaluación seguidos por una pareja de estudiantes para evaluar la resolución al problema de una compañera o un compañero. Este análisis se divide en cuatro bloques que agrupan los ocho casos analizados, cada uno formado por tres estudiantes (la pareja que evalúa y la persona evaluada). En cada bloque está compuesto por uno o varios casos atendiendo a las estrategias de resolución empleadas en las resoluciones evaluadas. Para cada caso se muestra, en primer lugar, un análisis conjunto de las tres resoluciones implicadas, lo que permite contextualizar la evaluación; en segundo lugar se presenta el análisis del proceso de evaluación seguido por la pareja evaluadora atendiendo a tres aspectos: categorías a las que hacen referencia, uso de la propia resolución y carácter de las intervenciones. Por último, se extraen resultados globales del análisis conjunto de todos los casos.

Para organizar el análisis de esta segunda fase de la investigación, los casos se ordenaron teniendo en cuenta dos aspectos: el principal heurístico que aparece en las resoluciones evaluadas y las similitudes y diferencias entre la resolución evaluada y las resoluciones presentadas por los evaluadores, y entre las resoluciones de los evaluadores entre sí. Con estos criterios, los 8 casos se organizaron en cuatro bloques:

- Bloque I. El primer bloque comprende los tres primeros casos. Las tres resoluciones evaluadas, aunque con algunas diferencias, utilizan el *heurístico suponer el problema resuelto*, tomando la ecuación general de una recta ($y=ax+b$) y buscando las condiciones para a y b que resuelven el problema. En el Caso 1, ambos evaluadores realizan un procedimiento muy similar al evaluado. En los casos 2 y 3 los procesos de resolución de los evaluadores son diferentes a los evaluados, sin embargo, en el Caso 2 los evaluadores coinciden en la búsqueda de rectas horizontales y en el Caso 3 los tres procesos de resolución son diferentes.

- Bloque II. En este bloque se agrupan los casos 4, 5 y 6. Como en el bloque anterior, las resoluciones evaluadas son similares entre ellas. En todas ellas se construyen rectas que pasan por dos puntos de la parábola haciendo uso del *heurístico generalizar, dibujar una figura* o ambos. En el Caso 4, ambas evaluadoras también construyen rectas que pasan por dos puntos de la parábola. En los casos 5 y 6 los procesos de resolución de los evaluadores son diferentes al de la evaluada. En el Caso 5 ambos evaluadores coinciden al utilizar el *heurístico suponer el problema resuelto,* considerando la ecuación general de una recta ($y=ax+b$) para buscar las condiciones de *a* y *b* que resuelven el problema. En el Caso 6, aunque los procesos de resolución de las evaluadas difieren, ambas coinciden en un momento de sus resoluciones abordando rectas horizontales.

- Bloque III. En el tercer bloque se incluye únicamente el Caso 7. La evaluada, haciendo uso del *heurístico ensayo y error,* va considerando distintas rectas y comprobando si tienen o no dos puntos de intersección con la parábola. Este proceso de resolución es diferente al de las dos evaluadoras, cuyas resoluciones sí son similares entre sí, puesto que ambas construyen rectas que pasan por dos puntos de la parábola.

- Bloque IV. El cuarto y último bloque comprende el Caso 8. El evaluado utiliza el *heurístico descomponer el problema en partes,* dividiendo la búsqueda de soluciones en tres grupos de rectas: rectas horizontales, rectas que pasan por el vértice de la parábola y rectas que pasan por dos puntos cualesquiera de la parábola (distintos del vértice). Esta resolución difiere de las de las evaluadoras, quienes resuelven el problema de forma similar entre ellas, *suponiendo el problema resuelto.*

La Tabla 5.1 muestra una síntesis de las características de cada uno de los casos que se han considerado para agruparlos en bloques y ordenarlos dentro de cada bloque.

Tabla 5.1. Organización del análisis de los casos.

BLOQUE	**CASOS**	**OBSERVACIONES**
Bloque I	1, 2 y 3	Evaluados: *suponer el problema resuelto.* - Caso 1. Evaluadores: procedimientos similares al evaluado. - Caso 2. Evaluadores: procedimientos diferentes al evaluado, pero similares entre ellos. - Caso 3. Evaluadores: procedimientos diferentes al evaluado y entre ellos.
Bloque II	4, 5 y 6	Evaluadas: *generalizar, dibujar una figura o ambos* (construyendo rectas que pasan por dos puntos de la parábola) - Caso 4. Evaluadoras: procedimientos similares a la evaluada. - Caso 5. Evaluadores: procedimientos diferentes a la evaluada, pero similares entre ellos. - Caso 6. Evaluadoras: procedimientos diferentes a la evaluada, con alguna similitud entre ellas.
Bloque III	7	Evaluada: *ensayo y error.* - Caso 7. Evaluadoras: procedimientos diferentes al evaluado, pero similares entre ellas.
Bloque IV	8	Evaluado: *descomponer el problema en partes* (grupos de rectas) - Caso 8. Evaluadoras: procedimientos diferentes al evaluado, pero similares entre ellas.

5.1. Análisis de los casos del BLOQUE I

El primer bloque comprende los tres primeros casos, en el que las resoluciones evaluadas, apoyándose en el *heurístico suponer el problema resuelto*, consideran la ecuación explícita de una recta (*y=ax+b*) y buscan las condiciones necesarias de los coeficientes a y b para dicha ecuación sea solución del problema.

5.1.1 Caso 1. David, Sandra y Javier

En esta sección se presenta el caso formado por David (E3) y Sandra (E6), quienes evalúan la resolución de Javier (E5). En primer lugar, se muestra una comparativa de las principales características, atendiendo a las categorías de análisis, de las resoluciones realizadas por estos tres estudiantes cuyo estudio se presentó en detalle en las secciones 4.1.3, 4.1.6 y 4.1.5. Un análisis preliminar de este caso puede consultarse en el trabajo de-Armas-González et al. (2021a), ya que fue el primero que se abordó como parte de la investigación y sus resultados fueron presentados como un estudio de un único caso.

Caso 1: Análisis conjunto de las tres resoluciones

En la Tabla 5.1.1.1 se muestra un resumen de las características de las resoluciones del problema presentadas por cada uno de los tres participantes que conforman este caso, atendiendo a las categorías de análisis. En la tabla puede observarse que dichas resoluciones contienen varias diferencias, pero también algunos aspectos comunes.

Tabla 5.1.1.1 Resumen de las resoluciones de los estudiantes que forman el caso 1.

	Evaluador (David - E3)	**Evaluadora (Sandra - E6)**	**Evaluado (Javier - E5)**
Heurísticos	1. Suponer el problema resuelto 2. Ensayo y error	1. Dibujar una figura 2. Descomponer el problema en partes 3. Suponer el problema resuelto	1. Dibujar una figura 2. Suponer el problema resuelto 3. Ensayo y error
Casos estudiados	y=ax+b y=x+3 y=-2x+1	Paralelas al eje OX en el semiplano $x > 5$ y=mx+n, con pendiente positiva	y=ax+b y=8x+1 y=1
Representaciones	Simbólica y verbal	Gráfica, tabular, simbólica y verbal	Gráfica, simbólica y verbal
Soluciones	y=x+3 y=-2x+1	Rectas paralelas al eje OX en el semiplano x>5, representadas, erróneamente, como y=x+n con n>5	$y = ax + b$ con $b \leq 5$ y $a = 4 \pm 2\sqrt{5 - b}$
Comprobación de las soluciones	y=x+3 y=-2x+1	No	y=8x+1 y=1
Errores	Segunda coordenada de los puntos de intersección de la recta y=-2x+1 y la parábola.	Representación del vértice de la parábola Representar las rectas paralelas al eje OX en el semiplano x>5 como y=x+n con n>5 Representar el semiplano anterior como x>5 Error de operatoria al multiplicar	Conexión entre los cálculos y el enunciado

En cuanto a la primera categoría de análisis, los dos evaluadores tienen en común que utilizan el *heurístico suponer el problema resuelto*, tomando la ecuación explícita de una recta y buscando los valores que hacen que dicha expresión cumpla con las condiciones del enunciado del problema (Figuras 4.1.11 - 4.1.14 y 4.1.30). No obstante, estos dos estudiantes utilizan este heurístico de forma diferente. En la resolución de David (E3) puede considerarse como el principal *heurístico* utilizado, ya que el *ensayo y error* lo emplea para obtener soluciones concretas a una inecuación a la que ha llegado al imponer las condiciones del problema (Figuras 4.1.11 - 4.1.14). En cambio, Sandra (E6) lo combina con otros dos *heurísticos* (*dibujar una figura* y *descomponer el problema en partes*) que utiliza antes de *suponer el problema resuelto*. Como se mostró en la sección anterior, Sandra (E6) se apoya en la representación gráfica de la parábola para intentar estudiar grupos de rectas según su pendiente: rectas horizontales y rectas con pendiente positiva (Figuras 4.1.26 - 4.1.29). Por otra parte, el estudiante evaluado, Javier (E5), comienza igual que Sandra (E6) con el *heurístico dibujar una figura*, representando gráficamente la parábola (Figura 4.1.20) y, a continuación, pasa a *suponer el problema resuelto*, procediendo igual que ambos evaluadores (Figuras 4.1.21 - 4.1.23). Por último, coincide con el evaluador David (E3) utilizando el *heurístico ensayo y error* para obtener soluciones concretas de la inecuación obtenida al imponer las condiciones del problema (Figura 4.1.24). La Tabla 5.1.1.2 muestra un resumen de los heurísticos empleados por las tres personas que forman este caso y el orden en que los emplearon.

Tabla 5.1.1.2. Heurísticos empleados por los estudiantes del caso 1.

		HEURÍSTICOS		
Evaluadores	David (E3)	Suponer el problema resuelto		Ensayo y error
	Sandra (E6)	Dibujar una figura	Descomponer el problema en partes	Suponer el problema resuelto
Evaluado	Javier (E5)	Dibujar una figura	Suponer el problema resuelto	Ensayo y error

En cuanto a los *casos estudiados*, tanto los evaluadores como el evaluado coinciden en estudiar la expresión algebraica de una recta general (Tabla 5.1.1.1). David (E3), además, aborda dos rectas concretas: y=x+3 e y=-2x+1, al tomar dos parejas de valores que verifican la inecuación que ha obtenido (Figuras 4.1.13 y 4.1.14). Sandra (E6) también estudia, de manera general, las rectas paralelas al eje OX (Figura 4.1.28). El estudiante evaluado, Javier (E5), añade a su estudio, como David (E3), dos rectas particulares: y=8x+1 e y=1 (Figura 4.1.24).

En cuanto a las representaciones utilizadas, Sandra (E6) es la única evaluadora de la pareja que realiza la *representación gráfica* de la parábola y una recta y lo hace en dos ocasiones (Figuras 4.1.26 y 4.1.30). También es la única resolución en la que aparece la *representación tabular,* mostrando una tabla de valores junto a la primera *representación gráfica* de la parábola pero en la que no recoge ningún valor (Figura 4.1.27). Ambos evaluadores utilizan la *representación verbal,* David (E3) para justificar los pasos dados y las conclusiones de sus cálculos (Figuras 4.1.11-4.1.15) y Sandra (E6) para presentar sus soluciones (Figuras 4.1.28 y 4.1.29). Los dos evaluadores coinciden en el uso que hacen de la *representación simbólica*, utilizándola para presentar ecuaciones (Figuras 4.1.11, 4.1.14 y 4.1.27) y realizar cálculos (Figuras 4.1.12, 4.1.13, 4.1.15 y 4.1.30). El evaluado, como Sandra (E6), realiza con la *representación gráfica* de la parábola y dos rectas (Figura 4.1.20) y, al igual que David (E3), utiliza la *representación verbal* para justificar algunos de los pasos dados (Figuras 4.1.22 - 4.1.24). Javier (E5) coincide con ambos evaluadores al utilizar la *representación simbólica* para realizar cálculos (Figuras 4.1.19 y 4.1.21 - 4.1.24).

Si analizamos las *soluciones* dadas, observamos que ninguno de los dos evaluadores llega a indicar todas las condiciones que tienen que cumplir los coeficientes de la expresión algebraica de la recta para tener dos puntos de intersección con la parábola. David (E3), buscando dos valores que cumplan la inecuación a la que ha llegado, da como *soluciones* dos rectas particulares y=x+3 e y=-2x+1 (Figura 4.1.14). Las *soluciones* presentadas por Sandra (E6) son las rectas paralelas al eje OX en el semiplano x>5 (erróneamente representado) que representa simbólicamente, también incorrectamente, como y=x+n con n>5 (Figura 4.1.28) y que obtiene a partir de los *heurísticos* anteriores (*dibujar una figura* y *descomponer el problema en partes*). Sin embargo, Javier (E5), sí llega a dar una expresión para los coeficientes de la recta, aunque incorrecta, indicando como *soluciones* las rectas de ecuación $y = ax + b$, con $b \leq 5$ y $a = 4 \pm 2\sqrt{5 - b}$ (Figura 4.1.23).

En relación con la comprobación de las soluciones, David (E3) es el único evaluador que comprueba que las dos rectas que obtuvo eran solución y lo hace calculando los puntos de corte de cada una con la parábola (Figura 4.1.15). Javier (E5), el evaluado, también *comprueba*, de manera gráfica, que la recta y=8x+1 es solución, aunque la representa erróneamente, y que y=1 no lo es (Figura 4.1.20).

Por último, ambos evaluadores cometen *errores* en sus resoluciones. David (E3) se equivoca al calcular la segunda coordenada de los puntos de corte de la recta y=-2x+1 con la parábola (Figura 4.1.15). Sandra (E6) tiene cuatro *errores* en su resolución: representa incorrectamente el vértice de la parábola sobre el eje de ordenadas (Figura 4.1.26), escribe las expresiones de las rectas paralelas al eje OX en el semiplano x>5 como y=x+n con n>5 (Figura 4.1.28), representa el semiplano anterior como x>5 en lugar de y>5 y se equivoca al operar en el discriminante de la ecuación, confundiendo un signo (Figura 4.1.30). El evaluado también comete un *error* al conectar los cálculos con el enunciado, considerando los valores que anulan el discriminante y dando como solución, por tanto, rectas tangentes a la parábola (Figuras 4.1.22 y 4.1.23).

Caso 1: Análisis del proceso de evaluación.

En el proceso de evaluación de esta pareja se pueden diferenciar cuatro partes: (1) interpretan los primeros pasos de la resolución del evaluado; (2) comprueban los cálculos posteriores; (3) interpretan las soluciones; (4) valoran la resolución en general y califican. A continuación, se presenta un análisis detallado de la transcripción de la discusión mantenida por la pareja evaluadora durante dicho proceso, teniendo en cuenta las variables de análisis indicadas en la metodología (sección 3.4.2). Posteriormente, se mostrará un estudio de la utilización que hacen los evaluadores de sus propias resoluciones para evaluar la de su compañero. Finalmente, se abordará el carácter de las observaciones que realizan los evaluadores en cada uno de los episodios identificados y distinguiendo entre episodios *interpretativos, valorativos* y *expositivos*.

Aspectos de la resolución del problema en los que se centra la evaluación

En la transcripción de la discusión mantenida entre David (E3) y Sandra (E6) (Anexo A.1.1) se identificaron un total de 35 episodios (Tabla 5.1.1.3). La categoría a la que hacen referencia en un mayor número de episodios, en 11 de ellos, es *representaciones*. Se diferencian 8 episodios dedicados a las categorías *heurísticos* y *otros* cada una, estos últimos relacionados con el enunciado del problema, la calificación y el tiempo que dispusieron para resolverlo. En la categoría de *soluciones* encontramos la mitad de episodios que en estas dos últimas y en las categorías *casos estudiados* y *errores*, se identificaron solo dos episodios en cada una de ellas. Además, aunque el evaluado comprueba las soluciones gráficamente, no se encontraron episodios que hiciesen referencia a esta categoría. Esto puede ser una indicación de que los evaluadores se centraron más en la estrategia y el procedimiento de resolución que en las soluciones.

En la Tabla 5.1.1.3 se muestra, además del número de episodios clasificados en cada una de las categorías de análisis, el número de episodios en los que hacen referencia a cada una de las resoluciones implicadas en el caso (evaluadores o evaluado). En este último aspecto, pueden existir episodios en los que hagan referencia a más de una resolución, de ahí que se puedan encontrar disparidades con el número de episodios totales.

Tabla 5.1.1.3. Clasificación de los episodios del caso 1.

CATEGORÍA	**Número de episodios**	**Resolución a la que se refieren**		
		Evaluador (David - E3)	**Evaluadora (Sandra - E6)**	**Evaluado (Javier - E5)**
Heurísticos	8	1	0	8
Casos estudiados	2	0	1	2
Representaciones	11	0	0	11
Soluciones	4	1	0	4
Comprobación de soluciones	0	0	0	0
Errores	2	0	0	2
Otros	8	3	0	0
Total	**35**	**5**	**1**	**27**

Los ocho episodios en los que los evaluadores hacen referencia a los *heurísticos*, se producen en distintos momentos de la discusión. Los dos primeros se producen al comienzo del proceso de evaluación, en los que los evaluadores interpretan los primeros pasos dados por el evaluado lo que les permite identificar los *heurísticos* utilizados en su resolución. Por ejemplo, en el episodio recogido en la Tabla 5.1.1.4a, identifican que el primer paso dado por el evaluado es representar la parábola (*heurístico dibujar una figura)* y, en el indicado en la

Tabla 5.1.1.4b, señalan que ha considerado la ecuación explícita de una recta $y=ax+b$ y la ha igualado a la ecuación de la parábola (*heurístico suponer el problema resuelto)*.

Tabla 5.1.1.4. Episodios iniciales donde los evaluadores del caso 1 se refieren a los *heurísticos*.

Nº de episodio	EPISODIO	
1	D: Lo primero que hace es dibujar la parábola y buscar cortes.	a
3	D: Aquí te da la función. S: Aquí interseca la recta con la parábola. D: Sí, una recta arbitraria $y=ax+b$	b

Los cuatro episodios siguientes en esta categoría se identificaron a mitad del proceso de evaluación, mientras realizan una valoración general de la resolución presentada por el evaluado. En este momento de la discusión, los evaluadores comienzan a valorar la estrategia empleada. David (E3) no está convencido de que sea del todo correcta, mientras que Sandra (E6) sí cree que sea adecuada (Tabla 5.1.1.5).

Tabla 5.1.1.5. Episodios intermedios referidos a los *heurísticos* del caso 1.

Nº de episodio	EPISODIO
13	D: A lo mejor estaba probando, estaba haciendo experimentos. Y no hizo nada más. O sea, que no está bien hecho. S: No, pero está bien empezado. D: Está bien empezado pero te ha llevado a una…
15	S: Pero no. O sea, yo entiendo lo que dices, pero me parece que está bien planteado.
17	S:[...] puso aquí el sistema de ecuaciones.
20	D: A ver, aquí, si vas a lo práctico, a resolver el problema rápido, yo me pondría a probar *a* y *b* que funcionen.

Los dos últimos episodios donde los evaluadores hacen referencia a los *heurísticos* se encuentran al final de la transcripción (Tabla 5.1.1.6). En este momento, se refieren nuevamente a este aspecto con el objetivo de asignar una calificación a la resolución.

Tabla 5.1.1.6. Episodios finales relacionados con los *heurísticos* en el caso 1.

Nº de episodio	EPISODIO
24	S: Es que toda esta parte está perfecta. D: Sí, la idea está muy bien. S: Un 6 y algo. D: Sí, 6 de 10.
29	D: Y yo prefiero que me hagan esto, porque está mucho mejor desarrollado a que te pongas a probar ideas hasta que te cuadren dos. Así que sí, un 6 y medio de 10.

En relación con la siguiente categoría de análisis, *casos estudiados,* se han identificado dos episodios en los que los evaluadores analizan, sin fijarse en la resolución, si los dos casos abordados por Javier (E5) ($y=8x+1$ e $y=1$) cumplen o no la condición del enunciado del problema (Tabla 5.1.1.7).

Tabla 5.1.1.7. Episodios donde los evaluadores del caso 1 se refieren a los *casos estudiados*.

Nº de episodio	EPISODIO
10	D: Vale, pone un ejemplo. Pone b=1, a vale 8 y a vale 0. Vale. Te vale porque tiene dos soluciones, entonces esta recta te vale. La recta con a=0 y b=1. Es la recta y=1. S: Pero no vale. Tiene solamente un punto. D: Claro, pero lo que piden son dos. S: Sí, porque aquí está cogiendo a=0, si a es cero no tienes pendiente. Si no tienes pendiente entonces tiene que ser que la b que tome aquí sea superior a 5 para que la y se coja por arriba.
12	D: Y esta solo corta una vez, o sea, esta para la solución no te vale. *[Hace referencia al caso y=1]*

En cuanto a la tercera categoría de análisis, en este caso, los evaluadores hacen referencia a las *representaciones* en varias ocasiones, siendo esta la categoría con mayor número de episodios tal y como ya se mencionó anteriormente, con un total de 11. En dichos episodios, mencionan tres de los cuatro tipos de representaciones consideradas en el análisis (Tabla 5.1.1.8).

Tabla 5.1.1.8. Clasificación de los episodios de la categoría *representaciones* del caso 1.

REPRESENTACIÓN	Gráfica	Tabular	Simbólica	Verbal
Nº DE EPISODIOS	2	0	6	3

La mayoría de estos episodios (6) tienen que ver con la *representación simbólica* y suceden durante la comprobación e interpretación por parte de los evaluadores de los cálculos que presenta Javier (E5) en su resolución. Por ejemplo, en la Tabla 5.1.1.9. se presenta un episodio en el que puede observarse que Sandra (E6) tiene dificultad para seguir algunos de esos cálculos, llegando a atribuir al evaluado errores no cometidos.

Tabla 5.1.1.9. Episodio referente a la *representación simbólica* del caso 1.

Nº de episodio	EPISODIO
6	S: A ver, voy a ver si los cálculos están bien. ¿Y aquí la a la dejó atrás? El signo del discriminante es lo que te importa, esto está aquí. D: Hasta aquí está perfecto, o sea, que no se ha equivocado en los cálculos ni nada. S: ¿Cómo que no se ha equivocado en los cálculos? Aquí le falta una a, aquí abajo. D: No, esto es 2 por 1. Porque la variable es a. S: Pero le sigue faltando la a. Saca tú el *máximo común múltiplo* de aquí. D: No, lo que está haciendo es la ecuación de segundo grado. O sea, a^2-8a. S: Si, si. Pero a no es 1, a no es arbitrario, es la pendiente de tu recta. Le falta la a, sácame el máximo común. D: No, no, está resolviendo esta ecuación a parte. O sea, esta ecuación como si fuera una ecuación en función de a. S: Si es una ecuación en función de a ni en función de b… D: O sea, está dejando la b arbitraria y está haciéndolo en función de a. S: Vale, pero mira. Saca la a. Tienes a(a-8), lo otro lo pasas y te queda 4-4b, ahora lo parte de 2… D: No, está haciendo.. S: Ah. ¿Está trabajando como si fuera una ecuación? D: Claro, una ecuación de segundo grado que solo depende de a y la b la está tratando como si la conociera. Y ya luego la fija en función de lo que lo que le interese. Entonces, hasta aquí está usando la fórmula de segundo grado. Bien, bien. Hasta aquí lo he comprobado yo y está bien.

En tres episodios se alude a la *representación verbal*, concretamente, a la ausencia de ella (Tabla 5.1.1.10). En el primero de ellos, Sandra (E6) admite haberse encontrado con dificultades para entender ciertos aspectos debido a la falta de explicaciones con palabras (Tabla 5.1.1.10a). En los otros dos episodios, vuelven a recalcar que lo que aparece escrito en la resolución no aclara el procedimiento seguido por el evaluado y que harían falta más justificaciones con palabras (Tabla 5.1.1.10b).

Tabla 5.1.1.10. Episodios referentes a la *representación verbal* en el caso 1.

Nº de episodio	**EPISODIO**	
18	S: Lo único que parece que está mal, que es lo que me lie yo, es que aquí no dice lo que está utilizando. D: Sí, esto lo vi yo. A ver, porque yo hice una cosa parecida y por eso lo sé. Pero si yo leo esto de primeras no	a
22	S: Lo que parece que lo tiene explicado, pero después te das cuenta que no lo tiene explicado, lo que está haciendo. O sea, eso está bien, todo esto bien, pero aquí otra vez escribe exactamente lo mismo y sin sentido. D: Sí, para nada.	b
35	S: Pero lo del discriminante no es que no se haya dado cuenta, es que aquí eligió un punto arbitrario y no lo ha explicado. D: Yo pondría 5 también. Vale. Pues ya está.	

Para concluir con la categoría de *representaciones*, dos de los episodios clasificados en esta categoría se refieren a la *representación gráfica*, tanto de la parábola como de las rectas. El primero aparece al principio del proceso de evaluación y, en él, los evaluadores interpretan que el evaluado representó las dos rectas (Figura 4.1.20) para averiguar la pendiente que deben tener las soluciones al problema (Tabla 5.1.1.11a). El segundo aparece cuando valoran de forma general la representación que ha realizado (Tabla 5.1.1.11b).

Tabla 5.1.1.11. Episodios referidos a la *representación gráfica* en el caso 1.

Nº de episod io	**EPISODIO**	
2	S: Está cambiando la pendiente de la recta. D: Sí, el ratio en el que hay dos puntos. S: Intentando ver si es para arriba o para abajo.	a
16	S: Hizo bien el dibujo de la parábola	b

Siguiendo con las categorías de análisis, en la transcripción de la discusión entre David (E3) y Sandra (E6) se identificaron cuatro episodios en los que los evaluadores hacen referencia a las *soluciones*. En el primero de ellos, que transcurre mientras comprueban los cálculos realizados por su compañero, David (E3) indica que el procedimiento que sigue el evaluado podría simplificarse si tratase de buscar soluciones concretas (Tabla 5.1.1.12a). En los tres siguientes, los evaluadores inciden en un aspecto que se tratará posteriormente en la categoría *otros* y que tiene que ver con el enunciado del problema. David (E3) afirma que se debía dar como solución al problema las ecuaciones de dos rectas, así que en estos tres episodios destacan que el evaluado, como solo da una recta como solución, no cumple con lo solicitado en el enunciado y, por tanto, no ha concluido la resolución (Tabla 5.1.1.12b).

Tabla 5.1.1.12. Episodios donde los evaluadores del caso 1 se refieren a las *soluciones*.

Nº de episodio	**EPISODIO**	
8	D: Está buscando la general hasta el final. Y claro, eso te va a llevar un montón de raíces. Si te limitas al problema, resolverás esto un poco, pero [...] que esté bien…	a
26	D: Pero no te da dos rectas, te ha dicho cómo se construyen esas dos rectas.	b
30	S: Hombre, le faltó el final, pero yo creo que si le das un fisco de tiempo.	
34	D: Pero no ha sabido finalizar, bueno no ha sabido, o no ha tenido tiempo.	

En la categoría *comprobación de las soluciones* no se identifica ningún episodio. El evaluado realiza una comprobación gráfica (Figura 4.1.20) de las expresiones obtenidas al considerar b=1 (Figura 4.1.24). Sin embargo, los evaluadores parece que no se dan cuenta de ello, ya que la única mención que hacen a esta representación gráfica es la que aparece en el episodio de la Tabla 5.1.1.11a, donde no se observa que conecten la representación gráfica de las dos rectas que aparecen en la Figura 4.1.20 con las expresiones algebraicas de dichas rectas que obtiene al final de la resolución al asignar valores concretos a los parámetros a y b (Figura 4.1.24).

En relación con los *errores*, el evaluado considera, incorrectamente, como posibles soluciones los valores que anulan el discriminante (Figura 4.1.22), algo a lo que los evaluadores hacen referencia en dos ocasiones (Tabla 5.1.1.13).

Tabla 5.1.1.13. Episodios donde los evaluadores del caso 1 se refieren a los *errores*.

Nº de episodio	**EPISODIO**
5	D: Puso aquí mayor o igual que cero, pero tiene que ser mayor que cero, porque si se queda igual, te queda una solución doble y entonces eso es un corte solo. Bueno, a ver si después se da cuenta.
9	D: Y aquí sigue con lo de “tendrá sentido cuando sea mayor o igual que cero” S: Lo mismo que había dicho aquí. D: Claro. No se ha dado cuenta de que con lo de igual a cero… Bueno, no sé si se ha dado cuenta o lo escribió en la hoja por inercia, cuando vea el problema te lo puedo decir mejor.

Por último, al no poder clasificar los restantes 8 episodios en ninguna de las categorías anteriores, se incluyeron en la categoría *otros*. Cuatro de ellos se refieren al enunciado del problema, en los que David (E3) afirma que el problema pedía las ecuaciones de dos rectas (Tabla 5.1.1.14).

Tabla 5.1.1.14. Episodios de la categoría *otros* del caso 1, relacionados con el enunciado del problema.

Nº de episodio	**EPISODIO**
7	D: Lo que se complicó un poco, porque solo tiene que limitarse a buscar soluciones.
11	D: Sí, pero en el enunciado del problema, si no recuerdo mal, te dice que tienes que dar dos rectas que corten dos veces.
25	D: Es que lo que te pide el problema, que es lo que da rabia, que el problema te pida que le des dos rectas. Pero el problema dice dame esas dos rectas.
27	D: Pero el problema dice dame esas dos rectas.

Otros tres episodios, considerados dentro de esta última categoría, hacen referencia a aspectos relacionados con la calificación (Tabla 5.1.1.15). En dichos episodios, puede observarse cómo David (E3) y Sandra (E6) discuten sobre la calificación numérica a otorgar a la resolución presentada por Javier (E5).

Tabla 5.1.1.15. Episodios de la categoría *otros* del caso 1, relacionados con la calificación.

Nº de episodio	**EPISODIO**
23	S: ¿Qué piensas? D: ¿Tú qué le pondrías? Si estás corrigiendo esto, si estás de profesora en un instituto. S: ¿Sobre 10? D: Sí, esta pregunta sobre 10
28	D: Desde luego más de la mitad se merece, porque el planteamiento está bien.
32	S: ¿Entonces un 6? D: Sí, es que tampoco le puedo poner más. Ni menos tampoco. Entonces que le ponemos… S: 5. O sea, ahora viéndolo así. D: 5. Exacto. O sea, no se merece el 0, ni de broma. El 5 está bien por el planteamiento.

Por último, se identificó un episodio en el que los evaluadores comentan el tiempo del que dispusieron para resolver el problema y cómo esto puede haber afectado tanto a la resolución presentada por el evaluado como a lo que hicieron ellos mismos cuando tuvieron que resolver el problema (Tabla 5.1.1.16).

Tabla 5.1.1.16. Episodios de la categoría *otros*, relacionados con tiempo disponible para resolver el problema. Caso 1.

Nº de episodio	**EPISODIO**
31	S: Pero yo creo que si le das un fisco de tiempo. A mí, por lo menos me cogió con la *pata cambá*. *[Llegó tarde y, por tanto, dispuso de menos tiempo]*

Uso de la propia resolución en la evaluación de un par

Tras analizar en detalle el proceso de evaluación atendiendo a las categorías de análisis (*heurísticos*, *casos estudiados*, *representaciones*, *soluciones*, *comprobación de las soluciones* y *errores*), se presenta, a continuación, un estudio sobre las resoluciones a las que los evaluadores hacen referencia en su discusión y de qué manera las usan, lo que nos informa sobre hasta qué punto tienen en cuenta sus propias resoluciones a la hora de evaluar la resolución de su compañero.

En la Tabla 5.1.1.3 se puede observar que David (E3) hace referencia a su propia resolución en cinco episodios. En uno de ellos alude a que el procedimiento que sigue el evaluado podría simplificarse si tratase de buscar soluciones concretas asignando valores a los parámetros a y b (Tabla 5.1.1.17). Esto es exactamente lo que hace David (E3) al final de su resolución (Figuras 4.1.14 y 4.1.15), por lo que puede pensarse que está valorando el trabajo de Javier (E5) teniendo en cuenta su propia resolución y sin percatarse de que también el evaluado lo hace (Figura 4.1.24), aunque en su proceso haya cometido algunos errores.

Tabla 5.1.1.17. Primer episodio en el que David (E3) hace referencia a su propia resolución.

Nº de episodio	**EPISODIO**
20	D: A ver, aquí, si vas a lo práctico, a resolver el problema rápido, yo me pondría a probar a y b que funcionen.

Los otros cuatro episodios donde David (E3) parece estar pensando en su propia resolución (Tabla 5.1.1.18) muestran reflexiones que tienen que ver con lo que él entendió que pedía el enunciado del problema (dos rectas) y en lo que basó su propio proceso de resolución (Figura 4.1.14).

Sandra (E6) también se apoya en su propia resolución, aunque en su caso solo se observa en dos episodios. Al final del primer episodio que se recoge en la Tabla 5.1.1.7, Sandra (E6) afirma que las rectas de la forma $y=ax+b$, con $a=0$, deben cumplir que b sea superior a 5 para tener dos puntos de intersección con la parábola. Recordemos que Sandra (E6) cometió un error al representar el vértice de la parábola (Figura 4.1.26), lo que hace que, en su caso, esta afirmación incluya todas las rectas horizontales que cumplen la condición del enunciado y, además, sean las únicas soluciones que presenta (Figura 4.1.28). Con dicho comentario, Sandra (E6) muestra que está tomando como referencia su propia resolución y no la que están evaluando, en la que la parábola si está correctamente representada (Figura 4.1.20). Lo que indica Sandra (E6) no incluiría las rectas horizontales entre y=1, el valor de la ordenada del vértice real de la parábola, e y=5, el valor considerado por ella. El segundo episodio tiene que ver con el tiempo que dispusieron para resolver el problema (Tabla 5.1.1.16).

Tabla 5.1.1.18. Episodios en los que David (E3) hace referencia a su propia resolución.

Nº de episodio	**EPISODIO**
11	D: Sí, pero en el enunciado del problema, si no recuerdo mal, te dice que tienes que dar dos rectas que corten dos veces.
25	D: Es que lo que te pide el problema, que es lo que da rabia, que el problema te pida que le des dos rectas. Pero el problema dice dame esas dos rectas.
26	D: Pero no te da dos rectas, te ha dicho cómo se construyen esas dos rectas.
27	D: Pero el problema dice dame esas dos rectas.

Carácter de los episodios

Por último, analizaremos el carácter de los episodios identificados en la transcripción, distinguiendo entre episodios *interpretativos, valorativos* y *expositivos*, atendiendo a las definiciones dadas para estas categorías en la metodología (sección 3.4.2). En la Tabla 5.1.1.19 se presenta un resumen del carácter de los episodios para cada una de las categorías empleadas en el análisis de los aspectos en los que los evaluadores de este caso se fijan al evaluar: *heurísticos, casos estudiados, representaciones, soluciones, errores y otros*. En esta tabla se separan los episodios entre aquellos tienen un carácter exclusivamente interpretativo, valorativo o expositivo, y los que poseen doble carácter. No se incluye la categoría *comprobación de soluciones* pues, como ya se indicó anteriormente (Tabla 5.1.1.3), no se identificó en la discusión de este caso ningún episodio referente a ella. Además, en la categoría *otros* encontramos episodios que no hacen referencia a la resolución que están evaluando (enunciado del problema, tiempo) y que, por tanto, carecen de carácter. Sin embargo, existen otros en los que califican la resolución y que, por tanto, tendrán carácter valorativo.

Tabla 5.1.1.19. Clasificación de los episodios del caso 1 atendiendo al carácter.

	Interpretativo	**Valorativo**	**Expositivo**	**I / V**
Heurísticos	3	5	0	0
Casos estudiados	0	2	0	0
Representaciones	2	8	0	1
Soluciones	0	4	0	0
Errores	0	2	0	0
Otros	0	3	0	0
Total	**5**	**24**	**0**	**1**

Como puede observarse en la tabla, el proceso de evaluación seguido por esta pareja es fundamentalmente valorativo, pues se ha identificado un número casi cinco veces mayor de episodios valorativos (24 episodios) que interpretativos (5 episodios). No se encontraron episodios con carácter expositivo y se clasificó un episodio con doble carácter interpretativo y valorativo.

El mayor número de episodios lo encontramos en aquellos con carácter valorativo, la mayoría de los episodios hacen referencia a las *representaciones,* con 8 episodios. Uno de ellos se refiere a la *representación gráfica*, en el que indican que la parábola está correctamente representada (Tabla 5.1.1.11b). En la *representación simbólica* se encuentran cuatro episodios en los que verifican que los cálculos en la resolución del discriminante son correctos. Los tres restantes se refieren a la *representación verbal* y tienen que ver con la escasez que perciben los evaluadores de argumentaciones escritas (Tabla 5.1.1.11). Le siguen las valoraciones con foco en los *heurísticos*, con 5 episodios, en los que se observan discrepancias entre los evaluadores. Mientras Sandra (E6) cree que la estrategia utilizada es correcta, David (E3) no está de acuerdo y lo compara con su propio heurístico (Tablas 5.1.1.5 y 5.1.1.6). A continuación, se encuentran 4 episodios valorativos referentes a las *soluciones*, afirmando en estos que Javier (E5), el evaluado, no ha dado las dos rectas que pedía el enunciado del problema (Tabla 5.1.1.12). Por último, en las categorías de *casos estudiados* y *errores* se identificaron 2 episodios valorativos en cada una. En los *casos estudiados* comprueban, por un lado, que el caso $y=8x+1$ cumple las condiciones del problema (erróneamente, igual que el evaluado) y, por otro, que el caso $y=1$ no las verifica (Tabla 5.1.1.7). En relación a los *errores* aparecen comentarios en los que advierten que el evaluado se equivoca al considerar los valores que anulan el discriminante y no los que hacen que sea mayor estricto que cero (Tabla 5.1.1.13). Además, existen tres episodios clasificados en la categoría *otros* en los que la pareja evaluadora está otorgando una calificación a la resolución, por tanto, también la están valorando.

A continuación se encuentran los episodios con carácter interpretativo, episodios donde los evaluadores están haciendo referencia a los *heurísticos* o las *representaciones*. En la categoría *heurísticos* estos episodios tienen que ver con la identificación de dichos heurísticos (Tabla 5.1.1.4 y episodio nº17 de la Tabla 5.1.1.5). En los correspondientes a la categoría *representaciones*, uno tiene que ver con la *representación gráfica*, donde interpretan que el evaluado representa las dos rectas (Figura 4.1.20) para averiguar qué pendiente debe tener para cortar en dos puntos a la parábola (Tabla 5.1.1.11a). Los otros dos episodios se refieren a la *representación simbólica*, donde interpretan los cálculos realizados (Tabla 5.1.1.9) y pasos concretos de la resolución (Tabla 5.1.1.20).

Tabla 5.1.1.20. Episodio de carácter interpretativo referente a la *representación simbólica.*

Nº de episodio	EPISODIO
4	S: Aquí llega a lo que le interesa, el signo del discriminante. D: El discriminante mayor que cero.

Por último, existe un episodio que se ha clasificado con doble carácter interpretativo y valorativo (Tabla 5.1.1.9), pues se trata de un único episodio por girar en torno a la *representación simbólica*, pero en él Sandra (E6) valora erróneamente uno de los pasos dados por el evaluado y David (E3) interpreta los cálculos para aclarar las dudas de su compañera. Por esta razón, el número de episodios totales en la categoría de *representaciones* de la Tabla 5.1.1.19 difiere en uno con el de la Tabla 5.1.1.3.

A modo de resumen, en este caso se han podido distinguir 35 episodios en los que se hace referencia, principalmente, a las *representaciones* y los *heurísticos*. Esto indica que esta pareja evaluadora se centra en cómo resuelve el compañero evaluado el problema. Durante el proceso de evaluación, los evaluadores tienen en cuenta sus propias resoluciones, en especial uno de ellos, David (E3), quien insiste en que la resolución evaluada está incompleta al no presentar como solución las ecuaciones de dos rectas. Esto tiene que ver con la interpretación que él mismo hizo del enunciado y que reflejó en su propia resolución. Por último, se observa que los evaluadores de este caso siguen un proceso de carácter fundamentalmente valorativo, encontrando casi cinco veces más episodios valorativos que interpretativos y, conjuntamente al análisis por categorías, mayoritario en las categorías de *representaciones* y *heurísticos*. Algunos de estos resultados fueron publicados en un estudio exploratorio realizado de este caso en de-Armas-González et al. (2021a).

5.1.2 Caso 2. Marta, Manuel y Antonio

En esta sección se presenta el caso formado por Marta (E8) y Manuel (E16), que evalúan la resolución de Antonio (E1). Se comienza presentando una comparativa de las principales características, atendiendo a las categorías de análisis, de las resoluciones realizadas por estos tres estudiantes cuyo estudio se presentó en detalle en las secciones 4.1.8, 4.1.16 y 4.1.1. El análisis de este caso, conjuntamente con el caso anterior, puede consultarse en de-Armas-González et al. (2023), en el que se realiza una comparativa entre los procesos de evaluación seguidos por las parejas evaluadoras de ambos casos.

Caso 2: Análisis conjunto de las tres resoluciones.

En la Tabla 5.1.2.1 se muestra un resumen de las características de las resoluciones del problema presentadas por cada uno de los tres participantes que conforman este caso, atendiendo a las categorías de análisis.

Tabla 5.1.2.1 Resumen de las resoluciones de los estudiantes que forman el caso 2.

	Evaluadora Marta (E8)	**Evaluador Manuel (E16)**	**Evaluado Antonio (E1)**
Heurístico	1. Dibujar una figura 2. Generalizar	1. Descomponer el problema en partes	1. Suponer el problema resuelto
Casos estudiados	y=6 y=7 y=n, con n>5 y $n \in R$	Rectas paralelas al eje OX Rectas que pasan por el vértice de la parábola Rectas que pasan por dos puntos cualesquiera de la parábola	y=ax+b
Representaciones	Gráfica, simbólica y verbal	Simbólica y verbal	Simbólica y verbal
Soluciones	y=n, con n>5 y $n \in R$.	y=a, con a>1 y $a \in R^{+}$ Haz de rectas que pasan por (-2,1) excepto y=1 y x=-2	y=ax+b con $a \in (-\infty, 2 - \sqrt{8}) \cup ($ y b=0 y=ax+b con $a \in (-\infty, 2 - 2\sqrt{b}) \cup$ y b>0
Comprobación de las soluciones	y=6 y=7	No	No
Errores	Representación del vértice de la parábola	No	Transponiendo los términos en la primera ecuación planteada (Figura 4.1.1) Resolviendo $(4 - a)^2$ y $16 + 4{\cdot}4(b + 1)$ (Figura 4.1.3) Afirmando que $4b + 8\sqrt{b} - 4b - 4 >$ (Figura 4.1.5)

Los *heurísticos* utilizados por los evaluadores de este caso son diferentes. Marta (E8) combina dos *heurísticos* para resolver el problema: *dibujar una figura* y *generalizar*. Se apoya en la representación gráfica de la parábola para representar dos rectas horizontales particulares (Figura 4.1.42) y generalizar su solución a todas las rectas horizontales por encima del vértice (Figura 4.1.44). En cambio, Manuel (E16) utiliza un solo *heurístico*, *descomponer el problema en partes,* dividiendo la búsqueda de soluciones en tres grupos de rectas: rectas horizontales (Figura 4.1.77), rectas que pasan por el vértice de la parábola (Figuras 4.1.80 y 4.1.81) y rectas que pasan por dos puntos cualesquiera de la parábola (Figura 4.1.80). Por su parte, el estudiante evaluado, Antonio (E1), también emplea un solo *heurístico, suponer el problema resuelto,* que no coincide con ninguno de los utilizados por los evaluadores. Considera la ecuación explícita de una recta, y=ax+b, y busca las condiciones para *a* y *b* que hacen que cumpla el enunciado del problema (Figuras 4.1.1-4.1.5). La Tabla 5.1.2.2 muestra un resumen de los heurísticos utilizados por los tres estudiantes y el orden en que los emplearon.

Tabla 5.1.2.2. Heurísticos utilizados por los estudiantes del caso 2.

		HEURÍSTICOS	
Evaluadores	Marta (E8)	Dibujar una figura	Generalizar
	Manuel (E16)	Descomponer el problema en partes	
Evaluado	Antonio (E1)	Suponer el problema resuelto	

En relación a los *casos estudiados*, los evaluadores tienen en común que abordan rectas horizontales. Marta (E8) estudia las rectas particulares y=6 e y=7 (Figura 4.1.42) y la generalización y=n, con n>5 y $n \in \mathbb{R}$ (Figura 4.1.44). Manuel (E16) analiza, sin calcular ninguna recta particular previamente, las rectas paralelas al eje OX por encima de la tangente horizontal (Figura 4.1.79). Además, plantea otros casos: rectas que pasan por el vértice de la parábola (Figuras 4.1.80 y 4.1.81) y, aunque no llega a estudiarlas, rectas que pasan por dos puntos cualesquiera de la parábola (Figura 4.1.80). A diferencia de los evaluadores, Antonio (E1), el evaluado, y como consecuencia del *heurístico* utilizado, aborda la ecuación explícita de una recta, y=ax+b (Figuras 4.1.1-4.1.5).

En cuanto a las *representaciones* utilizadas, Marta (E8) es la única evaluadora de la pareja que realiza la *representación gráfica*, tanto de la parábola como de dos rectas (Figura 4.1.42), pero ambos evaluadores utilizan la *simbólica* y la *verbal*. Además, coinciden en el uso que hacen de la *representación simbólica* para recoger cálculos (Figuras 4.1.40-4.1.41 y 4.1.78) y presentar soluciones (Figuras 4.1.44 y 4.1.79). También en la *representación verbal* para indicar los pasos dados (Figuras 4.1.43 y 4.1.77-4.1.78) y las conclusiones de sus cálculos (Figuras 4.1.40-4.1.43 y 4.1.78). Esta representación es predominante en la resolución de Manuel (E16), quien la utiliza, además, para indicar las rectas que va a analizar (Figuras 4.1.77 y 4.1.79) y para presentar y justificar las soluciones (Figuras 4.1.79 y 4.1.81). El evaluado, Antonio (E1), no realiza la *representación gráfica* de la parábola, pero coincide con los evaluadores al utilizar la *representación simbólica* para recoger cálculos (Figuras 4.1.1-4.1.5) y la *representación verbal* para explicar los pasos que va a dar (Figuras 4.1.1 y 4.1.2).

Al analizar las *soluciones* presentadas, se observa que los dos evaluadores obtienen como soluciones rectas horizontales. Marta (E8), como consecuencia del error cometido en la representación del vértice de la parábola, da como *soluciones* las rectas de la forma y=n, con n>5 y $n \in \mathbb{R}$ (Figura 4.1.44). Manuel (E16) obtiene, en primer lugar, las rectas paralelas al eje OX de la forma y=a, con a>1 y $a \in R^+$(Figura 4.1.79) y, posteriormente, el haz de rectas que pasan por el vértice de la parábola, (-2,1), excepto y=1 y x=-2 (Figura 4.1.81). El estudiante evaluado, Antonio (E1), aunque con errores, presenta como *soluciones* dos conjuntos de rectas, y=ax+b, definidos en función del valor de *b*: para b=0, las rectas y=ax+b con $a \in (-\infty, 2-\sqrt{8}) \cup (2+\sqrt{8}, \infty)$ (Figura 4.1.4); y para b>0, las rectas y=ax+b con $a \in (-\infty, 2-2\sqrt{b}) \cup (2+2\sqrt{b}, \infty)$ (Figura 4.1.5).

En relación con la *comprobación de las soluciones*, Marta (E8) es la única evaluadora que verifica que las dos rectas particulares que ha obtenido, y=6 e y=7, son solución y lo hace calculando los puntos de corte de cada una con la parábola (Figura 4.1.43). El evaluado, Antonio (E1), igual que Manuel (E16), no comprueba las soluciones dadas.

Por último, Marta (E8) comete un *error* al representar el vértice de la parábola, situándolo, erróneamente, sobre el punto de corte de la parábola con el eje OY (Figura 4.1.42). En cambio, en la resolución de Manuel (E16) no se ha detectado ningún *error*. Por otra parte, el evaluado, Antonio (E1), comete cuatro *errores* de cálculo: transponiendo términos en la primera ecuación planteada (Figura 4.1.1), expandiendo la expresión $(4-a)^2$, calculando $16+4\cdot4(b+1)$ (Figura 4.1.3) y afirmando que $4b+8\sqrt{b}-4b-4>0$ (Figura 4.1.5).

Caso 2: Análisis del proceso de evaluación.

El proceso de evaluación seguido por los evaluadores de este caso se caracteriza por su falta de comprensión de la resolución del compañero evaluado. Por ello, al contrario que en la pareja anterior, no se encuentra una estructura clara de su proceso de evaluación, observándose saltos desconectados en su discurso acerca de distintas partes de la resolución, así como valoraciones que son incorrectas. A continuación, se presenta un análisis detallado de los episodios en los que se ha dividido la discusión mantenida durante el proceso de evaluación, teniendo en cuenta las categorías de análisis indicadas en la metodología (sección 3.4.2). Posteriormente, se mostrará un estudio de la utilización que hacen los evaluadores de sus propias resoluciones para evaluar la de su compañero. Finalmente, se abordará el carácter de las observaciones que realizan los evaluadores, distinguiendo entre episodios *interpretativos, valorativos* y *expositivos*.

Aspectos de la resolución del problema en los que se centra la evaluación

En la transcripción de la discusión mantenida entre Marta (E8) y Manuel (E16) (Anexo A.1.2) se identificaron un total de 34 episodios (Tabla 5.1.2.3). Las categorías a las que se refieren en un mayor número de ocasiones son *representaciones*, con 13 episodios, y *heurísticos* en un total de 9. Hacen referencia en 6 episodios a las *soluciones*, mientras que se han clasificado 3 episodios en la categoría *otros* y 2 en *casos estudiados*. Por último, solo un episodio se identificó dentro de la categoría *comprobación de soluciones*. Además, aunque el evaluado comete varios *errores* durante su proceso de resolución (Tabla 5.1.2.1.), no se encontraron episodios que hiciesen referencia a estos. Como puede observarse en la transcripción (Anexo A.1.2), los evaluadores durante su discusión nombran ciertos errores los cuales no hacen referencia a esta categoría, tal y como se ha especificado en la metodología (sección 3.4.2), sino que se trata de la valoración que realizan de las soluciones o del heurístico presentado por Antonio (E1). Esta distribución de episodios muestra, igual que en el caso anterior, que los evaluadores se centraron más en la estrategia y el procedimiento de resolución que en las soluciones, además de señalar los distintos sistemas de representaciones utilizadas en la resolución en repetidas ocasiones.

En la Tabla 5.1.2.3 se muestra, además del número de episodios clasificados en cada una de las categorías de análisis, el número de episodios en los que hacen referencia a cada una de las resoluciones implicadas en el caso (evaluadores o evaluado). En este último aspecto, pueden existir episodios en los que hagan referencia a más de una resolución, de ahí que se puedan encontrar disparidades con el número de episodios totales.

Tabla 5.1.2.3. Clasificación de los episodios del caso 2.

CATEGORÍA	**Número de episodios**	**Resolución a la que se refieren**		
		Evaluadora (Marta - E8)	**Evaluador (Manuel - E16)**	**Evaluado (Antonio - E1)**
Heurísticos	9	4	2	8
Casos estudiados	2	2	2	1
Representaciones	13	0	1	13
Soluciones	6	1	4	5
Comprobación de soluciones	1	0	0	1
Errores	0	0	0	0
Otros	3	0	0	0
Total	**34**	**7**	**9**	**28**

Los nueve episodios en los que se hace referencia a los *heurísticos* se producen en distintos momentos de la discusión mantenida por los evaluadores y, en la mayoría de ellos, se ponen de manifiesto las dificultades de ambos para entender la resolución de Antonio (E1). En la Tabla 5.1.2.4, puede observarse como desde el inicio de la conversación manifiestan abiertamente su falta de comprensión. En el primer episodio (Tabla 5.1.2.4a) admiten que no entienden dicho *heurístico* ("igualar las ecuaciones" de la parábola y de una recta expresada en forma explícita) y, en un episodio posterior (Tabla 5.1.2.4b), lo valoran como correcto al expresar que la "primera parte" está bien, a pesar de que Manuel (E16) lo considera demasiado complejo (Tabla 5.1.2.4c). Sin embargo, en el último episodio encontramos una contradicción por parte de Manuel (E16), quien tras declarar en episodios anteriores que el comienzo de la resolución (el *heurístico*) estaba bien, concluye esta última intervención diciendo que no es correcto (Tabla 5.1.2.4e).

En otros 3 episodios de esta categoría, ambos evaluadores intentan justificar estas dificultades de entendimiento. Por un lado, Manuel (E16) sostiene que con el *heurístico* utilizado por el evaluado no es posible resolver el problema (Tabla 5.1.2.5a-c) y, por otro, Marta (E8) atribuye su falta de compresión a que el evaluado no representa gráficamente, es decir, a que no utiliza el *heurístico dibujar una figura* en el que ella se apoyó para resolver el problema (Tabla 5.1.2.5b-c).

El último episodio en el que los evaluadores hacen referencia a los *heurísticos* se encuentra al final de la transcripción (Tabla 5.1.2.6) y en él Marta (E8) explica su propio *heurístico*.

Tabla 5.1.2.4. Episodios donde los evaluadores del caso 2 se refieren al *heurístico* - 1

Nº de episodio	EPISODIO	
1	**Marta:** Yo no lo entiendo. **Manuel:** Yo tampoco. **Marta:** Es que lo primero que hizo sí. **Manuel:** Sí. Igualar las ecuaciones. **Marta:** Igualar las ecuaciones. **Manuel:** Sí. Hasta ahí lo entiendo.	a
14	**Manuel:** Yo lo que escribiría sería lo que estamos viendo. La primera parte bien, cuando empieza a igualar las ecuaciones de la parábola con la ecuación de la recta, con la ecuación general de la recta. **Marta:** Pero no comprendemos…	b
21	**Manuel:** Es un caso también muy particular y muy enrevesado para calcular todas las rectas, así que...	c
25	**Manuel:** Yo pondría eso. Que como… Si tuviera que evaluar la resolución del problema como si fuera un alumno diría que empezó bien	d
32	**Marta:** A ver, en verdad iba bien. Es una idea que a mí, por ejemplo, no se me ocurrió. **Manuel:** Yo creo que empieza… lo aborda de la manera más compleja posible para intentar solucionar y tener todas las soluciones. Ya ese procedimiento no es correcto.	e

Tabla 5.1.2.5. Episodios donde los evaluadores del caso 2 se refieren al *heurístico* - 2

Nº de episodio	EPISODIO	
4	**Manuel**: Lo digo porque este enfoque para mí no es el que… yo quería pasar por ahí y luego generalizar. Pero no llegué a generalizar, no sé si por falta de tiempo o […]	a
6	**Marta**: No es que… al tampoco representar nada gráficamente también yo creo que cuesta mucho más.	b
24	**Marta:** Es que si lo dibujas creo que es el más visual, el de todas las paralelas. **Manuel:** Yo es que no me sentía capaz tampoco de resolverlo de otra forma pero claro. Esto no veo yo que resuelva.	c

Tabla 5.1.2.6. Episodio final donde los evaluadores del caso 2 se refieren al *heurístico*.

Nº de episodio	EPISODIO
34	**Marta:** Yo primero hice 2. Puse $y=6$ e $y=7$. Lo comprobé. Y dije, si te das cuenta, para $y=n$, esto también te sirve.

En relación con la siguiente categoría de análisis, *casos estudiados,* se han encontrado solo dos episodios que ocurren a mitad del proceso de evaluación y en los que los evaluadores comentan, como ya se ha señalado en el análisis de las resoluciones, que ambos coinciden en uno de los casos que estudian: rectas horizontales (Tabla 5.1.2.7).

Tabla 5.1.2.7. Episodios donde los evaluadores del caso 2 se refieren a los *casos estudiados*.

Nº de episodio	EPISODIO	
18	**Manuel:** O sea, tú y yo, la casualidad que hicimos más o menos el mismo razonamiento.	a
23	**Manuel:** Y el caso que intenta hacer, que es un caso concreto. Igual que nosotros intentamos solucionar primero este para… No llega…	b

En cuanto a la categoría de *representaciones,* se han identificado episodios a lo largo de todo el proceso de evaluación relacionados con estas, lo cual no es de extrañar al tratarse de la categoría con mayor número de episodios, un total de 13. En estos se hace referencia a dos de los cuatro tipos de representaciones consideradas (Tabla 5.1.2.8), resultado esperado puesto que las tres personas involucradas en este caso utilizaron las representaciones simbólica y verbal, mientras que sola una de ellas, Marta (E8), la gráfica y ninguna la tabular.

Tabla 5.1.2.8. Clasificación de los episodios de la categoría *representaciones* del caso 2.

REPRESENTACIÓN	Gráfica	Tabular	Simbólica	Verbal
Nº DE EPISODIOS	0	0	10	3

La mayoría de los episodios de esta categoría, 10 de los 13, se refieren a la *representación simbólica* y en ellos vuelve a ponerse de manifiesto la dificultad que presentan los evaluadores para comprender la resolución evaluada. En la Tabla 5.1.2.9 se presentan algunos episodios en los que se observa como la pareja trata de entender e interpretar los cálculos realizados por el compañero evaluado.

Para concluir con la categoría de *representaciones*, tres de estos episodios aluden a la *representación verbal* (Tabla 5.1.2.10), que, nuevamente, permiten observar las dificultades de la pareja evaluadora con la resolución. Los dos primeros episodios (Tabla 5.1.2.10a-b) ponen en relieve la incapacidad de ambos evaluadores para conectar lo escrito con palabras en la resolución con la estrategia y los pasos seguidos por el estudiante evaluado. En el último (Tabla 5.1.2.10c), a pesar de que Antonio (E1) explica la mayoría de los pasos realizados, Manuel (E16) atribuye su falta de comprensión a la ausencia de aclaraciones con palabras.

Tabla 5.1.2.9. Ejemplos de episodios donde los evaluadores del caso 2 se refieren a la *representación simbólica*.

Nº de episodio	EPISODIO
7	**Manuel:** *a* y *b* son libremente con lo cual no hay ninguna restricción, en principio. A no ser que luego la resolución te lleve a que haya una restricción. **Marta:** Que la *a* tiene que ser de esta forma, ¿no? **Manuel:** Esa es la restricción según esta resolución. **Marta:** Sí. ¿Y cuál es la otra? **Manuel:** Aquí hay un problema *[Se están refiriendo a la parte en que Carlos comienza a resolver la inecuación, planteando una ecuación para "a", y obtiene dos valores de "a". Algo que luego descarta.]* Por ejemplo, porque si *b* es igual a 1, sacando el valor de *a*. Uno es el de *a=0* y *b=1*. Esa es tangente. **Marta:** Sí. Y no la corta dos veces. **Manuel:** La corta uno porque es tangente. Y la otra es 4… 4x+1… el 0 pasa por el 5. Hombre sí, corta dos veces porque… **Marta:** Ah, ¿pero a lo mejor detrás tiene alguna condición de la *b*? **Manuel**: Saca lo de los intervalos.
15	**Manuel:** No. Yo creo que el fallo está aquí. En este razonamiento de aquí. Yo te lo explico a ti y ya luego tú me dices si es verdad o estoy equivocado. Porque me puedo equivocar yo perfectamente. Vale. Llega a una ecuación de segundo grado que intenta resolver. Con la fórmula de una ecuación de segundo grado
19	**Manuel:** Yo lo que digo es, lo que está haciendo al estar con *y=ax+b* y de repente decir *b* es igual cero, es que está cogiendo todas las rectas que pasan por el (0,0). Porque se queda con *y=ax*.

Tabla 5.1.2.10. Episodios donde los evaluadores del caso 2 se refieren a la *representación verbal*.

Nº de episodio	EPISODIO	
2	**Marta:** Pero aquí ya no. Aquí ya me pierdo un poco. Dice que resolvemos la ecuación de segundo grado y, ¿tiene que encontrar dos valores distintos? ¿Qué es lo que significa? **Manuel:** Sí, pero… **Marta:** Pero cuando encuentra dos valores […] una recta… **Manuel:** Sí. Exacto. **Marta:** …que se intersecta. ¿Pero cómo sabe que es dos veces?	a
16	**Manuel:** Y luego dice, de repente, dice que cuando lo dentro de la raíz sea mayor que cero habrá dos soluciones. Pero no entiendo que eso tenga que ver con nada que tenga que ver… que garantice que la recta corte con la parábola. **Marta:** Porque lo que dice es que cuando es mayor que cero lo que se referirá es que tiene 2 soluciones.	b
27	**Manuel:** Si hubiera intentado detallar con palabras qué estaba haciendo, qué estaba intentando… podríamos seguir el razonamiento. Pero hay un momento que yo no puedo seguirlo y no sé por qué hace las cosas que hace.	c

Siguiendo con las categorías de análisis, en la transcripción de la discusión entre Marta (E8) y Manuel (E16), se identificaron seis episodios en los que hacen referencia a las *soluciones*. El primero ocurre al inicio de la discusión, en el que los revisores comentan las soluciones que ellos mismos encontraron, indicando cuántas y de qué tipo eran (Tabla 5.1.2.11).

Tabla 5.1.2.11. Episodio inicial donde los evaluadores del caso 2 se refieren a las *soluciones*.

Nº de episodio	EPISODIO
3	**Manuel:** No, es que… Claro. Yo no encontré todas las soluciones. **Marta:** Ah no. Yo tampoco. **Manuel:** Yo hice una cosa muy sencilla pero no tiene nada que ver con esto. Yo encontré infinitas soluciones que eran todas paralelas al eje horizontal. **Marta:** Yo también. Yo me quedé ahí. Tú porque no te cabían más.

En los siguientes tres episodios clasificados en esta categoría puede observarse como ambos evaluadores intentan comprobar si las soluciones presentadas por Antonio (E1) son correctas (Tabla 5.1.2.12a-b) y como Manuel (E16), uno de los evaluadores, intenta verificar si las rectas que él mismo dio como solución (las paralelas al eje OX por encima de la recta tangente a la parábola $y=1$) están incluidas en dichas soluciones (Tabla 5.1.2.12c).

En los dos últimos episodios relacionados con las *soluciones,* los evaluadores continúan intentando analizar las soluciones dadas por el evaluado (Tabla 5.1.2.13). Para ello, Manuel (E16) realiza una representación gráfica (Figura 5.1.2.1) en ese momento del proceso de evaluación con la que apoyar su discurso (Tabla 5.1.2.13a) y ambos evaluadores expresan sus dudas acerca de si las soluciones presentadas por su compañero cumplen las condiciones del enunciado del problema (Tabla 5.1.2.13b).

En la categoría *comprobación de las soluciones* se ha identificado un único episodio en el que Marta (E8) expresa que el evaluado no comprueba las soluciones obtenidas y Manuel (E16) señala que él no sabría cómo realizar dicha comprobación ni en qué momento se debería realizar (Tabla 5.1.2.14).

Tabla 5.1.2.12. Episodios intermedios donde los evaluadores del caso 2 se refieren a las *soluciones*.

Nº de episodio	EPISODIO	
8	**Marta:** Ah mira aquí. Cuando la *b* es igual a 0. No pero la 0 no nos sirve porque en la 1 tú dijiste que cuando la *b* es 1, ya está, no te da. **Manuel:** No da, no da, no. **Marta:** Y aquí él tiene como que *b* si funciona. **Manuel:** Si *b* mayor que 0, ¿*a* vale cualquiera de estos intervalos? **Marta:** Pero no, porque si *b* es mayor que 0 puedes coger *b=1* y cuando la *b* es 1...	a
10	**Marta:** Bueno, encontramos por lo menos un error, ¿no? **Manuel:** Sí, ¿no? Porque el *b* […] si *a=0*, no está.	b
12	**Manuel:** Para cualquier *b>1* y con *a=0*, todas esas rectas cortan en dos puntos porque son todas paralelas por encima de la tangente. Y eso no está contemplado aquí que yo vea, ¿no?	c

Tabla 5.1.2.13. Episodios finales donde los evaluadores del caso 2 se refieren a las *soluciones*.

Nº de episodio	EPISODIO	
20	**Manuel:** La parábola tiene, tú la calculaste más o menos igual que yo, tiene una forma más o menos así. En realidad lo que va a calcular es todas las rectas que, pasando por el (0,0), el haz de rectas que más o menos vendría a ser… desde aquí que esa solo tiene un corte, esa no valdría; todas las que están en medio del haz de rectas que pasan por aquí hasta la que es tangente por aquí en algún punto, bueno, en una asíntota en realidad… **Marta:** Pero no la toca, no tiene por qué… **Manuel:** Bueno, una asíntota no… ¿una parábola tiene asíntota? Pero bueno, en fin… Imaginemos que sí puede tocar. A lo mejor toca un punto por aquí y sigue. Bueno, de esto no estoy seguro. Está calculando todas estas rectas.	a
22	**Manuel:** En cualquier caso, yo le veo cosas. Que ni siquiera llega a especificar una solución concreta. Porque queda un poco genérico. **Marta:** No, y aparte, yo por ejemplo creo que está dando como solución la *b* igual cero y verdad no es solución, porque ni siquiera cumple lo que él puso (o ella). **Manuel:** Sí, yo supongo que es que la *a*… esto que acaba de obtener aquí, cuando *b* es igual a 0, lo que viene a decir es que la *a* tiene que estar de menos infinito hasta dos menos raíz de 8, esto debe ser… Es que yo dudo que ese intervalo sea tan grande. Es que solo van a valer unas *a,* que son las que… al revés, las que están aquí, llega un momento que si la *a* es más pequeña no vale, ninguna corta hasta vuelva a ser lo suficientemente grande como para que dé la vuelta y esté aquí . ¿No sé si me entiendes lo que quiero decir? **Marta:** Sí. **Manuel:** Todas las rectas que le van a valer y que cortan dos puntos tienen esta forma tienen esta forma si pasan por el *x* cero. Así, estas de aquí. **Marta:** Exacto. **Manuel:** Y eso es un rango muy concreto. Y aquí sin embargo el rango es desde menos infinito a algo y unido de algo hacia más infinito. No veo que esta solución sea posible por eso te digo. **Marta:** Ya porque en verdad está acotando desde… ¿eso es raíz de 8? **Manuel:** 2 menos raíz de 8 a 2 más raíz de 8. **Marta:** 2 más raíz de 8 es como… 2 y pico. 2… no, un poquito más. Es 2 raíz de 2, cuatro, cuatro y un poquito. **Manuel:** No lo veo. Hay algo ahí raro que a mí me hace ver que eso no puede ser solución. O sea, que no solo que no… es que se fije al menos un rango de… Es decir, hay casos en que se puede dar infinitas soluciones sencillas. **Marta:** Exacto. Y esas no están.	b

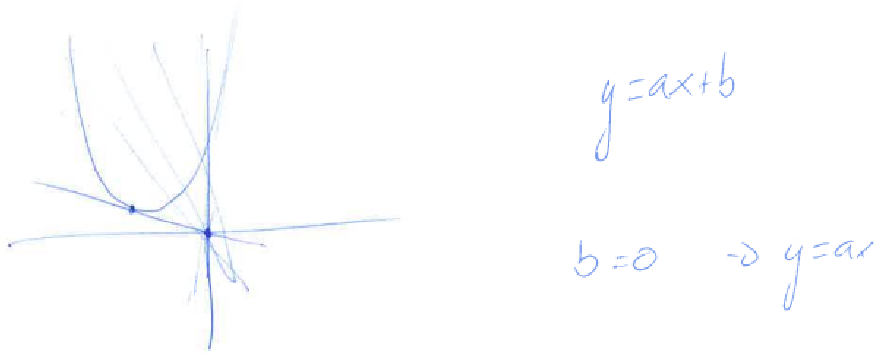


Figura 5.1.2.1. Representación gráfica realizada por Manuel (E16) durante la evaluación.

Tabla 5.1.2.14. Episodio de la categoría *comprobación de soluciones* del caso 2.

Nº de episodio	EPISODIO
29	**Marta:** Es que yo creo que luego él no comprueba cuando la *b* es cero. **Manuel:** No, no, no sé. No sé cómo, ni cuando procedía…

En relación con los *errores*, aunque el estudiante evaluado comete varios durante el proceso de resolución (Tabla 5.1.2.1), no se encuentra ningún episodio referido a esta categoría. A pesar de que la pareja evaluadora atribuye errores al evaluado, ninguno se corresponde con los que realmente comete, por tanto, tal y como se indicó en la metodología (sección 3.4.2) no se incluyen en esta categoría.

Tabla 5.1.2.15. Episodios de la categoría *otros*.

Nº de episodio	EPISODIO	
9	**Manuel:** Vamos a ver cómo escribimos esto. Porque yo estoy bastante oxidado con esto. Yo pensé que iba a ser resolver problemas como los de secundaria. Pero esto ya se me queda largo.	a
31	**Marta:** Pero ¿hay que ponerle una nota o algo? **Manuel:** No, no, no. No es corregir, ¿no? Documento para coevaluación. Bueno, en principio yo no lo evaluaría porque tampoco sé sobre qué lo tengo que evaluar, si hay que ponerle una nota, si hay que poner más o menos iba bien…	b
33	**Marta:** Y en verdad no te dice que encuentres todas. Te dice que encuentras ecuaciones de la recta. **Manuel:** Ecuaciones de rectas… con dos ya sería suficiente. Fue lo primero que pensé.	c

Por último, se han encontrado 3 episodios que no se corresponden con ninguna de las categorías anteriores, por lo que se han clasificado en la categoría *otros* (Tabla 5.1.2.15). Estos están relacionados con el enunciado del problema, las características del problema o con el enunciado de la tarea de evaluación. En el primero de ellos, Manuel (E16) admite sus dificultades para resolver el problema al no tratarse de un problema típico de los empleados en la enseñanza de la educación secundaria (Tabla 5.1.2.15a), donde normalmente se encuentran con el problema equivalente cerrado en el que se pide calcular los puntos de corte entre una parábola y una recta dadas. En el segundo, Marta (E8) pregunta si hay que calificar la resolución y Manuel (E16), aunque primero lo niega, muestra dudas sobre qué deben hacer para evaluar (Tabla 5.1.2.15b). Por último, el tercer episodio de esta categoría y que ocurre al final de su discusión, hace referencia al enunciado del problema. Los evaluadores se plantean el número de rectas que habría que encontrar para que la resolución fuese correcta (Tabla 5.1.2.15c).

Uso de la propia resolución en la evaluación de un par

Tras analizar en detalle el proceso de evaluación atendiendo a las categorías de análisis (*heurísticos*, *casos estudiados*, *representaciones*, *soluciones*, *comprobación de las soluciones* y *errores*), se presenta, a continuación, un estudio sobre las resoluciones a las que los evaluadores hacen referencia en su discusión y de qué manera las usan, lo que nos informa sobre hasta qué punto tienen en cuenta sus propias resoluciones a la hora de evaluar la resolución de su compañero.

En la Tabla 5.1.2.3 se puede observar que Marta (E8) hace referencia a su propia resolución en siete ocasiones y Manuel (E16) en nueve. Además, en cuatro de dichos episodios hacen referencia a las resoluciones de ambos evaluadores. En el primero de ellos, cada uno explica las soluciones que encontró (Tabla 5.1.2.11); en los dos siguientes, comentan la coincidencia en uno de los casos estudiados por ambos, las rectas horizontales, (Tabla 5.1.2.7); y, en el último, comparan sus heurísticos con el del evaluado (Tabla 5.1.2.5c).

Se identifican otros tres episodios en los que Marta (E8) tiene en cuenta su propia resolución. En el primero atribuye su falta de compresión de la resolución evaluada a la ausencia de representación gráfica en la misma, es decir, a que el evaluado no utiliza, como hace ella, el *heurístico dibujar una figura* (Tabla 5.1.2.5b). En el segundo de estos episodios, Marta (E8) admite que a ella no se le ocurrió abordar el problema con el heurístico utilizado por el compañero evaluado (Tabla 5.1.2.4e). Y en el tercero, que coincide con el último episodio de su discusión, la evaluadora expone cómo utilizó el *heurístico generalizar* en su propia resolución, considerando primero dos rectas horizontales particulares y generalizando, posteriormente, a todas las rectas horizontales por encima del vértice (Tabla 5.1.2.6).

Manuel (E16), por su parte, se refiere a su propia resolución en cinco ocasiones más. En la primera explica que su intención al resolver era generalizar tras pasar por las rectas horizontales pero no dispuso tiempo suficiente (Tabla 5.1.2.5a). En los otros cuatro episodios, Manuel (E16) se apoya en un conjunto de soluciones que él presentó (rectas horizontales por encima de la tangente $y=1$) para comprobar si los cálculos realizados por el estudiante evaluado son correctos (episodio nº7 en la Tabla 5.1.2.9) y para verificar si dichas soluciones están recogidas en la resolución de su compañero (Tabla 5.1.2.12).

Carácter de los episodios

Por último, se analiza el carácter de los episodios identificados en la transcripción, distinguiendo entre episodios *interpretativos, valorativos* y *expositivos*, atendiendo a las definiciones dadas para estas categorías en la metodología (sección 3.4.2). En la Tabla 5.1.2.16 se presenta un resumen del carácter de los episodios de este caso para cada una de las categorías empleadas en el análisis de los aspectos en los que los evaluadores se fijan al evaluar: *heurísticos, casos estudiados, representaciones, soluciones y comprobación de soluciones*. En esta tabla se separan los episodios entre aquellos tienen un carácter exclusivamente interpretativo, valorativo o expositivo, y los que poseen doble carácter. No se incluye la categoría *errores* pues, como ya se mencionó anteriormente (Tabla 5.1.2.3), no se identificó en la discusión de este caso ningún episodio referente a ella. Además, en la categoría *otros* encontramos episodios que no hacen referencia a la resolución que están evaluando (enunciado del problema o de la tarea de evaluación) y que, por tanto, carecen de carácter.

Como puede observarse, el proceso de evaluación seguido por esta pareja es fundamentalmente valorativo, con más del triple de episodios valorativos (19 episodios) que interpretativos (6 episodios). Se encontraron cuatro episodios con carácter expositivo y dos episodios con doble carácter interpretativo y valorativo.

Tabla 5.1.2.16. Clasificación de los episodios del caso 2 atendiendo al carácter.

	Interpretativo	**Valorativo**	**Expositivo**	**I / V**
Heurísticos	1	6	2	0
Casos estudiados	0	1	1	0
Representaciones	4	7	0	2
Soluciones	1	4	1	0
Comprobación de soluciones	0	1	0	0
Total	**6**	**19**	**4**	**2**

El mayor número de episodios lo encontramos en aquellos con carácter valorativo, donde la mayor parte hacen referencia a las *representaciones*. Cinco hacen referencia a la *representación simbólica* y dos a la *representación verbal*. En el primer grupo, los evaluadores, al no entender los cálculos y los pasos dados por Antonio (E1), presuponen que estos son incorrectos (Tabla 5.1.2.17a-b), que el estudiante evaluado se pierde en sus propios cálculos (Tabla 5.1.2.17c) e intentan argumentar dónde se ha podido equivocar el compañero evaluado (Tabla 5.1.2.17d-e), atribuyendo errores que no comete y pasando por alto los que sí comete.

En cuanto a los dos referidos a la *representación verbal,* en el primero puede detectarse la incapacidad de los evaluadores para conectar las justificaciones escritas con palabras con la estrategia y los pasos seguidos por el estudiante evaluado (Tabla 5.1.2.10b) y, en el segundo, atribuyen su falta de comprensión a la ausencia de explicaciones con palabras, a pesar de que Antonio (E1) aclara por escrito la mayoría de los pasos (Tabla 5.1.2.10c).

Por otra parte, de los episodios valorativos, seis hacen referencia a los *heurísticos*. En ellos expresan que, a pesar de considerarlo algo complicado (Tabla 5.1.2.4c) es correcto (Tabla 5.1.2.4b-d-e). En los otros, Marta (E8) atribuye su falta de compresión a que el compañero no representa gráficamente (Tabla 5.1.2.5b) ya que considera que este *heurístico* (*dibujar una figura*) es más visual (Tabla 5.1.2.5c).

En los 4 episodios valorativos relacionados con las *soluciones*, la pareja evaluadora concluye que las soluciones no son correctas ya que no han encontrado que en ellas se contemplen las rectas horizontales por encima de la recta tangente dadas por Manuel (E16) en su propia resolución (Tablas 5.1.2.12 y 5.1.2.13b). En el episodio valorativo en el que comentan los *casos estudiados,* Manuel (E16) valora que está incompleto (Tabla 5.1.2.7b). Y, el único episodio de la categoría de *comprobación de soluciones,* tiene también carácter valorativo en el que Marta (E8) expresa la ausencia de la verificación de uno de los conjuntos de soluciones obtenidas por el evaluador y que la pareja afirma que es erróneo (Tabla 5.1.2.14).

Tabla 5.1.2.17. Episodios de carácter valorativo referentes a la *representación simbólica.*

Nº de episodio	EPISODIO	
5	**Manuel:** Ese se me queda un poco lejos, porque además no lo veo. No veo bien que fuera eso. No me suena bien en principio pero no digo que no.	a
15	**Manuel:** No. Yo creo que el fallo está aquí. En este razonamiento de aquí. Yo te lo explico a ti y ya luego tú me dices si es verdad o estoy equivocado. Porque me puedo equivocar yo perfectamente. Vale. Llega a una ecuación de segundo grado que intenta resolver. Con la fórmula de una ecuación de segundo grado	b
26	**Manuel:** Pero se perdió en los cálculos genéricos al intentar usar todas las funciones… **Marta:** Sobre todo yo creo que a partir de aquí. Una vez pone esto creo que se pierde un poco…	c
28	**Marta:** Entonces, una vez resuelve la inecuación y despeja el valor de *a*, que le queda en función de *b*. Luego intenta calcular… bueno, o… **Manuel:** Seguir estudiando, por casos, en función de los valores que puede asignarle a *b*. Eso es lo que intenta. Y se queda en el primero. **Marta:** Pero es que, por ejemplo, calcula para *b* igual 0. Pero no se da cuenta que la *b=0* no cumple la inecuación. **Manuel:** Claro, es que aquí… Porque si llegas hasta aquí más o menos bien, si *b* es igual a cero…	d
30	**Marta:** Es que, además, cuando la *b* es 0, esto te queda 5 por 20. Y esto te va a quedar negativo, ni siquiera se puede hacer. Porque 5 por 4 es 20 y 4 menos 2 es 2, 2 al cuadrado es 4, menos 20 te queda negativo. Esto no tiene solución. **Manuel:** Sí, sí. Se equivoca en un paso ahí. Y de todas formas… **Marta:** Y luego el siguiente caso que es *b>0.* **Manuel:** Ah. Es verdad que también lo estudia. No me había dado cuenta. Es que lo ve en función de *b* dice cuando a está entre menos infinito y 2 menos 2 raíz de 2, como si le valiera cualquier *b* y cualquier *b* no vale. **Marta:** Exacto. Y no está viendo que cumpla la inecuación al final. Creo que se centra en ver si b es positivo o negativo, pero no que cumpla la inecuación.	e

A continuación se encuentran los episodios con carácter interpretativo, donde los evaluadores están haciendo referencia a las *representaciones*, aunque se han identificado también un episodio interpretativo referente a los *heurísticos* y otro a las *soluciones.* El primero de los episodios interpretativos de la categoría *representaciones* se refiere a la *representación verbal* y se da al inicio de la evaluación (Tabla 5.1.2.10a). En él los evaluadores admiten que no comprenden el razonamiento que lleva al evaluado al expresar que, tras resolver la ecuación de segundo grado (obtenida al igualar la ecuación de la parábola y la explícita de una recta), se obtendrán dos puntos de intersección cuando dicha ecuación tenga dos soluciones (Figura 4.1.2). Otros 3 episodios interpretativos de la categoría *representaciones* tienen que ver con la *representación simbólica* en los que la pareja evaluadora, continuando con sus dudas, analiza los cálculos realizados por el evaluado intentando entender los pasos dados (Tabla 5.1.2.18).

El episodio interpretativo relacionado con el *heurístico* es el primero de la transcripción, donde identifican el *heurístico* utilizado por el compañero evaluado (igualar las ecuaciones de la recta y la parábola) y reconocen que, hasta ese momento, es lo único que han entendido de la resolución (Tabla 5.1.2.4a). Para terminar en lo referente al carácter interpretativo, se identifica un episodio relacionado con las *soluciones* (Tabla 5.1.2.13a) en el que Manuel (E16), haciendo uso de una representación gráfica que él mismo realiza en el momento de la evaluación (Figura 5.1.2.1), intenta visualizar las rectas presentadas por Antonio (E1) como solución.

Tabla 5.1.2.18. Episodios de carácter interpretativo referentes a la *representación simbólica.*

Nº de episodio	EPISODIO
11	**Marta:** Sí, pero ahí no está restringiendo la *a*, está restringiendo la *b*, y…
13	**Marta:** No, porque además. No, porque solo restringe la a en función de la *b* pero no […] Pero tú puedes restringir cuando la *b* es 0, la a te coge todo lo que tú quieras.
19	**Manuel:** Yo lo que digo es, lo que está haciendo al estar con $y=ax+b$ y de repente decir *b* es igual cero, es que está cogiendo todas las rectas que pasan por el (0,0). Porque se queda con $y=ax$.

A diferencia del caso 1, en este caso se han encontrado cuatro episodios con carácter expositivo. En dos de ellos comentan sus propios *heurísticos* pero lo hacen en momentos distintos de su discusión. Manuel (E16) expone que su intención era generalizar tras abordar las rectas horizontales casi al inicio de la evaluación (Tabla 5.1.2.5a), mientras que Marta (E8) explica, en el último episodio de la transcripción, que utilizó el *heurístico generalizar* considerando primero dos rectas horizontales particulares y generalizando a todas las rectas horizontales por encima del vértice (Tabla 5.1.2.6). Otro de los episodios expositivos se identifica en la categoría *casos estudiados,* en el que los evaluadores comentan que ambos coincidieron en uno de los casos que abordan, las rectas horizontales (Tabla 5.1.2.7a). Y, el último episodio de carácter expositivo pero que tiene lugar al inicio del proceso de evaluación, se refiere a las *soluciones* en el que ambos evaluadores explican las soluciones que cada uno encontró (Tabla 5.1.2.11).

En este caso, dos episodios se han clasificado con doble carácter interpretativo y valorativo, pues se tratan de episodios únicos por girar ambos en torno a la *representación simbólica*, pero en los que los evaluadores, al no comprender los cálculos realizados por su compañero, van interpretando dichos cálculos y valorando, al mismo tiempo, si se obtienen rectas que cumplan las condiciones del problema o no (episodio nº7 de la Tabla 5.1.2.9 y Tabla 5.1.2.19).

A modo de resumen, en este caso se han podido distinguir 34 episodios en los que se hace referencia, principalmente, a las *representaciones*, los *heurísticos* y las *soluciones*. Destaca de esta pareja evaluadora la falta de comprensión del proceso de resolución seguido por su compañero, con muchos episodios en los que se observa que no logran entender cómo Antonio (E1) resolvió el problema. Además de expresarlo explícitamente en varias ocasiones, esta situación se hace evidente si se tienen en cuenta dos aspectos. Primero, en cómo los evaluadores tienen en cuenta sus propias resoluciones. En el caso de Marta (E8), sintiéndose incapaz de comprender la resolución evaluada al no existir representación gráfica y, por parte de Manuel (E16), insistiendo en comprobar si las soluciones que él mismo dio en su resolución están contempladas en la resolución del compañero evaluado. Y, segundo, si se presta atención al carácter de los episodios. Se observan hasta cuatro episodios expositivos en los que los evaluadores explican aspectos de sus propias resoluciones, en los episodios interpretativos intentan comprender los pasos seguidos por Antonio (E1) y en los episodios valorativos atribuyen errores al compañero evaluado que no comete y pasan por alto los que realmente comete. Estos resultados, como se comentó anteriormente, pueden consultarse en de-Armas-González et al. (2023), así como la comparativa con el proceso seguido por la pareja evaluadora del caso 1. En este sentido, la pareja del caso 1 centra su evaluación, principalmente, en el proceso de resolución, mientras que la del caso 2 lo hace también en las soluciones presentadas por la evaluada, aunque destacan las dificultades para entender la resolución a evaluar de este segundo caso. Ambas parejas coinciden en apoyarse en sus propios procesos de resolución a la hora de evaluar al compañero, principalmente la segunda pareja, la cual hace referencia a sus resoluciones en un mayor número de episodios.

La complejidad de llevar a cabo un análisis cualitativo de estas características se hace patente en este segundo caso, en el que interviene un factor tan importante como el conocimiento matemático y observándose cómo su ausencia influye directamente en la calidad de la evaluación (Cáceres y Chamoso, 2015). Sin embargo, a pesar de las dificultades encontradas en este caso concreto, los tres focos en los que se centra este análisis (aspectos de la resolución, uso de la propia resolución y carácter de los episodios) nos han ayudado a identificar los elementos relevantes, permitiendo mostrar el proceso de evaluación seguido por la pareja de manera precisa.

Tabla 5.1.2.19. Uno de los episodios de carácter interpretativo y valorativo referentes a la *representación simbólica.*

Nº de episodio	EPISODIO
17	**Marta:** Pero eso es mentira. Porque si la b es 1. Ah sí, tendría… a ver. Tendría dos soluciones, sí. **Manuel:** Y eso te dice que corta en dos puntos. Ah vale, vale. Eso es lo que no entendía. Vale. Corta en dos puntos si la parte de dentro […] Entonces el cálculo se restringe a que esto sea mayor que cero y eso es lo resuelve. **Marta:** Entonces. Restringe el resultado a lo que…bueno, al intentar resolver la ecuación. Que le sale, ¿no? El resultado está restringido a que lo de dentro de la raíz le dé mayor que cero. Mayor estricto. Mayor estricto que cero. Sí, sí, sí, sí. **Manuel:** Ah vale. Ya lo entendí. Yo creo que tiene razón incluso, pero... Ahora ya lo entiendo más. Este intervalo […]. **Marta:** Claro porque a lo mejor lo que está es solo con eso. No, pero él coge todo. **Manuel:** Si es negativo no tiene solución. Claro, si es negativo no tiene solución. En este punto justo estaría diciendo… No pero, cuando solo corta un punto, ¿cómo resuelvo? **Marta:** No porque se supone que si la raíz le está dando positiva ya va a tener dos soluciones. Va a estar cortando con dos puntos. Entonces lo que dice es que cuando es cero. Supongo que eso lo que se refiere es lo que está dentro de la raíz. Te va a quedar positivo por aquí y por aquí. **Manuel:** Sí, sí. **Marta:** Entonces va a tener de aquí para abajo dos soluciones y de aquí para arriba también. Entonces en todos estos números va a haber solución y va a cortar a la parábola en dos. Entonces estaría bien, ¿no? **Manuel:** A mí me haría falta escribir para saberlo. Sí, realmente sí, tiene lógica. Ahora que lo veo si tiene lógica, pero… Y de repente, ¿de dónde saca el b=0? **Marta:** Aquí. Porque ese es el caso. **Manuel:** Ah porque solo. Ah dejó el caso. Ah vale, vale. **Marta:** Hizo un caso con b=0 y otro con b>0. **Manuel:** Ah vale. Ahora sí. Pensé que estaba con todos. **Marta:** Lo que pasa que no sé por qué no miró para b<0. **Manuel:** No le dio tiempo. **Marta:** Ah vale. Le faltaría el caso b<0. **Manuel:** No pero… a depende de b y b depende de a seguramente. Pero el tema es que vuelve a

	resolver como lo que tenía dentro de la raíz es una ecuación de segundo grado. Bueno, en realidad una inecuación. Despeja el valor de a y le queda en función de b. Y luego analiza en función de los valores posibles de b. Y solo analiza un caso concreto. O sea, que en realidad cuando solo analiza el caso b=0, es decir, a=2. Cuando b=0, que es el caso pone, ¿son cosas mías o a=2 y ya está? **Marta:** a=2, sí. **Manuel:** Y esto todo… **Marta:** Ah pero, ¿entonces? **Manuel:** Es que claro. Vuelve atrás. Vuelve atrás porque aquí llega a una conclusión. Y ahora te dice bueno ahora b=0, vale. Luego a=2. Siempre vuelve atrás. Eso es lo que no entiendo. **Marta:** Pero claro, lo que creo que no tuvo en cuenta es que esto se tiene que seguir cumpliendo. Sí, sí, sí se cumple porque cuando la b=0 la a=2, entonces esto tiene solución. La cosa no es que a y b tengan solución o cuantas soluciones tengan a y b, sino la x que es la que te interesa que tenga dos soluciones. **Manuel:** Vale. Ah vale, vale. **Marta:** Aunque la b sea cero si la a te da una solución que es… Entonces aquí dentro te quedaría positivo. Entonces ya la x te da dos soluciones, con lo cual se corta dos veces. **Manuel:** Vale. **Marta:** Lo que te interesa es que esto sea mayor que cero. **Manuel:** Sigo sin verlo porque me parece un razonamiento un poco… Sí, sí… Sí, sí lo veo porque si vuelvo atrás y ahora yo muevo el b=0 esto está al cuadrado con lo cual la raíz se va y 4 menos a, mas menos 4 menos a, entonces 2 veces 4 menos a ó 0. X igual a cero. **Marta:** No. Si te da x igual a cero, no. Solo es una solución. Esto tiene que dar… esto te da. No pero es aquí no te queda esto. **Manuel:** Si la b es igual a cero, queda dos soluciones de x: la cero y la dos veces 4 menos a. **Marta:** Pero claro, si la b es cero, la a es 2. Entonces te queda aquí 2 al cuadrado que es 4 menos 4 es cero. Sí, claro, te queda una nada más. **Manuel:** No sé. No sigo el razonamiento. **Marta:** No, pero es que entonces cuando b es cero, la a es dos y entonces no se te cumple la inecuación. Te está dando igual que cero. No te está dando mayor que cero. Y es un mayor estricto. Si él pone b cero y a 2, que es lo que te daría, lo de dentro de la raíz se queda cero, con lo cual ya no […] La condición es que sea mayor que cero, mayor estricto. Entonces ese no te vale, ese caso. **Manuel**: Es que yo lo que veo es que está con un solo caso.

5.1.3 Caso 3. Francisco, Sofía y David

En esta sección se presenta el caso formado por Francisco (E11) y Sofía (E15), que evalúan la resolución de David (E3). En primer lugar, se muestra una comparativa de las principales características, atendiendo a las categorías de análisis, de las resoluciones realizadas por estos tres estudiantes cuyo estudio se presentó en detalle en las secciones 4.1.11, 4.1.15 y 4.1.3.

Caso 3: Análisis conjunto de las tres resoluciones.

En la Tabla 5.1.3.1 se muestra un resumen de las características de las resoluciones del problema presentadas por cada uno de los tres participantes que conforman este caso, atendiendo a las categorías de análisis.

Los evaluadores utilizan diferentes *heurísticos* para resolver el problema. Francisco (E11) combina dos *heurísticos*: *dibujar una figura* y *generalizar*. Se apoya en la representación gráfica de la parábola (Figura 4.1.55) para construir la recta que pasa por los puntos (-4,0) y (0,4) (Figura 4.1.56) y, a partir de ella, generalizar su solución a la familia de rectas que pasan por los puntos (-4,0) y (0,λ) (Figura 4.1.58). Sofía (E15), en cambio, utiliza únicamente el *heurístico ensayo y error*, tomando rectas particulares y comprobando si cumplen o no las condiciones del problema (Figuras 4.1.72-4.1.76). El estudiante evaluado, David (E3), también utiliza el *heurístico ensayo y error* pero de forma diferente y después de haber utilizado el *heurístico suponer el problema resuelto*. Inicialmente, considera la ecuación explícita de una recta, y=ax+b, y busca las condiciones que deben verificar sus coeficientes para que sea solución del problema (Figuras 4.1.11-4.1.13). Tras alcanzar unas condiciones, se apoya en el *ensayo y error* para comprobar si dos valores concretos de *a* y *b* las cumplen (Figura 4.1.14). En la Tabla 5.1.3.2 se recoge un resumen de los heurísticos empleados por las tres personas que forman este caso y el orden en que los utilizaron.

Tabla 5.1.3.1 Resumen de las resoluciones del caso 3.

	Evaluador Francisco (E11)	**Evaluadora Sofía (E15)**	**Evaluado David (E3)**
Heurístico	1. Dibujar una figura 2. Generalizar	1. Ensayo y error	1. Suponer el problema resuelto 2. Ensayo y error
Casos estudiados	Recta que pasa por los puntos (-4,0) y (0,4). Familia de rectas que pasan por los puntos (-4,0) y (0,λ).	y=0 y=1 y=2 y=3 y=4 y=4x y=x y=x+4	y=ax+b y=x+3 y=-2x+1
Representaciones	Gráfica, simbólica y verbal	Simbólica y verbal	Simbólica y verbal
Soluciones	$y = \lambda\left(\frac{x+4}{4}\right)$, con y λ>1	y=2 y=3 y=4 y=4x y=x+4	y=x+3 y=-2x+1
Comprobación de las soluciones	y=x+4 $y = \lambda\left(\frac{x+4}{4}\right)$, con y λ>1	y=0 y=1 y=2 y=3 y=4 y=4x y=x y=x+4	y=x+3 y=-2x+1
Errores	Afirmar que para λ>1, la familia de rectas $y = \lambda\left(\frac{x+4}{4}\right)$ tienen dos puntos de intersección con la parábola. Afirmar que la parábola es creciente para $x \geq -2$. Error de operatoria.	No	Segunda coordenada de los puntos de intersección de la recta y=-2x+1 y la parábola.

Los evaluadores también difieren en los *casos estudiados*. Mientras que Francisco (E11) aborda la recta que pasa por los puntos (-4,0) y (0,4) (Figura 4.1.56) y, apoyándose en ella, la familia de rectas que pasan por los puntos (-4,0) y (0,λ), con λ>1 (Figura 4.1.58), Sofía (E15) considera y analiza ocho rectas particulares: y=0, y=1, y=2, y=3, y=4, y=4x, y=x, y=x+4

(Figuras 4.1.72-4.1.76). Los *casos estudiados* por David (E3) tampoco coinciden con los abordados por los evaluadores. Él considera la ecuación explícita de una recta, y=ax+b (Figuras 4.1.11-4.1.13), y dos rectas particulares: y=x+3 e y=-2x+1 (Figura 4.1.14).

Tabla 5.1.3.2. Heurísticos empleados por los estudiantes del caso 3.

		HEURÍSTICOS	
Evaluadores	Francisco (E11)	Dibujar una figura	Generalizar
	Sofía (E15)	Ensayo y error	
Evaluado	David (E3)	Suponer el problema resuelto	Ensayo y error

En cuanto a las *representaciones* utilizadas, Francisco (E11) es el único evaluador de la pareja que realiza la *representación gráfica* de la parábola (Figura 4.1.55). En cambio, la *representación simbólica* aparece en las resoluciones de ambos evaluadores para presentar ecuaciones y recoger cálculos, y es la representación casi exclusiva de la resolución de Sofía (E15). La *representación verbal* es utilizada por Francisco (E11) para explicar cada unos de los pasos dados (Figuras 4.1.52-4.1.54, 4.1.56-4.1.60), para expresar las conclusiones de sus cálculos (Figuras 4.1.53, 4.1.56 y 4.1.57) y para presentar las soluciones (Figura 4.1.61). Sofía (E15) únicamente la utiliza para indicar el número de puntos de intersección entre las rectas estudiadas y la parábola (Figuras 4.1.72-4.1.76). Por su parte, el estudiante evaluado, David (E3), no *representa gráficamente* la parábola, utiliza la *representación simbólica* para recoger cálculos (Figuras 4.1.11-4.1.15), igual que los evaluadores, y la *representación verbal* para indicar los pasos que va a dar y explicar las conclusiones de sus cálculos (Figuras 4.1.11-4.1.15).

Las *soluciones* presentadas por los componentes de la pareja evaluadora, debido a las diferencias en sus procesos de resolución, tampoco presentan similitudes. Francisco (E11) obtiene como solución la familia de rectas $y = \lambda\left(\frac{x+4}{4}\right)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\lambda>1$ (Figura 4.1.59), mientras que Sofía (E15) presenta como *soluciones* aquellas rectas particulares que verifica que tienen dos puntos de intersección con la parábola, es decir, y=2, y=3, y=4, y=4x e y=x+4 (Figuras 4.1.73, 4.1.74 y 4.1.76). Casualmente, esta última recta pertenece a la familia de rectas obtenidas por Francisco (E11), pues resulta del valor $\lambda = 4$. Por su parte, el estudiante evaluado da como *soluciones* las rectas y=x+3 e y=-2x+1 (Figura 4.1.14), que no tienen ninguna relación con las obtenidas por Francisco (E11) y Sofía (E15).

En lo que sí coinciden ambos evaluadores es en realizar la *comprobación de las soluciones* obtenidas. Francisco (E11) comprueba la recta particular y=x+4 (Figura 4.1.57) y, aunque no la concluye, comienza la comprobación de la familia de rectas $y = \lambda\left(\frac{x+4}{4}\right)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\lambda>1$ (Figura 4.1.60). En la resolución de Sofía (E15), la *comprobación de las soluciones* es intrínseca al heurístico empleado, por lo que comprueba cada uno de los casos que estudia: y=0, y=1, y=2, y=3, y=4, y=4x, y=x, y=x+4 (Figuras 4.1.72-4.1.76). El evaluado, David (E3), también realiza la comprobación de las rectas y=x+3 e y=-2x+1 calculando los puntos de corte de cada una con la parábola (Figura 4.1.15).

Por último, en cuanto a los *errores*, la resolución de Francisco (E11) es la única de las resoluciones de la pareja evaluadora que presenta errores. Afirma erróneamente que la familia de rectas $y = \lambda\left(\frac{x+4}{4}\right)$ intersecta dos veces a la parábola si λ>1 (Figuras 4.1.59-4.1.61), afirma que la parábola es creciente para $x \geq -2$ y comete un error de operatoria. El evaluado también comete un *error* al calcular los puntos de corte de la recta y=-2x+1 con la parábola, siendo incorrecta la segunda coordenada de ambos puntos de intersección (Figura 4.1.15).

Caso 3: Análisis del proceso de evaluación.

El proceso de evaluación de esta pareja se caracteriza por su brevedad, con un número reducido de episodios en los que realizan comentarios directos y concisos. A continuación, se presenta un análisis detallado teniendo en cuenta las variables de análisis indicadas en la metodología (sección 3.4.2). Posteriormente, se mostrará un estudio de la utilización que realizan los evaluadores de sus propias resoluciones para evaluar la de su compañero. Finalmente, se recogerá el análisis del carácter de las observaciones que hacen los evaluadores, distinguiendo entre episodios *interpretativos, valorativos* y *expositivos*.

Aspectos de la resolución del problema en que se centra la evaluación

En la transcripción de la discusión mantenida entre Francisco (E11) y Sofía (E15) (Anexo A.1.3) se identificaron un total de 10 episodios (Tabla 5.1.3.3). Las categorías a las que hacen referencia en un mayor número de episodios son *soluciones* y *otros*, en 4 episodios cada una. Los dos episodios restantes están relacionados con las categorías *representaciones* y *comprobación de soluciones*, a las que hacen mención en 1 episodio cada una. No se encontraron episodios referidos a las categorías *heurísticos, casos estudiados* ni *errores*.

En la Tabla 5.1.3.3 se muestra, además del número de episodios clasificados en cada una de las categorías de análisis, el número de episodios en los que hacen referencia a cada una de las resoluciones implicadas en el caso (evaluadores o evaluado). En este último aspecto, pueden existir episodios en los que hagan referencia a más de una resolución, de ahí que se puedan encontrar disparidades con el número de episodios totales.

Tabla 5.1.3.3. Clasificación de los episodios del caso 3.

CATEGORÍA	**Número de episodios**	**Resolución a la que se refieren**		
		Evaluador (Francisco - E11)	**Evaluadora (Sofía - E15)**	**Evaluado (David - E3)**
Heurísticos	0	0	0	0
Casos estudiados	0	0	0	0
Representaciones	1	0	0	1
Soluciones	4	0	0	4
Comprobación de soluciones	1	0	0	1

Errores	0	0	0	0
Otros	4	0	0	2
Total	**10**	**0**	**0**	**8**

El único episodio clasificado en la categoría *representaciones* está relacionado con la *representación simbólica.* No se encontraron episodios relativos a los otros tipos de representaciones (Tabla 5.1.3.4), a pesar de que tanto los evaluadores como el evaluado utilizaron la representación verbal y Francisco (E11), uno de los evaluadores, también realizó la representación gráfica de la parábola.

Tabla 5.1.3.4. Clasificación de los episodios de la categoría *representaciones* del caso 3.

REPRESENTACIÓN	Gráfica	Tabular	Simbólica	Verbal
Nº DE EPISODIOS	0	0	1	0

Este episodio se produce al final del proceso de evaluación y en él se distinguen dos momentos. Un primer momento en el que Sofía (E15) se cuestiona si lo escrito por David (E3), el compañero evaluado, es correcto. Y una segunda parte donde Francisco (E11) revisa si David (E3) podría haber continuado hasta obtener las condiciones completas de la ecuación explícita de la recta (Tabla 5.1.3.5).

Tabla 5.1.3.5. Episodio referido a la *representación simbólica* del caso 3.

Nº de episodio	EPISODIO
8	**S:** Bueno, espérate. ¿Has comprobado que esto esté correcto realmente? A la vista salta que está bien, pero… **F:** Sí. Porque está cogiendo simplemente el discriminante. Mira a ver cuándo es mayor que cero. Es que lo hizo super bien. Quizás podría haber seguido incluso con lo general. **S:** ¿Cómo que haber seguido con lo general? ¿Por qué? **F:** Ah, no, no. Lo general hubiese sido que se hubiera quedado aquí. **S:** Por eso. Podría haberlo dejado en lo general, porque así habría encontrado… **F:** Todo.

Continuando con la siguiente categoría de análisis, se encontraron cuatro episodios en los que la pareja evaluadora hace referencia a las *soluciones*. En ellos, los evaluadores identifican las soluciones dadas por David (E3) (Tabla 5.1.3.6a-c-d) y Sofía (E15) señala que estas cumplen con lo requerido en el enunciado del problema (Tabla 5.1.3.6b).

Tabla 5.1.3.6. Episodios donde los evaluadores del caso 3 se refieren a las *soluciones*.

Nº de episodio	EPISODIO	
1	**F:** Corregimos, ¿no? **S:** Encontró una solución general. **F:** Pues sí. ¿Las encontró todas? **S:** Llegó hasta aquí y luego dio dos particulares.	a
4	**S:** A ver, encontró lo que se le pedía.	b
6	**S:** Ah vale, primero encuentra una solución general.	c
9	**F:** Pero dio dos casos particulares.	d

El único episodio clasificado en la categoría *comprobación de soluciones* sucede al inicio del proceso de evaluación y en él Francisco (E11) y Sofía (E15) identifican la comprobación que realiza David (E3) de sus soluciones y valoran positivamente el incluirla en el proceso de resolución (Tabla 5.1.3.7).

Tabla 5.1.3.7. Episodio relacionado con la *comprobación de soluciones* del caso 3.

Nº de episodio	**EPISODIO**
2	**S:** Y luego aquí simplemente lo comprueba, ¿no? ¿O estas son distintas? No, vale, está comprobando que las que había dado… **F:** Tienen dos soluciones. Vale. Quizás ni siquiera hacía falta, pero vale. Está bien. **S:** Sí, sí. Realmente, está bien que lo compruebe, pero…

En el análisis del proceso de evaluación de esta pareja tampoco se identificaron episodios referentes a los *errores,* a pesar de que el evaluado comete un error al calcular las coordenadas de los puntos de corte de las rectas con la parábola (Figura 4.1.15). Sofía (E15), en un momento de la evaluación, se pregunta si los cálculos son correctos (Tabla 5.1.3.5), pero no se percatan de dicho error.

Por último, 4 episodios, al no poder clasificarse en ninguna de las categorías anteriores, se codificaron en la categoría *otros*. Dos de ellos, uno al principio y otro al final de su discusión, hacen referencia a la evaluación de la resolución, en los que afirman que el problema está perfectamente resuelto (Tabla 5.1.3.8).

Tabla 5.1.3.8. Episodios de la categoría *otros*, relacionados con la evaluación general. Caso 3.

Nº de episodio	**EPISODIO**
3	**F:** ¿Qué ponemos? ¿Que está perfecto y ya está?
10	**F:** Pues ya está. **S:** Sí, ¿no? Perfecto.

Los otros dos episodios de esta categoría aluden, por un lado, al enunciado del problema y, por otro, a la diferencia entre evaluar y calificar. En el primero, Sofía (E15) comenta que se pedían ecuaciones de rectas (Tabla 5.1.3.9a) y, en el segundo, Francisco (E11) expresa que en la tarea se solicita evaluar y, por tanto, no deben otorgar una calificación (Tabla 5.1.3.9b).

Tabla 5.1.3.9. Episodios de la categoría *otros*, relacionados con el enunciado y la diferencia entre evaluar y calificar. Caso 3.

Nº de episodio	**EPISODIO**	
5	**S:** Se pedía que encontrara ecuaciones de rectas.	a
7	**F:** Pues, ya, ¿no? **S:** Sí. **F:** “Evalúa”. No hay que calificar ni nada, ¿no? Pues ya estaría.	b

Uso de la propia resolución en la evaluación de un par

Tras analizar en detalle el proceso de evaluación atendiendo a las categorías de análisis (*heurísticos*, *casos estudiados*, *representaciones*, *soluciones*, *comprobación de las soluciones* y *errores*), se presenta, a continuación, un estudio sobre las resoluciones a las que los evaluadores hacen referencia en su discusión y de qué manera las usan, lo que nos informa sobre hasta qué punto tienen en cuenta sus propias resoluciones a la hora de evaluar la resolución de su compañero.

En este caso, tal y como se puede observar en la Tabla 5.1.3.3, ninguno de los componentes de la pareja evaluadora hace referencia a su propia resolución a lo largo del proceso de evaluación. A pesar de las diferencias notables que existen entre las resoluciones de los evaluadores y la del evaluado (expuestas anteriormente en esta misma sección), esta pareja no muestra ninguna dificultad para comprender la resolución evaluada y tampoco han justificado sus comentarios y/o valoraciones apoyándose en sus propias resoluciones, a diferencia de lo observado en los casos anteriores,.

Carácter de los episodios

Por último, se analizó el carácter de los episodios identificados en la transcripción, distinguiendo entre episodios *interpretativos, valorativos* y *expositivos*, atendiendo a las definiciones dadas en la metodología (sección 3.4.2). En la Tabla 5.1.3.10, se presenta un resumen del carácter de los episodios para cada una de las categorías identificadas sobre los aspectos en los que los evaluadores se fijan al evaluar en este caso y que, como ya se indicó (Tabla 5.1.3.3), son: *representaciones, soluciones, comprobación de soluciones y otros*. En esta tabla se separan los episodios entre aquellos tienen un carácter exclusivamente interpretativo, valorativo o expositivo, y los que poseen doble carácter. No se incluyen las categorías *heurísticos, casos estudiados* ni *errores* pues, como ya se indicó anteriormente (Tabla 5.1.3.3), no se identificó en la discusión de este caso ningún episodio referente a ellas. Además, en la categoría *otros* encontramos episodios que no hacen referencia a la resolución que están evaluando (enunciado del problema, diferencia entre calificar y evaluar) y que, por tanto, carecen de carácter. Sin embargo, existen otros en los que evalúan globalmente la resolución y que, por tanto, tendrán carácter valorativo.

Tabla 5.1.3.10. Clasificación de los episodios del caso 3 atendiendo al carácter.

	Interpretativo	**Valorativo**	**Expositivo**	**I / V**
Representaciones	0	0	0	1
Soluciones	3	1	0	0
Comprobación de soluciones	0	0	0	1
Otros	0	2	0	0
Total	**3**	**3**	**0**	**2**

Como puede observarse en la tabla, el proceso de evaluación seguido por esta pareja está equilibrado en cuanto al carácter de sus comentarios, con el mismo número de episodios interpretativos y valorativos. No se encontraron episodios con carácter expositivo y se clasificaron dos episodios con doble carácter interpretativo y valorativo.

El carácter interpretativo se ha detectado en episodios referidos a las *soluciones*. Se trata de tres episodios en los que los evaluadores identifican las soluciones dadas por el compañero evaluado (Tabla 5.1.3.6a-c-d).

En cuanto al carácter valorativo, se identificaron otros tres episodios. Uno relacionado con las *soluciones* en el que Sofía (E15) indica que las presentadas por el evaluado responden al enunciado del problema (Tabla 5.1.3.6b) y dos episodios clasificados en la categoría *otros* en los que la pareja evaluadora realiza una valoración general de la resolución afirmando que el problema está perfectamente resuelto (Tabla 5.1.3.8).

Existen dos episodios que se han clasificado con doble carácter interpretativo y valorativo (Tabla 5.1.3.10). Uno relacionado con las *representaciones* y el otro con la *comprobación de soluciones.* En el primero de ellos, referente a la *representación simbólica*, inicialmente, valoran como correctos los pasos seguidos por David (E3) y, después, Francisco (E11) interpreta si el evaluado podría haber continuado hasta obtener las condiciones completas para la ecuación explícita de la recta (Tabla 5.1.3.5). En el episodio de la categoría *comprobación de soluciones*, ocurre a la inversa, inicialmente los evaluadores interpretan que los cálculos realizados por David (E3) tras obtener las soluciones se corresponden con una comprobación de estas (Figura 4.1.15) y, posteriormente, valoran la necesidad de incluir dicha comprobación en el proceso de resolución (Tabla 5.1.3.7).

A modo de resumen, en este caso se han podido distinguir únicamente 10 episodios en los que se hace referencia, principalmente, a las *soluciones* y a *otros* aspectos que no se pueden clasificar en las categorías de análisis, como el enunciado del problema, el concepto de evaluación y la valoración general de la resolución. Esto muestra que el foco de atención de esta pareja son las soluciones presentadas por el compañero evaluado, no haciendo referencia en ningún momento a los heurísticos, ni a los casos estudiados, ni a los errores presentados en la resolución evaluada. Durante el proceso de evaluación, ninguno de los componentes de esta tercera pareja hace referencia a aspectos de sus propias resoluciones, no teniéndose en cuenta ni explícita ni implícitamente. Además, a pesar de las diferencias entre los procesos de resolución empleados por los evaluadores y el evaluado, esta pareja, a diferencia de las anteriores, no muestra dificultades para comprender el procedimiento seguido por su compañero. Por último, se observa que el proceso de evaluación es interpretativo y valorativo en la misma medida, aunque centrados en aspectos diferentes. La mayoría de los aspectos interpretativos están relacionados con las soluciones, mientras que cuando valoran lo hacen fijándose en la resolución de forma global.

5.2. Análisis de los casos del BLOQUE II

En el segundo bloque se agrupan los tres siguientes casos. En las tres resoluciones evaluadas de este bloque las estudiantes toman distintos puntos de la parábola y, aunque empleando distintas estrategias, construyen rectas que pasan por ellos.

5.2.1 Caso 4. Zahira, Mónica y Maite

En esta sección se presenta el caso formado por Zahira (E13) y Mónica (E14), que evalúan la resolución de Maite (E10). En primer lugar, se muestra una comparativa de las principales características, atendiendo a las categorías de análisis, de las resoluciones realizadas por estas tres estudiantes cuyo estudio se presentó en detalle en las secciones 4.1.13, 4.1.14 y 4.1.10.

Caso 4: Análisis conjunto de las tres resoluciones.

En la Tabla 5.2.1.1 se muestra un resumen de las características de las resoluciones del problema presentadas por cada una de las tres participantes que conforman este caso, atendiendo a las categorías de análisis.

Tabla 5.2.1.1 Resumen de las resoluciones del caso 4.

	Evaluadora Zahira (E13)	**Evaluadora Mónica (E14)**	**Evaluada Maite (E10)**
Heurístico	1. Generalizar	1. Generalizar	1. Dibujar una figura 2. Generalizar
Casos estudiados	Recta que pasa por los puntos (-2,1) y (0,5). Recta que pasa por un punto general de la parábola.	Recta que pasa por los puntos (0,5) y (1,10). Recta que pasa por los puntos (-1,2) y (0,5).	y=5x+5 y=6x+5 y=7x+5 Rectas que pasan por (0,5) y otro punto de la parábola de la forma $y = mx + 5$, con $m \geq 5,\ m\epsilon\mathbb{Z}$
Representaciones	Simbólica y verbal	Simbólica y verbal	Gráfica, tabular, simbólica y verbal
Soluciones	$Ax + \left(-\frac{A}{2}\right)y - \frac{5}{2}A = 0$	y=5+5x Recta que pasa por los puntos (-1,2) y (0,5)	y=5x+5 y=6x+5 y=7x+5 Rectas que pasan por (0,5) y otro punto de la parábola de la forma $y = mx + 5$, con $m \geq 5,\ m\epsilon\mathbb{Z}$
Comprobación de las soluciones	No	No	Rectas que pasan por (0,5) y otro punto de la parábola de la forma $y = mx + 5$, con $m \geq 5,\ m\epsilon\mathbb{Z}$ (incompleta)
Errores	Operatoria	No	Representación del vértice de la parábola

Las evaluadoras utilizan el mismo y único *heurístico* para resolver el problema: *generalizar*. Ambas comienzan obteniendo la expresión de una recta particular que pasa por dos puntos de la parábola que han calculado previamente (Figuras 4.1.67 y 4.1.69). Posteriormente, generalizan dicha estrategia, aunque sin llegar a completarla y, además, lo hacen de forma diferente. Mientras Zahira (E13) intenta estudiar la expresión de la recta que pasa por un punto cualquiera de la parábola (Figura 4.1.68), Mónica (E14) indica que se puede repetir y generalizar el procedimiento obteniendo la recta que pase por otros dos puntos de la parábola (Figura 4.1.70). Por su parte, la estudiante evaluada, Maite (E10), también utiliza el *heurístico generalizar* y lo hace de forma similar a Zahira (E13) pero combinándolo con *dibujar una figura*. Se apoya en la representación gráfica de la parábola para obtener expresiones de rectas particulares que pasan por el punto (0,5) (Figura 4.1.50) y, a partir de ellas, generaliza a todas las rectas que pasan por el (0,5) (Figura 4.1.51). La Tabla 5.2.1.2 muestra un resumen de los heurísticos empleados por las tres personas que forman este caso y el orden en que los emplearon.

Tabla 5.2.1.2. Heurísticos empleados por los estudiantes del caso 4

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">HEURÍSTICOS</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Evaluadoras</td><td>Zahira (E13)</td><td colspan="2">Generalizar</td></tr>
<tr><td>Mónica (E14)</td><td colspan="2">Generalizar</td></tr>
<tr><td>Evaluada</td><td>Maite (E10)</td><td>Dibujar una figura</td><td>Generalizar</td></tr>
</table>

En relación a los *casos estudiados*, ambas evaluadoras abordan rectas particulares, aunque Zahira (E13) además intenta obtener una expresión general de rectas que cumplan el enunciado. Ella estudia la recta particular que pasa por los puntos (-2,1), vértice de la parábola, y (0,5), punto de corte de la parábola con el eje OY (Figura 4.1.67) e intenta estudiar, de manera general, la recta que pasa por un punto arbitrario de la parábola (Figura 4.1.68). Mónica (E14), en cambio, considera dos rectas particulares: la recta que pasa por los puntos (0,5) y (1,10) y la recta que pasa por los puntos (-1,2) y (0,5) (Figuras 4.1.69 y 4.1.70). La evaluada, Maite (E10), estudia varias rectas particulares que pasan por el (0,5) y otro punto concreto de la parábola (y=5x+5, y=6x+5 e y=7x+5 [Figura 4.1.50]) y, posteriormente, se plantea rectas que pasan por el (0,5) (Figura 4.1.51).

En cuanto a las *representaciones* utilizadas, ninguna de las evaluadoras realiza ni la *representación gráfica* de la parábola ni de las rectas analizadas. Ambas utilizan la representación *simbólica*, pero con diferentes propósitos. Zahira (E13) la usa para mostrar sus cálculos (Figuras 4.1.66-4.1.68), mientras que Mónica (E14) la utiliza para expresar los puntos, los vectores directores y las ecuaciones de las rectas que da como solución (Figuras 4.1.69 y 4.1.70) sin incluir, esta última, los cálculos realizados. Sí coinciden el uso de la *representación verbal* para indicar los pasos dados y presentar sus soluciones (Figuras 4.1.67-4.1.68 y Figuras 4.1.69 y 4.1.70). Por su parte, a diferencia de las evaluadoras, la evaluada comienza realizando la *representación gráfica* de la parábola (Figura 4.1.48) apoyándose en la *representación tabular* de una tabla de valores con las coordenadas de varios puntos de la parábola, aunque en la gráfica realmente solo representa uno de ellos. Maite (E10) utiliza la *representación simbólica* para indicar cálculos (Figura 4.1.50), al igual que Zahira (E13), y para mostrar rectas (Figura 4.1.51), como ambas evaluadoras. De la misma manera, usa la *representación verbal* para indicar los pasos dados (Figuras 4.1.48-4.1.51) y para presentar las soluciones (Figuras 4.1.50 y 4.1.51).

Aunque las evaluadoras, Zahira (E13) y Mónica (E14), intentan generalizar la búsqueda de *soluciones*, solo presentan una y dos rectas particulares como solución, respectivamente. Zahira (E13) obtiene la recta $Ax + \left(-\frac{A}{2}\right)y - \frac{5}{2}A = 0$ (Figura 4.1.67) y Mónica (E14) las rectas y=5+5x (Figura 4.1.69) y la recta que pasa por los puntos (-1,2) y (0,5) de la que no calcula su ecuación (Figura 4.1.70). Por su parte, la evaluada, Maite (E10), presenta tres rectas particulares, y=5x+5, y=6x+5 e y=7x+5, y las rectas que pasan por (0,5) y otro punto de la parábola de la forma $y = mx + 5$, con $m \geq 5$, $m \epsilon \mathbb{Z}$ (Figura 4.1.50).

Ninguna de las evaluadoras realiza la *comprobación de las soluciones*. En cambio, la evaluada comienza a verificar si las rectas que pasan por (0,5) y otro punto de la parábola de la forma $y = mx + 5$, con $m \geq 5,\ m \epsilon \mathbb{Z}$, cumplen las condiciones del problema pero la deja incompleta.

Por último, Zahira (E13) es la única evaluadora que comete *errores*, equivocándose en un signo durante el cálculo de la expresión algebraica de la recta (Figura 4.1.67). En la resolución evaluada también encontramos un *error*, esta vez en la representación gráfica de la parábola situando el vértice incorrectamente sobre el eje OY (Figura 4.1.48).

Caso 4: Análisis del proceso de evaluación.

Esta cuarta pareja sigue un proceso de evaluación estructurado, en el que leen, interpretan y valoran la resolución completa, siguiendo paso a paso el procedimiento de su compañera. A continuación, se presenta un estudio detallado de la transcripción de la discusión mantenida por las evaluadoras durante dicho proceso, teniendo en cuenta las categorías de análisis indicadas en la metodología (sección 3.4.2). Posteriormente, se mostrará un análisis de la utilización por parte de las evaluadoras de sus propias resoluciones para evaluar la de su compañera. Finalmente, se expondrá un estudio sobre el carácter de las observaciones que realizan las evaluadoras, distinguiendo entre episodios *interpretativos, valorativos* y *expositivos*.

Aspectos de la resolución del problema en que se centra la evaluación

En la transcripción de la discusión mantenida entre Zahira (E13) y Mónica (E14) (Anexo A.1.4) se identificaron un total de 36 episodios (Tabla 5.2.1.3). La categoría a la que hacen referencia en un mayor número de episodios es *representaciones*, en 10 episodios. Destaca en esta pareja que se han identificado 8 episodios relacionados con el enunciado del problema, el tiempo que dispusieron para resolverlo y la valoración global de la resolución y que, por tanto, se han incluido en la categoría *otros*. En cambio, a las *soluciones* y la *comprobación de soluciones* se refieren 7 y 6 episodios, respectivamente, mientras que a los *heurísticos* y los *casos estudiados* en 4 y 1 episodio, respectivamente. No se identificó ningún episodio relativo a los *errores* a pesar de que en la resolución a evaluar se representa erróneamente el vértice de la parábola sobre el eje de ordenadas (Figura 4.1.48).

En la Tabla 5.2.1.3 se muestra, además del número de episodios clasificados en cada una de las categorías de análisis, el número de episodios en los que hacen referencia a cada una de las resoluciones implicadas en el caso (evaluadoras o evaluada). En este último aspecto, pueden existir episodios en los que hagan referencia a más de una resolución, de ahí que se puedan encontrar disparidades con el número de episodios totales.

Tabla 5.2.1.3. Clasificación de los episodios del caso 4.

CATEGORÍA	Número de episodios	Resolución a la que se refieren		
		Evaluadora (Zahira - E13)	**Evaluadora (Mónica - E14)**	**Evaluado (Maite - E10)**
Heurísticos	4	0	0	4
Casos estudiados	1	0	0	1
Representaciones	10	0	0	10
Soluciones	7	1	0	6
Comprobación de soluciones	6	1	0	6
Errores	0	0	0	0
Otros	8	0	0	3
Total	**36**	**2**	**0**	**30**

Los cuatro episodios en los que las evaluadoras hacen referencia a los *heurísticos* se producen en dos momentos distintos de la discusión. El primero se encuentra al comienzo de la evaluación y en él identifican que el primer paso dado por la evaluada es representar gráficamente la parábola (*heurístico dibujar una figura*) (Tabla 5.2.1.4a). En los otros tres episodios siguientes valoran que esa primera estrategia empleada por la evaluada es correcta, pero determinan que la utilización del *heurístico generalizar* no es del todo correcta (Tabla 5.2.1.4b).

Tabla 5.2.1.4. Episodio inicial donde las evaluadoras del caso 4 se refieren a los *heurísticos*.

Nº de episodio	EPISODIO	
2	**Z:** Entonces, lo que encontramos en este problema primero es que representa la parábola gráficamente.	a
22	**M:** Entonces, si nos limitamos a eso, para mí estaría perfecto, sin ver el último razonamiento que es lo que estamos discutiendo. **Z:** En ese caso, yo también estoy de acuerdo, que el ejercicio estaría bien si se refiere a eso.	b
28	**M:** Entonces, yo creo, que el primer razonamiento está perfecto, como dijimos ahí. Pero después ya, el razonamiento que hace general no sería correcto en este caso. **Z:** Sí, como que se queda un poco corto.	
30	**M:** Yo me quedaría con el primer razonamiento y ya lo hubiese terminado. Podemos poner como conclusión que, si se hubiese limitado a escribir solo la primera parte, es decir, a calcular las tres primeras rectas, estaría bien. Pero después, con la vuelta que le da [...]	

En relación a los *casos estudiados*, se identificó un único episodio referido a esta categoría, en el que Zahira (E13) expresa que el procedimiento de abordar rectas particulares en la resolución a evaluar es correcto (Tabla 5.2.1.5) .

Tabla 5.2.1.5. Episodio en el que una de las evaluadoras del caso 4 se refiere a los *casos estudiados*.

Nº de episodio	EPISODIO
16	**Z:** Aquí, si se refiere a especificar, y creo que el procedimiento está bien.

En cuanto a la tercera categoría de análisis, las evaluadoras de este caso hacen referencia a las *representaciones* en varias ocasiones a lo largo del todo el proceso, siendo esta la categoría a la que hacen alusión en un mayor número de episodios, con un total de 10. Además, hacen comentarios referidos a los cuatro tipos de representaciones consideradas (Tabla 5.2.1.6).

Tabla 5.2.1.6. Clasificación de los episodios de la categoría *representaciones* del caso 4.

REPRESENTACIÓN	**Gráfica**	**Tabular**	**Simbólica**	**Verbal**
Nº DE EPISODIOS	2	2	3	3

Tres de estos episodios son referentes a la *representación simbólica*. En ellos, como se mencionó al inicio de este análisis, van interpretando cada uno de los pasos dados por la compañera evaluada y valorando si son correctos o no (Tabla 5.2.1.7).

Tabla 5.2.1.7. Episodios en los que las evaluadoras del caso 4 se refieren a la *representación simbólica*.

Nº de episodio	**EPISODIO**	
5	**M:** Y escribe la ecuación de una recta en general.	a
8	**Z:** Vale. Entonces, lo que hizo fue coger dos puntos, calculados anteriormente, y calcular la recta que pasa por (0,5) y por (1, 10), con la forma general de una recta. Yo creo que hasta aquí está todo bien, ¿no? Y ya calcula una recta que pasa por dos puntos de la parábola. **M:** Después toma otros dos valores, un punto de la recta anterior y otro nuevo punto y hace lo mismo. Sustituye en la ecuación de la recta general y después calcula los valores que él llamó, o ella llamó, m y n. También están bien, porque es lo mismo que lo anterior. **Z:** Hombre… Yo no he mirado si los cálculos están bien, pero bueno sí, el n es 5 y aquí el m sería 12 entre 2, 6. Sí, exacto. Y hace lo mismo, pero con otros dos puntos diferentes. Aquí lo que está haciendo es coger diferentes puntos. El primero siempre lo coge, lo que luego va variando con el resto de puntos y calculando diferentes rectas que pasen por esos dos puntos. **M:** Y después, al final, escribe las tres rectas que ha calculado anteriormente	b
10	**M:** Sí. O sea, lo que ha hecho es calcular todas las rectas que pasan por el (0,5) y otro punto de la parábola.	c

Otros tres de estos episodios están relacionados con la *representación verbal* (Tabla 5.2.1.8). En los dos primeros, leen e interpretan lo que Maite (E10) ha escrito con palabras para justificar que el caso general que ha dado como solución pasa por el punto (0,5) (Figura 4.1.51). En el siguiente episodio, tras haber intentado verificar si esta generalización es correcta o no, las evaluadoras concluyen que la compañera debería haber expresado de forma más concreta las rectas a las que se refería al generalizar.

Dos de los episodios clasificados en la categoría de *representaciones* se refieren a la *representación gráfica* de la parábola incluida en la resolución a evaluar (Tabla 5.2.1.9). En el primero, que ocurre al principio de la evaluación, las evaluadoras interpretan el motivo por el que la evaluada utiliza dicha representación (recordemos que ninguna de las evaluadoras de este caso realiza esta representación gráfica en su resolución). En el segundo la valoran expresando que la estudiante evaluada debería haber indicado los valores en los ejes de coordenadas. Destaca que durante este análisis no advierten el error cometido en la representación del vértice.

Tabla 5.2.1.8. Episodios en los que las evaluadoras del caso 4 se refieren a la *representación verbal*.

Nº de episodio	EPISODIO	
9	**M:** y nos indica que son rectas que cortan a la parábola por el punto (0,5), que es el común, y otros que ha tomado. **Z:** Vale, y por detrás, "y=mx con m>5 también serían rectas que cortan a la parábola por dos puntos". Porque en todos les da mx, la m va variando, como en los casos anteriores, y el 5 es lo que se queda… "a la parábola por dos puntos siendo uno de ellos…" En realidad, lo que está concluyendo aquí es que una vez que fija un punto, si va variando el resto, siempre le va a quedar esta forma, ¿no?	a
12	**Z:** Pero después dice "la recta y=mx+5 cumple que pasa por el (0,5)". Vale, hasta ahí de acuerdo.	
33	**M:** Claro, pero como aquí pone "son rectas que cortan la parábola por el punto (0,5) y otros". No especifica si está o no está en la parábola. Entonces, a lo mejor ahí, como que se le olvidó un poco, ¿sabes? **Z:** Ah vale. Pero yo creo que eso se refiere a que no ha sido concreto en ese caso, le falta un poco de concreción a la hora de las conclusiones. **M:** Claro, es que pasa por uno de la parábola, pero no tiene por qué pasar por otro de la parábola. **Z:** Yo creo que sí se referiría, pero como no se especifica, yo creo que es eso, que le falta concretar más.	b

Tabla 5.2.1.9. Episodios donde las evaluadoras del caso 4 se refieren a la *representación gráfica*.

Nº de episodio	EPISODIO	
3	**Z:** Yo creo que es para ver los puntos a los que pertenece la parábola, ¿no? Porque es aquí lo que pone. **M:** Sí.	a
7	**M:** A lo mejor en la representación indicar los valores, porque representa la parábola, pero no dice qué valor tiene cada eje y, a lo mejor, eso puede crear confusión. O sea, aquí, donde corta, indicar el valor numérico. **Z:** Vale, a cuál pertenece, pero bueno, aquí más o menos, como puso la escala. Puede ser, pero bueno, tienes razón porque al final nunca sabes si va de uno en uno o lo toma de cinco en cinco… Porque es verdad que aquí empieza en cinco, pero supongo que será este. **M:** Sí, se supone.	b

Para concluir con la categoría de *representaciones*, otros dos episodios están relacionados con la *representación tabular* (Tabla 5.2.1.10). En el primero, Mónica (E14) señala cómo se ha construido la tabla de valores y, en el segundo, ambas evaluadoras afirman que esta tabla de valores es correcta y que es útil para obtener rectas a partir de estos puntos de intersección.

Tabla 5.2.1.10. Episodios donde las evaluadoras del caso 4 se refieren a la *representación tabular*.

Nº de episodio	EPISODIO	
4	**M:** Y después hace una tabla de coordenadas y le da varios valores a la x y después va calculando los valores que tiene y en esta parábola.	a
6	**Z:** Esta parte yo creo que está bien, ¿no? Porque así va sacando puntos de la parábola que puede utilizar para luego la intersección, luego poder coger varios puntos. **M:** Sí.	b

Siguiendo con el análisis por categorías, en la transcripción de la discusión entre Zahira (E13) y Mónica (E14) se identificaron siete episodios en los que las evaluadoras hacen referencia a las *soluciones*. En dos de ellos, señalan que Maite (E10) ha obtenido rectas que pasan por un punto fijo, pero no la expresión general de las rectas que pasan por dos puntos cualesquiera de la parábola y que, por tanto, la resolución estaría mejor si se encontrase dicha expresión general (Tabla 5.2.1.11a-g). En otros tres de estos episodios, las evaluadoras expresan que las rectas particulares presentadas por Maite (E10) son correctas (Tabla 5.2.1.11b-c-d) y, en los otros dos, intentan justificar que la generalización a todas las rectas que pasan por el punto (0,5) es incorrecta (Tabla 5.2.1.11e-f).

Tabla 5.2.1.11. Episodios en los que las evaluadoras del caso 4 se refieren a las *soluciones*.

Nº de episodio	**EPISODIO**	
14	**M:** Claro. Aquí lo que ha hecho es que lo ha hecho con un punto fijo, no con todo en general. Es decir, no ha dado una ecuación de cualquier recta que pase por dos puntos que intersecta a la parábola. **Z:** Exacto. Sí. O sea, que habría que definirlo de una forma más general.	a
19	**M:** Entonces estaría perfecto, porque ha encontrado.	b
21	**M:** Entonces estaría perfecto, porque ha encontrado tres rectas que intersectan a la parábola en dos puntos.	c
23	**Z:** O sea, el objetivo del problema lo ha cumplido. Ya dio diferentes ecuaciones que pasan por puntos que cortan la parábola.	d
27	**M:** Está diciendo que pasa por (0,5), pero puede pasar por (0,5) y por cualquier otro punto del plano, en este caso, que no tiene por qué estar dentro de la parábola. Es decir, aquí ha demostrado que esta recta pasa por (0,5), pero la recta puede pasar por (0,5) y no pasar por ningún otro punto de la parábola. Como vemos en el dibujo que ha hecho, puede pasar por (0,5) y después tocar cualquier punto del plano y no tiene por qué estar en esa parábola.	e
34	**M:** Con lo que hizo, nosotras no podemos asegurar que esta recta pase por dos puntos de la parábola porque la recta puede ser así (no sabemos cómo sitúa la recta) y verifica la ecuación a la que ha llegado. **Z:** Claro, pero así sí la ha cogido. En realidad, sería cuando es así, ¿no? Que sí puede pasar… Claro, aquí cuando es mx+5… **M:** No tiene por qué pasar por dos puntos de la parábola. Porque puede ser esto así (toma algún material para representar la recta). **Z:** Claro, pero así también siempre llegaría a cortar porque la parábola también se alarga. **M:** Pero a lo mejor, si está muy inclinada, así. ¿Sabes lo que te quiero decir? **Z:** Que no llega.	f
36	**Z:** Es verdad que para llegar a una forma general y demostrarlo realmente, que se verifica para todos los puntos que contenga la parábola, a lo mejor sí sería mejor.	g

En relación a la *comprobación de las soluciones*, se identificaron seis episodios referidos principalmente a la ausencia de una demostración de que la generalización dada como solución por su compañera cumpla los requisitos del problema (Tabla 5.2.1.12). Ambas evaluadoras comentan que su compañera comprueba las tres rectas particulares calculadas, pero no lo hace con la expresión general, ya que solo comprueba que pasa por el punto (0,5) (Figura 4.1.51). Como pudo observarse en los episodios referentes a las *soluciones*, la pareja duda de que todas estas rectas cumplan las condiciones del problema, así que estos episodios están relacionados con la ausencia de comprobaciones para este grupo de rectas.

A pesar de que la estudiante evaluada comete un error al representar el vértice de la parábola en el eje de ordenadas, no se identificó ningún episodio en el que se hiciera referencia a la categoría *errores.*

Tabla 5.2.1.12. Episodios en los que las evaluadoras del caso 4 se refieren a la *comprobación de soluciones*.

Nº de episodio	**EPISODIO**
11	**M:** Pero, no sé, aquí lo ha hecho con tres rectas, a lo mejor eso no se da para toda recta que pase por ese punto. A lo mejor verlo por inducción o comprobarlo un poco más. **Z:** Faltaría comprobarlo. Claro, tú dices que, con tres casos, eso no implica que se dé para todos. **M:** Es la idea que nos da, pero comprobarlo de otra manera. **Z:** Sí, le faltaría a lo mejor eso.
13	**Z:** Pero tampoco demuestra que los otros puntos verifican esta ecuación. Entonces yo creo que ahí también faltaría esa parte. Porque tú realmente lo que quieres es que se corten en dos puntos. Entonces, también se tiene que verificar que el otro punto dé la igualdad.
17	**Z:** Pero le faltaría esto del final. Comprobar que es cierto esto, lo de que todas las rectas de la forma y=mx+5 y que cumplen los otros puntos también esta recta, ¿no?
24	**Z:** Pero al final, lo que pone, su conclusión, que dice que la recta que comenta aquí justifica solamente que pasa por el (0,5) pero no justifica que pase por los otros puntos. Eso yo lo veo que está a medias. Porque queremos que pase **M:** Que pase por dos puntos de la parábola que nosotros tenemos.
29	**M:** Sí, porque aquí solo está demostrando que pasa por un punto de la parábola.
32	**Z:** El problema es que llega a una conclusión muy genérica sin demostrarlo.

Por último, 8 episodios, al no hacer referencia a ninguna de las categorías anteriores, se incluyeron en la categoría *otros*. Cinco de ellos están relacionados con el enunciado del problema, en los que las evaluadoras muestran sus dudas acerca del número o el tipo de rectas que se pedían (Tabla 5.2.1.13).

Tabla 5.2.1.13. Episodios de la categoría *otros* del caso 4, relacionados con el enunciado del problema.

Nº de episodio	**EPISODIO**
1	**Z:** Tenemos que evaluar la resolución del problema y argumentarlo.
15	**Z:** Hombre, no me queda claro, si con el enunciado lo que te pide es una forma general de todas las rectas o especificar alguna en concreto.
18	**M:** Yo también creo que, si el enunciado se refiere, porque a mí no me quedó muy claro, a encontrar ecuaciones de algunas rectas.
20	**M:** El enunciado no nos especifica ni cuántos, ni en qué puntos.
31	**M:** [...] nos crea la duda de si ha entendido bien el problema. **Z:** Yo creo que sí lo ha entendido

En otros dos de los episodios incluidos en *otros,* las evaluadoras se refieren al tiempo del que dispusieron para resolver el problema y en ellos aluden a que este fue insuficiente (Tabla 5.2.1.14).

Tabla 5.2.1.14. Episodios de la categoría *otros* del caso 4, relacionados con el tiempo para la resolución.

Nº de episodio	**EPISODIO**
25	**Z:** Hombre, es verdad, que tampoco mucho tiempo dio.
35	**Z:** Claro, yo creo que para eso se necesitaría un poco más de tiempo para poder llegar hasta ahí. Con el tiempo que se ha tenido para resolver la tarea, está bien hecho.

Por último, en el episodio restante de esta categoría, Zahira (E13) hace un comentario en el que evalúa la resolución de manera global (Tabla 5.2.1.15).

Tabla 5.2.1.15. Episodio de la categoría *otros* del caso 4, relacionado con la evaluación general.

Nº de episodio	**EPISODIO**
26	**Z:** Está bastante bien con respecto a lo que ha hecho.

Uso de la propia resolución en la evaluación de un par

Tras analizar en detalle el proceso de evaluación atendiendo a las categorías de análisis (*heurísticos*, *casos estudiados*, *representaciones*, *soluciones*, *comprobación de las soluciones* y *errores*), se presenta, a continuación, un estudio sobre las resoluciones a las que las evaluadoras hacen referencia en su discusión y de qué manera las usan, lo que nos informa sobre hasta qué punto tienen en cuenta sus propias resoluciones a la hora de evaluar la resolución de su compañera.

Como puede observarse en la Tabla 5.2.1.3, Zahira (E13) es la única evaluadora de la pareja que hace referencia a su propia resolución. Se apoya en ella en dos ocasiones para valorar las *soluciones* dadas por su compañera, advirtiendo que Maite (E10) no presenta como solución la forma general de las rectas que pasan por dos puntos cualesquiera de la parábola y que la resolución estaría mejor si se encontrase esta recta general (Tabla 5.2.1.11g) y que debería haber incluido la comprobación de las soluciones dadas (Tabla 5.2.12b), procedimiento que ella realiza en su propia resolución (Figura 4.1.68) aunque no completa.

Carácter de los episodios

Por último, se presenta un estudio sobre el carácter de los episodios identificados en la transcripción, distinguiendo entre episodios *interpretativos, valorativos* y *expositivos*, atendiendo a las definiciones dadas para estas categorías en la metodología (sección 3.4.2). En la Tabla 5.2.1.16 se presenta un resumen del carácter de los episodios para cada una de las categorías empleadas en el análisis de los aspectos en los que las evaluadoras de este caso se fijan al evaluar que, como ya se indicó anteriormente, son: *heurísticos, casos estudiados, representaciones, soluciones, comprobación de soluciones* y *otros*. En esta tabla se separan los episodios entre aquellos tienen un carácter exclusivamente interpretativo, valorativo o expositivo, y los que poseen doble carácter. No se incluye la categoría *errores* pues, como ya se indicó anteriormente (Tabla 5.2.1.3), no se identificó en la discusión de este caso ningún episodio referente a ella. Además, en la categoría *otros* encontramos episodios que no hacen referencia a la resolución que están evaluando (enunciado del problema, tiempo) y que, por tanto, carecen de carácter. Sin embargo, existe uno en el que evalúan globalmente la resolución y que, por tanto, tendrá carácter valorativo.

Tabla 5.2.1.16. Clasificación de los episodios del caso 4 atendiendo al carácter.

	Interpretativo	**Valorativo**	**Expositivo**	**I / V**	**I / E**	**V / E**
Heurísticos	1	3	0	0	0	0
Casos estudiados	0	1	0	0	0	0
Representaciones	4	1	0	2	2	1
Soluciones	0	6	0	1	0	0
Comprobación de soluciones	0	6	0	0	0	0
Otros	0	1	0	0	0	0
Total	**5**	**18**	**0**	**3**	**2**	**1**

Como puede observarse en la tabla, el proceso de evaluación seguido por esta pareja es fundamentalmente valorativo, con más del triple de episodios valorativos (18 episodios) que interpretativos (5 episodios). No se encontraron episodios con carácter expositivo y se clasificaron tres episodios con doble carácter interpretativo y valorativo y dos episodios con doble carácter interpretativo y expositivo.

El mayor número de episodios lo encontramos en aquellos con carácter valorativo y se han identificado en todas las categorías a las que las evaluadoras se refieren en su discusión. El mayor número de estos, son referentes a las *soluciones* y a la *comprobación* de estas, 6 en cada una de ellas. En los primeros, se centran en dos aspectos de estas: por un lado, comentan que Maite (E10) no presenta como solución la forma general de las rectas que pasan por dos puntos cualesquiera de la parábola (Tabla 5.2.1.11a-e-g) y, por otro lado, la pareja afirma que las tres rectas particulares presentadas son correctas (Tabla 5.2.1.11b-c-d). En los referidos a la categoría *comprobación de las soluciones,* las evaluadoras expresan, de manera reiterada, la ausencia de la comprobación de la generalización de todas las rectas que pasan por el (0,5) (Tabla 5.2.1.12). A continuación, encontramos tres episodios valorativos con foco en los *heurísticos,* en los que las evaluadoras valoran que la primera estrategia empleada por la evaluada es correcta (*heurístico dibujar una figura)* y que al utilizar el *heurístico generalizar* la resolución queda incompleta (Tabla 5.2.1.4b). Por último, se identificó un único episodio de carácter valorativo tanto en la categoría de *casos estudiados,* como en la de *representaciones* y en la de *otros.* En la primera de ellas, se trata de un episodio en el que la pareja indica que el obtener varias rectas particulares es correcto (Tabla 5.2.1.5). En la segunda, se corresponde con un episodio referido a la *representación tabular* en el que señalan como correcto el obtener puntos de la parábola en la tabla de valores para el cálculo de rectas posterior (Tabla 5.2.1.10b). Y en la tercera, un episodio en el que una de las evaluadoras realiza una valoración general de la resolución (Tabla 5.2.1.15).

A continuación, encontramos los episodios con carácter interpretativo donde las evaluadoras hacen referencia a los *heurísticos* y las *representaciones*. En los correspondientes a la categoría *representaciones,* solo uno es referente a la *representación gráfica*, donde interpretan la motivación de la evaluada para realizar dicha representación (Tabla 5.2.1.9a); en otro de ellos se refieren a la *representación tabular*, en el que identifican cómo la compañera evaluada ha construido la tabla de valores (Tabla 5.2.1.10a)*;* y otros dos relacionados con la *representación simbólica,* en los que interpretan las expresiones de las rectas consideradas en la resolución evaluada (Tabla 5.2.1.7a-c). En el único episodio con este carácter en el que se refieren a los *heurísticos,* las evaluadoras identifican que el primer paso dado por la evaluada es representar la parábola (*heurístico dibujar una figura)* (Tabla 5.2.1.4a).

Además, se han identificado también episodios con doble carácter. Tres con doble carácter interpretativo y valorativo referentes a las categorías de *representación gráfica*, *representación simbólica* y *soluciones*. En ellos analizan la gráfica de la parábola y señalan que se deberían haber indicado los valores representados (Tabla 5.2.1.9b), interpretan cada uno de los pasos seguidos por la compañera evaluada y valorando si son correctos o no (Tabla 5.2.1.7b) e intentan entender la generalización a todas las rectas que pasan por el punto (0,5) con la intención de justificar que es incorrecta (Tabla 5.2.1.11f), respectivamente. Dos episodios tienen doble carácter interpretativo y expositivo, ambos en relación a la *representación verbal,* donde las evaluadoras leen literalmente lo que la evaluada ha expresado con palabras y de manera simbólica en su resolución para comprender lo realizado (Tabla 5.2.1.8a). Y, por último, un episodios con doble carácter valorativo y expositivo relacionado con la *representación verbal* y en el que las evaluadoras leen lo expresado con palabras en la resolución e indican que no son suficientes las explicaciones, señalando que debería ser más concreta a la hora de generalizar (Tabla 5.2.1.8b).

A modo de resumen, en este caso se han podido diferenciar 36 episodios en los que se hace referencia, principalmente, a las *representaciones* y a *otros* aspectos del proceso de evaluación. Esto indica que esta pareja evaluadora se centra en la forma utilizada para exponer el proceso seguido y los resultados presentados, además de señalar ciertas dudas en cuanto a la actividad a llevar a cabo. Durante el proceso de evaluación, solo una evaluadora, Zahira (E13), tiene en cuenta su propia resolución y lo hace para valorar las soluciones y sus comprobaciones presentadas por su compañera, echando en falta tanto la solución general de una recta que pasa por cualquier punto de la parábola, solución que ella misma intenta encontrar, como su comprobación. Por último, se observa que las evaluadoras de este caso siguen un proceso de carácter fundamentalmente valorativo, encontrando más del triple de episodios valorativos que interpretativos centrados, también, en las soluciones y sus comprobaciones.

5.2.2 Caso 5. Antonio, Javier y Mónica

En esta sección se presenta el caso formado por Antonio (E1) y Javier (E5), que evalúan la resolución de Mónica (E14). En primer lugar, se muestra una comparativa de las principales características, atendiendo a las categorías de análisis, de las resoluciones realizadas por estos tres estudiantes cuyo estudio se presentó en detalle en las secciones 4.1.1, 4.1.5 y 4.1.14.

Caso 5: Análisis conjunto de las tres resoluciones.

En la Tabla 5.2.2.1 se recoge un resumen de las características de las resoluciones del problema presentadas por cada uno de los tres participantes que conforman este caso, atendiendo a las categorías de análisis.

Tabla 5.2.2.1 Resumen de las resoluciones del caso 5.

	Evaluador Antonio (E1)	**Evaluador Javier (E5)**	**Evaluada Mónica (E14)**
Heurístico	1. Suponer el problema resuelto	1. Dibujar una figura 2. Suponer el problema resuelto 3. Ensayo y error	1. Generalizar
Casos estudiados	y=ax+b	y=ax+b y=8x+1 y=1	Recta que pasa por los puntos (0,5) y (1,10). Recta que pasa por los puntos (-1,2) y (0,5).
Representaciones	Simbólica y verbal	Gráfica, simbólica y verbal	Simbólica y verbal
Soluciones	y=ax+b, con $a \in (-\infty, 2 - \sqrt{8}) \cup (2 +$ y b=0. y=ax+b, con $a \in (-\infty, 2 - 2\sqrt{b}) \cup (2$ y b>0.	$y = ax + b$, con $b \leq 5$ y $a = 4 \pm 2\sqrt{5 - b}$	y=5+5x Recta que pasa por los puntos (-1,2) y (0,5)
Comprobación de las soluciones	No	y=8x+1 y=1	No
Errores	Transponiendo los términos en la primera ecuación planteada (Figura 4.1.1). Resolviendo $(4 - a)^2$ y $16 + 4 \cdot 4(b + 1)$ (Figura 4.1.3). Afirmando que $4b + 8\sqrt{b} - 4b - 4 > 0$ (Figura 4.1.5).	Conexión entre los cálculos y el enunciado	No

Los dos evaluadores tienen en común que utilizan el *heurístico suponer el problema resuelto,* considerando la ecuación explícita de una recta, y=ax+b, y buscando las condiciones de *a* y *b* que hacen que cumpla el enunciado del problema. Sin embargo, mientras que este es el único *heurístico* utilizado por Antonio (E1) (Figuras 4.1.1-4.1.5), Javier (E5) lo combina con otros dos: *dibujar una figura* y *ensayo y error*. Comienza su resolución representando gráficamente la parábola (Figura 4.1.20) para continuar *suponiendo el problema resuelto* como se ha descrito anteriormente (Figuras 4.1.21-4.1.23). Obtiene así ciertas condiciones para los coeficientes de la recta, y es entonces cuando utiliza el *heurístico ensayo y error* para probar si dos valores concretos de *a* y *b* cumplen estas restricciones y construir las correspondientes rectas particulares (Figura 4.1.24). Por su parte, la evaluada, Mónica (E14), utiliza un único *heurístico*, al igual que Antonio (E1), pero que no coincide con ninguno de los usados por los evaluadores: *generalizar*. En su resolución calcula la ecuación de una recta particular que pasa por dos puntos de la parábola (Figura 4.1.69) e indica que se podría realizar el mismo procedimiento para otros dos puntos cualesquiera (Figura 4.1.70). La Tabla 5.2.2.2 muestra un resumen de los heurísticos empleados por las tres personas que forman este caso y el orden en que los emplearon.

Tabla 5.2.2.2. Heurísticos empleados por los estudiantes del caso 5.

		HEURÍSTICOS		
Evaluadores	Antonio (E1)	Suponer el problema resuelto		
	Javier (E5)	Dibujar una figura	Suponer el problema resuelto	Ensayo y error
Evaluada	Mónica (E14)	Generalizar		

En cuanto los *casos estudiados*, debido al *heurístico* utilizado por los dos evaluadores, ambos abordan la ecuación explícita de una recta, y=ax+b (Figuras 4.1.1-4.1.5 y 4.1.21-4.1.23). Javier (E5), además, analiza dos rectas particulares y=8x+1 e y=1 (Figura 4.1.24). La evaluada, Mónica (E14), únicamente estudia dos rectas particulares: la recta que pasa por los puntos (0,5) y (1,10) (Figura 4.1.69) y la recta que pasa por los puntos (-1,2) y (0,5) (Figura 4.1.70).

En relación a las representaciones utilizadas, Javier (E5) es el único evaluador de la pareja que realiza la *representación gráfica*, tanto de la parábola como de dos rectas (Figura 4.1.20). La *representación simbólica* aparece en las resoluciones de ambos evaluadores para expresar ecuaciones y realizar cálculos (Figuras 4.1.1-4.1.5 y 4.1.19-4.1.23). También coinciden en el uso de la *representación verbal* para explicar los pasos dados (Figuras 4.1.1-4.1.2 y 4.1.22 y 4.1.23), aunque Javier (E5) también la utiliza para expresar una conclusión (Figura 4.1.24). La estudiante evaluada, Mónica (E14), no *representa gráficamente* la parábola. Difiere del uso de la *representación simbólica* con los evaluadores, utilizándola para mostrar los puntos, los vectores directores y las ecuaciones de rectas que presenta como solución (Figuras 4.1.69 y 4.1.70), sin señalar ningún tipo de cálculo. Pero coincide con ellos utilizando la *representación verbal* para indicar los pasos de su proceso de resolución (Figuras 4.1.69 y 4.1.70).

Los dos evaluadores presentan como *soluciones* la ecuación explícita de una recta, y=ax+b, junto a las condiciones que deben verificar sus coeficientes para que sea solución del problema, ambas en función de los valores de b e incorrectas debido a errores cometidos que serán comentados posteriormente. Antonio (E1) distingue dos casos: para b=0 y $a \in (-\infty, 2-\sqrt{8}) \cup (2+\sqrt{8}, \infty)$ (Figura 4.1.4), y para b>0 y $a \in (-\infty, 2-2\sqrt{b}) \cup (2+2\sqrt{b}, \infty)$ (Figura 4.1.5). Por su parte, Javier (E5) concluye que $b \leq 5$ y $a = 4 \pm 2\sqrt{5-b}$ (Figura 4.1.23). En cambio, la alumna evaluada, Mónica (E14), presenta como *soluciones* dos rectas particulares: y=5+5x (Figura 4.1.69) y la recta que pasa por los puntos (-1,2) y (0,5) sin especificar su ecuación (Figura 4.1.70).

El único evaluador que realiza la *comprobación de las soluciones* es Javier (E5), quien, de manera gráfica, comprueba las dos rectas particulares obtenidas: la recta y=8x+1, que representa erróneamente, y la recta y=1 (Figura 4.1.20). Mónica (E14), igual que Antonio (E1), no realiza la *comprobación de las soluciones*.

Por último, ambos evaluadores cometen *errores*. En la resolución de Antonio (E1) se identificaron cuatro *errores* de cálculo: transponiendo términos en la primera ecuación planteada (Figura 4.1.1), expandiendo la expresión $(4-a)^2$, calculando $16+4\cdot 4(b+1)$ (Figura 4.1.3) y afirmando que $4b+8\sqrt{b}-4b-4>0$ (Figura 4.1.5). Javier (E5) se equivoca al intentar conectar los cálculos realizados con el enunciado, pues toma las condiciones que anulan el discriminante y que hacen que las rectas obtenidas sean tangentes a la parábola (Figura 4.1.23). Por el contrario, no se han encontrado *errores* en la resolución de Mónica (E14).

Caso 5: Análisis del proceso de evaluación.

En el proceso de evaluación de esta pareja destaca que, tras interpretar el procedimiento seguido por la estudiante evaluada, centran su discusión en asignar una calificación y en exponer sus dudas acerca del enunciado del problema. A continuación se presenta un análisis detallado, teniendo en cuenta las categorías de análisis indicadas en la metodología (sección 3.4.2). Posteriormente, se mostrará un estudio sobre la utilización que hacen los evaluadores de sus propias resoluciones para evaluar la de su compañera. Finalmente, se analizará el carácter de las observaciones que realizan los evaluadores, distinguiendo entre episodios *interpretativos, valorativos* y *expositivos*.

Aspectos de la resolución del problema en que se centra la evaluación

En la transcripción de la discusión mantenida entre Antonio (E1) y Javier (E5) (Anexo A.1.5) durante el proceso de evaluación se identificaron un total de 34 episodios (Tabla 5.2.2.3). Las categorías a las que hacen referencia en un mayor número de episodios son *soluciones* y *otros*, en 11 episodios cada una, relacionados estos últimos con el enunciado del problema, la calificación y el proceso de evaluación. A las categorías *heurísticos* y *representaciones* se refieren en 6 episodios cada una y no se identificó ningún episodio relacionado con los *casos estudiados*, la *comprobación de soluciones* y los *errores.*

En la Tabla 5.2.2.3 se muestra, además del número de episodios clasificados en cada una de las categorías de análisis, el número de episodios en los que hacen referencia a cada una de las resoluciones implicadas en el caso (evaluadores o evaluada). En este último aspecto, pueden existir episodios en los que hagan referencia a más de una resolución, de ahí que se puedan encontrar disparidades con el número de episodios totales.

Tabla 5.2.2.3. Clasificación de los episodios del caso 5.

CATEGORÍA	Número de episodios	Resolución a la que se refieren		
		Evaluador (Antonio - E1)	Evaluador (Javier - E5)	Evaluada (Mónica - E14)
Heurísticos	6	1	0	5
Casos estudiados	0	0	0	0
Representaciones	6	1	1	5
Soluciones	11	1	2	9
Comprobación de soluciones	0	0	0	0
Errores	0	0	0	0
Otros	11	0	0	5
Total	**34**	**3**	**3**	**24**

En 5 de los 6 episodios en los que se hace referencia a los *heurísticos*, la pareja evaluadora muestra su asombro ante la estrategia utilizada por la estudiante evaluada (Tabla 5.2.2.4b) y, aunque creen que es correcta (Tabla 5.2.2.4b-d-e), no la consideran apropiada argumentando que el proceso sería interminable (Tabla 5.2.2.4a-d-f). En el episodio restante (Tabla 5.2.2.4c), Antonio (E1) comenta que en su resolución empleó otra estrategia .

Como ya se mencionó, en la transcripción de la discusión mantenida por esta pareja no se encontraron episodios referidos a la categoría *casos estudiados.*

Tabla 5.2.2.4. Episodios en los que los evaluadores del caso 5 se refieren a los *heurísticos*.

Nº de episodio	EPISODIO	
12	**J:** De esa manera, encuentras todas las rectas, se supone. **A:** ¿Que pasan por esos puntos? **J:** Todas las rectas que pasan por la parábola si haces esto de manera infinita.	a
16	**J:** Pero cuando dice, bueno, buscamos la recta que pasa por estos dos puntos y ya está. Da al lector la idea de cómo encontrar rectas. O sea, me parece curioso. Me parece bien.	b
21	**A:** Pero hice otra cosa.	c
24	**J:** Y luego, la idea de hacer lo mismo muchas veces, está bien en el sentido de que visualmente te puedes hacer la idea de todas las rectas que pasan.	d
29	**A:** Es que el método lo ha hecho bien. Más que sea ha hecho algo, como tú dices.	e
33	**J:** Si esa persona hubiese hecho eso, yo le pondría más. Pero es que, realmente, ha encontrado una y te da indicaciones de "todas las que tú quieras…" pero no… **A:** Es que se pueden coger infinitos puntos, eso no tiene gracia, no sé.	f

En cuanto a la tercera categoría de análisis, los evaluadores hacen referencia a las *representaciones* en seis ocasiones y en relación a dos de los cuatro tipos de representaciones consideradas (Tabla 5.2.2.5).

Tabla 5.2.2.5. Clasificación de los episodios de la categoría *representaciones* del caso 5.

REPRESENTACIÓN	Gráfica	Tabular	Simbólica	Verbal
Nº DE EPISODIOS	0	0	4	2

Cuatro de los seis episodios aluden a la *representación simbólica.*. En los tres primeros, se observa como Antonio (E1) muestra dudas sobre los pasos dados por su compañera, pues no están explícitos, y Javier (E5) intenta aclararlos (Tabla 5.2.2.6). Además, destaca un episodio, Tabla 5.2.2.6a, en el que Antonio (E1) indica que la evaluada "intentó dibujar la parábola", hecho que no es cierto pues en la resolución no aparece su gráfica ni ningún cálculo para ello, y Javier (E5) señala que lo que hace es escribir la ecuación de la función cuadrática, por lo que se están refiriendo ambos a la representación simbólica a pesar de la terminología incorrecta utilizada por Antonio (E1).

Tabla 5.2.2.6. Episodio donde los evaluadores del caso 5 se refieren a la *representación simbólica*.

Nº de episodio	**EPISODIO**	
3	**A:** E intentó dibujar la parábola y encontrar una casi que a ojo. **J:** Sí, o sea, escribió la ecuación de la parábola. Tomó dos puntos y, mediante la ecuación de la recta que pasa por dos puntos halló esa recta. Entonces, claro, así te aseguras de que corta por dos puntos.	a
8	**A:** Esta parte no la entiendo muy bien. ¿Sacó dos puntos, los unió y creó la recta? **J:** Claro. Sacó dos puntos que pertenecen a la parábola. **A:** Vale, sí. Creó la recta con los puntos. **J:** Sí **A:** ¿Un punto y el vector director? Es que no, ¿es otro método? Es que no lo entiendo. **J:** No, no. Al igual que el primero	b
11	**A:** No, pero yo entiendo que aquí tomó x=0, y=5, x=1, y=10. Aquí buscó la recta que pasara por -1 y 0. Exacto. Lo único que cambió el método y lo hizo geométricamente con un punto y un... **J:** No, no. Hace lo mismo en los dos. **A:** Sí, pero esta lo hace como analíticamente, ¿no? Ah no, que no había visto que también lo había con vectores. Sí, sí, que es geométrica. Solo cambió los valores de x. Aquí cogió una que pasara por 0 y 1 y aquí una que pasara por -1 y 0. **J:** O sea, toma dos puntos: el (0,5) y el (1,10) y hace tal… Y luego aquí, por ejemplo, cogió el (-1,2) y el (0,5) y esa otra recta.	c

En el cuarto episodio relacionado con la *representación simbólica*, Antonio (E1) y Javier (E5) explican los cálculos que ellos realizaron en sus propias resoluciones al intentar encontrar las condiciones para los coeficientes de una recta $y=ax+b$ (Tabla 5.2.2.7).

Tabla 5.2.2.7. Último episodio en el que los evaluadores del caso 5 se refieren a la *representación simbólica*.

Nº de episodio	**EPISODIO**
32	**A:** Sí, que hubiera fallado el caso b menor que… bueno alguno de los casos. **J:** Sí. **A:** A mí por los menos me dependía del valor de b. Lo hice con la raíz, la raíz tenía que ser mayor que cero. **J:** Exacto. Que por lo menos llegaste a algo de eso. Pero con eso no bastaba porque te daban rectas tangentes. **A:** Sí, claro. Por eso puse mayor estricto que cero.

Para concluir con la categoría de *representaciones*, en dos episodios se alude a la *representación verbal.* En ellos, Javier (E5) comenta lo que la alumna evaluada escribe con palabras como propuesta de generalización del procedimiento de búsqueda de soluciones que ha llevado a cabo en su resolución (Tabla 5.2.2.8).

Tabla 5.2.2.8. Episodios en los que uno de los evaluadores del caso 5 se refiere a la *representación verbal*.

Nº de episodio	EPISODIO	
7	**J:** Y, bueno, en la segunda parte lo que nos comenta el alumno o la alumna, nos dice que toma "cualquiera otros dos valores de", la parábola, me imagino, no lo especifica bien. Y dice, bueno, la recta que pasa por esos dos puntos.	a
9	**J:** Lo que pasa es que dice, bueno, pues tomo cualquier punto de la parábola y la recta que pasa, bueno toma dos puntos de la parábola, y la recta que pasa por esos dos puntos. Es decir, el alumno o la alumna lo explica [...]	b

Siguiendo con las categorías de análisis, en la transcripción de la discusión entre Antonio (E1) y Javier (E5) se encontró que en once ocasiones se refieren a las *soluciones*, siendo una de las categorías a las que hacen alusión en un mayor número de episodios, como ya se mencionó. En cinco de esos episodios, la pareja evaluadora resalta que Mónica (E14) solo ha presentado la ecuación de una recta (Tabla 5.2.2.9).

Tabla 5.2.2.9. Episodios donde los evaluadores del caso 5 se refieren a las *soluciones* -1

Nº de episodio	EPISODIO	
1	**A:** A mí lo que me llama la atención es que ella solo busca una recta, no buscó más.	a
4	**J:** Pero claro, solo da una recta.	b
6	**J:** Entonces no le podemos decir que está mal, porque ha encontrado una, al menos.	c
15	**A:** No, las tiene aquí. Una. **J:** Claro, aquí da una.	d
22	**J:** O sea, encontró una, ¿no?	e

En otros cuatro episodios de esta categoría, los evaluadores recalcan que su compañera no ha llegado a dar la expresión de la segunda recta que da como solución y que alcanzar una expresión más general con este procedimiento sería imposible (Tabla 5.2.2.10).

Tabla 5.2.2.10. Episodios donde los evaluadores del caso 5 se refieren a las *soluciones* -2

Nº de episodio	EPISODIO
10	**J:** Pero no da la ecuación de la recta que pasa por esos puntos.
13	**J:** Pero, claro, no está dando la expresión.
17	**J:** Pero, no pone la ecuación.
25	**J:** Pero es que no da la ecuación. **A:** Es imposible. Es pegarte toda la vida ahí. **J:** Es imposible. Es decir, no caracteriza a las rectas que intersectan dos veces la parábola. Si no solo da ejemplos. Y puedes dar infinitos ejemplos pero no las estás dando todas.

En los dos restantes episodios referidos a las *soluciones*, Antonio (E1) y Javier (E5) admiten que en sus propias resoluciones no fueron capaces de encontrar una solución general (Tabla 5.2.2.11a) y, por otro lado, expresan que para que una resolución obtuviera una calificación máxima debería haber encontrado dicha caracterización general (Tabla 5.2.2.11b).

Tabla 5.2.2.11. Episodios donde los evaluadores del caso 5 se refieren a las *soluciones* -3

Nº de episodio	EPISODIO	
20	**J:** A ver, yo no supe terminar de hacerlo. **A:** Yo tampoco lo acabé.	a
31	**J:** Y yo a mí mismo tampoco me pondría más. Para mí el 10 es encontrar la caracterización de todas las rectas y pondría 8 o 7 a gente que se quedase cerca, ¿sabes?	b

No se identificó, en este caso, ningún episodio relacionado con las categorías *comprobación de las soluciones* y *errores*. No es de extrañar este resultado puesto que Mónica (E14), la estudiante evaluada, no realiza la comprobación de ninguna de sus soluciones ni comete errores a lo largo de su resolución (Tabla 5.2.2.1).

Por último, se identificaron 11 episodios que no hacían referencia a ninguna de las categorías anteriores, por lo que se incluyeron en la categoría *otros,* siendo, junto a *soluciones,* la categoría con mayor número de episodios. Cinco de ellos se refieren al enunciado del problema en los que los evaluadores muestran sus dudas acerca del número de rectas apropiado que debían darse como solución (Tabla 5.2.2.12).

Tabla 5.2.2.12. Episodios referidos a la categoría *otros*, relacionados con el enunciado del problema.

Nº de episodio	EPISODIO
2	**A:** Yo pensé que había que buscarlas todas.
5	**J:** Porque claro, el enunciado pone “encontrar ecuaciones de rectas”. **A:** Es que el enunciado se puede malinterpretar, lo hagas como lo hagas. Y si es “ecuaciones de rectas”, ¿cuántas había que encontrar para que esto estuviera bien y cuántas no? **J:** Claro, ahí está la duda. **A:** ¿Una vale?
14	**J:** Eso sí que lo pone en el enunciado, ¿no? La ecuación de la recta tenga dos puntos de intersección con la parábola.
18	**A:** Claro, y la pregunta es: ¿el ejercicio pedía esto?, ¿pedía todas?
27	**A:** Pero el problema es que no sé lo que pide el ejercicio.

En otros cinco episodios referidos a la categoría *otros*, los evaluadores están haciendo alusión a aspectos relacionados con la calificación. En la Tabla 5.2.2.13 puede observarse cómo Antonio (E1) y Javier (E5) discuten sobre la calificación numérica a otorgar a la resolución presentada por Mónica (E14).

Tabla 5.2.2.13. Episodios de la categoría *otros*, relacionados con la calificación.

Nº de episodio	EPISODIO
19	**A:** Tenemos que evaluarlo, se supone. ¿Qué le pones?, ¿un 5?
23	**J:** Así que, más o menos… El 5 lo tiene. **A:** Vale, sí. **J:** Así que, más o menos… El 5 lo tiene. **A:** Vale, sí.
26	**A:** ¿Y a ti eso te parece para ponerle un 5? Si el ejercicio fuera encontrar la solución general, ¿tú le pondrías un 5 a un alumno por esto? Yo no. **J:** ¿Tú le pondrías menos? **A:** Sí. **J:** ¿Pondrías menos? **A:** Si fuera encontrar la general.

30	**A:** Un 5 venga, un 5 sí. **J:** Yo le pondría el 5. **A:** ¿Le pondrías más? **J:** No.
34	**J:** Yo le pondría el 5. ¿Estás de acuerdo conmigo? **A:** Venga, sí.

Por último, hay un episodio en el que los evaluadores hacen comentarios sobre el propio proceso de evaluación, manifestando que no saben qué deben hacer al no disponer de criterios de calificación (Tabla 5.2.2.14).

Tabla 5.2.2.14. Episodio referido a la categoría *otros*, relacionado con dudas sobre proceso de evaluación.

Nº de episodio	**EPISODIO**
28	**A:** Estamos evaluando sin saber qué hay que hacer. Sin nosotros haberlo hecho. **J:** No sé lo que haría yo. **A:** Porque si el ejercicio lo pongo yo y sé a lo que tienen que llegar, me es más fácil evaluarlo. Si llega hasta un sitio, hago tal… Si hacen otra cosa, pues depende de lo que consideres, es que no sé.

Uso de la propia resolución en la evaluación de un par

Tras analizar en detalle el proceso de evaluación atendiendo a las categorías de análisis (*heurísticos*, *casos estudiados*, *representaciones*, *soluciones*, *comprobación de las soluciones* y *errores*), se presenta, a continuación, un estudio sobre las resoluciones a las que los evaluadores hacen referencia en su discusión y de qué manera las usan, lo que nos informa sobre hasta qué punto tienen en cuenta sus propias resoluciones a la hora de evaluar la resolución de su compañera.

En la Tabla 5.2.2.3 se puede observar como los evaluadores hacen referencia a sus propias resoluciones en varias ocasiones, cada uno de ellos en tres episodios de la evaluación, mientras que en la mayoría de los episodios se refieren a la resolución de su compañera. Este resultado indica que se han centrado en la resolución a evaluar. En dos episodios coinciden en mencionar ambos sus propias resoluciones, en uno para explicar los cálculos que realizaron al intentar encontrar las condiciones para los coeficientes de la ecuación de una recta $y=ax+b$ (Tabla 5.2.2.7) y, en otro, para admitir que no lograron encontrar esas condiciones (Tabla 5.2.2.11a).

Además, cada evaluador hace referencia a su propia resolución una vez más. Antonio (E1) al comentar que en su resolución empleó una estrategia diferente a la utilizada por la estudiante evaluada (Tabla 5.2.2.4c). Y Javier (E5) al expresar que a sí mismo tampoco se pondría una calificación superior pues considera que la calificación máxima sería para una resolución que hubiese encontrado dicha caracterización general (Tabla 5.2.2.11b).

Carácter de los episodios

Por último, se presenta un análisis del carácter de los episodios identificados en la transcripción, distinguiendo entre episodios *interpretativos, valorativos* y *expositivos*, atendiendo a las definiciones dadas para estas categorías en la metodología (sección 3.4.2). En la Tabla 5.2.2.15 se recoge un resumen del carácter de los episodios de este caso para cada una de las categorías empleadas en el análisis de los aspectos en los que se identificó que los evaluadores se fijaron al evaluar y que, como ya se indicó (Tabla 5.2.2.3), son: *heurísticos, representaciones, soluciones y otros*. No se incluyen las categorías *casos estudiados, comprobación de soluciones* ni *errores* pues, como ya se indicó anteriormente (Tabla 5.2.3.3), no se identificó en la discusión de este caso ningún episodio referente a ellas. Además, en la categoría *otros* encontramos episodios que no hacen referencia a la resolución que están evaluando (enunciado del problema, dudas con el proceso de evaluación) y que, por tanto, carecen de carácter. Sin embargo, existen otros en los que califican la resolución y que, por tanto, tendrán carácter valorativo.

Tabla 5.2.2.15. Clasificación de los episodios del caso 5 atendiendo al carácter.

	Interpretativo	**Valorativo**	**Expositivo**
Heurísticos	1	4	1
Representaciones	3	2	1
Soluciones	2	8	1
Otros	0	5	0
Total	**6**	**19**	**3**

Como se puede observar en la tabla, el proceso de evaluación seguido por esta pareja es fundamentalmente valorativo, con más del triple de episodios valorativos (19 episodios) que interpretativos (6 episodios). Además, se encontraron tres episodios con carácter expositivo.

El mayor número de episodios se encuentra en aquellos con carácter valorativo, predominando los que hacen referencia a las *soluciones,* siendo estos 8 episodios. En ellos, la pareja evaluadora valora dos aspectos, que la estudiante evaluada ha presentado únicamente la ecuación de una recta solución (Tabla 5.2.2.9) y que no ha llegado a dar la expresión de la segunda recta que da como solución (Tabla 5.2.2.10). Por otra parte, se consideran los cinco episodios clasificados en la categoría *otros* en los que la pareja evaluadora está otorgando una calificación a la resolución, por tanto, también la están valorando (Tabla 5.2.2.13). A continuación, se identifican cuatro episodios valorativos relacionados con los *heurísticos,* en los que los evaluadores, aunque lo consideran correcto, expresan que no es apropiado el heurístico utilizado por la evaluada (Tabla 5.2.2.4b-d-e-f). Por último, dos de los episodios valorativos están asociados con las *representaciones,* uno con la *representación simbólica* en el que valoran que los pasos dados por Mónica (E14), efectivamente, la conducen a encontrar rectas con dos puntos de intersección con la parábola (Tabla 5.2.2.6a). Y el otro relacionado con la *representación verbal* en el que Javier (E5) echa en falta alguna especificación más por parte de su compañera (Tabla 5.2.2.8a).

A continuación se encuentran los episodios con carácter interpretativo donde los evaluadores hacen referencia a los *heurísticos*, las *representaciones* y las *soluciones*. En el único episodio interpretativo relacionado con la categoría *heurísticos,* los evaluadores identifican que Mónica (E14) obtiene dos rectas particulares que sugieren una forma de obtener una solución general, es decir, el *heurístico generalizar* (Tabla 5.2.2.4a). En los tres correspondientes a la categoría *representaciones*, dos episodios son referentes a la *representación simbólica*, en los que interpretan los pasos realizados por la compañera evaluada debido a las dudas que muestra Antonio (E1) con algunas de las expresiones algebraicas de la resolución (Tabla

5.2.2.7b-c). El episodio restante está relacionado con la *representación verbal* y en él leen e intentan comprender las palabras escritas por Mónica (E14) al generalizar el proceso de búsqueda de soluciones (Tabla 5.2.2.8b). Por último, en los dos episodios interpretativos relacionados con las *soluciones*, los evaluadores señalan que Mónica (E14) ha presentado solamente la ecuación de una recta solución (Tabla 5.2.2.9d-e).

En este caso se han encontrado tres episodios con carácter expositivo en los que los evaluadores explican aspectos de sus propias resoluciones. En uno de ellos, relacionado con el *heurístico,* Antonio (E1) comenta que en su resolución empleó una estrategia diferente a la utilizada por la estudiante evaluada (Tabla 5.2.2.4c). En los otros dos, relacionados con la *representación simbólica* y las *soluciones*, los evaluadores explican los cálculos que realizaron al intentar encontrar las condiciones para los coeficientes de una recta $y=ax+b$ (Tabla 5.2.2.7) y mencionan que no lograron encontrar esas condiciones que les diera una solución final completa (Tabla 5.2.2.11a).

A modo de resumen, en este caso se han identificado 34 episodios en los que se hace referencia, principalmente, a las *soluciones* y a *otros* aspectos de la resolución, como la calificación. Durante el proceso de evaluación, los evaluadores tienen en cuenta sus propias resoluciones en pocas ocasiones, principalmente para comparar sus procedimientos de resolución con el de su compañera, por lo que se centran en la resolución a evaluar. Antonio (E1) y Javier (E5) resolvieron el problema utilizando la misma estrategia, intentando encontrar las condiciones para los coeficientes de una recta $y=ax+b$, por lo que consideran que su compañera, al dar como solución dos rectas particulares, no merece más de la mitad de la calificación máxima. Por último, se observa que los evaluadores de este caso siguen un proceso de carácter fundamentalmente valorativo, encontrando más del triple de episodios valorativos que interpretativos, resultado coherente con el análisis por categorías, haciendo referencia mayoritariamente a la categoría de *soluciones*. Además, en su proceso de evaluación se han enfocado en tratar de otorgar una calificación numérica.

5.2.3 Caso 6. Yurena, Judith y Yaiza

En esta sección se presenta el estudio del caso formado por Yurena (E7) y Judith (E9), que evalúan la resolución de Yaiza (E12). En primer lugar, se muestra una comparativa de las principales características, atendiendo a las categorías de análisis, de las resoluciones realizadas por estas tres estudiantes cuyo estudio se presentó en detalle en las secciones 4.1.7, 4.1.9 y 4.1.12.

Caso 6: Análisis conjunto de las tres resoluciones.

En la Tabla 5.2.3.1 se muestra un resumen de las características de las resoluciones del problema presentadas por cada una de las tres participantes que conforman este caso, atendiendo a las categorías de análisis.

Tabla 5.2.3.1 Resumen de las resoluciones del caso 6.

	Evaluadora Yurena (E7)	**Evaluadora Judith (E9)**	**Evaluada Yaiza (E12)**
Heurístico	1. Dibujar una figura 2. Ensayo y error 3. Descomponer el problema en partes 4. Generalizar 5. Suponer el problema resuelto	1. Dibujar una figura 2. Generalizar	1. Dibujar una figura
Casos estudiados	y=5 (gráficamente) Rectas oblicuas con pendiente negativa y positiva (gráficamente) y=x+5 (gráficamente) y=x+6 (gráficamente) $x = \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ $y = \beta$, con $\beta > 5$ y=mx+n, con $m \neq 0$	y=6 y=0 y=7, y=8, …, $y = \infty$	y=2 y=5x+5
Representaciones	Gráfica, simbólica y verbal	Gráfica, tabular, simbólica y verbal	Gráfica, tabular, simbólica y verbal
Soluciones	$y = \beta$, con $\beta > 5$	y=6, y=7, y=8, …, $y = \infty$	y=2 y=5x+5
Comprobación de las soluciones	No	y=6 y=0	y=2 y=5x+5
Errores	Representación del vértice de la parábola. Afirmar que y=5 e y=x+5 no son soluciones.	Uso incorrecto de la tabla de valores para representar gráficamente. Representación del vértice de la parábola. Representación algebraica de una recta “ $y = \infty$”.	No

En este caso, ambas evaluadoras comienzan con el *heurístico dibujar una figura,* representando gráficamente la parábola, pero continúan de diferente manera. Yurena (E7) utiliza seguidamente cuatro heurísticos diferentes: *ensayo y error*, *descomponer el problema en partes, generalizar* y *suponer el problema resuelto*. Emplea el *ensayo y error* de manera gráfica, representando rectas con distintas pendientes junto a la gráfica de la parábola para, de manera visual, verificar si cumplen o no las condiciones del problema (Figuras 4.1.31 y 4.1.33). A continuación, utilizando *descomponer el problema en partes,* divide el estudio en grupos de rectas según su pendiente: rectas verticales (Figura 4.1.35) que las descarta como solución, rectas horizontales (Figura 4.1.36) y rectas oblicuas que expresa mediante la ecuación explícita y=mx+n, con $m \neq 0$ (Figura 4.1.37). Para las rectas horizontales, analiza inicialmente la recta y=5 que ha representado anteriormente en la gráfica y *generaliza* este estudio a las rectas del semiplano y>5 (*heurístico generalizar)*. Por último, para el caso de rectas oblicuas, utiliza el *heurístico suponer el problema resuelto* abordando el problema desde un enfoque algebraico que no completa. En cambio, Judith (E9), tras *dibujar una* *figura,* utiliza el *heurístico generalizar.* Apoyándose en la representación gráfica de la parábola, considera dos rectas horizontales particulares, verifica si cumplen o no las condiciones del problema (Figura 4.1.46) y *generaliza* a un conjunto más amplio de rectas horizontales (Figura 4.1.47). La estudiante evaluada, igual que las evaluadoras, usa el *heurístico dibujar una figura* a partir del cual aborda dos rectas particulares, sin embargo, al contrario que ellas, es el único heurístico que utiliza. La Tabla 5.2.3.2 muestra un resumen de los heurísticos empleados por las tres personas que conforman este caso y el orden en que los emplearon.

Tabla 5.2.3.2. Heurísticos empleados por las estudiantes del caso 6.

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="5">HEURÍSTICOS</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Evaluadoras</td><td>Yurena (E7)</td><td>Dibujar una figura</td><td>Ensayo y error</td><td>Generalizar</td><td>Descomponer el problema en partes</td><td>Suponer el problema resuelto</td></tr>
<tr><td>Judith (E9)</td><td colspan="2">Dibujar una figura</td><td colspan="3">Generalizar</td></tr>
<tr><td>Evaluada</td><td>Yaiza (E12)</td><td colspan="5">Dibujar una figura</td></tr>
</table>

En relación a los *casos estudiados*, Yurena (E7) comienza analizando gráficamente varias rectas: la recta y=5, una recta oblicua con pendiente negativa y varias rectas oblicuas con pendiente positiva paralelas entre sí, entre ellas las rectas y=x+5 e y=x+6 (Figura 4.1.33). Y, a continuación, estudia tres familias de rectas: $x = \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$; $y = \beta$, con $\beta > 5$; e y=mx+n, con $m \neq 0$. Los *casos estudiados* por Judith (E9) coinciden con uno de los casos de Yurena (E7) ya que solo aborda rectas horizontales. En primer lugar analiza las rectas particulares y=6 e y=0 (Figura 4.1.46) y, posteriormente, generaliza a las rectas y=7, y=8, …, $y = \infty$ (Figura 4.1.47). Por su parte, la evaluada, Yaiza (E12), estudia únicamente dos rectas particulares, una de ellas, también horizontal: la recta y=2 y la recta 5x+5 (Figura 4.1.65).

En cuanto a las *representaciones* utilizadas, las dos evaluadas utilizan la *representación gráfica*. Judith (E9) representa la parábola apoyándose en la *representación tabular* mediante una tabla de valores para recoger las coordenadas de distintos puntos de la parábola. Yurena (E7) representa la parábola en tres ocasiones (Figuras 4.1.31, 4.1.33 y 4.1.38) junto a una o varias rectas que estudia. Ambas usan la *representación simbólica* para realizar cálculos (Figuras 4.1.39 y 4.1.46) y para indicar las rectas consideradas (Figuras 4.1.31-33, 4.1.35-37 y 4.1.46-47). Y, también, utilizan la *representación verbal* pero con distintos propósitos. Mientras Yurena (E7) la emplea para justificar por qué las rectas estudiadas son o no soluciones del problema (Figuras 4.1.35-37), Judith (E9) lo hace para presentar las soluciones (Figura 4.1.47). Igual que las evaluadoras, la alumna evaluada hace uso de la *representación gráfica*, tanto de la parábola como de dos rectas (Figura 4.1.64). Utiliza la *representación simbólica,* pero no para mostrar cálculos como las evaluadoras sino para indicar las rectas y los puntos de intersección (Figura 4.1.65). Sí coincide con ellas en el uso de la *representación verbal* para presentar y justificar las soluciones (Figura 4.1.65).

Aunque los procesos de resolución de las evaluadoras muestran algunas diferencias, las dos concluyen dando como *soluciones* rectas horizontales. Yurena (E7) presenta las rectas horizontales $y = \beta$, con $\beta > 5$ (Figura 4.1.36) y Judith (E9) obtiene la recta y=6 y otras rectas horizontales por encima de esta (y=7, y=8, "etc.") (Figura 4.1.47). Por su parte, la estudiante evaluada, Yaiza (E12), da como *soluciones* dos rectas particulares: y=2 e y=5x+5 (Figura 4.1.65).

En cuanto a la *comprobación de las soluciones,* una de las evaluadoras, Yurena (E7), no incluye ninguna en su resolución, mientras que Judith (E9) lo hace de las dos primeras rectas particulares que considera, y=6 e y=0, analizando los puntos de corte de estas con la parábola (Figura 4.1.46). En cambio, la estudiante evaluada, Yaiza (E12), realiza la *comprobación de las soluciones* gráficamente (Figura 4.1.64).

Por último, se encontraron *errores* en las resoluciones de las dos evaluadoras. Yurena (E7) representa incorrectamente el vértice de la parábola sobre el eje de ordenadas en sus tres representaciones gráficas (Figuras 4.1.31, 4.1.33 y 4.1.38) y esto la conduce a indicar en una de ellas, erróneamente, que las rectas y=x+5 e y=5 no tienen dos puntos de intersección con la parábola (Figura 4.1.33). Judith (E9) comete el mismo error que su compañera en la representación gráfica del vértice de la parábola (Figura 4.1.45). En contraposición, en la resolución de la estudiante evaluada no se han detectado *errores*.

Caso 6: Análisis del proceso de evaluación.

La pareja de este caso realiza la evaluación de una resolución muy escueta y su proceso de evaluación se centra en señalar aspectos que echan en falta, tomando como referencia la propia resolución de una de las evaluadoras. A continuación se presenta un análisis detallado, teniendo en cuenta las variables de análisis indicadas en la metodología (sección 3.4.2). Posteriormente, se mostrará un análisis de la forma en que las evaluadoras utilizan sus propias resoluciones para evaluar la de su compañera. Finalmente, se estudiará el carácter de las observaciones que realizan las evaluadoras, distinguiendo entre episodios *interpretativos, valorativos* y *expositivos*.

Aspectos de la resolución del problema en que se centra la evaluación

En la transcripción de la discusión mantenida entre Yurena (E7) y Judith (E9) (Anexo A.1.6) se identificaron un total de 28 episodios (Tabla 5.2.3.3). La categoría a la que hacen referencia en un mayor número de episodios es *representaciones*, en concreto, en 10 episodios. A las categorías *soluciones* y *otros,* se refieren en 6 episodios cada una, estos últimos relacionados con el enunciado del problema, la valoración global y la limpieza en la presentación de la resolución evaluada. En menor medida, en 3, 2 y un único episodio, mencionan aspectos relacionados con las categorías *heurísticos*, *casos estudiados* y *comprobación de soluciones*, respectivamente. Además, al no cometer, la evaluada, errores en su resolución, no se identificaron episodios en relación a la categoría *errores.*

En la Tabla 5.2.3.3 se muestra, además del número de episodios clasificados en cada una de las categorías de análisis, el número de episodios en los que hacen referencia a cada una de las resoluciones implicadas en el caso (evaluadoras o evaluada). En este último aspecto, pueden existir episodios en los que hagan referencia a más de una resolución, de ahí que se puedan encontrar disparidades con el número de episodios totales.

Tabla 5.2.3.3. Clasificación de los episodios del caso 6.

CATEGORÍA	Número de episodios	Resolución a la que se refieren		
		Evaluadora (Yurena - E7)	Evaluadora (Judith - E9)	Evaluada (Yaiza - E12)
Heurísticos	3	0	0	3
Casos estudiados	2	2	0	2
Representaciones	10	2	0	10
Soluciones	6	2	0	6
Comprobación de soluciones	1	0	0	1
Errores	0	0	0	0
Otros	6	0	0	4
Total	**28**	**6**	**0**	**26**

En relación a los episodios referidos a los *heurísticos,* en los dos primeros (Tabla 5.2.3.4a), las evaluadoras identifican que la compañera evaluada ha utilizado el heurístico *dibujar una figura*, expresando que utiliza la representación gráfica de la parábola para buscar soluciones y que, por tanto, se trata de una resolución visual. En el tercero (Tabla 5.2.3.4b) indican que este procedimiento es correcto.

Tabla 5.2.3.4. Episodios en los que las evaluadoras del caso 6 se refieren a los *heurísticos*.

Nº de episodio	EPISODIO	
15	**J:** Podemos poner que solo hace uso de la representación gráfica para la búsqueda de soluciones, que no hace un cálculo…	a
17	**J:** Bueno, es una resolución visual.	
21	**J:** Entonces el planteamiento está bien [...]. O sea, lo que hizo está bien.	b

En cuanto a la siguiente categoría de análisis, *casos estudiados,* se identificaron dos episodios que tienen lugar cuando las evaluadoras se plantean señalar aspectos que faltan en la resolución evaluada. En ellos, Yurena (E7) indica que la estudiante evaluada podría haber representado más tipos de rectas o estudiar una recta general (Tabla 5.2.3.5), apoyándose en los casos estudiados en su propia resolución.

Tabla 5.2.3.5. Episodios en los que una de las evaluadoras del caso 6 se refiere a los *casos estudiados*.

Nº de episodio	EPISODIO
10	**Y:** ¿Qué más? Yo pondría que no relaciona la parábola con las rectas. Porque podría haber dibujado más tipos de rectas, o algo así. Entonces no hay relación entre una y otras.
16	**Y:** Tampoco plantea ningún método para encontrar la solución general.

Las evaluadoras de este caso se refieren a las *representaciones* en diez ocasiones, siendo esta la categoría con mayor número de episodios como ya se mencionó anteriormente. En ellos hacen alusión a tres de los cuatro tipos de representaciones consideradas en el análisis (Tabla 5.2.3.6).

Tabla 5.2.3.6. Clasificación de los episodios de la categoría *representaciones* del caso 6.

REPRESENTACIÓN	**Gráfica**	**Tabular**	**Simbólica**	**Verbal**
Nº DE EPISODIOS	4	1	0	5

Cuatro de estos episodios son referentes a la *representación gráfica* de la parábola y de las rectas estudiadas en la resolución evaluada. En uno de ellos (Tabla 5.2.3.7b), tratan de identificar en la gráfica las rectas obtenidas por la evaluada, pues una de ellas no se diferencia fácilmente. En otros dos episodios (Tabla 5.2.3.7a-c), indican que, en general, la gráfica está correctamente representada, concretando en un cuarto episodio (Tabla 5.2.3.7d) que la representación de las dos rectas también, señalando, además, que la estudiante evaluada utiliza distintos colores para cada una.

Tabla 5.2.3.7. Episodios en los que las evaluadoras del caso 6 se refieren a la *representación gráfica*.

Nº de episodio	**EPISODIO**	
1	**Y:** Primero crea una representación gráfica que está bien hecha	a
4	**J:** será esta. **Y:** A ver yo creo que es esta y esta, que pasan muy recto con la parábola. **J:** Exacto. (0,5) y (1,10).	b
6	**J:** Pues en primer lugar la gráfica bien dibujada. **Y:** Sí, eso es un buen punto.	c
14	**J:** Las dos rectas que dibujó, las dibujó bien porque diferenció los colores. Están verde y rojo. No escribe todo con un mismo lápiz. **Y:** Sí, que con eso se evalúa mucho más rápido el ejercicio.	d

Dentro de la categoría de *representaciones,* se identificaron cinco episodios relacionados con la *representación verbal*. En el primero de ellos, las evaluadoras leen una frase que la compañera evaluada ha escrito en su resolución (Tabla 5.2.3.8a) que hace referencia a lo que ha entendido que pide el enunciado del problema y en otro, un poco más adelante, vuelven a hacer referencia a la misma frase (Tabla 5.2.3.8c). En un episodio intermedio entre los anteriores, la pareja valora que la resolución está redactada de forma clara (Tabla 5.2.3.8b), mientras que, en los dos últimos relacionados con este tipo de representación, Yurena (E7) expresa que se debería justificar con palabras las soluciones dadas, llegando a poner como ejemplo la justificación que ella misma incluyó en su propia resolución al presentar las rectas horizontales (Tabla 5.2.3.8d-e).

Para concluir con la categoría de *representaciones*, en un único episodio se alude a la *representación tabular*. En este, Yurena (E7) comenta que la estudiante evaluada no ha usado la expresión de la parábola y Judith (E9) indica que la utiliza en el cálculo de las coordenadas de los puntos para la representación gráfica, los cuales recoge en la tabla de valores (Tabla 5.2.3.9).

Tabla 5.2.3.8. Episodios donde las evaluadoras del caso 6 se refieren a la *representación verbal*.

Nº de episodio	**EPISODIO**	
2	**Y:** Y ahora "queremos dos rectas con dos puntos de intersección con la parábola"	a
12	**Y:** ¿Qué más? **J:** Bueno, a parte de lo positivo, yo diría que es bastante claro. Que no se pierde, que no escribe en diferentes sitios lo mismo,... **Y:** Sí, bien redactado.	b
18	**J:** Pero aquí sí está diciendo que tiene que dar dos rectas con dos puntos de intersección, realmente no necesita más. **Y:** Claro, a lo mejor no entendió bien el enunciado. Porque mira lo que has dicho, quiere DOS rectas con dos puntos de intersección.	c
22	**J:** [...] pero le faltan cosas. **Y:** A lo mejor le faltaría argumentar por qué son estas dos rectas.	d
24	**Y:** Pero no lo justifica. **J:** Sí, pero ¿cómo lo justificarías? **Y:** Poniendo, por ejemplo, que si este es el punto mínimo de la recta, una recta horizontal tiene que ser mayor que este punto que corresponda, o algo así. **J:** Pero realmente no es necesario. Aquí solamente dicen encontrar las rectas, no dicen argumenta por qué son estas. En este apartado yo no, aquí solo te pide las rectas y dice que es una recta que intersecciona en los puntos… **Y:** E indica los puntos que intersección. Vale. **J:** Es mínimo como argumentación, pero es. No sé, yo no diría mucho más.	e

Tabla 5.2.3.9. Episodio en el que las evaluadoras del caso 6 se refieren a la *representación tabular*.

Nº de episodio	**EPISODIO**
11	**Y:** ¿Qué más podría faltar? No hace uso de la ecuación de la parábola para nada. **J:** Bueno, la usa aquí, para calcular los puntos.

Siguiendo con las categorías de análisis, en la transcripción de la discusión entre Yurena (E7) y Judith (E9) se encontraron seis episodios en los que hacen referencia a las *soluciones*. En tres de estos episodios, la pareja identifica las dos rectas dadas como solución por Yaiza (E12) y valoran que son correctas (Tabla 5.2.3.10a-b-f). En otros dos, Yurena (E7) vuelve a insistir en que su compañera no ha presentado una solución general y Judith (E9) puntualiza que son dos ejemplos concretos los que presenta en la resolución (Tabla 5.2.3.10c-d). Y, en el restante episodio referente a esta categoría, las evaluadoras interpretan que la evaluada ha dado únicamente dos soluciones porque así ha entendido el enunciado (Tabla 5.2.3.10e).

En relación a la categoría *comprobación de soluciones* se ha identificado un único episodio (Tabla 5.2.3.11). En él, Judith (E9) hace referencia a que la evaluada comprueba gráficamente las dos rectas que obtiene como solución y lo hace tras el episodio en el que Yurena (E7) afirma que le faltaría argumentar que las dos rectas son solución al problema (Tabla 5.2.3.8d).

Tabla 5.2.3.10. Episodios en los que las evaluadoras del caso 6 se refieren a las *soluciones*.

Nº de episodio	EPISODIO	
3	**Y:** Y pone dos ejemplos de rectas. **J:** Sí. Pone una recta, tal… Y otra que pasa por el punto 5,	a
5	**Y:** Bueno, a ver. Pone dos ejemplos que están bien.	b
7	**J:** Bueno, cosas que faltan. **Y:** Luego la solución general. **J:** ¿Cómo que solución general?	c
9	**Y:** Claro, esta coincide en dos puntos, esta también coincide en dos puntos. Pero no da la ecuación general. No da las que cortan…, porque esta también corta en dos puntos. **J:** Sí, son como dos ejemplos pero no de la solución general.	d
20	**Y:** Yo no me había dado cuenta de que no es que no siguiera con el problema sino que es que lo daba por terminado	e
28	**J:** Dio dos puntos, ¿no?. **Y:** Sí, sí. dos rectas y dos puntos. **J:** También puso los puntos de intersección y las dibujó. **Y:** El ejercicio sí está bien.	f

Tabla 5.2.3.11. Episodio en el que una de las evaluadoras del caso 6 se refiere a la *comprobación de soluciones*.

Nº de episodio	EPISODIO
23	**J:** Es visual.

En este caso no se encontraron episodios relacionados con los *errores*, como se mencionó anteriormente. Este resultado era de esperar pues la estudiante evaluada no los comete.

Por último, seis episodios, al no hacer referencia a ninguna de las categorías anteriores, se incluyeron en la categoría *otros*. Dos de estos están relacionados con el enunciado del problema. En ellos, las evaluadoras insisten en que la compañera evaluada no entendió el enunciado ya que dio únicamente las ecuaciones de dos rectas (Tabla 5.2.3.12).

Tabla 5.2.3.12. Episodios de la categoría *otros*, relacionados con el enunciado del problema. Caso 6.

Nº de episodio	EPISODIO
8	**Y:** Claro, te pide que des la ecuación de unas rectas que satisfagan esto… **J:** O sea, de todas las rectas generales
19	**J:** Claro, te ha puesto dos ecuaciones.

En otros dos episodios de la categoría *otros,* hacen una valoración global de la resolución indicando que no hizo lo que se pedía porque entendió mal el enunciado (Tabla 5.2.3.13).

Tabla 5.2.3.13. Episodios de la categoría *otros*, relacionados con la evaluación global de la resolución. Caso 6.

Nº de episodio	EPISODIO
25	**Y:** Yo tampoco diría mucho más. Claro, si ya ha entendido mal el enunciado.
27	**Y:** Pero claro, no era eso lo que le pedía.

Los dos episodios restantes, se refieren a la limpieza en la presentación de la resolución, que las evaluadoras valoran positivamente y señalan como importante (Tabla 5.2.3.14).

Tabla 5.2.3.14. Episodios de la categoría *otros*, relacionados con la limpieza. Caso 6.

Nº de episodio	EPISODIO
13	**Y:** Porque es verdad que, además está limpio. **J:** Sí, eso es bastante importante.
26	**Y:** el ejercicio lo ha hecho bien, de forma limpia y coherente, indicando todos los puntos.

Uso de la propia resolución en la evaluación de un par

Tras analizar en detalle el proceso de evaluación atendiendo a las categorías de análisis (*heurísticos*, *casos estudiados*, *representaciones*, *soluciones*, *comprobación de las soluciones* y *errores*), se presenta, a continuación, un estudio sobre las resoluciones a las que las evaluadoras hacen referencia en su discusión y de qué manera las usan, lo que nos informa sobre hasta qué punto tienen en cuenta sus propias resoluciones a la hora de evaluar la resolución de su compañera.

En la Tabla 5.2.3.3 puede observarse como Yurena (E7) es la única evaluadora que hace referencia a su propia resolución y lo hace en seis ocasiones. La primera vez que Yurena (E7) parece referirse a su propia resolución es al señalar que haber representado bien la parábola es un aspecto positivo (Tabla 5.2.3.7c), ya que ella misma no lo hizo al situar incorrectamente el vértice de la parábola en el punto de corte con el eje de ordenadas. En otras dos ocasiones se apoya en su propia resolución para sugerir otros casos que la estudiante evaluada podría haber abordado, como representar más tipos de rectas o estudiar una recta general (Tabla 5.2.3.5). En esta misma línea se refiere a las soluciones presentadas por la evaluada, indicando que no llega a presentar una solución general (Tabla 5.2.3.10c-d). Por último, vuelve a referirse a su resolución al expresar que la alumna evaluada debería haber argumentado con palabras las soluciones dadas y pone como ejemplo la justificación que ella escribió al presentar las rectas horizontales (Tabla 5.2.3.8e).

Carácter de los episodios

Por último, analizaremos el carácter de los episodios identificados en la transcripción de este caso, distinguiendo entre episodios *interpretativos, valorativos* y *expositivos*, atendiendo a las definiciones dadas para estas categorías en la metodología (sección 3.4.2). En la Tabla 5.2.3.15 se presenta un resumen del carácter de los episodios para cada una de las categorías empleadas en el análisis de los aspectos en los que las evaluadoras de este caso se fijan al evaluar y que, como ya se indicó (Tabla 5.2.3.3), son: *heurísticos, casos estudiados, representaciones, soluciones, comprobación de soluciones* y *otros*. No se incluyen las categorías *errores* pues, como ya se indicó anteriormente (Tabla 5.2.3.3), no se identificó en la discusión de este caso ningún episodio referente a ella. Además, en la categoría *otros* encontramos episodios que no hacen referencia a la resolución que están evaluando (enunciado del problema) y que, por tanto, carecen de carácter. Sin embargo, existen otros en los que evalúan globalmente la resolución y que, por tanto, tendrán carácter valorativo.

Tabla 5.2.3.15. Clasificación de los episodios del caso 6 atendiendo al carácter.

	Interpretativo	**Valorativo**	**Expositivo**
Heurísticos	2	1	0
Casos estudiados	0	2	0
Representaciones	3	6	1
Soluciones	2	4	0
Comprobación de soluciones	1	0	0
Otros	0	4	0
Total	**8**	**17**	**1**

Como se observa en la tabla, el proceso de evaluación seguido por esta pareja es fundamentalmente valorativo, con más del doble de episodios valorativos (17 episodios) que interpretativos (8 episodios). Además, se encontró un episodio con carácter expositivo.

La mayoría de los episodios tienen un carácter valorativo, seis de ellos relacionados con las *representaciones*. Tres se refieren a la *representación gráfica,* en los que las evaluadoras comentan que la gráfica de la parábola está correctamente representada y señalan aspectos como la utilización de distintos colores para representar las rectas (Tabla 5.2.3.7a-c-d). Los otros tres están relacionados con la *representación verbal*, en uno la pareja valora que la resolución está redactada claramente (Tabla 5.2.3.8b) y, en los dos restantes, Yurena (E7) expresa que la evaluada debería haber argumentado con palabras las soluciones dadas, poniendo como ejemplo la justificación que ella escribe en su resolución al presentar las rectas horizontales (Tabla 5.2.3.8d-e). Cuatro de los episodios valorativos son referentes a las *soluciones,* en los que, por un lado, valoran las soluciones como correctas en dos de ellos (Tabla 5.2.3.10b-f) y, por otro lado, indican que su compañera no ha presentado una solución general (Tabla 5.2.3.10c-d). En relación con los *casos estudiados* encontramos dos episodios valorativos, en los que Yurena (E7), apoyándose en los casos que ella analizó en su propia resolución, insiste en que la estudiante evaluada podría haber representado más tipos de rectas o estudiar una recta general (Tabla 5.2.3.5). Por último, solo un episodio valorativo es referente a los *heurísticos*, en el que valoran que el procedimiento seguido por la evaluada es correcto (Tabla 5.2.3.4b). Además, se identifican cuatro episodios clasificados en la categoría *otros* en los que la pareja evaluadora también valora la resolución, dos de ellos de forma global considerando que no es del todo correcta porque la alumna evaluada entendió mal el enunciado (Tabla 5.2.3.13) y otros dos relacionados con la limpieza en la presentación (Tabla 5.2.3.14).

A continuación encontramos el carácter interpretativo donde se han observado 8 episodios en los que las evaluadoras hacen referencia a los *heurísticos*, las *representaciones,* las *soluciones* y la *comprobación de soluciones*. Tres de estos episodios están relacionados con las *representaciones,* en concreto: uno con la *representación gráfica,* en el que tratan de identificar la representación de las rectas escritas en la resolución (Tabla 5.2.3.7b); otro con la *representación tabular*, en el que Judith (E9) indica que utiliza la ecuación de la parábola para calcular las coordenadas de los puntos recogidos en la tabla de valores (Tabla 5.2.3.9); y otro con la *representación verbal,* en el que interpretan lo que entendió que se pedía en el problema la evaluada a través de una frase escrita en la resolución (Tabla 5.2.3.8c). En los dos episodios interpretativos relativos a los *heurísticos,* una de las evaluadoras, Judith (E9), identifica que el *heurístico* utilizado en la resolución es *dibujar una figura*, expresando que se apoya en la representación gráfica de la parábola para buscar soluciones y, a continuación, vuelve a afirmar que se trata de una resolución visual (Tabla 5.2.3.4a). También se han identificado dos episodios interpretativos referidos a las *soluciones,* uno en el que la pareja evaluadora identifica las dos rectas dadas por Yaiza (E12) como solución (Tabla 5.2.3.10a) y otro en el que comprenden que la evaluada ha dado únicamente dos soluciones porque así lo ha entendido en el enunciado (Tabla 5.2.3.10e). El último episodio interpretativo hace referencia a la *comprobación de soluciones* y, en él, Judith (E9) señala que la estudiante evaluada realiza una comprobación gráfica de las soluciones (Tabla 5.2.3.11).

Por último, se ha encontrado un único episodio con carácter expositivo en el que las evaluadoras leen textualmente una frase escrita en la resolución (Tabla 5.2.3.8a).

A modo de resumen, en este caso se han podido identificar 28 episodios en los que se hace referencia, principalmente, a la categoría de *representaciones* y a *otros* aspectos, como el enunciado del problema o la limpieza en la presentación. Durante el proceso de evaluación, una de las evaluadoras, Yurena (E7), tiene como referencia su propia resolución durante todo el proceso de evaluación, apoyándose en ella en varias ocasiones para señalar aspectos que ella opina que faltan en la resolución a evaluar. Por último, se puede concluir que las evaluadoras de este caso siguen un proceso de carácter fundamentalmente valorativo, puesto que se han identificado más del doble de episodios valorativos que interpretativos y, como se ha señalado anteriormente, centrando estas valoraciones en buscar elementos que faltan en la resolución evaluada.

5.3. Análisis de los casos del BLOQUE III

En el tercer bloque se incluye un único caso, donde la estudiante evaluada, haciendo uso del *heurístico ensayo y error,* considera distintas rectas y verifica si tienen o no dos puntos de intersección con la parábola.

5.3.1 Caso 7. Maite, Yaiza y Sofía

En esta sección se presenta el caso formado por la pareja Maite (E10) y Yaiza (E12), que evalúan conjuntamente la resolución de Sofía (E15). En primer lugar, se realiza una comparativa de las principales características, atendiendo a las categorías de análisis, de las resoluciones realizadas por estas tres estudiantes cuyo estudio se presentó en detalle en las secciones 4.1.10, 4.1.12 y 4.1.15.

Caso 7: Análisis conjunto de las tres resoluciones.

En la Tabla 5.3.1.1 se muestra un resumen de las características de las resoluciones del problema presentadas por cada una de las tres participantes que conforman este caso, atendiendo a las categorías de análisis.

Tabla 5.3.1.1 Resumen de las resoluciones del caso 7.

	Evaluadora Maite (E10)	**Evaluadora Yaiza (E12)**	**Evaluada Sofía (E15)**
Heurístico	1. Dibujar una figura 2. Generalizar	1. Dibujar una figura	1. Ensayo y error
Casos estudiados	y=5x+5 y=6x+5 y=7x+5 Rectas que pasan por (0,5) y otro punto de la parábola de la forma $y = mx + 5$, con $m \geq 5,\ m\epsilon\mathbb{Z}$ (incompleto)	y=2 y=5x+5	y=0 y=1 y=2 y=3 y=4 y=4x y=x y=x+4
Representaciones	Gráfica, tabular, simbólica y verbal	Gráfica, tabular, simbólica y verbal	Simbólica y verbal
Soluciones	y=5x+5 y=6x+5 y=7x+5 Rectas que pasan por (0,5) y otro punto de la parábola de la forma $y = mx + 5$, con $m \geq 5,\ m\epsilon\mathbb{Z}$ (incompleta)	y=2 y=5x+5	y=2 y=3 y=4 y=4x y=x+4
Comprobación de las soluciones	Rectas que pasan por (0,5) y otro punto de la parábola de la forma $y = mx + 5$, con $m \geq 5,\ m\epsilon\mathbb{Z}$ (incompleta)	y=2 y=5x+5	y=0 y=1 y=2 y=3 y=4 y=4x y=x y=x+4
Errores	Representación del vértice de la parábola	No	No

Las resoluciones de las evaluadoras tienen en común el uso del *heurístico dibujar una figura*. Maite (E10), además, también utiliza *generalizar*, pues construye varias rectas particulares que pasan por el punto (0,5) apoyándose en la representación gráfica de la parábola (Figura 4.1.50) y, a continuación, generaliza a rectas que pasan por el (0,5) y cualquier otro punto de la parábola (Figura 4.1.51). Sin embargo, *dibujar una figura* es el único *heurístico* utilizado por Yaiza (E12), quien, a partir de la representación gráfica de la parábola, da las ecuaciones de dos rectas particulares sin indicar ningún tipo de cálculo (Figuras 4.1.64 y 4.1.65). Por su parte, la estudiante evaluada, Sofía (E15), utiliza únicamente el *heurístico ensayo y error*. Considera rectas particulares y verifica si cumplen o no las condiciones del problema (Figuras 4.1.72-4.1.76). La Tabla 5.3.1.2 muestra un resumen de los heurísticos empleados por las tres estudiantes y el orden en que los emplearon.

Tabla 5.3.1.2. Heurísticos empleados por las estudiantes del caso 7.

		HEURÍSTICOS	
Evaluadoras	Maite (E10)	Dibujar una figura	Generalizar
	Yaiza (E12)	Dibujar una figura	
Evaluada	Sofía (E15)	Ensayo y error	

En relación a los *casos estudiados,* ambas evaluadoras analizan rectas particulares, aunque Maite (E10), además, aborda una generalización. Ella calcula, en primer lugar, tres rectas particulares que pasan por el (0,5) y por cada uno de los puntos que obtuvo en la tabla de valores, siendo sus ecuaciones: y=5x+5, y=6x+5 e y=7x+5 (Figura 4.1.50). A partir de ellas, plantea rectas que pasan por el (0,5) y cualquier otro punto de la parábola (Figura 4.1.51). Yaiza (E12) únicamente aborda dos rectas particulares: y=2 e y=5x+5 (Figura 4.1.65). Por su parte, la evaluada, Sofía (E15), también estudia rectas particulares, ocho en concreto: y=0, y=1, y=2, y=3, y=4, y=4x, y=x, y=x+4 (Figuras 4.1.72-4.1.76).

En cuanto a las representaciones utilizadas, ambas evaluadoras comienzan su resolución con la *representación gráfica* de la parábola que realizan a partir de una tabla de valores, esto es, utilizando una *representación tabular* (Figuras 4.1.48 y 4.1.64). Yaiza (E12) representa, además, las dos rectas que da como solución. Coinciden también en el uso de la *representación simbólica* para presentar rectas y puntos de corte (Figuras 4.1.50-4.1.51 y 4.1.65). La *representación verbal* también es utilizada por ambas pero con diferentes objetivos: Maite (E10) la usa para indicar el procedimiento seguido (Figura 4.1.50) y Yaiza (E12) para presentar y justificar las soluciones (Figura 4.1.65). Por su parte, en la resolución de Sofía (E15), la estudiante evaluada, predomina la *representación simbólica* con la que presenta las rectas que analiza y comprueba si tienen dos puntos de intersección con la parábola. En cambio, utiliza la *representación verbal* solo para indicar el número de puntos obtenidos en dicha comprobación (Figuras 4.1.72-4.1.76).

Las *soluciones* presentadas por las evaluadoras coinciden exactamente con sus *casos estudiados*. Maite (E10) presenta como resultado tres rectas particulares y=5x+5, y=6x+5 e y=7x+5, y las rectas que pasan por (0,5) y otro punto de la parábola de la forma $y = mx + 5$, con $m \geq 5$, $m \in \mathbb{Z}$ (Figura 4.1.50). Las *soluciones* dadas por Yaiza (E12) son dos rectas particulares: y=2 e y=5x+5 (Figura 4.1.65). La estudiante evaluada coincide con las evaluadoras en dar como *soluciones* rectas particulares, en su caso 5 de las 8 que estudia pues son las que verifican la condición del enunciado del problema: y=2, y=3, y=4, y=4x e y=x+4 (Figuras 4.1.73-4.1.76).

Ambas evaluadoras realizan la *comprobación de las soluciones.* Yaiza (E12) comprueba sus dos soluciones gráficamente (Figura 4.1.64) y Maite (E10), aunque no la termina, comienza la comprobación de las rectas que pasan por (0,5) y otro punto de la parábola de la forma $y = mx + 5$, con $m \geq 5$, $m \in \mathbb{Z}$ (Figura 4.1.51). La *comprobación de las soluciones* en la resolución evaluada es intrínseca al heurístico empleado (*ensayo y error*), por lo que comprueba cada una de los casos que estudia: y=0, y=1, y=2, y=3, y=4, y=4x, y=x, y=x+4 (Figuras 4.1.72-4.1.76).

Solo se detectó un *error* en la resolución de una de las evaluadoras, Maite (E10), quien en la representación gráfica de la parábola sitúa el vértice incorrectamente sobre el eje OY (Figura 4.1.48). Tampoco se encontraron *errores* en la resolución de la estudiante evaluada.

Caso 7: Análisis del proceso de evaluación.

En el proceso de evaluación de esta pareja se pueden distinguir dos partes, una primera parte en la que interpretan los cálculos realizados por la compañera evaluada, mostrando algunas dudas iniciales, y una segunda parte en la que, tras solventar estas dudas, valoran la resolución. A continuación, se presenta un análisis detallado de la discusión mantenida por esta pareja durante el proceso de evaluación, teniendo en cuenta las categorías de análisis indicadas en la metodología (sección 3.4.2). Posteriormente, se mostrará un estudio de la utilización que hacen las evaluadoras de sus propias resoluciones para evaluar la de su compañera. Finalmente, se abordará el carácter de las observaciones que realizan las evaluadoras en cada uno de los episodios identificados y distinguiendo entre episodios *interpretativos, valorativos* y *expositivos*.

Aspectos de la resolución del problema en que se centra la evaluación

En la transcripción de la discusión mantenida entre Maite (E10) y Yaiza (E12) (Anexo A.1.7) se identificaron un total de 27 episodios (Tabla 5.3.1.3). La categoría a la que hacen referencia en un mayor número de episodios, ocho, es *representaciones*. Además, se identificaron 7 episodios relacionados con el enunciado del problema, el proceso de evaluación o la calificación, esto es, incluidos en la categoría *otros*. Con menor frecuencia, en 5, 4 y 3 episodios, las evaluadoras comentan aspectos sobre los *casos estudiados,* los *heurísticos* y las *soluciones,* respectivamente. En cambio, no se encontraron episodios que hiciesen referencia a la *comprobación de soluciones* y, como la evaluada no comete ningún error, tampoco a la categoría *errores*.

En la Tabla 5.3.1.3 se muestra, además del número de episodios clasificados en cada una de las categorías de análisis, el número de episodios en los que hacen referencia a cada una de las resoluciones implicadas en el caso (evaluadoras o evaluada). En este último aspecto, pueden existir episodios en los que hagan referencia a más de una resolución, de ahí que se puedan encontrar disparidades con el número de episodios totales.

En la categoría *heurísticos* se identificaron cuatro episodios (Tabla 5.3.1.4). Los dos primeros se producen mientras las evaluadoras están interpretando la resolución a evaluar porque les genera algunas dudas la estrategia utilizada y no terminan de comprender que Sofía (E15) está empleando *ensayo y error* (Tabla 5.3.1.4a-b). Dichos episodios tienen lugar en momentos diferentes de su discusión, lo que muestra la dificultad a la que se enfrentaron para su comprensión. En los otros dos episodios, las evaluadoras ya han logrado entender el heurístico utilizado y lo valoran como correcto (Tabla 5.3.1.4c-d).

Tabla 5.3.1.3. Clasificación de los episodios del caso 7.

CATEGORÍA	Número de episodios	Resolución a la que se refieren		
		Evaluadora (Maite - E10)	**Evaluadora (Yaiza - E12)**	**Evaluado (Sofía - E15)**
Heurísticos	4	0	0	4
Casos estudiados	5	0	0	5
Representaciones	8	0	1	7
Soluciones	3	0	0	3
Comprobación de soluciones	0	0	0	0
Errores	0	0	0	0
Otros	7	0	0	3
Total	**27**	**0**	**1**	**22**

En relación a los *casos estudiados,* se han identificado cinco episodios relacionados con ellos (Tabla 5.3.1.5). En cuatro de ellos, Maite (E10) y Yaiza (E12) describen los casos que su compañera ha seleccionado para su estudio (Tabla 5.3.1.5a-b-d-e). En el episodio restante, Yaiza (E12) expresa sus dudas acerca de los motivos que han llevado a la estudiante evaluada a seleccionar cada uno de los casos (Tabla 5.3.1.5c).

Tabla 5.3.1.4. Episodios en los que las evaluadoras del caso 7 se refieren a los *heurísticos*.

Nº de episodio	EPISODIO	
6	**M:** No sé, yo creo que fue probando, diciendo, tiene dos puntos de corte, tiene dos puntos de corte… **Y:** Es que a mí esto me parece que lo hizo para hacerse una idea de algo, pero luego aquí es donde realmente está…	a
14	**Y:** A lo mejor el procedimiento que empleó es un poco al azar.	b
16	**Y:** Y no es que lo pusiera en plan porque le diera la gana, sino que… [...] El procedimiento parece coherente. Le vinieron sus ideas, lo fue haciendo. Utilizó el método de probar valores un poco. Escogió rectas y las comparó, hizo una intersección con la parábola.	c
19	**Y:** yo veo que el procedimiento es correcto	d

Tabla 5.3.1.5. Episodios donde las evaluadoras del caso 7 se refieren a los *casos estudiados*.

Nº de episodio	EPISODIO	
4	**M:** Entonces el cero no vale.	a
8	**M:** No, esta dice que no **Y:** Vale, te dice que no. Bueno a esta y a esta. **M:** Esta tiene dos puntos de intersección, y=4x. **Y:** Porque le dio esto. Pero porque le vendría la inspiración divina puso 4x aquí y aquí esto. Entiendo, vamos... **M:** Sí.	b
10	**Y:** Es que no sé en qué se basó para coger y=4x. Y aquí más de lo mismo. Aquí puso esta ecuación, que no sé de dónde le vino la idea,	c
13	**M:** Te está diciendo: esta recta no corta, esta recta no corta, esta recta no corta. O sea, todas las que van así, no cortan. Vale, genial. **Y:** No, pero él empieza en el y=2. Bueno, eso es lo que estamos entendiendo nosotras	d

	porque pone y=3, y=4 y ya está. Luego, esta no corta, porque cogió una recta cualquiera. En esta digo existen dos puntos, y en esta digo existen otros dos puntos y en esta, por ejemplo, digo pues no existe ningún punto. Está bien, en principio está bien.	
18	**Y:** Pero, bueno, si quieres nombrar que encontró un caso que no se cumplía	e

En cuanto a la tercera categoría de análisis*,* se identificaron ocho episodios relacionados con las *representaciones*, siendo esta la categoría con mayor número de episodios, y en los que se hace referencia a tres de los cuatro tipos de representaciones consideradas (Tabla 5.3.1.6).

Tabla 5.3.1.6. Clasificación de los episodios de la categoría *representaciones* del caso 7.

REPRESENTACIÓN	**Gráfica**	**Tabular**	**Simbólica**	**Verbal**
Nº DE EPISODIOS	1	0	5	2

Más de la mitad de estos episodios (5) son referidos a la *representación simbólica* y suceden durante la interpretación de los cálculos que ha realizado Sofía (E15), la estudiante evaluada. En ellos, se perciben las dudas que tienen las dos evaluadoras con los cálculos recogidos por Sofía (E15) en su proceso de resolución (Tabla 5.3.1.7).

Tabla 5.3.1.7. Episodios donde las evaluadoras del caso 7 se refieren a la *representación simbólica*.

Nº de episodio	**EPISODIO**
1	**Y:** A ver, puso la ecuación de segundo grado y luego puso y=0, ¿no? **M:** Sí. Es que no sé muy bien qué hizo. **Y:** Aquí puso ya la ecuación pero sustituida. **M:** ¿Por qué puso 3? **Y:** [...] Dice, cuando la y es igual 2. Cuando la y es igual a 3, la x tiene que ser estos dos puntos. **M:** Sí, pero todo esto anterior ¿para qué lo puso? **Y:** Primero puso la y=2, la y=0 y luego… Vale, puso la y=0 y luego resolvió esto para ver cuando la y es igual a 0 en qué punto está la x. **M:** Sí, claro, pero no me cuadra este tres. Debería haber un 5. **Y:** Se equivocó. Claro, los dos puntos de intersección que obtuvo están mal. Creo yo. **M:** Sí, sí, por eso.
3	**M:** Vale, y entonces aquí. **Y:** Y aquí puso un 1. **M:** Vale, ya lo entiendo. A ver, pasó el 2 para aquí y lo restó.
5	**Y:** Ah, vale, vale. Y entonces aquí, cuando es tres, lo pasó para aquí… Para resolverlo por la ecuación. Y halló los dos puntos. Pero espera, ¿por qué le dio eso 2 y esto 2 y te pone el 4?… Pero, ¿cómo llega llegó aquí? O sea, ¿para qué necesitaba lo anterior?
9	**Y:** Y luego lo que siempre hace de pasar el 4x para el otro lado, se le va, le queda esto y aquí le da dos puntos.
11	**Y:** Igualó la recta con la parábola, despejó la x y se quedó tan ancho, ¿no? Pero, ¿este punto y este punto están en la parábola? Eso es lo que no se sabe.

Dos de los episodios clasificados en la categoría de *representaciones* se refieren a la *representación verbal*, concretamente, a la ausencia de ella. En ambos, Yaiza (E12) comenta que la compañera evaluada debería haber explicado los pasos que realizaba y admite que esta ausencia de justificaciones le ha generado dudas (Tabla 5.3.1.8).

Tabla 5.3.1.8. Episodios donde una evaluadora del caso 7 se refiere a la *representación verbal*.

Nº de episodio	EPISODIO
7	**Y:** Pero no me explica cómo llegó a esta ecuación y a esta ecuación.
26	**Y:** La verdad que debería ir explicando los pasos que va haciendo. Porque hemos tenido que descifrar un poco por qué va haciendo ciertas cosas. Excepto esta parte que debe mejorar.

Solo en un episodio se alude a la *representación gráfica*. Aunque Sofía (E15), la estudiante evaluada, no presenta ninguna representación gráfica, Yaiza (E12) utiliza aspectos de la gráfica de la parábola (que ella sí realizó en su resolución) para interpretar la resolución de su compañera (Tabla 5.3.1.9).

Tabla 5.3.1.9. Episodio donde las evaluadoras del caso 7 se refieren a la *representación gráfica*.

Nº de episodio	EPISODIO
2	**Y:** Porque además la parábola en x no cortaba. En el y cortaba en 5. **M:** ¿En el y? **Y:** En el y cortaba en el 5, o sea, que no cortaba en el cero. Y la x no tenía nada.

Siguiendo con las categorías de análisis, en la transcripción de la discusión entre Maite (E10) y Yaiza (E12) se identificaron tres episodios en los que hacen referencia a las *soluciones*. En ellos, las evaluadoras coinciden en afirmar que las soluciones son correctas (Tabla 5.3.1.10).

Tabla 5.3.1.10. Episodios donde las evaluadoras del caso 7 se refieren a las *soluciones*.

Nº de episodio	EPISODIO
15	**Y:** Pero la solución está bien. **M:** Hecho está.
20	**Y:** y la solución también *[es correcta]*.
24	**Y:** Sí, está bien resuelto.

En este caso no se identificaron episodios referentes a la categoría *comprobación de soluciones* ni a la categoría *errores*, a pesar de que en la resolución a evaluar, y como consecuencia del heurístico utilizado en la misma (*ensayo y error*), Sofía (E15) presenta la comprobación de todas las rectas que estudia. Sin embargo, era de esperar que no se encontrara ninguno relacionado con los *errores* puesto que la evaluada no comete ninguno.

Por último, 7 episodios, al no poder clasificarse en ninguna de las categorías anteriores, se incluyeron en la categoría *otros*. Tres de ellos son referidos al proceso de evaluación, pues las evaluadoras expresan que no saben cómo deben evaluar, qué deben recoger o si deben otorgar una calificación (Tabla 5.3.1.11).

Tabla 5.3.1.11. Episodios de la categoría *otros*, relacionados con dudas sobre el proceso de evaluación.

Nº de episodio	EPISODIO
12	**Y:** Yo no sé cómo evaluar. No sé si poner está bien o está mal, o describir lo que la persona está haciendo. Pero es que a eso no le veo sentido, ¿no?
17	**M:** Es que dice evalúa **Y:** Ya y nosotras no estamos evaluando, estamos describiendo. No sé cómo evaluar.
22	**Y:** ¿Hay que poner nota? **M:** No sé. ¿Preguntamos? **Y:** No sé. No te va decir, porque quieren ver lo que nosotros entendemos por evaluar, a lo mejor, o algo así. No sé, no sé si hay que ponerle nota o no.

En otros tres episodios de esta categoría, las evaluadoras intentan ponerse de acuerdo para fijar la calificación que tendría la resolución de manera global (Tabla 5.3.1.12).

Tabla 5.3.1.12. Episodios de la categoría *otros*, relacionados con la calificación.

Nº de episodio	EPISODIO
21	Y: Y por tanto, ¿tiene un 10?
23	M: Bueno, pues que está aprobado.
27	Y: [...] está aprobado

Por último, hay un episodio en el que las evaluadoras hacen referencia al enunciado del problema, afirmando que la evaluadora ha cumplido con lo que se pedía (Tabla 5.3.1.13).

Tabla 5.3.1.13. Episodios de la categoría *otros*, relacionados con el enunciado del problema.

Nº de episodio	EPISODIO
25	**Y:** y es lo que se pedía.

Uso de la propia resolución en la evaluación de un par

Tras analizar en detalle el proceso de evaluación atendiendo a las categorías de análisis (*heurísticos*, *casos estudiados*, *representaciones*, *soluciones*, *comprobación de las soluciones* y *errores*), se presenta, a continuación, un estudio sobre las resoluciones a las que las evaluadoras hacen referencia en su discusión y de qué manera las usan, lo que nos informa sobre hasta qué punto tienen en cuenta sus propias resoluciones a la hora de evaluar la resolución de su compañera.

En la Tabla 5.3.1.3 se puede observar como Yaiza (E12) es la única de las evaluadoras que hace referencia a su propia resolución y lo hace una única vez. Todos los demás episodios (26) se refieren a la resolución a evaluar. Como se ha señalado anteriormente, las evaluadoras comienzan el proceso de evaluación con algunas dudas sobre los pasos realizados por su compañera, momento en el que Yaiza (E12) se apoya en su propia resolución. Ella utiliza características de la representación gráfica de la parábola que realizó en su resolución para interpretar la resolución que están evaluando, a pesar de que Sofía (E15), la alumna evaluada, no incorpora dicha gráfica (Tabla 5.3.1.9).

Por tanto, en este caso, las evaluadoras se han centrado en la resolución a evaluar sin apoyarse para su evaluación en lo que ellas mismas habían realizado.

Carácter de los episodios

Por último, se presenta el análisis del carácter de los episodios identificados en la transcripción, distinguiendo entre episodios *interpretativos, valorativos* y *expositivos*, atendiendo a las definiciones dadas para estas categorías en la metodología (sección 3.4.2). En la Tabla 5.3.1.14 se presenta un resumen del carácter de los episodios para cada una de las categorías empleadas en el análisis de los aspectos en los que las evaluadoras de este caso se fijan al evaluar que, como ya se indicó (Tabla 5.3.1.3), son: *heurísticos, casos estudiados, representaciones, soluciones y otros*. En esta tabla se separan los episodios entre aquellos tienen un carácter exclusivamente interpretativo, valorativo o expositivo, y los que poseen doble carácter. No se incluyen las categorías *comprobación de soluciones* ni *errores* pues, como ya se indicó anteriormente (Tabla 5.3.1.3), no se identificó en la discusión de este caso ningún episodio referente a ellas. Además, en la categoría *otros* encontramos episodios que no hacen referencia a la resolución que están evaluando (enunciado del problema, dudas sobre el proceso de evaluación) y que, por tanto, carecen de carácter. Sin embargo, existen otros en los que califican la resolución y que, por tanto, tendrán carácter valorativo.

Tabla 5.3.1.14. Clasificación de los episodios del caso 7 atendiendo al carácter.

	Interpretativo	**Valorativo**	**Expositivo**	**I / V**
Heurísticos	2	2	0	0
Casos estudiados	4	0	0	1
Representaciones	5	2	0	1
Soluciones	0	3	0	0
Otros	0	3	0	0
Total	**11**	**10**	**0**	**2**

Como puede observarse en la tabla, el proceso de evaluación seguido por esta pareja está equilibrado en cuanto al carácter de sus comentarios, con casi el mismo número de episodios interpretativos (11 episodios) y valorativos (10 episodios). No se encontraron episodios con carácter expositivo y se clasificaron dos episodios con doble carácter interpretativo y valorativo.

El carácter interpretativo se observa en episodios en los que las evaluadoras hacen referencia principalmente a los *casos estudiados* o las *representaciones*, y solo en dos episodios lo hacen en relación con los *heurísticos*. En estos dos, que son además los primeros episodios referidos a dicha categoría, las evaluadoras interpretan la resolución para aclarar sus dudas y en ellos se observa que no comprenden que Sofía (E15) está empleando *ensayo y error* (Tabla 5.3.1.4a-b). En los correspondientes a la categoría *casos estudiados* se identifican, por un lado, episodios en los que se analizan los casos que Sofía (E15) ha seleccionado para su estudio (Tabla 5.3.1.5a-b-e) y, por otro lado, un episodio en el que Yaiza (E12) expresa que no entiende los motivos que han llevado a la estudiante evaluada a seleccionar cada uno de los casos (Tabla 5.3.1.5c). Los restantes 6 episodios interpretativos están relacionados con las *representaciones*. Uno de ellos hace referencia a la *representación gráfica*, en el que Yaiza (E12), apoyándose en características de su propia representación de la parábola (pues la compañera evaluada no la incluye), intenta comprender la resolución de su compañera (Tabla 5.3.1.9). Los otros 5, están relacionados con la *representación simbólica* y, en ellos, las evaluadoras analizan los cálculos presentados en la resolución con el objetivo de entenderlos (Tabla 5.3.1.7).

En cuanto a los episodios con carácter valorativo, se han identificado 3 que hacen referencia a cada una de las categorías *soluciones* y *otros,* y dos episodios en relación a los *heurísticos* y a las *representaciones*. En los dos referentes a los *heurísticos,* valoran la estrategia seguida en la resolución como correcta (Tabla 5.3.1.4c-d) y, en los relativos a las *representaciones,* los dos están asociados a la *representación verbal,* en los que Yaiza (E12) echa en falta más explicaciones de los pasos realizados (Tabla 5.3.1.8). En los tres episodios valorativos que se refieren a las *soluciones*, las evaluadoras establecen que estas son correctas (Tabla 5.3.1.10). Por último, con carácter valorativo se encuentran tres episodios clasificados en la categoría *otros* en los que la pareja evaluadora califica la resolución y, por tanto, también la están valorando (Tabla 5.3.1.12).

Además, dos episodios se han clasificado con doble carácter interpretativo y valorativo, pues se tratan de episodios por girar en torno, uno de ellos, a la *representación simbólica* y, el otro, a los *casos estudiados.* En el primero de ellos, las evaluadoras, mientras intentan interpretar los cálculos realizados por Sofía (E15) y, al no comprenderlos completamente, valoran, inicialmente, como erróneos alguno de estos pasos (episodio nº1 de la Tabla 5.3.1.7). En el segundo, analizan algunos de los casos abordados en la resolución y concluyen que son correctos (Tabla 5.3.1.5d).

A modo de resumen, en este caso se han identificado 27 episodios en los que se hace referencia, principalmente, a las *representaciones*, principalmente a la *simbólica*, y a *otros* aspectos como el propio proceso de evaluación o la calificación. Durante la discusión mantenida por la pareja evaluadora, una de sus componentes tiene en cuenta su resolución en uno solo de los episodios, considerando su propia representación gráfica de la parábola para intentar entender la resolución analizada, a pesar de que la compañera evaluada no realiza ninguna representación gráfica. Por tanto, en este caso se puede afirmar que las evaluadoras se centran en la resolución a evaluar y no presentan apego a sus propias resoluciones a pesar de las diferencias con la resolución a analizar. Por último, se ha observado que el proceso de evaluación es interpretativo y valorativo casi en la misma medida. Las evaluadoras de este caso dedican prácticamente la mitad de los episodios a interpretar la resolución de su compañera ya que hay varios aspectos que al inicio del proceso no comprenden, como son la estrategia utilizada, los cálculos realizados o la elección de casos de estudio. Pero una vez han resuelto esas dudas iniciales, pasan a valorar mayoritariamente en la segunda mitad de su discusión.

5.4. Análisis de los casos del BLOQUE IV

En el cuarto bloque se recoge el último de los casos. El estudiante evaluado de este caso, apoyándose en el *heurístico descomponer el problema en partes,* divide la búsqueda de soluciones en tres grupos de rectas: rectas horizontales, rectas que pasan por el vértice de la parábola y rectas que pasan por dos puntos cualesquiera de la parábola (distintos del vértice).

5.4.1 Caso 8. Victoria, Yolanda y Manuel

En esta sección se presenta el caso formado por Victoria (E2) y Yolanda (E4), que evalúan la resolución de Manuel (E16). En primer lugar, se muestra una comparativa de las principales características, atendiendo a las categorías de análisis, de las resoluciones realizadas por estos tres estudiantes cuyo estudio se presentó en detalle en las secciones 4.1.2, 4.1.4 y 4.1.16.

Caso 8: Análisis conjunto de las tres resoluciones.

En la Tabla 5.4.1.1 se muestra un resumen de las características de las resoluciones del problema presentadas por cada uno de los tres participantes que conforman este caso, atendiendo a las categorías de análisis.

Tabla 5.4.1.1 Resumen de las resoluciones del caso 8.

	Evaluadora Victoria (E2)	**Evaluadora Yolanda (E4)**	**Evaluado Manuel (E16)**
Heurístico	1. Suponer el problema resuelto	1. Suponer el problema resuelto 2. Dibujar una figura	1. Descomponer el problema en partes
Casos estudiados	y=ax+b	y=mx+b y=k, con k>1	Rectas paralelas al eje OX Rectas que pasan por el vértice de la parábola Rectas que pasan por dos puntos cualesquiera de la parábola
Representaciones	Simbólica y verbal	Gráfica, simbólica y verbal	Simbólica y verbal
Soluciones	y=ax+b con $a^2 - 8a - 4 + 4b \neq 0$	y=k, con k>1	y=a, con a>1 y $a \in R^+$ Haz de rectas que pasan por (-2,1) excepto y=1 y x=-2
Comprobación de las soluciones	No	No	No
Errores	No descarta las soluciones que hacen el discriminante menor que cero y que, por tanto, no tienen puntos de intersección con la parábola.	Transcripción de la ecuación de la parábola	No

En este caso, las resoluciones de las dos evaluadoras tienen en común el uso del *heurístico suponer el problema resuelto.* Victoria (E2) es el único heurístico que utiliza, considerando la ecuación explícita de una recta e intentando buscar las condiciones que debe cumplir para satisfacer el enunciado (Figuras 4.1.6-4.1.10). Por el contrario, Yolanda (E4), quien lo utiliza de la misma manera (Figura 4.1.16), detiene este proceso cambiando al *heurístico dibujar una figura* para apoyarse en la representación gráfica de la parábola y continuar con la búsqueda de soluciones (Figura 4.1.17). Por su parte, el estudiante evaluado aborda el problema con un heurístico diferente, *descomponer el problema en partes,* dividiendo su resolución estudiando tres grupos diferentes de rectas: rectas horizontales (Figura 4.1.77-79), rectas que pasan por el vértice de la parábola (Figuras 4.1.80 y 4.1.81) y rectas que pasan por dos puntos cualesquiera de la parábola (distintos del vértice) (Figura 4.1.80). La Tabla 5.4.1.2 muestra un resumen de los heurísticos empleados por las tres personas que conforman este caso y el orden en que los emplearon.

Tabla 5.4.1.2. Heurísticos empleados por los estudiantes del caso 8

		HEURÍSTICOS	
Evaluadoras	Victoria (E2)	Suponer el problema resuelto	
	Yolanda (E4)	Suponer el problema resuelto	Dibujar una figura
Evaluado	Manuel (E16)	Descomponer el problema en partes	

En cuanto a los *casos estudiados*, como consecuencia del *heurístico, suponer el problema resuelto,* utilizado por las evaluadoras, ambas abordan la ecuación explícita de una recta, representada como y=ax+b por Victoria (E2) (Figura 4.1.6) y como y=mx+b por Yolanda (E4) (Figura 4.1.16). Yolanda (E4), además, al continuar con otro *heurístico,* estudia también las rectas horizontales de la forma y=k, con k>1 (Figura 4.1.18). El alumno evaluado, Manuel (E16), coincide con Yolanda (E4) al considerar rectas horizontales (Figuras 4.1.78 y 4.1.79) y se plantea, además, rectas que pasan por el vértice de la parábola (Figuras 4.1.80 y 4.1.81) y rectas que pasan por dos puntos cualesquiera de la parábola (distintos del vértice) (Figura 4.1.80).

En relación a las representaciones utilizadas, Yolanda (E4) es la única evaluadora de la pareja que realiza la *representación gráfica* de la parábola (Figura 4.1.17). En cambio ambas evaluadoras coinciden en la utilización tanto de la *representación simbólica* como de la *verbal.* La *simbólica* la usan para realizar cálculos y presentar ecuaciones (Figuras 4.1.6-4.1.10 y 4.1.16 y 4.1.18) y la *verbal* para presentar las soluciones (Figuras 4.1.10 y 4.1.18), aunque también es utilizada por Victoria (E2) para indicar los pasos seguidos (Figuras 4.1.8 y 4.1.9). El estudiante evaluado, Manuel (E16) no *representa gráficamente* la parábola y coincide con las evaluadoras en utilizar la *representación simbólica* para recoger cálculos y presentar las ecuaciones (Figuras 4.1.78 y 4.1.79). La *representación verbal* es la predominante en esta resolución y la usa para explicar con antelación los casos que va a abordar y para indicar los cálculos que va a realizar (Figura 4.1.77 y 4.1.78 y 4.1.80), además de para presentar y justificar las soluciones (Figuras 4.1.79 y 4.1.81).

A pesar de que las dos evaluadoras comienzan buscando condiciones para los coeficientes de la ecuación explícita de una recta, Victoria (E2) es la única que llega a una conclusión, indicando como *soluciones* las rectas y=ax+b, con $a^2 - 8a - 4 + 4b \neq 0$ (Figura 4.1.10), aunque no son correctas. Yolanda (E4) termina presentado como *soluciones* las rectas paralelas al eje OX, y=k, con k>1 (Figura 4.1.18) después de haber representado gráficamente la parábola. Manuel (E16), el estudiante evaluado, también da como soluciones las rectas horizontales de la forma y=a, con a>1 y $a \in R^+$(Figura 4.1.79) y, además, el haz de rectas que pasan por (-2,1) excepto y=1 y x=-2 (figura 4.1.81), del que no escribe ninguna expresión.

En este caso, ni las dos evaluadoras ni el evaluado realizan la *comprobación de las soluciones*.

Por último, en las dos resoluciones de la pareja evaluadora se han detectado *errores.* Victoria (E2) se equivoca al afirmar que para que la parábola y la recta tengan dos puntos de intersección el discriminante que ha obtenido en su resolución algebraica debe ser distinto de cero, incluyendo en sus soluciones rectas que no cortan a la parábola en ningún punto, resultantes del discriminante menor estricto que cero (Figura 4.1.9). Yolanda (E4) comete un *error* al transcribir la ecuación de la parábola, intercambiando el término independiente por una *b* (Figura 4.1.16). Por el contrario, en la resolución del alumno evaluado, Manuel (E16), no se ha detectado ningún *error*.

Caso 8: Análisis del proceso de evaluación.

La pareja evaluadora de este caso comienza su proceso de análisis interpretando la resolución de su compañero y destaca que, durante la mayor parte de su discusión, se centra en intentar encontrar expresiones algebraicas de dos tipos de rectas, las rectas que pasan por el vértice de la parábola y las rectas que pasan por dos puntos cualesquiera de la parábola, que Manuel (E16) aborda en su resolución pero que solo expresa con palabras. A continuación, se presenta un análisis detallado de la transcripción de la discusión mantenida por dicha pareja, teniendo en cuenta las variables de análisis indicadas en la metodología (sección 3.4.2). Posteriormente, se mostrará un análisis de la utilización que hacen las evaluadoras de sus propias resoluciones para evaluar la de su compañero. Finalmente, se presentará un estudio sobre el carácter de las observaciones que realizan las evaluadoras, distinguiendo entre episodios *interpretativos, valorativos* y *expositivos*.

Aspectos de la resolución del problema en que se centra la evaluación

En la transcripción de la discusión mantenida entre Victoria (E2) y Yolanda (E4) (Anexo A.1.8) se identificaron un total de 21 episodios (Tabla 5.4.1.3). Las categorías a las que hacen referencia en un mayor número de episodios son *casos estudiados* y *soluciones*, en 6 episodios cada una. A las *representaciones* se refieren en un total de 4 episodios, mientras que a los *heurísticos* y a *otros* aspectos de la actividad lo hacen en menor medida, en 3 y 2 episodios, respectivamente. En este caso, no se identificaron episodios relacionados ni con la *comprobación de soluciones* ni con los *errores*. Estos últimos resultados no son de extrañar puesto que en la resolución a evaluar no se incluye ninguna comprobación ni se ha detectado ningún error.

En la Tabla 5.4.1.3 se muestra, además del número de episodios clasificados en cada una de las categorías de análisis, el número de episodios en los que hacen referencia a cada una de las resoluciones implicadas en el caso (evaluadoras o evaluado). En este último aspecto, pueden existir episodios en los que hagan referencia a más de una resolución, de ahí que se puedan encontrar disparidades con el número de episodios totales.

Tabla 5.4.1.3. Clasificación de los episodios del caso 8.

CATEGORÍA	**Número de episodios**	**Resolución a la que se refieren**		
		Evaluadora (Victoria - E2)	**Evaluadora (Yolanda - E4)**	**Evaluado (Manuel - E16)**
Heurísticos	3	0	1	2
Casos estudiados	6	0	1	5
Representaciones	4	0	1	3
Soluciones	6	0	0	6
Comprobación de soluciones	0	0	0	0
Errores	0	0	0	0
Otros	2	0	0	1
Total	**21**	**0**	**3**	**17**

En relación a la categoría *heurísticos* se identificaron tres episodios. En dos de ellos, las evaluadoras establecen que el procedimiento llevado a cabo en la resolución (*descomponer el problema en partes*) es correcto (Tabla 5.4.1.4a) y en el otro, Yolanda (E4), una de las evaluadoras, explica que comenzó su resolución representando gráficamente la parábola, es decir, utilizando el *heurístico dibujar una figura* (Tabla 5.4.1.4b)

Tabla 5.4.1.4. Episodios en los que las evaluadoras del caso 8 se refieren a los *heurísticos*.

Nº de episodio	**EPISODIO**	
10	**Y:** Vale, entonces tendríamos que ver… Evalúa la resolución del problema. A ver, yo creo que está bien planteado y es una forma buena de verlo. **V:** Sí, porque es eso, el final lo generalizas de esta manera.	a
16	**V:** El razonamiento es adecuado y lo ejecuta… **Y:** Más que lo ejecuta yo diría que está bien planteado.	
19	**Y:** Porque yo creo que fue igual que el mío, que lo que me planteé fue, vale, voy a dibujar la parábola	b

En cuanto a los *casos estudiados,* se encontraron seis episodios referidos a estos. En los tres primeros, las evaluadoras identifican algunos de los casos estudiados por Manuel (E16): rectas paralelas al eje OX y rectas que pasan por el vértice de la parábola (Tabla 5.4.1.5).

Tabla 5.4.1.5. Episodios en los que las evaluadoras del caso 8 se refieren a los *casos estudiados* - 1

Nº de episodio	**EPISODIO**	
1	Y: En primer lugar hace lo de las rectas paralelas al eje x.	a
5	V: Pero claro, luego hay que ver las que son oblicuas. Y para eso lo que hizo…	b
7	V: Primero estudia las rectas que pasan por el vértice y luego… Y: Me perdí…	c

En los dos siguientes episodios referentes a los *casos estudiados*, las evaluadas se centran en intentar determinar una expresión algebraica de las rectas que pasan por dos puntos cualesquiera de la parábola, caso que Manuel (E16) expone que se plantearía abordar en último lugar pero que no llega analizar (Tabla 5.4.1.6).

Tabla 5.4.1.6. Episodios en los que las evaluadoras del caso 8 se refieren a los *casos estudiados* - 2

Nº de episodio	**EPISODIO**
9	**V:** Pero luego si lo generalizas a todos los puntos de la parábola, por ejemplo, este. **Y:** ¿Como que si lo…? **V:** Porque esto es solamente el haz de rectas que pasa por el vértice. **Y:** Pero ya sabemos que van a tocar con la parábola. Ah tú dice encontrar otra… **V:** En plan, con los demás puntos, encontrar una manera genérica de ponerlo. **Y:** Pero si encontramos esta relación y la sustituimos en la… ¿no? **V:** Yo digo hacer el mismo razonamiento pero para otro punto genérico de la parábola. Entonces, si cogemos este punto hacia la izquierda del vértice. En este caso, la recta perpendicular que pasa por el punto, sí tocaría, entonces la única que no toca en la tangente. Entonces, el razonamiento sería exactamente igual a este haz de rectas, pero en lugar de quitar dos rectas… **Y:** Pero la tangente sería esta, pero hay otra recta que no toca, una que vaya así. **V:** Ah sí, para arriba. En plan, perpendicular al eje X y que pase por el punto. Claro, todas las rectas perpendiculares al eje X que pasen por el punto elegido… **Y:** No van a tocar… **V:** Y, además, las tangentes. Vale, vale, sí es el mismo razonamiento. Entonces sí se puede generalizar ese razonamiento para cualquier punto de la parábola. Intenta ver… -2a+b **Y:** b=1+2a **V:** Vale. Entonces todas las rectas que tengan que la segunda parte… **Y:** O sea, que las rectas serían de la forma realmente… **V:** y=ax+1+2a y esto lo puedes poner… **Y:** Esto es lo mismo que y=... No, no, es mejor así **V:** Claro, porque así tienes la parte que depende de x y la que no depende de x. Entonces, por ejemplo, si cogemos la recta y=2x, entonces la segunda parte sería +2 por 2 4 más 5. Y esta recta, la parábola era, tenías esto, el mínimo era aquí en el (-2,1). Y esto iba así. Y entonces tú tienes la recta cuando x vale o, la y vale 5. **Y:** Pero eso solo daría una. Ah es un ejemplo, vale. **V:** Este punto, en la parábola, ¿dónde está la parábola? Cuando la x vale cero, la y vle 5, justo es el mismo punto. Y pasa por el… No **Y:** Sí, porque esta relación de esto, entonces tiene que pasar por el… **V:** Ah vale. Entonces sería algo así y, efectivamente, pasa por el (0,5) y el vértice.
12	**V:** Pero claro esto es para cada punto. Sabiendo que la recta es y=ax+b y quieres que pase… **Y:** Claro es que hay más rectas. Es lo que dices tú, que si lo haces en cualquier otro punto, también pasaría esto con el haz de rectas. **V:** Pero claro, si simplemente, al punto lo llamamos. Tú tienes la recta y=ax+b y llamamos un punto P=(x0,y0) y queremos el haz de rectas que pasen por aquí. Entonces, simplemente, sustituimos. Entonces te queda x0a + b = y0. Entonces esto lo puedes hacer para cualquier punto. Y entonces esto lo sustituyes por el punto que tú quieras. Pero luego… Es que estoy pensando si habría algún caso distinto de este. **Y:** Sí, tú quieres decir que aquí, estas todas lo cumplirían. Pero… **V:** Efectivamente. Sabemos que si cogemos cualquier punto de la parábola, tenemos el haz de rectas menos la recta… **Y:** No, no hay más, porque estos van a crear todas las rectas posibles así y en todos los puntos de la parábola, es decir, no puede haber otro punto que no pase por uno de ellos. **V:** Claro, porque tú haces esta recta y luego este punto va a generar la misma recta que este. **Y:** Exacto, siempre va a haber una que lo toque, porque si se intersecta tiene que tocar un punto y ese punto va a generar todas las rectas posibles.

El último episodio relacionado con los *casos estudiados* ocurre casi al final de la discusión y en él Yolanda (E4) explica que las rectas horizontales también fue uno de los casos que ella estudió en su propia resolución (Tabla 5.4.1.7).

Tabla 5.4.1.7. Episodio en el que una de las evaluadoras del caso 8 se refiere a los *casos estudiados* - 3

Nº de episodio	EPISODIO
20	**Y:** y luego, a ver,¿qué es lo más fácil? Pues todas las rectas que son paralelas al eje. Primero pensé eso y luego dije, vale, entonces ¿cómo lo tengo que hacer?

Continuando el análisis, en relación a la tercera categoría, las evaluadoras hacen alusión a las *representaciones* en cuatro episodios, en los que se refieren a tres de los cuatro tipos de representaciones consideradas (Tabla 5.4.1.8).

Tabla 5.4.1.8. Clasificación de los episodios de la categoría *representaciones* del caso 8.

REPRESENTACIÓN	**Gráfica**	**Tabular**	**Simbólica**	**Verbal**
Nº DE EPISODIOS	1	0	2	1

Uno de estos episodios está referido a la *representación gráfica*. A pesar de que Manuel (E16) no realiza ninguna, Yolanda (E4) nombra explícitamente la representación gráfica, que ella sí realizó en su resolución, para ratificar las coordenadas del vértice de la parábola que obtiene el evaluado de manera analítica (Tabla 5.4.1.9b). Los dos episodios referentes a la *representación simbólica* son frases incompletas donde empiezan a interpretar los cálculos, pero cambian rápidamente el foco de atención (Tabla 5.4.1.9a-d). Por último, en el único episodio que se alude a la *representación verbal*, Yolanda (E4) intenta leer lo que su compañero ha escrito e indica que no lo entiende (Tabla 5.4.1.9c).

Tabla 5.4.1.9. Episodios en los que las evaluadoras del caso 8 se refieren a las *representaciones.*

Nº de episodio	EPISODIO	
2	**V:** Sí. Hizo la derivada para calcular…	a
3	**Y:** Sí, si hacemos la gráfica de la parábola, se calcula el vértice que sería el (-2,1) y [...]	b
6	**Y:** Analizando dos puntos cualquiera. Yo no sé lo que pone ahí.	c
18	**Y:** O sea, realmente calcula el vértice. **V:** Sí, pero ¿para qué? Para poder calcular…	d

Siguiendo con las categorías de análisis, en la transcripción de la discusión entre Victoria (E2) y Yolanda (E4) se identificaron 6 episodios en los que se hace referencia a las *soluciones*. En dos de estos episodios, analizan las rectas horizontales dadas como solución (Tabla 5.4.1.10a) y, en otros dos, las evaluadoras indican que en las soluciones dadas en la resolución les faltaría incluir la expresión algebraica del haz de rectas (Tabla 5.4.1.10b).

Tabla 5.4.1.10. Episodios en los que las evaluadoras del caso 8 se refieren a las *soluciones* -1

Nº de episodio	EPISODIO	
4	**Y:** [...] se puede ver que todas las rectas **V:** Con a mayor que 1 tendrían dos puntos de corte.	a
17	**V:** Calcula el caso más sencillo. **Y:** No, calcula realmente el caso que solo tiene un punto…	
11	**V:** Yo creo que, simplemente, le faltaría poner… **Y:** Calcular el haz de rectas o… **V:** Sí, o la relación esta que hemos llegado…	b
15	**V:** salvo la última parte que podríamos añadirle esto, lo de calcular el haz de rectas **Y:** Sí.	

En otro de los episodios relacionados con las *soluciones,* Victoria (E2) y Yolanda (E4) se centran en entender el haz de rectas que pasan por el vértice de la parábola indicado en la resolución a evaluar y en analizar las rectas que forman dicho haz (Tabla 5.4.1.11).

Tabla 5.4.1.11. Episodios en los que las evaluadoras del caso 8 se refieren a la *soluciones* - 2

Nº de episodio	EPISODIO
8	**V:** Todas las rectas así, todo el haz de rectas que pasan por este punto… **Y:** ¿Cortarían en dos? **V:** Cortarían en dos, salvo la y=1 que es totalmente… **Y:** Que cortaría en un punto. **V:** Claro, que solo corta en el vértice. Vale, y obviamente la x=2 porque también, porque justo es la tangente. **Y:** Sí, habría dos rectas que cortan en un punto que serían la del eje X y la del eje Y. **V:** Exacto, y luego todas las demás… **Y:** Y ya está, no puso la en general. La primera parte está bien razonada. Pero claro, por ejemplo, aquí puso lo del haz de rectas y no dijo, por ejemplo, ¿se puede calcular el haz de rectas? **V:** Pero yo no termino de entender lo del haz de rectas. Porque tú tienes la parábola así… **Y:** El haz de rectas serían todas las que pasan por el punto ese. **V:** Sí, con cualquier pendiente. Pero es que, la parábola no tiende a un círculo. **Y:** ¿Y qué? **V:** Una recta que esté muy muy pegada a x=-2. Que sea prácticamente recta, pero no recta del todo. Y: Sí, pero es que desde que cambie un poco, así por ejemplo y pase por aquí, vamos a hacerla superpequeñita, esta recta va a seguir y va seguir y va a tocarla. **V:** Vale, sí, y en algún punto superarriba la va a tocar. **Y:** Pero va a tocarla. El único que sabes que, como tú dices, que como no tiene una forma como una circunferencia, justo la que va vertical no va a tocarla. Pero la otra siempre se va *cambar* y se va seguir *cambando* y en algún momento va a llegar. Supongo. **V:** Sí, claro. Con una mínima inclinación, porque esto sigue y sigue y sigue… **Y:** Sí pero también se va alejando, ¿sabes? **V:** No, pero yo creo que sí. Esto va teniendo así y esto así. **Y:** Sí la otra va a llegar a ser constante, bueno constante no, sino que va a tener menos inclinación, es decir, se va a acercar. **V:** Exacto. **Y:** Lo único que… Sí, lo del haz tiene sentido, pero esta persona… **V:** Sí, a ver, el haz de rectas no está calculado. **Y:** Sí, claro. Y lo que no entiendo es lo último. A ver, el argumento sí ayuda. Pero yo creo que tiene una fórmula el haz de rectas, a mí me suena, y con esa fórmula realmente sí tendría todas las rectas. **V:** Pero, claro, todas las rectas que pasan por este punto. **Y:** Y de todas formas, podemos hacer todas las rectas que pasan por este punto. Tú tienes la fórmula y pasa por aquí. **V:** y=ax+b y quieres que pase por el punto (-2,1). Entonces, esto quieres que sea igual a 1. **Y:** O sea, tendríamos una relación entre las variables. **V:** Sí, puede que sí.

En el último de los episodios de la categoría *soluciones,* que es el último identificado en su discusión, las evaluadoras afirman que las rectas horizontales estudiadas podrían haberse obviado al estar incluidas como solución en el último caso planteado, es decir, en el haz de rectas que pasan por dos puntos cualquiera de la parábola (Tabla 5.4.1.12). Aunque Manuel (E16) no llega a analizar esta solución sino que señala que intentaría obtener esta generalización, las evaluadoras se enfocaron en intentar obtener una expresión algebraica que las defina (Tabla 5.4.1.6).

Tabla 5.4.1.12. Episodio donde las evaluadoras del caso 8 se refieren a la *soluciones* - 3

Nº de episodio	EPISODIO
21	**Y:** Espérate, espérate, vale. Entonces calculó el caso más sencillo y sería cuando las rectas son paralelas al eje X. **Y:** Aunque realmente este caso se puede ver también con el haz. **V:** Sí, claro, lo que como este es el más sencillo lo puedes ver así. Sí, porque desde que cojas este punto… **Y:** Sí, pero este punto es todos. **V:** Sí, pero por ejemplo, esta recta que es una de las paralelas. **Y:** Sí, pero me refiero, que realmente lo podría haber hecho directamente con el haz. **V:** Sí, porque está incluido. Es directamente hacer el haz, porque con el haz vas a incluirlas.

Como ya se mencionó, en este caso no se identificaron episodios relacionados con la *comprobación de soluciones* ni con los *errores*.

Por último, dos episodios, al no referirse a ninguna de las categorías anteriores, se incluyeron en la categoría *otros.* En uno de ellos muestran dudas acerca de cómo deben evaluar (Tabla 5.4.1.13a) y, en el otro, realizan una valoración general de la resolución que están evaluando (Tabla 5.4.1.13b).

Tabla 5.4.1.13. Episodios del caso 8 de la categoría *otros*.

Nº de episodio	EPISODIO	
13	**Y:** Bueno, ¿tú escribes? No entiendo qué hay que escribir. **V:** Supongo que es decir si está bien hecha o está mal hecha. Si está completa…	a
14	**V:** Yo creo que está completo **V:** y que está bien razonado	b

Uso de la propia resolución en la evaluación de un par

Tras analizar en detalle el proceso de evaluación atendiendo a las categorías de análisis (*heurísticos*, *casos estudiados*, *representaciones*, *soluciones*, *comprobación de las soluciones* y *errores*), se presenta, a continuación, un estudio sobre las resoluciones a las que las evaluadoras hacen referencia en su discusión y de qué manera las usan, lo que nos informa sobre hasta qué punto tienen en cuenta sus propias resoluciones a la hora de evaluar la resolución de su compañero.

En la Tabla 5.4.1.3 se puede observar como, mientras que Victoria (E2) no se refiere a su resolución en ningún episodio, Yolanda (E4) hace referencia a su propia resolución en tres ocasiones. En la primera nombra explícitamente la representación gráfica de la parábola, pese a que Manuel (E16) no la incluye y que ella sí realiza, y lo hace para confirmar las coordenadas del vértice de la parábola (Tabla 5.4.1.9b). En los otros dos episodios la evaluadora expone cómo abordó ella su resolución: en uno, que comenzó utilizando el *heurístico dibujar una figura*, representando gráficamente la parábola (Tabla 5.4.1.4b) y, en el otro, que también seleccionó las rectas horizontales como caso de estudio (Tabla 5.4.1.7).

Carácter de los episodios

Por último, se presenta el análisis del carácter de los episodios identificados en la transcripción, distinguiendo entre episodios *interpretativos, valorativos* y *expositivos*, atendiendo a las definiciones dadas para estas categorías en la metodología (sección 3.4.2). En la Tabla 5.4.1.14 se presenta un resumen del carácter de los episodios de este caso para cada una de las categorías identificadas en el análisis de los aspectos en los que las evaluadoras se fijan al evaluar que, como ya se indicó (Tabla 5.4.1.3), son: *heurísticos, casos estudiados, representaciones, soluciones* y *otros*. No se incluyen las categorías *comprobación de soluciones* ni *errores* pues, como ya se indicó anteriormente (Tabla 5.4.1.3), no se identificó en la discusión de este caso ningún episodio referente a ellas. Además, en la categoría *otros* encontramos un episodio que no hace referencia a la resolución que están evaluando (dudas sobre el proceso de evaluación) y que, por tanto, carece de carácter. Sin embargo, existe otro en el que evalúan globalmente la resolución y que, por tanto, tendrá carácter valorativo.

Tabla 5.4.1.14. Clasificación de los episodios del caso 8 atendiendo al carácter.

	Interpretativo	**Valorativo**	**Expositivo**
Heurísticos	0	2	1
Casos estudiados	4	0	2
Representaciones	3	0	1
Soluciones	4	2	0
Otros	0	1	0
Total	**11**	**5**	**4**

Como puede observarse en la tabla, en el proceso de evaluación seguido por esta pareja, predominan los episodios con carácter interpretativo (11 episodios) siendo de este tipo la mitad de los episodios identificados. Por otra parte, la cuarta parte de los episodios (5 episodios) tienen un carácter valorativo y, en contraposición con otros casos analizados, se han identificado 4 episodios de tipo expositivo.

El mayor número de episodios se encuentra en aquellos con carácter interpretativo, donde las evaluadoras hacen referencia a los *casos estudiados*, las *representaciones* o las *soluciones*. En relación con los *casos estudiados* se encuentran, por un lado, episodios en los que las evaluadoras identifican los distintos tipos de rectas abordados por Manuel (E16) (Tabla 5.4.1.5) y, por otro lado, en los que se centran en buscar la expresión algebraica de las rectas que pasan por dos puntos cualesquiera de la parábola (Tabla 5.4.1.6). En los episodios interpretativos relacionados con las *representaciones*, se han identificado dos episodios referentes a la *representación simbólica* en los que comentan algunos cálculos recogidos en la resolución a evaluar (Tabla 5.4.1.9a-d) y un episodio referido a la *representación verbal* en el que Yolanda (E4) expresa que no entiende lo que su compañero ha escrito (Tabla 5.4.1.9c). Los episodios restantes de carácter interpretativo están relacionados con las *soluciones*. En dos de ellos, identifican las soluciones de las rectas horizontales (Tabla 5.4.1.10a), en otro intentan entender cómo serían las rectas del haz que pasa por el vértice de la parábola (Tabla

5.4.1.11) y, en el último, concluyen que el caso de rectas horizontales estaría incluído en el caso más general planteado por el evaluado (Tabla 5.4.1.12).

En cuanto al carácter valorativo, se ha identificado en episodios referidos a *heurísticos*, las *soluciones* y a *otros* aspectos del proceso evaluativo. Los relacionados con los *heurísticos* son dos episodios en los que las evaluadoras establecen que el planteamiento (*descomponer el problema en partes*) es correcto (Tabla 5.4.1.4a). En los dos episodios valorativos que hacen alusión a las *soluciones,* las evaluadoras consideran que faltaría incluir la expresión algebraica del haz de rectas indicado en la resolución evaluada (Tabla 5.4.1.10b). Por último, uno de los episodios incluídos en la categoría *otros*, tiene también un carácter valorativo puesto que hacen una valoración general de la resolución indicando que está completa y razonada (Tabla 5.4.1.13b).

En este caso se han identificado cuatro episodios de carácter expositivo. En tres de ellos, Yolanda (E4), una de las evaluadoras de la pareja, explica diferentes aspectos de su propia resolución: uno de los *heurísticos* con los que abordó el problema, *dibujar una figura* (Tabla 5.4.1.4b), la representación gráfica realizada (Tabla 5.4.9b) y el caso que estudió, las rectas horizontales (Tabla 5.4.1.7). En el cuarto episodio expositivo, es también la evaluadora Yolanda (E4) quien expone literalmente el primer caso que estudia el evaluado, las rectas paralelas (Tabla 5.4.1.5a).

A modo de resumen, en este caso se han podido distinguir 21 episodios en los que se hace referencia, principalmente, a las *soluciones* y los *casos estudiados*. Durante el proceso de evaluación, una de las evaluadoras explica varios aspectos de su propia resolución y la tiene en cuenta para confirmar el cálculo del vértice realizado por el estudiante evaluado. Por último, se observa que las evaluadoras de este caso siguen un proceso de carácter más interpretativo. Como se ha mostrado a lo largo del análisis, uno de los aspectos que caracteriza el proceso de evaluación de esta pareja es que, por un momento, dejan a un lado la evaluación de la resolución para intentar encontrar la expresión algebraica de las rectas que Manuel (E16) deja expresadas con palabras.

5.5. Resultados globales del análisis de los procesos de evaluación

En esta sección se presenta una síntesis de los resultados obtenidos en el estudio del proceso de evaluación seguido por cada una de las parejas evaluadoras atendiendo a los tres aspectos de análisis: categorías a las que hacen referencia, uso de la propia resolución y carácter de las intervenciones.

Aspectos de la resolución del problema en que se centra la evaluación

La Tabla 5.5.1 recoge el número de episodios identificados en cada uno de los casos atendiendo a las categorías de análisis (*heurísticos, casos estudiados, representaciones, soluciones, comprobación de soluciones* y *errores*), e incluyendo la categoría *otros* donde se incorporar aquellos episodios que no pudieron clasificarse en ninguna de las categorías anteriores.

Tabla 5.5.1. Clasificación de los episodios por categorías de todos los casos.

Categorías a las que se hace referencia	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8	TOTAL
Heurísticos	8	9	0	4	6	3	4	3	**37**
Casos estudiados	2	2	0	1	0	2	5	6	**18**
Representaciones	11	13	1	10	6	10	8	4	**63**
Soluciones	4	6	4	7	11	6	3	6	**47**
Comprobación de soluciones	0	1	1	6	0	1	0	0	**9**
Errores	2	0	0	0	0	0	0	0	**2**
Otros	8	3	4	8	11	6	7	2	**49**
TOTAL	**35**	**34**	**10**	**36**	**34**	**28**	**27**	**21**	**–**

En las transcripciones de las discusiones mantenidas por las ocho parejas se han encontrado una media de 28 episodios, destacando el Caso 3 con únicamente 10 episodios. En términos globales, se observa un mayor número de episodios referidos a la categoría de *representaciones,* teniendo también un alto número los relacionados con la categoría *otros*, que será comentada a continuación, y con las *soluciones*. De hecho, en cinco de los ocho casos (Casos 1, 2, 4, 6 y 7) la mayoría de los episodios se dan en la categoría *representaciones*, mientras que en los tres casos restantes (Casos 3, 5 y 8) aparecen en la categoría *soluciones*. Sin embargo, en aquellos casos con predominio de episodios en la categoría *soluciones*, salvo el Caso 3, se observa que, en general, están más centrados en el procedimiento (*heurísticos, casos estudiados* y *representaciones*) que en los resultados obtenidos.

Salvo en el Caso 3, en todos los casos se han identificado episodios referentes a los *heurísticos.* Los comentarios clasificados en esta categoría están relacionados con intervenciones en las que identifican las estrategia utilizadas por los compañeros a los que están evaluando (e.g. Tablas 5.1.1.4b, 5.1.2.4a, 5.1.2.4b) e intervenciones en las que valoran si dichas estrategias son correctas (e.g. Tabla 5.1.1.5) o adecuadas para resolver el problema (e.g. Tabla 5.1.2.5c).

La categoría *casos estudiados* es una de las que menos hacen referencia en la mayoría de los casos. En los episodios relacionados con ella, los evaluadores simplemente señalan o describen los casos seleccionados para el estudio (e.g. Tablas 5.3.1.5a-b-d-e, 5.4.1.5); analizan, sin fijarse en la resolución, si los dos casos abordados cumplen la condición del enunciado del problema (e.g. Tabla 5.1.1.7); o señalan otro tipo de rectas que faltan en la resolución evaluada (e.g. Tabla 5.2.3.5). Llama la atención en esta categoría el Caso 8, pues las evaluadoras se centran en determinar la expresión algebraica de las rectas que el compañero evaluado plantea con palabras (Tabla 5.4.1.6).

Una de las categorías con mayor número de episodios en la mayor parte de los casos es *representaciones*, incluyendo la *representación gráfica*, la *representación tabular*, la *representación simbólica* y la *representación verbal*. Para distinguir los episodios de la categoría *representación gráfica* de aquellos de la categoría *heurísticos* relacionados con el *heurístico dibujar una figura*, se incluyeron en la primera únicamente aquellas intervenciones en las que se hablaba de características concretas de la representación (e.g. Tablas 5.1.1.11a, 5.2.1.9) o en aquellos donde la valoran (e.g. Tablas 5.1.1.11b, 5.2.3.7c). Destaca el Caso 7, en el que un episodio está clasificado en esta categoría a pesar de que la resolución evaluada no la recoge, mostrando cómo la evaluadora se apoya en su propia resolución (Tabla 5.3.1.9). Los episodios referidos a la *representación tabular* los encontramos en los dos casos cuyas estudiantes evaluadas hicieron uso de ella (Casos 4 y 7) y en ellos las evaluadoras señalan cómo se ha construido (Tabla 5.2.3.9) y valoran su utilidad (Tabla 5.2.1.10). En la *representación simbólica* encontramos episodios donde interpretan y comprueban los cálculos realizados (e.g. Tabla 5.1.3.5), sobresaliendo aquellos en los que se dejan ver las dificultades de los evaluadores de varios casos para entender y seguir los pasos dados por sus compañeros en sus resoluciones (e.g. Tablas 5.1.1.9, 5.1.2.9, 5.3.1.7, 5.2.2.6). Por último, la mayoría de los episodios relacionados con la *representación verbal* hacen referencia a la falta de explicaciones y justificaciones con palabras percibidas por las parejas evaluadoras (e.g. Tablas 5.2.1.8, 5.2.3.8d-e, 5.3.1.8).

En la categoría *soluciones* se incluyen episodios donde identifican las soluciones presentadas por los compañeros evaluados (Tablas 5.1.3.6a-c-d, 5.2.3.10a-b-f) y en los que valoran si son correctas o no (e.g. Tablas 5.1.1.12, 5.1.3.6b, 5.2.1.11).

En cuanto a los episodios de la categoría *comprobación de soluciones*, encontramos episodios en los que las identifican y las valoran (e.g Tablas 5.1.3.7, 5.2.3.11) y episodios en los que señalan que no existen comprobaciones en las resoluciones evaluadas (e.g. Tablas 5.1.2.14, 5.2.1.12)

Destaca la categoría *errores* pues, a pesar de que en el análisis de las resoluciones que estaban siendo evaluadas en los cuatro primeros casos se detectaron errores, únicamente en el Caso 1 se identificaron episodios en los que los evaluadores hacían referencia a ellos (Tabla 5.1.1.13). Además, se encontró que no solo no advertían estos errores durante el proceso de evaluación sino que, en algunos casos los evaluadores atribuían fallos no cometidos, tanto en los casos en los que las resoluciones evaluadas contenían errores como en los que no (e.g. Tablas 5.1.1.9, 5.1.2.9, 5.3.1.7).

Aunque la mayoría de los episodios se identificaron en relación con alguna de las categorías de análisis, (*heurísticos, casos estudiados, representaciones, soluciones, comprobación de las soluciones y errores*), aparecieron algunos que no se pudieron clasificar en ninguna de ellas y que se englobaron en *otros*. Estos comentarios, giraban en torno a ciertos aspectos, unos referentes a la resolución evaluada como otorgar una calificación (e.g. Tablas 5.3.1.12, 5.1.1.15), evaluar de manera global (e.g. Tablas 5.1.3.8, 5.2.1.15) o la limpieza en la presentación (Tabla 5.2.3.14) y otros relacionados con el enunciado del problema (e.g. Tablas 5.1.1.14, 5.2.1.13, 5.2.2.12), dudas sobre el propio proceso de evaluación (e.g. Tablas 5.1.2.15, 5.1.3.9, 5.2.2.14) o el tiempo disponible para resolver (e.g. Tablas 5.1.1.16, 5.2.1.14). En cuanto al enunciado del problema, excepto en el Caso 8, en todos los casos se hace referencia a este con comentarios en los que la mayoría de los estudiantes muestra dudas acerca del número apropiado de rectas que se debían obtener para que la resolución fuese correcta (e.g. Tablas 5.1.2.15c, 5.2.2.12). Otro de los interrogantes que surgieron en cinco de los ocho casos estaba asociado con el propio proceso de evaluación. Las parejas evaluadoras manifiestan no saber cómo deben proceder o si deben otorgar una calificación (e.g. Tablas 5.1.2.15, 5.1.3.9, 5.2.2.14). En este sentido, en tres de los casos (Casos 1, 5 y 7) los estudiantes evaluadores proponen una calificación numérica y en otros dos (Casos 3 y 4) expresan una valoración global de la resolución. Un aspecto distinto que mencionan los evaluadores en dos de los casos (Casos 1 y 4) durante el proceso de evaluación es el tiempo del que dispusieron para resolver el problema, considerándolo insuficiente y habiendo, por tanto, podido afectar a la resolución evaluada y a la suya propia (e.g. Tablas 5.1.1.16, 5.2.1.14).

Uso de la propia resolución en la evaluación de un par

La Tabla 5.5.2 recoge un resumen, para todos los casos, del número de episodios que hacen referencia a la resolución que están evaluando y el número de episodios referidos a la resolución de alguno de los evaluadores de la pareja.

Tabla 5.5.2. Clasificación de los episodios por resolución a la que se refieren.

Resolución a la que se hace referencia	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8	TOTAL
Evaluadores	6	16	0	2	6	6	1	3	**40**
Evaluado	27	28	8	30	24	26	22	17	**182**

Como puede observarse en la tabla, salvo en el Caso 3, en todos los casos los evaluadores hacen referencia, explícita o implícita, a sus propias resoluciones. Este apego a sus propias resoluciones durante el proceso de evaluación se observa con tres propósitos principales: explicar aspectos concretos de sus resoluciones, compararlas con la que están evaluando y como apoyo para interpretar la resolución evaluada.

Tres de las parejas evaluadoras explican aspectos de sus propias resoluciones como el procedimiento siguieron para resolver el problema (Caso 2 - Tabla 5.1.2.6), los casos que estudiaron (Caso 8 - Tabla 5.2.11) o las soluciones que presentaron (Caso 5- Tabla 5.2.211).

En seis de los ocho casos comparan la propia resolución con la resolución que están evaluando, por ejemplo, exponiendo que utilizaron una estrategia diferente para resolver (Caso 2 - Tabla 5.1.2.11), expresando que los procedimientos que ellos utilizaron son más sencillos (Caso 1 - Tabla 5.1.1.17) o señalando aspectos que consideran ausentes en la resolución evaluada y que se encuentran en sus propias resoluciones como soluciones (Caso 6 - Tabla 5.2.3.10) o justificaciones (Caso 2 - Tabla 5.1.2.10).

También hacen uso de la propia resolución como apoyo para interpretar las resoluciones evaluadas (Caso 2 - Tabla 5.1.2.12c, Caso 7 - Tabla 5.3.1.9). Se ha podido observar durante el análisis de los procesos de evaluación como, en algunos de los casos (Caso 2 y Caso 5), los componentes de las parejas evaluadoras muestran dificultades para entender las resoluciones (Tablas 5.1.2.10 y 5.2.2.6). Estas dudas intentan solventarlas apoyándose en sus resoluciones, aludiendo a representaciones gráficas que no se encuentran en la resolución evaluada o buscando sus propias soluciones en las presentadas por sus compañeros.

Carácter de los episodios

Tabla 5.5.3. Clasificación de los episodios por el carácter de las intervenciones.

Carácter de los episodios	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Caso 4	Caso 5	Caso 6	Caso 7	Caso 8	TOTAL
Interpretativo	5	6	3	5	6	8	11	11	**55**
Valorativo	24	19	3	18	19	17	10	5	**115**
Expositivo	0	4	0	0	3	1	0	4	**12**
I / V	1	2	2	3	0	0	2	0	**10**
I / E	0	0	0	2	0	0	0	0	**2**
V / E	0	0	0	1	0	0	0	0	**1**

Como se observa en la Tabla 5.5.3, seis de los ocho casos siguen un proceso de evaluación fundamentalmente valorativo. Dos casos presentan un proceso evaluativo con el mismo o casi el mismo número de episodios interpretativos y valorativos (Casos 3 y 7). Y en uno de los casos el carácter es principalmente interpretativo (Caso 8).

En general, los episodios de carácter interpretativo están relacionados con comentarios en los que identifican características de la resolución como los heurísticos, los casos estudiados, las soluciones (e.g. Tablas 5.1.1.4, 5.3.1.5a-b-e, 5.2.3.4a) y en lo que analizan e intentan hacer inferencias sobre aspectos concretos de la resolución (cálculos, representaciones gráficas o tabulares, pasos concretos (e.g. Tabla 5.2.2.7b-c, 5.3.1.7). Destacan dos de los episodios interpretativos en el proceso de evaluación del Caso 8 en los que, abandonando la evaluación, se centran en buscar las expresión algebraica de las rectas que su compañero deja planteadas con palabras (Tabla 5.4.1.6).

Los episodios de carácter valorativo se corresponden con comentarios en los que expresan si partes concretas de la resolución evaluada son o no correctos (cálculos, soluciones, representación gráfica) (e.g. Tablas 5.1.1.11b, 5.1.2.12 y 5.1.2.13b); hacen apreciaciones sobre aspectos que faltan (justificaciones escritas, casos, soluciones) (e.g. Tabla 5.2.3.10. 5.1.2.10); otorgan una calificación o hacen una valoración general de la resolución (e.g. Tablas 5.3.1.12, 5.1.1.15, 5.1.3.8, 5.2.1.15). Destacan los episodios con carácter valorativo en los que atribuyen errores que la persona a la que están evaluando no comete, es decir, donde realizan una valoración incorrecta de la resolución (e.g. Tablas 5.1.1.9, 5.1.2.9, 5.3.1.7). Estas valoraciones erróneas están motivadas por la falta de comprensión, al no entender la resolución presuponen que es incorrecta y se centran en buscar y justificar un error, en ocasiones, inexistente.

En los episodios expositivos los evaluadores leen partes literales de las resolución que están evaluando o explican algún aspecto de sus propias resoluciones (e.g. Tablas 5.1.2.6 y 5.2.3.8).

Además, se clasificaron episodios con doble carácter (interpretativo-valorativo, interpretativo-expositivo o valorativo-expositivo), pues se trataba de un mismo episodio por girar en torno a una misma categoría, pero en ellos se distinguían ambos caracteres (e.g. Tabla 5.1.1.9, 5.1.2.19, 5.1.3.10).

Capítulo 6
DISCUSIÓN FINAL

En este último capítulo se presenta una discusión en torno a los principales resultados obtenidos en el desarrollo de la investigación. El capítulo se divide en cuatro secciones. En las dos primeras se trata de dar respuesta a los objetivos de investigación, a partir de la discusión en torno a los resultados observados en cada una de las dos fases del estudio. En la tercera sección se recoge un resumen de las principales conclusiones de la investigación. Y, en la última sección, se presenta una reflexión sobre las limitaciones de este trabajo y se indican algunas líneas abiertas con perspectivas que podrían permitir una mayor profundización en este problema de investigación.

El objetivo general de la investigación que se presenta en este trabajo es estudiar el proceso de evaluación entre pares mostrado por futuros docentes en actividades de resolución de problemas matemáticos, con el propósito de contribuir a la comprensión del complejo proceso que entraña la evaluación de la resolución de problemas y que sigue siendo un desafío tanto para los docentes como para los investigadores.

Nuestro interés en este tema radica en dos hechos. En primer lugar, la evaluación es una de las principales tareas profesionales docentes, por lo que debe estar presente en su formación. En segundo lugar, estudios recientes muestran que los profesores de matemáticas, de cualquier etapa educativa, continúan optando por prácticas de evaluación tradicionales basadas en exámenes finales a libro cerrado (Iannone y Simpson, 2021; Mäkipää, y Ouakrim-Soivio, 2020; Nieminen y Atjonen, 2022), con una finalidad puramente sumativa de asignar una calificación y pasando por alto aspectos formativos como la retroalimentación (Chanudet, 2019; Mäkipää, y Ouakrim-Soivio, 2020; Nieminen y Atjonen, 2022). Esto refleja la creencia de que el desempeño en pruebas escritas individuales es un indicador de lo que el alumnado sabe o entiende (Iannone y Simpson, 2021), afianzando las percepciones de los estudiantes sobre la evaluación como *evaluación del aprendizaje* más que *evaluación para el aprendizaje* (Mäkipää, y Ouakrim-Soivio, 2020; Nieminen y Atjonen, 2022). Estas percepciones hacen que los alumnos presten más atención a las calificaciones que al aprendizaje, adaptando sus esfuerzos a realizar buenas pruebas y dedicando menos energía a aprender el contenido de la materia (Löfgren et al., 2019).

Uno de los desafíos de los docentes es evitar que los alumnos entiendan la evaluación como un simple método para obtener buenas calificaciones (Löfgren et al., 2019). Para ello, la formación docente debe incidir en formar a los futuros profesores en la utilización de la evaluación como herramienta de enseñanza y aprendizaje y no solo como herramienta para calificar (Mäkipää, y Ouakrim-Soivio, 2020). Una estrategia que permite introducir a los futuros docentes en la reflexión y el análisis sobre el papel activo del alumnado en los procesos de evaluación consiste en involucrarlos en actividades de evaluación entre pares durante su formación (Chanudet, 2019; Mäkipää, y Ouakrim-Soivio, 2020; Nieminen y Atjonen, 2022). Este tipo de evaluación ofrece interesantes oportunidades para la formación docente, ya que sensibiliza a los futuros docentes sobre la complejidad del proceso de evaluación, al mismo tiempo que les ofrece información sobre su propio conocimiento de la materia (Beaver y Beaver, 2011; Lavy y Shriki, 2014; Zevenbergen, 2001), pues las prácticas evaluativas de los docentes dependen no solo de su conocimiento pedagógico, sino de su conocimiento en relación con el contenido a enseñar y, por tanto, de su conocimiento didáctico-disciplinar (Carrillo et al., 2013).

Las actividades de evaluación entre pares pueden diseñarse e implementarse de múltiples formas diferentes dependiendo del objetivo pretendido. En la literatura especializada se indica que se pueden llevar al aula de cualquier materia para trabajar diferentes contenidos en cualquier nivel educativo (Topping, 2009). Se han realizado estudios con alumnado de educación primaria y secundaria (Lavy y Shriki, 2014; Sadler y Good, 2006; Topping, 2009), alumnado universitario (Jones y Alcock, 2014; Mogessie, 2015; Seifert y Feliks, 2018), profesores en formación (Beaver y Beaver, 2011; Zevenbergen, 2001) e incluso con estudiantes muy jóvenes y con necesidades educativas especiales (Scruggs y Mastropieri, 1998). Los instrumentos de evaluación utilizados en este tipo de actividades presentan una amplia diversidad como pruebas escritas, presentaciones orales, redacciones, etc. (Beaver y Beaver, 2011; Custodia et al., 2015; Jones y Alcock, 2014; Lavy y Shriki, 2014; Topping, 2009; Wyatt-Smith et al., 2010; Zevenbergen, 2001). Topping (2009) señala que los participantes pueden trabajar individualmente, en parejas o en grupos para llevarla a cabo y que la actividad de evaluación propuesta puede ser unidireccional o recíproca. Además, se pueden entregar criterios de evaluación o rúbricas ya definidas (Beaver y Beaver, 2011; Custodia et al., 2015; Topping, 2009; Zevenbergen, 2001), pedir a los evaluadores que los construyan ellos mismos (Lavy y Shriki, 2014; Wyatt-Smith et al., 2010) o dejar la evaluación libre (Jones y Alcock, 2014).

En esta investigación se diseñó e implementó una actividad de evaluación entre pares cuyos participantes fueron profesores de matemáticas de secundaria en formación. En ella, tras resolver individualmente un problema de final abierto, evaluaron en parejas la resolución de un compañero. Realizar esta actividad en parejas permitió obtener un mayor detalle del proceso de evaluación, pues obliga a los participantes a expresar sus pensamientos en voz alta, proporcionando más información que si lo realizaran individualmente en un documento escrito. Además, no se les proporcionó ninguna rúbrica ni criterios de evaluación, pues el objetivo principal de la investigación era detectar en qué aspectos de las resoluciones prestan una mayor atención para realizar la evaluación, lo que se abordó a través de los siguientes objetivos específicos:

1. Analizar las resoluciones de los futuros docentes de matemáticas de Educación Secundaria a un problema de final abierto atendiendo a: los heurísticos que emplean, los casos estudiados, las representaciones utilizadas, las soluciones que presentan, si comprueban o no dichas soluciones y los errores que cometen.

2. Identificar qué aspectos de la resolución del problema tienen en cuenta los futuros docentes cuando actúan como evaluadores, y analizar de qué forma utilizan sus propias resoluciones para evaluar la de un compañero (si es que lo hacen), así como el carácter de sus intervenciones.

Para dar respuesta a estos objetivos específicos se plantearon dos fases de investigación, cada una asociada a uno de los objetivos (Figura 3.1). En el Capítulo 4 se presentó el análisis de los datos correspondientes a la primera fase de la investigación, y por tanto al primer objetivo específico, mostrando un estudio pormenorizado de las resoluciones presentadas por los estudiantes atendiendo a seis categorías de análisis: *heurísticos, casos estudiados, representaciones, soluciones, comprobación de las soluciones* y *errores*. En el Capítulo 5 se analizaron los datos relativos a la segunda fase de la investigación, y por tanto correspondientes al segundo objetivo específico, detallando el proceso seguido al evaluar la resolución del problema presentada una compañera o un compañero atendiendo a tres aspectos: categorías a las que hacen referencia (*heurísticos, casos estudiados, representaciones, soluciones, comprobación de las soluciones* y *errores*), resolución a la que se refieren (evaluado y/o evaluadores) y carácter de las intervenciones (*interpretativo, valorativo* y/o *expositivo*). Considerar una variedad categorías de análisis (*heurísticos, casos estudiados, representaciones, soluciones, comprobación de las soluciones* y *errores*) para ambos objetivos, así como profundizar en aspectos como el apego a la propia resolución o el carácter de las intervenciones en el segundo objetivo, permitió profundizar en cada uno de los casos, tal y como exige la metodología estudio de casos. En las siguientes secciones se discuten los resultados obtenidos en cada una de las dos fases de la investigación.

6.1. Discusión en torno al primer objetivo de investigación

Como ya se ha indicado, en la primera fase de esta investigación se analizaron las resoluciones presentadas por los participantes, futuros profesores de Matemáticas de Educación Secundaria, a un problema de final abierto atendiendo a las categorías de análisis definidas en la metodología (sección 3.3.3): *heurísticos, casos estudiados, representaciones, soluciones, comprobación de las soluciones y errores.* Así, mediante esta primera fase se abordó el primer objetivo de investigación:

> *Analizar las resoluciones de los futuros docentes de matemáticas de Educación Secundaria a un problema de final abierto atendiendo a: los heurísticos que emplean, los casos estudiados, las representaciones empleadas, las soluciones que entregan, si comprueban o no dichas soluciones y los errores que cometen.*

El análisis sistemático de los datos, mostrado en detalle en el Capítulo 4, permitió identificar características específicas de las resoluciones que cada uno de los 16 participantes dieron al problema. La respuesta al primer objetivo de investigación emerge a partir del análisis conjunto de esas 16 resoluciones (sección 4.2).

Este análisis conjunto mostró la variedad de heurísticos empleados por los estudiantes: *ensayo y error*, *descomponer el problema en partes*, *suponer el problema resuelto*, *dibujar* *una figura* y *generalizar*. Estas estrategias, tal y como apuntan Schoenfeld (1992) y Santos-Trigo (2014), son utilizadas para explorar el problema, pudiendo conducir a alcanzar todas las soluciones, algunas o ninguna. En este estudio se observaron resoluciones en las que se emplea un único heurístico y otras en las que se hace uso de varios, en concreto, dos, tres y hasta cinco en una misma resolución. En las que se identificaron más de uno, se observó diversidad también tanto en las combinaciones de heurísticos como en el orden de utilización de los mismos (Tabla 4.1.17).

El *heurístico* más utilizado por los participantes para buscar soluciones del problema fue *dibujar una figura*, empleado por nueve estudiantes (E4-E12), en todos los casos, mediante la representación gráfica de la parábola (Tabla 4.1.19) y, varios de ellos (E6, E7, E8, E12) representado también una o varias rectas. En su trabajo, Duval (1993) ya destacaba el potencial heurístico de las representaciones en la resolución de problemas. También Stylianou (2011) afirma que el dibujo de figuras constituye un importante heurístico que, tanto estudiantes como expertos utilizan como herramienta de exploración, comprensión, registro y seguimiento en la resolución de problemas. En particular, en problemas en los que intervienen funciones cuadráticas, en un estudio reciente, Wilkie (2022) recalca que recurrir a la representación puede ayudar a los estudiantes a tomar decisiones y que es clave para favorecer la visualización de las propiedades de las funciones y la conexión entre conceptos.

Además, salvo una de ellas (E4), todos los estudiantes que emplean el heurístico *dibujar una figura* lo hacen como primera opción de acercamiento al problema, es decir, el primer paso que realizan en su resolución es representar gráficamente la parábola dada en el enunciado. Este resultado es esperable ya que, tal y como concluyen Mangwende y Maharaj (2018) en su investigación acerca de las prácticas de docentes en la enseñanza de funciones, en el 85% de las lecciones de aula, los profesores solicitaban a sus alumnos la representación gráfica de funciones dadas, por lo que podría tratarse de un procedimiento adquirido por los estudiantes en su etapa escolar y que ponen en marcha siempre que se enfrentan a un problema de estas características.

Una última característica en relación al uso del *heurístico dibujar una figura* es que, excepto la estudiante E4, que como mencionamos anteriormente no lo utiliza como primera opción, y la estudiante E12, que lo utiliza en solitario, el resto incorpora otros heurísticos (Tabla 4.1.17). Destaca el comportamiento similar de cuatro estudiantes (E8, E9, E10 y E11), quienes apoyándose en la representación gráfica de la parábola (*heurístico dibujar una figura)* consideran una o varias rectas particulares que cumplen las condiciones del enunciado del problema y, a partir de ellas, construyen un grupo de rectas más general con características comunes (*heurístico generalizar*). Es decir, estos cuatro estudiantes comienzan con el *heurístico dibujar una figura* y, a continuación, utilizan el *heurístico generalizar.*

El *heurístico generalizar* es, junto a *suponer el problema resuelto*, el segundo más empleado por los estudiantes en sus resoluciones, utilizados cada uno de ellos por 7 participantes. En todos los casos, esta estrategia para abordar el problema comienza con el estudio de una o dos rectas particulares para después extender el resultado a un grupo de rectas más general (Polya, 1945). Como se ya mencionó, es utilizado por cuatro de los participantes tras el *heurístico dibujar una figura.* Dos estudiantes (E13 y E14) lo utilizan en solitario y destaca la estudiante E7, quien se apoya en el *heurístico generalizar* tras haber hecho uso de otros tres heurísticos (*dibujar una figura, ensayo y error* y *descomponer el problema en partes*). El uso de este heurístico por un grupo numeroso de estudiantes podría deberse a la naturaleza del problema. Muchos de los participantes admitieron que se trataba de la primera vez que resolvían un problema de funciones de final abierto. En estos casos, Schoenfeld (1992) propone que la utilización de este heurístico puede ayudar a comprender mejor un problema desconocido, ya que la ejemplificación a través de la consideración de casos particulares puede sugerir una solución.

En cuanto al *heurístico suponer el problema resuelto,* este es utilizado también por 7 estudiantes y lo hacen de forma similar: consideran la ecuación explícita de una recta (por ejemplo, $y=ax+b$), la igualan a la ecuación de la parábola y buscan las condiciones que deben verificar los coeficientes de la ecuación de la recta (a y b) que hacen que esta tenga dos puntos de intersección con la parábola. Cuatro de los participantes se apoyan en él como primera opción y tres de ellos lo utilizan en solitario. La estudiante restante (E4) emplea a continuación el *heurístico dibujar una figura*. Los otros tres estudiantes que no lo utilizan como primera opción, realizan distintas combinaciones de heurísticos (Tabla 4.1.17). El uso de este heurístico por un grupo numeroso de estudiantes podría deberse, igual que en caso anterior, a la naturaleza del problema. A pesar de tratarse de un problema de final abierto que admite infinitas soluciones, como se ha mostrado en el análisis a priori del problema (sección 3.3.2), un enfoque algebraico permite obtener las condiciones que deben cumplir la totalidad de estas soluciones. Este hecho, unido a la formación matemática de la mayoría de los participantes, podrían haber hecho del *heurístico suponer el problema resuelto* una de las estrategias más utilizadas.

En el análisis de las resoluciones se identificaron, aunque en menor medida, otros dos *heurísticos*: *ensayo y error* (4 estudiantes) y *descomponer el problema en partes* (3 estudiantes). Los participantes que utilizaron *ensayo y error* lo hicieron de dos formas diferentes. Dos de ellas (E7 y E15) consideran rectas aleatorias y comprueban si cumplen las condiciones del problema: E7 lo realiza gráficamente, representando varias rectas junto a la parábola (Figura 4.1.33), mientras que E15 escribe las ecuaciones de las rectas y calcula sus puntos de intersección con la parábola (Figura 4.1.73). Los otros dos estudiantes que utilizaron el *heurístico ensayo y error* (E3 y E5) lo hacen tras *suponer el problema resuelto* para, habiendo obtenido con dicho heurístico las restricciones para los coeficientes de la ecuación de una recta $y=ax+b,$ considerar valores particulares y aleatorios de estos coeficientes y comprobar si cumplen las condiciones obtenidas (Figuras 4.1.14 y 4.1.24). Utilizar el *heurístico ensayo y error* en la resolución de problemas puede ayudar a los estudiantes a abordar problemas difíciles y, además, se trata de una estrategia con una alta tasa de éxito en la búsqueda de soluciones (Jiang et al., 2014). Sin embargo, no llama la atención su escasa presencia ya que se trata de una estrategia, en general, poco utilizada por los resolutores de problemas por considerarse menos fiable que otras (Fan y Zhu, 2007; Jiang et al., 2014).

En relación al *heurístico descomponer el problema en partes,* los tres participantes que lo emplean lo hacen abordando conjuntos de rectas con una característica común, en especial, su pendiente. E16 es el único de los tres que utiliza este heurístico en solitario, dividiendo su resolución en el estudio de tres grupos de rectas: horizontales (Figura 4.1.79), rectas que pasan por el vértice de la parábola (Figura 4.1.80) y rectas que pasan por dos puntos cualesquiera de la parábola, distintos del vértice (Figura 4.1.81). E6 lo utiliza, tras el *heurístico dibujar una figura,* considerando dos conjuntos de rectas: horizontales (Figura 4.1.28) y rectas de la forma $y=mx+n$ con pendiente positiva (Figura 4.1.29), y optando por el *heurístico suponer el problema resuelto* para abordar el estudio de este último. La estudiante E7 estructura su resolución considerando tres grupos de rectas: verticales (Figura 4.1.35), horizontales (Figura 4.1.36) y rectas de la forma $y=mx+n$ con pendiente no nula (Figura 4.1.37). Destaca la resolución de esta última estudiante por utilizar los cinco heurísticos descritos en la metodología (capítulo 3). Comienza representando gráficamente la parábola (*heurístico dibujar una figura*) en la que se apoya para ir considerando diferentes rectas y verificar, visualmente, si son o no solución al problema (*heurístico ensayo y error*). Posteriormente, emplea el *heurístico descomponer el problema en partes* como se ha descrito, seleccionando el *heurístico generalizar* para el estudio de las rectas horizontales (Figura 4.1.36) y el *heurístico suponer el problema resuelto* para el estudio de las rectas de la forma $y=mx+n$ con pendiente no nula (Figura 4.1.39). Que los participantes hayan utilizado el *heurístico descomponer el problema en partes* en menor medida, coincide con otras investigaciones en las que obtuvieron que muy pocos resolutores se apoyaban en este para buscar una solución (Jiang et al., 2014) y es que, a pesar de que otros participantes también estudiaron algunos grupos de rectas con alguna característica común (E4, E8, E9, E10, E11) estos no abarcan la totalidad de las posibles situaciones, por lo que no se trata de este heurístico tal y como se indica en la metodología (capítulo 3). De hecho, Polya (1945) afirma que con la utilización de este heurístico no debe perderse el enfoque del problema original ya que esta estrategia permite abordar problemas más complejos tratando partes más accesibles ayudando a perseverar gracias a pequeños procesos, pero también se corre el riesgo de perderse en cada una de las partes y olvidar la visión del problema completo.

La siguiente categoría analizada en relación al primer objetivo de la investigación es la de los *casos estudiados* por los participantes, pues estos permiten ampliar la información sobre el procedimiento seguido en cada resolución y están estrechamente relacionados con los heurísticos empleados. Por ejemplo, el *heurístico suponer el problema resuelto* lleva implícito el estudio de la ecuación explícita de una recta ($y=ax+b$), mientras que los heurísticos *ensayo y error* y *generalizar* conducen al estudio de rectas particulares. El interés de analizar esta categoría reside en el carácter abierto del problema. Los problemas de final abierto son aquellos que admiten múltiples soluciones (Zhu y Fan, 2006), sin embargo, como en cualquier proceso de resolución de problemas, las estrategias utilizadas no garantizan alcanzar las soluciones (Santos-Trigo, 2014). Por tanto, con el objetivo de analizar en profundidad los procesos de resolución seguidos por los participantes, se hace necesario estudiar, no solo las soluciones alcanzadas, sino también todas aquellas rectas consideradas que, o bien no son solución al problema, o bien no logran proyectar una conclusión.

En el análisis de las resoluciones se diferenciaron cuatro tipos de *casos estudiados* (sección 4.2.2): *rectas horizontales* (particulares o la expresión general de una recta horizontal), *rectas verticales* (particulares o la expresión general de una recta vertical), *rectas oblicuas* (únicamente particulares) y *recta general (y=ax+b; y=mx+n)*. Los tres primeros se distinguen en términos de la pendiente de la recta por lo que tienen un enfoque geométrico, mientras que el último, aunque contiene todos los tipos de rectas anteriores, se ha diferenciado por su naturaleza algebraica al estar ligado al *heurístico suponer el problema resuelto*. Los resultados de este análisis mostraron que la mitad de los participantes estudiaron un solo tipo de rectas: dos de ellos rectas horizontales (E8 y E9), cuatro rectas oblicuas (E10, E11, E13 y E14) y otros dos una recta general (E1 y E2). Otros cuatro se plantearon dos tipos de rectas: rectas oblicuas y una recta general (E3), y rectas horizontales y oblicuas (E12, E15 y E16). Un participante (E5) estudió tres tipos de rectas (horizontales, oblicuas y una recta general) y, por último, la estudiante E7 planteó los cuatro tipos de rectas en su resolución (Tabla 4.1.18).

La Tabla 4.1.18 muestra, además de los casos estudiados por cada participante, el número de participantes que estudia cada uno de los tipos de casos. El caso estudiado por un mayor número de participantes, diez, es *rectas oblicuas*. Como se describe en el párrafo anterior y más detalladamente en la Sección 4.2.2, este caso solo incluye rectas particulares, es decir, los participantes presentan ecuaciones concretas de rectas oblicuas. Cuatro de estos diez estudiantes es el único caso que estudian, mientras que los otros seis abordan al menos otro tipo más de rectas. Destacan en este aspecto dos participantes (E3 y E5), quienes construyen las rectas oblicuas particulares a partir de considerar valores concretos de los coeficientes de una recta arbitraria ($y=ax+b$) para los que han obtenidos ciertas condiciones (Figuras 4.1.14 y 4.1.24). Que en la mayoría de las resoluciones se aborde este caso, incluidas aquellas en las que se determinan rectas concretas a pesar de estar ya incluidas en la expresión general con las condiciones para a y b, podría estar ligado a la interpretación del enunciado del problema donde se escribe "Encontrar ecuaciones de rectas…" o incluso, como mostraron Modabberni et al. (2023) en su investigación sobre manipulaciones algebraicas de funciones, porque el empleo de expresiones generales se perciba como poco fiable, considerado que "no es suficiente".

El segundo caso estudiado por más de la mitad de los participantes, 9 estudiantes, es *rectas horizontales*. Dos de ellas (E8 y E9) solo abordan este tipo de rectas y lo hacen ambas presentando inicialmente dos rectas particulares para, posteriormente, generalizar a rectas horizontales por encima del vértice de la parábola. El resto de participantes analiza además otros casos y, salvo dos de ellos (E4 y E5) quienes comienzan con el estudio de una *recta general*, lo hacen planteando las *rectas horizontales* como primer tipo a estudiar. Esto podría deberse a que, tal y como expresa de forma explícita uno de los participantes, se trata del caso más sencillo de analizar (Figura 4.1.77). Efectivamente, teniendo en cuenta la curvatura de la parábola, es fácil observar que todas las rectas horizontales por encima del vértice poseen dos puntos de intersección con la parábola (Figura 3.3.3).

A continuación, el caso *recta general* es estudiado por 7 estudiantes. Dos de los participantes (E1 y E2) es el único caso que consideran, obteniendo las condiciones necesarias que deben cumplir los coeficientes *a* y *b* para que la recta *y=ax+b* tenga dos puntos de intersección con la parábola. El resto de ellos estudia además otras rectas. Destacan dos de ellos (E3 y E5) que, como se expuso anteriormente, después de desarrollar el caso general, consideran valores concretos para los coeficientes *a* y *b* y construyen dos *rectas oblicuas* particulares (E3, Figura 4.1.14) y una *recta horizontal* particular y otra *recta oblicua* (E5, Figura 4.1.24), respectivamente. Este tipo de caso estudiado es implícito al *heurístico suponer el problema resuelto* ya que se debe plantear una *recta general* y encontrar las condiciones para sus coeficientes. Como se comentó en la discusión acerca de los heurísticos utilizados, este enfoque algebraico permite obtener una caracterización de las soluciones y, debido a la formación matemática mayoritaria de los participantes, explica que la *recta general* sea uno de los casos estudiados.

Por último, una única alumna (E7) plantea *rectas verticales* (Figura 4.1.35). De hecho, es el primer grupo de rectas que aborda de manera completa, pues inicia su resolución con la representación gráfica de la parábola y de varias rectas con distintas pendientes planteando también una *recta general* que retoma después de analizar otros casos. Destaca por ser la única participante que estudia todos los tipos de casos considerados en el análisis de esta categoría y, como se mencionó anteriormente, también emplea todos los heurísticos.

Otro de los aspectos de las resoluciones que se analizaron fueron las *representaciones* utilizadas, pues se trata de una herramienta imprescindible para comunicar información en matemáticas (e.g. Duval, 1993; NCTM, 2000; Rico, 2009) y, por tanto, fundamentales en la resolución de problemas (e.g. Callejo y Vila, 2009; Carrillo, 2009; Mousoulides y Sriraman, 2014; Polya, 1945; Schoenfeld, 1985) y, particularmente, en el uso y tratamiento de las funciones en particular (e.g. Amaya-de-Armas y Medina-Rivilla, 2013; Lobato et al., 2012; Mangwende y Maharaj, 2018; McCallum, 2018; Wilkie, 2022). Tanto la categoría *casos estudiados* como la categoría *representaciones* fueron creadas para obtener una información más detallada del procedimiento de resolución empleado por los participantes, permitiéndonos identificar y distinguir resoluciones que, haciendo uso del mismo heurístico, presentan diferencias en el procedimiento de resolución.

Como el problema que debían resolver los participantes implicaba una función real de variable real se distinguieron cuatro tipos de representación: gráfica, tabular, simbólica y verbal (Lupiáñez-Gómez, 2016). Los resultados del análisis de las representaciones utilizadas mostró que siete participantes utilizaron únicamente las representaciones simbólica y verbal (E1-E3 y E13-E16); cinco de ellos utilizaron, además de las representaciones simbólica verbal, la representación gráfica (E4, E5, E7, E8 y E11) y los cuatro restantes emplearon los cuatro tipos de representación (Tabla 4.1.19).

La Tabla 4.1.19 muestra, además de las representaciones utilizadas por cada participante, el número de participantes que utiliza cada una de las representaciones. Todos los estudiantes utilizaron tanto la *representación simbólica* como *la verbal*. En el primer tipo, todos ellos la usan para los mismos propósitos: realizar cálculos y presentar las ecuaciones de rectas. A pesar de que, tal y como afirma Stylianou (2011), no se puede clasificar una representación como ideal para un propósito concreto, es usual emplear la representación simbólica para la exploración (por ejemplo, realizar cálculos). Sería destacable no encontrar representación simbólica en la resolución de un problema matemático, más aún cuando a los estudiantes normalmente solo se les enseña la manipulación de representaciones simbólicas y se les anima a utilizar estas representaciones en todas sus soluciones (Stylianou, 2011). En el segundo tipo, la *representación verbal,* en todos los casos la utilizan para explicar pasos durante el proceso de resolución y para justificar y presentar soluciones. Aunque la representación simbólica en matemáticas tiene muchas fortalezas, pues una parte importante de la información se puede transmitir a través de la creación y manipulación de enunciados simbólicos (Morgan, 2020), también puede tener desventajas para propósitos específicos (Stylianou, 2011) como, por ejemplo en este caso, mostrar explicaciones y justificaciones, para lo cual es necesario utilizar palabras.

Más de la mitad de los participantes empleó la *representación gráfica*, y es que en los últimos años se ha reconocido que las representaciones visuales como los gráficos desempeñan un papel igualmente esencial para hacer y comunicar matemáticas (Morgan, 2020). Nueve estudiantes (E4-E12) representaron gráficamente la parábola dada en el enunciado del problema y, para ello, utilizaron distintas estrategias. Cuatro de ellas (E6, E19, E10 y E12) se apoyaron en una tabla de valores y explicaremos en detalle a continuación; dos estudiantes (E5 y E11) calculan los puntos de corte y el vértice, ambos a través de la primera derivada de la función cuadrática; la estudiante E8 se apoya halla únicamente los puntos de corte y, por último, dos de ellas (E4 y E7) no recogen ningún cálculo ni justificación. Además cinco de ellos representan también varias o todas las rectas estudiadas.

Por último, la *representación tabular*, ligada a la *representación gráfica* de la parábola*,* fue utilizada por cuatro participantes de los nueve anteriores. Sin embargo, solo una de ellas (E12) la utiliza correctamente, recogiendo las coordenadas de varios puntos de la parábola entre los que se encuentra el vértice y otros a ambos lados del eje de simetría. La estudiante E10 recoge también las coordenadas de varios puntos de la parábola pero no incluye el vértice ni puntos a ambos lados del eje de simetría. La estudiante E9 recoge las coordenadas de un solo punto de la parábola y, por último, la estudiante E6 la deja vacía.

El análisis en relación al primer objetivo de esta investigación también se centró en el estudio de las *soluciones* presentadas por los estudiantes. Encontrarnos ante un problema de final abierto que admite múltiples soluciones (Zhu y Fan, 2006) hace especialmente relevante el estudio de esta categoría. Además, haber profundizado anteriormente en el análisis de los *casos estudiados* permite tener una visión de los procesos de búsqueda de soluciones, que no siempre implican el éxito (Santos-Trigo, 2014). Por ello, los tipos de *soluciones* se describieron a partir de los *casos estudiados,* distinguiendo tres tipos diferentes: rectas horizontales, rectas oblicuas y una recta general (y=ax+b; y=mx+n) con condiciones para sus coeficientes. No se pueden considerar rectas verticales, por no ser solución al problema, y se añaden las condiciones de los coeficientes para una recta general, ya que son las que determinan que las rectas sean solución. Los resultados de este análisis mostraron que doce de los participantes presentaron un solo tipo de rectas como solución: cuatro de ellos rectas horizontales (E4, E6, E8 y E9), cinco rectas oblicuas (E3, E10, E11, E13 y E14) y los tres restantes la condiciones para los coeficientes de una recta general (E1, E2 y E5). Los otros cuatro estudiantes (E7, E12, E15 y E16) presentaron dos tipos de rectas como solución, todos ellos rectas horizontales y oblicuas.

La Tabla 4.1.20 muestra, además de las soluciones presentadas por cada participante, el número de participantes que presenta cada uno de los tipos de soluciones. Puede observarse que las *rectas oblicuas* son las más numerosas siendo 9 estudiantes quienes las presentaron. Este análisis coincide con la categoría correspondiente para *casos estudiados* (10 estudiantes), salvo por el estudiante E5, quien obtiene las condiciones para los coeficientes de una recta general $y=ax+b$ y estudia dos rectas concretas incluidas en el caso general a modo de ejemplo.

En cuanto a las *rectas horizontales*, son presentadas como solución por 8 estudiantes. Este análisis también coincide con la categoría correspondiente para *casos estudiados* (9 estudiantes), salvo por un estudiante (E5) por los mismos motivos descritos anteriormente.

Por último, solo tres participantes (E1, E2 y E5) concluyen el estudio de una *recta general* y presentan las condiciones que deben cumplir los coeficientes de la ecuación explícita de una recta ($y=ax+b$) para que esta sea solución al problema. Son siete los estudiantes que comienzan el estudio de este tipo de rectas, pero más de la mitad no lo concluye. Este resultado podría alinearse con el encontrado en la investigación de Modabberni et al. (2023), en el que los participantes que inicialmente utilizaron el enfoque algebraico en una tarea sobre funciones, evitaron manifestar conclusiones definitivas. Además, de las resoluciones que sí concluyen con la búsqueda de estas condiciones, ninguna es completamente correcta.

En relación a la categoría anterior, también se analizó la *comprobación de las soluciones*. La evaluación de lo que se ha realizado o visión retrospectiva es una de las cuatro fases descritas por Polya (1945) para la resolución de problemas, por lo que podría ser esperable que aparezca en los procesos de resolución implementados por los estudiantes. Sin embargo, salvo en el caso de los estudiantes E11 y E15 que comentaremos a continuación, los participantes encuentran las soluciones siguiendo un proceso justificado, bien gráfica o analíticamente, donde las soluciones son construidas cumpliendo las condiciones del problema (por ejemplo, las rectas horizontales por encima del vértice de la parábola, tomando dos puntos pertenecientes a la parábola y construyendo la recta que pasa por ellos), lo que hace redundante la comprobación. Esto se ve reflejado en que la mitad de los participantes (8 estudiantes) no comprueba ninguna de las soluciones que da.

La otra mitad de los participantes (8 estudiantes) comprueba todas o algunas de las soluciones dadas. Como se comentó anteriormente, en las resoluciones de los estudiantes E11 y E15 esta comprobación es necesaria para concluir que las rectas presentadas son solución (o no) al problema. El estudiante E11 construye rectas que pasan por dos puntos no pertenecientes a la parábola por lo podrían no intersectarla en dos puntos. Y en el caso de la estudiantes E15, como consecuencia del *heurístico ensayo y error*, la comprobación de las soluciones es intrínseca e indispensable para saber que las rectas tomadas al azar son solución al problema.

El resto de participantes realiza una comprobación que no es necesaria dado el proceso de resolución llevado a cabo pero que podría relacionarse con esa última fase descrita por Polya

(1945) en la que se pretende que responder a preguntas sobre lo razonable de la solución obtenida o si se satisface la pregunta planteada (Castro-Martínez y Ruiz-Hidalgo, 2018). Salvo dos estudiantes (E5-Figura 4.1.20 y E12-Figura 4.1.64), que realizan una comprobación gráfica de sus soluciones representándolas junto a la parábola, el resto (E3, E8-E11 y E15) comprueban sus soluciones calculando los puntos de intersección con la parábola mediante la resolución de la ecuación resultante de igualar las ecuaciones de las rectas y la parábola.

Para concluir con el análisis del primer objetivo de esta investigación, se estudiaron los *errores* cometidos por los estudiantes en sus procesos de resolución. Se encontraron errores de distinta naturaleza: operatoria, representación del vértice, representaciones de una función, conexión entre los cálculos y el enunciado, tangentes de la parábola y conjeturas falsas. En solo cuatro de las 16 resoluciones no se detectó ningún error, en siete de ellas se detectó uno de los tipos de error, en cuatro dos de los tipos y en una de ellas se encontró hasta tres de los distintos tipos de error (Tabla 4.1.22) en lo que profundizaremos a continuación.

Los *errores* que aparecen con mayor frecuencia son los de *operatoria* y en la *representación gráfica del vértice de la parábola,* en 5 resoluciones cada uno. Los errores de operatoria son cometidos al transponer términos en una ecuación, multiplicando o expandiendo expresiones elevadas al cuadrado, se trata de errores pequeños errores de cálculo que no tienen parecen indicar una falta de conocimiento matemático. En relación al segundo tipo de error más cometido, destaca que más de la mitad de los estudiantes que realizaron la representación gráfica de la parábola en su resolución (9 estudiantes), haya situado el vértice, incorrectamente, sobre el punto de corte de la parábola con el eje OY. Este resultado se conecta con los de la investigación de Díaz et al. (2015), quienes observaron que un alto porcentaje de estudiantes cometía errores en la representación de funciones cuadráticas, uno de los más destacados relacionado con la posición del eje de la parábola. Con este error se observa una falta de coordinación entre registros de representación (Duval, 1993), pues del registro algebraico (la ecuación de la parábola dada en el enunciado, $y=x^2+4x+5$) se puede deducir que el eje de la parábola no se encuentra sobre el eje OY.

Otro de los errores que cometieron los futuros profesores está relacionado con las diferentes *representaciones de una función* (3 estudiantes). Una de ellas (E4-Figura 4.1.16) incurre en un simple error de transcripción, sin embargo, las otras dos estudiantes cometen errores más graves. La estudiante E6 representa las rectas horizontales en el semiplano $x>5$ como $y=x+n$ con $n>5$, cometiendo simultáneamente dos errores: definir dicho semiplano por la inecuación $x>5$ en lugar de $y>5$ y escribir las ecuaciones de dichas rectas como $y=x+n$ en lugar de $y=n$. Por su parte, la estudiante E9 también comete dos errores: representa gráficamente la parábola empleando una tabla de valores en la que indica un único punto y expresa una recta como $y = \infty$. Estos errores, igual que la equivocación en la posición del vértice de la parábola, también constituyen una falta de coordinación entre distintos registros de representación, en particular, estas incongruencias son muy comunes en conversiones que involucran el registro algebraico (Duval, 1993).

Los dos últimos tipos de errores analizados tienen que ver con los sistemas de representación y es que estos generan dificultades por sí mismos (Fernández-Plaza, 2016), más aún cuando los estudiantes han de utilizar de manera flexible distintas representaciones durante las tareas de resolución de problemas (Stylianou, 2011). En particular, la literatura ha destacado importantes dificultades de los estudiantes para comprender y conectar conceptos y representaciones cuadráticas (ecuaciones, tablas y gráficos) (Amaya-de-Armas y Medina-Rivilla, 2013; Lobato et al., 2012; McCallum, 2018; Wilkie, 2022).

En el análisis se encontró, también que dos estudiantes cometieron errores al *conectar los cálculos con el enunciado del problema*. Estos errores surgen al interpretar los cálculos y los resultados en el contexto del problema, tomando (tras resolver la ecuación de segundo grado obtenida al igualar la ecuación implícita de la recta, $y=ax+b$, y la ecuación de la parábola) los valores que hacen el discriminante distinto de cero como soluciones incluyendo, de esta manera, las rectas que no cortan a la parábola en ningún punto (Figura 4.1.10), o teniendo en cuenta únicamente los valores que anulan el discriminante y, por tanto, considerar como soluciones las rectas tangentes a la parábola (Figuras 4.1.22 y 4.1.23).

Otros dos participantes (E1 y E11) presentan errores al realizar *conjeturas falsas*, estableciendo erróneamente el signo de una expresión en función de una variable (Figuras 4.1.5, 4.1.59 y 4.1.61).

Por último, solo una alumna (E7) comete un error asociado a las *rectas tangentes* de la parábola, representando en un mismo punto de la parábola dos rectas tangentes (Figura 4.1.33). Además, debido a que también había situado erróneamente el vértice de la parábola sobre el eje de ordenadas, las descarta como soluciones teniendo ciertamente estas dos puntos de corte con la parábola.

Algunas de las dificultades detectadas en el análisis de las resoluciones están relacionadas con las diferentes representaciones de un objeto matemático. La movilización y coordinación de varios registros de representación es esencial (Amaya-de-Armas y Medina-Rivilla, 2013; Duval 1993) y debería estar adquirida en los participantes de este estudio, en su mayoría, graduados en Matemáticas. Estos hallazgos llaman la atención dada su formación, pero resulta un aspecto preocupante puesto que se están formando para ser docentes de Educación Secundaria. Por otro lado, tal y como comentaron los propios participantes al final de la actividad de aula, para muchos de ellos era la primera vez que se enfrentaban a la resolución de un problema de final abierto, aunque sí estaban acostumbrados a resolver problemas en los que los conocimientos implicados eran los mismos. Este hecho corrobora los resultados de Montejo-Gámez et al. (2017) en los que futuros maestros de Educación Primaria mostraron dificultades en la resolución de problemas asociadas a carencias con los procesos de resolución y no con el contenido matemático asociado.

6.2. Discusión en torno al segundo objetivo de investigación

En la segunda fase de esta investigación analizamos los procesos de evaluación seguidos por los futuros profesores de Matemáticas de Secundaria al evaluar la resolución de un par al problema planteado en la primera fase con el objetivo de abordar el segundo objetivo específico:

> *Identificar qué aspectos de la resolución del problema tienen en cuenta los futuros docentes cuando actúan como evaluadores, y analizar de qué forma utilizan sus propias resoluciones para evaluar la de un compañero (si es que lo hacen), así como el carácter de sus intervenciones.*

En relación a qué aspectos de la resolución tienen en cuenta los futuros docentes cuando evalúan, se analizaron las transcripciones de las discusiones mantenidas por las parejas evaluadoras durante el proceso de evaluación las cuales habían sido grabadas en audio. Sus intervenciones fueron clasificadas según la categoría de análisis a la que hacían referencia: *heurísticos, casos estudiados, representaciones, soluciones, comprobación de las soluciones y errores.*

El análisis de las categorías a la que hacen referencia mientras evalúan (Tabla 5.5.1) permitió extraer conclusiones acerca de los perfiles de evaluadores. En todos los casos, el número mayoritario de episodios están referidos a una de las dos categorías siguientes: *representaciones* o *soluciones.* Esto podría sugerir dos tipos de evaluadores: aquellos que se centran en aspectos relacionados con el procedimiento y aquellos que se centran en los resultados obtenidos. Sin embargo, en aquellos casos con mayor número de episodios en la categoría *soluciones*, salvo el Caso 3, se observa que también predominan los relacionados con el procedimiento (incluyendo *heurísticos*, *casos estudiados* y *representaciones*). Esto mostraría que las nuevas generaciones de profesionales abogan por la evaluación de la resolución de problemas centrada en el proceso y las estrategias por encima de la corrección de la respuesta obtenida (Castro-Martínez y Ruiz-Hidalgo, 2018).

Este análisis también reveló que durante el proceso de evaluación, la mayoría de las parejas hacían referencia, en mayor o menor medida, a cada una de las categorías de análisis, salvo *comprobación de soluciones* y *errores* que comentaremos más adelante. Se observó que muchos de ellos, aunque no de forma explícita, identifican los *heurísticos* y los valoran. También señalaban los *casos estudiados*, los analizaban de forma externa a la resolución y señalaban distintos tipos de rectas que faltaban en la resolución evaluada. Destaca el Caso 8, porque las evaluadoras se centran en determinar la expresión algebraica de las rectas que el compañero evaluado plantea con palabras (Tabla 5.4.1.6).

Una de las categorías más numerosas fue la de *representaciones*, donde se incluyeron la *representación gráfica*, la *representación tabular*, la *representación simbólica* y la *representación verbal*. En esta categoría se prestó especial atención a los episodios referentes a la categoría de *representación gráfica* ya que podían confundirse con aquellos de la categoría *heurísticos* relacionados con el *heurístico dibujar una figura*. Para ello, se estableció que en la categoría *representación gráfica* aparecerían aquellas intervenciones en que el foco se encontraba en características concretas de la representación. En el Caso 7 aparece un episodio en esta categoría a pesar de que la resolución evaluada no la recoge, lo que demuestra cómo la evaluadora se apoya en su propia resolución. En la *representación* *simbólica* sobresalen los episodios en los que intentan comprender los cálculos realizados, apreciándose las dificultades de los evaluadores de varios casos para entender y seguir las resoluciones de sus compañeros. Por último, la mayoría de los episodios relacionados con la *representación verbal* tienen que ver con la falta de explicaciones y justificaciones con palabras percibidas por las parejas evaluadoras.

En la categoría *soluciones* aparecen muchos episodios donde sí se hace referencia explícita a ellas, al contrario que sucedía en otras categorías. En ellos identifican las soluciones presentadas y valoran si son correctas o no. Y en cuanto a categoría *comprobación de soluciones*, destacan aquellos episodios en los que los evaluadores señalan que sus compañeros no han comprobado las soluciones.

Destacamos también en este punto el bajo número de episodios referentes a la categoría *errores* pese a que son varios los errores cometidos por los estudiantes en sus procesos de resolución. Llama la atención que solo una de las parejas evaluadoras (Caso 1) advierte el error presente en la resolución que están evaluando. En el resto de los casos, los estudiantes evaluadores, no solo no advierten los errores cometidos en las resoluciones evaluadas, sino que atribuyen fallos que sus compañeros no cometen, incluso en aquellas en las que no se detectaron errores en el análisis.

Las categorías utilizadas en el análisis (*heurísticos, casos estudiados, representaciones, soluciones, comprobación de las soluciones y errores*), definidas a partir de las establecidas por Arnal-Bailera et al. (2018), fueron especialmente útiles para la mayoría de los episodios identificados durante el análisis de los procesos de evaluación por pares. Sin embargo, este análisis también reveló episodios que no se correspondían con ninguna de estas categorías y que fueron clasificados en la categoría *otros*. Estos comentarios estaban relacionados con aspectos comunes como el enunciado del problema, el propio proceso de evaluación, el tiempo disponible para resolver (considerando que fue insuficiente y que podría haber afectado en las respuestas) y la limpieza en la presentación.

Sobre el enunciado del problema, las parejas evaluadoras de tres de los ocho casos (Casos 2, 4 y 5) mostraron indecisión sobre el número de rectas que debían presentarse. En el Caso 4 manifiestan no tener claro qué se pedía el enunciado del problema (Tabla 5.2.1.13) y en los otros dos casos interpretaron la expresión “encontrar ecuaciones de rectas” de distintas maneras: en el caso 2 la interpretaron como “más de una” (Tabla 5.1.2.15), mientras que en el caso 5 la interpretan como “todas” (Tabla 5.2.2.12). Otros dos casos muestran episodios relacionados con el número de rectas que se pedían en el enunciado del problema: uno de los evaluadores del Caso 1 tiene claro que había que dar dos rectas como solución (Tabla 5.1.1.14), mientras que una de las evaluadoras del Caso 6 cree que había que presentarlas todas (Tabla 5.2.3.12). Este hecho, en algunos casos, condicionó sus evaluaciones, reflejando el papel que tiene el tipo de tarea matemática en el proceso de evaluación (Thompson et al., 2018).

En relación al concepto de evaluación, los futuros docentes expresaron dudas sobre qué debían hacer o si debían otorgar una calificación. Dos parejas establecieron una diferencia explícita entre evaluar y calificar (Caso 2- Tabla 5.1.2.15b y Caso 3 - Tabla 5.1.3.9) y otras tres parejas asociaron la evaluación con un método de asignación de calificaciones, algo bastante común, como señalan Shahbari y Abu-Alhija (2018). Proporcionar criterios de evaluación podría haber ayudado a evitar las preguntas de los futuros docentes relacionadas con el proceso de evaluación, sin embargo, en el contexto de este estudio, no proporcionar estos criterios es lo que nos ha permitido abordar lo pretendido en la primera parte de este segundo objetivo de la investigación (Jones y Alcock, 2014; Seifert y Feliks, 2018).

Continuando con el objetivo de esta segunda fase, una de las características de los procesos de evaluación que se analizaron fue el grado de apego de los evaluadores a su propia resolución. Esto se pudo observar gracias al análisis previo de las resoluciones individuales (Capítulo 4). Los evaluadores del Caso 3 son los únicos que no hacen referencia a sus propias resoluciones en ningún momento del proceso de evaluación (Tabla 5.1.3.3). El resto de futuros docentes no se limitaron a revisar la resolución a evaluar, sino que también consideraron sus propias respuestas al problema, haciendo referencia, explícita o implícita, a sus propias resoluciones con tres propósitos principales: explicar aspectos concretos de sus resoluciones, compararlas con la que estaban evaluando y como apoyo para interpretar la resolución evaluada. Se destaca en en este sentido los dos últimos usos que hacen de sus propias resoluciones (comparar y apoyar la comprensión), pues revelan las dificultades encontradas por algunas de las parejas para entender la resolución que evaluaban, intentando solventarlas a través de aspectos conocidos de sus propias resoluciones. Sobresale la pareja del Caso 2, quienes se refieren a sus propias resoluciones hasta en 16 ocasiones propiciados, en su mayoría, por la falta de comprensión de la resolución que están evaluando (e.g. Tabla 5.1.2.5 y Tabla 5.1.2.7). Estos resultados muestran la influencia del apego a la propia resolución en los procesos de evaluación por pares, mencionado en los estudios de Cárdenas et al. (2016).

Por último, otra de las características que se analizó en esta segunda fase fue el carácter de los comentarios que realizaban durante el proceso de evaluación. Se observó que la mayoría de las parejas seguían un proceso fundamentalmente valorativo (Tabla 5.5.3). Las intervenciones valorativas se separan en tres tipos: episodios donde expresan si una parte concreta de la resolución es correcta o no (e..g Tablas 5.1.2.4, 5.1.3.5 y 5.3.1.7); episodios donde realizan apreciaciones sobre aspectos que faltan como justificaciones escritas, casos, soluciones (e.g. Tablas 5.1.2.10, 5.1.1.10a, 5.2.1.12) y, por último, aquellos episodios en los que otorgan una calificación (e.g. Tablas 5.2.2.13 y 5.3.1.12) o evalúan globalmente la resolución (e.g. Tablas 5.1.3.8 y 5.2.1.15). Destacan los episodios en los que, como mencionamos previamente, atribuyen al compañero evaluado errores no cometidos, realizando una valoración incorrecta de la resolución motivada por la falta de comprensión. En los episodios *interpretativos* destacan aquellos en los que intentan comprender la resolución evaluada (e.g. Tablas 5.1.1.9, 5.1.2.9, 5.3.1.7, 5.2.2.6) o aquellos encontrados en el proceso de evaluación del Caso 8 en los que, abandonando la evaluación, se centran en buscar las expresión algebraica de las rectas que su compañero deja planteadas con palabras (Tabla 5.4.1.6). Y en carácter *expositivo* resaltamos los episodios en los que los evaluadores explican aspectos de sus propias resoluciones (e.g. Tabla 5.1.2.6).

6.3. Consideraciones finales

La investigación desarrollada revela información acerca de los aspectos de la resolución de problemas que son considerados importantes por los futuros profesores (Arnal-Bailera et al., 2018) y sobre la concepción que tienen los futuros docentes acerca de la evaluación, por ejemplo, si asocian este proceso únicamente con la asignación de una nota o con una perspectiva formativa (Silver y Mills, 2018; Wiliam y Thompson, 2007). Además, permite conocer cuál es el punto de partida del que parten los futuros docentes en relación a la evaluación cuando aún no han recibido una formación específica sobre este proceso. Todo este conocimiento es especialmente útil para establecer una base sobre la que construir el conocimiento profesional de estos futuros docentes sobre el proceso de evaluación.

Los resultados obtenidos se han podido observar gracias al diseño metodológico elegido para realizar esta investigación. El análisis a priori del problema nos permitió establecer de forma precisa las bases en las que apoyar el análisis, conocer de antemano una amplia variedad de procesos de resolución ayudó a definir las categorías para extraer toda la información necesaria de las resoluciones de los participantes. Optar por un estudio de casos permitió analizar en profundidad el proceso de evaluación por pares seguido por los integrantes de cada caso y las categorías utilizadas resultaron de utilidad para tratar de establecer tipos de comportamiento frente al proceso de evaluación entre pares. Estas categorías podrían emplearse en otras investigaciones cuyo objetivo esté relacionado con indagar en los procesos de evaluación seguidos tanto por profesores (en formación o en activo) como por estudiantes. Los valores que en esta investigación se han asignado a las categorías, definidos a partir de los encontrados por Arnal-Bailera et al. (2018), pueden adaptarse dependiendo de las características del problema o la tarea utilizada.

En algunos casos se pudo detectar que las parejas evaluadoras se encontraron con dificultades a la hora de comprender la resolución del compañero, evidenciando que uno de los factores que influyen directamente en la calidad de las actividades de evaluación es la ausencia de conocimiento matemático (Cáceres y Chamoso, 2015). Por ello, las actividades de evaluación entre pares pueden ayudar no solo a desarrollar su pensamiento crítico y sus habilidades de análisis sino, en este sentido, sus conocimientos sobre el contenido trabajado y sus habilidades reflexivas (Beaver y Beaver, 2011), pues evaluar a un par contribuye a que los futuros docentes analicen los conocimientos y habilidades que debería tener en comparación con un igual.

Además, los estudiantes no suelen enfrentarse a situaciones matemáticas que vayan más allá de la aplicación directa de un algoritmo en el que sea necesario buscar estrategias o soluciones diferentes (Felmer y Perdomo-Díaz, 2016), por lo que el uso de un problema abierto en esta investigación fue fundamental ya que permitió a los futuros profesores de secundaria abordarlo siguiendo diferentes estrategias y obtener diversidad de soluciones. La actividad de evaluación entre pares brindó a los futuros docentes la oportunidad de observar distintas formas de abordar un mismo problema, enriqueciendo sus estrategias de resolución de problemas y sus conocimientos matemáticos (Beaver y Beaver, 2011; Lavy y Shriki, 2014; Zevenbergen, 2001).

Una de las preocupaciones expresadas por los docentes en formación es su falta de experiencia práctica con la evaluación (Zevenbergen, 2001), por lo que la actividad diseñada e implementada en esta investigación puede ser un ejemplo a explotar en la formación docente. Los resultados de este estudio también pueden ser útiles para diseñar cursos de formación de profesores de matemáticas centrados en la evaluación, tanto para la formación inicial como para el desarrollo profesional docente. Ayalon y Wilkie (2021) mostraron en su investigación que los futuros docentes, después de participar en una formación centrada en evaluación formativa, tomaron conciencia de la necesidad de distinguir niveles de calidad de las respuestas a una tarea y adquirieron confianza en el diseño de tareas matemáticas y criterios de evaluación. Mientras que Watson (2000) señala que los docentes, incluso recibiendo formación en evaluación, pueden verse involucrados en situaciones de desigualdad, debido a problemas de observación, perspectiva, interpretación y expectativas. Además, evaluar de forma justificada y crítica también es una competencia que deben adquirir los docentes en formación, por lo que es importante llevar a cabo estudios para analizar si están preparados para desarrollar un proceso evaluativo de manera adecuada. La evaluación será una parte fundamental de la actividad profesional del profesorado, por lo que es importante recibir una formación específica al respecto. Más aún después de la pandemia de COVID-19 en la que los docentes necesitaron aplicar nuevas formas de evaluación, con énfasis en cómo realizar una evaluación a distancia y cómo hacerlo de manera efectiva (Bakker et al., 2021). Por lo tanto, es esencial enfocarse en la formación en evaluación, ya que la evaluación docente contribuye al aprendizaje de los estudiantes, a sus logros matemáticos y a sus proyecciones futuras.

6.4. Limitaciones y proyecciones

Algunas de las limitaciones de este trabajo están relacionadas con el diseño cualitativo del análisis. Interpretar cualitativamente la información atendiendo a investigaciones anteriores y reflexiones personales hace que los resultados obtenidos en este tipo de investigaciones puedan ser flexibles y muestren sesgos de las investigadoras (Creswell, 2012). A pesar de que se optó por la triangulación de la información como estrategia para aumentar la validez y fiabilidad de los resultados obtenidos, podrían encontrarse discrepancias de interpretación tanto en el análisis de las resoluciones escritas como en el análisis de las transcripciones de audio. En cuanto al análisis de las resoluciones, extraer resultados apoyándonos únicamente en el documento escrito está, inevitablemente, sujeto a interpretaciones como, por ejemplo, el orden de realización o la intencionalidad de los cálculos y representaciones recogidas. En el caso de las transcripciones de audio, en las intervenciones clasificadas como episodios, en la mayoría de la ocasiones, la referencia a las categorías de análisis o las propias resoluciones se hace de forma implícita, por lo que nuevamente podríamos encontrar discrepancias, interpretaciones erróneas y sesgos de las investigadoras. En ambos sentidos, mantener entrevistas con los participantes en las que se profundice en los procesos de resolución y evaluación que llevaron a cabo ayudaría a reducir los sesgos e interpretaciones incorrectas y aumentar la fiabilidad de los resultados.

Otra de las limitaciones es referente al tiempo disponible para realizar la actividad de aula. Se contó con una sesión de dos horas de duración para llevar a cabo las cuatro fases de la actividad (resolución del problema, evaluación entre pares, autoevaluación y discusión final), lo que obligó a que la selección de las resoluciones evaluadas, el emparejamiento de las personas evaluadoras y la asignación de las resoluciones evaluadas a cada pareja se realizase aleatoriamente. Disponer de tiempo para analizar las respuestas entre la primera fase (resolución del problema) y la segunda (evaluación entre pares) podría haber permitido elegir las resoluciones más interesantes para ser evaluadas, formar las parejas evaluadoras atendiendo a criterios relacionados con sus resoluciones, o asignar las resoluciones evaluadas según diferencias y similitudes con las de los componentes de las parejas.

Los recursos utilizados para la resolución del problema planteado, esto es, lápiz y papel, pueden considerarse una limitación, aunque nos sugieren también una perspectiva de futuro pues se podría pensar en la utilización de la tecnología para resolverlo. En el estudio, se ha mostrado que, en algunos casos, realizar la representación gráfica de la parábola y las rectas contando solo con lápiz y papel supuso un obstáculo en las resoluciones de los participantes (secciones 4.1.7 y 4.1.11), conduciéndolos a cometer errores que podrían haberse solventado fácilmente con el uso de herramientas como, por ejemplo, *GeoGebra*. Como perspectiva de futuro podría plantearse la resolución del problema disponiendo de herramientas tecnológicas de representación y realizar un análisis comparativo de las resoluciones con y sin tecnología. Surgirían entonces nuevas preguntas de investigación como si aumenta el número de participantes que se apoya en la representación gráfica de la parábola, qué variaciones se aprecian en cuanto a los casos estudiados y las soluciones presentadas o si desaparecen ciertos errores.

Como perspectiva de futuro inmediata con los datos disponibles de esta misma investigación, se plantea el estudio de la tercera y cuarta fase de la actividad (autoevaluación y discusión final). Analizar las autoevaluaciones, sin duda, revelará interesantes resultados, no solo acerca de la autopercepción de los estudiantes, sino de la influencia de la evaluación entre pares en ella. Y, por su parte, el análisis de la discusión grupal mantenida al finalizar la actividad (grabada en vídeo) permitirá ahondar en las impresiones y valoraciones de los participantes sobre cada una de las fases llevadas a cabo, esto es, la resolución del problema, la evaluación entre pares y la autoevaluación, así como en sus preocupaciones e inquietudes en torno a ellas.

Partiendo de los propios datos obtenidos en esta investigación se podrían plantear futuros estudios en torno a la primera fase de la actividad (resolución del problema) como, por ejemplo, la tasa de éxito según las estrategias utilizadas, profundizar en el análisis de los errores, o extraer resultados acerca de la función que tiene la representación gráfica de la parábola en los procesos de resolución: ¿qué uso hacen de ella?, ¿se trata realmente de una estrategia de resolución o es simplemente un procedimiento adquirido?, ¿cómo influye en la obtención de soluciones correctas?

También se pueden plantear nuevas investigaciones, con base en este estudio, relacionadas con la segunda fase de la actividad (evaluación entre pares). En el trabajo presentado en esta memoria cada pareja evaluó únicamente una resolución, por lo que se dejaron ocho resoluciones sin evaluar. Este aspecto no tiene relevancia en el estudio actual, pues el objetivo era analizar el proceso de evaluación de los profesores de secundaria en formación y no proporcionarles retroalimentación de la evaluación entre pares. Sin embargo, someter a evaluación todas las resoluciones o que una misma pareja evalúe más de una resolución permitiría realizar otro tipo de análisis. Además de enriquecer los resultados ya obtenidos, podrían plantearse otras cuestiones como ¿qué tipo de resoluciones reciben una mejor valoración?, ¿con qué resoluciones muestran más dudas los evaluadores?, ¿se apoyan en la comparación si evalúan más de una resolución?

Por último, habiendo observado las riquezas que ofrece la utilización de problemas de final abierto, tanto en su resolución como en su evaluación y, como contribución al proyecto de investigación que está siendo desarrollado por el Área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de La Laguna (PID2022-139007NB-I00), podría plantearse la incorporación de problemas de final abierto a actividades de formulación de problemas con el objetivo de analizar el impacto en las características de los problemas formulados.

Referencias

Alvidrez, M., Louie, N. y Tchoshanov, M. (2022). From mistakes, we learn? Mathematics teachers' epistemological and positional framing of mistakes. *Journal of Mathematics Teacher Education*. https://doi.org/10.1007/s10857-022-09553-4

Allal, L. (2013). Teachers' professional judgment in assessment: a cognitive act and a socially situated practice. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 20*(1), 20-34. https://doi.org/10.1080/0969594X.2012.736364

Amado, N., Carreira, S. y Jones, K. (2018). *Broadening Research on Mathematical Problem-Solving. A Focus on Technology, Creativity and Affect*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99861-9

Amaya-de-Armas, T.R. y Medina-Rivilla, A. (2013). Dificultades de los estudiantes de grado once al hacer transformaciones de representaciones de una función con el registro figural como registro principal. *Educación Matemática , 25*(2), 119-140.

Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic fermi problems for introducing mathematical modeling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast, 6*(3), 331-364. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1157

Arnal-Bailera, A., Muñoz-Escolano, J. M., y Oller- Marcén, A. M. (2018). Análisis de las anotaciones realizadas por profesores al calificar pruebas escritas de matemáticas. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P., Alonso, F. J. García García, y A. Bruno (Eds.), *Investigación en educación matemática XXII,* (pp. 131-140). SEIEM.

Ayalon, M., y Wilkie, K. J. (2021). Investigating peer assessment strategies for mathematics pre-service teacher learning on formative assessment. *Journal of Mathematics Teacher Education, 24*, 399-426. https://doi.org/10.1007/s10857-020-09465-1

Bakker, A., Cai, J., y Zenger, L. (2021). Future themes of mathematics education research: An international survey before and during the pandemic. *Educational Studies in Mathematics, 107***,** 1-24. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10049-w

Baumert, J. y Kunter, M. (2013). The COACTIV Model of Teachers' Professional Competence. En Kunter M., Baumert J., Blum W., Klusmann U., Krauss S., Neubrand M. (Eds.), *Cognitive Activation in the Mathematics Classroom and Professional Competence of Teachers, Mathematics Teacher Education*, (pp.25-48). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5149-5_2

Beaver C., y Beaver. S. (2011). The effect of peer assessment on the attitudes of pre-service elementary and middle school teachers about writing and assessing mathematics. *IUMPST: The Journal, 5*, 1-14.

Black, P. y Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability, 21*, 5-31. https://doi.org/10.1007/s11092-008-9068-5

Brantlinger, E., Jimenez, R., Klingner, J., Pugach, M. y Richardson, V. (2005). Qualitative Studies in Special Education. *Exceptional Children. 71*, 195-207. https://doi.org/10.1177/001440290507100205

Cáceres, M. J. y Chamoso, J. M. (2015). La evaluación sobre la resolución de problemas de matemáticas. En L. Blanco, J. A. Cárdenas y A. Caballero (Eds.), *La resolución de problemas de Matemáticas en la formación inicial de profesores de Primaria* (pp. 225-241). Cáceres: Universidad de Extremadura.

Cai, J., y Lester, F. (2010). *Why is teaching with problem-solving important to student learning?* National Council of Teachers of Mathematics.

Callejo, M. L. y Vila, A. (2009). Approach to mathematical problem solving and students' belief systems: two case studies. *Educational Studies in Mathematics, 72*, 111–126. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9195-z

Camacho-Martín, M., Perdomo-Díaz, J. y Santos-Trigo, M. (2012). An exploration of students' conceptual knowledge built in a first ordinary differential equations course (Part I). *The Teaching of Mathematics, 15*(1), 1-20.

Cárdenas, J. A., Blanco, L. J., Guerrero, E., y Caballero, A. (2016). Manifestaciones de los profesores de matemáticas sobre sus prácticas de evaluación de la resolución de problemas. *Bolema, 30*(55), 649-669. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a17

Carrillo, J. (2009). Resolución de problemas. su concreción en algunos recursos clásicos. *Revista Educación Y Pedagogía*, *15*(35), 151–161. Recuperado a partir de https://revistas.udea.edu.co/index.php/revistaeyp/article/view/5950

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. A. (2019). Mathematics Teachers' Specialised Knowledge in Managing Problem-Solving Classroom Tasks. En P. Felmer, P. Liljedahl y B. Koichu (Eds.). *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development* (pp. 297-316). Springer. http://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7_16

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII CERME* (pp. 2985-2994). Antalya.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge

(MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Castillo-Arredondo, S. (1999). Sentido educativo de la evaluación en la Educación Secundaria. *Educación XX1: Revista de la Facultad de Educación, 2*, 65- 96.

Castro-Martínez, E. y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2018). Matemáticas y resolución de problemas. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (2ª ed., pp.89-106). Pirámide.

Chan, M. C. E. y Clarke, D. (2017). Structured affordances in the use of open-ended tasks to facilitate collaborative problem solving. *ZDM Mathematics Education, 49*, 951-963. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0876-2

Chanudet, M. (2019). Assessing inquiry-based mathematics education with both a summative and formative purpose. En P. Liljedahl, y M. Santos- Trigo (Eds.), *Mathematical problem-solving: Current themes, trends, and research* (pp. 177-207). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_9

Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT, 3*(1), 19-36. https://doi.org/10.31129/lumat.v3i1.1049

Contreras González, L. C. (2021). La resolución de problemas en la formación inicial del profesorado de Primaria: una experiencia de aula. *Realidad Y Reflexión*, *53*(53), 208–227. https://doi.org/10.5377/ryr.v53i53.10896

Creswell, J. W. (2012). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research*. Pearson.

Custodia, E., Márquez, C. y Sanmartí, N. (2015). Aprender a justificar científicamente a partir del estudio del origen de los seres. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(2), 133-155. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1316

de-Armas-González, P., Perdomo-Díaz, J., Sosa-Martín, D. (2021a). Proceso de evaluación entre pares en la resolución de problemas en futuros docentes. Estudio de un caso. En P. D. Diago, D. F. Yáñez , M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XXIV*. Valencia: SEIEM. pp. 229 - 236.

de-Armas-González, P., Sosa-Martín, D. N. y Perdomo-Díaz, J. (2021b). Aportes de una actividad de evaluación entre pares a la formación matemática de futuros maestros de educación primaria. En A. Guarro-Pallás, M. Area-Moreira, J. Marrero-Alonso y J. J. Sosa-Alonso (Eds.), *La transformación digital de la universidad: XI CIDU Congreso Iberoamericano de Docencia Universitaria* (pp. 2762-2764). Universidad de La Laguna.

de-Armas-González, P., Sosa-Martín, D. N. y Perdomo-Díaz, J. (2021c). Valoración realizada por maestras y maestros de Educación Primaria en formación de una actividad de evaluación entre pares con tareas matemáticas. En A. Vico-Bosch, L. Vega-Caro y O. Buzón-García (Eds.), *Entornos virtuales para la educación en tiempos de pandemia: Perspectivas metodológicas* (pp. 720-740). Dykinson.

de-Armas-González, P., Sosa-Martín, D. N. y Perdomo-Díaz, J. (2021d). Valoración y percepción de maestros de Educación Primaria en formación sobre la evaluación entre pares desde la perspectiva de evaluador. En C. Rodríguez-Jiménez, M. Ramos-Navas-Parejo, J.M. Sola-Reche y J. M. Romero-Rodríguez (Eds.), *Escenarios educativos investigadores: hacia una educación sostenible* (pp. 1602-1613). Dykinson.

de-Armas-González, P., Perdomo-Díaz, J., Sosa-Martín, D. (2022a). Resoluciones de profesores de matemáticas de secundaria en formación a un problema de final abierto. En Blanco, T. F., Núñez-García, C., Cañadas, M. C. y González-Calero, J. A. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XXV.* Santiago de Compostela: SEIEM. pp. 229 - 237.

de-Armas-González, P., Sosa-Martín, D., Perdomo-Díaz, J. (2022b). Preservice secondary mathematics teachers' solutions to an open-ended problem. In C. Fernández, S. Llinares, A. Gutiérrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, p. 200). PME.

de-Armas-González, P., Perdomo-Díaz, J., Sosa-Martín, D. (2023). Peer assessment processes in a problem-solving activity with future teachers. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *19*(1), em2245. https://doi.org/10.29333/ejmste/13057

Decreto 211/2022, de 10 de noviembre, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Canarias. BOC Nº 231. Miércoles 23 de noviembre de 2022 - 3533.

Decreto 30/2023, de 16 de marzo, por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Canarias. BOC Nº 058. Jueves 23 de marzo de 2023 - 848.

Di-Martino, P. y Signorini, G. (2019). Beyond the Standardized Assessment of Mathematical Problem Solving Competencies: From Products to Processes. En P. Liljedahl, y M. Santos- Trigo (Eds.), *Mathematical problem-solving: Current themes, trends, and research* (pp. 209.230). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_10

Díaz, M. E., Haye, E. E., Montenegro, F. y Córdoba, L. (2015). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 41*, 20-38.

Drijvers, P., Kodde-Buitenhuis, H., y Doorman, M. (2019). Assessing mathematical thinking as part of curriculum reform in the Netherlands. *Educational Studies in Mathematics, 102*, 435-456. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09905-7

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*, 37-65.

Eccles, J. S., y Wigfield, A. (2002). Motivational beliefs, values, and goals. *Annual Review of Psychology, 53*(1), 109-132. https://doi.org/10.1146/annurev.psych.53.100901.135153

Fan, L. y Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics 66*, 61–75. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9069-6

Felmer, P., Liljedahl, P., y Koichu, B. (Eds). (2019). *Problem-solving in mathematics instruction and teacher professional development.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29215-7

Felmer, P. y Perdomo-Díaz, J. (2016). Novice Chilean secondary mathematics teachers as problem solvers. En P. Felmer et al. (Eds.), *Posing and solving mathematical problems*. Research in Mathematics Education. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_17

Fernández-Bravo, J. A. (2010). *La resolución de problemas matemáticos: creatividad y razonamiento en la mente de los niños.* Grupo Mayéutica Educación.

Fernández-Plaza, J. A. (2016). Errores y dificultades. En L. Rico-Romero y A. Moreno-Verdejo (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesorado de secundaria.* Pirámide.

Ferrando, I., Segura, C. y Pla-Castells, M. (2017). Diseño y evaluación de un curso de formación continua en modelización. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 227-236). SEIEM.

Font, V., J. Godino y B. D'Amore (2007), Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. En A. Maz-Machado, B. Gómez-Alfonso y M. Torralbo-Rodríguez, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática IX*. SEIEM.

Goldin, G. A. (1998). Representations and the psychology of mathematics education: part II. *Journal of mathematical Behaviour, 17*(2), 135-165.

Goldin G. A. (2009). Problem solving heuristics, affect, and discrete mathematics: a representational discussion. En B. Sriraman, L. English (Eds.), *Theories of mathematics education: seeking new frontiers* (pp 241–250). Springer.

Goldin, G. A. (2014). Mathematical Representations. En S. Lerman, (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_103

Goos, M. (2014). Mathematics classroom assessment. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 413-417). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8

Groner, R., Groner, M., y Bischof, W. (Eds.). (1983). *Methods of heuristics*. Erlbaum.

Guberman, R. y Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*, 33-56. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9210-7

Guerrero-Ortiz, C.; Mejía H. y Camacho-Machín, M. (2016). Representations of a mathematical model as a means of analysing growth phenomena. *Journal of Mathematical Behavior, 42*, 109-126. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.03.001

Hanrahan, S. J. y Isaacs, G. (2001). Assessing Self- and Peer-assessment: the students' views. *Higher Education Research & Development, 20*(1), 53-70. https://doi.org/10.1080/07294360123776

Haylock, D. (1997). Recognizing Mathematical Creativity in Schoolchildren. *Mathematical Education, 29*(3), 68-74. https://doi.org/10.1007/s11858-997-0002-y

Hernández, A. (2021). *Resolución de problemas con GeoGebra en la formación inicial de profesores de matemáticas: Un análisis desde la actividad matemática*. [Tesis de doctorado, Universidad de La Laguna]. Repositorio Institucional de la Universidad de La Laguna.

Hernández, A., Perdomo-Díaz, J. y Camacho-Machín, M. (2020). Mathematical understanding in problem solving with GeoGebra: a case study in initial teacher education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(2), 208-223. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1587022

Hitt, F. (2003). Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*(2), 213-224.

Iannone, P., y Simpson, A. (2021). How we assess mathematics degrees: the summative assessment diet a decade on. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA, 41,* 22-31. https://doi.org/10.1093/teamat/hrab007

Ingram, N., Holmes, M., Linsell, C., Livy, S., McCormick, M. y Sullivan, P. (2020). Exploring an innovative approach to teaching mathematics through the use of challenging tasks: a New Zealand perspective. *Mathematics Education Research Journal, 32*(3), 497-522. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00266-1

Jacinto, H., y Carreira, S. (2017). Mathematical Problem Solving with Technology: the TechnoMathematical Fluency of a Student-with-GeoGebra. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*, 1115-1136. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9728-8

Janvier, C. (Ed.). (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Lawrence Erlbaum Associates.

Jiang, C., Hwang, S. y Cai, J. (2014). Chinese and Singaporean sixth-grade students' strategies for solving problems about speed. *Educational Studies in Mathematics 87*, 27–50. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9559-x

Jones, I., y Alcock, L. (2014). Peer assessment without assessment criteria. *Studies in Higher Education, 39*(10), 1774-1787. https://doi.org/10.1080/03075079.2013.821974

Kaput, J. (1987). Representation systems and mathematics. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp.19-26). Lawrence Erlbaum Associates.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. National Academy Press. https://doi.org/10.17226/9822

Kolovou, A., Van den Heuvel-Panhuizen, M., y Bakker, A. (2009). Non-routine problem solving tasks in primary school mathematics textbooks. A needle in a haystack. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *8*(2), 31–68.

Lavy, I., y Shriki, A. (2014). Engaging prospective teachers in peer assessment as both assessors and assessees: The case of geometrical proofs. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*.

Lehmann, T.H. (2023). Learning to measure the area of composite shapes. *Educational Studies in Mathematics*, *112*, 531–565. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10191-z

Leikin, R. (2008). Teams of prospective mathematics teachers: Multiple problems and multiple solutions. En T. Wood y K. Krainer (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education: Vol. 3. Participants in mathematics teacher education: individuals, teams, communities, and networks* (pp. 63–88). Sense Publishers.

Lesh, R. y Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763-804). NCTM.

Lester, F. K. (2013). Thoughts about research on mathematical problem-solving instruction. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1-2), 245-278. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1267

Lester, F. K. y Cai, J. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems* (pp. 117-135). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_8

Liljedahl, P. (2016). Building Thinking Classrooms: Conditions for Problem-Solving. En P. Felmer, E. Pehkonen, J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and Solving Mathematical Problems* (pp. 361-386). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_21

Liljedahl, P. y Cai, J. (2021) Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art. *ZDM Mathematics Education* 53, 723–735. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w

Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., y Bruder, R. (2016). *Problem-solving in mathematics education.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-40730-2_1

Lobato, J., Hohensee, C., Rhodehamel, B., y Diamond, J. (2012). Using student reasoning to inform the development of conceptual learning goals: The case of quadratic functions. *Mathematical Thinking and Learning, 14*(2), 85–119. https://doi.org/10.1080/10986065.2012.656362

Löfgren, R., Löfgren, H., y Lindberg, V. (2019). Pupils' perceptions of grades: A narrative analysis of stories about getting graded for the first time. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 26*(3), 259-277. https://doi.org/10.1080/0969594X.2019.1593104

Loh, M. Y. y Lee, N. H. (2019). The Impact of Various Methods in Evaluating Metacognitive Strategies in Mathematical Problem Solving. En P. Liljedahl y M. Santos-Trigo (Eds.). *Mathematical Problem Solving. Current Themes, Trends, and Research* (pp. 155-176). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_8

Lupiáñez-Gómez, J. L. (2016). Sistemas de representación. En L. Rico-Romero y A. Moreno-Verdejo (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesorado de secundaria.* Pirámide.

Mäkipää, T., y Ouakrim-Soivio, N. (2020). Finnish upper secondary school students' perceptions of their teachers' assessment practices. *Journal of Teaching and Learning, 13*(2), 23-42. https://doi.org/10.22329/jtl.v13i2.5971

Mangwende, E., y Maharaj, A. (2018). Secondary School Mathematics Teachers' Use of Students' Learning Styles When Teaching Functions: A Case of Zimbabwean Schools. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(7), 3225-3233. https://doi.org/10.29333/ejmste/91679

Martínez, M., Araya, P. y Berger, B. (2017). Descripción del cambio del profesor de matemática desde su propia perspectiva a partir de una experiencia en torno a resolución de problemas de final abierto. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*(59), 984-1004. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a07

Mason, J. (2015). When is a problem? Contribution in honor of Jeremy Kilpatrick. En E. Silver y C. Keitel-Kreidt (Eds.), *Pursuing excellence in mathematics education* (pp. 55-69). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-11952-6_4

Mason, J. (2016). When Is a Problem…? "When" Is Actually the Problem! En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.) *Posing and Solving Mathematical Problems* (pp. 263-285). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_16

McCallum, W. (2018). Excavating school mathematics. En N. H. Wasserman (Ed.), *Connecting abstract algebra to secondary mathematics, for secondary mathematics teachers* (pp. 87–101). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99214-3_5

Ministry of Education Singapore. (2012). *Mathematics Syllabus. Primary one to six.* https://www.moe.gov.sg/-/media/files/primary/mathematics_syllabus_primary_1_to_6.pdf

Ministry of Education Singapore. (2023). *Mathematics Syllabus. Secondary one to four. Express course. Normal (academic) course.* https://www.moe.gov.sg/-/media/files/secondary/syllabuses/maths/2020-express_na-maths_syllabuses.pdf

Modabbernia, N., Yan, X. y Zazkis, R. (2023). When algebra is not enough: a dialogue on the composition of even and odd functions. *Educational Studies in Mathematics 112*, 397–414. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10189-7

Mogessie, M. (2015). Peer assessment in higher education–twenty-first century practices, challenges and the way forward. *Assessment & Evaluation in Higher Education, 42*(2), 226-251. https://doi.org/10.1080/02602938.2015.1100711

Monaghan, J., Pool, P., Roper, T., y Threlfall, J. (2009). Open-start mathematics problems: An approach to assessing problem solving. *Teaching Mathematics and Its Application, 28*, 21–31.

Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E., Jiménez-Fanjul, N., Adamuz-Povedano, N., y León-Mantero, C. (2017). Modelización como proceso básico en la resolución de problemas contextualizados: un análisis de necesidades. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 347-356). SEIEM.

Morgan, C. (2020). Mathematical Language. En S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 540-543). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_99

Mousoulides, N. y Sriraman, B. (2014). Heuristics in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 253-255). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Goh, S., y Cotter, K. (Eds.) (2016). *TIMSS 2015 Encyclopedia: Education Policy and Curriculum in Mathematics and Science*. TIMSS & PIRLS International Study Center. Recuperado de: http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/encyclopedia/

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics*.

Common Core State Standards Initiative (2021). *Common core state standards for mathematics*. https://corestandards.org/wp-content/uploads/2023/09/Math_Standards1.pdf

Nieminen, J. H., y Atjonen, P. (2022). The assessment culture of mathematics in Finland: A student perspective. *Research in Mathematics Education*. https://doi.org/10.1080/14794802.2022.2045626

Nortvedt, G., Santos, L., y Pinto, J. (2016). Assessment for learning in primary school mathematics teaching: The case of Norway and Portugal. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 23*(3), 377-395. https://doi.org/10.1080/0969594X.2015.1108900

Ochoviet, C. (2020). *Los problemas de final abierto Oportunidades de aprendizaje para todos*. Camus Ediciones.

OECD. (2023). *PISA 2022 Assessment and Analytical Framework*. PISA, OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en

Olson, J. C., y Knott, L. (2013). When a problem is more than a teacher's question. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(1), 27-36. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9444-4

Perdomo-Díaz, J., y Felmer, P. (2017). El taller RPAula: Activando la resolución de problemas en las aulas. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado*, *21*(2), 425-444. https://doi.org/10.30827/profesorado.v21i2.10343

Philpot, R., Lindquist, M., Mullis, I., y Aldrich, C. E. A. (2022). Marco teórico de matemáticas. TIMSS 2023. En I.V.S. Mullis, M.O. Martin y M. von Davier (Eds.). *Marcos de Evaluación TIMSS 2023, 1* (pp. 11-24). TIMSS & PIRLS International Study Center.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press. https://doi.org/10.1515/9781400828678

Real Decreto 157/2022, de 1 de marzo, por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. BOE Nº 52. Sec. I. Pág. 24386

Real Decreto 217/2022, de 29 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas mínimas de la Educación Secundaria Obligatoria. BOE Nº 76. Miércoles 30 de marzo de 2022. Sec. I. Pág. 41571

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática* (pp.. 69-96) Grupo Editorial Iberoamérica.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Roesken, B., Hannula, M. S. y Pehkonen, E. (2011). Dimensions of students' views of themselves as learners of mathematics. *ZDM Mathematics Education, 43*, 497-506. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0315-8

Sadler, P. M., y Good, E. (2006). The impact of self- and peer-grading on student learning. *Educational Assessment, 11*(1), 1-31. https://doi.org/10.1207/s15326977ea1101_1

Santos-Trigo, M. (2008). La resolución de problemas matemáticos: avances y perspectivas en la construcción de una agenda de investigación y práctica. *Investigación en educación matemática XII*.

Santos-Trigo, M. (2014). *La resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos.* Trillas.

Santos-Trigo, Manuel. (2020a). La Resolución de Problemas Matemáticos: Conectando el trabajo de Polya con el desarrollo del razonamiento digital.

Santos-Trigo, M. (2020b). Problem-Solving in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education*. (pp. 686-693) Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_129

Santos-Trigo, M.; Barrera-Mora, F. y Camacho-Machín, M. (2021). Teachers' Use of Technology Affordances to Contextualize and Dynamically Enrich and Extend Mathematical Problem-Solving Strategies. *Mathematics, 9*(8), 793. https://doi.org/10.3390/math9080793

Santos-Trigo, M. y Camacho-Machín, M. (2013). A Problem Solving Framework that enhances the use of computational technology. *The Mathematics Enthusiast Journal, 10*(1 y 2), 279-302.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem-solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). MacMillan.

Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on problem solving theory and practice. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1-2), 9-34. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1258

Schroeder, T. L. y Lester, F. K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. En P. R. Trafton y A. P. Schulte (Eds.), *New directions for elementary school mathematics* (pp. 31-42). NCTM.

Scruggs, T. E., y Mastropieri, M. A. (1998). Tutoring and students with special needs. En K. J. Topping y S. Ehly (Eds.), *Peer-assisted learning* (pp. 165-182). Lawrence Erlbaum Associates.

Segovia-Alex, I. (2016). Evaluación en matemáticas. En L. Rico-Romero y A. Moreno-Verdejo (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesorado de secundaria.* Pirámide.

Seifert, T., y Feliks, O. (2018). Online self-assessment and peer- assessment as a tool to enhance student- teachers' assessment skills. *Assessment & Evaluation in Higher Education, 44*(2), 169-185. https://doi.org/10.1080/02602938.2018.1487023

Sevinc, S. (2023). Knowledge‑in‑action for crafting mathematics problems in realistic contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education, 26*, 533–565. https://doi.org/10.1007/s10857-022-09541-8

Shahbari, J. A., y Abu-Alhija, F. N. (2018). Does training in alternative assessment matter? The case of prospective and practicing mathematics teachers' attitudes toward alternative assessment and their beliefs about the nature of mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education, 16*(7), 1315-1335. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9830-6

Silver, E. A., y Mills, V. L. (Eds.) (2018). *A fresh look at formative assessment in mathematics teaching.* The National Council of Teachers of Mathematics.

Siarova, H., Sternadel, D. y Mašidlauskaitė, R. (2017). *Assessment practices for 21st century learning: review of evidence: NESET II report*. Publications Office of the European Union. https://doi.org/10.2766/71491

Socas-Robayna, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho-Machín, P. Flores-Martínez y P. Bolea-Catalán (Eds.), *Investigación en educación matemática XXII,* (pp. 19-52). SEIEM.

Son, J. W. y Lee, M. Y. (2021). Exploring the Relationship Between Preservice Teachers' Conceptions of Problem Solving and Their Problem-Solving Performances. *International Journal of Science and Mathematics Education* 19, 129–150. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10045-w

Sosa-Martín, D., de Armas-González, P. y Perdomo-Díaz, J. (en preparación). Valoración y percepción de la evaluación entre pares como actividad formativa en matemáticas para maestras/os de Educación Primaria.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research.* SAGE.

Stake, R. (2000). Case studies. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 435–454). Sage.

Stylianou, D. A. (2011). An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: towards an organizing scheme. *Educational Studies in Mathematics, 76*, 265-280. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-010-9273-2

Suurtamm, C., Koch, M., y Arden, A. (2010). Teachers' assessment practices in mathematics: Classrooms in the context of reform. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practices, 17*(4), 399-417. https://doi.org/10.1080/0969594X.2010.497469

Szetela, W., y Nicol, C. (1992). Evaluating problem-solving in mathematics. *Educational Leadership, 49*(8), 42-45.

Thompson, D. R., Burton, M., Cusi, A. y Wright, D. (2018). Formative assessment: a critical component in the teaching-learning process. En D. Thompson, M. Burton, A. Cusi, y D. Wright (Eds). *Classroom Assessment in Mathematics* (pp. 3-8). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-73748-5_1

Tjoe, H. (2019). "Looking Back" to solve differently: Familiarity, fluency, and flexibility. En P. Liljedahl y M. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical problem solving* (pp. 3-20). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-10472-6_1

Topping, K. J. (2009). Peer assessment. *Theory into Practice, 48*(1), 20-27. https://doi.org/10.1080/ 00405840802577569

Topping, K. J. y Ehly. S. (Eds.). (1998). *Peer-assisted learning*. Lawrence Erlbaum Associates.

Tschannen-Moran, M., Hoy, A. W., y Hoy, W. K. (1998). Teacher efficacy: Its meaning and measure. *Review of Educational Research, 68*(2), 202-248. https://doi.org/10.3102/00346543068002202

Ukobizaba, F., Nizeyimana, G., y Mukuka, A. (2021). Assessment strategies for enhancing students' mathematical problem-solving skills: A review of literature. *EURASIA*

Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 17(3), em1945. https://doi.org/10.29333/ejmste/9728

van Es, E. y Sherin, M. (2009). The influence of video clubs on teachers' thinking and practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*, 155-176. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9130-3

Voogt, J.; Pareja Roblin, N. (2012). A comparative analysis of international frameworks for 21st century competences: Implications for national curriculum policies. *Journal of Curriculum Studies, 44*(3), pp. 299-321. https://doi.org/10.1080/00220272.2012.668938

Watson, A. (2000). Mathematics teachers acting as informal assessors: Practices, problems and recommendations. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 69-91. https://doi.org/10.1023/A:1003933431489

Weber, K. y Leikin, R. (2016). Recent advances in research on problem solving and problem posing. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 353-382). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_10

Wiliam, D. (2007). Keeping learning on track: classroom assessment and the regulation of learning. En F.K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1053–1098). Charlotte: Information Age Publishing.

Wiliam, D., y Thompson, M. (2007). Integrating assessment with instruction: What will it take to make it work? En C. A. Dwyer (Ed.), *The future of assessment: Shaping teaching and learning* (pp. 53-82). Erlbaum. https://doi.org/10.4324/9781315086545-3

Wilkie, K.J. (2022). Coordinating visual and algebraic reasoning with quadratic functions. *Mathematics Education Research Journal*. https://doi.org/10.1007/s13394-022-00426-w

Woolfolk Hoy, A., Hoy, W. K., y Davis, H. A. (2009). Teachers' self-efficacy beliefs. En K. R. Wentzel y A. Wigfield (Eds.), *Handbook of motivation in school* (pp. 627-653). Routledge

Wyatt-Smith, C., Klenowski, V., y Gunn, S. (2010). The centrality of teachers' judgement practice in assessment: A study of standards in moderation. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 17*(1), 59-75. https://doi.org/10.1080/09695940903565610

Yimer, A. y Ellerton, N. F. (2010). A five-phase model for mathematical problem-solving: Identifying synergies in pre-service-teachers' metacognitive and cognitive actions.

ZDM Mathematics Education, 42, 245-261. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0223-3

Zaslavsky, O. (1995). Open-ended tasks as a trigger for mathematics teachers' professional develop- ment. *For the Learning of Mathematics, 15*(3), 15-20.

Zevenbergen, R. (2001). Peer assessment of student constructed posters: Assessment alternatives in pre-service mathematics education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4*, 95-113. https://doi.org/10.1023/A:1011401532410

Zhao, X., Van den Heuvel-Panhuizen, M. y Veldhuis, M. (2017). Chinese Primary School Mathematics Teachers' Assessment Profiles: Findings from a Large-Scale Questionnaire Survey. *International Journal of Science and Mathematical Education, 16*, 1387–1407.

Zhu, Y., y Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: a comparison of selected mathematics textbooks from mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, (4), 609-626. https://doi.org/10.1007/s10763-006-9036-9

ANEXO A.1

Resoluciones del problema de los participantes

Resolución de Antonio (E1)

Universidad de La Laguna

DOCUMENTO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Encontrar ecuaciones de rectas que tengan dos puntos de intersección con la parábola $y=x^2+4x+5$.

Para ver que rectas cortan a la parábola tomaremos la ecuación general de una recta cualquiera $y=ax+b$ y la igualaremos a la ecuación de la parábola.

$$x^2+4x+5=ax+b \Rightarrow x^2+(4-a)x+(5+b)=0$$

A continuación resolvemos la ecuación de segundo grado y cuando haya dos soluciones para valores de a y b, significará que la recta intersecta a la parábola en dos puntos (salvo cuando la solución sea doble.

$$x=\frac{-(4-a)\pm\sqrt{(4-a)^2-4\cdot 1\cdot(5+b)}}{2}$$

cuando la de dentro de la raíz sea mayor que cero habrá dos soluciones

$$16-4a+a^2-20-4b \geq 0; \quad a^2-4a-4(b+1)>0$$

$$a=\frac{4\pm\sqrt{16\cancel{a}+4\cdot 4\cdot(b+1)}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{+16b}}{2}=2\pm 2\sqrt{+b}$$

Ahora vemos en que intervalos se cumple la ecuación, para los 3 casos posibles de b

1) $b \neq 0$ ~~∞~~

$a^2 - 4a - 4 > 0$

$$a = \pm 4 \pm \frac{\sqrt{16+16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2} = 2 \pm \sqrt{8}$$

$+ \quad 2-\sqrt{8} \quad - \quad 2+\sqrt{8} \quad +$

$a \in (-\infty, 2-\sqrt{8}) \cup (2+\sqrt{8}, \infty)$ y $b = 0$

~~$(b \neq 0)$~~ $b > 0$

$+ \quad 2-2\sqrt{+b} \quad - \quad 2+2\sqrt{b} \quad +$

$$(-2\sqrt{b})^2 - 4\cdot(-2\sqrt{b}) - 4b - 4 = +4b + 8\sqrt{b} - 4b - 4 > 0$$

Cuando $a \in (-\infty, 2-2\sqrt{b}) \cup (2+2\sqrt{b}, \infty)$

Resolución de Victoria (E2)

Universidad de La Laguna

DOCUMENTO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Encontrar ecuaciones de rectas que tengan dos puntos de intersección con la parábola $y=x^2+4x+5$.

Sabemos que una recta debe tener la forma $y = ax + b$

~~Si queremos que haya~~ dos puntos de intersección deben verificar ambas ecuaciones.

$$y = ax + b$$
$$y = x^2 + 4x + 5$$

Por lo que $ax + b = x^2 + 4x + 5 \Rightarrow x^2 + (4-a)x + 5 - b = 0$

Resolvemos.

$$x = \frac{(a-4) \pm \sqrt{(4-a)^2 - 4(5-b)}}{2} = \frac{(a-4) \pm \sqrt{16 - 8a + a^2 - 20 + 4b}}{2} =$$

$$= \frac{(a-4) \pm \sqrt{a^2 - 8a - 4 + 4b}}{2}.$$

Analicemos esta solución: Si el discriminante $(a^2 - 8a - 4 + 4b)$ es igual a cero solo tendríamos un valor para el cual la recta se corta con la parábola.

$$a^2 - 8a - 4 + 4b = 0$$

Si el discriminante no fuera así se cortaría la recta con la parábola en dos puntos por lo que descartamos los valores para los que

$$a^2 - 8a - 4 + 4b = 0$$

Las rectas que ~~intersectarán~~ tienen dos intersecciones con la parábola son

$y = ax + b$, tal que $a^2 - 8a - 4 + 4b \neq 0$

Resolución de David (E3)

Universidad
de La Laguna

DOCUMENTO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Encontrar ecuaciones de rectas que tengan dos puntos de intersección con la parábola $y=x^2+4x+5$.

La ecuación de una recta es de la forma $y = ax+b$. Para que haya intersección con la parábola debe ocurrir que:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2+4x+5 \\ y = ax+b \end{array}\right\} \iff x^2+4x+5-ax-b=0$$

$\iff x^2+(4-a)x+(5-b)=0$. Resolviendo la ecuación

$$x = \frac{-(4-a) \pm \sqrt{(4-a)^2-4\cdot 1\cdot(5-b)}}{2\cdot 1}$$

Para que la ecuación tenga dos soluciones reales (cortes entre recta y parábola)

$(4-a)^2-4(5-b) > 0$ $\left(\begin{array}{ll} =0 & \text{solución única} \\ <0 & \text{no hay cortes} \end{array}\right)$

$\Rightarrow (4-a)^2 > 4(5-b)$ Dos soluciones son $\boxed{a=1 \wedge b=3}$

$\boxed{a=-2 \quad b=1}$

ya que $9 > 8 \wedge 36 > 16$ (Sustituyendo las dos soluciones respectivamente)

Las rectas consecuentes son

$$\boxed{\begin{array}{l} 1)\ y = x + 3 \\ 2)\ y = -2x + 1 \end{array}}$$ ⇐ Solución al problema

comprobación

Verificamos:

1) $\left.\begin{array}{l} y = x^2 + 4x + 5 \\ y = x + 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

(corta en $(-1, 2)$ (Si $x = -1$) $(-2, 1)$ (Si $x = -2$))

2) $\left.\begin{array}{l} y = -2x + 1 \\ y = x^2 + 4x + 5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x^2 + 6x + 4 = 0$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{20}}{2} = -3 \pm \frac{\sqrt{20}}{2}$$

corta en $\left(\underbrace{-3 - \frac{\sqrt{20}}{2}}_{x}, \underbrace{-\frac{\sqrt{20}}{2}}_{y}\right)$, $\left(\underbrace{-3 + \frac{\sqrt{20}}{2}}_{x}, \underbrace{\frac{\sqrt{20}}{2}}_{y}\right)$

Resolución de Yolanda (E4)

Universidad de La Laguna

DOCUMENTO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Encontrar ecuaciones de rectas que tengan dos puntos de intersección con la parábola $y=x^2+4x+5$.

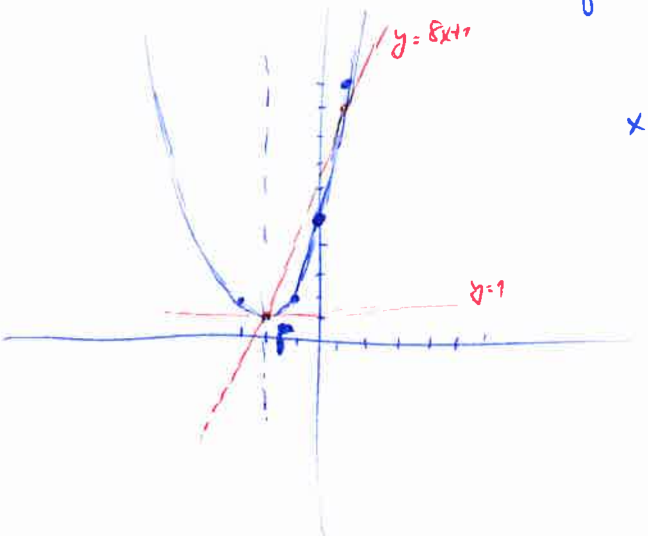
$$\begin{cases} y = mx+b \\ y = x^2+4x+b \end{cases} \Rightarrow mx+b = x^2+4x+b \Rightarrow x^2+4x-mx=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+x(4-m)=0 \Rightarrow x\,[x+(4-m)]=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=m-4. \end{cases}$$

La gráfica de la parábola es:

Un caso de rectas cuya intersección con la parábola resulten 2 puntos, son aquellas paralelas al eje OX, siendo la variable $y>1$, es decir: $\boxed{y=K}$, $K>1$.

Resolución de David (E5)



$f(x) = x^2+4x+5 = 0$

$\downarrow$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-4\cdot1\cdot5}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} =$

$= -2 \pm i$

$f'(x) = 2x+4$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2x+4 = 0 \Rightarrow x = -2$

$\cancel{f(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{4} - 2 + 5 = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{12}{4} = \tfrac{13}{4}}$

$f(-3) = 9 - 12 + 5 = 2$

Recta r: $y = ax + b$

$r \cap f \quad \{ \; ax+b = x^2+4x+5$

$\Rightarrow \quad x^2 + (4-a)x + (5-b) = 0$

$\dfrac{a-4 \pm \sqrt{(4-a)^2 - 4\cdot1\cdot(5-b)}}{2} = \dfrac{a-4 \pm \sqrt{16-8a+a^2-20+4b}}{2} = \dfrac{a-4 \pm \sqrt{a^2-8a+(4b-4)}}{2}$

Tendrá sentido cuando $\Delta \geq 0$

$a^2 - 8a + (4b-4) = 0 \Rightarrow \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 4\cdot1\cdot(4b-4)}}{2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{64-16b+16}}{2} = 4 \pm \sqrt{20-4b} =$

$= 4 \pm 2\sqrt{5-b}$

Tendrá sentido cuando $\Delta \geq 0$.

$5-b \geq 0 \Rightarrow \boxed{b \leq 5}$ y $a = 4 \pm 2\sqrt{5-b}$

Ej: $b=1 \rightarrow a = 4+2\cdot\sqrt{5-1} = 8 \rightarrow r: y = 8x+1$

$\downarrow a = 4 - 2\sqrt{5-1} = 0 \rightarrow r': y = 1$ → No vale, pasa en 1 solo punto.

$f'(x) = 2x+4$

$y = 2x+4$

$y = ax+b$

$ax+$

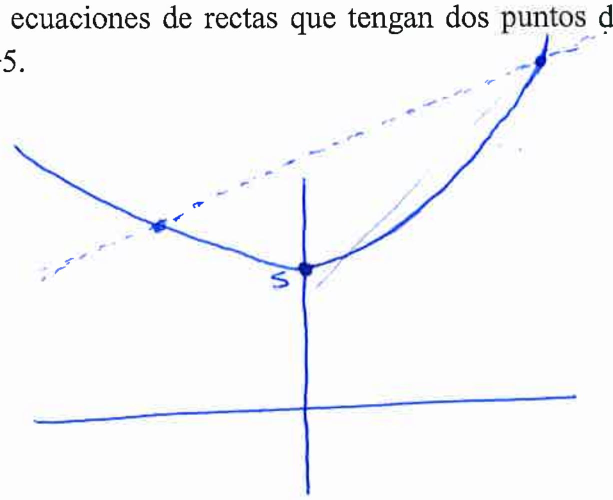
$g(x) = ax+b$

Resolución de Sandra (E6)

Universidad de La Laguna

DOCUMENTO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Encontrar ecuaciones de rectas que tengan dos puntos de intersección con la parábola $y=x^2+4x+5$.



$y = mx + n$

x	y

① Cualquier recta paralela al eje OX que esté en el semiplano $x > 5$ tendrá 2 ptos de intersección con la parábola.

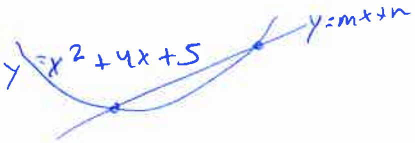
$y = x + n$ con $n > 5$.

② Cualquier recta de pendiente positiva que

$m^2 - m + 36 + 4n$

$m(m-1) + 3 + 4n > 0$

$(4-m)^2 + 4n > -20$



$x^2 + (4-m)x + 5 - n = 0$

$$x = \frac{m-4 \pm \sqrt{(4-m)^2 - 4\cdot(5-n)}}{2} = \frac{m-4 \pm \sqrt{16+m^2-8m+20+4n}}{2} =$$

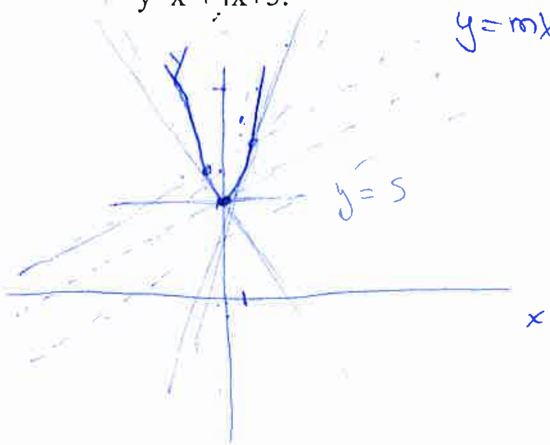
$=$

Resolución de Yurena (E7)

Universidad de La Laguna

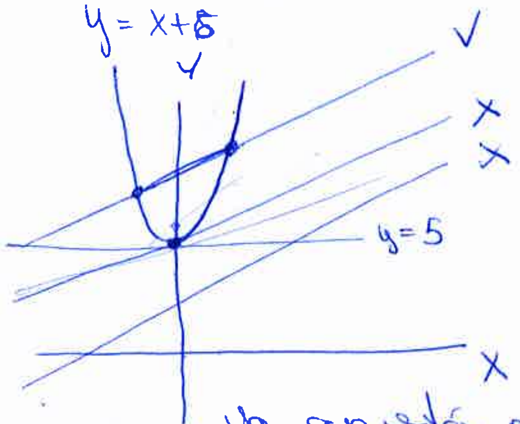
DOCUMENTO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Encontrar ecuaciones de rectas que tengan dos puntos de intersección con la parábola $y=x^2+4x+5$.



$y=mx+n$ • $y>5$

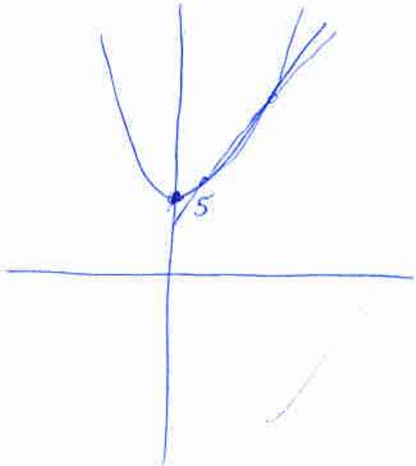
~~Recta~~: $y=mx+n$. ¿m,n?



• Al tratarse de una parábola descartamos las rectas $x=\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$, ya que al ser perpendiculares al eje x sólo cortarán la parábola en un pto. Al contrario, las rectas de la forma $y=\beta, \beta>5$, sí cortarán la parábola en 2 ptos distintos ya que estás rectas se situarán por encima del mín de dicha parábola.

• Solo nos queda estudiar el caso $y=mx+n$. ~~Para ello~~ con $m\neq 0$ y $m,n\in\mathbb{R}$. Para ello nos centraremos en las rectas con $m>0$ ya que las de pendiente negativa se tratarán de forma análoga.

$y=mx+n$ ¿m,n?, $m\neq 0$.



$$\begin{cases} y = mx+n \\ y = x^2+4x+5 \end{cases}$$

$$mx+n = x^2+4x+5$$

$$x^2+(4-m)x+(5-n)=0$$

$$x = -(4-m) \pm \sqrt{(4-m)^2-4(5-n)}$$

Resolución de Marta (E8)

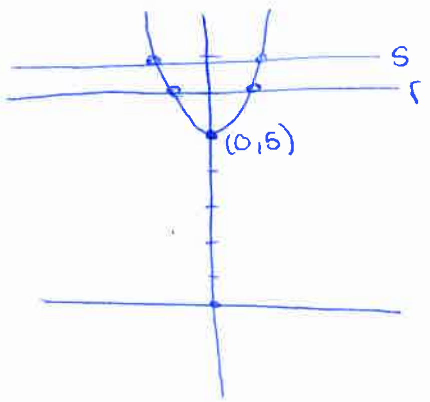
Universidad de La Laguna

DOCUMENTO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Encontrar ecuaciones de rectas que tengan dos puntos de intersección con la parábola $y=x^2+4x+5$.

$$\begin{cases} y=0 \\ x^2+4x+5=0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} \ \#$$

$x \notin \mathbb{R} \Rightarrow$ la parábola no corta el eje X.



$x=0 \Rightarrow y=5$

~~así~~ $P_3(0,5)$

Si tomamos $\boxed{y=6}$ $\boxed{y=7}$ cortan a la parábola en dos puntos distintos

$$\boxed{r: \ y=6 \ ; \ s: \ y=7}$$

Comprobamos que corten la parábola en dos puntos

$$\left.\begin{matrix} x^2+4x+5=y \\ 6=y \end{matrix}\right| \Rightarrow x^2+4x+5=6 \Rightarrow x^2+4x-1=0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{2^2 \cdot 5}}{2} =$$

$$= -2 \pm \sqrt{5}$$

Luego r corta a la parábola en $P_0(-2+\sqrt{5},6)$ y en $P_1(-2-\sqrt{5},6)$

$$\left.\begin{matrix} x^2+4x+5=y \\ 7=y \end{matrix}\right| \Rightarrow x^2+4x+5=7 \Rightarrow x^2+4x-2=0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+8}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{24}}{2} = -2 \pm \sqrt{6}$$

$\Rightarrow$ Luego s corta a la parábola en $P_2(-2+\sqrt{6},7)$ y en $P_4(-2-\sqrt{6},7)$ y así $\ast \rightarrow$

$\xrightarrow{*}$ Esto se daría para cualquier recta $y = n$, ~~[illegible]~~ $n > 5$, $n \in \mathbb{R}$

Resolución de Judith (E9)

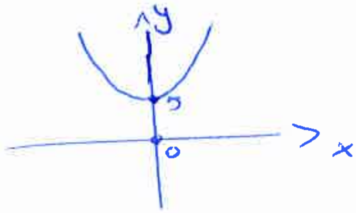
Universidad
de La Laguna

DOCUMENTO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Encontrar ecuaciones de rectas que tengan dos puntos de intersección con la parábola $y=x^2+4x+5$.

x	0
y	5

$y=6 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2}$



$y=0 \Rightarrow x^2+4x+5=0$

$\Delta = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2}$ #

Las rectas que tengan dos ptos. de intersección con la parábola son: $y=6$, $y=7$, $y=8$ ... etc; $y=\infty$

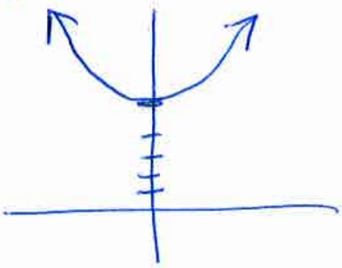
Resolución de Maite (E10)

Universidad de La Laguna

DOCUMENTO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Encontrar ecuaciones de rectas que tengan dos puntos de intersección con la parábola $y=x^2+4x+5$.

$y = x^2 + 4x + 5$



Puntos de la parábola:

y	x
5	0
10	1
17	2
26	3

las ecuaciones de una recta en general:

$y = mx + n$ (*)

1) Recta que pasa por (0,5) y (1,10). Sustituyendo en (*)

$\left.\begin{array}{l} 5 = n \\ 10 = m + 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} n = 5 \\ m = 5 \end{array} \Rightarrow y = 5x + 5$

2) Recta que pasa por (0,5) y (2,17). Sustituyendo en (*)

$\left.\begin{array}{l} 5 = n \\ 17 = 2m + 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} n = 5 \\ m = 6 \end{array} \Rightarrow y = 6x + 5$

3) Recta que pasa por (0,5) y (3,26) Sustituyendo en (*)

$\left.\begin{array}{l} 5 = n \\ 26 = 3m + 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} n = 5 \\ m = 7 \end{array} \Rightarrow y = 7x + 5$

Podemos ver que:

$y = 5x + 5$
$y = 6x + 5$
$y = 7x + 5$

son rectas que cortan la parábola por el punto (0,5) y otro. Podríamos comprobar si en general las rectas →

$y = mx + 5$, con $m \geq 5, m \in \mathbb{Z}$ también serían rectas que cortan a la parábola $y = x^2 + 4x + 5$ por dos puntos, siendo uno de ellos el $(0,5)$.

La recta $y = mx + 5$ cumple que pasa por $(0,5)$:

$$5 = 0 + 5$$

~~Rectas que pasan por~~

Resolución de Francisco (E11)

Universidad de La Laguna

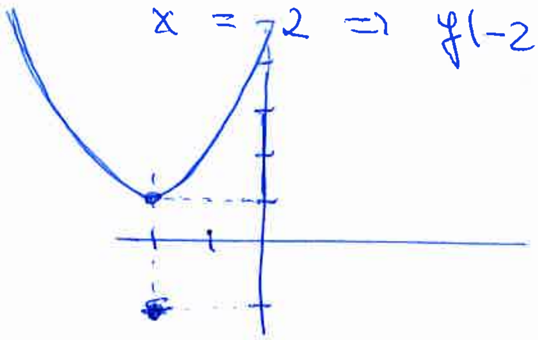
DOCUMENTO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Encontrar ecuaciones de rectas que tengan dos puntos de intersección con la parábola $y=x^2+4x+5$.

Buscamos el vértice de la parábola

$y' = 2x+4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$.

$x = -2 \Rightarrow y(-2) = (-2)^2 + 4(-2) + 5 = 4 - 8 + 5 = +1$



La parábola es creciente cuando

$y' = 2x+4 > 0 \Rightarrow x \geq -2$

y decreciente cuando $x < -2$.

Además ~~eso~~ el punto de corte con el eje y es

$y(0) = 5 \quad (0,5)$

y con el eje x.

$x^2+4x+5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-}}{}$

Luego la recta que pasa por los puntos $(0,4)$, $(-4,0)$.

con vector ~~o~~ director $\vec{v} = (-4,-4)$.

$\frac{x+4}{-4} = \frac{y}{-4} \Rightarrow \boxed{y = x+4}$

tiene dos puntos de intersección con la parábola.

En efecto. $x+4 = x^2+4x+5 \Rightarrow x^2+3x+1 = 0 \Rightarrow$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4\cdot}}{2\cdot 1} \quad \text{dos raíces reales.}$$

~~Del mismo modo~~

Fijando el punto $(-4,0)$ y deslizando $(0,y)$ tenemos una familia de rectas que ~~pasan~~ cortan ~~dos~~ (cada una) dos veces la parábola.

En efecto, la ~~recta po~~ familia uniparamétrica de rectas que pasan por $(-4,0)$ y $(0,\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, es

$\vec{v} = (4,\lambda)$, $\lambda > 1$.

$$r_\lambda \equiv \frac{x+4}{4} = \frac{y}{\lambda} \Rightarrow y = \lambda\left(\frac{x+4}{4}\right).$$

En efecto hay dos soluciones $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$$x^2+4x+5 = \frac{\lambda}{4}x + \lambda.$$

$$x^2 + \left(4-\frac{\lambda}{4}\right)x + (5-\lambda) = 0.$$

$$x = \frac{-\left(4-\frac{\lambda}{4}\right) \pm \sqrt{(4-\lambda/4)^2 - 4(5-\lambda)}}{2} =$$

$$= \frac{\frac{\lambda}{4} - 4 \pm \sqrt{16 - 2\lambda + \frac{\lambda^2}{16} - 20 + 4\lambda}}{2}$$

Si $\lambda > 1$ hay dos soluciones reales y por lo tanto cortan 2 veces.

$$\cancel{\frac{\lambda^2}{16} + 4\lambda - 4 = 0. \Leftrightarrow \lambda^2 + 16\cdot 4\lambda - 16\cdot 4 = 0.}$$

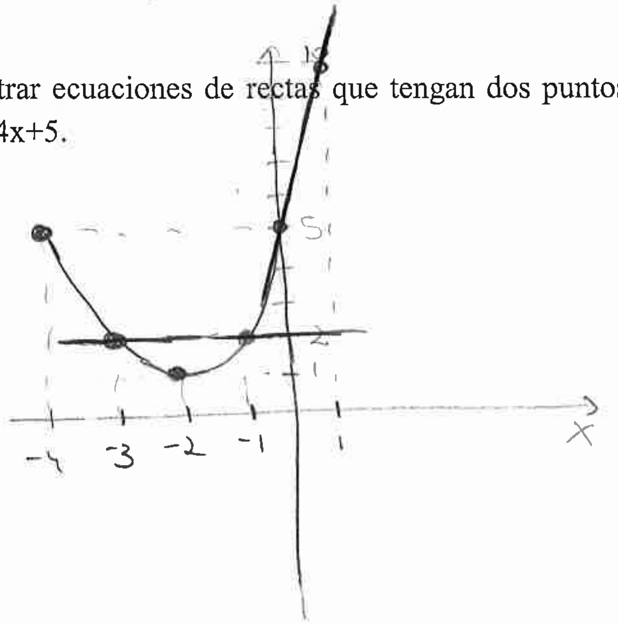
$$\cancel{\lambda = \frac{-16\cdot 4 \pm \sqrt{(16\cdot 4)^2 - 4\cdot 1}}{}}$$

Resolución de Yaiza (E12)

Universidad de La Laguna

DOCUMENTO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Encontrar ecuaciones de rectas que tengan dos puntos de intersección con la parábola $y=x^2+4x+5$.



x	y
0	5
1	10
-1	2
-2	1
-3	2
-4	5

Queremos dos rectas con dos puntos de intersección con la parábola dibujada:

$\boxed{y=2}$ es una recta que intersecciona con la parábola en los ptos. $(-3,2)$ y $(-1,2)$

$\boxed{y=5x+5}$ es una recta que intersecciona con la parábola en los ptos. $(0,5)$ y $(1,10)$

Resolución de Zahira (E13)

Universidad de La Laguna

DOCUMENTO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Encontrar ecuaciones de rectas que tengan dos puntos de intersección con la parábola $y=x^2+4x+5$.

$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-4}{2\cdot 1} = \frac{-4}{2} = -2$ ~~(x, y) = (4, 5)~~

~~$y = (-4)^2 + 4\cdot(-4) + 5 = 16 - 16 + 5 \Rightarrow y = 5$~~

$y = (-2)^2 + 4\cdot(-2) + 5 = 4 - 8 + 5 = 1$

$(x, y) = (-2, 1) = P$

$x = 0 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow (0, 5) = Q$

$Ax + By + C = 0$

$\left.\begin{array}{l} -2A + B + C = 0 \\ 5B + C = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C = -5B$

$-2A + B - 5B = 0 \Rightarrow -2A - 4B = 0$

$(A = -2B)$ $\qquad B = \frac{-2A}{4} = -\frac{1}{2} A$

$C = -\frac{5}{2} A$

Por tanto, las ecuaciones con la forma

$Ax + \left(-\frac{A}{2}\right) y - \frac{5}{2} A = 0$

tienen como puntos de intersección P y Q.

De forma general, los puntos de la parábola satisfacen la igualdad $(y = x^2 + 4x + 5)$. Luego:

$Ax + By + C = 0 \Leftrightarrow Ax + B(x^2 + 4x + 5) + C = 0$

$Ax + Bx^2 + 4Bx + 5B + C = 0$

$$Bx^2 + (A+4B)x + 5B + C = 0$$

Resolución de Mónica (E14)

Universidad de La Laguna

DOCUMENTO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Encontrar ecuaciones de rectas que tengan dos puntos de intersección con la parábola $y=x^2+4x+5$.

$y=x^2+4x+5$

- Busquemos dos puntos que pertenecen a la parábola:
  - $x=0 \Rightarrow y=5$.
  - $x=1 \Rightarrow y=10$.

$(0,5)$ y $(1,10)$ pertenecen a la parábola.
Veamos la recta que pasa por estos dos puntos.
$A=(0,5)$ y $B=(1,10)$.
$A=(0,5)$
$\overrightarrow{AB}=(1,5)$.
$\boxed{y=5+5x.}$ RECTA QUE TIENE DOS PUNTOS DE INTERSECCIÓN CON LA PARÁBOLA.

- Lo mismo podemos hacer tomando cualquier otros dos valores de x e y.

$-x=-1 \Rightarrow y=2$.
$x=0 \Rightarrow y=5$.

$A=(-1,2)$, $B=(0,5)$.
$\overrightarrow{AB}=(1,3)$
Buscamos la recta que pasa por estos dos puntos y tenemos otra recta que pasa por dos puntos que intersectan con la parábola.

Resolución de Sofía (E15)

Universidad de La Laguna

DOCUMENTO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Encontrar ecuaciones de rectas que tengan dos puntos de intersección con la parábola $y=x^2+4x+5$.

$= x^2 + 4x + 5$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\boxed{y=0} \rightarrow$ nc

$\boxed{y=1} \rightarrow$ 1 pto

$\boxed{y=2}$

$2 = x^2 + 4x + 5$

$0 = x^2 + 4x + 3$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-4\cdot 3}}{2} =$

$= \dfrac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{-4 \pm 2}{2} = -2 \pm 1$

$= \begin{cases} -3 \\ -1 \end{cases}$ { dos ptos. intersección

$\boxed{y=2}$

$\boxed{y=3} \rightarrow 0 = x^2+4x+2$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-4\cdot 2}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{8}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4\cdot 2}}{2} = \underbrace{-2 \pm \sqrt{2}}_{\text{2 ptos. intersec.}}$

$\boxed{y=4} \rightarrow 0 = x^2 + 4x + 1$

$x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4\cdot 3}}{2} = \underbrace{-2 \pm \sqrt{3}}_{\text{2 ptos. intersec.}}$

$y = x^2 + 4x + 5$

$y = 4x$

$4x = x^2 + 4x + 5$

$0 = x^2 + 5$

$\boxed{x = \pm\sqrt{5}}$

$\boxed{y=4x}$ tiene 2 ptos. intersección

$y = x^2 + 4x + 5$

$y = x$

$0 = x^2 + 3x + 5$ ¿No

$y = x^2 + 4x + 5$

$\boxed{y = x + 4}$

$0 = x^2 + 3x + 1$

$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2}$ 2 ptos

Resolución de Manuel (E16)

Universidad de La Laguna

DOCUMENTO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Encontrar ecuaciones de rectas que tengan dos puntos de intersección con la parábola $y=x^2+4x+5$.

Como no pide "todas" las ecuaciones comienzo por el caso más sencillo que serían las ecuaciones de rectas paralelas al eje horizontal que corten en dos puntos a la parábola.

Primero determino la recta que solo corta en un punto de esta manera:

$$y = x^2+4x+5$$

$$y' = 2x+4 \quad \Rightarrow (y'=0 \Leftrightarrow x=-2)$$

$$(-2)^2+4\cdot(-2)+5 = 4-8+5 = 1 \Rightarrow y=1$$ es la recta tangente a la parábola $y=x^2+4x+5$ paralela al eje horizontal.

Por tanto, cualquier recta: $y=a$ con $a>1$ $(a\in\mathbb{R}^+)$ es una recta que corta a la parábola en dos puntos.

Para generalizar este resultado a rectas no paralelas al eje horizontal empezaría a plantear, primero las que pasan por el punto $(-2,1)$ y por cualquier otro punto de la parábola y, posteriormente, intentaría generalizarlo a dos puntos cualesquiera de la parábola.

Para la primera parte teniendo en cuenta que tengo un punto por donde ~~pasan~~ el haz de rectas que ~~pueden~~ pasan por él y cortan en dos puntos a la parábola es todo el haz a excepción de la recta $y = 1$ (que solo corta en un punto) y la recta $x = -2$ que hace lo propio), este argumento no me ayuda demasiado.

ANEXO A.2

Transcripciones de los procesos de evaluación

ANEXO A.2.1: Transcripción Caso 1

					CATEGORÍAS								
		SOLUCIÓN A LA QUE SE REFIEREN			HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDIADOS	REPRESENTACIONES			SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
Nº de episodio	TRANSCRIPCIÓN	Evaluado (Javier)	Evaluador (David)	Evaluadora (Sandra)			Gráfica	Simbólica	Verbal				
1	D: Lo primero que hace es dibujar la parábola y buscar cortes.	X			I								
2	S: Está cambiando la pendiente de la recta. D: Sí, el ratio en el que hay dos puntos. S: Intentando ver si es para arriba o para abajo.	X					I						
3	D: Aquí te da la función. S: Aquí interseca la recta con la parábola. D: Sí, una recta arbitraria y=x+b	X			I								
4	S: Aquí llega a lo que le interesa, el signo del discriminante. D: El discriminante mayor que cero.	X						I					
5	D: Puso aquí mayor o igual que cero, pero tiene que ser mayor que cero, porque si se queda igual, te queda una solución doble y entonces eso es un corte solo. Bueno, a ver si después se da cuenta.	X										V	
6	S: A ver, voy a ver si los cálculos están bien. ¿Y aquí la a la dejó atrás? El signo del discriminante es lo que te importa, esto está aquí. (Revisan los cálculos) D: Hasta aquí está perfecto, o sea, que no se ha equivocado en los cálculos ni nada. S: ¿Cómo que no se ha equivocado en los cálculos? Aquí le falta una a, aquí abajo. D: No, esto es 2 por 1. Porque la variable es a. S: Pero le sigue faltando la a. Saca tú el máximo común múltiplo de aquí. D: No, lo que está haciendo es la ecuación de segundo grado. O sea, a cuadrado menos 8 a S: Si, si. Pero a no es 1, a no es arbitrario, es la pendiente de tu recta. Le falta la a, sácame el máximo común. D: No, no, está resolviendo esta ecuación a parte. O sea, esta ecuación como si fuera una ecuación en función de a. S: Si es una ecuación en función de a ni en función de b… D: O sea, está dejando la b arbitraria y está haciéndolo en función de a. S: Vale, pero mira. Saca la a. Tienes a(a-8), lo otro lo pasas y te queda 4-4b, ahora lo parte de 2… D: No, está haciendo.. S: Ah. ¿Está trabajando como si fuera una ecuación? D: Claro, una ecuación de segundo grado que solo depende de a y la b la está tratando como si la conociera. Y ya luego la fija en función de lo que lo que le interese. Entonces, hasta aquí está usando la fórmula de segundo grado. Bien, bien. Hasta aquí lo he comprobado yo y está bien.	X						I/V					
7	D: Lo que se complicó un poco, porque solo tiene que limitarse a buscar soluciones.	X											ENUNCIADO
8	D: y está buscando la general hasta el final. Y claro, eso te va a llevar un montón de raíces. Si te limitas al problema, resolverás esto un poco, pero [...] que esté bien…	X								V			

					CATEGORÍAS								
		SOLUCIÓN A LA QUE SE REFIEREN			HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDIADOS	REPRESENTACIONES			SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
Nº de episodio	TRANSCRIPCIÓN	Evaluado (Javier)	Evaluador (David)	Evaluadora (Sandra)			Gráfica	Simbólica	Verbal				
9	D: Y aquí sigue con lo de “tendrá sentido cuando sea mayor o igual que cero” S: Lo mismo que había dicho aquí. D: Claro. No se ha dado cuenta de que con lo de igual a cero… Bueno, no sé si ha dado cuenta o lo escribió en la hoja por inercia, cuando vea el problema te lo puedo decir mejor.	X										V	
10	D: Vale, pone un ejemplo. Pone b=1, a vale 8 y a vale 0. Vale. Te vale porque tiene dos soluciones, entonces esta recta te vale. La recta con a=0 y b=1. Es la recta y=1. S: Pero no vale. Tiene solamente un punto. D: Claro, pero lo que piden son dos. S: Sí, porque aquí está cogiendo a=0, si a es cero no tienes pendiente. Si no tienes pendiente entonces tiene que ser que la b que tome aquí sea superior a 5 para que la y se coja por arriba.	X		X		V							
11	D: Si, pero en el enunciado del problema, si no recuerdo mal, te dice que tienes que dar dos rectas que corten dos veces.		X										ENUNCIADO
12	D: Y esta solo corta una vez, o sea, esta para la solución no te vale.	X				V							
13	D: A lo mejor estaba probando, estaba haciendo experimentos. Y no hizo nada más. O sea, que no está bien hecho. S: No, pero está bien empezado. D: Está bien empezado pero te ha llevado a una…	X			V								
14	D: O sea, el desarrollo está bien pensado. Y aquí tú llegas y dices, esto corta a la recta en un solo punto, pues aquí lo que tendría que haber dicho a continuación es decir, si el discriminante me da cero pues…	X						V					
15	S: Pero no. O sea, yo entiendo lo que dices, pero me parece que está bien	X			V								
16	S: Hizo bien el dibujo de la parábola	X					V						
17	S:[...] puso aquí el sistema de ecuaciones.	X			I								
18	S: Lo único que parece que está mal, que es lo que me lie yo, es que aquí no dice lo que está utilizando. D: Sí, esto lo vi yo. A ver, porque yo hice una cosa parecida y por eso lo sé. Pero si yo leo esto de primeras no.	X							V				
19	D: Pero claro, ahora pensando, ¿por qué resuelve esto? S: Porque está aquí metido, está dentro de la raíz. D: Sí, pero a ti no te interesa resolver esto. A ti te interesa saber cuando esto es mayor que cero o cuando esto es menor que cero. S: Y como tiene dos términos, ¿cómo lo haces si no lo revuelves?	X						V					
20	D: A ver, aquí, si vas a lo práctico, a resolver el problema rápido, yo me pondría a probar as y bs que funcionen.	X	X		V								

					CATEGORÍAS								
		SOLUCIÓN A LA QUE SE REFIEREN			HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDIADOS	REPRESENTACIONES			SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
Nº de episodio	TRANSCRIPCIÓN	Evaluado (Javier)	Evaluador (David)	Evaluadora (Sandra)			Gráfica	Simbólica	Verbal				
21	S: ¿Para qué? si tiene mucho más sentido esto. Es decir, tú lo que necesitas es que esto de aquí dentro sea positivo. Matemáticamente es esto de aquí D: Sí. Vale. Pero la resolución de esto te lleva a cuando el discriminante vale cero. Te da un valor de a y un valor de b para que este discriminante valga cero. S: Creo que tiene todo el sentido del mundo porque, precisamente es la única forma de verlo. D: Exacto, le faltó rematar el problema al final. Dijo, esta es la frontera entre los que valen y los no valen. Ahora dime los que valen. Y parece que no le dio tiempo de hacerlo, pero lo tenía encaminado. S: Yo lo veo bien. D: Sí. A mí me faltó que remate el problema.	X						V					
22	S: Lo que parece que lo tiene explicado, pero después te das cuenta que no lo tiene explicado, lo que está haciendo. O sea, eso está bien, todo esto bien, pero aquí otra vez escribe exactamente lo mismo y sin sentido. D: Sí, para nada.	X							V				
23	S: ¿Qué piensas? D: ¿Tú qué le pondrías? Si estás corrigiendo esto, si estás de profesora en un instituto. S: ¿Sobre 10? D: Sí, esta pregunta sobre 10	X											CALIFICACIÓN
24	S: Es que toda esta parte está perfecta. D: Sí, la idea está muy bien. S: Un 6 y algo. D: Sí, 6 de 10.	X			V								
25	D: Es que lo que te pide el problema, que es lo que da rabia, que el problema te pida que le des dos rectas. Pero el problema dice dame esas dos rectas.		X										ENUNCIADO
26	D: Pero no te da dos rectas, te ha dicho cómo se construyen esas dos rectas.	X	X							V			
27	D: Pero el problema dice dame esas dos rectas.		X										ENUNCIADO
28	D: Desde luego más de la mitad se merece, porque el planteamiento está bien.	X											CALIFICACIÓN
29	D: Y yo prefiero que me hagan esto, porque está mucho mejor desarrollado a que te pongas a probar ideas hasta que te cuadren dos. Así que sí, un 6 y medio de 10.	X			V								
30	S: Hombre, le faltó el final, pero yo creo que si le das un fisco de tiempo.	X								V			
31	S: Pero yo creo que si le das un fisco de tiempo. A mí, por lo menos me cogió con la *pata cambá*. (Llegó tarde)	X											TIEMPO

					CATEGORÍAS								
		SOLUCIÓN A LA QUE SE REFIEREN			HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDIADOS	REPRESENTACIONES			SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
Nº de episodio	TRANSCRIPCIÓN	Evaluado (Javier)	Evaluador (David)	Evaluadora (Sandra)			Gráfica	Simbólica	Verbal				
32	S: ¿Entonces un 6? D: Sí, es que tampoco le puedo poner más. Ni menos tampoco. Entonces que le ponemos… S: 5. O sea, ahora viéndolo así. D: 5. Exacto. O sea, no se merece el 0, ni de broma. El 5 está bien por el planteamiento.	X											CALIFICACIÓN
33	D: Se ha dado cuenta de lo del discriminante.	X						V					
34	D: pero no ha sabido finalizar, bueno no ha sabido, o no ha tenido tiempo.	X								V			
35	S: Pero lo del discriminante no es que no se haya dado cuenta, es que aquí eligió un punto arbitrario y no lo ha explicado. D: Yo pondría 5 también. Vale. Pues ya está.	X							V				
	Nº EPISODIOS				8	2	2	6	3	4	0	2	8

ANEXO A.2.2: Transcripción Caso 2

					CATEGORÍAS								
		SOLUCIÓN A LA QUE SE REFIEREN			HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDIADOS	REPRESENTACIONES			SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
Nº de episodio	TRANSCRIPCIÓN	Evaluado (Antonio)	Evaluadora (Marta)	Evaluador (Manuel)			Gráfica	Simbólica	Verbal				
1	Marta: Yo no lo entiendo. Manuel: Yo tampoco. Marta: Es que lo primero que hizo sí. Manuel: Sí. Igualar las ecuaciones. Marta: Igualar las ecuaciones. Manuel: Sí. Hasta ahí lo entiendo.	X			I								
2	Marta: Pero aquí ya no. Aquí ya me pierdo un poco. Dice que resolvemos la ecuación de segundo grado y, ¿tiene que encontrar dos valores distintos? ¿Qué es lo que significa? Manuel: Sí, pero… Marta: Pero cuando encuentra dos valores […] una recta… Manuel: Sí. Exacto. Marta: …que se intersecta. ¿Pero cómo sabe que es dos veces?	X							I				
3	Manuel: No, es que… Claro. Yo no encontré todas las soluciones. Marta: Ah no. Yo tampoco. Manuel: Yo hice una cosa muy sencilla pero no tiene nada que ver con esto. Yo encontré infinitas soluciones que eran todas paralelas al eje horizontal. Marta: Yo también. Yo me quedé ahí. Tú porque no te cabían más.		X	X						E			
4	Manuel: Lo digo porque este enfoque para mí no es el que… yo quería pasar por ahí y luego generalizar. Pero no llegué a generalizar, no sé si por falta de tiempo o […]	X		X	E								
5	Manuel: Ese se me queda un poco lejos, porque además no lo veo. No veo bien que fuera eso. No me suena bien en principio pero no digo que no.	X						V					
6	Marta: No es que… al tampoco representar nada gráficamente también yo creo que cuesta mucho más.	X	X		V								
7	Manuel: a y b son libremente con lo cual no hay ninguna restricción, en principio. A no ser que luego la resolución te lleve a que haya una restricción. Marta: Que la a tiene que ser de esta forma, ¿no? Manuel: Esa es la restricción según esta resolución. Marta: Sí. ¿Y cuál es la otra? Manuel: Aquí hay un problema *[Se están refiriendo a la parte en que Carlos comienza a resolver la inecuación, planteando una ecuación para "a", y obtiene dos valores de "a". Algo que luego descarta.]* Por ejemplo, porque si b es igual a 1, sacando el valor de a. Uno es el de a=0 y b=1. Esa es tangente. Marta: Sí. Y no la corta dos veces. Manuel: La corta uno porque es tangente. Y la otra es 4… 4x+1… el 0 pasa por el 5. Hombre sí, corta dos veces porque… Marta: Ah, ¿pero a lo mejor detrás tiene alguna condición de la b? Manuel: Saca lo de los intervalos.	X		X				I/V					
8	Marta: Ah mira aquí. Cuando la b es igual a 0. No pero la 0 no nos sirve porque en la 1 tú dijiste que cuando la b es 1, ya está, no te da. Manuel: No da, no da, no. Marta: Y aquí él tiene como b si funciona. Manuel: Si b mayor que 0, ¿a vale cualquiera de estos intervalos? Marta: Pero no, porque si b es mayor que 0 puedes coger b=1 y cuando la b es 1...	X		X						V			
9	Manuel: Vamos a ver cómo escribimos esto. Porque yo estoy bastante oxidado con esto. Yo pensé que iba a ser resolver problemas como los de secundaria. Pero esto ya se me queda largo.												PROBLEMA DE FINAL ABIERTO

		SOLUCIÓN A LA QUE SE REFIEREN			CATEGORÍAS								
					HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDIADOS	REPRESENTACIONES			SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
Nº de episodio	TRANSCRIPCIÓN	Evaluado (Antonio)	Evaluadora (Marta)	Evaluador (Manuel)			Gráfica	Simbólica	Verbal				
10	Marta: Bueno, encontramos por lo menos un error, ¿no? Manuel: Sí, ¿no? Porque el b […] si a=0, no está.	X		X						V			
11	Marta: Sí, pero ahí no está restringiendo la a, está restringiendo la b, y…	X						I					
12	Manuel: Para cualquier b>1 y con a=0, todas esas rectas cortan en dos puntos porque son todas paralelas por encima de la tangente. Y eso no está contemplado aquí que yo vea, ¿no?	X		X						V			
13	Marta: No, porque además. No, porque solo restringe la a en función de la b pero no […] Pero tú puedes restringir cuando la b es 0, la a te coge todo lo que tú quieras.	X						I					
14	Manuel: Yo lo que escribiría sería lo que estamos viendo. La primera parte bien, cuando empieza a igualar las ecuaciones de la parábola con la ecuación de la recta, con la ecuación general de la recta. Marta: Pero no comprendemos…	X			V								
15	Manuel: No. Yo creo que el fallo está aquí. En este razonamiento de aquí. Yo te lo explico a ti y ya luego tú me dices si es verdad o estoy equivocado. Porque me puedo equivocar yo perfectamente. Vale. Llega a una ecuación de segundo grado que intenta resolver. Con la fórmula de una ecuación de segundo grado	X						V					
16	Manuel: Y luego dice, de repente, dice cuando lo dentro de la raíz sea mayor que cero habrá dos soluciones. Pero no entiendo que eso tenga que ver con nada que tenga ver… que garantice que la recta corte con la parábola. Marta: Porque lo que dice es cuando es mayor que cero lo que se referirá es que tiene 2 soluciones.	X							V				

		SOLUCIÓN A LA QUE SE REFIEREN			CATEGORÍAS								
					HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDIADOS	REPRESENTACIONES			SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
Nº de episodio	TRANSCRIPCIÓN	Evaluado (Antonio)	Evaluadora (Marta)	Evaluador (Manuel)			Gráfica	Simbólica	Verbal				
17	Marta: Pero eso es mentira. Porque si la b es 1. Ah sí, tendría… a ver. Tendría dos soluciones, sí. Manuel: Y eso te dice que corta en dos puntos. Ah vale, vale. Eso es lo que no entendía. Vale. Corta en dos puntos si la parte de dentro […] Entonces el cálculo se restringe a que esto sea mayor que cero y eso es lo resuelve. Marta: Entonces. Restringe el resultado a lo que…bueno, al intentar resolver la ecuación. Que le sale, ¿no? El resultado está restringido a que lo de dentro de la raíz le dé mayor que cero. Mayor estricto. Mayor estricto que cero. Sí, sí, sí, sí. Manuel: Ah vale. Ya lo entendí. Yo creo que tiene razón incluso, pero... Ahora ya lo entiendo más. Este intervalo […]. Marta: Claro porque a lo mejor lo que está es solo con eso. No, pero él coge todo. Manuel: Si es negativo no tiene solución. Claro, si es negativo no tiene solución. En este punto justo estaría diciendo… No pero, cuando solo corta un punto, ¿cómo resuelvo? Marta: No porque se supone que si la raíz le está dando positiva ya va a tener dos soluciones. Va a estar cortando con dos puntos. Entonces lo que dice es que cuando es cero. Supongo que eso lo que se refiere es lo que está dentro de la raíz. Te va a quedar positivo por aquí y por aquí. Manuel: Sí, sí. Marta: Entonces va a tener de aquí para abajo dos soluciones y de aquí para arriba también. Entonces en todos estos números va a haber solución y va a cortar a la parábola en dos. Entonces estaría bien, ¿no? Manuel: A mí me haría falta escribir para saberlo. Sí, realmente sí, tiene lógica. Ahora que lo veo si tiene lógica, pero… Y de repente, ¿de dónde saca el b=0? Marta: Aquí. Porque ese es el caso. Manuel: Ah porque solo. Ah dejó el caso. Ah vale, vale. Marta: Hizo un caso con b=0 y otro con b>0. Manuel: Ah vale. Ahora sí. Pensé que estaba con todos. Marta: Lo que pasa que no sé por qué no miró para b<0. Manuel: No le dio tiempo. Marta: Ah vale. Le faltaría el caso b<0. Manuel: No pero… a depende de b y b depende de a seguramente. Pero el tema es que vuelve a resolver como lo que tenía dentro de la raíz es una ecuación de segundo grado. Bueno, en realidad una inecuación. Despeja el valor de a y le queda en función de b. Y luego analiza en función de los valores posibles de b. Y solo analiza un caso concreto. O sea, que en realidad cuando solo analiza el caso b=0, es decir, a=2. Cuando b=0, que es el caso pone, ¿son cosas mías o a=2 y ya está? Marta: a=2, sí. Manuel: Y esto todo… Marta: Ah pero, ¿entonces? Manuel: Es que claro. Vuelve atrás. Vuelve atrás porque aquí llega a una conclusión. Y ahora te dice bueno ahora b=0, vale. Luego a=2. Siempre vuelve atrás. Eso es lo que no entiendo. Marta: Pero claro, lo que creo que no tuvo en cuenta es que esto se tiene que seguir cumpliendo. Sí, sí, sí se cumple porque cuando la b=0 la a=2, entonces esto tiene solución. La cosa no es que a y b tengan solución o cuantas soluciones tengan a y b, sino la x que es la que te interesa que tenga dos soluciones. Manuel: Vale. Ah vale, vale. Marta: Aunque la b sea cero si la a te da una solución que es… Entonces aquí dentro te quedaría positivo. Entonces ya la x te da dos soluciones, con lo cual se corta dos veces. Manuel: Vale. Marta: Lo que te interesa es que esto sea mayor que cero. Manuel: Sigo sin verlo porque me parece un razonamiento un poco… Sí, sí… Sí, sí lo veo porque si vuelvo atrás y ahora yo muevo el b=0 esto está al cuadrado con lo cual la raíz se va y 4 menos a, mas menos 4 menos a, entonces 2 veces 4 menos a ó 0. X igual a cero. Marta: No. Si te da x igual a cero, no. Solo es una solución. Esto tiene que dar… esto te da. No pero es aquí no te queda esto. Manuel: Si la b es igual a cero, queda dos soluciones de x: la cero y la dos veces 4 menos a. Marta: Pero claro, si la b es cero, la a es 2. Entonces te queda aquí 2 al cuadrado que es 4 menos 4 es cero. Sí, claro, te queda una nada más. Manuel: No sé. No sigo el razonamiento. Marta: No, pero es que entonces cuando b es cero, la a es dos y entonces no se te cumple la inecuación. Te está dando igual que cero. No te está dando mayor que cero. Y es un mayor estricto. Si él pone b cero y a 2, que es lo que te daría, lo de dentro de la raíz se queda cero, con lo cual ya no […] La condición es que sea mayor que cero, mayor estricto. Entonces ese no te vale, ese caso. Manuel: Es que yo lo que veo es que está con un solo caso.	X						I/V					

		SOLUCIÓN A LA QUE SE REFIEREN			CATEGORÍAS								
					HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDIADOS	REPRESENTACIONES			SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
Nº de episodio	TRANSCRIPCIÓN	Evaluado (Antonio)	Evaluadora (Marta)	Evaluador (Manuel)			Gráfica	Simbólica	Verbal				
18	Manuel: O sea, tú y yo, la casualidad que hicimos más o menos el mismo razonamiento.		X	X		E							
19	Manuel: Yo lo que digo es, lo que está haciendo al estar con y=ax+b y de repente decir b es igual cero, es que está cogiendo todas las rectas que pasan por el (0,0). Porque se queda con y=ax.	X						I					
20	Manuel: La parábola tiene, tú la calculaste más o menos igual que yo, tiene una forma más o menos así. En realidad lo que va a calcular es todas las rectas que pasando por el (0,0), el haz de rectas que más o menos vendría a ser… desde aquí que esa solo tiene un corte, esa no valdría; todas las que están en medio del haz de rectas que pasan por aquí hasta la que es tangente por aquí en algún punto, bueno, en una asíntota en realidad… Marta: Pero no la toca, no tiene por qué… Manuel: Bueno, una asíntota no… ¿una parábola tiene asíntota…? Pero bueno, en fin… Imaginemos que si puede tocar… a lo mejor toca un punto por aquí y sigue…Bueno, de esto no estoy seguro. Está calculando todas estas rectas.	X								I			
21	Manuel: Es un caso también muy particular y muy enrevesado para calcular todas las rectas, así que...	X			V								
22	Manuel: En cualquier caso, yo le veo cosas. Que ni siquiera llega a especificar una solución concreta. Porque queda un poco genérico. Marta: No, y aparte, yo por ejemplo creo que está dando como solución la b igual cero y verdad no es solución, porque ni siquiera cumple lo que él puso (o ella). Manuel: Sí, yo supongo que es que la a… esto que acaba de obtener aquí, cuando b es igual a 0, lo que viene a decir es que la a tiene que estar de menos infinito hasta dos menos raíz de 8, esto debe ser… Es que yo dudo que ese intervalo sea tan grande. Es que solo van a valer unas "as" que son las que, al revés, las que están aquí, llega un momento que si la a es más pequeña no vale, ninguna corta hasta vuelva a ser lo suficientemente grande como para que dé la vuelta y este aquí . ¿No sé si me entiendes lo que quiero decir? Marta: Sí. Manuel: Todas las rectas que le van a valer y que cortan dos puntos tienen esta forma tienen esta forma si pasan por el x cero. Así, estas de aquí. Marta: Exacto. Manuel: Y eso es un rango muy concreto. Y aquí sin embargo el rango es desde menos infinito a algo y unido de algo hacia más infinito. No veo que esta solución sea posible por eso te digo. Marta: Ya porque en verdad está acotando desde… ¿eso es raíz de 8? Manuel: 2 menos raíz de 8 a 2 más raíz de 8. Marta: 2 más raíz de 8 es como… 2 y pico. 2… no, un poquito más. Es 2 raíz de 2, cuatro, cuatro y un poquito. Manuel: No lo veo. Hay algo ahí raro que a mí me hace ver que eso no puede ser solución. O sea, que no solo que no… es que se fije al menos un rango de… Es decir, hay casos en que se puede dar infinitas soluciones sencillas. Marta: Exacto. Y esas no están. Manuel: Y estas no están.	X								V			
23	Manuel: Y el caso que intenta hacer, que es un caso concreto. Igual que nosotros intentamos solucionar primero este para… No llega…	X	X	X		V							

		SOLUCIÓN A LA QUE SE REFIEREN			CATEGORÍAS								
					HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDIADOS	REPRESENTACIONES			SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
Nº de episodio	TRANSCRIPCIÓN	Evaluado (Antonio)	Evaluadora (Marta)	Evaluador (Manuel)			Gráfica	Simbólica	Verbal				
24	Marta: Es que si lo dibujas creo que es el más visual el de todas las paralelas. Manuel: Yo es que no me sentía capaz tampoco de resolverlo de otra forma pero claro. Esto no veo yo que resuelva.	X	X	X	V								
25	Manuel: Yo pondría eso. Que como… Si tuviera que evaluar la resolución del problema como si fuera un alumno diría que empezó bien	X			V								
26	Manuel: Pero se perdió en los cálculos genéricos al intentar usar todas las funciones… Marta: Sobre todo yo creo que a partir de aquí. Una vez pone esto creo que se pierde un poco…	X						V					
27	Manuel: Si hubiera intentado detallar con palabras qué estaba haciendo, que estaba intentando… podríamos seguir el razonamiento. Pero hay un momento que yo no puedo seguirlo y no sé por qué hace las cosas que hace.	X							V				
28	Marta: Entonces, una vez resuelve la inecuación y despeja el valor de a, que le queda en función de b. Luego intenta calcular… bueno, o… Manuel: Seguir estudiando, por casos, en función de los valores que puede asignarle a b. Eso es lo que intenta. Y se queda en el primero. Marta: Pero es que, por ejemplo, calcula para b igual 0. Pero no se da cuenta que la b=0 no cumple la inecuación. Manuel: Claro, es que aquí… Porque si llegas hasta aquí más o menos bien, si b es igual a cero…	X						V					
29	Marta: Es que yo creo que luego él no comprueba cuando la b es cero. Manuel: No, no, no sé. No sé cómo, ni cuando procedía…	X									V		
30	Marta: Es que, además, cuando la b es 0, esto te queda 5 por 20. Y esto te va a quedar negativo, ni siquiera se puede hacer. Porque 5 por 4 es 20 y 4 menos 2 es 2, 2 al cuadrado es 4, menos 20 te queda negativo. Esto no tiene solución. Manuel: Sí, sí. Se equivoca en un paso ahí. Y de todas formas… Marta: Y luego el siguiente caso que es b>0. Manuel: Ah. Es verdad que también lo estudia. No me había dado cuenta. Es que lo ve en función de b dice cuando a está entre menos infinito y 2 menos 2raíz de 2, como si le valiera cualquier b y cualquier b no vale. Marta: Exacto. Y no está viendo que cumpla la inecuación al final. Creo que se centra en ver si b es positivo o negativo, pero no que cumpla la inecuación.	X						V					
31	Marta: Pero ¿hay que ponerle una nota o algo? Manuel: No, no, no. No es corregir, ¿no? Documento para coevaluación. Bueno, en principio yo no lo evaluaría porque tampoco sé sobre qué lo tengo que evaluar, si hay que ponerle una nota, si hay que poner más o menos iba bien…												CALIFICAR / EVALUAR
32	Marta: A ver, en verdad iba bien. Es una idea que a mí, por ejemplo, no se me ocurrió. Manuel: Yo creo que empieza… lo aborda de la manera más compleja posible para intentar solucionar y tener todas las soluciones. Ya ese procedimiento no es correcto.	X	X		V								
33	Marta: Y en verdad no te dice que encuentres todas. Te dice que encuentras ecuaciones de la recta. Manuel: Ecuaciones de rectas… con dos ya sería suficiente. Fue lo primero que pensé.												ENUNCIADO

		SOLUCIÓN A LA QUE SE REFIEREN			CATEGORÍAS								
					HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDIADOS	REPRESENTACIONES			SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
Nº de episodio	TRANSCRIPCIÓN	Evaluado (Antonio)	Evaluadora (Marta)	Evaluador (Manuel)			Gráfica	Simbólica	Verbal				
34	Marta: Yo primero hice 2. Puse y=6 y y=7. Lo comprobé. Y dije, si te das cuenta, para y=n esto también te sirve.		X		E								
	Nº EPISODIOS				9	2	0	10	3	6	1	0	3

ANEXO A.2.3: Transcripción Caso 3

		SOLUCIÓN A LA QUE SE REFIEREN			CATEGORÍAS								
					HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDIADOS	REPRESENTACIONES			SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
Nº de episodio	TRANSCRIPCIÓN	Evaluado (David)	Evaluador (Francisco)	Evaluadora (Sofía)			Gráfica	Simbólica	Verbal				
1	F: Corregimos, ¿no? S: Encontró una solución general. F: Pues sí. ¿Las encontró todas? S: Llegó hasta aquí y luego dio dos particulares.	X								I			
2	S: Y luego aquí simplemente lo comprueba, ¿no? ¿O estas son distintas? No, vale, está comprobando que las que había dado… F: Tienen dos soluciones. Vale. Quizás ni siquiera hacía falta, pero vale. Está bien. S: Sí, sí. Realmente, esta bien que lo compruebe, pero…	X									I/V		
3	F: ¿Qué ponemos? ¿Que está perfecto y ya está?	X											EVALUACIÓN GLOBAL
4	S: A ver, encontró lo que se le pedía.	X								V			
5	S: Se pedía que encontrara ecuaciones de rectas.												ENUNCIADO
6	S: Ah vale, primero encuentra una solución general.	X								I			
7	F: Pues, ya, ¿no? S: Sí. F: "Evalúa". No hay que calificar ni nada, ¿no? Pues ya estaría.												EVALUAR / CALIFICAR
8	S: Bueno, espérate. ¿Has comprobado que esto esté correcto realmente? A la vista salta que está bien, pero… F: Sí. Porque está cogiendo simplemente el discriminante. Mira a ver cuándo es mayor que cero. Es que lo hizo super bien. F: Quizás podía haber seguido incluso con lo general. S: ¿Cómo que haber seguido con lo general? ¿Por qué? F: Ah, no, no. Lo general hubiese sido que se hubiera quedado aquí. S: Por eso. Podría haberlo dejado en lo general, porque así habría encontrado… F: Todo.	X						I/V					
9	F: Pero dio dos casos particulares.	X								I			
10	F: Pues ya está. S: Sí, ¿no? Perfecto.	X											EVALUACIÓN GLOBAL
	Nº EPISODIOS				0	0	0	1	0	4	1	0	4

ANEXO A.2.4: Transcripción Caso 4

					CATEGORÍAS									
		SOLUCIÓN A LA QUE SE REFIEREN			HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDIADOS	REPRESENTACIONES				SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
Nº episodio	TRANSCRIPCIÓN	Evaluada (Maite)	Evaluadora (Zahira)	Evaluadora (Mónica)			Gráfica	Tabular	Simbólica	Verbal				
1	Z: Tenemos que evaluar la resolución del problema y argumentarlo.													ENUNCIADO
2	Z: Entonces, lo que encontramos en este problema primero es que representa la parábola gráficamente.	X			I									
3	Z: Yo creo que es para ver los puntos a los que pertenece la parábola, ¿no? Porque es aquí lo que pone. M: Sí.	X					I							
4	M: Y después hace una tabla de coordenadas y le da varios valores a la x y después va calculando los valores que tiene y en esta parábola.	X						I						
5	M: Y escribe la ecuación de una recta en general.	X							I					
6	Z: Esta parte yo creo que está bien, ¿no? Porque así va sacando puntos de la parábola que puede utilizar para luego la intersección, luego poder coger varios puntos. M: Sí.	X						V						
7	M: A lo mejor en la representación indicar los valores, porque representa la parábola, pero no dice qué valor tiene cada eje y, a lo mejor, eso puede crear confusión. O sea, aquí, donde corta, indicar el valor numérico. Z: Vale, a cuál pertenece, pero bueno, aquí más o menos, como puso la escala. Puede ser, pero bueno, tienes razón porque al final nunca sabes si va de uno en uno o lo toma de cinco en cinco… Porque es verdad que aquí empieza en cinco, pero supongo que será este. M: Sí, se supone.	X					I/V							
8	Z: Vale. Entones, lo que hizo fue coger dos puntos, calculados anteriormente, y calcular la recta que pasa por (0,5) y por (1, 10), con la forma general de una recta. Yo creo que hasta aquí está todo bien, ¿no? Y ya calcula una recta que pasa por dos puntos de la parábola. M: Después toma otros dos valores, un punto de la recta anterior y otro nuevo punto y hace lo mismo. Sustituye en la ecuación de la recta general y después calcula los valores que él llamó, o ella llamó, m y n. También están bien, porque es lo mismo anterior. Z: Hombre… Yo no he mirado si los cálculos están bien, pero bueno sí, el n es 5 y aquí el m sería 12 entre 2, 6. Sí, exacto. Y hace lo mismo, pero con otros dos puntos diferentes. Aquí lo que está haciendo es coger diferentes puntos. El primero siempre lo coge, lo que luego va variando con el resto de puntos y calculando diferentes rectas que pasen por esos dos puntos. M: Y después, al final, escribe las tres rectas que ha calculado anteriormente	X							I/V					
9	M: y nos indica que son rectas que cortan a la parábola por el punto (0,5), que es el común, y otros que ha tomado. Z: Vale, y por detrás, "y=mx con m>5 también serían rectas que cortan a la parábola por dos puntos". Porque en todos les da mx, la m va variando, como en los casos anteriores, y el 5 es lo que se queda… "a la parábola por dos puntos siendo uno de ellos…" En realidad, lo que está concluyendo aquí es que una vez que fija un punto, si va variando el resto, siempre le va a quedar esta forma, ¿no?	X								I/E				
10	M: Sí. O sea, lo que ha hecho es calcular todas las rectas que pasan por el (0,5) y otro punto de la parábola.	X							I					

					CATEGORÍAS									
		SOLUCIÓN A LA QUE SE REFIEREN			HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDIADOS	REPRESENTACIONES				SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
Nº episodio	TRANSCRIPCIÓN	Evaluada (Maite)	Evaluadora (Zahira)	Evaluadora (Mónica)			Gráfica	Tabular	Simbólica	Verbal				
11	M: Pero, no sé, aquí lo ha hecho con tres rectas, a lo mejor eso no se da para toda recta que pase por ese punto. A lo mejor verlo por inducción o comprobarlo un poco más. Z: Faltaría comprobarlo. Claro, tú dices que, con tres casos, eso no implica que se dé para todos. M: Es la idea que nos da, pero comprobarlo de otra manera. Z: Sí, le faltaría a lo mejor eso.	X										V		
12	Z: Pero después dice “la recta y=mx+5 cumple que pasa por el (0,5)”. Vale, hasta ahí de acuerdo.	X								I/E				
13	Z: Pero tampoco demuestra que los otros puntos verifican esta ecuación. Entonces yo creo que ahí también faltaría esa parte. Porque tú realmente lo que quieres es que se corten en dos puntos. Entonces, también se tiene que verificar que el otro punto dé la igualdad.	X	X									V		
14	M: Claro. Aquí lo que ha hecho es que lo ha hecho con un punto fijo, no con todo en general. Es decir, no ha dado una ecuación de cualquier recta que pase por dos puntos que intersecte a la parábola. Z: Exacto. Sí. O sea, que habría que definirlo de una forma más general.	X									V			
15	Z: Hombre, no me queda claro, si con el enunciado lo que te pide es una forma general de todas las rectas o especificar alguna en concreto.													ENUNCIADO
16	Z: Aquí, si se refiere a especificar, y creo que el procedimiento está bien.	X				V								
17	Z: Pero le faltaría esto del final. Comprobar que es cierto esto, lo de que todas las rectas de la forma y=mx+5 y que cumplen los otros puntos también esta recta, ¿no?	X										V		
18	M: Yo también creo que, si el enunciado se refiere, porque a mí no me quedó muy claro, a encontrar ecuaciones de algunas rectas.													ENUNCIADO
19	M: Entonces estaría perfecto, porque ha encontrado.	X									V			
20	M: El enunciado no nos especifica ni cuántos, ni en qué puntos.													ENUNCIADO
21	M: Entonces estaría perfecto, porque ha encontrado tres rectas que intersectan a la parábola en dos puntos.	X									V			
22	M: Entonces, si nos limitamos a eso, para mí estaría perfecto, sin ver el último razonamiento que es lo que estamos discutiendo. Z: En ese caso, yo también estoy de acuerdo, que el ejercicio estaría bien si se refiere a eso.	X			V									
23	Z: O sea, el objetivo del problema lo ha cumplido. Ya dio diferentes ecuaciones que pasan por puntos que cortan la parábola.	X									V			
24	Z: Pero al final, lo que pone, su conclusión, que dice que la recta que comenta aquí justifica solamente que pasa por el (0,5) pero no justifica que pase por los otros puntos. Eso yo lo veo que está a medias. Porque queremos que pase M: Que pase por dos puntos de la parábola que nosotros tenemos.	X										V		
25	Z: Hombre, es verdad, que tampoco mucho tiempo dio.													TIEMPO
26	Z: Está bastante bien con respecto a lo que ha hecho.	X												EVALUACIÓN GLOBAL

		SOLUCIÓN A LA QUE SE REFIEREN			CATEGORÍAS									
					HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDIADOS	REPRESENTACIONES				SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
Nº episodio	TRANSCRIPCIÓN	Evaluada (Maite)	Evaluadora (Zahira)	Evaluadora (Mónica)			Gráfica	Tabular	Simbólica	Verbal				
27	M: Está diciendo que pasa por (0,5), pero puede pasar por (0,5) y por cualquier otro punto del plano, en este caso, que no tiene por qué estar dentro de la parábola. Es decir, aquí ha demostrado que esta recta pasa por (0,5), pero la recta puede pasar por (0,5) y no pasar por ningún otro punto de la parábola. Como vemos en el dibujo que ha hecho, puede pasar por (0,5) y después tocar cualquier punto del plano y no tiene por qué estar en esa parábola.	X									V			
28	M: Entonces, yo creo, que el primer razonamiento está perfecto, como dijimos ahí. Pero después ya, el razonamiento que hace general no sería correcto en este caso. Z: Sí, como que se queda un poco corto.	X			V									
29	M: Sí, porque aquí solo está demostrando que pasa por un punto de la parábola.	X										V		
30	M: Yo me quedaría con el primer razonamiento y ya lo hubiese terminado. Podemos poner como conclusión que, si se hubiese limitado a escribir solo la primera parte, es decir, a calcular las tres primeras rectas, estaría bien. Pero después, con la vuelta que le da [...]	X			V									
31	M: [...] nos crea la duda de si ha entendido bien el problema. Z: Yo creo que sí lo ha entendido	X												ENUNCIADO
32	Z: El problema es que llega a una conclusión muy genérica sin demostrarlo.	X										V		
33	M: Claro, pero como aquí pone "son rectas que cortan la parábola por el punto (0,5) y otros". No especifica si está o no está en la parábola. Entonces, a lo mejor ahí, como que se le olvidó un poco, ¿sabes? Z: Ah vale. Pero yo creo que eso se refiere a que no ha sido concreto en ese caso, le falta un poco de concreción a la hora de las conclusiones. M: Claro, es que pasa por uno de la parábola, pero no tiene por qué pasar por otro de la parábola. Z: Yo creo que sí se referiría, pero como no se especifica, yo creo que es eso, que le falta concretar más.	X								V/E				
34	M: Con lo que hizo, nosotras no podemos asegurar que esta recta pase por dos puntos de la parábola porque la recta puede ser así (no sabemos cómo sitúa la recta) y verifica la ecuación a la que ha llegado. Z: Claro, pero así sí la ha cogido. En realidad, sería cuando es así, ¿no? Que sí puede pasar… Claro, aquí cuando es mx+5… M: No tiene por qué pasar por dos puntos de la parábola. Porque puede ser esto así (toma algún material para representar la recta). Z: Claro, pero así también siempre llegaría a cortar porque la parábola también se alarga. M: Pero a lo mejor, si está muy inclinada, así. ¿Sabes lo que te quiero decir? Z: Que no llega.	X									I/V			
35	Z: Claro, yo creo que para eso se necesitaría un poco más de tiempo para poder llegar hasta ahí. Con el tiempo que se ha tenido para resolver la tarea, está bien hecho.	X												TIEMPO
36	Z: Es verdad que para llegar a una forma general y demostrarlo relamente, que se verifica para todos los puntos que contenga la parábola, a lo mejor sí sería mejor.		X								V			
	Nº EPISODIOS				4	1	2	2	3	3	7	6	0	8

ANEXO A.2.5: Transcripción Caso 5

Nº de episodio	TRANSCRIPCIÓN	SOLUCIÓN A LA QUE SE REFIEREN			CATEGORÍAS								
					HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDIADOS	REPRESENTACIONES			SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
		Evaluada (Mónica)	Evaluador (Antonio)	Evaluador (Javier)			Gráfica	Simbólica	Verbal				
1	A: A mí lo que me llama la atención es que ella solo busca una recta, no buscó más.	X								V			
2	A: Yo pensé que había que buscarlas todas.												ENUNCIADO
3	A: E intentó dibujar la parábola y encontrar una casi que a ojo. J: Sí, o sea, escribió la ecuación de la parábola. Tomó dos puntos y, mediante la ecuación de la recta que pasa por dos puntos halló esa recta. Entonces, claro, así te aseguras de que corta por dos puntos.	X						V					
4	J: Pero claro, solo da una recta.	X								V			
5	J: Porque claro, el enunciado pone "encontrar ecuaciones de rectas". A: Es que el enunciado se puede malinterpretar, lo hagas como lo hagas. Y si es "ecuaciones de rectas", ¿cuántas había que encontrar para que esto estuviera bien y cuántas no? J: Claro, ahí está la duda. A: ¿Una vale?												ENUNCIADO
6	J: Entonces no le podemos decir que está mal, porque ha encontrado una, al menos.	X								V			
7	J: Y, bueno, en la segunda parte lo que nos comenta el alumno o la alumna, nos dice que toma "cualquiera otros dos valores de", la parábola, me imagino, no lo especifica bien. Y dice, bueno, la recta que pasa por esos dos puntos.	X							V				
8	A: Esta parte no la entiendo muy bien. ¿Sacó dos puntos, los unió y creó la recta? J: Claro. Sacó dos puntos que pertenecen a la parábola. A: Vale, sí. Creó la recta con los puntos. J: Sí A: ¿Un punto y el vector director? Es que no, ¿es otro método? Es que no lo entiendo. J: No, no. Al igual que el primero	X						I					
9	J: Lo que pasa es que dice, bueno, pues tomo cualquier punto de la parábola y la recta que pasa, bueno toma dos puntos de la parábola, y la recta que pasa por esos dos puntos. Es decir, el alumno o la alumna lo explica [...]	X							I				
10	J: Pero no da la ecuación de la recta que pasa por esos puntos.	X								V			
11	A: No, pero yo entiendo que aquí tomó x=0, y=5, x=1, y=10. Aquí buscó la recta que pasara por -1 y 0. Exacto. Lo único que cambió el método y lo hizo geométricamente con un punto y un... J: No, no. Hace lo mismo en los dos. A: Sí, pero esta lo hace como analíticamente, ¿no? Ah no, que no había visto que también lo había con vectores. Sí, sí, que es geométrica. Solo cambió lo valores de x. Aquí cogió una que pasara por 0 y 1 y aquí una que pasara por -1 y 0. J: O sea, toma dos puntos: el (0,5) y el (1,10) y hace tal… Y luego aquí, por ejemplo, cogió el (-1,2) y el (0,5) y esa otra recta.	X						I					
12	J: De esa manera, encuentras todas las rectas, se supone. A: ¿Que pasan por esos puntos? J: Todas las rectas que pasan por la parábola si haces esto de manera infinita.	X			I								

					CATEGORÍAS								
		SOLUCIÓN A LA QUE SE REFIEREN			HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDIADOS	REPRESENTACIONES			SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
Nº de episodio	TRANSCRIPCIÓN	Evaluada (Mónica)	Evaluador (Antonio)	Evaluador (Javier)			Gráfica	Simbólica	Verbal				
13	J: Pero, claro, no está dando la expresión.	X								V			
14	J: Eso sí que lo pone en el enunciado, ¿no? La ecuación de la recta tenga dos puntos de intersección con la parábola.												ENUNCIADO
15	A: No, las tiene aquí. Una. J: Claro, aquí da una.	X								I			
16	J: Pero cuando dice, bueno, buscamos la recta que pasa por estos dos puntos y ya está. Da al lector la idea de cómo encontrar rectas. O sea, me parece curioso. Me parece bien.	X			V								
17	J: Pero, no pone la ecuación.	X								V			
18	A: Claro, y la pregunta es: ¿el ejercicio pedía esto?, ¿pedía todas?												ENUNCIADO
19	A: Tenemos que evaluarlo, se supone. ¿Qué le pones?, ¿un 5?	X											CALIFICACIÓN
20	J: A ver, yo no supe terminar de hacerlo. A: Yo tampoco lo acabé.		X	X						E			
21	A: Pero hice otra cosa.		X		E								
22	J: O sea, encontró una, ¿no?	X								I			
23	J: Así que, más o menos… El 5 lo tiene. A: Vale, sí.	X											CALIFICACIÓN
24	J: Y luego, la idea de hacer lo mismo muchas veces, está bien en el sentido de que visualmente te puedes hacer la idea de todas las rectas que pasan.	X			V								
25	J: Pero es que no da la ecuación. A: Es imposible. Es pegarte toda la vida ahí. J: Es imposible. Es decir, no caracteriza a las rectas que intersectan dos veces la parábola. Si no solo da ejemplos. Y puedes dar infinitos ejemplos pero no las estás dando todas.	X								V			
26	A: ¿Y a ti eso te parece para ponerle un 5? Si el ejercicio fuera encontrar la solución general, ¿tú le pondrías un 5 a un alumno por esto? Yo no. J: ¿Tú le pondrías menos? A: Sí. J: ¿Pondrías menos? A: Si fuera encontrar la general.	X											CALIFICACIÓN
27	A: Pero el problema es que no sé lo que pide el ejercicio.												ENUNCIADO
28	A: Estamos evaluando sin saber qué hay que hacer. Sin nosotros haberlo hecho. J: No sé lo que haría yo. A: Porque si el ejercicio lo pongo yo y sé a lo que tienen que llegar, me es más fácil evaluarlo. Si llega hasta un sitio, hago tal… Si hacen otra cosa, pues depende de lo que consideres, es que no sé.												PROCESO DE EVALUACIÓN
29	A: Es que el método lo ha hecho bien. Más que sea ha hecho algo, como tú dices.	X			V								

					CATEGORÍAS								
		SOLUCIÓN A LA QUE SE REFIEREN			HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDIADOS	REPRESENTACIONES			SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
Nº de episodio	TRANSCRIPCIÓN	Evaluada (Mónica)	Evaluador (Antonio)	Evaluador (Javier)			Gráfica	Simbólica	Verbal				
30	A: Un 5 venga, un 5 sí. J: Yo le pondría el 5. A: ¿Le pondrías más? J: No.	X											CALIFICACIÓN
31	J: Y yo a mí mismo tampoco me pondría más. Para mí el 10 es encontrar la caracterización de todas las rectas y pondría 8 o 7 a gente que se quedase cerca, ¿sabes?			X						V			
32	A: Sí, que hubiera fallado el caso b menor que… bueno alguno de los casos. J: Sí. A: A mí por los menos me dependía del valor de b. Lo hice con la raíz, la raíz tenía que ser mayor que cero. J: Exacto. Que por lo menos llegaste a algo de eso. Pero con eso no bastaba porque te daban rectas tangentes. A: Sí, claro. Por eso puse mayor estricto que cero.		X	X				E					
33	J: Si esa persona hubiese hecho eso, yo le pondría más. Pero es que, realmente, ha encontrado una y te da indicaciones de “todas las que tú quieras…” pero no… A: Es que se pueden coger infinitos puntos, eso no tiene gracia, no sé.	X			V								
34	J: Yo le pondría el 5. ¿Estás de acuerdo conmigo? A: Venga, sí.	X											CALIFICACIÓN
	Nº EPISODIOS				6	0	0	4	2	11	0	0	11

ANEXO A.2.6: Transcripción Caso 6

					CATEGORÍAS									
		SOLUCIÓN A LA QUE SE REFIEREN			HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDIADOS	REPRESENTACIONES				SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
Nº de episodio	TRANSCRIPCIÓN	Evaluada (Yaiza)	Evaluadora (Judith)	Evaluadora (Yurena)			Gráfica	Tabular	Simbólica	Verbal				
1	Y: Primero crea una representación gráfica que está bien hecha	X					V							
2	Y: Y ahora "queremos dos rectas con dos puntos de intersección con la parábola"	X								E				
3	Y: Y pone dos ejemplos de rectas. J: Sí. Pone una recta, tal… Y otra que pasa por el punto 5,	X									I			
4	J: será esta. Y: A ver yo creo que es esta y esta, que pasan muy recto con la parábola. J: Exacto. (0,5) y (1,10).	X					I							
5	Y: Bueno, a ver. Pone dos ejemplos que están bien.	X									V			
6	J: Pues en primer lugar la gráfica bien dibujada. Y: Sí, eso es un buen punto.	X		X			V							
7	J: Bueno, cosas que faltan. Y: Luego la solución general. J: ¿Cómo que solución general?	X		X							V			
8	Y: Claro, te pide que des la ecuación de unas rectas que satisfagan esto… J: O sea, de todas las rectas generales													ENUNCIADO
9	Y: Claro, esta coincide en dos puntos, esta también coincide en dos puntos. Pero no da la ecuación general. No da las que cortan…, porque esta también corta en dos puntos. J: Sí, son como dos ejemplos pero no de la solución general.	X		X							V			
10	Y: ¿Qué más? Yo pondría que no relaciona la parábola con las rectas. Porque podría haber dibujado más tipos de rectas, o algo así. Entonces no hay relación entre una y otras.	X		X		V								
11	Y: ¿Qué más podría faltar? No hace uso de la ecuación de la parábola para nada. J: Bueno, la usa aquí, para calcular los puntos.	X						I						
12	Y: ¿Qué más? J: Bueno, a parte de lo positivo, yo diría que es bastante claro. Que no se pierde, que no escribe en diferentes sitios lo mismo,... Y: Sí, bien redactado. [Escribe el cuarto punto].	X								V				
13	Y: Porque es verdad que, además está limpio. J: Sí, eso es bastante importante.	X												LIMPIEZA
14	J: Las dos rectas que dibujó, las dibujó bien porque diferenció los colores. Están verde y rojo. No escribe todo con un mismo lápiz. Y: Sí, que con eso se evalúa mucho más rápido el ejercicio.	X					V							
15	J: Podemos poner que solo hace uso de la representación gráfica para la búsqueda de soluciones, que no hace un cálculo…	X			I									

		SOLUCIÓN A LA QUE SE REFIEREN			CATEGORÍAS									
					HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDIADOS	REPRESENTACIONES				SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
Nº de episodio	TRANSCRIPCIÓN	Evaluada (Yaiza)	Evaluadora (Judith)	Evaluadora (Yurena)			Gráfica	Tabular	Simbólica	Verbal				
16	Y: Tampoco plantea ningún método para encontrar la solución general.	X		X		V								
17	J: Bueno, es una resolución visual.	X			I									
18	J: Pero aquí si está diciendo que tiene que dar dos rectas con dos puntos de intersección, realmente no necesita más. Y: Claro, a lo mejor no entendió bien el enunciado. Porque mira lo que has dicho, quiere DOS rectas con dos puntos de intersección.	X								I				
19	J: Claro, no te ha puesto dos ecuaciones.													ENUNCIADO
20	Y: [Escribe el último punto] Claro, yo no me había dado cuenta de que no es que no siguiera con el problema sino que es que lo daba por terminado	X									I			
21	J: Entonces el planteamiento está bien [...]. O sea, lo que hizo está bien.	X			V									
22	J: [...] pero le faltan cosas. Y: A lo mejor le faltaría argumentar por qué son estas dos rectas.	X								V				
23	J: Es visual.	X										I		
24	Y: Pero no lo justifica. J: Sí, pero ¿cómo lo justificarías? Y: Poniendo, por ejemplo, que si este es el punto mínimo de la recta, una recta horizontal tiene que ser mayor que este punto que corresponda, o algo así. J: Pero realmente no es necesario. Aquí solamente dicen encontrar las rectas, no dicen argumenta por qué son estas. En este apartado yo no, aquí solo te pide las rectas y dice que es una recta que intersecciona en los puntos… Y: E indica los puntos que intersección. Vale. J: Es mínimo como argumentación, pero es. No sé, yo no diría mucho más.	X		X						V				
25	Y: Yo tampoco diría mucho más. Claro, si ya ha entendido mal el enunciado.	X												EVALUACIÓN GLOBAL
26	Y: el ejercicio lo ha hecho bien, de forma limpia y coherente, indicando todos los puntos.	X												LIMPIEZA
27	Y: Pero claro, no era eso lo que le pedía.	X												EVALUACIÓN GLOBAL
28	J: Dio dos puntos, ¿no?. Y: Sí, sí. dos rectas y dos puntos. J: También puso los puntos de intersección y las dibujó. Y: El ejercicio sí está bien.	X									V			
	Nº EPISODIOS				3	2	4	1	0	5	6	1	0	6

ANEXO A.2.7: Transcripción Caso 7

		SOLUCIÓN A LA QUE SE REFIEREN			CATEGORÍAS								
					HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDIADOS	REPRESENTACIONES			SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
Nº episodios	TRANSCRIPCIÓN	Evaluada (Sofía)	Evaluadora (Maite)	Evaluadora (Yaiza)			Gráfica	Simbólica	Verbal				
1	Y: A ver, puso la ecuación de segundo grado y luego puso y=0, ¿no? M: Sí. Es que no sé muy bien qué hizo. Y: Aquí puso ya la ecuación pero sustituida. M: ¿Por qué puso 3? Y: [...] Dice, cuando la y es igual 2. Cuando la y es igual a 3, la x tiene que ser estos dos puntos. M: Sí, pero todo esto anterior ¿para qué lo puso? Y: Primero puso la y=2, la y=0 y luego… Vale, puso la y=0 y luego resolvió esto para ver cuando la y es igual a 0 en qué punto está la x. M: Sí, claro, pero no me cuadra este tres. Debería haber un 5. Y: Se equivocó. Claro, los dos puntos de intersección que obtuvo están mal. Creo yo. M: Sí, sí, por eso.	X						I/V					
2	Y: Porque además la parábola en x no cortaba. En el y cortaba en 5. M: ¿En el y? Y: En el y cortaba en el 5, o sea, que no cortaba en el cero. Y la x no tenía nada.			X			I						
3	M: Vale, y entonces aquí. Y: Y aquí puso un 1. M: Vale, ya lo entiendo. A ver, pasó el 2 para aquí y lo restó.	X						I					
4	M: Entonces el cero no vale.	X				I							
5	Y: Ah, vale, vale. Y entonces aquí, cuando es tres, lo pasó para aquí… Para resolverlo por la ecuación. Y halló los dos puntos. Pero espera, ¿por qué le dio eso 2 y esto 2 y te pone el 4?… Pero, ¿cómo llega llegó aquí? O sea, ¿para qué necesitaba lo anterior?	X						I					
6	M: No sé, yo creo que fue probando, diciendo, tiene dos puntos de corte, tiene dos puntos de corte… Y: Es que a mí esto me parece que lo hizo para hacerse una idea de algo, pero luego aquí es donde realmente está…	X			I								
7	Y: Pero no me explica cómo llegó a esta ecuación y a esta ecuación.	X							V				
8	M: No, esta dice que no Y: Vale, te dice que no. Bueno a esta y a esta. M: Esta tiene dos puntos de intersección, y=4x. Y: Porque le dio esto. Pero porque le vendría la inspiración divina puso 4x aquí y aquí esto. Entiendo, vamos... M: Sí.	X				I							
9	Y: Y luego lo que siempre hace de pasar el 4x para el otro lado, se le va, le queda esto y aquí le da dos puntos.	X						I					
10	Y: Es que no sé en qué se basó para coger y=4x. Y aquí más de lo mismo. Aquí puso esta ecuación, que no sé de dónde le vino la idea,	X				I							
11	Y: Igualó la recta con la parábola, despejó la x y se quedó tan ancho, ¿no? Pero, ¿este punto y este punto están en la parábola? Eso es lo que no se sabe.	X						I					
12	Y: Yo no sé cómo evaluar. No sé si poner está bien o está mal, o describir lo que la persona está haciendo. Pero es que a eso no le veo sentido, ¿no?												PROCESO DE EVALUACIÓN

		SOLUCIÓN A LA QUE SE REFIEREN			CATEGORÍAS								
					HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDIADOS	REPRESENTACIONES			SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
Nº episodios	TRANSCRIPCIÓN	Evaluada (Sofía)	Evaluadora (Maite)	Evaluadora (Yaiza)			Gráfica	Simbólica	Verbal				
13	M: Te está diciendo: esta recta no corta, esta recta no corta, esta recta no corta. O sea, todas las que van así, no cortan. Vale, genial. Y: No, pero él empieza en el y=2. Bueno, eso es lo que estamos entendiendo nosotras porque pone y=3, y=4 y ya está. Luego, esta no corta, porque cogió una recta cualquiera. En esta digo existen dos puntos, y en esta digo existen otros dos puntos y en esta, por ejemplo, digo pues no existe ningún punto. Está bien, en principio está bien.	X				I/V							
14	Y: A lo mejor el procedimiento que empleó es un poco al azar.	X			I								
15	Y: Pero la solución está bien. M: Hecho está.	X								V			
16	Y: Y no es que lo pusiera en plan porque le diera la gana, sino que… [...] El procedimiento parece coherente. Le vinieron sus ideas, lo fue haciendo. Utilizó el método de probar valores un poco. Escogió rectas y las comparó, hizo una intersección con la parábola.	X			V								
17	M: Es que dice evalúa Y: Ya y nosotras no estamos evaluando, estamos describiendo. No sé cómo evaluar.												PROCESO DE EVALUACIÓN
18	Y: Pero, bueno, si quieres nombrar que encontró un caso que no se cumplía	X				I							
19	Y: yo veo que el procedimiento es correcto	X			V								
20	Y: y la solución también.	X								V			
21	Y: Y por tanto, ¿tiene un 10?	X											CALIFICACIÓN
22	Y: ¿Hay que poner nota? M: No sé. ¿Preguntamos? Y: No sé. No te va decir, porque quieren ver lo que nosotros entendemos por evaluar, a lo mejor, o algo así. No sé, no sé si hay que ponerle nota o no.												PROCESO DE EVALUACIÓN
23	M: Bueno, pues que está aprobado.	X											CALIFICACIÓN
24	Y: Sí, está bien resuelto.	X								V			
25	Y: y es lo que se pedía.												ENUNCIADO
26	Y: La verdad que debería ir explicando los pasos que va haciendo. Porque hemos tenido que descifrar un poco por qué va haciendo ciertas cosas. Excepto esta parte que debe mejorar.	X							V				
27	Y: está aprobado												CALIFICACIÓN
	Nº EPISODIOS				4	5	1	5	2	3	0	0	7

ANEXO A.2.8: Transcripción Caso 8

					CATEGORÍAS								
	TRANSCRIPCIÓN	SOLUCIÓN EN LA QUE SE ESTÁN FIJANDO			HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDADOS	REPRESENTACIONES			SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
Nº de episodio		Evaluado (Manuel)	Evaluadora (Victoria)	Evaluadora (Yolanda)			Gráfica	Simbólica	Verbal				
1	Y: En primer lugar hace lo de las rectas paralelas al eje x.	X				E							
2	V: Sí. Hizo la derivada para calcular…	X						I					
3	Y: Sí, si hacemos la gráfica de la parábola, se calcula el vértice que sería el (-2,1) y [...]			X			E						
4	Y: [...] se puede ver que todas las rectas V: Con a mayor que 1 tendrían dos puntos de corte.	X								I			
5	V: Pero claro, luego hay que ver las que son oblicuas. Y para eso lo que hizo…	X				I							
6	Y: Analizando dos puntos cualquiera. Yo no sé lo que pone ahí.	X							I				
7	V: Primero estudia las rectas que pasan por el vértice y luego… Y: Me perdí…	X				I							
8	V: Todas las rectas así, todo el haz de rectas que pasan por este punto… Y: ¿Cortarían en dos? V: Cortarían en dos, salvo la y=1 que es totalmente… Y: Que cortaría en un punto. V: Claro, que solo corta en el vértice. Vale, y obviamente la x=2 porque también, porque justo es la tangente. Y: Sí, habría dos rectas que cortan en un punto que serían la del eje X y la del eje Y. V: Exacto, y luego todas las demás… Y: Y ya está, no puso la en general. La primera parte está bien razonada. Pero claro, por ejemplo, aquí puso lo del haz de rectas y no dijo, por ejemplo, ¿se puede calcular el haz de rectas? V: Pero yo no termino de entender lo del haz de rectas. Porque tú tienes la parábola así… Y: El haz de rectas serían todas las que pasan por el punto ese. V: Sí, con cualquier pendiente. Pero es que, la parábola no tiende a un círculo. Y: ¿Y qué? V: Una recta que esté muy muy pegada a x=-2. Que sea prácticamente recta, pero no recta del todo. Y: Sí, pero es que desde que cambie un poco, así por ejemplo y pase por aquí, vamos a hacerla superpequeñita, esta recta va a seguir y va seguir y va a tocarla. V: Vale, sí, y en algún punto superarriba la va a tocar. Y: Pero va a tocarla. El único que sabes que, como tú dices, que como no tiene una forma como una circunferencia, justo la que va vertical no va a tocarla. Pero la otra siempre se va cambar y se va seguir cambando y en algún momento va a llegar. Supongo. V: Sí, claro. Con una mínima inclinación, porque esto sigue y sigue y sigue… Y: Sí pero también se va alejando, ¿sabes? V: No, pero yo creo que sí. Esto va teniendo así y esto así. Y: Si la otra va a llegar a ser constante, bueno constante no, sino que va a tener menos inclinación, es decir, se va a acercar. V: Exacto. Y: Lo único que… Sí, lo del haz tiene sentido, pero esta persona… V: Sí, a ver, el haz de rectas no está calculado. Y: Sí, claro. Y lo que no entiendo es lo último. (Leen) Y: A ver, el argumento sí ayuda. Pero yo creo que tiene una fórmula el haz de rectas, a mí me suena, y con esa fórmula realmente sí tendría todas las rectas. V: Pero, claro, todas las rectas que pasan por este punto. Y: Y de todas formas, podemos hacer todas las rectas que pasan por este punto. Tú tienes la fórmula y pasa por aquí. V: y=ax+b y quieres que pase por el punto (-2,1). Entonces, esto quieres que sea igual a 1. Y: O sea, tendríamos una relación entre las variables. V: Sí, puede que sí.	X								I			

		SOLUCIÓN EN LA QUE SE ESTÁN FIJANDO			CATEGORÍAS								
	TRANSCRIPCIÓN				HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDADOS	REPRESENTACIONES			SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
Nº de episodio		Evaluado (Manuel)	Evaluadora (Victoria)	Evaluadora (Yolanda)			Gráfica	Simbólica	Verbal				
9	V: Pero luego si lo generalizas a todos los puntos de la parábola, por ejemplo, este. Y: ¿Como que si lo…? V: Porque esto es solamente el haz de rectas que pasa por el vértice. Y: Pero ya sabemos que van a tocar con la parábola. Ah tú dice encontrar otra… V: En plan, con los demás puntos, encontrar una manera genérica de ponerlo. Y: Pero si encontramos esta relación y la sustituimos en la… ¿no? V: Yo digo hacer el mismo razonamiento pero para otro punto genérico de la parábola. Entonces, si cogemos este punto hacia la izquierda del vértice. En este caso, la recta perpendicular que pasa por el punto, sí tocaría, entonces la única que no toca en la tangente. Entonces, el razonamiento sería exactamente igual a este haz de rectas, pero en lugar de quitar dos rectas… Y: Pero la tangente sería esta, pero hay otra recta que no toca, una que vaya así. V: Ah sí, para arriba. En plan, perpendicular al eje X y que pase por el punto. Claro, todas las rectas perpendiculares al eje X que pasen por el punto elegido… Y: No van a tocar… V: Y, además, las tangentes. Vale, vale, sí es el mismo razonamiento. Entonces sí se puede generalizar ese razonamiento para cualquier punto de la parábola. Y: (Coge un papel para escribir) V: Intenta ver… -2a+b Y: b=1+2a V: Vale. Entonces todas las rectas que tengan que la segunda parte… Y: O sea, que las rectas serían de la forma realmente… V: y=ax+1+2a y esto lo puedes poner… Y: Esto es lo mismo que y=... No, no, es mejor así V: Claro, porque así tienes la parte que depende de x y la que no depende de x. Entonces, por ejemplo, si cogemos la recta y=2x, entonces la segunda parte sería +2 por 2 4 más 5. Y esta recta, la parábola era, tenías esto, el mínimo era aquí en el (-2,1). Y esto iba así. Y entonces tú tienes la recta cuando x vale o, la y vale 5. Y: Pero eso solo daría una. Ah es un ejemplo, vale. V: Este punto, en la parábola, ¿dónde está la parábola? Cuando la x vale cero, la y vle 5, justo es el mismo punto. Y pasa por el… No Y: Sí, porque esta relación de esto, entonces tiene que pasar por el… V: Ah vale. Entonces sería algo así y, efectivamente, pasa por el (0,5) y el vértice.	X				I							
10	Y: Vale, entonces tendríamos que ver… Evalúa la resolución del problema. A ver, yo creo que está bien planteado y es una forma buena de verlo. V: Sí, porque es eso, el final lo generalizas de esta manera.	X			V								
11	V: Yo creo que, simplemente, le faltaría poner… Y: Calcular el haz de rectas o… V: Sí, o la relación esta que hemos llegado…	X								V			
12	V: Pero claro esto es para cada punto. Sabiendo que la recta es y=ax+b y quieres que pase… Y: Claro es que hay más rectas. Es lo que dices tú, que si lo haces en cualquier otro punto, también pasaría esto con el haz de rectas. V: Pero claro, si simplemente, al punto lo llamamos. Tú tienes la recta y=ax+b y llamamos un punto P=(x0,y0) y queremos el haz de rectas que pasen por aquí. Entonces, simplemente, sustituimos. Entonces te queda x0 por a + b = y0. Entonces esto lo puedes hacer para cualquier punto. Y entonces esto lo sustituyes por el punto que tú quieras. Pero luego… Es que estoy pensando si habría algún caso distinto de este. Y: Sí, tú quieres decir que aquí, estas todas lo cumplirían. Pero… V: Efectivamente. Sabemos que si cogemos cualquier punto de la parábola, tenemos el haz de rectas menos la recta… Y: No, no hay más, porque estos van a crear todas las rectas posibles así y en todos los puntos de la parábola, es decir, no puede haber otro punto que no pase por uno de ellos. V: Claro, porque tú haces esta recta y luego este punto va a generar la misma recta que este. Y: Exacto, siempre va a haber una que lo toque, porque si se intersecta tiene que tocar un punto y ese punto va a generar todas las rectas posibles.	X				I							

	TRANSCRIPCIÓN	SOLUCIÓN EN LA QUE SE ESTÁN FIJANDO			CATEGORÍAS								
					HEURÍSTICOS	CASOS ESTUDADOS	REPRESENTACIONES			SOLUCIONES	COMPROBACIÓN DE SOLUCIONES	ERRORES	OTROS
Nº de episodio		Evaluado (Manuel)	Evaluadora (Victoria)	Evaluadora (Yolanda)			Gráfica	Simbólica	Verbal				
13	Y: Bueno, ¿tú escribes? No entiendo qué hay que escribir. (Intentan preguntar) V: Supongo que es decir si está bien hecha o está mal hecha. Si está completa…												PROCESO DE EVALUACIÓN
14	V: Yo creo que está completo V: y que está bien razonado,	X											EVALUACIÓN GLOBAL
15	V: salvo la última parte que podríamos añadirle esto, lo de calcular el haz de rectas Y: Sí.	X								V			
16	V: El razonamiento es adecuado y lo ejecuta… Y: Más que lo ejecuta yo diría que está bien planteado.	X			V								
17	V: Calcula el caso más sencillo. Y: No, calcula realmente el caso que solo tiene un punto…	X								I			
18	Y: O sea, realmente calcula el vértice. V: Sí, pero ¿para qué? Para poder calcular…	X						I					
19	Y: Porque yo creo que fue igual que el mío, que lo que me planteé fue, vale, voy a dibujar la parábola			X	E								
20	Y: y luego, a ver,¿qué es lo más fácil? Pues todas las rectas que son paralelas al eje. Primero pensé eso y luego dije, vale, entonces ¿cómo lo tengo que hacer?			X		E							
21	Y: Espérate, espérate, vale. Entonces calculó el caso más sencillo y sería cuando las rectas son paralelas al eje X. (Escriben) Y: Aunque realmente este caso se puede ver también con el haz. V: Sí, claro, lo que como este es el más sencillo lo puedes ver así. Sí, porque desde que cojas este punto… Y: Sí, pero este punto es todos. V: Sí, pero por ejemplo, esta recta que es una de las paralelas. Y: Sí, pero me refiero, que realmente lo podría haber hecho directamente con el haz. V: Sí, porque está incluido. Es directamente hacer el haz, porque con el haz vas a incluirlas.	X								I			
	Nº EPISODIOS				3	6	1	2	1	6	0	0	2